Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Dpto. de Didácticas Específicas

ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y DIDÁCTICAS MEDIANTE EL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA *GEOGEBRA* EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE PRIMARIA

Tesis doctoral

Natalia Ruiz López

Madrid, 2012

Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Dpto. de Didácticas Específicas

ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y DIDÁCTICAS MEDIANTE EL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA *GEOGEBRA* EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE PRIMARIA

Tesis doctoral

Programa de doctorado: Innovación y formación del Profesorado

Autora: Natalia Ruiz López

Director: Dr. César Sáenz de Castro

Madrid, 2012

Imaginad una vasta hoja de papel en la que líneas rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y otras figuras, en vez de permanecer fijas en sus lugares, se moviesen libremente, en o sobre la superficie, pero sin la capacidad de elevarse por encima ni de hundirse por debajo de ella, de una forma muy parecida a las sombras (aunque unas sombras duras y de bordes luminosos) y tendríais entonces una noción bastante correcta de mi patria y de mis compatriotas. Hace unos años, ay, debería haber dicho "mi universo", pero ahora mi mente se ha abierto a una visión más elevada de las cosas.

E.A. Abbott, Planilandia

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sentido agradecimiento a las siguientes personas:

Mi director de tesis, Dr. César Saénz de Castro, por su dedicación y constante ánimo, que me han permitido llegar al final de este largo y tortuoso camino. A mis compañeros de facultad, profesores de distintas áreas y departamentos, que siempre se han interesado por la marcha de la tesis y me han recordado en todo momento la importancia que debía darle, relegando a segundo plano otras tareas. En especial quiero mencionar a mis amigos: Clemente Herrero, Guillermo Jiménez-Ridruejo, Manuel Álvaro, Santiago Atrio, Isabel Bergantiños, Florencio López de Silanes, Alberto Barcia, Alicia Ruiz, Gloria Luna, Pedro Puelles, José Luis de los Reyes, Rocío Garrido, Javier Valle, José Luis de los Reyes, Liliana Jacott, Nieves Martín, Ángeles Sevilla, Javier Murillo y tantos otros.

También quiero agradecer su paciencia y apoyo a mi familia, José, Samuel, Lara, Conchita, Irene y todos los demás que siempre estarán a mi lado contra viento y marea. Y a mi amiga Elena, que me ha ayudado a ser consciente de mis puntos fuertes y débiles y que me pone el espejo delante de la cara cuando flaqueo.

Pero por encima de todo, quiero agradecer a mis alumnos de 2º de Primaria del curso 2010-2011 que se hayan prestado a participar en esta investigación. Y lo hago extensivo a todos los alumnos a los que he dado clase a lo largo de todos estos años, porque ellos son la inspiración y la causa de que haya decidido emprender esta aventura, que espero no sea en vano. Un recuerdo muy especial para mis "estudios de casos": Andrés, Daniel, Marta, Macarena, Irene, Patricia, Helena y Lorena.

TABLA DE CONTENIDO

Segunda parte: ESTUDIO EMPÍRICO

ANEXOS

INTRODUCCIÓN

Esta Tesis surge de mi experiencia docente de 20 años, en los que me he encontrado con el reto de acercar las matemáticas al alumnado de Magisterio y encontrar la manera de que pierdan el desinterés, o incluso el miedo, que les suscita su estudio. En este tiempo he podido detectar problemas que pueden ser el origen de que algunos alumnos no consigan desarrollar las competencias matemáticas necesarias para ejercer su labor como futuros maestros. Por eso, junto al director de esta tesis, hemos planteado esta investigación para intentar resolver algunos interrogantes que nos han surgido en torno a la adquisición de competencias didáctico-geométricas por parte del alumnado de Magisterio en Educación Primaria. En concreto, el problema que se pretende abordar es cómo interviene el software de geometría dinámica GeoGebra en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en la formación inicial del profesorado de Primaria.

Esta memoria de tesis tiene una estructura clásica dividida en dos partes, que a su vez se organizan en ocho capítulos y dos anexos. La primera parte corresponde al estudio teórico (capítulos 1, 2 y 3) y la segunda aborda el estudio empírico (capítulos del 4 al 8). Vamos ahora a resumir el contenido de cada capítulo y de los dos anexos:

En el *Capítulo 1, definición y justificación del problema de investigación*, partimos de investigaciones previas realizadas por distintos autores para justificar la pertinencia del problema de investigación que nos proponemos estudiar, planteamos los objetivos que se abordan en este estudio, la metodología que hemos seguido y el plan de trabajo.

El *Capítulo 2, antecedentes y estado de la cuestión*, nos sirve para revisar la literatura relacionada con nuestra investigación y acercarnos a la respuesta de los dos primeros objetivos planteados en el capítulo 1. El capítulo se organiza en tres apartados que recogen aspectos relativos a tres núcleos de interés para nuestra investigación: investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la Geometría en la formación de profesorado, distintas aproximaciones a la noción de competencia geométrica e investigaciones sobre el software de geometría dinámica como recurso didáctico.

El *Capítulo 3*, *marco teórico*, nos lleva a encuadrar las investigaciones que serán la base de nuestro estudio, tanto en el enfoque cuantitativo, como en el análisis del estudio de casos. Los tres epígrafes que contiene este capítulo nos introducirán en el estudio TEDS-M, realizado a estudiantes de Magisterio de varios países para analizar la adquisición de competencias matemáticas y didácticas y sus creencias sobre las matemáticas y su enseñanza; en la Teoría de la instrumentación que nos permitirá interpretar los procesos de resolución de problemas geométricos con GeoGebra que realizarán nuestros alumnos participantes en el estudio de casos; y los tipos de "arrastre" en un entorno GeoGebra, que deberemos conocer y detectar para analizar rigurosamente los procesos cognitivos que están detrás del empleo de ciertas técnicas usadas por los alumnos en los entornos dinámicos de resolución de problemas.

Empezamos el estudio empírico con el *Capítulo 4, diseño y metodología de la investigación,* donde veremos el planteamiento del problema de investigación y el diseño de la investigación, que nos permitirá elegir una metodología mixta, cuantitativa y cualitativa, como la mejor opción para estudiar nuestro problema. En el tercer punto, metodología de la investigación, iremos exponiendo detalladamente el enfoque cuantitativo (variables, población y muestra, instrumentos para la recogida de datos y análisis estadístico de los datos) y el enfoque cualitativo (descripción de los casos, prueba para el estudio de casos y análisis de la prueba).

El *Capítulo 5, diseño y realización del proceso formativo,* nos permitirá explicar cómo se llevó a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje que se impartió a los dos grupos participantes en esta investigación durante el curso 2010-2011, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II del grado de Magisterio en Educación Primaria. Para ello se habla de la Guía docente de la asignatura, el proceso formativo común a los grupos de la investigación (experimental y control) y del proceso formativo específico del grupo experimental, detallándose aquí el Taller de GeoGebra piloto, desarrollado en el curso anterior, que sirvió de punto de partida para el diseño del Taller de GeoGebra que seguiría el grupo experimental durante un trimestre.

En el *Capítulo 6, análisis de los datos obtenidos en el estudio cuantitativo,* realizaremos un análisis estadístico descriptivo e inferencial para cada uno de los problemas planteados en el capítulo 4, los problemas P1 y P2 y el problema secundario P3. Esto nos permitirá responder a las preguntas planteadas en nuestra investigación después de ser convertidas en hipótesis estadísticas que serán refutadas o aceptadas. Además realizaremos un análisis de las respuestas de los alumnos del grupo experimental a la encuesta que se les pasó al finalizar el Taller de GeoGebra y que nos ayudará a interpretar los resultados obtenidos en la mejora de competencias didácticas por dichos alumnos.

En el *Capítulo 7, análisis de los datos obtenidos en el estudio cualitativo,* utilizaremos un enfoque interpretativo para analizar cada uno de los cuatro casos objeto de estudio. Cada pareja será pormenorizadamente analizada mediante la integración de todos los datos obtenidos por distintos medios, en un registro que permite reproducir cada sesión de resolución de problemas en el entorno GeoGebra. La teoría de la instrumentación y los tipos de arrastre (que nos sirven de marco teórico) utilizados por cada pareja nos permitirán caracterizarlas según los aspectos siguientes: técnicas utilizadas, tipos de arrastre, obstáculos, interacción entre la pareja, interacción profesora-pareja y lenguaje utilizado.

El *Capítulo 8, conclusiones,* retomará todos los resultados obtenidos a lo largo del resto de capítulos para discutirlos a la luz de las teorías que nos han servido de fundamentación. Esto nos permite contestar a todos los interrogantes planteados al inicio de la investigación y proponer futuras líneas de profundización y mejora. Además se describen los aspectos que no hemos podido responder y los puntos que quedan por estudiar.

En el Anexo I se adjuntan todos los cuestionarios que nos han servido de instrumento de recogida de datos en el estudio cuantitativo: los ítems de conocimientos didáctico-geométricos, los cuestionarios de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y la encuesta sobre GeoGebra.

En el Anexo II se incluyen los registros de cada sesión del estudio de casos, donde se recoge toda la información integrada de las parejas a través de las grabaciones en vídeo del proceso de resolución de la prueba, los auto-protocolos escritos, los dibujos y los archivos de GeoGebra generados por los estudiantes.

PRIMERA PARTE: ESTUDIO TEÓRICO

Capítulo 1

DEFINICIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Introducción

En este capítulo definimos el problema de investigación, justificando su pertinencia en base a nuestra amplia experiencia docente en formación de profesorado de Educación Primaria y en la revisión realizada de la literatura del área, donde hemos apreciado la necesidad de obtener más información sobre nuestro problema. Presentamos la investigación realizada a partir del planteamiento de los objetivos que se abordan, la metodología y el plan de trabajo seguido hasta completar el estudio.

1.1 Antecedentes al planteamiento del problema

Con la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior los estudios de grado de Magisterio en Educación Primaria estructuran sus enseñanzas a partir de la adquisición de competencias del alumnado. En las nuevas titulaciones se tienen que implementar metodologías que ayuden a desarrollar esas competencias, básicas y específicas, y que permitan su evaluación. Entre las competencias que los futuros maestros tienen que adquirir durante su formación inicial se encuentran las competencias geométricas básicas. Esta necesidad, junto con la opinión compartida (por mí y el director de esta tesis) de que un cambio metodológico podría beneficiar el aprendizaje de los conceptos didáctico-geométricos, que tantas dificultades plantea a nuestros alumnos, nos ha llevado a buscar en la literatura referentes que nos permitan centrar el problema.

Los métodos tradicionales de enseñanza de la geometría basados en la resolución de problemas de lápiz y papel, en recursos manipulativos o multimedia se han analizado en múltiples investigaciones: (Barreto, 2006; Barroso, 2000; Bermejo, 2002; Cachafeiro, 2001; Casas & Luengo, 2005; Cohen, 2003; Corrales, Sanduary, Rodríguez, Malik, & Poblete, 2001; Escribano, 2000; Flores, 2002; Gascón, 2002; Gascón, 2003; Gascón, 2004; González & Vílchez, 2004; Gorgorió et al., 2000; Guillén, 2000; Guillén, 2001; Guillén & Puig, 2006; Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991; López-Vílchez, 2008; Martel, 1999; Mora, 2002; Moyá, 2002; Pérez et al., 2002; Redondo & Haro, 2002; Turégano, 2006; Velázquez, 2006). Sin embargo aún hace falta más información sobre cómo contribuye el software de geometría dinámica (en adelante, SGD) a la adquisición de competencias geométricas. Veamos por qué:

En los últimos cursos en los que he impartido docencia en geometría y su didáctica he podido experimentar los cambios que produce el uso de un SGD en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto me ha convencido de que introducirlos de manera habitual en las clases puede beneficiar la adquisición de competencias geométricas en los alumnos. Los sistemas de geometría dinámica permiten realizar construcciones en las que es necesario conocer las propiedades geométricas y las relaciones entre los distintos elementos de las figuras. Además, el "arrastre" de los objetos por la pantalla permite hacer generalizaciones y comprobar propiedades que con los métodos tradicionales a menudo no pueden realizarse. El uso de los SGD en la enseñanza produce cambios en la actuación docente en el aula y en las características del conocimiento que construye el alumno, como muestran muchas de las investigaciones realizadas hasta la fecha, muchas de las cuales se centran en programas informáticos de uso restringido (con licencia), mayoritariamente en Cabri Géomètre o Cinderella (Carrillo de Albornoz & Llamas, 2005; Laborde & Capponi, 1994; Murillo & Fortuny, 2003; Falcade, Laborde & Mariotti, 2007; García & Arriero, 2000; Laborde, 2001; Siñeriz & Santinelli, 1999).

Sobre software libre, como es GeoGebra, empieza a haber bastantes investigaciones, pero gran parte de estos trabajos se centran en las etapas de enseñanza secundaria, bachillerato o nivel universitario, (Antohe, 2009; Carrillo de Albornoz, 2009; Dikovic, 2009; Freixas, 2009; García-López, 2011; Haja, 2005; Hohenwarter, Hohenwarter, & Lavicza, 2009; Iranzo, 2009; Jones et al., 2009; Rafael, 2007; Pujol, 2008; Roux, 2009; Santos-Trigo, Reyes-Rodriguez, & Espinosa-Perez, 2007).

También se han realizado estudios sobre el uso de SGD en formación inicial o permanente de profesorado, aunque en general, enfocados hacia los niveles de secundaria y bachillerato (González-López, 2001; Güven & Kosa, 2008; Haja, 2005; J. Hohenwarter et al., 2009; Preiner, 2008; Santos-Trigo et al., 2007; Scaglia, 2008), pero apenas hay estudios sobre la influencia de GeoGebra en la formación geométrica de profesores de educación primaria (Barroso, 2003; Lasa Oiarbide, Wilhelmi, & Saenz de Cabezón, 2010). Y por esta razón nos parece pertinente y relevante abordar la cuestión con estudiantes de magisterio.

1.2 Definición de los objetivos del problema de investigación

Después de revisar la literatura sobre enseñanza de la geometría, SGD y formación de profesorado, creemos que es necesario realizar un análisis de cómo interviene el uso de GeoGebra en la adquisición de competencias geométricas en los futuros maestros. Hemos elegido este software por sus especiales características que lo hacen accesible a todos y muy adecuado para la enseñanza de la Geometría, además de permitir relacionar esta rama de las matemáticas con otras, (Hohenwarter, Jarvis, & Lavicza, 2009). En el capítulo 2 se especifican las características técnicas más detalladamente.

En el grado de Magisterio en Educación Primaria, además de las competencias matemáticas, se incide en la importancia de las competencias profesionales del futuro profesor, en concreto se deben "desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes". No hemos encontrado estudios hasta la fecha que hayan analizado cómo afectan los SGD a la adquisición de competencias didácticas en los futuros maestros, por eso creemos que puede ser interesante introducir también este aspecto en nuestra investigación.

En resumen, en esta Tesis el problema que se pretende abordar es cómo interviene el software de geometría dinámica GeoGebra en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en la formación inicial del profesorado de Primaria. Para ello, una vez establecido el estado del arte, es decir, la revisión de la literatura de investigación en este campo (capítulo 2), hemos planteado los siguientes objetivos:

1. Identificar las competencias geométricas que deben desarrollarse durante la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.
2. Analizar cuáles de estas competencias pueden mejorar con el uso de GeoGebra.
3. Diseñar una investigación que permita estudiar si mejoran las competencias geométricas y didácticas con la utilización de GeoGebra respecto al recurso "lápiz y papel".
4. Examinar la influencia del uso de GeoGebra en las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza de los estudiantes de Magisterio.
5. Analizar qué tipología de alumnos obtiene mejores resultados con GeoGebra en relación a su nivel de competencia digital.

Hemos estructurado la investigación, de forma clásica, dividida en dos partes:

- La primera corresponde al estudio teórico que nos ha permitido responder a los dos primeros objetivos planteados. Primero se ha realizado una revisión bibliográfica y documental profunda para analizar el concepto de competencia desde la etapa de educación obligatoria hasta llegar al grado de Magisterio en Educación Primaria, lo que nos ha permitido determinar qué competencias geométricas deben desarrollarse en estos estudios. En segundo lugar se ha realizado un estudio de los trabajos sobre SGD nos ha llevado a hipotetizar cuáles de las competencias geométricas anteriores podrán potenciarse mediante el uso de GeoGebra. Esto nos ha permitido diseñar actividades adecuadas para el desarrollo de dichas competencias que han formado parte de un taller de GeoGebra que se ha impartido al grupo experimental de nuestra investigación, formado por alumnos del grado de Magisterio en Educación Primaria, en el primer semestre del curso 2010-2011.

- La segunda parte de la tesis aborda el estudio empírico mediante el cual se diseña, primeramente, la investigación (objetivo 3) y se analizan los objetivos 4 y 5. En los siguientes puntos describimos la metodología seguida y el plan de trabajo.

1.3 Metodología

En primer lugar se han definido los problemas de investigación que emanan de los objetivos 3, 4 y 5, dentro del marco teórico que se establece en el capítulo 3:

P1- ¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

P2- ¿Favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

P3- ¿Cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado con GeoGebra, el nivel de competencia digital del alumnado?

Para responder a estas preguntas, hemos propuesto un diseño experimental (capítulo 4) que integra los enfoques cuantitativo y cualitativo, ya que no sólo queremos contestarlas, además queremos profundizar en otras cuestiones que nos aporten más información y permitan explicar por qué se produce o no una mejora de los resultados en el grupo experimental respecto al control, qué tipo de alumnos se ven más favorecidos con la metodología utilizada, cómo afecta al aprendizaje la interacción entre los alumnos que trabajan juntos, etc. Para este propósito resulta imprescindible utilizar una metodología cualitativa que complemente a la cuantitativa.

1.3.1 Enfoque cuantitativo

Desde el enfoque cuantitativo se ha realizado un diseño quasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente (muestreo disponible con grupos ya formados). En el grupo experimental, formado por alumnos de un grupo de 2º curso del grado de Magisterio de Ed. Primaria, se ha realizado una evaluación previa para realizar categorías según su nivel de desarrollo en competencias geométrica (pretest) y digital. Se han utilizado instrumentos de evaluación estandarizados (TEDS-M) para medir la competencia geométrica y otros ad hoc para medir la competencia digital.

Dentro del horario lectivo del curso, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, se ha impartido a estos alumnos un taller de resolución de problemas de geometría mediante el uso del SGD GeoGebra, mientras que los estudiantes del grupo control resolvían los mismos problemas con lápiz y papel. Al final del semestre se ha realizado una evaluación de competencias geométricas (postest). Para responder al problema P2 se ha pasado una prueba para medir las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza

(TEDS-M) como pretest y como postest, tanto al grupo experimental como al control. El análisis estadístico, descriptivo e inferencial, de los resultados ha permitido responder a los tres problemas planteados (capítulo 6). El esquema del diseño correspondiente al enfoque cuantitativo se puede resumir:

Experimental	O_1	X_e	O_2
Control	O_3	X_c	O_4

Donde O_1 : pretest grupo experimental

O_2 : postest grupo experimental

O_3 : pretest grupo control

O_4 : postest grupo control

X_e : tratamiento (intervención con GeoGebra)

X_c : tratamiento (intervención con lápiz-papel)

Tal como se informa en el Capítulo 5, hemos dedicado mucha atención y cuidado al diseño y realización de la intervención educativa que consta de una parte común para los dos grupos y una parte diferenciada en función del recurso didáctico principal (GeoGebra versus lápiz y papel).

1.3.2 Enfoque cualitativo

Para apoyar y dar más significado a estos resultados cuantitativos, se ha realizado además un estudio de casos. Las parejas participantes se han elegido teniendo en cuenta los niveles previos de competencia geométrica y de competencia digital de los dos miembros de la pareja. La prueba consistió en la resolución de una actividad de construcción de figuras, conjetura e investigación. Los instrumentos de recogida de datos utilizados fueron: El protocolo de construcción de las figuras obtenido del archivo de GeoGebra de cada pareja; El auto-protocolo escrito de cada pareja con el proceso de resolución del problema; Las grabaciones de vídeo de las interacciones entre la pareja y la profesora. En el capítulo 4 se describe detalladamente la metodología de la investigación.

El análisis se realizó bajo una perspectiva interpretativa (Eisenhart, 1988) en la que se tuvieron en cuenta diversos aspectos cognitivos y procedimentales. Los resultados se han recogido en tablas donde se caracterizan las técnicas utilizadas, los tipos de arrastre, los obstáculos encontrados, las interacciones entre los miembros de la pareja y de éstos con la profesora y el nivel de propiedad del lenguaje geométrico utilizado en los auto-protocolos escritos. A partir de estas tablas se ha analizado el proceso de génesis instrumental (Artigue, 2002) llevado a cabo en cada caso objeto de estudio, interpretando los resultados mediante los criterios que nos ofrece la teoría de la instrumentación que nos sirve de marco teórico (capítulo 7).

En los capítulos 6 y 7 se presentan los resultados de la investigación cuantitativa y cualitativa y en el capítulo 8 se establecen las conclusiones en base a los resultados conseguidos y los interrogantes no resueltos o que aparecieron en el transcurso de la investigación.

1.4 Cronograma de la investigación

El plan de trabajo seguido en esta investigación comenzó en el curso 2009-2010 con la presentación del proyecto de tesis doctoral y ha concluido en julio de 2012. En la siguiente tabla vemos las distintas fases del proceso:

	2009-2010			2010-2011			2011-2012	
	S-E	F-J	VER	S-E	F-J	VER	S-E	F-J
Revisión de la literatura								
Diseño del taller de GeoGebra								
Taller piloto de GeoGebra								
Análisis de la prueba piloto y modificaciones								
Ejecución del curso experimental								
Recogida de datos								
Análisis de datos								
Redacción de la memoria - tesis								

Tabla 1.4.1 – Cronograma de la investigación[1]

[1] S: Septiembre, E: Enero, F: Febrero, J: Junio, VER: verano (Julio y Agosto).

Capítulo 2

ANTECEDENTES Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

Introducción

En este capítulo vamos a analizar los estudios que se han realizado en torno a la enseñanza de la Geometría en la Formación de Profesorado. Comenzaremos revisando el estado de la cuestión general, para ver las líneas de investigación que se están desarrollando en la actualidad en Didáctica de la Geometría. Seguiremos con una recopilación de definiciones del término competencia, desde distintos ámbitos, para llegar a establecer las competencias geométricas que es preciso desarrollar en la formación inicial de maestros. Por último, revisaremos los estudios realizados sobre la influencia del Software de Geometría Dinámica (SGD) en la enseñanza de la geometría, justificando la elección de GeoGebra que hemos hecho en esta tesis. Esto nos permitirá responder a los dos primeros objetivos de nuestra investigación.

2.1 Investigaciones sobre el aprendizaje y enseñanza de la Geometría en la formación de profesorado

La comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas está interesada en el desarrollo del conocimiento profesional en los estudios de Magisterio en el área de geometría, en la que se vienen detectando serias carencias. Los estudios realizados abarcan distintas problemáticas en torno a la adquisición de conocimientos geométricos y didácticos, así como a la influencia que pueden desempeñar las creencias y concepciones de los profesores sobre el aprendizaje de sus alumnos.

Podemos encontrar numerosas investigaciones realizadas dentro del grupo de trabajo *Aprendizaje de la Geometría*[1] de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), que reúne a muchos de los profesores e investigadores que integran el área de Didáctica de las Matemáticas en las Facultades de Educación de España y que se dedican a la formación de profesores de Primaria y Secundaria. Vamos a referirnos ahora a algunos resultados obtenidos en estos estudios y en otros internacionales relacionados también con la enseñanza de la geometría en la formación de profesores:

Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) presentan un método para determinar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele en dos grupos de estudiantes, entre los que se encuentran 41 futuros profesores de primaria. Les administran un test que permite evaluar su nivel de razonamiento espacial y los resultados confirman que muchos estudiantes pueden estar a la vez en dos niveles consecutivos e incluso usar varios niveles de razonamiento al mismo tiempo, dependiendo de la dificultad del problema propuesto. También están de acuerdo con este resultado Saads y Davis (1997): en su investigación con un grupo de futuros profesores de secundaria se estudian los niveles de Van Hiele en geometría tridimensional y la capacidad de percepción espacial. Se concluye que el lenguaje de los estudiantes depende de una combinación del nivel geométrico general en el que se encuentran los sujetos, de su capacidad espacial y su capacidad para expresar las propiedades de las figuras a través del lenguaje. En Gutiérrez (2012) se hace un repaso a la trayectoria investigadora del autor relacionada con el modelo de Van Hiele y es muy interesante observar como evolucionan

---

[1] La página web del grupo donde se recogen sus publicaciones y actividades es: http://www.uv.es/aprengeom

los objetivos de los estudios: se pasa de investigar sobre el modelo de Van Hiele a investigar usando dicho modelo como herramienta.

En otro estudio, los autores (Gutiérrez & Jaime, 1996) nos proporcionan un ejemplo de las carencias sobre conocimientos geométricos halladas en alumnos de magisterio, en este caso referido al concepto de alturas de un triángulo. En esta investigación se concluye que casi todos los tipos de errores encontrados en los sujetos participantes, tienen su origen en imágenes conceptuales muy pobres basadas en figuras prototípicas encontradas en los libros de texto (por ejemplo: triángulo apoyado sobre un lado con la altura interior y vertical). Por otro lado, Son (2006) encuentra que los futuros profesores participantes en su estudio muestran una comprensión limitada del concepto de simetría y confían demasiado en aspectos procedimentales cuando lo intentan explicar. Además, confunden las nociones de simetría y rotación y las usan en las mismas situaciones.

En un estudio de 2003 sobre las concepciones de los estudiantes de magisterio acerca de la geometría escolar y su enseñanza (Barrantes & Blanco, 2004; Blanco & Barrantes, 2003), los autores parten de la premisa de que las concepciones aparecen en la etapa escolar y son resistentes a los cambios. Después de estudiar y analizar los recuerdos de los estudiantes sobre cómo fue su aprendizaje de la geometría y las expectativas que tienen sobre su enseñanza, se concluye que hay una disociación entre la tendencia clásica en la cultura de los estudiantes y la cultura constructivista mayoritaria de la comunidad educativa. Para terminar, se propone realizar más investigaciones en la formación inicial de profesorado de matemáticas que promuevan cambios hacia las propuestas curriculares actuales.

Fernández- Blanco (2005) analiza el desarrollo de la percepción espacial y su relación con la enseñanza de la geometría en alumnos de tercer curso de la diplomatura de Magisterio de Primaria, a la vez que clasifica las estrategias cognitivas utilizadas en resolución de problemas espaciales. En su tesis (Fernández-Blanco, 2011), la autora concluye que los futuros profesores se encontraron con dificultades para coordinar las visiones parciales de un objeto, para visualizar los objetos globalmente, para evocar la visión desde uno de sus cuatro puntos de vista fundamentales y para verificar la corrección de sus producciones y conceptualizar los principios de representación. La recomendación final de este estudio es la siguiente: *"Desde una perspectiva formativa nuestra investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes para maestro en cuanto a conocimiento común y avanzado del contenido de visualización y razonamiento espacial. Se deriva por tanto la necesidad de diseñar, implementar y evaluar acciones formativas específicas para promover la mejora de dichos conocimientos"* (Fernández-Blanco, 2011, p. 438).

González et al. (2007) realizan el diseño de un modelo para la enseñanza de la geometría de los sólidos en la formación continua de profesores de educación básica a partir de libros de texto e Internet y analizan, en un estudio de casos, la transferencia que realizan algunos maestros al aula. Este estudio sigue una línea de investigación sobre didáctica de la geometría de los sólidos que se viene desarrollando desde finales de la década de los noventa en la Universidad de Valencia (Guillén, 1997; Guillén, 2000; Guillén, 2001; Guillén & Puig, 2006). Los modelos de enseñanza elaborados, basados en el modelo de Van Hiele y en investigaciones de Freudenthal que defienden que el estudio de la geometría debe comenzar por el espacio, tienen como objetivo desarrollar el razonamiento lógico de los estudiantes. En Guillén (1997) se analizan las formas de razonamiento de futuros maestros al resolver tareas de geometría espacial, realizándose una caracterización de cada nivel de Van Hiele para los poliedros. Además se elabora una secuencia de enseñanza de estos contenidos, basada en los niveles y fases de aprendizaje de Van

Hiele, y se caracterizan el aprendizaje y los niveles de razonamiento de los futuros profesores al trabajar con dicha secuencia de actividades. En otra investigación posterior (Guillén, 2000), esta autora apunta la importancia del análisis de los errores de los estudiantes a la hora de seleccionar los ejemplos propuestos de cara a la enseñanza y hace referencia a la dificultad que supone para ellos utilizar el vocabulario geométrico. Su propuesta didáctica muestra las ventajas del uso de materiales manipulativos, así como de los entornos dinámicos que permiten construir o generar familias de sólidos.

El trabajo de Cohen (2003) estudia la capacidad de futuros maestros y profesores en activo para transformar cilindros y conos en sus desarrollos planos y viceversa, e intenta clasificar los errores y dificultades. Los resultados muestran que los alumnos que no tienen experiencia son incapaces de imaginar el desarrollo de una superficie curva en el plano y actúan como los niños de los estudios de Piaget[1], que confunden un dibujo en perspectiva del sólido con su desarrollo plano. Además se obtienen resultados muy pobres en la identificación o producción del desarrollo plano asociado a un cilindro o un cono: algunos dibujos efectuados por los futuros maestros son idénticos a los que Piaget encontró en niños de entre 6 y 9 años.

Como vemos, en todas estas investigaciones se pone en evidencia la necesidad de mejorar los conocimientos geométricos y didácticos de los futuros maestros, ya que se han encontrado serias carencias en la comprensión de los conceptos, en la visualización espacial, en el uso del vocabulario apropiado y en sus concepciones sobre la enseñanza de la

---

[1] Piaget, J.; Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*, translated by Langdon F. J. & Lunzer J. L., Routledge & K. Paul, London.

geometría, entre otros aspectos. Vamos ahora a caracterizar la noción de competencia geométrica para establecer los criterios sobre el aprendizaje de estos conocimientos que suponemos que nuestros estudiantes de magisterio deben desarrollar durante su formación inicial para poder desempeñar su profesión con garantías.

2.2 Distintas aproximaciones a la noción de Competencia Geométrica

En este epígrafe pretendemos dar respuesta a una de las preguntas que nos hemos formulado al plantear esta investigación, ¿qué competencias geométricas debe poseer un graduado en Magisterio? Primeramente tenemos que estudiar qué entendemos por competencia y después realizar una relación de todas las competencias geométricas que debe poseer un ciudadano que además va a ser profesor de Educación Primaria. Vamos a considerar distintos ámbitos en los que podemos basarnos a la hora de definir el término competencia.

2.2.1 Currículo oficial de enseñanzas mínimas

En la L.O.E.[1] encontramos que la noción de competencias básicas se ha introducido como componente del currículo en la educación obligatoria. Las Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria[2] establecen como uno de los objetivos de la educación desarrollar una serie de competencias básicas que permitan a los jóvenes lograr su realización personal, ejercer una ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de

---

1 *LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*

2 *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre*

manera satisfactoria y desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

La noción de competencia se define como "*la capacidad de aplicar conocimientos, destrezas, procedimientos y actitudes para resolver situaciones y problemas en diferentes contextos*". Al acabar la educación obligatoria, los jóvenes tienen que poder enfrentarse a los problemas reales sabiendo emplear los conocimientos que han adquirido a lo largo de su periodo de escolarización.

La inclusión de las competencias básicas en el currículo tiene varias finalidades. Primero, integrar los diferentes aprendizajes (formales y no formales). Segundo, relacionar los aprendizajes de los alumnos con distintos tipos de contenidos para que puedan usarlos en distintos contextos y situaciones. Tercero, orientar la enseñanza identificando los contenidos y criterios de evaluación que son imprescindibles. Entre las ocho competencias básicas se encuentra la competencia matemática, que consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

Veamos cómo se organiza el aprendizaje de la Geometría en el currículo de educación primaria y cómo se desarrollan a través de su estudio las competencias geométricas. En el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre que establece las enseñanzas mínimas de la Educación primaria, encontramos dentro del área de matemáticas los contenidos organizados en cuatro bloques: el tercero de ellos corresponde a Geometría. Podemos leer allí el objetivo general del estudio de este bloque de conocimientos: *"A través del estudio de los contenidos del bloque 3, Geometría, el alumnado aprenderá sobre formas y estructuras geométricas. La geometría es describir, analizar propiedades, clasificar y razonar, y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra, estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc. para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica"* (Real Decreto 1513/2006, p.43096).

Desde este bloque se contribuye al desarrollo de la competencia matemática principalmente en su aspecto de conocimiento y manejo de elementos matemáticos básicos (medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Se trata de que los alumnos sepan aplicar destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente para dar una mejor respuesta a situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

2.2.2 La competencia matemática según PISA

El proyecto PISA[1] de la OCDE se propone establecer en qué medida los jóvenes de 15 años están preparados para enfrentarse a la sociedad actual, al finalizar su escolarización obligatoria. Este proyecto establece indicadores de calidad de los sistemas educativos que participan en él. Se trata de un programa cooperativo de carácter cíclico, que se lleva a cabo mediante una evaluación internacional que intenta valorar el rendimiento de distintos países en la alfabetización o formación básica de lectura, matemáticas y ciencias. Las pruebas se realizan cada tres años y se centran en una de las tres áreas fundamentalmente.

En 2003, fueron las matemáticas el foco central de la evaluación PISA. El dominio que se evalúa se denomina *alfabetización matemática* (*mathematical literacy)* y se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Por lo tanto, no se evalúan los conocimientos tradicionalmente definidos en el currículo matemático, sino el conocimiento matemático necesario para resolver por medios reflexivos y personales una variedad de contextos diferentes (Organization for Economic Cooperation and Development, 2003).

Según Rico (2005), los responsables del estudio OCDE/PISA de matemáticas caracterizan la actividad de "hacer matemáticas" en cinco fases:

1. Comenzar con un problema situado en la realidad.

---

[1] PISA: Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes)

2. Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
3. Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
4. Resolver el problema.
5. Proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial.

Para describir el dominio que se evalúa se distinguen tres componentes:

1. La *situación o contexto* en que se localiza el problema
2. El *contenido matemático* que se debe utilizar para resolver el problema: se han elegido cuatro tipos de contenidos que respetan el desarrollo histórico, cubren el dominio y contribuyen a la reflexión de las líneas principales del currículo escolar. Son: *Cantidad, Espacio y forma, Cambios y relaciones e Incertidumbre.* Dentro de estas categorías, nosotros vamos a fijarnos en la segunda, *Espacio y forma,* donde se encuentran recogidos los contenidos geométricos del currículo de educación obligatoria. El estudio de las formas requiere de la comprensión de las propiedades de los objetos y de sus posiciones relativas. También significa entender las relaciones entre las formas y las imágenes o representaciones visuales (entender cómo los objetos tridimensionales pueden representarse en dos dimensiones, cómo se interpretan las sombras, cuáles son sus perspectivas, etc.).

3. Las *competencias* que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas. La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se

proponen, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran.

Vamos a analizar más detenidamente las competencias en el sentido de PISA. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado de dicho proceso. Las que se han elegido para realizar la evaluación de la alfabetización matemática son:

1. Pensar y razonar
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
8. Uso de herramientas y recursos

El estudio no se propone elaborar ítems que evalúen individualmente cada una de estas competencias, puesto que hay una considerable vinculación entre ellas y es necesario trabajar simultáneamente con varias al hacer matemáticas. A continuación se presentan algunos indicadores que ejemplifican cada una de las competencias.

Competencia	Indicadores
1- Pensar y razonar	* Plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay?, ¿Cómo encontrarlo?, Si es así, …entonces?, etc.) * Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones * Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas) * Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

2- Argumentar	* Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático * Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos * Disponer de sentido para la heurística * Crear y expresar argumentos matemáticos.
3- Comunicar	* Expresarse de varias maneras sobre temas de contenido matemático, de forma oral y escrita * Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.
4- Modelar	* Estructurar el campo o situación que va a modelarse * Traducir la realidad a una estructura matemática * Interpretar los modelos matemáticos en términos reales * Trabajar con un modelo matemático * Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados * Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones) * Dirigir y controlar el proceso de modelización.
5- Problemas	* Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados) * Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de procedimientos.
6- Representar	* Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones * Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.
7- Lenguaje simbólico	* Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural * Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal * Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas * Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.
8- Recursos	*Utilizar los recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del uso con el que fueron presentados.

Tabla 2.2.2.1 – Indicadores de las competencia PISA

Las competencias enunciadas admiten diferentes niveles de profundidad. Los expertos del proyecto PISA consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que evaluar las competencias:

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Sin embargo, los datos empíricos muestran mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías; Rico (2007) describe hasta seis niveles de complejidad.

Por lo tanto, en el informe PISA la noción de competencia tiene cuatro significados distintos, que ponen de relieve la riqueza y diversidad de matices con que se trabaja. Según Rico (2007), se considera en primer lugar la competencia como dominio de estudio equivalente a la alfabetización matemática y supone un modo global de entender el hacer matemáticas y la propia naturaleza del conocimiento matemático. En segundo lugar, se consideran las competencias como conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos, por medio de cuya realización se muestra la competencia general. En tercer lugar, para caracterizar las tareas se establecen tres niveles de complejidad respecto de las competencias generales requeridas. El informe habla de grupos de competencias. En cuarto lugar, se habla de las competencias como nivel alcanzado por los alumnos, que se determina empíricamente y se expresa en una escala. Según analiza Puig (2008), estos cuatro significados sólo se encuentran en la versión castellana del informe PISA, dado que la versión inglesa emplea para el primer significado la palabra *proficiency*, para los significados segundo y tercero emplea el mismo término *competence* y usa el término *literacy* para el último de estos significados.

Es interesante analizar algunas investigaciones que se han realizado sobre el nivel de competencia matemática (en el sentido PISA) de estudiantes de Magisterio (Sáenz Castro, 2009; Sáenz Castro, 2007) y la relación que existe entre la activación de competencias y el tipo de conocimiento matemático que tienen dichos estudiantes. Encontramos un perfil bajo de rendimiento entre esta población, con un porcentaje medio de respuestas correctas de un 64 %. De los 31 ítems analizados, en 17 los estudiantes de magisterio no superan significativamente el porcentaje de aciertos de los alumnos de 15 años. Sólo el 11% de los futuros maestros alcanza un nivel de competencia alto. En esta línea, Gómez-Chacón (2006) afirma que PISA ofrece un marco de evaluación de competencias matemáticas que podría ser aplicable en parte al profesor y, consecuentemente, a su formación.

2.2.3 El estudio TIMSS

TIMSS[1] es un proyecto de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) que evalúa desde 1995, cada cuatro años, el progreso de una serie de países en educación matemática y científica. Este estudio se centra en el alumnado de 4º y 8º grado (4º de primaria y 2º de ESO, en España) y recoge información sobre estudiantes, profesores y escuelas en torno al currículo y el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y las ciencias. El estudio permite conocer el progreso de una cohorte de alumnos, los que hicieron la prueba en 4º grado la vuelven a realizar en 8º grado. El último TIMSS se ha realizado en 2011 y han

---

1 TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study

participado alrededor de 60 países, entre ellos España (aunque sólo se ha evaluado a los alumnos de 4º de primaria[1]). Los resultados se conocerán a finales de 2012.

En cada uno de los grados estudiados la evaluación de los conocimientos matemáticos se organiza en torno a dos dimensiones, los dominios de contenido (por ejemplo: números, álgebra, geometría y datos son los dominios estudiados en 8º grado) y la dimensión cognitiva que evalúa los procesos de pensamiento (en ambos grados estos dominios son conocimiento, aplicación y razonamiento). El dominio cognitivo describe el conjunto de comportamientos que esperamos de los estudiantes cuando están trabajando con un contenido matemático. En la tabla 2.2.3.1 vemos el peso de cada uno de los dominios en la prueba TIMSS 2011.

Los dominios de contenido difieren en ambos grados porque reflejan la naturaleza y dificultad de las matemáticas que los alumnos de estos cursos deben aprender en sus escuelas. Los dominios cognitivos son muy importantes en este estudio porque reflejan las habilidades necesarias que debe dominar un estudiante de esa edad que esté resolviendo una tarea matemática de cualquiera de los contenidos evaluados. El dominio Conocimiento trata los hechos, conceptos y procedimientos que los estudiantes deben conocer. El segundo, Aplicación, se centra en la habilidad para aplicar los conocimientos conceptuales para resolver problemas y contestar preguntas. El tercer dominio, Razonamiento, va más allá de la resolución de problemas rutinarios y llega hasta el planteamiento de situaciones no familiares en contextos complejos o problemas de varias

[1] Datos del INEE, Instituto Nacional de Evaluación Educativa: http://www.educacion.gob.es/ievaluacion/estudios/timss0.html

etapas. Tanto en 4º grado como en 8º, cada dominio de contenido incluye ítems de cada uno de los tres dominios cognitivos.

Dominios de contenido	**Porcentaje**	**Dominios cognitivos**	**Porcentaje**
4º Grado			
Números	50%	Conocimiento	40%
Formas geométricas y Medida	35%	Aplicación	40%
Datos	15%	Razonamiento	20%
8º Grado			
Números	30%	Conocimiento	35%
Geometría	20%	Aplicación	40%
Álgebra	30%	Razonamiento	25%
Datos	20%		

Tabla 2.2.3.1 – Porcentajes de cada dominio TIMSS 2011[1]

Podemos establecer una relación entre los dominios cognitivos del estudio TIMSS y las competencias PISA y, al igual que en el epígrafe anterior, podemos caracterizar algunos indicadores que permiten evaluar cada dominio cognitivo. En las siguientes tablas dividimos en subdominios los dominios Conocimiento, Aplicación y Razonamiento y les asignamos indicadores a cada uno:

[1] Fuente: TIMSS 2011 Mathematics Framework, accesible en: http://timss.bc.edu/timss2011/frameworks.html

Conocimiento	
Subdominio	**Indicadores**
1- Recordar	Recordar definiciones, terminología, propiedades numéricas y geométricas, notación.
2- Reconocer	Reconocer objetos matemáticos (formas, números, expresiones y cantidades). Reconocer equivalencias entre objetos matemáticos.
3- Calcular	Calcular procedimientos algorítmicos con números enteros, fraccionarios, decimales y racionales. Aproximar y estimar. Resolver procedimientos algebraicos rutinarios.
4- Interpretar	Interpretar información de gráficos, tablas y otras fuentes. Leer escalas simples.
5- Medir	Usar instrumentos de medida y elegir las unidades de medida adecuadas.
6- Clasificar/ ordenar	Clasificar objetos, formas, números y expresiones según sus propiedades comunes. Ordenar números y objetos.

Tabla 2.2.3.2 – Indicadores del dominio Conocimiento

Aplicación	
Subdominio	**Indicadores**
1- Seleccionar	Seleccionar un método/operación/estrategia apropiado y eficiente para resolver un problema.
2- Representar	Representar en un diagrama, tabla, gráfico informaciones matemáticas y generar representaciones equivalentes.
3- Modelizar	Generar un modelo apropiado, como una ecuación, figura geométrica o un diagrama, para resolver problemas rutinarios.
4- Reproducir	Reproducir una serie de instrucciones matemáticas (construir figuras o diagramas según unas especificaciones dadas).
5-Resolver problemas rutinarios	Resolver problemas como los de la escuela, en contextos puramente matemáticos o familiares.

Tabla 2.2.3.3 – Indicadores del dominio Aplicación

Razonamiento	
Subdominio	**Indicadores**
1- Analizar	Determinar, describir o usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas y hacer inferencias válidas de la información dada.
2- Generalizar	Extender el dominio de validez de un resultado o un problema para hacerlo más general.
3-Sintetizar/ Integrar	Conectar diferentes elementos y representaciones, relacionar ideas matemáticas. Combinar hechos, conceptos o procedimientos para establecer resultados y combinar resultados para ir más allá.
4- Justificar	Justificar un resultado matemático o una propiedad.
5-Resolver problemas no rutinarios	Resolver problemas reales o matemáticos donde deben aplicar conceptos y procedimientos matemáticos en contextos complejos o no familiares.

Tabla 2.2.3.4 – Indicadores del dominio Razonamiento

El marco teórico utilizado en el estudio TIMSS es el mismo que sirve de referencia para el programa de evaluación del profesorado de primaria y secundaria, TEDS-M (*Teacher Education Study in Mathematics*), que hemos usado como fundamentación de esta investigación y describimos detalladamente en el capítulo 3.

2.2.4 El Grado de Magisterio en Educación Primaria de la UAM

La formación del docente por competencias se ha impuesto como una novedad pedagógica que responde a un mundo globalizado, y más específicamente, al marco de la Unión Europea. Es importante distinguir tres grandes tipos de competencias que influyen en el proceso de adaptación de las titulaciones de Magisterio al EEES (Espacio Europeo de Educación Superior):

1º. Las que responden a la Ley Orgánica 5/2002, de 19 de junio, de las Cualificaciones y de la Formación Profesional, cuyo objetivo es que todos los alumnos tengan la posibilidad de una inserción socio-laboral satisfactoria, para lo que se establece un Catálogo Nacional de Cualificaciones Profesionales.

2º. Las establecidas por la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo de Educación y por el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*,* que desarrolla el artículo 6.2. de dicha ley.

3º. Las propias de la formación universitaria establecidas en los libros blancos y desarrolladas por las diferentes universidades en su planes de estudio y basadas en la Ley orgánica 4/2007 de 12 de abril por la que se modifica la Ley orgánica 6/2001 de 21 de diciembre de Universidades.

Dentro de este marco legal hay que situar el desarrollo del Grado de Magisterio en Educación Primaria en la Universidad Autónoma de Madrid, cuyas competencias específicas en la materia de matemáticas vamos a resumir a continuación. Antes, vamos a intentar clarificar conceptualmente el término competencia a partir del análisis de distintas definiciones que tienen en común su amplitud dimensional (abarcan dimensiones conceptuales, procedimentales y actitudinales), su carácter operativo y contextual, ya que son saberes para la acción y adaptables a contextos específicos. A continuación se recogen, por orden cronológico, diferentes conceptos de competencia.

El concepto de competencia	
Autor/a y año	**Definición**
Kane, 1992	Grado de utilización de los conocimientos, las habilidades y el buen juicio asociados a la profesión, en todas la situaciones que se pueden confrontar en el ejercicio de la práctica profesional
Bunke, 1994	Posee competencias profesionales quien dispone de los conocimientos, destrezas y actitudes necesarias para ejercer una profesión, puede revisar los problemas profesionales de forma autónoma y flexible y está capacitado para colaborar en su entorno profesional y en la organización del trabajo
RD 797/1995[1]	Capacidad de aplicar conocimientos, destrezas y actitudes al desempeño de la ocupación que se trate, incluyendo la capacidad de respuesta a problemas, imprevistos, la autonomía, la flexibilidad, la colaboración con el entorno profesional y con la organización del trabajo
Levy-Leboyer, 1996	Repertorios de comportamientos que algunas personas dominan mejor que otras, lo que las hace eficaces en una situación determinada
INEM, 1996	Las competencias profesionales definen el ejercicio eficaz de las capacidades que permiten el desempeño de una ocupación, respecto a los niveles requeridos en el empleo. Es algo más que el conocimiento técnico que hace referencia al saber y al saber-hacer. El concepto de competencia engloba no sólo las capacidades requeridas para el ejercicio de una actividad profesional sino también un conjunto de comportamientos, facultad de análisis, toma de decisiones, transmisión de información, etc., considerados necesarios para el pleno desempeño de la ocupación
Stephenson y Yorke, 1998	Integración de conocimientos, habilidades, cualidades personales y comprensión utilizadas adecuadamente y efectivamente tanto en contextos familiares como en circunstancias nuevas y cambiantes

[1] Real Decreto 797/1995 del Ministerio de Trabajo y Seguridad Social para establecer las directrices sobre certificados de profesionalidad

OIT, 2000	Capacidad efectiva para llevar a cabo exitosamente una actividad laboral plenamente identificada. Las competencias son el conjunto de conocimientos, procedimientos y actitudes combinados, coordinados e integrados en la acción adquiridos a través de la experiencia (formativa y no formativa) que permite al individuo resolver problemas específicos de forma autónoma y flexible en contextos singulares
Lasnier, 2000	Saber hacer complejo resultado de la integración, movilización y adecuación de capacidades y habilidades (pueden ser de orden cognitivo, afectivo, psicomotor o sociales) y de conocimientos (conocimientos declarativos) utilizados eficazmente en situaciones que tengan un carácter común (situaciones similares, no generalizable a cualquier situación)
Weinert, 2001	Implica tener una habilidad respecto a un dominio básico pero, sobre todo, implica regulación, monitorización y capacidad de iniciativa en el uso y desarrollo de dicha habilidad
Kellerman, 2001	Capacidad para desarrollar con éxito una acción determinada, que se adquiere a través del aprendizaje
Prieto, 2002	Ser capaz, estar capacitado o ser diestro en algo. Las competencias tienden a transmitir el significado de lo que la persona es capaz de o es competente para ejecutar, el grado de preparación, suficiencia o responsabilidad para ciertas tareas
Roe, 2002	Habilidad aprendida para llevar a cabo una tarea, deber o rol adecuadamente. Tiene dos elementos distintivos: está relacionada con el trabajo específico en un contexto particular e integra diferentes tipos de conocimientos, habilidades y actitudes. Se adquiere mediante el learning-by-doing. A diferencia de los conocimientos, habilidades y actitudes, no se pueden evaluar independientemente. También hay que distinguir las competencias de rasgos de personalidad, que son características más estables del individuo
Proyecto DeSeCo de la OCDE, 2002	Capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz (proyecto Definición y Selección de Competencias)

González y Wagenaar, 2003	Representan una combinación dinámica de atributos, en relación al conocimiento y su aplicación, a las actitudes y responsabilidades, que describen los resultados de aprendizaje de un determinado programa o cómo los estudiantes serán capaces de desarrollarse al final del proceso educativo
Perrenoud, 2004	Aptitud para enfrentar eficazmente una familia de situaciones análogas, movilizando a conciencia y de manera rápida, pertinente y creativa, múltiples recursos cognitivos: saberes, capacidades, micro-competencias, informaciones, valores, actitudes, esquemas de percepción, de evaluación y de razonamiento
Fernández, 2005	Saber hacer complejo que exige un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, valores y virtudes que garantizan la bondad y eficiencia de un ejercicio profesional responsable y excelente
Mateo, 2007	Capacidad de usar funcionalmente los conocimientos y habilidades en contextos diferentes. Implica comprensión, reflexión y discernimiento, teniendo en cuenta simultánea e interactivamente la dimensión social de las actuaciones a realizar
Collis, 2007	Integración de conocimientos, habilidades y actitudes de forma que nos capacita para actuar de manera efectiva y eficiente

Tabla 2.2.4.1 – Definiciones de competencia[1]

Del análisis de estas definiciones se deduce que los conocimientos adquiridos mediante una programación de actividades de enseñanza- aprendizaje darán lugar a un "*saber hacer*" contextualizado. Algunos autores se centran en este aspecto pragmático de la educación y parecen olvidar otras funciones, por eso nos interesa el enfoque de Lasnier (2000), que muestra una visión integral del individuo, ya que hace referencia al orden cognitivo, afectivo, psicomotor y social de la persona.

---

[1] FUENTE: Cano García, M. E. *La evaluación por competencias en la educación superior*, 2008.

Resumimos ahora las competencias específicas de la materia Matemáticas en el grado de Magisterio en Educación Primaria por la UAM. Cada competencia se desglosa en varias sub-competencias, capacidades que la integran:

COMPETENCIAS MATERIA MATEMÁTICAS	**SUBCOMPETENCIAS**
1. Adquirir competencias matemáticas básicas	1.1- Adquirir competencias numéricas y de cálculo. 1.2- Adquirir competencias geométricas y de representación espacial. 1.3- Adquirir competencias sobre estimación y medida. 1.4- Adquirir competencias sobre organización e interpretación de la información.
2. Conocer el currículo escolar de matemáticas.	2.1- Conocer y saber seleccionar objetivos, contenidos, procedimientos y actividades adecuados a cada ciclo y curso. 2.2- Conocer cómo contribuyen las matemáticas al desarrollo de las competencias básicas de los alumnos de primaria.
3. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.	3.1- Analizar y entender de forma crítica las propuestas matemáticas del profesor y los compañeros. 3.2- Saber comunicar los resultados matemáticos propios ante los demás, argumentando razonadamente.
4. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.	4.1- Saber plantear problemas reales adecuados para la etapa de Primaria. 4.2- Aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos a la resolución de problemas vinculados con la vida cotidiana.
5. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.	5.1- Reconocer el conocimiento científico como un hecho cultural. 5.2- Valorar el aporte de las matemáticas al desarrollo de las ciencias y al progreso de la humanidad.

6. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.	6.1- Saber integrar la evaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje y utilizarla como un recurso de este proceso. 6.2- Diseñar modelos de retroalimentación positiva y negativa en la integración de la evaluación en el proceso de E-A.

Tabla 2.2.4.2 – Competencias y subcompetencias matemáticas de Magisterio en Ed. Primaria (UAM)[1]

En esta tabla se recogen las subcompetencias didáctico-matemáticas necesarias para la formación de los futuros maestros. Sin embargo, la subcompetencia 1.2, que nosotros llamaremos *competencia geométrica*, se puede descomponer en otras capacidades que en la literatura especializada se han estudiado necesarias para desarrollarla plenamente en situaciones de resolución de problemas, como las que vamos a plantear en nuestra investigación. Siguiendo a Iranzo (2009) vamos a caracterizar las cuatro competencias geométricas siguientes: visualización, modelización, resolución y justificación.

- La competencia de visualización, según Gutiérrez (1996) es una acción física o mental en la que las imágenes mentales están involucradas. Integra dos procesos: la creación de imágenes mentales y la interpretación de estas imágenes para producir información.
- La competencia de modelización consiste en dar una estructura matemática a un problema propuesto. Según PISA "*it involves structuring the field or situation to be modelled; translating reality into mathematical structures in context that may be complex or largely different from*

[1] FUENTE: Memoria proyecto innovación docente, *Evaluación continua de las competencias en Matemáticas, Ciencias Sociales y Ciencias Experimentales en los títulos de Maestro de Educación Primaria e Infantil.* Accesible en: http://www.uam.es/europea/proyectosymemoriaslinea22009.html

what students are familiar with; interpreting back and forth between models (and their results) and reality, including aspects of communication about model results: gathering information and data, monitoring the modeling process and validating the resulting model. It also includes reflecting through analysing, offering a critique and engaging in more complex communication about models and modelling" (OECD, 2006, p.107).

- La competencia de resolución incluye la búsqueda de procedimientos que permiten al alumno resolver el problema planteado, tales como investigar las propiedades de las figuras, buscar casos particulares, buscar contraejemplos, suponer el problema resuelto, elaborar conjeturas y probarlas, comprobar las soluciones, etc.
- La competencia de justificación incluye dos tipos: justificaciones empíricas y deductivas (Balacheff, 1998). Las primeras se basan en la comprobación para unos cuantos ejemplos de las propiedades que quieren justificarse y las segundas incluyen razonamientos deductivos más formales. También incluimos aquí la comunicación de los razonamientos, tanto orales como escritos o mediante gráficos, esquemas, dibujos o figuras dinámicas.

Ahora que hemos analizado el término competencia y hemos llegado a concretar los tipos de competencias geométricas y didácticas que sería deseable que desarrollaran los estudiantes de magisterio en su formación inicial, vamos a repasar las investigaciones realizadas sobre el aprendizaje de la geometría en entornos dinámicos, para intentar enfocar las ventajas e inconvenientes de su utilización respecto a otros métodos de enseñanza tradicionales.

2.3 Investigaciones sobre el Software de Geometría Dinámica como recurso didáctico

Preiner (2008) realiza una revisión de la evolución del software educativo señalando el final de la década de los ochenta como el momento en que comienza la demanda educativa de software de uso sencillo, que no resulte un obstáculo añadido y permita centrarse en los objetos de estudio más que en la tecnología. Aparecen así el primer software de geometría dinámica (SGD[1]), Cabri y de álgebra computacional (CAS), Derive.

Un SGD permite construir y modificar dinámicamente figuras geométricas euclídeas. Las propiedades geométricas y las relaciones entre objetos usados en una construcción se mantienen al manipular un objeto y además se modifican los objetos dependientes en consecuencia. Actualmente disponemos de un nutrido conjunto de SGD, unos con licencia y otros libres, tales como Cinderella (www.cinderella.de), Geometer's Sketchpad (www.keypress.com/skeschpad), Cabri géomètre II+ (www.cabri.com), Geonext (http://geonext.uni-bayreuth.de), Regla y Compás o C.a.R (http://matematicas.uis.edu.co/~marsan/geometria/RyC/home.htm), GEUP (www.geup.net), GeoGebra (www.geogebra.org). En el siguiente punto nos dedicaremos más exhaustivamente a la descripción de GeoGebra y a la justificación de por qué lo hemos elegido para realizar esta investigación.

Según González-López (2001) el uso de un SGD en la enseñanza de la geometría cambia la naturaleza del conocimiento que se trabaja respecto al

---

[1] Las siglas SGD, en español, son homólogas a DGS, en inglés, usadas para Dynamic Geometry Software. Las siglas CAS hacen referencia a Computer Algebra System: transforma simbólicamente álgebra, geometría analítica y cálculo.

contexto de lápiz y papel. La geometría dinámica se centra en el estudio de las propiedades invariantes que posee una determinada construcción geométrica, propiedades que el usuario puede observar o predecir manipulando la figura: *" En este contexto, el SGD no es un simple medio de interacción entre el alumno y los objetos matemáticos representados, sino que funciona modificando la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto de la enseñanza geométrica tradicional con lápiz y papel; tiene unos condicionantes claros sobre las acciones de los alumnos y, en consecuencia, influye en la modificación de sus concepciones y en el aprendizaje que éstos realizan (Assude y Capponi, 1996)"* (González-López, 2001, p. 274)

La singularidad del aprendizaje geométrico en un entorno SGD está determinada por el carácter dinámico de los objetos. Para entender bien la complejidad que esto encierra hay que detenerse en la diferenciación entre los conceptos de *dibujo* y *figura* y en la importancia del *arrastre*. Laborde y Capponi (1994) definen el término figura como el conjunto de relaciones que se establecen entre un objeto geométrico y todos los dibujos que le están asociados. De acuerdo con Strässer (1992), el arrastre (dragging, en inglés) ofrece una mediación entre la figura y el dibujo, de forma que en una figura se mantienen sus propiedades cuando se ve sometida a arrastre. Otros autores (Arzarello, 2002) han investigado sobre los distintos tipos de arrastre que pueden emplearse en contextos de resolución de problemas y en los proceso cognitivos que implica su utilización. Sobre este tema profundizaremos más en el siguiente capítulo, cuando sentemos las bases de nuestro marco teórico.

Otro aspecto intrínseco al trabajo con un SGD es la respuesta del software a las acciones del usuario. En este sentido, Laborde (1998) introduce el término *retroacción* para definir la interacción que se produce entre el alumno y el SGD (Cabri en este caso), que le devuelve una información sobre su construcción, lo que provoca en el alumno una respuesta que le permite progresar en la adquisición de conocimientos. Lo importante es que la retroacción provenga del SGD y sea independiente del profesor.

Como estamos viendo, la integración de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas requiere especial atención en varios aspectos. Uno de ellos es la influencia que puede tener un SGD en el razonamiento deductivo y en la capacidad de demostrar o justificar propiedades geométricas. Encontramos autores que mantienen que un entorno de geometría dinámica puede promover justificaciones empíricas que inhiben la necesidad de demostraciones formales (González-López, 2001; Healy, 2000), aunque proporciona un entorno en el que los estudiantes pueden experimentar libremente, lo que les lleva a desarrollar formas no tradicionales de aprendizaje de procedimientos y conceptos matemáticos. Otros autores creen que los SGD benefician a los estudiantes porque facilitan la visualización, la exploración y los procesos de comprensión necesarios para formular conjeturas, lo que implica que mejoren las habilidades de argumentación y demostración (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004; De Villiers, 1997; Jones, Gutiérrez, & Mariotti, 2000; Marrades & Gutiérrez, 2000). Este es el tipo de cuestiones que queremos abordar en nuestra investigación, tratando de contrastar y profundizar en los resultados encontrados en estudios previos.

En cualquier caso, hay unanimidad entre los investigadores en que la integración de los SGD en la educación en todos los niveles debe ser estudiada cuidadosamente, prestando mucha atención al diseño de tareas adecuadas y elaborando procesos de enseñanza donde se tengan en cuenta los siguientes aspectos:

- **La función del profesor (orquestación)**

Según García-López (2011), la integración de los SGD en las aulas es función de los profesores que previamente se deben plantear el modo de hacerlo eficazmente, para que sea coherente con su propia visión del proceso de enseñanza-aprendizaje. De ello dependerá la selección y diseño de las tareas que se trabajarán en el aula con estos recursos. La autora propone utilizar un modelo de enseñanza dentro de las teorías constructivistas, el aprendizaje por descubrimiento guiado: "*En este modelo el profesor debe proporcionar el material adecuado y estimular a los estudiantes para que, mediante la observación, la comparación, el análisis de semejanzas y diferencias, etc., lleguen a descubrir de un modo activo los contenidos seleccionados por el profesor. La actividad del alumno no supone la inactividad del profesor, al contrario, desde esta perspectiva es precisamente la intervención del profesor la que determina que la actividad del alumno sea más o menos constructiva*" (García-López, 2011, p. 56). En este marco, el uso de SGD facilita la participación de los estudiantes, la reflexión sobre diferentes aproximaciones al mismo problema, la formulación de conjeturas basadas en exploraciones y por último, el desarrollo de demostraciones más formales.

En relación al posible obstáculo que puede suponer el uso de software de geometría dinámica para fundamentar la necesidad de justificar y probar propiedades o soluciones a problemas, De Villiers (2007) recomienda introducir la prueba no como una forma de comprobación, sino como un medio de explicación, de comprensión y descubrimiento, antes de llegar al concepto formal y abstracto de demostración.

Los profesores que oponen resistencia al uso de SGD en sus clases pueden sentir que pierden parte del control que ejercen cuando siguen métodos más tradicionales de enseñanza, ya que la organización del aula debe ser diferente y los alumnos tienen más autonomía para tomar decisiones. Además deben conocer no sólo el funcionamiento del software, sino también una gran variedad de procedimientos que pueden encontrar entre sus alumnos (Laborde, 2001).

Desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), antes de enseñar matemáticas con geometría dinámica debemos *hacer* matemáticas con geometría dinámica. Es decir, la integración de los SGD en la enseñanza de las matemáticas obliga a que los profesores incluyan los objetos computarizados (figuras) en las tareas, las técnicas y las tecnologías que deben construir (la praxeología). Para esto se debe tener en cuenta el proceso de *transposición informática*, que es la transformación sufrida por los objetos matemáticos para posibilitar su modelización en un lenguaje de programación. Ese proceso impone necesariamente restricciones que hacen que los objetos modelizados no correspondan completamente con los objetos geométricos (Acosta Gempeler, 2005; 2007).

En nuestra investigación, hemos decidido utilizar como marco teórico para la integración de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje geométrico la teoría de la instrumentación de Rabardel y Verillon (1995) (esta teoría está explicada en el epígrafe 3.2). Desde esta perspectiva se muestra la complejidad de lo que los autores llaman *génesis instrumental*, necesaria para conseguir que el software empleado se convierta para los usuarios en un verdadero instrumento que les permita resolver las tareas planteadas. Aquí el papel del profesor, llamado *orquestación* (Trouche, 2004), es fundamental para guiar el proceso de génesis instrumental individual y colectiva de sus alumnos, ya que puede influir privilegiando el uso de unas técnicas o procedimientos por encima de otros.

- **Tipos de tareas**

Hemos visto como muchas investigaciones inciden en la importancia de las tareas planteadas para obtener resultados que desarrollen todas las potencialidades del uso de un SGD en la enseñanza de las matemáticas. Una de las autoras más destacadas en el uso de Cabri es Colette Laborde que realiza una clasificación muy interesante sobre los tipos de actividades que utilizan cuatro profesores de secundaria con distintos perfiles (según su experiencia docente y de uso de las TICE[1]). Laborde (2001) clasifica las actividades diseñadas por los profesores según el papel que juega Cabri en ellas:

- Actividades que facilitan aspectos materiales de la tarea, pero que son iguales a las realizadas con lápiz y papel
- Actividades que facilitan la tarea matemática: de observación previa para hacer conjeturas
- Tareas que se modifican cuando se hacen con Cabri ya que requieren más conocimientos matemáticos (p. e. hacer un cuadrado)
- Tareas propias de Cabri, que necesitan el dinamismo para ser resueltas y no pueden realizarse con lápiz y papel (tareas de caja negra y de predicción).

Según González-López (2001) lo importante en la elección de las actividades por parte del profesor es analizar las implicaciones que conllevan. Teniendo esto en cuenta propone la siguiente clasificación:

- Figuras geométricas: son construcciones en las que el alumno debe hacer explícito el conocimiento geométrico necesario para realizarlas.

---

[1] TICE: Tecnologías de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación.

- Propiedades geométricas: actividades para explorar, conjeturar y demostrar experimentalmente. Si se observa que la propiedad es cierta en todas las posiciones de la figura no podemos deducir que se ha demostrado, pero la constatación visual puede motivar o inspirar la prueba formal.
- Lugares geométricos: es un complemento visual para constatar un lugar geométrico, algún elemento de la construcción puede dejar la traza (huella visual de su trayectoria).
- Simulación: combinando geometría y cinemática se pueden simular mecanismos físicos cotidianos, como poleas, manivelas, etc.
- Actividades interdisciplinares: combinando el SGD con otras herramientas analíticas, hojas de cálculo, etc.

En esta investigación hemos seguido estas recomendaciones para diseñar el taller de GeoGebra que se describe en el Capítulo 5. En el epígrafe 5.3 se encuentran detalladas las actividades propuestas a los sujetos participantes clasificadas en tres categorías: actividades de construcción de figuras, actividades de comprobación de propiedades y actividades de conjetura e investigación.

- **Trabajo colaborativo**

Hablamos de trabajo colaborativo cuando nos referimos a procesos metodológicos basados en el descubrimiento del conocimiento por parte de los estudiantes a través de la interacción con el medio, para reconstruirlo con posterioridad a partir de nuevas experiencias de aprendizaje (Codina, 2008). Según García-López (2011), citando a Calzadilla (2001): *"el aprender en forma colaborativa permite al individuo recibir retroalimentación y conocer mejor su ritmo y estilo de aprendizaje, lo que facilita la aplicación de estrategias metacognitivas para regular el* *desempeño y optimizar el rendimiento; por otra parte este tipo de aprendizaje incrementa la motivación, pues genera en los individuos fuertes sentimientos de pertenencia y cohesión, a través de la identificación de metas comunes y atribuciones compartidas, lo que incidirá directamente en su autoestima y desarrollo"* (García-López, 2011, p.61).

En el entorno SGD es habitual realizar trabajo colaborativo con alumnos organizados en tríos o parejas, ocupando un mismo ordenador y realizando las actividades cooperativamente. Hay numerosas investigaciones que aportan información sobre las ventajas del trabajo colaborativo frente al individual (García-López, 2011; Murillo, 2001; Sordo, 2005), llegando algunas incluso a afirmar que las interacciones entre los integrantes del equipo han sido mucho más importantes en el ambiente de trabajo de lo que el investigador había esperado (Sinclair, 2005) y que el aprendizaje podría no haberse producido si se hubiese realizado la tarea de forma individual (Sfard & Kieran, 2001).

Adaptando a Martí (1997), recogemos ahora los principales aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje que se ven favorecidos en un entorno de trabajo colaborativo mediante un SGD:

- Confrontación de puntos de vista, intercambio de argumentaciones y reconsideración del propio punto de vista. Resolución de conflictos y divergencias.
- Distribución de roles, lo que permite resolver tareas de más complejidad.
- Desarrollo de competencias de comunicación que sirven para clarificar y profundizar más en los conceptos.
- Procesos conjuntos de toma de decisión y elaboración de posibles soluciones a problemas.

- Trabajo autónomo de las parejas bajo la orientación y guía del profesor.

En nuestra investigación hemos elegido el trabajo colaborativo en parejas de estudiantes por todas estas razones y por nuestra propia experiencia en trabajos anteriores que nos han mostrado las ventajas de este tipo de interacciones entre pares. Los estudiantes, además, muestran preferencia por el trabajo en pareja: más de un 53% elige esta opción en la encuesta que pasamos después de un taller piloto de GeoGebra realizado el curso 2009-2010 (Ruiz-López, 2011a).

2.3.1 Los SGD y la formación de profesorado

No hay muchas investigaciones realizadas sobre la influencia de los SGD en la formación de profesorado de matemáticas y las que hay son fundamentalmente referidas al profesorado de educación secundaria. Vamos a repasar ahora los resultados de algunos estudios llevados a cabo en este campo.

Güven y Kosa (2008) estudian el efecto que produce Cabri 3D en el desarrollo de la capacidad de visualización espacial de estudiantes de profesorado de matemáticas a partir de una intervención en un entorno de resolución de problemas. Estos alumnos partían de un nivel bajo de visualización espacial y consiguen mejorarlo sustancialmente después de trabajar con Cabri 3D, sobre todo mejoran en las tareas de visualización de rotaciones (se analizaron también desarrollos planos de sólidos y vistas en distintas perspectivas).

Pandiscio (2001) realiza un estudio de casos para evaluar la percepción que tienen futuros profesores de secundaria sobre la necesidad y los beneficios de las demostraciones geométricas formales. Encuentra que los sujetos de la investigación no creen que los estudiantes de secundaria tengan necesidad de realizar una prueba formal después del uso de un SGD, aunque reconocen la diferencia entre la comprobación de una propiedad en múltiples casos y la demostración general. También Jiang (2002) ha estudiado como cambia un SGD, Geometer's Sketchpad en este caso, las concepciones que tienen futuros profesores de secundaria sobre las matemáticas y su enseñanza. Después de seguir un método constructivista de resolución de problemas geométricos, encuentra que los estudiantes mejoran su razonamiento y sus habilidades de demostración de propiedades y teoremas. De igual forma Haja (2005) investiga la competencia en resolución de problemas de cuatro futuros profesores de secundaria, cuando exploran problemas geométricos con Cabri II. Los resultados avalan que han adquirido los conocimientos adecuados de los contenidos geométricos, que son suficientemente competentes para construir las figuras dinámicas, que pueden aplicar sus conocimientos geométricos para conjeturar y que son capaces de usar el SGD para justificar las soluciones encontradas.

Encontramos otras investigaciones sobre el uso de geometría dinámica con profesores en ejercicio, por ejemplo Scaglia (2008) utiliza un marco de investigación-acción para desarrollar un taller de GeoGebra con profesores de primaria, dentro de un curso de capacitación profesional. Se describen los factores que condicionan la gestión de la clase por parte del profesor cuando se utiliza un SGD y se analizan las actividades propuestas en el taller. La reflexión final invita a profundizar en la formación inicial y continua del profesorado, ya que el uso de SGD en la escuela no sólo cambiará las relaciones entre el aprendiz y su entorno simbólico, sino también las relaciones entre el profesor y su entorno de trabajo (Balacheff, 2000).

En cuanto a formación inicial de profesores de primaria, encontramos varias publicaciones en el seno del grupo de investigación *Aprendizaje de la Geometría* de la SEIEM. El profesor Ricardo Barroso expone una investigación realizada desde el paradigma de investigación-acción donde analiza si el uso de Cabri II ayuda a la comprensión de propiedades geométricas en un entorno de resolución de problemas con futuros maestros de Primaria. Se detiene en la elección de los problemas que deben cumplir varias condiciones: que se resuelvan realizando una construcción (no un dibujo), que el enunciado sea sencillo aunque con aspectos novedosos para los resolutores, que se puedan elaborar distintas estrategias de resolución y que permitan desarrollar aspectos importantes del análisis geométrico como la descomposición, recomposición, síntesis geométrica, comprobación inductiva, etc. (Barroso, 2003; Barroso, 2004)

Vemos que aunque no hay muchos estudios referentes a la formación inicial del profesorado de Primaria, pueden extrapolarse algunas conclusiones de los realizados con futuros profesores de secundaria. Aunque debemos tener cuidado porque la formación inicial del profesorado en ambas etapas es muy diferente en España: mientras que los profesores de secundaria reciben una formación muy intensa en contenidos matemáticos, los futuros maestros tienen una formación mucho más limitada en conocimientos disciplinares mientras que desarrollan los didácticos (generales y específicos) de forma más extensa que los profesores de secundaria. Por lo tanto, creemos que hace falta seguir investigando los aspectos relacionados con la adquisición de competencias didáctico-geométricas y el uso de SGD en estudiantes de magisterio, en concreto vamos ahora a centrarnos en GeoGebra, que es el software que hemos elegido.

2.3.2 GeoGebra

GeoGebra puede considerarse un Software de Matemática Dinámica (SMD) porque, además de tener las posibilidades de un SGD, incluye otras particularidades algebraicas y de cálculo que permiten relacionar varias áreas matemáticas. En nuestro caso hemos empleado GeoGebra fundamentalmente para resolver problemas de geometría por lo que lo denominaremos con las siglas SGD. La idea básica de los creadores y desarrolladores de este software (Hohenwarter, 2002; Hohenwarter et al., 2009) ha sido unir geometría, álgebra y cálculo (las distintas representaciones de un mismo objeto se conectan dinámicamente) en un único programa de uso intuitivo que permita la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Las características técnicas de GeoGebra son muy interesantes. Es un software libre (con licencia GPL que permite cualquier uso no comercial) que tienen versiones para todos los sistemas operativos Windows, Mac OS y GNU/Linux (32bit/64bit). Ejecuta un archivo Java (geogebra.jar) y almacena cada uno de las construcciones en un archivo XML de extensión ggb. Estos archivos se pueden exportar como dibujos, imágenes o páginas web dinámicas, llamadas applets.

En la página web www.geogebra.org podemos descargar GeoGebra y toda la documentación necesaria para su uso, además de poder consultar dudas en varios idiomas en los foros y compartir recursos docentes y construcciones en el repositorio (GeoGebraTube). Aquí encontraremos siempre la última versión[1] disponible del programa, porque continuamente se está adaptando a las necesidades de los usuarios.

Una vez descargado el programa, nos encontramos con una interfaz dinámica e interactiva, desde donde se pueden diseñar, programar y ejecutar acciones y obtener resultados matemáticos de distinta naturaleza: gráficos (interactivos), cálculos, simulaciones, etc. En la figura 2.3.2.1 podemos ver la apariencia de esta interfaz y las distintas partes que componen la ventana. Las zonas de trabajo disponibles son:

- Barra de herramientas: para seleccionar el objeto con el que se quiere trabajar. Contiene las herramientas de construcción.
- Zona gráfica: para construir la figura con la ayuda del ratón, con actualización dinámica en la ventana de álgebra. La figura puede moverse arrastrando con el ratón sobre los elementos libres.
- Zona o ventana de álgebra: en ella se muestran las coordenadas o ecuaciones correspondientes. Es importante saber que un objeto creado en la zona gráfica tiene su representación correspondiente en la Ventana de álgebra.
- Zona de entradas o Campo de texto: para introducir directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones. En este caso los objetos o gráficas correspondientes aparecen en la Zona gráfica al pulsar *Intro*.

[1] En la investigación que describimos en esta tesis, se usó la versión 3.2

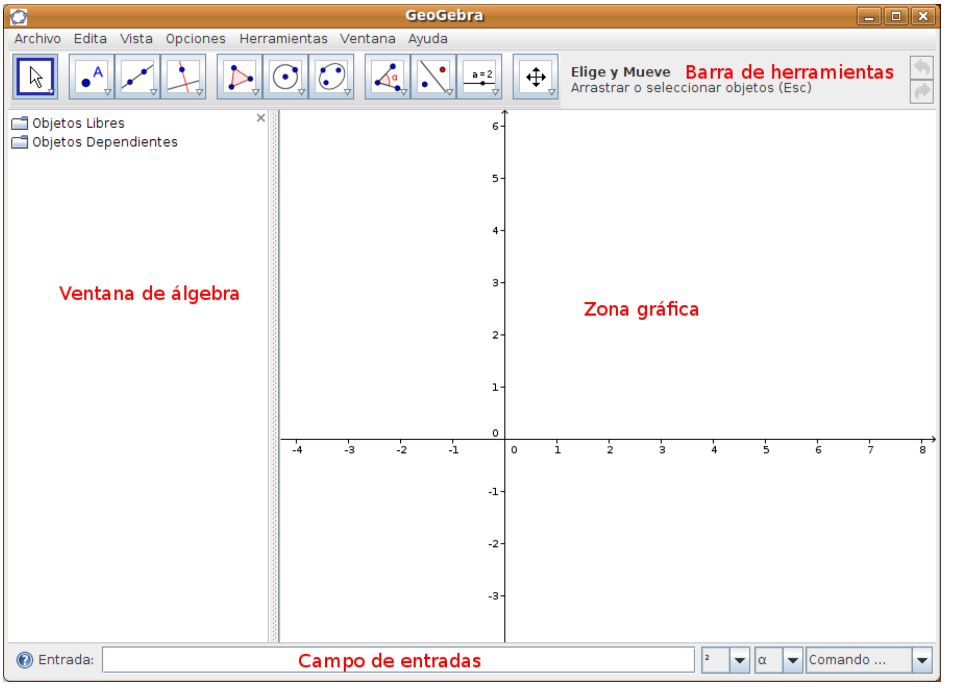


Figura 2.3.2.1 – Interfaz de GeoGebra

La lista de comandos disponibles se puede visualizar haciendo clic en la flecha junto al texto comando en la esquina inferior derecha de la ventana. Existe además una zona llamada Hoja de cálculo. En esta zona o vista cada celda se identifica por su fila y columna. En las celdas se pueden incluir números, coordenadas de puntos, funciones, etc. y si tienen correspondencia gráfica se verá en la zona gráfica (Mifsud, 2010).

Una característica fundamental a la hora de haber elegido GeoGebra para realizar nuestra investigación ha sido la enorme vitalidad de la comunidad de usuarios, que no para de crecer y de intercambiar recursos, realizar congresos y jornadas[1] para difundir sus logros y desarrollar el software para adaptarlo a

[1] Entre julio de 2012 y mayo de 2013 hay previstos en torno a 35 seminarios, talleres, congresos, etc., relacionados con GeoGebra, además de participar en las principales reuniones de matemáticas como el ICME 2012. En la página http://www.geogebra.org/cms/es/events se pueden consultar.

nuevos soportes (tabletas, móviles, netbooks). Los institutos de GeoGebra son los encargados de la formación docente y la difusión de novedades. En la figura 2.3.2.2 vemos los que existen en este momento, aunque continuamente se están creando otros nuevos en cualquier región del mundo. En España existen en la actualidad siete, en Andalucía, Cantabria, Castilla la Mancha, Cataluña, Galicia, Madrid y Valencia.

Toda esta actividad augura un futuro prometedor para la integración de GeoGebra en las aulas de todo el mundo y por tanto, es necesario realizar investigaciones que permitan fundamentar las prácticas docentes apropiadas para obtener los resultados esperados.

Figura 2.3.2.2 – Distribución de los institutos de GeoGebra[1].

[1] Fuente: http://www.geogebra.org/cms/institutes

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

Introducción

En este capítulo vamos a desarrollar el marco teórico que constituye la base de nuestra investigación. Describiremos el estudio TEDS-M que supone la primera comparativa internacional sobre adquisición de competencias matemáticas y análisis de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza entre futuros profesores. Este estudio nos ha servido de base para la realización de las pruebas que hemos utilizado en nuestra investigación cuantitativa. Además, se desarrollará la teoría de la instrumentación que nos ha servido de marco para el análisis cualitativo que hemos realizado en el estudio de casos. También explicaremos la importancia del "arrastre" en los entornos GeoGebra de aprendizaje geométrico y profundizaremos en los distintos tipos o modalidades de arrastre que se encuentran en los procesos de resolución de problemas abiertos.

3.1 El estudio TEDS-M

El TEDS-M[1] (*Teacher Education Study in Mathematics*) de la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo) es un estudio comparativo internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas en educación primaria y en secundaria obligatoria. Surge de la

---

[1] La presentación pública oficial del TEDS-M se encuentra en http://teds.educ.msu.edu. La página de TEDS-M España es http://www.ugr.es/~tedsm/

constatación de las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los escolares de los distintos países, de acuerdo con los resultados proporcionados por el estudio internacional TIMSS (*Trends in Mathematics and Science Study*), también de la IEA. Se basa en el supuesto de que un importante factor que puede explicar esas diferencias tiene que ver con la variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en esos países. Hay datos sobre esta diversidad de aproximaciones, pero no evidencias razonablemente completas y comparables de las diferencias existentes, ni de cómo éstas se relacionan con el rendimiento de los escolares. El estudio busca sistematizar e interpretar tales diferencias.

La participación española en el proyecto TEDS-M persigue analizar y caracterizar, sobre una sólida base empírica, cómo es la formación matemática inicial del profesorado de primaria en España, compararla con la de otros países y establecer propuestas de trabajo y posibles líneas de acción que contribuyan a mejorarla. La coordinación global del estudio TEDS-M en España corresponde a la Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional del Ministerio de Educación, a través del Instituto de Evaluación. La coordinación de la investigación corresponde al Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado, que también ha designado al profesor Luis Rico Romero[1] de la Universidad de Granada como Coordinador Nacional de Investigación y responsable de la dirección científica del estudio en España.

---

[1] Grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico*, grupo FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI) de la Junta de Andalucía.

3.1.1 Definición del proyecto

TEDS-M presta especial atención a la relación entre las políticas educativas, el currículo y las prácticas en la formación del profesorado y los resultados finalmente logrados. Consta de tres componentes estrechamente relacionados:

Componente I: Políticas educativas sobre la formación del profesorado en matemáticas y el contexto cultural y social de las mismas.

Las preguntas de investigación de este primer componente se abordan con la información que cada país proporciona a través de un cuestionario (denominado "cuestionario de rutas" de formación), en el que se da información sobre el marco legislativo que regula la formación inicial de profesores de matemáticas y se caracterizan los principales programas de formación utilizados en cada país.

Componente II: Currículos y programas existentes para la formación inicial del profesorado de matemáticas en educación primaria.

Las preguntas de investigación relacionadas con este componente se abordan por mediación de tres instrumentos. El primero es un cuestionario que recoge la información necesaria para caracterizar el plan de estudios de los centros que participarán en el estudio definitivo. El segundo lo forman un conjunto de cuestionarios que responderán los formadores (de matemáticas y didáctica de la matemática y áreas de educación: pedagogía, psicología y sociología) en cada plan de formación inicial de profesores. El tercer instrumento es un protocolo para el análisis de los programas de las asignaturas del plan de formación del profesorado en cada institución correspondientes a las áreas de matemáticas y didáctica de la matemática.

Componente III: Conocimiento matemático y pedagógico-didáctico que tienen los futuros profesores de matemáticas.

Este tercer componente del estudio se aborda a partir de la información obtenida con los cuestionarios que se han pasado a una muestra representativa de los futuros profesores de matemáticas, es decir, estudiantes de último curso de carrera en cada una de las instituciones que participan en el estudio. Los cuestionarios, que incluyen preguntas de respuesta cerrada y abierta, se dirigen a obtener información sobre el conocimiento adquirido por el futuro profesorado tanto sobre las matemáticas como sobre la enseñanza en general y la didáctica de esta disciplina.

Las hipótesis del estudio son las siguientes:

- Aquellos programas de formación inicial que se basan en "estándares" o niveles de logro rigurosos y con un alto grado de coherencia, tanto en matemáticas como en pedagogía y didáctica, tendrán un impacto claro en el aprendizaje de los futuros profesores.
- Unas políticas coherentes y con propósitos claros tendrán un efecto importante en el nivel de exigencia de los planes o programas de formación y, a su vez, dichos programas formarán profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria obligatoria altamente cualificados.

3.1.2 Principios subyacentes en el estudio TEDS-M

- El proceso de enseñanza-aprendizaje del profesorado es complejo:

No hay entre los expertos un acuerdo sobre qué conocimientos son los que se deben enseñar, sobre si es más importante el conocimiento de los contenidos o el conocimiento didáctico de esos contenidos, sobre la relación entre teoría y práctica y sobre otros muchos aspectos relacionados con la formación de los futuros profesores de matemáticas (Tatoo et al., 2008).

- El conocimiento sobre el contenido a enseñar es un factor fundamental para la calidad de la enseñanza:

La calidad de la enseñanza está influida por múltiples dimensiones y, aunque no es fácil encontrar un acuerdo sobre el grado de importancia de estas dimensiones, si existe consenso sobre que el conocimiento de los contenidos a enseñar es un factor determinante. La discusión se centra sobre qué conocimientos deben adquirirse, cómo deben enseñarse y hasta qué punto el conocimiento de los contenidos asegura que los estudiantes van a ser buenos profesores.

- La formación de profesorado requiere comprender qué deben saber los futuros profesores sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

El marco teórico de TEDS-M define que el conocimiento matemático necesario en la formación del profesorado se compone de dos dominios: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido pedagógico-didáctico[1]. A su vez, este último conocimiento se subdivide en al menos tres componentes: conocimiento curricular (conocimiento sobre medios y recursos para la enseñanza de las matemáticas, incluidos libros de texto y tecnología), conocimiento sobre la planificación del proceso de

---

1 En ingles, Mathematics Content Knowledge (MCK) y Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK)

enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y conocimiento sobre las representaciones de conceptos y procedimientos matemáticos para la enseñanza y aprendizaje. Estas tres componentes corresponden aproximadamente con las categorías enunciadas por Shulman (2005) y por Fan & Cheong (2002).

- El contexto en el que enseñarán los profesores debe ser considerado dentro de los conocimientos necesarios para enseñar:

No basta con tener en cuenta el conocimiento teórico también hay que considerar el conocimiento situado dentro del contexto en que se produce la enseñanza. Los profesores adquieren conocimientos a través de todo el proceso educativo que han seguido, desde las etapas de primaria y secundaria hasta llegar a la universidad y completar sus prácticas docentes en escuelas. Por eso no es suficiente pensar qué conocimientos tiene el profesor o qué cursos debe seguir, también hay que preguntarse qué conocimientos matemáticos utilizará y cómo, cuando se encuentre inmerso en su trabajo.

- La formación del profesorado se sabe que influye en el aprendizaje de los alumnos, pero no se conoce bien esta relación:

El estudio TEDS-M surge en parte de los resultados obtenidos en otros estudios anteriores, TIMSS, TIMSS-Video, PISA y otros que muestran como muchos estudiantes en todo el mundo no obtienen los niveles deseados de competencia y comprensión matemáticas. TEDS-M explora si los profesores adquieren conocimientos sobre los temas en los que los estudiantes han tenido más dificultades en casi todos los países, según los estudios mencionados. Además, para evaluar los niveles de consistencia de la preparación de los profesores, TEDS-M también considera otros dominios del conocimiento matemático donde los estudiantes logran en general buenos resultados.

3.1.3 Marco teórico del Conocimiento de Contenidos Matemáticos

El marco de referencia seguido en TEDS-M para medir el Conocimiento de Contenidos Matemáticos (MCK) de los futuros profesores de primaria ha sido el mismo que se siguió en el estudio TIMSS 2007 (ver epígrafe 2.2.3), con objeto de poder establecer relaciones útiles entre los resultados obtenidos con los estudiantes de primaria y la formación que reciben los profesores de esta etapa. Se acordó que la investigación debía centrarse en los contenidos que los profesores tenían que enseñar.

En la tabla 3.1.3.1 se organizan los dominios que componen el conocimiento de contenidos matemáticos que se desarrollan en los cuestionarios (Mullis et al., 2007):

DOMINIOS	CONTENIDOS MATEMÁTICOS
NÚMEROS	Números naturales Fracciones y decimales Proposiciones numéricas Patrones y relaciones Enteros Proporciones y porcentajes Números irracionales Teoría de números
GEOMETRÍA	Formas geométricas Medidas Movimientos y situación en el espacio
ÁLGEBRA	Patrones Expresiones algebraicas Ecuaciones/fórmulas y funciones
DATOS	Organización y representación de datos Lectura e interpretación de datos Azar

Tabla 3.1.3.1 - Dominios del Conocimiento de Contenidos Matemáticos

Además se adoptaron los tres componentes principales del estudio TIMSS 2007 para el dominio cognitivo (ver tabla 3.1.3.2). Para los profesores de primaria se priorizaron los ítems del subdominio Conocimiento, seguidos de Aplicación y Razonamiento. El grado de dificultad de cada ítem se categorizó en tres niveles: principiante (contenidos de la etapa educativa en la que el futuro profesor enseñará), intermedio (contenidos de uno o dos cursos superiores a la etapa educativa en la que el profesor enseñará) y avanzado (contenidos de tres o más cursos superiores a la etapa educativa en la que el profesor enseñará). La mayoría de los ítems correspondieron al nivel intermedio.

CONOCIMIENTO	
Recordar	Recordar definiciones; terminología; propiedades numéricas; propiedades geométricas; notación.
Reconocer	Reconocer objetos matemáticos, formas, números y expresiones; reconocer equivalencias.
Calcular	Resolver procedimientos algorítmicos de suma, substracción, multiplicación y división con números enteros, fracciones, decimales; estimar cálculos; resolver procedimientos algebraicos.
Interpretar	Interpretar información de gráficos, tablas u otras fuentes; leer escalas simples.
Medir	Usar instrumentos de medida; usar apropiadamente las unidades de medida; estimar medidas.
Clasificar/ordenar	Clasificar/agrupar objetos, formas, números y expresiones según sus propiedades; tomar decisiones correctas sobre los elementos de una clase; ordenar números y objetos según sus atributos.
APLICACIÓN	
Seleccionar	Seleccionar una operación, método o estrategia apropiada y eficiente para resolver problemas donde se conocen los algoritmos o métodos de solución.
Representar	Mostrar datos en diagramas, tablas, cuadros o gráficos: generar representaciones equivalentes para una expresión dada.
Modelizar	Generar un modelo adecuado, como una ecuación o diagrama, para resolver problemas.

Reproducir	Seguir y ejecutar un conjunto de instrucciones matemáticas; dibujar figuras y formas de acuerdo a las especificaciones dadas.
Resolver problemas rutinarios	Resolver rutinas o tipos de problemas familiares (por ej. usar propiedades geométricas para resolver problemas); comparar diferentes representaciones de datos; usar datos de cuadros, tablas, gráficos y mapas para resolver problemas rutinarios.
RAZONAMIENTO	
Analizar	Usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas; usar razonamiento proporcional; descomponer figuras geométricas para simplificar problemas; dibujar el desarrollo de un sólido; visualizar transformaciones de figuras tridimensionales; comparar representaciones diferentes de los mismos datos; realizar inferencias válidas de informaciones dadas.
Generalizar	Generalizar el dominio de validez de un problema o razonamiento matemático.
Justificar	Justificar si una proposición, un resultado o una propiedad es verdadera o falsa.
Resolver problemas no rutinarios	Resolver problemas en contextos reales y aplicar procedimientos matemáticos en contextos no familiares complejos; usar propiedades geométricas para resolver problemas no rutinarios.

Tabla 3.1.3.2 – Subdominios cognitivos del Conocimiento de Contenidos Matemáticos

3.1.4 Marco teórico del Conocimiento del Contenido Pedagógico-didáctico

El marco teórico en el que se basa la medida del Conocimiento del Contenido Pedagógico-Didáctico (MPCK) se desarrolló en el estudio de viabilidad de TEDS (Schmidt et al., 2007) y en investigaciones previas en este campo. En la tabla 3.1.4.1 se muestran los dominios estudiados de MPCK, tanto para el cuestionario de Primaria como para el de Secundaria. En el estudio final se combinaron los subdominios "conocimientos matemáticos curriculares" y "conocimientos de planificación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas" en el subdominio llamado currículo/planificación.

CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS CURRICULARES
Establecer los objetivos de enseñanza apropiados Conocer diferentes tipos de evaluación Seleccionar posibles itinerarios haciendo conexiones dentro del currículo Identificar las ideas clave en los programas de enseñanza Conocer el currículo de matemáticas
CONOCIMIENTOS DE PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
Planificar y seleccionar actividades apropiadas Elegir formatos distintos de evaluación Predecir respuestas típicas de los alumnos, incluidos los errores Planificar métodos adecuados para representar conceptos matemáticos Relacionar las metodologías didácticas con los diseños de instrucción Identificar diferentes aproximaciones a la resolución de problemas Planificar lecciones de matemáticas
REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE
Analizar y evaluar las soluciones y argumentos matemáticos de los alumnos Analizar el contenido de las preguntas de los estudiantes Diagnosticar las respuestas típicas de los alumnos, incluidos los errores Explicar o representar los conceptos o procedimientos matemáticos Generar preguntas interesantes Responder a problemas matemáticos inesperados Proporcionar un feedback apropiado

Tabla 3.1.4.1 – Subdominios del Conocimiento del Contenido Pedagógico-Didáctico

3.1.5 Los cuestionarios de conocimientos matemáticos y pedagógico-didácticos

Los cuestionarios que se han utilizado se componen de ítems clasificados en las dos dimensiones del conocimiento según su contenido que hemos descrito en los epígrafes anteriores, MCK y MPCK. Antes de su aplicación se realizó un profundo estudio estadístico para verificar que los ítems elegidos reunían las condiciones apropiadas de fiabilidad y validez y al final se eligieron los siguientes:

- 24 items de MCK (9 de álgebra, 6 de geometría, 7 de números y 2 de tratamiento de la información), distribuidos de la siguiente forma según el subdominio cognitivo: Conocimiento (15), Aplicación (8) y Razonamiento (1).
- 10 items de MPCK (2 de álgebra, 2 de geometría, 3 de números y 2 de tratamiento de la información), distribuidos de la siguiente forma según los dos subdominios: planificación/currículo (6) y representaciones (4).

Los ítems liberados se encuentran disponibles en la dirección http://www.ugr.es/~tedsm/resources/Informes/Result_Viejo/PrimariaItemsLiberados.pdf

3.1.6 Cuestionarios sobre creencias

Análogamente a los argumentos dados sobre la importancia del contenido y la didáctica de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina, también hay un amplio acuerdo sobre la influencia de las creencias de los profesores en el aprendizaje de sus alumnos. Sin embargo, no existen evidencias que permitan concluir que las creencias puedan estar influidas por la formación que reciben los profesores, en lugar de ser una característica individual intrínseca a cada profesor. En TEDS-M las escalas de creencias se basan en los trabajos previos realizados en el Estudio sobre Enseñanza-Aprendizaje del Profesorado llevado a cabo por el MSU[1]. Los cuestionarios sobre creencias incluyen preguntas sobre cinco áreas: creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, creencias sobre el aprendizaje matemático, creencias sobre el

[1] Teaching and Learning to Teach Study, MSU.

éxito en matemáticas, creencias sobre la formación para enseñar matemáticas y creencias sobre la efectividad del programa.

En nuestra investigación hemos utilizado las tres primeras escalas, incluyendo todos los ítems liberados de TEDS-M:

- Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas

Se incluyen ítems que exploran la percepción que tienen los futuros maestros sobre las matemáticas y su epistemología: formales, procedimentales, estructurales o aplicadas.

- Creencias sobre el aprendizaje matemático

En esta escala se pregunta sobre la pertinencia de algunos tipos de actividades de enseñanza, sobre procesos cognitivos de los estudiantes y sobre los propósitos de las matemáticas como materia en la escuela.

- Creencias sobre el éxito en matemáticas

Se pregunta a los futuros profesores sobre varias estrategias usadas para facilitar el aprendizaje matemático. También se exploran cuestiones sobre cómo se produce el aprendizaje matemático, si es una habilidad innata, etc.

Los ítems usados en estas tres áreas surgen del estudio de viabilidad de TEDS-M (Schmidt et al., 2007) y de varios trabajos de Tatto. Ejemplos de los ítems incluidos en los cuestionarios están disponibles en el Apéndice B de Tatoo et al. (2008).

3.2 Teoría de la instrumentación o actividad instrumentada

La teoría de la instrumentación se desarrolló originalmente en el campo de la ergonomía cognitiva para tratar de explicar cómo se producen procesos de aprendizaje en entornos tecnológicamente complejos (Rabardel & Beguin, 2005). En didáctica de las matemáticas se ha aplicado esta teoría (principalmente por autores franceses) para estudiar el proceso de aprendizaje matemático usando herramientas TICE[1], especialmente sistemas de álgebra computacional (CAS) y software de geometría dinámica (Artigue, 2002; Drijvers, 2003; Drijvers et al., 2010; Guin & Trouche, 2002; Iranzo-Domènech, 2009; Lagrange, 2005a; Lagrange, 2005b; Rabardel, 2001; Rabardel & Beguin, 2005; Rabardel & Bourmaud, 2003; Ruthven, Hennessy, & Deaney, 2008; Trouche, 2004; Trouche, 2005; Verillon & Rabardel, 1995; White, 2008). Desde un enfoque neo-vigotskyano, el modelo de Situaciones de la Actividad Instrumentada[2] de Rabardel, considera las situaciones donde las acciones entre el sujeto y el objeto se ven mediadas por un instrumento. Vamos a profundizar en los principios de dicha teoría.

Los autores (Verillon & Rabardel, 1995) definen un instrumento como cualquier objeto que un sujeto asocia con la acción necesaria para conseguir realizar una tarea. Es decir, el instrumento es un intermediario entre el sujeto y el objeto, prolonga y/o modifica la acción y presenta características asociadas a las operaciones que realiza el sujeto y al objeto, en el contexto de la tarea que se está realizando.

---

[1] TICE: Tecnologías de la Información y la Comunicación aplicadas a la Educación

[2] IAS: Instrumental Activity Situations

Es importante distinguir entre dos conceptos: el artefacto, que es un objeto material y el instrumento, que es un constructo psicológico. El instrumento no existe como tal, es decir, el artefacto (la máquina o el sistema tecnológico) no es un instrumento para el sujeto por sí mismo, aunque haya sido construido para serlo. El sujeto debe apropiarse de él e integrarlo con la actividad que puede producir. El instrumento es el resultado de que el sujeto establezca una relación instrumental con el artefacto, sea éste material o no. Las relaciones implicadas en este modelo (IAS) se pueden caracterizar en el esquema de la Figura 3.2.1, donde aparece la tríada sujeto-objeto-instrumento.

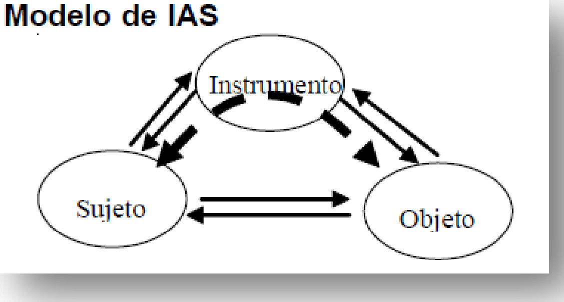


Figura 3.2.1- Modelo de la Actividad Instrumentada[1]

En el figura anterior se ponen en evidencia las múltiples relaciones que se establecen entre la tríada. Además de las relaciones directas entre el sujeto y el objeto, el sujeto y el instrumento y el objeto y el instrumento, las interacciones más interesantes son las representadas por la línea discontinua: son las que establece el sujeto con el objeto mediadas por el instrumento. Esto es lo que llamamos *génesis instrumental*. Según Artigue (2002), para un sujeto un artefacto no es un instrumento desde el principio, llega a serlo

[1] Figura extraída de (Ballestero-Alfaro, 2007)

cuando se produce la génesis instrumental y el individuo construye sus propios esquemas personales o se apropia de esquemas sociales pre-existentes. Es decir, el instrumento es mixto por naturaleza: en parte artefacto y en parte esquemas cognitivos. La noción de esquema aquí está próxima a la considerada por Vergnaud: "*une organisation invariante de la conduite pour une classe donnée de situations*" (Vergnaud, 1990, p.134)

El proceso de génesis instrumental se da en dos direcciones. La primera se dirige hacia el artefacto, se encuentran sus potencialidades progresivamente e incluso se transforman para usos específicos. Este es el proceso de *instrumentalización,* el individuo conoce el artefacto y aprende a utilizarlo, desarrolla esquemas de uso del artefacto. La segunda se dirige hacia el sujeto, quien elabora o se apropia de esquemas cognitivos, llamados esquemas de actividad instrumentada, que se transforman posteriormente en técnicas[1] que le permiten dar respuesta a las tareas planteadas. Este es el proceso de *instrumentación* propiamente dicho.

Citando a Rabardel (2001) podemos resumir: "*Instruments result from a development process (and not only a learning process), which occurs through instrumental geneses. Instruments born of instrumental geneses organize the coordination of the artifact's and the subject's actions, allowing them to be pertinent and efficient mediators for the subject's activity". "Instruments are both private, meaning specific to each individual, and social. The social nature of instruments is due to the social nature of artifacts, usage schemes and instrumented activity schemes. These schemes are social in that they have characteristics that are both shared and widespread in communities and collectivities*." (Rabardel, 2001, p. 29).

---

[1] Se define técnica como un conjunto de procedimientos que permiten resolver un determinado tipo de problemas.

Según Drijvers (2003), los esquemas de actividad instrumentada se definen como esquemas mentales significativos y coherentes que sirven para resolver un determinado tipo de tareas mediante el artefacto o herramienta tecnológica. Por supuesto, los procesos de instrumentalización e instrumentación - el desarrollo de esquemas de uso y esquemas de actividad instrumentada - están relacionados y en algunos casos no es fácil distinguir qué tipo de esquemas se están desarrollando. En la práctica, el proceso de génesis instrumental es complejo para los estudiantes porque requiere tiempo y esfuerzo. Los alumnos pueden construir esquemas que no son apropiados, no son eficientes, o están basados en concepciones erróneas. Por lo tanto, el papel del profesor, llamado *orquestación* (Trouche, 2004), es fundamental para guiar el proceso de génesis instrumental individual y colectiva de sus alumnos, ya que puede influir privilegiando el uso de unas técnicas por encima de otras.

Además, el artefacto impone una serie de limitaciones al sujeto que dependen del tipo de actividades que se realicen. Para promover la génesis instrumental en los estudiantes es necesario identificar las restricciones que induce el instrumento, que al menos son de dos tipos: restricciones técnicas y restricciones organizativas. También es necesario identificar los nuevos potenciales que puede ofrecer la actividad instrumentada (Artigue, 2002).

En nuestra investigación vamos a utilizar la teoría de la instrumentación para analizar el proceso de resolución de problemas de geometría plana, por parte de parejas de alumnos, mediante el software de geometría dinámica GeoGebra. En nuestro caso, el artefacto será GeoGebra y el objeto el conjunto de problemas propuestos a los estudiantes. Por tanto podemos ilustrar el proceso de génesis instrumental mediante la figura 3.2.2, obtenida de (Iranzo, 2009)

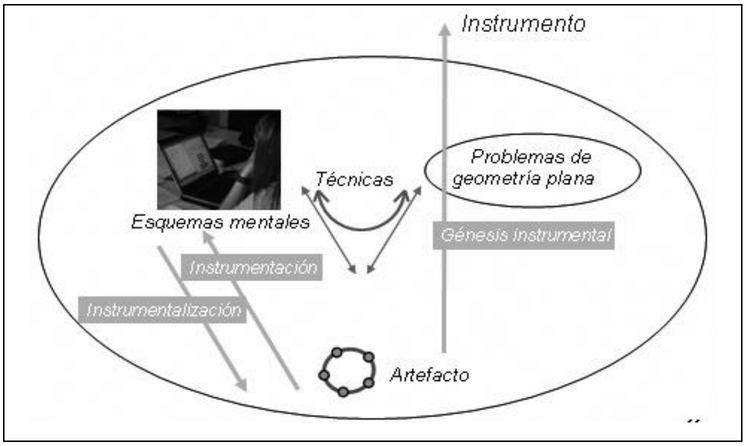


Figura 3.2.2- Génesis instrumental

3.3 Tipos de "arrastre" en un entorno GeoGebra

La resolución de problemas en entornos SGD se distingue por la posibilidad de utilizar el carácter dinámico de este software. Precisamente esta característica es lo que hace de GeoGebra un recurso que puede permitir a los estudiantes realizar acciones que no son posibles o son difíciles con otros métodos, en concreto con lápiz y papel. Además, permite comprobar si una solución a un problema es correcta o no por el propio alumno, sin la intervención del profesor, lo que promueve un aprendizaje mucho más autónomo que métodos de enseñanza tradicionales.

La herramienta que representa esencialmente el dinamismo de GeoGebra es "Elige y mueve", herramienta que selecciona un objeto y lo arrastra por la pantalla. El arrastre (dragging, en inglés) es una cualidad del software que no es inmediatamente utilizada por los alumnos. En distintas investigaciones (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Ruiz-López, 2011a) se ha observado que los estudiantes que empiezan a utilizar un SGD necesitan aprender a mover las figuras. Al principio no usan el arrastre, tienen que interiorizar esta función para hacer un uso productivo de ella. Puede resultar, de hecho, un elemento de distracción que interfiere en la resolución del problema, ya que los alumnos no están acostumbrados a que las figuras se muevan cuando están en un entorno tradicional de lápiz y papel.

La evolución en el uso del arrastre por parte de los resolutores de problemas geométricos nos revela los procesos cognitivos que están empleando en el proceso de resolución. Por eso es tan importante caracterizar los tipos de arrastre que pueden ser empleados. Nosotros vamos a utilizar las modalidades de arrastre introducidas por Arzarello et al. (2002):

- *Arrastre errático:* se mueve un punto libre o un objeto aleatoriamente por la pantalla, sin un plan determinado, para descubrir propiedades o regularidades interesantes de la figura.
- *Arrastre obligado:* se mueve un punto semi-móvil, es decir, un punto que pertenece a un objeto y por tanto no tiene un movimiento libre. Por ejemplo, un punto que pertenece a una circunferencia puede moverse sobre ella.
- *Arrastre guiado:* se mueven puntos libres de una figura para darle una forma determinada. Por ejemplo, movemos los vértices de un triángulo cualquiera para conseguir que sea rectángulo.
- *Arrastre sobre un lugar geométrico oculto:* se mueve un punto libre de una figura para obligarle a cumplir una determinada propiedad. El punto describe el lugar geométrico oculto, incluso si el estudiante no es consciente de ello
- *Arrastre de test:* se mueven puntos libres o semi-libres para comprobar si la figura mantiene sus propiedades iniciales. Si la figura pasa el test, está construida de acuerdo a las propiedades pedidas.

Los autores observaron que se utilizan estas modalidades de arrastre para conseguir diferentes objetivos en el proceso de resolución de problemas abiertos: explorar, conjeturar, validar y justificar. Por ejemplo, el arrastre errático, el arrastre obligado y el guiado se usan normalmente en la fase de descubrimiento, cuando el alumno investiga y explora cómo resolver la tarea planteada; el arrastre sobre un lugar geométrico oculto permite la construcción de una conjetura y el arrastre de test principalmente se usa para validar o comprobar la conjetura.

Estas modalidades de arrastre revelan los procesos cognitivos que se están desarrollando entre el nivel perceptivo y el teórico en la actividad matemática de los alumnos. Los procesos ascendentes, desde las figuras a la teoría, se producen cuando se explora libremente una situación, se buscan regularidades, invariantes, etc. Las modalidades de arrastre que corresponden a estos procesos ascendentes son el arrastre errático, el arrastre obligado y el guiado. Los procesos descendentes, de la teoría a las figuras, sirven para validar o refutar conjeturas, comprobar propiedades, etc. La modalidad descendente típica es el arrastre de test. El arrastre sobre un lugar geométrico oculto puede utilizarse inicialmente como un arrastre guiado, pero puede evolucionar hacia procesos descendentes cuando el lugar geométrico se hace visible y permite formular una conjetura que puede validarse. Esta modalidad de arrastre puede considerarse una transición entre los procesos ascendentes y los descendentes.

Según Arzarello (2002), la evolución desde los aspectos perceptivos a los teóricos a través de las modalidades de arrastre, no ocurre automáticamente. Es necesario un diseño didáctico adecuado al entorno SGD que permita a los estudiantes apropiarse de estas técnicas.

SEGUNDA PARTE: ESTUDIO EMPÍRICO

Capítulo 4

DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Introducción

Después de realizar el estudio teórico, presentaremos ahora nuestro problema de investigación y el diseño que nos permitirá darle respuesta. Justificaremos la elección de la metodología mixta, cuantitativa-cualitativa, para abordar el problema de investigación y describiremos los métodos y técnicas que hemos elegido desde los dos enfoques:

Enfoque cuantitativo: elegiremos el método cuasi-experimental pretest-postest como el más apropiado para responder a las preguntas planteadas en nuestra investigación. Describiremos las variables, la muestra, los instrumentos de recogida de datos y las técnicas utilizadas para analizarlos.

Enfoque cualitativo: elegiremos un estudio de casos para explicar con mayor profundidad algunos resultados encontrados en el estudio cuantitativo. Describiremos el proceso de selección de los casos objeto de estudio, el diseño de la prueba, los instrumentos de recogida de datos y la elección de una perspectiva interpretativa para realizar su análisis.

4.1 Planteamiento de la investigación

En la primera parte de esta tesis hemos visto como distintas investigaciones proponen el uso de SGD para mejorar las competencias geométricas del alumnado (mayoritariamente de secundaria o nivel universitario). Sin embargo, aún no se tienen suficientes datos de cómo afecta los SGD en la formación inicial de profesorado de Ed. Primaria. Nuestra amplia experiencia en la docencia de la asignatura Matemáticas y su Didáctica en todos los cursos de la carrera de Magisterio nos permite intuir que muchas de las dificultades que encuentran nuestros alumnos en el aprendizaje de los conceptos geométricos podrían superarse con la ayuda de algún software de geometría dinámica.

En el grado de Magisterio en Educación Primaria, además de las competencias matemáticas, se incide en la importancia de las competencias profesionales del futuro profesor, en concreto se deben "desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes". Sin embargo hay pocas investigaciones hasta la fecha que hayan analizado cómo afectan los SGD en la adquisición de competencias didácticas en los futuros maestros, por lo que nos parece necesario introducir la competencia didáctica en nuestro estudio.

Sabemos también que las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza que tengan los profesores serán un factor determinante en el proceso de enseñanza-aprendizaje que lleven a cabo con sus alumnos cuando sean docentes en activo. Por ello nos proponemos analizar si estas creencias previas pueden verse afectadas por la metodología utilizada en nuestra investigación.

Además, hemos justificado nuestra elección de GeoGebra como el SGD que mejor se adapta a nuestras necesidades y expectativas por ser un software libre, intuitivo, que relaciona distintas áreas de las matemáticas y está en continuo desarrollo por la comunidad de enseñanza-aprendizaje.

Vamos a plantear ahora los objetivos que pretendemos conseguir con esta investigación.

4.1.1 Objetivos de la investigación

Siguiendo los criterios de relevancia, rigor, consistencia, precisión y exactitud que deben guiar un problema de investigación, nuestro objetivo será contestar estas preguntas redactadas en los siguientes términos:

1- ¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

2- ¿Favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

Estas preguntas se corresponden con problemas de investigación ya que cada una define una relación entre dos variables (uso de GeoGebra y mejora de las competencias mencionadas o de las creencias sobre las matemáticas), siendo posible realizar una prueba empírica o una recopilación de datos cualitativos para solucionar dichos problemas. Además, estamos ante unos problemas de investigación que creemos relevantes porque forman parte de la actualidad social y cultural (Hernández, Fernández, & Baptista, 2003) y podrían dar pautas para nuevos escenarios educativos (Bisquerra, 2004).

Problema P1
¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

Problema P2
¿Favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

Además, en la literatura de investigación relativa al uso de SGD en la enseñanza hemos visto que hay algunas variables que pueden influir en la adquisición de competencias matemáticas de los alumnos. Su nivel de competencia digital previo puede determinar que el uso de GeoGebra sea un factor que facilite el aprendizaje geométrico o, por el contrario, sea un obstáculo respecto a métodos más tradicionales. Eso nos ha hecho plantearnos otras preguntas que han originado un problema secundario en nuestro estudio, lo llamaremos problema P3:

Problema P3
¿Cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado con GeoGebra, el nivel de competencia digital del alumnado?

4.2 Diseño de la investigación

Según Bisquerra (2004, p. 120), "*el diseño de la investigación es el plan o estrategia concebida para obtener la información que se requiere, dar respuesta al problema formulado y cubrir los intereses del estudio*". A continuación presentaremos nuestro diseño de investigación para intentar dar respuesta a los problemas P1, P2 y P3. Justificaremos la metodología elegida y detallaremos los métodos y técnicas de investigación que hemos utilizado.

La investigación educativa se caracteriza por la flexibilidad de enfoques teóricos y metodologías a causa de la complejidad de los problemas de estudio y del contexto en que se desarrollan. Tradicionalmente ha existido una dicotomía entre los enfoques cuantitativos y cualitativos que podemos concretar en el paradigma positivista y en el interpretativo.

En el paradigma positivista, los propósitos científicos están por encima de los valores que los sujetos expresen y de su contexto, centrándose en el mundo de forma neutral para garantizar explicaciones universales generalizables. La metodología adoptada sigue el modelo hipotético-deductivo de las ciencias naturales, categorizando los fenómenos sociales en variables dependientes e independientes, entre las que se establecen las relaciones estadísticas.

El carácter cualitativo que caracteriza al paradigma interpretativo busca profundizar en la investigación, planteando diseños abiertos desde la globalidad y contextualización. Las técnicas de recogida de datos más usuales son la observación participativa, historias de vida, entrevistas, los diarios, cuadernos de campo, los perfiles, el estudio de caso, etc. Tanto las conclusiones como la discusión que generan las investigaciones que comparten la doctrina del paradigma interpretativo están ligadas fundamentalmente a un escenario educativo concreto contribuyendo también a comprender, conocer y actuar frente a otras situaciones.

Además está el paradigma socio-crítico, introducido por la Escuela de Frankfurt en busca de una alternativa al positivista y al interpretativo, que defiende que la investigación educativa no puede ser neutral y debe pretender transformar la sociedad. Exigen del investigador un sistemático trabajo en base al esquema acción-reflexión-acción, implicando el compromiso del investigador desde la práctica para asumir el cambio y la liberación de las opresiones que generen la transformación social. Esto implica un proceso de participación y colaboración desde la autorreflexión crítica en la acción (Ricoy, 2006).

Podemos sintetizar estos tres paradigmas de investigación en la tabla 4.2.1, considerando el interés de cada uno en los siguientes aspectos: ontología (naturaleza de la realidad), relación sujeto-objeto, propósito (generalización), explicación de causalidad y axiología (rol de los valores).

En la actualidad predomina el discurso de la integración y complementariedad de paradigmas, en lugar de la incompatibilidad entre ellos. Muchos autores promueven el uso de diferentes metodologías para complementar el análisis de los datos y obtener resultados que permitan comprender mejor y con más profundidad la realidad educativa. Las metodologías de integración pueden definirse a partir de tres estrategias fundamentales (Bericat, 1998): complementación, combinación y triangulación.

- La estrategia de complementación se basa en el deseo de contar con dos imágenes distintas de la realidad social en la que está interesado el investigador. Dado que cada método revela aspectos diferentes, podremos ampliar nuestro conocimiento de la realidad social si realizamos una investigación con dos estructuras metodológicas paralelas. La finalidad de esta estrategia es meramente aditiva pues no se trata tanto de buscar convergencia ni confirmación entre los resultados, cuanto de contar simultáneamente con dos imágenes que enriquezcan nuestra comprensión de los hechos.

Paradigmas	Positivista	Interpretativo	Sociocrítico
Interés	-Explicar -Controlar -Predecir	-Comprender -Interpretar -compartir la comprensión de forma mutua y participativa	-Liberación, emancipación para criticar e identificar el potencial de cambio
Ontología	-Dada -Singular -Tangible -Fragmentable -Convergente	-Constructiva -Múltiple -Holística -Divergente	-Constructiva -Múltiple -Holística -Divergente
Relación	-Independiente -Neutral -Libre de valores	-Interrelacional -Influida por factores subjetivos	-Interrelacionada -Influida por el compromiso de la liberación humana
Propósito	-Generalizaciones -No sometidas al tiempo -Deductiva -Cuantitativa -Centrada sobre semejanzas	-Limitada por el contexto y el tiempo -Hipótesis de trabajo -Afirmaciones ideográficas -Inductiva -Cualitativa -Centrada en las diferencias	-Limitada por el contexto y el tiempo -Hipótesis de trabajo -Afirmaciones ideográficas -Inductiva -Cualitativa -Centrada en las diferencias
Explicación	-Causas reales -Temporalmente precedentes o simultáneas	-Interactiva -Feed-back -prospectiva	-Interactiva -Feed-back -prospectiva
Axiología	-No sujeta a valores	-Los valores influyen en la solución del problema, la teoría, el método y el análisis	-Marcada por los valores -Crítica de la ideología

Tabla 4.2.1 – Paradigmas de investigación[1]

[1] Tomado de Koetting (1984, p. 296), citado en (Ricoy, 2006)

En su nivel mínimo de integración, este diseño conduce a dos informes distintos y completamente independientes.

- La estrategia de combinación se basa en la idea de que el resultado obtenido en una investigación que aplica el método A puede perfeccionar la implementación de algún componente o fase de la investigación realizada con el método B, logrando así incrementar la calidad de los resultados a obtener por este último. El resultado de A se emplea como input para potenciar B cuyo output constituye la finalidad de la investigación.

- La estrategia de triangulación se distingue de las anteriores porque en este caso los dos métodos A y B se orientan al cumplimiento de un mismo propósito de investigación o, dicho de otro modo, ambos se organizan para la captura de un mismo objeto de la realidad social. Con esta estrategia se pretende reforzar la validez de los resultados. Cuando con dos métodos distintos obtenemos una imagen similar de la realidad social, nuestra confianza en la veracidad de esa imagen se incrementa.

En nuestra investigación pretendemos dar respuesta a los problemas planteados, de forma que parece claro que un enfoque cuantitativo puede ayudarnos a contestar a las preguntas P1, P2 y P3. Pero además, queremos explicar otras cuestiones que nos aporten más información y permitan explicar por qué se produce o no una mejora de los resultados en el grupo experimental respecto al control, qué tipo de alumnos se ven más favorecidos con la metodología utilizada, cómo se produce la interacción entre los alumnos que trabajan juntos, etc. Para este propósito resulta imprescindible utilizar un enfoque cualitativo que complemente al anterior. El problema de comparar dos recursos didácticos mediante una prueba de "lápiz y papel" puede aminorarse con el estudio cualitativo que permite profundizar en la funcionalidad de GeoGebra en la práctica geométrica.

Por lo tanto realizaremos una integración de metodologías cuantitativa y cualitativa de forma que:

- Una metodología cuantitativa nos permite elegir un método cuasi-experimental y utilizar un instrumento de recogida de datos válido y fiable que nos sirva, por medio de técnicas estadísticas, para explicar hasta qué punto el uso de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas y favorece el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en los futuros profesores de Primaria.

- Una metodología cualitativa, mediante un estudio de casos y haciendo uso de técnicas de observación, nos permite obtener datos descriptivos con los que comprender cómo los alumnos adquieren dichas competencias y cómo interaccionan alumnos de distintos niveles de competencia geométrica y digital en un entorno GeoGebra.

4.3 Metodología de la investigación

Elegida la integración de metodologías cuantitativa y cualitativa, se tuvieron que determinar los métodos y técnicas necesarios para realizar la investigación. Vamos a describir aquí estos aspectos para los dos enfoques considerados.

4.3.1 Enfoque cuantitativo

Se eligió utilizar un método cuasi-experimental ya que pretendíamos establecer relaciones causales entre las variables implicadas, tratando de explicar hasta qué punto las variaciones observadas en las variables dependientes son efecto de la manipulación ejercida sobre la variable independiente, utilizando para ello la estadística inferencial. Además queríamos que la investigación fuese lo más "ecológica" posible, es decir, que las condiciones en que se desarrollase fuesen similares a las que se pueden encontrar en la docencia habitual en el Grado de Magisterio de Educación Primaria en la UAM. Por eso se eligieron dos grupos de alumnos ya formados, sin asignar aleatoriamente a los estudiantes. Esta elección disminuye la validez externa de la investigación, con lo que no podemos asegurar que los resultados que se obtengan sean generalizables.

Para controlar que no hubiera diferencias iniciales entre los grupos que pudieran influir en los resultados se pensó en realizar un pretest de manera que pudiera estudiarse si las medias entre los grupos eran equivalentes. Así podíamos asegurar la validez interna del diseño. Otro aspecto que queríamos controlar era la influencia de la intervención del profesor en ambos grupos, para ello se decidió que fuese la misma persona.

Por lo tanto, nuestra investigación se ha realizado utilizando un método cuasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente. Se valoró que el "efecto aprendizaje" no sería relevante ya que el periodo transcurrido entre la administración del pretest y el postest sería suficientemente largo (pretest administrado el 20/09/2010 y postest el 18/01/2011).

El esquema del diseño correspondiente al enfoque cuantitativo se puede resumir:

Experimental	O_1	X_e	O_2
Control	O_3	X_c	O_4

Donde O_1 : pretest grupo experimental

O_2 : postest grupo experimental

O_3 : pretest grupo control

O_4 : postest grupo control

X_e : tratamiento (intervención con GeoGebra)

X_c : tratamiento (intervención con lápiz-papel)

La línea discontinua que separa la fila del grupo experimental de la fila del grupo de control representa la asignación no aleatoria de los sujetos a los grupos.

4.3.1.1 Variables

Vamos a identificar las variables involucradas en nuestros problemas de investigación:

- Variable independiente:
  - Tipo de recurso. Esta variable toma dos valores: GeoGebra y lápiz-papel.
- Variables dependientes:
  - La competencia geométrica y didáctica del alumnado
  - Las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza del alumnado.

Además, identificamos otra variable independiente:

- El nivel previo de competencia digital de los alumnos del grupo experimental, que podría influir en que el uso de GeoGebra les resultara más o menos sencillo y por tanto, influir en el desarrollo de sus competencias geométricas y didácticas. Para controlar esta variable se utilizó una media ponderada entre la calificación de cada alumno en la asignatura *TIC para la sociedad digital* de primer curso del grado de Magisterio y la calificación que obtuvieron en una prueba inicial de introducción a GeoGebra que se realizó el primer día del Taller. Esta media permitió clasificar a los alumnos del grupo experimental en dos niveles: alto y medio.

Variables		**Tipos**
Independiente	Tipo de recurso: GeoGebra/Lápiz-papel	Nominal
Dependientes	La competencia geométrica y didáctica del alumnado.	Escala
	Las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza.	Escala
Independiente	Nivel previo de competencia digital de los alumnos del grupo experimental (alto/medio).	Ordinal

Otras variables extrañas que podían afectar a los resultados de la investigación estaban controladas por el diseño que habíamos elegido. El efecto del profesor en cada grupo suponemos que no es relevante porque en nuestro caso el profesor del grupo experimental y el del grupo control iban a ser la misma persona. Además, la única diferencia entre la docencia de la asignatura en ambos grupos sería el uso de GeoGebra, en el grupo experimental, para realizar algunas actividades que los alumnos del grupo control también realizarían utilizando procedimientos tradicionales de lápiz y papel.

4.3.1.2 Población y muestra

La población correspondiente a nuestro problema de investigación son los estudiantes de 2º curso del Grado de Magisterio de la Universidad Autónoma de Madrid matriculados en la asignatura "Matemáticas y su Didáctica II" el curso 2010-2011, con un tamaño de 319 alumnos. Los alumnos están agrupados en 6 clases distintas, tres del turno de mañana y tres del turno de tarde. Teniendo en cuenta la disponibilidad de los grupos y la necesidad de que la investigadora pudiera realizar el estudio sin alterar el desarrollo normal de la docencia, se eligieron dos grupos de tarde y se asignó aleatoriamente a cada uno ser el grupo experimental y el grupo control.

La muestra, por tanto, está formada por 100 alumnos, 51 en el grupo experimental y 49 en el grupo control. Los alumnos ya estaban asignados a los grupos previamente a la investigación, por lo que no se han podido asignar aleatoriamente y por lo tanto no son grupos equivalentes. Estas circunstancias no son determinantes ya que el objetivo de nuestra investigación no es generalizar los resultados, sino comprender posibles relaciones existentes entre las variables.

Grupo	Nº de alumnos
Experimental	51
Control	49

4.3.1.3 Medida de las variables dependientes. Instrumentos para la recogida de datos

Hay múltiples ventajas en utilizar un instrumento para la recogida de datos estandarizado. Esta es la principal razón en la que nos basamos para buscar instrumentos adecuados para nuestra investigación que estuvieran admitidos por la comunidad educativa como válidos y fiables. En nuestro caso, fue sencillo encontrar tales instrumentos ya que el estudio internacional TEDS-M[1] utiliza la misma población de nuestro estudio, futuros profesores de Educación Primaria, y está pensado para medir dos aspectos, la competencia matemática y didáctica de dicha población y sus creencias sobre las matemáticas y su enseñanza. En esta investigación sólo pretendemos medir la competencia geométrica y didáctico-geométrica del alumnado que constituye la muestra, por eso hemos elegido como instrumento de medida un cuestionario formado con los ítems liberados del estudio TEDS-M relativos a Geometría. Para la parte de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza se ha aplicado directamente el cuestionario TEDS-M. Por lo tanto, la prueba que utilizamos como pretest y postest para medir nuestras variables dependientes consta de dos partes organizadas del siguiente modo:

- La primera parte recoge los ítems relativos a Geometría y Conocimientos Didácticos sobre Geometría. Esta parte está constituida por 8 ítems, los que han sido liberados del estudio TEDS-M, más una pregunta añadida por nosotros de conocimientos didácticos. Decidimos añadir este ítem porque queríamos observar si los alumnos del grupo experimental elegirían GeoGebra o alguna

---

[1] En el capítulo 3 se explica pormenorizadamente el marco teórico que sustenta el estudio TEDS-M.

herramienta tecnológica, en mayor medida que los del grupo control, al tener que proponer el diseño de la actividad requerida.

- La segunda parte recoge las preguntas a cerca de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza de TEDS-M. Esta segunda parte se organiza en tres escalas: A. Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas (10 items), B. Creencias sobre el aprendizaje matemático (14 items) y C. Creencias sobre el éxito en matemáticas (7 items).

En el Anexo I se puede consultar la prueba que sirvió de pretest y postest, así como los criterios de calificación de los ítems relativos a los conocimientos didáctico-geométricos (parte 1ª).

4.3.1.3.1 Análisis de fiabilidad de la prueba

Analizar la fiabilidad de la prueba no era realmente necesario en nuestro caso, al estar formada por ítems obtenidos del estudio TEDS-M. Sin embargo, hemos realizado este análisis para comprobar que las modificaciones producidas en las pruebas originales no afectan a su consistencia interna.

Después de recoger los datos y recodificarlos para que todos los ítems fueran positivos, se realizó el estudio de la fiabilidad de la prueba midiendo el α de Cronbach. Se obtuvo un valor de 0,810 por lo que se puede considerar la prueba consistente internamente.

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	182	95,8
	Excluidos[a]	8	4,2
	Total	190	100,0

a. Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,810	40

Hemos analizado también la homogeneidad de los ítems comprobando la correlación elemento-total y se observa que la eliminación de ninguno de ellos mejora el α de Cronbach.

4.3.1.3.2 Condiciones para la realización de la prueba

Esta prueba se pasó dos veces a los alumnos del grupo experimental y a los del grupo control: como pretest, en la segunda semana del curso (20/09/2010) y como postest, en la última sesión del curso (18/01/2011). Los alumnos estaban separados en el aula, sin posibilidad de compartir información entre ellos, y disponían de 90 minutos para responder a las dos partes. Ambas son pruebas de lápiz y papel, pero de diferente tipo: la parte de conocimientos geométricos y didácticos combina preguntas abiertas con otras donde los alumnos podían elegir entre tres o cuatro opciones de respuesta, dependiendo del ítem. La prueba de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza es una escala de Likert con 6 niveles de respuesta que consta de 31 items. Para responderla rellenaron una hoja de lectura óptica.

4.3.1.4 Análisis estadístico de los datos

Trataremos ahora de organizar y transformar la información obtenida para poder explicar, describir e interpretar los datos. Para responder a los problemas que nos hemos planteado utilizaremos técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales, ya que ambas complementan la comprensión del problema. Las técnicas descriptivas, mediante tablas y representaciones, nos permitirán conocer los datos empíricos de forma que podamos comprender mejor su significado. El enfoque inferencial nos permitirá obtener una visión global y completa de la población a partir de los datos obtenidos para la muestra manejada, siempre en términos probabilísticos y fijando previamente márgenes de error. Para realizar el análisis estadístico hemos utilizado el paquete informático Stadistical Package for Social Science (SPSS), versión 17.0.

4.3.1.4.1 Análisis descriptivo

Se definieron dos nuevas variables para medir la mejora de las dos variables dependientes, entre la medida del pretest y el postest. La primera, llamada Mejora Total, es la diferencia de puntuaciones para cada alumno en la prueba de competencias geométricas y didácticas entre el postest y el pretest. La segunda es la mejora en la prueba de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza, Mejora CR.

Para estas dos variables hemos estudiado las tablas de frecuencias, los estadísticos descriptivos (media, mediana, moda, desviación típica, asimetría, curtosis y percentiles), diagramas de caja e histogramas con ajuste normal, para el grupo experimental y el grupo control. También hemos realizado un análisis descriptivo de la normalidad.

Además, hemos realizado un estudio descriptivo más exhaustivo de los ítems de la prueba de competencias geométricas y didácticas que nos permitirán extraer más información sobre el problema P1. Se han analizado las variables Mejora CGEO y Mejora CDID, que miden la diferencia de puntuaciones entre los ítems relativos a competencias geométricas y competencias didácticas, respectivamente. También se ha realizado un estudio de la mejora obtenida por los alumnos en cada ítem de la prueba.

4.3.1.4.2 Análisis inferencial

El primer paso es transformar las hipótesis de investigación en hipótesis estadísticas. Nuestro problema P1 "la utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso *lápiz-papel*" se transforma en el problema P1 consistente en verificar si puede ser rechazada la hipótesis nula H_0: X_C-X_E=0, donde X_C y X_E son las medias muestrales de las calificaciones de los grupos control y experimental, respectivamente, al realizar la prueba que mide las competencias geométricas y didácticas.

Problema P1
Hipótesis nula H_0: X_C-X_E=0

Análogamente, el problema P2 "el uso de GeoGebra favorece el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso *lápiz-papel*" se transforma en el problema P2 consistente en verificar si puede ser rechazada la hipótesis nula H_0: X_{CC}-X_{EC}=0, donde X_{CC} y X_{EC} son las medias muestrales de las puntuaciones de los grupos control y experimental, respectivamente, al realizar la prueba que mide las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza.

Problema P2
Hipótesis nula H_0: X_{CC}-X_{EC}=0

Vamos a comprobar, mediante las pruebas estadísticas que ahora detallaremos, si podemos rechazar estas hipótesis nulas; en ese caso, podremos decir que hay diferencias significativas entre los grupos que comparamos (Bisquerra, 2004). Por otro lado, tenemos que establecer previamente el grado de significación, que representa la probabilidad de error que estamos dispuestos a asumir al rechazar la hipótesis nula. Como es usual en la investigación educativa, asumiremos un nivel de significación p de 0,05.

Las técnicas inferenciales que decidimos utilizar fueron dos ANCOVA, considerando como covariable la medida del pretest de cada una de las variables dependientes. Para ello utilizamos el paquete estadístico SPSS 17.0, eligiendo el Modelo Lineal General (MLG) Univariante en la pestaña "Analizar". Además, se realizó el MLG de Medidas Repetidas con cada variable dependiente para comprobar los resultados obtenidos en el ANCOVA. Los gráficos de perfil nos permitirían comparar los grupos experimental y control y analizar si hay interacciones.

Para responder al problema secundario P3, ¿cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado por GeoGebra, el nivel de competencia digital?, se realizó un ANCOVA considerando como factor el nivel previo de competencia digital de los alumnos del grupo experimental. También realizamos el MLG de medidas repetidas para comparar el comportamiento de los dos grupos según su nivel previo de competencia digital: alto y medio.

4.3.1.5 Intervención educativa.

El tratamiento o intervención educativa ha tenido dos componentes diferenciadas:

1) un proceso formativo común a los grupos experimental y control

2) un proceso formativo específico para cada uno de los grupos

Es importante precisar que se ha intentado realizar una intervención en el grupo control lo más parecida posible a la realizada en el grupo experimental. Por eso se decidió desde el primer momento que en los dos grupos que iban a participar en la investigación la profesora fuera la misma. Se pretendió que la única diferencia fuese el uso de GeoGebra en el grupo experimental para resolver los problemas geométricos que el grupo control resolvería con lápiz y papel. El resto de los métodos docentes han sido iguales en ambos grupos: han estudiado los mismos contenidos, han resuelto los mismos problemas, han realizado las mismas actividades didácticas y las mismas pruebas de evaluación. La intervención educativa está descrita detalladamente en el capítulo siguiente.

4.3.2 Enfoque cualitativo

Para complementar la información obtenida en el estudio cuantitativo se decidió realizar un estudio de casos con el grupo experimental. Esto nos permitiría profundizar en la contestación a nuestra pregunta P3 y analizar más detalladamente los resultados obtenidos por distintos tipos de alumnos, clasificados según su nivel de competencia digital.

La selección de las parejas que participarían en el estudio cualitativo se realizó teniendo en cuenta los niveles previos de competencia geométrica y de competencia digital de los dos miembros de la pareja. Una vez realizada la selección, se informó a las cuatro parejas candidatas a participar en la investigación de las características del estudio que se estaba realizando y estuvieron de acuerdo en participar y ser grabadas.

La prueba que deberían realizar las parejas seleccionadas se elaboró teniendo en cuenta las actividades realizadas hasta la fecha en el Taller de GeoGebra, de forma que se pusieran en juego competencias de transferencia de conocimientos ya adquiridos y generalización de propiedades geométricas. Se trataba de una actividad de construcción de figuras, conjetura e investigación. La prueba se realizó en días consecutivos: dos parejas el día 30 de noviembre y otras dos el día 1 de diciembre. Cada pareja estuvo aislada en una sala para resolver la práctica durante una hora, al terminar se recogieron los archivos de GeoGebra que generaron, los auto-protocolos escritos de los procesos de resolución y la grabación en vídeo de las interacciones entre los integrantes de cada pareja.

El análisis se realizó bajo una perspectiva interpretativa (Eisenhart, 1988) en la que se tuvieron en cuenta diversos aspectos cognitivos y procedimentales. Los resultados se recogieron en tablas donde se caracterizaron las técnicas utilizadas, los tipos de arrastre, los obstáculos encontrados, las interacciones entre los miembros de la pareja y de éstos con la profesora y el nivel de propiedad del lenguaje geométrico utilizado en los auto-protocolos escritos. Veamos más detalladamente los principales aspectos de la metodología empleada en este estudio de casos.

4.3.2.1 Descripción de los casos

Ya hemos dicho que la población del estudio era el alumnado del grupo experimental participante en nuestra investigación, formado por 50 estudiantes de 2º curso del Grado de Magisterio en Educación Primaria de la Universidad Autónoma de Madrid. Estos alumnos estaban recibiendo, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, docencia disciplinar y didáctica sobre Geometría y Medida. Además, llevaban dos meses realizando un taller semanal de 90 minutos donde resolvían problemas mediante el SGD GeoGebra. En estas sesiones los estudiantes trabajaban en parejas estables.

La elección de las parejas que participarían en el estudio de casos se realizó a partir de una clasificación de los alumnos del grupo experimental según sus niveles de competencia digital y de competencia geométrica. El nivel de competencia digital, Nivel CDIG, se obtuvo a partir de la calificación que los alumnos obtuvieron en la práctica 1 del Taller de GeoGebra (ver el epígrafe 5.3.2) y la nota que habían obtenido en la asignatura *TIC para la sociedad digital* que habían cursado en primer curso del Grado. Mediante una media ponderada se asignó a cada alumno su nota de competencia digital previa, CDIG=$\frac{2GeoG+TIC}{3}$. Las puntuaciones estaban dentro del intervalo [5, 10) lo que permitió agrupar a los alumnos en dos niveles de CDIG: nivel medio, puntuaciones en el intervalo [5,9) y nivel alto, puntuaciones en el intervalo [9,10).

		N
Nivel de competencia digital	alto	22
	medio	28

El nivel de competencia geométrica, Nivel CGEO, se obtuvo mediante la calificación obtenida por los alumnos en la prueba de conocimientos geométricos y didácticos, TEDS-M, que se pasó el segundo día de clase como pretest de la investigación. La suma de las puntuaciones de los ítems relativos a conocimientos geométricos nos permitió asignar una nota a cada alumno (CGEO[1]= P1 + P2 + P3A + P4 + P5 + P6), entre 1 y 7 puntos, de forma que se obtuvieron tres niveles de CGEO: nivel bajo, alumnos con

[1] PI significa puntuación del ítem I de la prueba de competencias geométricas y didácticas.

puntuaciones en el intervalo [1,2]; nivel medio, puntuaciones en el intervalo [3,4] y nivel alto, puntuaciones en el intervalo [5,7].

		N[1]
Nivel de competencia geom.	alto	11
	medio	21
	bajo	16

Los alumnos del Taller de GeoGebra se habían emparejado según sus afinidades personales, sin tener en cuenta ninguna consideración académica ni sus niveles de CDIG o CGEO (que ellos no conocían). De forma que se tuvo que realizar una categorización de las 25 parejas según los niveles de ambos miembros. En la tabla 4.3.2.1.1 se puede observar la distribución de las parejas según estos niveles.

CGEO/CDIG	B/M	B/A	M/M	M/A	A/M	A/A
B/M	17	19	4,10,15	11,20,23,25	13,22	
B/A		18	9	24		
M/M				14,5	1	2, 6
M/A				21		
A/M					7	8
A/A						

Tabla 4.3.2.1.1 – Clasificación de las parejas del grupo experimental[2]

Aunque el Taller de GeoGebra lo realizaron 25 parejas, no todas pudieron participar en la selección para el estudio de casos porque uno de sus

[1] N en este caso es menor que el tamaño del grupo experimental porque no todos los alumnos pudieron realizar la prueba que sirvió de pretest.

[2] Que la pareja 17 aparezca en la primera casilla de la diagonal significa que ambos alumnos tienen nivel CGEO bajo y nivel CDIG medio

miembros no había realizado alguna de las pruebas para asignar los niveles. De forma que 22 parejas están clasificadas en la tabla. Hay 4 parejas homogéneas, es decir con los dos integrantes categorizados en los mismos niveles y el resto son heterogéneas. La categoría con más parejas es la que tiene un miembro con nivel de CGEO bajo y nivel de CDIG medio y el otro integrante tiene nivel de CGEO medio y nivel de CDIG alto: 4 parejas son de este tipo. Hemos elegido una de ellas para el estudio de casos, la pareja 25. Además hemos elegido la pareja 18 (que es homogénea, ambos integrantes con nivel de CGEO bajo y nivel de CDIG alto), la pareja 22 (un integrante con nivel de CGEO alto y otro bajo y ambos con nivel de CDIG medio) y la pareja número 2 (un integrante con ambos niveles altos y otro con ambos niveles medios).

Las cuatro parejas elegidas firmaron un consentimiento para autorizar su participación en la investigación y la grabación en vídeo de la prueba. En la tabla 4.3.2.1.2 se recogen sus características.

Nº pareja	Nombres	Nivel CGEO	Nivel CDIG
2	Irene Patricia	Alto = A Medio= M	Alto = A Medio= M
18	Daniel Andrés	Bajo = B Bajo = B	Alto = A Alto = A
22	Macarena Marta	Alto = A Bajo = B	Medio= M Medio= M
25	Lorena Helena	Medio= M Bajo = B	Alto = A Medio= M

Tabla 4.3.2.1.2 – Parejas del estudio de casos

Para realizar esta selección se tuvieron en cuenta diversos aspectos que pensamos serían interesantes en el análisis posterior: intentamos que la mayoría de las parejas fuesen heterogéneas y que abarcaran el mayor rango posible de combinaciones entre sus niveles de CGEO y CDIG. Además, era muy importante que todas hubiesen asistido con regularidad a las sesiones del Taller de GeoGebra.

4.3.2.2 Prueba para el estudio de casos

La prueba se hizo cuando los alumnos del grupo experimental llevaban dos meses completos trabajando en el Taller de GeoGebra, concretamente habían realizado 9 sesiones de 90 minutos en el aula de informática resolviendo problemas con GeoGebra en pareja. Se citó a dos parejas en la hora de actividades complementarias de un día y a las otras dos al día siguiente. Las parejas 18 y 22 realizaron la prueba el día 30 de noviembre, simultáneamente pero cada una en una sala contigua. Las parejas 2 y 25 la hicieron el día 1 de diciembre en las mismas condiciones.

La profesora explicó a cada pareja las instrucciones y puso en funcionamiento el video. Cada pareja podía utilizar un ordenador portátil con GeoGebra y papel y lápiz para resolver el problema planteado. Las interacciones entre la pareja quedaron registradas en el vídeo, también se recogieron los auto-protocolos del proceso de resolución del problema y los dibujos que habían realizado, así como los archivos de GeoGebra generados.

La profesora dejó tiempo a cada pareja para pensar y discutir el proceso de resolución, pero acudía en breves intervalos a la sala para realizar sugerencias o confirmar que los alumnos no tenían problemas. El tiempo que emplearon las cuatro parejas en resolver la prueba estuvo en torno a una hora.

La prueba consistió en la resolución del problema de geometría que se muestra a continuación:

Estudio de casos	**Pareja nº:**

1. Utilizando la herramienta de GeoGebra "polígono regular", construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)? (Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul).

Anotad todo lo que vais haciendo con GeoGebra en esta hoja (indicando la herramienta de GeoGebra que utilizáis en cada caso), hasta las construcciones que no sirvan y que habéis borrado.

2. ¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior? Realizad la construcción, anotando todos los pasos que habéis seguido para ello (incluso los que habéis borrado).

Esta prueba se elaboró teniendo en cuenta las actividades realizadas hasta la fecha en el Taller de GeoGebra, concretamente ya se había resuelto la práctica 8 (el cuadrilátero de Varignon) que podía resultar de ayuda para que los alumnos encontraran una solución particular del problema. Nos interesaba que se pusieran en juego competencias de transferencia de conocimientos ya adquiridos, fundamentalmente para resolver el apartado 1, y generalización, para contestar a la pregunta del apartado 2.

Podemos clasificar esta actividad como construcción de figuras, conjetura e investigación, utilizando las categorías que se introducirán en el Capítulo 5. Es una actividad complementaria de las tareas TEDS-M que permite evaluar las competencias geométricas en un entorno GeoGebra.

4.3.2.3 Análisis de la prueba

El análisis se realizó bajo una perspectiva interpretativa en la que se tuvieron en cuenta diversos aspectos cognitivos y procedimentales. Los instrumentos de recogida de datos utilizados fueron:

- El protocolo de construcción de las figuras obtenido del archivo de GeoGebra de cada pareja
- El auto-protocolo escrito de cada pareja con el proceso de resolución del problema
- Las grabaciones de vídeo de las interacciones entre la pareja y la profesora.

Esta información permitió elaborar un registro de cada pareja donde se integraron los tres aspectos anteriores para reconstruir cada sesión de trabajo. En el Anexo II pueden consultarse los cuatro registros.

El análisis de cada registro consistió en detectar y describir los siguientes elementos: técnicas utilizadas, tipos de arrastre, obstáculos, interacción entre la pareja, interacción profesora-pareja, lenguaje utilizado. Con esta información se elaboraron unas tablas donde se resumen los comportamientos de cada caso de estudio y se interpretan a la luz de la teoría de la instrumentación de Rabardel que se describe en el Capítulo 3.

Capítulo 5

DISEÑO Y REALIZACIÓN DEL PROCESO FORMATIVO

Introducción

En este capítulo vamos a describir el proceso formativo que se ha llevado a cabo con los dos grupos de alumnos que han formado parte de esta investigación. Veremos que tanto el grupo experimental como el grupo control han realizado un aprendizaje dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II siguiendo una metodología activa donde el uso de las nuevas tecnologías ha sido habitual. La diferencia fundamental entre ambos grupos ha consistido en la implementación del Taller de GeoGebra en el grupo experimental, al tiempo que el grupo control resolvía los mismos problemas geométricos con lápiz y papel.

5.1 Guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II

Matemáticas y su Didáctica II es una asignatura obligatoria de 6 ECTS que se imparte durante el primer semestre de 2º curso del Grado de Magisterio en Educación Primaria. La guía docente de la asignatura[1] la desarrolló el equipo de profesores del área de didáctica de las matemáticas encargado de impartir docencia en los seis grupos de alumnos. Es un documento consensuado por todos los profesores para unificar la asignatura; posteriormente, en cada grupo se realizan adaptaciones, curriculares y metodológicas, según las preferencias del docente responsable. En la guía se especifican diversos

[1] La guía docente se puede consultar en el siguiente enlace: http://www.uam.es/centros/fprofesorado/estudios/docs/guias/primaria

aspectos relacionados con la metodología, contenidos y evaluación. Vamos a detallar ahora los más relevantes, empezando por los comunes a los seis grupos de alumnos y añadiendo los específicos de los dos grupos que intervinieron en nuestra investigación.

5.1.1 Objetivos del curso[1]

- Consolidar la formación matemática necesaria que permita dominar los contenidos geométricos y de medida básicos que configuran el currículo de Ed. Primaria.
- Saber introducir didácticamente los contenidos estudiados.
- Adquirir destreza en la resolución de problemas de Geometría.
- Conocer los obstáculos, dificultades y errores que se producen en el aprendizaje de la Geometría en Primaria.
- Conocer los medios, materiales y recursos usuales en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría y la medida.
- Adquirir destrezas en el empleo de instrumentos, técnicas y material didáctico necesarios para construir la Geometría.
- Aprender a diseñar situaciones didácticas para el aprendizaje de la Geometría.

---

[1] Los objetivos y contenidos del curso son comunes a todos los grupos de 2º de Magisterio de Ed. Primaria.

5.1.2 Contenidos del programa[1]

1. INTRODUCCIÓN.

   Historia de la evolución de los conceptos geométricos y aparición de las distintas geometrías. Repercusiones en la didáctica de esta disciplina.

2. GEOMETRÍA ELEMENTAL DEL PLANO.

   Plano, rectas y puntos. Semirrectas y segmentos. Ángulos. Paralelismo y perpendicularidad. Polígonos. Áreas. Sugerencias didácticas.

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.

   Circunferencia. Posiciones relativas. Arcos y ángulos en la circunferencia. Longitud de la circunferencia. Áreas de figuras circulares. Sugerencias didácticas.

4. RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO.

   Teorema de Thales. Aplicaciones. Semejanza de triángulos. Teorema de Pitágoras. Aplicaciones. Sugerencias didácticas.

5. GEOMETRÍA ELEMENTAL DEL ESPACIO.

   Puntos, rectas y planos. Semiespacio. Figuras convexas y cóncavas. Diedros, medida y propiedades. Poliedros. Superficies y cuerpos de revolución. Áreas y volúmenes. Sugerencias didácticas.

6. LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA Y LA MEDIDA EN PRIMARIA.

   Análisis del desarrollo de la geometría en el currículum de Primaria. Materiales y recursos didácticos. Actividad matemática. Resolución de problemas geométricos. Concepto de medida. Medida en geometría.

5.1.3 Métodos docentes

Los métodos docentes indicados en la guía de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II son los siguientes:

- Clases teóricas: exposición oral por parte del profesor, con participación de los alumnos, de los contenidos fundamentales de cada tema.
- Clases prácticas: resolución de ejercicios y problemas propuestos por el profesor.
- Tutorías: sesiones individuales o en grupos pequeños.
- Seminarios: sesiones monográficas sobre aspectos del temario o tareas encomendadas al estudiante.
- Estudio personal: aprendizaje autónomo del alumno académicamente dirigido por el profesor.

Además de los métodos docentes mencionados, en los dos grupos de la investigación (experimental y de control) se desarrollaron estas otras estrategias didácticas:

- Uso de la plataforma de e-learning Moodle[1]: ambos grupos disponían de un curso on-line para acceder desde casa o desde el aula de informática a todos los documentos, trabajos, tareas y actividades desarrollados en la

[1] El curso del grupo experimental es accesible en la dirección: http://www.uam-virtual.es/course/view.php?id=1115

El curso del grupo control es accesible en la dirección: http://www.uam-virtual.es/course/view.php?id=1112

La única diferencia entre ambos cursos es que el grupo experimental tiene un epígrafe dedicado al Taller de GeoGebra (situado en el Tema 2).

asignatura (en la Figura 5.1.3.1 puede verse la captura de pantalla del curso correspondiente al grupo experimental).

- Actividades complementarias: ambos grupos realizaron 4 talleres didácticos para conocer y saber aplicar distintos materiales y recursos apropiados para la enseñanza de la geometría en Primaria.
- Taller de GeoGebra: el grupo experimental desarrolló durante tres meses un taller semanal de resolución de problemas con el software GeoGebra. Cada sesión tenía una duración de 90' donde los alumnos trabajaban cooperativamente (en parejas) en el aula de informática. Los alumnos del grupo control durante ese tiempo resolvieron los mismos problemas con lápiz y papel.

Figura 5.1.3.1 – Captura de pantalla del curso Moodle del grupo experimental

2

TEMA 2- Geometría elemental del plano

En el siguiente documento se propone un repaso por los contenidos elementales de Geometría plana. Resuelve los problemas propuestos (algunos conceptos que puedes haber olvidado se recuerdan en los enunciados dentro de un recuadro).

Tema 2- Geometría elemental del plano

Taller de GeoGebra

Introducción a GeoGebra. Realiza las actividades guiadas del siguiente enlace, te introducirán en el manejo del software de geometría dinámica GeoGebra. Después de realizar hasta el punto1.11 "Redefine" deberás hacer la construcción que se pide en el ejemplo del final del módulo. Guarda la construcción en un archivo y súbelo a Moodle.

Introducción a GeoGebra
Práctica 1
Práctica 7
Como la práctica 7 y la 11 las habéis hecho en parejas, basta con que un miembro de la pareja suba el archivo a Moodle (con el nombre de las dos personas).
Práctica 11 (teorema de Pitágoras)
Encuesta sobre GeoGebra

Enlaces interesantes

Geometría dinámica para Ed. Primaria
Áreas de polígonos
Clasificación de los ángulos

Actividad complementaria- Taller de Tangram

Después de realizar la actividad complementaria, te propongo las siguientes actividades de ampliación sobre Tangram. Para ello utiliza la plantilla que encontrarás en el documento adjunto y construye tu propio tangram. Esta actividad es voluntaria y puedes entregarla en papel.

Actividades con Tangram

3

TEMA 3- Circunferencia y círculo

Tema 3

Enlaces interesantes

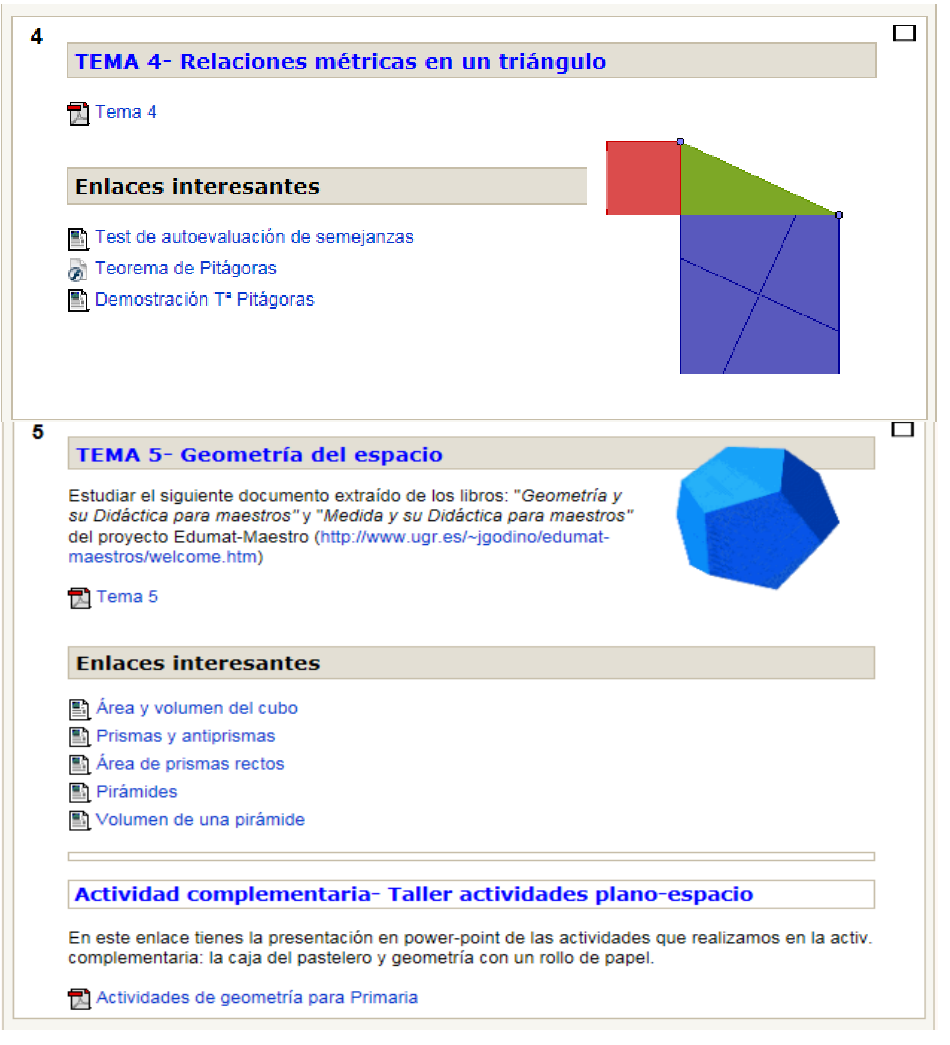
El número Pi
Ángulos en una circunferencia para Ed. Primaria

Actividad complementaria- Taller de Geoplanos

Utiliza estos enlaces para contestar a las preguntas del documento actividades con Geoplanos.

Geoplano cuadrangular
Geoplano circular
Geoplano triangular

Figura 5.1.3.1 – Captura de pantalla del curso Moodle del grupo experimental (cont.)



4

TEMA 4- Relaciones métricas en un triángulo

Tema 4

Enlaces interesantes

- Test de autoevaluación de semejanzas
- Teorema de Pitágoras
- Demostración Tª Pitágoras

5

TEMA 5- Geometría del espacio

Estudiar el siguiente documento extraído de los libros: "*Geometría y su Didáctica para maestros*" y "*Medida y su Didáctica para maestros*" del proyecto Edumat-Maestro (http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm)

Tema 5

Enlaces interesantes

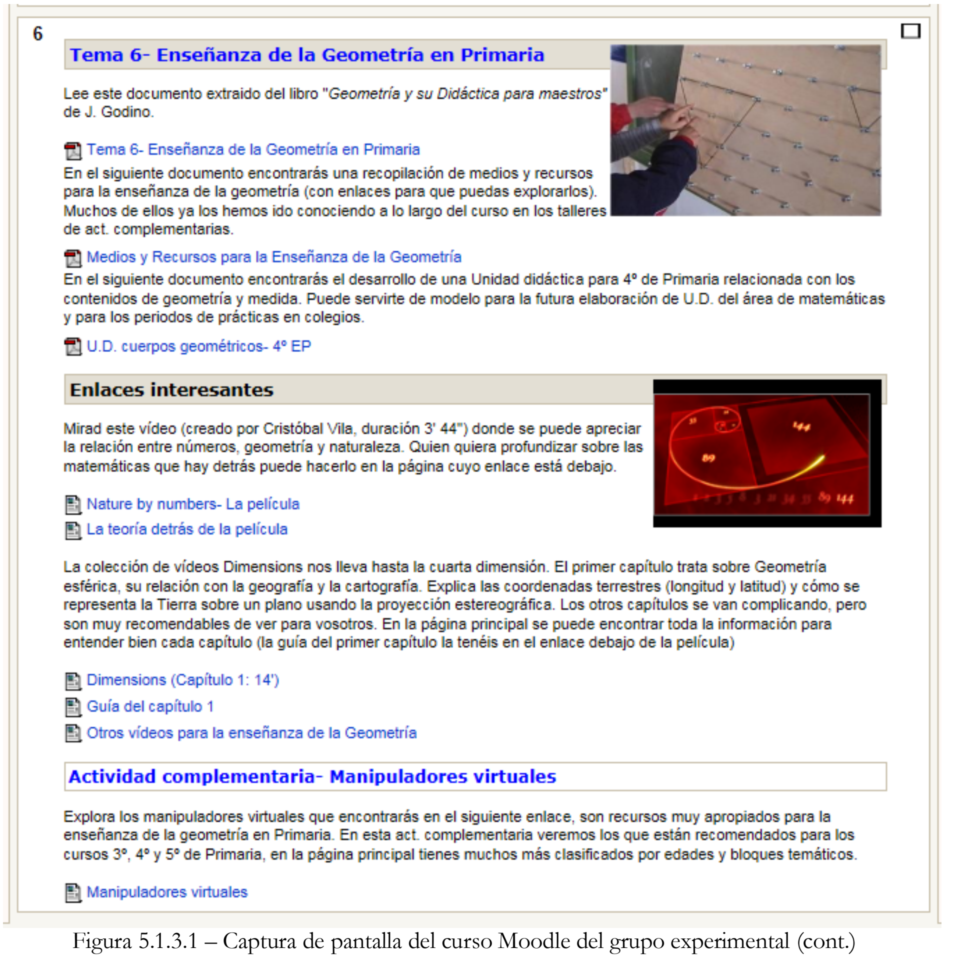
- Área y volumen del cubo
- Prismas y antiprismas
- Área de prismas rectos
- Pirámides
- Volumen de una pirámide

Actividad complementaria- Taller actividades plano-espacio

En este enlace tienes la presentación en power-point de las actividades que realizamos en la activ. complementaria: la caja del pastelero y geometría con un rollo de papel.

Actividades de geometría para Primaria

Figura 5.1.3.1 – Captura de pantalla del curso Moodle del grupo experimental (cont.)



6

Tema 6- Enseñanza de la Geometría en Primaria

Lee este documento extraido del libro "*Geometría y su Didáctica para maestros*" de J. Godino.

Tema 6- Enseñanza de la Geometría en Primaria

En el siguiente documento encontrarás una recopilación de medios y recursos para la enseñanza de la geometría (con enlaces para que puedas explorarlos). Muchos de ellos ya los hemos ido conociendo a lo largo del curso en los talleres de act. complementarias.

Medios y Recursos para la Enseñanza de la Geometría

En el siguiente documento encontrarás el desarrollo de una Unidad didáctica para 4º de Primaria relacionada con los contenidos de geometría y medida. Puede servirte de modelo para la futura elaboración de U.D. del área de matemáticas y para los periodos de prácticas en colegios.

U.D. cuerpos geométricos- 4º EP

Enlaces interesantes

Mirad este vídeo (creado por Cristóbal Vila, duración 3' 44") donde se puede apreciar la relación entre números, geometría y naturaleza. Quien quiera profundizar sobre las matemáticas que hay detrás puede hacerlo en la página cuyo enlace está debajo.

Nature by numbers- La película

La teoría detrás de la película

La colección de vídeos Dimensions nos lleva hasta la cuarta dimensión. El primer capítulo trata sobre Geometría esférica, su relación con la geografía y la cartografía. Explica las coordenadas terrestres (longitud y latitud) y cómo se representa la Tierra sobre un plano usando la proyección estereográfica. Los otros capítulos se van complicando, pero son muy recomendables de ver para vosotros. En la página principal se puede encontrar toda la información para entender bien cada capítulo (la guía del primer capítulo la tenéis en el enlace debajo de la película)

Dimensions (Capítulo 1: 14')

Guía del capítulo 1

Otros vídeos para la enseñanza de la Geometría

Actividad complementaria- Manipuladores virtuales

Explora los manipuladores virtuales que encontrarás en el siguiente enlace, son recursos muy apropiados para la enseñanza de la geometría en Primaria. En esta act. complementaria veremos los que están recomendados para los cursos 3º, 4º y 5º de Primaria, en la página principal tienes muchos más clasificados por edades y bloques temáticos.

Manipuladores virtuales

Figura 5.1.3.1 – Captura de pantalla del curso Moodle del grupo experimental (cont.)

5.1.4 Métodos de evaluación

Las indicaciones comunes de la guía docente para todos los grupos de la asignatura son las siguientes:

La evaluación continua (resolución de problemas, trabajos, seminarios, etc.) tendrá un peso del 30% de la calificación final. Los exámenes tendrán un peso del 70%. Para la convocatoria extraordinaria se utilizarán los mismos criterios que en la convocatoria ordinaria.

Las indicaciones particulares para el grupo experimental se matizaron del siguiente modo:

La nota de evaluación continua (nota máxima 3 puntos) será la suma de estos tres apartados:

- las actividades complementarias (max. 1 punto)
- las prácticas pedidas como tarea en el Taller de GeoGebra (max. 1 punto)
- la valoración de la actividad realizada en Moodle (max. 1 punto)

La nota máxima en el examen será de 7 puntos. La calificación final del curso será la suma de las calificaciones de la evaluación continua y del examen.

Respecto al grupo de control, la única diferencia se encuentra en la forma de obtener la calificación de la evaluación continua (por no haber realizado estos alumnos el taller de GeoGebra): la nota de evaluación continua será la suma de las notas obtenidas en las actividades complementarias y la actividad realizada en Moodle. La nota máxima será de 3 puntos.

5.1.5 Tiempo estimado de trabajo del estudiante[1]

La asignatura Matemáticas y su Didáctica II es de 6 créditos ECTS que, según la equivalencia en horas que ha realizado la Facultad de Formación de Profesorado y Educación de la UAM (1 ECTS = 25 horas), corresponden a 150 horas de trabajo del estudiante. Se ha estimado que el reparto entre

---

[1] El tiempo estimado de trabajo del estudiante y el cronograma son comunes a todos los grupos de 2º curso del Grado Magisterio de Ed. Primaria.

actividades presenciales y no presenciales podría ser el que figura en la tabla 5.1.5.1.

Tiempo estimado de trabajo del estudiante		
PRESENCIAL	Asistencia a clases teóricas, clases prácticas, seminarios y actividades complementarias	45
	Asistencia a tutorías individuales /grupales	10
	Realización de exámenes	5
	Total horas presenciales	60
NO PRESENCIAL	Lecturas y estudio teoría	40
	Preparación de trabajos prácticos	50
	Total horas no presenciales	90
Carga total de horas de trabajo del estudiante		150

Tabla 5.1.5.1 – Tiempo estimado de trabajo del estudiante

5.1.6 Cronograma del curso[1]

Este cronograma (ver tabla 5.1.6.1) tiene carácter orientativo y da una visión general sobre el desarrollo de la asignatura. A lo largo del curso, los profesores responsables de cada grupo informan a los alumnos más detalladamente.

En el caso de los dos grupos que participaron en la investigación, se disponía de un calendario y un foro para noticias en la plataforma Moodle, donde se iban anunciando las distintas actividades, cuándo se llevarían a cabo, los plazos para la entrega de tareas, etc.

Semana	Contenido	Horas presenciales	Horas no presenciales
1-2	Tema 1	6	9
3-5	Tema 2	10	15
6-7	Tema 3	8	12
8-9	Tema 4	8	12
10-13	Tema 5	14	21
14-16	Tema 6	14	21
Horas totales		60	90

Tabla 5.1.6.1 – Cronograma del curso

El horario asignado a la asignatura *Matemáticas y su Didáctica II* para los grupos participantes en la investigación se recogen en la siguiente tabla:

	Lunes	Martes
15:30 a 17:00	Clase G. control	Taller GeoG G. experimental
17:15 a 18:15	Act. Complementaria G. control	Act. Complementaria G. experimental
18:15 a 18:45	Descanso	Descanso
18:45 a 19:45	Clase G. experimental	Clase G. control

Tabla 5.1.6.2 – Horarios de Matemáticas y su Didáctica II grupos de la investigación

5.2 El proceso formativo común a los grupos de la investigación

Consecuentes con la elección de TEDS-M como marco teórico, consideramos que el conocimiento matemático para la enseñanza incluye dos constructos: el conocimiento del contenido matemático (Mathematics Content Knowledge: MCK) y el conocimiento del contenido pedagógico-matemático (Mathematics Pedagogical Content Knowledge: MPCK). Por tanto, el diseño y la evaluación del proceso formativo están enfocados hacia el desarrollo de estas dos componentes de la competencia docente.

Es importante precisar que se ha intentado realizar un proceso formativo en el grupo de control lo más parecido posible al realizado en el grupo experimental, salvo el uso del SGD GeoGebra en el taller semanal. La primera variable que se ha intentado controlar en la investigación ha sido el profesor, en este caso profesora. Para eso se decidió desde el primer momento que en los dos grupos que iban a participar en la investigación la profesora fuera la misma, con la intención de que la docencia en ambos grupos fuese similar. Se pretendió que la única diferencia fuese el uso de GeoGebra en el grupo experimental para resolver problemas geométricos. El resto de los métodos docentes han sido los mismos en ambos grupos: han estudiado los mismos contenidos, han resuelto los mismos problemas, han realizado las mismas actividades didácticas y las mismas pruebas de evaluación.

Siempre hemos tenido en cuenta la necesidad de seguir una metodología activa, porque en numerosas investigaciones se muestra que no es posible que los futuros profesores empleen métodos de enseñanza activos con sus alumnos si ellos mismos no los han experimentado en su forma de trabajo (Barrantes, 1995). Los principios que hemos seguido para ello son:

- **Potenciar el trabajo colaborativo entre los alumnos**, ya sea en gran grupo, en pequeños grupos o en parejas. En gran grupo se han realizado, por ejemplo, dos wikis donde se recoge toda la información encontrada y seleccionada por el grupo experimental y el grupo control sobre los aspectos históricos-didácticos de la Geometría que se les ha planteado en el Tema 1. Para realizar esta actividad ha sido muy valiosa la plataforma Moodle, que facilita la creación de wikis de forma sencilla (ver figura 5.1.3.1). Otras actividades realizadas colaborativamente han sido los talleres didácticos, la elaboración de unidades didácticas y la resolución de problemas geométricos de investigación (mayoritariamente realizados en parejas).

- **Potenciar el trabajo autónomo del alumnado**: se les han ofrecido materiales y recursos para que ampliaran y profundizaran en aspectos de la didáctica de la geometría. También Moodle ha sido una herramienta fundamental para esto, ya que permitía a los alumnos acceder a todo el material desde su casa o el aula de informática en cualquier momento.

- **Potenciar la reflexión crítica del alumnado:** los debates e intercambios de ideas se han utilizado siempre que la ocasión lo ha requerido, tanto para discutir cuestiones geométricas, como metodológicas o didácticas.

- **Emplear el método de resolución de problemas.** Se ha intentado siempre que los propios alumnos sean los que resuelvan los problemas planteados y expliquen sus procesos de resolución a sus compañeros. Se ha dedicado especial atención al uso del lenguaje geométrico apropiado y a encontrar y discutir distintos procedimientos de resolución. También a la comprobación y formalización de la solución obtenida. El papel de la profesora en este tipo de actividades ha consistido en orientar y guiar a los alumnos, dejando la iniciativa en sus manos. Se ha tratado de fomentar su autoconfianza para que superen el temor al error y su dificultad de explicar apropiadamente los procedimientos seguidos.

- **Utilizar materiales y recursos manipulativos**, tanto materiales como virtuales. La gran mayoría del alumnado no conoce la riqueza de medios y recursos que existe para la enseñanza de la geometría en Primaria. Por eso es preciso que no sólo se realice una descripción de dichos recursos, sino que ellos mismos los utilicen y manipulen para entender su utilidad y posibles aplicaciones didácticas. Este trabajo se ha realizado en las sesiones de actividades complementarias realizadas con ambos grupos.

5.2.1 Los talleres didácticos del proceso formativo común

Vamos a describir ahora los talleres que realizaron tanto el grupo experimental como el control para conocer y analizar metodologías y recursos didácticos de geometría apropiados para su enseñanza en la etapa de Primaria. Estos talleres tienen el objetivo principal de desarrollar las competencias didáctico-matemáticas del futuro profesor (MPCK).

Como hemos comprobado a lo largo de nuestra experiencia docente, los materiales didácticos pueden ser muy útiles para favorecer aprendizajes; sin embargo, no son suficientes por sí solos. Quienes confieren la utilidad a los materiales son, por una parte, el profesor que propone y motiva actividades con ellos en un momento determinado (observaciones, construcciones, transformaciones, etc.) y, por otra parte, los alumnos con su actuación. Si se produce esta relación, el material puede actuar de intermediario entre el pensamiento del niño y el del maestro, complementando o sustituyendo las explicaciones según los casos; por el contrario, si no se produce esta interrelación, el material no pasa de ser un objeto más.

Para el aprendizaje de la Geometría, el alumno debe experimentar las relaciones y propiedades de los objetos geométricos independientemente de la posición que ocupan en el plano o el espacio. La enseñanza estática de esta rama de las matemáticas, que ha sido el método tradicionalmente más utilizado mediante el empleo del lápiz y el papel o la pizarra y la tiza como únicos recursos didácticos, refuerza falsas creencias de los alumnos sobre la forma de las figuras asociada a la posición que ocupan (Ruiz-López, 2011b). Por eso hemos elegido para los talleres de recursos didácticos algunos materiales manipulables y virtuales que evitan la asociación entre figuras planas o sólidos y su posición en el plano o espacio, ya que permiten desplazar las figuras, comprobando qué propiedades permanecen invariables a pesar del movimiento.

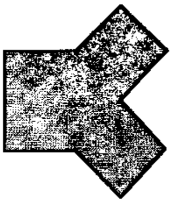
En los dos grupos de alumnos se han impartido cuatro talleres en los que hemos elegido algunos recursos y análisis de actividades que estuvieran relacionados con los temas del programa de la asignatura que estaban estudiándose en ese momento. El primer taller se ocupó del Tangram, el segundo del Geoplano, el tercero mostró distintas formas de trabajar las relaciones entre el plano y el espacio; por último, el cuarto taller se centró en los recursos virtuales que podemos incluir bajo el epígrafe Manipuladores Virtuales.

Los talleres se han desarrollado en el tiempo dedicado a actividades complementarias. Los grupos experimental y control se dividían a su vez en dos subgrupos que realizaban el taller en semanas consecutivas. Cada subgrupo disponía de 2 horas para la realización del taller didáctico y se realizaba en el aula específica denominada seminario o laboratorio de matemáticas, donde se cuenta con los materiales apropiados para todos los alumnos. El último taller se realizó en el aula de informática de la facultad, ya que era necesario el uso de ordenadores.

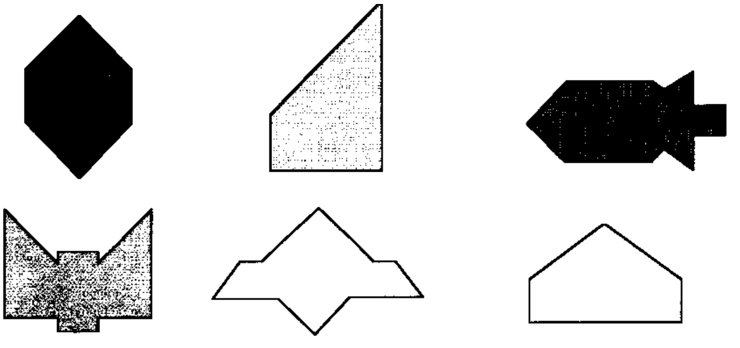
En los dos primeros talleres, dedicados al tangram y al geoplano, se presentaron distintos modelos y se pidió la construcción de alguno de ellos. Luego se propuso el análisis de algunas secuencias de actividades apropiadas para alumnos de primaria. Este análisis se realizó en parejas o tríos, que recogían sus conclusiones en un documento que era entregado al finalizar la sesión. Además se proponían actividades de ampliación que estaban disponibles en Moodle, de forma que los alumnos voluntariamente podían realizarlas en su trabajo individual fuera de las clases presenciales (ver tablas 5.2.1.1 y 5.2.1.2). Estos trabajos formaban parte de la calificación del curso como nota de evaluación continua.

Construcciones geométricas con Tangram

a)- Utilizando 1 R (romboide), 1C (cuadrado grande), 2T (triángulos grandes) y 2 t (triángulos pequeños) del modelo de Tangram dado en la plantilla adjunta, construir esta figura:



b)- Utilizando todas las piezas del tangram, construir estas figuras:



c)- Construir todos los rectángulos posibles utilizando solamente seis piezas del tangram.
d)- Construir un rectángulo utilizando todas las piezas del tangram.
e)- Construir un cuadrado de forma diferente al modelo del tangram.
f)- Construir paralelogramos utilizando las siete piezas.
g)- Construir todos los trapecios rectángulos e isósceles que se pueda con 6 piezas y con 7.

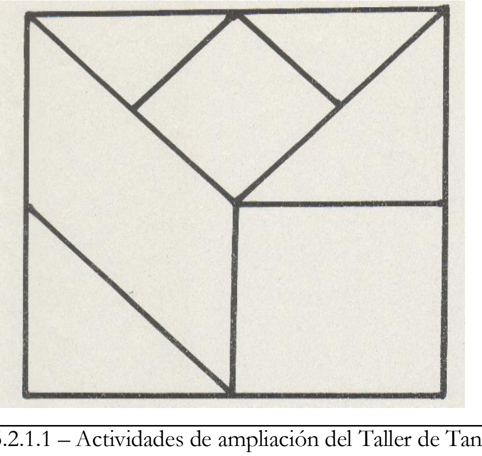
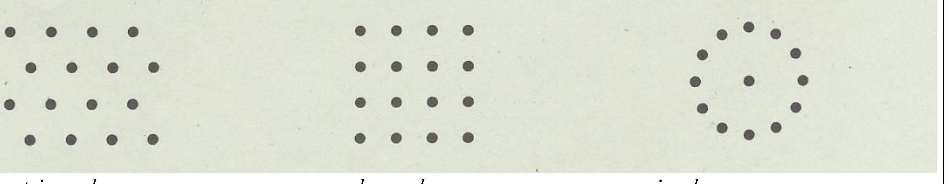


Tabla 5.2.1.1 – Actividades de ampliación del Taller de Tangram

Actividades con Geoplanos

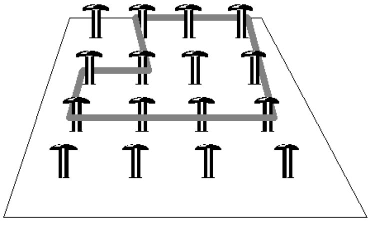
El geoplano fue inventado por el matemático y pedagogo egipcio Galeb Gattegno (1911-1988) para enseñar geometría a niños pequeños. Consiste en una superficie plana en la que se dispone, de manera regular, una serie de puntos. Dependiendo de cómo estén colocados estos puntos se distinguen varios tipos de geoplanos, aunque los que más se utilizan son el *geoplano triangular*, el *cuadrado* o *cuadrangular* y el *circular*.



triangular *cuadrangular* *circular*

Para trabajar las actividades que te presentaremos a continuación, tendrás que manejar un geoplano cuadrado. El geoplano cuadrado más fácil de conseguir es un papel cuadriculado, considerando los vértices de los cuadrados de la cuadrícula como los puntos del geoplano; sin embargo, para no desechar papel tras la realización de cada actividad, te propondremos la construcción de uno que te sirva para efectuar todas las actividades relativas al geoplano cuadrangular. Para ello sólo tienes que conseguir una plancha cuadrada de madera o contrachapado de, al menos, un centímetro de grosor, y unos cuantos clavos.

Dibuja una cuadrícula sobre un papel de las mismas dimensiones que la plancha, sujeta el papel al tablero con cinta adhesiva y clava un clavo en cada uno de los vértices de la cuadrícula, retira el papel y ya tendrás construido tu geoplano



(fig.1)

Una vez construido el geoplano, para hacer las figuras que se requieran en cada actividad, tendrás que utilizar gomillas elásticas que sujetarás a los clavos. Ten en cuenta que si quieres construir un geoplano 10 x 10, por ejemplo, y dibujas una cuadrícula con cuadrados de dos centímetros de lado, el tablero de madera deberá medir, al menos, 25 centímetros de lado. Observa que para construir un geoplano triangular el proceso sería similar, teniendo en cuenta que la plantilla de papel habría de ser triangular en lugar de cuadrada.

En todas las actividades que se proponen a continuación, los vértices de los polígonos construidos deben estar situados sobre los puntos del geoplano. Además, consideraremos que la **unidad de longitud** será la distancia entre dos puntos o vértices consecutivos situados en la misma columna del geoplano, y la **unidad de superficie**, el área de cada cuadrado de la cuadrícula determinado por cuatro puntos, consecutivos dos a dos, del geoplano.

Por ejemplo, en el geoplano 4 x 4 de la *figura 1*, el polígono representado corresponde a un rectángulo cuya base mide dos unidades de longitud, su altura es de una unidad y su área, de dos unidades de superficie. De esta forma se observa que es fácil calcular superficies utilizando el geoplano, ya que basta con contar los cuadrados que componen el polígono cuya área se quiera hallar.

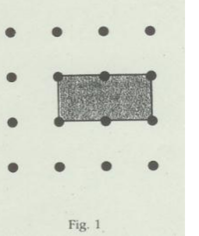


Fig. 1

Áreas iguales

Si en un geoplano cuadrado 5 x 5 consideramos los polígonos que aparecen en las *fig*

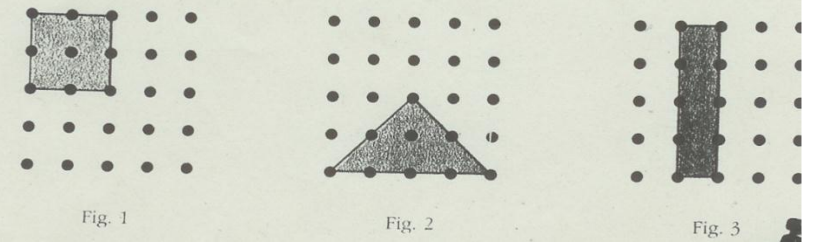
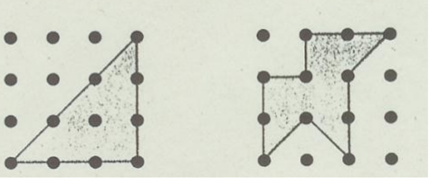


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

El área de estos polígonos se puede calcular utilizando las expresiones que ya conoces, aunque en el geoplano se observa fácilmente que el área de los tres polígonos es cuatro unidades de superficie.

1. ¿Serías capaz de encontrar en este geoplano otros polígonos que tengan la misma área que los tres anteriores?

2. Si utilizamos un geoplano cuadrado 4 x 4, los polígonos de las dos figuras siguientes tendrán un área igual a la mitad de la superficie total de dicho geoplano. Halla otros polígonos diferentes que tengan esta misma superficie.



3. Si considerásemos un geoplano cuadrado de orden cinco (5x5 puntos), ¿serías capaz de dibujar en él un cuadrado cuya área fuese de ocho unidades de superficie?

4. ¿Cuántos cuadrados de distinto tamaño se pueden formar en una trama cuadrada de 5x5 puntos? Dibuja uno de cada tipo.

5. Dibuja el polígono de mayor nº de lados posible para geoplanos de 2, 3, 4 y 5 puntos de lado.

6. ¿Cuántos triángulos equiláteros que tengan sus vértices en los puntos de la trama triangular hay dentro de un triángulo de 5 unidades de lado?

7. Diseña una actividad para usar el geoplano circular. Indica los objetivos matemáticos que pretendes conseguir, los materiales que se necesitan, la organización de la clase y las indicaciones que les darás a los alumnos.

Tabla 5.2.1.2 – Actividades del Taller de Geoplanos

El tercer taller, dedicado a la relación entre el plano y el espacio, consistió en el análisis didáctico de dos metodologías distintas. Primero se presentó "La caja del pastelero", que consiste en una actividad de modelización matemática basada en una conferencia impartida por la profesora de la Universidad de Jaén, Luisa Ruiz-Higueras, durante el curso 2010-2011 en la Facultad de Formación de Profesorado de la UAM. Amablemente la profesora L. Ruiz cedió parte de sus materiales a los profesores de didáctica de las matemáticas de la UAM[1] y a partir de ellos elaboramos un guión para realizar la actividad dentro del taller didáctico de nuestra investigación.

La segunda parte del taller consistió en el análisis de otro tipo de metodología para trabajar la conexión entre el plano y el espacio: "Geometría con un rollo de papel". Para realizar esta actividad utilizamos el artículo *Geometría intuitiva desde el cuarto de baño*[2]. En la tabla 5.2.1.3 se pueden ver las diapositivas de la presentación preparada para la realización del taller. Estos dos tipos de actividad geométrica se trabajaron en gran grupo, combinando la construcción y manipulación de materiales con la reflexión didáctica.

1 Estos materiales están recogidos en el artículo: Ruiz, L. La competencia matemática de modelización. Una propuesta para la Escuela Infantil. En prensa.

2 Duque, C. y Quintero, E. Geometría intuitiva desde el cuarto de baño. Números, vol. 70, pg. 89-104. Accesible en: http://www.sinewton.org/numeros

Presentación del Taller 3

ACTIVIDADES DE GEOMETRÍA PARA PRIMARIA

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES PARA RELACIONAR LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO CON LA GEOMETRÍA PLANA

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA II
2º GRADO DE ED. PRIMARIA

Diapositiva 1

ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN

- Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente

Diapositiva 2

ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN

Condiciones de la modelización:

- Un modelo no es una copia de lo real. Es una construcción artificial relacionada con lo real.
- La principal función del modelo es aportar conocimiento sobre la realidad (no parecerse al sistema real).
- La adecuación entre modelo y realidad supone debatir su validez (enseñanza de la modelización y no enseñanza de los modelos).

Diapositiva 3

LA CAJA DEL PASTELERO

Objetivos: Llevar a cabo una actividad matemáticas de modelización de un sistema real que permita:

- Formular hipótesis
- Validar o rechazar esas hipótesis
- Rechazar concepciones erróneas
- Superar obstáculos
- Debatir la validez del modelo
- Analizar el modelo para anticipar conocimientos sobre el problema real
- Enriquecer los conocimientos del sistema por medio de las propiedades del modelo.
- Confirmar las propiedades del modelo por medio de la validación empírica sobre el sistema.
- Ampliar y generalizar las características del sistema.

Diapositiva 4

LA CAJA DEL PASTELERO

Descripción de la actividad: Se pide a los alumnos que construyan una caja, a partir de una hoja de papel que les proporcionamos, siguiendo las instrucciones que les damos (en un esquema, mediante fotos, haciéndolo con ellos paso a paso, etc.)

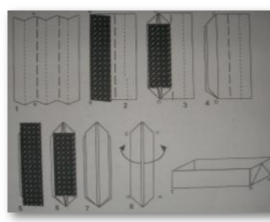
Materiales necesarios:

- Hojas de papel cuadriculado de 1 cm de lado (20x24)
- Hojas dinA4 en blanco
- Tijeras
- Bolígrafo y regla graduada

Diapositiva 5

LA CAJA DEL PASTELERO

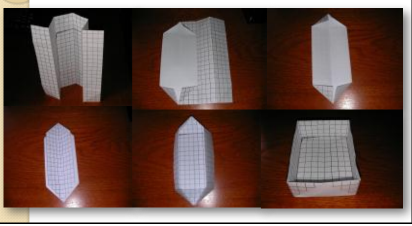
Esquema de construcción de la caja:



Diapositiva 6

LA CAJA DEL PASTELERO

Pasos de la construcción:



Diapositiva 7

LA CAJA DEL PASTELERO

Tipos de tareas:

A. Encontrar las dimensiones de la caja a partir de hojas de dimensiones dadas.

- Con una hoja inicial de 20 cm x 24 cm
- Con una hoja inicial de 15 cm x 21 cm
- Con una hoja inicial dinA-4

Diapositiva 8

LA CAJA DEL PASTELERO

Tipos de tareas:

B. Encontrar las dimensiones de la hoja inicial para obtener un determinado tipo de caja:

- Si queremos una caja de base 6 cm x 13 cm, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la hoja de partida?, ¿cuál será la altura de la caja?.
- Si queremos una caja de base cuadrada 5 cm x 5 cm, ¿qué dimensiones debe tener la hoja inicial?.

Diapositiva 9

LA CAJA DEL PASTELERO

Tipos de tareas:

C. Condición doble: hoja impuesta y caja impuesta.

- Construir a partir de una hoja A-4 la caja de base cuadrada mayor posible.

Diapositiva 10

LA CAJA DEL PASTELERO

Tipos de tareas:

D. Prever las dimensiones de la hoja (o de la caja) sin necesidad de construirla.

- El modelo inicial aritmético-geométrico se amplia hacia una modelización “prealgebraica”.
- Respuestas del tipo:
  “si dividimos en 3 partes el lado mayor de la hoja obtenemos un lado de la base de la caja”, “la altura de la caja es la sexta parte del lado mayor de la hoja”, etc.

Diapositiva 11

GEOMETRÍA CON UN ROLLO DE PAPEL

Objetivos: Contribuir al desarrollo de la visión geométrica del alumnado

- Imaginar, intuir y predecir situaciones que contrastarán manipulativamente.
- Repasar las características de varias figuras planas.
- Iniciarse en el conocimiento del cilindro, la elipse y el número Pi.

Diapositiva 12

GEOMETRÍA CON UN ROLLO DE PAPEL

Materiales necesarios:

- Cilindros de cartón (papel higiénico), mínimo 5 por alumno.
- Tijeras.
- Cinta métrica de papel
- Lápiz y regla graduada.
- Transportador de ángulos.

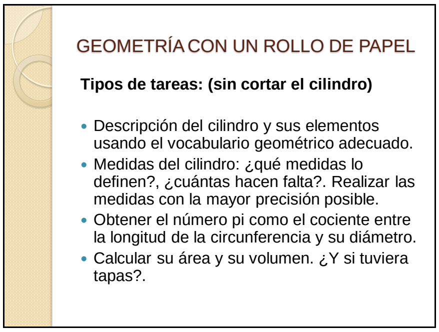
Diapositiva 13

GEOMETRÍA CON UN ROLLO DE PAPEL

Método de trabajo:

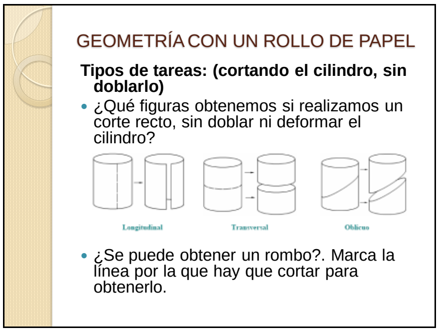
- Todas las actividades deben ser pensadas e imaginadas antes de realizarlas.
- Se debe predecir lo que va a suceder. Luego se realiza la actividad y se comprueba la hipótesis.

Diapositiva 14



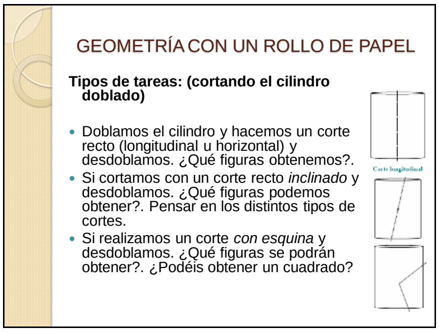
Diapositiva 15

Diapositiva 16



Diapositiva 17

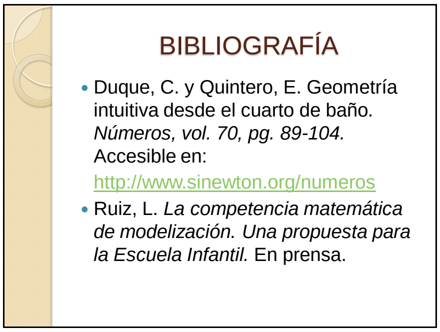
Diapositiva 18



Diapositiva 19

Diapositiva 20

Diapositiva 21



Diapositiva 22

Tabla 5.2.1.3 – Presentación del Taller didáctico 3

El cuarto taller didáctico trató de dar a conocer los distintos manipuladores virtuales que pueden utilizarse para la enseñanza de la geometría en educación Primaria. En una de las aulas de informática de la facultad de Formación de Profesorado los alumnos de los grupos participantes en la investigación pudieron explorar, en parejas, la página de la universidad de Utah[1] donde se recogen una gran variedad de applets de java clasificados por grados (cursos del sistema educativo de EEUU). En esta página hay recursos virtuales para la enseñanza de todos los bloques temáticos de matemáticas en la etapa obligatoria. En nuestro taller nos limitamos, por razones de disponibilidad de tiempo, a los manipuladores dedicados a la Geometría de los grados 3-5 (equivalentes a 3º, 4º y 5º de Primaria en España). En la figura 5.2.1.4 vemos la captura de pantalla de la lista de manipuladores virtuales que se analizaron en el cuarto taller didáctico.

En resumen, nuestra intención en el proceso formativo común ha sido doble: 1) desarrollar la competencia didáctico-matemática del futuro profesorado de primaria; y 2) homogeneizar la docencia entre los grupos experimental y control para que el único aspecto diferencial fuese el uso de GeoGebra en una parte del alumnado, los que formaban el grupo experimental. Así podríamos observar, al acabar el semestre, si obteníamos diferencias entre los resultados de ambos grupos y, en caso afirmativo, podríamos atribuir esas diferencias al uso de GeoGebra.

---

1 Página de Manipuladores Virtuales accesible en el enlace: http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_3.html


Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales
Click here to visit this website in English
UtahState UNIVERSITY
Biblioteca
Información
eNLVM
Comprar!
Buscar
Descargar Nueva Versión Gratuita 3.0!
Geometría (Grados 3 - 5)
Manipuladores para Geometría, Grados 3 - 5.
Bloques Espaciales – Crea y descubre patrones usando bloques tridimensionales.
Bloques de Atributos – Aprende sobre los conceptos de color, forma y tamaño ordenando bloques.
Bloques de Patrones – Usa seis figuras geométricas comunes para construir patrones y resolver problemas.
Fractales - Conjuntos de Mandelbrot y de Julia – Investiga las relaciones entre los conjuntos de fractales de Mandelbrot y de Julia.
Fractales - Iterativos – Genera seis fractales distintos.
Fractales - Koch y Sierpinski – Cambia los colores y pausa la simulación de estos fractales en cualquier momento.
Fractales - Poligonales – Cambia los parámetros para crear distintos fractales.
Geoplano – Usa geoplanos para ilustrar los conceptos de área, perímetro, distancia, pendiente y número racional.
Geoplano - Circular – Usa geoplanos circulares para ilustrar ángulos y grados.
Geoplano - Coordenadas – Geoplano rectangular con coordenadas (x,y).
Geoplano - Isométrico – Usa el geoplano para ilustrar figuras en tres dimensiones (3D).
Mariquita y el Laberinto – Programa a la mariquita para que recorra el laberinto.
Mariquita y la Hoja – Programa a la mariquita para que se esconda detrás de la hoja.
Mosaicos – Usa polígonos regulares para rellenar el plano.

Figura 5.2.1.4 – Captura de pantalla de los manipuladores virtuales de geometría grados 3-5

5.3 El proceso formativo específico del grupo experimental: el Taller de GeoGebra

Cuando los alumnos llegan a cursar la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, donde se organizan los contenidos del bloque de Geometría y Medida, nos encontramos con problemas de falta de comprensión, dificultades para entender el vocabulario específico y profundas inseguridades hacia la materia. Esta situación nos ha llevado a desarrollar una metodología activa centrada en superar los obstáculos de aprendizaje de la Geometría con los futuros profesores de Primaria. En el marco de esta metodología, que acabamos de describir en el apartado anterior, hemos introducido un taller de geometría donde la herramienta fundamental es el software GeoGebra, para intentar que nuestro alumnado supere los bloqueos que le produce enfrentarse a la resolución de problemas geométricos y facilitarles el aprendizaje de conceptos y relaciones entre las figuras de una forma dinámica.

Creemos además, que este modo de trabajo les beneficia en su competencia didáctica. Esta hipótesis viene avalada por algunas investigaciones realizadas (ver apartado 2.3 de esta tesis). También pensamos que GeoGebra puede ayudar a nuestros estudiantes ya que los entornos de geometría dinámica producen una nueva clase de geometría. En esta geometría con ordenador las figuras quedan determinadas mediante su proceso de construcción y su comportamiento cuando se someten a "arrastres" (Forsythe, 2007). En el papel, un objeto geométrico (como un triángulo) es estático. Sin embargo, en la pantalla del ordenador un triángulo construido con GeoGebra es bastante diferente. No está fijado estáticamente en el espacio y su comportamiento depende del método usado en su construcción (Olive, 2000).

Para evaluar el efecto diferencial del trabajo con GeoGebra en el desarrollo de competencias geométrico-didácticas, el taller se realizó sólo con el grupo experimental dentro del tiempo asignado para la docencia de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, que se imparte en 2º curso del grado de Magisterio en Ed. Primaria durante el primer semestre. El periodo de tiempo en el que se realizó el Taller fue de octubre a diciembre de 2010, en sesiones semanales de 90 minutos de duración (martes de 15:30 a 17:00). Las sesiones se llevaban a cabo en un aula de informática con 30 ordenadores, donde los alumnos estaban organizados en parejas estables (había 25 parejas en total). Cada pareja trabajaba siempre junta realizando las actividades propuestas, si algún día uno de los miembros de la pareja faltaba, el otro miembro trabajaba solo y posteriormente comunicaba los resultados a su pareja, que podía realizar su aportación si lo creía necesario. Los emparejamientos los realizaron los propios alumnos, según su afinidad personal, y no se tuvieron en cuenta razones académicas para ello.

En cada sesión se proponía a los alumnos la realización de una práctica o de varias. Las prácticas eran problemas geométricos que estaban planteados dentro del temario de la asignatura y que los alumnos del grupo control resolvían también, aunque con métodos tradicionales de lápiz y papel. Cada pareja guardaba al final de cada sesión, en un dispositivo portátil, los archivos de GeoGebra que se iban generando. Algunas actividades (prácticas 1, 7 y 11) las tuvieron que subir a Moodle como tarea que sería calificada dentro de la evaluación continua del curso.

Para preparar el taller de GeoGebra, se realizó un taller piloto el curso anterior con alumnos de la misma asignatura de la diplomatura de Magisterio de Educación Primaria. Esta experiencia previa nos permitió estudiar el tipo de actividades que podrían ser más adecuadas, los errores más comunes que cometían los alumnos, la ventaja de trabajar individualmente o en parejas, el coste del aprendizaje del manejo del software y la opinión de los estudiantes sobre GeoGebra. Vamos a exponer ahora los resultados del taller piloto de GeoGebra.

5.3.1 El taller piloto de GeoGebra

El taller piloto se desarrolló durante el mes de mayo del año 2010, con un grupo de alumnos de 2º curso de la Diplomatura de Magisterio de Ed. Primaria en la UAM, dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II dedicada al bloque de contenidos de Geometría y Medida. En este taller los alumnos trabajaron en el aula de informática, individualmente o en parejas, la resolución de varios problemas o actividades.
Siguiendo a González-López (2001), las actividades que se propusieron se pueden clasificar en los siguientes tipos:

- actividades de construcción de figuras
- actividades de comprobación de propiedades
- actividades de conjetura e investigación

Vamos a exponer algunos estudios de casos para analizar las dificultades que tuvieron los alumnos, los errores cometidos y las ventajas que GeoGebra aporta a la resolución de estos tipos de actividades.

5.3.1.1 Análisis de actividades de construcción de figuras y comprobación de propiedades

En la práctica nº 1 del taller piloto, se propusieron a los alumnos las siguientes actividades:

a) Construid un triángulo ABC, trazad las **mediatrices** de cada lado en rojo y comprobad que se cortan en un punto que se llama Circuncentro. Escribid el nombre del punto también en rojo. Observad que si trazáis una circunferencia con centro en dicho punto y que pase por A, también pasa por los otros dos vértices: es una circunferencia circunscrita al triángulo.

   Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las mediatrices, otra para el circuncentro y otra más para la circunferencia circunscrita.

b) *La* ***altura*** *correspondiente a un lado de un triángulo es un segmento perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto. Todo triángulo tiene 3 alturas.*

   Construid las alturas del triángulo ABC en morado, y comprobad que se cortan en un punto llamado Ortocentro. Poned el nombre del punto en el mismo color.

   Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las alturas y otra para el ortocentro.

c) *El segmento que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto se llama* ***mediana***. Trazad las tres medianas del triángulo en verde, y comprobad que se cortan en un punto llamado Baricentro. Escribid su nombre en verde. Medid los segmentos en que el baricentro divide a cada mediana, ¿qué relación observáis entre los dos segmentos de cada mediana?

   Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las medianas y otra para el baricentro.

d) Trazad las **bisectrices** del triángulo en azul, y comprobad que se cortan en un punto llamado Incentro. Poned su nombre en azul. Si trazáis desde el incentro una perpendicular a cada lado, ¿cuánto miden los tres segmentos que se forman? Dibujad ahora una circunferencia con centro en el incentro y radio uno de esos segmentos (circunferencia inscrita).

   Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las bisectrices, otra para el circuncentro y otra para la circunferencia inscrita.

e) Comprobad que en cualquier triángulo por el circuncentro, ortocentro y baricentro pasa una recta llamada **recta de Euler**. ¿Está el incentro en la recta de Euler?

   Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar la recta de Euler.

f) ¿Hay algún triángulo en el que los cuatro puntos notables (incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro) coincidan, es decir, se superpongan? ¿Cómo lo has comprobado?

g) En cualquier triángulo rectángulo, ¿en qué posición están el ortocentro y el circuncentro?

h) Construid un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que su hipotenusa mide 10 cm (pista: pensad en las propiedades que habéis observado en el apartado anterior).

Los apartados a), b), c), d) y e) podríamos incluirlos en las categorías de construcción de figuras y comprobación de propiedades. La mayoría de los alumnos consigue realizar correctamente la parte de construcción cuando se familiarizan con las herramientas de GeoGebra, aunque es frecuente que las figuras no conserven todas sus propiedades cuando las sometemos al arrastre de test (Arzarello et al., 2002). En la figura 5.3.1.1.1 podemos ver la construcción realizada por una pareja de alumnas que ha respondido correctamente casi toda la práctica.

Algunos alumnos cometen el error de determinar los puntos medios de los lados del triángulo "a ojo", es decir, mediante la herramienta "punto" en lugar de "punto medio". Así construyen las medianas y el baricentro de manera incorrecta. Los errores más frecuentes los encontramos en la comprobación de propiedades, por ejemplo: utilizan la herramienta "punto" en lugar de las herramientas "intersección entre dos objetos", de forma que cuando deben comprobar que las rectas se intersecan siempre en un punto, la construcción no se mantiene. En la figura 5.3.1.1.2 vemos una construcción donde la recta de Euler no se mantiene, no han determinado el circuncentro como intersección de las mediatrices.

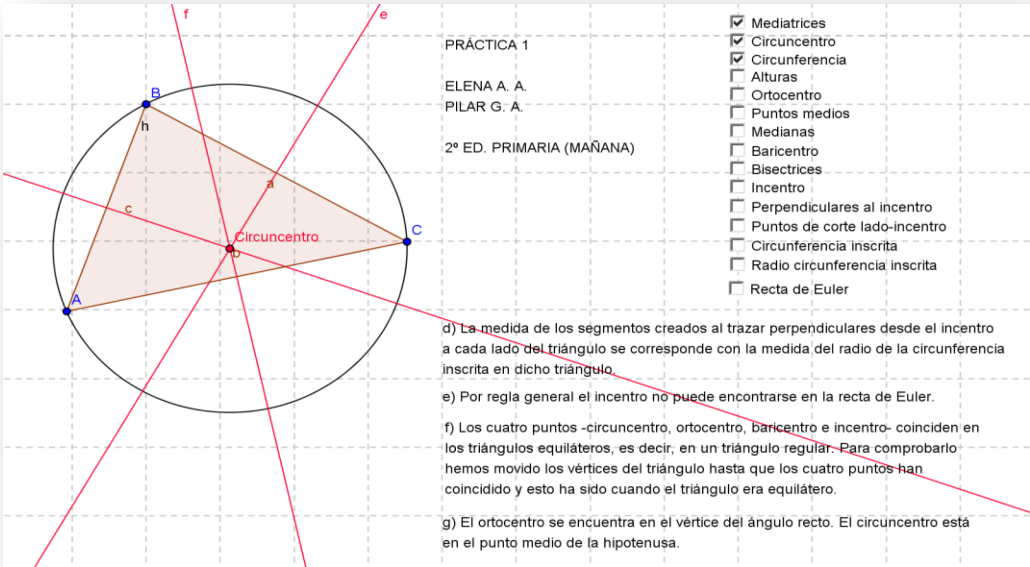


Figura 5.3.1.1.1 – Construcción correcta de la práctica 1 del taller piloto de GeoGebra

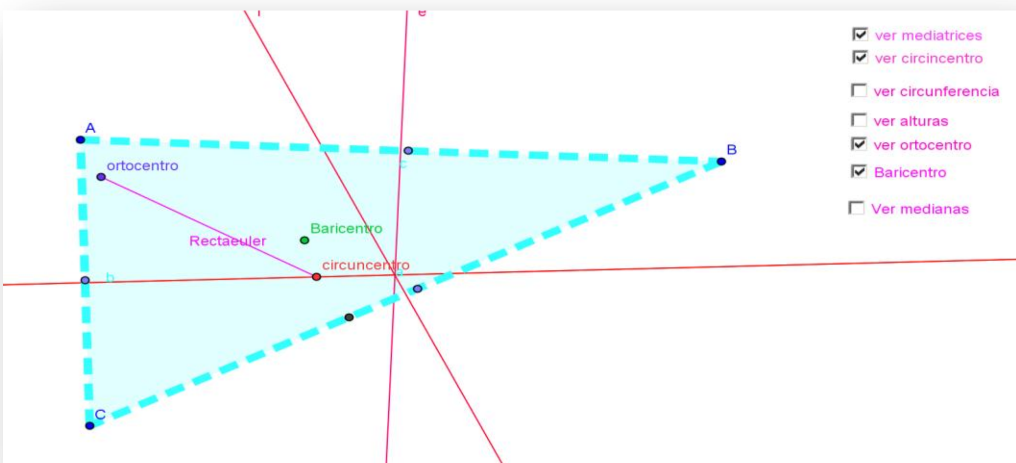


Figura 5.3.1.1.2 – Construcción incorrecta de la práctica 1, la recta de Euler no se mantiene

Esto demuestra que el carácter "dinámico" de GeoGebra no es aprovechado por los alumnos desde un primer momento. Su larga experiencia de aprendizaje estático de los conceptos geométricos pesa demasiado y, a pesar de la insistencia de la profesora responsable del taller, no comprueban sus construcciones al finalizar las actividades con el arrastre de test (no mueven los vértices de los triángulos para ver si las propiedades se mantienen). Implícitamente, los alumnos trabajan sólo con un triángulo, no con "cualquier triángulo".

Otra dificultad que tienen algunos alumnos es la comprensión del lenguaje geométrico. Esto les impide realizar las construcciones correctamente, ya que interpretan erróneamente los enunciados de los problemas. Esta carencia también afecta a las actividades donde tienen que elaborar justificaciones o formular conjeturas. Las alumnas de la figura 5.3.1.1.3 han interpretado incorrectamente la pregunta *¿Hay algún triángulo en el que los cuatro puntos notables (incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro) coincidan, es decir, se superpongan?* Han entendido: *¿Hay un triángulo que pase por los 4 puntos notables?*

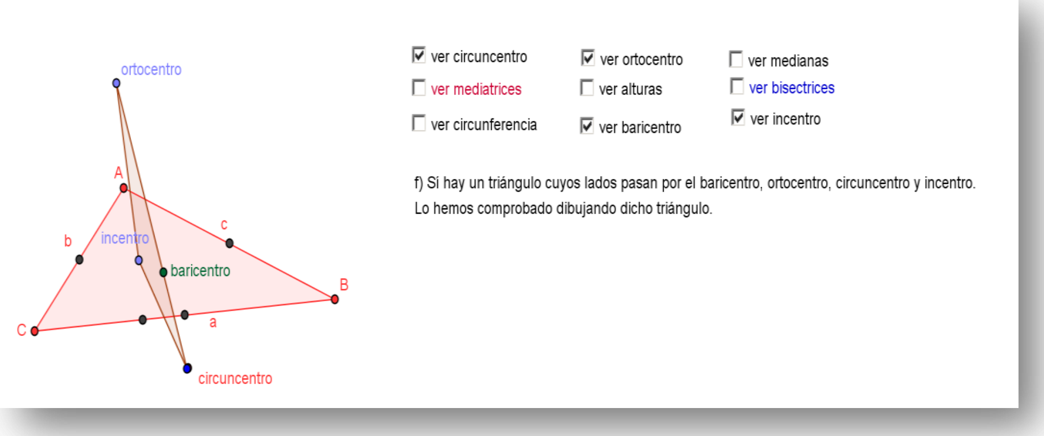


Figura 5.3.1.1.3 – Construcción incorrecta del apartado f) de la práctica 1

En su actividad hay numerosos errores, ya que han utilizado la herramienta "punto" para determinar todos los puntos notables, pero estos errores no los han detectado porque no han movido su triángulo en ningún momento. Ellas han trabajado como si fuesen figuras dibujadas estáticamente.

5.3.1.2 Análisis de actividades de conjetura e investigación

Una actividad que ha resultado muy difícil para los alumnos del taller piloto de GeoGebra ha sido el apartado h) de la práctica 1. Se trataba de realizar una construcción de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 10 cm. Se pretendía que usaran la propiedad que habían deducido en el apartado g): *el circuncentro en un triángulo rectángulo siempre está en el punto medio de la hipotenusa*. En la figura 5.3.1.2.1 puede verse una construcción correcta.

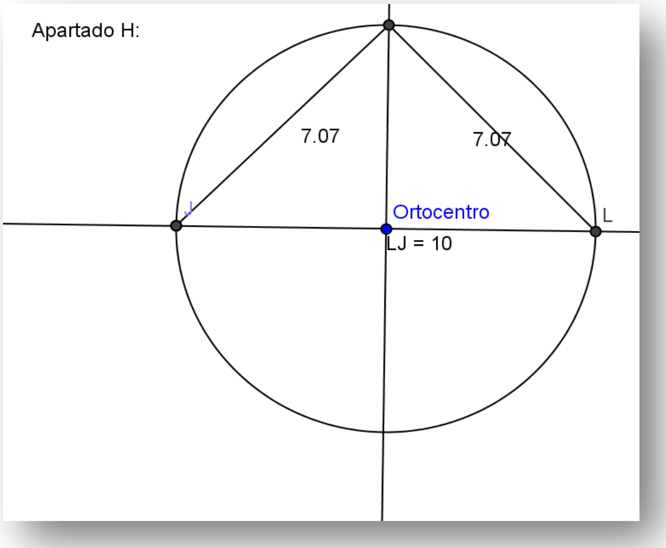


Figura 5.3.1.2.1 – Construcción correcta del apartado h) de la práctica 1

A pesar de que la mayoría de los alumnos responden correctamente al apartado g), no son capaces de utilizar esta propiedad para realizar la construcción pedida en h). La mayoría obliga a que su triángulo inicial, que no era rectángulo, tenga un ángulo "aparentemente de 90º" y que las medidas de sus lados cumplan las propiedades pedidas. Algunos alumnos se conforman con que el triángulo cumpla sólo una de las condiciones: o es isósceles o la hipotenusa mide 10 cm. Las construcciones pierden todas sus propiedades cuando arrastramos uno de los vértices del triángulo. (En esta actividad la profesora del taller había pedido como condición necesaria que la construcción conservara las propiedades del triángulo siempre).

En la figura 5.3.1.2.2 vemos la construcción de una alumna que implícitamente ha usado el teorema de Pitágoras para determinar que los catetos deben medir 7,07 cm y construye el triángulo "apoyándose en los ejes cartesianos". Su triángulo deja de cumplir la propiedad de tener un ángulo recto al mover los vértices B o C. No ha utilizado la propiedad del circuncentro.

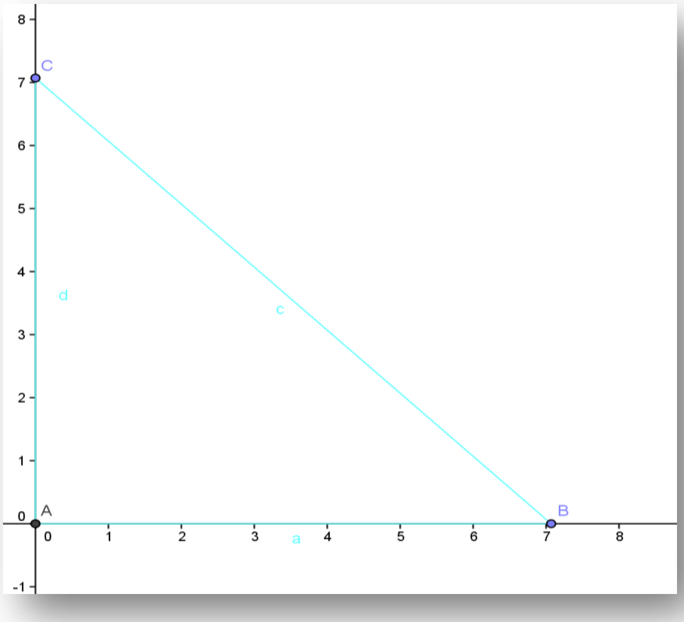


Figura 5.3.1.2.2 – Construcción incorrecta del apartado h) de la práctica 1

Además se plantearon otras actividades de investigación más abiertas. En la práctica 2 se pedía lo siguiente:

Tres ciudades se encuentran en los tres vértices de un triángulo acutángulo. Queremos construir una carretera que las una de forma que la suma de las distancias entre las tres sea mínima. Investigad que condiciones deben cumplirse para ello. Explicad detalladamente las conclusiones a las que habéis llegado y el procedimiento que habéis seguido.

Se planteó realizar una construcción que modelizara el problema. La primera aproximación a la solución fue considerar que la carretera podía trazarse sobre los lados del triángulo que se formaba al unir los tres vértices donde estaban las ciudades. La pregunta de la profesora fue: *¿pensáis que puede haber un punto interior al triángulo que permita encontrar un camino menor al trazar los segmentos desde ese punto hasta los tres vértices?* Se invitó a los alumnos a realizar una construcción que comparara ambos caminos y que llegaran a formular alguna propiedad sobre el camino mínimo. La mayoría de los alumnos encontraron una relación entre la medida de los ángulos α, β y γ: el camino era mínimo cuando los tres medían 120º. En la figura 5.3.1.2.3 podemos ver

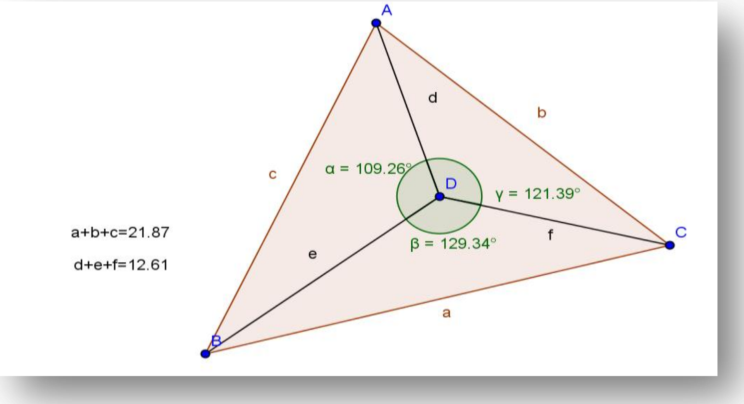
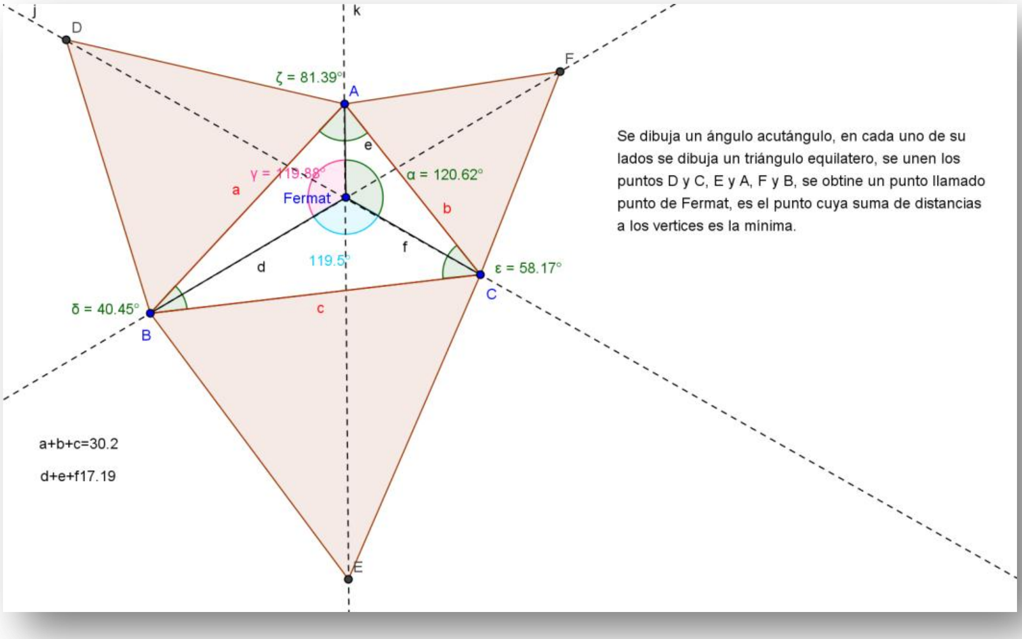


Figura 5.3.1.2.3 – Construcción de la práctica 2

una construcción de una alumna que sigue este argumento.

Algunos alumnos descubrieron que el llamado Punto de Fermat era la solución al problema e intentaron realizar la construcción. Probablemente los alumnos que llegaron a esta conclusión buscaron información para resolver el problema en internet u otras fuentes. En la figura 5.3.1.2.4 podemos ver la construcción de Irina donde explica cómo se traza el punto de Fermat.

Varios alumnos intentaron resolver el problema construyendo todos o alguno de los cuatro puntos notables del triángulo formado y viendo si alguno de ellos era el punto buscado. Algunos de ellos pensaron que el circuncentro, el baricentro o el ortocentro podían ser la solución, pero en estos casos no comprobaron más opciones. Casi todos los alumnos que respondieron incorrectamente al problema se limitaron a probar en un triángulo fijo, no utilizaron la herramienta de "arrastre" para comprobar que su hipótesis se seguía cumpliendo en otros casos.



5.3.1.2.4 – Construcción del punto de Fermat

En la figura 5.3.1.2.5 se puede ver la construcción que realizaron Elena y Pilar. Ellas probaron primero con los cuatro puntos notables y comprobaron que no eran la solución al problema. Luego probaron con los ángulos α, β y γ e intentaron llegar a formular una relación entre ellos.

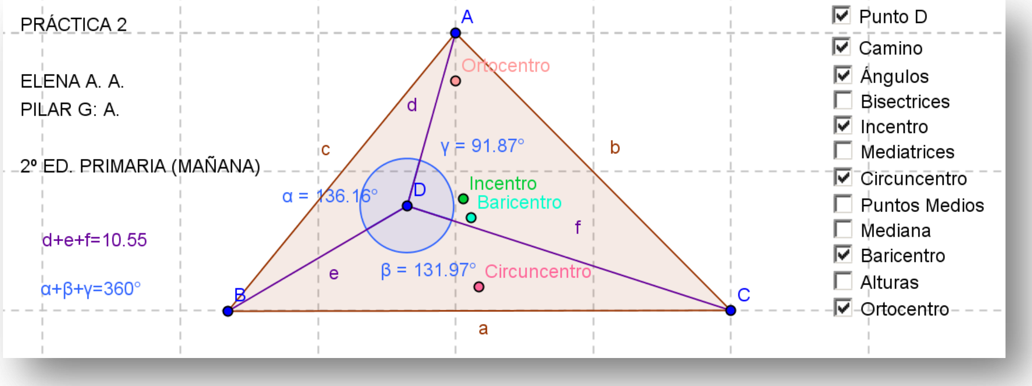


Figura 5.3.1.2.5 – Tanteo para encontrar la solución de la práctica 2

En su relato del procedimiento seguido indican lo siguiente: "…*pasamos, entonces, a jugar con los vértices de nuestro triángulo y el punto D observando que ocurría con los ángulos cuando la suma de los segmentos centrales era mínima. Finalmente, la conclusión a la que pudimos llegar es que esta suma era menor cuando los tres ángulos se acercaban a los 120º valiendo los tres lo mismo*".

En la práctica 3 se propuso la siguiente actividad:

Construye un cuadrilátero cualquiera ABCD (en color azul). Señala los puntos medios de cada uno de sus lados E, F, G, H. Construye otro cuadrilátero con vértices en estos puntos (en color rojo). a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el de color rojo? Explica cómo lo has comprobado. b) ¿Qué ocurre con el cuadrilátero rojo cuando el cuadrilátero azul es cóncavo? c) ¿Qué relación hay entre las áreas de ambos cuadriláteros? Explica cómo lo has comprobado. d) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que el cuadrilátero rojo sea un cuadrado? Explica cómo lo has comprobado.

La construcción no ofreció dificultad para los alumnos, pero para contestar a las preguntas se debía utilizar la herramienta de arrastre para poder generalizar. En la figura 5.3.1.2.6 vemos una construcción correcta.

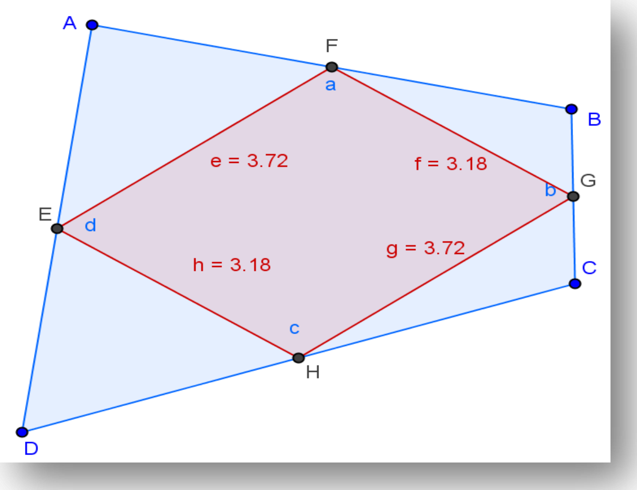


Figura 5.3.1.2.6 – Construcción correcta de la práctica 3

Las preguntas a) y c) son correctamente contestadas, en general. Hay algún problema con el uso adecuado del lenguaje para explicar cómo lo han comprobado. La pregunta b) ofreció dificultades a bastantes parejas. Primero hubo que recordar cuando un polígono era cóncavo y cuándo convexo. Varias parejas de alumnos contestaron a la pregunta b) haciendo referencia a si el cuadrilátero rojo era cóncavo o convexo (se pretendía que investigaran si el cuadrilátero rojo seguía siendo un paralelogramo cuando el azul era un cuadrilátero cóncavo, ya que normalmente estos tipos de polígonos no son contemplados por los alumnos en sus exploraciones). Estas son algunas justificaciones que dieron:

- *"cuando es cóncavo el azul, corta al rojo por varios puntos. Sin embargo cuando el azul es convexo no corta al cuadrilátero en ningún punto"*

- *"cuando el azul es cóncavo, la mayor parte del rojo queda fuera del azul"*
- *"el rojo sobresale y corta al azul en 4 lados"*

La pregunta d) requería investigar en qué condiciones el cuadrilátero rojo es un cuadrado. Es la que más respuestas incorrectas o incompletas obtuvo. La mayor parte de los alumnos que contestaron se limitaron a encontrar un caso que cumplía las condiciones del problema, pero no siguieron explorando para ver si había más soluciones. Ejemplos de soluciones parciales: en la figura 5.3.1.2.7 podemos ver la construcción realizada por unas alumnas que han encontrado un caso que es solución del apartado d): el cuadrilátero azul debe ser un cuadrado.

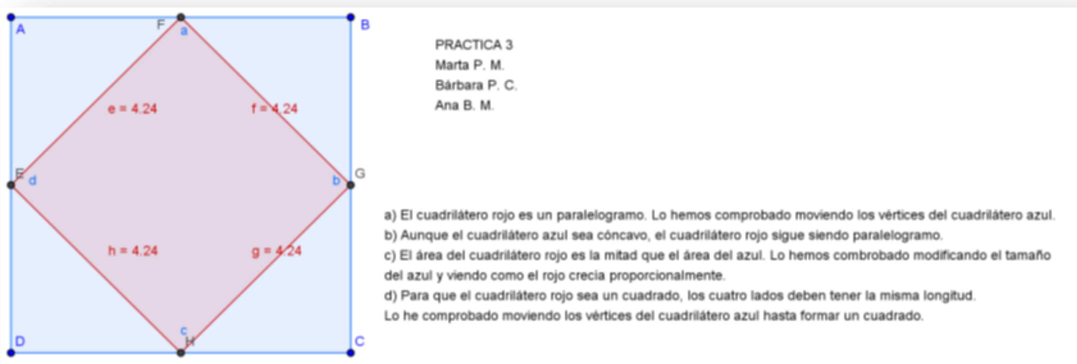


Figura 5.3.1.2.7 - Solución parcial del apdo d) práctica 3

En la figura 5.3.1.2.8, Águeda y Saray encuentran otra solución parcial: el cuadrilátero azul debe ser un trapecio isósceles. Muy pocos alumnos encontraron más de una solución, Natalia si se dio cuenta de que el cuadrilátero azul podía ser un cuadrado o un trapecio isósceles.

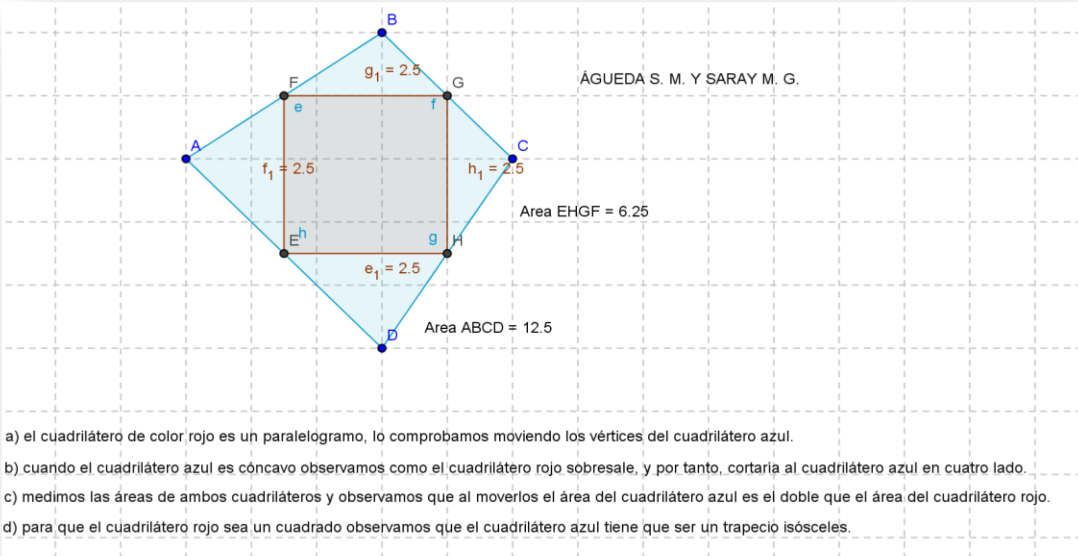


Figura 5.3.1.2.8 – Solución parcial del apdo d) práctica 3

Ejemplos incorrectos: varias parejas de alumnos han contestado que el rojo es un cuadrado cuando el azul es un rectángulo. Esto ocurre porque su cuadrilátero rojo no es un cuadrado realmente, sino un rombo. Sólo han medido los lados, han comprobado que son los cuatro iguales y como “parece un cuadrado”, sin comprobar las propiedades de ángulos o diagonales, han concluido que el cuadrilátero rojo es un cuadrado. En la figura 5.3.1.2.9 vemos como los alumnos han medido los lados del cuadrilátero rojo y como son los cuatro iguales, concluyen que es un cuadrado. Por lo tanto, el azul debe ser un rectángulo.

Esto es un error frecuente entre los estudiantes del taller, sólo comprueban alguna de las propiedades necesarias, sin asegurarse de que además sea condición suficiente.

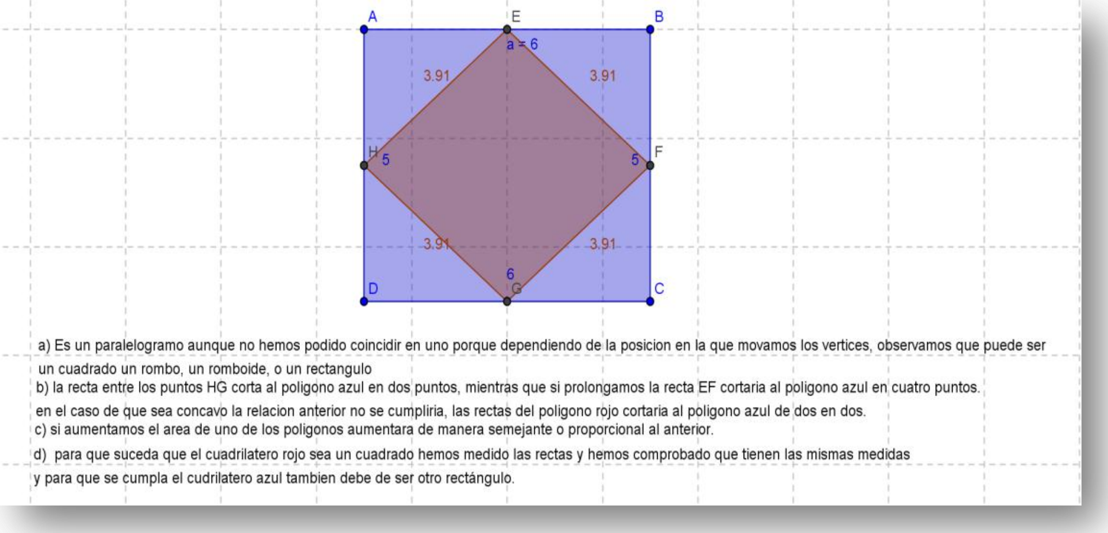


Figura 5.3.1.2.9 – Solución incorrecta del apdo d) práctica 3

En la figura 5.3.1.2.10 vemos como otra pareja parece encontrar una solución "extraña", pero el problema vuelve a ser que el cuadrilátero rojo es un cuadrado aparente.

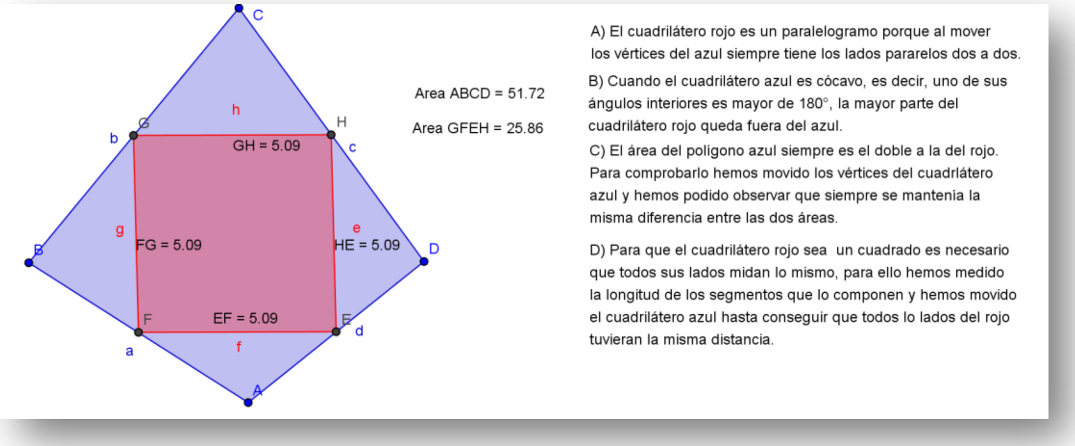


Figura 5.3.1.2.10 – Solución incorrecta del apdo d) práctica 3

A lo largo de toda la práctica 3 es destacable la falta de rigor en el uso del lenguaje geométrico que muestran los alumnos para expresar el procedimiento seguido y las conclusiones a las que han llegado.

5.3.1.3 Resultados de la encuesta sobre GeoGebra

Al finalizar el taller piloto, se pidió a los alumnos que habían asistido asiduamente que rellenaran una encuesta para conocer su opinión y sugerencias. Esta información la utilizamos para mejorar el diseño del taller de GeoGebra que hemos usado con el grupo experimental de nuestra investigación.

Encuesta sobre GeoGebra
En una escala del 1 al 5, donde 1 es "totalmente en desacuerdo", 2 es "parcialmente en desacuerdo", 3 es "ni en desacuerdo ni de acuerdo", 4 es "parcialmente de acuerdo" y 5 es "totalmente de acuerdo", por favor valora tu grado de acuerdo con las siguientes afirmaciones. Contesta con sinceridad, la información servirá para diseñar un taller de GeoGebra el próximo curso. Gracias. 1. GeoGebra me resulta fácil de usar 2. Prefiero resolver problemas de geometría con lápiz y papel que con GeoGebra 3. GeoGebra me ayuda a entender relaciones entre los objetos geométricos 4. Trabajar con GeoGebra es aburrido 5. Con GeoGebra puedo comprobar conjeturas visualmente con facilidad 6. Creo que GeoGebra no sirve para enseñar geometría en Primaria 7. GeoGebra añade algo a la experiencia de aprendizaje 8. Me resulta más fácil bloquearme con GeoGebra que con lápiz y papel 9. GeoGebra me ayuda a explorar, experimentar y hacer conjeturas 10. Prefiero trabajar en el ordenador solo/a que en pareja 11. Con GeoGebra los estudiantes se interesan y entienden de qué se trata 12. Usando GeoGebra me resulta difícil tomar la iniciativa para resolver problemas nuevos

13. Usar GeoGebra me puede ayudar a mejorar mis conocimientos geométricos
14. Creo que GeoGebra me ayudará a enseñar matemáticas a mis alumnos
15. ¿Tienes algún comentario o sugerencia respecto al taller de GeoGebra?

En la tabla 5.3.1.3.1 recogemos los resultados de la encuesta con la frecuencia de respuesta en cada modalidad. En la figura 5.3.1.3.2 observamos el gráfico de frecuencias correspondiente a esta tabla.

Resultados de la encuesta sobre GeoGebra					
	Frecuencia de cada categoría (grado de acuerdo)				
Nº de pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	6	13	18	6
2	9	8	21	4	1
3	0	0	16	16	11
4	27	11	5	0	0
5	0	0	8	21	14
6	21	12	5	3	2
7	0	0	2	25	16
8	12	11	15	5	0
9	0	0	9	22	12
10	17	7	9	3	7
11	1	0	13	21	8
12	8	14	16	5	0
13	0	1	7	19	16
14	0	1	8	16	18

Tabla 5.3.1.3.1 – Resultados de la encuesta sobre GeoGebra

Analizando las 43 encuestas recogidas, podemos observar que los maestros en formación creen que GeoGebra puede ayudarles a mejorar sus conocimientos geométricos y que será una herramienta útil en su futura labor como profesores de Primaria (cerca de un 80 % responde que está bastante o totalmente de acuerdo en ambas preguntas). También valoran positivamente su uso para favorecer las competencias geométricas más difíciles para ellos, como son la exploración, formulación de conjeturas y resolución de problemas nuevos. Es muy significativo que el 88% de los alumnos contesten con un 1 o un 2 a la afirmación "*Trabajar con GeoGebra es aburrido*".

En cuanto a su preferencia a resolver problemas mediante GeoGebra o lápiz y papel, casi la mitad de los encuestados no se define por ninguna opción, lo que indica la complementariedad de ambas metodologías en la clase de Geometría, aunque el 40% prefiere GeoGebra y el 11% se decanta por lápiz y papel. Como sugerencias para mejorar el taller de GeoGebra se repiten dos mayoritariamente: que aumente el número y la duración de las sesiones (en el taller piloto las sesiones han tenido una duración de 1 hora por razones de disponibilidad del aula de informática). Ambas mejoras se han tenido en cuenta en el diseño del taller de la investigación. Podemos resumir otras opiniones y sugerencias de alumnos con ésta: *"El taller de GeoGebra me ha gustado muchísimo y he aprendido muchas cosas con él. Me parece una herramienta muy útil para el aprendizaje y estudio de la Geometría, así como para en el futuro llevarlo a cabo en el aula con mis alumnos."*

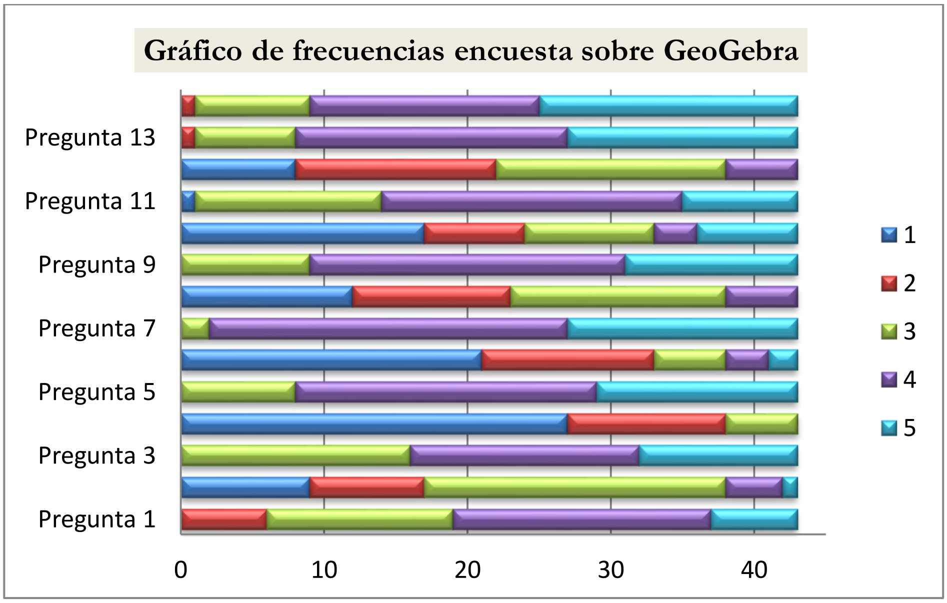


Figura 5.3.1.3.2 – Gráfico de frecuencias de la encuesta sobre GeoGebra

5.3.1.4 Conclusiones extraídas del taller piloto

Vamos a resumir las conclusiones que hemos extraído después de analizar el desarrollo del taller piloto de GeoGebra y las opiniones que los alumnos han manifestado en la encuesta final:

1- La visión dinámica de la geometría ayuda a realizar conjeturas y visualizar posibles soluciones a problemas.

2- Trabajar en parejas y tener que comunicar sus resultados parece mejorar el uso del vocabulario geométrico y su comprensión.

3- GeoGebra permite a los estudiantes comprobar fácilmente propiedades y relaciones entre las figuras que son difíciles de realizar con lápiz y papel.

4- Alumnos poco motivados en matemáticas encuentran en GeoGebra un estímulo para intentar resolver problemas y persistir en encontrar soluciones.

5- GeoGebra resulta fácil de usar a la mayoría de los estudiantes, una vez que se familiarizan con la herramienta, y no supone un obstáculo añadido.

Algunas dificultades que hemos observado deben ser tenidas en cuenta para el futuro: los estudiantes no utilizan desde el principio la naturaleza dinámica de GeoGebra debido a sus experiencias previas de aprendizaje estático durante muchos años. Por eso es necesario que el uso de este software, o de otros SGD, no se limite a algunas sesiones aisladas, sino que sea una herramienta habitual en la clase de geometría.

Esta información nos ha servido para diseñar el taller de GeoGebra del curso 10-11, seguido por el grupo experimental de nuestra investigación.

5.3.2 Las sesiones del taller de GeoGebra

Como ya hemos dicho anteriormente, este taller lo realizaron los sujetos pertenecientes al grupo experimental mientras que el grupo control resolvía los mismos problemas con "lápiz y papel".

La primera sesión fue diferente al resto: se realizó una actividad de familiarización con el SGD GeoGebra que además iba a servir como indicador para clasificar a los alumnos según su competencia digital previa. Como necesitábamos que cada alumno dispusiera de un ordenador, se dividió al grupo en dos partes y cada subgrupo realizó la actividad en una sesión diferente, el primer grupo de 15:30 a 17:00 y el segundo de 17:00 a 18:30.

El resto de las sesiones se desarrollaron de forma similar siguiendo este esquema: la profesora-investigadora proponía la actividad que había que realizar, normalmente el enunciado era alguno de la lista de problemas propuestos en el tema que se estaba estudiando en ese momento en la asignatura. La profesora mostraba una construcción de GeoGebra que servía de ejemplo, a veces se mostraba la construcción completa y otras veces sólo se sugería como empezar. Después de la explicación inicial se dejaba a las parejas realizar autónomamente la práctica y la profesora iba contestando a las dudas y problemas que le iban surgiendo a cada pareja. Se hacía énfasis reiteradamente en que los alumnos utilizaran el carácter dinámico de GeoGebra, comprobando siempre que las construcciones se mantenían cuando eran sometidas a "arrastres", ya que en el taller piloto habíamos observado las dificultades que mostraban los estudiantes en este sentido.

Veamos ahora la lista de actividades que se propusieron en el Taller de GeoGebra, la mayoría son problemas del temario de la asignatura adaptados al trabajo con un SGD. Se incluyeron las prácticas 1 y 3 del taller piloto y se decidió excluir la práctica 2 porque había resultado demasiado dificultosa para los alumnos y pensamos que no era interesante realizar actividades que tuvieran que estar muy dirigidas por la profesora. Con el enunciado de cada práctica se acompaña la imagen de la construcción de GeoGebra que se mostraba como ejemplo.

PRÁCTICA 1- INTRODUCCIÓN A GEOGEBRA[1]

Realiza las actividades guiadas del enlace "Introducción a GeoGebra" que encontrarás en el Tema 2 de Moodle, en el apartado *Taller de GeoGebra*.

Después de realizar hasta el punto 1.11, "Redefine", deberás hacer la construcción que se pide en el ejemplo del final del módulo (punto 1.15 circunferencia circunscrita a un triángulo). Guarda la construcción en un archivo y súbelo a Moodle.

Pasos a seguir para realizar la construcción:

1- Construye el triángulo ABC, la circunferencia circunscrita y su centro siguiendo las instrucciones del punto 1.15 del módulo de introducción a GeoGebra.

2- Modifica las propiedades de los objetos construidos:
- Color: triángulo negro, circunferencia roja, puntos azul y centro amarillo
- Grosor: todas las líneas y puntos trazados deben tener grosor 3
- Renombrar: llama circunscrita a la circunferencia
- Vista gráfica: la vista gráfica debe ser de color azul

3- Redefine el punto A en el origen de coordenadas. Obliga a que A sea fijo.

4- Guarda el archivo con el nombre **practica_1.ggb** y súbelo a Moodle pinchando en la tarea *Práctica 1*.

[1] En esta práctica no se mostró ninguna construcción como ejemplo, ya que en el módulo de introducción se ofrecen suficientes ejemplos de cada herramienta de GeoGebra.

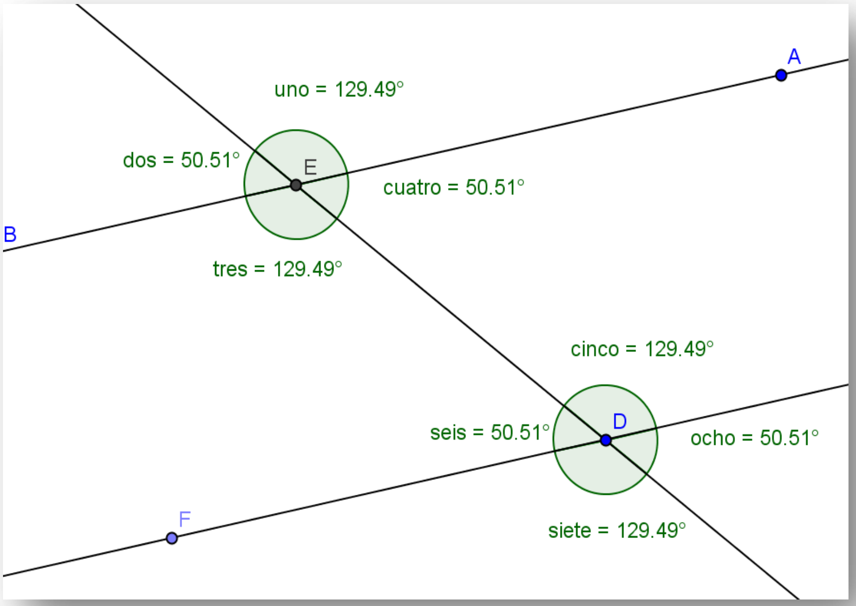
PRÁCTICA 2- RELACIÓN ENTRE ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE
(Tema 2- act. 6-c)[1]

1- Construye dos rectas paralelas cortadas por una recta secante.

2- Construye los 8 ángulos que determinan y mídelos.

3-Mueve las rectas para comparar las medidas de los ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes, conjugados internos y conjugados externos.

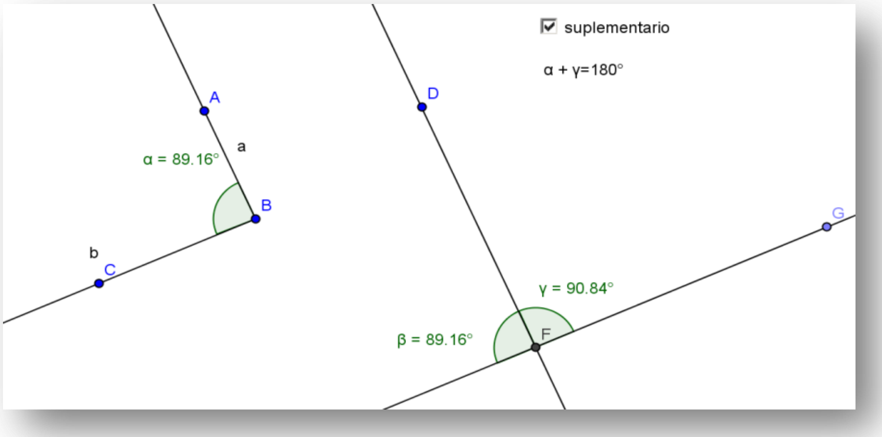
4- Deduce la propiedad que cumplen las medidas de estas parejas de ángulos.



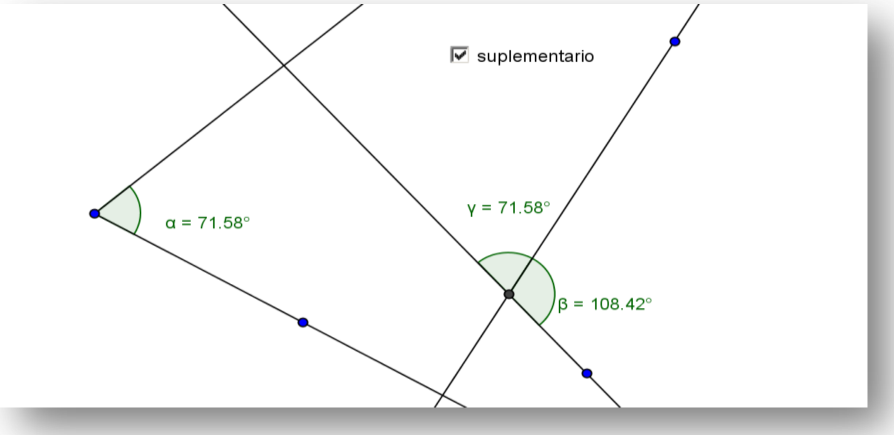
[1] Entre paréntesis se hace referencia al tema en el que se ha propuesto la actividad y el número que ocupa dentro de la lista de problemas.

PRÁCTICA 3- ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS Y PERPENDICULARES (Tema 2- act. 7)

a) Construye un ángulo α y mídelo. Construye otro ángulo β cuyos lados sean respectivamente paralelos a los lados de α. ¿Qué observas que ocurre con la medida de β cuando mueves los lados del ángulo α de forma que cambie de amplitud? Distingue los casos de que ambos ángulos sean agudos u obtusos o que uno sea agudo y el otro obtuso. (Usa una casilla de control para ocultar el ángulo suplementario de β)

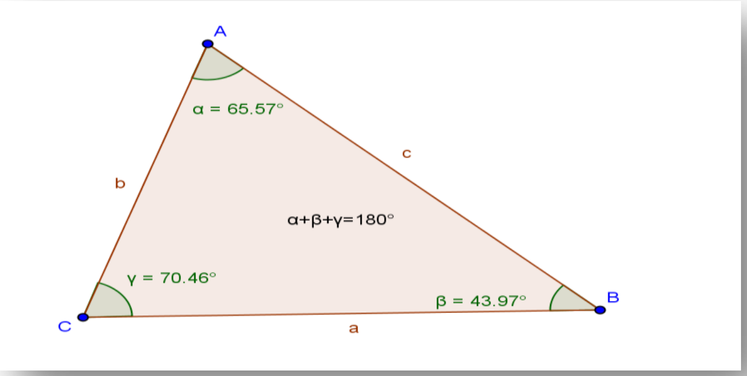


b) Comprueba que pasa si α y β tienen sus lados respectivamente perpendiculares entre sí. Distingue los casos de que ambos ángulos sean agudos u obtusos o que uno sea agudo y el otro obtuso.



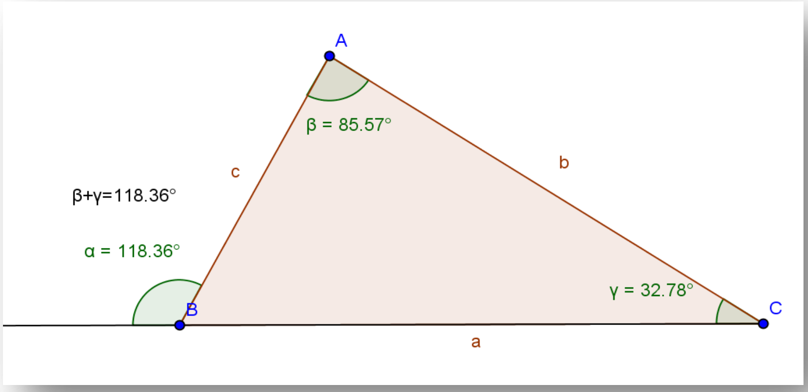
PRÁCTICA 4- MEDIDA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO (Tema 2- act. 9)

Construye un triángulo cualquiera y mide sus tres ángulos interiores. ¿Cuánto suman? Comprueba moviendo sus vértices que ocurre en cualquier triángulo. Escribe en la ventana geométrica una expresión que sirva para comprobarlo.



PRÁCTICA 5- MEDIDA DEL ÁNGULO EXTERIOR A UN TRIÁNGULO (Tema 2- act. 12)

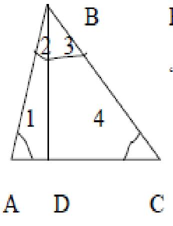
Construye un triángulo cualquiera. Determina un ángulo exterior de ese triángulo y llámalo α. Calcula su medida. Determina los dos ángulos interiores no adyacentes a α y llámalos β y γ. Calcula sus medidas. Comprueba que siempre la amplitud de α es igual a β+γ. Escribe en la ventana geométrica una expresión que permita comprobarlo.



PRÁCTICA 6- INDICAR SI LAS SIGUIENTES IGUALDADES CON ÁNGULOS SON SIEMPRE CIERTAS (Tema 2- act. 14)

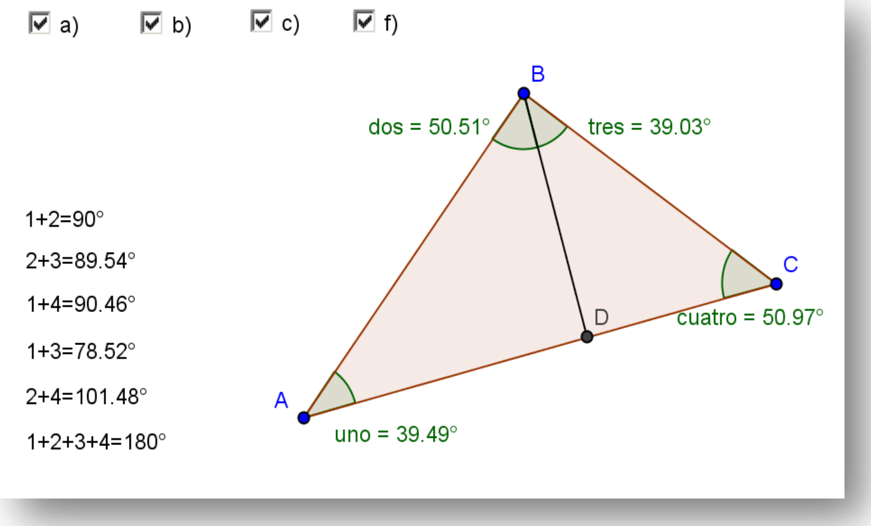
Construye el triángulo de la actividad 14 y determina los ángulos uno, dos, tres y cuatro. Comprueba si son siempre ciertas las igualdades. Usa casillas de control para ocultar las expresiones de cada apartado.

Actividad 14-



En la figura adjunta se sabe que AC es un segmento perpendicular al segmento BD. Indicar justificadamente cuáles de las siguientes igualdades son "siempre" ciertas:

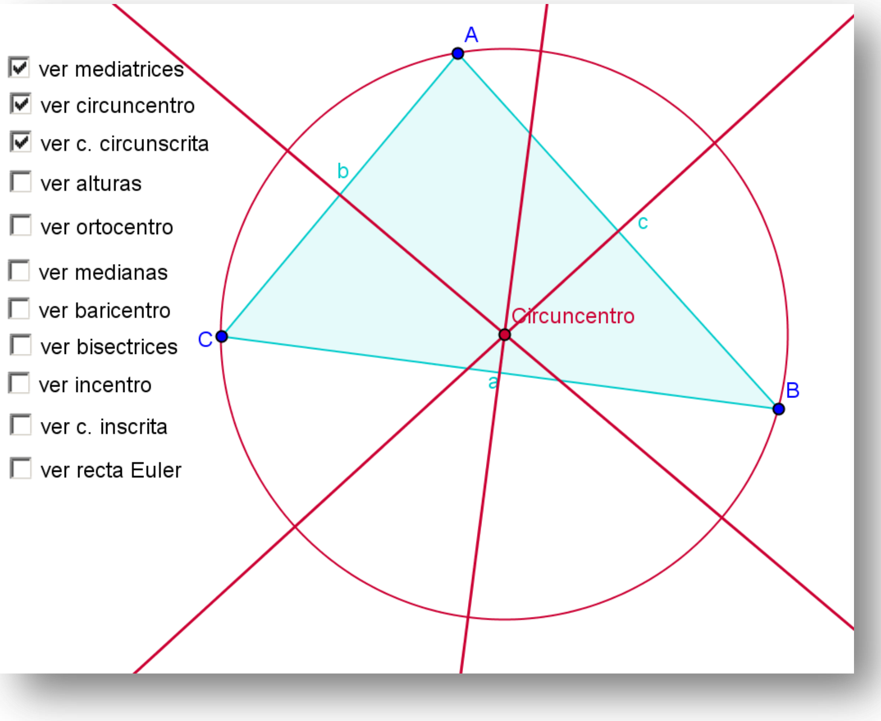
a) 1+2 = 90º
b) 2+3 = 1+4
c) 1+3 = 2+4
d) 2 = 4
e) 1 =3
f) 1+2+3+4 = 180º



PRÁCTICA 7- ELEMENTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO[1]
(Tema 2- act. 22)

a) Construid un triángulo ABC, trazad las **mediatrices** de cada lado en rojo y comprobad que se cortan en un punto que se llama Circuncentro. Escribid el nombre del punto también en rojo. Observad que si trazáis una circunferencia con centro en dicho punto y que pase por A, también pasa por los otros dos vértices: es una circunferencia circunscrita al triángulo.

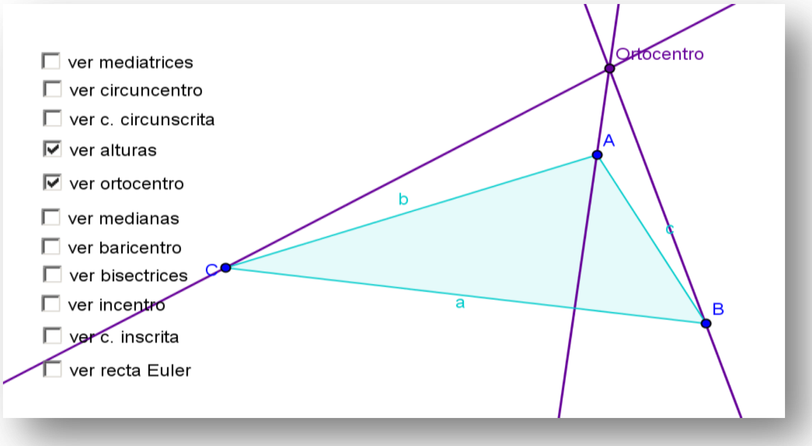
Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las mediatrices, otra para el circuncentro y otra más para la circunferencia circunscrita.



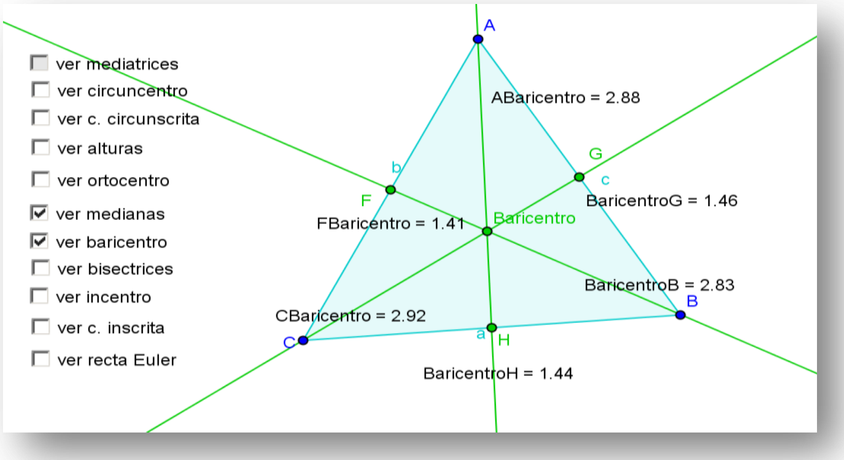
b) *La **altura** correspondiente a un lado de un triángulo es un segmento perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto. Todo triángulo tiene 3 alturas.*

[1] Esta era la práctica 1 del taller piloto de GeoGebra realizado el curso anterior.

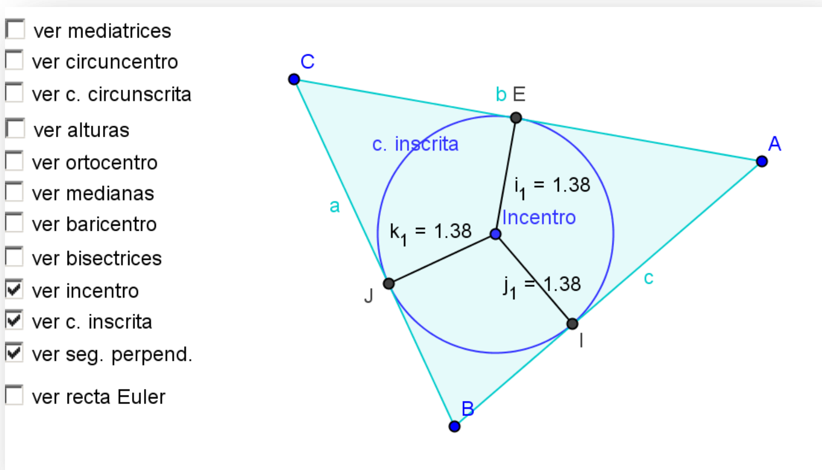
Construid las alturas del triángulo ABC en morado, y comprobad que se cortan en un punto llamado Ortocentro. Poned el nombre del punto en el mismo color. Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las alturas y otra para el ortocentro.



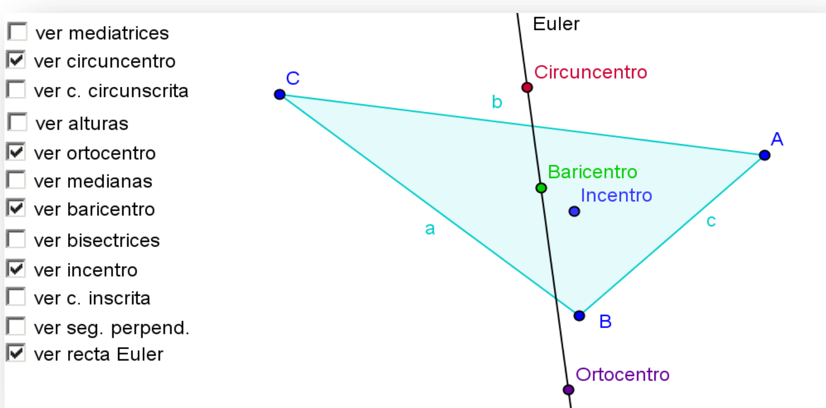
c) *El segmento que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto se llama* ***mediana***. Trazad las tres medianas del triángulo en verde, y comprobad que se cortan en un punto llamado Baricentro. Escribid su nombre en verde. Medid los segmentos en que el baricentro divide a cada mediana, ¿qué relación observáis entre los dos segmentos de cada mediana?
Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las medianas y las medidas realizadas y otra para el baricentro.



d) Trazad las **bisectrices** del triángulo en azul, y comprobad que se cortan en un punto llamado <u>Incentro</u>. Poned su nombre en azul. Si trazáis desde el incentro una perpendicular a cada lado, ¿cuánto miden los tres segmentos que se forman?. Dibujad ahora una circunferencia con centro en el incentro y radio uno de esos segmentos (circunferencia inscrita).
Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar las bisectrices, otra para el incentro y otra para la circunferencia inscrita.



e) Comprobad que en cualquier triángulo por el circuncentro, ortocentro y baricentro pasa una recta llamada **recta de Euler**. ¿Está el incentro en la recta de Euler?
Añadid una *casilla de control para ocultar objetos* que permita ver/ocultar la recta de Euler.

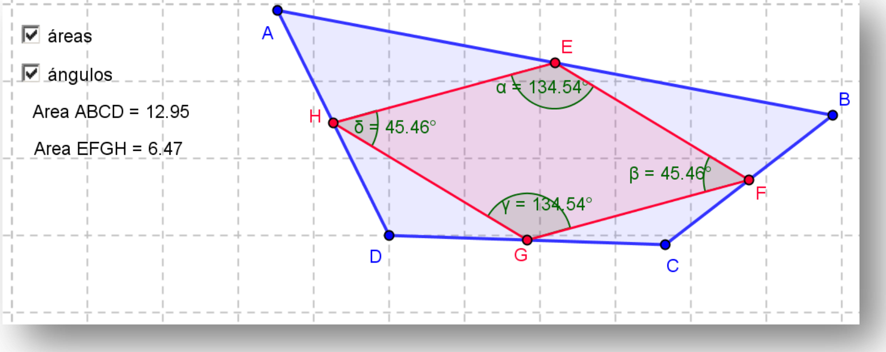


f) ¿Hay algún triángulo en el que los cuatro puntos notables (incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro) coincidan, es decir, se superpongan? ¿Cómo lo has comprobado?
g) En cualquier triángulo rectángulo, ¿en qué posición están el ortocentro y el circuncentro?
h) Construid un triángulo rectángulo isósceles (diferente del triángulo ABC) sabiendo que su hipotenusa mide 10 cm (pista: utilizad una de las propiedades que habéis observado en el apartado anterior). Comprobad al arrastrar cualquiera de los vértices del triángulo que sigue siendo rectángulo, isósceles y con hipotenusa =10.
(Nota: para estos tres apartados no se ofrecieron construcciones como ejemplo)

PRÁCTICA 8 – CUADRILÁTERO DE VARIGNON [1]
(Act. Añadida al tema 2)

Construye un cuadrilátero cualquiera ABCD (en color azul). Señala los puntos medios de cada uno de sus lados E, F, G, H. Construye otro cuadrilátero con vértices en estos puntos (en color rojo).

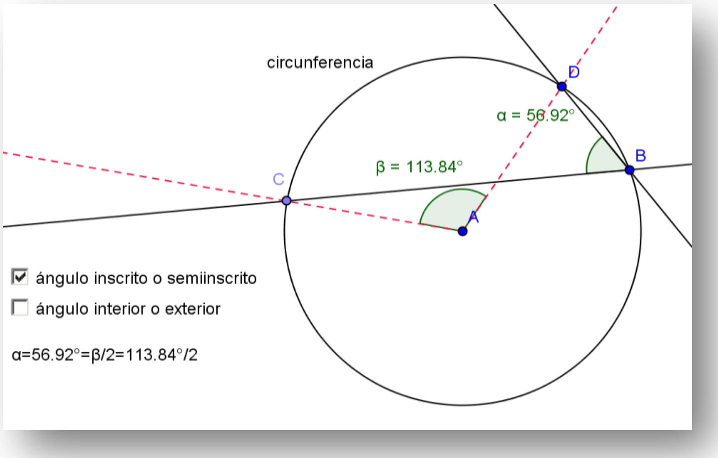
a) ¿Qué tipo de cuadrilátero es el de color rojo? Explica cómo lo has comprobado.
b) ¿Qué ocurre con el cuadrilátero rojo cuando el cuadrilátero azul es cóncavo?
c) ¿Qué relación hay entre las áreas de ambos cuadriláteros? Explica cómo lo has comprobado.
d) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que el cuadrilátero rojo sea un cuadrado? Explica cómo lo has comprobado.



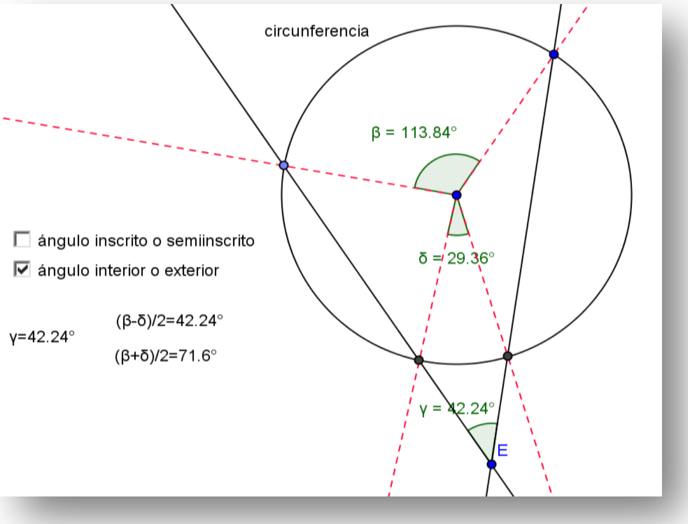
[1] Esta era la práctica 3 del taller piloto de GeoGebra realizado el curso anterior.

PRÁCTICA 9- MEDIDA DE LOS ÁNGULOS EN UNA CIRCUNFERENCIA. (Tema 3- act. 3 a y b)

a) Construye una circunferencia y comprueba que los ángulos inscritos o semi-inscritos miden la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. Oculta el ángulo inscrito con una casilla de control.



b) Comprueba que los ángulos interiores a una circunferencia miden la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos. Comprueba que los ángulos exteriores a una circunferencia miden la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados. Oculta con una casilla de control esta construcción y las expresiones que se necesitan para comprobar las propiedades.



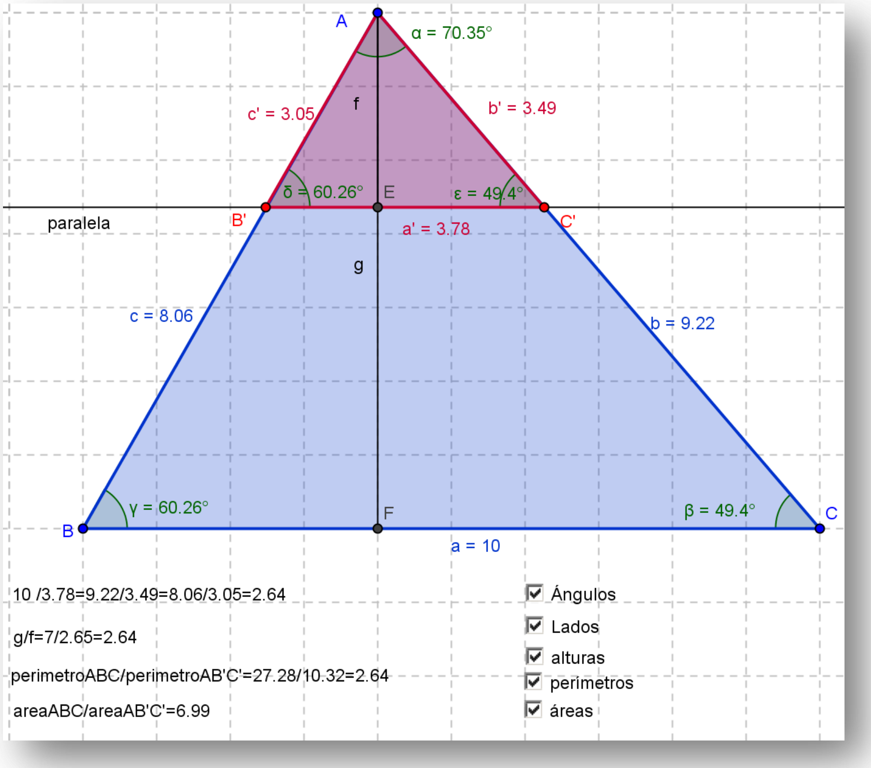
PRÁCTICA 10- RELACIONES ENTRE DOS TRIÁNGULOS SEMEJANTES (Tema 4)

1- Construye un triángulo ABC de color azul y mide sus lados y sus ángulos.

2- Traza una paralela al lado BC que corte a los otros dos lados en los puntos B' y C'. Construye el triángulo (rojo) formado por los puntos A, B' y C'. Mide sus ángulos y sus lados.

3- Comprueba la relación que hay entre los ángulos de los triángulos azul y rojo (que son semejantes entre sí por el teorema de Tales). Oculta con una casilla de control las medidas de todos los ángulos.

4- Comprueba que los lados homólogos de ambos triángulos son proporcionales entre sí. Comprueba qué relación hay entre las alturas, los perímetros y las áreas de ambos triángulos. Usa casillas de control para ocultar cada uno de los elementos.



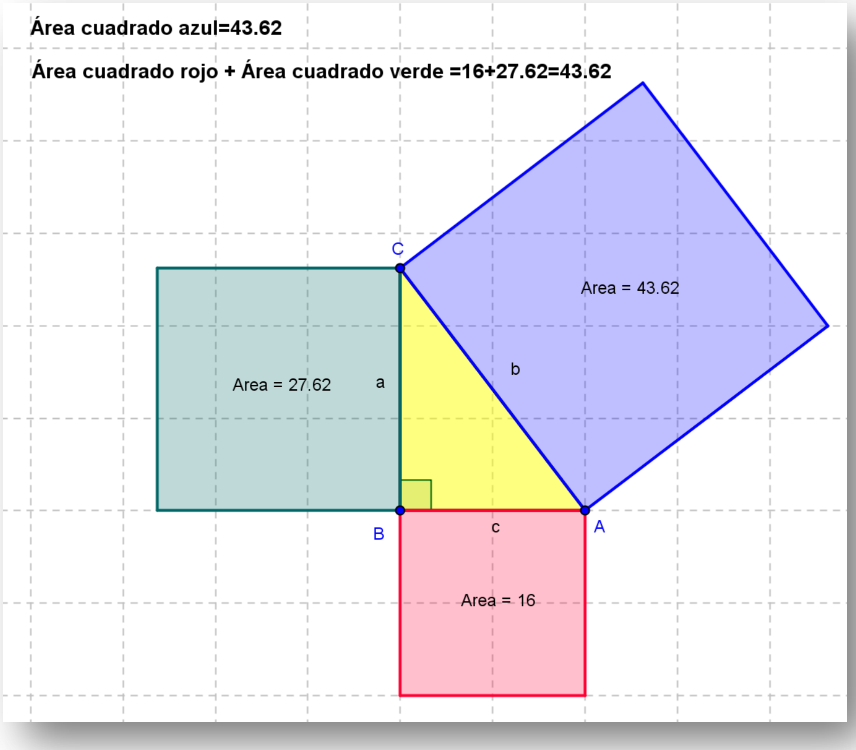
PRÁCTICA 11- COMPROBACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS (Tema 4)

1- Construye un triángulo rectángulo ABC, comprueba que se verifica el teorema de Pitágoras construyendo un cuadrado sobre cada lado del triángulo.

2- Colorea el triángulo y cada cuadrado con un color diferente y expresa las relaciones entre las áreas de los cuadrados en la ventana geométrica, de forma que al arrastrar los vértices del triángulo se compruebe que siempre el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos.

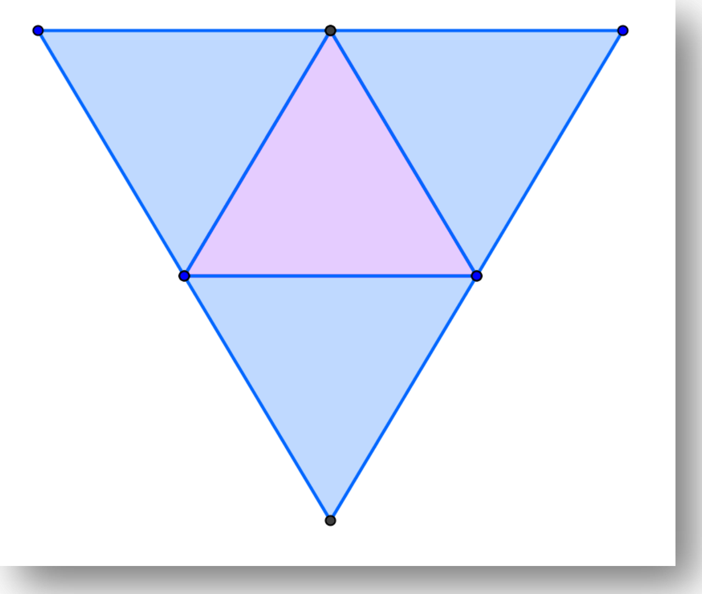
3- Guarda la construcción con formato html (para eso tienes que exportar a *Hoja dinámica como página web*) agregando el Titulo y el texto que quieres que aparezca antes y después de la construcción. Piensa en que estás realizando un applet para que niños de Primaria visualicen la comprobación del teorema de Pitágoras.

4- Sube el archivo html a Moodle en la tarea llamada Práctica 11 (teorema de Pitágoras) que encontrarás dentro del Taller de GeoGebra.



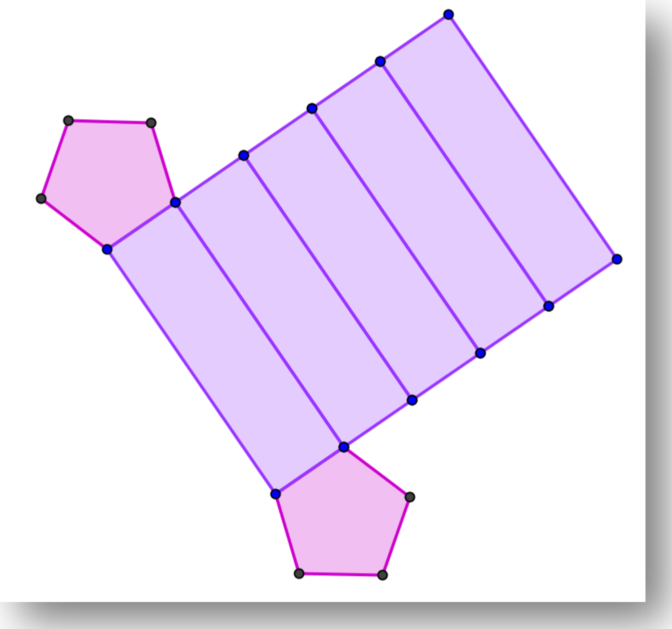
PRÁCTICA 12- DESARROLLO PLANO DE UN TETRAEDRO (Tema 5)

Construye el desarrollo plano de un tetraedro regular. Construye un triángulo equilátero y utiliza la herramienta *Refleja objeto en recta* para construir triángulos equiláteros simétricos al primero. Imprime el dibujo y construye el tetraedro.



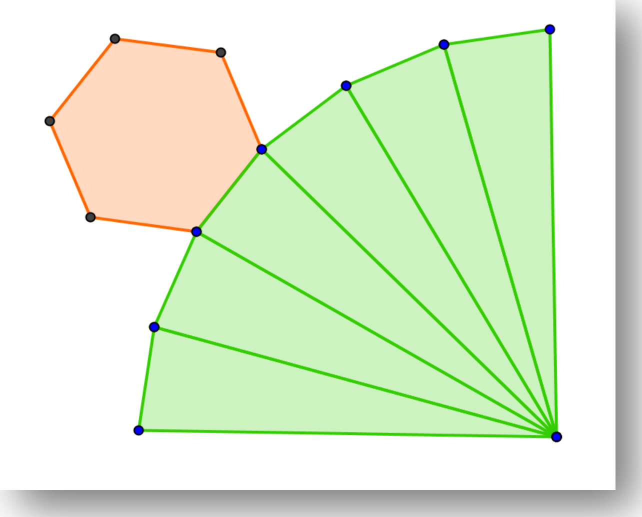
PRÁCTICA 13- DESARROLLO PLANO DE UN PRISMA PENTAGONAL (Tema 5)

Construye el desarrollo plano de un prisma pentagonal. Construye un pentágono regular y sobre uno de sus lados un rectángulo. Utilizando la herramienta *Refleja objeto en recta* construye los otros rectángulos que formarán sus caras laterales y la otra base pentagonal. Imprime el dibujo a un tamaño razonable y construye el prisma.



PRÁCTICA 14- DESARROLLO PLANO DE UNA PIRÁMIDE HEXAGONAL (Tema 5)

Realiza el desarrollo plano de una pirámide hexagonal recta cuyas caras laterales sean triángulos isósceles, imprímela y construyela.



Vamos ahora a realizar una clasificación de estas 14 prácticas que han constituido el taller de GeoGebra según las categorías que establecimos en el taller piloto previo: actividades de construcción de figuras, actividades de comprobación de propiedades y actividades de conjetura e investigación.

N º de práctica	Construcción de figuras	Comprobación de propiedades	Conjetura e investigación
Práctica 1	X		
Práctica 2	2.1, 2.2		2.3, 2.4
Práctica 3	X	X	
Práctica 4	X	X	
Práctica 5	X	X	
Práctica 6	X	X	
Práctica 7	a), b), c), d), e)	a), b), c), d), e)	f), g), h)
Práctica 8	X		X
Práctica 9	X	X	
Práctica 10	X	X	
Práctica 11	X	X	
Práctica 12	X		
Práctica 13	X		
Práctica 14	X		

Tabla 5.3.2.1 – Clasificación actividades Taller de GeoGebra

Según González-López (2001), las actividades en las que se pide construir una figura geométrica exigen al alumno hacer explícitas un mínimo de propiedades geométricas necesarias para describir formalmente la figura. Si la construcción no es correcta, bastará con arrastrarla para comprobar qué propiedades no cumple. Cuando se plantea explorar, conjeturar o comprobar determinadas propiedades con un SGD hay que realizar una construcción que verifica ciertas hipótesis. La actividad exploratoria corresponde a arrastrar por la pantalla del sistema los elementos libres de la construcción geométrica y observar las invariancias que se producen. El SGD sirve para realizar comprobaciones experimentales, ver si encontramos un contraejemplo de la conjetura o, por el contrario, observar que se cumple para todas las posiciones de la figura, pero esto no constituye una prueba formal ni tampoco podemos esperar que el SGD sea un elemento inspirador de dicha prueba. Como vimos en el Capítulo 2, existen investigaciones que ponen de manifiesto que los SGD pueden constituir un obstáculo en este sentido, ya que los alumnos no perciben la necesidad de demostrar algo que es visualmente evidente. Por eso, en el Taller de GeoGebra hemos tenido muy en cuenta distinguir las actividades de comprobación de propiedades de las demostraciones formales y siempre se ha enfatizado esta diferencia.

Capítulo 6

ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL ESTUDIO CUANTITATIVO

Introducción

En este capítulo, realizaremos en primer lugar un análisis descriptivo de los datos proporcionados por la prueba para medir competencias geométricas y didácticas y, en segundo lugar, un análisis inferencial mediante el Modelo Lineal General (MLG). Esto nos permitirá responder afirmativamente a la primera pregunta que formulamos como problema principal de nuestra investigación: ¿la utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso lápiz-papel? Además, realizaremos un análisis descriptivo complementario del problema P1 estudiando la mejora obtenida en cada uno de los ítems que componen dicha prueba, así como la mejora de la competencia geométrica (CGEO) y didáctica (CDID) de los alumnos.

Continuaremos con un análisis análogo para responder al segundo problema que nos hemos planteado en nuestra investigación: ¿favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso lápiz-papel? En este caso, al realizar el análisis inferencial, comprobaremos que no se observan diferencias significativas entre los grupos experimental y control. Por último, realizaremos el estudio del problema secundario que hemos definido como P3: ¿cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado por GeoGebra, el nivel de competencia digital? Veremos que el nivel de competencia digital del alumnado no parece afectar al desarrollo de sus competencias didáctico-geométricas.

6.1 Problema de investigación P1: eficacia de GeoGebra para adquirir las competencias geométricas y didácticas

En el capítulo 4 hemos definido nuestros problemas de investigación, en primer lugar vamos a intentar dar respuesta al problema P1: ¿la utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso lápiz-papel? Primero realizaremos un estudio descriptivo de los datos obtenidos para, a continuación, hacer un análisis inferencial que complemente al anterior.

6.1.1 Análisis descriptivo para P1

Vamos a realizar un análisis descriptivo de las puntuaciones obtenidas por los alumnos de los grupos experimental y control en la prueba de conocimientos geométricos y didácticos. Esta prueba sirvió de pretest y postest, por lo tanto tenemos dos medidas de cada alumno correspondientes al principio del curso, cuando todavía no se había desarrollado la intervención educativa, y al final del curso. Hemos definido una variable que mide la mejora en los resultados de la puntuación total de los alumnos en dicha prueba (puntuación total obtenida en el postest menos la puntuación total obtenida en el pretest), suma de las mejoras en los ítems que miden las competencias geométricas y los que miden las competencias didácticas (Mejora Total = Mejora CGEO + Mejora CDID). La variable Mejora Total puede tomar valores, en teoría, entre -13 y 13 ya que la puntuación máxima en la prueba de conocimientos geométricos y didácticos es de 13 puntos. En nuestra investigación los valores están entre -2 y 9.

De la muestra inicial de alumnos que constituyen el grupo control y el experimental se han perdido algunos datos por diversos motivos como, por ejemplo, la ausencia del alumno en alguna de las sesiones donde se realizaron las pruebas (pretest o postest). El tamaño final de las muestras de ambos grupos es de 45 alumnos. Veamos la tabla de frecuencias y los estadísticos descriptivos de cada grupo:

Frecuencias de la mejora en Competencias Geométricas y Didácticas					
Grupo experimental			Grupo control		
Mejora	Frecuencia	Porcentaje	Mejora	Frecuencia	Porcentaje
-2,0	1	2,2	-2,0	1	2,2
,0	1	2,2	-1,5	1	2,2
1,0	1	2,2	-,5	1	2,2
1,5	1	2,2	,0	3	6,7
2,0	6	13,3	,5	2	4,4
2,5	2	4,4	1,0	3	6,7
3,0	7	15,6	1,5	2	4,4
3,5	1	2,2	2,0	3	6,7
4,0	11	24,4	2,5	5	11,1
4,5	1	2,2	3,0	9	20,0
5,0	6	13,3	3,5	2	4,4
6,0	4	8,9	4,0	5	11,1
8,0	1	2,2	5,0	5	11,1
9,0	2	4,4	6,0	2	4,4
			7,0	1	2,2
Total	45	100,0	Total	45	100,0

Tabla 6.1.1.1 - Frecuencias de la mejora en CGEO + CDID en los grupos experimental y control

Estadísticos Mejora Total			
		G. experimental	G. control
N	Válidos	45	45
	Perdidos	0	0
Media		3,789	2,656
Mediana		4,0	3,0
Moda		4,0	3,0
Desv. típ.		2,0739	1,9766
Asimetría		,234	-,194
Error típ. de asimetría		,354	,354
Curtosis		1,551	-,040
Error típ. de curtosis		,695	,695
Percentiles	25	2,5	1,250
	50	4,0	3,0
	75	5,0	4,0

Tabla 6.1.1.2 – Estadísticos descriptivos para P1

Diagrama de caja para P1

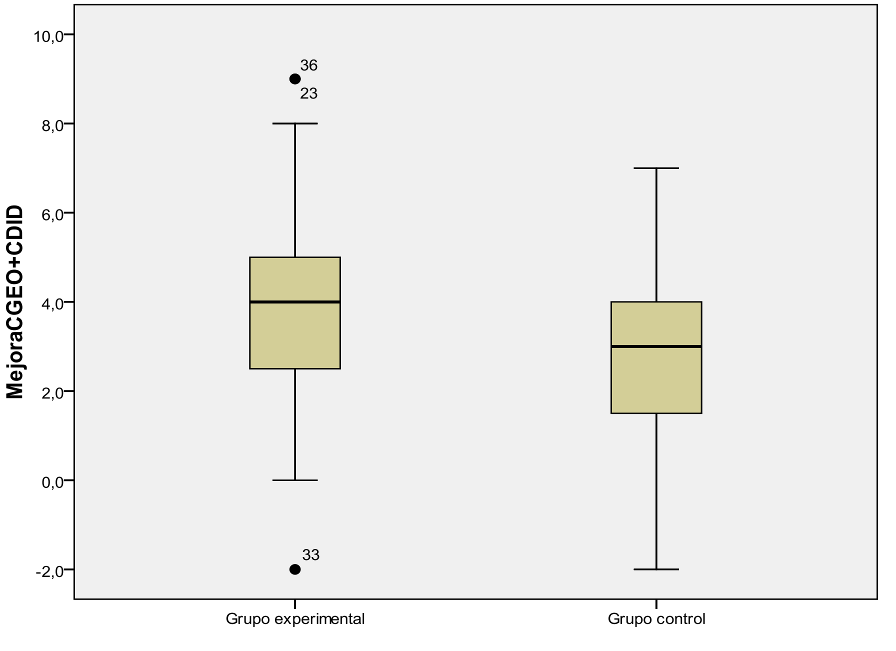


Tabla 6.1.1.3 - Diagramas de caja para P1

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- Los dos grupos mejoran en el postest, pero la media de mejora del grupo experimental es superior en más de un punto (1,133) a la del grupo control (Tabla 6.1.1.2).
- La mediana del grupo experimental es superior en un punto a la del grupo control (Tabla 6.1.1.2).
- La moda del grupo experimental es un punto mayor que la del grupo control (Tabla 6.1.1.2).
- La mediana del grupo experimental es igual al tercer cuartil o percentil 75 del grupo de control y la mediana del grupo control es muy similar al primer cuartil o percentil 25 del grupo experimental (Tablas 6.1.1.2 y 6.1.1.3).
- En los diagramas de caja se observa que los alumnos del grupo experimental han mejorado más que los del grupo control (Tabla 6.1.1.3).
- Observando los coeficientes de asimetría en ambos grupos (Tabla 6.1.1.2), vemos que las distribuciones son prácticamente simétricas en los dos casos, pero el grupo experimental tiene el coeficiente positivo mientras que el control lo tiene negativo, lo que indica que hay más valores por encima de la media en el primer grupo.
- El coeficiente de curtosis del grupo experimental es positivo y el del grupo control negativo, esto indica que los valores del primer grupo están más concentrados en la región central de la distribución (Tablas 6.1.1.2 y 6.1.1.4).
- Observando el ajuste normal (Tabla 6.1.1.4) comprobamos que se confirma que el grupo experimental está más desplazado hacia la parte alta de la escala de puntuaciones.

Histogramas y ajuste normal para P1

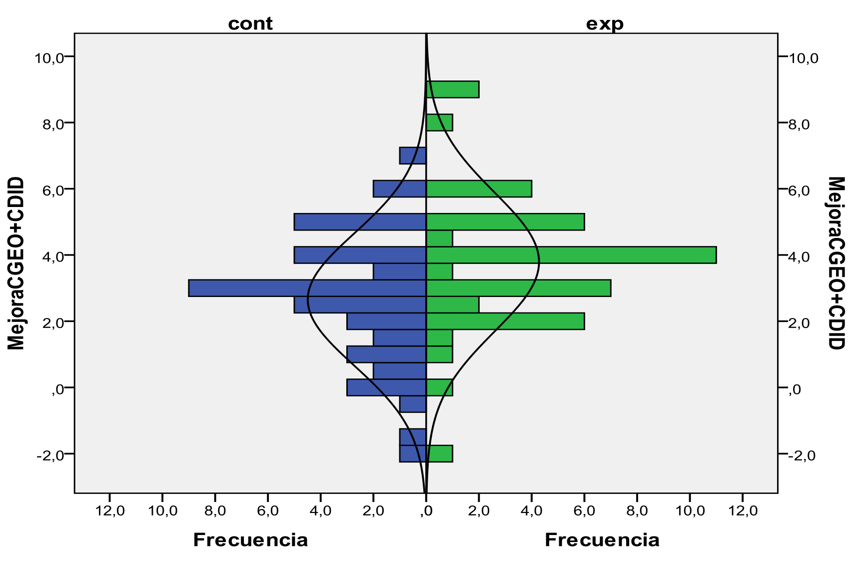
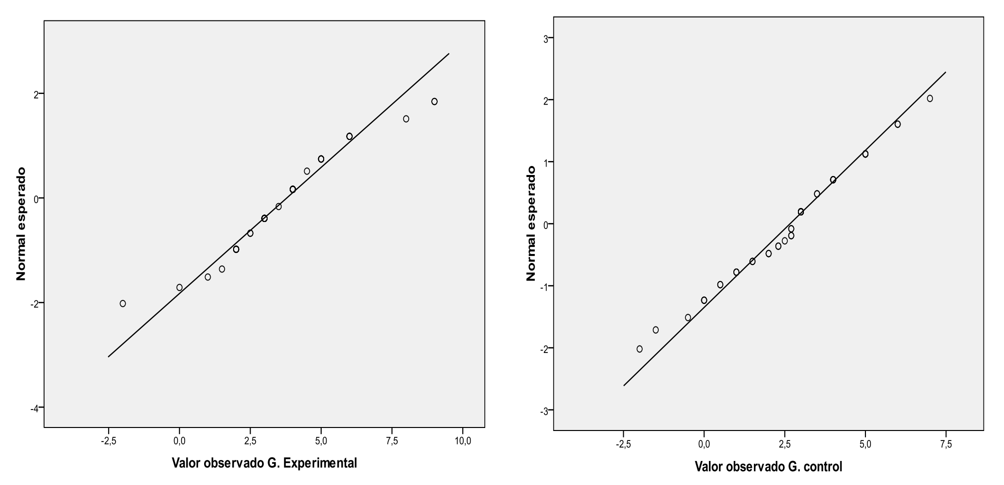


Tabla 6.1.1.4 - Histogramas y ajuste normal para P1

La normalidad descriptiva se puede comprobar observando la linealidad de los gráficos Q-Q y la aleatoriedad de los gráficos Q-Q sin tendencia, como vemos en la tabla 6.1.1.5.

Análisis descriptivo de normalidad para P1



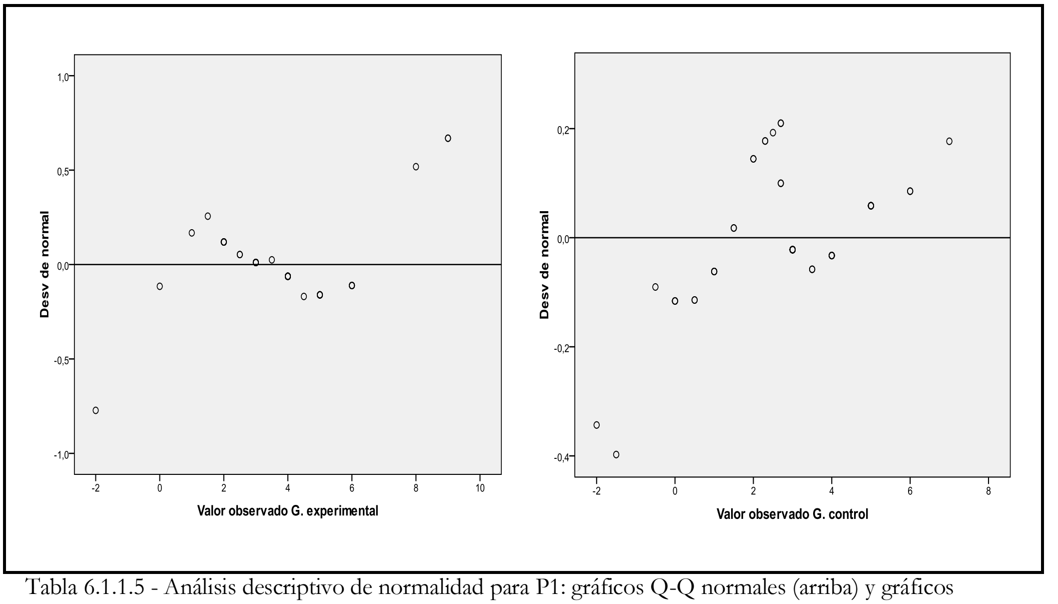


Tabla 6.1.1.5 - Análisis descriptivo de normalidad para P1: gráficos Q-Q normales (arriba) y gráficos Q-Q normales sin tendencia (abajo)

6.1.2 Análisis inferencial para P1

Una vez que el análisis descriptivo nos ha permitido comprobar un mejor comportamiento del grupo experimental frente al grupo control respecto al problema P1, tenemos que ver ahora hasta qué punto esa mejora es significativa desde el punto de vista estadístico. Para ello vamos a realizar un análisis inferencial.

Como hemos visto en el capítulo 4, para responder al problema de investigación P1, tenemos que verificar si se puede rechazar la hipótesis nula H_0: X_C-X_E=0, donde X_C y X_E son las medias muestrales de los grupos control y experimental, respectivamente, al realizar la prueba que mide las competencias geométricas y didácticas. Para ello vamos a utilizar en el análisis de los datos el Modelo Lineal General Univariante (ANCOVA).

Vamos a analizar la variable Total, que es la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítem de competencias geométricas (CGEO) y los ítem de competencias didácticas (CDID), Total =CGEO+CDID. También se va a realizar el Modelo Lineal General (MLG) de medidas repetidas para comprobar los resultados obtenidos en el ANCOVA. Los gráficos de perfil nos permitirán comparar los grupos experimental y control y analizar si hay interacciones.

Analizando la variable Total, obtenemos que hay diferencias significativas entre el pretest (Total 1) y el postest (Total 2) en ambos grupos (sig = 0.000, en la tabla 6.1.2.1). Además, hay diferencias significativas según el grupo, experimental o control (sig=0.037<0,05).

ANCOVA para la variable TOTAL					
Variable dependiente:Puntuación total postest					
Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	141,523[a]	2	70,761	25,097	,000
Intersección	511,986	1	511,986	181,585	,000
TOTAL1	138,679	1	138,679	49,185	,000
Grupo	12,721	1	12,721	4,512	,037
Error	245,299	87	2,820		
Total	6653,500	90			
Total corregida	386,822	89			
a. R cuadrado = ,366 (R cuadrado corregida = ,351)					

Tabla 6.1.2.1 – ANCOVA para la variable TOTAL

MLG de medidas repetidas para TOTAL[b]						
Efecto		Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Sig.
prepost	Traza de Pillai	,721	227,689[a]	1,000	88,000	,000
	Lambda de Wilks	,279	227,689[a]	1,000	88,000	,000
	Traza de Hotelling	2,587	227,689[a]	1,000	88,000	,000
	Raíz mayor de Roy	2,587	227,689[a]	1,000	88,000	,000
prepost * Grupo	Traza de Pillai	,074	7,042[a]	1,000	88,000	,009
	Lambda de Wilks	,926	7,042[a]	1,000	88,000	,009
	Traza de Hotelling	,080	7,042[a]	1,000	88,000	,009
	Raíz mayor de Roy	,080	7,042[a]	1,000	88,000	,009

a. Estadístico exacto
b. Diseño: Intersección + Grupo
Diseño intra-sujetos: prepost

Tabla 6.1.2.2 – MLG de medidas repetidas para TOTAL

Estadísticos descriptivos de TOTAL				
	experimental/ control	Media	Desviación típica	N
Puntuación total pretest	Exp	4,733	2,2903	45
	Cont	5,511	2,5102	45
	Total	5,122	2,4210	90
Puntuación total postest	Exp	8,522	2,1845	45
	cont	8,167	1,9886	45
	Total	8,344	2,0848	90

Tabla 6.1.2.3 – Estadísticos descriptivos de TOTAL

Estos datos se corroboran en el MLG de medidas repetidas, donde la variable prepost tiene dos niveles, los resultados de la variable Total en el pretest (Total1) y en el postest (Total2). Vemos en la tabla 6.1.2.2 que se obtienen diferencias significativas entre los valores obtenidos en el postest y el pretest (sig=0,000) y que hay interacción entre la variable Total y el factor inter-sujetos Grupo (sig = 0,009 < 0,05).

Ambos grupos han obtenido un avance en los resultados de la prueba de conocimientos geométricos y didácticos, pero el grupo experimental partía de una media más baja en el pretest y ha obtenido una media más alta en el postest que el grupo control (ver tablas 6.1.2.3 y 6.1.2.4).

Gráfico de perfil de TOTAL

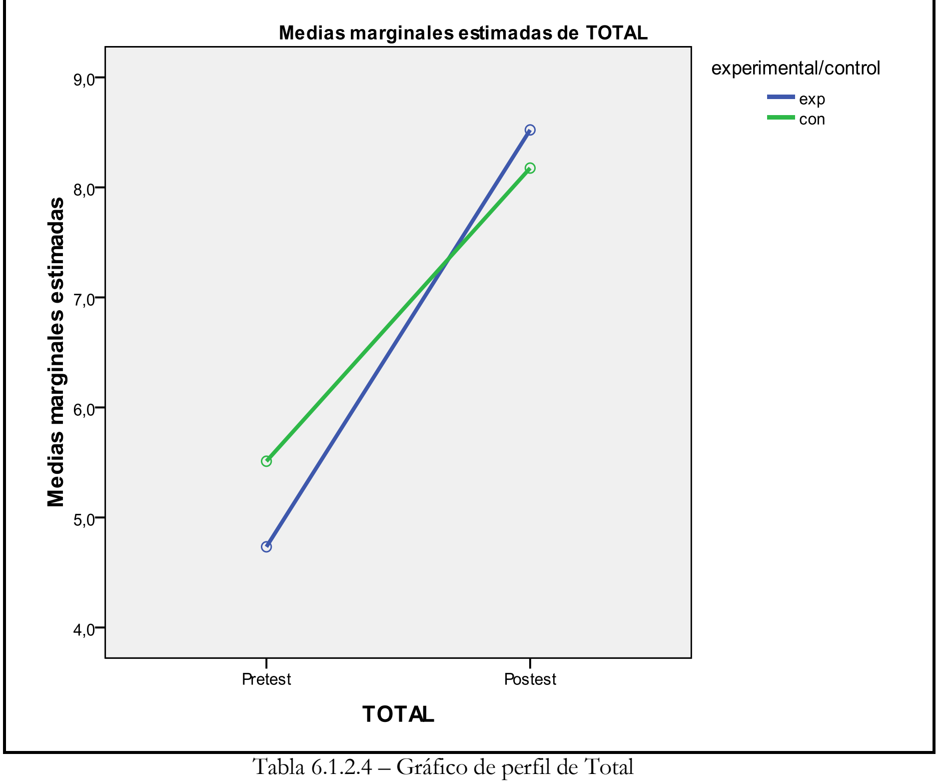


Tabla 6.1.2.4 – Gráfico de perfil de Total

Este análisis inferencial realizado nos permite rechazar, con una probabilidad del 95%, la hipótesis nula H_0: X_C-X_E=0, donde X_C y X_E son las medias muestrales de los grupos control y experimental, respectivamente, al realizar de la prueba que mide las competencias geométricas y didácticas. Por tanto podemos responder afirmativamente a nuestra pregunta de investigación P1:

Solución al problema P1
La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, frente al recurso *lápiz-papel*.

6.2 Análisis descriptivo complementario de P1

Para obtener más información sobre la prueba de competencias geométricas y didácticas, vamos a realizar un análisis descriptivo más exhaustivo de los ítems que la componen. Primero analizaremos el grupo de ítems referentes a las competencias geométricas (GGEO), luego el grupo de ítems que miden las competencias didácticas (CDID) y para finalizar, realizaremos un análisis de la mejora obtenida en cada ítem por separado.

6.2.1 Análisis descriptivo de la variable CGEO

En el epígrafe 6.1.1 hemos definido la variable Mejora CGEO, cuyos valores son las diferencias entre las puntuaciones del postest (CGEO2) y el pretest (CGEO1) en los ítems que miden las competencias geométricas. Esta variable puede tomar teóricamente valores entre -7 y 7, que es la puntuación máxima que se podía obtener en esta parte de la prueba. En nuestra investigación los valores están entre -2 y 4.

Veamos la tabla de frecuencias y los estadísticos descriptivos del grupo experimental y el grupo control para la variable Mejora CGEO:

Frecuencias de la mejora en Competencias Geométricas					
Grupo experimental			Grupo control		
Mejora	Frecuencia	Porcentaje	Mejora	Frecuencia	Porcentaje
-2,0	1	2,2	-1,0	2	4,4
-1,0	1	2,2	,0	7	15,6
,0	6	13,3	1,0	14	31,1
1,0	8	17,8	1,5	4	8,9
2,0	14	31,1	2,0	10	22,2
3,0	8	17,8	3,0	6	13,3
4,0	7	15,6	4,0	2	4,4
Total	45	100,0	Total	45	100,0

Tabla 6.2.1.1 - Frecuencias de la mejora en CGEO en los grupos experimental y control

Estadísticos Mejora CGEO			
		G. experimental	G. control
N	Válidos	45	45
	Perdidos	0	0
Media		1,889	1,422
Mediana		2,000	1,000
Moda		2,0	1,0
Desv. típ.		1,4495	1,1724
Asimetría		-,407	,151
Error típ. de asimetría		,354	,354
Curtosis		-,083	-,118
Error típ. de curtosis		,695	,695
Percentiles	25	1,000	1,000
	50	2,000	1,000
	75	3,000	2,000

Tabla 6.2.1.2 – Estadísticos descriptivos para Mejora CGEO

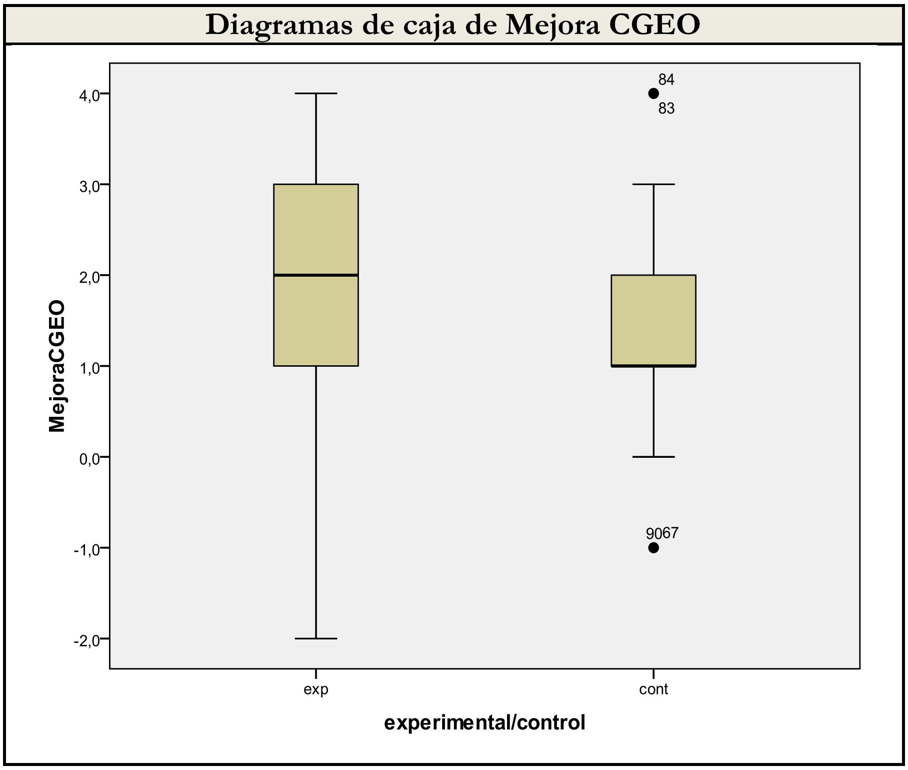


Tabla 6.2.1.3 - Diagramas de caja para Mejora CGEO

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- En el grupo experimental mejoran el 82,3 % de los alumnos y en el grupo control el 79.9% (Tabla 6.2.1.1).
- La media del grupo experimental es superior en casi medio punto a la del grupo control. La mediana y la moda del grupo experimental son superiores en un punto a las del grupo control (Tabla 6.2.1.2).
- La mediana del grupo experimental es igual al tercer cuartil o percentil 75 del grupo control y la mediana del grupo control es igual al primer cuartil o percentil 25 del grupo experimental (Tablas 6.2.1.2 y 6.2.1.3).
- En los diagramas de caja se observa que los alumnos del grupo experimental han mejorado más que los del grupo control (Tabla 6.2.1.3).

- Observando el ajuste normal (Tabla 6.2.1.4) comprobamos que el grupo experimental está ligeramente desplazado hacia la parte alta de la escala de puntuaciones.
- En los gráficos de perfil podemos ver la evolución de ambos grupos desde el pretest al postest: el grupo experimental ha obtenido una puntuación media más baja que el grupo control en el pretest y en el postest la media del grupo experimental ha sido un poco mejor (Tabla 6.2.1.5).

Histogramas y ajuste normal para Mejora CGEO

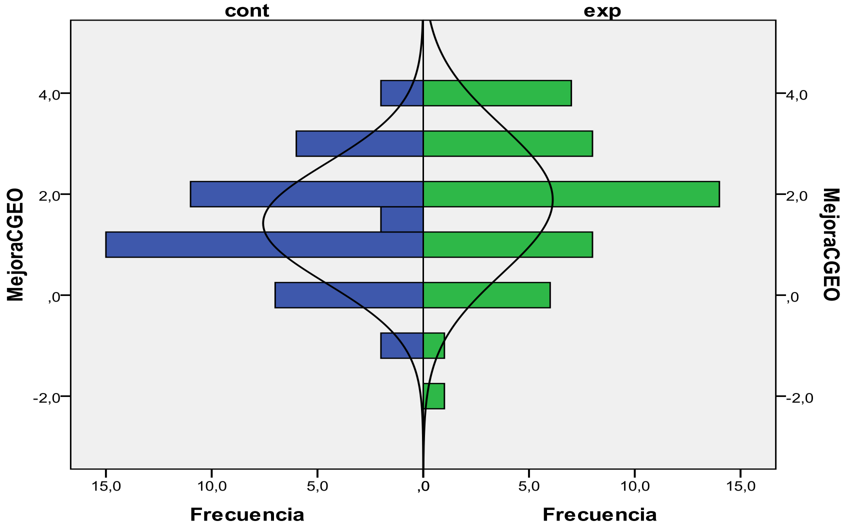


Tabla 6.2.1.4 - Histogramas y ajuste normal para Mejora CGEO

Gráficos de perfil para CGEO

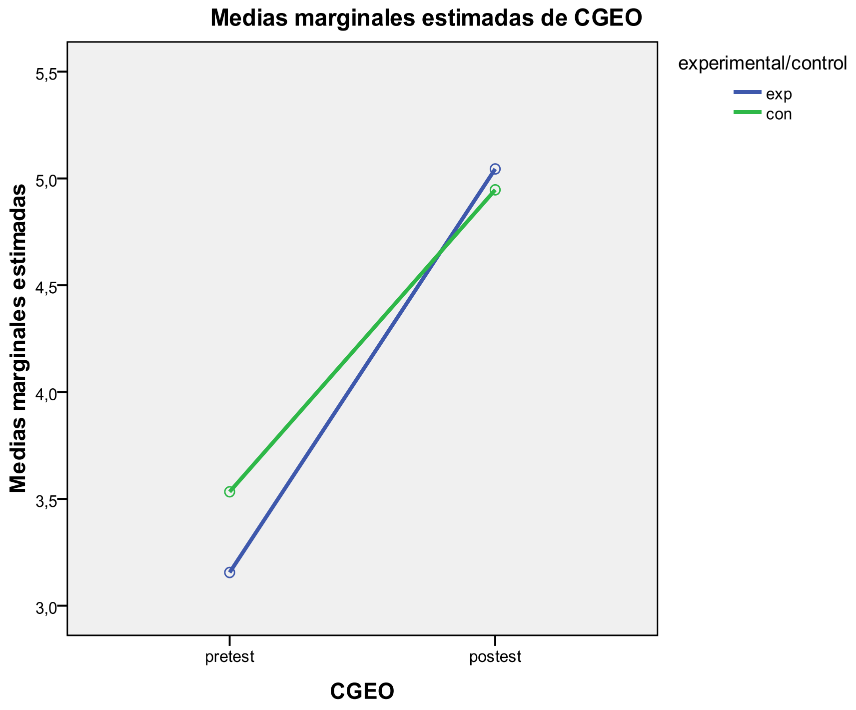


Tabla 6.2.1.5 – Gráficos de perfil para CGEO

6.2.2 Análisis descriptivo de la variable CDID

En el epígrafe 6.1.1 hemos definido la variable Mejora CDID, cuyos valores son las diferencias entre las puntuaciones del postest (CDID2) y el pretest (CDID1) en los ítems que miden las competencias didácticas. Esta variable puede tomar teóricamente valores entre -6 y 6, que es la puntuación máxima que se podía obtener en esta parte de la prueba. En nuestra investigación los valores están entre -2 y 4.

Veamos la tabla de frecuencias y los estadísticos descriptivos del grupo experimental y el grupo control para la variable Mejora CDID:

Frecuencias de la mejora en Competencias Didácticas					
Grupo experimental			Grupo control		
Mejora	Frecuencia	Porcentaje	Mejora	Frecuencia	Porcentaje
-1,0	3	6,7	-2,0	1	2,2
,0	6	13,3	-1,5	1	2,2
,5	1	2,2	-1,0	2	4,4
1,0	5	11,1	-,5	2	4,4
1,5	3	6,7	,0	3	6,7
2,0	11	24,4	,5	4	8,9
3,0	10	22,2	1,0	15	33,3
4,0	3	6,7	1,5	3	6,7
4,5	1	2,2	2,0	6	13,3
5,0	2	4,4	2,5	1	2,2
			3,0	3	6,7
			4,0	3	6,7
			5,0	1	2,2
Total	45	100,0	Total	45	100,0

Tabla 6.2.2.1 - Frecuencias de la mejora en CDID en los grupos experimental y control

Estadísticos Mejora CDID			
		G. experimental	G. control
N	Válidos	45	45
	Perdidos	0	0
Media		1,900	1,233
Mediana		2,000	1,000
Moda		2,0	1,0
Desv. típ.		1,5433	1,4562
Asimetría		-,017	,339
Error típ. de asimetría		,354	,354
Curtosis		-,456	,562
Error típ. de curtosis		,695	,695
Percentiles	25	1,000	,500
	50	2,000	1,000
	75	3,000	2,000

Tabla 6.2.2.2 – Estadísticos descriptivos para Mejora CDID

Diagramas de caja de Mejora CDID

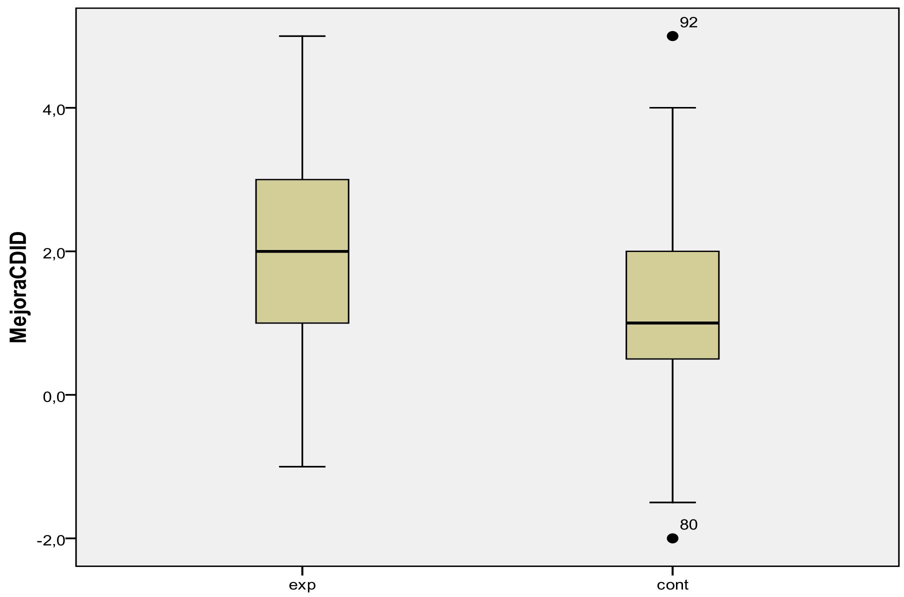


Tabla 6.2.2.3 - Diagramas de caja para Mejora CDID

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- En ambos grupos mejoran sus competencias didácticas el 80 % de los alumnos (Tabla 6.2.2.1).
- La media del grupo experimental es superior en casi 0,7 puntos a la del grupo control. La mediana y la moda del grupo experimental son superiores en un punto a las del grupo control (Tabla 6.2.2.2).
- La mediana del grupo experimental es igual al tercer cuartil o percentil 75 del grupo control y la mediana del grupo control es igual al primer cuartil o percentil 25 del grupo experimental (Tablas 6.2.2.2 y 6.2.2.3).
- En los diagramas de caja se observa que los alumnos del grupo experimental han mejorado más que los del grupo control (Tabla 6.2.2.3).

- Observando el ajuste normal (Tabla 6.2.2.4) comprobamos que el grupo experimental está ligeramente desplazado hacia la parte alta de la escala de puntuaciones.
- En los gráficos de perfil podemos ver la evolución de ambos grupos desde el pretest al postest: el grupo experimental ha obtenido una puntuación media más baja que el grupo control en el pretest y en el postest, sin embargo, ha sido al contrario (Tabla 6.2.2.5).

Histogramas y ajuste normal para Mejora CDID

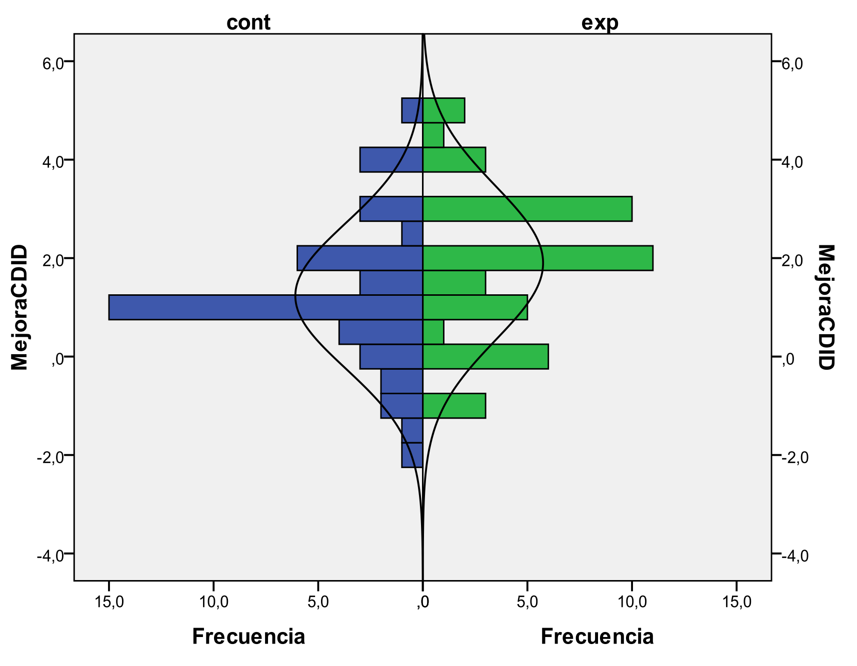


Tabla 6.2.2.4 - Histogramas y ajuste normal para Mejora CDID

Gráficos de perfil para CDID

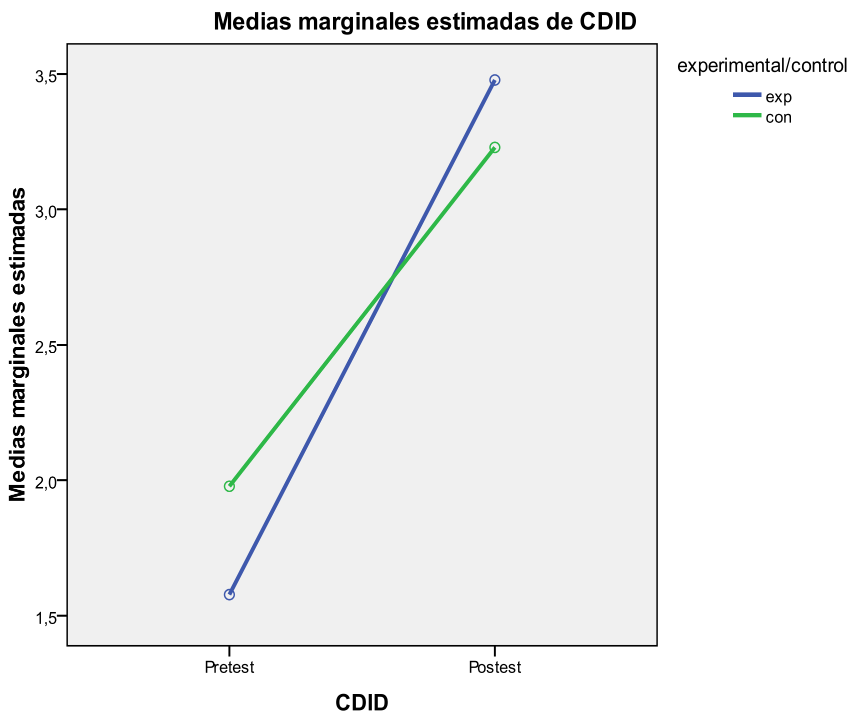


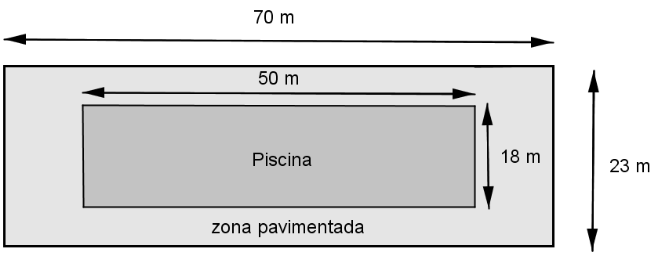
Tabla 6.2.2.5 – Gráficos de perfil para CDID

6.2.3 Análisis descriptivo para cada ítem de la prueba

Por último, vamos a observar ahora en qué ítems de la prueba de competencias geométricas y didácticas obtuvieron mejores puntuaciones los alumnos de los grupos experimental y control en el postest respecto del pretest. Hemos definido unas variables que miden la diferencia entre las puntuaciones del postest y del pretest de cada alumno para cada ítem de la prueba. Cada una recibe el nombre de MejoraNºitem. Veamos las tablas de porcentajes de dichas variables, los histogramas, los estadísticos descriptivos y los gráficos de perfil para comparar los resultados del grupo experimental con los del grupo control.

Ítem P1

1- Una piscina de forma rectangular tiene alrededor de ella una zona pavimentada como muestra la figura (no está a escala):



¿Cuál es el área de la zona pavimentada (sombreada más clara en la figura)?.
Elije una de las siguientes opciones **(1 P)**:

A. 100 m^2 ☐
B. 161 m^2 ☐
C. 710 m^2 ☐
D. 1610 m^2 ☐

Este ítem se ha puntuado con 1 si la respuesta era correcta o 0 si era incorrecta. Por lo tanto, la variable Mejora P1 tiene un rango entre -1 y 1.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P1				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Exp	Válidos	,0	42,2	42,2
		1,0	57,8	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-1,0	2,6	2,6
		,0	43,6	46,2
		1,0	53,8	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.1 - Porcentajes de la variable Mejora P1

Histogramas y ajuste normal para Mejora Item P1

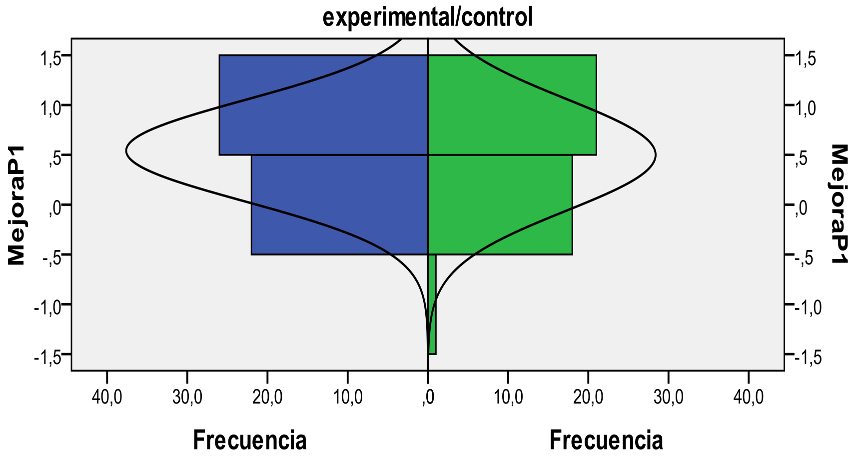


Tabla 6.2.3.2 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P1

Estadísticos descriptivos del ítem P1

	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P1 pretest	exp	,44	,501
	cont	,48	,506
	Total	,45	,501
Puntuación ítem P1 postest	exp	,98	,144
	cont	,97	,158
	Total	,98	,150

Tabla 6.2.3.3 – Estadísticos descriptivos del ítem P1

Gráficos de perfil del Item P1

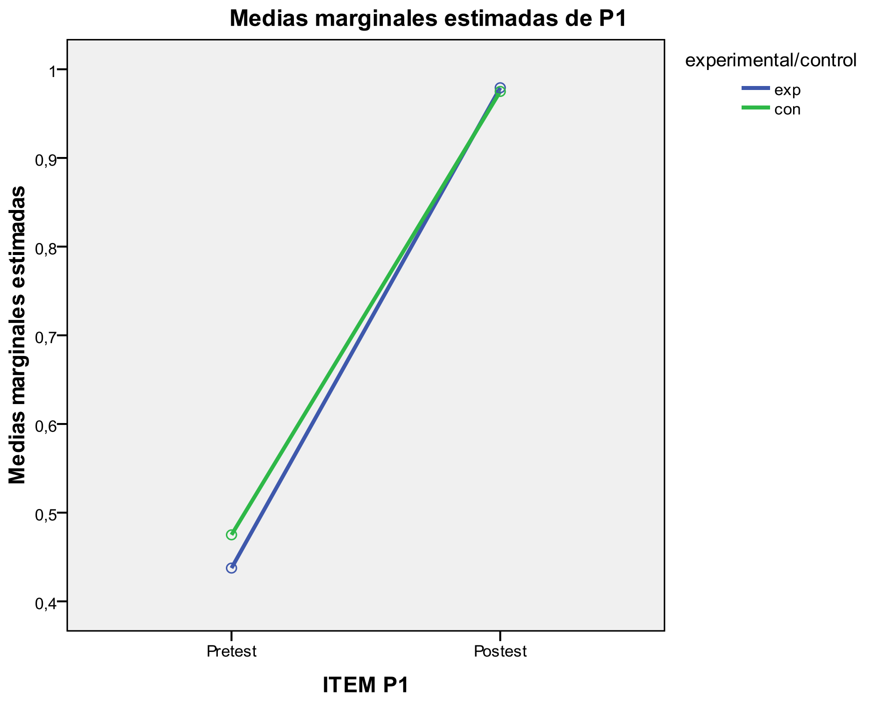


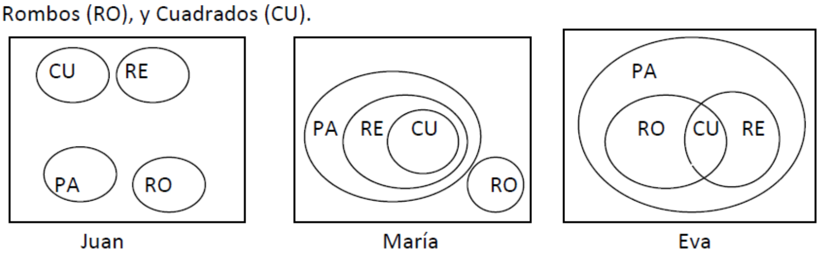
Tabla 6.2.3.4 – Gráficos de perfil del Item P1

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 57,8%, frente al 53,8% del grupo control (Tabla 6.2.3.1).
- En el grupo experimental no hay ningún alumno que empeore su puntuación del postest respecto del pretest. En el grupo control hay un alumno que empeora su puntuación (Tablas 6.2.3.1 y 6.2.3.2).
- La media de puntuaciones en el ítem P1 del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control, sin embargo en el postest se equiparan, siendo ligeramente más alta la del grupo experimental (Tablas 6.2.3.3 y 6.2.3.4).

Ítem P2

2- Tres estudiantes han dibujado los siguientes diagramas de Venn para representar las relaciones entre cuatro clases de cuadriláteros: Rectángulos (RE), Paralelogramos (PA), Rombos (RO), y Cuadrados (CU).



¿Qué diagrama es correcto?. Elije una de las siguientes opciones:

A. Juan ☐ B. María ☐ C. Eva ☐

Este ítem se ha puntuado con 1 si la respuesta era correcta o 0 si era incorrecta. Por lo tanto, la variable Mejora P2 tiene un rango entre -1 y 1.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P2

experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Exp	Válidos	-1,0	4,4	4,4
		,0	71,1	75,6
		1,0	24,4	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-1,0	5,1	5,1
		,0	82,1	87,2
		1,0	12,8	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.5 – Porcentajes de la variable Mejora P2

Histogramas y ajuste normal para Mejora Item P2

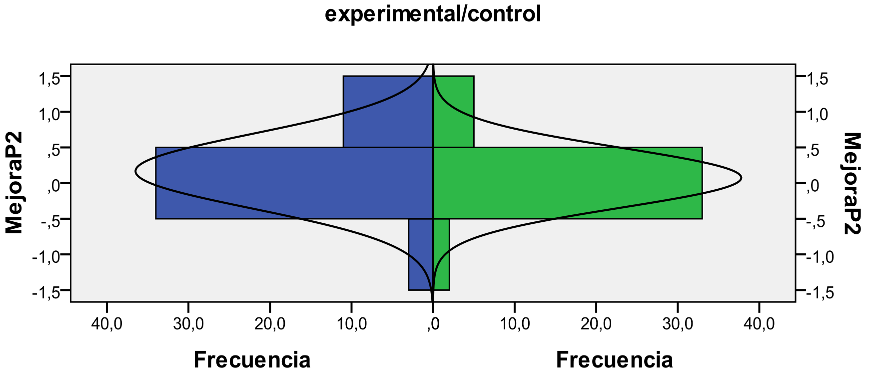


Tabla 6.2.3.6 – Histograma y ajuste normal para Mejora Item P2

Estadísticos descriptivos del ítem P2			
	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P2 pretest	exp	,71	,458
	con	,79	,409
	Total	,75	,436
Puntuación ítem P2 postest	exp	,91	,288
	con	,87	,339
	Total	,89	,311

Tabla 6.2.3.7 – Estadísticos descriptivos del ítem P2

Gráficos de perfil del Item P2

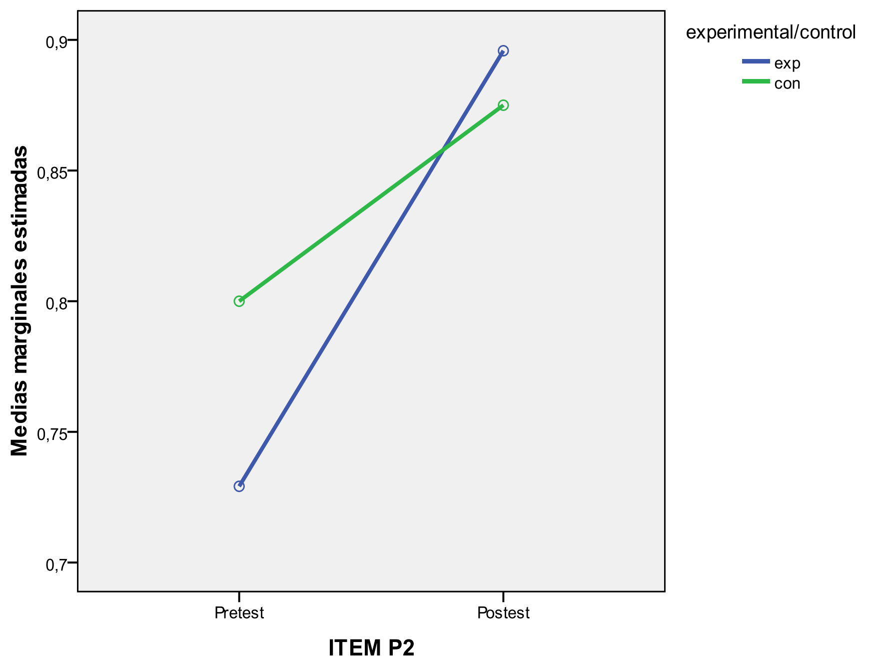


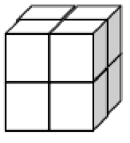
Tabla 6.2.3.8 – Gráficos de perfil del ítem P2

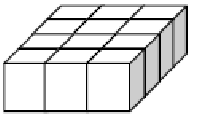
Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

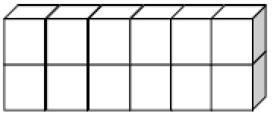
- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 24,4%, frente al 12,8% del grupo control (Tabla 6.2.3.5).
- En los dos grupos hay dos alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest (Tablas 6.2.3.5 y 6.2.3.6).
- La media de puntuaciones en el ítem P2 del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control, sin embargo en el postest es más alta la del grupo experimental (Tablas 6.2.3.7 y 6.2.3.8).

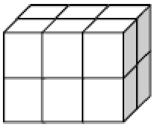
Ítem P3

3- Se ha presentado el siguiente problema a niños de Primaria:
Cada bloque pequeño tiene el mismo tamaño. ¿Cuál de los siguientes grupos de bloques tiene distinto volumen que los demás?

A.


B.


C.


D.


a) ¿Cuál es la respuesta correcta a esta pregunta? Elige una de las siguientes opciones **(1 P)**:

A. El grupo de bloques A ☐
B. El grupo de bloques B ☐
C. El grupo de bloques C ☐
D. El grupo de bloques D ☐

b) Reformula el enunciado del problema sin que cambie la tarea y sin utilizar la palabra **VOLUMEN**. **(2 P)**

Este ítem P3a se ha puntuado con 1 si la respuesta era correcta o 0 si era incorrecta. Por lo tanto, la variable Mejora P3A tiene un rango entre -1 y 1.

El ítem P3b se ha puntuado con 2 puntos si la respuesta era correcta, 1 punto si era parcialmente correcta y 0 si era incorrecta. El rango de la variable Mejora P3B está entre -2 y 2.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P3A				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
exp	Válidos	-1,0	2,2	2,2
		,0	64,4	66,7
		1,0	33,3	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	,0	69,2	69,2
		1,0	30,8	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.9 – Porcentajes de la variable Mejora P3A

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P3A

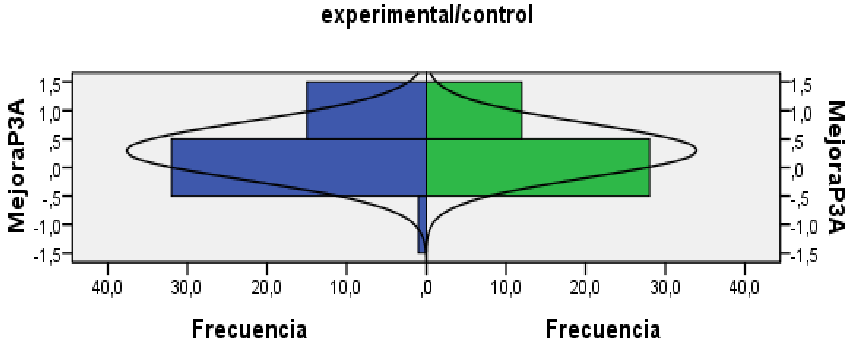


Tabla 6.2.3.10 – Histograma y ajuste normal para Mejora Item P3A

Estadísticos descriptivos del el ítem P3A			
	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación pregunta 3ª pretest	Exp	,64	,484
	Cont	,69	,468
	Total	,67	,474
Puntuación pregunta 3ª postest	Exp	,96	,208
	cont	1,00	,000
	Total	,98	,153

Tabla 6.2.3.11 – Estadísticos descriptivos del ítem P3A

Gráficos de perfil del Item P3A

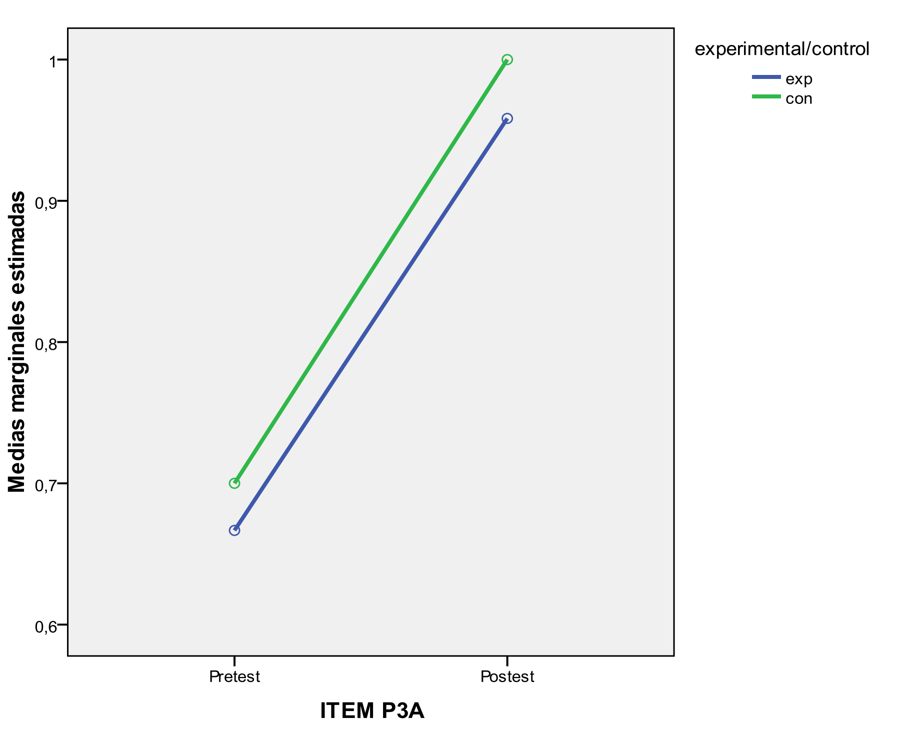


Tabla 6.2.3.12 – Gráficos de perfil del ítem P3A

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 33,3%, frente al 30,8% del grupo control (Tabla 6.2.3.9).
- En el grupo experimental hay un alumno que empeora su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control no hay ninguno. (Tablas 6.2.3.10 y 6.2.3.11).
- La media de puntuaciones en el ítem P3A del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control y prácticamente se mantiene la misma diferencia en el postest. En el grupo control todos los alumnos han obtenido la máxima puntuación en el postest (Tablas 6.2.3.11 y 6.2.3.12).

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora Ítem P3B				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
exp	Válidos	-1,0	6,7	6,7
		,0	42,2	48,9
		1,0	24,4	73,3
		2,0	26,7	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-2,0	5,1	5,1
		-1,0	12,8	17,9
		,0	35,9	53,8
		1,0	25,6	79,5
		2,0	20,5	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.13 – Porcentajes de la variable Mejora Item P3B

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P3A

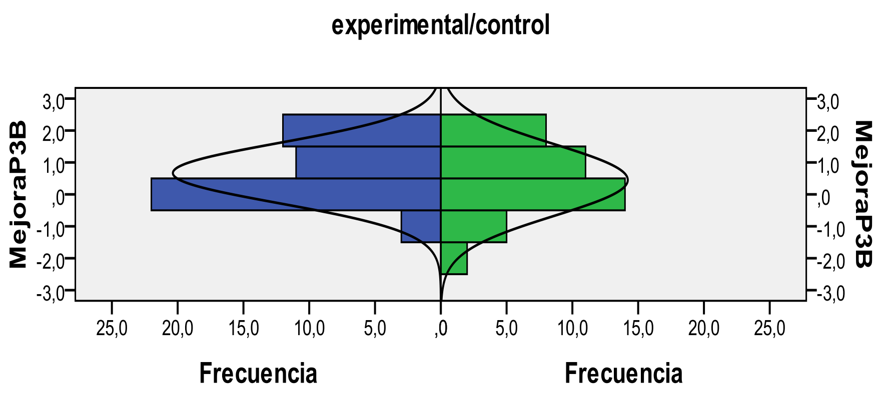


Tabla 6.2.3.14 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P3A

Estadísticos descriptivos del ítem P3B

	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P3B pretest	Exp	,53	,694
	Cont	,56	,821
	Total	,55	,751
Puntuación ítem P3B postest	Exp	1,24	,857
	Cont	1,00	,858
	Total	1,13	,861

Tabla 6.2.3.15 – Estadísticos descriptivos del ítem P3B

Gráficos de perfil del Item P3B

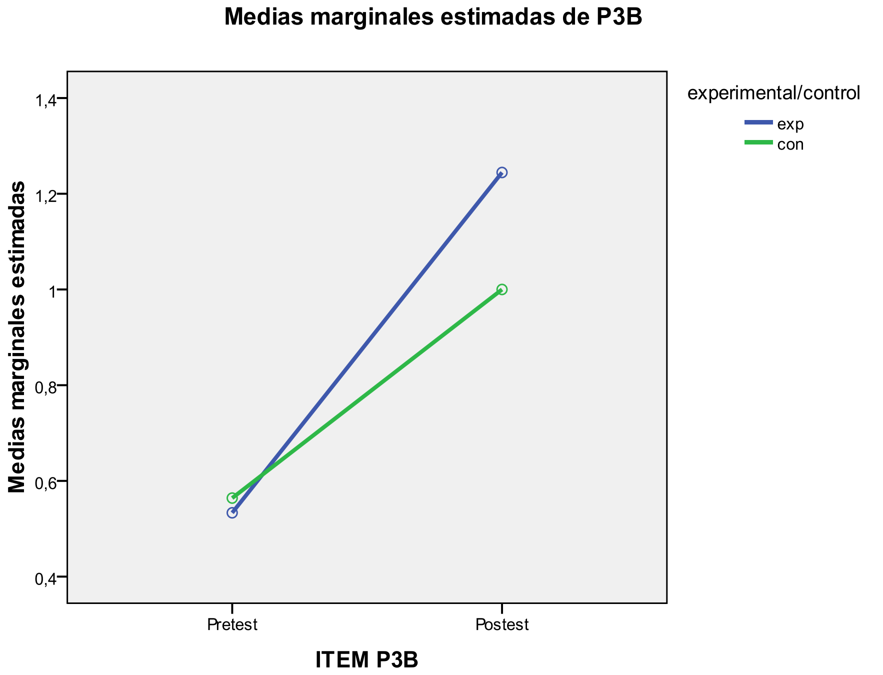


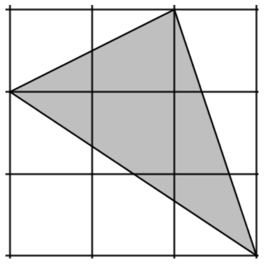
Tabla 6.2.3.16 – Gráficos de perfil del Ítem P3B

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 51,1%, frente al 46,1% del grupo control (Tabla 6.2.3.13).
- En el grupo experimental hay 3 alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control hay 7 (Tablas 6.2.3.13 y 6.2.3.14).
- La media de puntuaciones en el ítem P3B del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control y sin embargo en el postest es al contrario (Tablas 6.2.3.15 y 6.2.3.16).

Ítem P4

4- El área de cada cuadrado pequeño es 1 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado en cm^2?



Elige una de las siguientes opciones **(1 P)**:

A. 3,5 cm^2 ☐
B. 4 cm^2 ☐
C. 4,5 cm^2 ☐
D. 5 cm^2 ☐

Este ítem se puntuó con 1 punto si la respuesta era correcta y 0 puntos si era incorrecta. El rango está entre -1 y 1.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P4				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Exp	Válidos	-1,0	13,3	13,3
		,0	37,8	51,1
		1,0	48,9	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-1,0	2,6	2,6
		,0	66,7	69,2
		1,0	30,8	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.17 – Porcentajes de la variable Mejora P4

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P4

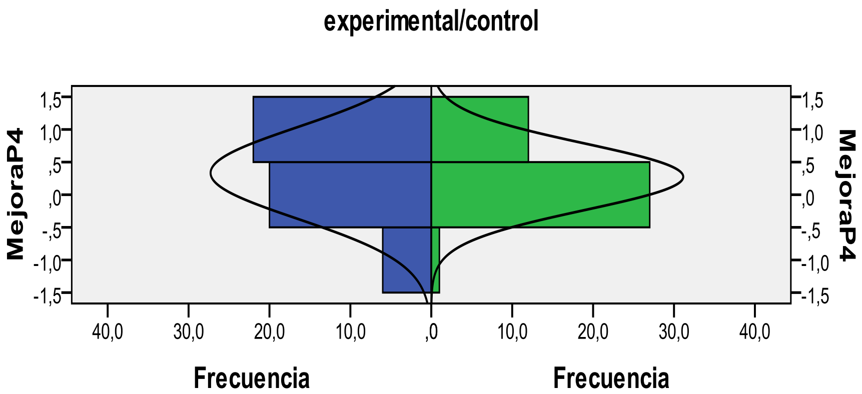


Tabla 6.2.3.18 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P4

Estadísticos descriptivos del ítem P4

	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntación ítem P4 pretest	Exp	,42	,499
	Cont	,36	,486
	Total	,39	,491
Puntuación ítem P4 postest	Exp	,78	,420
	Cont	,64	,486
	Total	,71	,454

Tabla 6.2.3.19 – Estadísticos descriptivos del ítem P4

Gráficos de perfil del Ítem P4

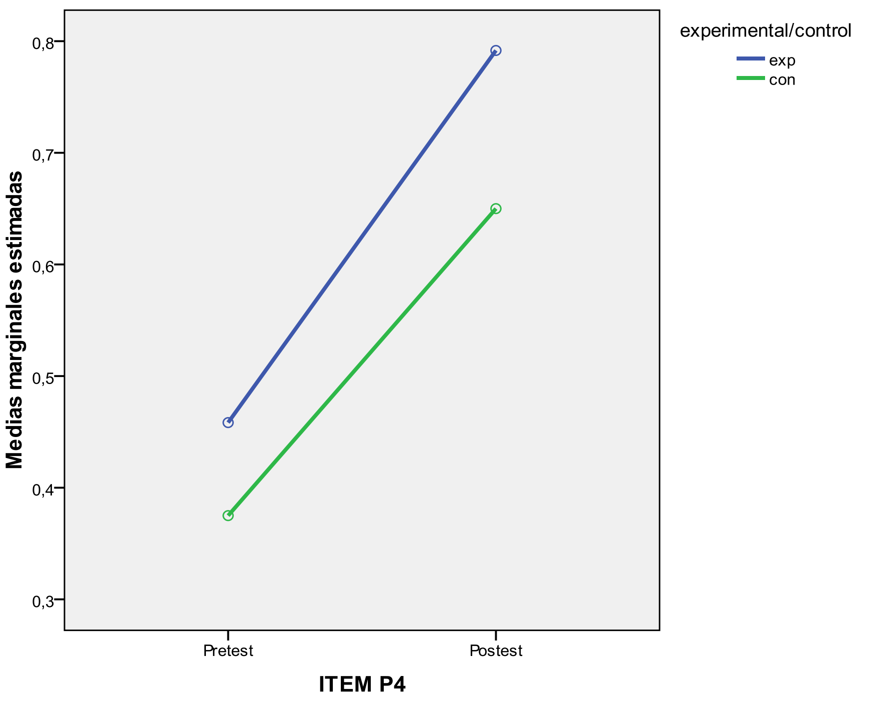


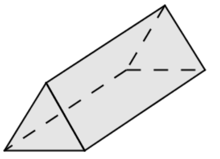
Tabla 6.2.3.20 – Gráficos de perfil del ítem P4

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

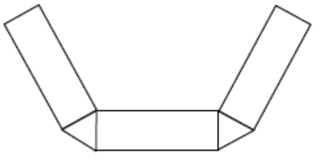
- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 48,9%, frente al 30,8% del grupo control (Tabla 6.2.3.17).
- En el grupo experimental hay 6 alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control hay sólo uno (Tablas 6.2.3.17 y 6.2.3.18).
- La media de puntuaciones en el ítem P4 del grupo experimental en el pretest fue más alta que la del grupo control y ocurre lo mismo en el postest (Tablas 6.2.3.19 y 6.2.3.20).

Ítem P5

5- ¿Cuál de las siguientes figuras puede doblarse para construir esta figura tridimensional?: Elige una de las siguientes opciones **(1 P)**:

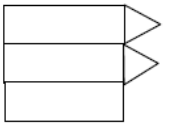


A.



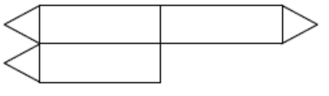
☐

B.



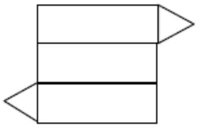
☐

C.



☐

D.



☐

Este ítem se puntuó con 1 punto si la respuesta era correcta y 0 puntos si era incorrecta. El rango de la variable Mejora P5 está entre -1 y 1.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P5				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Exp	Válidos	-1,0	6,7	6,7
		,0	80,0	86,7
		1,0	13,3	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	,0	92,3	92,3
		1,0	7,7	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.21 – Porcentajes de la variable Mejora P5

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P5

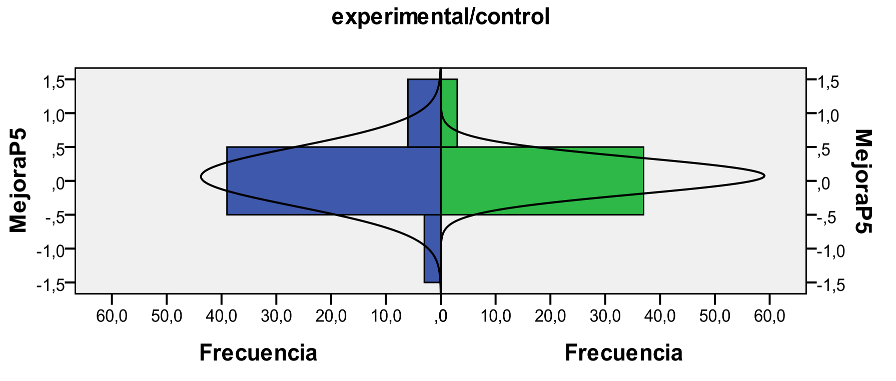


Tabla 6.2.3.22 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P5

Estadísticos descriptivos del ítem P5

	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P5 pretest	Exp	,80	,405
	Cont	,85	,366
	Total	,82	,385
Puntuación ítem P5 postest	Exp	,87	,344
	cont	,92	,270
	Total	,89	,311

Tabla 6.2.3.23 – Estadísticos descriptivos del ítem P5

Gráficos de perfil del Ítem P5

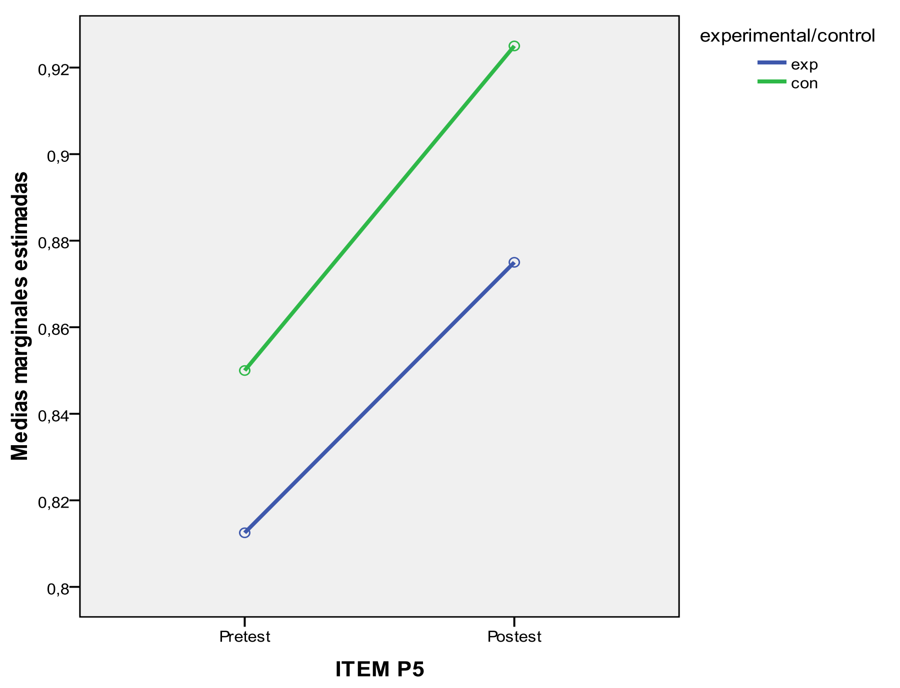


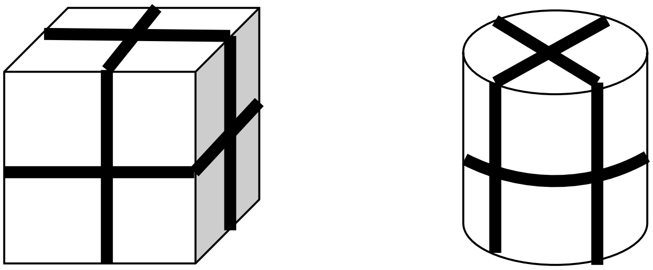
Tabla 6.2.3.24 – Gráficos de perfil del ítem P5

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 13,3%, frente al 7,7% del grupo control (Tabla 6.2.3.21).
- En el grupo experimental hay 3 alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control no hay ninguno (Tablas 6.2.3.21 y 6.2.3.22).
- La media de puntuaciones en el ítem P5 del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control y ocurre lo mismo en el postest (Tablas 6.2.3.23 y 6.2.3.24).

Ítem P6

6- Dos cajas de regalo se atan con una cinta como muestra la figura. La caja A es un cubo de 10 cm de lado. La caja B es un cilindro con diámetro y altura de 10 cm cada uno.



A B

¿Qué caja necesita una cinta más larga? Explica cómo has llegado a tu respuesta. **(2 P)**

Este ítem se valoró como 0 puntos si la respuesta era incorrecta, 1 punto si era parcialmente correcta y 2 puntos si era correcta. El rango de puntuaciones de la variable Mejora P6 está entre -2 y 2.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P6				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
exp	Válidos	-1,0	4,4	4,4
		,0	64,4	68,9
		1,0	20,0	88,9
		2,0	11,1	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-1,0	12,8	12,8
		,0	66,7	79,5
		1,0	10,3	89,7
		2,0	10,3	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.25 – Porcentajes de la variable Mejora P6

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P6

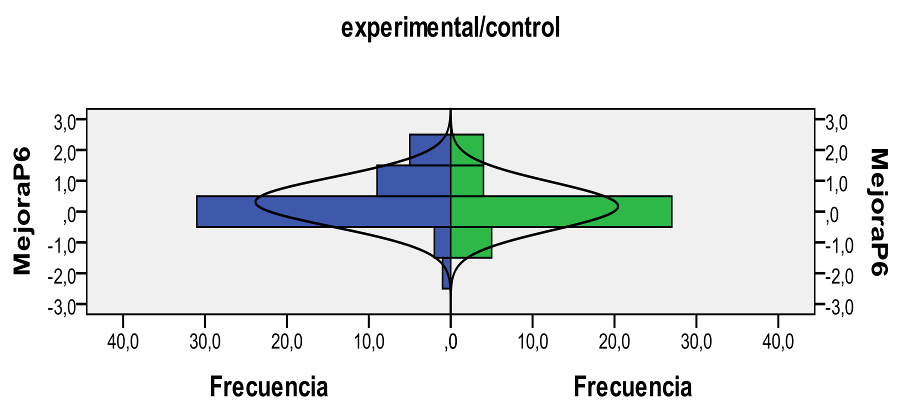


Tabla 6.2.3.26 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P6

Estadísticos descriptivos del ítem P6

	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P6 pretest	Exp	,29	,651
	Cont	,37	,667
	Total	,33	,656
Puntuación ítem P6 postest	Exp	,60	,844
	cont	,55	,846
	Total	,58	,840

Tabla 6.2.3.27 – Estadísticos descriptivos del ítem P6

Gráficos de perfil del Ítem P6

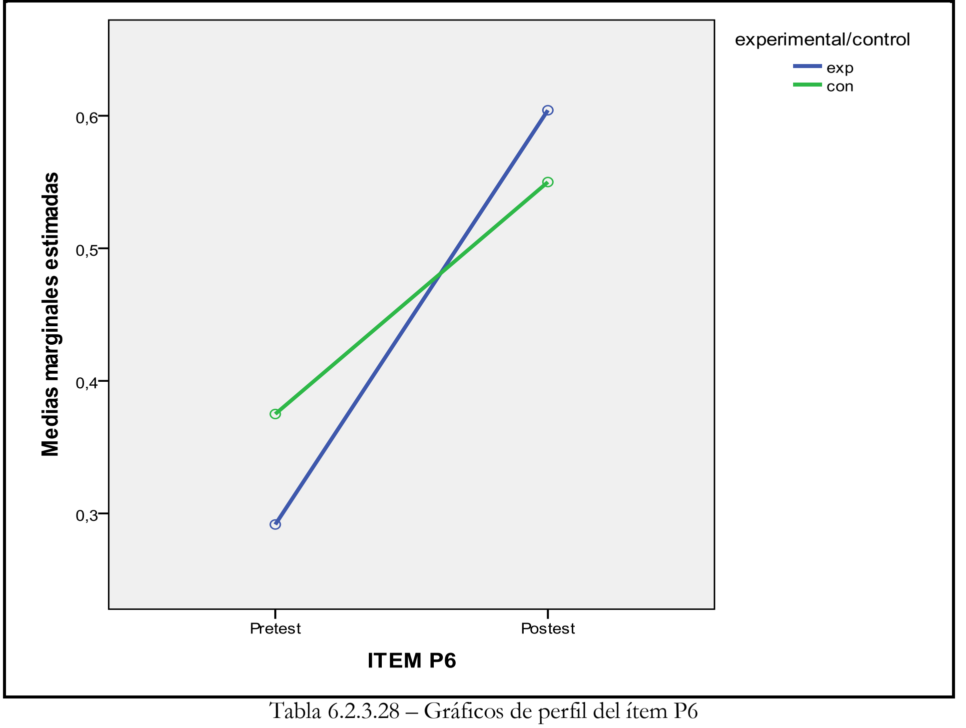


Tabla 6.2.3.28 – Gráficos de perfil del ítem P6

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 31,1%, frente al 20,6% del grupo control (Tabla 6.2.3.25).
- En el grupo experimental hay 2 alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control hay 5 (Tablas 6.2.3.25 y 6.2.3.26).
- La media de puntuaciones en el ítem P6 del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control y sin embargo en el postest es al contrario (Tablas 6.2.3.27 y 6.2.3.28).

Ítem P7

7- Cuando el profesor H. enseña a sus alumnos por primera vez la medida de longitudes, empieza pidiendo a los niños que midan la anchura de su libro usando primero clips y luego lápices.
Escribe **DOS** razones que expliquen por qué prefiere este método en vez de enseñarles directamente a usar una regla. **(2 P)**

Este ítem se valoró como 0 puntos si la respuesta era incorrecta, 1 punto si era parcialmente correcta y 2 puntos si era correcta. El rango de puntuaciones de la variable Mejora P7 está entre -2 y 2.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P7

experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
exp	Válidos	-1,0	6,7	6,7
		,0	37,8	44,4
		1,0	46,7	91,1
		2,0	8,9	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-1,0	10,3	10,3
		,0	43,6	53,8
		1,0	43,6	97,4
		2,0	2,6	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.29 – Porcentajes de la variable Mejora P7

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P7

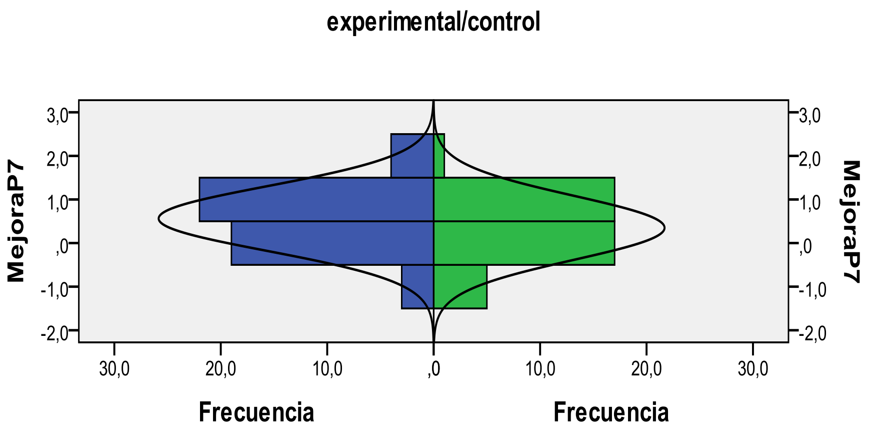


Tabla 6.2.3.30 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P7

Estadísticos descriptivos del ítem P7			
	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P7 pretest	Exp	,52	,545
	Cont	,70	,687
	Total	,60	,617
Puntuación ítem P7 postest	Exp	1,08	,647
	cont	1,05	,316
	Total	1,07	,521

Tabla 6.2.3.31 – Estadísticos descriptivos del ítem P7

Gráficos de perfil del Ítem P7

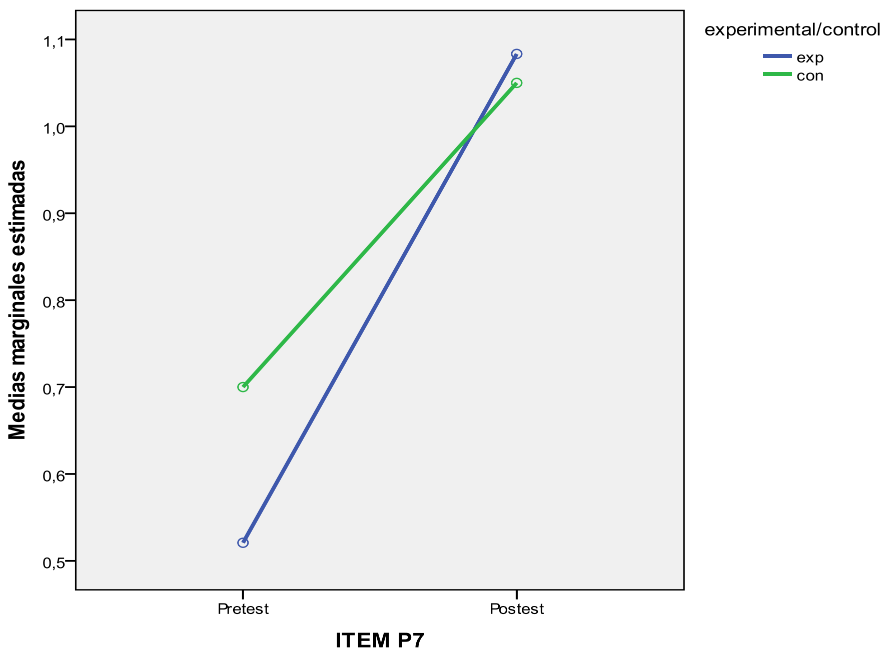


Tabla 6.2.3.32 – Gráficos de perfil del ítem P7

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 55,6%, frente al 46,2% del grupo control (Tabla 6.2.3.29).
- En el grupo experimental hay 3 alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control hay 4 (Tablas 6.2.3.29 y 6.2.3.30).
- La media de puntuaciones en el ítem P7 del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control y sin embargo en el postest es al contrario (Tablas 6.2.3.31 y 6.2.3.32).

Ítem P8

8- Diseña una actividad en la que los alumnos de 6º de Primaria tengan que comprobar que los tres ángulos de un triángulo suman siempre 180º. Describe las instrucciones que darás a los alumnos, como esperas que se desarrolle la actividad y los recursos que necesitarás para realizarla. **(2 P)**

Este ítem se valoró como 0 puntos si la respuesta era incorrecta, 1 punto si era parcialmente correcta y 2 puntos si era correcta. El rango de puntuaciones de la variable Mejora P8 está entre -2 y 2.

Tabla de Porcentajes de la variable Mejora P8				
experimental/control			Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
exp	Válidos	-1,0	6,7	6,7
		,0	35,6	42,2
		,5	11,1	53,3
		1,0	31,1	84,4
		2,0	15,6	100,0
		Total	100,0	
cont	Válidos	-1,5	5,1	5,1
		-1,0	5,1	10,3
		-,5	7,7	17,9
		,0	35,9	53,8
		,5	5,1	59,0
		1,0	23,1	82,1
		1,5	5,1	87,2
		2,0	12,8	100,0
		Total	100,0	

Tabla 6.2.3.33 – Porcentajes de la variable Mejora P8

Histogramas y ajuste normal para Mejora Ítem P8

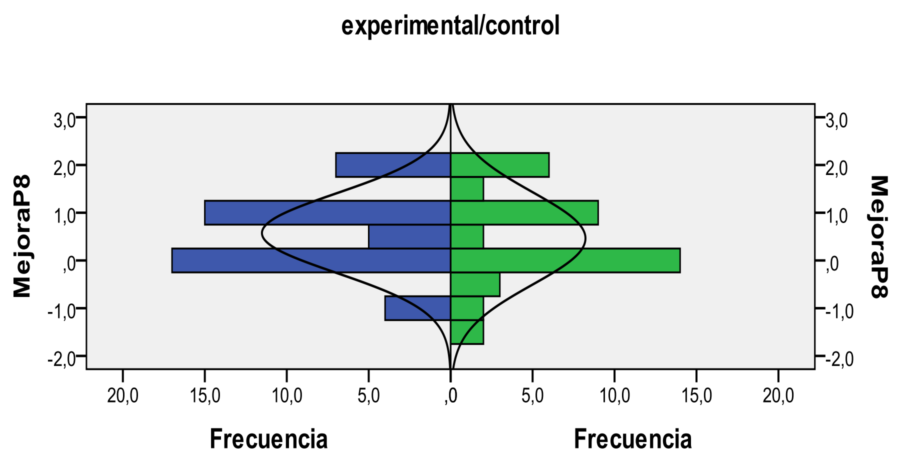


Tabla 6.2.3.34 – Histograma y ajuste normal para Mejora ítem P8

Estadísticos descriptivos del ítem P8

	exp/cont	Media	Desviación típica
Puntuación ítem P8 pretest	Exp	,583	,7945
	Cont	,800	,8829
	Total	,682	,8380
Puntuación ítem P8 postest	Exp	1,156	,7449
	cont	1,263	,7249
	Total	1,205	,7336

Tabla 6.2.3.35 – Estadísticos descriptivos del ítem P8

Gráficos de perfil del Ítem P8

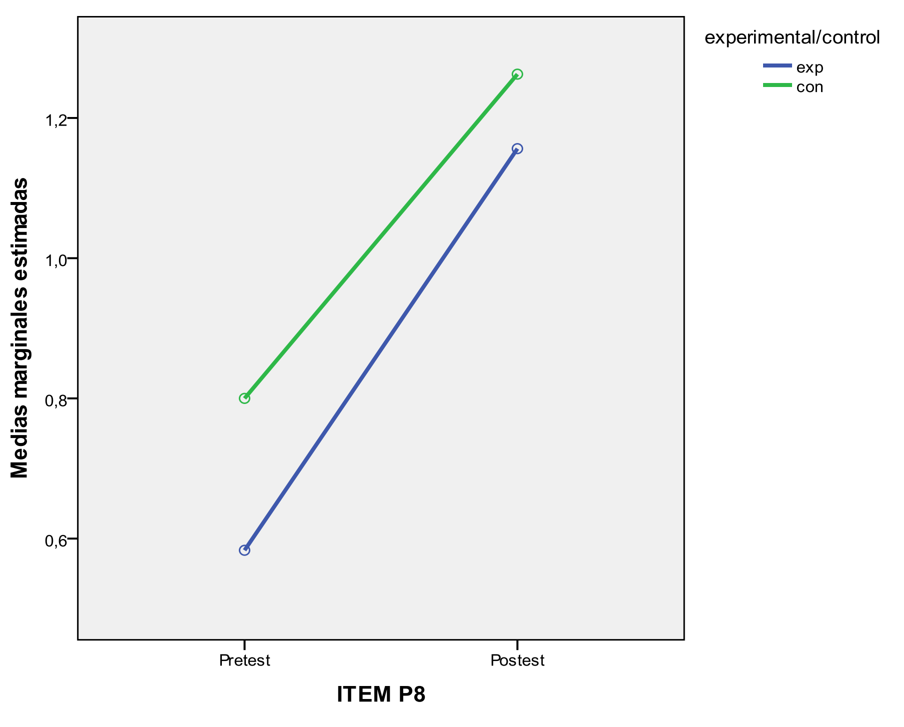


Tabla 6.2.3.36 – Gráficos de perfil del ítem P8

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- El porcentaje de alumnos que han mejorado en el postest respecto al pretest en el grupo experimental es del 57,8%, frente al 46,1% del grupo control (Tabla 6.2.3.33).
- En el grupo experimental hay 3 alumnos que empeoran su puntuación del postest respecto del pretest, mientras que en el grupo control hay 6 (Tablas 6.2.3.33 y 6.2.3.34).
- La media de puntuaciones en el ítem P8 del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control y en el postest lo sigue siendo, aunque se aproxima más (Tablas 6.2.3.35 y 6.2.3.36).

Vamos ahora a considerar los recursos utilizados por los alumnos para el diseño de la actividad pedida en la pregunta 8. Las respuestas se codificaron atendiendo a la elección del tipo de recurso de la siguiente manera:

Codigo	Respuesta
20	**Respuestas correctas:** Diseñan una actividad con diagramas dibujados (en papel o pizarra)
21	Actividad con materiales manipulables
22	Actividad con papel o cartón, recortan los ángulos del triángulo y forman un ángulo llano.
23	Actividad con ordenador.
10	**Respuestas parcialmente correctas:** Actividad incompleta o poco clara con diagramas dibujados.
11	Actividad incompleta o poco clara con materiales manipulables (geoplano, varillas, palillos, tangram, triángulos recortados…)
12	Actividad incompleta o poco clara con triángulo de papel o cartón, recortan sus ángulos y forman un ángulo llano.
13	Actividad incompleta o poco clara con materiales tecnológicos (ordenador)
70,71, 72,73	**Respuestas incorrectas:** cada código hace referencia a los materiales empleados en la actividad (igual que en los anteriores)
79	Otras respuestas incorrectas (incluyendo las tachadas, borradas, ilegibles, irresolubles)
99	**Respuestas en blanco**

En el pretest sólo un alumno del grupo experimental realizó una respuesta parcialmente correcta que incluía recursos tecnológicos (ver tabla 6.2.3.37). En el postest vemos que 4 alumnos del grupo experimental usan estos recursos en su actividad (8,8 %), dos en respuestas correctas y otros dos en respuestas parcialmente correctas. Todos ellos eligen GeoGebra como recurso. En el grupo control 2 alumnos utilizan recursos virtuales sin especificar en respuestas parcialmente correctas (4,4%). En cualquier caso, vemos que en ambos grupos el empleo de un recurso tecnológico es minoritario, la gran mayoría de los alumnos se ha decantado por el uso de triángulos recortados en papel o cartulina (51,1% en el grupo experimental y 33,3%

en el grupo control) o dibujos con lápiz-papel (15,5% grupo experimental y 37,8% grupo control).

Respuesta pregunta 8						
			Pretest		Postest	
experimental/control			Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
exp	Válidos	10	3	6,7	5	11,1
		11	4	8,9	2	4,4
		12	1	2,2	10	22,2
		13	1	2,2	2	4,4
		20	5	11,1	2	4,4
		21	4	8,9	0	0
		22	0	0	13	28,9
		23	0	0	2	4,4
		70	3	6,7	0	0
		71	3	6,7	2	4,4
		72	0	0	1	2,2
		79	1	2,2	4	8,9
		99	20	44,4	2	4,4
		Total	45	100,0	45	100,0
cont		10	7	15,6	12	26,7
	Válidos	12	1	2,2	4	8,9
		13	0	0	2	4,4
		20	7	15,6	5	11,1
		21	4	8,9	0	0
		22	2	4,4	11	24,4
		23	0	0	0	0
		70	5	11,1	2	4,4
		71	4	8,9	1	2,2
		72	0	0	0	0
		79	1	2,2	1	2,2
	Perdidos	99	14	31,1	1	2,2
					6	13,3
		Total	45	100,0	45	100,0

Tabla 6.2.3.37 – Frecuencias de respuesta ítem 8

6.2.3.1 Conclusiones del análisis de los resultados de cada ítem

- En todos los ítems de la prueba de conocimientos geométricos y didácticos, salvo P4, la media del grupo experimental en el pretest fue más baja que la del grupo control.

- En todos los ítems, el porcentaje de alumnos del grupo experimental que han mejorado en el postest respecto al pretest es mayor que el porcentaje del grupo control. La diferencia entre los porcentajes de mejora es pequeña en los ítems P1 y P3A, de 1.7 y 2.5 puntos porcentuales respectivamente. Moderada en los ítems P3B y P5, 5.0 y 5.6 puntos porcentuales respectivamente, y la mejora es muy relevante en el resto de ítems donde se tienen diferencias entre el grupo experimental y control desde 9.4 (ítem P7) a 18.1 (ítem P4) puntos porcentuales.

<table>
<tr><th colspan="5">Ítems
Subdominio TEDS-M</th><th colspan="5">Diferencia % mejora
exp/cont</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">P1
aplicación</td><td colspan="3" rowspan="2">P3A
conocimiento</td><td colspan="2">1.7</td><td colspan="3">2.5</td></tr>
<tr><td colspan="5">pequeña</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">P3B
currículo/planificación</td><td colspan="3" rowspan="2">P5
conocimiento</td><td colspan="2">5.0</td><td colspan="3">5.6</td></tr>
<tr><td colspan="5">moderada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P7
curr/plan</td><td rowspan="2">P8
curr/plan</td><td rowspan="2">P6
aplic</td><td rowspan="2">P2
conoc</td><td rowspan="2">P4
aplic</td><td>9.4</td><td>10.4</td><td>10.5</td><td>11.6</td><td>18.1</td></tr>
<tr><td colspan="5">alta</td></tr>
</table>

Tabla 6.2.3.1.1 –Diferencia entre el grupo experimental y el control en el % de mejora del postest respecto al pretest

- En los gráficos de perfil podemos apreciar que los ítems P2, P3B, P6 y P7 son en los que los alumnos del grupo experimental partían de un resultado más bajo en el pretest y han obtenido una media mejor en el postest que los alumnos del grupo control. Sin embargo en los ítems P5 y P8 el grupo experimental ha estado por debajo del control, tanto en el pretest como en el postest, aunque la evolución es parecida en ambos grupos. En el ítem P4 el grupo experimental ha estado por encima del control tanto en el pretest como en el postest, además es donde la diferencia en los porcentajes de mejora entre el grupo experimental y el control es mayor, 18.1 %. En el ítem P1 casi se comportan igual ambos grupos y en el P3A también, aunque el grupo experimental está por debajo del control.

- En la tabla 6.2.3.1.1 vemos como los ítems en que la mejora del grupo experimental ha sido más alta respecto al grupo control están clasificados, en el marco del estudio TEDS-M, dentro de varios subdominios del conocimiento de contenidos geométricos y didácticos (ver Anexo I). Los ítems en que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados son los de aplicación, dentro de los contenidos geométricos, y de planificación del currículo, dentro de los didácticos.

- Respecto a la elección del recurso en el ítem P8, vemos que son una minoría los alumnos que eligen el uso de un recurso tecnológico en el postest. En cualquier caso es notable la diferencia de comportamiento entre el grupo experimental y control: el primero elige en primer lugar triángulos recortados en papel o cartulina (51,1%), en segundo lugar lápiz y papel (15,5%) y en tercer lugar GeoGebra (8,8%); el grupo control elige en primer lugar lápiz y papel (37,8%), en segundo lugar, casi con el mismo porcentaje, triángulos recortados (33,3%) y los recursos tecnológicos son prácticamente inexistentes (4,4%). (Tabla 6.2.3.37)

6.3 Problema de investigación P2: eficacia de GeoGebra para cambiar las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza

Vamos ahora a acometer el análisis de los datos obtenidos para intentar dar respuesta a nuestro segundo problema de investigación, que en el capítulo 4 hemos formulado en los términos siguientes: ¿favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso lápiz-papel? Análogamente a lo expuesto para el problema P1, mostraremos también en primer lugar un estudio descriptivo de los datos y a continuación realizaremos un análisis inferencial para complementar al anterior.

6.3.1 Análisis descriptivo para P2

Analizamos ahora la segunda parte de la prueba realizada a los alumnos de los grupos experimental y control, dedicada a las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza. La variable Total creencias (CR) es la suma de las puntuaciones obtenidas por los alumnos en las tres escalas en que se divide el cuestionario de creencias (ver Anexo I). Tenemos dos medidas de la variable Total creencias para cada alumno, la puntuación obtenida en el pretest (CR1) y la puntuación obtenida en el postest (CR2). Hemos definido una nueva variable que mide la mejora de CR entre el postest y el pretest (Mejora CR = CR2 – CR1). La variable Mejora CR puede tomar valores, en teoría, entre 186 y -186 ya que la puntuación máxima en la prueba de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza es de 186 puntos. En nuestra investigación los valores están entre -45 y 30.

Veamos las tablas de frecuencias y los estadísticos descriptivos para los dos grupos:

Frecuencias de la mejora en Creencias sobre las Matemáticas					
Grupo experimental			Grupo control		
Mejora	Frecuencia	Porcentaje válido	Mejora	Frecuencia	Porcentaje válido
-45	1	2,2	-28	1	2,3
-32	1	2,2	-11	2	4,7
-25	1	2,2	-10	1	2,3
-20	1	2,2	-7	2	4,7
-11	2	4,4	-5	1	2,3
-9	2	4,4	-3	2	4,7
-5	1	2,2	-1	1	2,3
-4	2	4,4	0	1	2,3
-3	2	4,4	1	2	4,7
-2	1	2,2	2	2	4,7
-1	2	4,4	3	2	4,7
1	3	6,7	4	2	4,7
3	1	2,2	6	3	7,0
4	1	2,2	7	2	4,7
5	1	2,2	8	2	4,7
6	3	6,7	9	1	2,3
7	2	4,4	10	1	2,3
8	1	2,2	11	3	7,0
9	4	8,9	12	2	4,7
10	3	6,7	13	1	2,3
11	1	2,2	14	3	7,0
15	1	2,2	16	1	2,3
16	2	4,4	17	1	2,3
17	2	4,4	21	1	2,3
19	2	4,4	23	1	2,3
23	1	2,2	25	1	2,3
30	1	2,2	29	1	2,3
			Perdidos	2	
Total	45	100,0	Total	45	100,0

Tabla 6.3.1.1 – Frecuencias de la Mejora en las creencias sobre las matemáticas de los grupos experimental y control

Estadísticos Mejora Total Creencias sobre las matemáticas			
		G. experimental	G. control
N	Válidos	45	43
	Perdidos	0	2
Media		2,64	5,67
Mediana		6	6
Desv. típ.		14,125	10,743
Asimetría		-1,172	-,488
Error típ. de asimetría		,354	,361
Curtosis		2,429	1,337
Error típ. de curtosis		,695	,709
Rango		75	57
Mínimo		-45	-28
Máximo		30	29
Percentiles	25	-3,50	,00
	50	6	6
	75	10,00	12,00

Tabla 6.3.1.2 – Estadísticos descriptivos de la variable Mejora de las creencias sobre las matemáticas

Diagrama de caja para P2

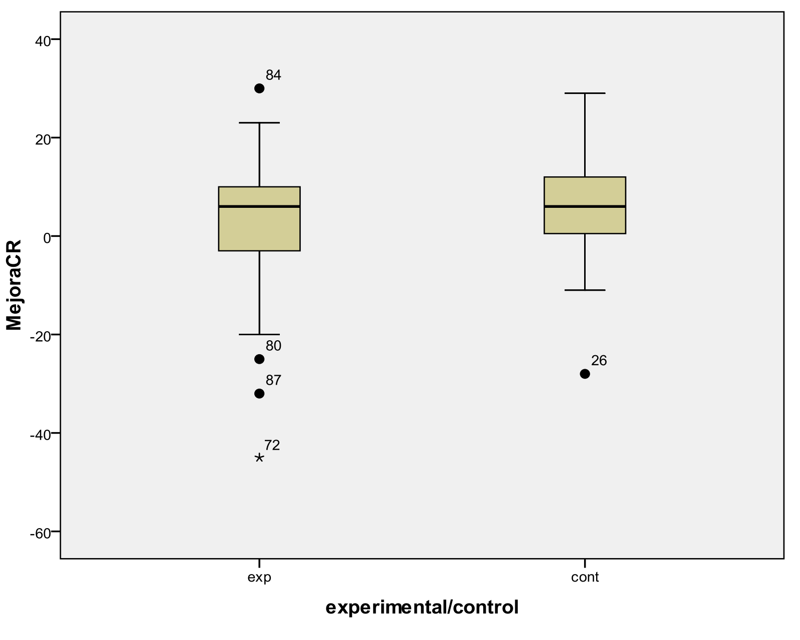


Tabla 6.3.1.3 – Diagrama de caja de la variable Mejora CR

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- La media del grupo control es superior en más de tres puntos (3,03) a la del grupo experimental. En ambos casos las medias son muy bajas en relación al rango que podía tomar la variable mejora, entre -186 y 186 (Tabla 6.3.1.2).
- La mediana es la misma en ambos grupos (Tabla 6.3.1.2).
- Vemos que el rango y la desviación típica del grupo experimental son mayores que los del grupo control, lo que indica que los valores del primer grupo están más dispersos (Tablas 6.3.1.2 y 6.3.1.3).
- En los diagramas de caja se observa que los alumnos del grupo control han mejorado un poco más que los del grupo experimental, donde hay más valores extremos (Tabla 6.3.1.3).
- En el grupo experimental hay 16 personas que han empeorado, el 35,2% y en el grupo control hay 10, el 23,3% (Tabla 6.3.1.1).
- Observando el ajuste normal comprobamos que el grupo control está ligeramente desplazado, respecto al experimental, hacia la parte alta de la escala de puntuaciones (Tabla 6.3.1.4).

Histogramas y ajuste normal para P2

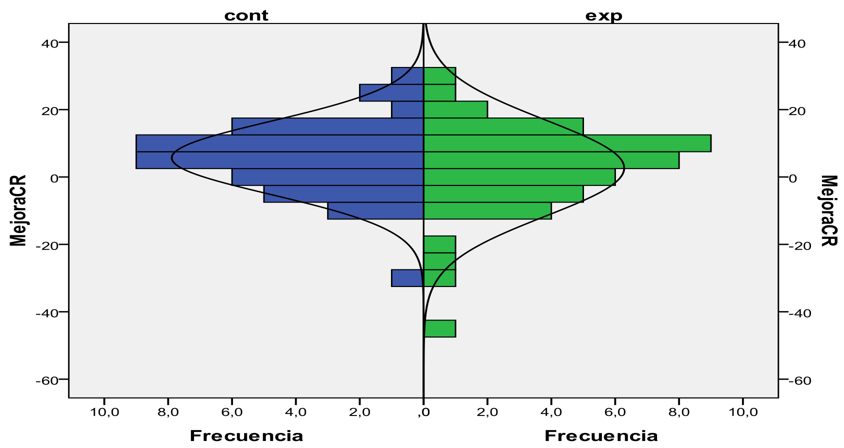
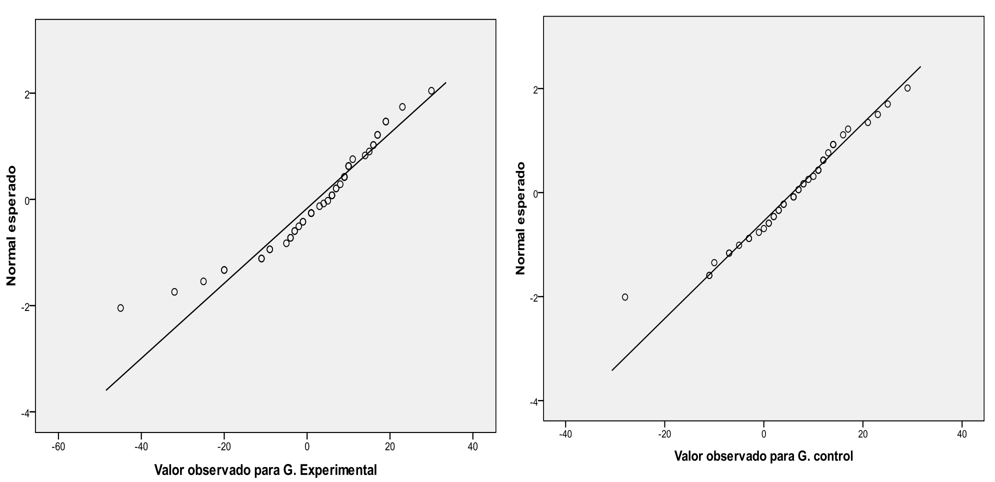


Tabla 6.3.1.4 - Histogramas y ajuste normal para P2

La normalidad descriptiva se puede comprobar observando la linealidad de los gráficos Q-Q y la aleatoriedad de los gráficos Q-Q sin tendencia, como vemos en la tabla 6.3.1.5. En la primera fila tenemos los gráficos normales para el grupo experimental y el grupo control. En la segunda fila se encuentran los gráficos normales sin tendencia de ambos grupos.

Análisis descriptivo de normalidad para P2



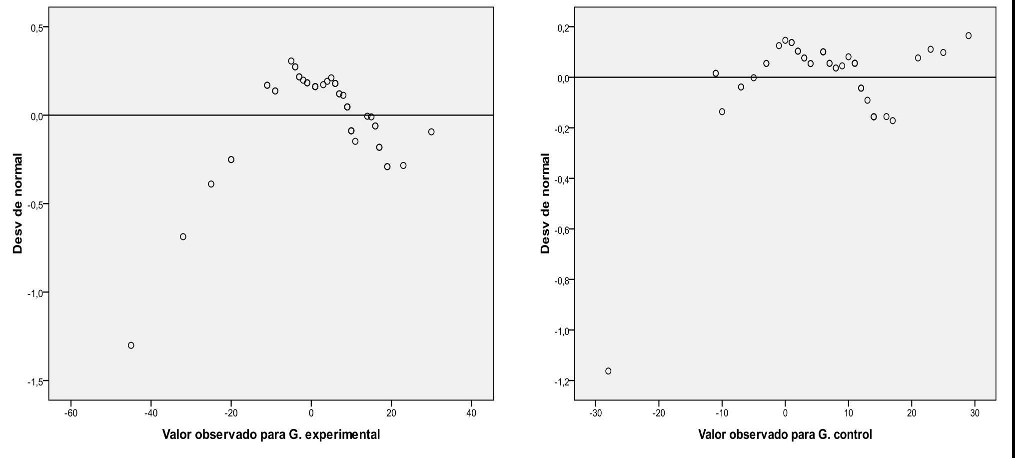


Tabla 6.3.1.5 - Análisis descriptivo de normalidad para P2: gráficos Q-Q normales (arriba) y gráficos Q-Q normales sin tendencia (abajo)

6.3.2 Análisis inferencial para P2

Una vez realizado el análisis descriptivo, hemos apreciado una ligera mejora en el comportamiento del grupo control frente al grupo experimental respecto al problema P2, tenemos que ver ahora hasta qué punto esa mejora es significativa desde el punto de vista estadístico. Para ello vamos a realizar un análisis inferencial.

Si realizamos el ANCOVA a la variable CR, siendo la covariable la medida obtenida en el pretest CR1, vemos que hay diferencias significativas entre los resultados del postest y del pretest (p-valor 0,000< 0,05, en la tabla 6.3.2.1), pero independientemente del grupo (sig = 0,421). Es decir, no han obtenido mejoras significativas en las puntuaciones sobre creencias los alumnos del grupo control respecto de los del grupo experimental.

ANCOVA para la variable Total Creencias CR					
Variable dependiente:Total creencias postest					
Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	6198,426[a]	2	3099,213	20,155	,000
Intersección	701,320	1	701,320	4,561	,036
CR1	6187,484	1	6187,484	40,238	,000
Grupo	100,493	1	100,493	,654	,421
Error	13070,562	85	153,771		
Total	1894785,000	88			
Total corregida	19268,989	87			
a. R cuadrado = ,329 (R cuadrado corregida = ,314)					

Tabla 6.3.2.1 – ANCOVA para la variable Total Creencias

Estadísticos descriptivos para CR			
	experimental/ control	Media	Desviación típica
Total creencias pretest	exp	143,69	10,668
	cont	139,95	11,383
	Total	141,86	11,119
Total creencias postest	exp	146,33	14,419
	cont	145,63	15,515
	Total	145,99	14,882

Tabla 6.3.2.2 – Estadísticos descriptivos de la variable Total Creencias

En el gráfico de perfil vemos que no hay interacción entre ambos grupos (tabla 6.3.2.3).

Gráfico de perfil de Total Creencias

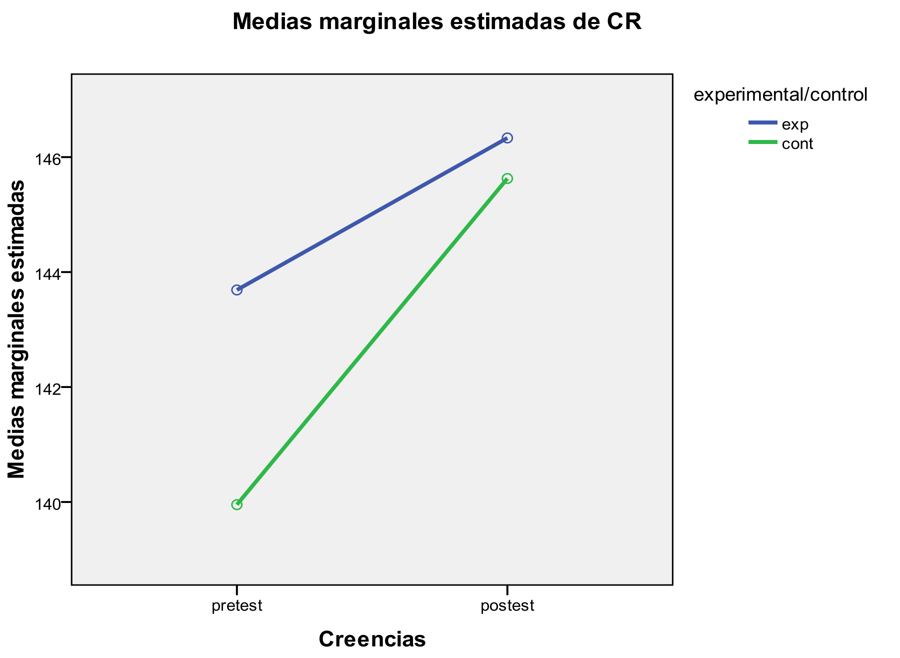


Tabla 6.3.2.3 –Gráfico de perfil de la variable Total Creencias

Este análisis inferencial realizado nos permite aceptar la hipótesis nula H_0: $X_{CC}-X_{EC}=0$, donde X_{CC} y X_{EC} son las medias muestrales de los grupos control y experimental, respectivamente, al realizar la prueba que mide las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza. Por lo tanto, podemos responder negativamente a nuestra pregunta de investigación P2:

Solución al problema P2
El uso de GeoGebra no favorece significativamente el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, con respecto al recurso *lápiz-papel*

6.4 Problema secundario de investigación P3: eficacia de GeoGebra para adquirir las competencias objeto de estudio, según el nivel previo de competencia digital

En el capítulo 4 planteamos un problema secundario en nuestro diseño de investigación, lo llamamos P3: ¿cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado con GeoGebra, el nivel de competencia digital del alumnado? Para dar respuesta a esta pregunta vamos a realizar un estudio descriptivo de los datos obtenidos por el grupo experimental en la prueba de competencias geométricas y didácticas, según su nivel de competencia digital previo. Completaremos este estudio con un análisis inferencial, donde podremos comprobar si las diferencias encontradas son estadísticamente significativas.

6.4.1 Análisis descriptivo para P3

Hemos definido anteriormente la variable Mejora Total, que mide la diferencia entre los resultados de los alumnos en el postest y el pretest en la prueba de competencias geométricas y didácticas (Mejora Total = Mejora CGEO + Mejora CDID). La variable Mejora Total puede tomar valores, en teoría, entre -13 y 13 ya que la puntuación máxima en la prueba de conocimientos geométricos y didácticos es de 13 puntos. En nuestra investigación los valores están entre -2 y 9.

Vamos ahora a analizar esta variable solamente en el grupo experimental y agrupando a los alumnos según su nivel previo de competencia digital. Los alumnos del grupo experimental se clasificaron según su nivel de competencia digital (NCDIG) al comienzo del curso. Para ello se utilizaron los resultados de una prueba inicial de introducción en el manejo de GeoGebra (Práctica 1 descrita en el capítulo5, epígrafe 5.3.2) y sus calificaciones en la asignatura de

TIC para la sociedad digital que habían cursado el año anterior. Se realizó una media ponderada entre las dos puntuaciones, dándole el doble de peso a la nota de la práctica 1, ya que era una actividad específica con GeoGebra. Se obtuvieron así las puntuaciones de cada alumno del grupo experimental, cuyo rango estaba entre 5 y 10 puntos. Esto permitió agrupar a los alumnos en dos niveles según la variable NCDIG: medio (puntuaciones en el intervalo [5,9)) y alto (puntuaciones en el intervalo [9,10)).

		N
Nivel de competencia digital	alto	19
	medio	26

Veamos la tabla de frecuencias y los estadísticos descriptivos de cada grupo:

Frecuencias de la mejora en Competencias Geométricas y Didácticas					
Nivel alto			Nivel Medio		
Mejora	Frec.	%	Mejora	Frec.	%
1,5	1	5,3	-2,0	1	3,8
2,0	3	15,8	,0	1	3,8
2,5	1	5,3	1,0	1	3,8
3,0	5	26,3	2,0	3	11,5
4,0	3	15,8	2,5	1	3,8
5,0	3	15,8	3,0	2	7,7
6,0	2	10,5	3,5	1	3,8
8,0	1	5,3	4,0	8	30,8
Total	19	100,0	4,5	1	3,8
			5,0	3	11,5
			6,0	2	7,7
			9,0	2	7,7
			Total	26	100,0

Tabla 6.4.1.1 - Frecuencias de la mejora Total según NCDIG

Estadísticos Mejora Total			
		Nivel alto	Nivel medio
N	Válidos	19	26
	Perdidos	0	0
Media		3,789	3,788
Mediana		3,000	4,000
Moda		3,0	4,0
Desv. típ.		1,6941	2,3459
Asimetría		,866	,068
Error típ. de asimetría		,524	,456
Curtosis		,492	1,563
Error típ. de curtosis		1,014	,887
Percentiles	25	2,500	2,375
	50	3,000	4,000
	75	5,000	5,000

Tabla 6.4.1.2 – Estadísticos descriptivos para P3

Diagrama de caja para P3

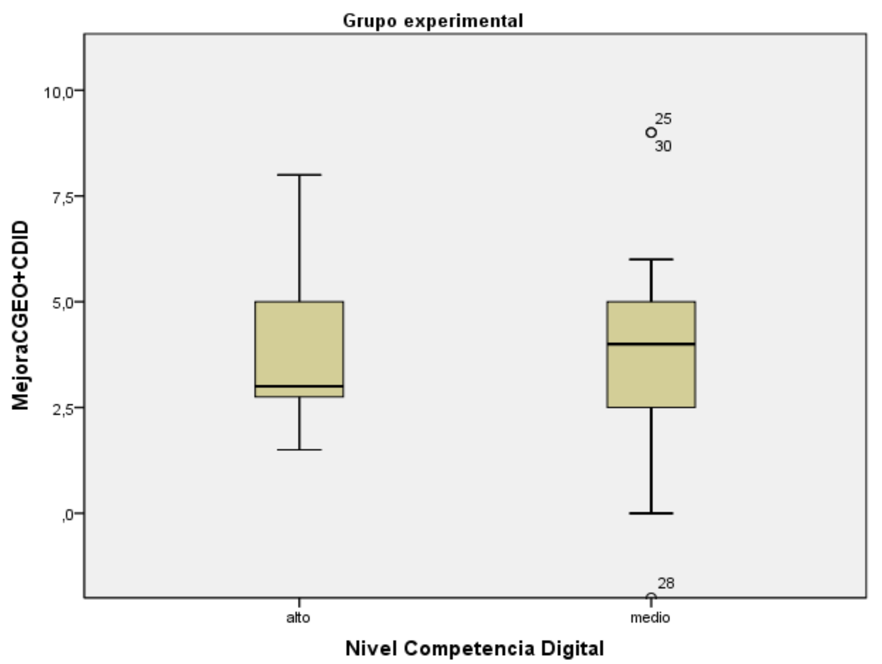


Tabla 6.4.1.3 - Diagramas de caja para P3

Observando estos datos podemos concluir lo siguiente:

- Sólo hay un alumno que empeora en el postest y es del grupo de nivel de CDIG medio (Tabla 6.4.1.1).
- La mejora media de ambos grupos es prácticamente igual: 3,789 el nivel alto y 3,788 el nivel medio (Tabla 6.4.1.2).
- La mediana del grupo de nivel medio es superior en un punto a la del grupo de nivel alto (Tabla 6.4.1.2).
- En los diagramas de caja se observa que los alumnos del grupo de NCDIG medio han mejorado más que los de nivel alto, sobre todo los que se encuentran en el tercer cuartil y 2 alumnos que están fuera del gráfico (Tabla 6.4.1.3).

Histograma y ajuste normal para P3

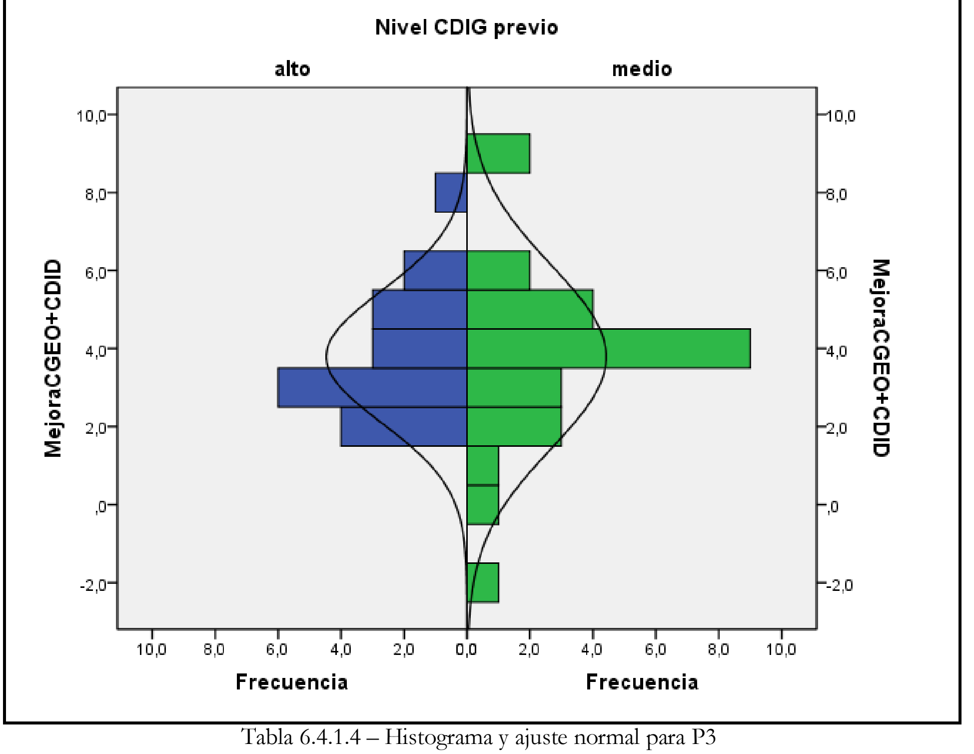
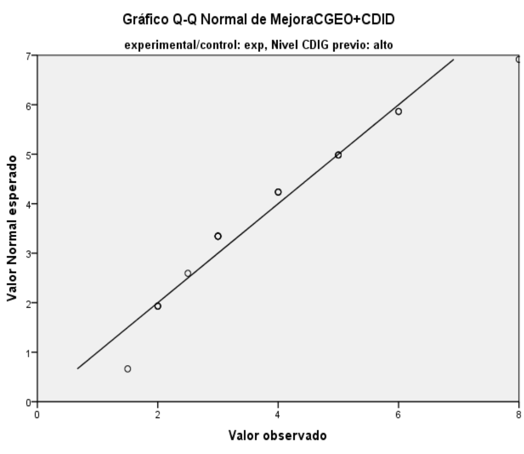
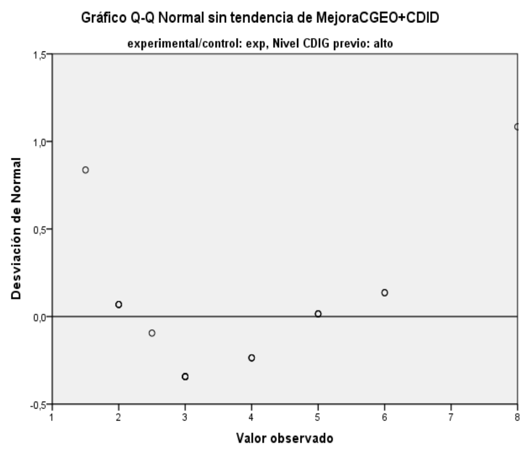


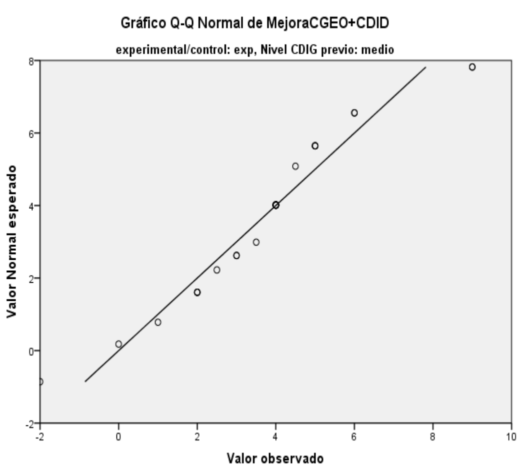
Tabla 6.4.1.4 – Histograma y ajuste normal para P3

La normalidad descriptiva se puede comprobar observando la linealidad de los gráficos Q-Q y la aleatoriedad de los gráficos Q-Q sin tendencia, como vemos en la tabla 6.4.1.5. En la primera fila de la tabla tenemos los gráficos para el grupo con nivel de competencia digital alto y en la segunda fila los del nivel medio.

Análisis descriptivo de normalidad para P3







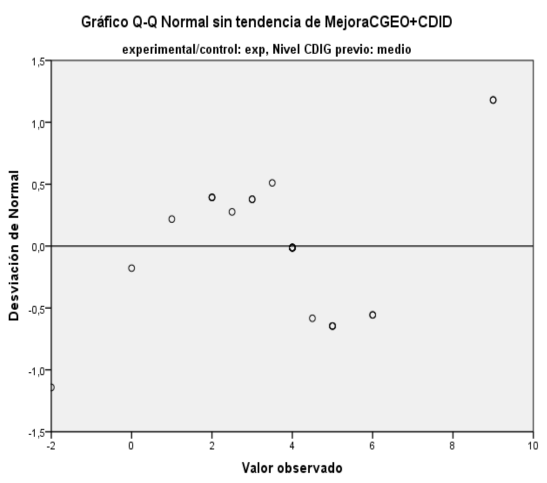


Tabla 6.4.1.5 – Gráficos Q-Q normal para P3 (izquierda) y sin tendencia (derecha).

6.4.2 Análisis inferencial para P3

Una vez que el análisis descriptivo nos ha permitido comprobar un comportamiento del grupo de nivel CDIG medio ligeramente mejor que el del grupo de nivel alto, respecto al problema P3, tenemos que ver ahora hasta qué punto esa mejora es significativa desde el punto de vista estadístico. Para ello vamos a realizar un análisis inferencial.

Como hemos visto en el capítulo 5, para responder al problema de investigación P3, vamos a utilizar en el análisis de los datos el Modelo Lineal General Univariante (ANCOVA). Vamos a analizar la variable Total, que es la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítem de competencias geométricas (CGEO) y los ítem de competencias didácticas (CDID), Total =CGEO+CDID. También se va a realizar el Modelo Lineal General (MLG) de medidas repetidas para comprobar los resultados obtenidos en el ANCOVA. Los gráficos de perfil nos permitirán comparar los dos grupos y analizar si hay interacciones entre ellos.

Analizando la variable Total, obtenemos que hay diferencias significativas entre el pretest (Total 1) y el postest (Total 2), sig = 0.000 en la tabla 6.4.2.1. Sin embargo, no hay diferencias significativas según el nivel de competencia digital previo, NCDIG: alto o medio (sig=0.490 > 0,05).

ANCOVA para la variable TOTAL[b]

Variable dependiente: Puntuación total postest

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	70,144[a]	2	35,072	10,534	,000
Intersección	290,443	1	290,443	87,236	,000
TOTAL1	62,637	1	62,637	18,813	,000
NCDIG	1,611	1	1,611	,484	,490
Error	139,834	42	3,329		
Total	3478,250	45			
Total corregida	209,978	44			

a. R cuadrado = ,334 (R cuadrado corregida = ,302)
b. Grupo experimental

Tabla 6.4.2.1 – ANCOVA para la variable TOTAL

MLG de medidas repetidas para TOTAL[b c]

Efecto		Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Sig.
prepost	Traza de Pillai	,769	143,239[a]	1,000	43,000	,000
	Lambda de Wilks	,231	143,239[a]	1,000	43,000	,000
	Traza de Hotelling	3,331	143,239[a]	1,000	43,000	,000
	Raíz mayor de Roy	3,331	143,239[a]	1,000	43,000	,000
prepost* NCDIG	Traza de Pillai	,000	,000[a]	1,000	43,000	,999
	Lambda de Wilks	1,000	,000[a]	1,000	43,000	,999
	Traza de Hotelling	,000	,000[a]	1,000	43,000	,999
	Raíz mayor de Roy	,000	,000[a]	1,000	43,000	,999

a. Estadístico exacto / b. experimental/control = exp
c. Diseño: Intersección + NCDIG
Diseño intra-sujetos: prepost

Tabla 6.4.2.2 – MLG de medidas repetidas para TOTAL

Estadísticos descriptivos de TOTAL[a]				
	Nivel CDIG previo	Media	Desviación típica	N
Puntuación total pretest	alto	5,211	2,3471	19
	medio	4,385	2,2285	26
	Total	4,733	2,2903	45
Puntuación total postest	alto	9,000	2,1148	19
	medio	8,173	2,2088	26
	Total	8,522	2,1845	45

a. experimental/control = exp

Tabla 6.4.2.3 – Estadísticos descriptivos de TOTAL

Estos datos se corroboran en el MLG de medidas repetidas, donde la variable prepost tiene dos niveles, los resultados de la variable Total en el pretest (Total1) y en el postest (Total2). Vemos en la tabla 6.4.2.2 que se obtienen diferencias significativas entre los valores obtenidos en el postest y el pretest (sig=0,000), pero no hay interacción entre la variable Total y el factor inter-sujetos NCDIG (sig = 0,999 > 0,05).

Si observamos el gráfico de perfil vemos que los dos grupos han obtenido un avance equivalente en los resultados de la prueba de conocimientos geométricos y didácticos, las rectas son prácticamente paralelas. El grupo de nivel medio partía de una media más baja en el pretest y obtiene una media menor que el grupo de nivel alto en el postest. La mejora media es prácticamente idéntica en ambos grupos: 3,78 (ver tablas 6.4.2.3 y 6.4.2.4).

Gráfico de perfil de TOTAL

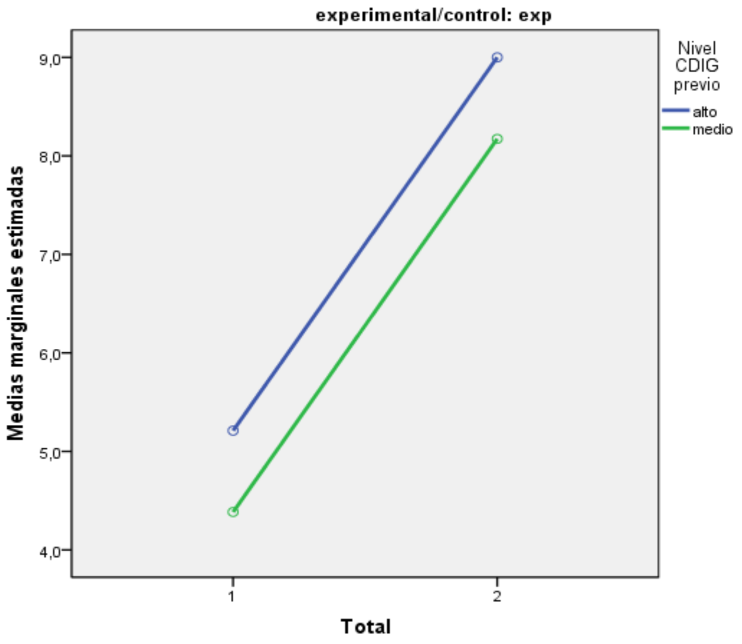


Tabla 6.4.2.4 – Gráfico de perfil de Total

Este análisis inferencial realizado nos permite responder a nuestra pregunta de investigación P3:

Solución al problema P3
El nivel de competencia digital del alumnado no influye significativamente en su desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado por GeoGebra.

6.5 Análisis de la encuesta sobre GeoGebra

Vamos ahora a analizar las respuestas que dieron los alumnos del grupo experimental a la encuesta que se pasó al final del Taller de GeoGebra. Esta encuesta es la misma que se realizó en el taller piloto el curso anterior[1] y queremos ahora comparar los resultados entre el alumnado de ambos talleres. En el grupo piloto contestaron a la encuesta 43 alumnos y en el grupo experimental 49. Recordamos las preguntas incluidas en la encuesta:

Encuesta sobre GeoGebra
En una escala del 1 al 5, donde 1 es "totalmente en desacuerdo", 2 es “parcialmente en desacuerdo”, 3 es “ni en desacuerdo ni de acuerdo”, 4 es “parcialmente de acuerdo” y 5 es "totalmente de acuerdo", por favor valora tu grado de acuerdo con las siguientes afirmaciones. Contesta con sinceridad, gracias. 1. GeoGebra me resulta fácil de usar 2. Prefiero resolver problemas de geometría con lápiz y papel que con GeoGebra 3. GeoGebra me ayuda a entender relaciones entre los objetos geométricos 4. Trabajar con GeoGebra es aburrido 5. Con GeoGebra puedo comprobar conjeturas visualmente con facilidad 6. Creo que GeoGebra no sirve para enseñar geometría en Primaria 7. GeoGebra añade algo a la experiencia de aprendizaje 8. Me resulta más fácil bloquearme con GeoGebra que con lápiz y papel 9. GeoGebra me ayuda a explorar, experimentar y hacer conjeturas 10. Prefiero trabajar en el ordenador solo/a que en pareja 11. Con GeoGebra los estudiantes se interesan y entienden de qué se trata 12. Usando GeoGebra me resulta difícil tomar la iniciativa para resolver problemas nuevos 13. Usar GeoGebra me puede ayudar a mejorar mis conocimientos geométricos 14. Creo que GeoGebra me ayudará a enseñar matemáticas a mis alumnos 15. ¿Tienes algún comentario o sugerencia respecto al taller de GeoGebra?

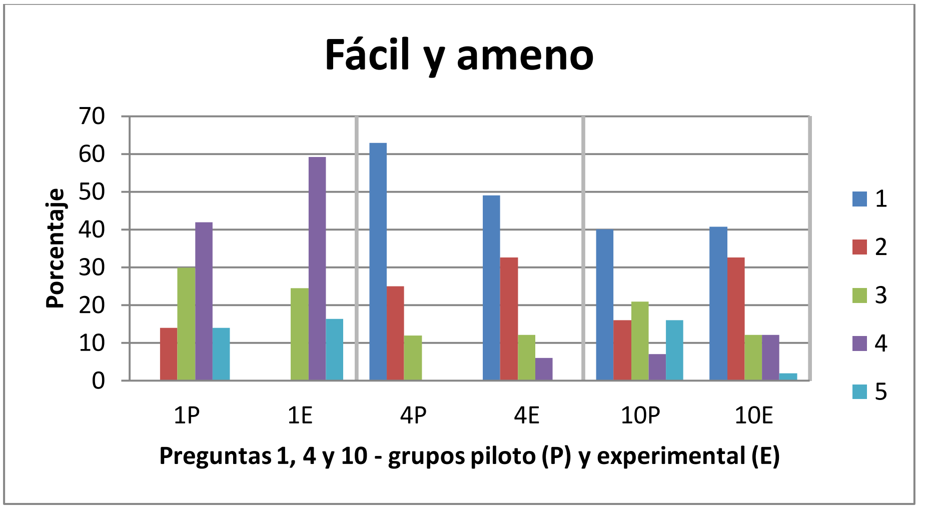
[1] El análisis de la encuesta sobre GeoGebra realizada en el taller piloto está descrito en el epígrafe 5.3.1.3

En la tabla 6.5.1 recogemos los resultados de la encuesta para los dos grupos (Pilo: piloto y Exp: experimental) con la frecuencia de respuesta en cada categoría.

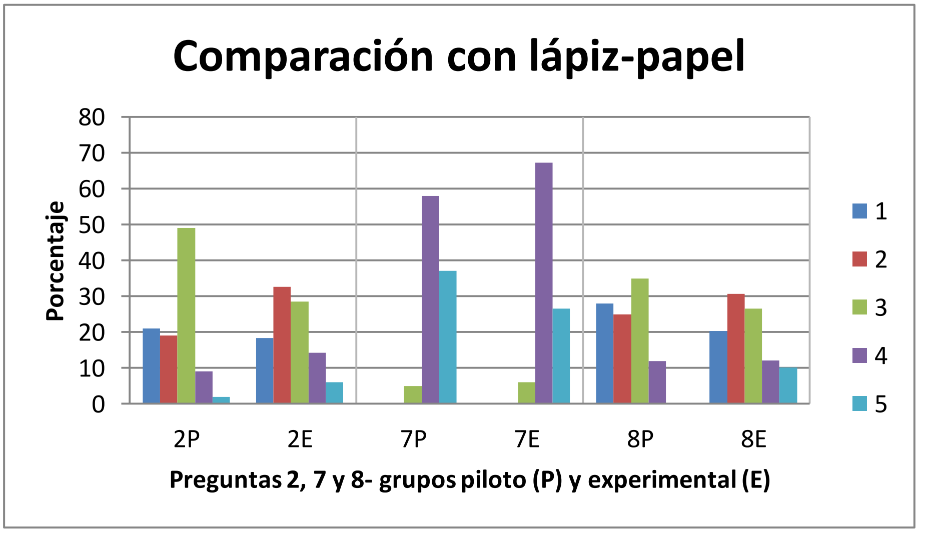
Resultados de la encuesta sobre GeoGebra										
	Frecuencia de cada categoría (grado de acuerdo)									
Nº de pregunta	1		2		3		4		5	
	Pilo	Exp	Pilo	Exp	Pilo	Exp	Pilo	Exp	Pilo	Exp
1	0	0	6	0	13	12	18	29	6	8
2	9	9	8	16	21	14	4	7	1	3
3	0	0	0	2	16	5	16	20	11	22
4	27	24	11	16	5	6	0	3	0	0
5	0	0	0	1	8	3	21	26	14	29
6	21	24	12	16	5	3	3	5	2	1
7	0	0	0	0	2	3	25	33	16	13
8	12	10	11	15	15	13	5	6	0	5
9	0	0	0	1	9	8	22	21	12	19
10	17	20	7	16	9	6	3	6	7	1
11	1	1	0	4	13	8	21	27	8	9
12	8	8	14	21	16	7	5	9	0	4
13	0	1	1	1	7	2	19	32	16	13
14	0	0	1	2	8	7	16	23	18	17

Tabla 6.5.1 – Resultados de la encuesta sobre GeoGebra (grupo piloto y experimental)

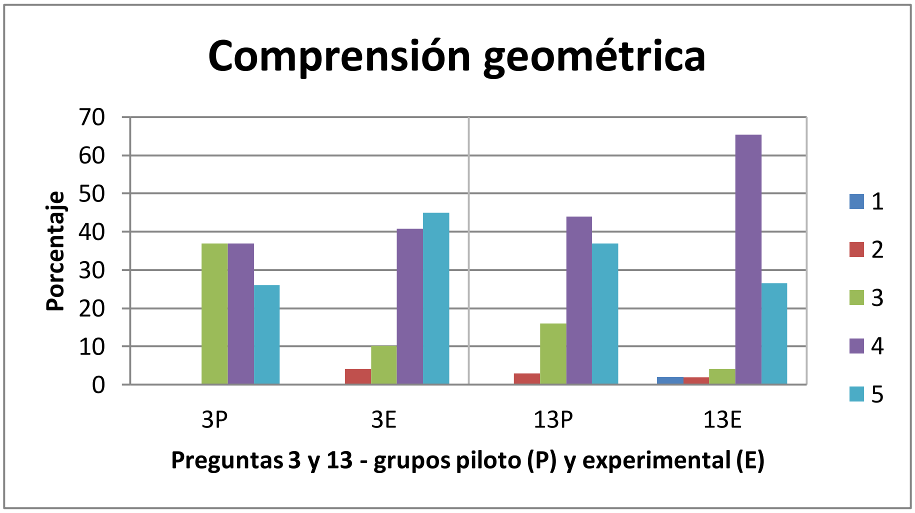
Hemos agrupado en 5 escalas las preguntas de la encuesta para poder representarlas mejor en un gráfico. Las escalas son: fácil y ameno (preguntas 1, 4 y 10), comparación con lápiz-papel (preguntas 2, 7, 8), comprensión geométrica (preguntas 3 y 13), resolución de problemas (preguntas 5, 9, 12) y enseñanza (preguntas 6, 11 y 14). En los gráficos siguientes podemos observar la comparación entre los grupos piloto y experimental de los porcentajes de respuesta en cada una de las modalidades.



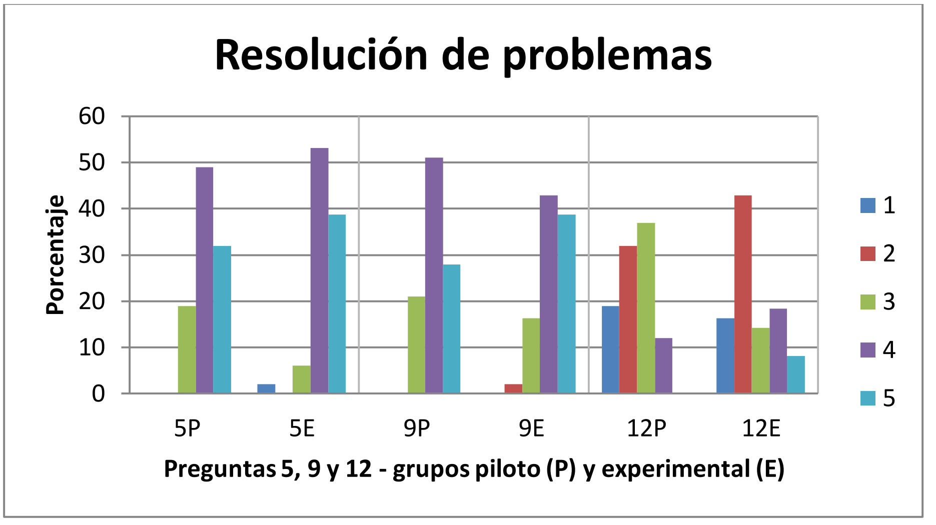
GeoGebra les resulta fácil de usar a 37 alumnos del grupo experimental, más del 75%. En el grupo piloto también el 56% había respondido con 4 o 5 a esta pregunta, pero es significativo que los alumnos que han trabajado más tiempo con el SGD consideren que el software es fácil. Está claro que la duración del taller ha sido positiva para lograr un mejor grado de instrumentalización de los estudiantes. Más del 80% en ambos grupos considera que trabajar con GeoGebra no es aburrido y también se decantan por trabajar en pareja, 73,5 % del grupo experimental frente al 56% del piloto.



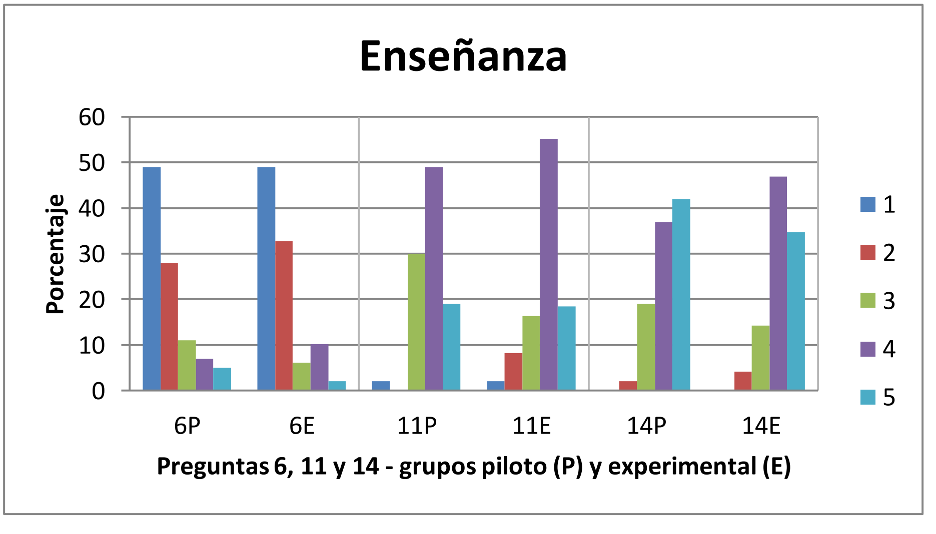
En las preguntas de comparación entre GeoGebra y lápiz- papel encontramos que el grupo piloto prefiere GeoGebra en un 40%, pero un 49% está indeciso y no se pronuncia. Sin embargo el grupo experimental prefiere GeoGebra en un 51% frente al 20% que prefiere lápiz-papel y un 28,6 que no se decantan por uno de los dos recursos. En lo que no hay duda es en que los alumnos de ambos grupos opinan que GeoGebra añade algo a la experiencia de aprendizaje (95% del piloto y 93,8% del experimental). En cuanto a la pregunta 8, más de la mitad de los alumnos de los dos grupos no está de acuerdo en que se bloqueen más con GeoGebra que con lápiz-papel.



Las preguntas que hacen referencia a la comprensión geométrica son mayoritariamente contestadas por ambos grupos a favor de GeoGebra. En el grupo experimental un 85% está de acuerdo con la pregunta 3 y casi el 92% está de acuerdo con la pregunta 13. En el grupo piloto los porcentajes son un poco menores, pero también favorables, 63% de acuerdo con la pregunta 3 y 81% con la 13.



En las preguntas de resolución de problemas vemos que están de acuerdo con las preguntas 5 y 9 unos porcentajes elevadísimos de alumnos, más del 90% en el grupo experimental y en torno al 80% en el grupo piloto. En cuanto a la dificultad de enfrentarse a problemas nuevos, en ambos grupos más de la mitad de los alumnos cree que GeoGebra les ayuda a tomar la iniciativa (51% grupo piloto y 59% grupo experimental).



En la escala de enseñanza vemos que las preguntas 6 y 14, que se refieren a la aplicación de GeoGebra como recurso para Ed. Primaria, tienen respuestas a favor del 78% de los alumnos del grupo piloto y del 81 % del grupo experimental. También un 68% del piloto y un 73% del experimental creen que con GeoGebra los estudiantes se interesan y entienden mejor.

La última pregunta del cuestionario estaba abierta a comentarios o sugerencias. Todos los alumnos que la responden afirman que les ha gustado mucho el Taller y que GeoGebra es una buena herramienta para comprender la geometría. Además recalcan que consideran que es un recurso adecuado y beneficioso para la enseñanza en la etapa de Primaria.

6.6 Resumen y conclusiones de los resultados

- La metodología empleada en esta investigación con los estudiantes integrantes de los grupos experimental y control, ha resultado eficaz para desarrollar sus competencias didáctico-geométricas.
- El grupo experimental, que ha seguido el mismo proceso formativo que el grupo control añadiendo el entorno GeoGebra para la resolución de problemas geométricos, ha obtenido resultados estadísticamente significativos en la mejora de competencias didáctico-geométricas, a pesar de haber utilizado como instrumento de medida una prueba de lápiz y papel.
- En todos los ítems de la prueba de conocimientos didáctico-geométricos, el porcentaje de alumnos del grupo experimental que han mejorado en el postest respecto al pretest es mayor que el porcentaje de alumnos del grupo control.
- Podemos conjeturar que el entorno GeoGebra produce implícitamente una mejora de las competencias didácticas.

- Las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza mejoran en ambos grupos del pretest al postest, pero no podemos explicar esta mejora por el uso de GeoGebra. Se puede pensar que es la metodología didáctica seguida en ambos grupos la responsable del cambio de creencias, pero es una hipótesis que tendríamos que seguir estudiando en posteriores investigaciones.
- La mejora en las competencias didáctico-geométricas de los alumnos del grupo experimental no está influida por su nivel previo de competencia digital. Es decir, GeoGebra es una herramienta útil para el desarrollo de estas competencias en todo tipo de alumnado, incluido el que no tiene grandes conocimientos tecnológicos. Esto puede explicarse por el carácter intuitivo del software y porque la intervención llevada a cabo con él ha sido suficiente para llegar a convertirse en un verdadero instrumento para los alumnos (en el sentido de la teoría de la instrumentación).
- Los alumnos del grupo experimental opinan que el Taller de GeoGebra les ha ayudado a comprender mejor los conocimientos geométricos y a explorar, experimentar, hacer conjeturas y comprobarlas. Prefieren este recurso a la hora de resolver problemas nuevos que el método tradicional de papel y lápiz. Además, opinan que es un buen recurso para la enseñanza de la geometría en Primaria.

Capítulo 7

ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS EN EL ESTUDIO CUALITATIVO

Introducción

En este capítulo analizaremos los datos obtenidos en el estudio de casos realizado a cuatro parejas de alumnos. Los instrumentos de recogida de datos que hemos considerado para realizar el análisis son: el protocolo de construcción de las figuras obtenido del archivo de GeoGebra de cada pareja, el auto-protocolo escrito por cada pareja con el proceso de resolución y las grabaciones de vídeo de cada sesión. Con toda esta información se ha elaborado un registro para cada pareja donde aparecen integrados todos estos elementos.

El análisis se ha realizado bajo una perspectiva interpretativa en la que se han tenido en cuenta diversos aspectos cognitivos y procedimentales. Los resultados se recogen en tablas donde se resumen las técnicas utilizadas, los tipos de arrastre, los obstáculos encontrados, las interacciones entre los miembros de la pareja y de éstos con la profesora y el nivel de propiedad del lenguaje geométrico utilizado en los auto-protocolos escritos. Esta información nos permite estudiar, a partir de la teoría de la instrumentación de Verillon y Rabardel (1995), cómo influye el entorno GeoGebra en la resolución del problema propuesto como prueba y en la construcción de los conocimientos geométricos de las parejas objeto de estudio.

7.1 Análisis del estudio de casos

Vamos a analizar el procedimiento de resolución del problema planteado en el estudio de casos para cada una de las cuatro parejas participantes. En la tabla siguiente recordamos la composición de estas parejas elegidas según su nivel previo de competencia geométrica, CGEO y digital, CDIG. (Ver epígrafe 4.3.2.1 dentro del Capítulo 4).

Nº pareja	Nombres	Nivel CGEO	Nivel CDIG
2	Irene Patricia	Alto = A Medio= M	Alto = A Medio = M
18	Daniel Andrés	Bajo = B Bajo = B	Alto = A Alto = A
22	Macarena Marta	Alto = A Bajo = B	Medio = M Medio = M
25	Lorena Helena	Medio= M Bajo = B	Alto = A Medio= M

Tabla 7.1.1 – Clasificación de las parejas del estudio de casos

Recordamos también el enunciado del problema propuesto que hemos clasificado como actividad de construcción de figuras, conjetura e investigación, utilizando las categorías introducidas en el Capítulo 5.

> 1. Utilizando la herramienta de GeoGebra "polígono regular", construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)? (Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul). Anotad todo lo que vais haciendo con GeoGebra en esta hoja (indicando la herramienta de GeoGebra que utilizáis en cada caso), hasta las construcciones que no sirvan y que habéis borrado.

2. ¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior? Realizad la construcción, anotando todos los pasos que habéis seguido para ello (incluso los que habéis borrado).

Planteamos este problema porque nos interesaba que se pusieran en juego competencias de transferencia de conocimientos ya adquiridos, fundamentalmente para resolver el apartado 1, y generalización, para contestar a la pregunta del apartado 2. Es una actividad complementaria de las tareas TEDS-M que permite evaluar las competencias geométricas en un entorno GeoGebra.

Los instrumentos de recogida de datos que hemos considerado para realizar el análisis son:

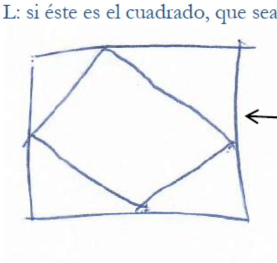
- el protocolo de construcción de las figuras obtenido del archivo de GeoGebra de cada pareja
- el auto-protocolo escrito por cada pareja con las notas de los pasos seguidos en el proceso de resolución, las herramientas de GeoGebra utilizadas y los ensayos realizados (aunque fuesen borrados posteriormente)
- las grabaciones de vídeo de las interacciones entre los dos miembros de cada pareja y entre la pareja y la profesora

Con toda esta información se ha elaborado un registro para cada pareja donde aparecen integrados todos los aspectos recogidos anteriormente, de modo que puede reconstruirse lo más fielmente posible la sesión (véase el Anexo II). En la figura 7.1.2 podemos ver un ejemplo de estos registros.

Sesión estudio de casos. Pareja 25: Helena y Lorena

Helena maneja el ordenador y Lorena lee el enunciado. Empiezan la construcción:
H: ¿polígono regular?
L: Sí, azul
H: vale
L: ¿podéis inscribir dentro de él otro cuadrado rojo? Yo me supongo que será…
H: ¿quieres una hoja?
L: si éste es el cuadrado, que sea así (Lorena hace un dibujo en una hoja de papel)

Comentarios de la investigadora (negro)



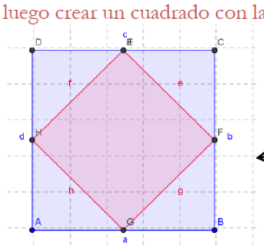
Dibujos realizados por las alumnas en papel

Diálogos entre las estudiantes (azul)

H: yo también lo pienso. Para esto lo que yo hice en una práctica fue hallar los puntos medios de cada lado y…
L: y hacer segmentos
H: y hacer… ¡no!..., claro
L: luego unir segmentos…
H: bueno, no sé si hacer segmentos o hacer también como esto de 4 para que te quede junto, ¿me entiendes?
L: sí, que en vez de hacer segmentos, como tenemos los puntos, hacer un polígono regular
H: claro
L: pues venga, vamos
H: tienes que escribirlo
L: ¿qué pongo?
H: pues pon lo que hemos dicho

Helena va realizando la construcción en silencio, mientras Lorena escribe el auto-protocolo:
1. Para hallar el cuadrado inscrito, vamos a hallar el punto medio de cada lado del cuadrado y luego crear un cuadrado con la herramienta “polígono regular”

Narración de las alumnas del procedimiento de resolución (rojo)



Construcciones de GeoGebra de las estudiantes (imágenes)

Figura 7.1.2 – Fragmento del registro de la pareja 25

Los registros de cada pareja se han analizado pormenorizadamente para detectar y describir los siguientes elementos a lo largo del proceso de resolución del problema planteado:

1. Técnicas utilizadas
2. Tipos de arrastre
3. Obstáculos
4. Interacción entre la pareja
5. Interacción profesora-pareja
6. Lenguaje utilizado en el auto-protocolo

Estos elementos se han recogido en tablas que permiten resumir la sesión desarrollada por cada pareja atendiendo a sus comportamientos en cada uno de los aspectos señalados. A partir de dichas tablas podremos obtener información que nos sirva para profundizar en el proceso de génesis instrumental llevado a cabo en cada caso objeto de estudio, interpretando los resultados mediante los criterios que nos ofrece la teoría de la instrumentación que nos sirve de marco teórico (desarrollada en los epígrafes 3.2 y 3.3 del Capítulo 3).

7.1.1 Análisis de la pareja nº 2[1]

En las siguientes tablas se resume el análisis del registro de la pareja nº 2, que se encuentra completo en el Anexo II. Hemos dividido el proceso de resolución del problema en tres partes para facilitar el análisis de todos los elementos. La primera parte corresponde a la resolución del punto 1 del problema planteado. La segunda y tercera parte resuelven el punto 2: encuentran otra solución al apartado 1 y una solución general, respectivamente.

[1] La pareja nº 2 está formada por I, con un nivel de competencia geométrico y digital alto y por P, con nivel de competencia geométrico y digital medio.

1ª Parte del problema	Utilizando la herramienta de GeoGebra "polígono regular", construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)?
Técnicas	Construyen un c. azul con "polígono regular". Determinan los puntos medios de cada lado y unen esos puntos con "polígono".
Tipos de arrastre	Usan "arrastre de test" con el c. azul cuando terminan la construcción de la figura.
Obstáculos	Dudan si usar "segmento entre dos puntos" o "polígono" para construir el c. rojo.
Interacción pareja	I toma decisiones y maneja el ratón. También precisa términos y termina la explicación de P. P anota en el auto-protocolo y explica el procedimiento a la profesora.
Interacción prof-pareja	La profesora sugiere mejoras al final del proceso y pide que le expliquen el procedimiento seguido.
Lenguaje del auto-protocolo	Hay algunos errores de sintaxis, pero el lenguaje geométrico es adecuado.

Tabla 7.1.1.1- Análisis de la 1ª parte del problema- pareja nº 2

En la primera parte del problema, I no duda en el procedimiento para llegar a la solución: determinar los puntos medios de cada lado del cuadrado azul (figura 7.1.1.2). Está transfiriendo conocimientos ya adquiridos, en concreto en la práctica 8 del Taller de GeoGebra trabajó el teorema de Varignon y estudió como era el cuadrilátero obtenido uniendo los puntos medios de otro cuadrilátero. Un caso particular de este problema era investigar el caso del cuadrado. El único obstáculo encontrado es utilizar la herramienta "segmento" o "polígono" para unir los puntos medios y construir el cuadrado rojo inscrito. Es un obstáculo intrínseco a GeoGebra, con lápiz y papel esta duda no tendría sentido. En cualquier caso, resuelven el asunto con rapidez y no constituye un auténtico problema para ellas.

Al acabar la construcción de la figura usan el "arrastre de test" moviendo los vértices libres del cuadrado azul para comprobar que el problema está resuelto.

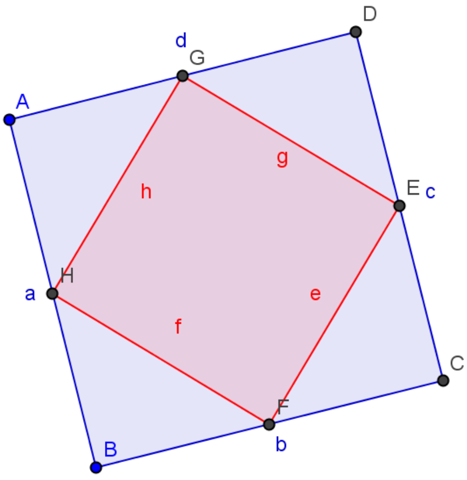


Figura 7.1.1.2- Construcción 1ª parte de la pareja nº 2

En cuanto a las interacciones que se han creado, es evidente que I es quien toma la iniciativa para realizar la construcción: elige el procedimiento, maneja el SGD, precisa términos cuando P está explicando a la profesora los pasos que han seguido y termina el relato que inició P. Su compañera adopta un papel secundario, es ella la que escribe el procedimiento en el auto-protocolo y luego lo lee en alto para que I le dé el visto bueno. La intervención de la profesora se limita a sugerir al final de la construcción que limpien la pantalla de elementos inútiles y a preguntar los pasos que han dado para resolver el problema.

2ª Parte del problema	"Construid otro cuadrado rojo inscrito dentro del cuadrado azul"
Técnicas	Determinan los puntos medios entre los vértices del c. rojo y el c. azul. Unen los 4 puntos con "polígono". Miden lados y ángulos para comprobar que la figura construida es un cuadrado.
Tipos de arrastre	No usan arrastre en esta construcción
Obstáculos	Cierta confusión entre cuadrado y rombo. Al principio sólo miden los lados de la figura. Luego miden también ángulos.
Interacción pareja	P toma la iniciativa. I sigue sus instrucciones y contesta las preguntas de la prof.
Interacción prof-pareja	La profesora pide que comprueben que es un cuadrado. Pregunta si medir los lados es suficiente. Al final pregunta: ¿Habrá más cuadrados inscritos todavía?
Lenguaje auto-protocolo	No describen esta construcción en el auto-protocolo.

Tabla 7.1.1.3- Análisis de la 2ª parte del problema- pareja nº 2

En la segunda parte del problema se hacía la siguiente pregunta: *¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior?* Se pretendía que generalizaran buscando todos los cuadrados que son solución del problema. P toma la iniciativa y repite el procedimiento usado en la primera parte, determinando los puntos medios de la mitad de cada lado del cuadrado azul, luego unen los puntos con la herramienta "polígono" (figura 7.1.1.4). En esta figura no usan ningún tipo de arrastre. La comprobación de que la solución es efectivamente un cuadrado la hacen a petición de la profesora y consiste en medir los cuatro lados del cuadrado rojo. La profesora pregunta: *¿si fuera un rombo, no pasaría eso también?*, lo que les lleva a medir también los ángulos después de algunas dudas sobre las propiedades de cuadrados y rombos. En esta parte I sigue las instrucciones de P, aunque es ella la que contesta a las preguntas de la profesora. El papel de la profesora es más influyente en esta etapa del proceso de resolución, es la que provoca que comprueben la figura y realiza una pregunta fundamental para que no den por resuelto el problema: *Habéis encontrado otro cuadrado, la pregunta es ¿habrá más todavía?*

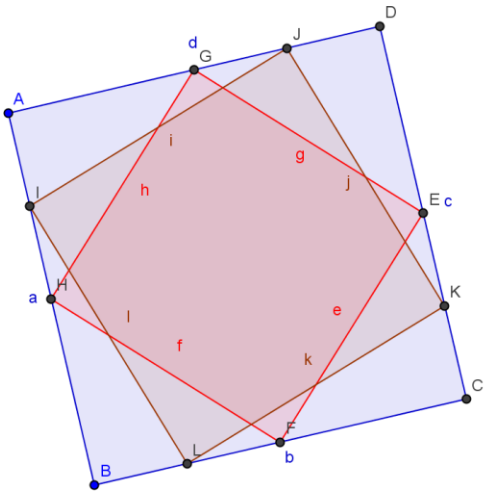


Figura 7.1.1.4- Construcción 2ª parte de la pareja nº 2

3ª Parte del problema	"Generalización de la figura: construid un cuadrado rojo dinámico que esté inscrito en el cuadrado azul"
Técnicas	1) P propone diversas técnicas "sin pensar" 2) construyen un cuadrado colocando 2 vértices en 2 lados del c. azul, pero no está inscrito. 3) intentan utilizar procedimientos utilizados en otros problemas, sin llegar a concretarlos. 4) trazan una diagonal del c. azul y buscan relaciones entre las medidas de triángulos y cuadrados, sin llegar a la solución. 5) determinan el centro del c. azul (intersección diagonales), señalan un punto A_1 en uno de sus lados y su opuesto por el

	centro con “recta que pasa por 2 puntos” e “intersección entre 2 objetos”, trazan la “perpendicular a esa recta por el centro” y con “intersección entre 2 objetos” determinan los 2 vértices que faltaban. Usan “polígono” para unir los 4 vértices.
Tipos de arrastre	2) “arrastre guiado” para inscribir el c. rojo en el azul y “arrastre de test” para comprobar que la figura se mantiene cuando se mueven los vértices del c. azul. “arrastre de test” para comprobar que el c. rojo no permanece inscrito cuando se mueven sus vértices libres. 5) la profesora pide que hagan “arrastre de test” para comprobar que el opuesto a A_1 se mantiene al moverlo.
Obstáculos	1) P quiere hacer libres puntos que son dependientes por construcción. Las alumnas se bloquean y no hacen nada. 2) tienen dificultades en entender a la profesora cuando les pide construir un c. rojo que generalice todas las posiciones posibles. 4) Intuyen que construyendo la diagonal a partir de A_1 podrían encontrar la solución, pero no saben cómo hacerlo.
Interacción pareja	P no entiende la idea de generalizar el c. rojo, I se lo explica. En la etapa 1), I pregunta el propósito de su propuesta a P y ella reconoce no saberlo. En las etapas 2, 3 y 4 las dos intentan encontrar un camino. En 5), I construye la figura y P mira la pantalla en silencio. I dicta a P para escribir el auto-protocolo.
Interacción prof-pareja	2) La prof sugiere usar la construcción para intuir la posible solución. Guía a las alumnas para que generalicen, pregunta ¿cuántos cuadrados hay inscritos en el c. azul? 4) La prof repite varias veces que tienen que construir el c. rojo a partir de un punto en un lado del c. azul teniendo en cuenta las relaciones dentro de un cuadrado. Pregunta a P y guía a la pareja para que tengan en cuenta todas las

	propiedades de la figura. I es quien contesta a sus preguntas. 5) La prof pide que limpien la construcción y anoten el procedimiento teniendo cuidado en los términos elegidos.
Lenguaje auto-protocolo	No anotan todos los intentos realizados, pero el lenguaje es bastante correcto.

Tabla 7.1.1.5- Análisis de la 3ª parte del problema- pareja nº 2

Esta parte es la más complicada para las alumnas. Tardan en comprender qué significa encontrar un cuadrado dinámico que generalice todas las posiciones posibles que son solución del problema. El proceso pasa por cinco fases en las que van probando técnicas distintas, hasta que consiguen realizar la construcción. En las fases 1, 3 y 4 intentan transferir conocimientos geométricos anteriores, sin lograr encontrar un procedimiento que les permita llegar a la solución. La fase 2 resulta productiva porque les hace intuir que hay infinitos cuadrados que son solución del problema, aunque les plantea otra dificultad que es cómo construir un cuadrado general. En esta fase usan "arrastre guiado" y "arrastre de test", ya que la propia naturaleza de la actividad planteada requiere el uso del carácter dinámico de GeoGebra.

La intervención de la profesora en esta parte es fundamental porque seguramente sin las preguntas que va formulando en la fase 4 las alumnas no hubieran llegado a realizar la construcción final. El hecho de que construyan el cuadrado inscrito utilizando como técnica la descrita en la tabla en la fase 5 (figura 7.1.1.6) se debe a la orientación dada por la profesora, ya que podían haber utilizado procedimientos distintos. También es cierto que el uso de la herramienta "refleja objeto por punto", que permite construir el simétrico de un vértice respecto al centro del cuadrado, no la habían utilizado anteriormente por lo que era difícil que se les ocurriera este procedimiento.

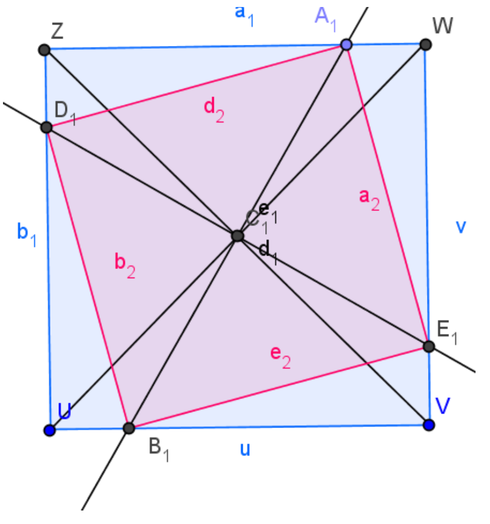


Figura 7.1.1.6- Construcción 3ª parte de la pareja nº 2

Los obstáculos que encuentran son de dos tipos: técnicos y geométricos. P demuestra tener un nivel de instrumentalización menor que I y manifiesta dificultades en el uso de GeoGebra, posiblemente esto fomente el reparto de papeles que se adjudican: I manejar el ratón y P escribir el auto-protocolo. Por otro lado, son patentes los obstáculos geométricos trasladados al software (P. Drijvers, 2003): construcción de las diagonales del cuadrado conocido sólo un vértice, propiedades del cuadrado, etc.

En cuanto a la interacción entre la pareja, podemos decir que la construcción final la realiza I en solitario con la guía de la profesora. También en esta parte el auto-protocolo lo redacta I, que le dicta a P el procedimiento seguido y los intentos infructuosos. P demuestra que generalizar le resulta difícil y se muestra más pasiva que en la segunda parte. Por último hay que indicar que el vocabulario y el lenguaje expresados en el auto-protocolo son correctos y explican claramente el procedimiento que han seguido, aunque no recogen todos los pasos.

7.1.2 Análisis de la pareja nº 18[1]

Vamos a dividir el proceso de resolución del problema planteado en dos partes, coincidentes con las dos preguntas realizadas. Codificaremos la información utilizando tablas análogas a las usadas para la pareja anterior.

1ª Parte del problema	Utilizando la herramienta de GeoGebra "polígono regular", construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)?
Técnicas	Construyen un c. azul con "polígono regular". Determinan los puntos medios de cada lado y unen esos puntos con "polígono".
Tipos de arrastre	Usan "arrastre de test" con el c. azul cuando terminan la construcción de la figura incitados por la profesora.
Obstáculos	Confunden cuadrado con rombo al visualizar el cuadrado apoyado sobre uno de sus vértices. Dudan en la herramienta para construir los puntos medios.
Interacción pareja	Tanto D como A manejan el ratón y anotan en el auto-protocolo. También se ayudan en las explicaciones. Ninguno lleva la voz cantante.
Interacción prof-pareja	La profesora pide que le expliquen el procedimiento seguido y pregunta si han comprobado la construcción. También pregunta si los puntos medios construidos son fijos.
Lenguaje del auto-protocolo	Hay algunos errores de sintaxis, pero el lenguaje geométrico es adecuado. Explican todos los pasos seguidos.

Tabla 7.1.2.1 – Análisis de la 1ª parte del problema- pareja nº 18

[1] La pareja 18 está formada por D y A, ambos con nivel de competencia geométrica bajo y nivel de competencia digital alto.

Vemos que la pareja 18 también sigue el mismo procedimiento que la pareja nº 2 para responder a la primera pregunta: construir el cuadrado rojo sobre los puntos medios del cuadrado azul. La transferencia de los conocimientos adquiridos en el Taller de GeoGebra al resolver la práctica 8 (teorema de Varignon) es probablemente la razón. Encontramos dos obstáculos en esta fase del problema: primero, repiten reiteradamente que la solución será "como un rombo", aludiendo a un cuadrado cuya posición en su construcción les recuerda la posición típica que suelen presentar los rombos (apoyado sobre uno de sus vértices). Segundo, dudan en la herramienta de GeoGebra que pueden utilizar para construir los puntos medios de los lados del cuadrado azul. Este obstáculo es muy común en entornos SGD, porque a la hora de determinar puntos la primera opción suele ser la herramienta "punto" y clicar sobre la posición que suponen que debe ocupar. El primer obstáculo es geométrico, de origen didáctico, y el segundo es técnico. Al acabar la construcción de la figura usan el "arrastre de test", ante la pregunta de la profesora (dicen que estaban a punto de hacerlo).

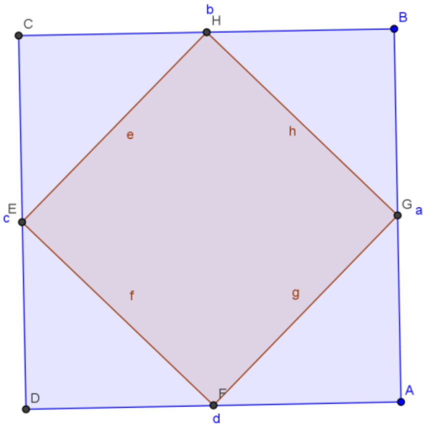


Figura 7.1.2.2- Construcción 1ª parte de la pareja nº 18

Los dos alumnos colaboran a partes iguales en la resolución de esta parte del problema, tanto para manejar el software como en las explicaciones verbales y escritas. Es habitual que no acaben las frases, parece que los dos saben lo que el otro iba a decir. Hay una conexión total entre ellos. La profesora interviene al final del proceso para preguntar cómo lo han hecho. Además pregunta si han realizado la comprobación de la construcción y si los puntos medios son fijos, provocando en ambos casos que los alumnos utilicen el arrastre de test para contestar a sus preguntas.

2ª Parte del problema	"¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul?"
Técnicas	1) Trazan las diagonales del c. rojo y creen que los 4 cuadrados que se forman dentro del c. azul son soluciones. 2) Intentan construir otro cuadrado trazando paralelas y perpendiculares a partir del c. rojo de la primera parte, pero no llegan a nada. 3) Superponen un cuadrado sobre el c. azul para investigar las posibles soluciones mediante arrastre guiado. 4) Construyen un cuadrilátero con un vértice en un pto sobre uno de los lados del c. azul y los otros 3 vértices los ptos medios de los otros lados del c. azul. Se dan cuenta de que no es un cuadrado. 5) Determinan el centro de un cuadrado como la intersección de los segmentos que unen los puntos medios de sus lados. Construyen una diagonal usando "semirrecta que pasa por un punto libre y por el centro del cuadrado", así determinan dos vértices del c. rojo general. 6) Intentan determinar los otros dos vértices midiendo distancias pero no consiguen nada. 7) Consiguen darse cuenta, con la ayuda de la profesora, de que la construcción de una perpendicular a la diagonal trazada que pase por el centro les permite determinar los dos vértices

	buscados. Usan “polígono” para unir los 4 vértices.
Tipos de arrastre	Usan arrastre de test varias veces en distintas fases, para comprobar que se mantienen las construcciones. 3) Usan arrastre guiado para investigar sobre la existencia de “varios” cuadrados que pueden ser solución del problema.
Obstáculos	2) y 3) Cierta confusión entre cuadrado y rombo, asociada a la posición. Parece que es una confusión de términos más que de conceptos. 7) Tienen dificultades en el uso de algunas herramientas de GeoGebra, como perpendicular, aunque logran resolverlas. Tienen problemas de comunicación porque usan las palabras perpendicular y paralela indistintamente, como reconocen al final del proceso ellos mismos.
Interacción pareja	Siguen interactuando los dos a partes iguales. Ambos manejan el ratón, deciden los procedimientos, contestan a la profesora y completan el auto-protocolo escrito.
Interacción prof-pareja	En 1), 2) y 3) la profesora les explica varias veces qué significa que el c. rojo esté inscrito en el c. azul. 3) La profesora les incita a usar “arrastre guiado” para visualizar las posibles soluciones. Cuando lo han visto les propone construir un c. rojo general que se mueva por cada lado del c. azul 5) y 7) La profesora guía a la pareja mediante las preguntas que formula. Su intervención es determinante para que lleguen a la solución final. En la fase 6) vuelven a bloquearse en el proceso y sus preguntas les reorientan.
Lenguaje auto-protocolo	El lenguaje utilizado no es muy claro, sobre todo al explicar los pasos que no les han servido para resolver el problema.

Tabla 7.1.2.3 – Análisis de la 2ª parte del problema- Pareja nº 18

La segunda parte del problema también ofrece muchas más dificultades a la pareja 18, como ocurrió con la pareja nº 2. El proceso de resolución se desarrolla a lo largo de 7 fases descritas en la tabla anterior en la fila denominada técnicas. Los estudiantes tardan en comprender qué tipo de cuadrados pueden considerarse solución del problema, porque se olvidan de que deben estar inscritos en el cuadrado azul. Así en la fase 1 creen haber encontrado una solución al trazar los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrado azul, quedando el cuadrado dividido en otros 4 cuadrados más pequeños, pero que no están inscritos (ver figura 7.1.2.4). Igual que en la pareja 2, los alumnos utilizan "arrastre guiado" en la fase 3, orientados por la profesora, para intuir que hay "varios cuadrados" que pueden ser solución del problema (cuadrado verde en la figura 7.1.2.4). En la fase 4 intentan construir el cuadrado general manteniendo 3 de sus vértices en los puntos medios de los lados del cuadrado azul y se dan cuenta de que la solución no es un cuadrado (cuadrilátero marrón en la figura 7.1.2.4). Puede decirse que sin la ayuda de la profesora hubiera sido difícil que esta pareja llegara a resolver el problema, ya que en los momentos en que no han contado con su orientación han tenido dificultades en seguir el proceso que parecía ya claro, como en la fase 6.

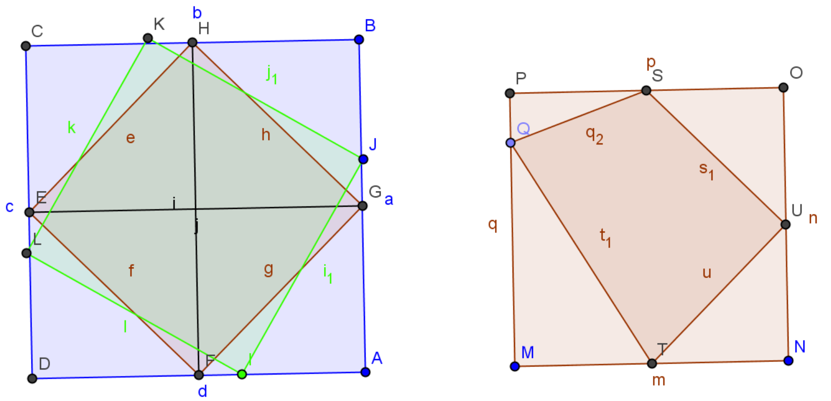


Figura 7.1.2.4 – Construcciones de las fases 1, 2, 3 y 4 de la 2ª parte del problema- Pareja nº 18

Los obstáculos que encuentra esta pareja son casi siempre de origen geométrico, incluyendo dificultades en el uso apropiado del vocabulario. Como a la pareja 2, les cuesta encontrar el procedimiento para determinar los 4 vértices de un cuadrado una vez que conocen dos de ellos, opuestos entre sí. Este obstáculo lo trasladan al software. La interacción entre los dos miembros de la pareja es muy equitativa, ambos desempeñan las distintas funciones cambiando de papeles con fluidez. Posiblemente esto es debido a que es una pareja homogénea con el mismo nivel de competencia geométrica y digital, además se nota que están muy compenetrados.

Por último hay que indicar que el lenguaje expresado en el auto-protocolo es poco claro en algunos momentos, sobre todo cuando explican procedimientos que no les han llevado a la solución deseada, aunque si están bien indicadas las herramientas de GeoGebra utilizadas. En sus conversaciones también son poco precisos y suelen usar términos erróneos (rombo en lugar de cuadrado, perpendicular, paralela), aunque parecen entenderse bien entre ellos si se aprecian problemas de comunicación con la profesora.

7.1.3 Análisis de la pareja nº 22[1]

Vamos a dividir el proceso de resolución del problema planteado en dos partes, coincidentes con las dos preguntas realizadas. Codificaremos la información utilizando tablas análogas a las usadas para las parejas anteriores.

---

[1] Esta pareja está compuesta por Mac con nivel de CGEO alto y nivel de CDIG medio y Mar con nivel de CGEO bajo y nivel de CDIG medio.

1ª Parte del problema	Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono regular”, construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)?
Técnicas	Construyen un c. azul con “polígono regular”. Determinan los puntos medios de cada lado y unen esos puntos con “segmento”. Se dan cuenta que no pueden colorear de rojo el cuadrado así formado y usan “polígono” para unir los vértices.
Tipos de arrastre	No usan ningún tipo de arrastre.
Obstáculos	Mac tiene dificultades para cambiar el color del cuadrado. Mar le ayuda a resolverlas. Problemas en la construcción del c. rojo, al usar la herramienta “segmento” no pueden cambiar el color. Se dan cuenta de que tienen que usar “polígono”.
Interacción pareja	Mac maneja el ratón, pero cuando tiene dudas Mar las resuelve realizando ella la construcción. Mar escribe en el auto-protocolo lo que le dicta Mac. Mac contesta a la profesora y Mar puntualiza las herramientas utilizadas.
Interacción prof-pareja	La profesora pide que le expliquen el procedimiento seguido al final del proceso.
Lenguaje del auto-protocolo	El lenguaje geométrico es adecuado. Explican todos los pasos seguidos y las herramientas utilizadas.

Tabla 7.1.3.1 – Análisis de la 1ª parte del problema- pareja nº 22

La pareja 22 sigue el mismo procedimiento que las parejas anteriores para responder a la primera pregunta: construir el cuadrado rojo sobre los puntos medios de cada lado del cuadrado azul. Ninguna de las parejas ha dudado ni un segundo al elegir este procedimiento. Claramente intuyen que el cuadrilátero resultante de esta construcción será también un cuadrado. Los obstáculos encontrados son de tipo técnico, Mac parece estar poco familiarizada con el SGD y no sabe cambiar el color de las figuras, pero su compañera resuelve rápidamente este problema realizando ella esos cambios. El obstáculo mayor lo encuentran en la construcción del cuadrado rojo. Primero utilizan la herramienta "segmento" y eso les impide el cambio de color del cuadrado, tardan un poco en darse cuenta de que si usan la herramienta "polígono" se resuelve el problema. Este obstáculo también lo tuvo la pareja nº 2 y es un obstáculo propio de GeoGebra.

Esta pareja no utiliza en la primera parte del problema ningún tipo de arrastre. La profesora tampoco se lo sugiere, como hizo con la pareja 18. La interacción entre las dos alumnas es buena, aunque se reparten en un primer momento los papeles, Mac maneja el ratón y Mar escribe el auto-protocolo, en varios momentos cambian estos roles. Se puede decir que se aprecia un mayor dominio del instrumento GeoGebra por parte de Mar, que ayuda reiteradamente a su compañera cuando tiene problemas. La profesora se limita a preguntarles al final del proceso cómo han realizado la construcción. El lenguaje utilizado en el auto-protocolo es correcto y usan el vocabulario geométrico adecuado. Explican paso a paso el proceso de resolución y cada una de las herramientas utilizadas, aunque no hayan sido adecuadas.

2ª Parte del problema	"¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul?"
Técnicas	1) Intentan transferir conocimientos anteriores (geoplanos) y visualizar otros cuadrados sin usar ninguna herramienta GeoG. No llegan a nada 2) Empiezan a usar GeoGebra, usan "polígono regular" pero no saben determinar 2 vértices que no sean los ptos medios. Usan otras herramientas que no especifican pero no consiguen cuadrados inscritos. 3) Superponen un cuadrado sobre el c. azul para investigar las posibles soluciones mediante arrastre guiado. Construyen 2

	cuadrados inscritos con esta técnica. 4) Intentan construir un cuadrado inscrito general usando conocimientos anteriores (objeto auxiliar, práctica 7- h) pero no lo consiguen. 5) Usan "ángulo dada su amplitud=90º" y trazan la bisectriz para construir 2 vértices opuestos, pero como la diagonal no pasa por el centro no obtienen un cuadrado. 6) Determinan el centro de un cuadrado como el pto medio de una de sus diagonales. Usan "perpendicular a la diagonal que pasa por el centro" para determinar la otra diagonal. Con "intersección entre dos objetos" determinan los otros 2 vértices del cuadrado inscrito. Unen los 4 vértices con "polígono".
Tipos de arrastre	Usan arrastre de test varias veces en distintas fases, para comprobar que se mantienen las construcciones. 3) Usan arrastre guiado para obligar a que dos cuadrados estén inscritos en el c. azul.
Obstáculos	Tienen dificultades en el uso de algunas herramientas de GeoGebra, sobre todo Mac, aunque logran resolverlas. En varios momentos se muestran bloqueadas, aunque acaban de darse cuenta de propiedades que podrían utilizar no saben cómo hacerlo.
Interacción pareja	Mac maneja el software y es más activa en tomar decisiones y responder a la profesora. Mar participa siempre, pero en un papel secundario. Ella escribe en el auto-protocolo lo que le dicta Mac.
Interacción prof-pareja	En 1) y 2) la profesora les explica varias veces qué significa que el c. rojo esté inscrito en el c. azul. 2) La profesora les propone construir un cuadrado y obligarle a que esté inscrito en el c. azul para que vean qué posiciones podría ocupar.

	3) Cuando lo han visto les propone construir un c. rojo general que se mueva por cada lado del c. azul 4) La prof insiste en cómo tiene que ser el c. inscrito y les sugiere que piensen en las relaciones entre sus elementos. Les va guiando hasta que se dan cuenta de que la diagonal que une vértices opuestos pasa por el centro. 5) La prof examina la figura que han construido hasta darse cuenta del fallo: la diagonal no pasa por el centro. 6) La prof va guiando la parte final del proceso de construcción. Pregunta en cada paso y rectifica los errores que van cometiendo las alumnas.
Lenguaje auto-protocolo	En el protocolo escrito recogen los pasos dados a partir de la fase 3, olvidan lo anterior. El lenguaje es bastante correcto aunque no utilizan el vocabulario más apropiado en cada momento. Si van diciendo las herramientas usadas.

Tabla 7.1.3.2 – Análisis de la 2ª parte del problema- Pareja nº 22

El proceso de resolución se desarrolla en esta pareja a lo largo de 6 fases. Vemos que han tenido muchas dificultades en llegar a la solución, como las dos parejas ya analizadas. Esta pareja comienza intentando transferir conocimientos adquiridos en otros problemas ya resueltos, con GeoGebra y con otros materiales didácticos como geoplanos. Estos intentos no obtienen frutos y necesitan retomar el problema con ayuda de la profesora. En la fase 3 construyen dos cuadrados inscritos por superposición y usan "arrastre guiado" para colocarlos adecuadamente (ver figura 7.1.3.3). Es curioso que para ver las distintas posiciones que puede ocupar el cuadrado inscrito construyen un segundo cuadrado en lugar de mover de posición el primero. Esto indica que no tienen interiorizado bastante bien el dinamismo de GeoGebra. En la fase 4 vuelven a perderse intentando transferir procedimientos utilizados en otros problemas. En la fase 5 hacen una construcción errónea porque olvidan construir la diagonal a través del centro del cuadrado y la figura que obtienen no es un cuadrado siempre. Necesitan la orientación de la profesora para ir realizando paso a paso, en la fase 6, las construcciones que les permiten resolver el caso general. Podemos decir que la "orquestación" de la profesora es determinante para que realicen este proceso de resolución. Las técnicas utilizadas en las fases 3 y 6 son una consecuencia de las preguntas realizadas por la profesora y del diálogo establecido entre ella y la pareja.

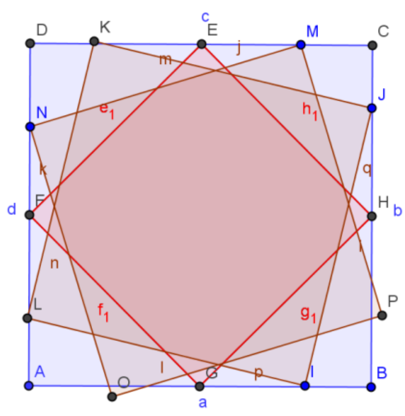


Figura 7.1.3.3 – Construcción de la fase 3 – 2ª parte del problema- pareja nº 22

Los obstáculos que encuentra esta pareja son fundamentalmente de origen geométrico. Aunque son capaces de observar relaciones entre las figuras, no utilizan esas relaciones para resolver el problema. Parecen buscar en procedimientos anteriores los recursos necesarios para llegar a la solución. También usan inapropiadamente en algunos casos el vocabulario geométrico, aunque son conscientes de ello y no parece que eso les dificulte la comunicación. Pero puede que ese uso inadecuado de algunos términos les lleve a cometer errores en la elección de la herramienta de GeoGebra: por ejemplo, usan "bisectriz" para trazar la primera diagonal del cuadrado porque la llaman así y, aunque esto podría permitirse ya que en el cuadrado coinciden ambas, sin embargo para la construcción de la diagonal hay que usar otra herramienta como "recta que pasa por 2 puntos" o "semirrecta" ya que no conocemos todavía el ángulo del cuadrado ni tres vértices consecutivos.

En esta pareja hay un reparto claro de los papeles en todo el proceso. Mac parece llevar la voz cantante en la toma de las decisiones, ella maneja el ratón y dicta el texto del auto-protocolo. También es condescendiente en algunos momentos en los comentarios que dedica a su compañera. Mar se limita a acompañar el proceso y a resolver los problemas técnicos que encuentra Mac, sobre todo en la primera parte del problema. Es notorio el comentario que realizan al final de la sesión cuando reconocen que les ha costado mucho llegar a la solución final (Mar pensaba que no iban a conseguirlo) y que GeoGebra les ha facilitado la labor.

7.1.4 Análisis de la pareja nº 25[1]

Vamos a dividir el proceso de resolución de la prueba propuesta en tres partes, debido a su complejidad y duración, como hicimos con la pareja 2. Utilizaremos las mismas tablas que en el análisis del resto de parejas para estudiar las técnicas, tipos de arrastre, obstáculos, interacciones y lenguaje usados por H y L para resolver el problema.

---

[1] La pareja nº 25 está compuesta por L, con nivel de competencia geométrico medio y nivel de competencia digital alto, y H, con el primero bajo y el segundo medio.

1ª Parte del problema	Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono regular”, construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)?
Técnicas	Construyen un c. azul con “polígono regular”. Determinan los puntos medios de cada lado y unen esos puntos con “polígono regular”.
Tipos de arrastre	No usan ningún tipo de arrastre.
Obstáculos	L propone unir los ptos medios con la herramienta “segmento” pero H se da cuenta de que tiene que usar “polígono regular”.
Interacción pareja	H maneja el ratón y L realiza un dibujo en papel y escribe en el auto-protocolo. El proceso de resolución es rápido y lo hacen conjuntamente.
Interacción prof-pareja	La profesora no interviene en esta parte, sólo confirma que han encontrado una solución.
Lenguaje del auto-protocolo	El lenguaje geométrico escrito es adecuado y conciso. En el intercambio oral parece que L utiliza con más propiedad el lenguaje que H.

Tabla 7.1.4.1 – Análisis de la 1ª parte del problema- pareja nº 25

La pareja 25 también usa la técnica de determinar los puntos medios de cada lado del cuadrado azul para que sean los vértices del cuadrado rojo inscrito. Su originalidad, respecto a los otros casos de estudio, es que antes de construir el cuadrado rojo con GeoGebra, utiliza lápiz y papel para dibujar la posible solución. Parece que L necesita apoyarse en los dibujos, probablemente está muy acostumbrada a hacerlo y para ella es lo más natural. Además, esta pareja elige una herramienta diferente de las otras para unir los puntos medios y construir el cuadrado rojo: en lugar de utilizar “polígono” usan “polígono regular”. Prácticamente no encuentran obstáculos en esta parte del problema, solamente se puede señalar la ligera discrepancia que surge en la herramienta a utilizar para unir los puntos. L propone primero usar “segmento”, pero H enseguida determina que es mejor usar “polígono regular” y no se plantea ningún problema.

La pareja 25 no usa ninguna modalidad de arrastre en esta parte, ni comprueba la solución al final del proceso. Esto puede explicarse porque al construir el cuadrado con “polígono regular” es evidente que es un auténtico cuadrado y no necesita comprobación. La interacción entre las alumnas es adecuada, colaboran en todo momento aunque se han repartido los papeles de quien maneja el ratón y quien escribe o dibuja. Parece que L presenta un mayor dominio del lenguaje geométrico que H, aunque es esta última la que escribe en el auto-protocolo y lo hace con mucha corrección. La profesora no interviene en todo el proceso, sólo comprueba al finalizar que han encontrado una solución. No les pide que comprueben nada ni que usen “arrastre de test”, tampoco les pide que le cuenten el procedimiento que han seguido.

2ª Parte del problema	“¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul?”
Técnicas	1) Intentan transferir conocimientos anteriores (geoplanos) dibujando, sin usar ninguna herramienta GeoG. Se dan cuenta que los cuadrados no están inscritos en el azul. 2) Empiezan a usar GeoGebra, usan “polígono regular” sobre 2 puntos de 2 lados del c. azul y mediante “arrastre guiado” inscriben los 2 cuadrados dentro del azul. Ven que no están siempre inscritos. 3) Determinan 2 puntos en 2 lados del c. azul y mediante “segmento entre 2 ptos” construyen un cuadrado. Se dan cuenta de que no sirve y deciden usar “polígono regular”. La profesora les hace ver que no están inscritos.

	4) Construyen muchos cuadrados determinando ptos medios en la mitad de 3 de los lados del c. azul, recordando el "geoplano". La profesora les indica que no están inscritos. 5) Vuelven a explorar usando "arrastre guiado" qué posiciones puede ocupar un cuadrado "realmente inscrito" y se dan cuenta de que hay infinitas posiciones.
Tipos de arrastre	Usan arrastre de test para comprobar las construcciones en todas las fases de esta segunda parte del problema. Usan "arrastre guiado" para situar los cuadrados inscritos en el c. azul en la fase 2 y en la 5, para explorar todas las posiciones que pueden ocupar.
Obstáculos	L sigue utilizando el papel para dibujar sus conjeturas. En 3) y 4) se olvidan de que las figuras construidas deben estar inscritas en el c. azul.
Interacción pareja	H maneja el software y L escribe en el auto-protocolo y dibuja, también parece llevar la iniciativa a la hora de decidir qué procedimiento utilizar en la resolución (fase 4).
Interacción prof-pareja	En 1) la profesora les explica qué significa que el c. rojo esté inscrito en el c. azul. Les aconseja que usen GeoGebra mejor que lápiz y papel, aunque pueden hacerlo. No interviene hasta el final de la fase 4 cuando les dice que las soluciones que han encontrado no son cuadrados inscritos y les pide que investiguen usando "arrastre guiado" 5) La profesora pregunta cuántos cuadrados inscritos pueden construirse y pide que hagan uno que sea un caso general.
Lenguaje auto-protocolo	El lenguaje es muy breve y conciso. En general es correcto, aunque no es suficientemente claro en la fase 4. Se olvidan de algunas herramientas utilizadas. Su lenguaje oral es bastante correcto, no usan términos erróneos habitualmente.

Tabla 7.1.4.2 – Análisis de la 2ª parte del problema- Pareja nº 25

En esta segunda parte del proceso de resolución la pareja 25 desarrolla varias técnicas por iniciativa propia. La intervención de la profesora se reduce a la explicación inicial, para que entiendan la pregunta, y a la parte final cuando les hace ver que las soluciones que han encontrado no son cuadrados inscritos en el cuadrado azul. Una de las alumnas, L, intenta en dos ocasiones transferir procedimientos realizados con otros materiales didácticos, geoplanos en este caso. En la fase 1) dibuja la construcción que pretende realizar y su compañera duda de si los cuadrados están inscritos, con lo que abandonan la idea. Pero luego, en la fase 4) vuelve a retomar la misma construcción con GeoGebra y ahora parece que ninguna de las dos cuestiona la validez de esta solución (figura 7.1.4.3).

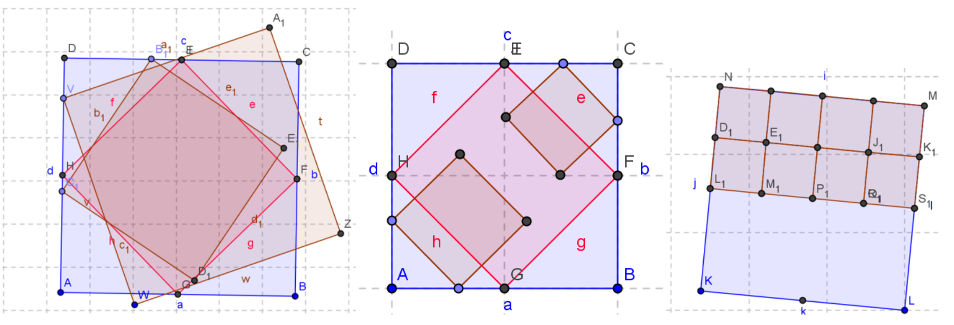


Figura7.1.4.3 – Fases 2, 3 y 4 - 2ª parte del problema - pareja nº 25

Sin embargo, si se dan cuenta de que los cuadrados no se mantienen inscritos mediante arrastre en la fase 2, cuando usan "arrastre guiado" para inscribir varios cuadrados dentro del azul. Este procedimiento lo han utilizado todas las parejas, pero ésta es la única que lo ha hecho por propia iniciativa, sin ayuda de la profesora, que está ausente durante esta fase del proceso. En todo caso, en este momento no exploran todas las posibilidades y siguen intentando construir cuadrados inscritos por otros métodos, sin apreciar la posibilidad de encontrar una solución general al problema. En la fase 3 buscan cuadrados concretos volviéndose a olvidar de que deben estar inscritos en el azul. Las alumnas creen haber llegado a la solución cuando la profesora interviene y les hace ver que las figuras no están inscritas, pero entienden con rapidez las condiciones impuestas por el problema y son capaces de conjeturar, en la fase 5, que hay infinitos cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul inicial. Esta pareja no parece encontrar obstáculos en su proceso, salvo el olvido transitorio de la condición de que los cuadrados solución deben estar inscritos. Escriben en el auto-protocolo los pasos que van dando, con mucha concisión y utilizando un lenguaje correcto, aunque olvidan citar alguna herramienta de GeoGebra. En cuanto a la interacción entre las alumnas, siguen actuando como en la primera parte, aunque parece que L influye más en el procedimiento geométrico elegido, sobre todo en su insistencia en construir los cuadrados "como en la práctica del geoplano".

3ª Parte del problema	"Generalización de la figura: construid un cuadrado rojo dinámico que esté inscrito en el cuadrado azul"
Técnicas	1) Intentan transferir procedimientos utilizados en prácticas anteriores (7 y 7-h), pero no llegan a nada. 2) construyen 2 puntos en 2 lados del c. azul y usan "polígono regular". Vuelven al caso construido en la parte 2. 3) construyen las diagonales a partir de un punto libre con "recta" y "paralelas" a los ejes, pero sin determinar el centro del cuadrado. Comprueban que no es cuadrado midiendo los ángulos. Determinan las diagonales del c. azul y un punto libre en uno de sus lados y borran todo lo demás. 4) Construyen una diagonal del c. rojo con "recta que pasa por 2 ptos": el pto libre y el centro del c. azul. Hacen varios intentos pero no consiguen construir un cuadrado que se mantenga.

	5) Obligan a que la 2ª diagonal sea perpendicular a la primera pasando por el centro. Determinan los 4 vértices del c. con "intersección entre dos objetos". Unen los vértices con "polígono". Para comprobar usan "arrastre de test" y miden los 4 ángulos del cuadrado.
Tipos de arrastre	2) "arrastre guiado" para inscribir el c. en el azul y "arrastre de test" para comprobar que la figura no se mantiene. En todas las fases usan "arrastre de test" para comprobar las distintas figuras.
Obstáculos	1) H tiene problemas para trazar paralelas, quiere hacer una "paralela a un punto". Tienen dificultades de comunicación: L intenta explicar algo a H y ella dice "ni se lo que dices ni me acuerdo" 2) Confunden vértice con ángulo, les cuesta mucho identificar las diagonales y establecer relaciones entre éstas y vértices opuestos. 3) y 4) Siguen teniendo problemas con las diagonales. Se olvidan de que deben cortarse en el centro del cuadrado. 5) Quieren unir los 4 vértices del cuadrado solución con "segmento", la profesora les sugiere usar "polígono".
Interacción pareja	1) L ayuda a H a trazar paralelas. L sugiere otros procedimientos que no les sirven. 2) L contesta a la profesora y decide tomar la iniciativa y manejar el ratón para realizar la construcción. H le va ayudando, parece que ella domina más el SGD. 3) Las dos se turnan en manejar el SGD. L se desanima y H retoma las indicaciones de la profesora. 4) H contesta a la profesora y llega a establecer propiedades que le permiten resolver el problema, pero no es capaz de aplicarlas (los 2 cuadrados tienen el mismo centro). 5) H realiza la construcción, contesta a la profesora y escribe

	el auto-protocolo. Parece haber tomado la iniciativa ante el cansancio de L (aunque también participa en el proceso).
Interacción prof-pareja	1) La prof les recuerda que el c. inscrito debe moverse dentro del c. azul. 2) La prof guía a las alumnas para que establezcan relaciones entre vértices y diagonales del cuadrado inscrito. 3) La prof les orienta para que recuerden que las diagonales se cortan en el centro del cuadrado, luego las deja solas. 4) Les guía hasta que H se da cuenta de que ambos cuadrados deben tener el mismo centro. Al final, les anima a seguir porque las ve desanimadas y les dice "estáis a punto de conseguirlo". 5) La prof les hace ver por qué no es un cuadrado la figura que han construido en 4): una de las diagonales no pasa por el centro. Les calma para que vayan paso a paso y les aconseja la herramienta para unir los vértices del cuadrado.
Lenguaje auto-protocolo	No anotan todos los procedimientos seguidos, pero si los más relevantes. El lenguaje es a veces poco claro, porque refleja las complicaciones que han sufrido en el proceso. Cuando describen la construcción que les ha llevado a la solución se olvidan de explicar que las diagonales se cortan en el centro del cuadrado. El lenguaje oral es bastante correcto. Al final reconocen que GeoGebra les ha ayudado porque es más exacto que lápiz y papel y permite comprobar la solución.

Tabla 7.1.4.4– Análisis de la 3ª parte del problema- Pareja nº 25

En esta tercera parte del proceso de resolución, la pareja 25 ha tenido muchas dificultades en llegar a la solución. El resumen de las cinco etapas en las que hemos dividido el proceso se encuentra en la tabla 7.1.4.4. En la primera fase vemos que, al igual que otras parejas ya analizadas, intentan transferir procedimientos realizados en prácticas anteriores: como la pareja 22 recuerdan la práctica 7, en especial el apartado h, que les costó mucho resolver. En varias ocasiones vuelven a construir cuadrados inscritos mediante "arrastre guiado", superponiéndolos al cuadrado azul. Parece que les cuesta asimilar la idea de que deben construir el cuadrado utilizando sus conocimientos geométricos, sin usar la herramienta "polígono regular". A partir de la fase 3, donde determinan las diagonales del cuadrado azul, empiezan a manejar las propiedades entre vértices y diagonales de un cuadrado, pero todavía no saben aplicarlas para encontrar la solución (ver figura 7.1.4.5).

Vemos que sufren obstáculos al identificar las propiedades de las diagonales: se dan cuenta de que son perpendiculares, pero tardan en utilizar que deben cortarse en el centro del cuadrado (de hecho lo olvidan en distintos momentos después de verbalizar la propiedad) y que el centro de ambos cuadrados es el mismo punto. La profesora participa menos que con otras parejas, porque ve que las alumnas comprenden que tienen que construir un cuadrado inscrito general y recuerdan las propiedades necesarias para ello. Pero al final del proceso, ante el desánimo de la pareja que parece dar vueltas sin llegar a la solución, las va guiando hasta que se dan cuenta de que la segunda diagonal debe ser perpendicular a la primera cortándola en el centro del cuadrado azul.

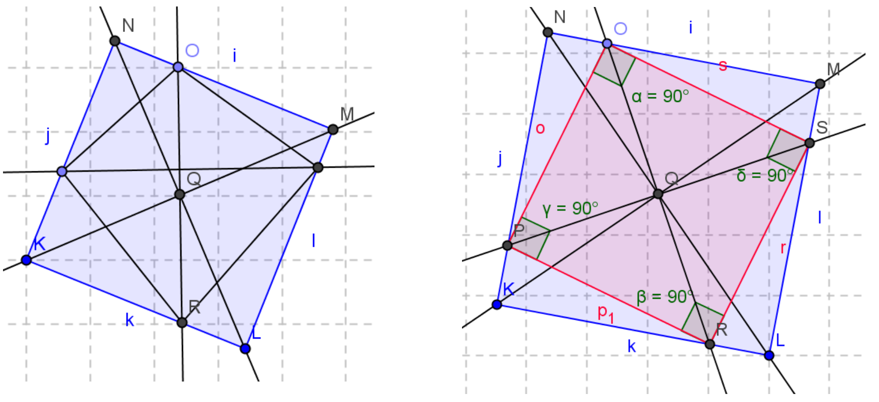


Figura 7.1.4.5 – Construcción de la fase 4 y fase 5 –3ª parte del problema- pareja nº 25

Las alumnas presentan obstáculos de origen geométrico (dificultades para identificar las diagonales, confundir vértice con ángulo, construir las diagonales sin que pasen por el centro del cuadrado) y algunos de origen técnico (utilizar "segmento" para unir los vértices del cuadrado, trazar paralelas). Lo más sorprendente es que cuando han verbalizado determinadas propiedades que les permiten realizar la construcción, guiadas por la profesora, las ignoran y siguen intentando resolver el problema con los mismos métodos que ya se han demostrado ineficaces. El uso del lenguaje geométrico en la conversación entre las alumnas es bastante adecuado y les permite casi siempre una buena comunicación. Sin embargo, en esta parte del proceso se observa que el lenguaje escrito en el auto-protocolo es menos preciso que en la primera y segunda parte. Se refleja el cansancio y la confusión producida por el tiempo que les ha supuesto encontrar la solución. La pareja ha olvidado algunos procedimientos utilizados y renuncia a escribirlos.

La interacción entre la pareja sufre modificaciones a partir de la fase 3. Hasta ese momento L sigue llevando la iniciativa en la toma de decisiones geométricas, incluso maneja el ratón en algunos momentos (aunque siempre parece que H domina mejor GeoGebra). Pero al no encontrar la solución buscada, L termina desanimándose y H acaba llevando la voz cantante en todas las tareas: construye la figura, contesta las preguntas de la profesora y escribe en el auto-protocolo. L acompaña a H, pero adopta un papel secundario en la fase final del proceso.

Una cuestión que merece la pena destacar es la confesión final de las alumnas a la profesora (cuadro 7.1.4.6). L reconoce que GeoGebra a veces le resulta difícil de usar, pero que en esta ocasión le ha ayudado a "ver mejor". H añade que es más fácil comprobar el resultado con GeoGebra que con lápiz y papel:

> L: … Jo, hasta que lo hemos sacado…es que a mí GeoGebra a veces me cuesta porque se me olvida cómo son…cómo utilizar las herramientas o algo así, entonces cuando llego digo: ¡jo, si esto lo hemos hecho la semana pasada!
>
> Prof: ¿Y dibujando, con lápiz y papel, tú crees que te hubiera resultado más fácil?
>
> L: No, la verdad es que se ve mejor con GeoGebra
>
> H: Pero porque a veces con lápiz y papel es más inexacto, entonces al ser este que siempre sea un cuadrado, yo creo que es más fácil verlo tú que si lo dibujas
>
> L: Es que cuando dibujas… tú puedes ver un cuadrado pero no es un cuadrado. Se ve mejor con GeoGebra
>
> H: Como nos ha pasado aquí (enseña el papel con sus dibujos). Está a mano alzada pero es un ejemplo. Lo dibujas y no sabes exactamente si es un cuadrado porque no sabes si estás cumpliendo las condiciones para que sea un cuadrado, en cambio con GeoGebra puedes comprobarlo muy fácil: midiendo los ángulos o cosas que si las haces a mano no es tan fácil.

Cuadro 7.1.4.6 – Extracto de la conversación entre la pareja 25 y la profesora

7.2 Resumen y conclusiones de los resultados

Para concluir, nos apoyaremos en la teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino & Batanero, 1998) para analizar el significado personal matemático puesto en juego por los sujetos en la tarea. Este modelo afirma que la matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado y que esta organización de los conceptos, teoremas y propiedades es un factor explicativo del gran número de problemas implicados en el aprendizaje de las matemáticas. El sistema está constituido por los siguientes elementos de significado: campos de problemas, conceptos, procedimientos, lenguaje y argumentos.

7.2.1 Campos de problemas

Son las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problema, aplicaciones) de donde surge el concepto matemático. En nuestro caso, el problema al que se enfrentan nuestras parejas de estudiantes y sus generalizaciones forman parte del campo de problemas asociados al concepto matemático *cuadrado*.

En este sentido, es interesante observar los procesos de generalización o transferencia de conocimientos anteriores que intentaron nuestros alumnos. Para responder a la primera pregunta del problema (construir un cuadrado rojo inscrito dentro del cuadrado azul), todas las parejas realizaron el mismo procedimiento: la construcción del cuadrado rojo sobre los puntos medios del cuadrado azul. Parece claro que han recordado la práctica 8 (teorema de Varignon) realizada en el Taller de GeoGebra y han transferido el conocimiento que obtuvieron en ella de que el cuadrilátero construido sobre los puntos medios de un cuadrado es también un cuadrado.

Respecto a la segunda parte del problema, generalizar el cuadrado inscrito de forma que se obtenga un cuadrado general dinámico, vemos que las cuatro parejas han tenido muchas más dificultades y han utilizado técnicas distintas para aproximarse a la solución. Dos parejas pensaron en el Geoplano, que también se había trabajado en el curso, para tratar de resolver la situación: así, construyen muchos cuadrados determinando puntos en los lados del cuadrado azul, sin darse cuenta que no están inscritos. Otra de las parejas intenta aplicar procedimientos trabajados en la práctica 7, en concreto el apartado h que tuvo especial dificultad. La conducta de los sujetos muestra que hay un intento deliberado de utilización de conocimientos geométricos trabajados previamente, pero que no tienen deslindado o acotado el campo de validez o utilidad de dichos conocimientos.

Una implicación didáctica inmediata de este hecho es la necesidad de trabajar las tareas matemáticas no como ejercicios aislados sino como sistemas de tareas que cubran el amplio campo de problemas donde surge y es de aplicación el objeto matemático a desarrollar (en nuestro caso, el objeto cuadrado y sus propiedades).

7.2.2 Conceptos (definiciones y propiedades)

Los protocolos muestran inestabilidad en el concepto de cuadrado. Así, en la primera parte del problema, una de las parejas repite reiteradamente que la solución será "como un rombo", aludiendo a un cuadrado cuya posición en su construcción les recuerda la posición típica que suelen presentar los rombos (apoyado sobre uno de sus vértices). En la segunda parte del problema, la comprobación de que la solución es efectivamente un cuadrado la hacen a petición de la profesora y consiste en medir los cuatro lados del cuadrado rojo. La profesora pregunta: *¿si fuera un rombo, no pasaría eso también?*, lo que les lleva a medir también los ángulos después de algunas dudas sobre las propiedades de cuadrados y rombos.

Este conocimiento ostensivo de las figuras geométricas (las definen por su forma y su dibujo en el plano) ignora propiedades estructurales de las figuras (por ejemplo, que una propiedad fundamental para que una figura sea cuadrado es que sus diagonales sean perpendiculares). El conocimiento deficitario del concepto geométrico, más allá de su representación dibujada, es una fuente de obstáculos y dificultades en la resolución de problemas. El conocimiento conceptual (del cuadrado) incluye el dominio de sus propiedades características y sus relaciones con otros conceptos (del rombo, paralelogramo, cuadrilátero, etc.)

Ante el conocimiento conceptual insuficiente, es muy interesante observar una cierta tendencia de los sujetos a considerar que GeoGebra, como instrumento de trabajo, les va a resolver la tarea directamente utilizando alguna de sus funcionalidades. Así, parece que les cuesta asimilar la idea de que deben construir el cuadrado inscrito utilizando sus conocimientos geométricos y que no basta usar la herramienta "polígono regular". Es un ejemplo de los obstáculos geométricos trasladados al software de los que habla Drijvers (2003).

7.2.3 Procedimientos (técnicas)

Aparecen utilidades pero también dificultades procedimentales ligadas al uso del recurso GeoGebra. Por ejemplo, la duda procedimental de utilizar la herramienta "segmento" o la herramienta "polígono", para unir los puntos medios del cuadrado azul y construir el cuadrado rojo inscrito, surge al trabajar en un entorno GeoGebra y no tendría sentido al trabajar con lápiz y papel. También dudan sobre la herramienta que pueden utilizar para construir los puntos medios de los lados del cuadrado azul. Este obstáculo es muy común en entornos SGD porque a la hora de determinar puntos la primera opción suele ser la herramienta "punto" y clicar sobre la posición que suponen que debe ocupar, es un obstáculo técnico. Tardan en comprender qué significa encontrar un cuadrado dinámico que generalice todas las posiciones posibles que son solución del problema.

A veces, el propio recurso ayuda a superar el obstáculo: Construyen un cuadrado azul con "polígono regular": determinan los puntos medios de cada lado y unen esos puntos con "segmento"; se dan cuenta que no pueden colorear de rojo el cuadrado así formado y usan "polígono" para unir los vértices. El obstáculo propio de GeoGebra se supera con las funcionalidades del propio recurso.

Nos interesaba observar la conducta de las parejas en sus estrategias de resolución de la tarea y, específicamente, en la utilización del recurso "lápiz y papel" como complemento o alternativa al recurso GeoGebra. Únicamente la pareja 25 antes de construir el cuadrado rojo con GeoGebra, utiliza lápiz y papel para dibujar la posible solución. Parece que necesitan apoyarse en los dibujos en papel, quizá por ser la técnica tradicional de trabajo en geometría. Es curioso que para ver las distintas posiciones que puede ocupar el cuadrado inscrito construyen un segundo cuadrado en lugar de mover de posición el primero. Esto indica que no tienen suficientemente interiorizado el dinamismo de GeoGebra.

En definitiva, la experiencia realizada nos permite detectar dos tipos de obstáculos en la resolución de la tarea: técnicos y geométricos. Los geométricos: dificultades para identificar las diagonales, confundir vértice con ángulo, construir las diagonales sin que pasen por el centro del cuadrado; los de origen técnico: utilizar "segmento" para unir los vértices del cuadrado, trazar paralelas. Lo más sorprendente es que hay parejas que cuando han verbalizado determinadas propiedades que les permiten realizar la construcción, guiadas por la profesora, las ignoran y siguen intentando resolver el problema con los mismos métodos que ya se han demostrado ineficaces.

7.2.4 Lenguaje

El lenguaje (términos, expresiones, símbolos, gráficos, notaciones) tiene un papel relevante en la actividad matemática. Vygotsky (1977) resalta la importancia de los sistemas de signos como mediadores entre los estímulos del medio y las respuestas del sujeto. Estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

En nuestra experiencia, el lenguaje expresado en los auto-protocolos es poco claro en algunos momentos, sobre todo cuando explican procedimientos que no les han llevado a la solución deseada, aunque si están bien indicadas las herramientas de GeoGebra utilizadas. En sus conversaciones como parejas resolutoras, son poco precisas y suelen emplear términos erróneos (rombo en lugar de cuadrado, vértice en vez de ángulo, perpendicular, paralela), aunque parecen entenderse bien entre ellos. Hay sujetos que no comprenden el significado operativo de generalizar (apartado 2 del problema)

Puede que ese uso inadecuado de algunos términos les lleve a cometer errores en la elección de la herramienta de GeoGebra: por ejemplo, usan "bisectriz" para trazar la primera diagonal del cuadrado porque la llaman así y, aunque esto podría permitirse ya que en el cuadrado coinciden ambas, sin embargo para la construcción de la diagonal hay que usar otra herramienta como "recta que pasa por 2 puntos" o "semirrecta" ya que no conocemos todavía el ángulo del cuadrado ni tres vértices consecutivos.

7.2.5 Argumentos

Nos interesó mucho en la experiencia, recoger el tipo, la calidad y la cantidad de los argumentos o razonamientos que los sujetos usan para comprobar las soluciones de los distintos apartados del problema o explicar al otro miembro de la pareja alguna estrategia de solución.

Especialmente, nos hemos fijado en la forma de validación de la solución encontrada y el papel que juegan las herramientas de GeoGebra en esa validación y, en concreto, los tipos de arrastre utilizados. En general, los sujetos usan de manera natural y sistemática el arrastre de test para comprobar si se mantienen o no las construcciones. A una de las parejas se lo tiene que indicar la profesora. Usan "arrastre guiado" como instrumento de exploración para inscribir el cuadrado rojo en el azul y para investigar sobre la existencia de "varios" cuadrados que pueden ser solución del problema.

Los sujetos reconocen que GeoGebra a veces les resulta difícil de usar pero que, a cambio, les ayuda a "ver mejor". Añaden que es más fácil comprobar el resultado con GeoGebra que con lápiz y papel.

7.2.6 Orquestación de la profesora

Incluimos este epígrafe, que no está contemplado como uno de los elementos de la teoría de significados, porque consideramos que es fundamental la intervención de la profesora y su interactuación con cada pareja de estudiantes en los resultados obtenidos.

En esta experiencia hemos visto que todas las parejas han sido capaces de resolver la primera parte del problema autónomamente. Sin embargo, probablemente no hubieran llegado a la solución final de la parte de generalización sin la guía de la profesora (por lo menos alguna pareja). Es relevante notar que el problema de generalización planteado resultó muy difícil de entender para algunos sujetos que pidieron reiteradamente explicaciones sobre lo que se pedía (no entendían bien la tarea propuesta). Además, el procedimiento de resolución empleado por todas las parejas ha sido el mismo: construir las diagonales del cuadrado rojo después de determinar el centro de ambos cuadrados. Esto no tenía porqué haber sido así, alguna pareja podía haber utilizado otros procedimientos igualmente válidos. Pero la influencia de la profesora fue determinante para la elección del camino a seguir, ella les fue guiando considerando los conocimientos que sabía que sus alumnos podían poner en juego, y decidiendo que otros conocimientos serían más difíciles de utilizar por ellos (por ejemplo: consideró que el uso de la herramienta "simétrico de un vértice respecto al centro" no había sido empleada todavía en el taller de GeoGebra y por lo tanto se excluyó su utilización en este caso). Es decir, la orquestación de la profesora ha sido determinante en el proceso de resolución de la parte de generalización del problema y en la elección de las técnicas y procedimientos seguidos por los integrantes del estudio.

En resumen, consideramos que esta diferenciación de elementos de significado puede contribuir a evaluar los conocimientos y competencias de los sujetos, inmersos en una determinada actividad matemática.

Capítulo 8

CONCLUSIONES

Introducción

En este capítulo vamos a retomar todos los resultados obtenidos a lo largo del estudio descrito en esta tesis, para discutirlos a la luz de las teorías que nos han servido de fundamentación. Esto nos permite responder a los interrogantes planteados al inicio de la investigación y proponer futuras líneas de profundización y mejora. Además se describen los aspectos que quedan por estudiar.

8.1 Recordando el problema de investigación

En esta Tesis el problema que se ha abordado es cómo interviene el software de geometría dinámica GeoGebra en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas, dentro de un proceso planificado de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en la formación inicial del profesorado de Primaria. Para ello, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

1. Identificar las competencias geométricas que deben desarrollarse durante la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.
2. Analizar cuáles de estas competencias pueden mejorar con el uso de GeoGebra.

3. Diseñar una investigación que permita estudiar si mejoran las competencias geométricas y didácticas con la utilización de GeoGebra respecto al recurso “lápiz y papel”.
4. Examinar la influencia del uso de GeoGebra en las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza de los estudiantes de Magisterio.
5. Analizar qué tipología de alumnos obtiene mejores resultados con GeoGebra en relación a su nivel de competencia digital.

Hemos estructurado la investigación, de forma clásica, dividida en dos partes:

- La primera corresponde al estudio teórico que nos ha permitido responder a los dos primeros objetivos planteados.
- La segunda parte de la tesis aborda el estudio empírico mediante el cual se diseña la investigación y se analizan los objetivos 3, 4 y 5. Vamos a recordar los problemas de investigación que emanan de éstos objetivos:

P1- ¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso “lápiz y papel”?

P2- ¿Favorece el uso de GeoGebra el cambio de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso “lápiz y papel”?

P3- ¿Cómo afecta al desarrollo de competencias geométricas y didácticas, mediado con GeoGebra, el nivel de competencia digital del alumnado?

Para responder a estas preguntas se ha elegido una integración de metodologías cuantitativa-cualitativa, ya que no sólo queremos contestarlas, además queremos explicar otras cuestiones que nos aporten más información. Para este propósito resulta imprescindible utilizar un enfoque cualitativo que complemente al cuantitativo.

En el estudio cualitativo hemos analizado el procedimiento de resolución de un problema mediante un estudio de casos con cuatro parejas de estudiantes elegidas según su nivel previo de competencia geométrica y digital. Recordamos el enunciado del problema propuesto que hemos clasificado como actividad de construcción de figuras, conjetura e investigación, utilizando las categorías introducidas en el Capítulo 5.

1. Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono regular”, construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)? (Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul). Anotad todo lo que vais haciendo con GeoGebra en esta hoja (indicando la herramienta de GeoGebra que utilizáis en cada caso), hasta las construcciones que no sirvan y que habéis borrado.

2. ¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior? Realizad la construcción, anotando todos los pasos que habéis seguido para ello (incluso los que habéis borrado).

Los registros obtenidos de cada pareja, integrando la información recogida con diferentes instrumentos, se han analizado pormenorizadamente en el Capítulo 7, para detectar y describir los siguientes elementos: Técnicas utilizadas, Tipos de arrastre, Obstáculos, Interacción entre la pareja, Interacción profesora-pareja y Lenguaje utilizado en el auto-protocolo.

Veamos ahora las conclusiones a las que hemos llegado desde ambos enfoques.

8.2 Conclusiones de los estudios realizados

En este epígrafe resumimos los resultados obtenidos en los Capítulos 6 y 7 donde hemos realizado el análisis del estudio cuantitativo y cualitativo de los problemas de investigación planteados.

8.2.1 Conclusiones del estudio cuantitativo

- La metodología empleada en esta investigación con los estudiantes integrantes de los grupos experimental y control, ha resultado eficaz para desarrollar sus competencias didáctico-geométricas.
- El grupo experimental, que ha seguido el mismo proceso formativo que el grupo control añadiendo el entorno GeoGebra para la resolución de problemas geométricos, ha obtenido resultados estadísticamente significativos en la mejora de competencias didáctico-geométricas, a pesar de haber utilizado como instrumento de medida una prueba de lápiz y papel.

- En todos los ítems de la prueba de conocimientos didáctico-geométricos, el porcentaje de alumnos del grupo experimental que han mejorado en el postest respecto al pretest es mayor que el porcentaje de alumnos del grupo control.
- Los ítems en que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados (respecto al grupo control) son los de aplicación, dentro del dominio TEDS-M de contenidos geométricos, y de planificación del currículo, dentro de los didácticos.
- Las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza mejoran en ambos grupos del pretest al postest, pero no podemos explicar esta mejora por el uso de GeoGebra. Se puede pensar que es la metodología didáctica seguida en ambos grupos la responsable del cambio de creencias, pero es una hipótesis que tendríamos que seguir estudiando en posteriores investigaciones.
- La mejora en las competencias didáctico-geométricas de los alumnos del grupo experimental no está influida por su nivel previo de competencia digital. Es decir, GeoGebra es una herramienta útil para el desarrollo de estas competencias en todo tipo de alumnado, incluido el que no tiene grandes conocimientos tecnológicos. Esto puede explicarse por el carácter intuitivo del software y porque la intervención llevada a cabo con él ha sido suficiente para llegar a convertirse en un verdadero instrumento para los alumnos (en el sentido de la teoría de la instrumentación).
- Los alumnos del grupo experimental opinan que el Taller de GeoGebra les ha ayudado a comprender mejor los conocimientos geométricos y a

explorar, experimentar, hacer conjeturas y comprobarlas. Prefieren este recurso a la hora de resolver problemas nuevos que el método tradicional de papel y lápiz. Además, opinan que es un buen recurso para la enseñanza de la geometría en Primaria.

8.2.2 Conclusiones del estudio cualitativo

El análisis de los registros de las sesiones de resolución del problema realizadas por las cuatro parejas estudiadas nos ha permitido interpretar los resultados a la luz de la teoría de la instrumentación que nos sirve de marco teórico (desarrollada en el Capítulo 3).Veamos las conclusiones a las que hemos llegado:

- La conducta de los sujetos en el proceso de resolución del problema muestra que hay un intento deliberado de utilización de conocimientos geométricos trabajados previamente, pero que no tienen acotado el campo de validez o utilidad de dichos conocimientos. Una implicación didáctica inmediata de este hecho es la necesidad de trabajar las tareas matemáticas no como ejercicios aislados, sino como sistemas de tareas que cubran el amplio campo de problemas donde surge y es de aplicación el objeto matemático a desarrollar.
- Los protocolos donde se recoge la información de cada caso muestran inestabilidad en el concepto de cuadrado. Algunos alumnos muestran tener un conocimiento ostensivo de las figuras geométricas (las definen por su forma y su dibujo en el plano) y parecen olvidar alguna de sus

propiedades (en el caso del cuadrado, no consideran las propiedades de ángulos y diagonales, sólo piensan en las de sus lados). Es muy interesante observar una cierta tendencia de los sujetos a considerar que GeoGebra, como instrumento de trabajo, les va a resolver la tarea directamente. Por eso es importante plantear problemas donde los estudiantes deban poner en juego sus conocimientos geométricos.

- Hemos detectado dos tipos de obstáculos en la resolución de la tarea: técnicos y geométricos. El obstáculo propio de GeoGebra se supera con las funcionalidades del propio recurso, sólo se tiene que mejorar el grado de instrumentalización de los estudiantes, que necesitan un trabajo con GeoGebra continuo y prolongado en el tiempo.
- Sólo una alumna utiliza el recurso "lápiz y papel" como complemento o alternativa al recurso GeoGebra. Lo hace como apoyo para explicar a su compañera el procedimiento que quiere realizar, aunque al final reconoce que los dibujos en papel no son tan útiles como GeoGebra porque son inexactos y no permiten comprobar fácilmente las propiedades de la figura.
- El lenguaje expresado en los auto-protocolos es poco claro en algunos momentos, sobre todo cuando explican procedimientos que no les han llevado a la solución deseada. Puede que ese uso inadecuado de algunos términos les lleve a cometer errores en la elección de la herramienta de GeoGebra.
- En general, los sujetos usan de manera natural y sistemática el arrastre de test para comprobar si se mantienen o no las construcciones. Usan "arrastre guiado" como instrumento de exploración para inscribir el

cuadrado rojo en el azul y para investigar sobre la existencia de "varios" cuadrados que pueden ser solución del problema.

- Los sujetos reconocen que GeoGebra a veces les resulta difícil de usar pero que, a cambio, les ayuda a "ver mejor". Añaden que es más fácil comprobar el resultado con GeoGebra que con lápiz y papel.
- Las parejas heterogéneas se han repartido los roles: casi siempre una persona se encargaba del manejo del SGD mientras la otra asumía la redacción del auto-protocolo, aunque en alguna pareja se iban intercambiando. La única pareja homogénea ha mostrado una complicidad total entre sus componentes, aunque esto no les ha ayudado a encontrar más fácilmente la solución al problema de generalización.
- La orquestación de la profesora ha sido determinante en el proceso de resolución de la parte de generalización del problema y en la elección de las técnicas y procedimientos seguidos por los integrantes del estudio.

8.3 Limitaciones de la investigación

Cuando diseñamos el estudio cuantitativo de esta investigación queríamos que fuese lo más "ecológico" posible, es decir, que las condiciones en que se desarrollase fuesen similares a las que se pueden encontrar en la docencia habitual en el Grado de Magisterio de Educación Primaria en la UAM. Por eso elegimos dos grupos de alumnos ya formados, sin asignar aleatoriamente a los estudiantes. Esta elección disminuye la validez externa de la investigación, con lo que no podemos asegurar que los resultados que se han obtenido sean generalizables.

Sin embargo, puede decirse que ambos grupos tenían las características propias de los estudiantes típicos de esta titulación, con lo que podían representar perfectamente el comportamiento del resto de los grupos de 2º curso. Además, hicimos un análisis estadístico de comparación de medias en el pretest para asegurarnos de que el grupo experimental y el control no partían de situaciones distintas en cuanto a su desarrollo de competencias geométricas y didácticas.

También hubiera sido deseable contar con un instrumento de recogida de datos para el pretest y el postest que evaluara las competencias didáctico-geométricas mediante GeoGebra y no sólo utilizar pruebas de lápiz y papel, a fin de evaluar el desempeño de los estudiantes del grupo experimental con el mismo recurso con el que se formaron. Sin embargo, no hemos encontrado instrumentos estandarizados de estas características y, en cualquier caso, hemos considerado que el uso de una prueba de lápiz y papel pondría todavía más en evidencia los progresos de los estudiantes que habían trabajado con GeoGebra, ya que favorecía a los alumnos del grupo control.

El instrumento de evaluación de lápiz y papel utilizado necesita actualización y mejoras. Frente a la posibilidad de construir ad-hoc dicho instrumento, optamos por elaborarlo con las actividades liberadas del estudio TEDS-M por dos motivos: 1) Dicho estudio, auspiciado por la IEA[1], se presentaba

[1] IEA: International Association for the Evaluation of Educational Achievement

como una evaluación internacional de gran alcance para medir las competencias matemáticas y didáctico-matemáticas de los futuros maestros de primaria; 2) Las tareas estaban diseñadas con la misma filosofía y metodología didácticas que las del estudio TIMSS, de gran prestigio en el campo de la evaluación de conocimientos matemáticos. La realidad es que el estudio TEDS-M no pasó de la fase de definición conceptual, no se han llegado a publicar los resultados del primer y único trabajo de campo realizado y no se han liberado más ítems del banco de datos. Eso nos ha privado de poder contrastar nuestros datos con los internacionales y nacionales (como estaba previsto) y mejorar la riqueza del contenido didáctico-geométrico de la prueba.

Otra limitación ha sido la grabación en vídeo de la prueba del estudio cualitativo, que ha podido influir en el comportamiento de las parejas participantes en el estudio de casos. La grabación de la resolución del problema no es una situación a la que estén acostumbrados los estudiantes, por lo que puede ocasionar en ellos timidez y reserva a la hora de comunicarse libremente con su compañero. Hemos intentado controlar en lo posible esta situación al ser las parejas estables a lo largo del curso y tener mucha confianza mutua. Además, la persona que realizó la prueba fue su profesora de la asignatura y no estuvo presente durante todo el proceso, dejándoles libertad para enfrentarse al problema sin la tensión de tenerla a ella delante o de dar explicaciones a un investigador desconocido.

El no haber grabado la pantalla del ordenador de cada pareja, durante el proceso de resolución del problema del estudio de casos, también ha limitado un poco el estudio cualitativo. En el análisis de los registros de cada sesión, hemos echado en falta algunas imágenes de construcciones correspondientes a procedimientos fallidos y que fueron borradas por los estudiantes. Aunque se les pidió que anotaran en el protocolo escrito todos los pasos dados, esto no fue así en la mayoría de los casos, por olvido de la pareja o por estar mal explicado el procedimiento. La información obtenida sería más completa si hubiéramos dispuesto de las imágenes de la pantalla del ordenador, pero de todas formas, el resto de instrumentos de recogida de datos ha proporcionado suficiente información para poder analizar los casos con profundidad.

8.4 Aportaciones del trabajo

Como hemos visto en los Capítulos 1 y 2 de esta tesis, hay muchas investigaciones sobre los beneficios que aportan los entornos dinámicos a la enseñanza de la geometría. Los cambios producidos por los SGD van más allá de motivar al alumnado y hacer el aprendizaje más atractivo, también se transforman la actuación docente en el aula y las características del conocimiento que construye el estudiante. Sin embargo, no hemos encontrado apenas investigaciones que profundicen en estos aspectos en la formación inicial de profesorado de Primaria. Casi todas las investigaciones se centran en la etapa de educación secundaria y en la formación de profesorado de dicha etapa. Creemos que los estudiantes de magisterio tienen unas características propias que no permiten extrapolar gran parte de los resultados obtenidos con profesores de secundaria en formación o en activo. Por eso pensamos que esta investigación puede resultar de interés para los formadores de las Facultades de Educación donde se imparten los Grados de Magisterio.

El proceso formativo diseñado en esta investigación se ha desarrollado durante un semestre completo de docencia real, basándose en resultados anteriores de un estudio piloto, por lo que las conclusiones obtenidas pueden ser aplicables a otras asignaturas o cursos de matemáticas de la misma titulación. Además se aportan todas las actividades desarrolladas, los cuestionarios utilizados y la información sobre la organización de todo el proceso, lo que puede resultar de interés para otros profesores o investigadores que quieran introducir un SGD en sus clases.

Otro aspecto digno de mención es que ésta es la primera investigación en España que utiliza como instrumento de recogida de datos los ítems del estudio TEDS-M, por lo que amplía la información que se pretende obtener de este estudio internacional, máxime cuando la IEA aún no ha publicado ningún resultado oficial sobre la comparativa internacional llevada a cabo en 2009.

También podemos decir que nuestra investigación ha mostrado que el uso de una metodología activa de enseñanza de la geometría, como la que hemos utilizado, acompañada de un Taller semanal de resolución de problemas con GeoGebra resulta eficaz para desarrollar las competencias didáctico-geométricas de los futuros maestros de primaria. Además, hemos visto que GeoGebra es una herramienta útil para el desarrollo de estas competencias en todo tipo de alumnado, incluido el que no tiene grandes conocimientos tecnológicos, siempre que su utilización sea habitual y no esporádica.

Otra aportación de este estudio, que puede ser interesante para profesores e investigadores, es la metodología utilizada para el análisis del proceso de resolución de problemas con GeoGebra que hemos seguido en el estudio de casos. Las tablas creadas, integrando la información recogida mediante diferentes instrumentos, permite describir los siguientes elementos: Técnicas utilizadas, Tipos de arrastre, Obstáculos, Interacción entre la pareja, Interacción profesora-pareja y Lenguaje utilizado. Una vez analizados, podemos profundizar mejor en el proceso de génesis instrumental (Rabardel & Beguin, 2005) de los estudiantes y diseñar problemas adecuados para que dicho proceso siga avanzando y les permita un mejor desarrollo de sus competencias geométricas.

Además, podemos extraer una implicación didáctica inmediata de la aplicación de la teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1998), que hemos utilizado para analizar el significado personal matemático puesto en juego por las parejas del estudio de casos ante la resolución del problema propuesto: es la necesidad de trabajar las tareas matemáticas no como ejercicios aislados sino como sistemas de tareas que cubran el amplio campo de problemas donde surge y es de aplicación el objeto matemático a desarrollar.

8.5 Implicaciones para futuras investigaciones

Las conclusiones a las que hemos llegado dejan algunos puntos sin aclarar y además, han surgido otras cuestiones que podrían dar lugar a futuras investigaciones. Veamos algunas:

- Hemos obtenido resultados estadísticamente significativos que respaldan la mejora en la competencia didáctica de los estudiantes que han trabajado con GeoGebra. Sin embargo, en esta investigación no hemos profundizado en las razones por las que GeoGebra favorece la adquisición de esta competencia. Podemos conjeturar que el entorno GeoGebra produce implícitamente una mejora de las competencias didácticas, pero sería adecuado seguir investigando este aspecto para poder dar una respuesta que explique el por qué y el cómo.
- Además, hemos visto que las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza mejoran tanto en el grupo experimental como en el grupo control del pretest al postest. Como no podemos explicar esta mejora por el uso de GeoGebra, pensamos que es la metodología didáctica seguida en el proceso formativo de ambos grupos la responsable del cambio de creencias, pero ésta es una hipótesis que tendríamos que seguir estudiando en posteriores investigaciones.
- También sería muy interesante poder realizar una investigación que extendiera la muestra de alumnos participantes a todos los grupos de la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, trabajando en colaboración con todo el equipo docente del área de didáctica de las matemáticas de

la Facultad de Educación de la UAM. Así los resultados podrían refrendarse y obtener una mayor validez externa.

- Otro aspecto que enriquecería las aportaciones a la comunidad educativa de este estudio, sería realizar un seguimiento de los estudiantes que han cursado el Taller de GeoGebra, en su práctica profesional en las aulas de primaria cuando estén en ejercicio[1]. Así podríamos analizar hasta qué punto sus intenciones de aplicar los conocimientos adquiridos en el uso de SGD se materializan en la práctica docente diaria y cómo se ve afectada por ello.

[1] Estos estudiantes se graduarán el curso 2012/13

ANEXO I

INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Introducción

En este anexo se encuentran los ítems del cuestionario utilizado para recoger los datos, en el pretest y postest pasados a los grupos experimental y control participantes en nuestra investigación, de los conocimientos geométricos y didácticos (extraídos del estudio TEDS-M). Además se clasifican estos ítems en la tabla I.1, caracterizando su dimensión del conocimiento de contenidos matemáticos (MCK) o del conocimiento del contenido pedagógico-didáctico (MPCK) y el subdominio al que pertenecen. También se incluyen los criterios de corrección usados en el epígrafe II.

En el tercer epígrafe se aportan las preguntas correspondientes a las tres escalas extraídas y traducidas del cuestionario TEDS-M de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza, que se pasaron a ambos grupos en pretest y postest. Por último, en el epígrafe IV, encontramos las preguntas referentes a la opinión de los alumnos del grupo experimental sobre GeoGebra, encuesta que se pasó al final del Taller de GeoGebra.

I- Cuestionario de competencias geométricas y didácticas

En la siguiente tabla se presentan los ítems extraídos del cuestionario de conocimientos matemáticos y pedagógico-didácticos del estudio TEDS-M que forman parte del cuestionario de nuestra investigación. Se han elegido solamente los ítems del dominio Geometría.

ID TEDS-M	ID cuestionario	Dimensión conocimiento	Subdominio	Etiqueta
MFC203	P1	MCK	Aplicación	Área paseo alrededor piscina rectangular
MFC204	P2	MCK	Conocimiento	Interpretación diagramas Venn de cuadriláteros
MFC307 A	P3A	MCK	Conocimiento	Problema volumen con cubos
MFC307 B	P3B	MPCK	Curri/Planif	Reformular problema volumen de cubos
MFC408	P4	MCK	Aplicación	Área triángulo escaleno en cuadrícula
MFC501	P5	MCK	Conocimiento	Desarrollo plano prisma triangular
MFC511	P6	MCK	Aplicación	Longitud lazo de dos cajas
MFC513	P7	MPCK	Curri/planif	2 razones para medir con clips

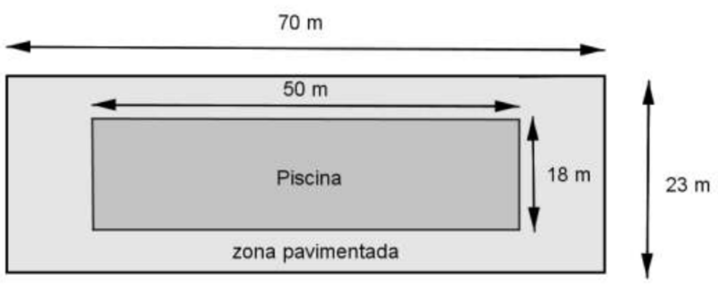
Tabla I.1 – Ítems cuestionario competencias geométrico-didácticas

NOMBRE Y APELLIDOS:

GRUPO: **FECHA:**

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS Y DIDÁCTICOS

1. Una piscina de forma rectangular tiene alrededor de ella una zona pavimentada como muestra la figura (no está a escala):



¿Cuál es el área de la zona pavimentada (sombreada más clara en la figura)?. Elije una de las siguientes opciones:

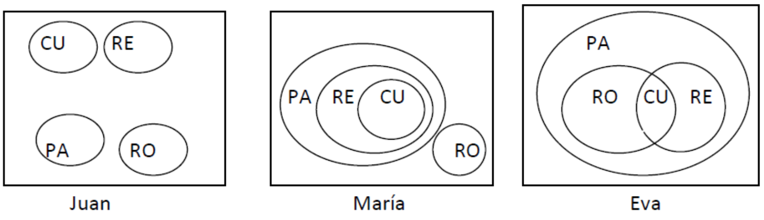
A. 100 m^2 ☐

B. 161 m^2 ☐

C. 710 m^2 ☐

D. 1610 m^2 ☐

2- Tres estudiantes han dibujado los siguientes diagramas de Venn para representar las relaciones entre cuatro clases de cuadriláteros: Rectángulos (RE), Paralelogramos (PA), Rombos (RO), y Cuadrados (CU).



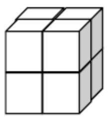
¿Qué diagrama es correcto?. Elije una de las siguientes opciones:

A. Juan ☐ B. María ☐ C. Eva ☐

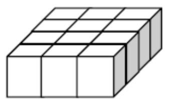
3- Se ha presentado el siguiente problema a niños de Primaria:

Cada bloque pequeño tiene el mismo tamaño. ¿Cuál de los siguientes grupos de bloques tiene distinto volumen que los demás?

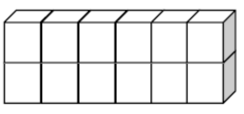
A.



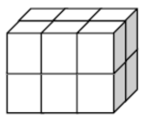
B.



B.



D.

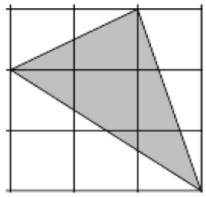


a) ¿Cuál es la respuesta correcta a esta pregunta?. Elige una de las siguientes opciones:

A. El grupo de bloques A ☐
B. El grupo de bloques B ☐
C. El grupo de bloques C ☐
D. El grupo de bloques D ☐

b) Reformula el enunciado del problema sin que cambie la tarea y sin utilizar la palabra **VOLUMEN**.

4- El área de cada cuadrado pequeño es 1 cm^2. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado en cm^2?



Elige una de las siguientes opciones:

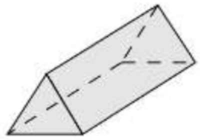
A. 3,5 cm^2 ☐

B. 4 cm^2 ☐

C. 4,5 cm^2 ☐

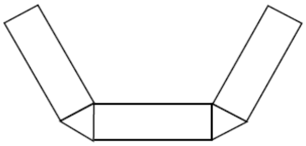
D. 5 cm^2 ☐

5- ¿Cuál de las siguientes figuras puede doblarse para construir esta figura tridimensional?:



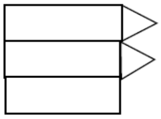
Elige una de las siguientes opciones:

A.



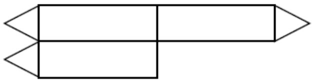
☐

B.



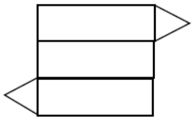
☐

C.



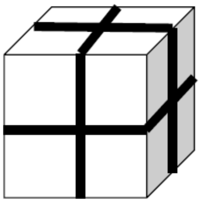
☐

D.

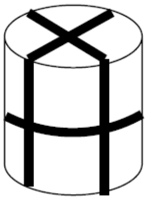


☐

6- Dos cajas de regalo se atan con una cinta como muestra la figura. La caja A es un cubo de 10 cm de lado. La caja B es un cilindro con diámetro y altura de 10 cm cada uno.



A



B

¿Qué caja necesita una cinta más larga?. Explica cómo has llegado a tu respuesta.

7- Cuando el profesor H. enseña a sus alumnos por primera vez la medida de longitudes, empieza pidiendo a los niños que midan la anchura de su libro usando primero clips y luego lápices.
Escribe **DOS** razones que expliquen por qué prefiere este método en vez de enseñarles directamente a usar una regla.

Razón 1:

Razón 2:

8- Diseña una actividad en la que los alumnos de 6º de Primaria tengan que comprobar que los tres ángulos de un triángulo suman siempre 180º. Describe las instrucciones que darás a los alumnos, como esperas que se desarrolle la actividad y los recursos que necesitarás para realizarla.

Instrucciones:

Descripción desarrollo actividad:

II- Criterios de puntuación del cuestionario de conocimientos geométricos y didácticos

Pregunta 1- 1punto

Pregunta 2- 1punto

Pregunta 3 A)- 1 punto

Pregunta 3 B)- 2 puntos

Codigo	Respuesta
20	**Respuestas correctas:** Ejemplos *¿Qué grupo de bloques tiene un número diferente de bloques pequeños comparado con los otros?. ¿Qué grupo de bloques tiene diferente masa/peso/capacidad que los otros?*
10	**Respuestas parcialmente correctas:** Pregunta sin la palabra volumen que necesita para resolverse las mismas habilidades pero que es diferente a a), por ejemplo: *¿Qué grupo de bloques tiene menos bloques que los otros? ¿Qué grupo de bloques ocupa menos espacio?*
70	**Respuestas incorrectas:** preguntas que se resuelven mediante otras habilidades distintas del volumen, por ejemplo: *¿Qué grupo de bloques tiene la superficie mayor?*
71	Preguntas poco claras/mal definidas/sin solución: *¿Qué grupo de bloques tiene distinto tamaño que los otros?* *¿Qué grupo de bloques ocupa el mayor espacio?* (hay 3 con el mismo volumen). *¿Qué grupo de bloques es diferente de los otros?.¿Qué grupo de bloques es más pequeño?*
79	Otras respuestas incorrectas (incluyendo las tachadas, borradas, ilegibles, irresolubles)
99	**Respuestas en blanco**

Pregunta 4- 1 punto

Pregunta 5- 1 punto

Pregunta 6- 2 puntos

Codigo	Respuesta
20	**Respuestas correctas** Marca la opción A y tiene una explicación completa con cálculos que comparan la longitud del lazo de cada caja. Se aceptan aproximaciones de pi
21	**Respuestas correctas:** el argumento (con o sin cálculos) se basa en la comparación entre la longitud de la circunferencia y el perímetro de un cuadrado de lado 10cm. Las otras medidas (caras laterales) son iguales en ambas cajas.
10	**Respuesta parcialmente correcta:** Marcan la opción A y explican correctamente, pero cometen un error de cálculo (o usan una fórmula equivocada)
11	Marcan la opción B y explican correctamente, pero cometen un error de cálculo (o usan una fórmula equivocada)
12	Marcan la opción A y el argumento (con o sin cálculos) se basa en la comparación entre la longitud de la circunferencia y el perímetro de un cuadrado de lado 10cm. Falta mencionar que las otras medidas (caras laterales) son iguales en ambas cajas.
13	Marcan la opción A pero la explicación es incompleta. Ejemplos: *Caja A porque la B puede meterse dentro de la A.* *Caja A porque la circunferencia es menor que el perímetro.* *Caja A, puede verse que el mayor. El lazo es de 120 cm pero el de la caja B tiene que ser menor.*
70	**Respuestas incorrectas:** Caja A, sin explicación ni cálculos.
71	Caja A o B con una explicación basada en un error conceptual (basada en la superficie o el volumen, en que A tiene más lados)
72	Caja A o B con una explicación basada en medidas incorrectas o incompletas de la longitud del lazo de ambas cajas.
73	*La longitud de lazo es la misma*
79	Otras respuestas incorrectas (incluyendo las tachadas, borradas, ilegibles, irresolubles). Ejemplo: Caja B, sin ninguna explicación ni cálculo
99	**Respuestas en blanco**

Pregunta 7- 2 puntos

Razones significativas y aceptables:

Razón 1- (comprensión de lo que significa medir). Usando unidades de medida familiares no estándar se aprende lo que significa medir: la medida es una repetición de una unidad básica.

Razón 2- (necesidad de unidades estándar). El uso de unidades no estándar crea incertidumbre en la medida de los objetos y ayuda a entender el desarrollo histórico de la medida.

Razón 3- (elección de la unidad más apropiada). Usar objetos diferentes para medir ayuda a los alumnos a decidir que unidades son más apropiadas para medir determinadas longitudes.

Codigo	Respuesta
20	**Respuestas correctas:** dan 2 de las razones anteriores
10	**Respuestas parcialmente correctas:** dan solamente la razón 1. Ejemplos*: Usar objetos familiares para medir permite a los alumnos aproximarse a la idea de medida antes de usar unidades formales y la regla.* *Usar objetos cotidianos muestra que cualquier cosa puede usarse para medir y hace que sea más fácil entender la medida porque no se necesita leer una escala abstracta.*
11	Dan solamente la razón 2. Ejemplos: *Usar unidades no estándar de distintas longitudes da medidas diferentes de la misma longitud y muestra la necesidad de unidades estándar.*
12	Dan solamente la razón 3. Ejemplos: *El profesor quiere que los alumnos vean y piensen sobre que unidad es más apropiada para diferentes longitudes. Los lápices pueden ser mejores que los clips para longitudes grandes.*
70	**Respuestas incorrectas:** que se basan en la motivación, más divertido, más interesante, etc.
71	Respuestas basadas en otros aspectos no relevantes. Ejemplos: *Usar objetos familiares como lapiceros favorece la habilidad de estimar. El profesor quiere favorecen la creatividad de los alumnos usando para medir lapiceros y clips. Para que los alumnos aprendan a medir con lapiceros y*

	clips.
79	Otras respuestas incorrectas (incluyendo las tachadas, borradas, ilegibles, irresolubles)
99	**Respuestas en blanco**

Pregunta 8- 2 puntos

Codigo	Respuesta
20	**Respuestas correctas:** Diseñan una actividad con diagramas dibujados (en papel o pizarra)
21	Actividad con materiales manipulables
22	Actividad con papel o cartón, recortan los ángulos del triángulo y forman un ángulo llano.
23	Actividad con ordenador.
10	**Respuestas parcialmente correctas:** Actividad incompleta o poco clara con diagramas dibujados..
11	Actividad incompleta o poco clara con materiales manipulables (geoplano, varillas, palillos, tangram, triángulos recortados…)
12	Actividad incompleta o poco clara con triángulo de papel o cartón, recortan sus ángulos y forman un ángulo llano.
13	Actividad incompleta o poco clara con materiales tecnológicos (ordenador)
70,71,72,73	**Respuestas incorrectas:** cada código hace referencia a los materiales empleados en la actividad (igual que en los anteriores)
79	Otras respuestas incorrectas (incluyendo las tachadas, borradas, ilegibles, irresolubles)
99	**Respuestas en blanco**

III- Creencias sobre las matemáticas y su enseñanza

A. CREENCIAS SOBRE LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS

Califica tu grado de acuerdo con las siguientes afirmaciones según la siguiente escala: 1- muy en desacuerdo, 2- en desacuerdo, 3- ligeramente en desacuerdo, 4- ligeramente de acuerdo, 5- de acuerdo, 6- muy de acuerdo.

1. Las matemáticas son una colección de reglas y procedimientos para resolver problemas.
2. Las matemáticas son memorización y aplicación de definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos.
3. Las matemáticas requieren creatividad y nuevas ideas.
4. En matemáticas muchas cosas pueden ser descubiertas y puestas en práctica por uno mismo.
5. Cuando resuelvo tareas matemáticas necesito conocer el procedimiento correcto, si no me pierdo.
6. Si te enganchas en una tarea matemática puedes descubrir cosas nuevas (por ejemplo: conexiones, reglas, conceptos).
7. En matemáticas es fundamental su rigor lógico y su exactitud.
8. Los problemas matemáticos pueden resolverse correctamente de muchas formas.
9. Muchos aspectos de las matemáticas tienen aplicación práctica.
10. Las matemáticas ayudan a resolver problemas y tareas cotidianas.
11. La actividad matemática requiere mucha práctica, aplicación de rutinas y estrategias de resolución de problemas.
12. Las matemáticas significan aprender, memorizar y aplicar.

B. CREENCIAS SOBRE EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

13. La mejor manera de ir bien en matemáticas es memorizar todas las fórmulas
14. Los alumnos necesitan que les enseñen los procedimientos correctos para resolver problemas matemáticos.
15. No importa si realmente entiendes un problema matemático si sabes dar la respuesta correcta.
16. Para ser bueno en matemáticas debes ser capaz de resolver problemas rápidamente.
17. Los alumnos aprender matemáticas mejor atendiendo a las explicaciones del profesor.
18. Cuando los alumnos están trabajando en resolución de problemas, lo importante es llegar a la respuesta correcta más que el procedimiento seguido.
19. Además de llegar a la respuesta correcta, en matemáticas es importante entender por qué la respuesta es correcta.
20. Los profesores deben permitir a sus alumnos encontrar sus propias formas de resolver los problemas.
21. No conviene usar procedimientos atípicos porque pueden interferir con el aprendizaje del procedimiento correcto.
22. Las actividades manipulativas en matemáticas son una pérdida de tiempo.
23. El tiempo usado en investigar por qué sirve una solución en un problema matemático es tiempo bien gastado.
24. Los alumnos pueden encontrar la forma de resolver problemas matemáticos sin ayuda del profesor.
25. Los profesores deben alentar a los alumnos a encontrar sus propias soluciones a los problemas matemáticos, incluso si no son las más adecuadas.
26. Es beneficioso para los alumnos discutir diferentes formas de resolver un problema.

C. CREENCIAS SOBRE EL ÉXITO EN MATEMÁTICAS

27. Como los alumnos mayores pueden razonar de forma abstracta, el uso de modelos manipulativos y otros materiales dejan de ser necesarios.
28. Para ser bueno en matemáticas se necesita una "mente matemática".
29. Las matemáticas es una materia en la que la capacidad natural importa más que el esfuerzo.
30. Sólo los alumnos más capaces pueden resolver problemas con varios pasos intermedios.
31. En general, los chicos son mejores en matemáticas que las chicas.
32. La capacidad matemática de una persona apenas cambia a lo largo de su vida.
33. Algunas personas son buenas en matemáticas y otras no.
34. Algunos grupos étnicos son mejores en matemáticas que otros.

IV- Encuesta sobre GeoGebra

En una escala del 1 al 5, donde 1 es "totalmente en desacuerdo" y 5 es "totalmente de acuerdo", por favor valora tu grado de acuerdo con las siguientes afirmaciones: Contesta con sinceridad, gracias.

1. GeoGebra me resulta fácil de usar

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

2. Prefiero resolver problemas de geometría con lápiz y papel que con GeoGebra

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

3. GeoGebra me ayuda a entender relaciones entre los objetos geométricos

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

4. Trabajar con GeoGebra es aburrido

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

5. Con GeoGebra puedo comprobar conjeturas visualmente con facilidad

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

6. Creo que GeoGebra no sirve para enseñar geometría en Primaria

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

7. GeoGebra añade algo a la experiencia de aprendizaje

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

8. Me resulta más fácil bloquearme con GeoGebra que con lápiz y papel

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

9. GeoGebra me ayuda a explorar, experimentar y hacer conjeturas

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

10. Prefiero trabajar en el ordenador solo/a que en pareja

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

11. Con GeoGebra los estudiantes se interesan y entienden de qué se trata

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

12. Usando GeoGebra me resulta más difícil tomar la iniciativa para resolver problemas nuevos que con lápiz y papel.

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

13. Usar GeoGebra me puede ayudar a mejorar mis conocimientos geométricos

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

14. Creo que GeoGebra me ayudará a enseñar matemáticas a mis alumnos

1	2	3	4	5
☐	☐	☐	☐	☐

15. ¿Tienes algún comentario o sugerencia respecto al taller de GeoGebra?:

ANEXO II

REGISTROS DE LAS SESIONES DE LOS CASOS DEL ESTUDIO CUALITATIVO

V- Sesión estudio de casos. Pareja 2: Irene y Patricia

Patricia lee la primera parte del primer punto del problema propuesto. Irene se encarga de realizar la construcción en el portátil.

I: Vale, a ver… ¿polígono regular, verdad?
P: Sí
I: cuatro puntos…
P: ¿lo ponemos azul ya?
I: Sí
P: pues venga
P: ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)? .Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul. Ya sé cómo…bueno no
I: poniendo los puntos medios de cada cuadrado y…
P: yo me iba a precipitar para ponerlo así torcido, pero claro entonces no está en el vértice, ¿no?
I: no, es que en el vértice no tiene que estar. Tiene que estar el cuadrado en los lados. Hay que sacar los puntos medios
P: ah vale, pues entonces así
P: bueno y ahora el otro cuadrado
I: supongo que dará igual si es polígono regular
P: polígono regular, si. Pues otro cuadrado, pero en rojo.
I. yo supongo que habrá que unir los puntos mejor
P: ¿en vez de hacer un polígono?
I: si, porque si hacemos un polígono y luego movemos el rojo el otro no se va a mover con los lados
P: vale
I: o probamos con…
P: ¿qué ibas a decir?
I: es que así realmente son segmentos, no es un cuadrado. Es un cuadrado formado por segmentos, no se va a poder poner en rojo, vamos a tener que hacerlo con la herramienta polígono sin más
P: pues lo iré apuntando

Usan la herramienta polígono regular para construir un cuadrado azul

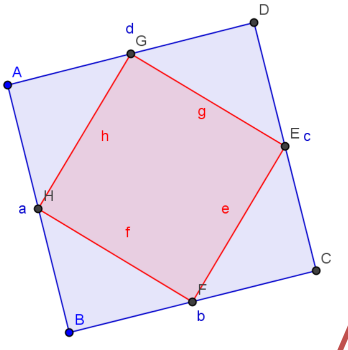
Marcan en cada lado del cuadrado azul el punto medio

Dudan en usar la herramienta segmento o polígono

Irene toma las decisiones. Patricia acepta sus razonamientos

I: vale. Voy a deshacer esto

Mientras Irene realiza los cambios en la construcción, Patricia escribe el procedimiento que han seguido en el auto-protocolo.



El texto tiene algunos errores de sintaxis pero el lenguaje geométrico es adecuado

Hemos realizado 1 cuadrado, en este primero, hemos sacado los puntos medios, de cada lado del cuadrado. Para realizar el cuadro inscrito dentro del primero, primero hemos unido los puntos medios con segmento, pero hemos desechado esta opción, porque no formaba un polígono real, por lo que hemos utilizado la herramienta Polígono para formar el 2º cuadrado.

P: ¿a ver?, y si se mueve se va, ¿no?

I: no, se queda.

P: si vamos, que no varía. ¿Y lo has puesto rojo?

I. si, voy a ponerle un rojo más llamativo

Usan arrastre de test con el cuadrado azul

Patricia lee en alto lo que ha escrito en el auto-protocolo y lo corrige con ayuda de Irene. Entra la profesora y pregunta si ya han acabado el primer apartado. También les hace alguna sugerencia.

La profesora sugiere mejoras y pregunta el procedimiento seguido

Prof: ¿Ya lo habéis hecho, el primero?

I, P: Sí

Prof: los ejes si queréis los podéis quitar para que se quede la pantalla más diáfana, más limpia y tengáis más sitio. Porque a lo mejor podéis necesitar dibujar otro para la segunda parte, o lo que sea y así no estorba ¿no?

I, P: vale

Prof: vale, ¿pues entonces ese cómo lo habéis dibujado?

P: pues hemos hecho primero el primer cuadrado con lo de polígonos

I: con polígono regular

P: luego hemos sacado el punto medio de cada lado del cuadrado y lo primero que hemos intentado es hacer…

I: intentar unir los puntos medios con

Patricia explica el procedimiento e Irene le ayuda a precisar y termina la explicación

segmentos, pero entonces no se nos quedaba el cuadrado como tal, quedaban segmentos solos. Entonces luego, con la herramienta polígono…
Prof: los habéis unido, vale. Muy bien. Pues escribís todo lo que habéis hecho y ahora fijaros que el 2… Bueno, leedlo tranquilamente y ahora…

La profesora sale de la sala y las dos alumnas vuelven a trabajar solas. Primero acaban de redactar el auto-protocolo y luego empiezan a leer el enunciado del 2º apartado del problema.

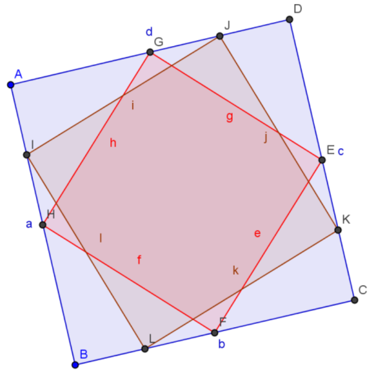
P: pues yo creo que, aunque esta forma es muy enrevesada, podríamos hacer, como aquí se han creado triángulos… Jo, es que es muy enrevesado, bueno o no, o sacar los puntos medios de aquí a aquí y el punto medio unirlo... Con éste, con éste y con éste. Vamos a probar.

Patricia toma la iniciativa. Irene sigue sus instrucciones

La profesora está mirando detrás de las dos alumnas como realizan la construcción.

I: ¿o sea, el punto medio de este segmento?
P: eso es, de éste… Eso es, y yo creo que ahora con polígono…Mira
I: muy bien
Prof: ¿y es un cuadrado, estáis seguras?

La profesora pide que comprueben la construcción

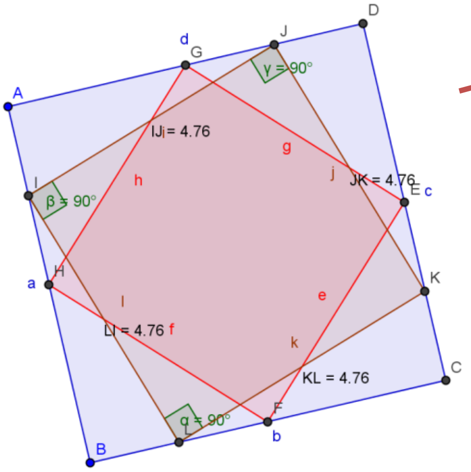


Miden los lados para asegurarse de que es un cuadrado

I: vamos a medir, ja ja.
Prof: Hay que comprobar que sea un cuadrado. Inscrito es, desde luego cumple la condición. ¿Estáis midiendo los lados, no?
P: sí, son todos iguales
Prof: ¿y si fuera un rombo, no pasaría eso también?
I: pero un rombo, es como un tipo de cuadrado
Prof: ¿Cómo sabes que no es rombo, que es un cuadrado?

I: porque tiene los lados… bueno, si se trazan las diagonales y son iguales y perpendiculares… a ver
Prof: o también podrías hacer otra cosa ¿no?
I: medir los ángulos. Si son de 90 es un cuadrado
Prof: vale, porque un rombo no los tiene que tener de 90
P: fenomenal, si
Prof: bueno, no hay que medirlos todos, ¿no? En el momento que hay 2 rectos ya obligatoriamente tienen que ser…

La profesora pregunta para que tengan en cuenta todas las propiedades del cuadrado



Miden lados y ángulos para comprobar que es un cuadrado

La profesora propone que generalicen el resultado

Prof: Luego sí, es un cuadrado. Habéis encontrado otro. La pregunta es ¿habrá más todavía?
P: Sí
Prof: ¿Sí, podrías construir uno que pudiera estar en todas las posiciones posibles?
I: ¿cómo uno que pudiera estar…?
Prof: uno que pudiéramos mover, porque ahora mismo estos vértices son fijos, no los podemos mover. Como los habéis trazado como punto medio no pueden mover. Imaginaros que uno de estos puntos fuera libre y al moverlo se moviera el cuadrado de manera que siempre ocupara una posición inscrita, ¿entendéis?
I: sí
Prof: a ver si podéis hacer eso…
P: pero yo no lo entiendo muy bien
I: sí, si tú… por ejemplo, si éste tuviese este punto libre y tú lo pudieses rotar dentro del otro cuadrado que siempre estuviera inscrito…
Prof: imaginaros que este vértice fuera la primera posición y esta la segunda. Lo he movido ahí y entonces el cuadrado se me ha puesto ahí y ahora lo muevo aquí y el cuadrado se me mueve a otra posición.

Patricia no comprende la idea. Irene se la explica

P: ¿y así no se puede?
Prof: no, porque no se pueden mover. Ahora mismo tal y como los habéis construido son fijos esos puntos. Pues intentad ahora, en otro dibujo si queréis, éste dejádmelo así. En otro, a partir de un vértice construid un cuadrado de manera que ese vértice pueda moverse por el segmento…
I: ¿sólo por ese segmento?
Prof: claro, porque cada vértice está en un segmento
I: vale
Prof: al moverse el vértice por ese segmento, el resto de los vértices sí que dependen de donde esté ese, ¿me entendéis?
P: más o menos, sí.

La profesora les pide construir un cuadrado rojo general, dinámico.

La profesora sale de la sala y se quedan solas trabajando

Patricia quiere usar GeoG. para hacer móvil el cuadrado. Irene le explica que no es posible, hay que construirlo móvil

P: pues lo echamos más para acá. Le quitamos en propiedades lo del punto fijo…
I: no, porque te lo hace automáticamente. O sea, tú al hallar el punto medio, el punto medio ya es dependiente. Pero yo creo que si…hacemos un cuadrado…bueno, vamos a ir haciéndolo. Polígono regular…
P: con paralelas, no… no tiene nada que ver
I: al principio se me había ocurrido…porque si pones muchos cuadrados de estos juntos al final lo que te sale es como una circunferencia, pero la circunferencia no toca todo el segmento. ¿Sabes lo que te quiero decir? Si tú inscribes una circunferencia…
P: ¿y si hacemos una circunferencia y…sacamos las tangentes o lo que sea…ja ja ja
I: a ver…
P: ahora sí que podríamos hacer paralelas a esas
I: paralelas a…

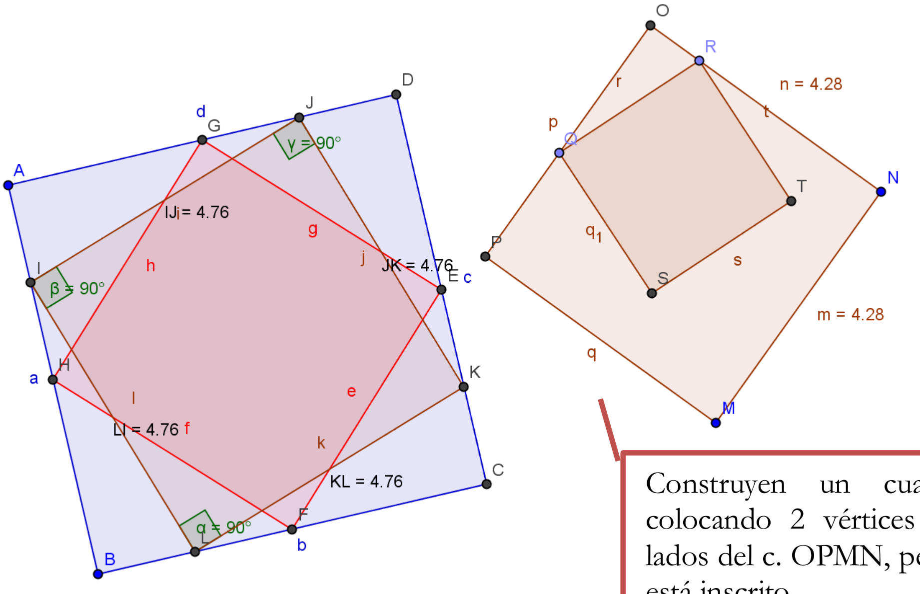
Patricia propone lo primero que se le ocurre, sin pensar

P: a ésta. Si calculamos el punto medio otra vez ¿no se puede sacar una paralela para que corte?, ¿daría igual, no? Me entiendes lo que…
I: ¿pero para qué quieres sacar una paralela?
P: no lo sé, ja ja.
I: a ver, el punto medio. Es que este punto ya es fijo

Irene le pregunta el propósito de su propuesta. Patricia reconoce no saberlo

Las alumnas están bloqueadas, no se les ocurre como resolver el problema. Tardan bastante rato en hacer algo nuevo, están pensando.

I: vamos a probar directamente poniendo un punto en el segmento. Éste ya es libre
P: sin medir
I: éste ya se mueve, lo que pasa es que lo complicado es hacer que el resto de puntos sean… se muevan. Que esto siga siendo siempre un cuadrado
P: ya, pues sí…
I: porque yo creo que si hacemos ahora un polígono poniendo aquí
P: y lo que hacemos es forzar…
I: ah, no. Tiene que ser polígono regular, no polígono sin más
P: si, de ese punto…
I: de este punto hacer un polígono regular y luego, nosotros, a lo mejor si se hacen fijos… ¡es que se hacen fijos automáticamente!
P: ¿y lo puedes mover?
I: no, no puedo moverlo…



Construyen un cuadrado colocando 2 vértices en 2 lados del c. OPMN, pero no está inscrito

Prof: ¿qué tal?
I: regular
Prof. ja ja, muy inscrito ese no está
I: lo hemos hecho al revés
Prof: ah, bueno

Irene piensa que este procedimiento no servirá

I: pero, aun así…si lo intentamos yo creo que con esta herramienta no se va a poder
Prof. mira a ver, mira a ver. Hazlo bien primero, que te da mucha intuición esa herramienta. Vale, ahora fuerza…

La prof. sugiere que usen la construcción para intuir la posible solución

I: a que los puntos…

Irene busca la posición del cuadrado interior para que quede inscrito, para ello arrastra el vértice R y el Q hasta que S y T están en los otros dos lados del cuadrado grande.

Prof: eso es, fuérzalo. Lo suyo es mover el de dentro, el otro no, ¿vale? Ves, ¿eso es un cuadrado seguro, no? Has usado la herramienta polígono regular, luego ya no hace falta que midas lados ni ángulos. ¿Y qué, sí se puede poner ahí, no?

Usan arrastre guiado para inscribir el c. RQST en el OPMN

P: A ver, mueve los de fuera ahora y hazlo más grande

I: Pues no, pero claro el pequeño se va…¡pues no!

P: ¡anda!

Se sorprenden de que la figura se mantenga cuando arrastran los vértices M o N

Prof: pero la cuestión es: ¿hay más?

P: ¿más qué?

Prof: cuadrados. ¿Es ese el único que hay?

I: no, no es el único

Prof: venga, mueve Q. No lo pongas en el medio, en el punto medio porque es el que ya…

I: sale el otro…

Prof: ahí, muy extremo, venga. ¿Ese serviría también?

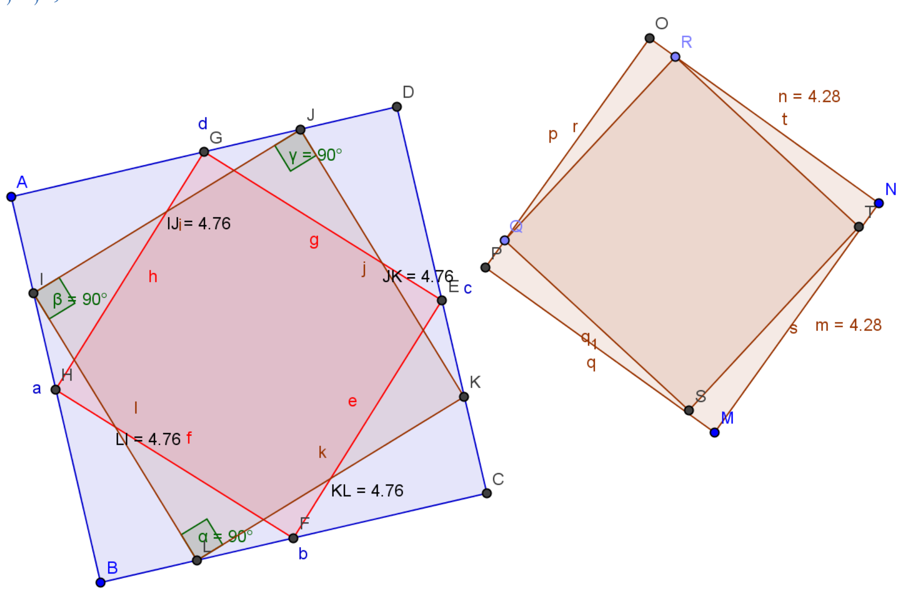
P: Sí

La prof. guía a las alumnas para que generalicen

Prof: vale, ¿cuántos cuadrados hay inscritos en el azul, entonces?

P: infinitos

I: ja ja, un montón



Prof: ¿lo ves, qué posición puede ocupar R, el punto R?

P: cualquiera en este segmento

Prof: claro, pues ahora quiero que me construyáis ese cuadrado, el general. El que moviendo R por ese segmento ocupando cualquiera de sus puntos, el resto de los vértices se mueven por los lados del cuadrado azul. Sin salirse.

La prof. insiste en la idea de construir un cuadrado general dinámico que generalice todas las posiciones posibles

I: o sea, que yo moviendo R estos puntos no se salgan de…

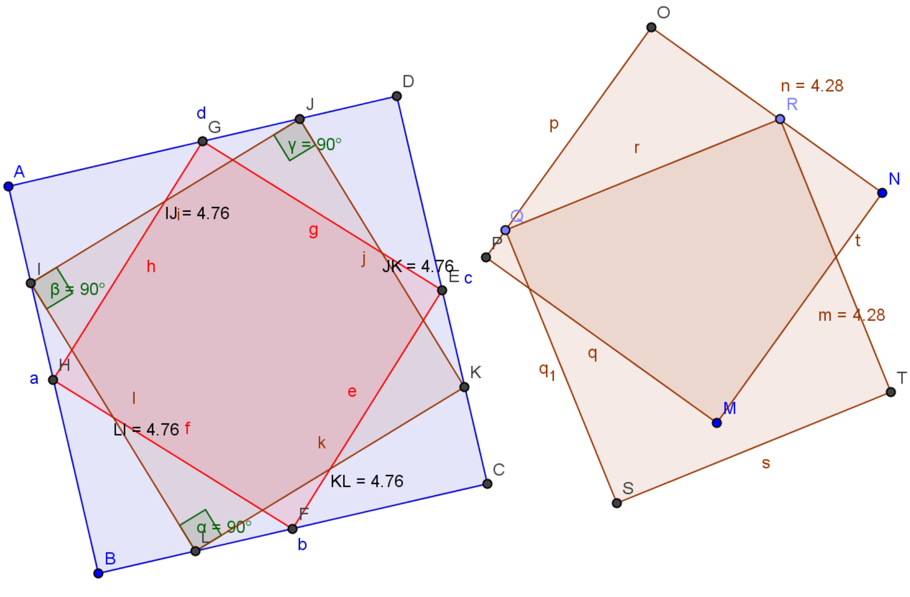
Prof: no se pueden salir de los lados. Se mueve todo el cuadrado de dentro con R, de manera que siempre está inscrito. Eso es lo que quiero que me construyáis.

P: porque ahora si lo abres ¿si que se van?

Prof: ahora se van, ¿no lo ves? Ya se han ido.

P: ah, bueno. ¿y para afuera también?

Usan arrastre de test para comprobar que el c. no se mantiene inscrito



Prof: o sea, lo tienes que construir a partir de un vértice. No puedes usar esta herramienta, esta herramienta te hace esto. Lo tienes que construir tú, con conocimientos geométricos, sabiendo qué relaciones hay entre los vértices de un cuadrado.

I: vale

Prof: ¿Si, veis las relaciones? O sea, R condiciona a este punto totalmente, ¿no? Bueno, y también a los otros. Pero el opuesto se ve muy fácilmente la posición que tiene que ocupar siempre. Tú lo has visto muy bien (a Patricia) cuando has dicho: aquí el punto medio y el otro punto medio y has dicho: no no, este punto medio. Y aquí también, ¿ no? Has visto que condiciona donde

lo pongas, pues mirad a ver cómo construir… Partís sólo de R, ¿cómo construyo S?
I: hay la misma distancia
P: claro

La prof. explica reiteradamente que el c. debe construirse partiendo de un vértice libre y los demás dependientes.

Prof: si pero como queremos que se mueva cuando se mueve R…Mirad a ver cómo puedo construir cada vértice, es decir, teniendo sólo el primero ¿cómo construyo los otros? De manera que dependan de R. Pensad a ver que se os ocurre…

La profesora sale de la sala. Las alumnas se ríen pero están pensativas, no tienen claro que deben hacer.

Intentan transferir procedimientos conocidos

P: a lo mejor es lo que vimos ayer de…
I: de los triángulos
P: de los triángulos, ¿no?
I: a ver, vamos a dejar éste aquí aparte. Tenemos nuestro cuadrado principal, vale. Entonces, a partir de un vértice del cuadrado…
P: que se mueva en todo el segmento
I: a partir de este vértice, tenemos que hallar los otros cuatro para que quede siempre inscrito
P: a ver, este lado con este sería siempre la misma…no. Pero este lado si es más grande. Yo creo que va a ser la figurita de ayer. A ver, 3.59 es más grande. ¿Y cuánto mide este cachito?
I: es que te da igual porque tú puedes modificar esto, ¿sabes?
P: si, pero
I: o poner esto aquí…
P: pero sería esta parte más ésta. No, ¿cómo era la formulita de ayer?
I: no sé qué formulita dices
P: el teorema de Tales
I: ah, ¿por Pitágoras?
P: ¿es Pitágoras o Tales igual, no?

Patricia insiste en una fórmula que usó ayer, aunque no tenga relación con este caso

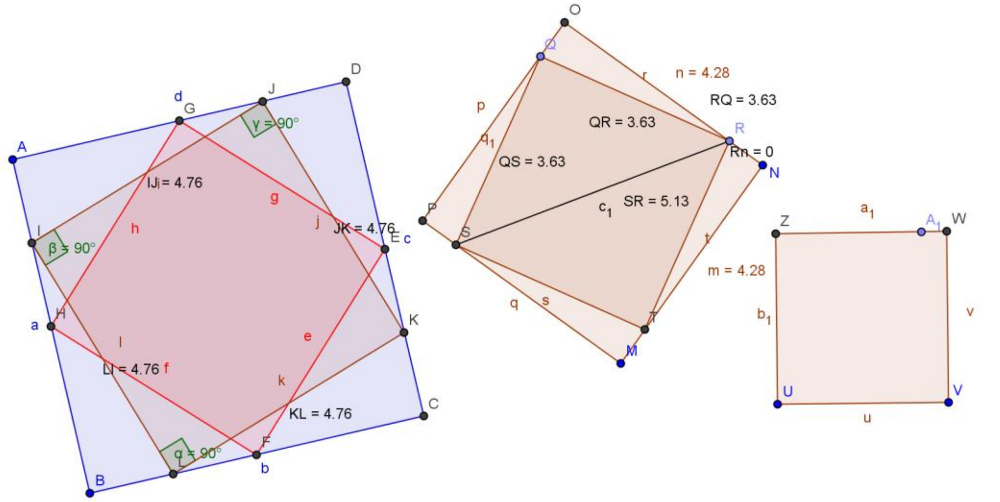
I: A ver, si tenemos este punto que es A y el opuesto es justo la diagonal del cuadrado. El cuadrado son dos triángulos
P: y estos triángulos, si sumamos los 4
I: son rectángulos
P: y si sumamos el área de cada triángulo seguro que es el área de este más éste. No, pero eso era otro…
I: no, eso…
P: pero yo creo que el área de cada triángulo de estos forma también…
I: 3.32… está formado por dos triángulos equiláteros, no: rectángulos isósceles. Entonces, a ver…

P: y estos son rectángulos, ¿cómo se llamaban?
I: rectángulos escalenos. Pero claro, estos son isósceles, el punto R y Q son de la misma longitud pero es que no lo veo. Y esto es una diagonal del cuadrado, sería la base de un triángulo rectángulo isósceles, pero no se me ocurre la manera de hacerlo fijo en el cuadrado
P. a ver…
I: o sea, esta distancia es esta distancia…

Las dos alumnas están pensativas sin hablar, mirando la pantalla del ordenador

Intentan relacionar medidas entre los dos cuadrados, pero no llegan a nada

I: o sea, esta distancia tiene que ser la diagonal del cuadrado, y yo creo que si el cuadrado es inscrito…la diagonal de este cuadrado inscrito va a medir lo mismo que el lado de éste. No, me estoy colando.



P: ¿y cuánto mide cada lado, por ejemplo m? ¿Y éste aunque lo muevas siempre mide lo mismo, la diagonal que has hecho ahí? Y ese mide siempre más
I: la diagonal mide en relación a lo grande que sea el cuadrado
P: y a ver, páralo ¿cuánto hay de diferencia?, podría ser…
I: tiene que haber una manera porque…, el punto opuesto a éste va a estar en este lado
P: o en éste
I: no, porque aquí va a estar el contiguo. Nosotros partimos de este punto, entonces el opuesto tiene que estar aquí

Intuyen que construyendo la diagonal a partir de A_1 podrían encontrar la solución, pero no saben cómo hacerlo.

P: ah, vale
I: entonces, hasta aquí tiene que llegar la diagonal del cuadrado, ¿sabes? Igual que aquí en éste llega aquí la diagonal
P: ¿no podemos construir algo que nos mida eso como 90º, desde ese punto?
I: no se…
Prof: ¿cómo va la cosa?
I: seguimos aquí dándole vueltas
Prof: ¿qué habéis hecho?

La prof. vuelve a preguntar qué han hecho

I: pues investigar las propiedades un poco del cuadrado, pero tampoco nos sale
P: y ahora estábamos mirando a ver si había alguna opción que nos dejase construir un ángulo de 90º desde ese punto, pero…
Prof: sí, si hay una opción pero ¿con eso qué haces?
P: con eso hago que luego sean rectas
Prof: ya entiendo lo que quieres decir, que intersequen a los lados y que determinen esos puntos
P: claro
Prof: ¿y tú crees que lo que te va a salir es un cuadrado?
P: yo creo que sí saldría un cuadrado porque es de 90º, que es lo que hemos visto antes

Patricia piensa que construyendo un ángulo de 90º en el punto A_1 resolvería el problema

Se hace un silencio, las alumnas no dicen nada

Prof: hay una cuestión, una propiedad aparte de los ángulos y los lados que caracteriza a los cuadrados. ¿Qué es? Aparte de que tengan los lados iguales y los ángulos de 90º, que otra…
I: las diagonales
Prof: ¿las diagonales cómo tienen que ser?
I: iguales y perpendiculares entre sí
Prof: ajá ¿y donde se cortan las diagonales?
I: en el centro del cuadrado

La prof. guía a las alumnas para que tengan en cuenta todas las propiedades de la figura

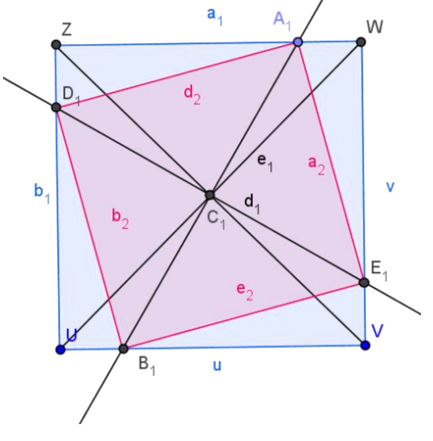
Prof: y ¿eso no os da una pista?
I: ah, claro, que el centro del cuadrado va a ser el mismo para éste que para éste
Prof: ¿cuál es el punto que vais a usar de vértice del pequeño?
I: el A_1, sí
Prof: pues quítate ese, que ese no se cómo lo has hecho. Fíjate en A_1, ¿cuál es su opuesto?
I: aquí, en el lado u
Prof: en el lado u, ¿quién, de todos los puntos que hay en ese segmento cuál es el opuesto?

I: pues donde corte la diagonal
Prof: pues ya lo tienes, ¿puedes trazar la diagonal?
I: si, hago una recta…
Prof: ¿la tienes o no?
I: sí
Prof: mueve A_1 para que lo veas. ¿Lo veis o no?
P, I: sí
Prof: ¿y los otros dos?
I: pues se saca la otra diagonal con una recta perpendicular a ésta y la intersección con los segmentos
Prof: y ya estaría

Irene va contestando a la prof. y construyendo las diagonales

La prof. pide que hagan arrastre de test

La profesora observa como Irene construye en silencio la figura pedida. Patricia no interviene, está mirando atentamente la pantalla.



Prof: pero no estáis hablando nada entre vosotras, ¿ya lo tienes o no?
I: si, yo creo que sí. Si claro, si lo que no veíamos era cómo trazar la diagonal. Aquí habíamos trazado la diagonal, pero no habíamos visto que el centro de la diagonal del cuadrado pequeño era el mismo…no nos habíamos dado cuenta que desde ese punto podíamos empezar a construir la diagonal del pequeño.
Prof: vale, pues ahora dejadlo un poquito apañadito, limpiad cosas y anotad todo, cada paso que habéis ido haciendo, incluso los que habéis probado también antes de borrarlos los anotáis para que no se os olviden, ¿vale?
I: vale
La profesora sale de la sala.

La prof. les pide que limpien la construcción y anoten el procedimiento

I: este no nos sirve realmente
P: no. Pues ya no me acuerdo ni de lo que hemos estado viendo
I: espera que antes de borrar éste…

P: de todas formas fíjate que como está diferente colocado, así a la vista no parece un cuadrado ¿verdad?
I: sí
P: ¿quitamos las diagonales?
I: vale, vamos a ir escribiendo casi mejor para que no se nos olvide
P: es que yo ya no sé lo que hemos hecho
I: a ver, hemos empezado…
P: con lo de un punto
I: con la herramienta polígono regular hemos hecho un cuadrado
P: hemos puesto un punto, ¿no?
I: si hemos comprobado…hemos puesto un punto en un segmento
P: y hemos comprobado que se movía
I: sí, para comprobar que había varios cuadrados inscritos. Infinitos cuadrados inscritos. Bueno, el intento 1 ha sido éste y el intento 2 ha sido: realizar otra vez el cuadrado pero hemos vuelto a hacer los mismos pasos que en éste, realmente no…
P: aunque lo hemos probado en éste, o sea ya teníamos el cuadrado inscrito hecho
I: claro, entonces… hemos trazado…
P: en el ejemplo anterior…
I: no, en éste que estamos hablando
P: lo único que aquí todavía no tenemos un cuadrado inscrito para verlo
I: ya ya…

Hablan las dos a la vez intentando ponerse de acuerdo en cómo redactar los pasos que han seguido para realizar la construcción. Discuten si poner en el auto-protocolo las ideas que han surgido pero que no han aprovechado ni les ha servido para realizar construcciones. La profesora entra para ver cómo van y les sugiere que tengan cuidado con el vocabulario que eligen para describir el procedimiento seguido, que lleguen a un acuerdo sobre los términos más adecuados. Preguntan si borran la construcción que han usado de prueba hasta llegar a la solución. La profesora les anima a dejar todo lo que informe sobre el proceso que han seguido, que es lo que realmente interesa, no sólo el resultado.
Irene va reconstruyendo los pasos y dicta a Patricia lo que tiene que escribir. El texto que escriben en el auto-protocolo es el siguiente:

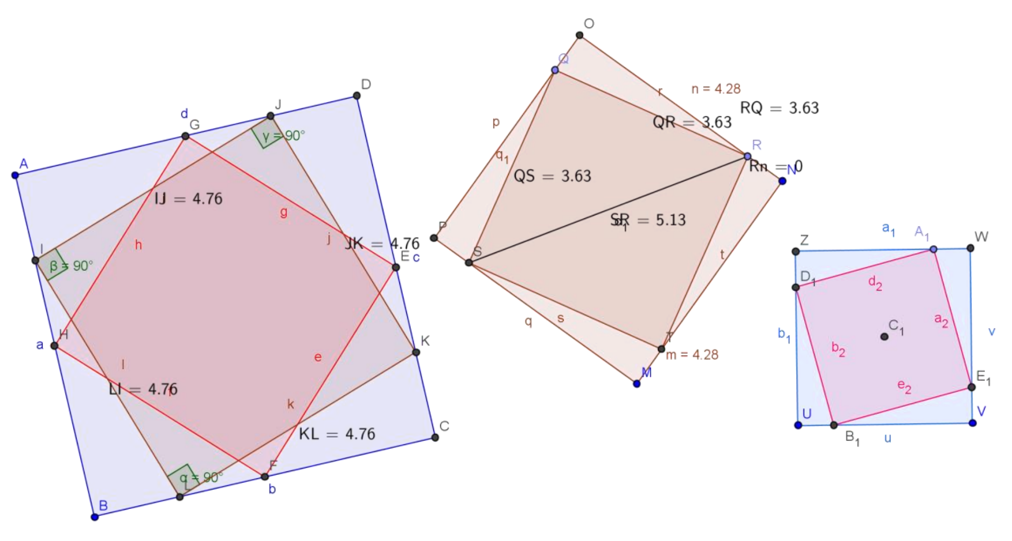
Con la herramienta de polígono regular hemos realizado 1 cuadrado, hemos puesto 1 punto en 1 segmento, para comprobar que había ∞ cuadrados inscritos. Hemos trazado 1 diagonal del cuadrado inscrito, hemos intentado encontrar propiedades del cuadrado y triángulos, ya que hemos dividido el cuadrado en dos partes.

Y por último dibujado de nuevo 1 cuadrado, hemos hallado las diagonales y hemos marcado la intersección de las dos diagonales, que es el centro del cuadrado. Después hemos marcado 1 punto en 1 lado cualquiera del cuadrado y con la recta que pasa por dos puntos, hemos trazado 1 recta que pasa por el punto marcado en el lado y por el centro del cuadrado, donde se corta la recta con el segmento opuesto, hemos marcado otro punto. Para hallar los otros dos vértices del cuadrado inscrito, hemos utilizado la herramienta recta perpendicular, puesto que ambas rectas constituyen las diagonales del cuadrado inscrito. Finalmente hemos utilizado la herramienta de polígono, para unir los cuatro vértices del cuadrado inscrito.

No anotan todos los intentos que han realizado, pero su lenguaje es bastante correcto.

P. y ya está. ¿Y no borramos las diagonales, las dejamos así?
I: ¿éstas?, vale. Uh, ha desaparecido
Prof: bueno, el caso límite se superponen los dos cuadrados, ¿no?
P: anda, y ahí se queda la mitad, qué bueno…
I: desaparece
Prof: bueno, pues ya habéis acabado…

Después de que Irene oculte algunos elementos de la figura, las construcciones realizadas quedan así:



VI- Sesión estudio de casos. Pareja 18: Andrés y Daniel

Los dos leen en silencio el primer punto del problema propuesto. Daniel se encarga de realizar la construcción en el portátil.

D: bueno, utilizando polígono regular, que es ésta
A: quitamos…
D: sí, el eje. Es mejor
A: ¿ponemos la cuadrícula?
D: no te preocupes, déjalo así. A ver, polígono regular. Esto es lo que no acabo de entender, 4 puntos…Vale, ¿lo podemos dejar así? Está bien
A: sí. Lo ponemos primero de azul
D: ah, sí de azul. Vete escribiendo tú o voy escribiendo yo si quieres.

Usan la herramienta polígono regular para construir un cuadrado azul

Daniel comienza a escribir el auto-protocolo mientras Andrés cambia de color el cuadrado que acaban de construir. Redactan entre los dos el primer y el 2º paso que han dado (Daniel escribe el primero y Andrés el segundo):

1º Paso. Hemos construido un polígono regular, dando al botón de herramienta regular. Marcamos dos puntos y luego ponemos el nº de vértices que hay en el cuadrado (4).
2º. Ponemos el cuadrado de color azul, pinchando en propiedades sobre el cuadrado, marcando la pestaña del color.

D: ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado? Vale, vamos a inscribir otro cuadrado dentro de él.
A: debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul. Entonces, tendría que ser como un rombo
D: claro
A: tendríamos que sacar la mitad del…
D: y si pincho aquí, ah no…
A: no porque no te saca la mitad…porque te dice que debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul, sería como algo…
D: si, en plan rombo
A: sí, como un rombo, ¿no?, un cuadrado… tendría que ser por ahí
D: le damos a…
A: no, en el de al lado
D: punto medio, ¿no?
A: o mira a ver aquí, si hay otro, al lado…
D: yo creo que es punto medio y hacemos…
A: si, punto medio y pinchar la recta y ya está

Confunden cuadrado con rombo, al visualizarlo apoyado sobre un vértice.

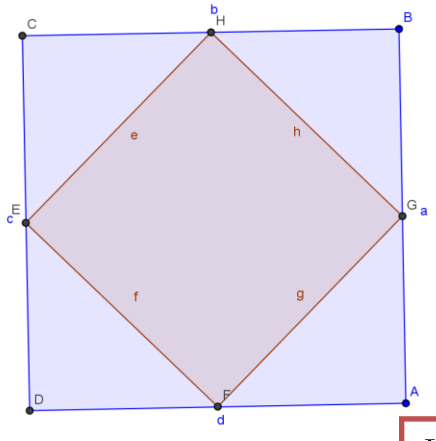
Marcan en cada lado del c. azul el punto medio (dudando qué herramienta utilizar)

Daniel realiza la construcción de los puntos medios

Usan la herramienta polígono para unir los puntos medios de cada lado.

A: con que pinches la recta vale
D: ah, es verdad. Ya está, entonces si tenemos un par de segmentos así, me sale el cuadrado ya
A: pero, vamos a ver si se puede hacer con…

Daniel construye algo en silencio, y deciden escribir el paso que acaban de dar. Entra la profesora.



Prof: ¿qué tal?
A, D: bien
Prof: ¿cómo habéis calculado ese cuadrado?

La prof. les pregunta el procedimiento seguido y D se lo explica

D: hemos pinchado…como pones aquí debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul, pues hemos pensado con el punto medio en el centro y hemos pensado en cada recta y de ahí nos han salido los puntos H, E, G y F, hemos ido a polígono y directamente hemos unido los puntos y nos ha salido el cuadrado éste.
Prof: ¿habéis movido los vértices del cuadrado azul para ver si se mantiene la figura?
D: no, eso es lo que vamos a hacer ahora
A: si se mantiene

La prof. les pregunta si han comprobado la construcción mediante arrastre de test. Lo hacen

Prof: ¿qué pasa?
D: pues que según agrandamos el…
A: el cuadrado azul…
D: el cuadrado rojo…
A: va agrandándose también…
D: va agrandándose en proporción igual. Son proporcionales
Prof: vale. ¿Los puntos medios se pueden mover?
A: están fijos

Los dos alumnos colaboran para explicar lo que observan. Ninguno lleva la voz cantante

Prof: están fijos, esos no se pueden mover, son dependientes. Vale. Bueno, pues con eso habéis resuelto la primera pregunta
D: sí, el tercer paso todavía no lo hemos puesto, pero los otros dos sí. Ahora los escribimos
Prof: vale, pues la idea es…bueno ahora leed la segunda pregunta
D: ¿acabamos de poner los pasos, no?
Prof: sí, sí. Muy bien

Daniel dicta a Andrés el tercer paso para el auto-protocolo. Entre los dos buscan las palabras para expresar lo que acaban de hacer.

3º Paso: Calculamos el punto medio de cada lado del cuadrado azul, pinchando en la herramienta de punto medio o centro. Una vez que se han marcado la mitad de cada lado (por puntos) lo hemos unido con la herramienta de polígono.
Una vez terminados los pasos, hemos comprobado que al mover un vértice del cuadrado azul, el rojo no varía.

El lenguaje tiene incorrecciones de sintaxis, pero se ajusta al procedimiento geométrico seguido

Los dos leen la segunda pregunta y dicen algunas frases balbuceantes mientras piensan qué hacer

A: podemos construir otro cuadrado azul y ahí ver si se pueden…
D: ¿borro este de dentro?
A: no déjalo

Daniel empieza a manipular GeoGebra en silencio

D: la pregunta es la misma sólo que dice si hay más cuadrados. Si hay más cuadrados que pueden estar dentro del azul
Prof: ¿entendéis la pregunta?
D: creo que es que si puede haber más cuadrados dentro del azul
Prof: sí, si es el único cuadrado…se os ha ocurrido construir el cuadrado de los puntos medios de cada lado, ¿habría alguno que no sea ese, que no tenga los vértices en los puntos medios y que también se pueda inscribir en el cuadrado azul?, pero que siga siendo un cuadrado
A: vale, entonces podríamos hacer otro cuadrado azul…

La profesora explica la 2ª pregunta del problema

Prof: podéis hacer otra construcción o podéis utilizar esa para ver cómo podría ser y luego hacer otra, mirad a ver que se os ocurre. Pero la idea primero es ver cómo podríais construir otro cuadrado diferente
D: ¿da igual el tamaño, no?
Prof: sí, con tal de que sea cuadrado…
D: aquí en el centro de este cuadrado, si trazamos una perpendicular y unimos H y el centro del cuadrado…Tenemos C, H y E esto es la mitad ya de un cuadrado, falta sólo…

Trazan las diagonales del c. rojo y creen que los 4 cuadrados que se forman dentro del c. azul son soluciones

A: sólo este trozo, ¿no?
D: claro, y el F también, si trazamos aquí una perpendicular, claro y lo tenemos ya dividido en 4 cuadrados
A: y he pensado que podemos hacer un triángulo, el rombo lo partes por la mitad…esto es un triángulo…lo haces aquí un triángulo y aquí otro

A. vuelve a referirse al rombo, en lugar de c. rojo

D: ¿hacemos este primero a ver si nos dice que está bien?
A: por eso te digo, lo podemos hacer aquí en un lado
D: vale, lo hacemos encima y luego hacemos otro diferente. Hago un segmento entre H y F…

Para trazar la diagonal dudan entre usar "segmento" o "perpendicular"

A: no, puedes hacer una perpendicular
D. no sé si se va a mover, habrá que verlo ahora. ¿Qué hago, lo muevo a ver si se mueve, o qué?
A: no se va a mover. Y ahora este es igual que el rojo
D: vale, pues este es otro paso. Pues ponle, si quieres. Yo creo que este está bien y ahora hacemos otro
A: si, ahora lo apunto
D: vale, pues éste ya está hecho. Buscamos…
A: podemos hacer el que te he dicho yo
D: ¿hacemos un cuadrado nuevo? Aquí al lado, aunque sea
A: sí, arrástralo un poco para allá
D: aquí, hago el mismo de antes…
A: polígono regular…
D: lo ponemos en azul…propiedades…
A: puedes trazar…miramos a ver si se puede hacer con perpendiculares o paralelas para…
D: vale

Daniel construye algo sin hablar

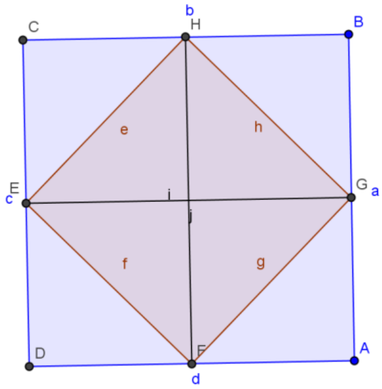
A: no, porque esto es la paralela según…no vale
D: yo creo que el que hemos hecho está bien. Ese ponle y ahora pensamos otro

A: voy haciendo algo de los segmentos, ¿hallo otra vez el punto…?
D: sí, el punto medio

Daniel se pone a escribir en el auto-protocolo, mientras Andrés investiga con el ordenador. Entra la profesora y le cuentan lo que han hecho

Prof. ¿a ver qué habéis hecho?
D: hemos unido H con F y E con G. Se nos han formado 4…
Prof: 4 triángulos
D: bueno 4…
Prof: ah, pero esos cuadrados… a ver, sigue sigue…
D: esos 4 cuadrados se nos han formado
Prof: pero esos cuadrados no están inscritos, fijaros que os digo en el enunciado que para que estén inscritos tienen que estar dentro, pero tienen que tener cada uno de los vértices en un lado del cuadrado azul, ¿eh? Como éste, cada uno de sus vértices toca a un lado del cuadrado azul

La profesora les pregunta qué han hecho. Se lo explican, ella les dice que los 4 cuadrados no están inscritos



Los dos están bastante despistados, balbucean algunas cosas, pero no saben bien que hacer. Andrés maneja el ratón.

A: es que es lo mismo
D: es que tiene que estar igual que éste, pero utilizando otra herramienta, por lo que he entendido…
A: o puede estar aquí, pero más girado
D: vale

Están un rato sin hablar, pensando en silencio. Parece que no se les ocurre nada.

A: podría ser una paralela así, sabes lo que te digo
D: que sea más pequeñito, trazar una perpendicular aquí y una paralela a eso, vale

Otra vez hacen cosas sin hablar, parece que no llegan a nada. Se dan entre ellos indicaciones breves, pero no se sabe que están haciendo.

D: y si hacemos el punto medio entre H y G y E y F, y nos sale otro cuadrado dentro del rojo
A: pero entonces ya no utilizamos el cuadrado azul, porque ya no son independientes

No acaban de entender qué significa que el cuadrado rojo esté inscrito en el azul. Lo vuelven a preguntar

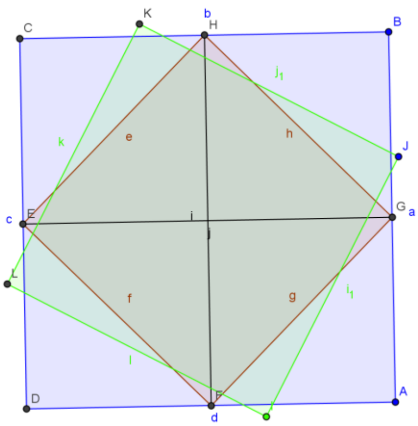
Prof: ¿qué tal lo lleváis?
D: ¿no hace falta que el cuadrado que hagamos toque los lados del azul?
Prof: sí, si no no estaría inscrito. Tiene que ser un cuadrado y tiene que tocar a cada uno de los lados del azul. Esas son las dos condiciones. ¿Ese cuadrado que habéis dibujado ahí qué es?
A: ese es para probar…
Prof: ¿cosas?, es un cuadrado azul. ¿Se puede mover? Eso es, vale. Pues, la idea es…

La prof. les incita a probar, a investigar con otros cuadrados

A: ya está
Prof: eso es, ¿Por qué no intentas con ese…? Ponle rojo, si quieres para que no te hagas un lío, o amarillo, de otro color. ¿Por qué no probáis para que os de ideas, cómo podríamos colocar ese dentro del otro?
D: vale, hombre si hacemos lo mismo…
Prof: pero muévelo, no os quedéis mirando, haced cosas… ¿Dónde lo quiero poner?

A. vuelve a llamar al c. rojo rombo y la profesora le corrige

A: es que habíamos pensado sacar uno que no sea un rombo como éste
Prof: eso no es un rombo, es un cuadrado
A: si, un cuadrado, pero que esté girado
Prof: bien, pues colócalo ahí a ver si es posible. Coloca ese dentro del otro a ver si puedes, muévelo entero. Si lo seleccionas entero lo puedes arrastrar entero. Ahí y ahora colócalo donde quieras y estíralo a ver qué pasa… ¿Sería posible?, ¿hay varias posibilidades o sólo hay esa?
D: Si puedes ponerlo de aquí a aquí, o al revés… si cogieras esto, vete girando y lo pones…Hay bastantes



Superponen un cuadrado dentro del azul para intuir, mediante arrastre guiado, si es posible construir otros c. inscritos

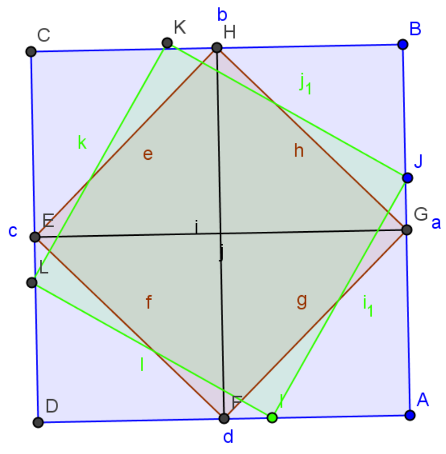
Prof: hay bastantes, ¿no? Bien, pues ahora que tenéis la intuición ¿seríais capaces de hacer una construcción de manera que ese punto se mueva por ese segmento…?

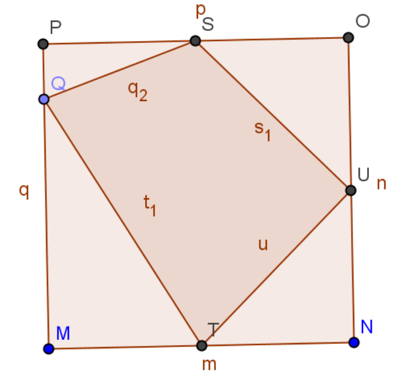
La profesora les pide construir un cuadrado general cuyos vértices se muevan por los lados del c. azul

A: ¿Qué este punto se vaya moviendo, el K?
Prof: bueno, me da igual el K o el que sea, uno de ellos, según se vaya moviendo ese se vaya colocando el cuadrado. O sea que los vértices dependen de uno
A, D: vale
Prof: a lo mejor para hacer eso sí que necesitáis abrir otro cuadrado
A: lo que podemos hacer es, ponemos un punto cualquiera que sea el que se mueva…
D: y los otros fijos, vale
A: vamos a ver si se mueve, vale ya está
D: ahora traza el punto medio del otro para que estos siempre estén fijos, ¿no? Es lo mismo que antes, si tú trazas los puntos medios de los otros 3 igual, estos 3 no se van a mover pero este sí. Vamos a ver si así se puede hacer
A: ¿cómo?

Construyen un vértice libre y los otros 3 son los ptos medios de los lados del c. azul. No obtienen un cuadrado

D: traza el punto medio entre P y O, O y N, N y M
A: no se va a poder mover
D. sí, pero sólo dice que se mueva un vértice los otros 3 que estén fijos. Este lo podemos mover y los otros 3 van a estar fijos, a ver muévelos…
A: y si trazamos…
D: no, haz estos y vemos si así vamos bien y si no, pues los quitamos.
A: y ahora trazamos un polígono, ¿no?
D: Sí. Pues eso no es un cuadrado, ves no sale. Si se mueve, pero los otros no hacen nada. ¿Y si ponemos lo de Q en función de J, L y M o algo así?





Andrés borra el polígono y prueba lo que acaba de sugerirle Daniel. Están un ratito en silencio mirando la pantalla.

D: yo creo que eso no va, lo de la mediatriz. Tiene que ser mucho más fácil…y si hacemos un segmento así, no, no va a salir tampoco…

Están bastante bloqueados, balbucean algunas cosas pero no llegan a realizarlas. La profesora entra en la sala.

Prof: ¿cómo va esto?
D: está un poco…
Prof: ¿está difícil?
D: Sí. El punto que has dicho, el vértice que se pueda mover lo hemos puesto pero ahora…
Prof: un vértice, bueno, hasta ahí hemos llegado. Pensad en las relaciones que tiene que haber con los otros vértices, ¿dónde tiene que estar el otro vértice?

Los alumnos están bloqueados. La prof les indica que se fijen en las relaciones entre los vértices opuestos de un cuadrado

D: pues el otro vértice tiene que estar…
Prof: pensad en los vértices opuestos, por ejemplo. Parece bastante evidente como tiene que ser. Mirad aquí este, entre el vértice K y su opuesto
D: una diagonal
Prof: si, es una diagonal del cuadrado, pero ahora el cuadrado no lo tengo. Como no lo tengo no puedo trazar la diagonal

La profesora va guiando a los alumnos a través de preguntas

D: claro
Prof: ¿qué condición tiene que tener ese segmento que quiero trazar para que sea la diagonal del cuadrado? Fijaros aquí, considerad el caso resuelto, que lo tenéis aquí, y ahora de ahí sacad la información necesaria para construirlo aquí.

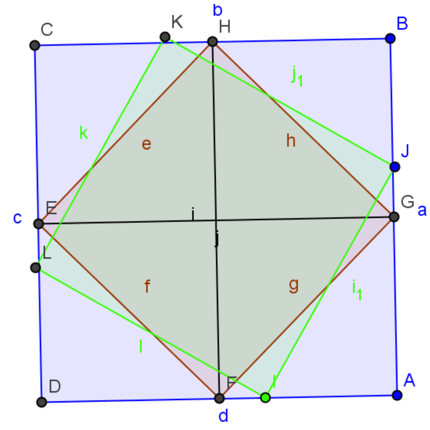
D: vale…pues, una… a ver, traza una perpendicular…no, no va a salir
A: ya lo hemos hecho antes
D: ¿y no salía, no?
Prof: si trazáis un segmento que une K con su vértice opuesto, ¿qué pasa? ¿por dónde pasa?
A, D: por el centro
Prof: ¿siempre va a pasar por el centro?, cambia de sitio el cuadrado a ver si poniéndolo en otra posición pasaría lo mismo, otro que no sea justo el rojo.

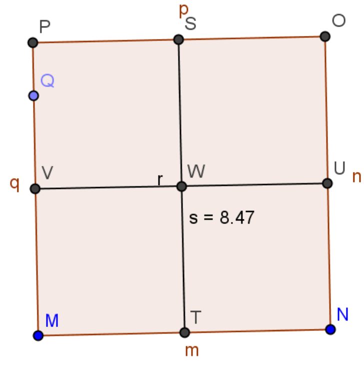
Se dan cuenta de que la diagonal que une un vértice y su opuesto pasa siempre por el centro del cuadrado

Andrés realiza los pasos que le ha sugerido la profesora

Prof: Cámbialo bastante de sitio…pero que no parezca el rojo, el rojo ya lo tengo. Ponlo en un caso bastante diferente
A: Sí, ahí sigue pasando
Prof: ¿sigue pasando?
A: como hemos trazado una X, tenemos que trazar una…
D: vale, entonces tienes que hallar el punto medio de m y hacer lo mismo que estos…
A: sí, para que se nos quede el centro y…luego trazamos una recta que…
D: una recta de Q que pase por el centro
Prof: que pase por el centro, pero primero tendríais que tener determinado el centro ¿no?
D: Sí
Prof: acordaros que todas estas cosas que estáis probando tendríais que anotarlas
D: vale
Prof: ¿os vais a acordar de todo lo que estáis probando?
D: Sí, creo que sí
A: ¿y este…?
D: no, primero halla el punto medio de q… ¿ahora serían todos los puntos medios?, pues halla ese y… ahora unirlas
A: vale
D: y ahora lo de Q, que pase por el centro
A: ¿Q que pase por el centro? ¿cómo lo hago?
D: con una perpendicular de Q al centro, a ver que sale
A: espérate, primero tenemos que trazar…el centro, ya está. Ahora una perpendicular…

Determinan el centro de un cuadrado como la intersección de los segmentos que unen los puntos medios de sus lados





Hacen algo que no les convence, se quedan pensativos

A: ¿y si las ocultamos?
D: ¿la r y la s?
A: Sí
D: vale, ocúltalas

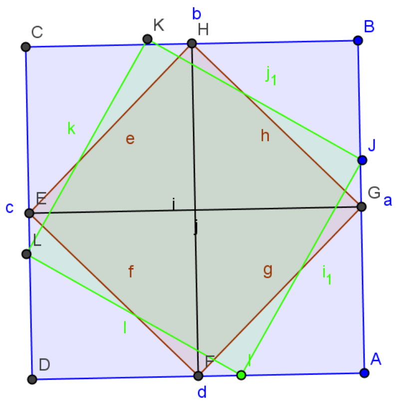
Vuelven a estar sin hablar mirando la pantalla y Andrés realizando acciones que no explican

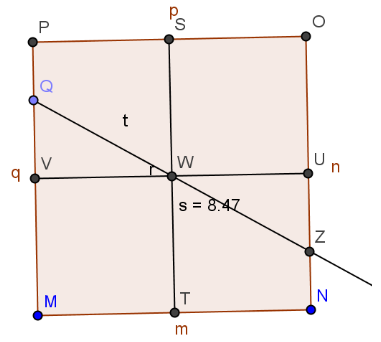
D: ¿y si anotas un segmento?, un segmento normal
A: segmento, recta que pasa por dos puntos…
D: semirrecta…pincha ahí…sí, pero ahora como calculamos los otros dos
A: ahí, vale
D: ¿la Q la puedes mover y si mueves Z o cuál?
A: Sí
D: vale, entonces va bien

Usan arrastre de test para comprobar su construcción

A: y ahora hacemos una perpendicular
D: una perpendicular no va… otra cosa por dos puntos no…se han formado dos triángulos si te das cuenta… para que sea un cuadrado formas dos triángulos iguales
A: ¿un triángulo, no?
D: Sí, mira a ver los segmentos estos cuánto miden y trazamos aquí un segmento igual y lo lanzamos

Vuelven a bloquearse y a probar cosas que les desvían del proceso





Andrés hace algo en el ordenador y balbucea algo que no se entiende

D: vale, muévelo…si pero, muévelo…y si lo mueves justo encima de la recta…

Usan arrastre de test para comprobar una construcción

A: esto tiene que ser lo mismo que esto, ¿no?
D: si, esto mide igual que esto, entonces halla lo que mide entre V y K y lo ponemos aquí y aquí y ya tenemos…
A: ¿cuál?
D: la que quieras, entre V y K…no, entre V y Q, eso. 1,51, entonces de U a N tiene que haber 1,51, ahí tiene que haber otro punto.
A: segmento…
D: pon 1,51. Traza una recta de aquí y Q y te sale igual

Andrés pregunta algo que no se entiende y dudan sobre cómo hacerlo. Entra la profesora.

Prof: ¿cómo vais?
A: ¿sólo se tiene que mover un punto, no?
Prof: claro, no es que sólo se tenga que mover ese, ese es el libre, los otros van a depender de él. Luego se van a mover cuando yo mueva éste, no independientemente de él
A: entonces esto no podría ser porque esto se podría mover
Prof: ¿y eso qué es?
D: es que hemos pensado que esta distancia, para que esto sea un cuadrado…esta distancia tiene que ser la misma que ésta

La profesora vuelve a situarles en el camino, al preguntarles si lo que están construyendo es un cuadrado

Prof: ¿y a ti te parece que eso sería un cuadrado? ¿si tuviera aquí un vértice y el otro aquí, sería un cuadrado?
A, D: no

Prof: no, además cada vértice tiene que estar en uno de los lados
A, D: sí, sí
Prof: sí que hay una relación entre donde están los puntos medios y donde está ese punto en relación a los otros, pero hay una cosa tan fácil…si es que ya lo tenéis. Este depende de ese, ¿no?, a ver mueve ese…eso es, perfecto. ¿Fíjate, qué relación hay aquí entre los vértices?

La profesora les indica que miren la figura que ya han construido antes, con el cuadrado rojo de vértices en los puntos medios del cuadrado azul

A: pues igual, ¿no?
Prof: tenéis dos de ellos, los otros ¿cómo están colocados respecto de esos para que sea un cuadrado? Mirad los que ya tenéis hechos, ahí tenéis un cuadrado ¿cómo son las diagonales de un cuadrado? ¿cómo son entre sí?

Los alumnos están pensativos, tardan en contestar

La profesora sigue formulándoles preguntas

A: paralelas
Prof: ¿cómo que paralelas?
D: son iguales
Prof: digo en este cuadrado rojo. Tenéis un cuadrado auténtico ahí, con sus diagonales trazadas, ¿cómo son entre sí las diagonales?
Los alumnos se quedan un buen rato callados, pensando sin contestar nada.

Prof: ¿no me entendéis?
D: ehhhhh
Prof: ¿cómo son entre sí las dos diagonales?
D: entre sí van a ser iguales, ¿no? Porque…
Prof: sí, iguales, de la misma longitud y además cómo
D: perpen…eh, una es…
Prof: dilo entero
A, D: perpendiculares
Prof: ¿siempre son perpendiculares?
D: sí, siempre
Prof: ¿para que sea un cuadrado las diagonales son perpendiculares siempre?, bueno pues tenéis trazada una diagonal ¿cómo trazáis la otra? Si trazáis la otra diagonal determináis los otros dos vértices que os faltan ¿sí o no?
D: sí
Prof: ¿Cómo?
D. pues haciendo una perpendicular ¿no?
Prof: claro

Los alumnos tardan en ver la relación entre las dos diagonales de un cuadrado: deben ser perpendiculares

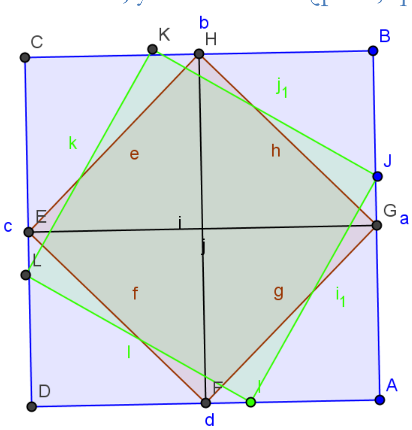
D: pincha perpendicular a esa recta…
Prof: ¿perpendicular que pasa por dónde?
D: por el centro

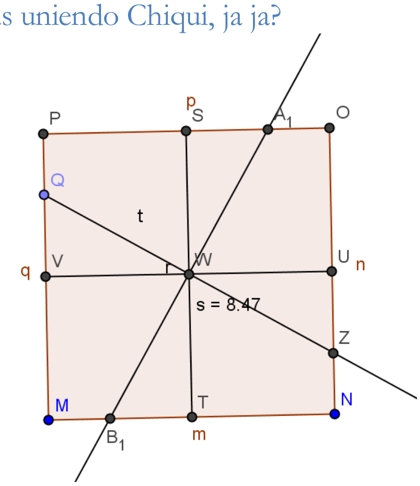
Andrés realiza los pasos de la construcción. La profesora está un poco impaciente, se nota en su tono de voz.

A: es que me marca las demás…
Prof: pero tú marca el punto centro, que se llama W. Pues márcalo cuando te salgan ahí
A: es que no sale, tendríamos que ocultar esto para que…
Prof: pues ocúltalo, si esas no las queremos para nada ¿para qué queréis esas? Ah, que las habéis trazado para determinar W, ¿no?
A, D: sí, la queríamos tener para luego trazar…
Prof: ¿qué estás haciendo?
A: para trazar la perpendicular, un punto…
Prof: perpendicular: un punto y la recta respecto de la que quiero que sea perpendicular
A: a ésta
Prof: perpendicular a r que pasa por…
D: es que le he dado antes y no me funciona, por eso estaba probando…

Parece que tienen dificultades para usar la herramienta "perpendicular"

Prof: ah, bueno. ¿Y cuáles son los vértices que faltan, entonces?
D: son éste y éste
Prof: pues a ver…ahora has ido muy bien a usar la herramienta intersección, ¿no? Ya lo tenéis
D: ahora sería unirlos
Prof: eso es, ya lo tenéis… ¿pero, qué estás uniendo Chiqui, ja ja?



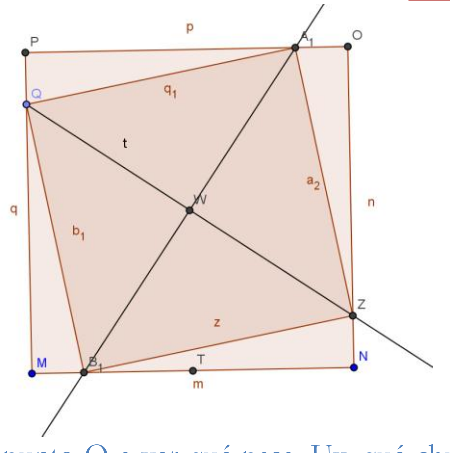


Se ríen los tres, después de estar un rato un poco tensos ya han encontrado la solución y están más relajados

D: no, el Q con A_1
Prof: esos puntos medios ya no los queremos para nada, ahora los borráis porque os hacéis un lío. Esos nos sirvieron para el primer cuadrado pero ahora ya…
D: sí

La profesora les indica que oculten los elementos innecesarios

Andrés realiza la construcción en silencio



Prof: eso es, mueve el punto Q a ver qué pasa. Uy, qué chulo ¿eh? ¿Cuántos hay?
A: si hay varios
Prof: varios ¿eh?, ¿cuántos, cuántos puntos hay en cada segmento? ¿Hay uno por cada punto del segmento, no?
A: sí
Prof: y ahí tenéis el que habéis hecho primero. Pues ahora tenéis que escribir todo lo que habéis hecho, ¿os vais a acordar?
A, D: sí, todos los pasos

Usan arrastre de test para comprobar su construcción, incitados por la profesora

La profesora sale de la sala y los alumnos se ponen a redactar el auto-protocolo acordando que van a poner tres pasos. Daniel se encarga de escribirlos. Comentan algunas cosas sobre el proceso de resolución:

A: ¿ves cómo eran perpendiculares?
D: sí, pero el problema es que no habíamos hallado el punto medio
A: ya, quería decir perpendiculares pero me he equivocado y he dicho paralelas
D: y yo creí que habías dicho perpendiculares

Los dos revisan las respuestas que han dado. Han dicho paralelas por perpendiculares y dicen pto medio por centro

1º Paso: Hemos realizado otro cuadrado igual que el azul anterior utilizando la misma herramienta de polígono regular. Hemos superpuesto el cuadrado nuevo (verde) sobre el cuadrado inicial (actividad 1). Para moverlo y ver las distintas maneras que podría estar colocado el cuadrado.

Discuten cuál ha sido el siguiente paso, que no les ha servido y han borrado. Dudan entre varias estrategias que han seguido.

Nos hemos dado cuenta que el vértice de un lado con el opuesto tiene que pasar por el centro del cuadrado. Primero hemos hallado el punto medio de cada lado del cuadrado y hemos unido cada lado a través de un segmento con el lado opuesto.
Lo primero que hemos hecho ha sido poner un punto cualquiera en un lado, para que sea el vértice del que dependan los demás vértices.

Sigue escribiendo Andrés.

Una vez unidos los lados hemos determinado el punto medio, mediante la herramienta de intersección de dos objetos. Una vez que tenemos el centro hemos trazado una semirrecta que pasa por dos puntos, pinchando en el punto que hemos trazado y en el centro, dándonos el nuevo punto en el lado opuesto.

El siguiente párrafo les cuesta mucho redactarlo, dudan entre las palabras adecuadas para explicar lo que han hecho y se lían bastante. Tachan varias veces y al final escriben lo siguiente:

El error que hemos tenido es que hemos visto que se formaban dos triángulos y hemos decidido medir el lado común que tenían el triángulo y el cuadrado. Una vez que teníamos la medida y trazado el segmento dados punto extremo y longitud, nos hemos dado cuenta que no valía.

Es difícil entender el procedimiento según lo expresan

Sigue escribiendo Daniel el siguiente paso:

2º Paso: Después nos hemos dado cuenta que si trazamos una perpendicular entre la recta y el centro del cuadro, nos han dado como resultado dos puntos. Para identificar estos puntos hemos utilizado la herramienta de intersección de dos objetos. Y por último hemos unido los puntos mediante la herramienta de polígono.

No usan el vocabulario adecuado. No emplean diagonal nunca. Indican bien las herramientas utilizadas

VII- Sesión estudio de casos. Pareja 22: Marta y Macarena

Macarena maneja el ordenador y Marta escribe el auto-protocolo. Leen el enunciado y empiezan la construcción:

Mar: la herramienta polígono regular. La siguiente…un cuadrado

Usan "polígono regular" para construir un c. azul

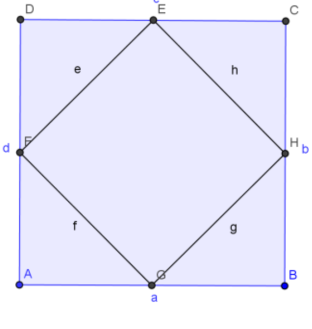
Mac: de color azul
Mar: vale, ponle de color azul
Mac: a ver, propiedades…color, ¿este es azul?...si no he hecho nada
Mar: no así, para hacer lo de dentro (realiza ella esta acción con GeoGebra)
Mac: Sí. Cuadrado de color azul, ¿podéis inscribir dentro un cuadrado rojo? A ver…pues ahora tenemos que buscar el centro…o sea, justo …

Usan "pto medio" en cada lado del cuadrado

Mar: el punto medio, pues está ahí, en punto
Mac: ¿en cuál?
Mar: aquí, en el primero. Aquí, punto medio o centro
Mac: lo hacemos de cada uno y ya con segmento lo unimos todo…éste con éste y éste con éste
Mar. Vale
Mac: ¿y éste en rojo?
Mar: Sí, debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadro azul. Vale, eso ya está
Mac: A ver…es que no puedo hacerlo

Mar parece tener más competencia en el uso de GeoGebra y toma la iniciativa cuando Mac no sabe hacer algo

Mar: sí dale… (Vuelve a coger ella el ratón) Ah, eso lo hicimos el otro día y es que hay que hacer otra vez…
Mac: ah, pues borra, borra
Mar: no también se puede hacer…pinta encima. Y ahora ya lo puedes pintar
Mac: ya sale con color
Mar: ¡no!
Mac: tranquilidad



Se dan cuenta que tienen que usar "polígono" en vez de "segmento" para poder ponerlo rojo

Mar: no, polígono dale
Mac: ay, lo he borrado
Mar: ya lo puedes pintar rojo
Mac: cuadrilátero… polígono… propiedades… en rojo, este rojo pasión
Mar: ya está. Anotad lo que vais haciendo con GeoGebra en esta hoja
Mac: indicando la herramienta de GeoGebra que utilizáis en cada caso, hasta las construcciones que no sirvan y que habéis borrado. Vale, pues lo ponemos. Pon…

Marta escribe en el auto-protocolo correspondiente al primer punto lo que Macarena le va dictando:

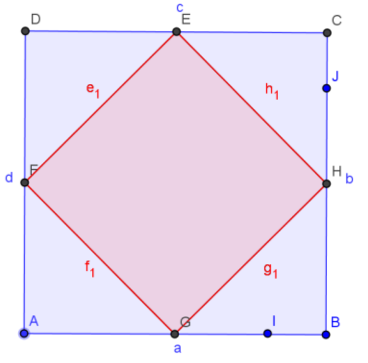
Hemos dibujado con la herramienta "polígono regular" dos puntos cualquiera en la vista gráfica. A continuación en la ventana que aparece hemos señalado que queremos cuatro lados y hemos dado al botón derecho para señalar en propiedades el color azul

Entra la profesora en la sala.

La profesora les pregunta cómo lo han hecho. Mac le contesta, Mar puntualiza.

Prof: ¿Ya habéis resuelto la primera parte?
M y M: Sí
Prof: ¿Cómo lo habéis construido?
Mac: pues primero hemos usado…
Mar: la herramienta polígono regular…
Mac: hemos puesto dos puntos cualquiera y hemos pedido que sean 4 lados. Luego en la herramienta punto medio para determinar los centros de cada lado…
Prof: los puntos medios
Mac: Sí, y luego con la herramienta polígono los hemos unido. Es que antes lo hemos hecho con segmento pero no nos ha valido porque si no no lo podíamos colorear de rojo, no nos salía como polígono
Prof: claro, porque una vez que tenéis los vértices determinados ya usáis la herramienta polígono, vale. Y con eso habéis construido un cuadrado inscrito en el otro
Mar: Sí
Prof: vale, pues ahora leeros la segunda parte
Mar: vamos primero a apuntar, vamos a terminar esto
Prof: sí, apuntad eso

Más tarde, hemos dado la herramienta "punto medio o centro" y hemos seleccionado cada uno de los lados del cuadrado azul. En un primer momento, hemos intentado unir los cuatro puntos con la herramienta "segmento" pero no nos ha servido porque al no reconocerlo como polígono no podíamos pintarlo de rojo. Así que hemos unido los puntos con la herramienta "polígono" y lo hemos coloreado de rojo



El lenguaje es apropiado y usan el vocabulario correcto. Indican todas las herramientas utilizadas.

Mar: ¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior?
Mac: Realizad la construcción anotando todos los pasos que habéis seguido para ello, incluso los que habéis borrado. Vale, pues claro, claro que podemos…no…estaba yo pensando
Mar: dentro del rojo estabas pensando tú
Mac: no, es que nos pide dentro del azul
Mar: ya, ya, ya
Mac: yo también lo he pensado, ¡qué fácil, sabes!. Podríamos…
Mar: es igual que en el geoplano. En el geoplano podíamos…hacíamos un polígono, un cuadrado y podíamos inscribir cuadrados dentro…no, no
Mac: ¿a qué te refieres?
Mar: No, no era eso, me he equivocado
Mac: a ver, se me había ocurrido poner el centro de aquí y el centro de aquí, pero nos saldría un rectángulo, así que podríamos inscribir…¿sabes qué podríamos inscribir? Un cuadrado dentro de este triángulo…

Intentan transferir conocimiento de actividades anteriores, como el geoplano. Pero no les sirve

Se quedan las dos pensativas. Entra la profesora

Prof: ¿qué tal?
Mac: estamos pensando en la actividad 2. ¿Se podría inscribir un cuadrado dentro de este triángulo, o algo así?
Prof: no, no. Un cuadrado está inscrito en el cuadrado azul cuando cada uno de sus vértices está en cada uno de los lados del azul

La profesora les explica qué significa que un c. rojo esté inscrito en el c. azul

Mac: pues entonces…
Prof: igual que el rojo que habéis construido, otro diferente que no tenga los vértices justo en los puntos medios, ¿sería posible construir otro?, pero tienen que estar un vértice aquí, otro aquí, otro aquí y otro aquí, tocando cada uno de los lados, lo único que no precisamente en el punto medio. Esa es la idea, no que me hagáis uno chiquitito no se sabe dónde, los vértices tienen que estar en cada uno de los lados del azul, ¿vale?
Mac: ¡ah, sí! Por fuera, ¿no?
Mar: no, tiene que estar dentro
Prof: es inscrito, o sea, dentro de…Como ese rojo, pero en otra posición, ¿sería posible? Usad GeoGebra para que os de ideas
Mac: habrá que investigar un poco…
Prof: eso es, investigad, esa es la idea. Usad alguna cuestión, alguna herramienta o algo que os dé una intuición sobre cómo podéis realizar esa construcción, si es que existe, a lo mejor no es posible…
Mac: vale, ¿con inscrito se refiera a qué…?
Prof: a que está dentro
Mac: pero no tiene porqué tocar…
Prof: los vértices tienen que estar cada uno en un lado del cuadrado azul
Mac: ¿tienen que estar los vértices en el cuadrado?
Prof: Sí, sí, tocando
Mac: era por preguntar, es que si no las ideas que se me van ocurriendo sólo tienen lugar rectángulos, no cuadrados. Es que el único cuadrado…es éste, el rojo
Prof: ¿no creéis que puede haber más? Explorad un poco
Mac: es que, que toquen…
Prof: es que no estáis tocando nada, estáis mirando. Deberíais utilizar el programa para hacer algo que os dé ideas

> Mac no acaba de entender que significa inscrito en el c. azul. Pregunta varias veces sobre ello.

> Mac duda que haya otros cuadrados inscritos en el c. azul. Sólo se le ocurren rectángulos.

> La prof. les incita a usar GeoG. para investigar y buscar soluciones

La profesora sale de la sala. Macarena se ocupa del ordenador.

Mac: ¿y tiene que tocar?...
Mar: a ver, si ponemos un punto al azar en esta línea, esta línea…creamos 4 puntos nuevos, ¿no se puede hacer un cuadrado?
Mac: un cuadrado tiene todos los lados iguales, Marta. Eso es lo que yo tenía de idea, el punto medio de éste, el de éste, el de éste y hacemos un cuadrado. Tiene que tener los lados iguales

Mar: ¿y si vamos a polígono regular?
Mac: vamos a probar con esa herramienta, la de polígono regular
Mar: vamos, digo yo…no, primero vamos a los lados, hacemos los puntos
Mac: ¿dónde los ponemos?... pensar, pensar…es que claro, lo único que se nos ocurre es el que está en medio, que seguro que nos da un cuadrado no nos dá un rectángulo cualquiera. Es que claro, el único que se me ocurre es el que está encima
Mar: ya, ya
Mac: a ver… ¿mediatriz y perpendicular será la misma?¿Usamos la bisectriz?
Mar: la mediatriz la hemos usado antes
Mac: ¿y ésta?… (Están un buen rato pensativas haciendo algo sin hablar). Nos salen cuadrados inscritos, pero no del todo. Nos sale éste, desplazado

Intentan situar los vértices de otro c. inscrito pero no saben que herramienta usar

Prof: pero ese no está inscrito
Mac: no, por eso…
Prof: pensad qué pasaría si al cuadrado rojo le muevo un poquito uno de los vértices. ¿Qué pasaría?, si pudiera mover un poco uno de los vértices…
Mac: pero no se pueden mover
Prof: ya, ya sé que no se puede, pero imaginad que se pudiera. Daros cuenta que lo que necesitamos meter dentro del azul es otro cuadrado, cuadrado necesariamente. ¿Por qué no probáis a intentar construir un cuadrado y lo metéis dentro a ver si podríais ponerlo en otras posiciones que no fueran esa?

La prof. intenta que construyan un cuadrado y obliguen a que esté inscrito en el azul para que vean qué posiciones puede ocupar

Las alumnas se quedan en silencio, sin hacer nada. Están totalmente bloqueadas.

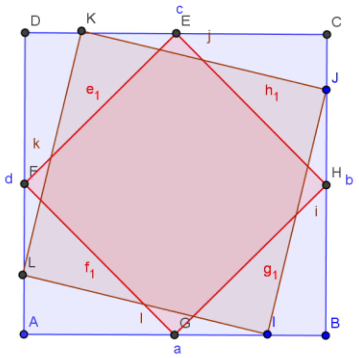
Prof: imaginad que tuvierais en cartulina un cuadrado rojo y un cuadrado azul y queremos ver qué posición… ¿qué haríais? Moverlo dentro del azul a ver, ¿no?
Mac: claro, vamos a dibujar uno encima
Prof: pero borra todo eso, todas esas líneas que no sirven para nada…eso es…pero… bueno me callo, pero…si lo construyes que tenga los vértices ahí y no se pueden mover, no se va a poder mover ¿no?

La prof. sigue dándoles indicaciones, porque están bastante perdidas

Mac: pues sí
Prof: yo que tú lo construiría en otra parte y luego obligaría a que se pusiera donde yo quiero
Mar: yo guardaría esto y haría otro nuevo

Prof: bueno, mirad a ver que se os ocurre (Sale de la sala)

Deciden guardar ese archivo y abrir otro para realizar la nueva construcción
Mar: ¿le has dado a polígono regular?
Mac: no, no lo ves
Mar: ah, vale
Mac: vamos a ver…polígono regular…cuatro puntos…ja, ja, ja…ay, mira…ay, pero es que claro… ¡que sí, lo hemos conseguido, es verdad!



Usan arrastre guiado para forzar a que un cuadrado esté inscrito en el c. azul en otra posición diferente del rojo

Mar: y supongo que se podrá hacer otro
Mac: vamos a intentarlo otra vez… polígono regular…
Mar: no, no te deja. Sólo te deja los azules, antes también te pasaba
Mac: tienes razón, vamos a intentarlo otra vez…Jolín, es que hay que tener una mano para esto…
Mar: intenta que se pongan los negros, que son los que no podemos mover…
Mac: ya lo sé, ahora…es que no sabemos exactamente si se ponen o no, pero mira sí lo hemos conseguido y son cuadrados

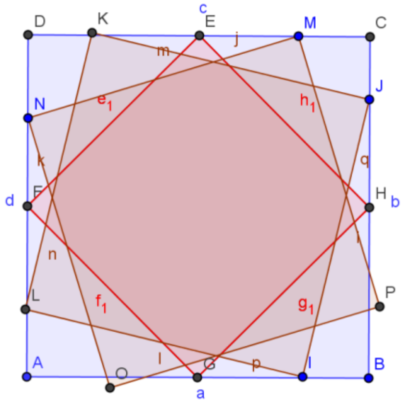
Construyen otro c. inscrito con el mismo procedimiento.

Mar: Sí, y son iguales
Mac: ¿lo medimos?...era aquí…sólo quiero medir uno, por ejemplo el segmento q… a ver cuánto mide éste, 3,46… qué miden distinto, miden distinto cada uno

Miden los lados de los cuadrados y son distintos

Mar: pero eso da igual, me refiero, eso no es importante
Mac: sí, sí, da igual, sigue siendo un cuadrado
Mar: con tal de que sea un cuadrado…
Mac: vale, pues borra…¡ qué guay!, vale pues vamos a escribir
Mar: ¿hay más cuadrados dentro del cuadrado azul? Sí
Mac: vamos a poner todos los intentos fallidos que hemos tenido

Dan por resuelto el problema contestando que hay más cuadrados inscritos.



Entra la profesora en la sala
Mac: que ya lo hemos conseguido
Prof: ¡ah sí, vaya!, a ver… bueno, bueno, bueno, así que habéis encontrado por lo menos otros dos
Mac: y vamos a seguir encontrando, supongo
Prof: ajá, ¿y esos cómo están trazados?
Mac: los hemos trazado con polígono regular y moviendo los puntos azules
Prof: ¿y ahora si los mueves, qué pasa? mueve J, por ejemplo… bien, se te va. Pues la idea es que ahora hagáis una construcción bien hecha, vale. Esto era para probar, para ver si había otros. Ahora que ya tenéis la intuición de que sí que los hay, la idea sería que moviendo el vértice J, por ejemplo, a lo largo de este segmento, los otros vértices del cuadrado se muevan y siempre esté inscrito. Que dependan de J. ¿sabríais construir eso?

La prof les propone hacer arrastre de test sobre uno de los cuadrados y la figura no se mantiene

Mac: ¿sería con punto fijo o algo así?
Mar: propi… objeto fijo
Prof: si le pones objeto fijo no se mueve
Mac: el J, bueno he seleccionado el K

La prof les pide que construyan un cuadrado inscrito general

Prof: pero si no se mueve, no se puede mover. Si no se mueve K no se va a mover ninguno, ¿no?
Mac: ¿sería con la herramienta intersección, o algo así?
Mar: no, intersección no

Intentan modificar uno de los cuadrados para que cumpla la condición, pero no llegan a nada

Prof: tendríais que hacer una construcción desde el principio. Tendríais que construir un cuadrado cualquiera, pero condicionado a que siempre esté dentro del cuadrado azul, los vértices se muevan por los lados, que no se salgan de los lados…¿sí?. Vale, pues pensad a ver cómo

podríais construir ese. A lo mejor para eso lo mejor es usar otra figura, no lo sé, miradlo a ver…también lo podéis hacer ahí, si lo hacéis ahí no me importa
Mac: ¿otra figura… te refieres a…?
Mar: otro cuadrado nuevo
Prof: otro cuadrado distinto, dejad ese con el rojo y hacedlo en otro al lado, pero podéis usar ese, no me importa. Pero la idea es que esté de verdad inscrito y que no deje de estarlo aunque yo mueva lo que se pueda mover, ¿vale? Pero se tiene que poder mover, para que nos demos cuenta de que hay más posibilidades que uno, que no sólo hay uno
Mac: jolín, lo tengo en la punta de la lengua y no sé cómo se hace, a ver…
Prof: pensad en las relaciones que tienen que tener los elementos de ese cuadrado que quiero construir, ¿vale?
Mac: sí
Prof: cómo son, qué relaciones internas tienen que tener para que siga siendo un cuadrado y esté inscrito, las dos condiciones (la profesora sale de la sala)

La prof insiste en cómo tiene que ser el c. inscrito y les sugiere que piensen en las relaciones entre sus elementos

Mac: sí… piensa…jolín, pero si lo hicimos en una práctica, ¿cómo lo hicimos?
Mar: ¿tú crees?, a mí no me suena que lo hiciéramos en una práctica
Mac: pues no se…
Mar: lo que hicimos fue…objeto auxiliar, o algo así…
Mac: ¿qué significa objeto auxiliar?, no lo hemos dado… ¿qué he hecho?
Mar: darle
Mac: la I se quita… ¿y qué he pulsado, la J?
Mar: no
Mac: ¿cuál es la I?
Mar: ésta
Mac: ¿es ésta?
Mar: sí

Se lían intentando acordarse de procedimientos anteriores (objeto auxiliar)

Mac: objeto auxiliar… ¿y si dejo el objeto auxiliar?...la J
Mar: No pasa nada, sigue igual todo
Mac: no pasa nada, pues voy a quitar lo de objeto auxiliar porque si no…
Mar: no, era la I, creo
Mac: …si no sabemos lo que hemos hecho, lo vamos a quitar. Ahora aparece la J
Mar: la J ya aparecía. Ahí aparecen las azules
Mac: vamos a ver…éste aquí no tiene que estar
Mar: no, yo creo que…tiene que haber una cosa que nos diga…
Mac: con un círculo, ¡a qué es con un círculo!

Intentan relacionarlo con otra actividad del taller (práctica 7, h)

Mar: ¿con una circunferencia?
Mac: no, no puede ser con un círculo…No te acuerdas del ejercicio h que hicimos, éste…que nos costó vida y milagros y al final lo conseguimos (saca una hoja de papel con el problema)
Mar: sí, sí, ¿el que resolviste tú al final? Que hiciste una circunferencia, con el triángulo isósceles…
Mac: sí, exacto…jolín, ¿y si tiene que haber algún círculo para que no se mueva?
Mar: ya, pero no tenemos ni su centro…uno de sus puntos podríamos tenerlo porque ¿estás diciendo una circunferencia circunscrita?, ¿dentro del cuadrado o fuera?
Mac: a ver, el problema es…que no tiene porqué moverse dentro del círculo, se tiene que mover dentro del cuadrado
Mar: ya, pero no puede salirse del cuadrado
Mac: ay… hay que investigar, Marta
Mar: ¿con los ángulos? Es que iba a decir que los 4 ángulos tienen que ser 90, tenemos que obligarles a que sean de 90 y así…siempre estarán dentro
Prof: ¿qué tal?
Mac: estamos intentando mantener una relación de los cuadrados con un círculo, o sea, obligar a que los ángulos sean 90… o que esté inscrito en un círculo, pero no queremos que esté inscrito en un círculo sino en el cuadrado
Mar: tipo lo que hicimos en el triángulo isósceles
Mac: ese ejercicio tan difícil, el h
Mar: el apartado h, tipo algo de eso
Prof: ya, pero es que ahí se daban unas relaciones que ahora no se tienen porqué dar

Explican a la prof las ideas que han tenido. Ella les hace ver que ahora no se dan las mismas relaciones

Mac: exactamente
Mar: lo que queríamos hacer es obligar a que todos los lados, todos los ángulos midieran 90 grados
Mac: pero ya lo tenemos obligado
Prof: pero… exactamente, si lo que habéis usado es la herramienta polígono regular, eso siempre es un cuadrado, luego siempre miden ya 90º, no te tienes que preocupar de eso, ¿sí o no?
Mar: sí, sí
Prof: lo que te tiene que preocupar es que los vértices estén siempre en los lados azules, que no se salgan cuando yo muevo uno, que los otros sigan ahí, entonces ¿qué relación deben guardar los vértices entre sí?
Mac: ¿los vértices del cuadrado inscrito?
Prof: claro, imaginad que tenéis un…la idea es: tenéis el cuadrado azul, utilizáis un punto como

La prof vuelve a explicarles que el c. rojo debe moverse por los lados del c. azul

uno de los vértices del rojo que tenéis que meter dentro, la idea es que éste se va a mover por ese segmento y no puede salir de ahí, ¿cómo se va a mover el resto, los otros 3 vértices, para que la figura siempre sea un cuadrado? ¿Cómo se van a mover?, pues hay una relación que tienen que guardar, siempre tienen que estar enfrentados, ¿no?, opuestos
Mac: sí
Prof: porque si no la figura dejará de ser un cuadrado…mirad esas relaciones internas entre los vértices. Piensa, ¿si éste lo muevo aquí donde va a tener que ir éste?
Mac: tiene que estar enfrentado, con la bisectriz podríamos hacerlo
Prof: ¿qué bisectriz, la bisectriz de qué?
Mac: esta bisectriz de M que coincidirá con la de O
Prof: bueno, pues a ver…pensad en esas cosas
Mac: tendría que coincidir con la de O
Mar: y obligar a…
Prof: vale, eso tendría que pasar siempre. Y ahora si M lo muevo hacia la izquierda, éste se tiene que mover hacia la derecha para que esté enfrentado. Ahí no pasa, tenéis que obligar a que M se mueva sólo por un lado y D, o como se llame, por el otro pero de manera que siempre estén enfrentados, ¿cómo hacéis esa construcción?

La prof va guiando a la pareja para que se den cuenta de las relaciones entre vértices opuestos de un cuadrado

Las alumnas están pensativas, sin hacer nada

Se dan cuenta de que las bisectrices del cuadrado pasan siempre por el centro

Prof: ¿por dónde pasa siempre esa línea para que eso…?
M. y M: por el centro
Prof: ¿por el centro? Bueno, pues mirad a ver si eso os da una pista de cómo construirlo. ¿Tiene que pasar siempre por el centro? Miradlo bien, ¿en todos los que tenéis ahí pasa siempre por el centro?
Mac: esta bisectriz sí
Prof: ¿y cuándo lo mueves sigue pasando por el centro?
Mac: sí porque siempre es el mismo lado, o sea, siempre son 90º y los lados siempre son iguales
Prof: bueno pues a ver si eso os da la pista de cómo construir este vértice teniendo sólo éste. Quiero que hagáis otra construcción, esa era solamente para explorar, pero eso no me sirve

Usan arrastre de test para comprobar que la diagonal siempre pasa por el centro del cuadrado

Prof: ¿estáis bloqueadas? (las alumnas llevan un ratito sin decir ni hacer nada)
M. y M: estamos pensando
Mac: entonces tiene algo que ver este triángulo

Están bloqueadas a pesar de ver relaciones en la figura

Prof: no, olvídate de eso. Es que ahí tenéis demasiadas cosas, dibujad otro cuadrado al lado. Otro cuadrado azul y ahora un punto que se mueva sólo por ese lado. Ese punto muévelo bien y comprueba que no puede salir de ahí, ¿bien?

Usan arrastre de test

M. y M: Sí
Prof: pues a partir de ese punto construiros ahora el cuadrado interno. ¿Lo entendéis ahora lo que quiero decir?
M. y M: sí, sí
Prof: de manera que siempre los otros 3 vértices tienen que estar en los otros 3 lados, pero para que sea un cuadrado, no puede ser cualquier otra figura. Esa es la idea, venga… (sale de la sala)

La prof les sugiere que hagan una nueva figura que cumpla las condiciones

Mar: vale
Mac: pues con el ángulo dada su amplitud ponemos ángulo de 90
Mar: 90, punto lateral y vértice
Mac: perdón, esto…huy… cancelar
Mar: eso es el vértice. Hay que dar punto lateral y vértice. El vértice tiene que ser ese
Mac: ¿punto lateral?... 90. Vamos a ver qué pasa, vamos a investigar…ah, vale… ¿puedo mover esto?, sí, sí puedo. Vale, este ángulo de 90º ya lo tenemos, a ver…pues ahora
Mar: unimos
Mac: sí, pero tenemos que procurar que estos dos puntos también estén inscritos aquí. ¿Y si pasamos de estos puntos y hacemos los 4 ángulos de 90º?

Usan "ángulo dada su amplitud" para intentar construir el c. inscrito

Mar: vale, mejor
Mac: tenemos que pintar un nuevo punto…vale, ángulo dado su amplitud… 90…y hay que procurar… que esto coincida
Mar: lo podemos mover
Mac: no, espera…no tiene nada que ver…lo que nos ha dicho Natalia es que trabajemos con el que está enfrente
Mar: con su opuesto
Mac: esto vamos a borrarlo
Mar: borra, y hacemos el de enfrente
Mac: vamos a hacer la bisectriz…no tenemos pintados los lados, no podemos hacer la bisectriz…vamos a pintar un…

Cambian de estrategia al pensar en lo que les ha dicho la profesora

Mar: ¿y si hacemos un punto aquí, no se puede mover sólo por este lado?
Mac: acabamos de comprobar que sí, Marta
Mar: me refiero a que hagamos un punto y que sea el otro lado ¿o no?
Mac: es que la cosa es poder trabajar con el que está enfrente, no con el que está al lado. Vamos a pintar un punto aquí, un punto aquí… a

ver…Volvemos a probar hacer una semirrecta aquí u otra aquí, que pasen por estos dos puntos
Mar: ¿por los V?
Mac: Sí, por seguir la bisectriz. La bisectriz siempre será la misma
Mar: claro, pero por qué… que pasen por Z y por W no por uves
Mac: sí pero como no podemos controlarlo todavía
Mar. Ah, vale
Mac: si se te ocurre alguna manera de que puedan pasar por Z y por W, sin que se te muevan
Mar: no
Mac: vamos a intentarlo. Luego lo borramos. ¡Uy, no sé qué he hecho!, bueno…que me he equivocado…es ésta…semirrecta…vale. Ya podemos hacer la bisectriz, que no es la bisectriz, pero bueno…ya sé yo que no es la bisectriz pero… ¡jope, qué cantidad de líneas!

Mac reconoce que usa la palabra bisectriz para referirse a otra cosa (¿diagonal?)

Mar: ja, ja, ja, vale pues tiene que pasar por…
Mac: tiene que pasar por ese punto siempre, siempre. ¡La intersección entre dos puntos!, entre éste y éste. ¡Ya tenemos el éste!
Mar: el otro lado
Mac: espera, no cantemos victoria todavía
Mar: no…
Mac: no podemos moverlo pero…éste si lo movemos… ¡lo hemos conseguido!
Las dos alumnas se ríen, contentísimas de haber resuelto el problema. Están eufóricas.

Creen haber construido dos vértices opuestos. Hacen arrastre de test para comprobarlo

Mac: vamos a borrar esto. Jo, ¿qué es esta recta?
Mar: son las semirrectas
Mac: ¿pero qué es esta recta, ésta?
Mar: ¿la bisectriz?
Mac: no
Mar: bisectriz
Mac: bisectriz de q y m, ¿cuál es la q y cuál es la m?
Mar: q y…
Mac: ay, vamos a quitar estas bisectrices, ésta y ésta
Mar: ay, la m. Borra esa

Borran elementos que no son necesarios

Mac: vamos a hacer los puntos intermedios: ésta, ésta y ésta. Ya está. Vamos a hacer el polígono
Mar. ¿Regular?
Mac: claro que tiene que ser regular
Mar: pero no has dado a regular. Es lo que te acabo de decir, ese no es regular

Sospechan que el polígono construido no es un cuadrado

Mac: ¡no es regular!
Mar: tienes que dar a regular
Mac: tienes toda la razón, pero…no sabemos el punto de al lado, Marta. A ver qué pasa si hago elige y mueve
Mar: que se mueve donde quiere
Mac: ehhhhh
Mar: el Z siempre está ahí
Mac: hombre claro, es que he hecho la intersección
Mar: claro, pero es W…
Mac: jo, es que he hecho el V fijo, por eso no me deja hacerlo regular
Prof: ¿cómo va la cosa?
Mac: ay, es que estamos muy cerca, estamos muy cerca. Esto es lo que hemos conseguido. El problema es el V que lo tenemos ahí fijo y queremos que se mueva
Prof: ¿y qué habéis hecho?
Mac: con este botón, ángulo dada su amplitud, hemos obligado a que sea 90º, entonces nos ha dado estos dos
Prof: dos puntos, pero que no están en los lados
Mac: no, lo hemos hecho por guía
Mar: luego hemos hecho la bisectriz
Mac: con la semirrecta hemos conseguido la bisectriz
Prof: la diagonal
Mac: hemos cantado victoria de repente porque hemos dicho, ahora hacemos la intersección…
Prof: claro
Mac: con esta herramienta
Prof: intersección entre dos objetos
Mac: sí y con la bisectriz también, pero el problema es el V
Prof: ¿y qué tenéis?
Mac: dos puntos
Prof: fijaros, para construir el cuadrado necesitamos 4 vértices, ¿los tenéis?
Mar: no
Prof: ¿cómo que no?
Mac: éste, éste, éste y éste
Mar: sí, sí, tenemos 4
Prof: bueno ¿y si ahora los unís, qué pasa?
Mac: es que antes los hemos unido y no nos sale un polígono regular, no sale un cuadrado
Mar: no sale un cuadrado
Prof: ¿no sale un cuadrado, eh?

Usan arrastre de test para confirmar si la construcción sirve o no

La prof les pregunta qué han hecho

Mac sigue usando bisectriz, la prof le corrige.

La prof les pide que unan los 4 puntos hallados. Ellas dicen que no se obtiene un cuadrado

Mac: ese es el problema, nos sale un polígono normal
Mar: sí, nos sale un polígono pero no regular
Prof: ¿Por qué, qué ha pasado…? A ver, mueve éste otra vez…claro

La prof les pide que usen arrastre para comprobar

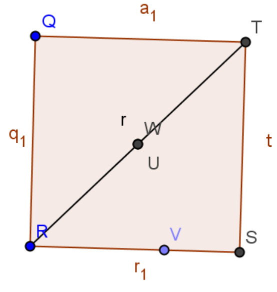
Mac: el problema es éste
Prof: no, ese no sirve para nada, ese no va a ser un vértice
Mac: claro, es que según lo mueva…
Prof: no, el problema es el siguiente, el problema no es ese el problema es éste: ¿Qué hemos dicho que tiene que pasar con la diagonal del cuadrado?
Mac: que tiene que estar enfrentado
Prof: ¿y por dónde hemos dicho que pasaba la diagonal del cuadrado? Eso lo habéis dicho vosotras hace un momento

La prof les hace ver que no han construido bien la diagonal, no pasa por el centro del cuadrado

Mar: por el centro
Mac: el centro, sí
Prof: y se os ha olvidado por completo. Ese dato no lo habéis usado
Mac: es verdad, sí
Prof: date cuenta que al mover aquí éste, deja de pasar por el centro, ¿lo veis o no?
M. y M: sí, tienes toda la razón
Prof: pues esto no me sirve. Fíjate, estos van bien pero éste no (la profesora está moviendo los vértices del cuadrado). Tengo que obligar a que pase por el centro porque si no, lo que tú dices, deja de ser un cuadrado en algunos momentos. Pero vais bien, es una intuición pero…
Mac: podemos crear el centro
Prof: determinar el centro
Mac: sí, quiero decir eso
Prof: y obligar a que pase por ahí
Mar: eso es lo que tenemos que hacer
Prof: pues eso es lo que tenéis que hacer. A ver, borrad eso y acordaros luego de escribírmelo, porque aunque lo hayamos borrado quiero saber que lo habéis hecho
M. y M: vale
Mac: vamos a hacerlo
Prof: determináis un punto, ¿Dónde está el punto? Primero tenéis que tener un punto sobre el segmento
Mac: podemos crear el punto aquí
Prof: vale, vale
Mac: sería éste
Prof: ¿a ojillo, lo haces a ojillo?
Mar: no, hacemos la otra

La prof les pregunta como han determinado el centro

Prof: perdón, ¿Qué has usado, punto medio?, perdona, perdona
Mac: o lo ocultamos
Prof: sí, sí, no me había dado cuenta de que habías hecho eso
Mac: ya está
Prof: ya tenéis el centro, ¿no?
Mac: bueno, el punto W y U



Prof: ahora necesitamos un punto en un lado, ¿ese punto cuál es?
Mac: pues uno de los vértices del cuadrado
Prof: no, por qué va a ser un vértice, no lo pongas en un vértice ¿no?. Un punto sobre un lado necesito, para construir el otro cuadrado, vamos a construir el cuadrado rojo
Mac: sí, ¿lo construyo directamente el rojo sin más?
Prof: claro, ¿qué es lo que quieres hacer? ¿Ese punto qué es?
Mac: no sé, uno que estaba ya antes y éste también
Prof: partimos de un punto, pero… a ver, no te embales, ese sí lo necesitamos... Tenemos que partir de un punto en un lado, ¿os acordáis de cuál era la idea inicial? Tenemos un punto en un lado que se va a mover por el lado del cuadrado y los otros 3 vértices van a depender de él. ¿No habíamos quedado en eso?

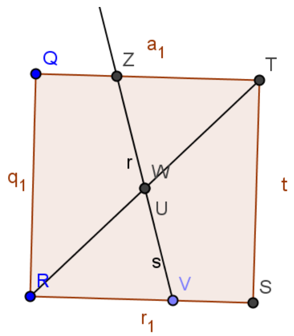
La prof les recuerda la idea inicial de la construcción

M. y M: sí
Prof: a partir de este punto, que va a ser un vértice de mi cuadrado inscrito, construyo los demás y para eso necesitaba el centro, pero tengo que tener el vértice, no lo borres. A ver, un vértice… ahí, y ahora, el opuesto a ese ¿Dónde va a estar?
Mac: aquí y tiene que pasar por el centro
Prof: bien, vamos centrándonos ya… venga, pues determínalo… de manera que luego, cuando éste lo muevas, siempre va a estar enfrentado a él, siempre va a ser su opuesto
Mar: haciendo la bisectriz
Prof: ¡olvídate de la bisectriz! Qué manía tenéis con la bisectriz… ¡qué no tengo ángulo!, la bisectriz siempre es de un ángulo, por ahora no hay ángulo.

La prof les va guiando. Les dice que no pueden usar la herramienta bisectriz sin ángulo.

¿Qué necesito trazar? Pensad un poco… ¿qué queréis trazar’
Mac: una recta que pase por el centro
Prof: ¡claro!, tan tonto como eso…una recta que pase por esos dos puntos, donde corte al otro lado…
Mac: una semirrecta, supongo
Prof: da igual, sí una semirrecta vale, no hace falta que sea una recta. Bien, ¿Dónde está el otro vértice, entonces?
Mac: en el otro lado
Prof: ¿Dónde?
Mac: enfrentado justamente
Prof: ¿pero dónde?
Mac: ahí
Prof: ahí ¿qué es el qué?
Mar: El otro vértice
Prof: no, el punto medio no
Mac: perdón, me he equivocado de botón, quería darle a este
Prof: a ese, la intersección ¿no?, eso es. Ahora muévelo para que compruebes que siempre va bien. No, ese no lo vas a poder mover, el libre… ¿qué pasa? ¿Bien, no?

La profesora supervisa todos los pasos y les pide que arrastren para comprobar



Han construido dos vértices opuestos del cuadrado.

Mac: sí
Prof: y ese segmento va a ser una diagonal del cuadrado, ¿lo veis o no?
M. y M: sí
Prof: pues os faltan dos vértices
Mac: podríamos seguir el mismo procedimiento y luego utilizar esta herramienta
Mar: la de polígono regular
Prof: sí, bueno una vez que tengo los vértices lo que queda es trivial, es usar la herramienta polígono y unirlos. Pero la cuestión es ¿ahora cómo determinamos los otros dos vértices?
Mac: claro, tendrían que estar en función de éste también
Prof: claro, porque ese es el móvil. No olvidéis que cada vez que lo mueva… ¿creéis que al mover ese punto se me puede ir formando todo el rato un

cuadrado, o no?, ¿puedo conseguir dos vértices de manera que esa figura siempre sea un cuadrado?
Mac: hombre, habrá alguna manera digo yo
Prof: bien, y ¿cómo se os ocurre que tendríamos que trazar los dos vértices que quedan?
Las alumnas vuelven a estar bloqueadas, sin hacer nada ni hablar

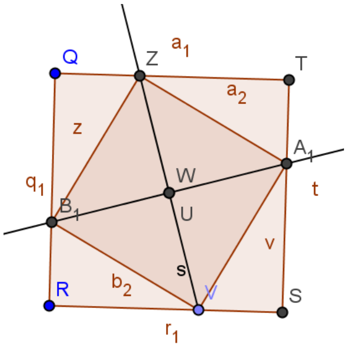
Prof: fijaros en los cuadrados que tenéis trazados ya en el otro lado. Fijaros en cómo son… por ejemplo en el rojo, que sabemos que es un cuadrado y verifica las condiciones, que es inscrito. Imaginaros, tengo estos ¿estos cómo los consigo?
Mac: ¡jolín!, con la…
Prof: con la….
Mac: la recta perpendicular
Prof: ¡claro, la otra diagonal! ¿No?
Mac: claro, jolín es verdad… ay, no me deja, tiene que ser una…

> La prof les guía hasta que se dan cuenta de que la otra diagonal es perpendicular a la que tienen.

Mar: punto y recta perpendicular
Prof: sí, punto y recta, ¿por dónde tiene que pasar esa perpendicular?
Mac: a ver, no sé que he hecho
Prof: perpendicular a la recta por un punto, ¿por qué punto tiene que pasar?
M. y M: por el centro
Prof: por el centro… perpendicular a dónde
Mac: lo estoy haciendo… ah, es que no estoy en la herramienta, por eso no me sale
Prof: ¡ah, es que estás en semirrecta!
Mac: ahora sí
Prof: ahora mueve otra vez tu punto libre… ¡oh!
Mac: ¡jolín, es que es verdad!
Prof: ¿y ya tenéis los dos vértices?
M. y M: sí
Prof: y ya podéis trazar el cuadrado…
Mar: polígono regular
Prof: ¿y cuántos cuadrados hay?

> La prof les pregunta ¿cuántos cuadrados inscritos hay?

Mac: pues tantos como quieras arrastrar el punto móvil, ¿no?
Prof: tantos como puntos hay en el segmento
Mac: claro
Prof: o sea, infinitos
Mac: tantos como veces quieras mover esto, habrá tantos cuadrados
Mar: uy



Hacen arrastre de test para comprobar cómo se mueve el c. inscrito dentro del otro cuadrado

Las alumnas se muestran satisfechas del resultado, miran como se mueve el cuadrado inscrito dentro del otro.

Prof: y ahí está contenido el rojo de los puntos medios, ¿lo veis?
Mac: aquí, aproximadamente, sí
Prof: bueno, pues ahora me escribís todo lo que habéis hecho, ¿os vais a acordar?
Mac: sí, hacemos memoria
Mar: lo primero que hemos hecho…
Mac: ha sido esta tontería. Vamos a hacerlo en apartados. Vamos a poner primero intentos.

Macarena dicta a Marta lo que tiene que escribir en el auto-protocolo. Comenta: "ahora me siento super ridícula por haber cantado victoria con la tontería que estábamos haciendo"

Intentos

- Primero hemos dibujado un cuadrado regular fuera y lo hemos arrastrado para que aproximadamente estuviera inscrito dentro del cuadrado azul. Nos hemos dado cuenta que estaba mal porque en cuanto moviéramos un punto, dejaba de estar inscrito.
- Hemos dibujado un punto inscrito en uno de los lados y con la herramienta "dada su amplitud" le hemos obligado a que tuviera 90º y hemos hecho su bisectriz. Hemos visto que moviendo ese vértice, el vértice opuesto estaba inscrito pero al no pasar por el punto medio nos daba cualquier polígono irregular.
- Hemos averiguado el centro del cuadrado haciendo la diagonal y hallando su punto medio.
- Hemos inscrito un punto en uno de los lados y con la herramienta "semirrecta" hemos unido dicho vértice con el punto medio y así hemos obtenido el vértice opuesto. A continuación, hemos usado la herramienta "recta perpendicular" para hallar la perpendicular de la

semirrecta creada. De esta manera, hemos conseguido inscribir los otros dos vértices.

Respuesta: Si, hay infinitos cuadrados. Hay tantos cuadrados como puntos tiene el segmento.

Dudan sobre cómo redactar la última frase, esperan a que vuelva la profesora para consultárselo. Mientras comentan lo siguiente:

Comparan GeoGebra con lápiz y papel y creen que les ha facilitado la tarea

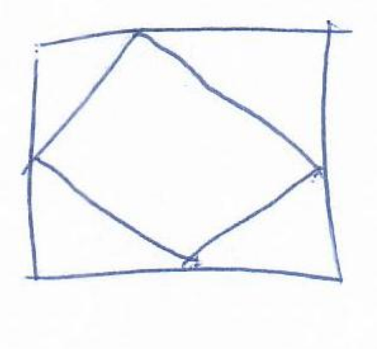
Mac. ¡jolín, lo que nos ha costado!
Mar: yo lo daba por perdido, la verdad
Mac: pues yo no
Mar: yo al ver que no nos salía…
Mac: además es que GeoGebra está bien básicamente porque no tienes el límite del papel. Lo puedes mover y no hace falta ir recortando, ni dibujando otra vez y lo puedes mover, no sé… está…
Mar: sí, en ese sentido está mucho mejor que el papel

VIII- Sesión estudio de casos. Pareja 25: Helena y Lorena

Helena maneja el ordenador y Lorena lee el enunciado. Empiezan la construcción:

H: ¿polígono regular?
L: Sí, azul
H: vale
L: ¿podéis inscribir dentro de él otro cuadrado rojo? Yo me supongo que será…
H: ¿quieres una hoja?
L: si éste es el cuadrado, que sea así (Lorena hace un dibujo en una hoja de papel)

Usan "polígono regular" para construir un cuadrado azul



L hace un dibujo a mano alzada en un papel para explicarle a H cuál podría ser la solución

H: yo también lo pienso. Para esto lo que yo hice en una práctica fue hallar los puntos medios de cada lado y…
L: y hacer segmentos
H: y hacer… ¡no!..., claro
L: luego unir segmentos…
H: bueno, no sé si hacer segmentos o hacer también como esto de 4 para que te quede junto, ¿me entiendes?
L: sí, que en vez de hacer segmentos, como tenemos los puntos, hacer un polígono regular
H: claro
L: pues venga, vamos
H: tienes que escribirlo
L: ¿qué pongo?
H: pues pon lo que hemos dicho

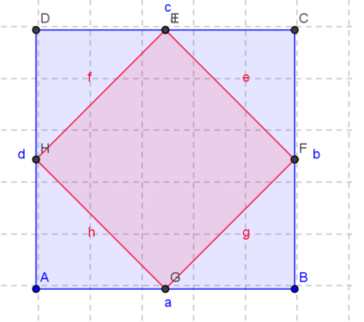
H está de acuerdo y propone hallar los ptos medios de cada lado del c. azul

H propone unir los 4 ptos hallados con "polígono regular"

L utiliza el lenguaje con más propiedad que H

Helena va realizando la construcción en silencio, mientras Lorena escribe el auto-protocolo:

1. Para hallar el cuadrado inscrito, vamos a hallar el punto medio de cada lado del cuadrado y luego crear un cuadrado con la herramienta "polígono regular"



El lenguaje usado es apropiado y conciso.

Prof: ¿ya habéis hecho la primera parte? O sea, que habéis encontrado un cuadrado inscrito ¿no?
H: sí
L: espérate que no sé si lo hemos hecho bien. Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul, ¿no? Sí, vale. ¿Ya está?
Prof: sí, la primera parte es así de fácil
H: ahora lo siguiente, ¿lo guardo aquí o hago otro?
Prof: lee lo siguiente porque es sobre lo mismo
H: ah, vale
L: ¿hay más cuadrados que puedan inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior?
Prof: ¿entendéis la pregunta?
L: yo tengo una duda. Si en el cuadrado azul está inscrito el cuadrado rojo, si inscribo otro cuadrado en el cuadrado rojo está también inscrito en el cuadrado azul, ¿o no?
Prof: No, porque la condición para que esté inscrito es que esté dentro pero que cada vértice del cuadrado rojo toque un lado del cuadrado azul.
L: ah, vale
Prof: si ahora, por ejemplo, trazas uno aquí en los puntos medios del rojo, no toca al cuadrado azul
L: tiene que tocar al cuadrado azul
Prof: tiene que tocar, los vértices del cuadrado que dibujéis tienen que estar cada uno en un lado del cuadrado azul, ¿vale?, eso se sigue manteniendo. Pues a ver que se os ocurre, pensad un poquito
L: ¿pero, hay solución entonces?
Prof: eh, no lo sé. La pregunta es que investiguéis un poco a ver que se os ocurre y que me digáis vosotras si hay o no solución
L: vale. ¿Se pueden hacer…?

La profesora pregunta si lo han resuelto. L duda de pronto si su cuadrado cumple las condiciones, pero se convence rápidamente.

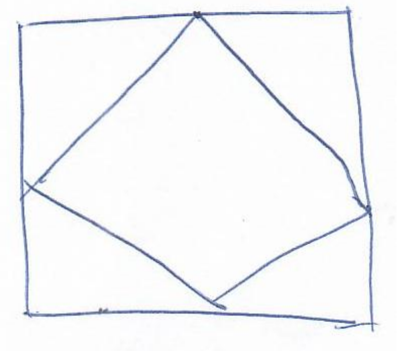
L pregunta a la prof si un c. inscrito en el rojo estará también inscrito en el azul

La prof no les dice si el problema tiene solución. Les pide investigarlo.

Prof: sí, puedes usar las hojas que necesites

Lorena coge una hoja de papel y se dispone a realizar dibujos para conseguir responder a la pregunta

H: dibuja eso para…
L: éste se supone que es el azul… bueno está mal hecho y éste el que tenemos. (Se vuelve hacia la profesora y le pregunta) ¿Sin borrar el rojo?



L vuelve a dibujar para apoyarse en su investigación del problema.

Prof: no, no, no. Yo no digo nada del rojo, ¿Qué si hay más?, qué si hay más cuadrados que se puedan inscribir, esa es la pregunta. ¿Vale?
H y L: vale
Prof: el rojo no tiene por qué estar, si preferís que no esté…tenéis que pensar que igual es más fácil explorar con GeoGebra que con lápiz y papel, no lo sé. Porque aquí esto no parece un cuadrado, ¿verdad?
H y L: no
Prof: con GeoGebra, lo bueno que tiene, es que si dibujas un cuadrado siempre va a ser un cuadrado. Podéis, a lo mejor, construiros otro cuadrado azul, intentar manipular ahí, explorando con distintas … ver qué cosas se os ocurren para ver si se puede hacer la construcción, pero vamos, también puedes dibujar, si te da más ideas también puedes. Pensad un poquito y ahora vengo (sale de la sala)

La prof les sugiere que explorar con GeoG es más fácil que dibujando, aunque también lo pueden hacer

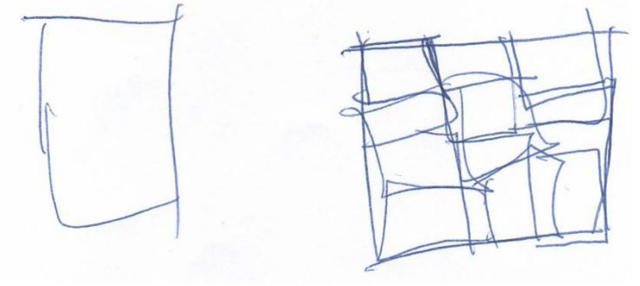
L: vale
H: yo haría otros puntos, aquí y aquí, y luego haría también un polígono regular, entonces me saldría un cuadrado. Lo que pasa es que no sé si la distancia sería… para que me diera un cuadrado y no un rectángulo, ¿me entiendes lo que te quiero decir?

H propone algo aunque duda de que sea un cuadrado

L: sí
H: si quieres probamos
L: ha dicho que hay más cuadrados que se puedan inscribir. No dice nada de que tenga que tocar un vértice los éstos… porque si es así el cuadrado se

puede hacer así, como hicimos con los geoplanos (vuelve a dibujar en un papel)
H: pero eso yo no sé si está inscrito o no

L vuelve a dibujar acordándose de una práctica con geoplanos. H se da cuenta de que no sirve porque los c. no están inscritos



L: a lo mejor puede hacerse así. Hazlo como has hecho éste, es decir, marca… tienes que marcar para hacer lo del polígono regular 4 puntos ¿no?
H: sí…no, tú puedes marcar 2 mira, polígono regular…
L: quiero decir… pero para hacer un cuadrado
H: aquí, aquí y 4
L: a ver, no lo puedes meter adentro
H: sí, sí. Ya está
L: ah mira, pues ahí tenemos otro. Pues haz otro igual aquí

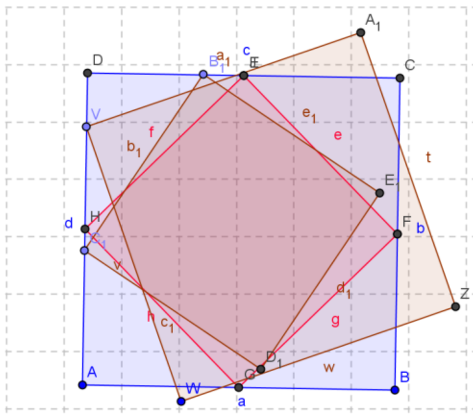
L propone hacer otro cuadrado e inscribirlo en el c. azul con "arrastre guiado"

Están un rato en silencio, mientras Helena realiza la construcción
H: qué mal se me da coger los puntos…
L: pero ese te va a salir más pequeño, ¿no? Claro, es que el problema es que no están a la misma distancia. Bueno, ¿no puedes separar los puntos y que salga…? Pero marca…eso. Mira ese es igual…
H: si pero sabes lo que pasa, que se mueve también fuera del…
L: ¿y este también, no?
H: no, éste está fijo. Debería moverse…
L: ah sí se mueve, o sea, ¿que ese no está inscrito?... De alguna manera se puede hacer fijo

Se dan cuenta de que si hacen "arrastre de test" los cuadrados marrones no están inscritos.

H: claro
L: ¿y si…?
H: no está inscrito porque este punto está mal hecho, porque no está hecho sobre esta línea
L: claro, y si coges un segmento… ¿sabes lo que te quiero decir? Coges la herramienta segmento, haces un punto aquí y otro punto aquí… ¿pertenece a esa recta, no? Como cuando hicimos la otra práctica
H: ya, ya sé lo que quieres decir, pero hay que apuntar esto.

H se da cuenta de que los vértices no están determinados sobre los lados del c. azul



Al arrastrar sólo se mantiene inscrito el c. rojo

Lorena escribe en el auto-protocolo mientras Helena le va dictando
H: hemos intentado hacer dos puntos cualquiera en dos de los lados del cuadrado y que al mover el cuadrado grande, los cuadrados pequeños dejaban de estar inscritos

2. Hemos intentado hacer con dos puntos cualquiera otro cuadrado pero al mover el cuadrado azul dejaban de estar inscrito

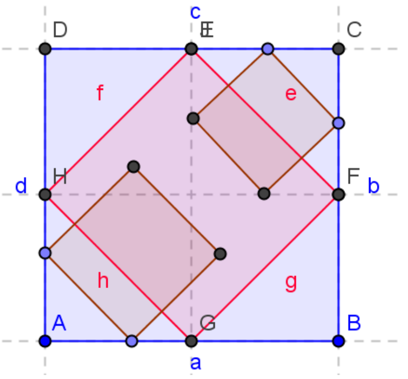
Lenguaje correcto, muy conciso. No dicen la herramienta utilizada.

H: ¿borro los puntos que hemos puesto?
L: sí, porque no nos sirven
H: vale, entonces hemos dicho… hacer un segmento… ¿éste?
L: sí
H: ¿y yo lo pongo aquí?
L: no, y lo marcas aquí
H: ¿aquí?
L: claro, marcas ese ahí y luego haces otro aquí y lo unes aquí, entonces cuando te salga el cuadrado estará inscrito en los tres…

Usan "segmento" para hacer otro cuadrado, pero H decide que "polígono regular" es mejor

H: ya, pero si haces…mira, si coges…con polígono regular marcas aquí y aquí….ves, ya está… inscrito
L: ah, pues haz otro igual
H: esto lo puedo hacer todo lo grande que quiera porque el programa mismo hace la proporción
L: ya, ya… A ver, otro cuadrado, pues igual que están, se puede hacer aquí otro cuadrado, aunque no entren ¿no?
H: si, bueno… podemos hacer todos los que queramos
L: pero yo no sé si eso está bien
H: en teoría está inscrito

L duda de si está bien la construcción. H cree que el c. está inscrito



L: entonces, lo que yo te he dicho que hicimos con los geoplanos también se puede hacer
H: no sé, supongo
L: tú hazlo y lo miramos a ver si está bien
H: a ver, quieres que haga otro aquí
L: sí, o déjalo, si ya con esos yo creo que tenemos de ejemplo…no, pero tan grande no que se te va a montar en…
H: pues hago la figura más grande

L vuelve a proponer transferir la práctica con geoplanos. Ahora no se fijan en si los c. están inscritos

Siguen realizando la construcción
L: vale, pues haz otro cuadrado azul y…
H: ¿has apuntado esto que hemos hecho?
L: no, voy… ¿con qué herramienta? Segmento entre dos puntos
H: sí, segmento entre dos puntos. Voy haciendo otro cuadrado.

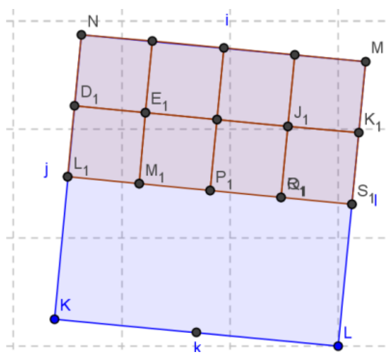
3. Con la herramienta segmento entre dos puntos hemos trazado un segmento creando otros cuadrados, pero no ha servido.

Lenguaje conciso y correcto. Falta decir que han usado al final "polígono regular"

H: ¿Qué más hay que hacer?
L: ¿de ejercicio?, ya está
H: no, que qué más querías hacer
L: ah, pues como lo que hicimos de los geoplanos, de los de las gomitas
H: ah, sí
L: para eso, a lo mejor…lo más fácil para que te salgan bien… como hemos hecho esto de trazar el punto medio, pues del punto medio trazar el punto medio
H: hala, vale. ¿Cuántos puntos medios quieres que trace? 4 por cada lado
L: no, no traces tantos porque te va a salir un cuadrado así, chiquitito, y nos vamos a volver locas. Haz 3

L le da instrucciones a H para que realice la construcción del geoplano.

H: ya está
L: y ahora el punto medio de ahí
H: ¿y ahora?
L: pues con la herramienta polígono regular, como has estado haciendo los otros, igual. ¿Ya ves lo que digo qué sale?
H: de aquí a aquí
L: y ahora, de aquí a aquí, de aquí a aquí y de aquí a aquí
H: madre mía, esto queda un cúmulo de números aquí, no se ve nada. En realidad con que hubiéramos sacado los primeros puntos medios estos, nos hubiese valido
L: claro. Esos teóricamente están todos inscritos. A ver, mueve el cuadrado…



Usan "arrastre de test" para comprobar la construcción.

Prof: ¿qué tal?
L: bueno, hemos hecho dos intentos
H: pero no sabemos si…
L: de uno no estamos muy seguras
H: hemos inscrito estos

La profesora les pregunta qué han hecho y les dice que los cuadrados no están inscritos

Prof: pero esos no están inscritos. Tienen que tener cada vértice en un lado del cuadrado azul
H: vale, entonces están todos mal. Estos tampoco tienen…

H se da cuenta de que todos los que han construido no están inscritos

Prof: no, no, tienen que ser cómo éste: cada vértice en un lado. Esa era la condición de inscrito, habíamos quedado
L: ah, vale vale
Prof: tienen que estar dentro, pero cada vértice en un lado del cuadrado azul, en un lado distinto. Imaginad que éste lo estiráis y colocáis, bueno éste o cualquiera… tenéis dos vértices que si que cumplen la condición pero estos dos los tendríais que colocar uno aquí y otro aquí

L piensa que el único c. inscrito es el construido en los ptos medios

L: pero entonces sería igual que éste

Prof: esa es la pregunta, ¿tendría que ser igual que el rojo necesariamente o encontraríamos algún cuadrado en otra posición diferente y de otro tamaño diferente de ese?

La prof. pregunta si no puede haber más cuadrados inscritos

H: en otro tamaño es imposible, porque si es un cuadrado tiene que ser la misma longitud para que llegue de un lado a otro de los lados del cuadrado
Prof: ¿y no se puede? Explorad eso a ver. A lo mejor esa idea es buena, tener el cuadrado y obligarle a que lo cumpla, la condición. ¿Este se puede mover?
H: sí
Prof: no, digo éste pequeñito
H: no sé qué quieres que mueva
L: en los puntos del cuadrado

La profesora les incita a explorar otras posiciones mediante "arrastre guiado"

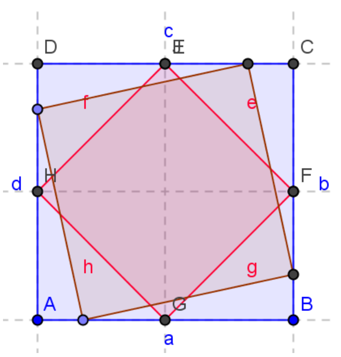
Prof: éste, que si se puede mover. ¡Eso, mira, míralo! Ahí lo tienes, ahí tienes una posición, ¿lo ves? Lo has obligado… borra todos los demás y deja solo uno y le obligáis a que esté colocado correctamente, tocando… ¿Ese es un cuadrado o no, lo has construido con la herramienta polígono regular?
H y L: sí

La prof pregunta si la figura es "realmente un cuadrado"

Prof: luego es un cuadrado, estáis seguras. Podría parecer un cuadrado pero no serlo realmente, pero si lo habéis construido con esa herramienta… Ves, es un cuadrado y toca… parece que puede construirse ¿Es la única posibilidad? Mueve… mueve a otra posición… intenta ahí, por ejemplo

Helena está moviendo el cuadrado siguiendo las sugerencias de la profesora y Lorena mira en silencio la pantalla
L: ahí también toca
Prof: ahí también toca, ¿verdad?
L: vale

Usan repetidamente "arrastre guiado"



Prof: ¿veis?, ¿cuántos crees que habría?
H: pues, desde esta distancia hasta todo esto, me refiero…
Prof: sí, ese muévelo aquí, donde está ese otro, ese… muévelo aquí
L: no, porque luego se te sale

Prof: muévelo ahí, sí y ahora mueve T hasta que… ¿qué pasa?
L: hay infinitos cuadrados
Prof: ah, ¿lo veis? Pues ahora construidme un solo cuadrado que pueda moverlo como lo estáis haciendo pero siempre los cuatro vértices estén en los lados del azul, ¿entendéis lo que digo?
H y L: sí
Prof: perfecto, y lo otro…
L: lo borramos

L contesta que hay infinitos cuadrados inscritos dentro del azul

La profesora les pide construir el cuadrado inscrito general y ellas la entienden enseguida

Helena empieza a realizar los cambios y Lorena apunta lo que han hecho en el auto-protocolo

4. Hemos creado los puntos medios del cuadrado haciendo los puntos medios de los lados del cuadrado, pero no es así.

L usa un lenguaje poco claro y sin indicar las herramientas usadas.

H: bueno, yo voy investigando ¿vale?, cuando tú quieras…
L: vale
H: con paralelas lo podíamos hacer
L: ¿pero una paralela se puede mover? Lo suyo es que no se salga pero que se mueva ¿no?
H: claro, eso es como lo que yo hice con el círculo de la actividad h
L: ah sí, que le dabas la vuelta y daba…
H: por eso digo, si lo hacemos como eso que pusimos los ejes… ay, me ha salido el cuadrado torcido
L: ¿por qué no pones la cuadrícula?
H: vale, ya está… mira pues aquí tenemos las paralelas, o sea… a ver, a ver…
L: eso no son paralelas
H: sí, o sea paralelas a esto
L: ah, vale
H: a ver, ahora queremos inscribir un cuadrado que se pueda mover dentro del propio…
L: y si haces… una diagonal
H: no, diagonal no
L: trazas las diagonales y paralelas a las diagonales
H: una paralela a un punto ¿sabes?, si hago una paralela a este punto me queda así, ¿sabes lo que te quiero decir?
L: sí
H: recta paralela… (Construye en silencio lo que acaba de pensar)

H intenta transferir el procedimiento realizado en la práctica 7-h)

L: claro, es que tienes que hacer la paralela a una recta
H: pero…

H tiene problemas para trazar paralelas.

L: a ver, dale a esta recta nada más
H: ¿ésta?
L: sí, esa es una paralela
H: sí, sí
L: ¿te acuerdas lo que hicimos en uno de los… de las bisectrices de los puntos medios que eran triángulos y movíamos el triángulo y la línea venía con nosotros?

L quiere usar el procedimiento aplicado en la práctica 7

H: no
L: ¿no sabes lo que te digo o no te acuerdas'
H: no sé ni lo que me dices ni me acuerdo
L: a ver, cuando hicimos la actividad esta que tenía todos los apartados, en uno de ellos había que calcular las alturas
H: pero eso era un triángulo
L: ya, pero a lo que me refiero es que cogíamos un punto del triángulo y moviéramos a donde moviéramos la altura venía con nosotros, pues hay que hacer lo mismo ¿no?
H: sí, pero con un cuadrado
L: pero me refiero, que hay que buscar cómo hicimos… no hicimos una perpendicular, pero a lo mejor aquí lo de la perpendicular no tiene mucho sentido…
H. tiene sentido si la raya a la que queremos hacer la perpendicular… o sea, tiene sentido si el triángulo estuviese así
L: a ver, hazlo
H: no, así no… si estuviese así, así

La profesora pregunta qué tal van

Prof: ¿qué ha pasado?
L: que no lo hemos conseguido. Estamos investigando cómo hacerlo
Prof: ¿y?
L: y no sabemos cómo hacerlo
Prof: ¿pero, qué estáis intentando hacer?
H: el triángulo… (Se ríen las dos), o sea, el cuadrado… inscribirlo, para que podamos mover el cuadrado grande y que se mueva dentro
Prof: el que tenéis que mover es el pequeño, moviendo uno de los vértices del pequeño que se mueva el pequeño sin salirse del cuadrado grande, esa era la idea ¿os acordáis?

La profesora les recuerda que el c. inscrito que deben construir se tiene que mover dentro del c. azul

H: sí
Prof: bueno, pues primero necesitáis un vértice en un lado del cuadrado grande
L: el punto medio

L quiere usar como vértice otra vez el pto medio

Prof: pero si obligas a que sea el punto medio ya

no se mueve, tu quieres que se pueda mover
L: ah, ya… un punto cualquiera
Prof: claro, y a partir de ese punto a ver cómo construyes todos los vértices para que la figura que obtengas sea un cuadrado. ¿Y qué ha pasado con… habéis abierto otro archivo?
H: no, es el mismo
Prof: ¿y dónde está…? Ah, que es éste, vale, vale
H: vale
Prof: entonces, partís de un vértice y pensad a ver qué relaciones…, pero créalo ese vértice
H: ¿pero…?
L: no, crea un punto, haz un punto en uno de los lados del cuadrado

H duda cómo determinar el vértice libre del c. inscrito. L le ayuda

Prof: eso es, simplemente, ahí por ejemplo
L: dale a segmento
Prof: segmento o cuadrado, es igual… Muévelo para que veas… no el cuadrado, el punto que acabas de crear, ves se puede mover por ahí y de ahí no sale, está bien

La prof le pide que arrastre para comprobar que el pto es móvil sobre uno de los lados del c. azul

L: sería hacer cuatro puntos…
H: no
Prof: sí, tenéis que poner uno en cada uno de los otros lados pero de manera que lo que obtengáis sea un cuadrado
L: claro
Prof: con lo cual, ¿qué condiciones tienen que cumplir los vértices de un cuadrado para que sea un cuadrado?
H: que midan 90º
Prof: ¿los vértices tienen que medir 90º? Los vértices son puntos

H confunde vértices con ángulos del cuadrado

L: los ángulos
Prof: sí, pero son puntos, olvídate de los ángulos ahora, son puntos entonces… imagínate que tienes ese ¿cómo construyes el opuesto?
H: con una recta…
Prof: ¿cómo se llama? (Se sonríen las dos)
L: ¿perpendicular?

La prof. guía a la pareja a través de sus preguntas

H: no, una recta simplemente que pase por ese punto
Prof: una recta que pasa por dos vértices opuestos de un cuadrilátero ¿se llama?
H: ah, paralela a un lado del…
Prof: naaa, ¡diagonal!, se llama diagonal ¿no?
H y L: ah

La pareja tiene problemas para identificar las diagonales

L: o sea, ¿crear la diagonal del cuadrado?
Prof: no puedes hacer la diagonal porque no tienes el cuadrado, pero la idea es esa… que tiene que haber una recta que pase por los dos ¿y por dónde tiene que pasar además para que sea la diagonal?
L: ¿entre dos vértices? Ay, ya me he perdido no te entiendo

Se pierden cuando la prof sigue preguntando sobre las diagonales.

H: yo tampoco te entiendo
L: por dónde tiene que pasar la diagonal, ¿pero cuál diagonal?
Prof: la del cuadrado
L: pero, ¿la del inscrito o la del otro?
Prof: sí, la del inscrito, el otro ya lo tengo construido no lo tengo que construir
L: ¿Qué por dónde tiene que pasar…?
Prof: bueno, la cuestión es… no digo nada, cómo tenéis que construir esos tres puntos para que al unirlos esa figura sea un cuadrado. Mirad qué relaciones hay entre los elementos de un cuadrado que permiten que eso sea un cuadrado y que es obligatorio que se cumplan

La prof intenta que se den cuenta de las relaciones que se dan en el cuadrado

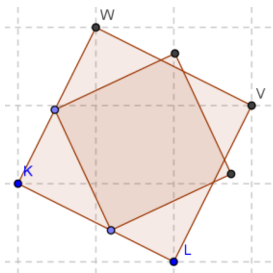
L: que todos los lados tienen que ser iguales ¿no?, para que sea un cuadrado ¿no tienen que ser todos los lados iguales?
Prof: pero no tienes lados todavía, sólo tienes un vértice y quieres colocar los otros tres vértices, a ver…
L: serán equidistantes
Prof: ¿equidistantes de dónde?
L: de éste
Prof: ¿eso te permite construirlos?
L: ah no, claro que no

L entabla un diálogo con la prof, pero no establece relaciones entre vértices y diagonales

Prof: porque además no es una distancia conocida, puede ser cualquier…
L: puesto a lo fácil, por la cuenta de la vieja… (Lorena coge el ratón y empieza a construir algo) plantas aquí, aquí ya tienes cuatro puntos que puedes hacer y sabes que esto es un cuadrado
Prof: pero la idea es que el cuadrado se pueda mover, ¿te acuerdas?
L: pero si lo hago así ¿luego no se puede mover?
H: tienes que hacer un cuadrado
L: ah vale, aquí ¿no? ¿Con que marque dos vale?
H: pero al revés creo
L: pero si hacemos esto nos sale igual que éste, no lo podemos… ah bueno no… ¿cómo lo he hecho?

L vuelve a construir un cuadrado superpuesto al inicial que no se mantiene al arrastrar

H: de la O a la P. Ahora prueba a ver si lo puedes mover, no de esa esquina, de la azul. No, tienes que mover el de dentro
Prof: ese no es el que tienes que mover
H: no, se sale



Prof: vale, habéis hecho lo mismo de antes. La cuestión es que tenéis que ver la relación que hay entre los 4 vértices para que eso sea un cuadrado y sean puntos cada uno de uno de los lados del cuadrado azul, bueno el vuestro no sé si es azul, del cuadrado de fuera. Venga os dejo pensar otro poco

H y L: vale

L: nos quedamos aquí toda la tarde. Yo lo siento mucho pero creo que nos quedamos aquí (las dos se ríen). Yo voy a volver a intentarlo con los segmentos a lo mejor así sí que nos sale

Están desanimadas, no se les ocurre qué hacer y vuelven a procedimientos anteriores

H: dale

L: si ya no nos sale así, Helena yo ya no sé cómo se hace

H: a ver, muévelo. Eso está mal, no es un cuadrado. O sea, es un cuadrado porque…

Usan "arrastre de test"

L: porque sabemos que es un cuadrado, pero no se mueve

H: no, esto está mal. (Coge ella el ratón para realizar la construcción). A ver…

L: ¿y si trazamos una recta que pase por dos puntos?

H: claro, es que el truco tiene que estar en algo, bueno el truco…, la cosa tiene que estar en algo de eso. A ver, voy a hacerlo con éste…teníamos un punto, por ejemplo éste, si hacemos una recta que pase por dos puntos nos da el otro punto, por lo tanto es una diagonal, ¿sabes lo que quiero decir?

Construyen una diagonal pero sin determinar el centro del cuadrado

L: sí. Pero tú la puedes plantar donde quieras

H: claro, eso es lo que acabo de ver. Y si hago una paralela de éste aquí, me va a dar los dos puntos, y me da exacto, ¿sabes?

L: sí

H: se me va a olvidar todo esto, vete apuntando

L: me quedé en…

H: en la prehistoria. A ver, ¿qué he dicho?

Vuelven a trazar paralelas ¿?

L: paralela

H: ah, es verdad. Hago una paralela al vértice por aquí… ¿y ahora cómo era para hacer…? Intersección entre dos objetos: éste y éste. Pero ahora esto no lo voy a poder mover…

L: pero si se mueve uno y ese no se mueve… haz la paralela a ésta

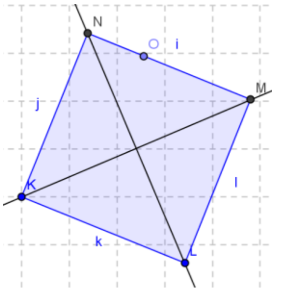
H: ¿a cuál? ¿a esta línea, a este eje?
L: sí
H: ay, que la he liado… Ya, pero aquí nos va a pasar lo mismo
L: no, ya no nos pasa lo mismo. Tú ahora crea una línea que pase por dos puntos, por éste y por éste. Y ahora haz un segmento de aquí a aquí. Vale, haz lo mismo con los otros lados. Y ahora haz un segmento de aquí a aquí…
H: pero no es un cuadrado
L: sí hombre, si es paralelo cómo no va a ser un cuadrado (Coge ella el ratón)
H: mide los ángulos, a ver si… Lo ves, no es un cuadrado

Construyen una figura que no es un cuadrado. Miden los ángulos para comprobarlo.

Lorena sigue haciendo algo en el ordenador, sin decir nada. Luego se da por vencida y lo deja
H: a ver, la profesora ha dicho lo de las diagonales
Lorena coge el ratón y hace algo
L: estas son las diagonales del cuadrado

H retoma la pregunta que les ha hecho la profesora

H: sí pero… antes teníamos un punto en esta línea y ella nos ha dicho: ¿cómo conseguirías con este punto sacar el otro punto?



Lorena muestra signos de cansancio, parece que se ha dado por vencida. Entra la profesora
Prof: ¿cómo va la cosa?

La profesora les pregunta cómo van

L: mal
H: estamos perdidísimas
Prof: ¿a ver?
H: hemos hecho las diagonales del cuadrado azul
Prof: ¿y?
L: y nada
Prof: ¿y nada, no sirve para nada eso? ¿Cómo son las diagonales?

La profesora les pregunta cómo son las diagonales de un cuadrado y dónde se cortan

H: perpendiculares entre sí

Prof: aja, ¿y las del cuadrado que queréis construir, cómo serán?
H: perpendiculares
Prof: ¿siempre son perpendiculares las diagonales de un cuadrado?
H: sí
Prof: bueno, ¿y por qué no usáis esa información? ¿Por donde pasan, donde se cortan?
L: en el punto medio
Prof: en el punto medio. ¿No os viene bien esa información para nada?
L: seguramente sí, pero…
H: sí claro, porque el punto medio del cuadrado grande tiene que ser también… el del cuadrado azul, ¿no?

H se da cuenta de que el centro de ambos cuadrados debe coincidir

Prof: bueno, tenéis el cuadrado azul, explorad un poco ahí, intentad inscribir un cuadrado dentro de ese. Dejad las diagonales para que os den la pista. Dibuja un punto en un lado y a ver qué pasa… a ver si se os ocurre…pero por ahí puede ser que vaya la cosa
H: a ver, tenemos este punto y si las diagonales son perpendiculares… ya está, trazamos una línea…
L: no tengo ni idea (riéndose)
H: ya está, si hago una línea que pase por aquí

L está cansada, H parece tomar la iniciativa

L: no, ves ya está mal
H: espera, y ahora hago… Ya está, ya tengo los 4 puntos
L: vale, vamos a ver si nuestro problema no eran los 4 puntos, nuestro problema era que el cuadrado no se mueva. Vale, muy bien, tenemos los 4 puntos pero ¿ahora cómo los unimos y hacemos que no se mueva?

Helena sigue la construcción y Lorena se ríe cuando comprueba que no sirve, vuelve a ocurrirles lo mismo

L: no salimos de aquí hoy. ¿Y si haces los puntos fijos? Entonces no se mueven (se ríen las dos). Vamos a volver a lo anterior (coge ella el ratón). Escribe tú que yo me he cansado
H: pues sí que te has cansado pronto

H escribe el auto-protocolo y L maneja el ratón

L: es que me estoy frustrando
H: (lee) con la herramienta segmento entre dos puntos hemos trazado…
L: no leas
H: a ver tengo que saber por dónde vamos
L: no, aquí empezamos con los errores estos tan grandes que estamos teniendo
H: ¿aquí que tenías que redactar?

L: iba a poner que habíamos hecho… lo de que hemos hecho los segmentos y no se movía el cuadro
H: ¿qué?
L: no sé cómo explicártelo. Sáltate ese punto e invéntate esto ahora
H: pues luego lo escribes tú
L: si es que no me sale ¿cómo se llama lo que hemos hecho?
H: ¿diagonales?
L: no, cuando hemos hecho…
H: a ver, dibújalo (le enseña la hoja de papel)
L: después de esto ¿qué hemos hecho? (señala el último dibujo del papel)

H le propone a L dibujar lo que quiere decirle, porque no sabe cómo expresarse

H: muchas cosas, no me acuerdo
L: hemos empezado a ver si podíamos… a trazar segmentos, paralelas…
H: ah, ya
L: ¡yo no sé lo que hacer!
Prof: ¿lo habéis podido construir?
L y H: no

Se han olvidado de los procedimientos que han seguido

Prof: ¿y os habéis dado por vencidas?
H: estamos escribiendo lo que hemos hecho
Prof: vale, por si se os olvida. Pero no os deis por vencidas que yo creo que ya estáis a punto, eh
L: ¡pues cómo estemos a punto! (Se ríen las dos). Lugar geométrico… ¿nos puede servir esto para algo?
H: ¡qué no, ja ja!
L: me estoy frustrando

La profesora les anima a seguir

Las dos hablan muy bajito para que no se registre lo que están diciendo, se aprecia que están cansadas del problema y no saben qué hacer
L: a ver Lorena, piensa. Si hombre, si esto tiene que ser fácil. A lo mejor si me lo digo…
Lorena sigue con el ordenador mientras Helena escribe el auto-protocolo.

5. Hemos hecho unas rectas paralelas a los ejes, para confirmar que realmente formaba un cuadrado, pero luego al moverlo, dejaba de ser un cuadrado.

H: ¿qué haces Lorena?
L: perpendiculares
H: ¡claro! ¡Ya está! ¡Claro, que tontas! (le quita el ratón a su compañera y empieza a construir algo)

H toma la iniciativa y empieza a construir algo sin decir nada

L: yo sigo sin entenderlo. He descubierto la solución y no sé cómo (se ríen las dos). Explícamelo
H: espera espera…
L: nooo…
Se quedan en silencio mientras Helena realiza la construcción. Entra la profesora.

Prof: concentración
L: no (Lorena mira la pantalla del ordenador mientras niega con la cabeza)
Prof: ¿qué estáis haciendo?
L: ¡ni idea! No es ya está ¿verdad?
H: no sale
Prof: lo de las diagonales ¿no os ha dado alguna idea?
L: yo había trazado las perpendiculares y creíamos que lo habíamos conseguido, pero no.
Prof: pero tenéis que partir de un punto en uno de los lados. Tenéis que partir de ahí
L: no borres las diagonales
Prof: no, las diagonales no. Borra esos otros puntos que no sabe donde están, ¿ese está en el lado?

La profesora les sugiere que empiecen la construcción a partir de un pto libre en uno de los lados

H: sí, estaba
Prof: estaba, bueno. Y ahí hay otros dos puntos que tampoco necesitamos para nada. Vale, tienes un punto… muévelo. No, no vale
L: no, porque no está puesto… haz un punto en el segmento
Prof: un punto en el segmento, ahora muévelo
L: ¡hala, pues haz otro punto en otro segmento!

La profesora les pide que hagan arrastre de test

Prof: ¿cualquier punto vale, o qué?
H: no, tienen que tener una proporción porque si todos los lados son iguales…
L: pero si tú haces un punto en un lado…
Prof: la cuestión es que ese punto ya se mueve por donde quiero, que es ese segmento. Bien, a partir de ese punto… fijaros en éste que ya lo tenéis trazado, hazlo un poco más chiquitito para que lo veas entero. Es como si tuvierais ese, ¿cómo trazáis ese, el que está enfrente, el opuesto?
L: línea que pasa… recta que pasa por dos puntos
H: no, eso lo hemos hecho antes y no te queda…
Prof: pero déjala acabar, ¿recta que pasa por dónde?
L: por dos puntos

La profesora les vuelve a guiar hacia la relación entre vértices opuestos

Prof: pero ¿por qué puntos? Por ese y por dónde
L: y éste y por la diagonal
Prof: ¿por qué diagonal? Eso no es un punto, un punto… por ese y por…
L: por uno que hagas aquí
Prof: ese es el que quiero determinar, vale. Imagínate este punto y quiero determinar éste, el opuesto. ¿Cómo lo determino? ¿Qué recta pasa por esos dos puntos?
H: ¿una paralela…?
L: no, una perpendi…
Prof: sólo tengo este cuadrado, o un cuadrado, es igual ¿qué recta pasa por los dos vértices opuestos de un cuadrado? Si ya lo hemos dicho antes
H: una diagonal
Prof: su diagonal, ¿puedo trazar la diagonal, por dónde tiene que pasar la diagonal? Por los vértices y por dónde además
H: por el centro
Prof: bueno, ¿y tienes el centro o no lo tienes?
H: sí
Prof: entonces ¿cuál es el problema, por qué no lo trazas?

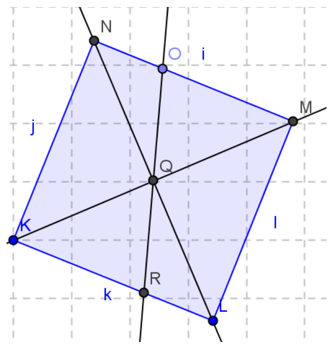
L confunde la diagonal con un punto

Vuelven a olvidarse de identificar las diagonales

Vuelven a la misma conclusión que antes: la diagonal pasa por el centro del cuadrado

Lorena realiza la construcción
Prof: pero primero tienes que tener el centro
L: ah sí
H: primero haz el corte entre dos…
L: ¿cómo?
H: no sé, creo que…
Prof: no, simplemente se ha cambiado de tamaño, no pasa nada
L: ésta, intersección…
Prof: intersección entre dos objetos. Determinad el centro. Ya lo tenéis, bien… Ahora, muévelo el punto ¿tenéis determinado el opuesto?
H y L: sí
Prof: ¿se mueve con él?
H y L: sí
L: entonces hay que hacer otro… ¿no?
H: no, porque… bueno no sé
L: sí, porque si ahora…
H: ah, sí sí
Prof: me faltan los otros dos vértices ¿cómo los trazamos?

Determinan el centro del c. y trazan una diagonal. Hacen “arrastre de test” para comprobar que los vértices opuestos se mueven bien



H: pues lo mismo… haz un punto…
L: no
Prof: ¿a ojillo?
H: haces un punto cualquiera
Prof: ¿a ojillo?
L: ¿punto medio?
Prof: ¿por qué el medio? A ver… bueno, os dejo pensar, pero ya lo tenéis sólo tenéis que daros cuenta otra vez de las relaciones que hay dentro de un cuadrado, ¿vale? No lo estéis todo el rato comparando con el de fuera, sino dentro del propio cuadrado ese, qué tiene que pasar

La profesora les pregunta si determinan el tercer vértice "a ojo"

H: es que yo creo que si hacemos lo mismo que hemos hecho…
L: ¡ah! Si ya tiene éste, el opuesto es éste ¿no?
H: el opuesto de éste es éste
L: pero si yo quiero hago éste
H: ya, pero no sabes si es un cuadrado. Claro, eso es lo que te dice ella: a ojillo
L: ¿ah, esto es a ojillo?

Discuten donde tienen que estar los 2 vértices que faltan

H: claro, no sabes exactamente qué punto es… y ahora, ¡una perpendicular a éste! Haz una perpendicular a ése
L: ¡ay Dios!

H parece darse cuenta de la relación entre los vértices

H: claro, porque un cuadrado si está puesto así… ¿me entiendes por qué haces una perpendicular?
L: ya la he cagado… ¿cómo… se hace… aquí…?
H: y fuera

Hacen "arrastre de test" y no funciona.

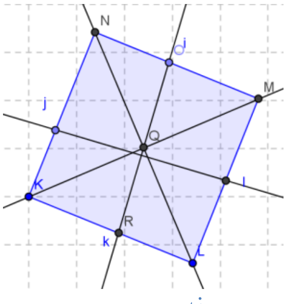
L: y teóricamente es ese punto. No pero, si yo muevo… éste se mueve… ¡ah, pero…! Iba a decir que si hacemos un punto… ¿y si lo hacemos partiendo de aquí? Este ya lo tienes, el punto medio, pues haces…es que iba a decir…ya la he cagado otra vez
H: dale a deshacer
L: si tú haces…no porque esto también sería…
H: eso es lo que yo he pensado, pero ella me ha dicho que eso es a ojillo
L: claro, pero yo decía de hacerlo por aquí…

H: ay qué rabia… pero es que el punto T ese tiene que estar…
L: aquí
H: no, justo en el otro lado
L: no
H: sí, tiene que estar justo en el otro lado. Quita el punto ese
L: ¿éste?
H: sí. Y ese ponlo en el otro lado
L: pero no es un punto que pase por aquí, si tú mueves esto se vienen todos menos ese
H: pero mira, sin embargo el punto O sigue estando

H toma la iniciativa y dirige la construcción

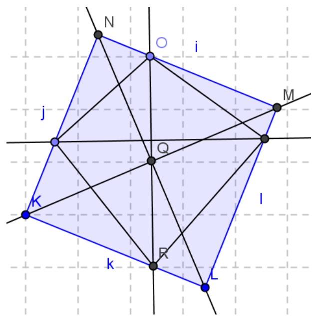
L: claro
H: ¿cómo hemos hecho esto? Hemos hecho un punto… pues haz lo mismo, a ver quítalo, haz un punto cualquiera en… ahí, vale… y ahora, ¡espera, espera, no corras tanto! Porque ahora esta recta tiene que ser perpendicular a esta otra para que sea un cuadrado
L: ay, entonces…vale. ¿No se puede trazar una perpendicular a este punto?
H: sí, mira pincha en la línea… y ahora pincha en este punto
L: ¿lo hemos conseguido?

Construyen una diagonal perpendicular a la que tenían pero sin pasar por el centro



H. es que ya no veo…no, tienes que hacer el cuadrado
L: no, que se mueve… ahora hay que hacer…
H: segmento
L: no, que falta este punto Helena
H: pero ese punto lo sacas como has sacado éste, intersección entre dos objetos ¿sabes?... ahí creo que era, no en el otro… ahí, perfecto
L: y ahora hago segmentos
H: segmentos, sí. Entre el punto O, T, R y S
L: esto no es un cuadrado
H: no es un cuadrado… vale, pero ya… no, lo que se tiene que mover es el de dentro

Hacen "arrastre de test" y comprueban que no se mantiene el cuadrado



Se quedan las dos pensativas, sin hacer nada

H: ahora lo que tenemos que conseguir es que sea siempre proporcional, quiero decir…

L: sí, que sea siempre 90

H: que sea siempre un cuadrado

Piensan que usando otra herramienta pueden conseguir un cuadrado

L: ¿y si lo hacemos con la herramienta?

H: ¿polígono?, entonces estás haciendo esto

L: pero en vez de los segmentos…

Prof: ¿qué pasa? (Se ríen las tres)

H: hemos conseguido ya hacer… pero no nos queda un cuadrado

Prof: entonces…

H: conseguimos que se mueva dentro

Prof: ¿se mueven todos los puntos? Espera, espera, no uses esa herramienta, no tienes que usar esa herramienta para nada. La cuestión es… mueve el punto original, el primero, pero no tienes seleccionada la herramienta de arrastre…Sólo falla éste, fijaros esto no pasa… esto no está bien, no lo habéis construido bien, no veis eso no vale. ¿Por donde tienen…? A ver, ¿las diagonales dónde se tienen que cortar?

La profesora examina la construcción y les pregunta donde deben cortarse las diagonales

H y L: en el centro

Prof: ¿y cómo tienen que ser entre sí?

H: perpendiculares

Prof: bien, pues usad esa información. Si lo tenéis todo, si lo sabéis

L: si lo hemos hecho así, ¿no?

H: no

Prof: no, no veis que no funciona. ¿Qué tenéis que trazar?

H: la perpendicular a…

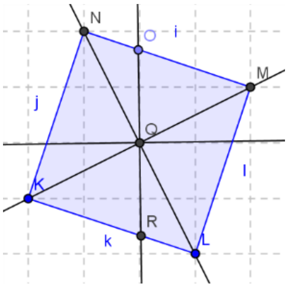
Prof: perpendicular que pase por dónde

L: por un punto de este lado

Prof: no, ese punto no lo conozco, ese es el que quiero determinar

La profesora les vuelve a preguntar hasta que se dan cuenta de que debe pasar por el centro

L y H: por el medio
Prof: ya está, ya está. La perpendicular que pase por el centro.
Lorena le pasa el ratón a Helena y sigue ella la construcción
Prof: perpendicular al centro y ¿a qué recta tiene que ser perpendicular? ahora tenéis que tocar la recta. Ya la tienes. Mueve, mueve, ¿qué?

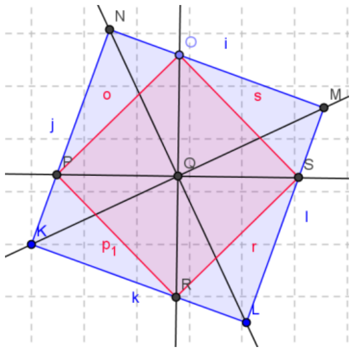


H: ahora sí. Y ahora si hago un segmento
Prof: espérate, no te embales ¿qué necesitas?
L: puntos
Prof: puntos, buena idea. Tienes sólo dos, los otros dos…
L: tienes que marcar la intersección entre…
Prof: eso es, vale… mueve otra vez el punto ¿se mueven todos?
H: sí
L: pon un segmento, corre
Prof: ahora, ¿por qué vas a trazar segmentos, qué quieres dibujar en realidad, qué quieres construir?
H: un cuadrado
Prof: un cuadrado, es un polígono ¿no?... pero no le obligues a que sea regular, simplemente… eso es, tú ya sabes que ese va a ser regular, que va a ser un cuadrado, porque lo has construido para que lo sea.
H: ya está
L: ¡lo hemos conseguido!

La profesora les calma para que determinen los otros vértices

La profesora les vuelve a pedir que arrastren los vértices

La profesora les dice que herramienta deben usar para unir los 4 vértices



La profesora les explica por qué no hace falta usar "polígono regular" ahora

Prof: una vez que habéis forzado a que las diagonales perpendiculares determinen los vértices, ya sabes que el polígono que tenga esos puntos por vértices va a ser un cuadrado, porque tú lo has construido para que lo sea. Entonces no hace falta usar la herramienta polígono regular, eso es para cuando lo dibujo de entrada sin tener en cuenta nada de las diagonales, ni nada
L: vale
Prof: pues os queda escribir todo lo que habéis hecho
H: vale
L. tenemos que escribir a partir de…
Prof: ya teníais parte ¿no?
L: sí. Di que hemos trazado las dos diagonales…
Prof: intentad que las palabras que uséis sean apropiadas. Entre las dos decidís que palabras son las mejores, ¿vale?
H: vale

La profesora les recomienda buscar el vocabulario más apropiado

Helena se dispone a escribir en el auto-protocolo. Se ponen de acuerdo entre las dos en la forma más adecuada de redactar el procedimiento que han seguido.

6- En primer lugar hemos trazado las diagonales del cuadrado azul con la herramienta "recta que pasa por dos puntos". Cuando hemos trazado las diagonales hemos trazado un punto cualquiera en uno de los lados del cuadrado, nuestro objetivo era conseguir el opuesto a ese punto, pero para ello necesitamos el punto medio del cuadrado azul. Para ello con las diagonales anteriormente trazadas y con la herramienta "intersección entre dos objetos" hemos construido el punto medio. Después hemos utilizado la herramienta "recta que pasa por dos puntos" y así hemos obtenido el punto opuesto.

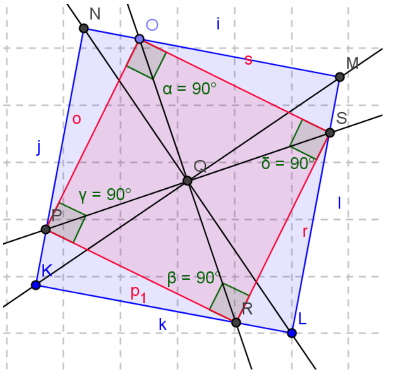
El lenguaje usado es bastante correcto, aunque faltan procedimientos

Prof: ¿Qué tal chicas?
L: bien, estamos viendo los pasos que hemos hecho… Jo, hasta que lo hemos sacado…es que a mí GeoGebra a veces me cuesta porque se me olvida cómo son…cómo utilizar las herramientas o algo así, entonces cuando llego digo: jo, si esto lo hemos hecho la semana pasada
Prof: ¿y dibujando, con lápiz y papel, tú crees que te hubiera resultado más fácil?
L: no, la verdad es que se ve mejor con GeoGebra
H: pero porque, a veces con lápiz y papel es más inexacto, entonces al ser este que siempre sea un cuadrado, yo creo que es más fácil verlo tú que si lo dibujas
L. es que cuando dibujas… tú puedes ver un cuadrado pero no es un cuadrado. Se ve mejor con GeoGebra
H: como nos ha pasado aquí (enseña el papel con sus dibujos). Está a mano alzada pero es un ejemplo. Lo dibujas y no sabes exactamente si es un cuadrado porque no sabes si estás cumpliendo las condiciones para que sea un cuadrado, en cambio con GeoGebra puedes comprobarlo muy fácil: midiendo los ángulos o cosas que si las haces a mano no es tan fácil
L: ay mira, voy a medir los ángulos a ver si lo hemos hecho bien
Prof: vale, pues cuando acabéis me lo decís
H y L: vale
L: comprobación: es un cuadrado

L explica que GeoG le cuesta, pero reconoce que este problema es más fácil que con lápiz y papel

H añade que es más exacto y eso facilita construir y comprobar las figuras

L decide medir los ángulos para comprobar que su solución es un cuadrado



Siguen escribiendo el auto-protocolo

El siguiente intento ha sido hacer el mismo procedimiento en otro de los lados del cuadrado y unir los puntos resultantes por medio de "segmentos

entre dos puntos" pero esto no nos valía, por dos cosas primero, porque no era un cuadrado, y segundo porque cada vez que intentábamos mover los puntos se nos salían del cuadrado.
Después hemos trazado la perpendicular a la diagonal del ángulo inscrito y el punto que cortaba entre el lado opuesto del cuadrado y la otra diagonal del cuadrado inscrito era el último punto que necesitábamos para trazar el polígono.
Por último con la herramienta polígono y al final obteníamos aquello que buscábamos, que el cuadrado solo se desplazase por los lados del cuadrado azul.

El lenguaje usado en este párrafo es poco claro y con errores (diagonal del ángulo inscrito) y falta explicar que la diagonal pasa por el centro

REFERENCIAS

Acosta Gempeler, M. E. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática, 17*(3), 121-140. Retrieved from http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40517307.pdf

Acosta Gempeler, M. E. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones De La Teoría Antropológica De Lo Didáctico,* Jaén. 85-100.

Antohe, V. (2009). Limits of educational soft GeoGebra in a critical constructive review. *Annals.Computer Science Series, II*(1)

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in cabri environment. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Assude, T., Capponi, B., Bertomeu, P., & Bonnet, J. F. (1996). De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-Géomètre. *Pétit x,* (44), 53-79.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils'practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: Complejidad didáctica y expectativas. In N. Gorgorió, J. Deulofeu & A. Bishop (Eds.), *Matemáticas y educación. retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 93-108). Barcelona: Graó.

Ballestero-Alfaro, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: Fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos. *Cuadernos De Investigación y Formación En Educación Matemática, 3*(4), 125-137.

Barrantes, M. (1995). La Geometría en la formación de profesores de Primaria. Paper presented at the *La Formación Del Profesorado De Ciencias y Matemáticas En España y Portugal,* Badajoz (España). 49-54. Retrieved from http://www1.unex.es/eweb/dcem/L95FormProfEspyPort.pdf#page=61

Barrantes, M., & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De Investigación y Experiencias Didácticas, 22*(2), 241-250.

Barreto, J. M. (2006). El equilibrio en la geometría. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (42), 71-85.

Barroso, R. (2000). El proceso de definir en matemáticas. un caso: El triángulo. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De Investigación y Experiencias Didácticas, 18*(2), 285-295.

Barroso, R. (2003). Elección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas. una justificación. *Investigación En Educación Matemática : Séptimo Simposio De La Sociedad Española De Investigación En Educación Matemática,* Granada. 139-152.

Barroso, R. (2004). Estado actual de la investigación sobre el "estudio sobre la influencia del software de geometría dinámica en la visualización y descubrimiento de propiedades geométricas". *Actas Del VIII Simposio De La SEIEM,* La Coruña. (8) 1-9.

Bericat, E. (1998). *La interacción de los métodos cuantitativo y cualitativo en investigación social. Significado y medida*. Barcelona: Ariel.

Bermejo, A. (2002). El libro de espejos. aplicaciones didácticas. *Suma,* (41), 83-92.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Blanco, L. J., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa (Relime), 6*(2), 107-132.

Cachafeiro, L. (2001). Geometría de siempre en el inicio de un nuevo milenio. *Revista Galega do Ensino,* (30), 129-140.

Cano-García, M. E. (2008). La evaluación por competencias en la educación superior. *Profesorado. Revista De Currículum y Formación Del Profesorado, 12*(3), 1-16.

Carrillo de Albornoz, A., & Llamas Centeno, I. (2005). *Cabri géomètre II plus una aventura en el mundo de la geometría*. Madrid: Ra-Ma.

Carrillo de Albornoz, A. (1999). *CABRI GEOMETRE II para Windows construcciones y lugares geométricos*. Madrid: Ra-Ma.

Carrillo de Albornoz, A. (2009). In Llamas Centeno I. (Ed.), *GeoGebra mucho más que geometría dinámica*. Madrid: Ra-Ma.

Casas, L. M., & Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 23*(2), 201-216.

Codina, A. (2008). El trabajo colaborativo y la evaluación formativa en educación matemática. una experiencia con enseñanza virtual. *Enseñanza De la Matemática, 17*(2), 59-78.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. Paper presented at the *Proceedings of the 27th PME International Conference,* Honolulú. *2,* 229-236. Retrieved from http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search/recordDetails.jsp?ERICExtSearch_SearchValue_0=ED500949&searchtype=keyword&ERICExtSearch_SearchType_0=no&_pageLabel=RecordDetails&accno=ED500949&_nfls=false&source=ae

Corrales, J. E., Sanduary, M., Rodríguez, G., Malik, T., & Poblete, A. (2001). ¿Es posible dotar de alguna dinámica a los conceptos de geometría y a las propiedades de las figuras en el aula? *Números, 48*, 13-24.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). *Proofs through exploration in dynamic geometry environments.* International Group for the Psychology of Mathematics Education.

De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. In J. King, & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on* (pp. 15-24). Washington, DC: Mathematical Association of America.

De Villiers, M. (2007). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Teaching and Learning Mathematics,* (4), 46-52.

Dikovic, L. (2009). Implementing dynamic mathematics resources with GeoGebra at the college level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning, 4*(3)

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.* Unpublished Edition. Universiteit Utrecht, Nederland. Retrieved from http://www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation/

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Meagher, M. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles, & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89-132) Springer US

Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition an mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 99-114.

Escribano, J. R. (2000). Algunas demostraciones del valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia. *Suma,* (35), 71-74.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317-333.

Fan, L., & Cheong, N. P. C. (2002). Investigating the sources of singaporean mathematics teachers' pedagogical knowledge. *Mathematics Education for a Knowledge-Based Era,* Singapore. *2,* 224-231.

Fernández-Blanco, T. (2005). Incidencia de los conocimientos geométricos en la mejora de la percepción espacial. Paper presented at the *Investigación En Educación Matemática. IX Simposio De La Sociedad Española De Educación Matemática SEIEM,* Córdoba. (9) 1-19. Retrieved from http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposIXSimposio.html

Fernández-Blanco, T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y al razonamiento espacial.* Tesis no publicada. Universidad de Santiago de Compostela, España. Retrieved from http://www .tesisenred.net/handle/10803/69993

Flores, P. (2002). Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas). *Suma,* (41), 29-35.

Forsythe, S. (2007). Learning geometry through dynamic geometry software. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath,* (202), 31-35.

Freixas, M. (2009). A constraint-based dynamic geometry system. *Computer-Aided Design,*

García, I., & Arriero, C. (2000). Una experiencia con cabri: Las curvas cónicas. *Suma,* (34), 73-80.

García-López, M. M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula.* Tesis no publicada. Universidad de Almería, España. Retrieved from www.ual.es /Universidad/Depar/dmce /Tesis.pdf

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma,* (39), 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la geometría en secundaria. I desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma,* (44), 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. II. la clasificación de los cuadriláteros convexos. *Suma,* (45), 41-52.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Gómez-Chacón, I. M. (2006). Matemáticas: El informe PISA en la práctica. una acción formativa del profesorado. *Uno.Revista De Didáctica De Las Matemáticas,* (41), 40-51.

González, A. P., & Vílchez, N. M. (2004). Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia. aplicación a la primera etapa de educación básica. *Universitas Tarraconensis. Revista De Ciències De l'Educació, 28*, 5-33.

González, E., Guillén, G., & Figueras, O. (2007). Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la enseñanza de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica. Paper presented at the *Investigación En Educación Matemática. Comunicaciones De Los Grupos De Investigación. XI Simposio De La SEIEM,* Tenerife. (11) 21-30. Retrieved from http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXISimposio.pdf

González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de Geometría dinámica. In P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* (Primera edición: marzo 2001 ed., pp. 277-290). Granada: Universidad de Granada. Retrieved from http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/homenaje/00Indice.PDF

Gorgorió, N., Artigues, F., Banyuls, F., Moyano, D., Planas, N., Roca, M., & Xifré, A. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: Un ejemplo, las rotaciones. *Suma,* (33), 59-71.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis no publicada. Universidad de Valencia, España.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. ideas erróneas. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De Investigación y Experiencias Didácticas, 18*(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. una experiencia con estudiantes de magisterio. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 19*(3), 415-431.

Guillén, G., & Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el econtexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. Estudio exploratorio. *Educación Matemática, 18*(3), 65-102. Retrieved from http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40518304.pdf

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of intrumental orchestrations. *ZDM, 34*(5), 204-211.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. *Proceedings of the 20th PME Conference,* (1) 3-19.

Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar: Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 43-59). Barcelona: Graó.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. In J. Giménez, S. Llinares & V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (Colección Mathema nº 8 ed., pp. 143-170). Granada: Comares.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

Güven, B., & Kosa, T. (2008). The effects of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 7*(4), Article11.

Haja, S. (2005). *Investigating the problem solving competency of pre service teachers in dynamic geometry environment.* International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft cabri constructions. *Proceedings of the 24th PME International Conference,* Hiroshima. (1) 103-117.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Herrero Fabregat, C. et al. (2010). In Universidad Autónoma de Madrid (Ed.), *Evaluación continua de las competencias en matemáticas, ciencias sociales y ciencias experimentales en los títulos de maestro de educación primaria e infantil.* Madrid.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*(2), 135.

Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra - a software system for dynamic geometry and algebra in the plane.* Unpublished Edition. Universidad de Salzburgo, Austria. Retrieved from http://www.geogebra.org /publications/diplomarbeit_geogebra.pdf

Hohenwarter, M., Jarvis, D., & Lavicza, Z. (2009). Linking geometry, algebra, and mathematics teachers: GeoGebra software and the establishment of the international GeoGebra institute. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 16*(2), 83.

Iranzo, N. (2009). La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisicion de competencia del alumnado. *Enseñanza De Las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas, 27*(3), 433-446.

Iranzo-Domènech, N. (2009). *Influence of dynamic geometry software on plane geometry problem solving strategies.* Tesis no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España. Retrieved from http:// www.geogebra.org/publications/2009-06-30-Nuria-Iranzo-Dissertation.pdf

Jiang, Z. (2002). Developing preservice teachers' mathematical reasoning and proof abilities in the geometer's sketchpad environment. *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Columbus, Ohio. 717-729.

Jones, K., Gutiérrez, A., & Mariotti, M. A. (2000). Proof in dynamic geometry environments: A PME special issue. *Educational Studies in Mathematics,* (44), 1-3.

Jones, K., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Lu, A., Dawes, M., Parish, A., & Borcherds, M. (2009). BSRLM geometry working group: Establishing a professional development network to support teachers using dynamic mathematics. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* Southampton. *29*(1) 97-102.

Laborde, C. (1998). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. In L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. variedades de la educación matemática* (pp. 33-48). Bogotá: una empresa docente.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique. *Recherches en Didactique del Mathématiques, 14*(12), 165-210.

Lagrange, J. (2005a). Transposing computer tools from the mathematical sciences into teaching. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 67-82) Springer Netherlands.

Lagrange, J. (2005b). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135) Springer Netherlands.

Lasa Oiarbide, A., Wilhelmi, M. R., & Saenz de Cabezón, A. (2010). Uso de GeoGebra en la titulación de maestro. *Epsilon: Revista De La Sociedad Andaluza De Educación Matemática "Thales",* (74), 7-14.

Lasnier, F. (2000). *Réussir la formation par compétences*. Montréal: Guérin.

López-Vílchez, I. (2008). Entre la razón y el mito: arte y ciencia en la divina proporción. *Educatio Siglo XXI. Revista de la Facultad de Educación de Granada, 26*, 267-288.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* (44), 87-125.

Martel, J. (1999). Fórmulas generales para la determinación de áreas y volúmenes. *El Guiniguada,* (8), 291-317.

Martí, E. (1997). *Cuadernos De Pedagogía,* (255), 54-58.

Mifsud, E. (2010). *Matemáticas y las TIC- GeoGebra.* Retrieved 06/06, 2012, from http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/es/equipamiento-tecnologico/didactica-de-la-tecnologia/806-monografico-matematicas-y-las-tic?start=2

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria, Real Decreto (2006). Retrieved from http://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2006-21409

Mora, J. A. (2002). Geometría de ayer y de hoy. *Suma,* (39), 77-82.

Moyá, T. (2002). La comprensión de la representación del volumen por los estudiantes de la ESO y el bachillerato. *Arte, Individuo y Sociedad,* (14), 11-26.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., & Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 assesment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Murillo, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O.* Tesis no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona, España. Retrieved from http://www.tdx.cat/TDX-0710101-030847

Murillo, J., & Fortuny, J. M. (2003). Interactividad en la red con actividades CABRI. *Contextos Educativos, 6-7*, 295-315.

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills.*

OECD. (2006). *Assessing scientific, reading, and mathematical literacy: A framework for PISA 2006*. Retrieved from http://213.253.134.43/oecd/pdfs/browseit/9806031E.pdf

Olive, J. (2000). Using dynamic geometry technology: Implications for teaching, learning and research. *Proceedings of TIME 2000 - An International Conference on Technology in Mathematics Education,* Auckland, New Zealand. 226-235.

Pandiscio, E. A. (2002). Exploring the link between preservice teacher's conception of proof and the use of dynamic geometry software. *School Science and Mathematics, 102*(5), 216.

Pérez, R., Berenguer, I., Berenguer, L., Como, B., Daza, M. D. Fernández, F., Pasadas, M., & Payá, A. M. (2002). Isoperímetros: El problema de la existencia de solución en el problema isoperimétrico. *Suma,* (41), 113-115.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*, translated by Langdon F. J. & Lunzer J. L., Routledge & K. Paul, London.

Preiner, J. (2008). *Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of geogebra.* Unpublished Edition. Universidad de Salzburgo, Austria. Retrieved from http://www.geogebra.org/publications/jpreiner-dissertation.pdf

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2*(3), 87-107.

Pujol, R. (2008). GeoGebra en el actual sistema educativo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (47), 94-105.

Rabardel, P. (2001). Instrument mediated activity in situations. In A. Blandford, J. Vanderdonckt & P. Gray (Eds.), *People and comuters XV-interactions without frontiers* (pp. 17-30) Springer-Verlag.

Rabardel, P., & Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: From subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science, 6*(5), 429-461.

Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers, 15*(5), 665-691.

Rafael, L. L. (2007). Geogebra: La eficiencia de la intuición.*10*(1), 223-240.

Redondo, A., & Haro, M. J. (2002). Experiencias sobre la aproximación intuitiva en geometría. una aproximación del número pi en la ESO. *Suma,* (41), 69-75.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA: Revista De Investigación En Didáctica De La Matemática, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2005). Evaluación de competencias matemáticas: Proyecto PISA/OCDE 2003. *Boletín Informativo De La S.M.P.C.,* (8), 4-12.

Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Revista Educaçao, 31*(1). Retrieved from http://coralx.ufsm .br/revce/revce/2006/01/a1.htm

Roux, M. (2009). Construire des savoirs, en analyse, avec le logiciel GeoGebra. *Bulletin De l' APMEP,* (483), 534.

Ruiz-López, N. (2011a). GeoGebra workshop for the initial teacher training in primary education. Paper presented at the *Technology and its Integration into Mathematics Education. Proceedings of TIME 2010,* Málaga. Retrieved from http://www.time2010.uma.es/Proceedings/

Ruiz-López, N. (2011b). Medios y recursos para la enseñanza de la Geometría en la educación obligatoria. *Didácticas Específicas,* (3), 13-27. Retrieved from http://www.didacticasespecificas.com/files /download/3/articulos/30.pdf

Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education, 51*(1), 297-317.

Saads, S., & Davis, G. (1997). Spatial abilities, van hiele levels, and language use in three dimensional geometry. *Proceedings of 21th PME Conference,* Finland. (4) 104-111.

Sáenz Castro, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 123-143.

Sáenz Castro, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza De Las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas, 25*(3), 355-366.

Santos-Trigo, M., Reyes-Rodriguez, A., & Espinosa-Perez, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 26*(4), 167-178.

Scaglia, S. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica.(1), 35-50.

Schmidt, W., Tatoo, M. T., Bankov, K., Blomeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., Schwille, J. (2007). *The preparation gap: Teachar education for middle school mathematics in six countries.* (MT21 report). East Lansing, MI: Michigan State University. Retrieved from http://hub.mspnet.org/index.cfm/14977

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform] *Profesorado. Revista De Currículum y Formación Del Profesorado, 9*(2), 1-30. Retrieved from http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf

Sinclair, M. P. (2005). Peer interactions in a computer lab: Reflections on results of a case study involving web-based dynamic geometry sketches. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(1), 84-107.

Siñeriz, L., & Santinelli, R. (1999). El uso didáctico del cabri: Implicaciones. *Suma,* (30), 97-102.

Son, J. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry. Paper presented at the *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Prague. *5,* 145-152. Retrieved from http://www.emis.de/proceedings/PME30/5/145.pdf

Sordo, J. M. (2005).*Estudio de una estrategia didáctica basada en las nuevas tecnologíaspara la enseñanza de la geometría.* Tesis no publicada. Universidad Complutense de Madrid, España. Retrieved from http:// eprints.ucm.es/7247/

Strässer, R. (1992). Didactic perspectives on software as tools in lower secondary geometry teaching. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 24*(5), 197-201.

Tatoo, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University. Retrieved from http://teds.educ.msu.edu/framework/

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of Human/Machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307.

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 197-230) Springer Netherlands.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos. Revista de Estudios de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete,* (21), 35-48.

Velázquez, F. (2006). La geometría, una enseñanza imprescindible. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (42), 5-10.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didáctique Des Mathématiques, 10*(2), 133-170.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: La Pléyade.

White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(1), 1-26.