

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID**

**ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR**



**Grado en Ingeniería en Tecnologías y Servicios de  
Telecomunicación**

**TRABAJO FIN DE GRADO**

**DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE  
TRANSFORMADORES DE IMPEDANCIA EN GUÍA DE  
ONDA RECTANGULAR MEDIANTE EL MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

**Andrés López Castillo**

**Tutor: Juan Córcoles Ortega**

**Ponente: Jorge Alfonso Ruiz Cruz**

**Julio 2015**



# **DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE TRANSFORMADORES DE IMPEDANCIA EN GUÍA DE ONDA RECTANGULAR MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**AUTOR: Andrés López Castillo**

**TUTOR: Juan Córcoles Ortega**

**Grupo de Radiofrecuencia: Circuitos, Antenas y Sistemas - RFCAS**

**Dpto. de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones**

**Escuela Politécnica Superior**

**Universidad Autónoma de Madrid**

**Julio de 2015**





# Resumen

Este Trabajo Fin de Grado consiste en el estudio del “método de los elementos finitos” para el análisis de transformadores en guía de onda rectangular. El objetivo es el de decidir qué combinación de parámetros del método es mejor para el estudio de transformadores en guía de onda rectangular. Para ello se partirá de un supuesto problema real donde se pide construir un transformador de impedancias entre dos guías de onda.

La primera parte será la creación de dicho transformador, en la que se seguirán todos los pasos del diseño. Partiendo de un modelo de elementos concentrados se crea un modelo de líneas de transmisión ideales a partir del cual se pueden obtener las dimensiones físicas de las guías de onda que van a componer el transformador.

Tras esto, se pasa al método de elementos finitos propiamente dicho. Para estudiar la respuesta del diseño es necesario generar un mallado de la pieza. Como los elementos finitos que se van a usar son tetraedros, el mallado tendrá que estar formado por tetraedros. Para hacer el estudio más variado, se compara la respuesta en dos mallados distintos. Sobre este mallado se aplican seis modelos de tetraedro distintos. La diferencia entre unos y otros va ser el número y posición de los puntos sobre los se harán los cálculos de campo. Son los llamados “grados de libertad”. Una vez obtenida ya la respuesta del transformador, se compara con la respuesta real. Como no hemos tenido posibilidad de construir la pieza, se considera real la simulación del software comercial CST.

Mediante la diferencia entre los parámetros de transmisión y reflexión de la guía, y la comparación de los recursos consumidos para analizarla, haremos un estudio sobre cuáles son las variables que permiten obtener la respuesta más aproximada a la realidad, eligiendo finalmente un mallado y un modelo concreto de tetraedro.

## Palabras clave

Ingeniería de telecomunicaciones, Radiofrecuencia, Microondas, Electromagnetismo, Guía de onda, Guía de onda rectangular, Diseño de transformador, Método de los elementos finitos.

# Abstract

This Bachelor Thesis consists in the study of the “finite element method” in the analysis of a rectangular waveguide transformer. The goal is to decide which combination of the parameters in the method is better for the study of a rectangular waveguide transformer. The beginning point will be an actual problem when it is requested a transformer between two different waveguides.

The first part will be the creation of the transformer. In this part, all the phases from the design process will be followed. Starting with a lumped elements model, a transmission line model will be created. From here, the physical dimensions of the waveguide are obtained.

After that, the finite element method starts. In order to study the designed piece, it is needed the generation of a mesh. The finite elements that we are going to use are tetrahedrons so the mesh has to be formed by tetrahedrons. Two different meshes and six different models of tetrahedrons are used in the study. The differences between them is going to be the number and position of the points where the field calculations are done. These points are called “degrees of freedom”. Once the simulation is done, it is compared with the actual response of the transformer. The response that is obtained from the comercial software CST will be considered the actual one as the physical construction of the component is not made.

Analyzing the difference between the transmission parameters of the waveguide and the comparison of the resources used, a conclusión will be made. A mesh and one of the six tetrahedrons will be chosen as they get a better approximation to the actual response of the transformer.

# Keywords

Telecommunication engineering, Radio frequency, Microwave, Electromagnetism, Waveguide, Rectangular waveguide, Transformer design, Rectangular waveguide transformer design, Finite Element Method.



## *Agradecimientos*

En primer lugar a mi profesor y tutor Juan Córcoles Ortega que me ha dado la oportunidad de realizar este trabajo y que ha tenido la paciencia de ayudarme y animarme a lo largo de todo el proyecto demostrando sus grandes dotes para la enseñanza.

Al grupo RFCAS que de una u otra forma, me han ayudado en todas las etapas de mi paso por la universidad, enseñándome y permitiéndome llegar hasta aquí.

A mis padres Juan Carlos y Vicky, y a mi hermano Enrique por todo el apoyo y los ánimos que he recibido durante esta etapa de mi vida.

A mis amigos, tanto burgaleses como de otros lugares, que me han ayudado y motivado.



# INDICE DE CONTENIDOS

1	Introducción.....	5
1.1	Objetivos.....	5
1.2	Estado del arte .....	5
1.3	Principios teóricos .....	6
1.3.1	Modos de propagación en un medio de transmisión .....	6
1.3.2	Las condiciones de contorno .....	9
1.3.3	La guía de onda rectangular .....	10
1.4	Metodología de investigación.....	15
2	Diseño del transformador .....	16
2.1	Prototipo de elementos concentrados .....	16
2.2	Modelo de impedancias .....	19
2.3	Construcción de la guía .....	21
2.4	Cálculo de dimensiones .....	23
3	El método de los elementos finitos.....	27
3.1	Tetraedros de Nedelec de tipo 1: <b><i>N1ie</i></b> .....	29
3.2	Tetraedros de Nedelec de tipo 2: <b><i>N2ie</i></b> .....	32
3.3	El análisis de tiempos .....	34
4	Análisis de resultados y conclusiones .....	36
5	Continuación de la investigación.....	39
	Referencias .....	41

## INDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – CORTE TRANSVERSAL DE UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR. FIGURA TOMADA DE [2] .....	10
FIGURA 2.1 – PROTOTIPO DE ELEMENTOS CONCENTRADOS PARA N=4 ELEMENTOS.....	16
FIGURA 2.2 – PROTOTIPO DE ELEMENTOS CONCENTRADOS PARA N=6 ELEMENTOS.....	21
FIGURA 2.3 – RESPUESTA DEL CIRCUITO DE LA FIGURA 2.2 .....	21
FIGURA 2.4 – DETALLE DEL RIZADO EN LA RESPUESTA DE LA FIGURA 2.3 .....	22
FIGURA 2.5 – PROTOTIPO DE ELEMENTOS CONCENTRADOS DESNORMALIZADO .....	22
FIGURA 2.6 – RESPUESTA DEL CIRCUITO DE LA FIGURA 2.5 .....	22
FIGURA 2.7 – ESQUEMA DE LOS ANCHOS DE BANDA FRENTE A LAS FRECUENCIAS DE CORTE.....	23
FIGURA 2.8 – TRANSFORMADOR EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN IDEALES .....	24
FIGURA 2.9 – RESPUESTA DEL CIRCUITO DE LA FIGURA 2.8 .....	24
FIGURA 2.10 – TRANSFORMADOR EN GUÍA DE ONDA RECTANGULAR .....	25
FIGURA 2.11 – RESPUESTA DEL TRANSFORMADOR QUE SE VE EN LA FIGURA 2.10.....	26
FIGURA 3.1 – FORMA DE PROPAGACIÓN DEL MODO $TE_{10}$ EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR ..	27
FIGURA 3.2 – EJEMPLO DE LA TRIANGULACIÓN DELAUNAY .....	28
FIGURA 3.3 – MALLADO FRONTAL DEL TRANSFORMADOR EN GUÍA DE ONDA RECTANGULAR .....	28
FIGURA 3.4 – EJEMPLOS DE TETRAEDROS QUE SE PUEDEN USAR COMO ELEMENTOS FINITOS. IMÁGENES TOMADAS DE [5] .....	29
FIGURA 3.5 – TETRAEDROS DE NEDELEC TIPO 1, DE ÓRDENES 1, 2 Y 3 RESPECTIVAMENTE .....	29
FIGURA 3.6 – MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{11}$ PARA EL MALLADO FRONTAL Y TETRAEDROS TIPO 1	30
FIGURA 3.7 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{21}$ PARA EL MALLADO FRONTAL Y TETRAEDROS TIPO 1	30
FIGURA 3.8 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{11}$ PARA EL MALLADO DELAUNAY Y TETRAEDROS TIPO 1 .....	31
FIGURA 3.9 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{21}$ PARA EL MALLADO DELAUNAY Y TETRAEDROS TIPO 1 .....	31
FIGURA 3.10 – TETRAEDROS DE NEDELEC TIPO 2, DE ÓRDENES 1, 2 Y 3 RESPECTIVAMENTE.....	32
FIGURA 3.11 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{11}$ PARA EL MALLADO FRONTAL Y TETRAEDROS TIPO 2 .....	32

FIGURA 3.12 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{21}$ PARA EL MALLADO FRONTAL Y TETRAEDROS TIPO 2 .....	33
FIGURA 3.13 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{11}$ PARA EL MALLADO DELAUNAY Y TETRAEDROS TIPO 2 .....	33
FIGURA 3.14 - MÓDULO DEL PARÁMETRO $S_{21}$ PARA EL MALLADO DELAUNAY Y TETRAEDROS TIPO 2 .....	34
FIGURA 4.1 – REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS ERRORES FRENTE A LOS GRADOS DE LIBERTAD PARA EL PARÁMETRO $S_{11}$ .....	37
FIGURA 4.2 – REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS ERRORES FRENTE A LOS GRADOS DE LIBERTAD PARA EL PARÁMETRO $S_{21}$ .....	37

## INDICE DE TABLAS

TABLA 1 – VALORES DE $G_1$ NORMALIZADOS PARA UN TRANSFORMADOR DE $N=2$ ELEMENTOS. TABLA EXTRAÍDA DE [7].....	18
TABLA 2 – RESUMEN DE TIEMPOS .....	35
TABLA 3 – RESUMEN DE LOS ERRORES CUADRÁTICOS .....	36



# 1 Introducción

---

## 1.1 Objetivos

El objetivo de este trabajo consiste en el estudio del método de los elementos finitos y su utilidad para el diseño de transformadores en guía de onda rectangular. Los resultados del método dependen de los llamados grados de libertad que se corresponden con los puntos donde se harán los cálculos que permitan calcular la respuesta. La forma de variar el número de grados de libertad consiste en cambiar el mallado del transformador, el tipo y el orden de los tetraedros. Variando estos parámetros, se obtendrán 12 respuestas distintas para la misma estructura física.

A partir del análisis comparativo de los resultados anteriores con la respuesta real, que se considera que es la que da un software comercial como el CST, se verá cuál de las simulaciones se aproxima más a la realidad, para finalmente decidir cuáles son los parámetros óptimos para calcular la respuesta de un transformador de guía de onda rectangular.

## 1.2 Estado del arte

En cuanto al método de los elementos finitos hay que mencionar el Proyecto FEniCS<sup>1</sup>. Consiste en un conjunto de investigadores y desarrolladores que se dedican al desarrollo de herramientas y aplicaciones innovadoras para la computación científica. Están particularmente centrados en soluciones automatizadas para ecuaciones diferenciales mediante métodos de elementos finitos. En 2009 publicaron un libro titulado Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. El libro está basado en tres partes: la creación del programa de elementos finitos, la implementación del software de FEniCS y finalmente presenta las aplicaciones que puede tener la herramienta que han creado: estudio del flujo de fluidos, de mecánica sólida, electromagnetismo y geofísica.

Es en este punto donde nuestro estudio va un poco más allá. Dentro del amplio campo del electromagnetismo, vamos a centrarnos en la guía de onda rectangular, estableciendo cuáles son las mejores opciones para el estudio del transformador.

---

<sup>1</sup> Información extraída de [4]

## 1.3 Principios teóricos<sup>2</sup>

### 1.3.1 Modos de propagación en un medio de transmisión

Una onda se propaga a través de un medio de transmisión mediante modos de propagación. Para entender el concepto de modos hay que partir de la noción de que los campos que existen en el espacio y por tanto los que se propagan tienen una componente longitudinal y una componente transversal. Suponiendo que la onda se va a propagar según la dirección  $\hat{z}$  podemos separar las componentes de campo tal y como vemos en la ecuación 1.1 de campo eléctrico y magnético respectivamente,

$$\begin{aligned}\vec{E} &\equiv \vec{E}_t + \vec{E}_z \hat{z} \\ \vec{H} &\equiv \vec{H}_t + \vec{H}_z \hat{z}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Dependiendo de qué tipo de modo sea los podemos dividir en cuatro grupos:

- Modo TEM: Se da en medios de transmisión donde la estructura tiene al menos dos conductores. En este modo las componentes longitudinales son 0, es decir:

$$\vec{E}_z = 0 \quad \vec{H}_z = 0\tag{1.2}$$

- Modo TE: Se da cuando únicamente la componente longitudinal del campo eléctrico es nula:

$$\vec{E}_z = 0 \quad \vec{H}_z \neq 0\tag{1.3}$$

- Modo TM: Es el caso contrario al anterior, la componente longitudinal magnética nula:

$$\vec{E}_z \neq 0 \quad \vec{H}_z = 0\tag{1.4}$$

- Modos híbridos: En los que ninguna de las dos componentes son nulas.

Una vez vistos los modos de propagación vamos a ver cómo se consiguen. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell para un medio sin fuentes, isótropo, homogéneo y con dispersión temporal.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) &= -j\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega) & \vec{D}(\vec{r}, \omega) &= \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) & \vec{J}(\vec{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) &= \vec{J}(\vec{r}, \omega) + j\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega) & \vec{B}(\vec{r}, \omega) &= \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega)\end{aligned}\tag{1.5}$$

De donde podemos simplificar:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -j\omega \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = j\omega \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)\tag{1.6}$$

---

<sup>2</sup> Basados principalmente en [1] y [2]

Además sabemos que dadas las características del medio (sin fuentes, isótropo, homogéneo y con dispersión temporal)<sup>3</sup>:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{1.7}$$

Si aplicamos el rotacional a la ecuación 1.6 llegamos a:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} = -j\omega\mu j\omega\varepsilon\vec{E} = -\gamma_0^2\vec{E} \tag{1.8}$$

Donde  $\gamma_0^2 = -\omega^2\mu\varepsilon$

Se define el operador Laplaciano vectorial como:  $\Delta\vec{E} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{E})$  y teniendo en cuenta la ecuación 1.7 nos queda que:  $\Delta\vec{E} \equiv -\nabla \times (\nabla \times \vec{E})$

Teniendo en cuenta la ecuación 1.8 obtenemos las llamadas Ecuaciones de Helmholtz 3D. La segunda sale de hacer el mismo planteamiento pero con el campo magnético.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{E} - \gamma_0^2\vec{E} &= 0 \\ \Delta\vec{H} - \gamma_0^2\vec{H} &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Aplicando lo visto en la ecuación 1.1, podemos expresar el campo eléctrico como:

$$\Delta\vec{E}_t + \Delta(E_z\hat{z}) - \gamma_0^2\vec{E}_t - \gamma_0^2E_z\hat{z} = 0 \tag{1.10}$$

Y mediante una serie de relaciones matemáticas llegamos a:

$$\Delta\vec{E}_t + \frac{\delta^2 E_z}{\delta z^2} - \gamma_0^2\vec{E}_z = 0 \tag{1.11}$$

Para sistemas con simetría de traslación podemos resolver el sistema mediante el método de separación de variables:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{E}_t + \frac{\delta^2 E_z}{\delta z^2} - \gamma_0^2\vec{E}_z &= 0 \\ E_z &= F_E(u_1, u_2)G(z) \end{aligned} \tag{1.12}$$

---

<sup>3</sup> Se simplificará la notación omitiendo la dependencia con la frecuencia, y la de la posición, hasta que su uso no sea estrictamente necesario.

De forma que finalmente llegamos a:

$$\frac{G''(z)}{G(z)} + \frac{\Delta_t F_E(u_1, u_2)}{F_E(u_1, u_2)} - \gamma_0^2 = 0$$

**1.13**

En la ecuación 1.13 podemos observar que hay tres términos diferenciados:

- El primer término, que no depende de las variables  $u_1, u_2$ , sólo depende de  $z$
- El segundo término que únicamente depende de  $u_1, u_2$
- El tercer término que no depende de ninguna de las tres variables anteriores.

Podemos escribir la ecuación 1.13 como  $\gamma^2 - k_c^2 - \gamma_0^2 = 0$  es decir, tenemos las siguientes relaciones:

Con el primer término obtenemos:

$$G''(z) - \gamma^2 G(z) \Rightarrow G(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{-\gamma z}$$

**1.14**

Con el segundo término:

$$\frac{\Delta_t F_E(u_1, u_2)}{F_E(u_1, u_2)} = -k_c^2 \Rightarrow \boxed{\Delta_t F_E(u_1, u_2) + k_c^2 F_E(u_1, u_2) = 0}$$

**1.15**

Donde vemos que sólo intervienen derivadas en las coordenadas transversales.

Del método de separación de variables extraemos también que:

$$\begin{cases} E_z = F_E(u_1, u_2)e^{-\gamma z} \\ \gamma^2 = k_c^2 + \gamma_0^2 = k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon \end{cases}$$

**1.16**

Por el mismo proceso llegamos también a la Ecuación de Helmholtz para ondas tipo TE y sus respectivos resultados.

$$\Delta_t F_H(u_1, u_2) + k_c^2 F_H(u_1, u_2) = 0$$

**1.17**

$$\begin{cases} H_z = F_H(u_1, u_2)e^{-\gamma z} \\ \gamma^2 = k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon \end{cases}$$

**1.18**



### 1.3.2 Las condiciones de contorno

Para hallar la solución de las ecuaciones 1.15 y 1.17, hace falta imponer las condiciones de contorno del problema para  $F_E$  y  $F_H$ , que se obtendrán de las condiciones de contorno del campo EM en un interfaz.

Dados dos medios, separados por una superficie  $S$  y tomando el vector  $\hat{n}_{12}$  como vector perpendicular a la superficie  $S$ . Las condiciones de contorno quedan:

$$\begin{aligned}\hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_S &= 0 & \hat{n}_{12} \times (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_S &= \rho_s \\ \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_S &= \vec{J}_S & \hat{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)|_S &= 0\end{aligned}$$

1.19

En medios de transmisión cerrados y homogéneos no hay cambio de dieléctrico. Por tanto, las condiciones de contorno se reducen a las condiciones de campo eléctrico tangencial nulo sobre los contornos del conductor perfecto ( $C_\sigma$ ):

$$\hat{n}_{12} \times \vec{E}|_{C_\sigma} = 0$$

1.20

Lo que significa que para soluciones TM:  $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z \hat{z}$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z \hat{z})|_{C_\sigma} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_t|_{C_\sigma} = 0 \\ \hat{n} \times \vec{E}_z \hat{z}|_{C_\sigma} = 0 \end{cases}$$

1.21

Y en soluciones TE:  $\vec{E} = \vec{E}_t$

$$\hat{n} \times \vec{E}_t|_{C_\sigma} = 0$$

1.22

A la hora de calcular las condiciones para soluciones TM, partimos de las ecuaciones 1.16 y 1.21. Llegamos a la condición final sobre la función  $F_E$ :

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_z \hat{z}|_{C_\sigma} = 0 \quad \forall z \\ E_z = F_E(u_1, u_2) e^{-\gamma z} \end{cases} \Rightarrow \hat{n} \times F_E(u_1, u_2) e^{-\gamma z} \hat{z}|_{C_\sigma} = 0 \Rightarrow \boxed{F_E(u_1, u_2)|_{C_\sigma} = 0}$$

1.23

Siendo  $F_E$  la solución de la ecuación 1.15.

De igual forma para soluciones TE

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_t|_{C_\sigma} = 0 \quad \forall z \\ H_z = F_H(u_1, u_2) e^{-\gamma z} \\ \vec{E}_t = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \nabla_t H_z \times \hat{z} \end{cases} \Rightarrow \hat{n} \times (\nabla_t F_H \times \hat{z})|_{C_\sigma} = 0$$

1.24

Donde aplicando la regla del producto vectorial doble:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$  y sabiendo que  $\hat{n} \cdot \hat{z} = 0$  llegamos a:

$$\hat{n} \times (\nabla_t F_H \times \hat{z}) = -(\hat{n} \cdot \nabla_t F_H)\hat{z}$$

1.25

Por tanto se tiene que cumplir que:

$$\hat{n} \cdot \nabla_t F_H|_{C_\sigma} \equiv \left. \frac{\delta F_H(u_1, u_2)}{\delta n} \right|_{C_\sigma} = 0$$

1.26

Siendo  $F_H$  solución de la ecuación 1.17

### 1.3.3 La guía de onda rectangular

Una guía de onda es cualquier estructura física que es capaz de guiar ondas electromagnéticas. Se compone de un dieléctrico y de un conductor. Mediante la unión de ambos podemos conseguir que dicha onda electromagnética se propague siguiendo una dirección determinada. En nuestro caso, hemos utilizado una guía de onda rectangular. Esto significa que la cavidad dieléctrica por la que vamos a dirigir la onda, tiene forma rectangular. La Figura 1.1 muestra un corte transversal de una guía de onda rectangular. Podemos distinguir las formas de las que hablábamos, tanto del dieléctrico que se corresponde con el color azul claro, como la del conductor que se representa en dorado. Las dimensiones que van a definir nuestra guía de onda y los fenómenos que ocurren en ella son la altura ( $b$ ) y la anchura ( $a$ ) y la longitud ( $l$ ).

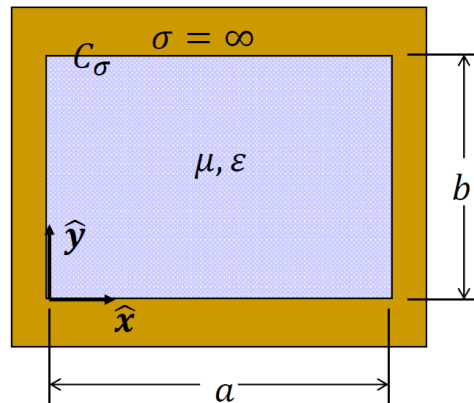


Figura 1.1 – Corte transversal de una guía de onda rectangular. Figura tomada de [2]

Partiendo de lo visto antes, vamos a estudiar los modos que pueden darse en este tipo de línea de transmisión. De la ecuación 1.27 podemos decir que nuestro diseño tiene infinitos modos TE, de la ecuación 1.28, que tiene infinitos modos TM y de la ecuación 1.29, que no tiene ningún modo TEM, como era de esperar ya que sólo hay un material conductor.

$$\begin{cases} \Delta_t F_H + k_c^2 F_H = 0 \\ \left. \frac{\delta F_H}{\delta n} \right|_{C_\sigma} = 0 \end{cases} \quad 1.27$$

$$\begin{cases} \Delta_t F_E + k_c^2 F_E = 0 \\ F_E|_{C_\sigma} = 0 \end{cases} \quad 1.28$$

$$\begin{cases} \Delta_t \Phi = 0 \\ \Phi|_{C_\sigma} = V \end{cases} \quad 1.29$$

Para continuar con los cálculos tendremos que aplicar las condiciones de contorno. Colocando el eje de coordenadas tal y como se ve en la Figura 1.1, una posible declaración de condiciones de contorno sería:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad 0 \leq y \leq b \\ x = a & \quad 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq x \leq a & \quad y = 0 \\ 0 \leq x \leq a & \quad y = b \end{aligned} \quad 1.30$$

Aunque hay más declaraciones posibles del contorno, la gran ventaja que posee esta forma es que permite el uso del método de separación de variables, que nos será de gran ayuda más adelante.

Por tanto, si aplicamos las condiciones de contorno, sobre la primera de las ecuaciones 1.27 o 1.28 nos queda la ecuación 1.31:

$$\Delta_t F + k_c^2 \cdot F = 0 \Rightarrow \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} + k_c^2 \cdot F = 0 \quad 1.31$$

Que mediante la separación de variables dada por la ecuación 1.32 nos queda la ecuación 1.33:

$$F(u_1, u_2) = F(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad 1.32$$

$$\frac{\delta^2(XY)}{\delta x^2} + \frac{\delta^2(XY)}{\delta y^2} + k_c^2 \cdot XY = 0 \quad 1.33$$

Donde una vez hecha la derivada, y simplificando, nos va a quedar cada término dependiente de una sola variable y no de las dos a la vez. Si consideramos  $X''$  y  $Y''$  como la derivada segunda de cada una de las dos funciones de la ecuación 1.32 podemos reescribir la ecuación 1.33 como sigue

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = -k_x^2 - k_y^2 + k_c^2 = 0$$

**1.34**

A partir de las cuales establecemos las tres ecuaciones principales para la guía de onda que nos ocupa:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -k_x^2 \Rightarrow X(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x \\ \frac{Y''}{Y} = k_y^2 \Rightarrow Y(y) = C \sin k_y y + D \cos k_y y \\ k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \end{cases}$$

**1.35**

Aplicamos ahora las condiciones para un modo TM:

$$F_E(x, y) = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) \cdot (C \sin k_y y + D \cos k_y y)$$

**1.36**

$$F_E \Big|_{\substack{x=0 \\ 0 \leq y \leq b}} = 0 \Rightarrow B = 0$$

**1.37**

$$F_E \Big|_{\substack{x=a \\ 0 \leq y \leq b}} = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

**1.38**

$$F_E \Big|_{\substack{0 \leq x \leq a \\ y=0}} = 0 \Rightarrow D = 0$$

**1.39**

$$F_E \Big|_{\substack{0 \leq x \leq a \\ y=b}} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**1.40**

Por lo que podemos expresar las ecuaciones del modo TM en guía de onda rectangular:

$$F_E(x, y) = Q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad 1.41$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad 1.42$$

$$E_z(x, y) = Q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \quad 1.43$$

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad 1.44$$

También aplicamos las condiciones de contorno para modos TE:

$$F_H(x, y) = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) \cdot (C \sin k_y y + D \cos k_y y) \quad 1.45$$

$$\left. \frac{\delta F_H}{\delta n} \right|_{\substack{x=0 \\ 0 \leq y \leq b}} = 0 \Rightarrow A = 0 \quad 1.46$$

$$\left. \frac{\delta F_H}{\delta n} \right|_{\substack{x=a \\ 0 \leq y \leq b}} = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad 1.47$$

$$\left. \frac{\delta F_H}{\delta n} \right|_{\substack{0 \leq x \leq a \\ y=0}} = 0 \Rightarrow C = 0 \quad 1.48$$

$$\left. \frac{\delta F_H}{\delta n} \right|_{\substack{0 \leq x \leq a \\ y=b}} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 1.49$$

Para llegar finalmente a:

$$F_H(x, y) = P \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad 1.50$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \forall m, n \in (\mathbb{N} > 0) \quad 1.51$$

$$H_z(x, y) = P \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \quad 1.52$$

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 \mu \epsilon + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad 1.53$$

Con estos datos podemos calcular ya las frecuencias de corte de los distintos modos que se pueden presentar en la guía. La frecuencia de corte la obtenemos a partir de la ecuación 1.44 que es la misma que la ecuación 1.53. Sabiendo que la frecuencia de corte se corresponde con el valor de  $\gamma = 0$  nos queda:

$$f_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 1.54$$

Y por lo tanto descubrimos que el primer modo fundamental es el modo  $TE_{10}$  que se corresponde con una frecuencia de corte teórica de:

$$f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad 1.55$$

Como vamos a trabajar en el ancho de banda monomodo debemos tener en cuenta también la primera frecuencia de orden superior que se corresponderá con el  $TE_{01}$  o el  $TE_{20}$ . Las frecuencias de corte de estos dos modos son las que van a limitar el ancho de banda monomodo.

## 1.4 Metodología de investigación

Nuestro punto de partida será el diseño de un transformador en guía de onda rectangular dadas las guías de entrada y salida que hay que adaptar. Para empezar, tenemos que diseñar una línea de transmisión. Partiremos de un modelo de elementos concentrados. Este prototipo va a estar basado, como se vio en los principios teóricos, en una serie de condensadores y bobinas que siguen el modelo de alta/baja impedancia. Colocados alternando bobina en serie con condensador en paralelo conseguiremos un circuito que se corresponde directamente con una construcción con líneas de transmisión.

Para calcular los valores de estos elementos nos valdremos de los valores de  $g_i$  que como hemos visto en la introducción, están ya tabulados. Habrá que seleccionar en primer lugar tres parámetros:  $r$  (ratio de impedancias entre las dos guías a adaptar),  $n$  (número de elementos), y  $\omega$  (ancho de banda fraccional). Una vez definidos, sólo queda mirar en las tablas y aplicar las relaciones correspondientes.

Una vez la red diseñada adapta correctamente las dos impedancias, el segundo paso consiste en el diseño de las líneas de transmisión ideales. Las dos magnitudes que las definen son la impedancia característica ( $Z_0$ ) y la longitud eléctrica ( $\theta$ ). Nuestro modelo se basa en impedancias de alto ( $Z_H$ ) y bajo ( $Z_L$ ) valor, por lo que las impedancias características de cada línea vendrán definidas por las posibilidades que tenemos sobre un posible diseño real, es decir, los valores de impedancias altas y bajas tendrán que tener sentido físico, no podemos escoger cualquier valor. Elegidas estas impedancias, crearemos una herramienta software que permita calcular el valor de las longitudes eléctricas de forma que las líneas de transmisión queden completamente definidas.

El último paso consiste en el paso de línea de transmisión ideal a guía de onda rectangular. Tendremos que transformar las magnitudes que tiene la guía de transmisión ideal a las reales de una guía de onda rectangular (ancho, alto y longitud). El ancho y el alto van a depender de la impedancia característica que tenga cada tramo de línea. Dependiendo del modelo de impedancias que se elija, se corresponderá con una u otra, o con las dos. La longitud física va a depender de la longitud eléctrica. Siendo  $\theta = \beta \cdot l$ , la longitud real la calcularemos a partir del valor  $\beta$  de la guía. Dicho valor  $\beta$  se puede calcular como el valor del coeficiente de transmisión  $\gamma$  cuando existe propagación por la guía. Es decir,  $\alpha = 0$  en frecuencias superiores a la frecuencia de corte del modo.

Ahora llegamos al análisis del método propiamente dicho. Partiremos de la guía de onda diseñada ya. Sobre este diseño se generará un mallado con tetraedros. En python, utilizaremos un programa que aplique el método de los *Elementos finitos* para calcular el valor de los parámetros de transmisión en cada frecuencia. Tendremos varias variables que podremos modificar, el mallado, el orden y el tipo de tetraedro que se aplicará en la simulación. Conseguiremos 6 casos distintos variando el tetraedro, que ampliaremos a 12 mediante el uso de un segundo mallado. Compararemos después la respuesta que obtenemos en cada uno de los casos.

Tomando la respuesta que da CST como “respuesta real”, vamos a comprobar cuál de las 12 simulaciones se aproxima más a la realidad. Para ello, calcularemos las diferencias que existen en los parámetros S. Sin embargo, esto sólo no es suficiente como para concluir qué caso es mejor o más conveniente. Realizaremos también un estudio de los tiempos que se tarda en calcular los resultados, y teniendo en cuenta esto y la proximidad a la realidad, decidiremos cuál es mejor

## 2 Diseño del transformador

Partiremos de una situación real en la que se nos pide transformar una guía de onda WR90 ( $22.86 \times 10.16$  mm) a otra guía de  $22.86 \times 15.24$  mm a una frecuencia de 7.5 GHz. Para ello tenemos libertad sobre la longitud y la forma del transformador.

Nos fijamos que el ancho de la guía de entrada es igual al de la guía de salida. Este hecho permite el diseño del transformador utilizando siempre el mismo ancho y dejando como variables del diseño la altura y la longitud.

### 2.1 Prototipo de elementos concentrados

Comenzamos por la creación de un transformador mediante elementos concentrados. Para obtener los valores que permitan obtener la respuesta deseada se puede hacer uso de las funciones de Chebyshev [1]. Dado que vamos a partir de este tipo de funciones, obtendremos cierto rizado en la banda de paso.

De forma similar al diseño de filtros, tendremos que decidir una serie de características para nuestro circuito, como es el número de elementos, la frecuencia central, frecuencia de corte o el valor del rizado. Una vez decidido esto, podemos despejar los valores de  $g_i$  que se corresponden con el prototipo de circuito de la Figura 2.1. Es similar al de un filtro paso bajo convencional, en el sentido en el que alternamos bobinas en serie con condensadores en paralelo con la idea de transformarlos en líneas de transmisión de alta o baja impedancia respectivamente. Sin embargo existe una gran diferencia entre esta estructura de filtro y la que nos interesa. En un transformador la impedancia de entrada es distinta de la impedancia de salida con todo lo que esto conlleva.

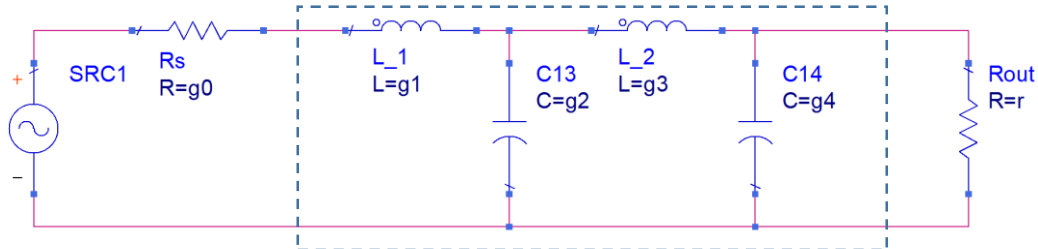


Figura 2.1 – Prototipo de elementos concentrados para  $n=4$  elementos

Sin embargo, no es necesario hacer todas las operaciones cada vez que construimos este tipo de circuito. Si normalizamos todos los valores al valor de la impedancia de entrada, obtendríamos que  $g_0 = 1$  y que  $r = Z_{out}/Z_{in}$ . En este caso, los valores de las  $g_i$  los podemos encontrar en tablas. Una vez decididos los valores de las  $g$  desnormalizaríamos, para así obtener el circuito de elementos concentrados con las impedancias deseadas.

Los parámetros que son importantes para crear el prototipo de circuito van a ser el ratio de transformación ( $r$ ), el ancho de banda fraccional ( $\omega$ ) y el máximo valor admisible de atenuación. El siguiente paso será determinar el número de elementos de los que se va a componer nuestro transformador.



El valor  $r$ , ratio de transformación vendrá dado por la ecuación 2.1 siendo  $Z_{in}$  y  $Z_{out}$  las impedancias de entrada y salida respectivamente.

$$r = \frac{Z_{in}}{Z_{out}}$$

2.1

El ancho de banda fraccional vendrá dado por:

$$\omega = \frac{2(f_b - f_a)}{f_b + f_a}$$

2.2

Siendo  $f_a$  y  $f_b$  las dos frecuencias que forman el ancho de banda deseado.

Así mismo una vez hayamos decidido todos los valores que definirán el prototipo de transformador, podemos extraer de las tablas los valores de los elementos normalizados. Sin embargo, en este caso, al contrario que ocurre en los filtros, estos valores no son simétricos como en el caso de los filtros. Se trata de “redes antimétricas”. Esto quiere decir que la mitad de la red es la inversa de la otra mitad, por lo tanto sólo la mitad de los valores están tabulados.

Dependiendo del número de elementos que tenga el filtro, el resto de valores se obtendrán de una forma concreta. Por ejemplo en el caso  $n = 6$  y teniendo en cuenta que el terminal de entrada tendrá valor  $g_0 = 1$ , de las gráficas podemos extraer los valores de  $g_1, g_2, g_3$ . El resto de valores se obtienen de la siguiente forma:

$$g_4 = \frac{g_3}{r} \quad g_5 = g_2 \cdot r \quad g_6 = \frac{g_1}{r}$$

2.3

Siendo  $g_7 = r$  de manera que se cumpla la ecuación 2.1.

Hay otro factor a tener en cuenta al hacer esta red de elementos concentrados. En el caso de los filtros, al tener la misma impedancia de entrada y de salida, no había ninguna diferencia en cuanto a qué elemento concentrado se corresponda con qué valor de la  $g$ . Es decir, daba igual construir la red comenzando por bobina en serie que por condensador en paralelo. En el caso de los transformadores esto no se cumple. Dependiendo de a qué queramos adaptar hay que empezar por bobina o por condensador.

Si nos fijamos en las tablas presentes en [7], como por ejemplo la Tabla 1 de este documento, los valores de  $r$  son todos mayores que 1. Entonces, cómo transformamos si la impedancia de entrada es mayor que la de salida ( $r < 1$ ). En un caso real vamos a conocer la relación de impedancias  $r$ . Vamos a encontrarnos con dos posibilidades.

- Si  $r > 1$  entonces el primer elemento de nuestro prototipo va a ser una bobina en serie.
- Si  $r < 1$  el primer elemento debe ser un condensador en paralelo.

Para buscar en las tablas los valores de las  $g$  para el segundo caso, el ratio que hay que buscar es  $r' = 1/r$ .

ELEMENT VALUE  $g_1$  vs.  $w$  and  $r$  for  $n = 2$ 

$r$	$w$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0
1.5		.706219	.703597	.699283	.693375	.677285	.656532	.632455
2.0		.998752	.995037	.988936	.980581	.957826	.928477	.894427
2.5		1.22321	1.21867	1.21119	1.20096	1.17309	1.13715	1.09545
3.0		1.41245	1.40720	1.39857	1.38675	1.35457	1.31306	1.26491
4.0		1.72989	1.72345	1.71289	1.69842	1.65900	1.60817	1.54919
5.0		1.99750	1.99007	1.97787	1.96116	1.91565	1.85695	1.78885
6.0		2.23328	2.22497	2.21133	2.19265	2.14176	2.07614	2.00000
8.0		2.64245	2.63262	2.61648	2.59437	2.53417	2.45652	2.36643
10.0		2.99626	2.98511	2.96681	2.94174	2.87348	2.78543	2.68328
15.0		3.73699	3.72309	3.70026	3.66900	3.58386	3.47404	3.34664
20.0		4.35346	4.33727	4.31067	4.27425	4.17507	4.04714	3.89872
25.0		4.89287	4.87467	4.84478	4.80384	4.69237	4.54859	4.38178
30.0		5.37845	5.35844	5.32559	5.28059	5.15805	5.00000	4.81664
40.0		6.23721	6.21400	6.17590	6.12372	5.98162	5.79833	5.58570
50.0		6.99127	6.96526	6.92255	6.86406	6.70478	6.49934	6.26099

**Tabla 1 – Valores de  $g_1$  normalizados para un transformador de  $n=2$  elementos. Tabla extraída de [7]**

Una vez tenemos construido el prototipo debemos desnormalizarlo. La forma de hacerlo es como la de un filtro paso-bajo. Ya que en cierta forma, estamos creando dos filtros paso-bajo.

Consideramos  $R$  el valor deseado para una de las terminaciones y  $R'$  el correspondiente valor de la resistencia normalizada. Conocemos también el valor  $\omega_m$ , correspondiente a la frecuencia central de la banda de operación, y  $\omega'_m = 1$  el valor de frecuencia del diseño normalizado. Los valores se escalan como se puede ver en las ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6 dependiendo del elemento que sea:

$$R_k = R_k' \cdot \left(\frac{R}{R'}\right) \quad 2.4$$

$$C_k = C_k' \cdot \left(\frac{\omega_m'}{\omega_m}\right) \cdot \left(\frac{R'}{R}\right) \quad 2.5$$

$$L_k = L_k' \cdot \left(\frac{\omega_m'}{\omega_m}\right) \cdot \left(\frac{R}{R'}\right) \quad 2.6$$

Siendo  $R'_k, L'_k, C'_k$  los valores de los elementos del prototipo normalizado y  $R_k, L_k, C_k$  los valores escalados del nuevo diseño<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Procedimientos basados en [1] y [7]

## 2.2 Modelo de impedancias

En nuestro diseño, nos va a interesar que la frecuencia de trabajo esté contenida dentro del ancho de banda monomodo de la guía. Ya hemos visto que en dicha banda, la onda que se propaga es de tipo TE. También sabemos que la impedancia de una onda TE que se propaga vendrá dada por la expresión:

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

2.7

Sin embargo, nosotros en ese caso tenemos un problema, ya que el modo fundamental en una guía rectangular es el  $TE_{10}$  va a provocar que el valor de  $\gamma$  sea:

$$\gamma_{TE_{10}} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

2.8

Con  $\alpha = 0$  porque la onda se propaga y consideramos la guía ideal.

Es decir, visto así, la impedancia sólo depende del ancho. En nuestro punto de partida nos dan dos guías de onda cuyos anchos son iguales, variando únicamente la altura. La ecuación 2.8 no quiere decir que tengan la misma impedancia aun teniendo distintas dimensiones. Lo que ocurre es que el análisis del problema con ese modelo de impedancia no es el correcto en este caso.

Vamos a buscar otra relación entre impedancias y dimensiones físicas de la guía. Siguiendo el sistema de coordenadas que veíamos en la Figura 1.1 tomamos de partida el campo eléctrico que se propaga en el ancho de banda monomodo:

$$\vec{E}_{TE_{10}} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = P \cdot \left\{ \frac{-j\omega\mu a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right\} \cdot e^{-\gamma z} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

2.9

A partir de esto, podemos calcular la tensión que hay en un punto determinado de la guía. Elegimos que ese punto esté situado en el centro de la guía, es decir, en  $x = a/2$  donde el valor del campo será máximo y  $z = 0$ .

$$V|_{x=a/2} = - \int_0^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^b \vec{E}_y \cdot \hat{y} \cdot dy \cdot \hat{y} = \int_0^b \vec{E}_y \cdot dy = P \cdot \frac{-j\omega\mu a}{\pi} \cdot b$$

2.10

Sabiendo que la potencia transmitida siempre es:

$$P_{tx} = \frac{1}{2} \cdot I_0^* \cdot V_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V_0|^2}{Z_0} \Rightarrow Z_0 = \frac{|V_0|^2}{2 \cdot P_{tx}}$$

2.11

Calculamos ahora la potencia transmitida por el modo  $TE_{10}$  siendo los límites de superficie que integraremos entre  $[0; a]$  en  $x$  y  $[0; b]$  en  $y$ :

$$P_{tx} = \frac{1}{2} \cdot \Re \left\{ \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} \right\}$$

2.12

Las componentes de campo magnético para este modo son:

$$\vec{H} = \begin{cases} H_x = P \cdot \left\{ \frac{\gamma a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right\} \cdot e^{-\gamma z} \\ H_y = 0 \\ H_z = P \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-\gamma z} \end{cases}$$

2.13

Operando para calcular la expresión de la potencia nos queda:

$$P_{tx_{TE10}} = \frac{a^3 \cdot |P|^2}{4\pi^2} \omega \mu \beta_{TE10} \cdot b$$

2.14

Por lo tanto podemos escribir:

$$Z_0 = \frac{|P|^2 \cdot \left(\frac{\omega \mu a}{\pi}\right)^2 \cdot b^2}{2 \frac{a^3 \cdot |P|^2}{4\pi^2} \omega \mu \beta_{TE10} \cdot b} = \frac{2\omega \mu}{a \cdot \beta_{TE10}} \cdot b$$

2.15

Como hemos visto en la ecuación 2.8, la  $\beta_{TE10}$  sólo depende de la dimensión  $a$ . Esto va a permitir reescribir la expresión como:

$$Z_0 = K \cdot b$$

2.16

Siendo  $K$  una variable que depende del valor de  $\omega$  y  $a$ .

Es decir, multiplicando el valor de la altura por un valor que elijamos nosotros podremos modelar la guía de onda con los valores de impedancias.

En nuestro caso vamos a hacer que  $K = 10[\Omega/mm]$  con esas unidades para mantener la igualdad.

## 2.3 Construcción de la guía

Una vez sabemos cuáles son las impedancias entre las que tenemos que adaptar vamos a crear el modelo de elementos concentrados tal y como hemos dicho en la introducción. Por lo tanto tendremos que elegir unos valores de las  $g$ 's que cumplan dichas condiciones con un cierto margen ya que sabemos que al aproximarnos al modelo real de líneas de transmisión, la respuesta va a ir empeorando.

En primer lugar el parámetro  $r$  lo calculamos como la relación de impedancias entre las alturas de la guía de entrada y salida:

$$r = \frac{K \cdot b_{out}}{K \cdot b_{in}} = \frac{152.4}{101.6} = 1.5$$

2.17

Elegimos un rizado en la banda de paso de  $0.000001 \text{ dB}$ . Si queremos obtener por ejemplo un ancho de banda fraccional del 20% nos queda que el número de elementos  $n=6$ . Mirando en las tablas los respectivos valores de  $g_1, g_2, g_3$  y obteniendo el resto gracias a las relaciones vistas anteriormente, los valores que obtenemos nos quedan:

- $g_1 = 0.552987$
- $g_2 = 0.914105$
- $g_3 = 1.39189$
- $g_4 = 0.927927$
- $g_5 = 1.37116$
- $g_6 = 0.368658$

Siendo como hemos visto antes  $g_0 = 1$  y  $g_7 = 1.5$

Simulamos el prototipo de elementos concentrados normalizados. Mediante la herramienta ADS veremos si el circuito y los valores que obtenemos son aceptables para nuestro diseño. En la Figura 2.2 se puede observar el circuito transformador que obtenemos. La frecuencia central que utilizamos en este caso es  $7.5 \text{ GHz}$ .

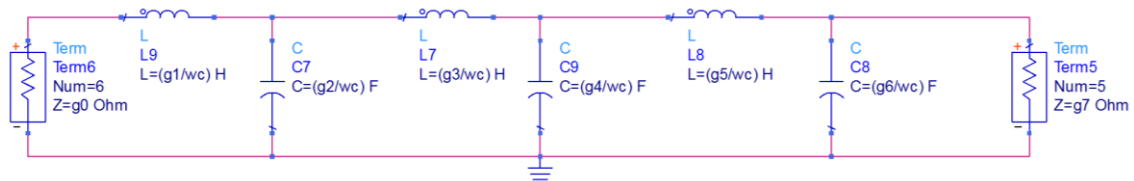


Figura 2.2 – Prototipo de elementos concentrados para  $n=6$  elementos

Y la respuesta que obtenemos es la que se ve en la Figura 2.3:

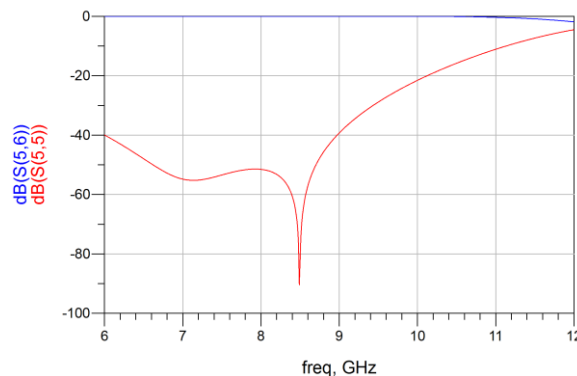
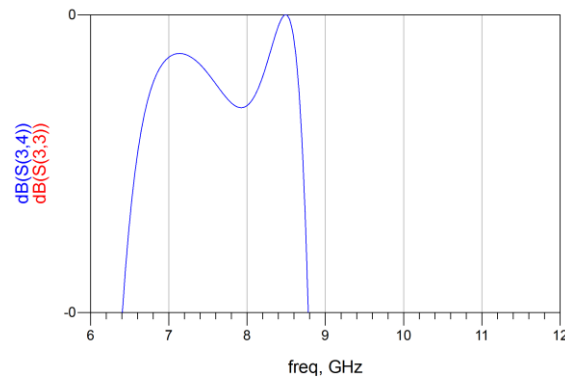


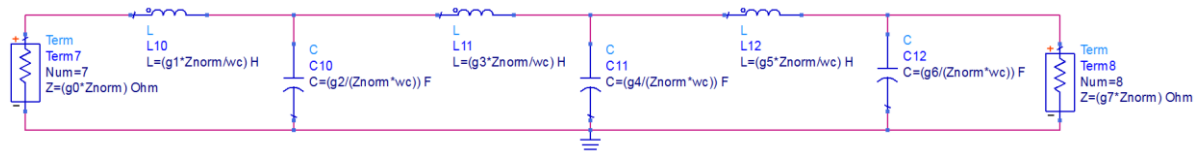
Figura 2.3 – Respuesta del circuito de la Figura 2.2

Como se puede ver la parte del parámetro de reflexión que está por debajo de -40dB está centrado en los 7.5 GHz que habíamos elegido. Para observar el rizado propio de Chebyshev, tenemos que acercarnos mucho a la gráfica, ya que la atenuación del rizado que hemos elegido es muy pequeña. Sin embargo como vemos en la figura, sí que está presente.



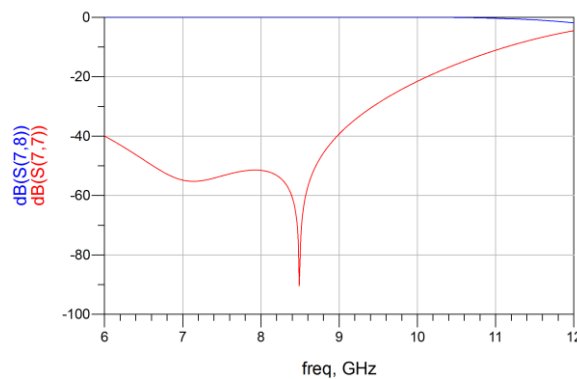
**Figura 2.4 – Detalle del rizado en la respuesta de la Figura 2.3**

Si ahora desnormalizamos nos queda un circuito como el de la Figura 2.5:



**Figura 2.5 – Prototipo de elementos concentrados desnormalizado**

Siendo  $Z_{norm}$  la impedancia de fuente, en este caso,  $Z_{norm} = 101.6$  y como se puede ver en la Figura 2.5 tenemos la misma respuesta que anteriormente.



**Figura 2.6 – Respuesta del circuito de la Figura 2.5**

Sin embargo, podemos observar en esa respuesta que por encima de 9 GHz la respuesta no es tan buena. Hay que tener en cuenta que al construir el transformador en guía de onda rectangular, a partir de este prototipo, la respuesta va a empeorar. Nos interesa conseguir en este caso el mayor ancho de banda posible, sin olvidar que tenemos que adaptar a 7.5 GHz. Construimos 4 transformadores distintos variando la frecuencia central de diseño. Los valores que probamos son 7.5 GHz, 8.0 GHz, 8.5 GHz y 9 GHz. Comparando las cuatro respuestas nos damos cuenta que la simulación que mejor ancho de banda consigue, sin olvidar los requerimientos, es la simulación a 9 GHz de frecuencia central. Es por esto que a partir de este punto vamos a usar como frecuencia central de diseño 9GHz.

## 2.4 Cálculo de dimensiones

Para calcular las impedancias con las que vamos a trabajar partimos del modelo real. Como ya hemos visto previamente, las impedancias van a corresponderse con las alturas de los tramos de guía escaladas. Dado que el modelo se basa en coger una impedancia alta ( $Z_H$ ) y otra baja ( $Z_L$ ) tendremos que elegir dos valores de alturas que se correspondan con ello.

Partimos del ancho de banda que nos dan las guías de entrada y salida. Ya hemos visto en la introducción de la guía rectangular que las frecuencias de corte de los modos vendrán dados por la ecuación 1.54. Los anchos de banda monomodo son:

- Guía de entrada WR90 (22.86 × 10.16 mm): [6.5616 GHz ; 13.1234 GHz]
- Guía de salida 22.86 × 15.24 mm: [6.5616 GHz ; 9.8425 GHz]

Por lo tanto, el ancho de banda monomodo teórico máximo posible que tendremos en nuestro transformador será la intersección de los dos anteriores: [6.5616 GHz ; 9.8425 GHz].

Partiendo de ese ancho de banda tenemos que obtener una altura máxima ( $b_{max}$ ) que no lo recorte demasiado. Ya hemos visto que la altura tiene una correspondencia inversa con la frecuencia TE<sub>01</sub>, por lo tanto no podemos elegir una altura máxima que haga que la banda de transmisión sea demasiado pequeña.

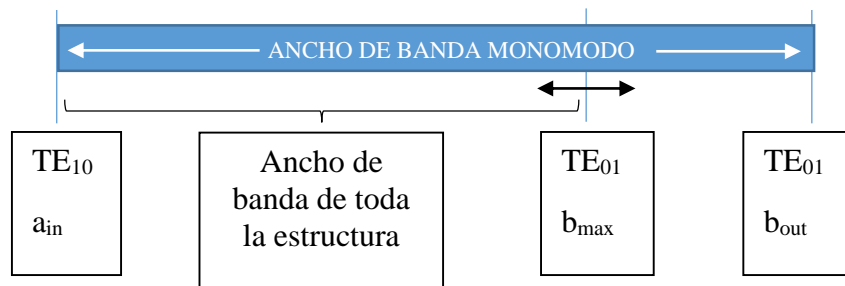


Figura 2.7 – Esquema de los anchos de banda frente a las frecuencias de corte

Con la altura mínima pasa lo contrario. Este valor que no tiene limitaciones en cuanto a frecuencia, sí que las tiene, sin embargo, para construcción. Los valores que elegimos finalmente son:

- $b_{max} = 17.2528 \text{ mm}$  que se corresponde con una frecuencia de 8.6942 GHz. Estos valores salen de querer mantener como mínimo un 65% del ancho de banda inicial.
- $b_{min} = 5.3788 \text{ mm}$  lo que son 27.8873 GHz, que es 5.5 veces el ancho de banda del modo fundamental.

Una vez sabemos  $b_{max}$  y  $b_{min}$ , como hemos visto en la modelización, si las escalamos por el valor de K obtenemos valores de impedancias.

- $Z_{in} = 101.60 \Omega$
- $Z_{out} = 152.40 \Omega$
- $Z_{max} = 172.53 \Omega$
- $Z_{min} = 53.79 \Omega$

Antes de calcular las dimensiones reales de la guía, realizaremos un modelo ideal con el objetivo de calcular las longitudes eléctricas de los tramos y las impedancias correspondientes a cada uno de ellos. Para obtener la longitud eléctrica aplicamos las transformaciones correspondientes para pasar del modelo de elementos concentrados al de líneas de transmisión ideales. Dependiendo de si se trata de un tramo de impedancia alta o baja, se corresponde con:

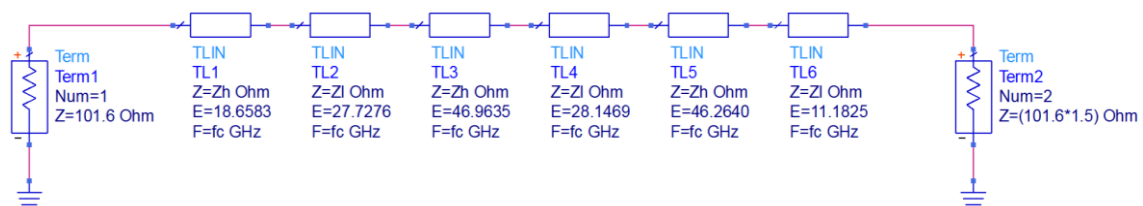
$$X = Z_0(\beta \cdot l) \Rightarrow \theta = \beta \cdot l = (g \cdot Z_{min}) \frac{1}{Z_0} \quad 2.18$$

$$B = (\beta \cdot l)/Z_0 \Rightarrow \theta = \beta \cdot l = \frac{g}{Z_{max}} \cdot Z_0 \quad 2.19$$

Obtenemos que las longitudes eléctricas de los tramos son, empezando por impedancia alta:

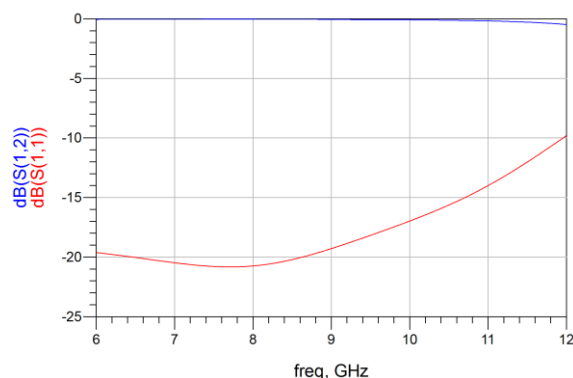
$$\begin{aligned} L_1 &= 18.6583^\circ & L_4 &= 28.1469^\circ \\ L_2 &= 27.7276^\circ & L_5 &= 46.2640^\circ \\ L_3 &= 46.9635^\circ & L_6 &= 11.1825^\circ \end{aligned}$$

Una vez obtenidos ya estos resultados de longitudes podemos comprobarlos en ADS. De esta forma el circuito ideal que nos queda es el que se puede ver en la Figura 2.8:



**Figura 2.8 – Transformador en líneas de transmisión ideales**

Con  $f_c = 9 \text{ GHz}$ . Y cuya respuesta la vemos en la Figura 2.9:



**Figura 2.9 – Respuesta del circuito de la Figura 2.8**

Ya hemos visto que el modelo de líneas de transmisión ideales consigue una respuesta aceptable para nuestro objetivo. Así que ahora diseñaremos, a partir de estos resultados, el transformador mediante líneas de transmisión reales: guías de onda rectangular.



Tenemos los valores de longitudes eléctricas por lo que ahora habrá que obtener la longitud real:

$$\theta = \beta \cdot l \Rightarrow l = \theta/\beta$$

2.20

Para calcular  $\beta$  vamos a los desarrollos que nos encontramos en la introducción de la guía rectangular y vemos que, para el modo fundamental TE<sub>10</sub>:

$$\gamma_{guia} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

2.21

Dado que podemos calcular  $\gamma_{guia}$ , si extraemos la parte imaginaria del resultado, eso nos quedará la constante que necesitamos  $\beta$ . Como mantenemos constante el ancho de toda la estructura, es decir, el ancho  $a$  no cambia, tendremos la misma  $\beta$  en toda la guía, que vale:

$$\beta|_{f=9\text{ GHz}} = 129.2032 [m^{-1}]$$

2.22

Así ya podemos calcular las longitudes reales de la guía:

$$L_1 = 2.5204 \text{ mm}$$

$$L_4 = 3.8022 \text{ mm}$$

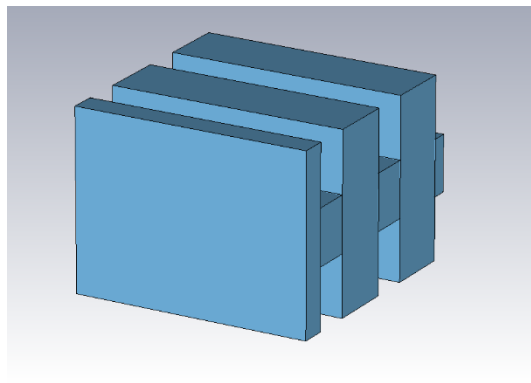
$$L_2 = 3.7456 \text{ mm}$$

$$L_5 = 6.2495 \text{ mm}$$

$$L_3 = 6.3440 \text{ mm}$$

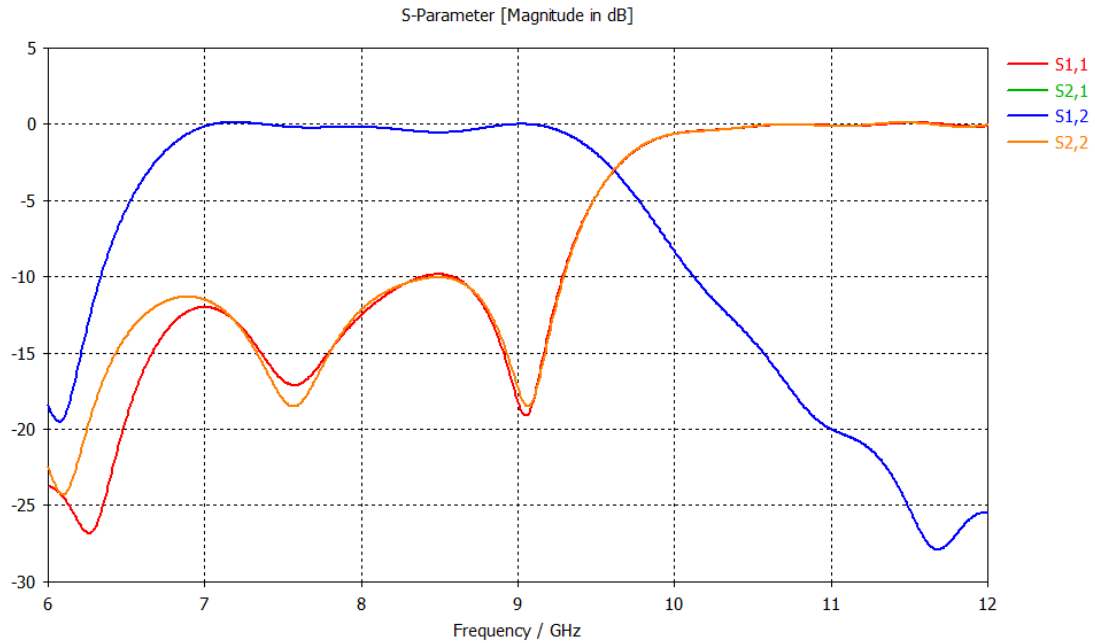
$$L_6 = 1.5106 \text{ mm}$$

Que junto con las medidas de alturas de alta y baja impedancia definen ya nuestro transformador. En la Figura 2.10 vemos cómo es el transformador, las alturas y las longitudes de cada tramo. Esta es la estructura que conectaríamos entre las dos guías iniciales.



**Figura 2.10 – Transformador en guía de onda rectangular**

Finalmente para comprobar esto realizaremos una simulación en CST. Para ello conectaremos al diseño de la Figura 2.10 dos guías a cada lado representando la guía de entrada y la de salida. La respuesta final que obtenemos es la que se ve en la Figura 2.11:



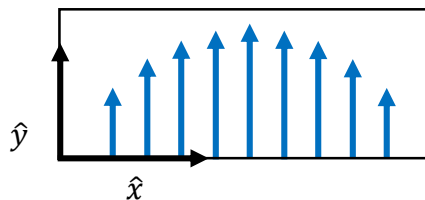
**Figura 2.11 – Respuesta del transformador que se ve en la Figura 2.10**

Podemos decir a partir de la gráfica que el modelo de transformador que hemos creado es correcto. Cumple con las especificaciones con un ancho de banda de  $2\text{ GHz}$  aproximadamente. Se puede observar también el rizado en la banda de paso propio de Chebyshev.

### 3 El método de los elementos finitos

Llegados a este punto consideramos el primer objetivo cumplido. Ya que el diseño cumple todas las especificaciones y tiene la respuesta requerida en frecuencia. Por lo tanto pasamos ahora al segundo objetivo, el análisis práctico del método de los *Elementos finitos*.

El método de elementos finitos o en inglés *finite element method* (FEM) está basado en transformar un problema de ecuaciones en derivadas parciales junto a condiciones de contorno en un sistema de ecuaciones lineales [9]. En nuestro caso el problema de derivadas parciales se corresponde con las ecuaciones que definen la propia guía rectangular y las condiciones de contorno las que ya hemos visto en la introducción. Definimos las puertas de entrada y salida de nuestra guía, donde obligaremos a que exista la forma correspondiente al modo  $TE_{10}$  que se puede ver en la Figura 3.1. Una vez hecho el mallado, el modelo de tetraedro que utilizemos va a definir una serie de puntos en los que tendremos que resolver las ecuaciones de Maxwell. Colocando todas ecuaciones lineales en una matriz, el programa va a ser capaz de calcular la respuesta en frecuencia del transformador.



**Figura 3.1 – Forma de propagación del modo  $TE_{10}$  en una guía de onda rectangular**

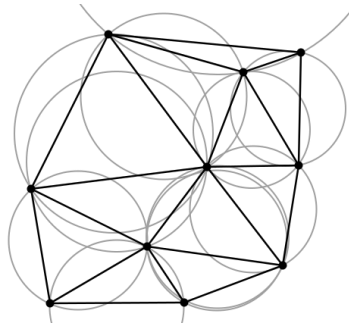
Para ello, una vez recreado el modelo exportamos un fichero que guardará las dimensiones que tiene nuestro diseño de forma que otro programa pueda recrearlo. Para nuestro estudio actual comenzaremos por abrir este diseño con “*gmsh*”. Se trata de una herramienta 3D de generación de mallados y tiene la opción de crear un mallado mediante tetraedros, que se corresponde con lo que vamos a usar aquí. Una vez generado el mallado, exportamos dicho archivo “.*msh*”.

Hecho esto, vamos a calcular los parámetros de transmisión y reflexión mediante un script de python que aplique el método de cálculo que hemos visto antes. Los resultados van a variar dependiendo de dos datos.

1. El tipo de mallado que apliquemos al transformador.
2. El modelo de tetraedro que usemos.

Como ya hemos dicho la herramienta que proporciona el mallado es *gmsh*. Dentro de todos los mallados que proporciona, hemos elegido dos, el mallado *Frontal* y el mallado *Delaunay*. Cada uno de estos dos mallados tiene por defecto una función de densidad asociada que es la que va a definir el número de puntos (vértices) que vamos a tener.

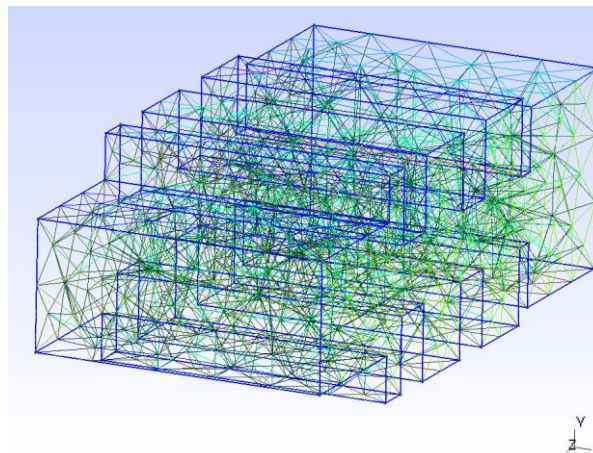
- El mallado Delaunay: es una extensión de la triangulación Delaunay. La regla que rige la triangulación es que dados una serie de puntos P, vértices de los triángulos, ninguno de estos puntos está contenido dentro de ninguna circunferencia circunscrita a los triángulos. Se puede observar en la Figura 3.2. Por lo tanto, un mallado Delaunay se corresponde con que ninguno de los puntos que forman los tetraedros va a estar contenido dentro de ninguna de las esferas que circunscriben los tetraedros.



**Figura 3.2 – Ejemplo de la triangulación Delaunay<sup>5</sup>**

La gran ventaja que permite este método es que maximiza el mínimo ángulo de los triángulos en la triangulación, por lo que se consigue evitar los triángulos demasiado picudos.

- El mallado Frontal: Consiste en comenzar mallando desde el contorno hacia el interior. Precisa de un análisis previo del frente del que se va a partir, es decir, de las características geométricas de las aristas o caras que lo constituyen. En la Figura 3.3 se puede ver cómo queda el mallado de la pieza para este caso.



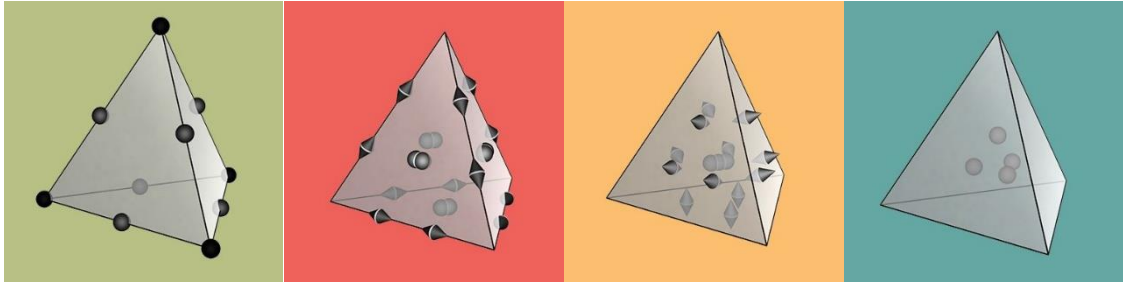
**Figura 3.3 – Mallado frontal del transformador en guía de onda rectangular**

En cuanto a los tetraedros, existen varias posibilidades proporcionadas por el proyecto Fenics [4], sin embargo, el que mejor se corresponde para el cálculo de campos es el de tetraedro de Nedelec.

---

<sup>5</sup> Imagen extraída de [www.wikipedia.com](http://www.wikipedia.com)

Dentro de los elementos finitos de tres dimensiones, hay cuatro tipos distintos de tetraedros, cada uno con distintos puntos en los que se hacen los cálculos. Por ejemplo en la imagen se pueden ver las cuatro posibilidades para el tipo 1 y orden 2.



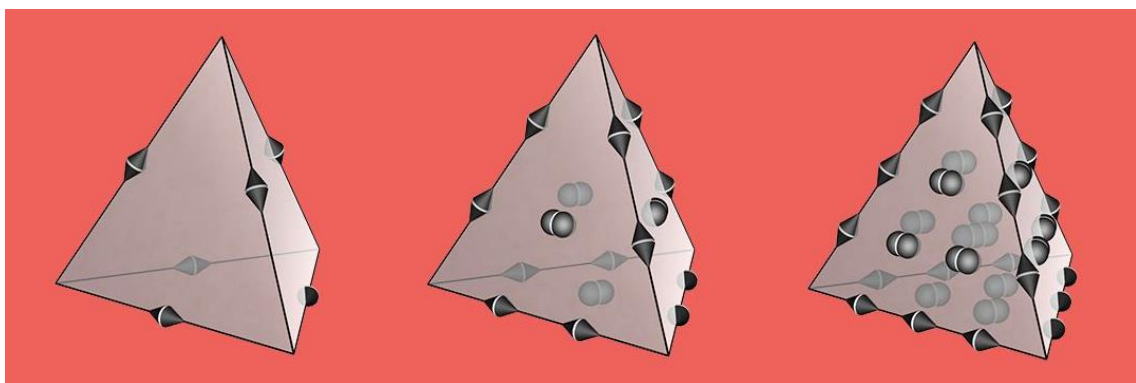
**Figura 3.4 – Ejemplos de tetraedros que se pueden usar como elementos finitos. Imágenes tomadas de [5]**

Sólo uno de ellos es óptimo para nuestro problema. Sabemos que vamos a evaluar las condiciones de contorno, que en este caso van a ser campos de tipo tangencial. La mejor posibilidad se corresponde con el de fondo rojo, el tetraedro de Nedelec, ya que es el único que lleva inherente esta característica tangencial que facilitará luego los cálculos. Aunque con los otros 3 también se podrían conseguir los cálculos, la complejidad que se obtendría es mucho mayor que la del tetraedro de Nedelec.

Vamos a ver ahora cuáles son las variables que influyen en cada caso y qué resultados obtenemos mediante ellas. En primer lugar tenemos que elegir el tipo de mallado que realiza el gmsht, luego elegiremos el tipo del tetraedro (1, 2) y dentro de ese tipo el orden (1, 2, 3).

Los modelos de tetraedros que utilizaremos en la simulación serán los que aparecen en las figuras Figura 3.5 y Figura 3.10. Cada uno de los puntos que se marcan en los tetraedros se corresponde con puntos en los que se harán los cálculos correspondientes para hallar el campo. Por lo tanto, la simulación con el tetraedro de tipo 1 tendrá siempre menos grados de libertad que el del tipo 3 para el mismo mallado.

### **3.1 Tetraedros de Nedelec de tipo 1: $(N1_i^e)$**



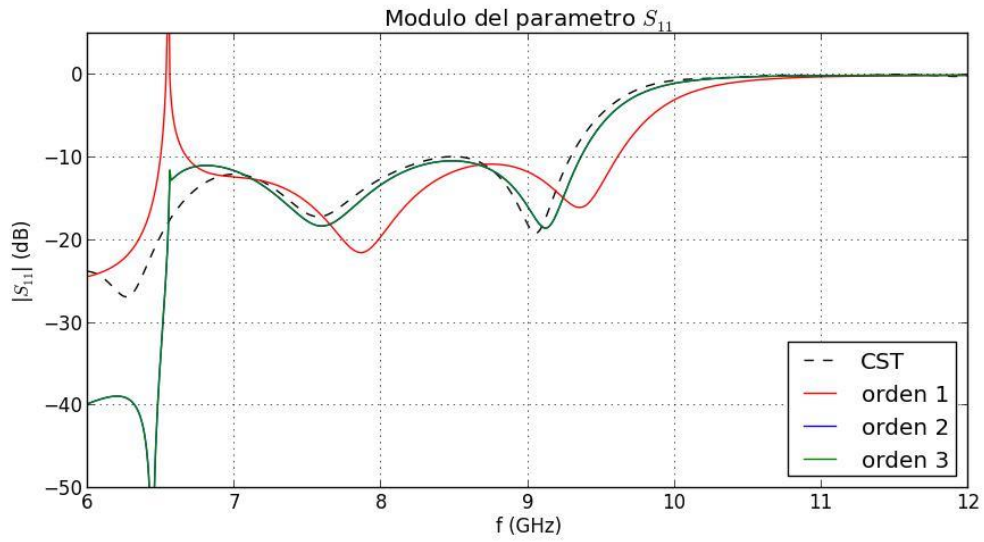
**Figura 3.5 – Tetraedros de Nedelec tipo 1, de órdenes 1, 2 y 3 respectivamente**

Para el mallado frontal, los grados de libertad y las respuestas que obtenemos son:

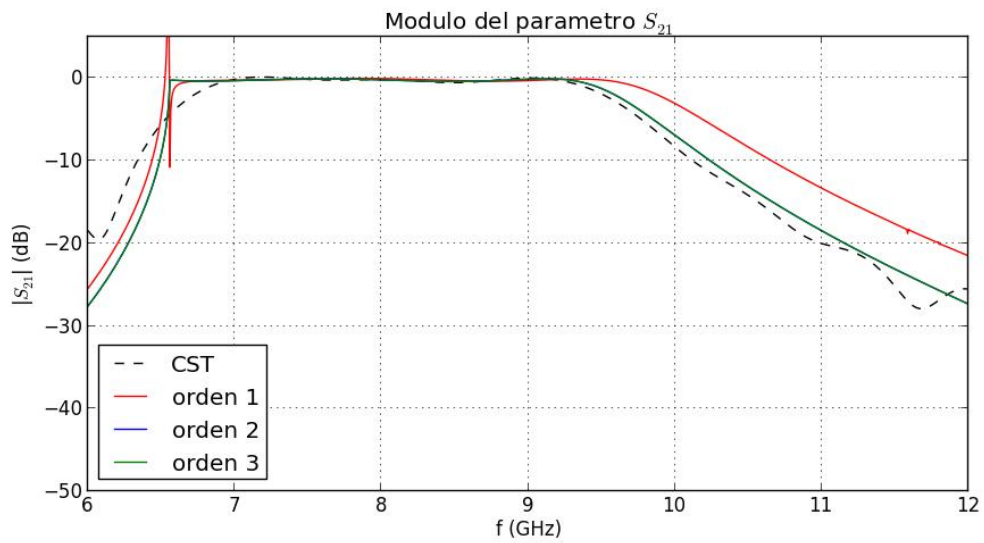
*Orden 1* → 4208

*Orden 2* → 20828

*Orden 3* → 58290



**Figura 3.6 – Módulo del parámetro  $S_{11}$  para el mallado frontal y tetraedros tipo 1**



**Figura 3.7 - Módulo del parámetro  $S_{21}$  para el mallado frontal y tetraedros tipo 1**

Para el mallado Delaunay tenemos:

Orden 1 → 3000

Orden 2 → 14326

Orden 3 → 39348

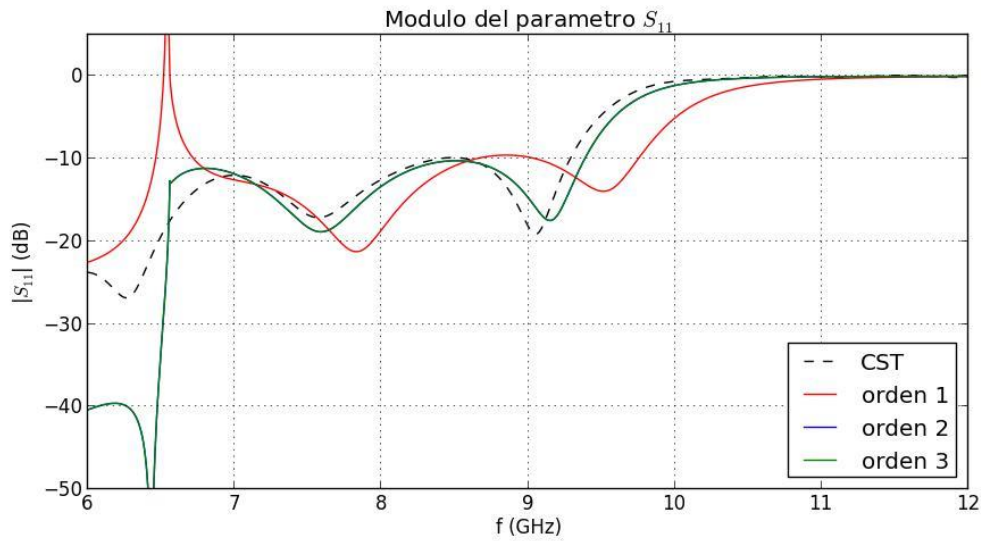


Figura 3.8 - Módulo del parámetro  $S_{11}$  para el mallado Delaunay y tetraedros tipo 1

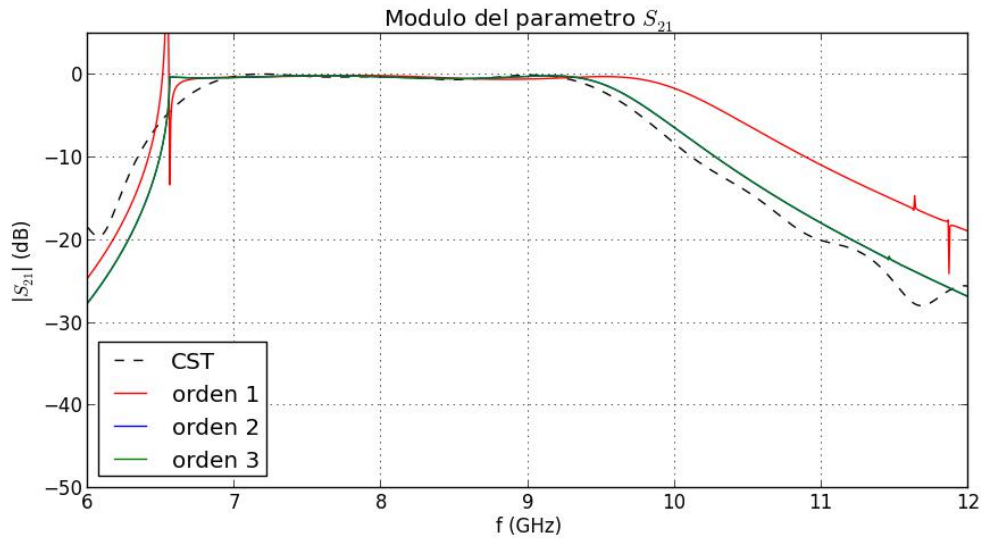


Figura 3.9 - Módulo del parámetro  $S_{21}$  para el mallado Delaunay y tetraedros tipo 1

Como podemos ver, todas las simulaciones se acercan a la respuesta que nos da el CST. Vemos que en todos los casos el tetraedro de tipo 1 es el que menos se acerca a la realidad. Sin embargo, los otros dos sí que se aproximan más al real y ambos obtienen una respuesta casi igual ya que no podemos distinguir el uno del otro.

Hay que destacar los fenómenos que ocurren en la frecuencia de corte del  $TE_{10}$ . Vemos que se crean unos picos, sobre todo en el tipo 1. Esto se trata de un error que tiene el método cuando ha de calcular la respuesta en la frecuencia de corte del modo fundamental. Esta respuesta no tiene sentido y por lo tanto no tendremos en cuenta esa parte.

### 3.2 Tetraedros de Nedelec de tipo 2: ( $N2_i^e$ )

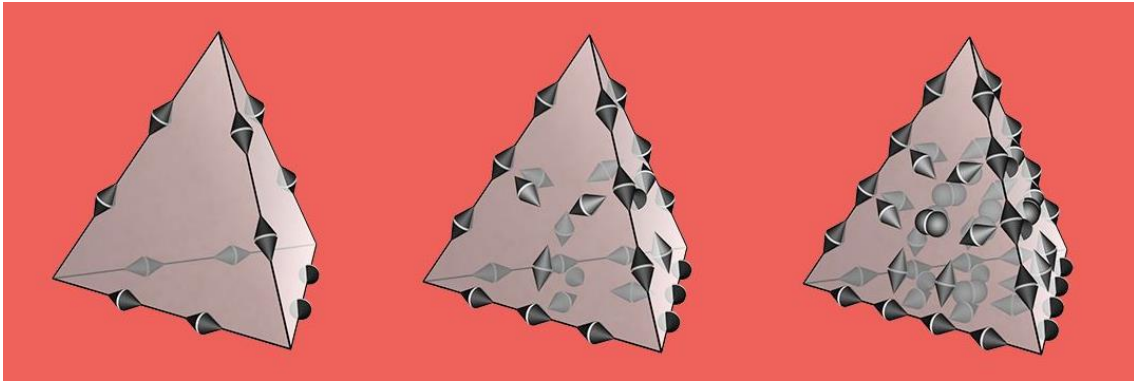


Figura 3.10 – Tetraedros de Nedelec tipo 2, de órdenes 1, 2 y 3 respectivamente

Mallado frontal:

Orden 1 → 8416

Orden 2 → 31242

Orden 3 → 77720

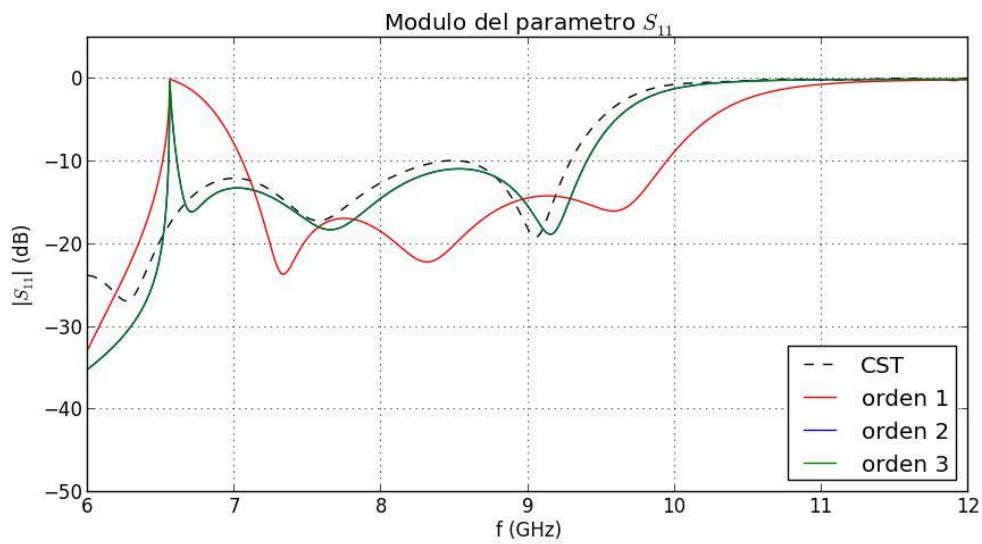
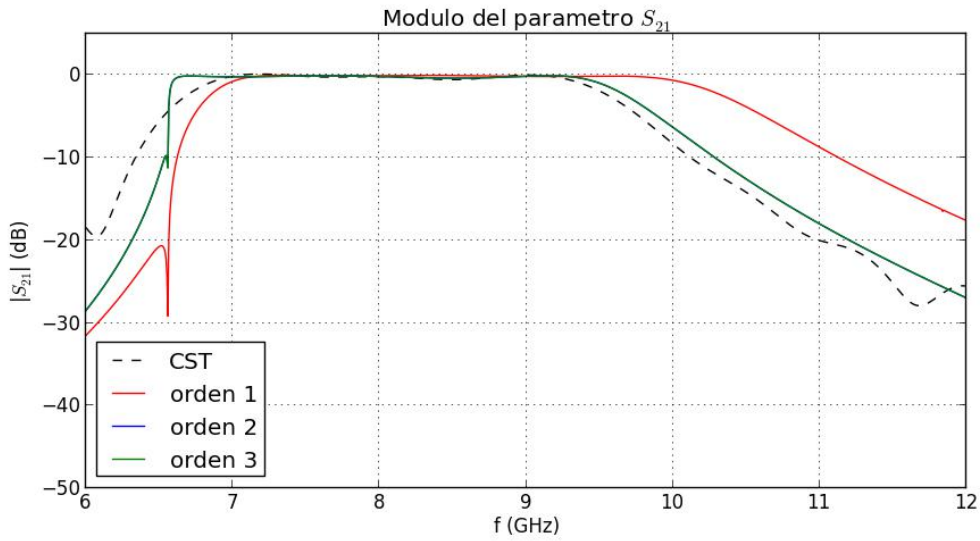


Figura 3.11 - Módulo del parámetro  $S_{11}$  para el mallado frontal y tetraedros tipo 2





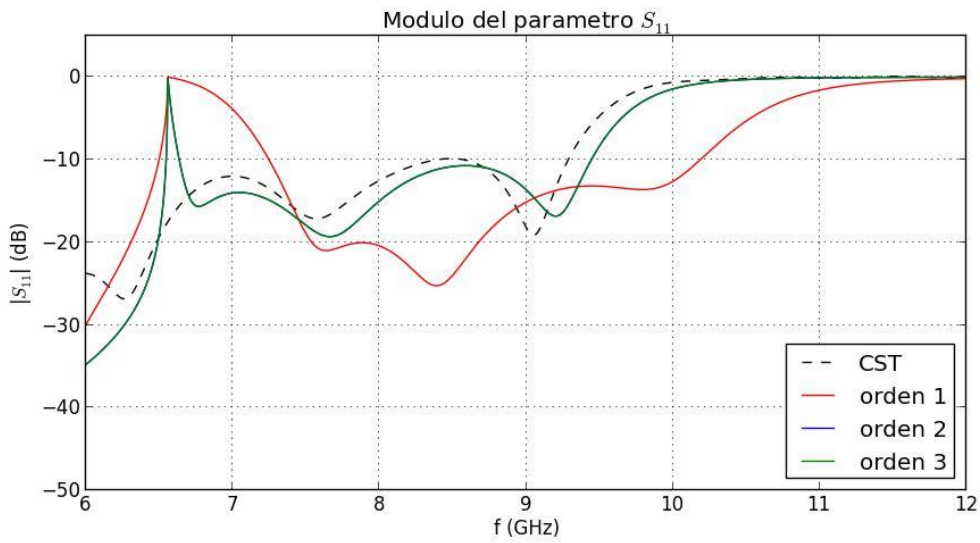
**Figura 3.12 - Módulo del parámetro  $S_{21}$  para el mallado frontal y tetraedros tipo 2**

Mallado Delaunay:

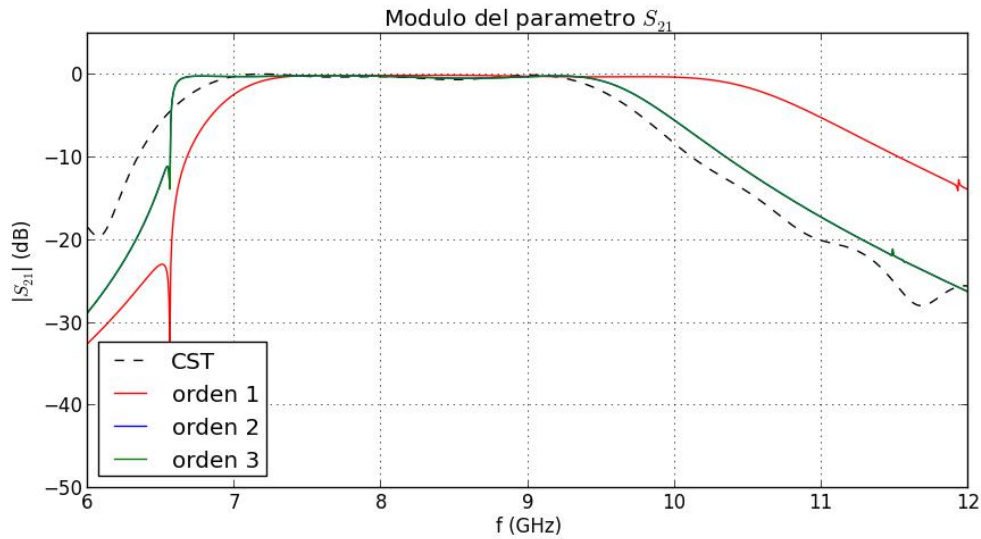
*Orden 1* → 6000

*Orden 2* → 21489

*Orden 3* → 52464



**Figura 3.13 - Módulo del parámetro  $S_{11}$  para el mallado Delaunay y tetraedros tipo 2**



**Figura 3.14 - Módulo del parámetro  $S_{21}$  para el mallado Delaunay y tetraedros tipo 2**

Para empezar, ocurre lo mismo que arriba en cuanto a que el tipo 1 es el que consigue la peor aproximación de todos. Así mismo, los tipo 2 y tipo 3 vuelven a ser tan parecidos que se superponen durante la representación gráfica.

La primera diferencia notable entre uno y otro la vemos en la respuesta justo después de la frecuencia de corte. Con los tetraedros de primer orden no obteníamos los picos que vemos aquí justo antes de que se establezca la respuesta. Sin embargo, no sabemos si esto también es un fallo del método o la respuesta que se calcula para esas frecuencias. De cualquier forma vemos que en estas simulaciones no obtenemos ya el pico que se salía de la gráfica de antes.

### 3.3 El análisis de tiempos

Hemos visto en apartados anteriores que uno de los parámetros a partir de los que sacaríamos conclusiones es el tiempo. El programa nos da los datos sobre los tiempos que ha invertido en cada una de las etapas de la simulación. En la Tabla 2 podemos ver el resumen de tiempos correspondiente al Mallado Frontal, con un tetraedro de Nedelec de orden 2 tipo 2:

Summary of timings	Average time	Total time	Repeticiones
Apply (PETScMatrix)	0.0026439	0.0052879	2
Apply (PETScVector)	1.3232e-05	7.9393e-05	6
Assemble cells	0.20229	0.40458	2
Assemble exterior facets	0.047497	0.094993	2
Build mesh number mesh entities	0.0015479	0.0030959	2
Build sparsity	0.0354	0.1416	4
Delete sparsity	1.2517e-06	5.0068e-06	4
Init MPI	0.036451	0.036451	1
Init PETSc	0.00071287	0.00071287	1
Init dofmap	0.11578	0.11578	1
Init dofmap from UFC dofmap	0.003763	0.003763	1
Init tensor	0.00055069	0.0022027	4
LU solver	0.26909	538.72	2002
PETSc LU solver	0.26903	538.6	2002
SCOTCH graph ordering	0.028215	0.028215	1
compute connectivity 2 - 3	0.000211	0.000211	1
compute entities dim = 1	0.0030189	0.0030189	1
compute entities dim = 2	0.0036559	0.0036559	1

**Tabla 2 – Resumen de tiempos**

Nuestro programa recorre una serie de etapas al hacer la simulación. En cuanto al análisis de tiempos, la parte que tiene un mayor impacto en el tiempo final se corresponde con el LU-solver. Esta parte se encarga de resolver el sistema de ecuaciones que se ha ido creando durante las etapas anteriores. Además hay que resolver el sistema correspondiente en cada uno de los puntos de frecuencia en los que simulamos, de ahí que se repita tantas veces.

## 4 Análisis de resultados y conclusiones

Algo que hemos visto a lo largo de las respuestas anteriores ha sido que en todas se mantenía la forma pero que sin embargo, ninguna coincidía exactamente con la de CST. Por lo tanto, a la hora de decidir qué tipo de mallado y de tetraedro utilizar, vamos a realizar un tratamiento de errores entre ambas representaciones.

Para medir los errores calcularemos la media de los errores cuadráticos en cada frecuencia respecto de la simulación en CST, en unidades naturales. Expresado matemáticamente como se puede ver en la ecuación 4.1:

$$\frac{\sum |S_{CST} - S_{Obtenido}|^2}{n}$$

4.1

En algunos casos, el método de análisis no obtiene resultados coherentes en torno a la frecuencia de corte de la guía. Por lo que al calcular los errores, vamos a descartar los resultados en torno a esa frecuencia. Dado que lo que nos interesa es el análisis de los resultados en el ancho de banda monomodo, el hecho de no tener en cuenta esa parte no va a ser muy influyente en los resultados finales.

Finalmente agrupamos todos los datos en la Tabla 3. La nomenclatura de los tetraedros corresponde a *Nedelec – tipo (1st, 2nd) – orden (1,2,3)*.

		Grados de libertad	Error cuadrático S11	Error cuadrático S21	Total
Mallado Frontal	Nedelec 1st - 1	4208	0,016529186	0,017074312	0,0336035
	Nedelec 1st - 2	20828	0,001114175	0,002284516	0,00339869
	Nedelec 1st - 3	58290	0,000438799	0,001720457	0,00215926
	Nedelec 2nd - 1	8416	0,070180557	0,055939606	0,12612016
	Nedelec 2nd - 2	31242	0,002288499	0,003466088	0,00575459
	Nedelec 2nd - 3	77720	0,00040569	0,00196759	0,00237328
Mallado Delaunay					
	Nedelec 1st - 1	3000	0,029070321	0,032275768	0,06134609
	Nedelec 1st - 2	14326	0,001903534	0,003065665	0,0049692
	Nedelec 1st - 3	39348	0,000546686	0,001826535	0,00237322
	Nedelec 2nd - 1	6000	0,10589962	0,099632734	0,20553235
	Nedelec 2nd - 2	21489	0,00471672	0,00509243	0,00980915
	Nedelec 2nd - 3	52464	0,000614091	0,002164501	0,00277859

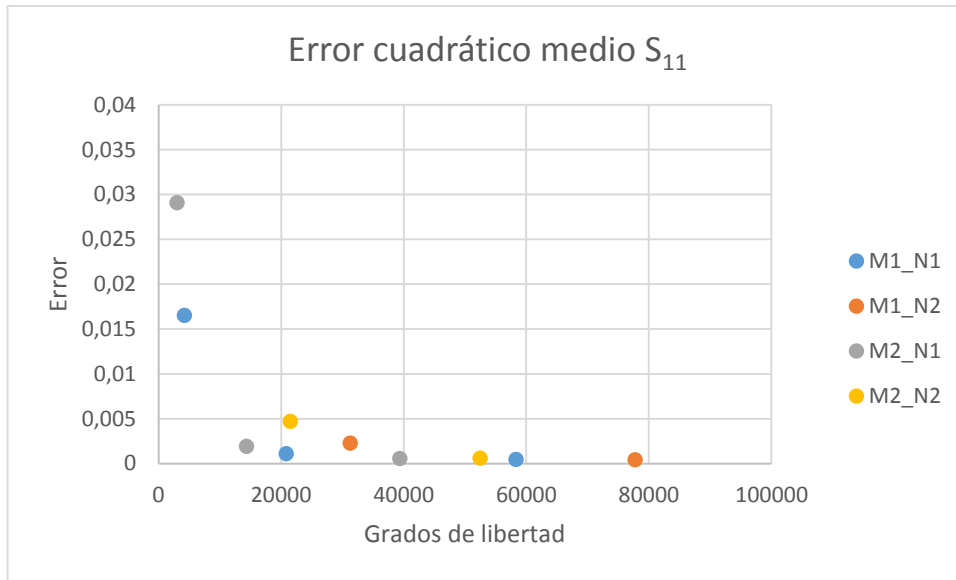
Tabla 3 – Resumen de los errores cuadráticos

Pasamos ahora a analizar la tabla. Para decidir cuál es el mejor método nos fijaremos en el que consigue un error menor para los dos parámetros, tanto para el S11 como para el S21. Por lo que podemos concluir que para simular nuestro diseño, el mejor método que podemos usar es:

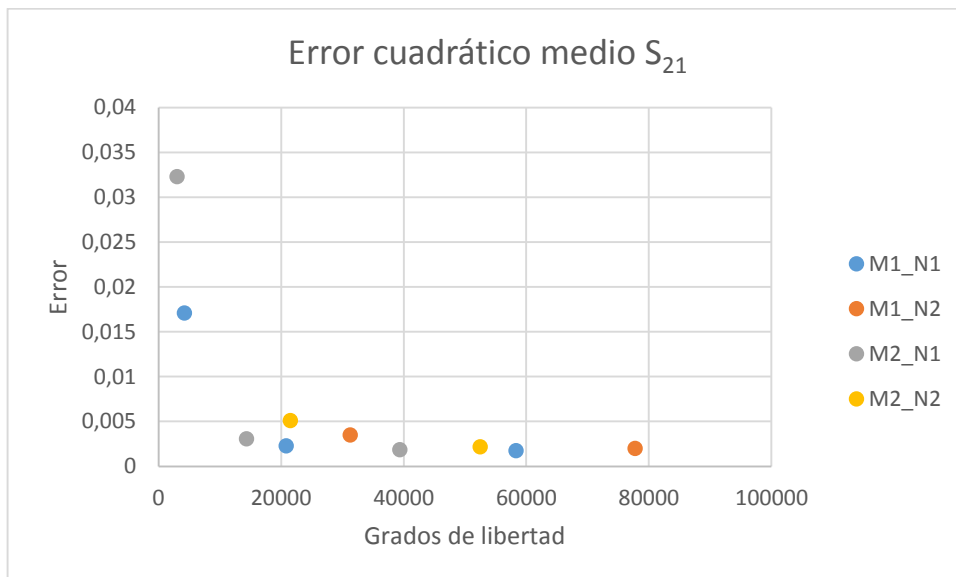
**Mallado frontal, con un tetraedro de Nedelec tipo 1 de orden 3**

Sin embargo, estas conclusiones son las que extraemos mirando únicamente los resultados numéricos de aproximación a los resultados del CST. No hemos tenido en cuenta algo importante, que son los recursos que utiliza cada uno. Los grados de libertad que obtenemos en cada caso tienen una correspondencia directa con el tiempo que tardamos en calcular los resultados. Es decir, hay que tener en cuenta esa variable también en la conclusión.

Vamos a representar gráficamente los errores relativos frente a los grados de libertad, de manera que se vea el compromiso de error frente a los grados de libertad.



**Figura 4.1 – Representación gráfica de los errores frente a los grados de libertad para el parámetro  $S_{11}$**



**Figura 4.2 – Representación gráfica de los errores frente a los grados de libertad para el parámetro  $S_{21}$**

Los dos resultados peores no están incluidos en la gráfica ya que pintarlos no permitiría analizar correctamente los resultados que nos interesan más.

Observamos en la gráfica en primer lugar, la relación inversa entre los grados de libertad y el error que obtenemos. Segundo, existen resultados que con muchos menos grados de libertad consiguen resultados casi iguales a nuestro modelo óptimo. Nos fijamos también en que los tetraedros de tipo 2 siempre consiguen peores errores que los de igual orden pero de tipo 1.

Consideramos que hay que tener en cuenta también estos dos modelos:

**Mallado frontal, con un tetraedro de Nedelec tipo 1 de orden 2**

**Mallado Delaunay, con un tetraedro de Nedelec tipo 1 de orden 3**

Ambos resultados del tipo 1 al igual que el primero que hemos obtenido. Vamos a ver ahora la diferencia de tiempo que hay entre cada uno de estos tres casos.

- a) Para el mallado frontal, con un tetraedro de Nedelec tipo 1 de orden 2:

$$dof = 20828 \rightarrow t_{total} = 5.24461 \cdot 10^2 [s]$$

- b) Para el mallado frontal, con un tetraedro de Nedelec tipo 1 de orden 3:

$$dof = 58290 \rightarrow t_{total} = 2.54739 \cdot 10^3 [s]$$

- c) Mallado Delaunay, con un tetraedro de Nedelec tipo 1 de orden 3:

$$dof = 39348 \rightarrow t_{total} = 2.19376 \cdot 10^3 [s]$$

Podemos observar que hay una diferencia de un orden de unidades en cuanto al tiempo que tarda el primero frente a los otros dos. Por lo tanto, si queremos diseñar un diseño de mayor tamaño o complejidad, el tiempo que tardamos en hacer los cálculos podría no ser asequible.

Por lo tanto, como conclusión final, en un caso real deberíamos elegir sin ninguna duda un tetraedro de tipo 1. A partir de los resultados, usaríamos un mallado frontal y eligiendo ya el orden dependiendo de lo que prime más en cada caso, escogiendo el de orden 2 si queremos que tarde poco tiempo o el de orden 3 si nos interesa alcanzar el máximo de precisión. Siempre, claro está, consiguiendo unos resultados aceptables en cualquiera de los dos casos.

## **5 Continuación de la investigación**

---

Una posible mejora de la investigación consistiría en construir el transformador. Mediríamos los parámetros  $S$  reales en este caso, ya que los que devuelve el CST, aunque sean más o menos aproximados, no son reales, se basan también en un mallado previo. Por tanto, en este caso calcularíamos los errores que obtenemos frente a la realidad, y puede ocurrir que algún modelo que no hemos considerado aquí cobre importancia.

Se podría ampliar el estudio del método mediante el análisis de otros dispositivos como filtros o dispositivos de varias puertas y no sólo de dos (entrada y salida) como el nuestro.





## Referencias

---

- [1].Apuntes de la asignatura Electrónica de comunicaciones, impartida por Juan Córcoles Ortega
- [2].Apuntes de la asignatura Medios de Transmisión, impartida por Jorge A. Ruiz Cruz
- [3].Apuntes de la asignatura Fundamentos de transmisión y propagación de ondas, impartida por Jorge A. Ruiz Cruz
- [4].Fenics Project, <http://fenicsproject.org/>
- [5].Tabla periódica de los elementos finitos: <http://femtable.org/>
- [6].Leo Young “Tables of Cascaded Homogeneous Quarter-Wave Transformers”, IRE Trans. On Microwave Theory and Technique, vol. MTT-7, pp. 233-237; April, 1959.
- [7].George L. Matthaei, “Tables of Chebyshev Impedance-Transforming Networks of Low-Pass Filter Form.
- [8].Jian-Ming Jin, “The Finite Element Method in Electromagnetics”, April 2014, Wiley-IEEE Press
- [9].Proyecto de fin de carrera de Carlos Revillas Sánchez, “Simulación de medios de transmisión mediante el método de elementos finitos”, Junio 2015
- [10]. Jesús Rubio, Javier Arroyo, Juan Zapata, “Analysis of Passive Microwave Circuits by Using a Hybrid 2-D and 3-D Finite-Element Mode-Matching Method”, Septiembre 1999
- [11]. Pozar, David M. “Microwave Engineering” 2012, John Wiley