UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE APROXIMACIÓN DE ESPACIOS INVARIANTES POR TRASLACIONES A TRAVÉS DE LA FUNCIÓN ESPECTRAL

Moisés Soto Bajo

Tesis doctoral dirigida por:
D. Kazaros Kazarian

Abril de 2012

Agradecimientos

A pesar de que siento no haber agradecido lo suficiente,
pienso que el hábitat natural de la gratitud es la mirada.
Por tanto, sed indulgentes,
y no busquéis sino en vuestro alma.

"I started making up a list of people to thank but it got too long
- you know who you are.
Eternal gratitude to everybody who's supported the stuff I've done
(with their hard-earned cash or through shoplifting)
and who can see through all the bullshit,
both positive and negative,
that tends to surround this sort of thing."

— Irvine Welsh, Filth

Sin embargo, sí me gustaría agradecer especialmente a las siguientes personas el tomar parte activa en la elaboración de esta tesis doctoral: a Patricio Cifuentes Muñiz por las fructíferas charlas y útiles consejos en la redacción de esta tesis; a Eugenio Hernández Rodríguez por sus interesantes comentarios sobre la tesis; a Ángel San Antolín Gil porque me brindó su ayuda siempre que tuvo oportunidad de ello; a David Torres Teigell por compartir conmigo parte de los secretos de su magia con el LaTeX; y por supuesto, a Kazaros Kazarian, sencillamente por ser maestro y amigo.

Índice general

Summary and conclusions

The current memoir includes the research performed by the author in the fields of Shift-Invariant Spaces, Multiresolution Analyses and Wavelet Theory. We have tried to write a text which in a coherent and simple way, accomplishes a study of the approximation properties of shift-invariant spaces via the spectral function.

By this we mean the following[1]: we consider a certain class of operators, called "dilation operators", and focus on the sequence of images of a shift-invariant space of these operators. We assume that the index set is the set of all integers, since dilation operators are unitary operators.

Firstly, when the initial space (called "core space") is refinable, these structures are known as "generalized multiresolution analysis" provided they satisfy certain properties, namely intersection and completeness properties. We show that the spectral function provides relevant and often conclusive information about these properties. On the other hand, for not necessarily refinable spaces we have studied the approximation properties of these sequences. We have obtained necessary and sufficient conditions on the spectral function so that these sequences provide given approximation and density orders.

Our main aim was to improve our understanding of several intensively studied topics. We have tried to offer a wide and simplified picture of the subject. We exploit numerous achievements developed by a large number of researchers for several decades of intensive work. The Theory of Shift-Invariant Spaces plays a major role in Approximation Theory and Finite Element Analysis because it provides a common framework for such diverse objects as Splines, Radial basis functions, Wavelets or Gabor systems (see [53], [54], [17], [125]). One of these achievements is the introduction of the concept of the spectral function, which is the main tool in our analysis. We proceed to describe the contents of this text.

[1] We will specify notations and definitions below.

Chapter 1: Generalized Multiresolution Analyses

We consider a **lattice** $\Gamma := M\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{R}^d$, which is a discrete subgroup of $(\mathbb{R}^d, +)$, defined by a $d \times d$ nonsingular matrix M. We denote the system of shifts of a function $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ by $f_{(k)} := f(\cdot - k)$ $(k \in \Gamma)$. Thus we consider closed subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$ which are closed under shifts in the lattice, i.e., a closed subspace V of $L^2(\mathbb{R}^d)$ is called a **shift-invariant space** if

$$f \in V \Rightarrow f_{(k)} \in V \quad \forall\, k \in \Gamma\,.$$

We restrict ourselves to the standard lattice $\mathbb{Z}^d$ corresponding to choosing the identity matrix as M, so $\Gamma = \mathbb{Z}^d$. We refer to [53], [54], [17], [125], [26], or [93] for the Shift-Invariant Space Theory.

Given a set $\mathcal{G} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ we define its shifts system and the shift-invariant space generated by $\mathcal{G}$ as

$$Tr(\mathcal{G}) := \{f_{(k)} \;:\; f \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{Z}^d\} \quad \text{and} \quad \mathcal{S}(\mathcal{G}) := \overline{span}(Tr(\mathcal{G}))\,,$$

i.e., the $L^2(\mathbb{R}^d)$-closure of the linear span of shifts of $\mathcal{G}$. The set $\mathcal{G}$ is said to be a generating set. If $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$ for some finite set $\mathcal{G}$, V is called **finitely generated**, and if $V = \mathcal{S}(\{f\}) =: \mathcal{S}(f)$ for some $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, V is called **principal**.

In Appendix B some theory concerning shift-invariant spaces can be found. Concretely, in section B.1 we deal with the **bracket product** of two functions $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, given by

$$[f,g](t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(t+k)\,\overline{g(t+k)} \quad (t \in \mathbb{T}^d)\,.$$

The bracket product $[f,g]$ is a $\mathbb{Z}^d$-periodic integrable function which informs us about shifts systems of f and g. In section B.2 the structure of principal shift-invariant spaces is exposed, and in section B.3 we prove some properties of orthogonal projections of shift-invariant spaces (see [52], [53], and [54]).

We call a set $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha \in I}$ in a shift-invariant space V **tight frame generator** of V if the shifts system of $\mathcal{G}$ is a tight frame of V, i.e., if $\mathcal{G}$ generates V and

$$\sum_{\alpha \in I} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} | < f, \phi^\alpha_{(k)} > |^2 = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, f \in V\,.$$

It is well known that any shift-invariant space admits a countable tight frame generator (see [17]).

Given a shift-invariant space V and a tight frame generator $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ of V, we define the **spectral function** of V as

$$\sigma_V(\xi) := \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi)|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,,$$

where $\widehat{\phi^\alpha}$ is the Fourier transform of ϕ^α. It turns out that σ_V does not depend on $\mathcal{G}$, only on V, and it is a locally integrable function. If additionally V is finitely generated, σ_V is integrable. We also define the **dimension function** of a shift-invariant space V as

$$\dim_V(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sigma_V(\xi + k) \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,, \tag{1}$$

and its **spectrum** as the set $\sigma(V) := \{\xi \in \mathbb{R}^d \,:\, \dim_V(\xi) > 0\}$. We refer to [26] for a detailed discussion.

The spectral function was introduced in [129] in order to characterize orthogonal wavelets, and it has become an useful tool for studying shift-invariant spaces. We refer to [129], [26], [71], or [22] for properties and equivalent definitions of spectral functions (in [71] it is called "modular function")[2]. Among the features of spectral functions, we highlight the additivity with respect to orthogonal direct sums of shift-invariant spaces.

We consider a linear expansive map in $\mathbb{R}^d$ such that $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$, i.e., a linear map $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ such that all its eigenvalues have modulus strictly greater than one (we write $A \in \mathcal{LE}$) and its matrix in the canonical basis, also denoted A, is composed by integers. In Appendix A this class of linear maps, called **dilations**, are studied. These transformations have largely been used in Wavelet and Multiresolution Analysis Theories as generalizations of classical dyadic dilations. We fix such a dilation A.

We denote $d_A := |det(A)|$. The adjoint of A, denoted by A^*, is also a dilation and $d_{A^*} = d_A > 1$. If $j \in \mathbb{Z}$, A^j denotes the j-th power of A if $j > 0$ and of A^{-1} if $j < 0$. $A^0 := Id$ is the identity matrix. $\Delta_A \subseteq \mathbb{Z}^d$ denotes a digit set of $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$. It is known that the cardinality of Δ_A is exactly d_A.

We call a measurable set $G \subseteq \mathbb{R}^d$ A**-invariant** or A**-set** if $A(G) = G$. The A-sets arise naturally in the study of wavelets and multiresolution analysis. They can be found in [116], where they are called "dyadically dilation invariant sets" in relation with the dyadic dilation in the real line. In [94] a brief study of this kind of sets can be found. In section 1.2 we characterize them by showing that there exists measurable sets E such that $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j E$.

[2] In [60] the "local trace function" has been introduced, which includes the spectral function.

These sets E can be constructed easily and explicitly. Thus clearly $G \subseteq \mathbb{R}^d$ is an A-set if and only if $G = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j G_0$ where $G_0 := G \cap E$.

Another relevant result is that if G is an A-set it turns out that $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(G+k)$. This important fact allows the A-reducing spaces, which will be defined below, to have orthogonal wavelet systems and shift-invariant spaces with regular (orthogonal or Riesz) bases of translates (see [45]).

Fix an A^*-set G of positive measure. $\mathcal{D}_A$ denotes the **dilation operator** defined by $\mathcal{D}_A f(\cdot) := d_A^{\frac{1}{2}} f(A\,\cdot)$ $(f \in L^2(\mathbb{R}^d))$.

The study of the dilations (by $\mathcal{D}_A$) of a shift-invariant space, and particularly of the **Multiresolution Analyses** has been shown to be very useful for understanding affine or **wavelet** systems, among other applications in other areas (see [8], [6]). The natural settings for that study are the A-reducing spaces: a closed subspace V of $L^2(\mathbb{R}^d)$ is called A**-reducing** if it is shift-invariant and $\mathcal{D}_A V = V$ (see [94] or [44]). Apart from $L^2(\mathbb{R}^d)$, the first considered A-reducing space was the Hardy space H^2 in the real line with the dyadic dilation (see [73], [2], [78], [79]). More general A-reducing spaces have recently been studied in many papers ([117], [48], [116], [47], [99], [70], [43], [44], [45], [115], [94], [149]).

It is well known that a closed subspace V of $L^2(\mathbb{R}^d)$ is an A-reducing space if and only if exists an A^*-set G such that $V = H_G^2 := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : Supp\widehat{f} \subseteq G\}$, where $Supp\widehat{f} = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \widehat{f}(\xi) \neq 0\}$ is the support of $\widehat{f}$ ([48], [116], [44], [94]). It is also known that $\sigma_{H_G^2} = \chi_G$ ([26], [22]).

More than twenty years ago Multiresolution Analyses (MRA) were introduced by Mallat and Meyer in their search for a systematic method to construct wavelets ([118], [119], [50], [79], [144]). Many generalizations have been performed since then. Multiresolution analyses with multiplicity have been considered, i.e., MRA whose core space V_0 is generated by many functions ([80], [67], [56], [31], [33], [130]). Also **frame multiresolution analyses** or FMRA have been studied, replacing orthonormal or Riesz bases by frames ([12], [114], [13], [51], [100], [98], [126], [124], [14]). Also, there are studies of MRAs in A-reducing spaces ([78], [116], [115], [94], [149]).

Generalized Multiresolution Analyses (GMRA) were introduced in [9]. In this case the core space is only required to be shift-invariant ([6]). Concretely, a shift-invariant space V generates a GMRA of H_G^2 if it satisfies the properties of A**-refinability**

$$V \subseteq \mathcal{D}_A V\,, \tag{2}$$

intersection

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V = \{0\} \tag{3}$$

and of **completeness**

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2\,. \tag{4}$$

Note that generalized multiresolution analyses can only been studied in A-reducing spaces because of their nature.

A set $\Psi := \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$ is said to be an orthogonal multiwavelet, Riesz multiwavelet, frame multiwavelet or tight frame multiwavelet if the associate affine system

$$X(\Psi) = \{\psi^\alpha_{(j,k)} \;:\; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, 1 \le \alpha \le N\} \tag{5}$$

is an orthonormal basis, Riesz basis, frame or tight frame of H_G^2 respectively, where $\psi^\alpha_{(j,k)} := d_A^{\frac{j}{2}}\,\psi^\alpha(A^j \cdot -k)$. We refer to [119], [50], [36], [79], [144], [143], [66] for Wavelet Theory.

The generalized multiresolution analyses and multiwavelets are very close objects (see [61], [21]). Results about the characterization of multiwavelets associated to MRAs or MRA-multiwavelets can be found in [110], [111], [1], [113], [2], [112], [68], [142], [78], [147], [95], [33], [96], [97], [23]. In [9] it was shown that any orthogonal multiwavelet is associated to a GMRA (see also [122], [148]). Biorthogonal multiwavelets were characterized as the only Riesz multiwavelets associated with GMRAs in [104] (see [95]). GMRAs associated with orthogonal multiwavelets were characterized in [9] (see [26], [20], [21]).

It is known that semiorthogonal frame multiwavelets induce GMRAs (see [27], [10]). **Baggett's problem** asks if any tight frame multiwavelet is associated with a GMRA ([21], [22], [5]), and remains open for the nonsemiorthogonal case. In the general case, a frame multiwavelet does not need to be associated with a GMRA.

Chapter 2: (G, A)-density and (G, A)-approximate continuity

The concepts of density point and approximate continuity point belong to the classical terminology from Measure Theory (see [57], [120]). These tools allow us to make a bridge between relatively different concepts, such as measurable sets and inner points of a set, or continuous and measurable functions. These links provide a deeper understanding and give us a way of expressing certain types of ideas in modern Mathematical Analysis.

These notions together with the recently introduced notion of locally nonzero function at a point were used in the characterization of scaling functions of a multiresolution analysis in [40] (see also [41], [131], [130]). Furthermore, the concepts of A-density point of a set, A-approximate continuity point of a measurable function and A-locally nonzero function at a point for any dilation A were introduced in order to extend this study to the $\mathcal{D}_A$-dilated multiresolution analyses.

The scaling functions in A-reducing spaces were characterized in [94]. The concepts of (G, A)-density point of a set, (G, A)-approximate continuity point of a measurable function and (G, A)-locally nonzero function at a point were introduced there. In this chapter we develope this theory. We remark that the above notions correspond to the cases $G = \mathbb{R}^d$ and $A = A_{(2)} = 2\,Id$ (dyadic dilations), respectively.

Let $K \subseteq \mathbb{R}^d$ be a measurable set and $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ such that $0 < r_1 < r_2 < \infty$ and $B_{r_1} \subseteq K \subseteq B_{r_2}$, where B_r is the ball of radius r centered at the origin. Then we say that $x \in \mathbb{R}^d$ is a (G, A)**-density point of** E (and we write $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$) if

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap (G + x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} = 1\,. \tag{6}$$

This definition does not depend on the set K. Given a measurable function $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, we say that $x \in \mathbb{R}^d$ is a (G, A)**-approximate continuity point** of f, or that f is (G, A)**-approximate continuous** at x, if there exists $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$ such that

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in E}} f(y) = f(x)\,. \tag{7}$$

We provide several conditions for approximate continuity (see [132], [131], [133]). On the other hand, we say that f is (G, A)**-locally nonzero** at $x \in \mathbb{R}^d$ if

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y \in G \cap A^{-j}B_1 \;:\; f(y + x) = 0\}|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = 0\,, \tag{8}$$

i.e., if $Supp(f) \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$.

Finally, we prove that for any locally integrable function f and almost every $x \in \mathbb{R}^d$ we have

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|G \cap A^{-j}Q_1|} \int_{G\cap A^{-j}Q_1} |f(y + x) - f(x)|\, dy = 0\,. \tag{9}$$

Also, it is proved that almost every point of any measurable set $E \subseteq \mathbb{R}^d$ is a (G, A)-density point of E, and almost every point is a (G, A)-approximate continuity point of any finite and measurable $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$. These theorems generalize the celebrated Lebesgue Differentiation Theorem and classical theorems due to Denjoy.

Chapter 3: Characterizations of Generalized Multiresolution Analyses

There exist a large number of characterizations of scaling functions and frame scaling functions in the literature ([117], [52], [78], [116], [98], [40], [41], [115], [42], [94], [149]). From the content of these references we deduce the following characterization of principal GMRAs (the core space is principal): let A be a dilation, G an A^*-set and $\varphi \in H^2_G$. Then the spectral function of the space $\mathcal{S}(\varphi)$ is $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}(\xi) = |\widehat{\phi}(\xi)|^2$, where $\phi \in H^2_G$ is given by

$$\widehat{\phi}(\xi) := \begin{cases} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]^{\frac{1}{2}}} & \text{if } [\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}] \neq 0 \\ 0 & o.w. \end{cases} . \tag{10}$$

We get the following:

Theorem I *The space $\mathcal{S}(\varphi)$ generates a GMRA if and only if*

(a) *there exists an $m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ (low-pass filter) such that*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi) \quad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,; \tag{11}$$

and

(b) *the origin is a (G, A^*)-approximate continuity point of $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}$ if we put $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}(0) = 1$.*

Remark 1 *Several other conditions replacing (b) can be found in section 3.1. It is clear that condition (a), or A-refinability of $\mathcal{S}(\varphi)$, can not be rewritten only in terms of $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}$ (see section 3.2).*

The following sections concern the characterization of non principal GMRAs (the core space V has more than one generator). Concerning finitely generated core spaces, similar characterizations can be found in [31], [90], and [130]. In the general case, the following theorems were proved in [26] (see also [6]).

Theorem II *Let V be an A-refinable shift-invariant space. Then*

(i) $\dim_V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ *is a $\mathbb{Z}^d$-periodic measurable function,*

(ii) *one has*

$$\sum_{\gamma \in \Delta_{A^*}} \dim_V(A^{*-1}(\xi + \gamma)) \geq \dim_V(\xi) \quad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{12}$$

(iii) *if* $E := \{\xi \in \mathbb{R}^d \ : \ \dim_V(A^{*-j}\xi) \geq 1$ *for* $j \in \overline{\mathbb{N}}\}$ *where* $\overline{\mathbb{N}} := \{0, 1, \ldots\}$ *then*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \chi_E(\xi + k) \geq \dim_V(\xi) \quad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^d . \tag{13}$$

Reciprocally, if a function satisfies these three properties, then there exists a shift-invariant space generating a GMRA of H^2_G *with* $G := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}E$ *whose dimension function is exactly this one.*

Theorem III *If a shift-invariant space* V *generates a GMRA of* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *then* $\dim_V$ *satisfies (i), (ii), (iii), and*

(iv) *one has*

$$\liminf_{j\to\infty} \dim_V(A^{*-j}\xi) \geq 1 \quad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^d . \tag{14}$$

Reciprocally, if some function satisfies (i)-(iv), then there exists a shift-invariant space generating a GMRA of $L^2(\mathbb{R}^d)$ *whose dimension function is exactly this one.*

The following characterization was proved in [61] by using the "local trace function" introduced in [60]:

Theorem IV *Let* V *be an* A*-refinable shift-invariant space and* $\mathcal{G} := \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ *a tight frame generator of* V*. The following conditions are equivalent:*

- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j_A V} = L^2(\mathbb{R}^d)$,

- *one has*

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(A^{*-j}\xi)|^2 = 1 \quad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^d . \tag{15}$$

There are papers in which "generalized scaling functions" are constructed from families of filters (see [4], [7], [65], [28]).

Therefore, in view of the above results and having in mind that the spectral function plays a similar role as the scaling function in the principal case, we try to give an answer to the following question:

> **What information is provided (and how) by the spectral function about the A-refinability, intersection and completeness properties?**

From (1) we see that the dimension function can be expressed in terms of the spectral function. This fact, together with the above theorems from [26], gives an indirect characterization of spectral functions of core spaces of GMRAs. Our goal is to find other conditions by extending the arguments underlying the characterizations in the finitely generated case. We show that in general A-refinability of a shift-invariant space can not be characterized only in terms of the spectral function. We also expose some known advances concerning the intersection property which show that the spectral function does not always determine this question (see [50], [36], [117], [52], [142], [79], [40], [131], [42], [90], [20], [143], [129], [22], [5]).

Concerning the completeness property, we summarize the obtained results in the following:

Theorem 1 *Let $V \neq \{0\}$ be an A-refinable shift-invariant space and $G \subseteq \mathbb{R}^d$ an A^*-set of positive measure such that $Supp(\sigma_V) \subseteq G$. Then the following conditions are equivalent:*

- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$,
- *if* $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$ *then* $G = \bigcup_{\phi\in\mathcal{G}} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi}))$,
- *for any bounded* $E \subseteq G$ *of positive measure*
$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} \sigma_V(\xi)\, d\xi = 1\,, \tag{16}$$
- *the set* $Supp(\sigma_V)$ *is* A^{*-1}*-absorbing in* G*, i.e., for a.e.* $\xi \in G$ $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ *(dependent on* ξ*) such that* $\sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$ *whenever* $j \geq j_0$*,*
- $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$ *for a.e.* $\xi \in G$*,*
- $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) = 1$ *for a.e.* $\xi \in G$*,*[3]
- σ_V *is* (G, A^*)*-locally nonzero at the origin,*
- σ_V *is* (G, A^*)*-approximate continuous at the origin if we put* $\sigma_V(0) = 1$.

The above terminology also allows us to rewrite a characterization of tight frame wavelets in H_G^2 from [19]. The condition

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 = \chi_G(\xi) \quad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^d \tag{17}$$

[3] Compare with Theorem IV.

is equivalent to having that the integrable function

$$S_\Psi(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 \tag{18}$$

is (G, A^*)-approximate continuous at the origin if we put $S_\Psi(0) = 1$. This formulation expresses a local property.

We also prove the following results related to the so called cancellation or oscillation property of wavelets (see [11], [119], [50], [79], [144]):

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0 \quad (\psi \in L^1(\mathbb{R}))\,. \tag{19}$$

Theorem 2 *Let W be a shift-invariant space such that for some dilation A and some A^*-set G we have the orthogonal decomposition*

$$H_G^2 = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j W\,. \tag{20}$$

Then the origin is a point of A^*-approximate continuity of σ_W if we put $\sigma_W(0) = 0$.

Theorem 3 *If $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ is a tight frame multiwavelet of H_G^2 then for any α $(1 \le \alpha \le N)$ the origin is a point of A^*-approximate continuity of $\widehat{\psi^\alpha}$ if we put $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$.*

The following paper

[Soto-Bajo, M.; *Completeness of dilates of shift-invariant subspaces*]

is related to these results and it is expected to be submitted soon.

Chapter 4: Approximation Theory of Shift-Invariant Spaces

In Approximation Theory and Finite Element Theory approximation by the scaled spaces

$$\mathcal{D}^h V := \{f(h^{-1}\cdot) \ : \ f \in V\}\,, \tag{21}$$

where V is a shift-invariant space and h is a real positive parameter, plays a major role. Note that $\mathcal{D}^h V$ is shift-invariant by elements in the lattice $h\,\mathbb{Z}^d$.

Given a family $\{V_h\}_{h>0}$ of closed spaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$, a natural way to approximate a function $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ is to consider the family of orthogonal projections $\{P_{\mathcal{D}^h V_h} f\}_{h>0}$. If $V_h = V\ \forall\, h > 0$ we call the family **stationary**.

The pursued goal is to have $P_{\mathcal{D}^h V_h} f \xrightarrow[h\to 0^+]{} f$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. In this case the family $\{V_h\}_{h>0}$ is said to be **dense** in $L^2(\mathbb{R}^d)$. This property can be rewritten in terms of the approximation errors: the approximation error of $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ with respect to the space V is

$$E(f,V) := \mathrm{mín}\{\| f - g \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \ : \ g \in V\} = \| f - P_V f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} . \tag{22}$$

In this way, the family $\{V_h\}_{h>0}$ is dense if

$$E(f, \mathcal{D}^h V_h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d) . \tag{23}$$

A way to measure approximation efficiency is the following: firstly we consider for any $k \in \overline{\mathbb{N}}$ the Sobolev space

$$W^k := W_2^k(\mathbb{R}^d) := \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) \ : \ \| g \|_{W^k} := \left\| (1 + \| \cdot \|)^k \,\widehat{g}\, \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty\} . \tag{24}$$

Note that $W^0 = L^2(\mathbb{R}^d)$. Then we say that the family $\{V_h\}_{h>0}$ provides **approximation order** $k \in \mathbb{N}$ if $\exists\, C > 0$ such that $\forall\, f \in W^k$, $h > 0$ one has

$$E(f, \mathcal{D}^h V_h) \leq C\, h^k \,\| f \|_{W^k} . \tag{25}$$

Similarly, we say that the family $\{V_h\}_{h>0}$ provides **density order** $k \in \overline{\mathbb{N}}$ if $\forall\, f \in W^k$ one has

$$h^{-k}\, E(f, \mathcal{D}^h V_h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 . \tag{26}$$

Note that for $k = 0$ condition (25) is vacuous since $E(f,V) \leq 2 \,\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and V a closed space, while condition (26) is precisely the density property.

The first results were obtained in [135]. There, piecewise continuous functions ϕ with exponential decay were considered ($d = 1$, $k \in \mathbb{N}$). It was shown that if

$$\widehat{\phi}(0) \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^j}{dx^j}\widehat{\phi}(\nu) = 0 \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\, |j| < k \tag{27}$$

then any algebraic polynomial can be written as $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} c_\nu\, \phi_{(\nu)}$ provided that its order is less than k. In [137] spaces generated by compactly supported functions were studied. It was proved that conditions (27), called **Strang-Fix conditions**, are sufficient to provide approximation order k. Also, it was proved that these conditions are necessary and sufficient to provide controlled approximation order, which means that if approximants are written as $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} c_\nu\, h^{-\frac{d}{2}}\, \phi(h^{-1}x - \nu)$ then the inequality $\| \{c_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^d} \|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \leq C$ holds for some constant dependent only on $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

A large number of papers extend these results in the literature. We refer to [53], [85], [83], and [81]. The following characterizations were given in [53]. Note that no assumption in the decay of ϕ is required:

Theorem V *Let $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $k \in \mathbb{N}$. The space $\mathcal{S}(\phi)$ provides approximation order k if and only if*

$$T_{\phi,k} := \frac{1 - \frac{|\widehat{f}|^2}{[\widehat{f},\widehat{f}]}\,\chi_{\sigma(\mathcal{S}(f))}}{\|\cdot\|^{2k}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\,. \tag{28}$$

Theorem VI *Let $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $k \in \overline{\mathbb{N}}$. The space $\mathcal{S}(\phi)$ provides density order k if and only if $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ and*

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-d} \int_{h\,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^d} T_{\phi,k}(\xi)\, d\xi = 0\,. \tag{29}$$

We remark that the non stationary case was also studied in [53]. Note that the numerator of $T_{\phi,k}$ is $1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi)}$. We refer to [82] and [84] for other characterizations.

In [53], it was also shown that approximation properties of general shift-invariant spaces can be reduced to specific principal ones. They developed the Superfunction Theory, started in [137] (see [55]). We call a function ϕ^* in a shift-invariant space V **superfunction** if the associated space $\mathcal{S}(\phi^*)$ has the same approximation properties as V. The following result was proved in [53]:

Theorem VII *A shift-invariant space V provides approximation order $k \in \mathbb{N}$ (resp. density order $k \in \overline{\mathbb{N}}$) if and only if there exists a function $\phi^* \in V$ such that $\mathcal{S}(\phi^*)$ provides approximation order $k \in \mathbb{N}$ (resp. density order $k \in \overline{\mathbb{N}}$).*

Moreover, the superfunction can be computed explicitly. As an example, they choose $\phi^* := P_V\, \check{\chi}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}$, where $\check{f}$ is the inverse Fourier transform of $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

The main goal of Superfunction Theory is to find superfunctions with specific properties, which undoubtely depend on the space V. See [54], [55], and [83] (and references therein) for such results in finitely generated spaces, and for characterizations of approximation orders in explicit terms of generators by using the Gram matrices.

Approximation orders have also been considered in other spaces, such as L^p spaces ([85], [91], [92], [86]) or Sobolev spaces ([81]). Conditions on the masks and symbols associated with scaling equations (known as "sum rules"), and on the so called subdivision and transference or transition operators have been obtained for refinable spaces with compactly supported generators (see [83], [55]). Also, approximation orders of expansions in terms of affine systems with respect to general dilations have been considered (see [102] and references therein).

The techniques developed in [26] allowed to characterized approximation and density orders of shift-invariant spaces in terms of the spectral function:

Theorem VIII *Let V be a shift-invariant space and $k \in \mathbb{N}$. The space V provides approximation order k if and only if*

$$T_{V,k} := \frac{1-\sigma_V}{\|\cdot\|^{2k}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\,. \tag{30}$$

Theorem IX *Let V be a shift-invariant space and $k \in \overline{\mathbb{N}}$. The space V provides density order k if and only if $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ and*

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-d} \int_{h\,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^d} T_{V,k}(\xi)\, d\xi = 0\,. \tag{31}$$

In [133] a new characterization of density order of principal shift-invariant spaces using approximate continuity was given:

Theorem X *Let $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $k \in \overline{\mathbb{N}}$. The space $\mathcal{S}(\phi)$ provides density order k if and only if $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ and the origin is a point of approximate continuity of $T_{\phi,k}$ if we put $T_{\phi,k}(0) = 0$.*

Approximation properties of shift-invariant spaces scaled by more general dilations have also been studied by some authors (see [87], [55], [34], [88]). By this we mean the following: given a sequence $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ of shift-invariant spaces and a dilation A, we consider the sequence of scaled spaces $\{\mathcal{D}_A^j V_j\}_{j=0}^\infty$. In this sense, we say that the sequence $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ is **dense** if

$$E(f, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{32}$$

In the final two chapters we work with diagonalizable dilations, so A is supposed to be a diagonalizable dilation and λ_A is the lowest modulus of its eigenvalues. Note that $\lambda_A > 1$ since A is expansive. The notions of approximation and density order are rewritten as follows: we say that $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ provides A-aproximation order $k \in \mathbb{N}$ if $\exists\, C > 0$ such that $\forall\, g \in W^k$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$ one has

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \le C\, \lambda_A^{-jk}\, \|\, g\,\|_{W^k}\,. \tag{33}$$

Similarly, we say that $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ provides A-density order $k \in \overline{\mathbb{N}}$ if $\forall\, g \in W^k$ one has

$$\lambda_A^{jk}\, E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{34}$$

If $V_j = V \ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ (**stationary** case), then we say that V provides A-approximation order (resp. A-density order) k. As in the classical case, for $k = 0$, condition (33) is vacuous and condition (34) is the A-density property.

Conditions for providing A-approximation and A-density orders for diagonalizable matrices and principal spaces were obtained in [133]. It turns out that for isotropic dilations these conditions are simultaneously necessary and sufficient, and they are equivalent to classical approximation. This is not the case for non isotropic dilations.

In this chapter we try to give an answer to the following question:

> **What information is provided (and how) by the spectral function about the A-approximation properties of a shift-invariant space?**

Applying jointly all the techniques in the references cited above we provide necessary and sufficient conditions on the spectral function of a shift-invariant space for the sequence of dilates to provide specific A-approximation or A-density orders. Concretely, our conditions involve the functions $T_{V,k}$ introduced above. Particularly these conditions turn out to be simultaneously necessary and sufficient for the isotropic case.

Chapter 5: Approximation Theory in A-Reducing Spaces

In this chapter we develop an Approximation Theory in A-reducing spaces for diagonalizable dilations. Thus, we fix an A^*-set G of positive measure and consider a sequence $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ of shift-invariant spaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$. We introduce the following concepts:

We say that $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ provides (G, A)-approximation order $k \in \mathbb{N}$ if $\exists C > 0$ such that $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$ one has

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \le C\, \lambda_A^{-jk} \, \| \, g \, \|_{W^k} \, . \tag{35}$$

Similarly, we say that $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ provides (G, A)-density order $k \in \overline{\mathbb{N}}$ if $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$ one has

$$\lambda_A^{jk} \, E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \, . \tag{36}$$

If $V_j = V \ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$, we say that V provides (G, A)-approximation order (resp. (G, A)-density order) k. The case $k = 0$ is as before.

We prove that there exists a measurable set $\widetilde{G} \subsetneq Q_1$ satisfying $\widetilde{G} \subseteq A^*\widetilde{G} \subseteq G$ and such that $\exists\, r > 0$ with $B_r \cap G \subseteq \widetilde{G}$. We summarize the obtained results (in the stationary case) in the following theorems:

Theorem 4 *Let V be a shift-invariant space and $k \in \mathbb{N}$. If $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ then V provides (G,A)-approximation order k.*

Theorem 5 *Let V be a shift-invariant space and $k \in \mathbb{N}$. If V provides (G,A)-approximation order k then*

$$\sup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1-\sigma_V}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty \,. \tag{37}$$

Theorem 6 *Let V be a shift-invariant space and $k \in \overline{\mathbb{N}}$. If $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ and*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*-j}\widetilde{G}} T_{V,k}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{38}$$

then V provides (G,A)-density order k.

Theorem 7 *Let V be a shift-invariant space and $k \in \overline{\mathbb{N}}$. If $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ and the origin is a point of (G,A^*)-approximate continuity of $T_{V,k}$ if we put $T_{V,k}(0)=0$, then V provides (G,A)-density order k.*

Theorem 8 *Let V be a shift-invariant space and $k \in \overline{\mathbb{N}}$. If V provides (G,A)-density order k then $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$ one has*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_V(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0 \,. \tag{39}$$

As before, in the isotropic case the necessary and sufficient conditions coincide.

In these two last chapters we study the efficiency of approximating functions in $L^2(\mathbb{R}^d)$ or a given A-reducing space by orthogonal projections on dilations $\mathcal{D}_A^j V$ of a shift-invariant space. We approximate regular functions f in some spaces such as Sobolev spaces, and we compare the decay of the sequences

$$\left\{ \frac{\left\| f - P_{\mathcal{D}_A^j V} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|\, f\,\|_{W^k}} \right\}_{j=0}^{\infty} \quad \text{and} \quad \{\lambda_A^{-jk}\}_{j=0}^{\infty} \,.$$

This procedure is a basic tool in Approximation Theory. In [107], Lebesgue proved the following inequality: for any 2π-periodic continuous function f we have

$$\|\, f - S_n(f)\,\|_\infty \le (4 + \frac{4}{\pi^2}\log n)\, E_n(f)_\infty \,, \tag{40}$$

where $S_n(f)$ is the nth partial sum of the Fourier series of f and $E_n(f)_\infty$ is the error of the best approximation of f by the trigonometric polynomials of order n in the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$. The inequality relates the error of a particular method (S_n) of approximation by the trigonometric polynomials of order n to the best-possible error $E_n(f)_\infty$ of approximation by the trigonometric polynomials of order n.

By the Lebesgue-type inequality we mean an inequality that provides an upper estimate for the error of a particular method of approximation of f by elements of a special form, say, form $\mathcal{A}$, by the best-possible approximation of f by elements of the form $\mathcal{A}$. In the case of approximation with regard to bases (or minimal systems), the Lebesgue-type inequalities are known both in linear and in nonlinear settings (see [101], [138], [139], and [140]). Concretely in the paper

[Dilworth, S.; Soto-Bajo, M.; Temlyakov, V.N.; *Quasi-greedy bases and Lebesgue-type inequalities*] ,

which is expected to be submitted soon, Lebesgue-type inequalities are studied in $L^p(0,1)$ spaces and other functional spaces for greedy-type approximants with respect to different types of bases. On the other hand, greedy algorithms can be considered in shift-invariant spaces. We have decided not to include the results of this research into this thesis because we believe the current form is more closed and accessible.

Introducción

Esta memoria reúne el resultado de las investigaciones del autor realizadas en los últimos años en los campos de la Teoría de espacios invariantes por traslaciones, análisis multirresolucionales y ondículas. Se ha intentado elaborar una obra que de forma coherente y sencilla realice un "estudio de las propiedades de aproximación de espacios invariantes por traslaciones a través de la función espectral", como reza su título.

Con esto nos referimos a lo siguiente[4]: consideramos ciertos operadores (denominados "operadores de dilatación") y nos concentramos en la sucesión de transformados por estos operadores de un espacio invariante por traslaciones. Como estos operadores son unitarios en los espacios en los que trabajamos, por sucesión entendemos tanto los transformados por el operador como los transformados por su inverso, por lo que podemos considerar que nuestros espacios están indexados sobre los números enteros.

En primer lugar, cuando nuestro espacio inicial (o "espacio núcleo") es refinable, estas estructuras son conocidas como "análisis multirresolucionales generalizados" cuando cumplen ciertas propiedades, conocidas como propiedades de intersección y de completitud. Concluimos que la función espectral del espacio núcleo nos da información relevante, y en gran parte de los casos concluyente, sobre estas dos propiedades. Por otro lado, se han estudiado las propiedades de aproximación de estas sucesiones, asociadas a espacios no necesariamente refinables, dándose tanto condiciones necesarias como suficientes para que estas sucesiones proporcionen ciertos órdenes de aproximación o densidad en términos explícitos de la función espectral.

Nuestro objetivo ha sido mejorar nuestra comprensión de algunas cuestiones largamente estudiadas, en mayor o menor generalidad, intentando ofrecer una visión ámplia y simplificada. Para ello hacemos uso de numerosos avances aportados por multitud de investigadores a lo largo de varias décadas de intenso trabajo. No en vano la Teoría de espacios invariantes por traslaciones ha demostrado ser una herramienta importante tanto en Teoría de aproximación como en Análisis de elementos finitos, ya que ofrece un mar-

[4]Las definiciones serán precisadas más adelante.

co teórico común a objetos tan diversos como los splines, funciones básicas radiales, ondículas o sistemas de Gabor (consultar [53], [54], [17], [125]). Uno de estos avances, la función espectral, es la herramienta principal en nuestros análisis.

Este texto consta de una introducción, cinco capítulos y dos apéndices que pasamos a describir brevemente.

En el Capítulo 1 exponemos gran parte de los resultados de las Teorías de espacios invariantes por traslaciones, de análisis multirresolucionales y de ondículas que necesitaremos posteriormente, sirviendo también para dar un contexto adecuado al material subsiguiente. En particular se define y estudia la función espectral de un espacio invariante por traslaciones. La única parte novedosa es la sección 1.2, donde se realiza un pormenorizado estudio de los conjuntos A-invariantes, que son un elemento básico para entender y trabajar con los espacios A-reducidos.

En el Capítulo 2 se desarrollan los conceptos de punto de (G, A)-densidad de un conjunto, punto de (G, A)-continuidad aproximativa de una función y función (G, A)-localmente distinta de cero en un punto, introducidos en [94] para estudiar los análisis multirresolucionales en los espacios A-reducidos. Esta terminología, aparte de sernos útil en los siguientes capítulos, pensamos que tiene interés en sí misma. Como muestra de esto pueden considerarse las generalizaciones de algunos teoremas clásicos de Análisis dadas en la sección final 2.5.

En el Capítulo 3 tratamos la caracterización de espacios invariantes por traslaciones que generan análisis multirresolucionales generalizados en términos de la función espectral del espacio núcleo. Primero repasamos las caracterizaciones conocidas de análisis multirresolucionales, o equivalentemente de funciones de escala, para después estudiar las propiedades de refinabilidad, intersección y completitud de los espacios invariantes por traslaciones. Por último, los resultados obtenidos nos llevan a hacer algunas observaciones sobre los sistemas de ondículas, estrechamente relacionados con los análisis multirresolucionales generalizados.

En el Capítulo 4 se estudian los órdenes de A-aproximación y A-densidad de espacios invariantes por traslaciones, primero para espacios principales y en segunda instancia para espacios generales. Para ello se utilizan esencialmente variaciones de las técnicas desarrolladas en [53], [26] y [133], obteniéndose condiciones necesarias por un lado y suficientes por el otro, y en el caso de dilataciones isotrópicas una caracterización completa.

En el Capítulo 5 se introducen las nociones de orden de (G, A)-aproximación y orden de (G, A)-densidad, que permiten medir la eficiencia de la aproximación con sucesiones de dilatados de espacios invariantes por traslaciones en espacios A-reducidos. Se reproducen los resultados análogos del capítulo anterior extendiendo las técnicas utilizadas.

En el Apéndice A las dilataciones son el objeto de estudio. Esta clase de transformaciones ha sido (y sigue siendo) ámpliamente usada en Teoría de ondículas y de análisis multirresolucionales como generalización de las dilataciones diádicas clásicas. La gran mayoría de los resultados que presentamos son bien conocidos por los expertos en estas áreas, aunque quizá haya algún enunciado que resulte novedoso. A pesar de ser un elemento básico de la teoría desarrollada, esta colección de resultados y comentarios se presenta fuera del texto principal, en parte para no dificultar ni sobrecargar al hilo principal del texto, y en parte por tratarse de hechos más o menos elementales. Creemos conveniente reunirlos de esta forma para facilitar la lectura al lector y dar completitud al texto.

Con una motivación similar se han reunido en el Apéndice B un conjunto de resultados relacionados con la naturaleza de los espacios invariantes por traslaciones. En concreto se expone el producto corchete, la estructura de los espacios principales y algunas propiedades de las proyecciones ortogonales sobre los espacios invariantes por traslaciones.

Notaciones

Procedemos ahora a reunir algunas notaciones generales que usaremos en el texto, de modo que esta sección sirva como referencia al resto. En primer lugar, los resultados propios serán indexados con números arábigos, y los ajenos con números romanos.

Se denotarán los conjuntos de los números naturales, enteros, reales y complejos por $\mathbb{N} := \{1, 2...\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. Denotamos $\overline{\mathbb{N}} := \{0\} \cup \mathbb{N}$, y el **toro** $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, a veces identificado con los intervalos $[0, 1)$ o $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Durante todo el texto $d \in \mathbb{N}$ denotará la dimensión del espacio ambiente en el que trabajaremos. Así, $\mathbb{N}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{C}^d$ serán los conjuntos de d-uplas de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente. Análogamente, $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ será el **toro d-dimensional**, a veces identificado con los conjuntos $[0, 1)^d$ o $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$.

La norma euclídea usual en $\mathbb{R}^d$ será denotada $\| x \| := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$. La **bola** de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^d$ centrada en $y \in \mathbb{R}^d$ se denotará $B_r(y) := \{x \in \mathbb{R}^d : \| x - y \| < r\}$. De manera análoga, el **cubo** de lado $r > 0$ en $\mathbb{R}^d$ centrado en $y \in \mathbb{R}^d$ se denotará $Q_r(y) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x_j - y_j| < r/2 \,, 1 \le j \le d\}$. En ambos casos si se omite y se sobreentiende que y es el origen.

Normalmente I denotará un conjunto de índices finito o numerable, y $\delta_{j,l}$

denotará la **delta de Kronecker**, definida como $\delta_{j,l} = 1$ si $j = l$ y $\delta_{j,l} = 0$ si $j \neq l$ $(j, l \in I)$. El símbolo $\sqcup$ denota uniones disjuntas de conjuntos, y E^c es el complementario del conjunto E. La **función indicatriz** χ_E del conjunto E viene definida por $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$ y $\chi_E(x) = 0$ si $x \notin E$ $(x \in E^c)$. Si $x \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{R}$ y $E \subseteq \mathbb{R}^d$, entenderemos

$$E + x := \{y + x \,:\, y \in E\} \quad \text{y} \quad r\,E := \{r\,y \,:\, y \in E\}\,.$$

Consideremos un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ con producto escalar $<,>$. El símbolo $\overset{\mathbb{H}}{\to}$ indica convergencia en $\mathbb{H}$. Dado un subespacio cerrado V de $\mathbb{H}$, P_V denotará la **proyección ortogonal** de $\mathbb{H}$ sobre V, y $V^{\perp}$ el **complemento ortogonal** a V en $\mathbb{H}$. Definimos $\mathbb{H} \ominus V := \mathbb{H} \cap V^{\perp}$. El símbolo $\oplus$ denotará **sumas directas de subespacios ortogonales**, siendo éstas cerradas en el caso de infinitos sumandos.

Sea un sistema de vectores $E := \{e_j\}_{j\in I} \subseteq \mathbb{H}$. El símbolo $\overline{span}(E)$ denotará el cierre en $\mathbb{H}$ de las combinaciones lineales de elementos de E. El sistema E se dice **ortonormal** en $\mathbb{H}$ si $\forall\, j, l \in I$ $< e_j, e_l >= \delta_{j,l}$. E se dice **completo** si $\overline{span}(E) = \mathbb{H}$. E se dice **base ortonormal** de $\mathbb{H}$ si E es ortonormal y completo en $\mathbb{H}$. Más en general, si $F = \{f_j\}_{j\in I} \subset \mathbb{H}$, decimos que los sistemas E y F son **biortogonales** en $\mathbb{H}$ si $\forall\, j, l \in I$ $< e_j, f_l >= \delta_{j,l}$.

Decimos que E es una **base de Riesz** de $\mathbb{H}$ si E es completo y $\exists\, A, B$ $(0 < A \leq B < \infty)$ tales que $\forall\, a := \{a_j\}_{j\in I} \in \ell^2(I)$ se tiene

$$A \cdot \sum_{j\in I} |a_j|^2 \leq \left\| \sum_{j\in I} a_j\, e_j \right\|_{\mathbb{H}}^2 \leq B \cdot \sum_{j\in I} |a_j|^2\,. \tag{41}$$

ℓ^2 es el espacio de sucesiones numéricas de cuadrado sumable.

La Teoría de frames se introdujo en [59]. Referimos a [35] o [145] para una discusión detallada. Decimos que E es una familia **de Bessel** en $\mathbb{H}$ si $\exists\, B > 0$ tal que $\forall\, e \in \mathbb{H}$ se tiene

$$\sum_{j\in I} | < e, e_j > |^2 \leq B \cdot \|\, e\,\|_{\mathbb{H}}^2\,, \tag{42}$$

y E se dice **frame** en $\mathbb{H}$ si $\exists\, A, B$ $(0 < A \leq B < \infty)$ tales que $\forall\, e \in \mathbb{H}$ se tiene

$$A \cdot \|\, e\,\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \sum_{j\in I} | < e, e_j > |^2 \leq B \cdot \|\, e\,\|_{\mathbb{H}}^2\,. \tag{43}$$

Si $A = B = 1$, diremos que E es un **tight frame** en $\mathbb{H}$.[5]

[5] Normalmente se habla de tight frame si $A = B$, y de tight frame normalizado o frame de Parseval si $A = B = 1$. Sin embargo, en este texto sólo consideraremos tight frames de este último tipo.

Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ o $E \subseteq \mathbb{T}^d$ es medible en el sentido de Lebesgue, $|E|$ denota su **medida de Lebesgue**. Salvo que se indique lo contrario, se identifican los conjuntos que difieren en conjuntos de medida nula. Las relaciones y operaciones entre o sobre conjuntos, tales como pertenencia, igualdad, inclusión, complementación, unión, intersección o el ser disjuntos o vacíos, deben ser entendidas en este sentido.

Similar criterio se aplica a las identidades y desigualdades con funciones medibles. $L^p(\mathbb{R}^d)$ y $L^p(\mathbb{T}^d)$ $(1 \leq p < \infty)$ son los espacios de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{T}^d$ respectivamente cuya potencia p es sumable o integrable. Análogamente $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ es el espacio de funciones acotadas en casi todo punto, como es usual, y $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de las funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^d$. Cabe destacar que $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $L^2(\mathbb{T}^d)$ son espacios de Hilbert separables. Dada una función medible f, definimos su **soporte** como

$$Supp(f) := \{x \,:\, f(x) \neq 0\}$$

que es un conjunto determinado salvo conjuntos de medida cero, de acuerdo a lo acordado.

La **transformada de Fourier** de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ viene dada por

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,,$$

extendida de manera usual a $L^2(\mathbb{R}^d)$, en cuyo espacio es una aplicación unitaria. Con este convenio **la identidad de Plancherel** se escribe

$$< f, g > = < \widehat{f}, \widehat{g} > \quad \forall\, f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

La inversa de la transformada de Fourier viene dada por $\check{f}\,(\xi) := \widehat{f}(-\xi)$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y extendida a $L^2(\mathbb{R}^d)$. Si V es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos $\widehat{V} := \{\widehat{f} \,:\, f \in V\}$.

Una función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice **$\mathbb{Z}^d$-periódica** si satisface $f(x+k) = f(x)\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^d$ y $c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^d$ (casi todo punto $x \in \mathbb{R}^d$). Si $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ y $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, e^{-2\pi i k\cdot t}\, dt$$

es el k-ésimo **coeficiente de Fourier** de f. Es bien sabido que el sistema trigonométrico es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^d)$, cumpliéndose la **identidad de Parseval**

$$\left\| \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(k)|^2 = \int_{\mathbb{T}^d} |f(t)|^2\, dt =: \|\, f\,\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^d)\,.$$

La derivada k-ésima de una función $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ (en el sentido clásico) será denotada $\frac{d^k f}{dx^k}$ ($k \in \overline{\mathbb{N}}$). Escribiremos $f \in \mathcal{C}^r$ para indicar que f es derivable $r \in \overline{\mathbb{N}}$ veces, y sus derivadas hasta orden r son continuas. Por definición $\frac{d^0 f}{dx^0} := f$, y $f \in \mathcal{C}^0$ indica que f es continua.

Estudio de las propiedades de aproximación de espacios invariantes por traslaciones a través de la función espectral

Capítulo 1: Análisis multirresolucionales generalizados

Consideremos un **retículo**, a saber, un subgrupo discreto $\Gamma := M\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{R}^d$ de $(\mathbb{R}^d, +)$ definido por una matriz M $d \times d$ no singular. Para los trasladados de una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ usaremos frecuentemente la notación $f_{(k)} := f(\cdot - k)$ ($k \in \Gamma$). Después consideramos los subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^d)$ que son cerrados por la operación de traslación por elementos del retículo. Es decir, un subespacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$ es un **espacio invariante por traslaciones** si

$$f \in V \Rightarrow f_{(k)} \in V \quad \forall\, k \in \Gamma\,.$$

Es usual restringirse al retículo estándar $\mathbb{Z}^d$ correspondiente a escoger como M la matriz identidad, ya que normalmente el caso general sólo plantea dificultades técnicas pero no esenciales. Por tanto en este texto consideraremos $\Gamma = \mathbb{Z}^d$. Sobre la Teoría de espacios invariantes por traslaciones referimos a [53], [54], [17], [125], [26] o [93].

Dado $\mathcal{G} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ definimos su conjunto de trasladados y el espacio invariante por traslaciones que genera como

$$Tr(\mathcal{G}) := \{f_{(k)} \,:\, f \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{Z}^d\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(\mathcal{G}) := \overline{span}(Tr(\mathcal{G}))\,.$$

$\mathcal{G}$ se dice conjunto de generadores. Si $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$ para algún conjunto $\mathcal{G}$ finito, V se dice **finitamente generado**, y si $V = \mathcal{S}(\{f\}) =: \mathcal{S}(f)$ para alguna $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, V se dice **principal**.

En el Apéndice B pueden encontrarse algunos resultados relacionados con los espacios invariantes por traslaciones. En particular, en la sección B.1 se estudia el **producto corchete** de $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, dado por

$$[f, g](t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(t + k)\, \overline{g(t + k)} \quad (t \in \mathbb{T}^d)\,.$$

El producto corchete $[f, g]$ es una función $\mathbb{Z}^d$-periódica e integrable que da información sobre los sistemas de trasladados de f y g. En la sección B.2 se estudia la estructura de los espacios invariantes por traslaciones principales, y en la sección B.3 se demuestran propiedades de las proyecciones ortogonales sobre espacios invariantes por traslaciones (ver [52], [53] y [54]).

En general, un conjunto $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ en un espacio invariante por traslaciones V se dice **generador de un tight frame** de V si el sistema de trasladados de $\mathcal{G}$ es un tight frame de V. Es decir, si $\mathcal{G}$ genera V y se tiene

$$\sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |< f, \phi^\alpha_{(k)} >|^2 = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall f \in V\,.$$

Es bien sabido que todo espacio invariante por traslaciones admite un generador de un tight frame numerable (ver Teorema XI, [17]).

A partir de los generadores de un tight frame se puede definir el siguiente objeto. Dados un espacio invariante por traslaciones V y $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ generador de un tight frame de V, definimos la **función espectral** de V como

$$\sigma_V(\xi) := \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi)|^2 \quad (\xi\in\mathbb{R}^d)\,.$$

Se comprueba que σ_V no depende de $\mathcal{G}$, sólo de V (ver Proposición XII), y que es una función localmente integrable, aunque en general no es integrable (sin embargo, si V es finitamente generado lo es).

La función espectral fue introducida en [129] para la caracterización de las multiondículas ortonormales, y es una herramienta útil para el estudio de los espacios invariantes por traslaciones. Para distintas definiciones equivalentes y propiedades de la función espectral referimos a [129], [26], [71] o [22] (en [71] es llamada función modular)[6]. Algunas de estas propiedades son recogidas en la Proposición XIII. Destacamos en particular la aditividad de la función espectral con respecto a sumas directas de subespacios invariantes por traslaciones ortogonales. Hacemos notar que no todo espacio invariante por traslaciones posee un generador de un tight frame cuyos trasladados formen una base ortonormal (véanse los espacios regulares en [54]). Por este motivo se necesita hablar de tight frame para definir la función espectral por esta vía.

Aunque la función espectral no determina totalmente el espacio invariante por traslaciones (véase [26] para el ejemplo mostrado al final de la sección 1.1, o [22] para ejemplos más sofisticados), da información suficiente para analizar algunas propiedades del espacio invariante por traslaciones, como veremos en el siguiente capítulo.

[6]En [60] se introdujo la función traza local ("local trace function"), que engloba a la función espectral.

Por último definimos la **función dimensión** de un espacio invariante por traslaciones V por

$$\dim_V(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sigma_V(\xi + k) \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,, \tag{44}$$

y su **espectro** como el conjunto $\sigma(V) := \{\xi \in \mathbb{R}^d : \dim_V(\xi) > 0\}$. Referimos a [26] para una discusión detallada incluyendo definiciones alternativas.

Fijemos una **dilatación** A. Por esto entendemos una aplicación lineal expansiva en $\mathbb{R}^d$ que cumple $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$. Es decir, una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tal que todos sus autovalores tienen módulo estrictamente mayor que uno (escribimos $A \in \mathcal{LE}$) cuya matriz con respecto a la base canónica, también denotada A, está formada por enteros. En el Apéndice A se estudian este tipo de aplicaciones, que serán utilizadas durante todo el texto.

Denotaremos $d_A := |det(A)|$. La aplicación conjugada de A, que será denotada A^*, también es una dilatación y cumple $d_{A^*} = d_A > 1$. Si $j \in \mathbb{Z}$, A^j denotará la composición j veces de A si $j > 0$ y de A^{-1} si $j < 0$. $A^0 := Id$ será la aplicación identidad en $\mathbb{R}^d$. $\Delta_A \subseteq \mathbb{Z}^d$ denotará un conjunto completo de representantes de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$. En la Proposición LXXXI se demuestra que Δ_A tiene exactamente d_A elementos.

Decimos que $G \subseteq \mathbb{R}^d$ medible es A-**invariante** o A-**conjunto** si $A(G) = G$. Los A-conjuntos surgen de manera natural en el estudio de las ondículas y los análisis multirresolucionales. Por ejemplo, pueden encontrarse ya en [116], donde se consideran únicamente dilataciones diádicas en la recta, y son denominados "dyadically dilation invariant sets". En [94] se introdujo la anterior notación, y puede encontrarse un breve estudio de estos conjuntos. En la sección 1.2 se profundiza en su naturaleza, caracterizándolos.

En particular, en la Proposición XV y el Teorema XVI se muestra que existen conjuntos medibles E (que pueden ser construidos explícitamente) tales que $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j E$. Entonces claramente $G \subseteq \mathbb{R}^d$ es un A-conjunto si y sólo si $G = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j G_0$ donde $G_0 := G \cap E$. En este caso, G es medible si y sólo si lo es G_0, y $|G| > 0$ si y sólo si $|G_0| > 0$, en cuyo caso $|G| = \infty$. Por tanto, dados la aplicación A y el conjunto E, cada subconjunto medible de E da lugar a un A-conjunto de la forma anterior, y cada A-conjunto medible es obtenido de esta manera.

Otro resultado remarcable (ver Teorema 11) es que si G es un A-conjunto su periodización cubre todo el cubo unidad, en el sentido de que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(G + k)$. Este resultado es importante porque nos dice que los espacios A-reducidos, que a continuación definimos, no restringen en absoluto las propiedades de representación de los sistemas en estos espacios. En particular, se tiene la existencia de ondículas en estos espacios ([45]) y de subespacios invariantes por traslaciones con bases regulares (ortonormales o de Riesz).

La letra G denotará un A^*-conjunto de medida positiva. $\mathcal{D}_A$ denota el **operador de dilatación** definido por $\mathcal{D}_A f(\cdot) := d_A^{\frac{1}{2}} f(A\,\cdot)$ $(f \in L^2(\mathbb{R}^d))$.

El estudio de los **análisis multirresolucionales** en particular, y de las dilataciones (por $\mathcal{D}_A$) de un espacio invariante por traslaciones en general ha demostrado ser muy útil para saber más acerca de los sistemas afines o de **ondículas**, aparte de sus aplicaciones en otras ramas del Análisis Matemático y de tener interés por sí mismo ([8], [6]). El marco natural para este estudio es el de los espacios A-reducidos: un subespacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$ se dice **A-reducido** si es invariante por traslaciones y $\mathcal{D}_A V = V$ (ver [94] o [44]). Aparte de $L^2(\mathbb{R}^d)$, el primer espacio A-reducido considerado fue el espacio de Hardy H^2 en la recta con dilataciones diádicas (ver [73], [2], [78], [79]). Espacios A-reducidos más generales han sido estudiados recientemente en numerosos artículos ([117], [48], [116], [47], [99], [70], [43], [44], [45], [115], [94], [149]).

En el Teorema XXIII ([48], [116], [44], [94]) se da la caracterización de los espacios A-reducidos para aplicaciones lineales expansivas: V subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ es A-reducido si y sólo si $\exists\, G$ A^*-conjunto tal que $V = H^2_G := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \ : \ Supp\widehat{f} \subseteq G\}$. Además, en el Lema XXIV ([26], [22]) se muestra que $\sigma_{H^2_G} = \chi_G$.

Hace ya más de veinte años que Mallat y Meyer introdujeron los análisis multirresolucionales (AMR) en su interés por obtener un método que permitiese construir ondículas de una manera más sistemática ([118], [119], [50], [79], [144]). Este concepto ha sido generalizado de maneras muy diversas. Han sido considerados AMR con multiplicidad, es decir AMR cuyo espacio núcleo V_0 está generado por varias funciones de escala ([80], [67], [56], [31], [33], [130]). También han sido considerados AMR en los cuales el lugar de las bases ortonormales o el lugar de las bases de Riesz es ocupado por los frames, denominados normalmente **frame análisis multirresolucionales** o FAMR ([12], [114], [13], [51], [100], [98], [126], [124], [14]). También han sido estudiados los análisis multirresolucionales en espacios A-reducidos ([78], [116], [115], [94], [149]).

En [9] se introdujeron los **análisis multirresolucionales generalizados** (AMRG), en los cuales al espacio núcleo sólo se le exige ser invariante por traslaciones ([6]). Un espacio invariante por traslaciones V genera un AMRG de H^2_G si satisface las **propiedades de A-refinabilidad**

$$V \subseteq \mathcal{D}_A V\,, \tag{45}$$

de **intersección**

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V = \{0\} \tag{46}$$

y de **completitud**

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2 \,. \tag{47}$$

Nótese que sólo tiene sentido estudiar análisis multirresolucionales generalizados en espacios A-reducidos debido a la naturaleza de esta estructura. En la Proposición 13 se propone una manera de normalizar el espacio núcleo de sucesiones $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacios invariantes por traslaciones tales que $V_j = \mathcal{D}_A V_{j-1} \;\forall\, j \in \mathbb{Z}$.

Un conjunto $\Psi := \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$ se dice multiondícula ortogonal, multiondícula de Riesz, frame multiondícula o tight frame multiondícula si su sistema afín asociado

$$X(\Psi) = \{\psi^\alpha_{(j,k)} \;:\; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, 1 \le \alpha \le N\} \tag{48}$$

es una base ortonormal, de Riesz, frame o tight frame de H_G^2, respectivamente, donde $\psi^\alpha_{(j,k)} := d_A^{\frac{j}{2}}\, \psi^\alpha(A^j \cdot - k)$ (sobre la Teoría de ondículas referimos a [119], [50], [36], [79], [144], [143], [66]).

Los análisis multirresolucionales generalizados y las multiondículas son objetos estrechamente relacionados (ver sección 1.4, [61], [21]). Resultados sobre la caracterización de multiondículas asociadas a AMRs o AMR-multiondículas (ver Definición 13) pueden encontrarse en [110], [111], [1], [113], [2], [112], [68], [142], [78], [147], [95], [33], [96], [97], [23] (ver Teoremas XXVI, XXVII y XXVIII).

En [9] se demostró que toda multiondícula ortogonal está asociada a un AMRG (ver también [122], [148]). En [104] (ver [95]) se caracterizaron las multiondículas biortogonales como las multiondículas de Riesz asociadas a AMRGs (ver Teorema XXIX). En [9] se caracterizaron los AMRGs asociados a multiondículas ortogonales (ver Teoremas XXX y XXXI, [26], [20], [21]).

Se sabe que las frame multiondículas semiortogonales generan un AMRG (ver [27], [10]). El **problema de Baggett** plantea si toda tight frame multiondícula está asociada a un AMRG ([21], [22], [5]), y sigue abierto para el caso no semiortogonal. En general una frame multiondícula no está asociada necesariamente a un AMRG (ver Teorema XXXIII).

Capítulo 2: (G,A)-densidad y (G,A)-continuidad aproximativa

Los conceptos de punto de densidad y punto de continuidad aproximativa pertenecen a una terminología clásica de la Teoría de la medida (ver [57], [120]). Estas herramientas nos permiten establecer una relación entre conceptos relativamente ajenos como lo son los conjuntos medibles y los puntos interiores (o del interior) de un conjunto, o como lo son las funciones continuas y las funciones medibles, induciendo una mejor comprensión y facilitando la expresión de cierta clase de ideas en el Análisis matemático moderno.

Estas nociones, junto con la recién introducida de función localmente distinta de cero en un punto, fueron utilizadas en particular en [40] (ver también [41], [131], [130]) para la caracterización de las funciones de escala en un análisis multirresolucional. Además, se introdujeron las nociones de punto de A-densidad de un conjunto, punto de A-continuidad aproximativa de una función y función A-localmente distinta de cero en un punto para ampliar ese estudio al ámbito de los análisis multirresolucionales obtenidos al dilatar espacios y funciones con los operadores $\mathcal{D}_A$, donde A es una dilatación.

En [94] se consideraron los análisis multirresolucionales y se caracterizaron las funciones de escala en espacios A-reducidos, introduciendo para ello los conceptos de punto de (G,A)-densidad de un conjunto, punto de (G,A)-continuidad aproximativa de una función y función (G,A)-localmente distinta de cero en un punto. En este capítulo se estudian estas nuevas definiciones, cuya teoría es paralela a la desarrollada para los anteriores conceptos, incluyéndola como los casos particulares correspondientes a $G=\mathbb{R}^d$ y $A=A_{(2)}=2\,Id$, respectivamente.

Sean $K\subseteq\mathbb{R}^d$ medible y $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ tales que $0<r_1<r_2<\infty$ y $B_{r_1}\subseteq K\subseteq B_{r_2}$. Entonces $x\in\mathbb{R}^d$ es un **punto de (G,A)-densidad de E** (y escribimos $E\in\mathcal{D}_{G,A}(x)$) si

$$\lim_{j\to\infty}\frac{|E\cap(G+x)\cap(A^{-j}K+x)|}{|G\cap A^{-j}K|}=1\,. \tag{49}$$

Comprobamos que esta definición no depende del conjunto K, y damos varias formulaciones distintas. Dada $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$ medible, decimos que $x\in\mathbb{R}^d$ es un **punto de (G,A)-continuidad aproximativa** de f, o que f es (G,A)-**continua aproximativa** en x, si $\exists\, E\in\mathcal{D}_{G,A}(x)$ tal que

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in E}} f(y)=f(x)\,. \tag{50}$$

En la Proposición 24 se dan varias condiciones equivalentes para la continuidad aproximativa, otra condición equivalente para funciones acotadas se da en el Lema 27, y condiciones necesarias y suficientes en los Lemas 25 y 26 (ver [132], [131], [133]). Por otro lado, se dice que f es (G,A)-**localmente distinta de cero** en $x \in \mathbb{R}^d$ si

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y \in G \cap A^{-j}B_1 \,:\, f(y+x)=0\}|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = 0\,. \tag{51}$$

Es decir, si $Supp(f) \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$.

Por último, se demuestra en el Teorema 30 que $\forall\, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y para $c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^d$ se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|G \cap A^{-j}Q_1|} \int_{G\cap A^{-j}Q_1} |f(y+x)-f(x)|\, dy = 0\,. \tag{52}$$

En el Teorema 31 se demuestra que $\forall\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible casi todo punto de E es un punto de (G,A)-densidad de E, y en el Teorema 32 se demuestra que $\forall\, f \,:\, \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible y finita $c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^d$ es un punto de (G,A)-continuidad aproximativa de f. Estos resultados generalizan a este contexto el Teorema de diferenciación de Lebesgue y los teoremas de Denjoy.

Capítulo 3: Caracterizaciones de análisis multirresolucionales generalizados

En la sección 3.1 repasamos las diferentes caracterizaciones que se han dado de las funciones de escala y frame funciones de escala ([117], [52], [78], [116], [98], [40], [41], [115], [42], [94], [149]). En [94] se puede leer un compendio bastante completo de resultados relacionados con este tema. Las propiedades de refinabilidad y de generación de un frame (o base ortonormal o de Riesz) sobre una función son bien conocidas, mientras que la propiedad de intersección se sigue del resto. Por tanto, la condición clave es la de completitud.

De los anteriores resultados se deduce la siguiente caracterización de AMRG principales (con espacio núcleo principal): sean A una dilatación, G un A^*-conjunto y $\varphi \in H^2_G$. Entonces la función espectral de $\mathcal{S}(\varphi)$ es $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}(\xi) = |\widehat{\phi}(\xi)|^2$, donde $\phi \in H^2_G$ viene dada por

$$\widehat{\phi}(\xi) := \begin{cases} \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}]^{\frac{1}{2}}} & \text{si } [\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}] \neq 0 \\ 0 & o.c. \end{cases}\,. \tag{53}$$

Teorema I *La función $\mathcal{S}(\varphi)$ genera un AMRG si y sólo si*

(a) $\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ *filtro de paso bajo tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{54}$$

y

(b) *el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}$ si ponemos $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}(0) = 1$.*

Observación 1 *Por supuesto pueden encontrarse otras condiciones en los resultados de la sección 3.1 que pueden ocupar el lugar de (b) en esta proposición. A todas luces la condición (a), o lo que es lo mismo la A-refinabilidad de $\mathcal{S}(\varphi)$, no puede reescribirse en general en términos de $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}$ (ver sección 3.2).*

Seguidamente abordamos la caracterización de AMRG no principales (donde V tiene más de un generador). En [31] se enuncia una caracterización de funciones de escala en AMR finitamente generados (ver Teorema LV). En [90] se da una condición para la completitud en términos del soporte de la transformada de Fourier de las funciones de escala (ver (3.28)). En [130] se caracteriza la completitud en términos de la A^*-continuidad aproximativa de la función espectral en espacios regulares (aunque en este artículo no se utilizan estas nomenclaturas).

En cuanto al caso general, en [26] se demostraron los siguientes resultados (ver [6] para un análisis más profundo de los AMRG).

Teorema II *Sea V un espacio invariante por traslaciones A-refinable. Entonces*

(i) $\dim_V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ *es una función medible y $\mathbb{Z}^d$-periódica,*

(ii) *se cumple*

$$\sum_{\gamma \in \Delta_{A^*}} \dim_V(A^{*-1}(\xi + \gamma)) \geq \dim_V(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{55}$$

(iii) *si $E := \{\xi \in \mathbb{R}^d \,:\, \dim_V(A^{*-j}\xi) \geq 1$ para $j \in \overline{\mathbb{N}}\}$ se cumple*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \chi_E(\xi + k) \geq \dim_V(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{56}$$

Recíprocamente, si una función satisface estas tres propiedades existe un espacio invariante por traslaciones que genera un AMRG de H^2_G *con* $G := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}E$ *cuya función dimensión coincide con esta función.*

Teorema III *Si* V *espacio invariante por traslaciones genera un AMRG de* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *entonces* $\dim_V$ *satisface (i), (ii), (iii) y la siguiente propiedad:*

(iv) *se cumple*

$$\liminf_{j\to\infty} \dim_V(A^{*-j}\xi) \geq 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{57}$$

Recíprocamente, si una función satisface (i)-(iv) entonces existe un espacio invariante por traslaciones que genera un AMRG de $L^2(\mathbb{R}^d)$ *cuya función dimensión coincide con esta función.*

En [61] se demuestra la siguiente caracterización, usando la denominada función traza local ("local trace function") introducida en [60]:

Teorema IV *Sea* V *espacio invariante por traslaciones* A*-refinable y* $\mathcal{G} := \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ *un generador de un tight frame de* V*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = L^2(\mathbb{R}^d)$,

- *se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(A^{*-j}\xi)|^2 = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{58}$$

Pueden encontrarse artículos que construyen "funciones de escala generalizadas" a partir de colecciones de filtros ([4], [7], [65], [28]). Ver por ejemplo el Teorema 3.2 de [4].

Por tanto, en vista de los resultados anteriores y habida cuenta de que la función espectral juega un papel similar a la función de escala en el caso principal, trataremos de responder a la siguiente pregunta:

> **¿Qué información nos da (y de qué manera) la función espectral sobre las propiedades de A-refinabilidad, intersección y completitud del espacio?**

En virtud de (1.7) la función dimensión puede expresarse en términos de la función espectral. Sin embargo, esto sólo nos conduce a una caracterización indirecta de las funciones que son función espectral de algún espacio núcleo de un AMRG. Nuestro objetivo es encontrar otro tipo de condiciones extendiendo los argumentos subyacentes a los resultados de la sección 3.1.

En la sección 3.2 mostramos que la A-refinabilidad (45) de un espacio invariante por traslaciones no puede ser caracterizada únicamente en términos de la función espectral (ver Ejemplo 3). En la sección 3.3 mostramos algunos resultados relacionados con la propiedad de intersección (46) (ver Teoremas LX y LXI, consultar [50], [36], [117], [52], [142], [79], [40], [131], [42], [90], [20], [143], [129], [22], [5]). Resulta que la función espectral dilucida esta cuestión en algunos casos, pero no es concluyente en todos.

Con respecto a la propiedad de completitud (47), los resultados en la sección 3.4 se resumen en el siguiente enunciado.

Teorema 1 *Sea $V \neq \{0\}$ un espacio invariante por traslaciones A-refinable y $G \subseteq \mathbb{R}^d$ A^*-conjunto de medida positiva tal que $Supp(\sigma_V) \subseteq G$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$,

- *si* $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$ *entonces* $G = \bigcup_{\phi\in\mathcal{G}} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi}))$,

- $\forall\, E \subseteq G$ *acotado y de medida positiva*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} \sigma_V(\xi)\, d\xi = 1\,, \tag{59}$$

- *el conjunto* $Supp(\sigma_V)$ *es* A^{*-1}*-absorbente en* G*. Es decir, para c.t.p.* $\xi \in G$ $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ *(que puede depender de* ξ*) tal que* $\sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$ *si* $j \geq j_0$,

- $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$ *para c.t.p.* $\xi \in G$,

- $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) = 1$ *para c.t.p.* $\xi \in G$,[7]

- σ_V *es* (G, A^*)*-localmente distinta de cero en el origen,*

- σ_V *es* (G, A^*)*-continua aproximativa en el origen si ponemos* $\sigma_V(0) = 1$.

En la sección 3.5 hacemos varios comentarios sobre los sistemas de multiondículas. En el Teorema LXIII ([19]) se presenta una caracterización de las tight frame multiondículas en H_G^2 en términos de la identidad

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 = \chi_G(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{60}$$

[7] Compárese con el Teorema IV.

Esta condición resulta ser equivalente a la (G, A^*)-continuidad aproximativa en el origen de la función integrable

$$S_\Psi(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 \tag{61}$$

si ponemos $S_\Psi(0) = 1$ (ver Proposiciones 40 y 41). Esta formulación tiene la ventaja de expresarse como una propiedad local.

También demostramos los siguientes resultados (ver Teoremas 42 y 45), relacionados con la conocida como propiedad de cancelación o de oscilación de las ondículas (ver [11], [119], [50], [79], [144]):

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0 \quad (\psi \in L^1(\mathbb{R}))\,. \tag{62}$$

Teorema 2 *Sea W un subespacio invariante por traslaciones tal que para alguna dilatación A y cierto A^*-conjunto G se tiene*

$$H_G^2 = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j W\,. \tag{63}$$

Entonces el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de σ_W si ponemos $\sigma_W(0) = 0$.

Teorema 3 *Si $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ es una tight frame multiondícula de H_G^2 entonces para α tal que $1 \le \alpha \le N$ el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\psi^\alpha}$ si ponemos $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$.*

El siguiente artículo

[Soto-Bajo, M.; *Completeness of dilates of shift-invariant subspaces*]

está relacionado con los resultados de este capítulo y se espera sea enviado a publicar próximamente.

Capítulo 4: Teoría de aproximación de espacios invariantes por traslaciones

Ya hemos comentado que los espacios invariantes por traslaciones tienen un papel destacado en campos como la Teoría de aproximación y el Análisis de elementos finitos. En estas áreas del Análisis matemático se está interesado en estudiar cómo una función puede aproximarse por los espacios escalados

$$\mathcal{D}^h V := \{f(h^{-1}\cdot) \,:\, f \in V\}\,, \tag{64}$$

donde V es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ y h es un parámetro real positivo. Hacemos notar que si V es invariante por traslaciones, entonces $\mathcal{D}^h V$ es invariante por traslaciones en el retículo $h\,\mathbb{Z}^d$.

Dada una familia $\{V_h\}_{h>0}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^d)$, la forma más natural de aproximar una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es considerar la familia de proyecciones ortogonales $\{P_{\mathcal{D}^h V_h} f\}_{h>0}$. Si se tiene $V_h = V \;\forall\, h > 0$ se dice que la familia es **estacionaria**. Se persigue obviamente tener $P_{\mathcal{D}^h V_h} f \xrightarrow[h\to 0^+]{} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. En este caso se dice que la familia $\{V_h\}_{h>0}$ es **densa** en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Esto puede reescribirse en términos de los errores de aproximación: el error de aproximación de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con respecto al espacio V es

$$E(f,V) := \min\{\|\, f - g\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;:\; g \in V\} = \|\, f - P_V f\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} . \tag{65}$$

De esta forma, la familia $\{V_h\}_{h>0}$ es densa si

$$E(f, \mathcal{D}^h V_h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d) . \tag{66}$$

Una forma de medir la eficiencia al realizar esta aproximación es la siguiente: en primer lugar se considera para cada $k \in \overline{\mathbb{N}}$ un espacio de funciones regulares, como es el espacio de Sobolev

$$W^k := W_2^k(\mathbb{R}^d) := \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) \;:\; \|\, g\,\|_{W^k} := \left\|\, (1 + \|\cdot\|)^k\, \widehat{g}\,\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty\} . \tag{67}$$

Nótese que $W^0 = L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces decimos que $\{V_h\}_{h>0}$ proporciona **orden de aproximación** $k \in \mathbb{N}$ si $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, f \in W^k$, $h > 0$

$$E(f, \mathcal{D}^h V_h) \le C\, h^k\, \|\, f\,\|_{W^k} . \tag{68}$$

Análogamente, decimos que $\{V_h\}_{h>0}$ proporciona **orden de densidad** $k \in \overline{\mathbb{N}}$ si $\forall\, f \in W^k$

$$h^{-k}\, E(f, \mathcal{D}^h V_h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 . \tag{69}$$

Nótese que para $k = 0$ la condición (68) se tiene trivialmente ya que $E(f,V) \le 2\,\|\, f\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y V subespacio cerrado, mientras que la condición (69) es precisamente la propiedad de densidad.

Los primeros resultados en esta dirección se remontan a [135]. Allí se consideraron funciones ϕ continuas a trozos con decaimiento exponencial ($d = 1$, $k \in \mathbb{N}$). Se mostró que si

$$\widehat{\phi}(0) \ne 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^j}{dx^j}\widehat{\phi}(\nu) = 0 \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ |j| < k \tag{70}$$

entonces todo polinomio algebraico de grado menor que k se puede poner en la forma $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} c_\nu\, \phi_{(\nu)}$. En [137] se estudiaron los espacios generados por funciones de soporte compacto. Se probó que las condiciones (70), conocidas como **condiciones de Strang-Fix**, son suficientes para proporcionar orden de aproximación k. Además probaron que estas condiciones son necesarias y suficientes para proporcionar orden de aproximación controlada, que quiere decir que si los aproximantes toman la forma $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} c_\nu\, h^{-\frac{d}{2}}\, \phi(h^{-1}x-\nu)$ entonces se tiene la desigualdad $\|\, \{c_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}^d}\, \|_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \le C$, donde la constante sólo depende de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

En la literatura pueden encontrarse multitud de artículos que extienden estos resultados. Referimos a [53], [85], [83] y [81] para una revisión general sobre este tema. En [53] se dieron las siguientes caracterizaciones generales, en el sentido de que no hacen hipótesis sobre ϕ (en particular sobre su decaimiento):

Teorema V *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. El espacio $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de aproximación k si y sólo si*

$$T_{\phi,k} := \frac{1 - \frac{|\widehat{f}|^2}{[\widehat{f},\widehat{f}]}\, \chi_{\sigma(\mathcal{S}(f))}}{\|\cdot\|^{2k}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\,. \tag{71}$$

Teorema VI *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. El espacio $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de densidad k si y sólo si $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-d} \int_{h\,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^d} T_{\phi,k}(\xi)\, d\xi = 0\,. \tag{72}$$

Debemos remarcar que en [53] se obtuvieron también los correspondientes resultados para el caso no estacionario. Nótese que por el Teorema XCI del Apéndice B el numerador de $T_{\phi,k}$ es igual a $1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi)}$. Referimos a [82] y [84] para otro tipo de caracterizaciones.

En [53] se mostró también que las propiedades de aproximación de los espacios invariantes por traslaciones generales pueden siempre reducirse a las de determinados espacios principales. Para ello desarrollaron la Teoría de superfunciones, siguiendo el camino iniciado en [137] (ver [55]). Una **superfunción** es una función ϕ^* en un espacio invariante por traslaciones V cuyo espacio principal asociado $\mathcal{S}(\phi^*)$ (subespacio de V) tiene las mismas propiedades de aproximación que V. En [53] se demostró el siguiente resultado:

Teorema VII *Un espacio V invariante por traslaciones proporciona orden de aproximación $k \in \mathbb{N}$ (resp. orden de densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$) si y sólo si existe una función $\phi^* \in V$ tal que $\mathcal{S}(\phi^*)$ proporciona orden de aproximación $k \in \mathbb{N}$ (resp. orden de densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$).*

Además la superfunción puede ser calculada explícitamente. Como ejemplo se toma $\phi^* := P_V \check{\chi}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}$.

El objeto de la Teoría de superfunciones es encontrar superfunciones con determinadas propiedades, que por supuesto dependen del espacio de partida V. Por ejemplo en [54], [55] y [83] (y referencias ahí dadas) pueden encontrarse resultados en esta dirección para ciertos espacios finitamente generados, así como caracterizaciones de los órdenes de aproximación en términos explícitos de los generadores, utilizando la matriz de Gram.

También se han estudiado los órdenes de aproximación en otros espacios, como los L^p ([85], [91], [92], [86]) o los espacios de Sobolev ([81]). Para espacios refinables con generadores de soporte compacto, se han estudiado condiciones sobre las máscaras o símbolos asociados a la ecuaciones de escala (conocidas como "reglas suma"), o sobre los denominados operadores de subdivisión y de transferencia o transición (ver [83], [55]). En [102] (y referencias dadas) han sido considerados órdenes de aproximación de desarrollos en términos de sistemas afines con respecto a dilataciones generales.

En [26] se probó el Lema LXXX, lo que permitió dar una caracterización de los órdenes de aproximación y densidad de espacios invariantes por traslaciones generales en términos de la función espectral:

Teorema VIII *Sean V espacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. El espacio V proporciona orden de aproximación k si y sólo si*

$$T_{V,k} := \frac{1-\sigma_V}{\|\cdot\|^{2k}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\,. \tag{73}$$

Teorema IX *Sean V espacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. El espacio V proporciona orden de densidad k si y sólo si $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\lim_{h\to 0^+} h^{-d} \int_{h\,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^d} T_{V,k}(\xi)\,d\xi = 0\,. \tag{74}$$

En [133] se dio una nueva caracterización del orden de densidad de espacios principales en términos de la continuidad aproximativa:

Teorema X *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. El espacio $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de densidad k si y sólo si $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y el origen es un punto de continuidad aproximativa de $T_{\phi,k}$ si ponemos $T_{\phi,k}(0) = 0$.*

Algunos autores han estudiado también las propiedades de aproximación de espacios invariantes por traslaciones cuando los espacios escalados vienen dados por una dilatación (ver [87], [55], [34], [88]). Es decir, dada una sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ de espacios invariantes por traslaciones y una dilatación A, la sucesión de espacios escalados considerada es $\{\mathcal{D}_A^j V_j\}_{j=0}^{\infty}$. En este sentido, se dice que la sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ es **densa** si

$$E(f, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{75}$$

En este texto vamos a trabajar con dilataciones diagonalizables, así que suponemos que A es una dilatación diagonalizable y λ_A es el menor de los módulos de los autovalores de A. Nótese que por ser lineal expansiva se tiene $\lambda_A > 1$. Las nociones de orden de aproximación y densidad se reescriben de la siguiente manera: decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-aproximación $k \in \mathbb{N}$ si $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \leq C\, \lambda_A^{-jk}\, \|\, g\,\|_{W^k}\,. \tag{76}$$

Análogamente, decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$ si $\forall\, g \in W^k$

$$\lambda_A^{jk}\, E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{77}$$

Si $V_j = V\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ (caso **estacionario**), entonces se dice que V proporciona orden de A-aproximación (resp. A-densidad) k. Como en el caso clásico para $k = 0$ la condición (76) se tiene trivialmente y la condición (77) es la propiedad de A-densidad.

En [133] se estudian los órdenes de A-aproximación y A-densidad para matrices diagonalizables (y espacios principales), obteniendo los Teoremas LXXIII, LXXIV, LXXV, LXXVI y LXXVII de la sección 4.2, que dan condiciones necesarias por un lado y suficientes por el otro para tener ciertos órdenes de A-aproximación y A-densidad. Además se demostraron para el caso principal el Corolario 60, que dice que la aproximación clásica es más fuerte que la A-aproximación, y los Corolarios 62 y 64, que dicen que para las dilataciones isotrópicas se pueden obtener condiciones necesarias y suficientes que implican que la aproximación clásica y la A-aproximación son equivalentes. Para dilataciones no isotrópicas esto no es cierto en general.

En este capítulo se intenta responder a la siguiente cuestión:

> **¿Qué información nos da (y de qué manera) la función espectral sobre las propiedades de A-aproximación de un espacio invariante por traslaciones?**

Uniendo las técnicas de las referencias antes citadas se dan condiciones necesarias por un lado y suficientes por el otro para que un espacio invariante por traslaciones proporcione un orden de A-aproximación o A-densidad determinado en términos de la función espectral, y más concretamente de las funciones $T_{V,k}$ antes introducidas (ver secciones 4.3.1 y 4.3.2). Particularmente estas condiciones resultan ser necesarias y suficientes simultáneamente para la clase de dilataciones isotrópicas.

Capítulo 5: Teoría de aproximación en espacios A-reducidos

En este capítulo desarrollamos una Teoría de aproximación en espacios A-reducidos para dilataciones A diagonalizables. Fijamos por tanto un A^*-conjunto G de medida positiva y consideramos una sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Introducimos las siguientes conceptos:

Decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G,A)-aproximación $k \in \mathbb{N}$ si $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \leq C\, \lambda_A^{-jk} \,\|\, g\,\|_{W^k}\,. \tag{78}$$

Análogamente, decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G,A)-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$ si $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$

$$\lambda_A^{jk}\, E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{79}$$

Si $V_j = V\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$, entonces se dice que V proporciona orden de (G,A)-aproximación (resp. (G,A)-densidad) k. El caso $k = 0$ es análogo a los anteriores.

Por el Teorema XVI (ver Definición 32) sabemos que existe un conjunto medible $\widetilde{G} \subseteq Q_1$ cumpliendo $\widetilde{G} \subseteq A^*\widetilde{G} \subseteq G$ y tal que $\exists r > 0$ con $B_r \cap G \subseteq \widetilde{G}$. Los resultados obtenidos para el caso estacionario son los siguientes (ver el caso no estacionario en la sección 5.2):

Teorema 4 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ entonces V proporciona orden de (G,A)-aproximación k.*

Teorema 5 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si V proporciona orden de (G,A)-aproximación k entonces*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1-\sigma_V}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty\,. \tag{80}$$

Teorema 6 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ y*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*-j}\widetilde{G}} T_{V,k}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{81}$$

entonces V proporciona orden de (G,A)-densidad k.

Teorema 7 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ y el origen es un punto de (G,A^*)-continuidad aproximativa de $T_{V,k}$ si ponemos $T_{V,k}(0) = 0$, entonces V proporciona orden de (G,A)-densidad k.*

Teorema 8 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si V proporciona orden de (G,A)-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_V(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{82}$$

También se han obtenido caracterizaciones para dilataciones isotrópicas (ver sección 5.3).

En estos dos últimos capítulos se ha estudiado la eficiencia de las proyecciones ortogonales sobre las dilataciones de un espacio invariante por traslaciones $\mathcal{D}_A^j V$ a la hora de aproximar elementos de $L^2(\mathbb{R}^d)$ o de un espacio A-reducido. Este análisis se lleva a cabo considerando subespacios particulares de funciones regulares (como son los espacios de Sobolev W^k o subespacios suyos en espacios A-reducidos) y aproximando elementos f de estos espacios. En términos generales, se compara el decaimiento de las sucesiones

$$\left\{ \frac{\left\|\, f - P_{\mathcal{D}_A^j V} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|\, f\,\|_{W^k}} \right\}_{j=0}^{\infty} \quad \text{y} \quad \{\lambda_A^{-jk}\}_{j=0}^{\infty}\,.$$

Este tipo de argumentos forman parte de las técnicas básicas en Teoría de aproximación. En [107] Lebesgue probó que para toda función f 2π-periódica y continua se tiene

$$\|\, f - S_n(f)\,\|_\infty \le (4 + \frac{4}{\pi^2}\log n)\, E_n(f)_\infty\,, \tag{83}$$

donde $S_n(f)$ es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f y $E_n(f)_\infty$ es el error con respecto a la mejor aproximación de f por polinomios trigonométricos de orden n en la norma $\|\cdot\|_\infty$ de la convergencia uniforme. Esta desigualdad relaciona el error del método de aproximación por polinomios trigonométricos de orden n basado en las sumas parciales S_n con el error de la mejor aproximación $E_n(f)_\infty$ a través de polinomios trigonométricos de orden n.

Por una desigualdad de tipo Lebesgue entendemos una desigualdad que proporciona una cota superior para el error por un método de aproximación particular al aproximar una f por elementos de una forma especial, digamos $\mathcal{A}$, con respecto a la mejor aproximación posible de f por elementos de la forma $\mathcal{A}$ (en el sentido del ínfimo de los errores, ya que la mejor aproximación no siempre existe). En el caso de la aproximación con respecto de bases (o sistemas minimales), las desigualdades de tipo Lebesgue son un tema común y bien conocido tanto en aproximación lineal y como en aproximación no lineal (ver [101], [138], [139] y [140]). Concretamente en el artículo

[Dilworth, S.; Soto-Bajo, M.; Temlyakov, V.N.; *Quasi-greedy bases and Lebesgue-type inequalities*] ,

enviado a publicar recientemente, se estudian desigualdades de tipo Lebesgue en espacios $L^p(0,1)$ y otros espacios funcionales para aproximantes de tipo avaricioso con respecto a distintos tipos de bases. Por otro lado, pueden considerarse algoritmos avariciosos en los espacios invariantes por traslaciones. Se ha decidido no incluir los resultados de esta investigación en la tesis doctoral en la creencia de que la forma actual de la misma es mucho más cerrada y por tanto más accesible a los lectores.

Parte I

Texto principal

Capítulo 1

Análisis multirresolucionales generalizados

1.1. Espacios invariantes por traslaciones y función espectral

Definición 1 *Decimos que un subespacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$ es un **espacio invariante por traslaciones** si*

$$f \in V \Rightarrow f_{(k)} \in V \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d\,. \tag{1.1}$$

donde $f_{(k)} := \mathcal{T}_k f := f(\cdot - k)$.

Dado $\mathcal{G} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ definimos su conjunto de trasladados y el espacio invariante por traslaciones que generan como

$$Tr(\mathcal{G}) := \{f_{(k)} \ : \ f \in \mathcal{G}, k \in \mathbb{Z}^d\} \quad \text{y} \quad \mathcal{S}(\mathcal{G}) := \overline{span} Tr(\mathcal{G})\,. \tag{1.2}$$

En este caso $\mathcal{G}$ se dice un conjunto de generadores, o que genera V. Si V está generado por un conjunto finito de generadores (es decir, existe $\mathcal{G}$ finito tal que $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$), V se dice **finitamente generado**, y si V está generado por una sola función (existe $f \in V$ tal que $V = \mathcal{S}(f)$), V se dice **principal**. Estamos interesados en estudiar los conjuntos de generadores que forman un tight frame del espacio V.

Definición 2 *Un conjunto $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq V$ espacio invariante por traslaciones se dice **generador de un tight frame** de V si $Tr(\mathcal{G})$ es un tight frame de V. Es decir, si*

$$\sum_{\alpha \in I} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |< f, \phi^\alpha_{(k)} >|^2 = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, f \in V = \mathcal{S}(\mathcal{G})\,. \tag{1.3}$$

Sobre la Teoría de espacios invariantes por traslaciones referimos al lector a [54], [17], [125] o [26]. En particular el siguiente resultado es cierto (ver [17]):

Teorema XI *Dado V espacio invariante por traslaciones existe un generador de un tight frame $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I} \subset V$ de V. De hecho puede escogerse de manera que $V = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{S}(\phi^\alpha)$.*

Ya estamos en disposición de definir nuestra herramienta principal durante todo el texto: la función espectral.

Definición 3 *Dados un espacio invariante por traslaciones V y $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ generador de un tight frame de V, definimos la* ***función espectral*** *de V como*

$$\sigma_V(\xi) := \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi)|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,. \tag{1.4}$$

La siguiente proposición aclara esta definición (ver [129]).

Proposición XII *$\sigma_V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y no depende de $\mathcal{G}$, sólo de V.*

Demostración: Tomemos para cada $m \in \mathbb{Z}^d$ $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\widehat{f} = \chi_{[0,1)^d+m}$. Claramente para $\xi \in [0,1)^d$ se tiene $|[\widehat{f}, \widehat{\phi^\alpha}](\xi)|^2 = |\widehat{\phi^\alpha}(\xi+m)|^2$, luego $\forall \alpha \in I$ tenemos $[\widehat{f}, \widehat{\phi^\alpha}] \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Entonces

$$\sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} | < f, \phi^\alpha_{(k)} > |^2 = \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{\phi^\alpha}(\xi)}\, e^{2\pi i k\xi}\, d\xi \right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{[0,1)^d} \left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(t+\mu)\, \overline{\widehat{\phi^\alpha}(t+\mu)} \right) e^{2\pi i k\xi}\, dt \right|^2 = \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| [\widehat{f}, \widehat{\phi^\alpha}]\widehat{\ }(k) \right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \int_{[0,1)^d} \left| \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(t+\mu)\, \overline{\widehat{\phi^\alpha}(t+\mu)} \right|^2 dt = \int_{[0,1)^d} \sum_{\alpha\in I} \left| [\widehat{f}, \widehat{\phi^\alpha}](t) \right|^2 dt\,,$$

y finalmente

$$\int_{[0,1)^d+m} \sigma_V(\xi)\, d\xi = \int_{[0,1)^d} \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi+m)|^2\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{\alpha\in I} \left| [\widehat{f}, \widehat{\phi^\alpha}](t) \right|^2 dt = \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} | < f, \phi^\alpha_{(k)} > |^2 = \| P_V f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le 1\,.$$

Es decir, $\forall\, m \in \mathbb{Z}^d$ la función $\mathbb{Z}^d$-periódica dada por $F_m(\xi) := \sigma_V(\xi)$ para $\xi \in [0,1)^d + m$ satisface $F_m \in L^1(\mathbb{T}^d)$, luego $\sigma_V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Calculamos ahora sus coeficientes de Fourier. Sea $\{e_{l,m}\}_{l,m\in\mathbb{Z}^d}$ la base de Gabor estándar dada por

$$\widehat{e_{l,m}}(\xi) := e^{2\pi i l\cdot\xi}\, \chi_{[0,1)^d}(\xi - m)\,.$$

Fijado $m \in \mathbb{Z}^d$, definimos también $\forall\, \alpha \in I$ y $\forall\, l \in \mathbb{Z}^d$ $f_l^\alpha \in L^2(\mathbb{T}^d)$ dada por $f_l^\alpha(\xi) := e^{-2\pi i l\cdot\xi}\, \widehat{\phi^\alpha}(\xi)$ para $\xi \in [0,1)^d + m$. Entonces $\forall\, l \in \mathbb{Z}^d$

$$\widehat{F_m}(l) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_V(\xi)\, \overline{\widehat{e_{l,m}}(\xi)}\, d\xi = \int_{[0,1)^d+m} \left(\sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi)|^2 \right) e^{-2\pi i l\cdot\xi}\, d\xi =$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \int_{\mathbb{T}^d} f_l^\alpha(t)\, \overline{f_0^\alpha(t)}\, dt = \sum_{\alpha\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f_l^\alpha}(k)\, \overline{\widehat{f_0^\alpha}(k)} =$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1)^d+m} \widehat{\phi^\alpha}(\xi)\, e^{-2\pi i(l+k)\cdot\xi}\, d\xi \int_{[0,1)^d+m} \widehat{\phi^\alpha}(\xi)\, e^{2\pi i k\cdot\xi}\, d\xi =$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} < \widehat{\phi^\alpha_{(k)}}, \widehat{e_{l,m}} > < \widehat{e_{0,m}}, \widehat{\phi^\alpha_{(k)}} >=$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} < e_{0,m}, \phi^\alpha_{(k)} > \overline{< e_{l,m}, \phi^\alpha_{(k)} >} =< P_V e_{0,m}, P_V e_{l,m} >\,,$$

que claramente no depende de $\mathcal{G}$, sólo de V. Como los coeficientes de Fourier determinan F_m y m es arbitrario, hemos terminado. ■

Hacemos notar que en general σ_V no es integrable (por ejemplo $\sigma_{L^2(\mathbb{R}^d)}(\xi) = 1$). Sin embargo, se tiene trivialmente la estimación

$$\| \sigma_V \|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{\alpha\in I} \| \phi^\alpha \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,, \tag{1.5}$$

luego si $\{\| \phi^\alpha \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\}_{\alpha\in I} \in \ell^2$ entonces $\sigma_V \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En particular, si V es finitamente generado su función espectral es integrable.

La siguiente proposición nos muestra algunas propiedades de la función espectral (ver [26]).

Proposición XIII *Sean* $V, \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *espacios invariantes por traslaciones. Entonces:*

(i) $\sigma_{L^2(\mathbb{R}^d)}(\xi) = 1$ *y* $\sigma_{\{0\}}(\xi) = 0$ *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(ii) *Si* $V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_n$, $\sigma_V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{V_n}(\xi)$ *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(iii) *Si* $V_1 \subseteq V$, $\sigma_{V_1}(\xi) \leq \sigma_V(\xi)$ *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$, *y* $\sigma_{V_1}(\xi) = \sigma_V(\xi)$ *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$ *si y sólo si* $V_1 = V$.

(iv) $0 \leq \sigma_V(\xi) \leq 1$ *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(v) *Si* $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$ *entonces*

$$Supp(\sigma_V) = \bigcup_{\phi \in \mathcal{G}} Supp(\widehat{\phi})\,. \tag{1.6}$$

Demostración: Consideramos la base de Gabor estándar $\{e_{l,m}\}_{l,m\in\mathbb{Z}^d}$ como antes, que es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Claramente $\{e_{0,m}\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$ es un generador de un tight frame de $L^2(\mathbb{R}^d)$, luego

$$\sigma_{L^2(\mathbb{R}^d)}(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \chi_{[0,1)^d+m}(\xi) = 1\,.$$

(i) queda demostrado. Con respecto a (ii), si para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{G}_n$ es un generador de un tight frame de V_n, entonces $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ es un generador de un tight frame de V y el resultado es inmediato. Análogamente, si $V_1 \subseteq V$ se tiene $V = V_1 \bigoplus W$ con $W := V_1^{\perp} \cap V$, y usando el punto anterior se tiene $\sigma_V(\xi) = \sigma_{V_1}(\xi) + \sigma_W(\xi) \geq \sigma_{V_1}(\xi)$ *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$. Además se tiene la igualdad si y sólo si $W = \{0\}$. Esto da (iii), y (iv) sale de los puntos anteriores. El apartado (v) es consecuencia de que si una función se representa en términos de los trasladados de un sistema $\mathcal{G}$, su transformada de Fourier se representa como suma de productos de funciones $\mathbb{Z}^d$-periódicas con las transformadas de Fourier de los elementos de $\mathcal{G}$. Nótese que (1.6) es trivial si $\mathcal{G}$ es un generador de un tight frame de V. ■

Un comentario importante es que la función espectral no determina totalmente el espacio invariante por traslaciones:

Ejemplo 1 *Fijemos* $\gamma \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ *y sean* $\varphi, \phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *dadas por*

$$\widehat{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\chi_{[0,1)^d} + \chi_{[0,1)^d+\gamma}) \quad y \quad \widehat{\phi} := \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\chi_{[0,1)^d} - \chi_{[0,1)^d+\gamma})\,.$$

Fácilmente se comprueba que cada una genera su respectivo espacio invariante por traslaciones (de hecho sus trasladados forman una base ortonormal de cada uno, respectivamente), y que sendos espacios cumplen $\sigma_{V_\varphi} = \sigma_{V_\phi} = \chi_{[0,1)^d \bigcup ([0,1)^d+\gamma)}$. Sin embargo V_φ y V_ϕ son ortogonales, ya que $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$

$$< \varphi, \phi_{(k)} >= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi)\, \overline{\widehat{\phi}(\xi)}\, e^{2\pi i k\cdot\xi}\, d\xi = \int_{[0,1)^d} \frac{e^{2\pi i k\cdot\xi}}{2}\, d\xi - \int_{[0,1)^d+\gamma} \frac{e^{2\pi i k\cdot\xi}}{2}\, d\xi = 0\,.$$

Por tanto, en general no es cierto que $\sigma_V(\xi) = \sigma_W(\xi)$ c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}^d$ implique $V = W$.

Por último, definimos los conceptos de función dimensión y espectro.

Definición 4 *Dado un espacio invariante por taslaciones V, definimos su* ***función dimensión*** *como la función $\mathbb{Z}^d$-periódica*

$$\dim_V(\xi) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sigma_V(\xi + k) \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,, \tag{1.7}$$

y su ***espectro*** *como el conjunto $\sigma(V) := \{\xi \in \mathbb{R}^d \ :\ \dim_V(\xi) > 0\}$. Nótese que es un conjunto $\mathbb{Z}^d$-periódico.*

1.2. A-conjuntos

Definición 5 *Sea A una aplicación lineal invertible. Decimos que $G \subseteq \mathbb{R}^d$ medible es* ***A-invariante*** *o* ***A-conjunto*** *si $A(G) = G$.*

Los A-conjuntos aparecen de manera natural en Teoría de ondículas y de análisis multirresolucionales debido a la caracterización de los espacios A-reducidos, que a continuación veremos. Mostramos algunas propiedades que arrojan luz sobre la naturaleza de estos conjuntos.

Proposición XIV *Sean A lineal invertible y G un A-conjunto. Entonces G^c y $\overline{G}$, el complementario y el cierre de G respectivamente, son A-conjuntos también, y G es un A^{-1}-conjunto. La clase $\mathcal{F}_A$ de los A-conjuntos es una σ-álgebra.*

Demostración: Simplemente se tiene $A^{-1}G = A^{-1}AG = G$, luego G es un A^{-1}-conjunto.

Como A es inyectiva, $\varnothing = AG^c \cap AG = AG^c \cap G$, luego $AG^c \subseteq G^c$, y como es sobreyectiva $\mathbb{R}^d = AG^c \sqcup AG = AG^c \sqcup G$. Por tanto $AG^c = G^c$.

Sea $x \in \overline{G}$. Entonces $\exists\, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Sea $y := A^{-1}x$. Entonces $A^{-1}x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Como G es A-conjunto $A^{-1}x_n \in G$ para todo n y por tanto $y \in \overline{G}$. Esto da $x \in A\overline{G}$ y por tanto $\overline{G} \subseteq A\overline{G}$. Recíprocamente sean $x \in A\overline{G}$ y $y \in \overline{G}$ tal que $x = Ay$. $\exists\, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ tales que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Como $Ay_n \in G$ para todo n y $Ay_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ay = x$, $x \in \overline{G}$ y $A\overline{G} \subseteq \overline{G}$.

Claramente $\varnothing, \mathbb{R}^d \in \mathcal{F}_A$, y ya hemos visto que $\mathcal{F}_A$ es cerrada por complementación. Sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_A$. Entonces $A\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} AE_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{F}_A$. $\blacksquare$

Las ideas subyacentes a los siguientes dos resultados pueden encontrarse en la demostración de la Proposición 8 de [132] o en [131] (Proposición 2.8, ver también [133]).

Proposición XV *Sean $A \in \mathcal{LE}$ y $C \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que*

$$\forall\, x \in C\ \exists\, m \in \overline{\mathbb{N}} \quad \text{tal que} \quad A^m x \in C \quad y \quad A^n x \notin C\ \forall\, n > m\,, \tag{1.8}$$

Si definimos

$$E := C \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{-j}C \quad y \quad F := \{x \in \mathbb{R}^d\ :\ A^j x \notin C \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}\}\,, \tag{1.9}$$

entonces

$$\mathbb{R}^d \setminus F = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j E \quad y \quad \bigsqcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}E = \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}C\,. \tag{1.10}$$

Si además el origen es un punto de A-densidad de C, entonces $|F| = 0$. [1]

Demostración: En primer lugar, vamos a demostrar que los dilatados de E, $\{A^j E\}_{j\in\mathbb{Z}}$, son disjuntos. Supongamos que existen $x \in \mathbb{R}^d$ y $j < 0$ entero tales que $x \in E \cap A^j E$. Entonces $A^{-j}x \in C$, luego $x \in A^j C$, lo cual es absurdo ya que $x \in E$. Por lo tanto $E \cap A^j E = \varnothing$. Dados ahora $j, l \in \mathbb{Z}$ con $j < l$, como A es biyectiva se tiene $A^j E \cap A^l E = A^l(A^{j-l}E \cap E) = A^l(\varnothing) = \varnothing$.

De la definición de E se deduce que $\forall\, j \in \mathbb{Z}$

$$A^{-j}E = \{x \in \mathbb{R}^d\ :\ A^j x \in C \text{ y } A^l x \notin C\ \forall\, l > j\}\,.$$

Fijado $x \in \mathbb{R}^d \setminus F$ sea $j(x) := \text{máx}\{l \in \mathbb{Z}\ :\ A^l x \in C\}$, que por nuestras hipótesis es finito ($j(x) < \infty$). Entonces $A^{j(x)}x \in C$ y $A^{j(x)+l} \notin C\ \forall\, l \in$

[1] Consultar [40], [131], o la Definición 18 del Capítulo 2.

$\mathbb{N}$, luego $A^{j(x)}x \in E$ y por tanto $x \in A^{-j(x)}E$. Esto demuestra $\mathbb{R}^d \setminus F = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j E$. A partir de la identidad

$$\bigsqcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}E = \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, \exists\, m \in \overline{\mathbb{N}} \text{ tal que } A^m x \in C \text{ y } A^n x \notin C \;\forall\, n > m\}\,.$$

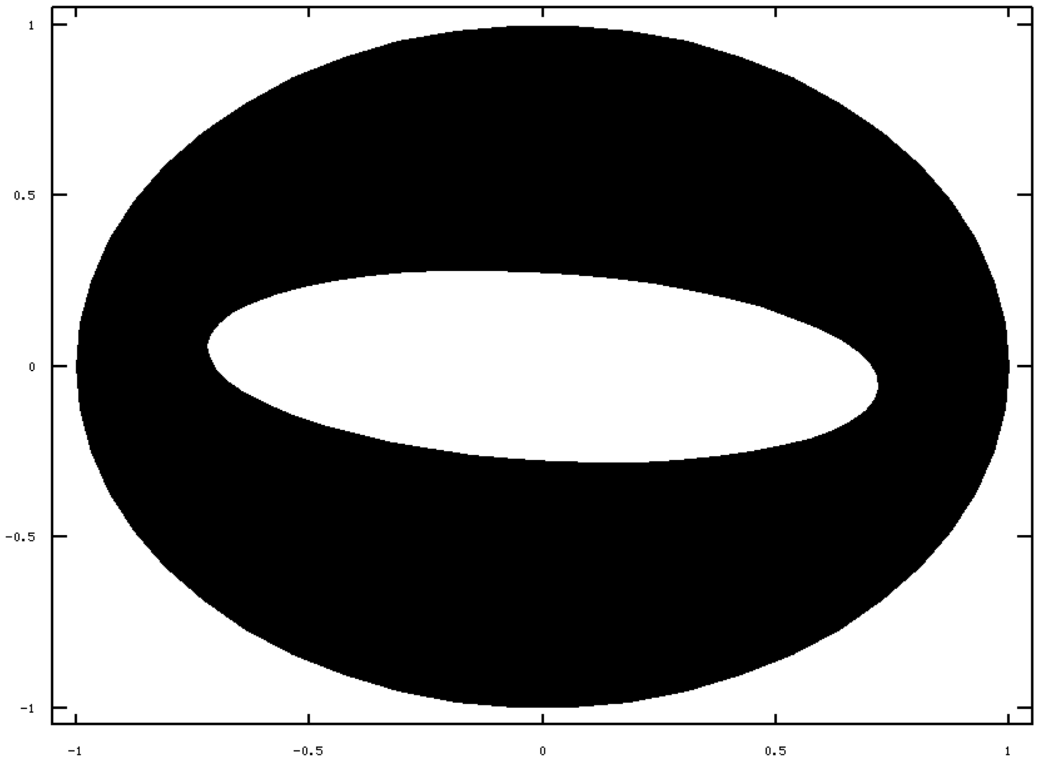
y nuestras hipótesis se deduce $\bigsqcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}E = \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}C$.

Finalmente, F es A-invariante y $F \subseteq C^c = \mathbb{R}^d \setminus C$. Entonces si el origen es un punto de A-densidad de C $\forall\, r > 0, j \in \mathbb{Z}$

$$\frac{|F \cap B_r|}{|B_r|} = \frac{|A^{-j}F \cap A^{-j}B_r|}{|A^{-j}B_r|} = \frac{|F \cap A^{-j}B_r|}{|A^{-j}B_r|} \le \frac{|C^c \cap A^{-j}B_r|}{|A^{-j}B_r|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,,$$

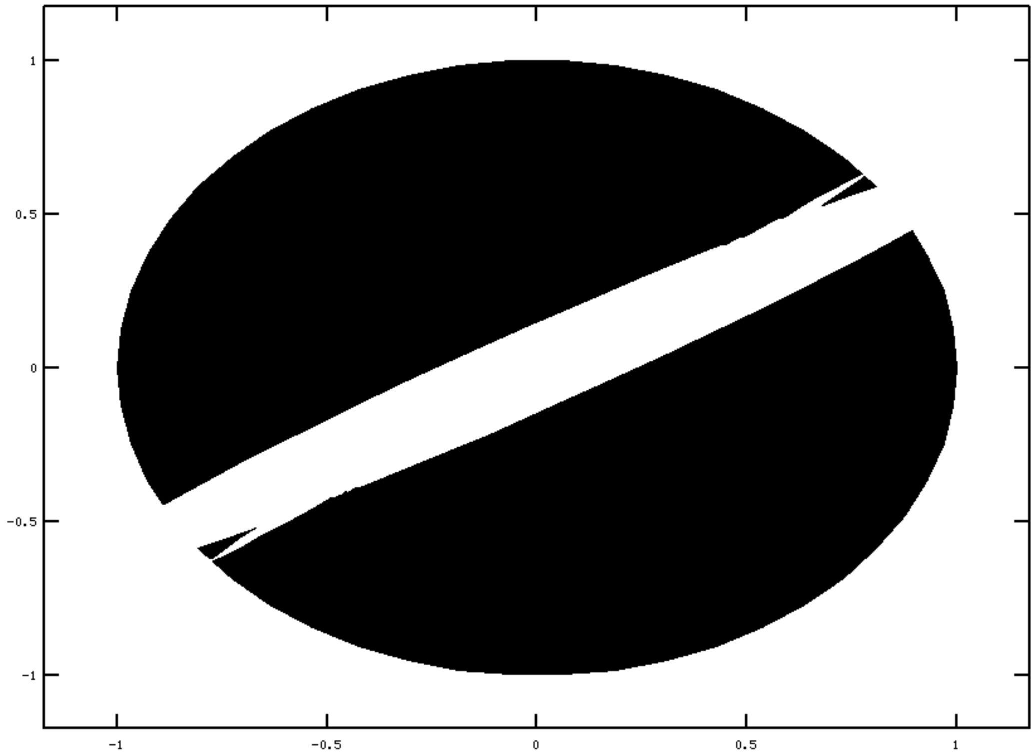
luego $|F \cap B_r| = 0$ $\forall\, r > 0$ y por tanto $|F| = 0$. ■

La elección estándar para C es la bola unidad: $C = B_1$. El ejemplo más sencillo de esta construcción quizá sea el correspondiente a considerar la dilatación diádica $A = A_{(2)} = 2\,Id$. En este caso el conjunto E es la corona circular $E = B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$. A continuación mostramos dos ejemplos más:



Ejemplo de conjunto E con $C = B_1$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Nótese que aunque A sea expansiva $A^{-1}C$ puede no estar contenido en C.



Ejemplo de conjunto E con $C = B_1$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Hacemos los siguientes comentarios sobre la Proposición XV:

- Las operaciones entre conjuntos en esta proposición pueden entenderse también en sentido estricto. Únicamente en la última condición se utilizan conceptos de Teoría de la medida.

- Claramente si C es medible también lo son E y F.

- La condición (1.8) se cumple por ejemplo si C es acotado, aplicando que A es lineal expansiva y el Lema LXXXVI del Apéndice A. En este caso E también es acotado, ya que $E \subseteq C$.

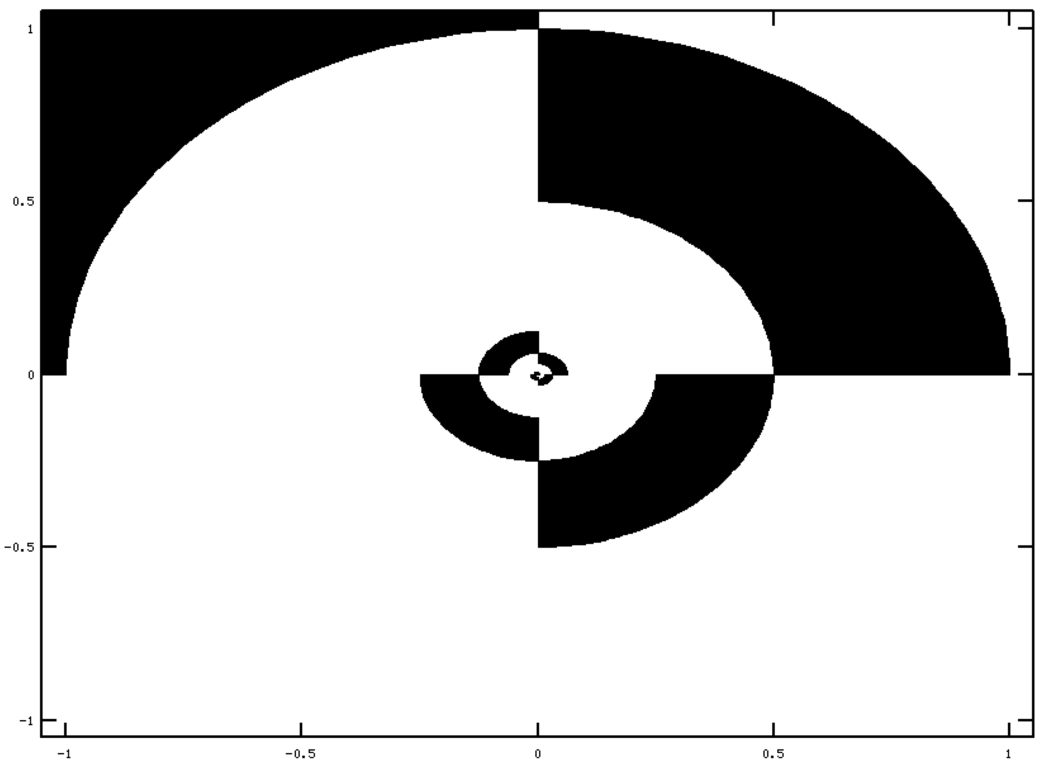
- Si el origen está en el interior de C, se deduce que $F = \{0\}$.

Con esta construcción la caracterización de los A-conjuntos es inmediata.

Teorema XVI *Sean $A \in \mathcal{LE}$ y $E := B_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{-j}B_1$. Entonces $G \subseteq \mathbb{R}^d$ es un A-conjunto si y sólo si $G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j G_0$ donde $G_0 := G \cap E$. En este caso, G es medible si y sólo si lo es G_0, y $|G| > 0$ si y sólo si $|G_0| > 0$, en cuyo caso $|G| = \infty$.*

Demostración: Basta aplicar la Proposición XV con $C = B_1$. ■

Retomando el ejemplo anterior para la dilatación diádica $A = A_{(2)} = 2\,Id$, cualquier subconjunto medible de la corona circular $E = B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$ da lugar a un $A_{(2)}$-conjunto, y de hecho de esta forma se pueden construir todos los $A_{(2)}$-conjuntos. Considérese por ejemplo la semirrecta $G = (0, \infty)$ en $\mathbb{R}$, que dará lugar al espacio de Hardy $H^2_{(0,\infty)}$. A continuación mostramos un ejemplo con la dilatación $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en el plano, consistente en un giro compuesto con la dilatación diádica. Si $C = B_1$ el conjunto E vuelve a ser la corona circular. Si se toma G_0 la parte de la corona que cae en el primer cuadrante, se obtiene como G una especie de espiral truncada, como se observa en la figura.



Ejemplo de A-conjunto G para $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Corolario XVII *Si $A \in \mathcal{LE}$, existen A-conjuntos de medida positiva cuyo complementario también tiene medida positiva.*

Demostración: Es obvio a partir del Teorema XVI. ■

Corolario 9 *Sean* $A \in \mathcal{LE}$ *y* G *A-conjunto de medida positiva. Entonces* $\forall\, r > 0$ $|G \cap B_r| > 0$.

Demostración: Fijemos $r > 0$ y usemos la notación del Teorema XVI. Es decir, $G_0 = G \cap E$ y $E := B_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{-j} B_1$. Claramente $|G_0| > 0$ y $G_0 \subseteq E \subset B_1$. Sea $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^{-j} < C\, r$ para $j \geq j_0$. Entonces usando (A.13) tenemos $\forall\, x \in G_0$ y $j \geq j_0$

$$\left\| A^{-j} x \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\beta^{-j}}{C} \, \| x \|_{\mathbb{R}^d} < \frac{\beta^{-j}}{C} < r \,,$$

luego $A^{-j} G_0 \subset B_r$ para $j \geq j_0$. Por tanto,

$$|G \cap B_r| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |A^j G_0 \cap B_r| \geq \sum_{j \leq j_0} |A^j G_0| = \sum_{j \leq j_0} d_A^j \, |G_0| = \frac{d_A^{1-j_0}}{d_A - 1} \, |G_0| > 0 \,.$$

■

Corolario 10 *Sean* $A \in \mathcal{LE}$*,* G *A-conjunto de medida positiva y* $\lambda \in (0, \infty)$*. Entonces* $\exists\, E \subset G$ *de medida* λ *tal que* $G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j E$*.*

Demostración: Por el Teorema XVI $\exists\, G_0 \subset G$ de medida positiva y finita tal que $G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j G_0$. Claramente $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ tal que

$$0 < |G_1| \leq \lambda < d_A \, |G_1| < \infty \,,$$

donde $G_1 := A^l G_0$. Obviamente se tiene $G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j G_1$.

Sean $F_0, F_1 \subseteq G_1$ medibles tales que $G_1 = F_0 \sqcup F_1$,

$$|F_0| = \frac{d_A \, |G_1| - \lambda}{d_A - 1} \quad \text{y} \quad |F_1| = \frac{\lambda - |G_1|}{d_A - 1} \,.$$

Observamos que $|F_0| > 0$, $|F_1| \geq 0$ y $|G_1| = |F_0| + |F_1|$. Obviamente siempre puede encontrarse una partición de G_1 con estas propiedades. Entonces $E := F_0 \bigsqcup A F_1$ cumple lo exigido. Efectivamente, como los dilatados por A de G_1 son disjuntos, también lo son los de F_0 y F_1 conjuntamente, y en particular lo son F_0 y $A F_1$. Además

$$G \setminus \{0\} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j G_1 = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j (F_0 \sqcup F_1) = \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j F_0 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j F_1 \right) =$$

$$= \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j F_0 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j A F_1 \right) = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j (F_0 \sqcup A F_1) = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^j E \,.$$

Por último, es sencillo comprobar que $|E| = |F_0| + d_A\,|F_1| = \lambda$. ■

El siguiente resultado puede encontrarse en [116] para el caso diádico en la recta, e implícitamente en [45] (ver [94]). Seguimos los mismos pasos que la primera referencia para una prueba directa del resultado. El único cambio relevante es que se utiliza la noción de punto de A-densidad, y el correspondiente Teorema en [131] (ver Teorema XXXVII en la sección 2.5).

Teorema 11 *Sean $A \in \mathcal{LE}$ y G un A-conjunto de medida positiva. Entonces*

$$\left|\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} (G+k)\right| = 0\,. \tag{1.11}$$

Demostración: Por el Teorema XXXVII sabemos que casi todo punto $x \in G$ es un punto de A-densidad de G. Es decir, fijado $x \in G$ se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|(A^{-j}Q_1 + x)\cap G|}{|A^{-j}Q_1|} = 1\,.$$

Entonces, fijado $\varepsilon > 0$ $\exists\, j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $|(A^{-j_0}Q_1 + x)\cap G| > (1-\varepsilon)\,|A^{-j_0}Q_1|$, luego

$$|(Q_1 + A^{j_0}x)\cap G| = \frac{|(A^{-j_0}Q_1 + x)\cap A^{-j_0}G|}{d_A^{-j_0}} = \frac{|(A^{-j_0}Q_1 + x)\cap G|}{|A^{-j_0}Q_1|} > 1-\varepsilon\,.$$

Por tanto $|(Q_1 + A^{j_0}x)\cap\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(G+k)| \geq |(Q_1 + A^{j_0}x)\cap G| > 1-\varepsilon$. Como ε es arbitrario y $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(G+k)$ es $\mathbb{Z}^d$-periódico, se tiene $|Q_1 \cap \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(G+k)| = 1$, que equivale al resultado. ■

1.3. Espacios A-reducidos y análisis multirresolucionales generalizados

Definición 6 *Dada una aplicación A lineal invertible definimos el* ***operador de dilatación*** *asociado*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_A\,:\, L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \mathcal{D}_A f(\cdot) := d_A^{\frac{1}{2}}\, f(A\,\cdot) \end{array}\,, \tag{1.12}$$

donde $d_A := |det(A)|$. Este operador es unitario y $\mathcal{D}_A^{-1} = \mathcal{D}_{A^{-1}}$. Por su importancia denotaremos especialmente el ***operador de dilatación diádica*** *por $\mathcal{D}_{(2)}$, cuya aplicación lineal asociada es $A_{(2)} = 2\,Id$.*

Tomamos la siguiente definición de [94] (ver [44]).

Definición 7 *Un subespacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$ se dice A-**reducido** si es invariante por traslaciones y $\mathcal{D}_A V = V$.*

El siguiente lema es un hecho básico que utilizaremos (ver [94]).

Lema XVIII *Si V es un subespacio A-reducido, entonces $V^\perp$ también lo es.*

Demostración: Si $f \in V$ y $g \in V^\perp$, como $\mathcal{D}_A V = V$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{D}_A g(x)\,\overline{f(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\overline{\mathcal{D}_{A^{-1}} f(x)}\,dx = 0\,,$$

luego $\mathcal{D}_A g \in V^\perp$. Así $\mathcal{D}_A V^\perp \subseteq V^\perp$ y análogamente se comprueba $\mathcal{D}_{A^{-1}} V^\perp \subseteq V^\perp$. Con esto se tiene $\mathcal{D}_A V^\perp = V^\perp$.

Sea ahora $k \in \mathbb{Z}^d$. Como V es invariante por traslaciones, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x-k)\,\overline{f(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\overline{f(x+k)}\,dx = 0\,,$$

luego $g(\cdot - k) \in V^\perp$. Como k es arbitrario, $V^\perp$ es invariante por traslaciones. ■

Los siguientes resultados relacionados con la caracterización de espacios A-reducidos pueden encontrarse en [48] y [116] en el caso diádico en la recta, y en [44] y [94] en el caso general.

Se observa fácilmente que si V es A-reducido, V es cerrado por traslaciones por $t \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j(\mathbb{Z}^d)$. Adicionalmente, si A es lineal expansiva (ver Apéndice A), por el Lema LXXXVII $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j(\mathbb{Z}^d)$ es denso en $\mathbb{R}^d$. Entonces, en virtud del siguiente lema, V es cerrado por todo tipo de traslaciones.

Lema XIX *Si A lineal invertible es tal que $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} A^j(\mathbb{Z}^d)} = \mathbb{R}^d$, entonces todo subespacio A-reducido V es cerrado por traslaciones para todo $t \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración: Sea $t \in \mathbb{R}^d$ y $f \in V$. Por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0\ \exists l \in \mathbb{Z}$ y $s \in A^l(\mathbb{Z}^d)$ de forma que $\|\, t - s\,\|_{\mathbb{R}^d} < \varepsilon$. Entonces $A^{-l}s \in \mathbb{Z}^d$, y como V es A-reducido $\mathcal{T}_s f = \mathcal{D}_A^l \mathcal{T}_{A^{-l}s} \mathcal{D}_A^{-l} f \in V$, donde $\mathcal{T}_t$ es el operador de traslación por $t \in \mathbb{R}^d$. Como ε es arbitrario y V es cerrado, finalmente se tiene $\mathcal{T}_t f \in V$. ■

La siguiente caracterización de los espacios cerrados por todas las traslaciones puede encontrarse en [78] o [116], aunque es un tema clásico (ver [62] o [76]).

Proposición XX *Sea V subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$, cerrado por traslaciones para todo $t \in \mathbb{R}^d$. Entonces $\exists\, G \subseteq \mathbb{R}^d$ medible tal que $V = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, Supp\widehat{f} \subseteq G\}$.*

Demostración: Si $V^\perp = \{0\}$, $V = L^2(\mathbb{R}^d)$ y $G = \mathbb{R}^d$. En caso contrario, si $f \in V$ y $g \in V^\perp$, como $f(\cdot + t) \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}^d$, se tiene

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+t)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i t\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^d\,.$$

Como $\widehat{f}\overline{\widehat{g}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por Cauchy-Schwarz, esto implica $\widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) = 0$ para *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Sea $\{h_j\}_{j\in I}$ (I numerable) una base ortonormal de $V^\perp$ y $G_j := \{x \in \mathbb{R}^d : \widehat{h_j}(x) = 0\}$ para $j \in I$. Si definimos $G := \bigcap_{j\in I} G_j$, claramente para toda $g \in V^\perp$ $\widehat{g}$ se anula *c.t.p.* sobre G y para toda $f \in V$ $\widehat{f}$ se anula *c.t.p.* sobre $\mathbb{R}^d \backslash G$. Recíprocamente si $Supp\widehat{f} \subseteq G$, f es ortogonal a $V^\perp$ y por tanto $f \in V$. Análogamente si $Supp\,\widehat{g} \subseteq \mathbb{R}^d \setminus G$ entonces $g \in V^\perp$. Así, hemos comprobado $V = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, Supp\widehat{f} \subseteq G\}$ y $V^\perp = \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, Supp\,\widehat{g} \subseteq \mathbb{R}^d \setminus G\}$. ■

En vista de este resultado, hacemos la siguiente definición (ver [94]).

Definición 8 *Dado $G \subseteq \mathbb{R}^d$ medible, definimos el espacio*

$$H^2_G := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, Supp\widehat{f} \subseteq G\}\,. \tag{1.13}$$

Finalmente tenemos lo siguiente

Teorema XXI *Sean $A \in \mathcal{LE}$ y V subespacio A-reducido. Entonces V es cerrado por todas las traslaciones y $\exists\, G$ A^*-conjunto tal que $V = H^2_G$.*

Demostración: Por el Lema XIX y la Proposición XX se tiene casi todo. Falta ver que G es A^*-conjunto.

En primer lugar, si $f \in V$ $\mathcal{D}_A f \in V$, y como $\widehat{\mathcal{D}_A} = \mathcal{D}_{A^{*-1}}(\widehat{\cdot})$ entonces $Supp\widehat{\mathcal{D}_A f} = A^*(Supp\widehat{f}) \subseteq G$. Sea $\{G_k\}_{k\in I}$ una partición de conjuntos acotados de G ($G_k = G \cap ([0,1)^d + k)$ con $k \in \mathbb{Z}^d$ vale). Para cada $k \in I$ $f_k := \check{\chi}_{G_k} \in V$, luego por lo anterior $A^*(G_k) \subseteq G$, y entonces $A^*(G) = \bigsqcup_{k\in I} A^*(G_k) \subseteq G$.

Aplicando el Lema XVIII, análogamente se llega a $A^*(\mathbb{R}^d \setminus G) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus G$. Como A^* es biyectiva, esto implica que G y $\mathbb{R}^d \setminus G$ son A-conjuntos. ■

Un recíproco algo más general del anterior resultado es también cierto.

Proposición XXII *Sean A lineal invertible y G A^*-conjunto. Entonces H^2_G es A-reducido y cerrado por todas las traslaciones.*

Demostración: Dada $f \in H^2_G$, $Supp\widehat{\mathcal{D}_A f} = A^*(Supp\widehat{f}) \subseteq A^*(G) = G$, luego $\mathcal{D}_A f \in H^2_G$. Análogamente se comprueba $\mathcal{D}_{A^{-1}} f \in H^2_G$, luego $\mathcal{D}_A H^2_G = H^2_G$ (se observa que se necesita que G sea A^*-conjunto para tener esta identidad). Por otro lado, si $t \in \mathbb{R}^d$ y $f \in H^2_G$, $Supp\widehat{f(\cdot - t)} = Supp(e^{-2\pi i t\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi)) \subseteq G$, luego $f(\cdot - t) \in H^2_G$. Como esto se tiene $\forall\, t \in \mathbb{R}^d$, H^2_G es invariante por traslaciones para todo $t \in \mathbb{R}^d$. ∎

Juntando todo lo anterior finalmente tenemos la caracterización de los espacios A-reducidos para aplicaciones lineales expansivas.

Teorema XXIII *Sean $A \in \mathcal{LE}$ y V subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$. V es A-reducido si y sólo si $\exists\, G$ A^*-conjunto tal que $V = H^2_G$.*

∎

Veamos ahora algunas propiedades de los espacios A-reducidos. Hemos visto en el Lema XVIII que el ortogonal de un subespacio A-reducido es A-reducido. De hecho, $(H^2_G)^\perp = H^2_{\mathbb{R}^d\setminus G}$ claramente. Por otro lado, en particular un subespacio A-reducido es invariante por traslaciones. En [26] y [22] se puede encontrar el siguiente resultado, donde se describe la función espectral de los espacios A-reducidos y sus subespacios invariantes por traslaciones.

Lema XXIV *Sean A lineal invertible y G A^*-conjunto. Entonces $\sigma_{H^2_G} = \chi_G$, y si V es un espacio invariante por traslaciones, $V \subseteq H^2_G$ si y sólo si $\sigma_V(\xi) \leq \chi_G(\xi)$ para c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración: En primer lugar, si para cada $m \in \mathbb{Z}^d$ definimos $\widehat{\phi^m} := \chi_{([0,1)^d+m)\cap G}$, se tiene $\phi^m \in H^2_G$. Claramente $\{\widehat{\phi^m_{(k)}}\}_{k,m\in\mathbb{Z}^d}$ es un tight frame en $L^2(G)$, donde $\widehat{\phi^m_{(k)}}(\xi) = e^{-2\pi i k\cdot\xi}\chi_{([0,1)^d+m)\cap G}(\xi)$, luego $\{\phi^m\}_{m\in\mathbb{Z}^d}$ es un generador de un tight frame en H^2_G. Entonces

$$\sigma_{H^2_G}(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\phi^m}(\xi)|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \chi_{([0,1)^d+m)\cap G}(\xi) = \chi_G(\xi)\,.$$

Sea V espacio invariante por traslaciones. Si $V \subseteq H^2_G$, por la Proposición XIII (iii), $\sigma_V(\xi) \leq \chi_G(\xi)$ para *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$. Recíprocamente, se tiene que todo miembro ϕ de un generador de un tight frame satisface $\widehat{\phi}(\xi) = 0$ para *c.t.p.* $\xi \notin G$, luego toda $f \in V$ hereda esta propiedad. Entonces $V \subseteq H^2_G$. ■

A partir de ahora supondremos que A es una dilatación (ver Apéndice A) y G es un A^*-conjunto de medida positiva. Mallat y Meyer introdujeron el siguiente concepto ([118], [119]).

Definición 9 *Una colección de subespacios cerrados* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *se dice **análisis multirresolucional** si se cumple lo siguiente:*

(i) $V_j \subset V_{j+1}\ \forall\, j \in \mathbb{Z}$,

(ii) $f \in V_j$ *si y sólo si* $f(2\cdot) \in V_{j+1}\ \forall\, j \in \mathbb{Z}$,

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,

(iv) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$,

(v) $\exists\, \phi \in V_0$ *(**función de escala**) tal que* $Tr(\phi)$ *es una base ortonormal de* V_0.

Históricamente esta definición de análisis multirresolucional ha ido ampliándose para dar cabida a conceptos más generales (ver la Introducción para referencias), sustituyendo las condiciones (ii), (iv) o (v) por las siguientes:

(ii') $V_j = \mathcal{D}^j_A V_0\ \forall\, j \in \mathbb{Z}$,

(iv') $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = H^2_G$ (es decir, es un espacio A-reducido),

(v') $\exists\, \phi \in V_0$ (**frame función de escala**) tal que $Tr(\phi)$ es un frame de V_0. Si este frame es tight se habla de **tight frame función de escala**. Si por otro lado $Tr(\phi)$ es una base de Riesz de V_0, se habla simplemente de **función de escala**, y si es una base ortonormal de **función de escala ortogonal** (correspondiente a (v)).

(v'') $\exists\, \Phi = \{\phi^\alpha\}_{\alpha=1}^M \subset V_0$ conjunto de funciones de escala tales que $Tr(\Phi)$ es un frame, tight frame, base de Riesz o base ortonormal de V_0. Las funciones de Φ reciben el nombre correspondiente en cada caso, y se dice que el AMR tiene **multiplicidad** M. Dos AMR de la misma multiplicidad se dicen **biortogonales** si los sistemas $Tr(\Phi)$ son biortogonales.

Expresaremos la condición (i) de la siguiente manera (en [26] o [22] se habla de los espacios refinables):

Definición 10 *Un espacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$ se dice A-**refinable** si $V \subseteq \mathcal{D}_A V$.*

El siguiente lema es un hecho bien conocido y básico sobre los espacios invariantes por traslaciones A-refinables (ver [94], por ejemplo).

Lema XXV *Sea V un espacio invariante por traslaciones A-refinable. Entonces $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V}$ es un espacio A-reducido y por tanto $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$ para algún A^*-conjunto G.*

Demostración: Sea $k \in \mathbb{Z}^d$ y $f \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$. Entonces $\exists\, j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f \in \mathcal{D}_A^{j_0} V$. Como V es A-refinable, podemos suponer $j_0 \geq 0$. Entonces $\mathcal{T}_k f \in \mathcal{D}_A^{j_0} V \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$. Por tanto, se tiene claramente $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathcal{T}_k \left(\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} \right) = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_A \left(\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} \right) = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V}\,,$$

luego $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V}$ es A-reducido. Por el Teorema XXIII $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$ para cierto A^*-conjunto G. ∎

En [9] se introdujo el concepto de análisis multirresolucional generalizado. Hacemos notar que en vista del Lema XXV sólo tiene sentido considerar estas estructuras en espacios A-reducidos.

Definición 11 *Sea V un espacio invariante por traslaciones. La sucesión de subespacios cerrados $\{\mathcal{D}_A^j V\}_{j\in\mathbb{Z}}$ se dice un **análisis multirresolucional generalizado** (AMRG) de H_G^2 si V es A-refinable,*

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V = \{0\} \quad y \quad \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2\,. \tag{1.14}$$

*La primera identidad se denomina **propiedad de intersección** y la segunda **propiedad de completitud**. V se llama el **espacio núcleo** del AMRG, y se dice que genera el AMRG.*

*Si V_0 es un espacio principal o finitamente generado, el AMRG se dice **principal** o **finitamente generado**. En este caso, sea $M := \|\dim_{V_0}\|_{L^\infty} \in \mathbb{N}$. Si V_0 es regular en el sentido de que $\dim_{V_0} = M$ c.t.p. se dice que $\{\mathcal{D}_A^j V\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es un AMR de multiplicidad M. En este caso existe un conjunto Φ de cardinal M de funciones de escala ortogonales (ver [54], [17]). En caso* *contrario, si el AMRG es finitamente generado (o principal) siempre existe un conjunto Φ de cardinal M de tight frame funciones de escala, y se dice que el AMRG es un frame AMR o FAMR de multiplicidad M.*

Debido a la condición $A\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{Z}^d$, si V es un espacio invariante por traslaciones también lo es $\mathcal{D}_A V$. En efecto, si $f \in \mathcal{D}_A V$ y $k \in \mathbb{Z}^d$, se tiene que $\mathcal{T}_{Ak}\mathcal{D}_A^{-1} f \in V$ ya que $Ak \in \mathbb{Z}^d$, luego $\mathcal{T}_k f = \mathcal{D}_A \mathcal{T}_{Ak}\mathcal{D}_A^{-1} f \in \mathcal{D}_A V$. En general $\mathcal{D}_A^{-1} V$ no es invariante por traslaciones. Se observa que aunque es cerrado por traslaciones en el retículo $A\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{Z}^d$, no tiene por qué serlo para todos los elementos en $\mathbb{Z}^d$.

Lema 12 *Sea V un subespacio que genera un AMRG de H_G^2 tal que $\mathcal{D}_A^j V$ es invariante por traslaciones $\forall\, j \in \mathbb{Z}$. Entonces $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $V = H_E^2$, donde E satisface*

(i) $E \subseteq A^* E$,

(ii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j} E = \lim_{j\to-\infty} A^{*j} E = \{0\}$,

(iii) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j} E = \lim_{j\to\infty} A^{*j} E = G$,

(iv) *E cumple la identidad*

$$E = \bigsqcup_{j\le 0} A^{*j}(E \setminus A^{*-1}E)\,. \tag{1.15}$$

Recíprocamente, todo espacio H_E^2 con E cumpliendo (i), (ii) y (iii) genera un AMRG de H_G^2, sus dilatados son invariantes por traslaciones y se tiene (iv).

Demostración: Dados $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$ y $f \in V$, se tiene que $\mathcal{T}_k \mathcal{D}_A^{-j} f \in \mathcal{D}_A^{-j} V$, luego $\mathcal{T}_{A^{-j}k} f = \mathcal{D}_A^j \mathcal{T}_k \mathcal{D}_A^{-j} f \in V$. Esto demuestra que $\mathcal{T}_t V = V\ \forall\, t \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j \mathbb{Z}^d$. Usando el Lema LXXXVII y procediendo como en el Lema XIX obtenemos que V es cerrado por todas las traslaciones. Por la Proposición XX $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $V = H_E^2$.

De lo último se deduce fácilmente que $\mathcal{D}_A^j V = H^2_{A^{*j}E}\ \forall\, j \in \mathbb{Z}$. Entonces la A-refinabilidad equivale a la condición (i), la propiedad de intersección a (ii) y la propiedad de completitud a (iii). De la propiedad (i) se deduce además que si definimos $E_0 := E \setminus A^{*-1}E$ y $E_1 := \{\xi \in E \ : \ A^{*j}\xi \in E\ \forall\, j \in \mathbb{Z}\}$ se ha de tener $E = \left(\bigsqcup_{j\le 0} A^{*j} E_0\right) \bigsqcup E_1$. Sin embargo, como E_1 es A-conjunto se tiene $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j} E = E_1$. Por tanto $|E_1| = 0$ y se obtiene (iv). La última afirmación se comprueba con los mismos argumentos. ■

Hacemos notar que si E es como en el anterior lema y el conjunto $E_0 := E \setminus A^{*-1}E$ es acotado, $\exists\, j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $A^{*j}E_0 \subseteq Q_1 \;\forall\, j \geq j_0$. Si definimos $\phi := \check{\chi}_{A^{*j_0}E}$ se tiene $\mathcal{S}(\phi) = H^2_{A^{*j_0}E} = \mathcal{D}_A^{j_0}V$. Reindexando la sucesión se llega a que el espacio núcleo de la sucesión es principal.

Este análisis nos brinda una manera de normalizar el espacio núcleo de una sucesión $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de subespacios ($V_j = \mathcal{D}_A V_{j-1} \;\forall\, j \in \mathbb{Z}$).

Proposición 13 *Sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un AMRG de H^2_G. Entonces se tiene una y sólo una de las siguientes dos opciones:*

- *o bien existe un $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que V_j es invariante por traslaciones si y sólo si $j \geq j_0$,*

- *o bien $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $V_0 = H^2_E$, cumpliéndose las propiedades del Lema 12.*

■

1.4. Ondículas y AMRGs

La Teoría de ondículas estudia los sistemas de (multi)ondículas, o más generalmente los sistemas afines. Por un tal sistema afín entendemos los trasladados y dilatados de un conjunto $\mathcal{G} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ en el siguiente sentido:

$$X(\mathcal{G}) := \{f_{(j,k)}(\cdot) := d_A^{\frac{j}{2}} f(A^j \cdot -k)\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}^d,f\in\mathcal{G}}\,. \tag{1.16}$$

Uno de los objetivos centrales es estudiar sus propiedades como sistemas de representación de funciones. Sobre la Teoría de ondículas referimos a [119], [50], [36], [79], [144], [143], [66].

Definición 12 *Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\Psi := \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H^2_G$. Ψ se dice* ***multiondícula ortogonal*** *de H^2_G si*

$$X(\Psi) = \{\psi^\alpha_{(j,k)} \;:\; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq \alpha \leq N\} \tag{1.17}$$

es una base ortonormal de H^2_G. Si $X(\Psi)$ es una base de Riesz de H^2_G, Ψ se dice ***multiondícula de Riesz*** *de H^2_G.*

Si Ψ es una multiondícula de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^d)$ y además su base dual también lo es (es decir, también es de la forma $X(\widetilde{\Psi})$ para cierto $\widetilde{\Psi} :=$

$\{\eta^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H^2_G$), entonces Ψ y $\widetilde{\Psi}$ se denominan ***multiondículas de Riesz biortogonales*** *de $L^2(\mathbb{R}^d)$ (ver [104]).*

Con más generalidad, decimos que Ψ es una ***frame multiondícula*** *de H^2_G si $X(\Psi)$ es un frame de H^2_G. Si el frame es tight, se habla de* ***tight frame multiondícula****. En este caso se tiene*

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |< f, \psi^\alpha_{(j,k)} >|^2 = \| f \|^2 \quad \forall\, f \in H^2_G\,, \tag{1.18}$$

En todas estas definiciones el cardinal de Ψ N se dice la multiplicidad de Ψ, y si $N = 1$ se omite el prefijo multi-.

En esta sección estamos interesados en estudiar la relación entre las multiondículas y los análisis multirresolucionales generalizados (referimos a [21] para una revisión reciente de esta cuestión). Mallat y Meyer ([118], [119]) introdujeron la estructura conocida como análisis multirresolucional (AMR) en busca de un método sistemático para la construcción y el estudio de las ondículas. Los AMR y frame análisis multirresolucionales (FAMR), que incorporan a la definición clásica el uso de los frames, han demostrado ser un método muy efectivo para la síntesis y el análisis de las (frame) multiondículas.

Aunque todo AMR da lugar a (multi)ondículas ortogonales, ejemplos como la ondícula de Journè (ver [118], [79]) muestran que no todas las ondículas ortogonales pueden ser inducidas por un AMR. Esta cuestión queda parcialmente resuelta con la introducción de los análisis multirresolucionales generalizados (AMRG) en [9]. Sin embargo, la siguiente pregunta surge de manera natural: ¿Qué (multi)ondículas, ortogonales o no, están asociadas a un AMR?

Para contestar a esta pregunta primero hemos de precisar su significado: dado $\Psi := \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos

$$W(\Psi) := \overline{span}\{\psi^\alpha_{(0,k)} \ : \ k \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq \alpha \leq N\} \tag{1.19}$$

y el espacio de dilatados negativos

$$V(\Psi) := \overline{span}\{\psi^\alpha_{(l,k)} \ : \ 1 \leq \alpha \leq N, l < 0, k \in \mathbb{Z}^d\}\,. \tag{1.20}$$

Definición 13 *Se dice que un AMRG $\{\mathcal{D}^j_A V\}_{j\in\mathbb{Z}}$ y una multiondícula Ψ (ambos de H^2_G) están asociados si se cumple*

$$V = V(\Psi)\,. \tag{1.21}$$

Ver [20] para equivalencia con otra noción a priori distinta y una discusión detallada.

Una multiondícula Ψ se dice AMR-multiondícula si está asociada a un AMR (es decir, a un AMRG cuyo espacio núcleo satisface que su función dimensión es constante en casi todo punto).

Puede encontrarse una extensa literatura sobre la caracterización de AMR-multiondículas ([110], [111], [1], [113], [2], [112], [68], [142], [78], [147], [95], [33], [96], [97], [23]). Dado $\Psi := \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, claramente $W(\Psi)$ es un espacio invariante por traslaciones y para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\mathcal{D}_A^j W(\Psi) = \overline{span}\{\psi_{(j,k)}^\alpha \ : \ k \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq \alpha \leq N\}$$

y

$$\mathcal{D}_A^j V(\Psi) = \overline{span}\{\psi_{(l,k)}^\alpha \ : \ 1 \leq \alpha \leq N, l < j, k \in \mathbb{Z}^d\}\,.$$

En particular se tiene $\mathcal{D}_A^j V(\Psi) \subset \mathcal{D}_A^{j+1} V(\Psi)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, y

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V(\Psi)} = \overline{span} X(\Psi)\,. \tag{1.22}$$

Por lo tanto, si Ψ es una multiondícula, $V(\Psi)$ cumple las propiedades de A-refinabilidad y completitud. Sin embargo, no es obvio que $V(\Psi)$ sea invariante por traslaciones o que cumpla la propiedad de intersección, ni tampoco la existencia de funciones de escala asociadas a $V(\Psi)$.

Definición 14 *Se dice que una multiondícula Ψ de H_G^2 es* ***semiortogonal*** *si $\mathcal{D}_A^j W(\Psi)$ son mutuamente ortogonales (ver [121], [65]). En este caso tenemos*

$$H_G^2 = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j W(\Psi) \tag{1.23}$$

y $\forall\, j \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{D}_A^j V(\Psi) = \bigoplus_{l<j} \mathcal{D}_A^l W(\Psi)\,. \tag{1.24}$$

Si Ψ es una multiondícula semiortogonal de H_G^2 se tiene

$$V(\Psi) = H_G^2 \cap \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_A^j W(\Psi) \right)^{\perp}, \tag{1.25}$$

y como cada uno de estos espacios es invariante por traslaciones, $V(\Psi)$ es un espacio invariante por traslaciones. Este espacio también cumple la propiedad de intersección (ver [3]), puesto que

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V(\Psi) \subseteq H_G^2 \cap \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j W(\Psi) \right)^{\perp} = \{0\}\,. \tag{1.26}$$

Las caracterizaciones de AMR-multiondículas se basan en las funciones dimensión, introducidas en [2]: dado $\Psi := \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ su **función dimensión** es

$$D_\Psi(t) := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}(t+k))|^2 \quad (t \in \mathbb{T}^d)\,. \tag{1.27}$$

En [33] se demuestra la siguiente caracterización de AMR-multiondículas ortogonales (ver [68], [142], [78] para multiplicidad uno):

Teorema XXVI *Una multiondícula ortogonal Ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ está asociada a un AMR si y sólo si $\frac{N}{d_A-1} \in \mathbb{N}$ y*

$$D_\Psi(t) = \frac{N}{d_A - 1} \quad c.t.p.\, t \in \mathbb{T}^d\,. \tag{1.28}$$

En este caso $\frac{N}{d_A-1}$ es la multiplicidad del AMR.

Si $\widetilde{\Psi} := \{\eta^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ es otro sistema, la **función dimensión conjunta** de Ψ y $\widetilde{\Psi}$ es

$$D_{\Psi,\widetilde{\Psi}}(t) := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}(t+k))\, \overline{\widehat{\eta^\alpha}(A^{*j}(t+k))} \quad (t \in \mathbb{T}^d)\,. \tag{1.29}$$

En [23] se demuestran las siguientes caracterizaciones de AMR-multiondículas de Riesz (ver [95] para multiplicidad uno):

Teorema XXVII *Una multiondícula de Riesz Ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ está asociada a un AMR si y sólo si $V(\Psi)$ es invariante por traslaciones, $\frac{N}{d_A-1} \in \mathbb{N}$ y*

$$\dim_{V(\Psi)}(t) = \frac{N}{d_A - 1} \quad c.t.p.\, t \in \mathbb{T}^d\,. \tag{1.30}$$

En este caso $\frac{N}{d_A-1}$ es la multiplicidad del AMR.

Teorema XXVIII *Sean Ψ y $\widetilde{\Psi}$ multiondículas de Riesz biortogonales de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces equivalen:*

- *Ψ y $\widetilde{\Psi}$ están asociadas a un par de AMRs biortogonales de multiplicidad M.*

- *$D_{\Psi,\widetilde{\Psi}}(t) = M$ para c.t.p. $t \in \mathbb{T}^d$.*

- Ψ *está asociada a un AMR de multiplicidad M.*

- Ψ *y* $\widetilde{\Psi}$ *están asociadas a un AMR de multiplicidad M.*

En este caso se tiene $N = M\,(d_A - 1)$.

La cuestión sobre si todo par de AMRs biortogonales da lugar a un par de multiondículas biortogonales sigue abierta.

Otra cuestión relacionada es ver cuándo una multiondícula está relacionada con un AMRG. En [9] se demostró que toda multiondícula ortogonal está asociada a un AMRG (ver [122] para ondículas ortogonales y [148] para un resultado relacionado). En [104] se demostró que una multiondícula de Riesz Ψ es biortogonal si y sólo si $V(\Psi)$ es invariante por traslaciones y el siguiente resultado (ver [95] para un resultado similar para ondículas):

Teorema XXIX *Sea Ψ una multiondícula de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- Ψ *es una multiondícula de Riesz biortogonal de $L^2(\mathbb{R}^d)$,*

- $\{\mathcal{D}_A^j V(\Psi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un AMRG de $L^2(\mathbb{R}^d)$,*

- *existe una multiondícula ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ que genera el mismo AMRG de $L^2(\mathbb{R}^d)$ $\{\mathcal{D}_A^j V(\Psi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$.*

En [9] se caracterizaron los AMRGs asociados a multiondículas ortogonales (ver [26] o [20]).

Teorema XXX *Un AMRG está asociado a una multiondícula ortogonal si y sólo si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que el espacio núcleo V cumple*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d/A^*\mathbb{Z}^d} \dim_V(A^{*-1}(t+\gamma)) = \dim_V(t) + N \quad c.t.p.\, t \in \mathbb{T}^d\,. \tag{1.31}$$

N es la multiplicidad de la multiondícula.

Uniendo los Teoremas XXX y XXIX se tiene que (1.31) también caracteriza a los AMRG asociados a multiondículas de Riesz biortogonales (ver [20]).

En [21] se puede ver la siguiente generalización:

Teorema XXXI *Un AMRG está asociado a una tight frame multiondícula semiortogonal si y sólo si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que el espacio núcleo V cumple* $\dim_V(t) < \infty$ *para c.t.p.* $t \in \mathbb{T}^d$ *y*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d/A^*\mathbb{Z}^d} \dim_V(A^{*-1}(t+\gamma)) - \dim_V(t) \le N \quad c.t.p.\, t \in \mathbb{T}^d\,. \tag{1.32}$$

N es la multiplicidad de la multiondícula.

Como hemos visto, si Ψ es una frame multiondícula semiortogonal entonces genera un AMRG (ver [27], [10]). En [26] se demostró que si Ψ además es tight entonces se tiene $\dim_{V(\Psi)} = D_\Psi$. Más aún,

$$\sigma_{V(\Psi)}(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,. \tag{1.33}$$

La situación es más complicada para las frame multiondículas no semiortogonales. El **problema de Baggett** plantea si toda tight frame multiondícula está asociada a un AMRG ([21], [22], [5]), y sigue abierto para el caso no semiortogonal. Se sabe que el espacio $V(\Psi)$ es invariante por traslaciones, ya que se tiene ([21])

$$V(\Psi)^\perp = \left\{ f \in H_G^2 \,:\, \| f \|^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} | < f, \psi_{(j,k)}^\alpha > |^2 \right\}, \tag{1.34}$$

luego la cuestión es verificar la propiedad de intersección. Las funciones dimensión de $V(\Psi)$ y Ψ no coinciden si Ψ no es semiortogonal (ver caracterización de la semiortogonalidad en [121]), aunque se cumple $Supp(D_\Psi) = Supp(\dim_{V(\Psi)})$. Esto hace posible la siguiente caracterización (ver [27]).

Teorema XXXII *Sea Ψ una tight frame multiondícula con $N = d_A - 1$. Si $V(\Psi)$ satisface la propiedad de intersección, entonces Ψ es una AMR-multiondícula si y sólo si $D_\Psi > 0$ en casi todo punto (el AMR es de multiplicidad uno).*

Con respecto al caso no tight, si Ψ es una frame multiondícula cuya frame multiondícula dual canónica tiene el mismo número de generadores entonces $V(\Psi)$ es invariante por traslaciones por un argumento similar a (1.34), y el resultado correspondiente al Teorema XXXII es cierto (ver [30], [27] o [25]). Sin embargo, esto no es representativo de la situación en general. La propiedad de intersección no se cumple en general para frame multiondículas no semiortogonales, independientemente de las constantes frame. Concretamente, en [27] se demuestra lo siguiente (ver [21]).

Teorema XXXIII $\forall\, \delta > 0$ *existe una frame multiondícula de $L^2(\mathbb{R}^d)$ con constantes frame 1 y $1 + \delta$ tal que $V(\Psi) = L^2(\mathbb{R}^d)$. Además, Ψ puede ser escogido en la clase de Schwartz y tiene una frame multiondícula dual.*

Capítulo 2

(G, A)-densidad y (G, A)-continuidad aproximativa

2.1. Definiciones clásicas y para matrices expansivas

Las siguientes definiciones son clásicas (referimos a [120] o [131]).

Definición 15 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida positiva. Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un **punto de densidad de** E si*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|E \cap B_r(x)|}{|B_r|} = 1 \, . \tag{2.1}$$

El siguiente concepto fue introducido en [57].

Definición 16 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un **punto de continuidad aproximativa** de f si $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida positiva tal que x es un punto de densidad de E y*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in E}} f(y) = f(x) \, . \tag{2.2}$$

En [40] se introdujo la siguiente noción.

Definición 17 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Decimos que f es **localmente distinta de cero en** $x \in \mathbb{R}^d$ si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, r \in (0, 1)$ tal que*

$$|\{y \in B_r(x) \ : \ f(y) = 0\}| < \varepsilon \, |B_r| \, . \tag{2.3}$$

Las siguientes variaciones de las anteriores definiciones las tomamos directamente de [40] y [41]. Asimismo, en [131] puede leerse un detallado estudio sobre diferentes formulaciones equivalentes y propiedades. Sea A una aplicación lineal expansiva en $\mathbb{R}^d$.

Definición 18 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida positiva. Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un* ***punto de A-densidad de*** *E si $\forall\, r > 0$*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap (A^{-j}B_r + x)|}{|A^{-j}B_r|} = 1\,. \tag{2.4}$$

Definición 19 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un* ***punto de A-continuidad aproximativa*** *de f si $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida positiva tal que x es un punto de A-densidad de E y*

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in E}} f(y) = f(x)\,. \tag{2.5}$$

Definición 20 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Decimos que f es* ***A-localmente distinta de cero en*** *$x \in \mathbb{R}^d$ si $\forall\, \varepsilon, r > 0\ \exists\, j \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|\{y \in A^{-j}B_r + x \ :\ f(y) = 0\}| < \varepsilon\, |A^{-j}B_r|\,. \tag{2.6}$$

En [131] fueron demostrados algunos resultados relacionados con las definiciones anteriores (a saber, puntos de A-densidad, puntos de A-continuidad aproximativa y funciones A-localmente distintas de cero). De manera similar se demuestran resultados análogos para los conceptos correspondientes que a continuación definiremos, introducidos en [94] para adaptar los argumentos a los espacios A-reducidos y obtener la caracterización de funciones de escala en estos espacios. Incluimos todas las demostraciones de manera detallada por completitud. Obsérvese que las definiciones anteriores son casos particulares correspondientes a $G = \mathbb{R}^d$ y $A = A_{(2)}$.

2.2. (G, A)-densidad

De ahora en adelante A denota una aplicación lineal expansiva y G será un A-conjunto de medida positiva.

Definición 21 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible. Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un* ***punto de (G, A)-densidad de*** *E (y escribimos $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$) si*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap (G + x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = 1\,. \tag{2.7}$$

Si la condición no se cumple, escribimos $E \notin \mathcal{D}_{G,A}(x)$. Si x es el origen lo omitiremos en la notación.

Los tres siguientes resultados aclaran esta primera definición. En particular, la bola unidad no desempeña un papel decisivo, ya que puede ser sustituida por cualquier conjunto en una clase bastante general. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $x \in \mathbb{R}^d$.

Lema 14 *Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ medibles y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r_1 < r_2 < \infty$ y $B_{r_1} \subseteq K_1, K_2 \subseteq B_{r_2}$. Si*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}K_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}K_1|} = 0\,,$$

entonces

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}K_2 + x)|}{|G \cap A^{-j}K_2|} = 0\,.$$

Demostración: Recordamos que se tiene $G = A^jG \ \forall\, j \in \mathbb{Z}$. Como A es expansiva, $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{r_2} \subseteq A^{j_0}B_{r_1}$ (basta tener $\beta^{j_0} > \frac{r_2}{C\,r_1}$). Entonces $K_2 \subseteq B_{r_2} \subseteq A^{j_0}B_{r_1} \subseteq A^{j_0}K_1$, y

$$\frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}K_2 + x)|}{|G \cap A^{-j}K_2|} \leq \frac{|G \cap A^{j_0-j}K_1|}{|G \cap A^{-j}K_2|}\,\frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}A^{j_0}K_1 + x)|}{|G \cap A^{j_0-j}K_1|} =$$

$$= \frac{|A^{-j}(G \cap A^{j_0}K_1)|}{|A^{-j}(G \cap K_2)|}\,\frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{j_0-j}K_1 + x)|}{|G \cap A^{j_0-j}K_1|} =$$

$$= \frac{d_A^{-j}\,|G \cap A^{j_0}K_1|}{d_A^{-j}\,|G \cap K_2|}\,\frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{j_0-j}K_1 + x)|}{|G \cap A^{j_0-j}K_1|} =$$

$$= \frac{|G \cap A^{j_0}K_1|}{|G \cap K_2|}\,\frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{j_0-j}K_1 + x)|}{|G \cap A^{j_0-j}K_1|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.$$

■

Lema 15 *Sean $K \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r_1 < r_2 < \infty$ y $B_{r_1} \subseteq K \subseteq B_{r_2}$. Entonces son equivalentes:*

(i) *se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} = 1\,, \tag{2.8}$$

(ii) *se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} |A^j(E-x) \cap G \cap K| = |G \cap K|\,, \tag{2.9}$$

(iii) *se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} = 0\,, \tag{2.10}$$

(iv) *se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} |A^j(E^c - x) \cap G \cap K| = 0\,. \tag{2.11}$$

Demostración: La equivalencia entre (i) y (ii) y entre (iii) y (iv) se sigue de la identidad ($j \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} = \frac{|A^{-j}[A^jE \cap (G + A^jx) \cap (K + A^jx)]|}{|A^{-j}(G \cap K)|} =$$

$$= \frac{|A^jE \cap (G + A^jx) \cap (K + A^jx)|}{|G \cap K|} = \frac{|A^j(E - x) \cap G \cap K|}{|G \cap K|}\,.$$

Para la segunda hay que sustituir E por su complementario. La equivalencia entre (i) y (iii) se sigue de la identidad

$$1 = \frac{|(G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} =$$

$$= \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} + \frac{|E^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|G \cap A^{-j}K|} \quad (j \in \mathbb{Z})\,.$$

■

Proposición 16 *Sean $K \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r_1 < r_2 < \infty$ y $B_{r_1} \subseteq K \subseteq B_{r_2}$. Entonces $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$ si y sólo si se cumple alguna de las cuatro condiciones del Lema 15.*

Demostración: Por el Lema 15 $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$ si y sólo si se cumple (2.10) con B_1, que por el Lema 14 es equivalente a (2.10) con K. Por el Lema 15 otra vez, cualquiera de las cuatro condiciones con K es equivalente por tanto a $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$. ■

Tomando $G = \mathbb{R}^d$ se recupera la noción de punto de A-densidad. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 17 *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $x \in \mathbb{R}^d$. Si x es un punto de A-densidad de E, entonces x es un punto de (G, A)-densidad de E para todo G A-conjunto de medida positiva.*

Demostración: Simplemente se tiene la estimación $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$\frac{|E^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \leq \frac{|E^c \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} =$$

$$= \frac{|E^c \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|A^{-j}B_1|} \frac{|A^{-j}B_1|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = \frac{|E^c \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|A^{-j}B_1|} \frac{|B_1|}{|G \cap B_1|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.$$

■

Por otro lado, salvo que sea $G = \mathbb{R}^d$, el ser un punto de (G, A)-densidad es una noción distinta de ser un punto de A-densidad. Observamos que no existe un $r > 0$ tal que $G \subseteq B_r$. Simplemente sabemos por el Teorema XVI que si $|G| > 0$ entonces $|G| = \infty$, luego ningún A-conjunto no trivial es acotado. Tampoco existe ningún $r > 0$ tal que $B_r \subseteq G$ salvo que $G = \mathbb{R}^d$. Esto es así ya que al ser A lineal expansiva, si G contiene un entorno del origen, cada bola está contenida en $A^jG = G$ para algún $j \in \mathbb{N}$, y se llega a $G = \mathbb{R}^d$. Por tanto la noción de punto de (G, A)-densidad no es una reformulación de la de punto de A-densidad via la Proposición 16. El siguiente ejemplo muestra que si $G \neq \mathbb{R}^d$ la primera es estrictamente más débil que la segunda.

Ejemplo 2 *Tómese $E := B_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{-j}B_1$, que en virtud del Teorema XVI satisface*

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} A^j E\,. \tag{2.12}$$

Por la Proposición XV se tiene que $\exists\, r > 0$ tal que

$$B_1 \subseteq K := \bigsqcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}E = \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}B_1 \subseteq B_r\,. \tag{2.13}$$

Fijado $x \in \mathbb{R}^d$ obviamente x es un punto de (G, A)-densidad de $G + x$. Sin embargo, x no es un punto de A-densidad de $G+x$ si $G \neq \mathbb{R}^d$, ya que $\forall\, j \in \mathbb{N}$

$$\frac{|(G+x) \cap (A^{-j}K + x)|}{|A^{-j}K|} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} |G \cap A^{-j-l}E|}{|A^{-j}K|} =$$

$$= \frac{\sum_{l=j}^{\infty} |A^{-l}(G \cap E)|}{\sum_{l=j}^{\infty} |A^{-l}E|} = \frac{|G \cap E| \sum_{l=j}^{\infty} d_A^{-l}}{|E| \sum_{l=j}^{\infty} d_A^{-l}} = \frac{|G \cap E|}{|E|} < 1\,.$$

A continuación demostramos algunas propiedades sencillas de los puntos de (G, A)-densidad.

Corolario 18 *Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ medibles tales que $E \subseteq F$. Si $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$, $F \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$, y si $F \notin \mathcal{D}_{G,A}(x)$, $E \notin \mathcal{D}_{G,A}(x)$.*

Demostración: Si $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$, se tiene

$$1 \geq \limsup_{j \to \infty} \frac{|F \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \geq \liminf_{j \to \infty} \frac{|F \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \geq$$

$$\geq \liminf_{j \to \infty} \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = \lim_{j \to \infty} \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = 1\,,$$

y $F \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$. Si $F \notin \mathcal{D}_{G,A}(x)$, se tiene

$$1 > \liminf_{j \to \infty} \frac{|F \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \geq \liminf_{j \to \infty} \frac{|E \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|}\,,$$

luego $E \notin \mathcal{D}_{G,A}(x)$. ■

Corolario 19 *Sean $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ medibles tales que $|E \cap F| = 0$. Si $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$, $F \notin \mathcal{D}_{G,A}(x)$.*

Demostración: Simplemente se tiene

$$\frac{|F \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} =$$

$$= \frac{|F \cap E \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} + \frac{|F \cap E^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \leq$$

$$\leq \frac{|E^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0\,.$$

■

Corolario 20 *Sean $E, F \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$. Entonces $E \cap F \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$.*

Demostración: Simplemente se tiene

$$\frac{|(E \cap F)^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \leq$$

$$\leq \frac{|E^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} + \frac{|F^c \cap (G+x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0\,.$$

■

Para los dos últimos resultados suponemos $x = 0$.

Corolario 21 *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y A-conjunto. Entonces $E \in \mathcal{D}_{G,A}$ si y sólo si $|G \setminus E| = 0$.*

Demostración: Se tiene $\forall\, j \in \mathbb{Z}, r > 0$

$$\frac{|E \cap G \cap A^{-j}B_r|}{|G \cap A^{-j}B_r|} = \frac{|A^{-j}(E \cap G \cap B_r)|}{|A^{-j}(G \cap B_r)|} = \frac{|E \cap G \cap B_r|}{|G \cap B_r|}\,,$$

luego $E \in \mathcal{D}_{G,A}$ si y sólo si $|E \cap G \cap B_r| = |G \cap B_r|$ para todo $r > 0$. ■

Corolario 22 *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $j \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$E \in \mathcal{D}_{G,A} \Longleftrightarrow A^j E \in \mathcal{D}_{G,A}\,. \tag{2.14}$$

Demostración: La conclusión se basa simplemente en que para cada $j, l \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\frac{|A^l E \cap G \cap A^{-j}B_1|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = \frac{|E \cap G \cap A^{-j-l}B_1|}{|G \cap A^{-j-l}B_1|}\,.$$

■

2.3. (G, A)-continuidad aproximativa

Definición 22 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es un **punto de (G, A)-continuidad aproximativa** de f, o que f es (G, A)-**continua aproximativa** en x, si $\exists\, E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$ tal que*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in E}} f(y) = f(x)\,. \tag{2.15}$$

Hacemos notar que f es (G, A)-continua aproximativa en x si y sólo si $g(y) := f(y + x)$ es (G, A)-continua aproximativa en el origen.

Lema 23 *Sean* $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ (G,A)*-continuas aproximativas en* $x \in \mathbb{R}^d$. *Entonces*

- $c\,f$ *es* (G,A)*-continua aproximativa en* x $\forall\, c \in \mathbb{C}$,

- $f + g$ *es* (G,A)*-continua aproximativa en* x,

- $f \cdot g$ *es* (G,A)*-continua aproximativa en* x,

- f/g *es* (G,A)*-continua aproximativa en* x *(siempre que* $g(0) \neq 0$*),*

- $f(A\cdot)$ *y* $f(A^{-1}\cdot)$ *son* (G,A)*-continuas aproximativas en* x *(si* $x = 0$*),*

- *si* $f(y) \geq 0$ *para c.t.p.* $y \in \mathbb{R}^d$, *entonces* $\sqrt{f}$ *también es* (G,A)*-continua aproximativa en* x.

En cada caso asumimos que las correspondientes funciones toman los valores obvios en x.

Demostración: Las demostraciones de estos hechos son sencillas, así que dejamos los detalles para el lector interesado. Basta aplicar los Corolarios 20 y 22. ■

A continuación mostramos algunas condiciones para tener (G,A)-continuidad aproximativa.

Proposición 24 *Sean* $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *medible,* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *medible y* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *tales que* $0 < r_1 < r_2 < \infty$ *y* $B_{r_1} \subseteq K \subseteq B_{r_2}$. *Entonces son equivalentes:*

(i) f *es* (G,A)*-continua aproximativa en* $x \in \mathbb{R}^d$,

(ii) *se tiene* $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y \in G \cap A^{-j}K \ : \ |f(y+x) - f(x)| < \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}K|} = 1\,, \qquad (2.16)$$

(iii) *se tiene que* $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\, j \geq j_0$

$$\frac{|\{y \in G \cap A^{-j}K \ : \ |f(y+x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}K|} < \varepsilon\,. \qquad (2.17)$$

Demostración: Sin pérdida en la generalidad podemos suponer $x = 0$ en esta demostración, considerando $g(y) := f(y + x)$.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Supongamos que f es (G, A)-continua aproximativa en el origen. Esto quiere decir que $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap G \cap A^{-j}K|}{|G \cap A^{-j}K|} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in E}} f(x) = f(0)\,.$$

Entonces, fijados $\varepsilon > 0$ y $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\exists\, \delta > 0$ y $j_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall\, j \geq j_1$ y $\forall\, x \in B_\delta \cap E$

$$1 - \frac{|E \cap G \cap A^{-j}K|}{|G \cap A^{-j}K|} < \widetilde{\varepsilon} \quad \text{y} \quad |f(x) - f(0)| < \varepsilon\,.$$

Como A es expansiva, $\exists\, j_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, j \geq j_2$ se tiene $A^{-j}B_{r_2} \subseteq B_\delta$. Entonces $G \cap A^{-j}K \subseteq A^{-j}B_{r_2} \subseteq B_\delta$ y si $x \in E \cap G \cap A^{-j}K$ se tiene $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Por tanto $E \cap G \cap A^{-j}K \subseteq \{x \in G \cap A^{-j}K : |f(x) - f(0)| < \varepsilon\}$. Finalmente, si $j \geq j_0 := \max\{j_1, j_2\}$ se tiene

$$1 - \frac{|\{x \in G \cap A^{-j}K \,:\, |f(x) - f(0)| < \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}K|} \leq 1 - \frac{|E \cap G \cap A^{-j}K|}{|G \cap A^{-j}K|} < \widetilde{\varepsilon}\,.$$

Como $\widetilde{\varepsilon}$ es arbitrario, se tiene (ii).

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Sean $\varepsilon, \widetilde{\varepsilon} > 0$. A partir de (ii) sabemos que $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, j \geq j_0$

$$1 - \frac{|\{x \in G \cap A^{-j}K \,:\, |f(x) - f(0)| < \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}K|} < \widetilde{\varepsilon}\,.$$

Entonces

$$\frac{|\{x \in G \cap A^{-j}K \,:\, |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}K|} =$$

$$= \frac{|G \cap A^{-j}K|}{|G \cap A^{-j}K|} - \frac{|\{x \in G \cap A^{-j}K \,:\, |f(x) - f(0)| < \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}K|} < \widetilde{\varepsilon}\,.$$

Tomando $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$ se tiene (iii).

(iii)$\Longrightarrow$(i) Supongamos (iii). Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos concretamente $\varepsilon := 2^{-n-1} > 0$, tenemos que $\exists\, j_n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, j \geq j_n$

$$\frac{|\{x \in G \cap A^{-j}K \,:\, |f(x) - f(0)| \geq 2^{-n-1}\}|}{|G \cap A^{-j}K|} < \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

Observamos que $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ puede ser tomada estrictamente creciente. En particular, si definimos

$$F_n := \{x \in G \cap A^{-j_n}K \,:\, |f(x) - f(0)| \geq 2^{-n-1}\} \quad (n \in \mathbb{N})\,,$$

se tiene $\frac{|F_n|}{|G\cap A^{-j_n}K|} < 2^{-n-1}$. Definimos entonces

$$E := (G \cap K) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \,.$$

Observamos que E es no vacío, ya que

$$\frac{|E|}{|G\cap K|} \geq 1 - \frac{|\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n|}{|G\cap K|} \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_n|}{|G\cap K|} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_n|}{d_A^{-j_n}\,|G\cap K|} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|F_n|}{|G\cap A^{-j_n}K|} > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Como A es expansiva, $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^{-j}K \subseteq K$ si $j \geq j_0$. Fijado $j \geq$ $\max\{j_0, j_1\}$, sea $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo $j_n \leq j < j_{n+1}$. Claramente $\bigcup_{m=1}^{n} F_m \subseteq$ $\{x \,:\, |f(x) - f(0)| \geq 2^{-n-1}\}$. Entonces

$$\frac{|E^c \cap G \cap A^{-j}K|}{|G\cap A^{-j}K|} \leq \frac{|(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m) \cap G \cap A^{-j}K|}{|G\cap A^{-j}K|} \leq$$

$$\leq \frac{|(\bigcup_{m=1}^{n} F_m) \cap G \cap A^{-j}K|}{|G\cap A^{-j}K|} + \frac{|(\bigcup_{m=n+1}^{\infty} F_m) \cap G \cap A^{-j}K|}{|G\cap A^{-j}K|} \leq$$

$$\leq \frac{|\{x \in G\cap A^{-j}K \,:\, |f(x) - f(0)| \geq 2^{-n-1}\}|}{|G\cap A^{-j}K|} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|F_m \cap G \cap A^{-j}K|}{|G\cap A^{-j}K|} <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|F_m|}{|G\cap A^{-j_m}K|} < \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.$$

Por la Proposición 16 $E \in \mathcal{D}_{G,A}$.

Por último, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0-1} < \varepsilon$, y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta \subseteq$ $A^{-j_{n_0}}B_{r_1} \subseteq A^{-j_{n_0}}K$. Entonces, si $x \in E \cap B_\delta$, $x \in G \cap A^{-j_{n_0}}K$ y $x \notin F_{n_0}$, por lo que $|f(x) - f(0)| < 2^{-n_0-1} < \varepsilon$. ■

Los siguientes lemas son sencillas generalizaciones de los correspondientes de la sección 2 de [132] (ver [131]). Establecen una relación entre la (G, A)-continuidad aproximativa y el límite de las sucesiones $\{f(A^{-j}y + x)\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Lema 25 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Si para cierto $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} f(A^{-j}y + x) = f(x) \quad c.t.p.\, y \in G \tag{2.18}$$

entonces f es (G, A)-continua aproximativa en x.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Definimos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$F_j := \{y \in G \cap B_1 \ : \ |f(A^{-j}y + x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

y

$$E_j := \bigcap_{k \geq j} F_k = \{y \in G \cap B_1 \ : \ |f(A^{-k}y + x) - f(x)| < \varepsilon \, \forall \, k \geq j\} \, .$$

Por definición $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es creciente y $\liminf_{j \to \infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \lim_{j \to \infty} E_j$. A partir de (2.18) se tiene que para *c.t.p.* $y \in G \cap B_1$ $\exists \, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \, j \geq j_0$ $|f(A^{-j}y + x) - f(x)| < \varepsilon$. Por tanto $|G \cap B_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j| = 0$. Así $\lim_{j \to \infty} |E_j| = |\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j| = |G \cap B_1|$ y finalmente

$$1 \geq \frac{|\{y \in G \cap A^{-j}B_1 \ : \ |f(y + x) - f(x)| < \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}B_1|} = \frac{|F_j|}{|G \cap B_1|} \geq \frac{|E_j|}{|G \cap B_1|} \xrightarrow[j \to \infty]{} 1 \, .$$

Por la Proposición 24 f es (G, A)-continua aproximativa en x. ■

El recíproco de este lema no es cierto (ver [132], [131]), pero se tiene lo siguiente.

Lema 26 *Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Si f es (G, A)-continua aproximativa en $x \in \mathbb{R}^d$ entonces $\exists \{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión creciente de números naturales tal que*

$$\lim_{k \to \infty} f(A^{-j_k}y + x) = f(x) \quad c.t.p. \, y \in G \, . \tag{2.19}$$

Demostración: Por la Proposición 24 $\forall \, r > 0, \varepsilon > 0$ se tiene

$$\frac{|\{y \in G \cap A^{-j}B_r \ : \ |f(y + x) - f(x)| < \varepsilon\}|}{|G \cap A^{-j}B_r|} =$$

$$= \frac{|\{y \in G \cap B_r \ : \ |f(A^{-j}y + x) - f(x)| < \varepsilon\}|}{|G \cap B_r|} \xrightarrow[j \to \infty]{} 1 \, ,$$

luego $|\{y \in G \cap B_r : |f(A^{-j}y + x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$. Esto quiere decir que $f(A^{-j} \cdot + x) \xrightarrow[j \to \infty]{} f(x)$ en medida en $G \cap B_r$ $\forall \, r > 0$ (y cualquier subsucesión suya, obviamente).

El Teorema de Riesz afirma que en un espacio de medida σ-finito si una sucesión de funciones converge en medida, entonces existe una subsucesión que converge en casi todo punto (ver [141]). Entonces $\exists \, \{j_k^1\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ creciente tal que $f(A^{-j_k^1}y + x) \xrightarrow[k \to \infty]{} f(x)$ para *c.t.p.* $y \in G \cap B_1$, y existe a su vez $\{j_k^2\}_{k=1}^\infty \subseteq \{j_k^1\}_{k=1}^\infty$ creciente tal que $f(A^{-j_k^2}y + x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ para *c.t.p.* $y \in G \cap B_2$. Procediendo de tal guisa, $\forall\, r \in \mathbb{N}\ \exists\, \{j_k^r\}_{k=1}^\infty \subseteq \{j_k^{r-1}\}_{k=1}^\infty$ creciente tal que $f(A^{-j_k^r}y + x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ para *c.t.p.* $y \in G \cap B_r$. Usando el método diagonal de Cantor, se tiene que $f(A^{-j_k^k}y + x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ para *c.t.p.* $y \in G$. $\blacksquare$

El siguiente lema es una sencilla generalización del correspondiente en [133]. Establece una relación entre la (G, A)-continuidad aproximativa y el límite de ciertas medias ponderadas.

Lema 27 *Sean* $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *medible y acotada* ($0 \le |f(y)| \le M < \infty$ *para c.t.p.* $y \in G$)*, y* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *medible tal que* $\exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *con* $0 < r_1 < r_2 < \infty$ *y* $B_{r_1} \subseteq K \subseteq B_{r_2}$*. Entonces* f *es* (G, A)*-continua aproximativa en* $x \in \mathbb{R}^d$ *si y sólo si*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|G \cap A^{-j}K|} \int_{G\cap A^{-j}K} |f(y + x) - f(x)|\, dy = 0\,. \tag{2.20}$$

Demostración: Supongamos que f es (G, A)-continua aproximativa en $x \in \mathbb{R}^d$. Por la Proposición 24 $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, j \ge j_0$

$$\frac{|E_{j,\varepsilon}|}{|G \cap A^{-j}K|} < \varepsilon \quad \text{donde} \quad E_{j,\varepsilon} := \{y \in G \cap A^{-j}K \,:\, |f(y + x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\,.$$

Entonces para $\forall\, j \ge j_0$

$$\frac{1}{|G \cap A^{-j}K|} \int_{G\cap A^{-j}K} |f(y + x) - f(x)|\, dy =$$

$$= \frac{1}{|G \cap A^{-j}K|} \left(\int_{(G\cap A^{-j}K)\setminus E_{j,\varepsilon}} |f(y + x) - f(x)|\, dy + \int_{E_{j,\varepsilon}} |f(y + x) - f(x)|\, dy \right) <$$

$$< \frac{\varepsilon\, |G \cap A^{-j}K| + 2\, M\, |E_{j,\varepsilon}|}{|G \cap A^{-j}K|} < \varepsilon\, (1 + 2\, M)\,.$$

Recíprocamente, supongamos que se tiene (2.20). Vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists\, \varepsilon_0 \in (0, 1)$ y $\{j_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ tales que $j_n \nearrow \infty$ y $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$|E_n| \ge \varepsilon_0\, |G\cap A^{-j_n}K| < \varepsilon \quad \text{donde} \quad E_n := \{y \in G\cap A^{-j_n}K : |f(y+x)-f(x)| \ge \varepsilon_0\}\,.$$

Entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|G \cap A^{-j_n}K|} \int_{G\cap A^{-j_n}K} |f(y + x) - f(x)|\, dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|G\cap A^{-j_n}K|}\left(\int_{(G\cap A^{-j_n}K)\setminus E_n} |f(y+x)-f(x)|\,dy + \int_{E_n} |f(y+x)-f(x)|\,dy\right) \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_0\,|E_n|}{|G\cap A^{-j}K|} \geq \varepsilon_0^2 > 0\,,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y\in G\cap A^{-j}K \;:\; |f(y+x)-f(x)|<\varepsilon\}|}{|G\cap A^{-j}K|} = 1 \quad \forall\, \varepsilon>0\,,$$

y por la Proposición 24 f es (G,A)-continua aproximativa en $x\in\mathbb{R}^d$. ■

2.4. Funciones (G,A)-localmente distintas de cero

Definición 23 *Sea $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Decimos que f es (G,A)-**localmente distinta de cero** en $x\in\mathbb{R}^d$ si*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\{y\in G\cap A^{-j}B_1 \;:\; f(y+x)=0\}|}{|G\cap A^{-j}B_1|} = 0\,. \tag{2.21}$$

Es decir, si $Supp(f)\in\mathcal{D}_{G,A}(x)$.

Como antes, f es (G,A)-localmente distinta de cero en x si y sólo si $g(y):=f(y+x)$ es (G,A)-localmente distinta de cero en el origen.

Lema 28 *Sea $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ medible. Si f es (G,A)-continua aproximativa en $x\in\mathbb{R}^d$ y $f(x)\neq 0$, f es (G,A)-localmente distinta de cero en x.*

Demostración: Si f es (G,A)-continua aproximativa en x, por la Proposición 24 $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\, j_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall\, j\geq j_0$

$$\frac{|\{y\in G\cap A^{-j}B_1 \;:\; |f(y+x)-f(x)|\geq \frac{|f(x)|}{2}\}|}{|G\cap A^{-j}B_1|} < \varepsilon\,.$$

Entonces

$$\frac{|\{y\in G\cap A^{-j}B_1 \;:\; f(y+x)=0\}|}{|G\cap A^{-j}B_1|} \leq$$

$$\leq \frac{|\{y\in G\cap A^{-j}B_1 \;:\; |f(y+x)-f(x)|\geq \frac{|f(x)|}{2}\}|}{|G\cap A^{-j}B_1|} < \varepsilon\,.$$

Como ε es arbitrario, f es (G,A)-localmente distinta de cero en x. ■

El siguiente lema es una sencilla generalización del correspondiente de la sección 2 de [132] (ver [131]).

Lema 29 *Si f es (G, A)-localmente distinta de cero en $x \in \mathbb{R}^d$ entonces $\exists \{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión creciente de números naturales tal que para c.t.p. $y \in G$ $\exists\, k_0$ natural tal que $f(A^{-j_k}y + x) \neq 0$ si $k \geq k_0$.*

Demostración: Por hipótesis $\forall\, r > 0$

$$\frac{|\{y \in G \cap A^{-j}B_r \,:\, f(y+x) = 0\}|}{|G \cap A^{-j}B_r|} = \frac{|\{y \in G \cap B_r \,:\, f(A^{-j}y + x) = 0\}|}{|G \cap B_r|} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0\,.$$

Entonces $\exists \{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ creciente tal que $|E_k| < 2^{-k}$, donde

$$E_k := \{y \in G \cap B_k \,:\, f(A^{-j_k}y + x) = 0\}\,.$$

La existencia de la subsucesión es obvia. Basta escoger en cada paso $j_k > j_{k-1}$ tal que $|\{y \in G \cap B_k \,:\, f(A^{-j_k}y + x) = 0\}| < 2^{-k}$.

Si denotamos $\forall\, j \in \mathbb{N}$ $F_j := \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k$ tenemos que $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ es decreciente y $\limsup_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = \lim_{j\to\infty} F_j$. Claramente

$$|\limsup_{k\to\infty} E_k| = \lim_{j\to\infty} |F_j| \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} |E_k| < \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k} = \lim_{j\to\infty} 2^{1-j} = 0\,,$$

luego $|G| = |G \setminus \limsup_{k\to\infty} E_k|$. Si $y \in G \setminus \limsup_{k\to\infty} E_k$ $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_0$ $y \notin E_k$, luego para $k > \max(k_0, \|y\|)$ se tiene $y \in G \cap B_k \setminus E_k$. Esto implica $f(A^{-j_k}y + x) \neq 0$ para $k > \max(k_0, \|y\|)$, que es cierto para *c.t.p.* $y \in G$. ■

2.5. Teoremas de diferenciación y de tipo Denjoy

• El Teorema de diferenciación de Lebesgue establece lo siguiente (ver [63]):

Teorema XXXIV *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, se tiene*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |f(y+x) - f(x)|\, dy = 0 \quad c.t.p.\; x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{2.22}$$

Es bien sabido que este resultado sigue siendo cierto con el uso de cubos o conjuntos más generales (ver [63]). En [131] se generalizó este teorema de la manera siguiente:

Teorema XXXV *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{-j}Q_1|} \int_{A^{-j}Q_1} |f(y+x) - f(x)|\, dy = 0 \quad c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{2.23}$$

A continuación demostramos un resultado similar.

Teorema 30 *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|G\cap A^{-j}Q_1|} \int_{G\cap A^{-j}Q_1} |f(y+x) - f(x)|\, dy = 0 \quad c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{2.24}$$

Demostración: Simplemente tenemos por el Teorema XXXV para $c.t.p.\, x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|G\cap A^{-j}Q_1|} \int_{G\cap A^{-j}Q_1} |f(y+x) - f(x)|\, dy \le \\
&\le \frac{1}{|G\cap A^{-j}Q_1|} \int_{A^{-j}Q_1} |f(y+x) - f(x)|\, dy = \\
&= \frac{|A^{-j}Q_1|}{|G\cap A^{-j}Q_1|} \frac{1}{|A^{-j}Q_1|} \int_{A^{-j}Q_1} |f(y+x) - f(x)|\, dy = \\
&= \frac{|Q_1|}{|G\cap Q_1|} \frac{1}{|A^{-j}Q_1|} \int_{A^{-j}Q_1} |f(y+x) - f(x)|\, dy \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Nótese que por el Corolario 9 $|G\cap Q_1| > 0$. ■
Similarmente el cubo unidad puede sustituirse por una gran cantidad de conjuntos, como por ejemplo la bola unidad.

• En [120] se puede encontrar el siguiente resultado.

Teorema XXXVI *Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible, casi todo punto de E es un punto de densidad de E.*

En [131] se generaliza lo anterior para la noción de A-densidad.

Teorema XXXVII *Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible, casi todo punto de E es un punto de A-densidad de E.*

Con el Teorema 30 podemos demostrar la siguiente generalización del Teorema XXXVII.

Teorema 31 *Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible, casi todo punto de E es un punto de (G, A)-densidad de E.*

Demostración: Simplemente por el Teorema 30 para *c.t.p.* $x \in E$

$$\frac{|E \cap (G + x) \cap (A^{-j}B_1 + x)|}{|G \cap A^{-j}B_1|} =$$

$$= \frac{1}{|G \cap A^{-j}B_1|} \int_{G \cap A^{-j}B_1} \chi_E(y + x)\, dy \xrightarrow[j \to \infty]{} \chi_E(x) = 1\,,$$

luego $E \in \mathcal{D}_{G,A}(x)$. ■

- En [57] se demostró lo siguiente.

Teorema XXXVIII *Si $f\ :\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible y finita en casi todo punto, entonces c.t.p. $x \in [a, b]$ es un punto de continuidad aproximativa de f.*

En [131] se generaliza lo anterior para la noción de A-continuidad aproximativa.

Teorema XXXIX *Si $f\ :\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible y finita en casi todo punto, entonces c.t.p. $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto de A-continuidad aproximativa de f.*

Necesitamos el siguiente resultado clásico, demostrado por N.N.Luzin en 1913 (ver [141]).

Teorema XL *Si $f\ :\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible, finita en casi todo punto y tal que Supp(f) es acotado, entonces $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, g\ :\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $|\{x \in \mathbb{R}^d\ :\ f(x) \neq g(x)\}| < \varepsilon$.*

Se tiene la siguiente generalización del Teorema XXXIX.

Teorema 32 *Si $f\ :\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ es medible y finita en casi todo punto, entonces c.t.p. $x \in \mathbb{R}^d$ es un punto de (G, A)-continuidad aproximativa de f.*

Demostración: En primer lugar podemos suponer *Supp*$(f) \subseteq [0, 1]^d$, ya que podemos descomponer $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f\, \chi_{[0,1)^d + k}$. Por el Teorema XL $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists g_j$ continua tal que $|[0, 1]^d \setminus E_j| < \frac{1}{j}$, donde $E_j := \{x \in [0, 1]^d\ :\ f(x) = g_j(x)\}$ es medible. Claramente $|[0, 1]^d \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j| = 0$, luego para *c.t.p.* $x \in [0, 1]^d$

$\exists\, j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_j$. Por el Teorema 31 *c.t.p.* $x \in E_j$ es un punto de (G, A)-densidad de E_j. Como tenemos

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in E_j}} f(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in E_j}} g_j(y) = g_j(x) = f(x) \quad \forall\, x \in E_j\,,$$

tenemos que para *c.t.p.* $x \in [0,1]^d$ f es (G, A)-continua aproximativa en x. ■

Capítulo 3

Caracterizaciones de análisis multirresolucionales generalizados

Salvo que se indique lo contrario, durante todo este capítulo A denotará una dilatación y G un A^*-conjunto de medida positiva.

3.1. Caracterizaciones de las funciones de escala

En esta sección repasamos las diferentes caracterizaciones que se han dado de las funciones de escala asociadas a los análisis multirresolucionales y frame análisis multirresolucionales. A continuación exponemos lo que hasta donde conocemos son las descripciones completas de condiciones necesarias y suficientes para tener funciones de escala que pueden encontrarse en la literatura.

• Condiciones suficientes sobre la función de escala ortogonal para la completitud pueden encontrarse en [118], [119], [50] o [79]. Estas condiciones tratan sobre el comportamiento de $\widehat{\phi}$ en el origen (ϕ tiene soporte compacto, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ o $|\widehat{\phi}|$ es continuo en el origen). En [117] se demuestra que si $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ es tal que $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ y $\widehat{\phi}(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ entonces cumple (3.13).

En [13] (ver [100] o [35]) se dió la siguiente condición suficiente:

Teorema XLI *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:*

- $\exists\, a, b$ *tales que* $0 < a \leq b < \infty$ *y*

$$a \leq [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) \leq b \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R} \setminus N_\phi\,, \tag{3.1}$$

donde $N_\phi = \{\xi \in \mathbb{R} \,:\, [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 0\}$,

- $\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T})$ *tal que*

$$\widehat{\phi}(2\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

- $|\widehat{\phi}| > 0$ *c.t.p. en un entorno del origen.*

Entonces ϕ *es una frame función de escala del FAMR* $\{\mathcal{D}^j_{A_{(2)}}\mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R})$*.*

La función m de la identidad (3.2) es denominada **filtro de paso bajo**.

En [146] se generaliza el anterior resultado:

Teorema XLII *Sea* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *tal que:*

- $\exists\, a, b$ *tales que* $0 < a \leq b < \infty$ *y*

$$a \leq [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) \leq b \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus N_\phi\,, \tag{3.3}$$

donde $N_\phi = \{\xi \in \mathbb{R}^d \,:\, [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 0\}$,

- $\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ *tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{3.4}$$

- $|\widehat{\phi}| > 0$ *c.t.p. en un entorno del origen.*

Entonces ϕ *es una frame función de escala del FAMR* $\{\mathcal{D}^j_A\mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R}^d)$*.*

• Los siguientes resultados caracterizan la completitud en términos del soporte de la función de escala. En [52] se demostró el siguiente resultado:

Teorema XLIII *Sea* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $V = \mathcal{S}(\phi)$ *es* $A_{(2)}$*-refinable. Entonces* $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j_{A_{(2)}} V} = L^2(\mathbb{R}^d)$ *si y sólo si*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (2^j\, Supp(\widehat{\phi})) = \mathbb{R}^d\,. \tag{3.5}$$

En [116] se demuestra que todo AMR principal diádico en la recta cumple que $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j_{A_{(2)}} V}$ es $A_{(2)}$-reducido, siendo igual a H^2_G donde ϕ es una función de escala ortogonal y $G = \{\xi \in \mathbb{R} \,:\, |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| > 0$ para algún $j \in \mathbb{Z}\}$. En este caso se tiene $\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| = \chi_G(\xi)$.

En [115] se generalizó el Teorema XLIII:

Teorema XLIV *Sean $G \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que $2\,G = G$ y $\phi \in H^2_G$. Entonces ϕ es una frame función de escala del FAMR $\{\mathcal{D}^j_{A_{(2)}}\mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de H^2_G si y sólo si*

- *$\exists\, a, b$ tales que $0 < a \leq b < \infty$ y*

$$a \leq [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) \leq b \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R} \setminus N_\phi\,, \tag{3.6}$$

donde $N_\phi = \{\xi \in \mathbb{R} \,:\, [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 0\}$,

- *$\exists\, m \in L^2(\mathbb{T})$ tal que*

$$\widehat{\phi}(2\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{3.7}$$

- *se cumple*

$$G = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (2^j\, Supp(\widehat{\phi}))\,. \tag{3.8}$$

Además, ϕ es función de escala si y sólo si $|N_\phi| = 0$.

En [149] se generaliza a $\mathbb{R}^d$ con dilataciones expansivas.

Teorema XLV *Sean G A^*-conjunto y $\phi \in H^2_G$. Entonces ϕ es una frame función de escala del FAMR $\{\mathcal{D}^j_A\mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de H^2_G si y sólo si*

- *$Tr(\phi)$ es un frame de $\mathcal{S}(\phi)$,*

- *$\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{3.9}$$

- *se cumple*

$$G = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (A^{*j}\, Supp(\widehat{\phi}))\,. \tag{3.10}$$

- En [117] se dió la siguiente caracterización:

Teorema XLVI *$\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es una función de escala del AMR $\{\mathcal{D}^j_A\mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si se cumplen:*

- *Se tiene*

$$[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) > 0 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{3.11}$$

- $\exists\, m$ *medible y* $\mathbb{Z}^d$*-periódica tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\, \widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{3.12}$$

- *Para todo cubo* Q *en* $\mathbb{R}^d$ *se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}Q|} \int_{A^{*-j}Q} \frac{|\widehat{\phi}(\xi)|^2}{[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi)}\, d\xi = 1\,. \tag{3.13}$$

En [78] se demuestra en el caso diádico en la recta para funciones de escala ortogonales que la completitud es equivalente a la condición

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\,\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi = 1\,. \tag{3.14}$$

En [116] se dieron condiciones de otro tipo. Se dice que un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es diádicamente absorbente si para $c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d$ $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ (que puede depender de ξ) tal que $2^{-j}\xi \in E$ si $j \geq j_0$.

Teorema XLVII *Sea* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que* $Tr(\phi)$ *es una base ortonormal de* $V = \mathcal{S}(\phi)$ $A_{(2)}$*-refinable. Entonces* $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}^j_{A_{(2)}} V} = L^2(\mathbb{R})$ *es equivalente a las siguientes condiciones:*

- $\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|$ *existe y es positivo para* $c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}$,

- *el conjunto* $\{\xi \in \mathbb{R} \,:\, |\widehat{\phi}(\xi)| > 0\}$ *es diádicamente absorbente,*

- $\lim_{j\to\infty} 2^j \phi * \widetilde{\phi}(2^j x)$ *existe en el sentido distribucional y es un múltiplo no nulo de la distribución de Dirac en el origen* ($\widetilde{\phi}(x) := \overline{\phi(-x)}$*; el símbolo* $*$ *denota aquí el producto de convolución).*

• Los siguientes resultados caracterizan la completitud en términos de las sucesiones $\{\widehat{\phi}(A^{*-j}\xi)\}_{j\in\mathbb{N}}$. En [78] se dió la siguiente caracterización.

Teorema XLVIII $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ *es una función de escala ortogonal en* $L^2(\mathbb{R})$ *si y sólo si:*

- $[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 1$ *para* $c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}$,

- $\exists\, m \in L^2(\mathbb{T})$ *tal que* $\widehat{\phi}(2\xi) = m(\xi)\, \widehat{\phi}(\xi)$ *para* $c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}$,

- *se cumple*

$$\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{3.15}$$

En [78] también se caracterizan las funciones de escala ortogonales en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{R})$, sustituyendo la ecuación (3.15) por

$$\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| = \chi_{[0,\infty)}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{3.16}$$

En [98] se generalizó el resultado para tight frame funciones de escala.

Teorema XLIX *La función $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ es una tight frame función de escala del FAMR $\{\mathcal{D}^j_{A_{(2)}}\mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si:*

- $[\widehat{\phi},\widehat{\phi}](\xi) = 0$ *o* 1 *para c.t.p.* $\xi \in \mathbb{T}$,

- $\exists\, m \in L^2(\mathbb{T})$ *tal que* $\widehat{\phi}(2\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi)$ *para c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}$,

- *Se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{3.17}$$

En [42] se generalizó el resultado para dilataciones generales.

Teorema L *$\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es una función de escala ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si:*

- $[\widehat{\phi},\widehat{\phi}](\xi) = 1$ *para c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$,

- $\exists\, m \in L^2(\mathbb{T}^d)$ *tal que* $\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\,\widehat{\phi}(\xi)$ *para c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$,

- *Se tiene*

$$\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(A^{*-j}\xi)| = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{3.18}$$

• En [98] también se caracterizó el espectro del espacio núcleo de un FAMR de $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema LI *Un conjunto medible $E \subseteq [0,1)$ es el espectro del espacio núcleo de un FAMR de $L^2(\mathbb{R})$ ($E = \sigma(V)$) si y sólo si $\exists\, F \subset \mathbb{R}$ tal que:*

- $\pi(F) = E$, [1]

- $\frac{1}{2}F = (\frac{1}{2}F + \mathbb{Z}) \cap F$,

- $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} 2^j F = \mathbb{R}$.

[1] Ver la Definición 35 en el Apéndice A.

En este caso se cumplen

- $F \subseteq E + \mathbb{Z}$,

- $\frac{1}{2} F \subseteq F$,

- $\lim_{j\to\infty} \chi_E(2^{-j}x) = 1$ *para c.t.p.* $x \in \mathbb{R}$,

- $\exists\, \phi \in L^2(\mathbb{R})$ *tight frame función de escala del AMR tal que* $F = Supp(\widehat{\phi})$.

• Los siguientes resultados caracterizan la completitud en términos de continuidad aproximativa. En [40] se obtuvo la siguiente caracterización:

Teorema LII *Sea* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- ϕ *es una función de escala ortogonal del AMR* $\{\mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R}^d)$,

- *se cumplen*

  (α) $\widehat{\phi}$ *es* A^**-localmente distinta de cero en el origen,*

  (β) *se tiene*

$$[\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}^d\,, \tag{3.19}$$

  (γ) $\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ *tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\, \widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}^d\,, \tag{3.20}$$

- *se cumplen* (β), (γ) *y*

  (δ) *el origen es un punto de* A^**-continuidad aproximativa de* $|\widehat{\phi}|^2$, *si ponemos* $|\widehat{\phi}(0)|^2 = 1$.

En [41] se generaliza el resultado anterior para frames:

Teorema LIII *Sea* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- ϕ *es una frame función de escala del FAMR* $\{\mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *de* $L^2(\mathbb{R}^d)$,

- *se cumplen*

  (α) $\widehat{\phi}$ *es* A^**-localmente distinta de cero en el origen,*

(β) *$\exists\, a, b$ tales que $0 < a \leq b < \infty$ y*

$$a \leq [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) \leq b \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}^d \setminus N_\phi\,, \tag{3.21}$$

donde $N_\phi := \{\xi \in \mathbb{T}^d \,:\, [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 0\}$,

(γ) *$\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\, \widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}^d\,, \tag{3.22}$$

- *se cumplen (β), (γ) y*

  (δ) *el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $|\widehat{\phi}|^2\, ([\widehat{\phi}, \widehat{\phi}])^{-1}$, si $|\widehat{\phi}(0)|^2\, ([\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](0))^{-1} = 1$.*

Además, ϕ es función de escala si y sólo si $|N_\phi| = 0$.

En [94] se generalizan estos resultados a espacios A-reducidos.

Teorema LIV *Sea $\phi \in H^2_G$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *ϕ es una frame función de escala del FAMR $\{\mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de H^2_G,*

- *se cumplen*

  (α) *$\widehat{\phi}$ es (G, A^*)-localmente distinta de cero en el origen,*

  (β) *$\exists\, a, b$ tales que $0 < a \leq b < \infty$ y*

$$a \leq [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) \leq b \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}^d \setminus N_\phi\,, \tag{3.23}$$

  donde $N_\phi := \{\xi \in \mathbb{T}^d \,:\, [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\xi) = 0\}$,

  (γ) *$\exists\, m \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ tal que*

$$\widehat{\phi}(A^*\xi) = m(\xi)\, \widehat{\phi}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,, \tag{3.24}$$

- *se cumplen (β), (γ) y*

  (δ) *el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de la función $|\widehat{\phi}|^2\, ([\widehat{\phi}, \widehat{\phi}])^{-1}$, si ponemos $|\widehat{\phi}(0)|^2\, ([\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](0))^{-1} = 1$.*

Además, ϕ es función de escala si y sólo si $|N_\phi| = 0$.

• En [58] se puede encontrar una caracterización en términos probabilísticos.

• En el caso de AMRs con multiplicidad, en [31] se enunció el siguiente resultado.

Teorema LV *Sean* $M \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G} := \{\phi^\alpha\}_{\alpha=1}^M \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $V := \mathcal{S}(\mathcal{G})$. *Entonces* $\{\mathcal{D}_A^j V\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un AMR de multiplicidad* M *de* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *con funciones de escala ortogonales* $\mathcal{G}$ *si y sólo si*

$$[\widehat{\phi^\alpha}, \widehat{\phi^\beta}](\xi) = \delta_{\alpha,\beta} \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha, \beta = 1, \ldots, M\,, \tag{3.25}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{\alpha=1}^M |\widehat{\phi^\alpha}(A^{*-j}\xi)|^2 = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d \tag{3.26}$$

y $\exists\, \{m_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^M \subseteq L^2(\mathbb{T}^d)$ *tales que*

$$\widehat{\phi^\alpha}(A^*\xi) = \sum_{\beta=1}^M m_{\alpha,\beta}(\xi)\, \widehat{\phi^\beta}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, \alpha = 1, \ldots, M\,. \tag{3.27}$$

La primera condicion caracteriza la ortonormalidad de $Tr(\Phi)$, la segunda la completitud y la tercera la A-refinabilidad. La propiedad de intersección se sigue del resto.

En [90] se demuestra lo siguiente:

Teorema LVI *Con la misma notación que en el Teorema LV con dilataciones diádicas en la recta, la propiedad de intersección se tiene. Si además* V *es* $A_{(2)}$*-refinable entonces la propiedad de completitud equivale a*

$$\left| \bigcap_{\alpha=1}^M \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} 2^j(\mathbb{R}^d \setminus Supp(\widehat{\phi^\alpha})) \right| = 0\,. \tag{3.28}$$

En [130] se generalizó el Teorema LII a AMRs con multiplicidad:

Teorema LVII *Sean* $M \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G} := \{\phi^\alpha\}_{\alpha=1}^M \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ *generadores ortogonales de* $V := \mathcal{S}(\mathcal{G})$ A*-refinable, en el sentido de que* $Tr(\mathcal{G})$ *es una base ortonormal de* V. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = L^2(\mathbb{R}^d)$,

- $\forall\, \varepsilon > 0,\ r > 0\ \exists\, j \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|\{\xi \in A^{*-j}B_r\,:\, \forall\, \alpha = 1, \ldots, M\ \widehat{\phi^\alpha}(\xi) = 0\}| < \varepsilon\, |A^{*-j}B_r|\,,$$

- *existe $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida positiva tal que $\forall\, r > 0$*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap A^{*-j}B_r|}{|A^{*-j}B_r|} = 1 \quad y \quad \lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi\in E}} \sum_{\alpha=1}^{M} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi)|^2 = 1\,.$$

Obsérvese que estas condiciones son efectivamente condiciones en términos de la A^*-continuidad aproximativa (y de la noción de A^*-localmente distinta de cero) de la función espectral de V.

3.2. Propiedad de refinabilidad

En primer lugar hacemos un comentario trivial pero importante. Como $\mathcal{D}_A$ es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^d)$, el hecho de que un espacio invariante por traslaciones V sea A-refinable (ver Definición 10) es equivalente a $\mathcal{D}_A^j V \subseteq \mathcal{D}_A^{j+1} V \ \forall\, j \in \mathbb{Z}$, es decir, que la sucesión $\{\mathcal{D}_A^j V\}_{j\in\mathbb{Z}}$ sea encajada.

Es intuitivamente claro que la A-refinabilidad no puede ser caracterizada en términos de la función espectral. El motivo radica en que la función espectral depende sólo del módulo de la transformada de Fourier de un sistema de generadores de un tight frame, mientras que la A-refinabilidad es sensible a cambios en estos generadores que no impliquen cambio en este módulo, como puede ser la multiplicación por una función unimodular (de módulo uno).

El siguiente ejemplo, aunque bastante sencillo muestra de manera representativa este fenómeno.

Ejemplo 3 *Considérese la función de escala de Haar $\phi_H := \chi_{(-1,0)}$, que goza de las siguientes propiedades (ver [79]):*

- *ϕ_H es una función de escala ortogonal del AMR de Haar, luego sus trasladados forman una base ortonormal. Esto equivale a*

$$[\widehat{\phi_H}, \widehat{\phi_H}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi_H}(\xi + k)|^2 = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{3.29}$$

donde $\widehat{\phi_H}(\xi) = e^{\pi i \xi}\, \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$,

- *Obviamente ϕ_H es $A_{(2)}$-refinable (es decir, $\mathcal{S}(\phi_H)$ es $A_{(2)}$-refinable), ya que es una función de escala . Esto implica que satisface una ecuación de escala*

$$\widehat{\phi_H}(2\xi) = m_H(\xi)\,\widehat{\phi_H}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}\,, \tag{3.30}$$

donde $m_H(\xi) = \frac{1}{2}\,(1 + e^{2\pi i \xi})$ es el filtro de paso bajo correspondiente,

- *Tanto $\widehat{\phi_H}$ como m_H se anulan en un conjunto de medida cero.*

Si definimos una función φ dada por $\widehat{\varphi} := (\chi_{(-1,1)} - \chi_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)})\,|\widehat{\phi_H}|$, es inmediato comprobar que se tiene $|\widehat{\varphi}| = |\widehat{\phi_H}|$, de donde se deducen las siguientes propiedades:

- *$\widehat{\varphi}$ se anula en un conjunto de medida cero,*

- *Se tiene $[\widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}] = [\widehat{\phi_H}, \widehat{\phi_H}] = 1$ para c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}$, luego $Tr(\varphi)$ forma un sistema ortonormal,*

- *La función*

$$\frac{\widehat{\varphi}(2\xi)}{\widehat{\varphi}(\xi)} = \begin{cases} -|m_H(\xi)| & \xi \in (-1,1) \setminus (-1/2, 1/2) \\ |m_H(\xi)| & o.c. \end{cases} \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

es claramente no periódica, luego φ no es $A_{(2)}$-refinable,

- *Se tiene $\sigma_{\mathcal{S}(\varphi)}(\xi) = |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = |\widehat{\phi_H}(\xi)|^2 = \sigma_{\mathcal{S}(\phi_H)}(\xi)$ para c.t.p. $\xi \in \mathbb{R}$.*

Por lo tanto, tenemos dos espacios invariantes por traslaciones $\mathcal{S}(\phi_H)$ y $\mathcal{S}(\varphi)$ con la misma función espectral, el primero de los cuales es $A_{(2)}$-refinable y el segundo no.

La propiedad de A-refinabilidad de un espacio invariante por traslaciones puede expresarse en términos de un generador de un tight frame simplemente imponiendo condiciones en términos de “sistemas de ecuaciones de escala” (ver funciones de escala generalizadas en [33], [4], [7], [10], [28]). Por supuesto en el caso general es necesario un conjunto infinito de estas ecuaciones.

Proposición LVIII *Sean V un espacio invariante por traslaciones y $\mathcal{G} := \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ un generador de un tight frame de V tal que $V = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{S}(\phi^\alpha)$. Entonces V es A-refinable si y sólo si $\exists\ \{m^{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in I} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tales que $\forall\, \alpha \in I$*

$$\mathcal{D}_{A^*}^{-1}\widehat{\phi^\alpha} = \sum_{\beta\in I} m^{\alpha,\beta}\,\widehat{\phi^\beta} \tag{3.31}$$

y

$$\sum_{\beta\in I} \left\| m^{\alpha,\beta} \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} < \infty\,. \tag{3.32}$$

Demostración: Supongamos que V es A-refinable. Entonces para cada $\alpha \in I$ $\mathcal{D}_A^{-1}\phi^\alpha \in V$, luego

$$\mathcal{D}_A^{-1}\phi^\alpha = \sum_{\beta\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k^{\alpha,\beta}\,\phi^\beta_{(k)}$$

y
$$\| \phi^\alpha \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \| \mathcal{D}_A^{-1} \phi^\alpha \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\beta \in I} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k^{\alpha,\beta}|^2 ,$$

donde $\{c_k^{\alpha,\beta} :=< \mathcal{D}_A^{-1}\phi^\alpha, \phi^\beta_{(k)} >\}_{\beta \in I, k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell^2$. Aplicando la transformada de Fourier a estas identidades se obtiene

$$\widehat{\mathcal{D}_A^{-1}\phi^\alpha} = \mathcal{D}_{A^*}^{-1}\widehat{\phi^\alpha} = \sum_{\beta \in I} m^{\alpha,\beta}\, \widehat{\phi^\beta}$$

donde $m^{\alpha,\beta}(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k^{\alpha,\beta}\, e^{-2\pi i k \cdot \xi} \in L^2(\mathbb{T}^d)$ y

$$\| \phi^\alpha \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\beta \in I} \| m^{\alpha,\beta} \|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} .$$

Recíprocamente, debido a la ortogonalidad se tiene que para cada $\alpha \in I$ ϕ^α es un generador de un tight frame de $\mathcal{S}(\phi^\alpha)$, luego $[\widehat{\phi^\alpha}, \widehat{\phi^\alpha}] = \chi_{\sigma(\mathcal{S}(\phi^\alpha))}$. A partir de (3.32) se tiene la convergencia en $L^2(\mathbb{R}^d)$ de (3.31), ya que periodizando se tiene $\forall\, \alpha \in I$

$$\left\| \sum_{\beta \in I} m^{\alpha,\beta}\, \widehat{\phi^\beta} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\beta \in I} \left\| m^{\alpha,\beta}\, \widehat{\phi^\beta} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sum_{\beta \in I} \left\| m^{\alpha,\beta}\, [\widehat{\phi^\beta}, \widehat{\phi^\beta}]^{\frac{1}{2}} \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \sum_{\beta \in I} \| m^{\alpha,\beta} \|^2_{L^2(\sigma(\mathcal{S}(\phi^\alpha)))} \leq \sum_{\beta \in I} \| m^{\alpha,\beta} \|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} < \infty .$$

Aplicando la antitransformada de Fourier a (3.31) se obtiene

$$\mathcal{D}_A^{-1}\phi^\alpha = \sum_{\beta \in I} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{m^{\alpha,\beta}}(-k)\, \phi^\beta_{(k)} ,$$

donde
$$\sum_{\beta \in I} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{m^{\alpha,\beta}}(-k)|^2 = \sum_{\beta \in I} \| m^{\alpha,\beta} \|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} < \infty .$$

Por tanto $\mathcal{D}_A^{-1}\phi^\alpha \in V\ \forall\, \alpha \in I$ y V es refinable.
■

El dilatado por $\mathcal{D}_A$ de un espacio invariante por traslaciones V también es invariante por traslaciones, ya que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$ (ver discusión al final de la sección 1.3). En [129] o [26] se puede encontrar el siguiente resultado, que nos da un conjunto de generadores de un tight frame a partir de un conjunto de generadores del espacio original, y relaciona la función espectral de $\mathcal{D}_A V$ con la de V.

Proposición LIX *Sea* $\mathcal{G} := \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ *generador de un tight frame de* V *espacio invariante por traslaciones. Entonces* $\mathcal{D}_A V$ *también es invariante por traslaciones,* $\mathcal{G}' := \{\mathcal{D}_A\phi^\alpha_{(\gamma)} \,:\, \gamma\in\Delta_A, \alpha\in I\}$ *es generador de un tight frame de* $\mathcal{D}_A V$ *y*

$$\sigma_{\mathcal{D}_A V}(\xi) = \sigma_V(A^{*-1}\xi) \quad c.t.p.\, \xi\in\mathbb{R}^d\,. \tag{3.33}$$

Nótese que $Tr(\mathcal{G}') = \{\phi^\alpha_{(1,k)} \,:\, k\in\mathbb{Z}^d, \alpha\in I\}$ *(ver (1.16)).*

Demostración: Simplemente $\forall\, f\in\mathcal{D}_A V$

$$\|\, f\,\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\|\, \mathcal{D}_A^{-1} f\,\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |<\mathcal{D}_A^{-1} f, \phi^\alpha_{(k)}>|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\gamma\in\Delta_A}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |<f, \mathcal{D}_A\phi^\alpha_{(\gamma+Am)}>|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\gamma\in\Delta_A}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |<f, (\mathcal{D}_A\phi^\alpha_{(\gamma)})_{(m)}>|^2\,.$$

Entonces para $c.t.p.\, \xi\in\mathbb{R}^d$

$$\sigma_{\mathcal{D}_A V}(\xi) = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\gamma\in\Delta_A} |\widehat{\mathcal{D}_A\phi^\alpha_{(\gamma)}}(\xi)|^2 = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\gamma\in\Delta_A} d_A^{-1}|\widehat{\phi^\alpha}(A^{*-1}\xi)|^2 = \sigma_V(A^{*-1}\xi)\,.$$

■

Observación 2 *Se comprueba que* $\{\phi^\alpha_{(j,k)} \,:\, k\in\mathbb{Z}^d, \alpha\in I\}$ *es un tight frame de* $\mathcal{D}_A^j V$ $\forall\, j\in\mathbb{Z}$ *con el mismo argumento.*

Terminamos con otro comentario importante. Como consecuencia de (3.33) y la Proposición XIII (iii), si V es un espacio invariante por traslaciones A-refinable se tiene

$$\sigma_V(\xi) \leq \sigma_V(A^{*-1}\xi) \quad c.t.p.\, \xi\in\mathbb{R}^d\,. \tag{3.34}$$

Esto implica que la sucesión $\{\sigma_V(A^{*-j}\xi)\}_{j=1}^\infty$ es no decreciente, y como la función espectral es no negativa se tiene que el

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) \tag{3.35}$$

existe para $c.t.p.\, \xi\in\mathbb{R}^d$.

3.3. Propiedad de intersección

La propiedad de intersección

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V = \{0\} \tag{3.36}$$

de un espacio invariante por traslaciones V está relacionada con el comportamiento de sus dilataciones cuando $j \to -\infty$, y concretamente con el comportamiento del límite

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^d))\,, \tag{3.37}$$

donde

$$P_j \,:\, L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{D}_A^j V \tag{3.38}$$

denota la proyección ortogonal sobre $\mathcal{D}_A^j V$ para cada $j \in \mathbb{Z}$ ($P_j := P_{\mathcal{D}_A^j V}$).

Los dos siguientes resultados son hechos sencillos que establecemos por completitud.

Proposición 33 *Si se tiene* $\lim_{j\to-\infty} P_j f = 0$ *para toda* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *entonces se cumple (3.36).*

Demostración: Sea $f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$. Como $\forall\, j \in \mathbb{Z}\ f \in \mathcal{D}_A^j V$, entonces $P_j f = f$. Por tanto $0 = \lim_{j\to-\infty} P_j f = \lim_{j\to-\infty} f = f$. ■

Proposición 34 *Si V es A-refinable y denotamos $V_{-\infty} := \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$, entonces*

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = P_{V_{-\infty}} f \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{3.39}$$

En particular (3.36) (o $V_{-\infty} = \{0\}$) es equivalente a $\lim_{j\to-\infty} P_j f = 0$ *para toda* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración: Como V es A-refinable, podemos denotar para cada $j \in \mathbb{Z}$ $W_j := \mathcal{D}_A^{j+1} V \ominus \mathcal{D}_A^j V$ y $Z_j := \mathcal{D}_A^j V \ominus (\bigoplus_{k<j} W_k)$. Nótese que $W_j = \mathcal{D}_A^j W_0 \forall j \in \mathbb{Z}$. Entonces, dados dos enteros j, l tales que $l < j$ se tiene

$$\mathcal{D}_A^j V = \mathcal{D}_A^{j-1} V \oplus W_{j-1} = \mathcal{D}_A^{j-2} V \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} = \cdots = \mathcal{D}_A^l V \oplus \left(\bigoplus_{k=l}^{j-1} W_k \right)$$

y

$$\mathcal{D}_A^j V = \left(\bigoplus_{k<j} W_k \right) \oplus Z_j = \left(\bigoplus_{k<l} W_k \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=l}^{j-1} W_k \right) \oplus Z_j\,,$$

de donde se deduce $\mathcal{D}_A^l V = (\bigoplus_{k<l} W_k) \oplus Z_j$ y por tanto $Z_j = Z_l$. Entonces podemos denotar $Z := Z_j$ $(j \in \mathbb{Z})$. Claramente $Z \subseteq V_{-\infty}$. Obviamente se tiene $V_{-\infty} \ominus Z \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{k<j} W_k = \{0\}$, luego $Z = V_{-\infty}$. En resumen, tenemos

$$\mathcal{D}_A^j V = V_{-\infty} \oplus \left(\bigoplus_{k<j} \mathcal{D}_A^k W_0 \right) \quad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.40}$$

Finalmente, $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = \lim_{j\to-\infty} \left(\sum_{k<j} P_{W_k} f + P_{V_{-\infty}} f \right) = \lim_{j\to-\infty} \sum_{k<j} P_{W_k} f + P_{V_{-\infty}} f = P_{V_{-\infty}} f\,.$$

La última afirmación es inmediata a partir de lo anterior. ■

En la literatura pueden encontrarse bastantes resultados relacionados con la condición (3.36) o con el espacio $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$ en general para espacios V principales ([50], [36], [117], [52], [142], [79], [40], [131], [42]). En [90], [20] encontramos resultados para los espacios finitamente generados. En [129] puede encontrarse lo siguiente (ver también [143]):

Teorema LX *Si V es un espacio invariante por traslaciones tal que $\sigma_V \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces se cumple (3.36).*

Demostración: Evidentemente $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$ es un espacio vectorial cerrado. Supongamos que $\exists\, f \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$ tal que $\| f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Si $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un generador de un tight frame de V tal que $V = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{S}(\phi^\alpha)$ (ver [17]), como $\forall\, j \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{D}_A^j f \in V$, existe una sucesión $\{m^{\alpha,j}\}_{\alpha\in I} \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ tal que

$$(\mathcal{D}_A^j f)\widehat{\ } = \mathcal{D}_{A^*}^{-j} \widehat{f} = \sum_{\alpha\in I} m^{\alpha,j}\, \widehat{\phi^\alpha}$$

en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con $\sum_{\alpha\in I} \| m^{\alpha,j} \|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Podemos suponer que $m^{\alpha,j}$ se anula en $\mathbb{T}^d \setminus \sigma(\mathcal{S}(\phi^\alpha))$. Sea W un A-conjunto ondícula (ver [46] o [29]): es decir, $W \subset \mathbb{R}^d$ medible tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \chi_W(\xi + k) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_W(A^{*j}\xi) = 1 \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d\,. \tag{3.41}$$

Este conjunto puede escogerse de manera que su complementario $\mathbb{R}^d \setminus W$ contenga un entorno del origen. Como A^* es lineal expansiva, esto implica que $\forall\, r > 0\ \exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_r \subseteq \mathbb{R}^d \setminus A^{*j}W$ para $j \geq j_0$. Por el Lema LXXXIV $\forall\, j, l \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\sum_{\alpha \in I} \int_W |m^{\alpha,j}(A^{*l}\xi)|^2\, d\xi = \sum_{\alpha \in I} \int_{\mathbb{T}^d} |m^{\alpha,j}(t)|^2\, dt = 1\,.$$

Entonces $\forall\, l \in \mathbb{Z}$

$$\int_{A^{*l}(W)} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi = d_A^l \int_W |\widehat{f}(A^{*l}\xi)|\, d\xi \leq$$

$$\leq d_A^{\frac{j}{2}+l} \int_W \sum_{\alpha \in I} |m^{\alpha,j}(A^{*j+l}\xi)\, \widehat{\phi^\alpha}(A^{*j+l}\xi)|\, d\xi \leq$$

$$\leq d_A^{\frac{j}{2}+l} \int_W \left(\sum_{\alpha \in I} |m^{\alpha,j}(A^{*j+l}\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha \in I} |\widehat{\phi^\alpha}(A^{*j+l}\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\xi \leq$$

$$\leq d_A^{\frac{j}{2}+l} \left(\int_W \sum_{\alpha \in I} |m^{\alpha,j}(A^{*j+l}\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_W \sum_{\alpha \in I} |\widehat{\phi^\alpha}(A^{*j+l}\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= d_A^{\frac{j}{2}+l} \left(\int_W \sigma_V(A^{*j+l}\xi)\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = d_A^{\frac{l}{2}} \left(\int_{A^{*j+l}(W)} \sigma_V(\xi)\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0\,.$$

Como l es arbitrario se llega a $f = 0$, que es una contradicción. ■

En [22] se demuestra lo siguiente (e incluso algo más general que lo enunciado aquí):

Teorema LXI *Supongamos que se tiene $|\{t \in \mathbb{T}^d : \dim_V(t) < \infty\}| > 0$ para cierto V espacio invariante por traslaciones. Entonces se cumple (3.36).*

Por otro lado, existen un par de espacios invariantes por traslaciones con la misma función espectral tales que $\dim_V(t) = \infty$ c.t.p. $t \in \mathbb{T}^d$, uno cumpliendo (3.36) y el otro no.

Usando (1.7) se observa fácilmente que el Teorema LXI es estrictamente más fuerte que el Teorema LX, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sigma_V(\xi)\, d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0,1)^d} \sigma_V(\xi + k) = \int_{\mathbb{T}^d} \dim_V(t)\, dt\,. \tag{3.42}$$

Finalmente, es claro que por lo que respecta a la función espectral, el Teorema LXI es óptimo. En [5] puede encontrarse una generalización de este resultado en un marco teórico más ámplio. Referimos a [21] para la relación entre la propiedad de intersección y las multiondículas asociadas a AMRGs.

3.4. Propiedad de completitud

Dado un espacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$, denotemos como antes para cada $j \in \mathbb{Z}$ $P_j := P_{\mathcal{D}_A^j V}$ la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sobre $\mathcal{D}_A^j V$. El siguiente lema es bien conocido. Lo demostramos para facilitar la lectura al lector.

Lema LXII *Sea V un espacio invariante por traslaciones A-refinable. Entonces* $\forall\, f \in \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V}$

$$P_j f \xrightarrow[j\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} f\,. \tag{3.43}$$

Demostración: Si $f \in \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V}$, entonces $\exists\, \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} f$. Para todo $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| f_{n_0} - f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. Entonces, como $\exists\, j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $f_{n_0} \in \mathcal{D}_A^{j_0} V$, usando la A-refinabilidad $\forall j \geq j_0$ se tiene $\mathcal{D}_A^{j_0} V \subseteq \mathcal{D}_A^j V$, luego $\| P_j f - f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \| P_{j_0} f - f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \| f_{n_0} - f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. ■

En [26] se usa el comportamiento de la función espectral en el origen para analizar el orden de aproximación de un espacio invariante por traslaciones, a la manera en que se hizo con la función de escala en [54], [53] y [55]. Este comportamiento también puede ser usado para describir explícitamente condiciones necesarias y suficientes para la propiedad de completitud, a saber

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2\,, \tag{3.44}$$

siguiendo los resultados conocidos para funciones de escala de la sección 3.1. Véase el Teorema IV en la Introducción.

• La siguiente caracterización de la completitud en términos de soportes es consecuencia directa de los Lemas LXII y XXV. Es un resultado similar al Teorema XLIII de [52] o la generalización de [90] (ver (3.28)).

Teorema 35 *Sea V un espacio invariante por traslaciones A-refinable. Entonces $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$, donde*

$$G := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\sigma_V)) = \bigcup_{\phi\in\mathcal{G}} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi})) \tag{3.45}$$

y $\mathcal{G}$ genera V ($V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$). G es obviamente un A^*-conjunto.

Demostración: Por el Lema XXV $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H^2_G$ para cierto A^*-conjunto G. Si $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq V$ es un generador de un tight frame de V, claramente se ha de tener

$$\bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi^\alpha})) \subseteq G\,.$$

Si definimos

$$E := G \setminus \bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi^\alpha}))$$

y f dada por $\widehat{f} := \chi_E$, tenemos $f \in H^2_G$. Por el Lema LXII $P_j f \xrightarrow[j\to+\infty]{} f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Como obviamente $Supp(\widehat{P_j f}) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi^\alpha}))$, resulta que $\widehat{P_j f}$ y $\widehat{f}$ tienen soportes disjuntos. Entonces $\forall\, j \in \mathbb{Z}$ $\| P_j f - f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \| P_j f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$, luego $f = 0$ y por tanto $|E| = 0$. Por último, (1.6) nos dice que $G = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\bigcup_{\phi\in\mathcal{G}} A^{*j}(Supp(\widehat{\phi}))$ para cualquier conjunto generador $\mathcal{G}$ tal que $V = \mathcal{S}(\mathcal{G})$ (genere un tight frame o no). ■

• A partir del Teorema 35 se obtiene la siguiente caracterización de la completitud en términos de medias ponderadas de la función espectral en ciertos conjuntos que se aproximan al origen en cierto sentido, al modo del Teorema XLVI.

Teorema 36 *Sea $V \neq \{0\}$ un espacio invariante por traslaciones A-refinable y $G \subseteq \mathbb{R}^d$ A^*-conjunto de medida positiva tal que $Supp(\sigma_V) \subseteq G$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H^2_G\,,$

(b) $\forall\, E \subseteq G$ *acotado y de medida positiva*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} \sigma_V(\xi)\, d\xi = 1\,. \tag{3.46}$$

Demostración: Supongamos (a) y sea E como en (b). Definamos $f \in H^2_G$ tal que $\widehat{f} := \chi_E$. Se tiene por el Lema LXII $P_j f \xrightarrow[j\to+\infty]{L^2(\mathbb{R}^d)} f$ y por tanto

$$\| P_j f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = |E|\,.$$

Sea $\mathcal{G} = \{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ generador de un tight frame de V. Como A^* es lineal expansiva y E es acotado, $\exists\, l \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, j \geq l$ $A^{*-j}(E) \subseteq Q_1$, y entonces

$\forall\, \alpha \in I$ $\widehat{f}(A^{*j}\cdot)\,\widehat{\phi^\alpha} = \chi_{A^{*-j}E}\,\widehat{\phi^\alpha} \in L^2(Q_1) \sim L^2(\mathbb{T}^d)$. Como vimos en la Observación 2 $\{\phi^\alpha_{(j,k)} : \alpha \in I, k \in \mathbb{Z}^d\}$ es un tight frame de $\mathcal{D}^j_A V$, y entonces

$$\| P_j f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |< f, \phi^\alpha_{(j,k)} >|^2 = \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |< \widehat{f}, \widehat{\phi^\alpha_{(j,k)}} >|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| d_A^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i k\cdot A^{*-j}\xi}\, \overline{\widehat{\phi^\alpha}(A^{*-j}\xi)}\, d\xi \right|^2 =$$

$$= \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| d_A^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(A^{*j}\eta)\, e^{2\pi i k\cdot \eta}\, \overline{\widehat{\phi^\alpha}(\eta)}\, d\eta \right|^2 =$$

$$= d_A^j \sum_{\alpha\in I}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{A^{*-j}E} \overline{\widehat{\phi^\alpha}(\eta)}\, e^{2\pi i k\cdot\eta}\, d\eta \right|^2 =$$

$$= d_A^j \sum_{\alpha\in I} \int_{A^{*-j}E} |\widehat{\phi^\alpha}(\eta)|^2\, d\eta = d_A^j \int_{A^{*-j}E} \sigma_V(\eta)\, d\eta\,,$$

luego

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} \sigma_V(\xi)\, d\xi = \lim_{j\to\infty} \frac{d_A^j}{|E|} \int_{A^{*-j}E} \sigma_V(\xi)\, d\xi = 1\,.$$

Probemos el recíproco. Por el Teorema 35 se tiene (3.45) para cierto A^*-conjunto G'. Como $Supp(\sigma_V) \subseteq G$, se tiene $G' \subseteq G$. Para ver la inclusión opuesta procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $|G \setminus G'| > 0$. Obviamente $G \setminus G'$ también es un A^*-conjunto, así que por el Corolario 9 $\forall\, r > 0$ $|(G \setminus G') \cap B_r| > 0$. Por el Lema XXIV se tiene $\sigma_V \leq \chi_{G'}$, ya que $V \subseteq H^2_{G'}$. Entonces por (b)

$$1 = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}((G\setminus G')\cap B_r)|} \int_{A^{*-j}((G\setminus G')\cap B_r)} \sigma_V(\xi)\, d\xi \leq$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \frac{|G' \cap G \setminus G' \cap A^{*-j}B_r|}{|G\setminus G' \cap A^{*-j}B_r|} = 0\,,$$

que es una contradicción. Por tanto se tiene $G = G'$ y (a). ■

Observación 3 *Nótese que la condición $Supp(\sigma_V) \subseteq G$ es muy natural, ya que si $|Supp(\sigma_V) \setminus G| > 0$ el resultado es claramente falso, y que para demostrar la suficiencia sólo utilizamos (b) para $\{E_r = G \cap B_r\}_{r>0}$. Evidentemente las bolas pueden ser sustituidas por otras clases de conjuntos y basta con verificar (b) para clases menores de conjuntos que permitan que este argumento siga funcionando.*

• Como vimos al final de la sección 3.2, si V es un espacio invariante por traslaciones A-refinable la sucesión $\{\sigma_V(A^{*-j}\xi)\}_{j=1}^{\infty}$ es no decreciente y convergente para *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$ (ver (3.34) y (3.35)). Este hecho y el Teorema 35 permiten caracterizar la completitud en términos de la familia de sucesiones $\{\{\sigma_V(A^{*-j}\xi)\}_{j=1}^{\infty} : \xi \in \mathbb{R}^d\}$ al modo del Teorema XLVII. En analogía al caso diádico, decimos que $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible es A-absorbente en G si para *c.t.p.* $\xi \in G$ $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ (que puede depender de ξ) tal que $A^j\xi \in E$ si $j \geq j_0$.

Teorema 37 *Sea $V \neq \{0\}$ un espacio invariante por traslaciones A-refinable y $G \subseteq \mathbb{R}^d$ A^*-conjunto de medida positiva tal que $Supp(\sigma_V) \subseteq G$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$,

(b) *el conjunto $Supp(\sigma_V)$ es A^{*-1}-absorbente en G,*

(c) $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$ *para c.t.p.* $\xi \in G$.

Demostración: Si suponemos (a), por el Teorema 35 se tiene (3.45). Entonces para *c.t.p.* $\xi \in G$ $\exists\, \eta \in Supp(\sigma_V)$ y $\exists\, j_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $\xi = A^{*j_0}\eta$. Entonces por (3.34) se tiene $\forall\, j \geq j_0$ $\sigma_V(A^{*-j}\xi) = \sigma_V(A^{*j_0-j}\eta) \geq \sigma_V(\eta)$. Esto implica $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) \geq \sigma_V(\eta) > 0$. Hemos comprobado (b) y (c).

Recíprocamente, por el Teorema 35 se tiene (3.45) para cierto A^*-conjunto G'. Como $Supp(\sigma_V) \subseteq G$, se tiene $G' \subseteq G$. Falta ver la inclusión opuesta.

A partir de (b), para *c.t.p.* $\xi \in G$ $\exists j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$ si $j \geq j_0$. Entonces $\xi = A^{*j_0}A^{*-j_0}\xi \in A^{*j_0}(Supp(\sigma_V)) \subseteq G'$. Esto demuestra $G \subseteq G'$.

Análogamente, a partir de (c) para *c.t.p.* $\xi \in G$ $\exists j \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma_V(A^{*-j}\xi) > 0$. Entonces $\xi = A^{*j}A^{*-j}\xi \in A^{*j}(Supp(\sigma_V)) \subseteq G'$. Esto demuestra $G \subseteq G'$, como antes. ■

• Ahora extendemos los resultados en [94] (ver Teorema LIV) sobre la caracterización de funciones de escala en términos de (G, A)-continuidad aproximativa.

Teorema 38 *Sea $V \neq \{0\}$ un espacio invariante por traslaciones A-refinable y $G \subseteq \mathbb{R}^d$ A^*-conjunto de medida positiva tal que $Supp(\sigma_V) \subseteq G$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2$,

(b) σ_V *es (G, A^*)-localmente distinta de cero en el origen.*

(c) σ_V *es (G, A^*)-continua aproximativa en el origen si ponemos* $\sigma_V(0) = 1$.

Demostración: (b)⇒(a) En primer lugar, por el Lema XXV $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H^2_{G'}$ para algún A^*-conjunto G'. Por nuestras hipótesis, $G' \subseteq G$. Entonces $\forall\, f \in H^2_{G'}$ y $\forall\, g \in (H^2_{G'})^{\perp} = H^2_{\mathbb{R}^d\setminus G'}$, $\widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) = 0$ para $c.t.p.\,\xi \in \mathbb{R}^d$.

Para cada $j \geq 0$ por la Proposición LIX $\mathcal{D}_A^j V$ es un espacio invariante por traslaciones, y como $\mathcal{D}_A^j V \subseteq H^2_{G'}$ se tiene por el Lema XXIV $\sigma_{\mathcal{D}_A^j V} \leq \chi_{G'}$. Entonces por la Proposición LIX $\sigma_{\mathcal{D}_A^j V}(\xi)\,\widehat{g}(\xi) = \sigma_V(A^{*-j}\xi)\,\widehat{g}(\xi) = 0$ para $c.t.p.\,\xi \in \mathbb{R}^d$, o equivalentemente

$$\sigma_V(\xi)\,\widehat{g}(A^{*j}\xi) = 0 \quad c.t.p.\,\xi \in \mathbb{R}^d, \forall\, j \geq 0\,. \tag{3.47}$$

Sean $r, \varepsilon > 0$. Como σ_V es (G, A^*)-localmente distinta de cero en el origen, $\exists\, j \in \mathbb{N}$ que depende de r y ε tal que

$$\frac{|\{x \in A^{*-j}B_r \cap G \;:\; \sigma_V(x) = 0\}|}{|A^{*-j}B_r \cap G|} < \varepsilon\,.$$

Entonces,

$$\frac{|\{y \in B_r \cap G \;:\; \widehat{g}(y) \neq 0\}|}{|B_r \cap G|} = \frac{|\{x \in A^{*-j}(B_r \cap G) \;:\; \widehat{g}(A^{*j}x) \neq 0\}|}{|A^{*-j}(B_r \cap G)|} \leq$$

$$\leq \frac{|\{x \in A^{*-j}(B_r \cap G) \;:\; \sigma_V(x) = 0\}|}{|A^{*-j}(B_r \cap G)|} < \varepsilon\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\widehat{g}\,\chi_{B_r\cap G} \equiv 0$, y como $r > 0$ también es arbitrario $g \in (H^2_G)^{\perp} = H^2_{\mathbb{R}^d\setminus G}$. Esto implica $H^2_{\mathbb{R}^d\setminus G'} \subseteq H^2_{\mathbb{R}^d\setminus G}$, que equivale a $G \subseteq G'$. Esto demuestra (a).

(a)⇒(c) Vamos a demostrar que $\forall\, \varepsilon, r > 0$ se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\{x \in A^{*-j}(B_r \cap G) \;:\; 1 - \sigma_V(x) < \varepsilon\}|}{|A^{*-j}(B_r \cap G)|} = 1\,.$$

Supongamos que no es así. Entonces $\exists\, \varepsilon_0, 0 < \varepsilon_0 < 1$, $r_0 > 0$ y $\{j_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}, j_n \nearrow \infty$ tales que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$|E_n| \geq \varepsilon_0\, |A^{*-j_n}(B_{r_0} \cap G)|, \quad \text{donde} \quad E_n := \{x \in A^{*-j_n}(B_{r_0} \cap G) : 1 - \sigma_V(x) > \varepsilon_0\}\,.$$

Por la Proposición XIII (iv) $0 \leq \sigma_V(\xi) \leq 1$ $c.t.p.\,\xi \in \mathbb{R}^d$, y usando el Teorema 36

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j_n}(B_{r_0} \cap G)|} \int_{A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)} \sigma_V(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j_n}(B_{r_0} \cap G)|} \left(\int_{A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)\setminus E_n} \sigma_V(x)\,dx + \int_{E_n} \sigma_V(x)\,dx \right) <$$

$$< \lim_{n\to\infty} \frac{|A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)| - |E_n| + (1-\varepsilon_0)\,|E_n|}{|A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)| - \varepsilon_0\,|E_n|}{|A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)|} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\varepsilon_0^2)\,|A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)|}{|A^{*-j_n}(B_{r_0}\cap G)|} = 1-\varepsilon_0^2 < 1\,,$$

que es una contradicción. Por la Proposición 24 tenemos (c).

(c)$\Rightarrow$(b) Es consecuencia del Lema 28. ■

• A partir del Teorema 38 y los Lemas 25 y 26 refinamos el Teorema 37. Compárese este resultado con el Teorema IV.

Teorema 39 *Sea $V \neq \{0\}$ un espacio invariante por traslaciones A-refinable y $G \subseteq \mathbb{R}^d$ A^*-conjunto de medida positiva tal que $Supp(\sigma_V) \subseteq G$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = H_G^2\,,$

(b) $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi) = 1$ *para c.t.p.* $\xi \in G$.

Demostración: En primer lugar ya hemos observado que $\lim_{j\to\infty} \sigma_V(A^{*-j}\xi)$ existe y es no negativo para *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$. Además, por el Teorema 38 (a) es equivalente a que el origen sea un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de σ_V si $\sigma_V(0) = 1$.

Si suponemos (a), por el Lema 26 se tiene que $\exists \{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión creciente de números naturales tal que $\lim_{k\to\infty} \sigma_V(A^{*-j_k}\xi) = 1$ para *c.t.p.* $\xi \in G$. Usando la monotonía se tiene (b). Recíprocamente, por el Lema 25 (b) implica que el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de σ_V con $\sigma_V(0) = 1$, que equivale a (a). ■

3.5. Algunos comentarios sobre ondículas

3.5.1. Sobre la caracterización de ondículas

Hay una extensa literatura sobre la caracterización de (los diversos tipos de) ondículas (ver [108], [109], [15], [73], [68], [142], [78], [64], [74], [126], [127], [39], [32], [16], [128], [38], [143], [129], [18], [105], [37], [103], [77], [72], [106], [19]). Caracterizaciones de ondículas semiortogonales pueden encontrarse en [121] y [65].

Sea G un A^*-conjunto. Dado $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$, recordamos que $X(\Psi)$ es una familia de Bessel en H_G^2 si $\exists\, B > 0$ tal que

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} | < f, \psi^\alpha_{(j,k)} > |^2 \leq B \cdot \| f \|^2 \quad \forall\, f \in H_G^2 \,. \tag{3.48}$$

En [19] puede encontrarse la siguiente caracterización de tight frame multi-ondículas:

Teorema LXIII *Sea $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$ tal que $X(\Psi)$ es una familia de Bessel en H_G^2 con constante $B = 1$. Entonces Ψ es una tight frame multi-ondícula de H_G^2 si y sólo si se tiene*

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 = \chi_G(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d \,. \tag{3.49}$$

Es bien sabido (ver [79]) que el sistema $X(\Psi)$ es ortonormal si y sólo si $\forall\, p \in \overline{\mathbb{N}}$ y $1 \leq \alpha, \beta \leq N$ se tiene

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\psi^\alpha}(\xi + k)\, \overline{\widehat{\psi^\beta}(A^{*p}(\xi + k))} = \delta_{\alpha,\beta}\, \delta_{p,0} \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{T}^d \,. \tag{3.50}$$

A partir de esta caracterización y del Teorema LXIII se obtiene lo siguiente:

Corolario LXIV *Un sistema $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$ es una multiondícula ortogonal de H_G^2 si y sólo si se cumplen las condiciones (3.50) y (3.49).*

En [143], [129] y [18] pueden encontrarse caracterizaciones similares para el caso $G = \mathbb{R}^d$ o $\mathbb{R}$.

A continuación consideramos la función (ver [143], [129], [26])

$$S_\Psi(\xi) := \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 \,. \tag{3.51}$$

Puesto que es una serie de términos no negativos, esta expresión tiene sentido si permitimos que tome el valor infinito. De hecho, $S_\Psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} S_\Psi(\xi)\, d\xi = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\psi^\alpha}(\xi)|^2\, d_A^{-j}\, d\xi = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} \| \psi^\alpha \|^2}{d_A - 1} < \infty \,.$$

Trivialmente se tiene $\forall\, l \in \mathbb{Z}$ la identidad:

$$S_\Psi(A^{*l}\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j=l}^{\infty} |\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)|^2 \,. \tag{3.52}$$

Entonces es evidente que la condición (3.49) es equivalente a

$$S_\Psi(A^{*-j}\xi) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_G(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \mathbb{R}^d \,. \tag{3.53}$$

Claramente la sucesión $\{S_\Psi(A^{*-j}\xi)\}_{j=1}^{\infty}$ es monótona creciente. En la misma manera en la que se argumentó en la prueba del Teorema 39 usando los Lemas 25 y 26, se demuestran los siguientes resultados:

Proposición 40 *Sea $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$ tal que $X(\Psi)$ es una familia de Bessel en H_G^2 con constante $B = 1$. Entonces Ψ es una tight frame multiondícula de H_G^2 si y sólo si el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de S_Ψ si ponemos $S_\Psi(0) = 1$.*

Proposición 41 *Un sistema $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset H_G^2$ es una multiondícula ortogonal de H_G^2 si y sólo si se cumple la condición (3.50) y el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de S_Ψ si ponemos $S_\Psi(0) = 1$.*

3.5.2. Sobre la propiedad de oscilación

Desde el principio de la Teoría de ondículas, la propiedad de cancelación o de oscilación, a saber

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0 \,, \tag{3.54}$$

fue el punto de partida para el estudio de las ondículas (tanto continuas como discretas u ortogonales), que obviamente aquí se suponen con un buen decaimiento, al menos $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ (ver [119], [50]). Las primeras construcciones generales mostraron que las ondículas construidas a partir de análisis multirresolucionales r-regulares (la función de escala ortogonal satisface $|\frac{d^k\phi}{dx^k}(x)| \le C_n\,(1+|x|)^{-n}\ \forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \le k \le r, r \in \overline{\mathbb{N}})$ tienen momentos nulos de orden r (ver [119]):

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\, \psi(x)\, dx = 0 \quad 0 \le k \le r \,.$$

De hecho este tipo de fenómeno depende más bien de la ortonormalidad que de la estructura multirresolucional (ver [11], [50], [79], [144]):

Teorema LXV *Sean $r \in \overline{\mathbb{N}}$ y $f, \widetilde{f}$ dos funciones no idénticamente constantes tales que $< f_{(j,k)}, \widetilde{f}_{(l,m)} >= \delta_{j,l}\, \delta_{k,m}$, $|\widetilde{f}(x)| \le C\,(1+|x|)^{-\alpha}$ ($\alpha > r+1$), $f \in \mathcal{C}^r$ (f tiene r derivadas continuas) y $\frac{d^k f}{dx^k}$ es acotada para $k \le r$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\, \widetilde{f}(x)\, dx = 0 \quad 0 \le k \le r \,.$$

Es bien sabido que las ondículas ortogonales que provienen de funciones de escala con filtros continuos en el origen y tales que $|\widehat{\phi}|$ es continuo (por ejemplo si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$) via el procedimiento clásico del análisis multirresolucional a través de la conocida fórmula

$$\widehat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi}\, \overline{m_0(\xi + 1/2)}\, \widehat{\phi}(\xi)$$

donde m_0 es el filtro de paso bajo, satisfacen $\widehat{\psi}(0) = 0$ (ver [79], [144]). De hecho satisfacen $\widehat{\psi}(2k) = 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$ ya que $\widehat{\phi}(k) = 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. En [79] se prueba el siguiente resultado sobre ondículas de banda limitada ($Supp(\widehat{\psi})$ es acotado):

Teorema LXVI *Si ψ es una función de banda limitada, $X(\psi)$ es ortonormal y $|\widehat{\psi}|$ es continuo en cero, entonces $\widehat{\psi}(0) = 0$. Si además ψ es completa (es una ondícula ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$) entonces $\widehat{\psi}$ se anula en un entorno abierto del origen.*

En [144] se encuentra el siguiente resultado:

Teorema LXVII *Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ es tal que el sistema $X(\psi)$ es ortonormal, entonces $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx = 0$.*

La construcción de ondículas con ciertas propiedades, entre ellas la de tener cierto número de momentos nulos, ha sido uno de los principales objetivos de los investigadores en el área. Citamos por ejemplo el conocido artículo [49] de I. Daubechies. Construcciones más recientes pueden encontrarse por ejemplo en [75], [136] y las referencias allí dadas.

Del Teorema 38 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 42 *Sea W un subespacio invariante por traslaciones tal que para alguna dilatación A y cierto A^*-conjunto G se tiene*

$$H_G^2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j W\,. \tag{3.55}$$

Entonces el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de σ_W si ponemos $\sigma_W(0) = 0$.

Demostración: Si definimos

$$V = \bigoplus_{j<0} \mathcal{D}_A^j W$$

tenemos que el espacio $V^\perp = H^2_{\mathbb{R}^d \setminus G} \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}_A^j W\right)$ es invariante por traslaciones, puesto que cada sumando lo es. Por tanto V también es invariante por traslaciones. Claramente V es también A-refinable, puesto que para cada $l \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{D}_A^l V = \bigoplus_{j<l} \mathcal{D}_A^j W$. Se tiene $\mathcal{D}_A V = V \oplus W$, luego por la Proposición XIII (ii)

$$\sigma_W(\xi) = \sigma_{\mathcal{D}_A V}(\xi) - \sigma_V(\xi) = \sigma_V(A^{*-1}\xi) - \sigma_V(\xi)\,. \tag{3.56}$$

La identidad (3.55) nos da la propiedad de completitud para V:

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_A^j V} = L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

Por el Teorema 38 el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de σ_V si ponemos $\sigma_V(0) = 1$, y por el Lema 23 y (3.56) el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de σ_W si ponemos $\sigma_W(0) = 0$. Como $W \subseteq H_G^2$ tenemos por el Lema XXIV $\sigma_W \leq \chi_G$. Entonces se tiene $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\frac{|\{\xi \in A^{*-j}B_1 \,:\, |\sigma_W(\xi)| \geq \varepsilon\}|}{|A^{*-j}B_1|} = \frac{|\{\xi \in G \cap A^{*-j}B_1 \,:\, |\sigma_W(\xi)| \geq \varepsilon\}|}{|A^{*-j}B_1|} \leq$$

$$\leq \frac{|\{\xi \in G \cap A^{*-j}B_1 \,:\, |\sigma_W(\xi)| \geq \varepsilon\}|}{|G \cap A^{*-j}B_1|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

Por la Proposición 24 el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de σ_W si ponemos $\sigma_W(0) = 0$. ■

Fijemos G A^*-conjunto de medida positiva. Como consecuencia del Teorema 42 se tiene:

Teorema 43 *Si $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ es una tight frame multiondícula semiortogonal de H_G^2 entonces para $1 \leq \alpha \leq N$ el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\psi^\alpha}$ si ponemos $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$.*

Demostración: Si Ψ es una tight frame multiondícula semiortogonal de H_G^2 entonces $W(\Psi)$ (ver (1.19)) satisface las hipótesis de la Teorema 42, luego el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de σ_W si ponemos $\sigma_W(0) = 0$. Como Ψ es semiortogonal es claro que Ψ es un generador de un tight frame de $W(\Psi)$, luego

$$\sigma_{W(\Psi)}(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} |\widehat{\psi^\alpha}(\xi)|^2\,.$$

Entonces para $1 \leq \alpha \leq N$ y $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\frac{|\{\xi \in A^{*-j}B_1 \,:\, |\widehat{\psi^\alpha}(\xi)| \geq \varepsilon\}|}{|A^{*-j}B_1|} \leq \frac{|\{\xi \in A^{*-j}B_1 \,:\, |\sigma_W(\xi)| \geq \varepsilon^2\}|}{|A^{*-j}B_1|} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,,$$

luego por la Proposición 24 el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\psi^\alpha}$ si ponemos $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$. ■

Obviamente el Teorema 43 se aplica a las multiondículas ortogonales:

Corolario 44 *Si $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ es una multiondícula ortogonal de H_G^2 entonces para $1 \leq \alpha \leq N$ el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\psi^\alpha}$ si ponemos $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$.*

■

Observación 4 *Hacemos notar que en las dos últimas proposiciones la finitud de Ψ no juega ningún papel. Supongamos que $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ es una sucesión en H_G^2 tal que el sistema afín asociado*

$$X(\Psi) = \{\psi_{(j,k)}^\alpha \ : \ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \alpha \in \mathbb{N}\} \tag{3.57}$$

es un tight frame semiortogonal de H_G^2. Es decir,

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} | < f, \psi_{(j,k)}^\alpha > |^2 = \| f \|^2 \quad \forall f \in H_G^2 \tag{3.58}$$

y $< \psi_{(j,k)}^\alpha, \psi_{(l,m)}^\beta >= 0$ siempre que $j \neq l$. Entonces $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\psi^\alpha}$ si ponemos $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$.

Estos resultados se pueden extender a multiondículas no semiortogonales. A partir de la condición (3.49) se deduce que si $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ es una tight frame multiondícula de H_G^2, entonces para $1 \leq \alpha \leq N$

$$|\widehat{\psi^\alpha}(A^{*j}\xi)| \xrightarrow[j \to \pm\infty]{} 0 \quad c.t.p. \, \xi \in \mathbb{R}^d \, . \tag{3.59}$$

En consecuencia, del Teorema LXIII y del Lema 25 se deduce el siguiente resultado:

Teorema 45 *Si $\Psi = \{\psi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ es una tight frame multiondícula de H_G^2 entonces para $1 \leq \alpha \leq N$ el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\psi^\alpha}$ si ponemos $\widehat{\psi^\alpha}(0) = 0$.*

■

Capítulo 4

Teoría de aproximación de espacios invariantes por traslaciones

En este capítulo vamos a estudiar las propiedades de aproximación de sucesiones de dilatados de espacios invariantes por traslaciones por los operadores $\mathcal{D}_A$ para cierta clase de aplicaciones A. Referimos a la Introducción de esta memoria para un breve repaso histórico (y bibliografía relacionada) de resultados de la Teoría de aproximación por espacios invariantes por traslaciones. En este capítulo seguiremos el programa fundamentalmente desarrollado en [53] y [26].

4.1. Errores y órdenes de A-aproximación y A-densidad

En primer lugar debemos introducir el lenguaje necesario y algunas herramientas básicas para realizar nuestro estudio de las propiedades de aproximación de espacios invariantes por traslaciones con respecto a los operadores de dilatación $\mathcal{D}_A$.

Dado un subespacio cerrado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, denotamos el error de aproximación como

$$E(f, V) := \min\{\| f - g \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \ : \ g \in V\} = \| f - P_V f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} . \tag{4.1}$$

El siguiente resultado es un hecho básico que usaremos frecuentemente (ver por ejemplo [133]).

Lema LXVIII *Sean A una aplicación lineal invertible y V un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V) = d_A^{-j/2}\, E(g(A^{-j}\cdot), V) \quad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d),\ j \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.2}$$

Demostración: Si denotamos $h := P_V(g(A^{-j}\cdot))$, usando el Lema XCVII se tiene

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V) = \left\| g - P_{\mathcal{D}_A^j V}\, g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - h(A^j x)|^2\, dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(A^{-j} y) - h(y)|^2\, d_A^{-j}\, dy \right)^{1/2} =$$

$$= d_A^{-j/2} \left\| g(A^{-j}\cdot) - h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = d_A^{-j/2}\, E(g(A^{-j}\cdot), V)\,.$$

■

Nótese que la identidad (4.2) puede ser escrita más elegantemente como $E(g, \mathcal{D}_A^j V) = E(\mathcal{D}_A^{-j} g, V)$.

De ahora en adelante supondremos que tenemos una dilatación A **diagonalizable**. Por esto entendemos que $\exists\, \{\lambda_j\}_{j=1}^d \subset \mathbb{C}$ autovalores de A (ordenados de forma que $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_d| > 1$) y $\exists\, \{u_j\}_{j=1}^d \subset \mathbb{C}^d$ una base de $\mathbb{C}^d$ de autovectores de A de tal forma que $Au_j = \lambda_j\, u_j$ para $1 \leq j \leq d$. Definimos entonces $\lambda_A := |\lambda_d|$ y $\Lambda_A := |\lambda_1|$. Observamos que se tiene $\lambda_{A^*} = \lambda_A$ y $\Lambda_{A^*} = \Lambda_A$. El siguiente Lema tendrá un papel central en las estimaciones que haremos en este capítulo y el siguiente (ver [87], [133]).

Lema LXIX *Existen constantes L, R con $0 < L \leq 1 \leq R < \infty$ tales que para toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$ se tiene*

$$L\, \lambda_A^j \,\|\, x \,\| \leq \left\| A^j x \right\| \leq R\, \Lambda_A^j \,\|\, x \,\| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ j \in \mathbb{N}\,, \tag{4.3}$$

y

$$L\, \Lambda_A^{-j} \,\|\, x \,\| \leq \left\| A^{-j} x \right\| \leq R\, \lambda_A^{-j} \,\|\, x \,\| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ j \in \mathbb{N}\,. \tag{4.4}$$

Demostración: Sea $\{u_j\}_{j=1}^d$ una base de autovectores de A de tal forma que $Au_j = \lambda_j\, u_j$ para $1 \leq j \leq d$, y sea la norma en $\mathbb{C}^d$ dada por $\left\| \sum_{j=1}^d a_j\, u_j \right\|_1 := \sum_{j=1}^d |a_j|$. Entonces $\forall\, x = \sum_{j=1}^d a_j\, u_j \in \mathbb{C}^d$ se tiene $Ax = \sum_{j=1}^d a_j\, \lambda_j\, u_j$ y por tanto

$$\lambda_A \,\|\, x \,\|_1 = \lambda_A \sum_{j=1}^d |a_j| \leq \sum_{j=1}^d |\lambda_j|\, |a_j| = \|\, Ax \,\|_1 \leq \Lambda_A \sum_{j=1}^d |a_j| = \Lambda_A \,\|\, x \,\|_1\,.$$

Iterando esta identidad y aplicando que la restricción de $\| \cdot \|_1$ a $\mathbb{R}^d$ es una norma en $\mathbb{R}^d$ y que todas las normas son equivalentes en $\mathbb{R}^d$ se obtiene (4.3). Como consequencia se deduce (4.4). ■

En [77] se puede encontrar un resultado similar para aplicaciones lineales invertibles. Sin embargo, si A no es diagonalizable no se tienen las desigualdades (4.3) y (4.4) para λ_A y Λ_A (aunque sí se tienen para cualquier constante menor o mayor, respectivamente).

Ejemplo 4 *Considérese el ejemplo en $\mathbb{R}^2$ dado por*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $A^j v = 2^j v + j 2^{j-1} u$ para $j \in \mathbb{N}$. Entonces en la norma euclídea usual se tiene $\| A^j v \|_2^2 = 2^{2j} + j^2\, 2^{2(j-1)}$ y $\Lambda_A^{2j} \| v \|_2^2 = 2^{2j}$. Es claro que la desigualdad derecha en (4.3) no puede darse.

Introducimos los espacios de Sobolev para $k \in \overline{\mathbb{N}}$:

$$W^k := W_2^k(\mathbb{R}^d) := \{ g \in L^2(\mathbb{R}^d) \ : \ \| g \|_{W^k} := \left\| (1 + \| \cdot \|)^k \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty \}. \tag{4.5}$$

Nótese que $W^0 = L^2(\mathbb{R}^d)$.

A continuación definimos los órdenes de aproximación y densidad correspondientes a dilatar por la aplicación A.

Definición 24 *Fijemos una sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-aproximación $k \in \mathbb{N}$ si $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \leq C\, \lambda_A^{-jk} \| g \|_{W^k}. \tag{4.6}$$

Análogamente, decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$ si $\forall\, g \in W^k$

$$\lambda_A^{jk}\, E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0. \tag{4.7}$$

Si $V_j = V \ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$, entonces se dice que V proporciona orden de A-aproximación (resp. A-densidad) k.

4.2. Órdenes para espacios principales

En primer lugar vamos a estudiar la situación para espacios principales. En [53] se dieron caracterizaciones de los generadores del espacio invariante por traslaciones para proporcionar cierto orden de aproximación o densidad (ver Teoremas V y VI en la Introducción, ver también el Teorema X de [133]).

Recientemente en [133] se ha extendido este estudio a espacios escalados por una dilatación A, obteniéndose condiciones necesarias y suficientes sobre los generadores de los espacios. En esta sección desarrollamos estos resultados, considerando además el caso no estacionario.

Primeramente hacemos un par de definiciones. Necesitamos sustituir el cubo unidad Q_1 por otro conjunto E que se adapte mejor a la dilatación por la aplicación A. Por la Proposición XV existe $E_0 \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^{*j} E_0$.

Definición 25 *Definimos*

$$E := \bigsqcup_{j \leq 0} A^{*j} E_0 \,. \tag{4.8}$$

Observamos que $E \subseteq A^* E$, y que E_0 puede escogerse de manera que $E \subseteq Q_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ y E contenga a un entorno del origen.

Definición 26 *Dada $g \in W^k$ y $j \in \overline{\mathbb{N}}$ definimos*

$$\tau_{g,k}(j) := \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^d \setminus A^{*j} E} (1 + \| \xi \|)^{2k} \, |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi}{\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \| \xi \|)^{2k} \, |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi} \right)^{1/2} . \tag{4.9}$$

Se observa que

$$0 \leq \tau_{g,k}(j) \leq 1 \quad \text{y} \quad \tau_{g,k}(j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \,. \tag{4.10}$$

Los siguientes lemas pueden encontrarse en [133]. El primero tendrá como consecuencia el hecho de que en la aproximación de funciones en W^k podemos concentrarnos en regiones cerca del origen, debido al decaimiento de sus transformadas de Fourier.

Lema LXX *Con la notación anterior, $\exists \, C > 0$ tal que $\forall \, g \in W^k$, $k, j \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$d_A^{\frac{j}{2}} \left\| \, (1 - \chi_E) \, \widehat{g}(A^{*j} \cdot) \, \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \, \lambda_A^{-jk} \, \tau_{g,k}(j) \, \| \, g \, \|_{W^k} \,. \tag{4.11}$$

Demostración: Fijemos g, k, j y denotemos $\widetilde{g} := (1 + \| \cdot \|)^k \, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces tenemos $\| \widetilde{g} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \| g \|_{W^k}$. Usando el Lema LXIX se tiene

$$d_A^j \int_{\mathbb{R}^d \setminus E} |\widehat{g}(A^{*j}\xi)|^2 \, d\xi = d_A^j \int_{\mathbb{R}^d \setminus E} \frac{|\widetilde{g}(A^{*j}\xi)|^2}{(1 + \| A^{*j}\xi \|)^{2k}} \, d\xi \leq$$

$$\leq (L\,\theta\,\lambda_A^j)^{-2k} \, d_A^j \int_{\mathbb{R}^d \setminus E} |\widetilde{g}(A^{*j}\xi)|^2 \, d\xi = (L\,\theta\,\lambda_A^j)^{-2k} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A^{*j}E} |\widetilde{g}(\eta)|^2 \, d\eta =$$

$$= (L\,\theta)^{-2k} \, \lambda_A^{-2jk} \, \tau_{g,k}(j)^2 \, \| \widetilde{g} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, ,$$

donde $\theta := \inf_{\xi \notin E} \| \xi \| > 0$. ■

El siguiente resultado es una consecuencia del anterior, y nos permitirá estudiar nuestro problema localizando en el origen la transformada de Fourier de nuestras funciones.

Lema LXXI *Sean V espacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Entonces $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$|E(g, \mathcal{D}_A^j V) - d_A^{-\frac{j}{2}} \, E(\chi_E \, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{V})| \leq C \, \lambda_A^{-jk} \, \tau_{g,k}(j) \, \| g \|_{W^k} \, . \tag{4.12}$$

Demostración: Si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$\left\| \widehat{g} - P_{\widehat{V}} \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \left\| \widehat{g} - \chi_E \, \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \chi_E \, \widehat{g} - P_{\widehat{V}}(\chi_E \, \widehat{g}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| P_{\widehat{V}}(\chi_E \, \widehat{g}) - P_{\widehat{V}} \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \left\| \chi_E \, \widehat{g} - P_{\widehat{V}}(\chi_E \, \widehat{g}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2 \left\| (1 - \chi_E) \, \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

y similarmente

$$\left\| \chi_E \, \widehat{g} - P_{\widehat{V}}(\chi_E \, \widehat{g}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \left\| \chi_E \, \widehat{g} - \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| \widehat{g} - P_{\widehat{V}} \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| P_{\widehat{V}} \widehat{g} - P_{\widehat{V}}(\chi_E \, \widehat{g}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \left\| \widehat{g} - P_{\widehat{V}} \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2 \left\| (1 - \chi_E) \, \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, ,$$

de donde se deduce

$$|E(\widehat{g}, \widehat{V}) - E(\chi_E \, \widehat{g}, \widehat{V})| \leq 2 \left\| (1 - \chi_E) \, \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, .$$

Usando los Lemas LXVIII y LXX se tiene $\forall\, g \in W^k$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$|E(g, \mathcal{D}_A^j V) - d_A^{-\frac{j}{2}} \, E(\chi_E \, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{V})| \leq d_A^{-\frac{j}{2}} \, |E(g(A^{-j}\cdot), V) - E(\chi_E \, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{V})| =$$

$$= d_A^{-\frac{j}{2}}\, |E(\widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{V}) - E(\chi_E\, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{V})| \leq 2\, d_A^{-\frac{j}{2}} \left\| (1-\chi_E)\, \widehat{g(A^{-j}\cdot)} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 2\, d_A^{\frac{j}{2}}\, \|\, (1-\chi_E)\, \widehat{g}(A^{*j}\cdot)\, \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\, C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j)\, \|\, g\, \|_{W^k}\, .$$

■

El siguiente resultado nos da una expresión para el error de aproximación para funciones con transformada de Fourier localizada en el origen. Es básicamente un cálculo explícito del error, permitido por el análisis de la estructura de los espacios principales del Apéndice B. A esto se le añade simplemente el reconocimiento de la función espectral en la expresión obtenida. Formalmente la omisión del generador del espacio enfatiza la idea de que este error no depende en absoluto del generador escogido, cosa que obviamente es cierta.

Lema LXXII *Sean $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $g \in H^2_{Q_1}$. Entonces*

$$E(g, \mathcal{S}(f)) = \|\, \widehat{g}\, \sqrt{1-\sigma_{\mathcal{S}(f)}}\, \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\, . \tag{4.13}$$

Demostración: Claramente si $\xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ $[\widehat{g}, \widehat{f}](\xi) = \widehat{g}(\xi)\, \widehat{f}(\xi)$, luego por el Teorema XC (página 113)

$$\|\, P_{\mathcal{S}(f)} g\, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\|\, \nu_g\, \widehat{f}\, \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\sigma(\mathcal{S}(f))} \frac{|[\widehat{g}, \widehat{f}](\xi)|^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2}{|[\widehat{f}, \widehat{f}](\xi)|^2}\, d\xi =$$

$$= \int_{\sigma(\mathcal{S}(f)) \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d} \frac{|[\widehat{g}, \widehat{f}](\xi)|^2\, \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\xi+k)|^2}{|[\widehat{f}, \widehat{f}](\xi)|^2}\, d\xi =$$

$$= \int_{\sigma(\mathcal{S}(f)) \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d} \frac{|\widehat{g}(\xi)|^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2}{[\widehat{f}, \widehat{f}](\xi)}\, d\xi = \int_{\sigma(\mathcal{S}(f))} \frac{|\widehat{g}(\xi)|^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2}{[\widehat{f}, \widehat{f}](\xi)}\, d\xi\, .$$

Por tanto,

$$E(g, \mathcal{S}(f))^2 = \|\, g - P_{\mathcal{S}(f)} g\, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\, g\, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\, P_{\mathcal{S}(f)} g\, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{g}(\xi)|^2\, d\xi - \int_{\sigma(\mathcal{S}(f))} \frac{|\widehat{g}(\xi)|^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2}{[\widehat{f}, \widehat{f}](\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{g}(\xi)|^2\, (1 - \sigma_{\mathcal{S}(f)}(\xi))\, d\xi\, .$$

■

Las dos siguientes subsecciones conjugan todos los ingredientes desgranados anteriormente, obteniendo condiciones explícitas en términos de la función espectral. Se recuperan los resultados de [133], correspondientes al caso particular estacionario. Las condiciones obtenidas son cuantificaciones de la velocidad con que las funciones espectrales de los espacios implicados se aproximan al valor 1 en el origen.

4.2.1. Órdenes de A-aproximación

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para proporcionar orden de A-aproximación.

Teorema 46 *Sean* $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $k \in \mathbb{N}$. *Si*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty \tag{4.14}$$

entonces $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^{\infty}$ *proporciona orden de* A*-aproximación* k.

Demostración: Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y denotemos $M := \sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}}{(\lambda_A^{-j}+\|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. Usando el Lema LXIX se tiene $\forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ y *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1+\|\,A^{*j}\xi\,\|)^{2k}} \le \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1+L\,\lambda_A^{j}\,\|\,\xi\,\|)^{2k}} =$$

$$= (L^{-1}\,\lambda_A^{-j})^{2k}\,\frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(L^{-1}\,\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}} \le L^{-2k}\,M\,\lambda_A^{-2jk}\,.$$

Dados $g \in W^k$ y $j \in \overline{\mathbb{N}}$, denotemos $\widetilde{g} := (1+\|\cdot\|)^k\,\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces tenemos $\|\,\widetilde{g}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\,g\,\|_{W^k}$. Aplicando el Lema LXXII y la estimación anterior se tiene

$$d_A^{-j}\,E(\chi_E\,\widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)})^2 = d_A^{-j}\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(\xi)\,\widehat{g(A^{-j}\cdot)}(\xi)|^2\,(1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi))\,d\xi =$$

$$= d_A^{j}\int_E |\widehat{g}(A^{*j}\xi)|^2\,(1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi))\,d\xi = d_A^{j}\int_E |\widetilde{g}(A^{*j}\xi)|^2\,\frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1+\|\,A^{*j}\xi\,\|)^{2k}}\,d\xi \le$$

$$\le L^{-2k}\,M\,\lambda_A^{-2jk}\,d_A^{j}\int_E |\widetilde{g}(A^{*j}\xi)|^2\,d\xi = L^{-2k}\,M\,\lambda_A^{-2jk}\int_{A^{*j}E} |\widetilde{g}(\eta)|^2\,d\eta \le$$

$$\le L^{-2k}\,M\,\lambda_A^{-2jk}\,\|\,\widetilde{g}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = L^{-2k}\,M\,\lambda_A^{-2jk}\,\|\,g\,\|_{W^k}^2\,.$$

Finalmente, aplicando el Lema LXXI se tiene

$$E(g, \mathcal{D}_A^j\mathcal{S}(\phi_j)) \le$$

$$\le |E(g, \mathcal{D}_A^j\mathcal{S}(\phi_j)) - d_A^{-\frac{j}{2}}\,E(\chi_E\,\widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)})| + d_A^{-\frac{j}{2}}\,E(\chi_E\,\widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)}) \le$$

$$\le C\,\lambda_A^{-jk}\,\tau_{g,k}(j)\,\|\,g\,\|_{W^k} + L^{-k}\,M^{\frac{1}{2}}\,\lambda_A^{-jk}\,\|\,g\,\|_{W^k} =$$

$$= \left(C + L^{-k}\,M^{\frac{1}{2}}\right)\,\lambda_A^{-jk}\,\|\,g\,\|_{W^k}\,.$$

■

La siguiente función es relevante en el caso estacionario.

Definición 27 *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Definimos*

$$T_{\phi,k}(\xi) := \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi)}(\xi)}{\|\,\xi\,\|^{2k}} \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,. \tag{4.15}$$

En vista del Teorema XCI (ver (B.11)) una expresión explícita para $T_{\phi,k}$ es

$$T_{\phi,k}(\xi) = \frac{1 - \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)}\,\chi_{\sigma(\mathcal{S}(f))}(\xi)}{\|\,\xi\,\|^{2k}} \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,. \tag{4.16}$$

Como Corolario se obtiene el siguiente resultado para el caso estacionario:

Teorema LXXIII *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ entonces $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-aproximación k.*

Demostración: El resultado se sigue de la estimación

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi)}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi)}}{\|\cdot\|^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty$$

aplicando el Teorema 46 con $\phi_j = \phi \;\forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$. ∎

Los siguientes resultados proporcionan condiciones necesarias para proporcionar orden de A-aproximación. Nótese que la sucesión $\left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Teorema 47 *Sean $\{\phi_j\}_{j=0}^\infty \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^\infty$ proporciona orden de A-aproximación k entonces*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty\,. \tag{4.17}$$

Demostración: Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Dada $g \in W^k$ si denotamos $\widetilde{g} := (1+\|\cdot\|)^k\,\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tenemos $\|\,\widetilde{g}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\,g\,\|_{W^k}$. Como vimos en la prueba del Teorema 46, $\forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ se tiene

$$\left(d_A^j \int_E |\widetilde{g}(A^{*j}\xi)|^2\,\frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1 + \|\,A^{*j}\xi\,\|)^{2k}}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = d_A^{-\frac{j}{2}}\,E(\chi_E\,\widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)}) \leq$$

$$\leq |d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(\widehat{\chi_E\, g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)}) - E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j))| + E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j)) \leq$$

$$\leq C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j)\, \|\, g\,\|_{W^k} + C\, \lambda_A^{-jk}\, \|\, g\,\|_{W^k} \leq C\, \lambda_A^{-jk}\, \|\, g\,\|_{W^k}\,.$$

Considerando $h := |\widetilde{g}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, esta expresión nos dice que $\forall\, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ no negativa

$$\int_{A^{*j}E} h(\eta)\, \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(A^{*-j}\eta)}{(1 + \|\,\eta\,\|)^{2k}}\, d\eta = d_A^j \int_E |\widetilde{g}(A^{*j}\xi)|^2\, \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1 + \|\, A^{*j}\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi \leq$$

$$\leq C\, \lambda_A^{-2jk}\, \|\,\widetilde{g}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = C\, \lambda_A^{-2jk}\, \|\, h\,\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

De aquí deducimos usando el Lema LXIX que para *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$ (con el cambio $\xi = A^{*-j}\eta$) se tiene

$$\left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}} \leq \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + R^{-1}\,\Lambda_A^{-j}\,\|\, A^{*j}\xi\,\|)^{2k}} =$$

$$= \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{(R\,\Lambda_A^j)^{2k}\,(1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi))}{(R + \|\, A^{*j}\xi\,\|)^{2k}} \leq R^{2k}\,\lambda_A^{2jk}\, \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1 + \|\, A^{*j}\xi\,\|)^{2k}} =$$

$$= R^{2k}\,\lambda_A^{2jk}\, \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(A^{*-j}\eta)}{(1 + \|\,\eta\,\|)^{2k}} \leq R^{2k}\, C\,.$$

■

Como Corolario se obtiene el siguiente resultado para el caso estacionario:

Teorema LXXIV *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-aproximación k entonces*

$$\sup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi)}}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty\,. \tag{4.18}$$

Demostración: Basta hacer $\phi_j = \phi\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ en el Teorema 47. ■

4.2.2. Órdenes de A-densidad

Análogamente procedemos a estudiar los órdenes de A-densidad. En primer lugar obtenemos condiciones suficientes para proporcionar orden de A-densidad. Nótese la aparición de dos parámetros j y l en las hipótesis para el caso general (no necesariamente estacionario).

Teorema 48 *Sean* $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $k \in \overline{\mathbb{N}}$. *Si se cumple (4.14) y* $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0 \tag{4.19}$$

entonces $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^{\infty}$ *proporciona orden de A-densidad k.*

Demostración: Fijemos $k \in \overline{\mathbb{N}}$, y denotemos $\forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$F_{k,j}(\xi) := \lambda_A^{2jk}\, \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(A^{*-j}\xi)}{(1+\|\,\xi\,\|)^{2k}}\, \chi_{A^{*j}E}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,. \tag{4.20}$$

Por (4.14) se tiene que $F_{k,j} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$. Para todo $K \subset \mathbb{R}^d$ medible y acotado $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^{*-j}K \subseteq E$ para $j \geq j_0$. Usando las estimaciones de la prueba del Teorema 46 y (4.19) se tiene

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(\xi)\, F_{k,j}(\xi)\, d\xi = \lambda_A^{2jk} \int_{K\cap A^{*j}E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(A^{*-j}\xi)}{(1+\|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi =$$

$$= \lambda_A^{2jk}\, d_A^j \int_{A^{*-j}K\cap E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\eta)}{(1+\|\,A^{*j}\eta\,\|)^{2k}}\, d\eta \leq d_A^j\, L^{-2k} \int_{A^{*-j}K} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\eta)}{(\lambda_A^{-j}+\|\,\eta\,\|)^{2k}}\, d\eta \leq$$

$$\leq \frac{L^{-2k}\, d_A^{j_0}\, |E|}{|A^{*j_0-j}E|} \int_{A^{*j_0-j}E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\eta)}{(\lambda_A^{-j}+\|\,\eta\,\|)^{2k}}\, d\eta \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.$$

Por linealidad se tiene que para toda función simple h de soporte compacto $\int_{\mathbb{R}^d} h(\xi)\, F_{k,j}(\xi)\, d\xi \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Como estas funciones son densas en $L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} h(\xi)\, F_{k,j}(\xi)\, d\xi \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\ \forall\, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En particular, dada $g \in W^k$ y $\widetilde{g} := (1+\|\cdot\|)^k\, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, aplicando el Lema LXXII, (4.10) y las estimaciones de la prueba del Teorema 46

$$\lambda_A^{jk}\, E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j)) \leq$$

$$\leq \lambda_A^{jk}\, |E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j)) - d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(\chi_E\, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)})| +$$

$$+ \lambda_A^{jk}\, d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(\chi_E\, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)}) \leq$$

$$\leq C\, \tau_{g,k}(j)\, \|\, g\,\|_{W^k} + \left(\int_{A^{*j}E} |\widetilde{g}(\eta)|^2\, F_{k,j}(\eta)\, d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,.$$

■

Como Corolario se obtiene el siguiente resultado para el caso estacionario:

Teorema LXXV *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} T_{\phi,k}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{4.21}$$

entonces $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-densidad k.

Demostración: El resultado se sigue del Teorema 48 haciendo $\phi_j = \phi\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ y observando que (4.14) se sigue de que $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ como en el Corolario LXXIII, y que $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$

$$0 \le \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi)}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi \le$$

$$\le \lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi)}(\xi)}{\|\,\xi\,\|^{2k}}\, d\xi = 0\,.$$

■

El teorema anterior puede reescribirse de la siguiente manera (compárese con el Teorema X):

Teorema LXXVI *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{\phi,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $T_{\phi,k}$ si ponemos $T_{\phi,k}(0) = 0$, entonces $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-densidad k.*

Demostración: Por el Lema 27 la condición (4.21) es equivalente a que el origen sea un punto de A^*-continuidad aproximativa de $T_{\phi,k}$ si ponemos $T_{\phi,k}(0) = 0$. El resultado se sigue entonces del Teorema LXXV. ■

A continuación damos condiciones necesarias para la A-densidad.

Teorema 49 *Sean $\{\phi_j\}_{j=0}^\infty \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^\infty$ proporciona orden de A-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{4.22}$$

Demostración: Fijemos $k, l \in \overline{\mathbb{N}}$ y definamos $g_l \in W^k$ dada por

$$\widetilde{g_l} := \chi_{A^{*l}E} \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{y} \quad \widehat{g_l} := (1 + \|\cdot\|)^{-k}\, \widetilde{g_l} \in L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

Observamos que $\| g_l \|_{W^k} = \left\| \chi_{A^{*l}E} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = d_A^{\frac{l}{2}} |E|^{\frac{1}{2}}$. Usando las estimaciones del Teorema 47, (4.10) y el hecho de que $E \subseteq A^*E$ se tiene para $j \geq l$

$$0 \leq \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \| \xi \|)^{2k}}\, d\xi \leq$$

$$\leq \frac{R^{2k}\, \lambda_A^{2jk}}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1 + \| A^{*j}\xi \|)^{2k}}\, d\xi =$$

$$= \frac{R^{2k}\, \lambda_A^{2jk}\, d_A^j}{\| g_l \|_{W^k}^2} \int_E |\widetilde{g_l}(A^{*j}\xi)|^2\, \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(1 + \| A^{*j}\xi \|)^{2k}}\, d\xi =$$

$$= \frac{R^{2k}\, \lambda_A^{2jk}}{\| g_l \|_{W^k}^2}\, d_A^{-j}\, E(\chi_E\, \widehat{g_l(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)})^2 \leq$$

$$\leq \frac{R^{2k}\, \lambda_A^{2jk}}{\| g_l \|_{W^k}^2} \left(|d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(\chi_E\, \widehat{g_l(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi_j)}) - E(g_l, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j))| + E(g_l, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j)) \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{R^{2k}}{\| g_l \|_{W^k}^2} \left(C\, \tau_{g_l,k}(j)\, \| g_l \|_{W^k} + \lambda_A^{jk}\, E(g_l, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j)) \right)^2 \xrightarrow[j \to \infty]{} 0\,.$$

■

Como Corolario se obtiene el siguiente resultado para el caso estacionario:

Teorema LXXVII *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j \to \infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1 - \sigma_{\mathcal{S}(\phi)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \| \xi \|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{4.23}$$

Demostración: Basta hacer $\phi_j = \phi\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ en el Teorema 49. ■

4.3. Superfunciones y espacios no principales

El siguiente resultado puede encontrarse en [53]. Estas desigualdades nos permitirán establecer la equivalencia en cuanto a propiedades de aproximación se refiere de un espacio V y ciertos subespacios principales.

Proposición LXXVIII *Sea V espacio invariante por traslaciones. Entonces*

$$E(g,V) \leq E(g,\mathcal{S}(P_V f)) \leq E(g,V) + 2\,E(g,\mathcal{S}(f)) \quad \forall\, f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{4.24}$$

Demostración: Como $\mathcal{S}(P_V f) \subseteq V$ se tiene trivialmente $E(g,V) \leq E(g,\mathcal{S}(P_V f))$. Por el Lema XCVI

$$\left\| g - P_{\mathcal{S}(P_V f)} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \| g - P_V g \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| P_V g - P_V P_{\mathcal{S}(f)} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| P_{\mathcal{S}(P_V f)} P_{\mathcal{S}(f)} g - P_{\mathcal{S}(P_V f)} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \| g - P_V g \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| g - P_{\mathcal{S}(f)} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| P_{\mathcal{S}(f)} g - g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,,$$

luego

$$E(g,\mathcal{S}(P_V f)) = \left\| g - P_{\mathcal{S}(P_V f)} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \| g - P_V g \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2 \left\| g - P_{\mathcal{S}(f)} g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = E(g,V) + 2\,E(g,\mathcal{S}(f))\,.$$

■

Para obtener la equivalencia entre propiedades de aproximación de espacios comentada anteriormente, el espacio $\mathcal{S}(f)$ ha de tener propiedades de aproximación arbitrariamente buenas. Para ello es necesario escoger f tal que el módulo de su transformada de Fourier se aproxime muy rápidamente a 1 cerca del origen. Hacemos la siguiente elección:

Definición 28 *Definimos*

$$f^* := \check{\chi}_E\,. \tag{4.25}$$

Es inmediato comprobar que f^* es un generador de un tight frame de $\mathcal{S}(f^*) = H^2_E$, $P_{\widehat{\mathcal{S}(f^*)}} \widehat{g} = [\widehat{g}, \chi_E]\, \chi_E = \widehat{g}\, \chi_E$, y por tanto

$$E(g,\mathcal{S}(f^*)) = \left\| (1-\chi_E)\, \widehat{g} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{4.26}$$

El siguiente resultado puede encontrarse en [133]. Establece las propiedades de aproximación del espacio generado por f^*.

Lema LXXIX *Con la notación anterior, $\exists C > 0$ tal que $\forall g \in W^k$, $k, j \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(f^*)) \leq C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j)\, \| g \|_{W^k}\,. \tag{4.27}$$

Demostración: Fijemos g, k, j como en el enunciado. Usando los Lemas LXVIII y LXX se tiene

$$E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(f^*))^2 = d_A^{-j}\, E(g(A^{-j}\cdot), \mathcal{S}(f^*))^2 =$$

$$= d_A^j \left\| (1 - \chi_E)\, \widehat{g}(A^{*j}\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j) \,\|\, g \,\|_{W^k} .$$

■

El siguiente resultado es el teorema fundamental de teoría de aproximación para espacios generales. Nos dice que las funciones $\phi_j^* := P_{V_j} f^*$ $(j \in \overline{\mathbb{N}})$ forman una sucesión de superfunciones para los espacios $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Una **sucesión de superfunciones** $\{\phi_j^* \in V_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones cuyos espacios principales asociados $\{\mathcal{S}(\phi_j^*)\}_{j=0}^{\infty}$ tienen las mismas propiedades de aproximación que la sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, es decir, proporciona los mismos órdenes de aproximación y densidad. Concretamente, una superfunción es una función ϕ^* en un espacio invariante por traslaciones V cuyo espacio principal asociado $\mathcal{S}(\phi^*)$ (subespacio de V) proporciona los mismos órdenes de aproximación y densidad que V.

Teorema 50 *Sea $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y definamos $\phi_j^* := P_{V_j} f^* \ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$. $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-aproximación $k \in \mathbb{N}$ (resp. orden de A-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$) si y sólo si $\{\mathcal{S}(\phi_j^*)\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-aproximación $k \in \mathbb{N}$ (resp. orden de A-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$).*

Demostración: Sean $k \in \overline{\mathbb{N}}$ y $g \in W^k$. Usando el Lema LXVIII, la Proposición LXXVIII y el Lema LXXIX se tiene

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) = d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(g(A^{-j}\cdot), V_j) \leq$$

$$\leq d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(g(A^{-j}\cdot), \mathcal{S}(P_{V_j} f^*)) = d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(g(A^{-j}\cdot), \mathcal{S}(\phi_j^*)) = E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j^*))$$

y

$$E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(\phi_j^*)) = d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(g(A^{-j}\cdot), \mathcal{S}(P_{V_j} f^*)) \leq$$

$$\leq d_A^{-\frac{j}{2}}\, (E(g(A^{-j}\cdot), V_j) + 2\, E(g(A^{-j}\cdot), \mathcal{S}(f^*))) =$$

$$= E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) + 2\, E(g, \mathcal{D}_A^j \mathcal{S}(f^*)) \leq E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) + 2\, C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j) \,\|\, g \,\|_{W^k} .$$

Usando (4.10) se obtienen las conclusiones deseadas. ■

El siguiente resultado puede encontrarse en [26] para $E = Q_1$, y permite reescribir las condiciones en términos de la función espectral. Esto permite omitir la aparición de las superfunciones. Nótese que las superfunciones no son únicas en general.

Lema LXXX *Sean V espacio invariante por traslaciones y $\phi^* := P_V f^*$. Entonces*

$$\sigma_V(\xi) = \sigma_{\mathcal{S}(\phi^*)}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in E\,. \tag{4.28}$$

Demostración: Vamos a esbozar la prueba sin hacer todas las comprobaciones técnicas. Referimos a [26] y a [17] para los detalles. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ denotamos $\mathcal{F}(f)(\xi) := \{\widehat{f}(\xi + k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ para cada $\xi \in Q_1$, que claramente es un operador lineal en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Esta familia de sucesiones está determinada salvo en conjuntos de medida cero. Fácilmente se obtiene

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{Q_1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\xi+k)|^2\, d\xi = \int_{Q_1} \| \mathcal{F}(f)(\xi) \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}\, d\xi\,,$$

luego $\mathcal{F}(f)(\xi) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ para $c.t.p.\, \xi \in Q_1$ y $\mathcal{F}$ es un operador continuo de $L^2(\mathbb{R}^d)$ a $L^2(Q_1, \ell^2(\mathbb{Z}^d))$. Hacemos notar que

$$< \mathcal{F}(f)(\xi), \mathcal{F}(g)(\xi) >= [\widehat{f}, \widehat{g}](\xi) \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^d),\, \xi \in Q_1)\,.$$

Definimos para cada $\xi \in Q_1$

$$J_V(\xi) := \{\mathcal{F}(f)(\xi) \ :\ f \in V\}\,. \tag{4.29}$$

Similarmente $\{J_V(\xi)\}_{\xi\in Q_1}$ es una familia de subespacios cerrados de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ determinada salvo conjuntos de medida cero.

Sea $\{\phi^\alpha\}_{\alpha\in I}$ un generador de un tight frame de V tal que $V = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{S}(\phi^\alpha)$ (ver Teorema XI). En este caso se tiene $[\widehat{\phi^\alpha}, \widehat{\phi^\alpha}] = \chi_{E_{\phi^\alpha}}\ \forall \alpha \in I$, y $\{\mathcal{F}(\phi^\alpha)(\xi)\}_{\alpha\in I}$ es un tight frame de $J_V(\xi)$ para $c.t.p.\, \xi \in Q_1$. Es decir,

$$\| a \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \sum_{\alpha\in I} | < a, \mathcal{F}(\phi^\alpha)(\xi) > |^2 \quad \forall\, a \in J_V(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in Q_1\,.$$

Por el Teorema XC $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$P_{\widehat{V}} \widehat{g} = \sum_{\alpha\in I} P_{\widehat{\mathcal{S}(\phi^\alpha)}} \widehat{g} = \sum_{\alpha\in I} [\widehat{g}, \widehat{\phi^\alpha}]\, \widehat{\phi^\alpha}\,,$$

luego

$$\mathcal{F}(P_V g)(\xi) = \sum_{\alpha\in I} [\widehat{g}, \widehat{\phi^\alpha}](\xi)\, \mathcal{F}(\phi^\alpha)(\xi) = P_{J_V(\xi)}(\mathcal{F}(g)(\xi))\,.$$

Sea $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ la base canónica de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Como $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, la sucesión de proyecciones $\{\widetilde{e}_k(\xi) := P_{J_V(\xi)}e_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es un tight frame de $J_V(\xi)$. Es decir,

$$\| a \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} | < a, \widetilde{e}_k(\xi) > |^2 \quad \forall\, a \in J_V(\xi)\,.$$

Entonces para *c.t.p.* $\xi \in Q_1$ y $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$

$$\sigma_V(\xi + k) = \sum_{\alpha\in I} |\widehat{\phi^\alpha}(\xi + k)|^2 = \sum_{\alpha\in I} | < e_k, \mathcal{F}_{\phi^\alpha}(\xi) > |^2 = \| \widetilde{e}_k(\xi) \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}\,.$$

Obviamente se tiene $\mathcal{F}(f^*)(\xi) = e_0\, \chi_E(\xi)$ para $\xi \in Q_1$, y

$$\mathcal{F}(\phi^*)(\xi) = P_{J_V(\xi)}(\mathcal{F}(f^*)(\xi)) = P_{J_V(\xi)}(e_0\, \chi_E(\xi)) = \widetilde{e}_0(\xi)\, \chi_E(\xi)$$

para *c.t.p.* $\xi \in \mathbb{R}^d$. Además se tiene $E_{\phi^*} = \{\xi \in \mathbb{R}^d \;:\; \widetilde{e}_0(\xi)\, \chi_E(\xi) \neq 0\}$. Finalmente por el Teorema XCI del Apéndice B para *c.t.p.* $\xi \in E$

$$\sigma_{\mathcal{S}(\phi^*)}(\xi) = \frac{|\widehat{\phi}^*(\xi)|^2}{[\widehat{\phi}^*, \widehat{\phi}^*](\xi)}\, \chi_{E_{\phi^*}}(\xi) = \frac{| < \mathcal{F}(\phi^*)(\xi), e_0 > |^2}{\| \mathcal{F}(\phi^*)(\xi) \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}}\, \chi_{E_{\phi^*}}(\xi) =$$

$$= \frac{| < P_{J_V(\xi)}(\mathcal{F}(f^*)(\xi)), e_0 > |^2}{\left\| P_{J_V(\xi)}(\mathcal{F}(f^*)(\xi)) \right\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}}\, \chi_{E_{\phi^*}}(\xi) = \frac{| < \widetilde{e}_0(\xi), e_0 > |^2}{\| \widetilde{e}_0(\xi) \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}}\, \chi_{E_{\phi^*}}(\xi) =$$

$$= \frac{\| \widetilde{e}_0(\xi) \|^4_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}}{\| \widetilde{e}_0(\xi) \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)}}\, \chi_{E_{\phi^*}}(\xi) = \| \widetilde{e}_0(\xi) \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \sigma_V(\xi)\,.$$

■

El Teorema 50 junto con el Lema LXXX permite transferir los resultados anteriormente obtenidos a espacios no principales. Procedemos a enunciar los resultados, cuyas pruebas consisten en aplicar los resultados anteriores a las condiciones obtenidas en la sección 4.2.

4.3.1. Órdenes de A-aproximación

Teorema 51 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1 - \sigma_{V_j}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty \tag{4.30}$$

entonces $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ proporciona orden de A-aproximación k.

En analogía con el caso principal, hacemos la siguiente definición.

Definición 29 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Definimos*

$$T_{V,k}(\xi) := \frac{1 - \sigma_V(\xi)}{\|\,\xi\,\|^{2k}} \quad (\xi \in \mathbb{R}^d)\,. \tag{4.31}$$

Como en el caso principal, se puede dar una condición suficiente en términos de la función $T_{V,k}$.

Corolario 52 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ entonces V proporciona orden de A-aproximación k.*

Las condiciones necesarias son las siguientes:

Teorema 53 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ proporciona orden de A-aproximación k entonces*

$$\sup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1 - \sigma_{V_j}}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty\,. \tag{4.32}$$

Corolario 54 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si V proporciona orden de A-aproximación k entonces*

$$\sup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1 - \sigma_V}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty\,. \tag{4.33}$$

4.3.2. Órdenes de A-densidad

Teorema 55 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si se cumple (4.30) y $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1 - \sigma_{V_j}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0 \tag{4.34}$$

entonces $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ proporciona orden de A-densidad k.

Corolario 56 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} T_{V,k}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{4.35}$$

entonces V proporciona orden de A-densidad k.

Corolario 57 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $T_{V,k}$ si ponemos $T_{V,k}(0) = 0$, entonces V proporciona orden de A-densidad k.*

Teorema 58 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ proporciona orden de A-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1-\sigma_{V_j}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{4.36}$$

Corolario 59 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si V proporciona orden de A-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1-\sigma_{V}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{4.37}$$

4.4. Comparación entre dilataciones

De los resultados anteriores y las caracterizaciones conocidas para la aproximación clásica (ver Corolario 52 y Teorema VIII en la Introducción) se deduce el siguiente resultado:

Corolario 60 *Sean V un subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si V proporciona orden de aproximación k entonces V proporciona orden de A-aproximación k.*

El Corolario 60 fue demostrado en [133] para espacios principales. Este resultado nos dice que proporcionar orden de aproximación k es una propiedad más fuerte que tener orden de A-aproximación k.

4.4.1. Aproximación con dilataciones isotrópicas

A la vista de las condiciones estudiadas, se observa que para la siguiente clase de aplicaciones lineales puede darse una caracterización completa de las sucesiones de espacios que proporcionan órdenes de A-aproximación o A-densidad. Como consecuencia se obtiene que las propiedades de aproximación o densidad y A-aproximación o A-densidad respectivamente de una sucesión de subespacios son equivalentes para estas dilataciones.

Definición 30 *Decimos que una dilatación diagonalizable A es **isotrópica** si todos sus autovalores tienen el mismo módulo. Es decir, si $\lambda_A = \Lambda_A$.*

Teorema 61 *Sean A isotrópica, $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-aproximación k si y sólo si*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1-\sigma_{V_j}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty \,. \tag{4.38}$$

Demostración: Simplemente se observa que en este caso las condiciones (4.30) y (4.32) son equivalentes. ■

Corolario 62 *Sean A isotrópica, V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. El espacio V proporciona orden de A-aproximación k si y sólo si $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración: Nótese que se tiene

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1-\sigma_V}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \left\| \frac{1-\sigma_V}{\|\cdot\|^{2k}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} ,$$

ya que $(1-\sigma_V)\,(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{-2k} \nearrow T_{V,k}$ cuando $j \to \infty$. Por tanto en este caso $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ equivale a (4.33). ■

Teorema 63 *Sean A isotrópica, $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. La sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de A-densidad k si y sólo si se cumple (4.38) y $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*l-j}E|} \int_{A^{*l-j}E} \frac{1-\sigma_{V_j}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0 \,. \tag{4.39}$$

Demostración: A las conclusiones del Teorema 61 se le añade que las condiciones (4.34) y (4.36) son equivalentes en este caso. ■

Corolario 64 *Sean A isotrópica, V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *El espacio V proporciona orden de A-densidad k,*

- *$T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}E|} \int_{A^{*-j}E} T_{V,k}(\xi)\, d\xi = 0 \,, \tag{4.40}$$

- $T_{V,k} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *y el origen es un punto de* A^**-continuidad aproximativa de* $T_{V,k}$ *si ponemos* $T_{V,k}(0) = 0$.

Demostración: Basta observar que las condiciones (4.35) y (4.37) son equivalentes, puesto que $(1-\sigma_V)\,(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{-2k} \nearrow T_{V,k}$ cuando $j \to \infty$ como ya observamos en el Corolario 62. ■

Observamos que los Corolarios 62 y 64 fueron demostrados para el caso principal en [133].

4.4.2. Otras dilataciones

Los siguientes ejemplos, tomados de [133], muestran que si A no es isotrópica en general proporcionar orden de aproximación o densidad k y proporcionar orden de A-aproximación o A-densidad k, respectivamente, son propiedades no equivalentes.

Ejemplo 5 *Consideramos la aplicación lineal* $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *cuya matriz en la base canónica es* $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, *y la función* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *dada por*

$$\widehat{\phi}(\xi_1,\xi_2) := \chi_F(\xi_1,\xi_2) + \sqrt{1-\xi_2}\,\chi_{[0,\frac{1}{2}]^2}(\xi_1,\xi_2) + \sqrt{\xi_2-1}\,\chi_{[1,\frac{3}{2}]^2}(\xi_1,\xi_2)\,, \tag{4.41}$$

donde $F := Q_1 \setminus [0,\frac{1}{2}]^2$. *Si* $\xi = (\xi_1,\xi_2) \in F$ *claramente* $[\widehat{\phi},\widehat{\phi}](\xi) = 1$, *y si* $\xi \in [0,\frac{1}{2}]^2$ *pues* $[\widehat{\phi},\widehat{\phi}](\xi) = 1-\xi_2+\xi_2+1-1 = 1$, *luego* ϕ *es un generador ortogonal de* $\mathcal{S}(\phi)$. *Esto implica que* $\sigma_{\mathcal{S}(\phi)} = |\widehat{\phi}|^2$.

Dado $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *se tiene*

$$T_{\phi,k}(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \in F \\ \frac{\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^k} & \xi \in [0,\frac{1}{2}]^2 \\ \frac{2-\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^k} & \xi \in [1,\frac{3}{2}]^2 \\ \frac{1}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^k} & o.c. \end{cases}.$$

Si $\xi \in [0,\frac{1}{2}]^2$ *y* $\xi_1 \le \xi_2$ *se tiene*

$$\frac{\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^k} \ge \frac{\xi_2}{2^k\,\xi_2^{2k}} = \frac{1}{2^k\,\xi_2^{2k-1}}\,,$$

luego $T_{\phi,k} \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$. *Por el Teorema V* $\mathcal{S}(\phi)$ *no proporciona orden de aproximación* 1.

Ahora bien, $\forall\, g \in W^1$ y $j \in \mathbb{N}$ por el Lema LXXII se tiene

$$d_A^{-j}\, E(\chi_{Q_1}\, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{\mathcal{S}(\phi)})^2 = d_A^{-j} \int_{Q_1} |\widehat{g(A^{-j}\xi)}|^2 \,(1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi)}(\xi))\, d\xi =$$

$$= d_A^{j} \int_{[0,\frac{1}{2}]^2} |\widehat{g}(A^{*j}\xi)|^2\, \xi_2\, d\xi = \int_{A^{*j}[0,\frac{1}{2}]^2} |\widehat{g}(\eta)|^2\, 4^{-j}\, \eta_2\, d\eta =$$

$$= \int_{A^{*j}[0,\frac{1}{2}]^2} |\widehat{g}(\eta)|^2\, (1+\|\,\eta\,\|)^2\, \frac{4^{-j}\,\eta_2}{(1+\|\,\eta\,\|)^2}\, d\eta \leq$$

$$\leq \int_{A^{*j}[0,\frac{1}{2}]^2} |\widehat{g}(\eta)|^2\, (1+\|\,\eta\,\|)^2\, \frac{4^{-j}\,(1+\|\,\eta\,\|)}{(1+\|\,\eta\,\|)^2}\, d\eta =$$

$$= \int_{A^{*j}[0,\frac{1}{2}]^2} |\widehat{g}(\eta)|^2\, (1+\|\,\eta\,\|)^2\, \frac{4^{-j}}{1+\|\,\eta\,\|}\, d\eta \leq 4^{-j}\,\|\,g\,\|_{W^1}^2 .$$

Aunque no se puede aplicar el Teorema LXXIII, aplicando el Lema LXXI como en la prueba del Teorema 46 se demuestra que $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-aproximación 1.

De manera análoga se comprueba que si $\forall m \in \mathbb{N}$ se define $A_m = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4^m \end{pmatrix}$, se tiene que $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A_m-aproximación k para $1 \leq k \leq m$, pero no proporciona orden de aproximación 1.

Ejemplo 6 *Sea como antes $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, y sea además la función $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dada por*

$$\widehat{\phi}(\xi_1,\xi_2) := \chi_{Q_1\setminus F}(\xi_1,\xi_2) + \sqrt{1-\|\,\xi\,\|^2}\,\chi_F(\xi_1,\xi_2) + \|\,\xi-(1,1)\,\|\,\chi_{\widetilde{F}}(\xi_1,\xi_2)\,, \tag{4.42}$$

donde $F := \{\xi = (\xi_1,\xi_2) \in Q_1\ :\ \xi_2 > |\xi_1|\}$ y $\widetilde{F} := (1,1)+F$. Se comprueba como antes que ϕ es un generador ortogonal de $\mathcal{S}(\phi)$ y por tanto $\sigma_{\mathcal{S}(\phi)} = |\widehat{\phi}|^2$.

Dado $k \in \overline{\mathbb{N}}$ se tiene

$$T_{\phi,k}(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \in Q_1 \setminus F \\ \frac{1}{\|\,\xi\,\|^{2(k-1)}} & \xi \in F \\ \frac{1-\|\,\xi-(1,1)\,\|^2}{\|\,\xi\,\|^{2k}} & \xi \in \widetilde{F} \\ \frac{1}{\|\,\xi\,\|^{2k}} & o.c. \end{cases} .$$

Se tiene $T_{\phi,0}$, $T_{\phi,1} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, pero $T_{\phi,k} \notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$ para $k \geq 2$. Además $\forall j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$\frac{1}{2^{-j}Q_1} \int_{2^{-j}Q_1} T_{\phi,1}(\xi)\, d\xi = 2^{2j} \int_{2^{-j}Q_1} T_{\phi,1}(\xi)\, d\xi = 2^{2j}\,|2^{-j}\,F| = |F| = \frac{1}{4}\,.$$

Por los Teoremas V y X $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de densidad 0 y de aproximación 1, pero no proporciona orden de densidad 1 ni orden de aproximación k para $k \geq 2$.

Por otro lado, como $\forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$ el conjunto $F \cap A^{*-j}Q_1$ es el triángulo formado por el origen y los puntos $(-2^{-2j-1}, 2^{-2j-1})$ y $(2^{-2j-1}, 2^{-2j-1})$ se tiene

$$\frac{|(Q_1 \setminus F) \cap A^{*-j}Q_1|}{|A^{*-j}Q_1|} = \frac{2^{-j}\,2^{-2j} - 2^{-2j}\,2^{-2j-1}}{2^{-j}\,2^{-2j}} = 1 - 2^{-j-1} \xrightarrow[j\to\infty]{} 1\,,$$

luego el origen es un punto de A^*-densidad de $Q_1 \setminus F$ y por tanto es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $T_{\phi,k}$ si ponemos $T_{\phi,k}(0) = 0\ \forall\, k \in \overline{\mathbb{N}}$. Entonces por el Teorema LXXVI $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de A-densidad 1.

Ejemplo 7 *Modificamos el ejemplo anterior considerando la misma matriz $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $\forall\, m \in \mathbb{N}$ la función $\phi_m \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dada por*

$$\widehat{\phi_m}(\xi_1,\xi_2) := \chi_{Q_1\setminus F}(\xi_1,\xi_2) + \sqrt{1 - \|\,\xi\,\|^{2m}}\,\chi_F(\xi_1,\xi_2) + \|\,\xi - (1,1)\,\|^m\,\chi_{\widetilde{F}}(\xi_1,\xi_2)\,, \tag{4.43}$$

donde $F := \{\xi = (\xi_1,\xi_2) \in Q_1\ :\ \xi_2 > |\xi_1|\}$ y $\widetilde{F} := (1,1) + F$ como antes. Análogamente se comprueba que:

- *ϕ_m es un generador ortogonal de $\mathcal{S}(\phi_m)$ y $\sigma_{\mathcal{S}(\phi_m)} = |\widehat{\phi_m}|^2$,*
- *$\mathcal{S}(\phi_m)$ proporciona orden de densidad k si $0 \leq k < m$,*
- *$\mathcal{S}(\phi_m)$ proporciona orden de aproximación m,*
- *$\mathcal{S}(\phi_m)$ no proporciona orden de densidad m,*
- *$\mathcal{S}(\phi_m)$ no proporciona orden de aproximación k para $k > m$,*
- *$\mathcal{S}(\phi_m)$ proporciona orden de A-densidad k si $0 \leq k \leq m$.*

Capítulo 5

Teoría de aproximación en espacios A-reducidos

Con el objetivo de estudiar las propiedades de aproximación en los espacios A-reducidos, introducimos las siguientes definiciones. Como en el anterior capítulo, A es una dilatación diagonalizable. Fijamos además un A^*-conjunto G de medida positiva.

Definición 31 *Fijemos una sucesión* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *de subespacios cerrados de* $L^2(\mathbb{R}^d)$*. Decimos que* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *proporciona orden de* (G, A)*-aproximación* $k \in \mathbb{N}$ *si* $\exists\, C > 0$ *tal que* $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \leq C\, \lambda_A^{-jk} \,\|\, g \,\|_{W^k} \,. \tag{5.1}$$

Análogamente, decimos que $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *proporciona orden de* (G, A)*-densidad* $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *si* $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$

$$\lambda_A^{jk}\, E(g, \mathcal{D}_A^j V_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \,. \tag{5.2}$$

Si $V_j = V\ \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$*, entonces se dice que* V *proporciona orden de* (G, A)*-aproximación (resp.* (G, A)*-densidad)* k*.*

Para extender las técnicas del capítulo anterior necesitamos un sustituto del cubo unidad Q_1, o del conjunto E de la Definición 25, que se adapte a los argumentos en H^2_G. Por el Teorema XVI existe $G_0 \subset \mathbb{R}^d$ de medida positiva tal que $G = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A^{*j} G_0$.

Definición 32 *Definimos*

$$\widetilde{G} := \bigsqcup_{j \leq 0} A^{*j} G_0 \,. \tag{5.3}$$

Observamos que $\widetilde{G} \subseteq A^*\widetilde{G} \subseteq G$, y que G_0 puede escogerse de manera que $\widetilde{G} \subseteq Q_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ y $\exists\, r > 0$ tal que $B_r \cap G \subseteq \widetilde{G}$.

En analogía con la Definición 26, introducimos la siguiente modificación:

Definición 33 *Dada $g \in W^k \cap H^2_G$ y $j \in \overline{\mathbb{N}}$ definimos*

$$\tau_{g,k}(j) := \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^d \setminus A^{*j}\widetilde{G}} (1 + \|\, \xi \,\|)^{2k}\, |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi}{\int_G (1 + \|\, \xi \,\|)^{2k}\, |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi} \right)^{1/2} . \tag{5.4}$$

Hacemos notar que esta definición queda comprendida en la anterior para funciones en H^2_G simplemente sustituyendo E por $\widetilde{G}$. Redefinimos $\tau_{g,k}$ de esta manera para no complicar más la notación. Se observa por tanto que

$$0 \le \tau_{g,k}(j) \le 1 \quad \text{y} \quad \tau_{g,k}(j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\,. \tag{5.5}$$

5.1. Órdenes para espacios principales

Desarrollamos una teoría análoga a la del capítulo anterior, siguiendo el mismo esquema. Los resultados siguientes se prueban de forma totalmente análoga a los correspondientes de las anteriores secciones. Comenzamos por obtener condiciones para los espacios principales.

El Lema LXX se reescribe de la siguiente manera:

Lema 65 *Existe una constante $C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$, $k, j \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$d_A^{\frac{j}{2}} \left\|\, (1 - \chi_{\widetilde{G}})\, \widehat{g}(A^{*j}\cdot) \,\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j)\, \|\, g \,\|_{W^k} . \tag{5.6}$$

La constante resultante de la prueba es $C := (L\,\theta)^{-k}$ donde $\theta := \inf_{\xi \in G \setminus \widetilde{G}} \|\, \xi \,\| > 0$ y L es la constante del Lema LXIX. El Lema LXXI se reescribe así:

Lema 66 *Sean V espacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Entonces $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$, $j \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$|E(g, \mathcal{D}_A^j V) - d_A^{-\frac{j}{2}}\, E(\chi_{\widetilde{G}}\, \widehat{g(A^{-j}\cdot)}, \widehat{V})| \le C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j)\, \|\, g \,\|_{W^k} . \tag{5.7}$$

El Lema LXXII puede utilizarse directamente, ya que $\widetilde{G} \subseteq Q_1$.

5.1.1. Órdenes de (G, A)-aproximación

Obtenemos condiciones para proporcionar orden de (G, A)-aproximación. Así, los resultados de la sección 4.2.1 toman esta forma:

Teorema 67 *Sean $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty \tag{5.8}$$

entonces $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-aproximación k.

Teorema 68 *Sean $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-aproximación k entonces*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty\,. \tag{5.9}$$

Los resultados correspondientes al caso estacionario son los siguientes:

Corolario 69 *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $T_{\phi,k} \in L^\infty(G)$ entonces $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de (G, A)-aproximación k.*

Corolario 70 *Sean $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{S}(\phi)$ proporciona orden de (G, A)-aproximación k entonces*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi)}}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty\,. \tag{5.10}$$

Los resultados obtenidos son totalmente análogos a los obtenidos para $L^2(\mathbb{R}^d)$. Simplemente se restringen las condiciones al A^*-conjunto G.

5.1.2. Órdenes de (G, A)-densidad

Análogamente, los resultados de la sección 4.2.2 se reescriben como sigue, obteniéndose condiciones para proporcionar órdenes de (G, A)-densidad.

Teorema 71 *Sean $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si se cumple (5.8) y $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0 \tag{5.11}$$

entonces $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-densidad k.

Teorema 72 *Sean* $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $k \in \overline{\mathbb{N}}$. *Si* $\{\mathcal{S}(\phi_j)\}_{j=0}^{\infty}$ *proporciona orden de* (G, A)*-densidad* k *entonces* $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi_j)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{5.12}$$

Los resultados correspondientes a sucesiones estacionarias son los siguientes:

Corolario 73 *Sean* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $k \in \overline{\mathbb{N}}$. *Si* $T_{\phi,k} \in L^\infty(G)$ *y*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*-j}\widetilde{G}} T_{\phi,k}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{5.13}$$

entonces $\mathcal{S}(\phi)$ *proporciona orden de* (G, A)*-densidad* k.

Corolario 74 *Sean* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $k \in \overline{\mathbb{N}}$. *Si* $T_{\phi,k} \in L^\infty(G)$ *y el origen es un punto de* (G, A^*)*-continuidad aproximativa de* $T_{\phi,k}$ *si ponemos* $T_{\phi,k}(0) = 0$, *entonces* $\mathcal{S}(\phi)$ *proporciona orden de* (G, A)*-densidad* k.

Corolario 75 *Sean* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *y* $k \in \overline{\mathbb{N}}$. *Si* $\mathcal{S}(\phi)$ *proporciona orden de* (G, A)*-densidad* k *entonces* $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_{\mathcal{S}(\phi)}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{5.14}$$

5.2. Superfunciones en espacios A-reducidos

Necesitamos ahora definir una función que induzca superfunciones en nuestros subespacios de H^2_G. La elección obvia es la siguiente:

Definición 34 *Definimos* $f^* := \check{\chi}_{\widetilde{G}}$.

Es inmediato comprobar que f^* es un generador de un tight frame de $\mathcal{S}(f^*) = H^2_{\widetilde{G}}$, $P_{\widehat{\mathcal{S}(f^*)}}\widehat{g} = \widehat{g}\,\chi_{\widetilde{G}}$, y por tanto

$$E(g, \mathcal{S}(f^*)) = \|\,(1-\chi_{\widetilde{G}})\,\widehat{g}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{5.15}$$

Análogamente al Lema LXXIX y usando el Lema 65, $\exists\, C > 0$ tal que $\forall\, g \in W^k \cap H^2_G$, $k, j \in \overline{\mathbb{N}}$

$$E(g, \mathcal{D}_A^j\mathcal{S}(f^*)) \leq C\, \lambda_A^{-jk}\, \tau_{g,k}(j)\, \|\, g\,\|_{W^k}\,. \tag{5.16}$$

A partir de esta estimación, la Proposición LXXVIII (que puede ser usada directamente) y (5.5), se demuestra el siguiente teorema de la misma manera en que fue demostrado el Teorema 50:

Teorema 76 *Sea $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y definamos $\phi_j^* := P_{V_j} f^*$ $\forall\, j \in \overline{\mathbb{N}}$. $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G,A)-aproximación $k \in \mathbb{N}$ (resp. orden de (G,A)-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$) si y sólo si $\{\mathcal{S}(\phi_j^*)\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G,A)-aproximación $k \in \mathbb{N}$ (resp. orden de (G,A)-densidad $k \in \overline{\mathbb{N}}$).*

Es decir, dada una sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ de subespacios invariantes por traslaciones, la sucesión $\{\phi_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión de superfunciones asociada.

Análogamente a lo hecho en el Lema LXXX, se comprueba que para todo V espacio invariante por traslaciones se tiene si $\phi^* := P_V f^*$

$$\sigma_V(\xi) = \sigma_{\mathcal{S}(\phi^*)}(\xi) \quad c.t.p.\, \xi \in \widetilde{G}\,. \tag{5.17}$$

Esto permite trasladar los resultados anteriores a espacios no principales también en términos de la función espectral, sin tener que explicitar superfunciones.

5.2.1. Órdenes de (G,A)-aproximación

Las condiciones para proporcionar órdenes de (G,A)-aproximación para espacios no necesariamente principales, son las siguientes:

Teorema 77 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1-\sigma_{V_j}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty \tag{5.18}$$

entonces $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G,A)-aproximación k.

Teorema 78 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G,A)-aproximación k entonces*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1-\sigma_{V_j}}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty\,. \tag{5.19}$$

Los enunciados para el caso estacionario son los siguientes:

Teorema 79 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si $T_{V,k} \in L^\infty(G)$ entonces V proporciona orden de (G,A)-aproximación k.*

Teorema 80 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. Si V proporciona orden de (G,A)-aproximación k entonces*

$$\sup_{j\in\overline{\mathbb{N}}} \left\| \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1-\sigma_V}{(\Lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty\,. \tag{5.20}$$

5.2.2. Órdenes de (G, A)-densidad

Similarmente obtenemos las condiciones para órdenes de (G, A)-densidad.

Teorema 81 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si se cumple (5.18) y $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_{V_j}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\, \xi \,\|)^{2k}}\, d\xi = 0 \tag{5.21}$$

entonces $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-densidad k.

Teorema 82 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_{V_j}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\, \xi \,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{5.22}$$

En el caso estacionario los resultados obtenidos son:

Teorema 83 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{V,k} \in L^{\infty}(G)$ y*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|A^{*-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*-j}\widetilde{G}} T_{V,k}(\xi)\, d\xi = 0 \tag{5.23}$$

entonces V proporciona orden de (G, A)-densidad k.

Teorema 84 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si $T_{V,k} \in L^{\infty}(G)$ y el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de $T_{V,k}$ si ponemos $T_{V,k}(0) = 0$, entonces V proporciona orden de (G, A)-densidad k.*

Teorema 85 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Si V proporciona orden de (G, A)-densidad k entonces $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\lambda_A}{\Lambda_A}\right)^{2jk} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1-\sigma_{V}(\xi)}{(\Lambda_A^{-j} + \|\, \xi \,\|)^{2k}}\, d\xi = 0\,. \tag{5.24}$$

5.3. Dilataciones isotrópicas

Con respecto a la aproximación en espacios A-reducidos, los resultados siguientes son demostrados de la misma manera que los correspondientes de la sección 4.4.1, por lo que los enunciamos sin demostración. Supongamos que A es isotrópica.

Teorema 86 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-aproximación k si y sólo si*

$$\sup_{j \in \overline{\mathbb{N}}} \left\| \frac{1 - \sigma_{V_j}}{(\lambda_A^{-j} + \|\cdot\|)^{2k}} \right\|_{L^\infty(G)} < \infty \,. \tag{5.25}$$

Corolario 87 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \mathbb{N}$. El espacio V proporciona orden de (G, A)-aproximación k si y sólo si $T_{V,k} \in L^\infty(G)$.*

Teorema 88 *Sean $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de subespacios invariantes por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. La sucesión $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ proporciona orden de (G, A)-densidad k si y sólo si se cumple (5.25) y $\forall\, l \in \overline{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|A^{*l-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*l-j}\widetilde{G}} \frac{1 - \sigma_{V_j}(\xi)}{(\lambda_A^{-j} + \|\,\xi\,\|)^{2k}} \, d\xi = 0 \,. \tag{5.26}$$

Corolario 89 *Sean V subespacio invariante por traslaciones y $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *El espacio V proporciona orden de (G, A)-densidad k,*

- *$T_{V,k} \in L^\infty(G)$ y*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|A^{*-j}\widetilde{G}|} \int_{A^{*-j}\widetilde{G}} T_{V,k}(\xi) \, d\xi = 0 \,. \tag{5.27}$$

- *$T_{V,k} \in L^\infty(G)$ y el origen es un punto de (G, A^*)-continuidad aproximativa de $T_{V,k}$ si ponemos $T_{V,k}(0) = 0$.*

Nótese que en general, en espacios A-reducidos no cabe comparación con el caso diádico, ya que G A^*-conjunto no tiene por qué ser $A_{(2)}$-conjunto, y por tanto H_G^2 no tiene por qué ser un espacio $A_{(2)}$-reducido.

Parte II

Apéndices

Apéndice A

Dilataciones

Dada una aplicación $A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ lineal invertible denotaremos $d_A := |det(A)|$. Su aplicación conjugada será denotada por A^* (obsérvese que $d_{A^*} = d_A > 0$). Si $j \in \mathbb{Z}$, A^j denotará la composición j veces de A si $j > 0$ y de A^{-1} si $j < 0$. $A^0 := Id$ será la aplicación identidad en $\mathbb{R}^d$.

Observación 5 *Si $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es medible, se tiene*

$$|A(E)| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A(E)}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A(E)}(Ay)\, d_A\, dy = d_A \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(y)\, dy = d_A\, |E| \,.$$

A.1. Matrices de enteros y grupos $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$

Es obvio que una aplicación lineal A cumple $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$ si y sólo si su matriz (en la base canónica de $\mathbb{R}^d$), que denotaremos también A, es una matriz formada por enteros. Basta observar que las columnas de la matriz asociada son las imágenes de los vectores de la base canónica. Observamos que en este caso el determinante de A es entero y entonces $d_A \in \mathbb{N}$ si A es invertible.

En este caso, se tiene que $A(\mathbb{Z}^d)$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{Z}^d$, y se puede definir el grupo cociente $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$, donde se considera la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{Z}^d$:

$$k \sim m \quad \Longleftrightarrow \quad k - m \in A(\mathbb{Z}^d)\,. \tag{A.1}$$

Denotaremos $\Delta_A \subseteq \mathbb{Z}^d$ un conjunto completo de representantes de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$. Se tiene el siguiente resultado (ver [144], [69] o [129]).

Proposición LXXXI *Sea A lineal e invertible tal que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$. Entonces el orden de $\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d$ es d_A.*

Demostración: Sea $\Delta_A = \{\gamma_j\}_{j=1}^{a}$, donde $a = Card(\mathbb{Z}^d/A\mathbb{Z}^d) \in \mathbb{N}$. Definimos

$$C := A^{-1}(\bigsqcup_{j=1}^{a}[0,1)^d + \gamma_j) = \bigsqcup_{j=1}^{a}(A^{-1}([0,1)^d) + A^{-1}\gamma_j)\,.$$

Como $\{[0,1)^d + k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ son disjuntos, también lo son $\{C+k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, ya que $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

$$A(C\cap(C+k)) = A(C)\cap A(C+k) =$$

$$= \left(\bigsqcup_{j=1}^{a}[0,1)^d + \gamma_j\right)\bigcap\left(\bigsqcup_{l=1}^{a}[0,1)^d + \gamma_l + Ak\right) = \varnothing\,.$$

Además,

$$A\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(C+k)\right) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^d} A(C+k) =$$

$$= \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^d}\bigsqcup_{j=1}^{a}([0,1)^d + \gamma_j + Ak) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^d}([0,1)^d + k) = \mathbb{R}^d\,,$$

luego $\bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}^d}(C+k) = \mathbb{R}^d$. Dicho de otra forma, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\chi_C(\xi+k) = 1$ para todo $\xi\in\mathbb{R}^d$, luego

$$|C| = \int_{\mathbb{R}^d}\chi_C(\xi)\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{[0,1)^d}\chi_C(\xi+k)\,d\xi = \int_{[0,1)^d}d\xi = 1\,.$$

Por otro lado,

$$|C| = \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^{a}\chi_{A^{-1}([0,1)^d)+A^{-1}\gamma_j}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^{a}\chi_{[0,1)^d+\gamma_j}(A\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{d_A}\sum_{j=1}^{a}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{[0,1)^d+\gamma_j}(\xi)\,d\xi = \frac{a}{d_A}\,,$$

luego $a = d_A$. ■

Definición 35 *Definimos la proyección* $\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1)^d$ *definida de forma que*

$$\{\pi(x)\} = (x+\mathbb{Z}^d)\cap[0,1)^d \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^d\,. \tag{A.2}$$

Los tres siguientes resultados pueden encontrarse en [129] o [40] (ver [131]).

Lema LXXXII *Sea A lineal invertible tal que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$. Entonces los conjuntos $\Omega_\gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ ($\gamma \in \Delta_A$) dados por*

$$A(\Omega_\gamma) = [0,1)^d + \gamma \quad (\gamma \in \Delta_A) \tag{A.3}$$

satisfacen

$$[0,1)^d = \bigsqcup_{\gamma \in \Delta_A} \pi(\Omega_\gamma)\,, \tag{A.4}$$

y $\pi|_{\Omega_\gamma}$ es inyectiva para cada $\gamma \in \Delta_A$.

Demostración: Definimos $\forall\, \gamma \in \Delta_A$

$$\begin{array}{rccl} S_\gamma: & [0,1)^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ & x & \longmapsto & A^{-1}(x+\gamma) \end{array}.$$

Fijado $\gamma \in \Delta_A$, claramente S_γ es inyectiva y $\Omega_\gamma := S_\gamma([0,1)^d)$ es medible y satisface (A.3). Observamos que como Ω_γ es acotado, $\pi|_{\Omega_\gamma}$ es una aplicación que restringida a cada miembro de una cierta partición medible y finita de Ω_γ (a saber, $\{\Omega_\gamma \cap ([0,1)^d + k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$), es una traslación en cada uno de ellos. Además $|\Omega_\gamma| = d_A^{-1}$.

Dados $x, y \in [0,1)^d$ y $\gamma, \delta \in \Delta_A$,

$$\pi(S_\gamma(x)) = \pi(S_\delta(y)) \Longleftrightarrow S_\gamma(x) - S_\delta(y) \in \mathbb{Z}^d \Longleftrightarrow$$

$$A^{-1}(x-y) + A^{-1}(\gamma-\delta) \in \mathbb{Z}^d \Longrightarrow$$

$$x - y = A[A^{-1}(x-y) + A^{-1}(\gamma-\delta)] + \delta - \gamma \in \mathbb{Z}^d\,.$$

Por tanto $x = y$ y $\gamma - \delta \in A\mathbb{Z}^d$, luego $\gamma = \delta$.

Esto demuestra que para cada $\gamma \in \Delta_A$ la aplicación $\pi \circ S_\gamma : [0,1)^d \longrightarrow \pi(\Omega_\gamma)$ es biyectiva, y que los conjuntos $\{\pi(\Omega_\gamma)\}_{\gamma\in\Delta_A}$ son disjuntos. Por tanto $\pi|_{\Omega_\gamma}$ también es inyectiva.

Dado $x \in [0,1)^d$, sea ahora $y := \pi(Ax)$. Como $Ax - y \in \mathbb{Z}^d$, $\exists!\gamma \in \Delta_A, k \in \mathbb{Z}^d$ tales que $Ax - y = \gamma - Ak$. Entonces $S_\gamma(y) = S_\gamma(Ax - \gamma + Ak) = x + k \in \Omega_\gamma$, y por tanto $x = \pi \circ S_\gamma(y) \in \pi(\Omega_\gamma)$. Esto termina de demostrar (A.4). ■

Es sencillo comprobar que la misma demostración funciona para cualquier conjunto E congruente con $[0,1)^d$, es decir, tal que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \chi_E(x+k) = 1$ para *c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^d$. En particular, el lema es cierto para $Q_1 = [-1/2, 1/2)^d$.

Definición 36 *Dada A lineal invertible tal que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$, definimos su* ***aplicación inducida*** *sobre $\mathbb{T}^d$ como*

$$\begin{array}{rccl} \widehat{A}: & \mathbb{T}^d & \longrightarrow & \mathbb{T}^d \\ & x+\mathbb{Z}^d & \longmapsto & \widehat{A}(x+\mathbb{Z}^d) := Ax+\mathbb{Z}^d \end{array}. \tag{A.5}$$

Observamos que está bien definida, ya que si $x \in \mathbb{R}^d$ y $k \in \mathbb{Z}^d$ se tiene $A(x+k) - Ax = Ak \in \mathbb{Z}^d$.

Lema LXXXIII *Si A es lineal invertible tal que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$ y $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\widehat{A}t)\,dt = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\,dt\,. \tag{A.6}$$

Demostración: Usando que f es $\mathbb{Z}^d$-periódica y aplicando el Lema LXXXII, se tiene

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\widehat{A}t)\,dt = \int_{[0,1)^d} f(Ax)\,dx = \sum_{\gamma\in\Delta_A} \int_{\pi(\Omega_\gamma)} f(Ax)\,dx =$$

$$= \sum_{\gamma\in\Delta_A} \int_{\Omega_\gamma} f(Ax)\,dx = \sum_{\gamma\in\Delta_A} d_A^{-1} \int_{[0,1)^d+\gamma} f(x)\,dx = \int_{[0,1)^d} f(x)\,dx\,.$$

■

Lema LXXXIV *Sean A lineal invertible tal que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$, $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ y $W \subseteq \mathbb{R}^d$ medible tal que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \chi_W(x+k) = 1$ para c.t.p. $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces*

$$\int_W f(Ax)\,dx = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\,dt\,. \tag{A.7}$$

Demostración: Por el Lema LXXXIII se tiene

$$\int_W f(Ax)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1)^d+k} \chi_W(x)\,f(Ax)\,dx =$$

$$= \int_{[0,1)^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \chi_W(x+k)\,f(Ax+Ak)\,dx =$$

$$= \int_{[0,1)^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \chi_W(x+k) \right) f(Ax)\,dx = \int_{\mathbb{T}^d} f(\widehat{A}t)\,dt = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\,dt\,.$$

■

El Lema LXXXII también tiene esta interesante consecuencia:

Lema 90 *Sean A lineal invertible tal que $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$, los conjuntos definidos en (A.3) como $\Omega_\gamma := A^{-1}([0,1)^d + \gamma) \subseteq \mathbb{R}^d$ ($\gamma \in \Delta_A$), y $\forall\, \gamma \in \Delta_A, k \in \mathbb{Z}^d$*

$$\omega_{k,\gamma} := \Omega_\gamma \cap ([0,1)^d + k)\,. \tag{A.8}$$

Entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$A^n([0,1)^d) = \bigsqcup_{\gamma \in \Delta_A} \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (A^n(\omega_{k,\gamma}) - A^n k) \tag{A.9}$$

y

$$A^{n-1}([0,1)^d + \gamma) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} A^n(\omega_{k,\gamma}) \quad \forall\, \gamma \in \Delta_A\,. \tag{A.10}$$

Demostración: Fijemos $\gamma \in \Delta_A$. Observamos que salvo un conjunto finito, los conjuntos $\omega_{k,\gamma}$ son vacíos, ya que Ω_γ es acotado. Claramente se tiene

$$\Omega_\gamma = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_{k,\gamma}\,. \tag{A.11}$$

Usando el Lema LXXXII, como $\pi|_{\Omega_\gamma}$ es inyectiva tenemos que

$$\pi(\Omega_\gamma) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \pi(\omega_{k,\gamma}) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (\omega_{k,\gamma} - k)\,,$$

y por tanto

$$A \circ \pi(\Omega_\gamma) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} A(\omega_{k,\gamma} - k) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (A(\omega_{k,\gamma}) - Ak)\,.$$

Como $[0,1)^d = \bigsqcup_{\gamma \in \Delta_A} \pi(\Omega_\gamma)$,

$$A([0,1)^d) = \bigsqcup_{\gamma \in \Delta_A} A \circ \pi(\Omega_\gamma) = \bigsqcup_{\gamma \in \Delta_A} \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (A(\omega_{k,\gamma}) - Ak)\,.$$

Por otro lado

$$[0,1)^d + \gamma = A(\Omega_\gamma) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^d} A(\omega_{k,\gamma})\,.$$

Éstas son las identidades buscadas para $n = 1$, y aplicando A^{n-1} a ambos lados se obtienen (A.9) y (A.10). ■

A.2. Aplicaciones lineales expansivas

Definición 37 *Dada una aplicación lineal A en $\mathbb{R}^d$, decimos que A es **lineal expansiva** si $\exists\, C > 0$, $\beta > 1$ tales que*

$$\left\| A^j x \right\|_{\mathbb{R}^d} \geq C\, \beta^j \, \| x \|_{\mathbb{R}^d} \quad \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}},\, \forall\, x \in \mathbb{R}^d . \tag{A.12}$$

Claramente se puede suponer $C < 1$. Denotaremos las aplicaciones lineales expansivas por $\mathcal{LE}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{LE}$.

Con un simple cambio de variable se comprueba que la condición anterior es equivalente a

$$\left\| A^{-j} x \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\beta^{-j}}{C} \, \| x \|_{\mathbb{R}^d} \quad \forall\, j \in \overline{\mathbb{N}},\, \forall\, x \in \mathbb{R}^d . \tag{A.13}$$

La siguiente proposición es básica, pero la demostramos aquí por completitud. Puede encontrarse por ejemplo en [131].

Proposición LXXXV *Una aplicación lineal A es lineal expansiva si y sólo si todos sus autovalores tienen módulo estrictamente mayor que uno.*

Demostración: Supongamos que A es lineal expansiva. Procedemos por reducción al absurdo. Sean λ autovalor tal que $|\lambda| \leq 1$, v un autovector asociado a él y $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C\, \beta^{j_0} > 1$. Entonces

$$\| v \|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\beta^{-j_0}}{C} \left\| A^{j_0} v \right\|_{\mathbb{R}^d} < \left\| A^{j_0} v \right\|_{\mathbb{R}^d} = |\lambda|^{j_0} \, \| v \|_{\mathbb{R}^d} \leq \| v \|_{\mathbb{R}^d} ,$$

lo cual es absurdo.

Recíprocamente, supongamos que todos los autovalores tienen módulo mayor que uno. El radio espectral de A se define como

$$\rho(A) := \max\{ |\lambda| \,:\, \lambda \text{ es un autovalor de } A \} . \tag{A.14}$$

Es conocido que se tiene $\rho(A) \leq \| A \|$ y $\lim_{j\to\infty} \| A^j \|^{\frac{1}{j}} = \rho(A)$ (ver [123]).

Vamos a comprobar la condición (A.13), así que observamos que todos los autovalores de A^{-1} tienen módulo menor que uno, luego $\rho(A^{-1}) < 1$. Sea $\varepsilon \in (0, 1 - \rho(A^{-1}))$. Como $\lim_{j\to\infty} \| A^{-j} \|^{\frac{1}{j}} = \rho(A^{-1})$, $\exists\, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, j > j_0$ $|\rho(A^{-1}) - \| A^{-j} \|^{\frac{1}{j}}| < \varepsilon$. Sean ahora

$$\alpha := \rho(A^{-1}) + \varepsilon \quad \text{y} \quad D := \max_{0 \leq j \leq j_0} \left(\frac{\| A^{-1} \|}{\rho(A^{-1})} \right)^j .$$

Observamos que $\alpha < 1$ y $D \geq 1$. Finalmente se tiene si $j > j_0$

$$\| A^{-j} \| < (\rho(A^{-1}) + \varepsilon)^j \leq D\, \alpha^j \,,$$

y si $0 \leq j \leq j_0$

$$\| A^{-j} \| \leq \| A^{-1} \|^j = \frac{\alpha^j \, \| A^{-1} \|^j}{(\rho(A^{-1}) + \varepsilon)^j} \leq \frac{\alpha^j \, \| A^{-1} \|^j}{\rho(A^{-1})^j} \leq D\, \alpha^j \,.$$

Si se define $\beta := \alpha^{-1}$ y $C := D^{-1}$ se tienen las constantes de (A.12). Obsérvese que $1 < \beta < \rho(A^{-1})^{-1} = \rho(A)$. ■

En vista de la Proposición anterior toda aplicación lineal expansiva es invertible, y si $A \in \mathcal{LE}$ entonces $A^* \in \mathcal{LE}$. A continuación demostramos otros hechos básicos que nos serán útiles más adelante:

Lema LXXXVI *Si A es una aplicación lineal expansiva,*

$$\| A^j x \|_{\mathbb{R}^d} \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty \quad y \quad A^j x \xrightarrow[j \to -\infty]{} 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d \,. \tag{A.15}$$

Demostración: Efectivamente, $\exists C > 0, \beta > 1$ tales que $\| A^j x \|_{\mathbb{R}^d} \geq C\, \beta^j \, \| x \|_{\mathbb{R}^d}$ $\forall\, j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^d$, luego $\| A^j x \|_{\mathbb{R}^d} \geq C\, \beta^j \, \| x \|_{\mathbb{R}^d} \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty$. Por otro lado, usando (A.13) se tiene $\| A^{-j} x \|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\| x \|_{\mathbb{R}^d}}{C\, \beta^j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$. ■

El siguiente resultado puede encontrarse en [79], [44], [40] o [131].

Lema LXXXVII *Si A es una aplicación lineal expansiva, $\bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}(\mathbb{Z}^d)$ es denso en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración: Procedemos por reducción al absurdo. Si se tuviese lo contrario, existiría una bola en $\mathbb{R}^d$ tal que $B_r(x) \cap \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}(\mathbb{Z}^d) = \varnothing$. Sea $l > -\log_\beta \frac{C\, r}{\sqrt{d}}$ entero no negativo, donde C, β son las constantes de (A.12). Como $A \in \mathcal{LE}$, por (A.13) si $\left\| y - A^l x \right\|_{\mathbb{R}^d} < \sqrt{d}$, se tiene $\left\| A^{-l} y - x \right\|_{\mathbb{R}^d} \leq \frac{\beta^{-l}}{C} \left\| y - A^l x \right\|_{\mathbb{R}^d} < \frac{\sqrt{d}\, \beta^{-l}}{C} < r$. Es decir, $B_{\sqrt{d}}(A^l x) \subseteq A^l(B_r(x))$. Claramente $\exists\, k \in \mathbb{Z}^d$ tal que $k \in B_{\sqrt{d}}(A^l x) \subseteq A^l(B_r(x))$, luego $A^{-l} k \in B_r(x) \cap A^{-l}(\mathbb{Z}^d)$, que contradice lo supuesto. ■

Definición 38 *Diremos que A es una **dilatación** si es una aplicación lineal expansiva en $\mathbb{R}^d$ tal que cumple $A(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathbb{Z}^d$.*

Obsérvese que en este apéndice todas las operaciones y relaciones entre o sobre conjuntos pueden ser entendidas de la manera usual, distinguiendo entre conjuntos de medida nula.

Apéndice B

Estructura de los espacios invariantes por traslaciones

Los resultados de este Apéndice pueden encontrarse en [52], [53] y [54].

B.1. Producto corchete

Ahora introducimos una notación que nos será útil en lo siguiente: dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos su **producto corchete** como

$$[f, g](t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(t+k)\, \overline{g(t+k)} \quad (t \in \mathbb{T}^d)\,. \tag{B.1}$$

En relación con el estudio de las funciones de escala y ondículas el producto corchete fue introducido en [89], y en [53] (ver [125]) se generaliza su uso a los espacios invariantes por traslaciones. El producto corchete $[f, g]$ es una función $\mathbb{Z}^d$-periódica, integrable, y está bien definido puesto que

$$\| \, [f, g] \, \|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \leq \| \, f \, \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, \| \, g \, \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,. \tag{B.2}$$

Nótese que $\forall \, N \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{|k| \leq N} f(t+k)\, \overline{g(t+k)} \right| dt \leq \sum_{|k| \leq N} \int_{[0,1)^d} |f(\xi + k)\, g(\xi + k)| \, d\xi =$$

$$= \sum_{|k| \leq N} \int_{[0,1)^d + k} |f(x)\, g(x)| \, dx = \int_{\bigsqcup_{|k| \leq N} [0,1)^d + k} |f(x)\, g(x)| \, dx \leq \| \, f \, g \, \|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,,$$

luego por el teorema de la convergencia monótona y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene la desigualdad anterior.

Definición 39 *Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos su* ***función de correlación***

$$\gamma_{f,g}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\,\overline{g(y)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\overline{g(y-x)}\,dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d\,, \qquad \text{(B.3)}$$

Si $f = g$, hablaremos de la ***función de autocorrelación*** *de f.*

Lema LXXXVIII *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces los coeficientes de Fourier de $[\widehat{f}, \widehat{g}]$ vienen dados por $[\widehat{f}, \widehat{g}]\widehat{\ }(k) = \gamma_{f,g}(-k)\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^d$, y su serie de Fourier se escribe*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g(x-k)}\,dx\, e^{-2\pi i k\cdot\xi}\,. \qquad \text{(B.4)}$$

Demostración: Se tiene $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$

$$\gamma_{f,g}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g_k(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,e^{2\pi i k\cdot\xi}\,d\xi =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1)^d+l} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,e^{2\pi i k\cdot\xi}\,d\xi = \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1)^d} \widehat{f}(\xi+l)\,\overline{\widehat{g}(\xi+l)}\,e^{2\pi i k\cdot\xi}\,d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} [\widehat{f}, \widehat{g}](\xi)\,e^{2\pi i k\cdot\xi}\,d\xi = [\widehat{f}, \widehat{g}]\widehat{\ }(-k)\,.$$

■

Corolario LXXXIX *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$\mathcal{S}(f) \perp \mathcal{S}(g) \quad \Leftrightarrow \quad [\widehat{f}, \widehat{g}] = 0 \quad c.t.p.\,. \qquad \text{(B.5)}$$

■

B.2. Espacios principales

Los dos siguientes resultados muestran la estructura de los espacios invariantes por traslaciones principales.

Teorema XC *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$\mathcal{S}(f) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) \,:\, \widehat{g} = \nu\,\widehat{f},\, \nu\ \mathbb{Z}^d\text{-periódica y medible}\,\}\,. \tag{B.6}$$

Además, la proyección ortogonal $P_{\mathcal{S}(f)}$ sobre $\mathcal{S}(f)$ viene dada por

$$(P_{\mathcal{S}(f)}g)\widehat{\ } = P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g} = \nu_g\,\widehat{f} \quad \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^d)\,, \tag{B.7}$$

donde

$$\nu_g = \frac{[\widehat{g}, \widehat{f}]}{[\widehat{f}, \widehat{f}]}\,\chi_{E_f}, \qquad E_f := \{\xi \in \mathbb{R}^d \,:\, [\widehat{f}, \widehat{f}](\xi) \neq 0\}\,. \tag{B.8}$$

Demostración:

Calculemos la proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}(f)^\perp$. Sean $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y ν_g como en el enunciado. Claramente por Cauchy-Schwarz se tiene

$$|[\widehat{g}, \widehat{f}]|^2 \leq [\widehat{f}, \widehat{f}]\,[\widehat{g}, \widehat{g}]\,, \tag{B.9}$$

luego $|\nu_g|^2\,[\widehat{f}, \widehat{f}] \leq [\widehat{g}, \widehat{g}]$. Periodizando se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nu_g(\xi)\,\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi = \int_{\mathbb{T}^d} |\nu_g(t)|^2\,[\widehat{f}, \widehat{f}](t)\,dt \leq \int_{\mathbb{T}^d} [\widehat{g}, \widehat{g}](t)\,dt = \|\,g\,\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,,$$

luego $\nu_g\,\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y el operador lineal $Q(\widehat{g}) := \nu_g\,\widehat{f}$ es acotado. Además obtenemos que $\nu_g \in L^2_{[\widehat{f},\widehat{f}]}(\mathbb{T}^d)$. Dado $k \in \mathbb{Z}^d$, $\forall\, \xi \in E_f$

$$Q(\widehat{f_{(k)}})(\xi) = \nu_{f_{(k)}}(\xi)\,\widehat{f}(\xi) = \frac{[e^{-2\pi i k\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi), \widehat{f}(\xi)]}{[\widehat{f}, \widehat{f}](\xi)}\,\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi i k\cdot\xi}\,\widehat{f}(\xi) = \widehat{f_{(k)}}(\xi)\,.$$

Como $\widehat{f_{(k)}}(\xi) = 0$ para $\xi \notin E_f$, $Q(\widehat{f_{(k)}}) = \widehat{f_{(k)}}$. Por la linealidad y la continuidad de Q, se tiene $P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g} = \widehat{g} = \nu_g\,\widehat{f} = Q(\widehat{g})$ si $g \in \mathcal{S}(f)$. Por el Corolario LXXXIX, si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$[\widehat{g}, \widehat{f}] = [P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g}, \widehat{f}] + [P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}^\perp}\widehat{g}, \widehat{f}] = [P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g}, \widehat{f}]$$

y por tanto $\nu_g = \nu_{P_{\mathcal{S}(f)}g}$. Entonces $Q = P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}$.

Si $g \in \mathcal{S}(f)$, $\widehat{g} = P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g} = \nu_g\, \widehat{f}$. Por otro lado, supongamos que tenemos $h = \nu\, \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para alguna ν $\mathbb{Z}^d$-periódica y medible. Entonces $g := \check{h} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ satisface $\nu_g(\xi) = \frac{[h,\widehat{f}](\xi)}{[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)} = \nu(\xi)$ si $\xi \in E_f$. Esto implica

$$\widehat{P_{\mathcal{S}(f)}g} = P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}h = \nu_g\, \widehat{f} = \nu\, \widehat{f} = h\,,$$

luego $h = P_{\mathcal{S}(f)}h \in \mathcal{S}(f)$.

■

Teorema XCI *Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la función $\widetilde{f}$ dada por*

$$\widetilde{f} := \left(\frac{\widehat{f}}{[\widehat{f},\widehat{f}]^{\frac{1}{2}}}\, \chi_{E_f} \right)^{\vee} \tag{B.10}$$

genera un tight frame de $\mathcal{S}(f)$. Por tanto

$$\sigma_{\mathcal{S}(f)} = \frac{|\widehat{f}|^2}{[\widehat{f},\widehat{f}]}\, \chi_{E_f} \quad y \quad \sigma(\mathcal{S}(f)) = E_f = \{\xi \in \mathbb{R}^d \,:\, [\widehat{f},\widehat{f}](\xi) \neq 0\}\,. \tag{B.11}$$

Demostración: En primer lugar periodizando se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{E_f} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)}\, d\xi = \int_{E_f\cap Q_1} \frac{[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)}{[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)}\, d\xi = |E_f \cap Q_1|\,,$$

luego $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Como $\widehat{\widetilde{f}} = \frac{\chi_{E_f}}{[\widehat{f},\widehat{f}]^{\frac{1}{2}}}\, \widehat{f}$, por el Teorema XC $\widetilde{f} \in \mathcal{S}(f)$.

Ahora dado $g \in \mathcal{S}(f)$, se tiene

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |<g, \widetilde{f}_{(k)}>|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi)\, \overline{\widehat{\widetilde{f}}(\xi)}\, e^{2\pi i k\cdot\xi}\, d\xi \right|^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{E_f\cap Q_1} \frac{[\widehat{g},\widehat{f}](\xi)}{|[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)|^{\frac{1}{2}}}\, e^{2\pi i k\cdot\xi}\, d\xi \right|^2 = \int_{E_f\cap Q_1} \left| \frac{[\widehat{g},\widehat{f}](\xi)}{|[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)|^{\frac{1}{2}}} \right|^2 d\xi =$$

$$= \int_{E_f\cap Q_1} \frac{|[\widehat{g},\widehat{f}](\xi)|^2}{|[\widehat{f},\widehat{f}](\xi)|^2}\, [\widehat{f},\widehat{f}](\xi)\, d\xi = \int_{E_f} |\nu_g(\xi)|^2\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2\, dx\,.$$

El resto de las conclusiones son inmediatas. ■

B.3. Proyecciones ortogonales

A continuación demostramos algunas propiedades de las proyecciones ortogonales sobre espacios invariantes por traslaciones. El siguiente resultado es un hecho sencillo y bien conocido.

Proposición XCII *Sea V un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$. V es invariante por traslaciones si y sólo si P_V conmuta con las traslaciones. Es decir, si*

$$P_V \mathcal{T}_k f = \mathcal{T}_k P_V f \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d, \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{B.12}$$

Demostración: Sea $g := P_V \mathcal{T}_k f \in V$. g es el único elemento de V que satisface $\|\, \mathcal{T}_k f - g \,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\, \mathcal{T}_k f - h \,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $\forall\, h \in V$. Entonces $\|\, f - \mathcal{T}_{-k} g \,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\, \mathcal{T}_k f - g \,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\, \mathcal{T}_k f - h \,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\, f - \mathcal{T}_{-k} h \,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $\forall\, h \in V$. Como $\mathcal{T}_{-k} V = V$, se tiene $P_V f = \mathcal{T}_{-k} g = \mathcal{T}_{-k} P_V \mathcal{T}_k f$.

Recíprocamente, si P_V conmuta con las traslaciones, $\forall\, k \in \mathbb{Z}^d$ y $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene $\mathcal{T}_k f = \mathcal{T}_k P_V f = P_V \mathcal{T}_k f$, luego $\mathcal{T}_k f \in V$. Así, V es invariante por traslaciones. ■

El siguiente lema es una sencilla consecuencia.

Lema XCIII *Si V es invariante por traslaciones y ν es un polinomio trigonométrico, entonces $P_{\widehat{V}}(\nu\, f) = \nu\, P_{\widehat{V}} f$ $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración: Denotemos $\nu(\xi) = \sum_{k\in\Gamma} a_k\, e^{-2\pi i k\cdot\xi}$ y sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. A partir de la Proposición XCII se tiene $P_V(\sum_{k\in\Gamma} a_k\, \mathcal{T}_k f) = \sum_{k\in\Gamma} a_k\, \mathcal{T}_k P_V f$. Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados se llega a $P_{\widehat{V}}(\nu\, \widehat{f}) = \nu\, P_{\widehat{V}} \widehat{f}$. ■

Los siguientes tres lemas son usados en la Teoría de superfunciones.

Lema XCIV *Si V es un espacio invariante por traslaciones, entonces*

$$P_{\mathcal{S}(P_V f)} f = P_V f \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,. \tag{B.13}$$

Demostración: Fijamos $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y definimos $V' := V \ominus \mathcal{S}(P_V f)$. Entonces V' es invariante por traslaciones y $P_V = P_{\mathcal{S}(P_V f)} + P_{V'}$. Puesto que V' y $\mathcal{S}(P_V f)$ son ortogonales se tiene $P_{V'} P_V f = 0$, y por tanto

$$P_V f = P_V^2 f = P_{\mathcal{S}(P_V f)} P_V f + P_{V'} P_V f = P_{\mathcal{S}(P_V f)} P_V f =$$

$$= P^2_{\mathcal{S}(P_V f)} f + P_{\mathcal{S}(P_V f)} P_{V'} f = P^2_{\mathcal{S}(P_V f)} f = P_{\mathcal{S}(P_V f)} f\,.$$

■

El siguiente resultado generaliza el Lema XCIII.

Proposición XCV *Sea* V *espacio invariante por traslaciones y* $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. *Si para alguna función* ν $\mathbb{Z}^d$*-periódica medible* $\nu\,\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *entonces* $P_{\widehat{V}}(\nu\,\widehat{g}) = \nu\,P_{\widehat{V}}\widehat{g}$.

Demostración: En primer lugar, por el Teorema XC $\nu\,\widehat{g} \in \widehat{\mathcal{S}(g)}$. Si V es un espacio principal ($V = \mathcal{S}(f)$), entonces

$$P_{\widehat{V}}(\nu\,\widehat{g}) = P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}(\nu\,\widehat{g}) = \frac{[\nu\,\widehat{g},\widehat{f}]}{[\widehat{f},\widehat{f}]}\,\widehat{f} = \nu\,\frac{[\widehat{g},\widehat{f}]}{[\widehat{f},\widehat{f}]}\,\widehat{f} = \nu\,P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}(\widehat{g}) = \nu\,P_{\widehat{V}}(\widehat{g})\,.$$

En el caso general, en primer lugar se observa que $P_{\widehat{V}}(\nu\,\widehat{g}) \in \mathcal{S}(P_{\widehat{V}}\widehat{g})$. En efecto, si $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios trigonométricos tal que $\nu_n\,\widehat{g} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu\,\widehat{g}$ (que siempre existe por el Teorema XC), por el Lema XCIII y el Teorema XC se tiene

$$P_{\widehat{V}}(\nu\,\widehat{g}) = P_{\widehat{V}}(\lim_{n\to\infty} \nu_n\,\widehat{g}) = \lim_{n\to\infty} P_{\widehat{V}}(\nu_n\,\widehat{g}) = \lim_{n\to\infty} \nu_n\,P_{\widehat{V}}(\widehat{g}) \in \mathcal{S}(P_{\widehat{V}}\widehat{g})\,.$$

Entonces aplicando el resultado para el caso principal y el Lema XCIV

$$P_{\widehat{V}}(\nu\,\widehat{g}) = P_{\mathcal{S}(P_{\widehat{V}}\widehat{g})}(\nu\,\widehat{g}) = \nu\,P_{\mathcal{S}(P_{\widehat{V}}\widehat{g})}(\widehat{g}) = \nu\,P_{\widehat{V}}(\widehat{g})\,.$$

■

Lema XCVI *Sea* V *espacio invariante por traslaciones. Entonces* $P_V P_{\mathcal{S}(f)} = P_{\mathcal{S}(P_V f)} P_{\mathcal{S}(f)}$ $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demostración: Dada $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, por el Teorema XC $P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g} = \nu_g\,\widehat{f}$, y por la Proposición XCV $P_{\widehat{V}}(\nu_g\,\widehat{f}) = \nu_g\,P_{\widehat{V}}\widehat{f}$. Por otro lado, también por la Proposición XCV y el Lema XCIV

$$P_{\widehat{\mathcal{S}(P_V f)}} P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g} = P_{\widehat{\mathcal{S}(P_V f)}}(\nu_g\,\widehat{f}) = \nu_g\,P_{\widehat{\mathcal{S}(P_V f)}}\widehat{f} = \nu_g\,P_{\widehat{V}}\widehat{f}\,.$$

Entonces $P_{\widehat{V}} P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g} = P_{\widehat{V}}(\nu_g\,\widehat{f}) = \nu_g\,P_{\widehat{V}}\widehat{f} = P_{\widehat{\mathcal{S}(P_V f)}} P_{\widehat{\mathcal{S}(f)}}\widehat{g}$. ■

El siguiente resultado es un hecho sencillo y bien conocido.

Lema XCVII *Sean A aplicación lineal invertible y V subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$P_{\mathcal{D}_A^j V} f = P_V(f(A^{-j}\cdot))(A^j\cdot) \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d),\, j \in \mathbb{Z}\,. \tag{B.14}$$

Demostración: Denotemos para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\widetilde{h} := P_V f$. Entonces $\forall j \in \mathbb{Z}$, $h \in V$

$$\left\| f(A^j\cdot) - \widetilde{h}(A^j\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = d_A^{-j/2} \left\| f - \widetilde{h} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq d_A^{-j/2} \| f - h \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \| f(A^j\cdot) - h(A^j\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,,$$

luego $P_{\mathcal{D}_A^j V}(f(A^j\cdot)) = \widetilde{h}(A^j\cdot) = P_V f(A^j\cdot)$. ■

Bibliografía

[1] Auscher, P.; *Toute base d'ondelettes régulières de $L^2(\mathbb{R})$ est issue d'une analyse multi-résolution régulière.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315 (1992), no. 12, 1227-1230.

[2] Auscher, P.; *Solution of two problems on wavelets.* J. Geom. Anal. 5 (1995), no. 2, 181-236.

[3] Baggett, L.; Carey, A.; Moran, W.; Ohring, P.; *General existence theorems for orthonormal wavelets, an abstract approach.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 31 (1995), no. 1, 95-111.

[4] Baggett, L.W.; Courter, J.E.; Merrill, K.D.; *The construction of wavelets from generalized conjugate mirror filters in $L^2(\mathbb{R}^n)$.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 13 (2002), no. 3, 201-223.

[5] Baggett, L.W.; Furst, V.; Merrill, K.D.; Packer, J.A.; *Generalized filters, the low-pass condition, and connections to multiresolution analyses.* J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 9, 2760-2779.

[6] Baggett, L.W.; Furst, V.; Merrill, K.D.; Packer, J.A.; *Classification of generalized multiresolution analyses.* J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 12, 4210-4228.

[7] Baggett, L.W.; Jorgensen, P.E.T.; Merrill, K.D.; Packer, J.A.; *Construction of Parseval wavelets from redundant filter systems.* J. Math. Phys. 46 (2005), no. 8, 083502, 28 pp.

[8] Baggett, L.W.; Larsen, N.S.; Merrill, K.D.; Packer, J.A.; Raeburn, I.; *Generalized multiresolution analyses with given multiplicity functions.* J. Fourier Anal. Appl. 15 (2009), no. 5, 616-633.

[9] Baggett, L.W.; Medina, H.A.; Merrill, K.D.; *Generalized multiresolution analyses and a construction procedure for all wavelet sets in $\mathbb{R}^n$.* J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999), no. 6, 563-573.

[10] Bakić, D.; *Semi-orthogonal Parseval frame wavelets and generalized multiresolution analyses.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 21 (2006), no. 3, 281-304.

[11] G. Battle; *Phase space localization theorem for ondelettes*, J. Math. Phys. 30 (1989), no. 10, 2195-2196.

[12] Benedetto, J.J.; Li, S.; *Multiresolution analysis frames with applications.* In "ICASSP'93", Minneapolis, III, April 26-30, 1993, 304-307.

[13] Benedetto, J.J.; Li, S.; *The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 5 (1998), no. 4, 389-427.

[14] Benedetto, J.J.; Romero, J.R.; *The construction of d-dimensional multiresolution analysis frames.* J. Appl. Funct. Anal. 2 (2007), no. 4, 403-426.

[15] Bonami, A.; Soria, F.; Weiss, G.; *Band-limited wavelets.* J. Geom. Anal. 3, no. 6 (1993), 543-578.

[16] Bownik, M.; *A characterization of affine dual frames in $L^2(\mathbb{R}^n)$.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 8 (2000), no. 2, 203-221.

[17] Bownik, M.; *The structure of shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$.* J. Funct. Anal. 177 (2000), no. 2, 282-309.

[18] Bownik, M.; *On characterizations of multiwavelets in $L^2(\mathbb{R}^n)$.* Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 11, 3265-3274.

[19] Bownik, M.; *Quasi-affine systems and the Calderón condition.* Harmonic Analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), 29-43, Contemp. Math., 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[20] Bownik, M.; *Riesz wavelets and generalized multiresolution analyses.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 14 (2003), no. 3, 181-194.

[21] Bownik, M.; *Baggett's problem for frame wavelets.* Representations, wavelets, and frames, 153-173, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.

[22] Bownik, M.; *Intersection of dilates of shift-invariant spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no. 2, 563-572.

[23] Bownik, M.; Garrigós, G.; *Biorthogonal wavelets, MRA's and shift-invariant spaces.* Studia Math. 160 (2004), no. 3, 231-248.

[24] Bownik, M.; Hoover, K.R.; *Dimension functions of rationally dilated GMRAs and wavelets.* J. Fourier Anal. Appl. 15 (2009), no. 5, 585-615.

[25] Bownik, M.; Lemvig, J.; *The canonical and alternate duals of a wavelet frame.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 23 (2007), no. 2, 263-272.

[26] Bownik, M.; Rzeszotnik, Z.; *The spectral function of shift-invariant spaces.* Michigan Math. J. 51 (2003), no. 2, 387-414.

[27] Bownik, M.; Rzeszotnik, Z.; *On the existence of multiresolution analysis of framelets.* Math. Ann. 332 (2005), no. 4, 705-720.

[28] Bownik, M.; Rzeszotnik, Z.; *Construction and reconstruction of tight framelets and wavelets via matrix mask functions.* J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 4, 1065-1105.

[29] Bownik, M.; Rzeszotnik, Z.; Speegle, D.; *A characterization of dimension functions of wavelets.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 10 (2001), no. 1, 71-92.

[30] Bownik, M.; Weber, E.; *Affine frames, GMRA's, and the canonical dual.* Dedicated to Professor Aleksander Pełczyński on the occasion of his 70th birthday (Polish). Studia Math. 159 (2003), no. 3, 453-479.

[31] Calogero, A.; *Wavelets on general lattices, associated with general expanding maps of* $\mathbb{R}^n$. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 5 (1999), 1-10.

[32] Calogero, A.; *A characterization of wavelets on general lattices.* J. Geom. Anal. 10 (2000), no. 4, 597-622.

[33] Calogero, A.; Garrigós, G.; *A characterization of wavelet families arising from biorthogonal MRA's of multiplicity* d. J. Geom. Anal. 11 (2001), no. 2, 187-217.

[34] Chen, D.-R.; Zheng, X.; *Stability implies convergence of cascade algorithms in Sobolev space.* J. Math. Anal. Appl. 268 (2002), no. 1, 41-52.

[35] Christensen, O.; *An introduction to frames and Riesz bases.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[36] Chui, Ch.K.; *An introduction to wavelets*. Wavelet Analysis and its Applications, 1. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[37] Chui, Ch.K.; Czaja, W.; Maggioni, M.; Weiss, G.; *Characterization of general tight wavelet frames with matrix dilations and tightness preserving oversampling*. J. Fourier Anal. Appl. 8 (2002), no. 2, 173-200.

[38] Chui, Ch.K.; Shi, X.; *Orthonormal wavelets and tight frames with arbitrary real dilations*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 9 (2000), no. 3, 243-264.

[39] Chui, Ch.K.; Shi, X.; Stöckler, J.; *Affine frames, quasi-affine frames, and their duals*. Adv. Comput. Math. 8 (1998), no. 1-2, 1-17.

[40] Cifuentes, P.; Kazarian, K.S.; San Antolín, A.; *Characterization of scaling functions in a multiresolution analysis*. Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 4, 1013-1023.

[41] Cifuentes, P.; Kazarian, K.S.; San Antolín, A.; *Characterization of scaling functions*. Wavelets and splines: Athens 2005, 152-163, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2006.

[42] Curry, E.; *Low-pass filters and scaling functions for multivariable wavelets*. Canad. J. Math. 60 (2008), no. 2, 334-347.

[43] Dai, X.; Diao, Y.; Gu, Q.; *Subspaces with normalized tight frame wavelets in* $\mathbb{R}$. Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 6, 1661-1667.

[44] Dai, X.; Diao, Y.; Gu, Q.; Han, D.; *Frame wavelets in subspaces of* $L^2(\mathbb{R}^d)$. Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 11, 3259-3267.

[45] Dai, X.; Diao, Y.; Gu, Q.; Han, D.; *The existence of subspace wavelet sets*. Approximation theory, wavelets and numerical analysis (Chattanooga, TN, 2001). J. Comput. Appl. Math. 155 (2003), no. 1, 83-90.

[46] Dai, X.; Larson, D.R.; Speegle, D.M.; *Wavelets sets in* $\mathbb{R}^n$. J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), no. 4, 451-456.

[47] Dai, X.; Larson, D.R.; Speegle, D.M.; *Wavelets sets in* $\mathbb{R}^n$*. II.* Wavelets, multiwavelets, and their applications (San Diego, CA, 1997), 15-40, Contemp. Math., 216, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[48] Dai, X.; Lu, S.; *Wavelets in subspaces*. Michigan Math. J. 43 (1996), no. 1, 81-98.

[49] Daubechies, I.; *Orthonormal bases of compactly supported wavelets.* Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), no. 7, 909-996.

[50] Daubechies, I.; *Ten lectures on wavelets.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[51] Debnath, L.; *Wavelet Transforms and Time-frequency Signal Analysis.* Birkhäuser Boston, 2001.

[52] de Boor, C.; DeVore, R.A.; Ron, A.; *On the construction of multivariate (pre)wavelets.* Constr. Approx. 9 (1993), no. 2-3, 123-166.

[53] de Boor, C.; DeVore, R.A.; Ron, A.; *Approximation from shift-invariant subspaces of* $L_2(\mathbb{R}^d)$. Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), no. 2, 787-806.

[54] de Boor, C.; DeVore, R.A.; Ron, A.; *The structure of finitely generated shift-invariant spaces in* $L_2(\mathbb{R}^d)$. J. Funct. Anal. 119 (1994), no. 1, 37-78.

[55] de Boor, C.; DeVore, R.A.; Ron, A.; *Approximation orders of FSI spaces in* $L_2(\mathbb{R}^d)$. Constr. Approx. 14 (1998), no. 4, 631-652.

[56] De Michele, L.; Soardi, P.M.; *On multiresolution analysis of multiplicity d.* Monatsh. Math. 124 (1997), no. 3, 255-272.

[57] Denjoy, A.; *Sur les fonctions dérivées sommables.* Bull. Soc. Math. France 43 (1915), 161-248. (French).

[58] Dobrić, V.; Gundy, R.F.; Hitczenko, P.; *Characterizations of orthonormal scale functions: a probabilistic approach.* J. Geom. Anal., 10, 3, 417-434 (2000).

[59] Duffin, R.J.; Schaeffer, A.C.; *A class of nonharmonic Fourier series.* Trans. Amer. Math. Soc. **72**, (1952). 341- 366.

[60] Dutkay, D.E.; *The local trace function of shift invariant subspaces.* J. Operat. Theory 52 (2) (2004) 267-291.

[61] Dutkay, D.E.; *Some equations relating multiwavelets and multiscaling functions.* J. Funct. Anal. 226 (1) (2005) 1-20.

[62] Dym, H.; McKean, H.P.; *Fourier series and integrals.* Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.

[63] Folland, G.B.; *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[64] Frazier, M.; Garrigós, G.; Wang, K.; Weiss, G.; *A characterization of functions that generate wavelet and related expansion.* Proceedings of the conference dedicated to Professor Miguel de Guzmán (El Escorial, 1996). J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), Special Issue, 883-906.

[65] Furst, V.; *A characterization of semiorthogonal Parseval wavelets in abstract Hilbert spaces.* J. Geom. Anal. 17 (2007), no. 4, 569-591.

[66] Gardner, R.; Hong, D.; Wang, J.; *Real analysis with an introduction to wavelets and applications.* Academic Press, New York, 2005.

[67] Geronimo, J.S.; Hardin, D.P.; Massopust, P.R.; *Fractal functions and wavelet expansions based on several functions.* J. Approx. Theory 78 (1994), no. 3, 373-401.

[68] Gripenberg, G.; *A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet.* Studia Math. 114 (1995), no. 3, 207-226.

[69] Gröchenig, K.; Madych, W. R.; *Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of* $\mathbb{R}^n$. IEEE Trans. Inform. Theory 38 (1992), no. 2, part 2, 556-568.

[70] Gu, Q.; Han, D.; *On multiresolution analysis (MRA) Wavelets in* $\mathbb{R}^n$. J. Fourier Anal. Appl. 6 (2000), no. 4, 437-447.

[71] Gu, Q.; Han, D.; *Frames, modular functions for shift-invariant subspaces and FMRA wavelet frames.* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 3, 815-825.

[72] Guo, K.; Labate, D.; *Some remarks on the unified characterization of reproducing systems.* Collect. Math. 57 (2006), no. 3, 295-307.

[73] Ha, Y.-H.; Kang, H.; Lee, J.; Seo, J.K.; *Unimodular wavelets for* L^2 *and the Hardy space* H^2. Michigan Math. J. 41 (1994), no. 2, 345-361.

[74] Han, B.; *On dual wavelet tight frames.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 4 (1997), no. 4, 380-413.

[75] Han, B.; *Compactly supported tight wavelet frames and orthonormal wavelets of exponential decay with a general dilation matrix.* Approximation Theory, wavelets and numerical analysis (Chattanooga, TN, 2001). J. Comput. Appl. Math. 155 (2003), no. 1, 43-67.

[76] Helson, H.; *Harmonic Analysis.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1991.

[77] Hernández, E.; Labate, D.; Weiss, G.; *A unified characterization of reproducing systems generated by a finite family. II.* J. Geom. Anal. 12 (2002), no. 4, 615-662.

[78] Hernández, E.; Wang, X.; Weiss, G.; *Characterization of wavelets, scaling functions and wavelets associated with multiresolution analyses.* Function spaces, interpolation spaces, and related topics (Haifa, 1995) 51-87, Israel Math. Conf. Proc., 13, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[79] Hernández, E.; Weiss, G.; *A first course on wavelets. With a foreword by Yves Meyer.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[80] Hervé, L.; *Multi-resolution analysis of multiplicity d: applications to dyadic interpolation.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 1 (1994), no. 4, 299-315.

[81] Holtz, O.; Ron, A.; *Approximation orders of shift-invariant subspaces of* $W_2^s(\mathbb{R}^d)$. J. Approx. Theory 132 (2005), no. 1, 97-148.

[82] Jetter, K.; *Multivariate approximation from the cardinal interpolation point of view.* Approximation theory VII (Austin, TX, 1992), 131-161, Academic Press, Boston, MA, 1993.

[83] Jetter, K.; Plonka, G.; *A survey on* L_2*-approximation orders from shift-invariant spaces.* Multivariate approximation and applications, 73-111, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[84] Jetter, K.; Zhou, D.-X.; *Order of linear approximation from shift-invariant spaces.* Constr. Approx. 11 (1995), no. 4, 423-438.

[85] Jia, R.-Q.; *Refinable shift-invariant spaces: from splines to wavelets.* Approximation theory VIII, Vol. 2 (College Station, TX, 1995), 179-208, Ser. Approx.Decompos., 6, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[86] Jia, R.-Q.; *Shift-invariant spaces and linear operator equations.* Israel J. Math. 103 (1998), 259-288.

[87] Jia, R.-Q.; *Approximation properties of multivariate wavelets.* Math. Comp. 67 (1998), no. 222, 647-665.

[88] Jia, R.-Q.; *Approximation with scaled shift-invariant spaces by means of quasi-projection operators.* J. Approx. Theory 131 (2004), no. 1, 30-46.

[89] Jia, R.Q.; Micchelli, C.A.; *Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets. II. Powers of two.* Curves and surfaces (Chamonix-Mont-Blanc, 1990), 209-246, Academic Press, Boston, MA, 1991.

[90] Jia, R.Q.; Shen, Z.; *Multiresolution and wavelets.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 37 (1994), no. 2, 271-300.

[91] Johnson, M.J.; *On the approximation order of principal shift-invariant subspaces of* $L_p(\mathbb{R}^d)$. J. Approx. Theory 91 (1997), no. 3, 279-319.

[92] Johnson, M.J.; *An upper bound on the approximation power of principal shift-invariant spaces.* Constr. Approx. 13 (1997), no. 2, 155-176.

[93] Kamyabi Gol, R.A.; Tousi, R.R.; *The structure of shift invariant spaces on a locally compact abelian group.* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 219-225.

[94] Kazarian, K.S.; San Antolín, A.; *Characterization of scaling functions in a frame multiresolution analysis in* H^2_G. Topics in classical analysis and applications in honor of Daniel Waterman, 118-140, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

[95] Kim, H.O.; Kim, R.Y.; Lim, J.K.; *Characterizations of biorthogonal wavelets which are associated with biorthogonal multiresolution analyses.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 11 (2001), no. 2, 263-272.

[96] Kim, H.O.; Kim, R.Y.; Lim, J.K.; *Semi-orthogonal frame wavelets and frame multi-resolution analyses.* Bull. Austral. Math. Soc. 65 (2002), no. 1, 35-44.

[97] Kim, H.O.; Kim, R.Y.; Lim, J.K.; *Quasi-biorthogonal frame multiresolution analyses and wavelets.* Adv. Comput. Math. 18 (2003), no. 2-4, 269-296.

[98] Kim, H.O.; Kim, R.Y.; Lim, J.K.; *On the spectrums of frame multiresolution analyses.* J. Math. Anal. Appl. 305 (2005), no. 2, 528-545.

[99] Kim, H.O.; Lim, J.K.; *Frame multiresolution analysis.* Commun. Korean Math. Soc. 15 (2000), no. 2, 285-308.

[100] Kim, H.O.; Lim, J.K.; *On frame wavelets associated with frame multiresolution analysis.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 10 (2001), no. 1, 61-70.

[101] Konyagin, S.V.; Temlyakov, V.N.; *Greedy approximation with regard to bases and general minimal systems.* Dedicated to the memory of Vassil Popov on the occasion of his 60th birthday. Serdica Math. J. 28 (2002), no. 4, 305-328.

[102] Krivoshein, A.; Skopina, M.; *Approximation by frame-like wavelet systems.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 31 (2011), no. 3, 410-428.

[103] Labate, D.; *A unified characterization of reproducing systems generated by a finite family.* J. Geom. Anal. 12 (2002), no. 3, 469-491.

[104] Larson, D.; Tang, W.-S.; Weber, E.; *Riesz wavelets and multiresolution structures.* Proc. SPIE, 4478, 254-262, SPIE, Bellingham, WA, 2001.

[105] Laugesen, R.S.; *Completeness of orthonormal wavelet systems for arbitrary real dilations.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 11 (2001), no. 3, 455-473.

[106] Laugesen, R.S.; *Translational averaging for completeness, characterization and oversampling of wavelets.* Collect. Math. 53 (2002), no. 3, 211-249.

[107] Lebesgue, H.; *Sur les intégrales singuliéres.* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3), 1 (1909), 25-117.

[108] Lemarié, P.G.; *Ondelettes à localisation exponentielle.* J. Math. Pures Appl. (9) 67 (1988), no. 3, 227-236.

[109] Lemarié, P.G.; *Analyse multi-échelles et ondelettes à support compact.* Les ondelettes en 1989 (Orsay, 1989), 26-38, 198-199, Lecture Notes in Math., 1438, Springer, Berlín, 1990.

[110] Lemarié-Rieusset, P.-G.; *Existence de "fonction-père" pour les ondelettes à support compact.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (1992), no. 1, 17-19.

[111] Lemarié-Rieusset, P.G.; *Sur l'existence des analyses multi-résolutions en théorie des ondelettes.* Rev. Mat. Iberoamericana 8 (1992), no. 3, 457-474.

[112] Lemarié-Rieusset, P.-G.; *Ondelettes generalisées et fonctions d'échelle à support compact.* Rev. Mat. Iberoamericana 9 (1993), no. 2, 333-371.

[113] Lemarié-Rieusset, P.-G.; *Projecteurs invariants, matrices de dilatation, ondelettes et analyses multi-résolutions.* Rev. Mat. Iberoamericana 10 (1994), no. 2, 283-347.

[114] Li, S.; *The theory of frame multiresolution analysis and its applications.* PhD dissertation, University of Maryland Graduate School, Baltimore, 1993.

[115] Lian, Q.-F.; Li, Y.-Z.; *Reducing subspace frame multiresolution analysis and frame wavelets.* Commun. Pure Appl. Anal. 6 (2007), no. 3, 741-756.

[116] Lorentz, R.A.; Madych, W.R.; Sahakian, A.; *Translation and dilation invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R})$ and multiresolution analyses.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 5 (1998), no. 4, 375-388.

[117] Madych, W.R.; *Some elementary properties of multiresolution analyses of $L^2(\mathbb{R}^n)$.* Wavelets, 259-294, Wavelet Anal. Appl., 2, Academic Press, Boston, MA, 1992.

[118] Mallat, S.G.; *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$.* Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), no. 1, 69-87.

[119] Meyer, Y.; *Ondelettes et opérateurs. I. Ondelettes.* Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, 1990 (Traducción al inglés: *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, 1992).

[120] Natanson, I.P.; *Theory of functions of a real variable.* London, vol. 1 (1960).

[121] Paluszyński, M.; Šikić, H; Weiss, G.; Xiao, S.; *Tight frame wavelets, their dimension functions, MRA tight frame wavelets and connectivity properties.* Frames. Adv. Comput. Math. 18 (2003), no. 2-4, 297-327.

[122] Papadakis, M.; *On the dimension function of orthonormal wavelets.* Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 7, 2043-2049.

[123] Reed, M.; Simon, B.; *Functional Analysis.* Academic Press, Inc. (1980).

[124] Romero, J.R.; *Generalized multiresolution analysis: construction and measure theoretic characterization.* PhD dissertation, the University of Maryland. College Park, USA (2005).

[125] Ron, A.; *Introduction to shift-invariant spaces. Linear independence.* Multivariate approximation and applications, 112-151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[126] Ron, A.; Shen, Z.; *Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator.* J. Funct. Anal. 148 (1997), no. 2, 408-447.

[127] Ron, A.; Shen, Z.; *Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$. II. Dual systems.* Dedicated to the memory of Richard J. Duffin. J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), no. 5, 617-637.

[128] Rzeszotnik, Z.; *Characterization theorems in the theory of wavelets.* Ph. D. Thesis, Washington University in St. Louis, (2000).

[129] Rzeszotnik, Z.; *Calderón's condition and wavelets.* Collect. Math. 52 (2001), no. 2, 181-191.

[130] Saliani, S.; *On stable refinable function vectors with arbitrary support.* J. Approx. Theory 154 (2008), no. 2, 105-125.

[131] San Antolín Gil, A.; *Caracterización y propiedades de las funciones de escala y filtros de paso bajo de un Análisis Multirresolución.* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid (2007).

[132] San Antolín Gil, A.; *Characterization of low pass filters in a multiresolution analysis.* Studia Math. 190 (2009), no. 2, 99-116.

[133] San Antolín Gil, A.; *On density order of principal shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$.* J. Approx. Theory, 2012 (accepted).

[134] Schaffer Vestal, S.; Weber, E.; *Orthonormal wavelets and shift invariant generalized multiresolution analyses.* Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 10, 3089-3100.

[135] Schoenberg, I.J.; *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.* Quart. Appl. Math. 4 (1946), 45-99 and 112-141.

[136] Skopina, M; *On construction of multivariate wavelet frames.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 27 (2009), no. 1, 55-72.

[137] Strang, G.; Fix, G.; *A Fourier analysis of the finite-element variational approach.* In Constructive Aspects of Functional Analysis (G. Geymonat, ed.), 793-840, C.I.M.E., Erice, 1973.

[138] Temlyakov, V.N.; *Nonlinear methods of approximation.* Found. Comput. Math. 3 (2003), no. 1, 33-107.

[139] Temlyakov, V.N.; *Greedy approximation.* Acta Numer. 17 (2008), 235-409.

[140] Temlyakov, V.; *Greedy approximation.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 20. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[141] Ulyánov, P.L.; Dyachenko, M.I.; *Análisis Real: Medida e Integración.* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 2000.

[142] Wang, X.; *The study of wavelets from the properties of their Fourier transforms.* Ph.D. Thesis, Washington University in St. Louis (1995).

[143] Weiss, G.; Wilson, E.N.; *The mathematical theory of wavelets.* Twentieth century harmonic analysis–a celebration (Il Ciocco, 2000), 329-366, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 33, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[144] Wojtaszczyk, P.; *A mathematical introduction to wavelets.* London Mathematical Society Student Texts, 37. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[145] Young, R.M.; *An introduction to nonharmonic Fourier series.* Pure and Applied Mathematics, 93. Academic Press, Inc., New York-London, 1980.

[146] Yu, X.; *Semiorthogonal multiresolution analysis frames in higher dimensions.* Acta Appl. Math. 111 (2010), no. 3, 257-286.

[147] Zalik, R.A.; *Riesz bases and multiresolution analyses.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 7 (1999), no. 3, 315-331.

[148] Zhang, Z.H.; *A characterization of generalized frame MRAs deriving orthonormal wavelets.* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 22 (2006), no. 4, 1251-1260.

[149] Zhou, F.-Y.; Li, Y.-Z.; *Multivariate FMRAs and FMRA frame wavelets for reducing subspaces of* $L^2(\mathbb{R}^d)$. Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 1, 83-99.