

T/210 (1)

**Tesis Doctoral**

**El Problema de la Estimación del Número de Factores en  
los Métodos de Extracción del Análisis Factorial:  
Aplicación al Análisis de Datos con el SPSS.**

**Miguel A. Ruiz Díaz**

*Director*

**Rafael San Martín Castellanos**



R. V. 2003

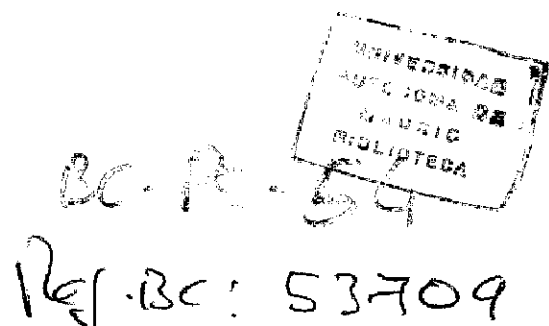
**Departamento**

**Psicología Básica, Social y Metodología**

**Facultad de Psicología**

**Universidad Autónoma de Madrid.**

**Tomo I**



Tan importante y satisfactorio para mi es el ver acabado este trabajo, como el tener la oportunidad de agradecer a todos los que han participado, de forma directa o indirecta, en el buen término de mis esfuerzos.

La Universidad Autónoma de Madrid puso a mi disposición toda la infraestructura necesaria para poder llevar a cabo esta investigación. Los fondos bibliográficos, los soportes informáticos, y, lo más importante, un equipo de profesionales capaces de demostrar su competencia en todo momento.

Tanto la Universidad Autónoma de Madrid como la Universidad Pontificia de Comillas me han permitido estar en contacto con sus alumnos, que me han enseñado a discernir lo accesorio de lo trascendente, y que han podido sufrir año tras año mis torpezas teóricas más que ningún otro.

Quiero agradecer a todo el Area de Metodología de la Facultad de Psicología de la U.A.M., sin olvidar a nuestros becarios, su capacidad crítica, la que me ha obligado a ser preciso y buscar la fuente de mis propios errores. Sin el ambiente de continuo trabajo, y los criterios de mejora que han sabido desarrollar e imponer como marchamo de calidad, difícilmente podría este trabajo gozar de ninguna denominación de origen.

Seis personas debo recordar aquí, por gratitud y por lo importantes que son para mi. Sabiendo que la ordenación nada tiene que ver con la igual admiración y deuda que siento para con ellos, quisiera primero nombrar a Rafael San Martín, ya que también él rubrica este trabajo. Su ciega confianza en mí, la formación que he recibido de él, su integridad profesional y su conocimiento, aún inabarcable

por mí, han sido la guía y norte de estos años de trabajo. Agustina Moya fue capaz de buscar errores en un campo tan árido como éste, aún pensando que el texto no debería tenerlos, y gestionó, entre otras muchas cosas, nuestro segundo terminal de conexión con el centro de cálculo de la Universidad. A Ludgerio Espinosa es difícil agradecerle nada sin agotar el papel. Angel de la guarda, experto de excelencia en el tratamiento estadístico y paladín de lo multivariado, es para mí, además, un gran compañero y amigo. Antonio Pardo es el único que no se casa con nadie con el que no me importaría contraer nupcias. Él fue capaz de enseñarme ANCOVA, parquedad y buen criterio, estadístico. Sin Santiago Aillón mis problemas informáticos estarían tan sólo empezando a estas alturas. Su continuo trabajo en la sombra, hasta que se pone el sol, incluso durante los veranos, ha permitido que el tiempo necesario para completar la simulación en el mainframe, se haya reducido en más de un 75% de la estimación inicial más realista. Por último, quiero agradecer a José Luis Cañero su fe en mí. José Luis es uno de los privilegiados que piensan y trabajan por la investigación en la empresa privada. Supo tentarme y aceptar perderme, aunque creo que no se imagina mi pesar por no poder compartir su ilusión y su compañía.

Muchos son los nombres de las personas que merecen y deben estar aquí, por mi agradecimiento y reconocimiento hacia ellas. Me resulta imposible nombrar a todos aquellos que en mi vida profesional y privada han alentado la conclusión de este trabajo. A todos ellos gracias.

Miguel A. Ruiz  
Madrid, Octubre de 1991.

**TOMO I.**

**1. Introducción.**

**2. Los modelos factoriales.**

**2.1. Factor Común.**

**2.1.1. Ejes Principales.**

**2.1.2. Componentes Principales.**

**2.1.3. Componentes Principales de Puntuaciones Verdaderas.**

**2.1.4. Componentes Principales Ponderados.**

**2.2. Mínimos Cuadrados, ULS ó MINRES.**

**2.3. Análisis Imagen.**

**2.4. Análisis Canónico.**

**2.5. Máxima Verosimilitud.**

**2.6. Análisis Factorial Imagen.**

**2.7. Análisis Alfa.**

**2.8. Análisis Factorial Confirmatorio.**

**2.9. Los modelos factoriales en el SPSS.**

**2.9.1. Componentes Principales.**

**2.9.2. Ejes Principales.**

**2.9.3. Máxima Verosimilitud.**

**2.9.4. Mínimos Cuadrados sin Ponderar.**

**2.9.5. Mínimos Cuadrados Generalizados.**

**2.9.6. Análisis Imagen.**

**2.9.7. Análisis Alfa.**

**2.10. Comparación de modelos.**

**3. Reglas de decisión sobre el número de factores.**

**3.1. Rango mínimo y los límites de Guttman.**

**3.2. K1 de Kaiser-Guttman.**

**3.3. El test de significación de Bartlett.**

**3.4. Análisis Paralelo.**

**3.5. Scree test.**

**3.6. Índice de interpretabilidad.**

**3.7. Minimum Average Partial Method.**

**4. Delimitación del Problema.**

**4.1. Naturaleza del problema.**

4.2. Diseño del experimento.

4.3. Variables dependientes.

4.4. Simulación y generación de los datos.

4.5. Resultados esperados.

5. Resultados y discusión.

5.1. Comprobación de supuestos.

5.2. Anova de medidas repetidas.

6. Conclusiones.

7. Recomendaciones Finales.

8. Apéndices.

8.I. Normas de notación.

8.II. Memoria de la simulación.

9. Bibliografía.

**TOMO II.**

1. Gráficos.

2. Anexos.

## 1. INTRODUCCION.

Debo confesar que mi curiosidad por la estadística informatizada fue fruto de la coincidencia de un pequeño delito y de conocer a un viejo maestro de la estadística aplicada a la Psicología. Esta conjunción puede que fuera el embrión de este trabajo, pero lo mas importante es que es un buen ejemplo del tipo de problema que quiero abordar aquí. Por ello, voy a permitirme la licencia de resumirlo.

Mi primer contacto con un ordenador personal fue con un IBM que compré apenas acabar la carrera. Pensé que la metodología necesitaba mucho de pensar y poco de calculadora, de manera que expandí mi memoria de trabajo mecánico con los rutinarios 640 KK. El siguiente paso sería poder utilizar alguna de las potentes herramientas de cálculo de las que tanto había oído hablar. Este fue el delito, "encontré" una oxidada versión del SPSS/PC+ sin protección, y decidí instalarla en mi ordenador. Para mi sorpresa funcionaba, pero lo que no fui capaz de encontrar fue el manual del programa. Mi "hallazgo" tardó poco en ser conocido por otra persona que parecía tener mis mismas intenciones, pero en su caso, la búsqueda de economía de cálculo era debida más al aburrimiento del ejercicio de décadas de hacer ciencia, que al deslumbramiento que producen las máquinas.

Esta fue mi suerte. D. Jesús Amón intentaba decidir si debía también compartir su vida con un ordenador personal. Dada la gran amistad que D. Jesús comparte con Rafael San Martín, llegué a conocer sus intereses y propusieron poner

a prueba la sabiduría de mi nueva compañera. De esta forma un poco rocambolesca fue como llegué a poder conocer a alguien a quien había podido admirar por sus libros, y cómo una tarde llegamos a estar ambos tras la pantalla de mi computadora. Yo, que sí estaba deslumbrado por algo que era capaz de solucionar en un pis-pas cálculos que a mi habían conseguido exprimirme el cerebro durante horas en un examen, comencé con las biensabidas "demos", con toques de descriptiva graficada, aderezos de Análisis Discriminante y guindas de regresión múltiple. Sin embargo, D. Jesús pudo demostrar una vez más estar mucho más curtido en estas lides y, sin ningún rubor, me pidió que calculara la mediana de un amasijo de datos que yo pudiera inventar. Afortunadamente el programa estaba dotado de un extenso "Help" que de alguna ayuda pudo servir. Tras no pocos sudores, míos, la esperada palabra "Median" apareció en la pantalla azul, y el veredicto de D. Jesús tardó poco en hacerse oír. "Esto está mal".

No pocas presurosas llamadas a personas más expertas que yo mismo en la PC-estadística (muchas por aquel entonces) me hicieron dar con una respuesta adecuada, para mi propia vergüenza. Ludgerio Espinosa, con su eterno buen humor y su habitual buen hacer, me dijo lo siguiente: "Para algo están los manuales. Ese programa no interpola". D. Jesús, quedó muy satisfecho con la segunda afirmación, yo quedé muy preocupado con la primera.

Muchos años después, y ya con una formación algo más sólida pude descubrir que, por suerte o por desgracia, ese es el estado de la cuestión en no pocas investigaciones desarrolladas en los países que he podido conocer a nivel profesional. Las herramientas estadísticas informáticas han llegado a un nivel de desarrollo tal que, con demasiada frecuencia, las personas confían en ellas como si de otro miembro del equipo de investigación se tratara. La facilidad

con la que se realizan los cálculos, la velocidad de ejecución, la potencia de los algoritmos, el inalcanzable límite del volumen de información procesable y, sobre todo, la amigable apariencia de los programas, han llevado al desarrollo de un exceso de confianza en los poderes para la decisión que facilitan, y una falsa atribución de formación, como expertos en metodología, a los programas de cálculo. El problema se agrava cuando, por no se qué extraña pertinacia, las personas que infrutilizan estos programas insisten en no leerse los manuales, y mucho menos con espíritu crítico. Yo me atrevería a apuntar una posible explicación: en la mayoría de los casos ese no es su cometido.

A mi modo de ver, esta situación no es más que el resultado de un nada despreciable espíritu comercial y del honrado y esforzado trabajo de muy buenos investigadores y técnicos en estadística que han construido este clase de "software".

La mayoría de las técnicas estadísticas son suficientemente complejas como para necesitar una sólida estructura tanto de recogida como de distribución de los datos. Normalmente estos requisitos son enmascarados por la etiqueta de "supuestos" que demasiado frecuentemente se obvian o evitan. Por ejemplo, la multicolinealidad, la forma de la distribución de los datos muestrales, el nivel de medida de ciertas variables, el número de sujetos necesarios por la técnica utilizada o el nivel crítico de trabajo.

Además, otras tantas técnicas de análisis de datos necesitan de ciertos valores que deben ser determinados de antemano, si se quiere llegar a algún tipo de resultado numérico final. Ejemplos de esto último son los criterios de convergencia, el número de iteraciones o el número de factores en un Análisis Factorial.



Algunos de estos supuestos son contrastados automáticamente por la técnica a utilizar y aparecen como mensajes de "advertencia" en la salida producida por la rutina, pero en raras ocasiones se producen mensajes de "error" que aborten la ejecución del procedimiento. Tal vez esto se aclare con varios ejemplos.

En el programa PRELIS cuando se pide el cálculo de la estimación tetracórica de la correlación, ya que el nivel de medida no aconseja el cálculo del índice de momento-producto de Pearson, si alguna de las categorías de una variable está vacía en la muestra, el programa directamente anula esa categoría y le asigna a la siguiente categoría un valor correlativo al último valor anterior. Inmediatamente después calcula el índice sin mayor complicación. Afortunadamente en el manual, para el que lo quiera leer, se apunta que los trabajos de Jöreskog y Sörbom sugieren que esta estimación de la correlación es "bastante" insensible a la forma de la distribución de los datos. El programa SPSS, por su parte, no advierte de esta posibilidad y calcula la estimación de Pearson sin mensaje alguno, dejando a la conciencia del investigador cualquier problema de sesgo o inconsistencia de la estimación que se acaba de realizar.

Si se realiza un Análisis Factorial y aparece el mensaje "la matriz puede que esté viciada (ill-conditioned)" la estimación sigue adelante, en la mayoría de los casos, sin mayores problemas. Sólo una lectura detallada del manual nos descubrirá que esto es debido a que la matriz de covarianza utilizada es singular y, por tanto, su determinante es cero. A menos que el usuario haya tenido interés en pedir explícitamente la inversa de esa matriz de covarianza<sup>1</sup>, las consecuencias del mensaje pasarán

---

<sup>1</sup> Al observar la matriz inversa aparecerán columnas nulas, pero la matriz se calcula en cualquier caso por triangulación.

normalmente inadvertidas. Este problema de multicolinealidad puede ser incluso deseable en algunos Análisis Factoriales, pero en el caso de la regresión múltiple es inadmisibile por teoría. Además, como apunta Hox (1991<sup>2</sup>), la precisión de cálculo de los actuales ordenadores y la potencia de cálculo de los algoritmos utilizados, hace muy improbable que el determinante de una matriz sea exactamente nulo en una matriz muestral.

Estos dos ejemplos son simplemente ilustrativos y centenares de casos así pueden encontrarse en distintas técnicas de análisis y en distintos programas. Es precisamente, porque se supone que los usuarios de estos programas son personas con una mínima formación estadística, por lo que se han implementado estos mensajes de advertencia y no se han construido los programas que "casquen" a la menor inconveniencia de los datos. Precisamente estos mensajes son los que se pueden ir buscando a la hora de probar la bondad de unos datos o las posibilidades de una muestra, y este comportamiento es muy deseable para aprovechar la versatilidad de un programa.

Otro tipo de problema, es el de los llamados "valores por defecto". Los valores por defecto son explicitaciones necesarias para la ejecución de un procedimiento a las que se ha asignado una constante o se ha asociado un heurístico "de fábrica" que solucione la indeterminación. En algunos casos, como son la longitud de las líneas en las salidas, o el número de líneas de éstas mismas, la asignación de un valor por defecto obedece a la posibilidad de variar este "parámetro" informático para mayor prestación del programa. En otros casos, como en los contrastes t de medias paramétricos, "por defecto" se calcula el nivel de significación bilateral (SPSS inc., 1985), aunque más

---

<sup>2</sup> comunicación personal.

valdría decir que se calcula el nivel crítico bilateral; y esto no se explicita en la salida. Para un experto usuario esto no acarrea mayores problemas, pero si se utiliza por primera vez el programa para solucionar rápidamente ese problemilla de acompañar con datos una investigación, las consecuencias sobre la teoría probada pueden ser desesperanzadoras.

En este escenario se enmarca esta tesis, el problema de los valores por defecto en el procedimiento FACTOR del SPSS.

El modelo de Análisis Factorial de Factor Común<sup>3</sup> fue desarrollado por Spearman (1927) para el caso de dos factores, extendido por Thurstone (1953) para el caso multifactorial y perfeccionado por Guttman (1954). A pesar de tratarse de una vieja técnica de análisis de datos su vigencia aún hoy es palpable por el número de investigaciones que la utilizan, bien como fin en sí mismo o como paso intermedio de sumarización de datos (ver Marradi, 1981). Sólo últimamente está siendo sustituida en algunos casos por el Análisis de Ecuaciones Estructurales, si bien, como veremos, éste último es un caso más general del primero (ver Jöreskog y Sörbom, 1988) y si los modelos de Ecuaciones Estructurales (mal llamados, modelos LISREL) no han sido más utilizados anteriormente fue debido a problemas técnicos de potencia de cálculo.

El modelo de Factor Común es intrínsecamente indeterminado, ya que su cometido es abatir el espacio de variables observadas sobre otro espacio de menores dimensiones y por ello más parsimonioso, mediante la estimación de las ponderaciones necesarias para esta

---

<sup>3</sup> No vamos a tratar aquí el modelo de análisis de componentes principales de Hottelling si no es como un modelo asociado al de factor común. De hecho en el SPSS esta técnica es una opción del procedimiento MANOVA.

proyección. Como se explica más adelante, esto conlleva la estimación no sólo de los factores, sino también la estimación de la parte no explicada de la variabilidad de cada variable, llamada unicidad, lo que lleva a sistemas de ecuaciones con mayor número de incógnitas que de ecuaciones. Se han desarrollado diversos modelos asociados a éste de Factor Común que solucionan de alguna forma la indeterminación para el cálculo. La más simple es la utilización inicial de un modelo completamente determinado, el de componentes principales, en el que no se consideran todas las posibles soluciones, sino un subconjunto menor de ellas que se ha dado en llamar "significativas". El problema es delimitar cuáles son las soluciones "significativas", y por ello explicitar el número de factores (o componentes) a retener.

La más obvia por diversos motivos, especialmente debido a la economía de cálculo que ello conlleva, es la utilización de la regla heurística (rule of thumb) K1 de Kaiser (1963) que propone retener todos los factores (o componentes) correspondientes a autovalores mayores o iguales que la unidad.

Precisamente este es el "set up" o decisión que el SPSS toma "por defecto" (por instalación). De esta forma, si un investigador lleva a cabo un Análisis Factorial de Factor Común con el mencionado programa, y no decide en contra de la utilización de este esquema de ejecución, tendrá que asumir las consecuencias de este heurístico.

En este trabajo nos proponemos, primero, revisar los presupuestos teóricos de este modelo de análisis y las alternativas más relevantes que se han ofrecido hasta nuestros días. Para ello, recogeremos algunas fórmulas derivadas de cada modelo debido a la relevancia en el desarrollo de diversos heurísticos alternativos. Recogeremos

también los algoritmos generales utilizados por el SPSS en su procedimiento FACTOR y discutiremos su relación con los modelos conocidos. Seguidamente, discutiremos las reglas de decisión más utilizadas para la determinación del "número de factores".

A continuación, plantearemos una investigación que nos permita proponer algunas normas generales, que sirvan para evaluar la utilización de unas u otras reglas de decisión, dependiendo de las características de la muestra de estudio, tales como el número de factores aproximado que se espera encontrar teóricamente, el tamaño relativo de la muestra y el número relativo de variables recogidas. Estas normas serán posteriormente utilizadas para explorar la estructura de muestras reales de estructuras teóricas conocidas.

## 2. LOS MODELOS FACTORIALES.

### 2.1. FACTOR COMÚN

El interés por el estudio de la covariación entre variables parece comenzar con Spearman (1904) y su teoría sobre el factor general de inteligencia. Posteriormente también Spearman (1927) desarrolló el método de Factor Común para un sólo factor, fue extendido por Thurstone (1947) para el caso multifactorial y perfeccionado por Guttman (1954).

El término Factor Común corresponde a uno de los modelos de las técnicas denominadas de Análisis Factorial, utilizadas para analizar la variabilidad de las variables en términos de diferentes componentes. Este modelo asume que la información contenida en una variable puede ser descompuesta en dos partes independientes, una común al resto de las variables consideradas y otra específica de cada una de las variables. Según esto, una variable puede ser descompuesta en dos partes fundamentales, una parte común y otra específica, según

$$Z_j = C_j + V_j \quad (1)$$

donde la variable  $Z_j$  puede ser descompuesta en términos de su componente del espacio de factores comunes  $C_j$  y de su componente de factores específicos.

La axiomática de este modelo supone que no existe relación entre las partes específicas de las variables y la parte total de cada variable

$$E(V_j Z_k) = 0 \quad j \neq k \quad (2)$$

las partes específicas son independientes entre si

$$E(V_j V_k) = 0 \quad j \neq k \quad (3)$$

las partes específicas son independientes de las partes comunes

$$E(V_j C_k) = 0 \quad (4)$$

y la correlación entre dos variables es debida a las partes del espacio común de estas variables

$$E(C_j C_k) = r_{jk} \quad j \neq k \quad (5)$$

También por definición,

$$E(C_j^2) = h_j^2 \quad (6)$$

donde  $h_j^2$  es la comunalidad de la variable  $j$ -ésima, y

$$E(V_j^2) = u_j^2 \quad (7)$$

siendo  $u_j^2$  la unicidad de la variable  $j$ -ésima.

El modelo de Factor Común pretende determinar las dimensiones del espacio común, siendo cada una de las dimensiones un factor común. Se asume que la proporción del número de factores respecto al número de variables tiende a cero en la población (Rummel, 1970), es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = 0 \quad (8)$$

siendo  $n$  el número de variables y  $r$  el número de factores comunes.

Como consecuencia, en este modelo no son deseables factores que sólo sean capaces de explicar la relación entre

grupos pequeños de variables. Así, la búsqueda de los factores se corresponde con la búsqueda de correlaciones parciales no nulas, es decir, las correlaciones parciales entre dos variables cualesquiera tenderá a ser cero si se controla el efecto de las variables hipotéticas (los factores), y por tanto  $R^{-1}$  tenderá a ser una matriz diagonal (Rummel, 1970:140). Este es el motivo por el que se utiliza la inversa de la matriz de correlaciones muestral  $R^{-1}$  para verificar la bondad de ajuste del modelo, ya que los elementos no diagonales deberán ser próximos a cero (Guttman, 1953).

El principal problema de este modelo es la determinación de la varianza única de una variable, o unicidad, ya que no se ofrece una definición explícita de qué debe ser considerado la unicidad, solamente sabemos que las partes únicas deben cumplir propiedades como las descritas anteriormente. Adicionalmente, el número de factores del modelo siempre es mayor que el número de variables observables, ya que existen  $r$  factores comunes y  $n$  factores únicos, y es imposible llegar a una solución única de  $n+r$  factores independientes a partir de  $n$  variables, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones posibles. De hecho, existe un número infinito de soluciones que satisfarán una matriz de saturaciones dada. Este es el problema de la indeterminación factorial.

Antes de continuar, definamos el modelo en términos de su notación matricial.

Sea  $Z$  un vector aleatorio  $n \times 1$  cuyas coordenadas son las  $n$  variables observadas  $Z_1, \dots, Z_n$ . Por simplicidad asumimos que estas variables están estandarizadas, de manera que  $E(Z) = 0$  y  $E(ZZ') = R_{zz}$  es la matriz de correlaciones con unidades en la diagonal. Sea  $X$  un vector aleatorio de dimensiones  $r \times 1$  cuyas coordenadas son los  $r$  factores comunes  $X_1, \dots, X_r$ . Se asume que  $E(X) = 0$ , y  $E(XX') = R_{xx}$  es una matriz



de correlaciones. Sea  $V$  un vector aleatorio  $n \times 1$  cuyas coordenadas son las  $n$  variables de factores únicos  $V_1, \dots, V_n$ . Se asume también que los factores únicos están normalizados y son independientes, es decir,  $E(V) = 0$  y  $E(VV') = I$ . Por último, sean  $F$  una matriz  $n \times r$  de coeficientes y  $U$  otra matriz diagonal  $n \times n$  de coeficientes, tal que

$$Z = FX + UV \quad (9)$$

Esta es la ecuación fundamental del modelo de Factor Común, y refleja la descomposición de las variables observables  $Z$  en una combinación ponderada de los factores comunes  $X$  y los factores únicos  $V$ .

La matriz de correlaciones de las variables observables puede ser descompuesta a su vez según

$$R_{zz} = FR_{xx}F' + U^2 \quad (10)$$

que se reduce a

$$R_{zz} = FF' + U^2 \quad (11)$$

cuando los factores son ortogonales. Si reorganizamos esta última ecuación llegamos a la matriz de correlaciones reducida  $R_c$

$$R_c = R - U^2 = FF' \quad (12)$$

La matriz de estructura  $F_s$  contendrá las correlaciones entre los factores comunes y las variables, y vendrá definida por la operación

$$F_s = E(ZX') = FR_{xx} \quad (13)$$

donde  $F$  es la matriz de configuración y contiene los pesos de ponderación de los factores comunes para reproducir las variables observadas. Sin embargo, cuando los factores son ortogonales, como es el caso de las soluciones tratadas en este trabajo, se verifica que  $R_{xx} = I$  y por lo tanto la matriz

de estructura factorial y la matriz de configuración coinciden.

Podemos ahora formalizar un poco más la indeterminación factorial, o, en términos de Bollen (1989), la falta de identificación de los parámetros, para el caso más general con factores no necesariamente independientes. Sea  $T$  una matriz no singular de orden  $n \times n$ . Sean las transformaciones  $X^* = TX$ ,  $F^* = FT^{-1}$  y  $R_{xx}^* = TR_{xx}T'$ , entonces se puede verificar que  $F^*X^* = FX$  y  $F^*R_{xx}^*F^{*'} = FR_{xx}F'$ . Entonces, se necesitan  $n^2$  condiciones impuestas sobre  $F$  y/o  $R_{xx}$  para que el modelo esté identificado. Aún así, ésta es una condición necesaria, pero no suficiente (ver también Bollen y Jöreskog, 1985)<sup>4</sup>.

Otra forma de expresarlo en términos del espacio vectorial es la ofrecida por Harman (1976)<sup>5</sup>

Se dice que un conjunto de  $m$  vectores generan un  $n$ -espacio si todo vector de este espacio puede expresarse como combinación lineal de los  $m$  vectores dados. Una consideración importante es el número mínimo de vectores que generan el espacio, y éste resulta ser igual a la dimensión del espacio, supuesto que estos vectores son linealmente independientes. Por tanto, cualquier sistema de  $m$  vectores linealmente independientes genera la totalidad de un  $m$ -espacio y forma una base de tal espacio. Un ejemplo de base es el conjunto de vectores unitarios de los ejes coordenados. La base de un espacio no es, por supuesto, única. De hecho, existen un número infinito de bases para un espacio dado (véase Faddeev y Faddeeva, 1963). Esto es, en esencia, la indeterminación del problema factorial. La elección de una base particular es conocida como el problema de la "rotación" del Análisis Factorial. (pág.77)

---

<sup>4</sup> Aunque se establezcan restricciones sobre la matriz  $R_{xx}$  como la independencia o la escala tipificada de los factores, seguirá siendo necesario establecer el número de factores de la solución.

<sup>5</sup> las cursivas son del autor.

Pero, aunque asumamos que será necesaria una rotación posterior a la extracción para llegar a una solución más fácilmente interpretable, con ello no solucionamos el problema de la determinación de la comunalidad. Como se discutirá en el apartado 3.1. respecto al rango mínimo de una matriz, un excesivo número de factores llevará a una sobredeterminación del modelo y afectará a cualquier manipulación posterior de la matriz de configuración, mientras que una extracción de un número escaso de factores no será capaz de explicar toda la parte común de las variables. Es necesario, pues, determinar de antemano la parte común de las variables que se desea explicar, en último término su comunalidad, ya que es la matriz reducida  $R_c$  la matriz a factorizar, pero la parte común de una variable no puede ser determinada hasta que no se conoce la dimensionalidad del espacio de factores comunes (ver fórmula 6). La única solución es estimar inicialmente las comunales de las variables y, a partir de ahí, llevar a cabo la extracción. El problema ahora será decidir cuál es la mejor estimación posible de la comunalidad. Las soluciones posibles para esta estimación han sido las que han dado lugar a los diversos modelos factoriales.

Existen diversos procedimientos generales para la extracción de los factores, si bien no todos son computacionalmente igual de eficaces. Los más antiguos son el de descomposición triangular de Cholesky (1915) (referido por Harman, 1980) o diagonal de Dwyer (1944), el método del centroide de Burt (1939), Thurstone (1947), el método de componentes principales de Pearson (1901) y el método iterativo de ejes principales de Hotelling (1933). Todos ellos pueden encontrarse bien desarrollados y con el aparato matemático necesario en Harman (1976, 1980), Mulaik (1972) y Rummel (1970). Nosotros haremos hincapié sólo en el método de ejes principales.

### 2.1.1. EJES PRINCIPALES.

El método de ejes principales para la extracción de factores es una extensión del procedimiento general desarrollado por Pearson (1901) para hallar las diagonales principales en varias dimensiones de los elipsoides de datos originales. Posteriormente Hotelling (1933) desarrolló los procedimientos para el Análisis de Componentes pero aplicado al modelo de Factor Común (Harman, 1976, lo denomina método de factores principales). La diferencia fundamental con el método de componentes principales es la autodescomposición de la matriz reducida de correlaciones, en lugar de la matriz original con unos en la diagonal, y la extracción de menor número de factores que de variables, si bien las propiedades y principios generales son similares.

Sea el vector aleatorio  $Z$  de dimensiones  $n \times 1$  cuyas coordenadas son las  $n$  variables observables. Se desea encontrar una serie de combinaciones lineales  $X_1$  provenientes de ponderar las variables  $Z$  mediante unos vectores de pesos  $\beta_1$ . Para la primera combinación lineal esto puede expresarse como

$$X_1 = \beta' Z \quad (14)$$

Como se busca la combinación lineal que maximice la varianza que es capaz de explicar, y, posteriormente, se buscarán otras combinaciones lineales que expliquen información no recogida en las anteriores combinaciones lineales, se imponen las restricciones que

$$\sigma_{X_1}^2 = E(X_1^2) \quad (15)$$

sea un máximo cuando

$$\beta' \beta = 1 \quad (16)$$

es decir, que la suma de los cuadrados de los elementos del

vector de ponderación sea la unidad, de lo contrario, se podrían escoger conjuntos de pesos cada vez mayores maximizando la varianza de la combinación lineal sin límite alguno.

La mejor manera de maximizar una función con restricciones es recurrir a multiplicadores de Lagrange. Se define pues la función  $F$  tal que

$$\begin{aligned} F &= E(X_i^2) - \lambda (\beta' \beta - 1) \\ &= \beta' R \beta - \lambda (\beta' \beta - 1) \end{aligned} \quad (17)$$

Si se calcula la derivada parcial de  $F$  respecto al vector  $\beta$  se llega a un resultado para cada derivada parcial. Igualando a cero se obtienen los puntos que maximizan la función  $F$ . Para la primera solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta} &= 2R\beta - 2\lambda\beta = 0 \\ &= (R - \lambda I)\beta = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Como el vector  $\beta$  debe tener al menos un elemento no nulo, la matriz  $R - \lambda I$  debe ser singular, por lo tanto los valores de  $\lambda$  que buscamos serán los que satisfagan el determinante

$$|R - \lambda I| = 0 \quad (19)$$

La expansión de este determinante da lugar a la ecuación característica de la matriz  $R$ , y las raíces que satisfacen la ecuación característica son sus autovalores. Este polinomio de grado  $n$  tendrá  $n$  raíces, es decir que  $R$  posee  $n$  autovalores. La sustitución de cada uno de los autovalores en la ecuación 18 dará lugar a cada uno de los autovectores  $\beta_i$ .

Hasta ahora hemos mantenido una notación similar a la habitual en regresión, denominando  $\beta$  a los vectores de pesos. Sin embargo, en el resto del trabajo denominaremos

como  $\lambda_i$  al  $i$ -ésimo autovalor de la matriz que sea autodescompuesta. Este cambio de notación es debido, tanto a una mayor consistencia con la literatura existente con el tema, como al hecho de resaltar que las soluciones ofrecidas suelen ser aproximadas ya que no resulta fácil computacionalmente la solución de los sistemas de ecuaciones como 18 y 19. En lugar de calcularse, pues, directamente, estas soluciones son aproximadas por métodos iterativos como el de Hotelling (1933), el método de Jacobi, el algoritmo derivado de tridiagonalización, el método Q-R de Ortega y Kaiser (1963) o la modificación de Wilkinson (1965). Las soluciones así obtenidas son buenas aproximaciones, y la potencia de cálculo de los actuales ordenadores permiten trabajar con una precisión considerable (en el caso del SPSS, en precisión doble de 14 dígitos).

Algunas propiedades importantes de los autovalores y autovectores de una matriz, particularizando para la matriz simétrica  $R$ , son (ver Searle, 1982; San Martín, Olea y Ruiz, 1988; Mulaik, 1972):

La varianza de la  $i$ -ésima combinación lineal generada por el  $i$ -ésimo autovector es igual al  $i$ -ésimo mayor autovalor.

$$\sigma_{x_i}^2 = E(X_i^2) = \lambda_i \quad (20)$$

Los autovectores son ortogonales entre si y, por ello, las combinaciones lineales que generan son independientes entre si.

$$A'A = I \quad (21)$$

donde  $A$  es la matriz ortogonal cuyas columnas son los  $n$  autovectores ordenados por orden decreciente de variabilidad asociada.

La matriz puede ser "descompuesta" en sus autovalores y autovectores según

$$R a_i = \lambda_i a_i \quad (22)$$

donde  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo mayor autovalor y  $a_i$  es el autovector asociado a él. De aquí se deduce que

$$R = A \Lambda A' \quad (23)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal de autovalores ordenados en orden decreciente de magnitud.

Una propiedad, en la que se basan el método de Jacobi y otros métodos derivados que no vamos a presentar aquí, establece que, si  $A$  es la matriz de autovalores de  $R$ , ésta puede ser sustituida por una serie de matrices ortogonales de manera que

$$A = T_1 T_2 T_3 \dots T_s \quad (24)$$

entonces los autovalores de  $R$  pueden ser obtenidos por la aplicación sucesiva de las matrices ortogonales, así,

$$T_s' \dots T_3' T_2' T_1' R T_1 T_2 T_3 \dots T_s = \Lambda \quad (25)$$

Ahora bien, el modelo de Factor Común supone que el número de factores es menor que el número de posibles autovectores de la matriz de correlaciones. Como se dijo más arriba, no se trabaja con la matriz  $R$  sino con la matriz reducida  $R_c$ . Esto da lugar a las siguientes fórmulas

$$|R_c - \lambda I| = 0 \quad (26)$$

$$(R_c - \lambda I) a = 0 \quad (27)$$

donde  $R_c = R - U^2$ . Una vez que se ha estimado la comunalidad de las variables, o bien se ha determinado el número de factores, sólo se retendrán aquellos autovectores correspondientes a autovalores mayores que la unidad (ver

más abajo el rango mínimo de una matriz), o bien el número de autovectores decididos de antemano.

La matriz de saturaciones vendrá definida por la operación

$$F = A\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

y, como exige la definición de la fórmula 5, la matriz de correlaciones debe poder ser reproducida a partir de la estructura factorial. Por ello, debe verificarse que

$$R = FF' + U^2 \quad (29)$$

Sin embargo, puesto que trabajaremos con estimaciones de la comunalidad, y no con los parámetros, y puesto que trabajaremos con matrices de correlaciones muestrales, es difícil que la matriz de saturaciones estimada consiga reproducir completamente la matriz de correlaciones utilizada en el análisis. Por ello es frecuente definir la matriz residual  $E$  como

$$E = R - \hat{F}\hat{F}' \quad (30)$$

y utilizarla como indicador de la bondad del modelo de Factor Común para explicar los datos. Diremos que el modelo de Factor Común se ajusta perfectamente si la matriz  $E$  es una matriz diagonal, y si los elementos diagonales  $e_{ii}$  cumplen el encontrarse  $0 < e_{ii} < 1$ , es decir, si la matriz de residuos se comporta como una matriz  $U^2$ .

Hay que resaltar que el método de ejes principales del modelo de Factor Común aquí expuesto NO es el que aparece como la opción PRINCIPAL AXIS FACTORING (PAF) del SPSS (ver más abajo).

Desafortunadamente, este modelo no permite el cálculo



directo de las puntuaciones factoriales contenidas en  $X$ , al contrario que el modelo de componentes principales. Por ello, las puntuaciones deben ser "estimadas" por algún procedimiento. El SPSS ofrece tres métodos de estimación: el de regresión de Harman (1967), el de Bartlett y el de Anderson-Rubin, cada uno con sus propiedades particulares (ver Kaiser, 1970).

### 2.1.2. ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES.

Inicialmente, el Análisis de Componentes principales fue diseñado para reestructurar toda la información recogida en las  $n$  variables observables y descomponer la variabilidad común de estas variables, en función de unas nuevas variables linealmente independientes que expliquen la información en términos de variabilidad decreciente. Para ello, es necesario extraer igual número de componentes como variables originales son introducidas en el análisis. El motivo por el que no existen menor número de componentes que de variables es debido a que, normalmente, las variables originales contienen un cierto error de medida que las hace independientes, es decir que el error contenido en cada una de las variables no puede ser explicado en términos de las restantes variables recogidas (ver nota 1).

Por tanto, el Análisis de Componentes Principales parte de la matriz de correlaciones con unos en la diagonal y no intenta distinguir la varianza común de la específica de cada variable, ya que, como hemos dicho, explica la totalidad de la variabilidad disponible. Esta particularidad, junto con la posibilidad de calcular directamente las puntuaciones en las componentes (puntuaciones factoriales) y evitar tener que estimarlas ha hecho que esta técnica haya sido utilizada con gran profusión por los analistas. Sin embargo, como veremos, esta técnica puede ser utilizada como un procedimiento de

extracción en sí misma para modelos factoriales de Factor Común.

Aunque el procedimiento de extracción utilizado con esta técnica puede ser tanto el método diagonal (Cholesky, 1915; Dwyer, 1944; Harman, 1960; Mulaik, 1972), como el método del centroide (Thurstone, 1947; Harman, 1960; Mulaik, 1972), habitualmente se utiliza el método de ejes principales (Hotelling, 1933) suponiendo que la comunalidad de cada variable es la unidad (cuando utilizamos escala típica). La ventaja de este método sobre los anteriores es el hecho de trabajar con autovalores y autovectores, tanto para el cálculo de la estructura factorial como para el cálculo de las puntuaciones factoriales. Además, el conocimiento de los autovalores y su relación con la proporción de varianza común explicada por los correspondientes factores asociados, permite tomar ciertas decisiones sobre el número de factores a utilizar.

El modelo parte de un vector aleatorio  $Z$  de dimensiones  $n \times 1$  cuyas coordenadas son  $n$  variables. Sea  $X$  un vector aleatorio  $n \times 1$  cuyas coordenadas son las  $n$  componentes principales. Sea  $F$  una matriz cuadrada  $n \times n$  que contiene las saturaciones factoriales de las  $n$  variables en las  $n$  componentes. La ecuación fundamental será entonces

$$Z = FX \quad (31)$$

Por definición la matriz  $F$  viene dada por

$$F = A\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

donde  $A$  es la matriz  $n \times n$  de autovectores y  $\Lambda$  es la matriz diagonal  $n \times n$  de autovalores de la matriz de correlaciones entre las  $n$  variables  $R$ , es decir

$$R = E(ZZ') \quad (33)$$

y

$$A'RA = \Lambda \quad (34)$$

Las coordenadas de  $X$  se suponen ortogonales, de manera que

$$E(XX') = I \quad (35)$$

Aunque en teoría esta técnica debe extraer tantas componentes como variables, en la práctica la mayoría de los analistas factoriales retienen menos de  $n$  componentes. En principio, esto es debido a una extrapolación del modelo de Análisis de Factor Común que supone menor número de factores que de variables. Varios razonamientos soportan esta utilización, de una parte, el investigador acostumbra a estar interesado sólo en las componentes de mayor relevancia, ya que recogen las principales características del fenómeno estudiado. Como regla práctica se retienen aquellos factores que retienen un porcentaje de varianza determinado, digamos el 95%. Esto es fácil de realizar, dado que los autovalores reflejan la proporción de varianza común explicada de las  $n$  variables simplemente, dividiendo cada uno por el número de variables. Así, cuando la suma de estos cocientes alcanza el valor deseado, en este caso .95, el número de autovalores necesarios para completar esta cantidad será el número de factores a retener.

El SPSS ofrece la posibilidad de utilizar este criterio ya que, junto con la tabla de las comunales estimadas de cada variable, dispone los autovalores de la matriz analizada, el porcentaje de varianza común que representan y su total acumulado.

Otra razón para retener un número de factores menor que  $n$  fue la desarrollada por Kaiser (1960), puesto que el número de factores correspondientes a autovalores mayores

que la unidad coincide con el más débil de los límites para la comunalidad de Guttman (ver fórmula 7.34). Además, Kaiser (1965) también demostró, en conexión con el Análisis Alfa, que el número de factores con autovalores mayores que la unidad corresponde al número de factores comunes con una generabilidad positiva, en el sentido del Coeficiente  $\alpha$  de Crombach<sup>6</sup>.

Por su parte, Bartlett (1950, 1951) propuso un test de significación sobre el número de factores comunes a retener con esta técnica de análisis. Como veremos más adelante las suposiciones hechas por Bartlett son bastante restrictivas y tienen más sentido en el marco del Análisis de Componentes Principales que en el Factor Común, si bien la regla intenta determinar un número de factores menores que  $n$ .

### 2.1.3. COMPONENTES PRINCIPALES DE COMPONENTES VERDADERAS (TRUE COMPONENTS).

La varianza total de una variable puede ser descompuesta en diversas partes dependiendo del modelo de análisis que se utilice. Hasta ahora, sólo hemos hecho hincapié en la comunalidad y la unicidad, sin embargo el error de medida de una variable es otra parte de fundamental importancia. Hotelling (1933) propuso un modelo de Análisis de Componentes Principales basándose en la parte de la unicidad debida al error aleatorio. Aunque no se trata de una técnica que haya gozado de gran profusión, a continuación lo revisamos por las fórmulas que genera, de interés para discutir algunas de las reglas existentes sobre el número de factores.

Desde el modelo de la psicometría clásica, la

---

<sup>6</sup> Yanai e Ichikawa (1990) proponen una corrección al límite inferior de la comunalidad. Ver también Cliff (1988).

puntuación observada en una prueba puede descomponerse en dos partes exclusivas, una debida a la puntuación verdadera que intenta medir esa prueba, y otra debida al error de medida. De esta forma, el vector aleatorio de puntuaciones observadas puede descomponerse según

$$Z = Z_v + Z_e \quad (36)$$

donde  $Z_v$  es un vector  $n \times 1$  de coordenadas las puntuaciones verdaderas de las  $n$  variables observables y  $Z_e$  será un vector  $n \times 1$  con las correspondientes puntuaciones error. Según la axiomática de este modelo  $E(ZZ') = R$  la matriz de correlaciones,  $E(Z_e Z_e') = E^2$  será una matriz diagonal de covarianza de los errores, y  $E(Z_v Z_e') = 0$  una matriz nula. Si definimos como  $\lambda_j$  el  $j$ -ésimo mayor autovalor de la matriz  $R$ , y  $a_j$  como el correspondiente autovector. La fiabilidad de la componente asociada a ese autovector (y por tanto colineal con él)  $r_{jj}$  puede calcularse a partir de las fórmulas (Mulaik, 1972)

$$r_{jj} = 1 - \frac{a_j' E^2 a_j}{\lambda_j} \quad (37)$$

$$r_{jj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \sigma_{e_i}^2}{\lambda_j} \quad (38)$$

donde  $n$  es el número de variables,  $a_{ij}$  es el elemento  $i$ -ésimo del  $j$ -ésimo autovector y  $\sigma_{e_i}^2$  es la varianza error de la  $i$ -ésima variable.

Puesto que la presencia de error en la medida de las variables observadas distorsionarán las correlaciones entre ellas atenuando su valor, y puesto que, la mayoría de los investigadores estarán interesados en la detección de rasgos

a través de medidas carentes de error, una posibilidad es corregir dicha atenuación antes de llevar a cabo la extracción de los factores.

La fórmula más extendida para esta corrección de la correlación  $r_{jk}$  entre las pruebas  $j$  y  $k$  es

$$r'_{jk} = \frac{r_{jk}}{\sqrt{r_{jj}r_{kk}}} \quad (39)$$

donde la correlación corregida es  $r'_{jk}$ , y  $r_{jj}$  y  $r_{kk}$  son los coeficientes de fiabilidad de las pruebas  $j$  y  $k$ , respectivamente.

Es fácil demostrar que la matriz de covarianzas entre puntuaciones verdaderas (cuando están estandarizadas) se corresponde con la matriz de correlaciones original con los coeficientes de fiabilidad en la diagonal, es decir,

$$E(\mathbf{Z}_v \mathbf{Z}'_v) = \mathbf{R} - \mathbf{E}^2 \quad (40)$$

donde  $\mathbf{R}$  es la matriz de correlaciones entre variables observadas,  $\mathbf{E}^2$  es una matriz diagonal con las varianzas de los errores de medida y  $\mathbf{Z}_v$  es el vector de puntuaciones verdaderas.

Por conveniencia de notación definamos la matriz diagonal  $\mathbf{K}$  de manera que

$$\mathbf{K} = [\text{diag}(\mathbf{R} - \mathbf{E}^2)] \quad (41)$$

para poder estandarizar la matriz reducida anterior, siendo

$$\mathbf{R}_{vv} = \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R} - \mathbf{E}^2) \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

De esta forma, la diagonal de  $\mathbf{R}_{vv}$  contendrá unos en la diagonal y los elementos no diagonales quedaran corregidos según la fórmula 39.

Una vez obtenida la matriz  $R_w$  se puede utilizar cualquiera de los modelos factoriales existentes. Desgraciadamente esta matriz no es gramiana y resulta difícil determinar el número de factores deseables.

Las fiabilidades utilizadas en este modelo son estimaciones de las fiabilidades reales de las variables, y, aunque se tuvieran las fiabilidades poblacionales, la matriz de correlaciones a analizar proviene normalmente de una muestra, lo que lleva a una indeterminación del modelo de Factor Común. Además, la forma en que se obtienen las fiabilidades es independiente del procedimiento para calcular la matriz de correlaciones muestral. Debido a todo ello, la matriz corregida resulta no-gramiana y pueden en principio retenerse simplemente los autovalores positivos, lo que normalmente dará lugar a más factores de los deseados.

#### 2.1.4. COMPONENTES PRINCIPALES PONDERADOS (WLS).

Dado que no es posible determinar exactamente, de antemano, el error de las variables, para poder excluirlo antes de llevar a cabo un Análisis de Componentes, es posible asumir que en un Análisis de Componentes sobre las variables originales las primeras componentes están relativamente libres de error, mientras que las últimas corresponden fundamentalmente a la variabilidad de los errores. Así, en un Análisis de Componentes Ponderados, se retienen las primeras componentes más libres de error y se rechazan las restantes.

Al igual que en TCA, las  $n$  variables observadas pueden ser divididas en dos conjuntos independientes de  $n$  puntuaciones verdaderas y las  $n$  variables error correspondientes de la forma

$$Z = Z_v + Z_e \quad (43)$$

Ahora bien, se puede crear una transformación lineal arbitraria de las  $n$  variables observadas, definida como

$$Y^* = b'Z = b'(Z_v + Z_e) = b'Z_v + b'Z_e \quad (44)$$

consistente también en una parte de puntuación verdadera  $b'Z_v$  y una parte de puntuación error  $b'Z_e$ . De igual forma, la varianza de la variable compuesta  $Y^*$  también vendrá descompuesta en estas dos partes exclusivas, es decir,

$$\sigma_{Y^*}^2 = b'Rb = b'(R - E^2)b + b'E^2b \quad (45)$$

donde la primera parte del último término será la varianza verdadera del  $Y^*$  y la segunda parte, será la varianza error (en la métrica de las unidades de las puntuaciones totales). La proporción de varianza total debida al error vendrá dada por el cociente

$$\frac{b'E^2b}{b'Rb} \quad (46)$$

La solución buscada para  $b$  puede ser aquélla que minimice el cociente 46, pero esencialmente, el resultado será el mismo si maximizamos el valor de  $b'Rb$  bajo la restricción  $b'E^2b=1$ . La solución puede hallarse fácilmente por el método de multiplicadores de Lagrange, de manera que

$$F = b'Rb - \lambda (b'E^2b - 1) \quad (47)$$

nos permitirá hallar el máximo de  $b'Rb$  con la restricción sobre  $b$ . Una solución suficiente será que la derivada parcial de  $F$  respecto a  $b$  sea igual a cero, es decir que

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2Rb - 2\lambda E^2b = (R - \lambda E^2)b = 0 \quad (48)$$

Esta ecuación es muy parecida a la fórmula 18 de ejes



principales para la búsqueda de la descomposición factorial de  $R$ . Como en el caso mencionado, la solución del sistema implica la singularidad de la matriz entre paréntesis, de manera que

$$|R - \lambda E^2| = 0 \quad (49)$$

Para hallar los valores de  $\lambda$  que anulen el determinante, Mulaik (1972:182) propone una sustitución que permite hallar una solución computacional. Veamos la demostración, ya que este procedimiento se repite en diversos métodos de análisis, si bien con variaciones.

Consideremos el determinante

$$|E^{-1}RE^{-1} - \lambda I| = 0 \quad (50)$$

Este determinante da lugar a las ecuaciones características de la matriz simétrica  $E^{-1}RE^{-1}$ , y sus raíces, las  $\lambda_i$ , anularán también el determinante de 49. Como prueba, asumamos que la matriz  $E^2$  de varianzas error sólo contiene elementos diagonales positivos. Por lo tanto  $|E^{-1}| \neq 0$ . Si planteamos la fórmula

$$|E^{-1}||R - \lambda E^2||E^{-1}| = 0 \quad (51)$$

podemos ver que la única forma en que esta fórmula puede ser nula es para elecciones de  $\lambda$  que hagan cero el determinante  $|R - \lambda E^2|$ , ya que  $|E^{-1}| \neq 0$ . Ahora bien, la expresión de 50 es equivalente a

$$|E^{-1}(R - \lambda E^2)E^{-1}| = 0 \quad (52)$$

que se reduce a 50 si incluimos las matrices  $E^{-1}$  dentro de los paréntesis.

No sólo los autovalores de  $E^{-1}RE^{-1}$  coinciden con los que buscamos, sino que también los autovectores  $a$  de esta matriz

coinciden con los autovectores  $b$ , solucionando 48 mediante la transformación

$$a = Eb \quad \text{ó} \quad b = E^{-1}a \quad (53)$$

Como prueba, consideremos que la restricción de  $b$  es satisfecha mediante

$$b'E^2b = a'E^{-1}E^2E^{-1}a = a'a = 1 \quad (54)$$

ya que el autovector  $a$  está normalizado. Por otra parte,

$$b'Rb = a'E^{-1}RE^{-1}a = \lambda \quad (55)$$

es un máximo si el autovector  $a$  utilizado es el correspondiente al mayor autovalor de la matriz  $E^{-1}RE^{-1}$ .

Por lo tanto, la solución que buscamos puede calcularse a partir de la descomposición factorial de  $E^{-1}RE^{-1}$ , como viene expresado en 50 en lugar de solucionar 49. Pero esta solución dará lugar a un único componente, si buscamos todos los posibles debemos definir una nueva matriz  $Y^*$ . Sea esta matriz un vector aleatorio  $n \times 1$  de componentes no normalizadas definidas por

$$Y^* = B'Z = A'E^{-1}Z \quad (56)$$

donde  $B = E^{-1}A$ , es una matriz  $n \times n$ ,  $A$  es la matriz  $n \times n$  de autovectores de  $E^{-1}RE^{-1}$ , y  $E^2$  es la matriz diagonal de varianzas de los errores en  $Z$ . Dadas las reglas de descomposición de componentes principales,

$$E(Y^*Y^{*'}) = A'E^{-1}RE^{-1}A = \Lambda \quad (57)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal de autovalores de la matriz  $E^{-1}RE^{-1}$ . Por lo tanto, las componentes sin normalizar de  $Y^*$  son ortogonales entre si, y están ordenadas por orden decreciente de variabilidad, y deben tener una proporción de variabilidad error cada vez mayor.

Las componentes contenidas en  $Y^*$  representan las componentes principales de las variables no normalizadas  $E^{-1}Z$ . Mientras que el Análisis de Componentes Principales tradicional pretende reorganizar la variables normalizadas  $Z$ , el Análisis de Componentes Principales Ponderados se efectúa sobre las variables no normalizadas  $E^{-1}Z$ , lo que representa la ponderación de las variables  $Z$  por la inversa de la correspondiente proporción de varianza error contenida en cada una de ellas, dando mayor ponderación a las variables que contienen menor proporción de error, y viceversa. De esta forma, por ejemplo, una variable con una proporción de varianza error de .90 recibirá una ponderación de 1.05, mientras que otra con una proporción de .01 tendrá una ponderación de 10.

Como el propósito de la extracción de ejes principales es encontrar las combinaciones lineales de las variables obteniendo la mayor variabilidad, el método tiende a ponderar más a las variables más relacionadas y de mayor variabilidad. Cuando todas las variables están normalizadas, como es el caso cuando se lleva a cabo la extracción sobre la matriz  $R$ , el método sólo está influido inicialmente por las interrelaciones entre variables. Sin embargo, cuando las variables no tengan igual varianza el, método de ejes principales no sólo dará prioridad a las variables más interrelacionadas, sino también a aquellas de mayor variabilidad, para constituir los primeros factores.

Cuando se asignan pesos diferenciados a variables normalizadas, de hecho incrementamos las variabilidades de unas variables respecto a otras, y como resultado las de mayor variabilidad tienen mayor influencia en las componentes extraídas en primer lugar, frente a las componentes extraídas en último lugar.

Una vez llevada a cabo la extracción, las componentes  $Y^*$  pueden ser normalizadas premultiplicándolas por los

inversos de sus desviaciones típicas, por la operación

$$Y = \Lambda^{-\frac{1}{2}} Y^* = \Lambda^{-\frac{1}{2}} A' E^{-1} Z \quad (58)$$

donde  $Y$  es el vector aleatorio  $n \times 1$  de componentes normalizadas de las variables ponderadas  $E^{-1}Z$ , y  $A$  es la matriz de autovectores y  $\Lambda$  la matriz de autovalores de la matriz  $E^{-1}RE^{-1}$ . La matriz de estructura vendrá entonces dada por

$$E(ZY') = EA\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (59)$$

Parece mucho más deseable esta solución de factorización que la de componentes principales sin ponderar, ya que los autovectores de  $E^{-1}RE^{-1}$  contienen una variabilidad error proporcionalmente menor que los autovectores correspondientes de la matriz  $R$ . Sin embargo, esta solución no deja de plantear sus propios problemas, ya que no resulta claro el momento en que deben empezar a rechazarse las componentes residuales. En componentes principales, se podía confiar en el heurístico de descartar aquellas componentes con autovalores menores que la unidad, pero con componentes principales ponderados esto supondrá retener muchos más factores que en el anterior caso. Esto llevaría a dispersar las variables por el espacio factorial al realizar las rotaciones posteriores, e intentar así sobredeterminar algunos de los factores. Una posible solución a este problema, será observar el resultado de otros modelos como imagen o canónico y, a partir de ahí, tomar una decisión.

## 2.2. MINRES O UNWEIGHTED LEAST SQUARES.

El método MINRES fue propuesto por Thomson (1934) y desarrollado posteriormente por Bargmann (1957), Harman y Fukuda (1966), Harman y Jones (1966) y Harman (1967). Su

filosofía básica proviene de la aplicación del concepto de Mínimos Cuadrados de la técnica de Regresión Múltiple.

Definamos la matriz residual  $E$ , como en 30, la parte de la matriz de correlaciones no explicada por el modelo factorial, es decir,

$$E = R - FF' \quad (60)$$

A partir de esta matriz podemos crear una función de ajuste que sea la suma de los cuadrados de los elementos no diagonales de la matriz  $E$ , es decir,

$$f_L = \text{tr}[(E - D_E)'(E - D_E)] \quad (61)$$

donde  $D_E = [\text{diag } E]$ , y buscar la solución factorial que minimice esta función para un número  $r$  de factores comunes. Este método, pues, busca minimizar los residuos (minres) como criterio para hallar la solución factorial de Factor Común. Cuando la suma de los cuadrados de los elementos no diagonales sea tan pequeña como sea posible, para el número de factores elegido, la matriz  $E$  tenderá a ser una matriz diagonal, como deberá ser la matriz de unicidades  $U^2$ . Por su parecido con el método de estimación tradicional de regresión múltiple, también se ha denominado a este método Mínimos Cuadrados o Mínimos Cuadrados sin Ponderar (Unweighted Least Squares).

Harman y Jones (1966) han desarrollado una solución Gauss-Seidel para hallar la matriz  $F$ . Este procedimiento ajusta sucesivamente los vectores columna  $f_i$  de la matriz  $F$  más que ajustar simultáneamente la matriz completa. Para ello debe calcularse la primera derivada de la función y hallar los valores que la anulan. El ajuste de cada vector modifica también los anteriores vectores hallados, y el proceso se repite iterativamente hasta alcanzar un valor de divergencia mínimo entre las matrices obtenidas en dos iteraciones sucesivas.

El procedimiento es básicamente el mismo utilizado en la transformación procrustea de rotación, y ofrece el inconveniente de hallar soluciones impropias con comunalidades mayores que la unidad (casos Heywood) con relativa facilidad (Mulaik, 1972). Cuando una de tales soluciones es hallada se aplican otros algoritmos que restringen la solución, como el de Harman y Fukuda (1966) o el de Browne (1967). Para una descripción más completa ver Mulaik (1972), y Harman (1976).

Otra solución de Mínimos Cuadrados que goza de más popularidad es la minimización de la función

$$f_{LS} = \text{tr}(\mathbf{R} - \mathbf{F}\mathbf{F}' - \mathbf{U}^2)'(\mathbf{R} - \mathbf{F}\mathbf{F}' - \mathbf{U}^2) \quad (62)$$

mediante el cálculo de los valores de las matrices  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{U}^2$  más adecuados. Esta función es esencialmente la misma que la función 61 y las funciones de Mínimos Cuadrados Generalizados y Máxima Verosimilitud, donde se intenta ajustar la matriz de parámetros del modelo a las matrices de parámetros estimados para dicho modelo (ver Bollen 1989). Lo que variará entre los distintos métodos será la fórmula de ajuste y por ello las correspondientes derivadas.

Para hallar la solución que minimice la función 62 bastará con tomar las primeras derivadas de  $f_{LS}$  respecto a  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{U}^2$  igualarlas a cero y solucionar simultáneamente los sistemas a que dan lugar. Las derivadas parciales serán las matrices

$$\frac{\partial f_{LS}}{\partial \mathbf{F}} = 4(\mathbf{F}\mathbf{F}')\mathbf{F} - 4\mathbf{R}\mathbf{F} + 4\mathbf{U}^2\mathbf{F} \quad (63)$$

$$\frac{\partial f_{LS}}{\partial \mathbf{U}^2} = \text{diag}(2\mathbf{U}^2 - 2\mathbf{R} + 2\mathbf{F}\mathbf{F}') \quad (64)$$

Sin embargo, la solución no puede ser hallada analíticamente

y debe ser solucionado numéricamente. El procedimiento numérico utilizado para solucionar estos sistemas de ecuaciones no lineales es el método de Newton-Raphson utilizado por el SPSS y por el LISREL, que puede ser descrito brevemente como sigue.

Consideremos un sistema de ecuaciones simultáneas no lineales  $f_1, \dots, f_n$  con  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n$  representados en un vector de funciones  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  cuyas coordenadas son cada una de las funciones para el conjunto de incógnitas, es decir,  $f_j(\mathbf{x}) = f_j(x_1, \dots, x_n)$ . Para encontrar los valores del vector  $\mathbf{x}$  que anulen el vector de funciones, de manera que  $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ , es necesario calcular la matriz  $n \times n$  de derivadas  $\mathbf{J} = [\partial f_j / \partial x_k]$  evaluadas en el punto de coordenadas  $\mathbf{x}$ . Entonces, a partir de una aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  hacia la solución final del vector  $\mathbf{x}$ , las aproximaciones sucesivas se obtienen iterativamente mediante la fórmula

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(i)})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (65)$$

donde  $\mathbf{x}^{(i)}$  y  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  son las aproximaciones  $i$  e  $i+1$ , respectivamente, a la solución final de  $\mathbf{x}$ , y la matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  es la matriz de pendientes de las funciones  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  evaluados en la aproximación (iteración) correspondiente.

En nuestro caso, las funciones contenidas en  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  son las derivadas parciales de la función  $f_{LS}$  y, por tanto, en la matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  se encuentran las segundas derivadas parciales de esta función. Aunque con una elección adecuada de la primera estimación  $\mathbf{x}^{(0)}$  el método converge rápidamente, esto implica el cálculo de la inversa de la matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  en cada iteración, lo que resulta especialmente costoso computacionalmente, sobre todo si el número de variables es elevado. Para solucionar este problema Jöreskog y Lawley (1968) propusieron condicionar la solución, estableciendo  $\mathbf{F}$  en función de las unicidades y minimizar así

$$g(U^2) = \min_F f_{LS}(F, U^2) = f_{LS}(F_{U^2}, U^2) \quad (66)$$

donde  $F_{U^2}$  es el valor de  $F$  que minimiza  $f_{LS}(F, U^2)$  para unos valores de  $U^2$  dados.

Ahora bien, si igualamos a cero la ecuación 63, simplificándola y reorganizándola llegamos a la ecuación

$$(R - U^2)F = FF'F \quad (67)$$

donde podemos considerar la matriz  $F'F$  como una matriz diagonal de dimensiones  $r \times r$  para que la solución de  $F$  sea única. Entonces, podemos tratar la matriz  $F$  como  $F = A_r \Lambda_r^{\frac{1}{2}}$ , donde  $A_r$  contiene los  $r$  mayores autovectores normalizados de la matriz  $(R - U^2)$ , y  $\Lambda_r$  los correspondientes  $r$  autovalores. Por lo tanto

$$\min_{U^2} g(U^2) = \min_{F, U^2} f_{LS}(F, U^2) \quad (68)$$

y encontrar la  $U^2$  que minimice  $g(U^2)$  implica hallar la  $F$  y la  $U^2$  que minimice  $f_{LS}(F, U^2)$ . Por ello, la derivada parcial de  $g$  respecto a  $U^2$  es equivalente a la derivada parcial de  $f_{LS}$  respecto a  $U^2$  con la matriz  $F$  fijada como la matriz  $r \times r$  de estructura extraída por ejes principales de la matriz  $R - U^2$ .

Podemos entonces condicionar la solución de  $F$  estableciendo  $F = A_r \Lambda_r^{\frac{1}{2}}$ , donde  $A_r$  es la matriz de los autovectores normalizados correspondientes a los  $r$  mayores autovalores en  $\Lambda_r$  de la matriz  $R - U^2$ , una vez determinado el número de factores  $r$ , y reescribir la función que deseamos minimizar de la forma



$$\begin{aligned} g(U^2) &= \text{tr}(R - U^2 - A_r \Lambda_r A_r')' (R - U^2 - A_r \Lambda_r A_r') \\ &= \text{tr}(R - U^2 - A_r \Lambda_r A_r')^2 \end{aligned} \quad (69)$$

Pero esta fórmula puede también reescribirse en función sólo de los autovalores si tenemos en cuenta que para los  $r$  mayores autovalores y para los  $n-r$  restantes autovalores,  $(R - U^2) = A \Lambda A' = A_r \Lambda_r A_r' + A_{n-r} \Lambda_{n-r} A_{n-r}'$  y entonces,

$$\begin{aligned} g(U^2) &= \text{tr}(A_{n-r} \Lambda_{n-r} A_{n-r}')^2 = \text{tr}(\Lambda_{n-r})^2 = \\ &= \sum_{j=r+1}^n \lambda_j^2 \end{aligned} \quad (70)$$

y las derivadas parciales para cada vector de  $U^2$  pueden expresarse como

$$\frac{\partial g}{\partial u_i^2} = 2 \left( u_{ii}^2 + \sum_{k=1}^r a_{ik}^2 \lambda_k - 1 \right) \quad (71)$$

Para aplicar el método de Newton-Raphson una buena elección inicial de las unicidades  $u^{2(0)}$ , es la propuesta por Jöreskog (1962, 1967)  $u_{ii}^{2(0)} = (1 - r/2n) / r^{ii}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y donde  $r^{ii}$  es el  $i$ -ésimo elemento diagonal de la matriz  $R^{-1}$ . Esta estimación inicial recuerda mucho a las realizadas en el Análisis Imagen y es de hecho el utilizado por el SPSS.

Sin embargo, según informa Mulaik (1972), dado que calcular las correspondientes derivadas parciales de la función  $g(U^2)$  resulta difícil, Jöreskog (1967) propuso la utilización del algoritmo iterativo de Fletcher-Powell que evita este punto. Este algoritmo trabaja con una simplificación del método de Newton-Raphson y es tan eficiente como éste. Tanto el método de Newton-Raphson como el de Fletcher-Powell están disponibles en el LISREL VII.

### 2.3. ANÁLISIS DE IMAGEN PARCIAL.

Como hemos podido ver, el gran problema del Análisis de Factor Común es su incapacidad para definir debidamente las partes comunes y específicas de las variables. Es cierto que se establecen las relaciones que deben mantener estas partes y su delimitación en términos de la estructura factorial, pero debido al problema de su inidentificabilidad, a lo más que puede aspirarse es a su estimación. El Análisis Imagen (Análisis de Componentes Imagen) desarrollado por Guttman (1953), soluciona este problema determinando claramente las partes comunes y específicas, manteniendo una filosofía muy próxima al modelo de Factor Común.

Este modelo hace referencia, inicialmente, al universo de sujetos (la población), del cual la matriz de varianza-covarianza a analizar será una muestra, y al universo de pruebas, del cual las variables utilizadas en un análisis dado, serán una muestra representativa. La parte común y única de las variables viene definida en términos del universo de pruebas, si bien estos valores serán una estimación cuando se trabaja con un número finito de pruebas, como es el caso, normalmente.

La precisa definición dada por Guttman (1953) a la parte común de una puntuación factorial fue: *La parte común de una variable es aquella parte que es predecible mediante correlación múltiple lineal a partir de todas las demás variables del universo de variables.* Es decir, que la parte común de una variable será la proyección de esa variable sobre el espacio  $(n-1)$ -dimensional de las demás variables. Esta parte común será la denominada *imagen* de la variable sobre las demás variables del universo de variables. La parte de una variable, que no puede ser predicha mediante regresión múltiple, es la *anti-imagen* de la variable. Puesto

que la definición se hace en términos del universo de variables debemos esperar que tanto imagen como anti-imagen de una variable sólo sean aproximadas en un análisis dado, ya que son estimadas a partir de las variables estudiadas en un momento dado.

En términos de la notación utilizada por Mulaik (1972)<sup>7</sup>, sea  $Z$  un vector aleatorio  $n \times 1$  de  $n$  variables aleatorias y sea  $Z_p$  el correspondiente vector de variables imagen, de manera que

$$Z_p = W'Z \quad (72)$$

donde  $W$  es la matriz  $n \times n$  de los pesos necesarios para estimar una variable mediante correlación múltiple a partir de las  $n-1$  restantes de  $Z$ .

El vector de partes anti-imagen, no estimables, será  $Z_u$ , de manera que

$$Z_u = Z - Z_p = Z - W'Z = (I - W')Z \quad (73)$$

La matriz  $W$  viene definida por la operación

$$W = (I - R^{-1}S^2) \quad (74)$$

donde  $R$  es la matriz de correlaciones de las variables contenidas en  $Z$  y <sup>8</sup>

$$S^2 = [\text{diag}R^{-1}]^{-1} \quad (75)$$

Con una fundamentación similar a la de Factor Común, la descomposición factorial se lleva a cabo sobre la matriz de

---

<sup>7</sup> Ver también Rummel (1970), si bien la notación es ligeramente diferente.

<sup>8</sup> Estas fórmulas fueron propuestas por Kaiser (1963).

covarianzas imagen<sup>9</sup>, es decir, de las partes comunes, a la cual denominamos  $G$ . Antes de establecer comparaciones definamos ambas matrices. La matriz  $G$  viene dada por

$$G = E(Z_p Z_p') = R + S^2 R^{-1} S^2 - 2S^2 \quad (76)$$

y la matriz  $Q$  de covarianzas anti-imagen puede calcularse como

$$Q = E(Z_u Z_u') = S^2 R^{-1} S^2 \quad (77)$$

de donde

$$G = R + Q - 2S^2 \quad (78)$$

Puesto que la diagonal de  $Q$  contiene los mismos elementos que  $S^2$ , de la ecuación anterior se puede inferir que la matriz  $G$  tiene un significado similar a la matriz de correlaciones reducida ( $R-U^2$ ) de Factor Común. Sin embargo, la matriz de correlaciones reducida y  $G$  no son exactamente iguales ya que  $G$  está reajustada para cumplir la condición de ser gramiana<sup>10</sup>. Sin embargo, según apunta Guttman (1953), cuando se trabaja con el universo de variables (pruebas) y por tanto la proporción de factores tiende a cero, es decir cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = 0 \quad (79)$$

se pueden derivar una serie de consecuencias que, en el límite, equiparan el modelo de Factor Común y el modelo de Análisis Imagen. En esta situación la unicidad de una variable coincide con el error de predicción de esa variable a partir de las demás, la comunalidad coincide con la

---

<sup>9</sup> Mientras que Harris (1962) y Kaiser (1963) proponen analizar la matriz imagen, Guttman (1953) propone la anti-imagen.

<sup>10</sup> Kaiser (1963) comunica que generalmente los elementos no diagonales de  $R$  son ligeramente reducidos en su valor.

correlación múltiple al cuadrado y los elementos no diagonales de  $Q$  tienden a cero. Esto es debido a que los elementos no diagonales de  $Q$  no son más que la covarianza parcial (negativa) entre las dos variables correspondientes eliminado el efecto de todas las demás variables. Esto se puede resumir en las siguientes fórmulas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^2 = U^2 \quad (80)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G = (R - U^2) \quad (81)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q = S^2 = U^2 \quad (82)$$

Estos supuestos para la población de variables llevaron a Guttman (1953) a proponer una prueba sobre el grado en que la muestra de variables elegida viene determinada por el modelo de Factor Común. Como, en el límite, los elementos no-diagonales de la matriz de correlaciones parciales deberían ser próximos a cero, si la matriz  $Q$  correspondiente no se aproxima a una matriz diagonal, entonces la muestra de variables no es la adecuada para ser utilizada en un modelo de Factor Común.

En clara conexión con este razonamiento se encuentra la regla práctica propuesta por Thurstone (1947) (recogida también por Butler & Hook, 1966, Butler, 1968) para desechar variables de una estructura factorial, proponiendo que los grupos de dos variables que configuren por sí solas un factor, no deben ser consideradas. Estas variables son fáciles de detectar en la matriz de correlaciones parciales anti-imagen  $SR^{-1}S$ , y deben ser excluidas antes de la extracción, de lo contrario pueden distorsionar el espacio vectorial al intentar crear un factor, incluirse en la estructura y distorsionar la rotación (Butler 1968).

Observando la fórmula de cálculo para la matriz de correlaciones parciales anti-imagen

$$R_{z_i z_j} = [\text{diag } Q]^{-\frac{1}{2}} Q [\text{diag } Q]^{-\frac{1}{2}} = SR^{-1}S \quad (83)$$

podemos ver que la única manera en que es posible que los elementos no diagonales de esta matriz sean nulos, es cuando la matriz  $R^{-1}$  es diagonal. Este razonamiento es el hilo conductor de diversas pruebas de idoneidad del modelo de Factor Común, como, por ejemplo, el de Rummel (1970:104) y Velicer (1976).

La matriz sobre la que realiza la auto-descomposición es  $G$  y el método de extracción, generalmente, es ejes principales. Sin embargo dada la complejidad de cálculo para calcular las matrices  $G$  y  $Q$ , es más frecuente utilizar los presupuestos del Análisis Canónico (Harris, 1962) y factorizar la matriz  $G^*$  definida como

$$G^* = S^{-1}GS^{-1} \quad (84)$$

donde  $G$  es la matriz gramiana  $G$ , y  $S^{-1}$  es la matriz derivada de la matriz  $S^2$ . Sustituyendo la ecuación 76 en 84 llegamos a

$$G^* = S^{-1}RS^{-1} + SR^{-1}S - 2I \quad (85)$$

que, mediante las sustituciones pertinentes, puede reescribirse como una matriz de descomposición factorial

$$\text{(86)} \quad G^* = A \left[ \frac{(\Lambda - I)^2}{\Lambda} \right] A'$$

donde  $A$  es la matriz de autovectores de la matriz  $S^{-1}RS^{-1}$ , y  $\Lambda$  es la matriz diagonal de autovalores de la misma matriz anterior.

Sabemos del Análisis Canónico que los factores a retener son los correspondientes a autovalores de  $S^{-1}RS^{-1}$

mayores que 1. Estos coincidirán con los autovalores positivos de su matriz homónima de Análisis Canónico  $S^{-1}(R-S^2)S^{-1}$ , y serán los factores significativos de  $G^*$ . Además, los autovalores de  $S^{-1}RS^{-1}$  menores que 1 los autovalores de  $G^*$  serán positivos, pero aumentarán en tamaño sin límite tendiendo a infinito, lo que puede sugerir que se trate de componentes aleatorios que deben ser evitados.

Una vez determinado el número  $r$  de factores a retener, la solución factorial imagen se puede reconstruir mediante la operación

$$F_g = SA_r \left[ \frac{(\Lambda - I)^2}{\Lambda} \right]_r^{\frac{1}{2}} \quad (87)$$

En cuanto a la comparación entre las soluciones factoriales imagen y canónica, éstas no serán exactamente iguales ya que los autovalores de  $G^*$  y  $S^{-1}(R-S^2)S^{-1}$  difieren, siendo, los de la primera, menores que los de la segunda, y aproximándose a cero a medida que los autovalores de  $S^{-1}RS^{-1}$  se aproximan a la unidad. Por ello, el Análisis Imagen tenderá a minorizar los factores próximo al punto de rechazo.

Este modelo permite el cálculo directo de las puntuaciones factoriales por la operación definida en la ecuación 72 (Kaiser, 1963; Harris, 1962; Rummel, 1970).

#### 2.4. ANÁLISIS FACTORIAL CANÓNICO.

Al igual que ha ocurrido con el Análisis Discriminante, y muy en la línea de la utilización de variables dummy en regresión múltiple, los desarrollos de la técnica de correlación canónica ha posibilitado su aplicación al Análisis Factorial.

El Análisis de Regresión Canónica desarrollado por Anderson (1958) y Cooley & Lohnes (1962) fue aplicado al Análisis Factorial por Rao (1955) y refinado por Harris (1956, 1962, 1963, 1964) y Kaiser (1963, 1964). Con esta técnica se pueden calcular dos combinaciones lineales diferentes, de manera que se maximice la correlación entre ellas. En nuestro caso, las combinaciones deseadas son, de un lado, la combinación de las variables observadas, y, de otro, los factores. Lógicamente la exacta combinación correspondiente a los factores no se conoce, pero sí son conocidas algunas propiedades que debe cumplir por axiomática.

Sea  $\mathbf{Z}$  un vector aleatorio  $n \times 1$  con coordenadas las  $n$  variables observadas. Asumimos que estas variables están estandarizadas de manera que,  $E(\mathbf{Z})=0$  y  $E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}')=\mathbf{R}$ , la matriz de correlaciones. Definamos un vector  $\mathbf{X}$  de dimensiones  $r \times 1$  cuyas coordenadas son los  $r$  factores comunes. Por definición,  $E(\mathbf{X})=0$  y  $E(\mathbf{X}\mathbf{X}')=\mathbf{I}$ . Dispongamos ambos vectores en una matriz dividida de manera que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (88)$$

La matriz de correlaciones puede obtenerse según

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}' & \mathbf{X}' \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{F}_c \\ \mathbf{F}_c' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (89)$$

donde  $\mathbf{F}_c$  es la matriz de estructura factorial con las correlaciones entre variables observadas y factores.

Primero, debemos encontrar una combinación lineal de las variables observadas  $\mathbf{Z}$  que maximice la correlación con una combinación lineal de los factores comunes. Llamemos a esta combinación  $\mathbf{Y}^*$ , de manera que



$$Y^* = b'Z \quad (90)$$

Según las fórmulas de regresión canónica la solución buscada viene dada por la resolución del sistema

$$(F_c F_c' - vR)b = 0 \quad (91)$$

donde  $v$  un multiplicador de Lagrange, equivalente al cuadrado del coeficiente de correlación canónica.

Harris (1962) demostró, que este sistema puede ser comparado a la solución del problema de componentes principales ponderados, llevando a cabo una serie de transformaciones. Si definimos otro vector  $a$ , de manera que

$$b = U^{-1}a \quad a = Ub \quad (92)$$

la solución se reduce a la solución del sistema

$$(R - \lambda U^2)b = 0 \quad (93)$$

expresión muy similar a la utilizada en el modelo de componentes principales ponderados (WPC), donde  $U^2$  es la matriz diagonal de communalidades. En claro paralelismo con el modelo mencionado la matriz a factorizar será  $U^{-1}RU^{-1}$  con matrices de autovalores y autovectores asociadas  $A$  y  $\Lambda$ , respectivamente. La estructura factorial vendrá dada por

$$F = UAA^{\frac{1}{2}} \quad (94)$$

donde  $F$  es la matriz de estructura con las correlaciones de las  $n$  variables con las  $n$  componentes canónicas normalizadas. Sin embargo, no todos los autovalores serán de interés, ya que observando que

$$v_i = \frac{(\lambda_i - 1)}{\lambda_i} \quad (95)$$

aquellos autovalores menores que la unidad darían lugar a correlaciones múltiples al cuadrado negativas, lo que no tendría sentido conceptual. Por ello la matriz de estructura contendrá  $r$  factores comunes correspondientes a los autovalores mayores a la unidad. Por tanto, la matriz de estructura de las  $r$  primeras componentes canónicas correspondientes a los autovalores mayores que 1 de la matriz  $U^{-1}RU^{-1}$  será

$$F_r = UA_r \Lambda_r^{\frac{1}{2}} \quad (96)$$

donde  $A_r$  es la matriz de los  $r$  primeros autovalores contenidos en  $\Lambda$  y  $\Lambda_r$  es una matriz diagonal con los  $r$  mayores autovalores de  $\Lambda$ .

Ahora bien, lo que en definitiva estamos interesados en encontrar es la matriz de estructura, correspondiente a las correlaciones entre las variables originales y los factores comunes canónicos, es decir, las componentes canónicas de las variables originales eliminadas las partes específicas. Sea  $Z_c = Z - UV$  la matriz correspondientes a las partes comunes de las variables en  $Z$  después de extraer sus partes específicas. Entonces, la matriz de partes comunes sin normalizar de las componentes canónicas, vendrá dada por

$$Y_c^* = B' Z_c = A' U^{-1} Z_c \quad (97)$$

y la matriz de estructura  $F_c$  puede ser calculada mediante

$$F_c = UA_r [\Lambda - I]_r^{\frac{1}{2}} \quad (98)$$

donde las matrices de la parte derecha de la ecuación se corresponden con las de la ecuación 94, lo que equivale a factorizar la matriz  $U^{-1}(R - U^2)U^{-1}$ .

El problema, una vez más, es la estimación inicial de las comunalidades contenidas en  $U^2$  antes de realizar la

extracción. Rao (1955) propuso una solución iterativa a la estimación de las comunales que comienza con una estimación inicial  $\sigma_e^2$  y, después de factorizar, se recalculan las comunales con los factores retenidos dando lugar a un nuevo conjunto de estimaciones utilizadas en la siguiente iteración. Según Mulaik (1972) una buena estimación inicial es igualar  $\sigma_e^2 = S^2$  donde  $S^2 = [\text{diag } R^{-1}]^{-1}$ , y recalcular las comunales basadas en los  $r$  factores correspondientes a los  $r$  primeros autovalores mayores que 1 a partir de la fórmula

$$u_j^{-2} = \sum_{k=1}^r a_{jk}^2 (\lambda_k - 1) + 1 \quad (99)$$

Desgraciadamente este algoritmo, según apunta Jöreskog (1967), difícilmente converge, por lo que es preferible utilizar el algoritmo de Fletcher-Powell. El SPSS utiliza, sin embargo, el algoritmo de Newton-Raphson.

## 2.5. ANÁLISIS DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.

Lawley (1940) desarrolló, por primera vez, las ecuaciones de Máxima Verosimilitud para la estimación de las saturaciones factoriales y, más tarde (1942, 1943, 1949) ofreció las bases de las pruebas estadísticas de Máxima Verosimilitud en el Análisis Factorial, pero la técnica desarrollada por Lawley no permitía la manipulación del número de variables que habitualmente necesitan los psicólogos. Howe (1955) demostró que los algoritmos de Máxima Verosimilitud podían ser desarrollados sin necesidad de asunciones de distribución sobre las variantes y aplicó un algoritmo de Gauss-Seidel para el cálculo computacional de la solución factorial, pero aún se utilizaba más frecuentemente una adaptación computacional de Rao (1955) al algoritmo de Lawley.

Harman y Jones (1966) ya habían desarrollado el método Minres y el algoritmo asociado de Gauss-Seidel muy similar al procedimiento de Howe, y fue Jöreskog (1966) quien retomó las ideas de Howe y Lawley ofreciendo pruebas de significación sobre la hipótesis de estructura-simple y, posteriormente, mejoró el procedimiento de estimación mediante la aplicación del procedimiento de Fletcher-Powell, Jöreskog (1967), llegando a la convergencia de la solución de manera mucho más rápida y eficaz. Además, las estimaciones de Máxima Verosimilitud se basan en estimadores suficientes, y son consistentes, eficientes y se distribuyen de forma aproximadamente normal.

Básicamente, los estimadores de Máxima Verosimilitud intentan determinar los valores de los parámetros que de manera más verosímil pueden haber generado una muestra dada. Para ello no es necesario conocer los parámetros mismos, sino la forma de distribución de las variables. Bollen (1989) ofrece la derivación de las funciones de Máxima Verosimilitud tanto para el caso multinormal de las variables observadas como para la distribución Wishart de la matriz de varianza-covarianza.

Dado el modelo de Factor Común expresado por la ecuación  $C = FF' + U^2$  donde  $C = E(ZZ')$  y una estimación insesgada  $s$  de  $C$ , la función de ajuste de Máxima Verosimilitud puede escribirse como

$$f_{ML} = \ln|C| + \text{tr}(C^{-1}s) - \ln|s| - n \quad (100)$$

donde hay que resaltar que  $f_{ML}$  es función de los parámetros contenidos en  $C$ , es decir, las saturaciones y las unicidades. Sin embargo, ésta no es exactamente la función de Máxima Verosimilitud sino su logaritmo, y deberá minimizarse la expresión en 100 para maximizar dicha función de Máxima Verosimilitud.

Para aplicar el algoritmo de Fletcher-Powell (Jöreskog, 1967) bastará con tomar las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ML}}{\partial \mathbf{F}} &= \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{C}^{-1})_c \mathbf{F} \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{F}} \\ &= 2 \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{S}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ML}}{\partial \mathbf{U}^2} &= \frac{\partial \text{tr}(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{C}^{-1})_c \mathbf{U}^2}{\partial \mathbf{U}^2} \\ &= \text{diag}[\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{S}) \mathbf{C}^{-1}] \end{aligned} \quad (102)$$

fórmulas derivadas de la aplicación de las propiedades apuntadas por Schöneman (1965), donde el subíndice  $c$  significa que ese término es tomado como una constante.

Jöreskog (1967) plantea la importancia de hallar la matriz  $\mathbf{F}$  que maximiza condicionalmente  $f_{ML}$  para un valor de  $\mathbf{U}^2$  fijado. Para ello basta igualar a cero la ecuación 101 y premultiplicarla por  $\mathbf{C}$  para obtener

$$(\mathbf{C} - \mathbf{S}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} = 0 \quad (103)$$

Ahora bien, dado que  $\mathbf{C}$  es función de los parámetros contenidos tanto en  $\mathbf{F}$  como en  $\mathbf{U}^2$ , y apoyándose en las fórmulas de Lawley y Maxwell (1963) para efectuar las transformaciones pertinentes, Jöreskog (1967) reescribe esta fórmula como

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}) = (\mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}) (\mathbf{I} + \mathbf{F}' \mathbf{U}^{-2} \mathbf{F}) \quad (104)$$

En esta fórmula, podemos considerar la matriz  $\mathbf{F}' \mathbf{U}^{-2} \mathbf{F}$  como una matriz diagonal, siendo  $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}$  una matriz de dimensiones  $n \times r$  cuyas columnas son proporcionales a los  $r$  autovectores y la matriz  $\mathbf{I} + \mathbf{F}' \mathbf{U}^{-2} \mathbf{F}$  es una matriz  $r \times r$  cuyos elementos diagonales son proporcionales a los autovalores de la matriz  $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1}$ . Si consideramos la matriz  $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{I}$  (más acorde a las formas de

La grange) sus autovectores serán los mismos de  $U^{-1}SU^{-1}$ , pero los autovalores de la primera serán iguales a los de la segunda a los que se les resta una unidad. Teniendo en cuenta que  $U^{-1}SU^{-1} - I$  puede ser expresado como  $U^{-1}(S - U^2)U^{-1}$ , al premultiplicar ésta última por  $U^{-1}F$  obtenemos

$$U^{-1}(S - U^2)U^{-1}(U^{-1}F) = U^{-1}F(F'U^{-2}F) \quad (105)$$

Si escalamos la matriz  $F'U^{-2}F$  para que en su diagonal se encuentren los autovalores de la matriz  $U^{-1}(S - U^2)U^{-1}$ , la matriz  $U^{-1}F$  será proporcional a los  $r$  autovectores normalizados de la matriz  $U^{-1}(S - U^2)U^{-1}$  multiplicados por la raíz cuadrada de los correspondientes autovalores de la misma matriz. Sin embargo, como se dijo antes, los autovalores de esta matriz difieren de los de  $U^{-1}SU^{-1}$  por una constante 1.

Sea pues  $A$  una matriz  $n \times n$  con los autovectores normalizados de la matriz  $U^{-1}SU^{-1}$ , y  $\Lambda$  una matriz  $n \times n$  con los correspondientes autovalores de la misma matriz. Entonces

$$U^{-1}F = A_r(\Lambda - I)_r^{\frac{1}{2}} \text{ y}$$

$$F = UA_r(\Lambda - I)_r^{\frac{1}{2}} \quad (106)$$

donde el subíndice  $r$  se refiere al número de columnas de la matriz a que corresponda. Esta fórmula es similar a 98 de Análisis Canónico.

Jöreskog (1967) indica que el criterio  $f_{ML}$  se minimiza cuando se elige una matriz  $F$ , condicionada a un valor dado de  $U^2$ , que sea de la forma 106, donde  $(\Lambda - I)$  contiene los  $r$  mayores autovalores de  $U^{-1}(S - U^2)U^{-1}$ , y  $A_r$  contiene los correspondientes autovectores. Nótese que  $A_r$  también corresponde a los  $r$  mayores autovalores  $\Lambda_r$  de la matriz

$U^{-1}SU^{-1}$ . Siendo esto así, si alguno de los  $r$  mayores autovalores de  $U^{-1}SU^{-1}$  es menor que la unidad, los correspondientes autovalores de  $U^{-1}(S-U^2)U^{-1}$  serían negativos, dando lugar a una matriz de estructura  $F$  con números complejos, lo que no tendría mucho sentido. Según este autor, esta situación puede aparecer cuando el número hipotetizado de factores se encuentra en el orden de  $0.6n$ , o mayor, y por ello puede tomarse como una regla heurística para el número máximo de factores a partir de un valor menor que esa proporción.

Sin embargo, el SPSS no utiliza ninguna de estas dos matrices para el cálculo de los autovalores y autovectores, sino una asociada a ellas, la matriz  $UR^{-1}U$  (ver más abajo).

Para aplicar el método de Fletcher-Powell o el de Newton-Raphson, basta con definir la función a minimizar condicionada a las unicidades  $g(U^2)$ , es decir,

$$g(U^2) = \min_F f_{ML}(F, U^2) = f_{ML}(F_{U^2}, U^2) \quad (107)$$

donde  $F_{U^2} = UA_r(\Lambda - I)_r^{\frac{1}{2}}$ . La función  $g(U^2)$  es análoga a la utilizada en el método de Mínimos Cuadrados. Jöreskog (1967) demuestra que esta función puede ser reexpresada en términos de los autovalores de  $U^{-1}SU^{-1}$  como

$$g(U^2) = \sum_{j=r+1}^n \ln \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j - (n-r) \quad (108)$$

donde  $j=r+1, \dots, n$ .

Puesto que  $C = FF' + U^2$ , haciendo las sustituciones necesarias, se llega a las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial U^2} &= \text{diag} [C^{-1} (C - S) C^{-1}] \\
&= \text{diag} [U^{-2} (C - S) U^{-2}] \\
&= \text{diag} [U^{-2} (FF' + U^2 - S) U^{-2}]
\end{aligned}
\tag{109}$$

Bastará con encontrar una solución numérica para anular esta expresión y así poder calcular la solución final que minimice la función de ajuste. Sin embargo, en la convergencia de estos algoritmos, es frecuente encontrar valores en la frontera de la región de valores permisibles, que pueden llevar a estimaciones de la comunalidad de alguna variable por encima de la unidad (casos Heywood), por lo que Jöreskog (1967) propone la sustitución de estas estimaciones por un valor arbitrario muy pequeño y aplicar un algoritmo asociado que permita hallar una solución adecuada.

## 2.6. ANÁLISIS FACTORIAL IMAGEN.

Jöreskog (1962) desarrolló un modelo de Análisis Imagen muy similar al Análisis de Componentes Imagen (o Análisis de Imagen Parcial) de Guttman, pero con un estadístico de significación asociado para determinar el número de factores. La fórmula básica del modelo es

$$R = F_c F_c' + \theta S^2 \tag{110}$$

donde  $R$  es la matriz de correlaciones poblacional,  $F_c$  es la matriz de saturaciones factoriales poblacional,  $\theta$  es un escalar determinado por la matriz  $R$ , y la matriz  $S^2 = [\text{diag } R^{-1}]^{-1}$ . Si comparamos esta fórmula con la fórmula 29 la diferencia estriba en el término  $\theta S^2$ , similar a la matriz de unicidades  $U^2$  del modelo de Factor Común. Con esta simplificación se persigue conseguir resolver la indeterminación del modelo factorial mediante la utilización



de una aproximación de  $U^2$ , ya que la matriz  $S^2$  sí está completamente definida.

Como sabemos, los elementos diagonales  $s_j^2$  son siempre mayores o iguales que la unicidades  $u_j^2$ , lo que sugiere que si reescalamos los  $s_j^2$  mediante la multiplicación por un número  $\theta_j$  entre 0 y 1 podremos convertir los elementos  $s_j^2$  en  $u_j^2$ . Aunque es posible la utilización de una matriz diagonal  $\theta$  que pondere cada unicidad por un valor distinto, esto no solucionaría la indeterminación, por lo que Jöreskog propone la utilización de una matriz escalar que pondere de manera generalizada todas las unicidades, llegando a la ecuación 110.

Jöreskog (1962) demuestra que la aproximación con el modelo de Factor Común es buena, y esta aproximación mejora a medida que aumenta el número de variables incluídas en la matriz de correlaciones. En el límite, cuando el número de variables  $n$  tiende a infinito, los  $s_j^2$  tienden a las  $u_j^2$ , y  $\theta$  tiende a la unidad.

La matriz reducida derivada del modelo de Factor Común viene dada por

$$F_c F_c' = R - \theta S^2 \quad (111)$$

Puesto que la matriz  $S^2$  está completamente definida, la matriz  $S^{-1}$  también lo estará, y pre y postmultiplicando 111 por  $S^{-1}$  obtenemos

$$S^{-1} F_c F_c' S^{-1} = S^{-1} R S^{-1} - \theta I \quad (112)$$

La fórmula 112 se parece mucho a la utilizada por

Bartlett en el desarrollo de su test de significación (ver más abajo), pero, al contrario que la utilización de la matriz de correlaciones  $R$  en dicho test, en estas nuevas fórmulas se utiliza la matriz de covarianzas  $S^{-1}RS^{-1}$  que es invariante a la escala utilizada para estandarizar las variables originales.

El procedimiento de factorización, en este modelo, se inicia con el cálculo de la matriz de correlaciones muestral de dimensiones  $n \times n$   $\hat{R}$ , basada en  $N$  observaciones. A continuación, se calcula la matriz de estimación de las varianzas de los errores de predicción  $\hat{S}^2$  para poder construir la matriz  $\hat{S}^{-1}\hat{R}\hat{S}^{-1}$ . A continuación, se factoriza esta última matriz por ejes principales, y se obtienen los  $n$  autovalores muestrales  $\hat{\lambda}_i$ . Con estos autovalores ordenados, de manera decreciente, se comienza una serie de pruebas de significación sucesivas, de forma muy similar al test de Bartlett, para determinar el número de factores a retener.

Como veremos más adelante, la hipótesis de estos contrastes es que los  $n-r$  factores que quedan por extraer, después de haber extraído  $r$  factores, son iguales (no son significativamente distintos). En la prueba se contrasta la media aritmética de los  $n-r$  autovalores por extraer con su media geométrica. Si definimos la media aritmética como

$$\theta = \frac{\lambda_{r+1} + \dots + \lambda_n}{n-r} \quad (113)$$

se puede crear el estadístico

$$\chi^2 = -(N-1) [(\lambda_{r+1} \dots \lambda_n) - (n-r) \ln \theta] \quad (114)$$

que se distribuye aproximadamente como un ji-cuadrado con  $(n-r+2)(n-r-1)/2$  grados de libertad. Cuando el tamaño de la muestra  $N$  es moderado, Jöreskog (1962) recomienda

multiplicar la expresión entre corchetes de 114 por el valor

$$N - \frac{1}{6} \left[ 2n + 4r + 7 + \frac{2}{n-r} \right] \quad (115)$$

en lugar de  $N-1$ . Si el valor de  $\chi^2$  en 114 excede el valor tabular para el nivel de significación elegido y los grados de libertad adecuados, podremos rechazar la hipótesis de que los  $n-r$  factores sin extraer son iguales y podremos extraer el factor  $r+1$ , para continuar con el siguiente contraste.

Jöreskog apunta que esta serie de contrastes no son independientes entre sí, pero si el nivel de significación es del 5%, por ejemplo, todavía se puede afirmar con un riesgo sólo del 5%, que el número de factores comunes es, al menos, tan grande como el determinado por la secuencia de contrastes.

Una vez que el número de factores  $r$  ha sido determinado por el procedimiento anterior, se puede construir la matriz de autovectores  $\hat{A}$  con los  $r$  autovectores correspondientes a los  $r$  mayores autovalores. La matriz de estructura muestral vendrá definida por la operación

$$\hat{F}_c = \hat{S}\hat{A}[\Lambda - \theta]^{1/2} \quad (116)$$

donde la matriz  $[\Lambda - \theta]$  es una matriz diagonal, de dimensiones  $r \times r$ , cuyos elementos son los  $r$  primeros autovalores  $\hat{\lambda}_i$  a los que se ha substraído el valor  $\theta$  determinado por 113. Curiosamente, esta estimación de la matriz de estructura es una muy buena aproximación de la estimación de Máxima Verosimilitud de los factores comunes, y la aproximación mejora a medida que aumenta el número de variables.

Sin embargo, esta solución es indeterminada, al contrario que la de Análisis Imagen-Parcial, y las puntuaciones factoriales deben estimarse a partir de las

puntuaciones observadas. Si asumimos una solución ortogonal, la matriz de coeficientes de regresión para estimar las puntuaciones factoriales a partir de las puntuaciones observadas, puede obtenerse mediante la operación

$$B = R^{-1} \hat{F}_c T \quad (117)$$

donde la única novedad es la matriz  $T$  que será alguna matriz de transformación ortogonal utilizada para transformar la solución inicial en alguna solución final.

## 2.7. ANÁLISIS ALFA.

En la línea de las ideas de Spearman (1904) sobre la generalizabilidad de una serie de pruebas al universo de posibles pruebas a utilizar, Hotelling (1933) retomó el problema de la inferencia psicométrica respecto al Análisis Factorial planteando que

Instead of regarding the analysis of a particular set of tests as our ultimate goal, we may look upon these merely as a sample of a hypothetical larger aggregate of possible tests. Our aim then is to learn something of the situation portrayed by the large aggregate. We are thus brought to a type of sampling theory quite distinct from that which we have heretofore considered. Instead of dealing with the degree of instability of functions of the correlations of the observed tests arising from the smallness of the number of persons, we are now concerned with the degree of instability resulting from the limited number of tests whose correlations enter into our analysis.

Desde este punto de vista, nuestro interés no es ya la capacidad de inferencia de la que nos dota la muestra de sujetos, sino más bien la capacidad predictiva de nuestra muestra de pruebas, respecto al universo de posibles pruebas paralelas que podrían haber sido utilizadas. Aplicado a la teoría de Factor Común, nuestro interés se centrará en la

capacidad de inferencia que poseemos de nuestra muestra de pruebas con los factores comunes, respecto a los que podrían ser hallados en el universo de pruebas.

Tyron (1957, 1959), desde la perspectiva de la fiabilidad y la validez de las pruebas, trató el problema de el dominio de muestreo aplicado a la comunalidad, mientras paralelamente, Crombach (1951) y Crombach, Rajaratnam & Gleser (1963) tocaban problemas similares desde la perspectiva del Análisis de Varianza. Todo ello culminó en la propuesta del índice de generabilidad de Kuder-Richardson, la fórmula KR-20, renombrada por Crombach como Coeficiente  $\alpha$  de generalizabilidad (consistencia interna).

Lord (1968) propuso la utilización del  $\alpha$  de Crombach para la situación en la que se desea elegir una única medida de un rasgo respecto a una muestra de  $n$  medidas de ese mismo rasgo, mediante una combinación lineal de ellos que maximice la generalizabilidad. La combinación lineal elegida deberá maximizar

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum_{i=1}^k V_i}{V_t} \right) \quad (118)$$

donde  $n$  es el número de componentes de la combinación lineal,  $V_t$  es la varianza de dicha combinación, y  $V_i$  es la varianza de las puntuaciones ponderadas en los componentes individuales  $i$ .

Puesto que la varianza de una combinación lineal es una forma cuadrática, la varianza de la combinación lineal vendrá dada por la operación  $V_t = \mathbf{w}'\mathbf{C}\mathbf{w}$ , donde  $\mathbf{w}$  es el vector  $n \times 1$  de pesos de ponderación y  $\mathbf{C}$  es una la matriz de covarianzas  $n \times n$  de las  $n$  componentes de la combinación. De igual manera, si designamos como  $\mathbf{V}^2$  una matriz diagonal

cuyos elementos son las varianzas  $v_i$  de cada componente de la combinación, la suma ponderada de todas ellas puede expresarse como  $w'V^2w$ , y reescribir 118 como

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{w'V^2w}{w'cw} \right) \quad (119)$$

El problema ahora es encontrar el vector de pesos  $w$  que maximice el Coeficiente  $\alpha$ . Imponiendo la restricción que  $w'cw$  es constante, Kaiser y Caffrey (1965) demuestran que es suficiente maximizar la expresión

$$\lambda^2 = \frac{w'cw}{w'V^2w} \quad (120)$$

para encontrar una solución. Así, basta con encontrar aquellos valores de  $w$  que anulan la primera derivada parcial

$$\frac{\partial \lambda^2}{\partial w} = \frac{2(cw - \lambda^2 V^2 w)}{w'V^2w} \quad (121)$$

y, por lo tanto, que anulan el denominador, solucionando el sistema

$$(C - \lambda^2 V^2) w = 0 \quad (122)$$

Pero este sistema puede ser reescrito como en WLS de la forma

$$(V^{-1}CV^{-1} - \lambda^2 I) m = 0 \quad (123)$$

donde  $m = Vw$ . Si suponemos que las variables originales, las componentes, se encuentran en escala típica, la fórmula se puede simplificar como

$$(R - \lambda^2 I) m = 0 \quad (124)$$

debiendo encontrarse tan sólo los autovalores de la matriz  $R$ .

A partir de este razonamiento, Lord (1958) concluye, que la combinación lineal correspondiente a la primera componente principal, sin estandarizar, de la matriz de correlaciones de las  $n$  variables, será la que tendrá máxima generalizabilidad, de todas las posible combinaciones lineales de las  $n$  pruebas. Kaiser y Caffrey (1965) añaden que el Coeficiente  $\alpha$  puede ser calculado como

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (125)$$

De esta fórmula se deduce una de las razones mantenidas por Kaiser en defensa de la regla K1. Si  $\lambda^2$  es menor que uno el cociente  $1/\lambda^2$  será mayor que la unidad y el Coeficiente  $\alpha$  será negativo, por lo que deben utilizarse solamente los autovalores mayores que 1 en la extracción de componentes principales para mantener una generalizabilidad positiva.

Por lo tanto, para maximizar la generalizabilidad de una única combinación lineal de la muestra de  $n$  variables, debe elegirse la componente principal más general de las posibles con esas  $n$  variables. El Coeficiente  $\alpha$  indicará el grado en que deberá esperarse encontrar dicha componente en muestras aleatorias de  $n$  variables extraídas del universo de variables de medida de ese rasgo. Mulaik (1972) aventura que, "el Coeficiente  $\alpha$  correspondiente a la primera componente principal puede representar la correlación media entre todos los posibles pares de muestras aleatorias de tamaño de  $n$  tomadas del dominio de las variables". En cualquier caso, no queda clara la interpretación del Coeficiente  $\alpha$  correspondiente a las restantes componentes principales.

Kaiser y Caffrey (1965) desarrollaron a partir de estas ideas el Análisis Factorial Alpha para el modelo de Factor Común. Si en la ecuación 123 tomamos la matriz  $C$  como la

matriz de covarianza entre factores comunes  $R-U^2$ , podemos calcular la generalizabilidad de los factores comunes, como se ha hecho con las componentes principales. Entonces, la matriz  $V^2 = [\text{diag } C]$  representará la matriz diagonal de comunales  $H^2$ . Así, llegamos a la ecuación

$$[H^{-1}(R-U^2)H^{-1} - \lambda^2 I]m = 0 \quad (126)$$

y solucionar para  $\lambda^2$  y  $m$ . En este caso  $m = Hw$  similar a WLS.

La solución para  $r$  factores comunes generalizables de la matriz de saturaciones  $F_s$ , podrá calcularse por ejes principales como

$$F_s = HMA \quad (127)$$

donde  $M$  es la matriz cuyas columnas  $m_i$  serán los  $r$  mayores autovectores de la matriz  $H^{-1}(R-U^2)H^{-1}$ , con  $\lambda^2$  autovalores mayores que 1, y  $A$  es la matriz diagonal de raíces cuadradas de estos  $\lambda_i$  autovalores.

Como la matriz de comunales  $H^2$  no es conocida, se debe estimar esta matriz antes de poder crear la matriz a analizar. Kaiser y Caffrey (1965) sugieren un proceso iterativo de estimación. Al igual que en otros modelos se calcula la matriz  $S^2$ , invirtiendo la matriz de correlaciones y utilizando la correlación múltiple como estimación inicial de las comunales. Estos valores son sustituidos en  $H^{2(0)}$  como la primera aproximación y solucionar así la ecuación 126, obteniendo una matriz factorial aproximada  $K^{(0)} = M^{(0)}\Lambda^{(0)}$ , de dimensiones  $n \times r$ , donde  $r$  corresponde al número de autovalores mayores que 1 de la matriz  $H^{-1(0)}(R-U^{2(0)})H^{-1(0)}$ . De acuerdo con la ley de inercia de Silvester, el valor de  $r$  no variará en iteraciones sucesivas, y en éstas las nuevas estimaciones de la comunalidad vendrán dadas por



$$H^{2(i+1)} = H^{2(i)} [\text{diag } K^{(i)} K^{(i)'}] \quad (128)$$

Estas nuevas estimaciones son aplicadas sucesivamente a la matriz  $R$ , como en la fórmula 126, hasta que los valores de la suma de cuadrados de las filas de  $K^{(i)}$  convergen a 1. Finalmente se calcula la matriz de saturaciones en la métrica de las variables originales mediante 127.

## 2.8. ANÁLISIS FACTORIAL CONFIRMATORIO.

Una vez vistos los distintos métodos de extracción de factores más utilizados según la técnica de Análisis Factorial Exploratorio, es necesario revisar otra técnica que cada vez esta cobrando más vigencia y que resulta de gran utilidad como técnica asociada al AFE, por su versatilidad en la comparación de estructuras y la utilización extensiva del Análisis de Residuos que ha generado.

El Análisis Factorial Confirmatorio (AFC) nace como un producto subsidiario del Análisis de Ecuaciones Estructurales, familia de técnicas de la tradición econométrica que no ha sido posible utilizar extensivamente hasta que no se ha dispuesto de la potencia y velocidad de cálculo de los actuales ordenadores. Ha sido popularizado por Jöreskog y Sörbom y por Bentler que han desarrollado sus programas específicos para este propósito el LISREL (Jöreskog y Sörbom, 1986) y el EQS (Bentler, 1985). Como punto de referencia pueden tomarse los textos de Goldberger (1964), Duncan (1975), Kenny (1979), Blalock (1971), Gujarati (1989) y Saris & Stronkhorst (1984).

Este conjunto de técnicas, muy próximas al Path-analysis, fundamentalmente pretenden sustituir la matriz de varianzas-covarianzas de las variables observadas,  $\Sigma$ , por

otra matriz putativa escrita en función otros parámetros,  $\theta$ , que expliquen la relación entre variables como causas-efectos (Bollen, 1989; Rao & Miller, 1971) en una secuencia lógica de efectos u ordenación jerárquica. Esta matriz de parámetros putativos,  $\Sigma(\theta)$ , puede ser estimada por distintos procedimientos analíticos o iterativos siempre que pueda demostrarse que están definidos en función de los parámetros originales de relación de las variables observadas,  $\Sigma$ , es decir, identificados.

Es importante resaltar que estos modelos son ciertos en la población (si están identificados) y no por ello deben ser exactos en las muestras utilizadas para estimarlos o probarlos, ya que primero se parte de una estimación de  $\Sigma$  y luego se procede a la estimación de los  $\theta$  a partir de la equiparación analítica con los anteriores. Esto conlleva determinados problemas de ajuste de las soluciones (Bollen, 1989) que pueden ser contrastados, de alguna forma, por diversos estadísticos, algunos de ellos de distribución conocida. Puesto que la bondad de ajuste de los modelos depende, en gran medida, de las propiedades absolutas y relativas de los distintos estimadores se han abierto nuevas líneas de investigación de carácter simulado. Así por ejemplo, los estudios de Satorra (1990, en prensa), Jöreskog (1988, 1986), Jöreskog y Sörbom (1989, 1986), etc. sobre la eficiencia relativa de distintos estimadores de la correlación de dos variables dependiendo de la escala de medida de las variables, sugieren un estado de la cuestión no solucionado aún.

El enfoque del AFC supone la existencia de una o varias variables latentes inobservables,  $\xi$ , que se reflejan en otra serie de variables observables, las  $x_i$ . Las variables observables son medidas imperfectas de las variables latentes y se les puede asociar, por ello, un término de error de medida,  $\delta$ . De esta manera, una sola variable latente con un sólo indicador puede escribirse mediante la

ecuación

$$x = \lambda \xi + \delta \quad (129)$$

donde  $\lambda$  es la ponderación de la importancia de  $\xi$  en la determinación de  $x$ , el efecto estructural directo.

Si comparamos esta formulación con la del AFE la  $x$  es la variable observada, la  $\xi$  se corresponde con el factor y el peso  $\lambda$  es homónimo de la saturación. Respecto al término de error deben hacerse diversas consideraciones que más adelante se discutirán.

Claramente este tipo de modelos no serían útiles si no permitieran la utilización de varias variables latentes y de varios indicadores por  $\xi$ , si queremos compararlos con el modelo factorial de Factor Común. Afortunadamente, podemos recurrir a la notación matricial para expresar este tipo de estructuras más complejas, de manera que la ecuación

$$x = \Lambda \xi + \delta \quad (130)$$

representa una estructura factorial de  $r$  factores con  $n$  variables, donde  $x$  es el vector  $nx1$  de variables observadas,  $\xi$  es el vector  $rx1$  de factores,  $\Lambda$  es la matriz  $rxn$  de ponderaciones (saturaciones) y  $\delta$  es el vector  $nx1$  de variables error.

Puede que esta fórmula parezca drásticamente distinta de la tradicional  $Z=CF'+UD$ , aunque esto no es así. Por una parte, la fórmula factorial intenta representar todos los datos recogidos de los sujetos y, por ello, ésta escrita en términos de matrices de puntuaciones, mientras que la primera sólo nombra las variables y no los sujetos a los que les han sido medidas las características observables, lo mismo rige para las puntuaciones factoriales,  $C$ . La matriz  $F'$  es equiparable a la matriz  $\Lambda'$  si las soluciones están en la misma escala de medida. Los problemas aparecen al

intentar comparar las  $\delta$  y las unicidades. Para poder explicar mejor estas diferencias lo mejor es tomar como punto de comparación la psicometría clásica.

Según la teoría de test clásica la puntuación de un sujeto en un test, o variable,  $x$  puede desglosarse en una puntuación verdadera,  $\tau$ , y un error de medida,  $e$ ; estos dos últimos términos se suponen independientes y, por ello, carentes de cualquier correlación que no sea meramente aleatoria. De este hecho, arranca la estimación de la fiabilidad de medida de una variable como proporción de varianzas de las puntuaciones observadas de los sujetos explicada por las puntuaciones verdaderas de esos mismos sujetos, es decir

$$r_{xx} = \frac{S_v^2}{S_x^2} \quad (131)$$

La ecuación correspondiente a este abordaje teórico puede escribirse como

$$x = \tau + e \quad (132)$$

si se considera  $x$  como un medida paralela o tau-equivalente.

Por otra parte, la verdadera medida puede expresarse en términos de una parte común con otras variables como

$$\tau = \lambda \xi + s \quad (133)$$

donde  $s$  corresponde a la parte específica medida por esa variable (o ítem) verdadera, no compartida con otras variables<sup>11</sup>. Comparando la ecuación 133 con el modelo de Factor Común la parte común correspondería al producto del segundo término y la unicidad al término específico  $s$ .

---

<sup>11</sup> No todos los autores coinciden en este punto. Ver Alwin Y Jackson (1979), Lord y Novick (1968) y Joreskog (1974).

Puesto que ambos son independientes, no es difícil hacer la anterior comparación en términos de la descomposición de la variabilidad de  $\tau$ . Si por el contrario, tomamos la aproximación psicométrica esta descomposición no tiene sentido ya que la identidad representaría el total de la varianza verdadera, en definitiva, el numerador de la ecuación 131.

Sustituyendo 133 en 132, llegamos a

$$x = \lambda \xi + s + e \quad (134)$$

Comparando 129 y 135, podemos concluir que

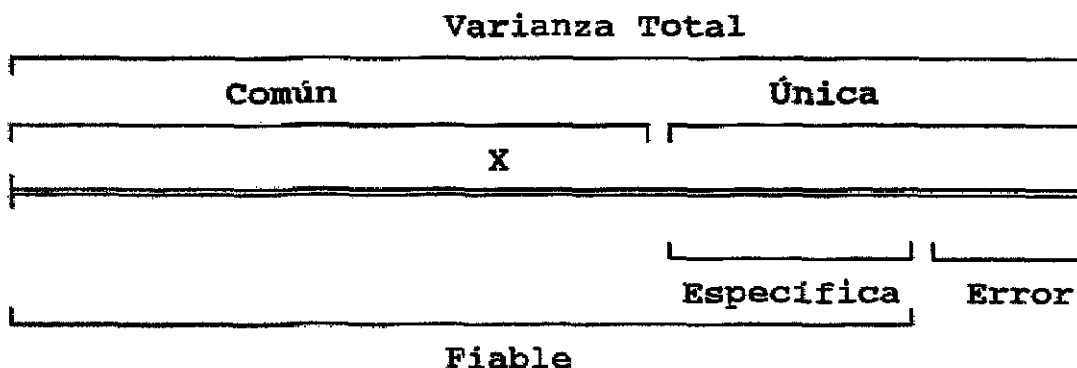
$$\delta = s + e \quad (135)$$

Como puede apreciarse el modelo de ecuaciones estructurales con variables latentes no es capaz de distinguir entre los distintos tipos de errores. Aunque tanto  $\delta$  como  $e$  son errores de medida de  $x$ , no tienen exactamente el mismo significado. Mientras que  $\delta$  corresponde al error en  $x$  al medir  $\xi$ ,  $e$  es el error en  $x$  al medir  $\tau$ . Pero  $\delta$  no es el error de medida respecto a  $\tau$ , ya que  $\delta$  incluye a  $s$ , y  $s$  es parte de  $\tau$ .

Otra fuente de confusión es la denominación de  $\delta$  como 'parte única de  $x$ ' y reservar el término de error sólo para  $e$  (Bollen, 1989:220).

Aquí seguiremos la denominación utilizada por Rummel (1970:102 ss.) distinguiendo tres componentes de la varianza de una variable, la especificidad como la porción de su unicidad que es fiable, la fiabilidad, correspondiente a la suma de su porción común (comunalidad) más la específica de la varianza, y el error aleatorio, o porción de la unicidad que no es fiable. Así, los errores aleatorios suelen ser incluidos en la unicidad en los modelos factoriales

tradicionales. El siguiente gráfico tomado de Rummel puede ayudar a aclarar estos términos (si consideramos la cantidad 'varianza' de una variable como una línea y las porciones independientes de ella como segmentos de la misma)



Aunque teóricamente no sea demasiado complicado distinguir estos términos, a nivel práctico resulta complicado estimar cada una de estas partes, siendo necesarios estudios de fiabilidad y por tanto repeticiones del modelo en distintas muestras. Normalmente se recurre a estimaciones de la fiabilidad mediante la utilización de la correlación múltiple (ver Bollen, 1989).

Muy en esta línea, se encuentra el modelo de Factorial de Componentes Imagen (Guttman, 1953) discutido anteriormente, donde la imagen de una variable corresponde a la estimación múltiple a partir de las demás variables, y la anti-imagen corresponde a los residuos de esta regresión. Entonces, las descomposiciones de la matriz de varianza-covarianza del modelo estructural y del componente imagen resultan comparables directamente:

$$\Sigma(\theta) = \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \theta_\epsilon \tag{136}$$

$$R = FF' + \Omega + 2D^2 \tag{137}$$

Si tenemos en cuenta que  $\Sigma(\theta)$  puede representar la matriz R, que  $\Phi$  es la matriz identidad cuando la extracción

es ortogonal, que tanto  $\theta$ , como  $\Omega$  son residuos de una regresión y que la matriz diagonal  $D^2$  tan sólo es necesaria para completar la diagonal de  $R$  hasta la unidad (Rummel, 1970:119), ambas matrices de estructura factorial deben ser similares.

Tanto 136 como 137 pueden compararse con la fórmula más general de descomposición de la matriz  $n \times n$  de covarianza poblacional (Yanai & Ichikawa, 1990)

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + \Psi \quad (138)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz  $r \times n$  de saturaciones de rango  $r$ , y  $\Psi$  es una matriz diagonal de unicidades.

En componente imagen se distinguen los factores imagen como la parte de las variables que pueden ser explicadas por otras a partir de su correlación múltiple, y los factores anti-imagen son los residuos de la regresión.

Según la sugerencia de Bollen, la estimación de la fiabilidad a partir de  $R^2$  establece un límite inferior para la fiabilidad, ya que considera la parte sistemática de efecto de las variables latentes sobre la variable. Sólo si los términos específicos  $s$  se incluyen en la ecuación se podrá llegar a una estimación totalmente ajustada de la fiabilidad, o si se considera que  $\xi = \tau$ .

Según esto, la comunalidad correspondería a la variabilidad explicada por el producto del segundo término de 132, y la unicidad estaría asociada a la variabilidad contenida en  $s$ . Sin embargo, el modelo factorial de Factor Común no contempla el error de medida y los modelos de estructura latente no son capaces de desglosar el término de error  $\delta$ .

## 2.9. LOS MODELOS FACTORIALES EN EL SPSS.

Cada paquete de programas de análisis estadístico utiliza sus propios algoritmos de cálculo para encontrar la solución de una técnica determinada. Puesto que nosotros no hemos utilizado ningún programa a medida, para los análisis factoriales, aquí, se revisan los modelos y algoritmos para el Análisis Factorial utilizados en el programa SPSS.

A continuación, se recogen las matrices utilizadas en cada uno de los Procedimientos de Extracción, englobados en el subprograma FACTOR del paquete mencionado.

Hemos intentado crear un paralelismo entre los modelos teóricos revisados en el apartado anterior y los informados en el *SPSS reports* (1985). La notación utilizada en el manual ha sido traducida, en la medida de lo posible, para que se corresponda con la utilizada por nosotros.

Las especiales elecciones que la casa SPSS ha hecho, a la hora de implementar el programa, afectan los resultados finales de los procedimientos y su comparación con los modelos teóricos, según fueron expresados por los autores correspondientes. En el título de cada procedimiento de extracción, se recoge el autor al que hace referencia el propio manual.

### 2.9.1. COMPONENTES PRINCIPALES. (PC; Harman, 1976.)

Este procedimiento NO es el modelo de Componentes Principales tal como fue desarrollado por Hotelling, ya que los autovectores están reescalados por los autovalores para ofrecer la matriz de saturaciones como matriz final. Si se desea obtener la matriz  $A$  de autovectores de  $R$  tal como son extraídos por la solución del sistema  $(R - \lambda I)a = 0$ , deberá



ejecutarse el procedimiento MANOVA (ver Ruiz y San Martín, 1988).

Por tanto, si se especifica el número de factores  $m=n$  el número de variables, la matriz de estructura vendrá dada por

$$\Lambda_m = \Omega_m \Gamma_m^{\frac{1}{2}} \quad (139)$$

donde  $\Gamma$  es la matriz diagonal de los autovalores de  $R$  ordenados por valor descendente y  $\Omega$  es la matriz de autovectores asociados. Esta fórmula que coincide con 32.

$$F = A\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (140)$$

donde  $F$  es la matriz de saturaciones,  $\Lambda$  es la matriz de autovalores, y  $A$  es la matriz de autovectores.

Por defecto, el programa solamente retiene los factores correspondientes a autovalores mayores que la unidad, siendo el número de estos el correspondiente a  $r$ .

Las comunales de cada variable son obtenidas por la fórmula

$$h_i = \sum_{j=1}^r |\gamma_j| \omega_{ij}^2 \quad (141)$$

donde  $h_i$  es la comunalidad de la variable  $i$ ,  $\gamma_j$  es el  $j$ -ésimo autovalor de  $R$ , y  $\omega_{ij}$  es el elemento  $ij$ -ésimo de la matriz de autovalores. En nuestra notación, esta operación vendrá definida por algebra matricial como

$$FF' = AAA' = \Omega\Gamma\Omega' \quad (142)$$

según nuestra notación y la del manual, respectivamente.

Esta extracción es la que se lleva a cabo SIEMPRE

inicialmente por el programa, aunque su resultado no se explicita en las salidas, y sobre sus resultados se determina el número de autovalores mayores que la unidad. Por tanto, a menos que se especifique el número de factores igual al número de variables, la tabla de estadísticos finales y la matriz de estructura sin rotar serán las correspondientes a la regla K1. Por ello sería más apropiado considerar este modelo como el de factor común con la extracción de ejes principales sobre la matriz sin reducir R.

Es importante resaltar que el número de factores así determinado será el número por defecto para los demás modelos, aunque NO se especifique esta extracción en ningún momento dentro del conjunto de comandos ejecutados.

### 2.9.2. EJES PRINCIPALES. (PAF; Harman, 1976.)

Este procedimiento no es, como puede hacer pensar su nombre, la extracción de ejes principales del modelo de factor común tal como ha sido definida en el punto 2.1. En realidad es un método iterativo de ajuste de las comunales.

Se parte inicialmente de la matriz de correlaciones R con unos en la diagonal y se determina el número de factores por la regla K1. Este número se mantendrá en cada iteración  $i$ . Se calculan las comunales para esta iteración mediante la fórmula

$$h_j^{(i)} = \sum_{k=1}^m |\gamma_k^{(i)}| \omega_{jk}^{2(i)} \quad (143)$$

, en nuestra notación serán los elementos diagonales de la operación  $\mathbf{A}^{(i)} \mathbf{\Lambda}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)'}.$  Los valores de comunalidad de cada

variable son reemplazados en la diagonal de  $R$  dando lugar a la matriz  $R_a$  para la siguiente iteración. La autodescomposición de la matriz  $R_a$ , con nuevas estimaciones de las communalidades, continúa hasta que se alcanza el máximo de iteraciones fijadas por defecto (25), o cuando el cambio máximo de ajuste de las communalidades estimadas es menor que el criterio de convergencia por defecto (0.001). Tanto las iteraciones como el valor de convergencia pueden ser variados si la solución no es satisfactoria. Si el programa agota el número de iteraciones sin alcanzar el valor de convergencia se emite un mensaje de advertencia con el valor de convergencia mínimo alcanzado.

Finalmente, la matriz de estructura es calculada por

$$\Lambda_m^{(j)} = \Omega_m^{(j)} \Gamma_m^{(j)\frac{1}{2}} \quad (144)$$

que, en nuestra notación, será

$$F_r^{(j)} = A_r^{(j)} \Lambda_r^{(j)\frac{1}{2}} \quad (145)$$

Este procedimiento parece ofrecer una buena estimación de las communalidades y converge normalmente con rapidez. Sin embargo el número de factores retenidos será mayor al deseado debiendo alterarse el número de factores a partir de la tabla de estadísticos finales y especificar el número de factores igual al número de autovalores mayores que la unidad.

Si se desea llevar a cabo el mismo procedimiento pero con estimaciones iniciales de la comunalidad distintas de la unidad, se puede establecer el valor inicial de estimación de las communalidades, por ejemplo la correlación múltiple al cuadrado, mediante el comando *DIAGONAL(h1,h2,...,hn)*.

### 2.9.3. MÁXIMA VEROSIMILITUD. (ML; Jöreskog y Lawley, 1968.)

El procedimiento para la extracción de factores mediante Máxima Verosimilitud (ML). También aquí se aplica la solución numérica de Newton-Raphson como procedimiento general, si bien cambia la función a minimizar, y por ello sus derivadas parciales.

La función a minimizar es

$$f_{ML} = \text{tr}[(FF' + U^2)^{-1}R] - \log|(FF' + U^2)^{-1}R| - n \quad (146)$$

Si sustituimos la matriz de covarianzas en función de los parámetros  $C = FF' + U^2$ , la matriz de covarianzas estimadas  $S = R$ , tenemos en cuenta que los logaritmos son neperianos y tras reorganizar términos, también puede ser expresada como

$$f_{ML} = \text{tr}(C^{-1}S) + \ln|C| - \ln|S| - n \quad (147)$$

más acorde con la fórmula 100.

La estimación inicial de la unicidad de cada variable es

$$u_i^{(0)} = \log \left[ \frac{(1 - r/2n)}{r^{ii}} \right] \quad (148)$$

siendo  $r^{ii}$  el  $i$ -ésimo elemento diagonal de la matriz  $R^{-1}$ .

La función de minimización condicionada por las unicidades puede ser expresada como

$$g(U^2) = \sum_{k=r+1}^n (\log \lambda_k + \lambda_k^{-1} - 1) \quad (149)$$

siendo los  $\lambda_k$  los  $n-r$  menores autovalores de la matriz  $UR^{-1}U$ .

Si hacemos los cambios oportunos esta fórmula coincidirá con 100 de nuestro texto.

Según Harris (1962) respecto al Análisis Canónico, las siguientes relaciones son entre los autovalores  $\lambda_i$  de la matriz  $U^{-1}RU^{-1}$  y sus autovalores  $a_i$ , representados en las matrices  $\Lambda$  y  $A$ , respectivamente.

$$U^{-1}RU^{-1} = A\Lambda A' \quad (150)$$

$$(U^{-1}RU^{-1})^{-1} = A\Lambda^{-1}A' \quad (151)$$

Pero, si tenemos en cuenta las propiedades del algebra matricial  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  y que  $(A^{-1})^{-1} = A$ , para dos matrices  $A$  y  $B$  que posean inversa, la matriz de la fórmula 150 y el apartado 2.7 puede asociarse a otra matriz equivalente

$$\begin{aligned} (U^{-1}RU^{-1})^{-1} &= UR^{-1}U \\ &= A\Lambda^{-1}A' \end{aligned} \quad (152)$$

Por lo que los autovalores de la matriz  $UR^{-1}U$  serán los inversos de los autovalores de la matriz  $U^{-1}RU^{-1}$ , y viceversa, mientras que los autovectores de ambas matrices permanecen iguales. Sin embargo, la primera de estas matrices exige menor coste computacional que la segunda.

Entonces, la función a minimizar

$$g(U^2) = - \sum_{j=r+1}^n \ln \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j - (n-r) \quad (153)$$

de la fórmula 108 (y 153) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 g(\sigma^2) &= - \sum_{j=r+1}^n \ln \frac{1}{\lambda_j} + \sum_{j=r+1}^n \frac{1}{\lambda_j} - (n-r) \\
 &= \sum_{j=r+1}^n \ln \lambda_j + \sum_{j=r+1}^n \lambda_j^{-1} - (n-r) \\
 &= \sum_{j=r+1}^n (\ln \lambda_j + \lambda_j^{-1} - 1)
 \end{aligned}
 \tag{154}$$

puesto que  $\ln 1 = 0$ , y los logaritmos son neperianos, que es la ofrecida en el manual.

Las derivadas parciales pueden escribirse como

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{k=r+1}^n (1 - \lambda_k^{-1}) a_{ik}^2
 \tag{155}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} &= -\delta_{ij} \frac{\partial g}{\partial u_i} + \sum_{k=r+1}^n a_{ik} a_{jk} \left( \sum_{m=1}^r \frac{\lambda_k + \lambda_m - 2}{\lambda_k - \lambda_m} a_{im} a_{jm} + \delta_{ij} \right) \\
 &\sim \left( \sum_{k=r+1}^n a_{ik} a_{jk} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{156}$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

La matriz de saturaciones factoriales estimada viene dada por

$$\hat{F}_r = \hat{U} \Lambda_r (\Lambda_r^{-1} - I)^{\frac{1}{2}}
 \tag{157}$$

El test de significación para el número de factores se calcula por el estadístico

$$\chi_r^2 = \left( W - 1 - \frac{2n+5}{6} - \frac{2r}{3} \right) g(\hat{\theta}) \quad (158)$$

que se distribuye según un  $\chi^2$  con  $((r-n)^2 - r - n)/2$  grados de libertad.

#### 2.9.4. MÍNIMOS CUADRADOS. (ULS, Harman, 1976.)

La función que se minimiza parece ser la definida por Bollen (1989)<sup>12</sup>

$$f_{LS} = \frac{1}{2} \text{tr} (R - FF' - U^2)^2 \quad (159)$$

que puede ser reescrita para la solución restringida en función de las unicidades como

$$\begin{aligned} g(U^2) &= \frac{1}{2} \text{tr} (R - U^2 - A_r A_r A_r')^2 \\ &= \sum_{j=r+1}^n \frac{\lambda_j^2}{2} \end{aligned} \quad (160)$$

donde los  $\lambda_j$  son los  $n-r$  menores autovalores de la matriz  $R - U^2$ . Sobre esta función  $g(U^2)$  se aplica el método de Newton-Raphson, con estimaciones iniciales de la comunalidad

$$u_i^{(0)} = \left( \frac{1-r/2n}{r^{ii}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (161)$$

para solucionar el algoritmo de aproximación

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} - J(x^{(i)})^{-1} f(x^{(i)}) \quad (162)$$

donde la matriz de segundas derivadas parciales  $J$  y la de primeras derivadas parciales  $f$  corresponden a las fórmulas

<sup>12</sup> El manual no lo explicita.

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = -2u_i \sum_{k=r+1}^n \lambda_k a_{ik}^2 \quad (163)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_i \partial u_j} &= 4 \left[ u_i u_j \sum_{k=r+1}^n a_{ik} a_{jk} \sum_{p=1}^r \frac{\lambda_k + \lambda_p}{\lambda_k - \lambda_p} a_{ip} a_{jp} + \delta_{ij} \sum_{k=r+1}^n \left( u_i^2 - \frac{\lambda_k}{2} \right) a_{ik}^2 \right] \\ &\approx 4u_i u_j \left( \sum_{k=r+1}^n a_{ik} a_{jk} \right)^2 \end{aligned} \quad (164)$$

Finalmente, la matriz de saturaciones estimada se calcula por

$$\hat{F}_r = A_r \Lambda_r^{\frac{1}{2}} \quad (165)$$

Es interesante notar que la estimación inicial de la comunalidad informada por el programa en los estadísticos iniciales coincide con la estimación de Imagen

Puesto que es el modelo de factor común, no se pueden extraer tantos factores como variables.

El número de factores viene predeterminado por K1 de PC, a menos que se especifique de otra forma en CRI FAC(r).



### 2.9.5. MÍNIMOS CUADRADOS GENERALIZADOS. (GLS.)

El procedimiento para la extracción de factores mediante Mínimos Cuadrados Ponderados, o Generalizados, es básicamente igual al método ULS y ML. También aquí se aplica la solución numérica de Newton-Raphson como procedimiento general, si bien cambia la función a minimizar, y por ello sus derivadas parciales.

La función a minimizar parece ser

$$f_{GLS} = \frac{1}{2} \text{tr} [(R - U^2 - FF') G^{-1}]^2 \quad (166)$$

donde la matriz  $G$  es una matriz de pesos proporcional a las unicidades de cada variable. Si sustituimos la matriz de covarianzas en función de los parámetros  $C = FF' + U^2$ , la matriz de covarianzas estimadas  $S = R$ , igualamos  $G^{-1} = S^{-1}$  y tras reorganizar términos, también puede ser expresada como

$$\begin{aligned} f_{GLS} &= \frac{1}{2} \text{tr} [(S - C) S^{-1}]^2 \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (I - CS^{-1})^2 \end{aligned} \quad (167)$$

La estimación inicial de la unicidad de cada variable es

$$u_i^{(0)} = \log \left[ \frac{(1 - r/2n)}{r^{ii}} \right] \quad (168)$$

siendo  $r^{ii}$  el  $i$ -ésimo elemento diagonal de la matriz  $R^{-1}$ .

La función de minimización condicionada por las unicidades puede ser expresada como

$$g(\mathbf{U}^2) = \sum_{k=r+1}^n \frac{(\lambda_k - 1)^2}{2} \quad (169)$$

siendo los  $\lambda_k$  los  $n-r$  menores autovalores de la matriz  $\mathbf{U}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}$ .

Las derivadas parciales pueden escribirse como

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{k=r+1}^n (\lambda_k^2 - \lambda_k) a_{ik}^2 \quad (170)$$

y

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j} = \left( \sum_{k=r+1}^n a_{ik} a_{jk} \right)^2 \quad (171)$$

La matriz de saturaciones factoriales estimada viene dada por

$$\hat{\mathbf{F}}_r = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{A}_r (\mathbf{\Lambda}_r^{-1} - \mathbf{I})^{\frac{1}{2}} \quad (172)$$

El test de significación para el número de factores se calcula por el estadístico

$$\chi_r^2 = \left( W - 1 - \frac{2n+5}{6} - \frac{2r}{3} \right) g(\hat{\mathbf{U}}) \quad (173)$$

que se distribuye según un  $\chi^2$  con  $((r-n)^2 - r - n)/2$  grados de libertad.

#### 2.9.6. ANÁLISIS IMAGEN. (IMAGE; Kaiser y Caffrey, 1963.)

Los autovalores y autovectores son hallados de la matriz  $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$  de manera que

$$S^2 = \text{diag}\left(\frac{1}{r^{11}}, \dots, \frac{1}{r^{mm}}\right) \quad (174)$$

$$r^{ii} = i\text{-ésimo elemento diagonal de } R^{-1} \quad (175)$$

es decir,  $S^2 = [\text{diag}R^{-1}]^{-1}$  de la ecuación 75.

La matriz de estructura se calcula como

$$F_m = S \Omega_m (\Gamma_m - I_m) \Gamma_m^{-\frac{1}{2}} \quad (176)$$

donde  $\Omega_m$  y  $\Gamma_m$  corresponden<sup>13</sup> a los  $m$  autovectores y autovalores mayores que 1. Si  $m=0$  la extracción finaliza. Esta ecuación es similar a 87, es decir

$$\begin{aligned} F_g &= SA_r \left[ \frac{(\Lambda - I)^2}{\Lambda} \right]_r^{\frac{1}{2}} = \\ &= SA_r (\Lambda_r - I) \Lambda_r^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (177)$$

donde  $r=m$ , el número de factores retenidos en la extracción.

Las comunales se calculan a partir de

$$h_j = \sum_{j=1}^m \frac{(\gamma_j - 1)^2 \omega_{1j}^2}{\gamma_j r^{1j}} \quad (178)$$

en nuestra notación, para los  $r$  primeros autovalores, ésta fórmula coincide con la operación

$$\begin{aligned} F_g F_g' &= SA(\Lambda - I) \Lambda^{-\frac{1}{2}} [SA(\Lambda - I) \Lambda^{-\frac{1}{2}}]' = \\ &= A(\Lambda - I)^2 \Lambda^{-1} A' S^2 \end{aligned} \quad (179)$$

<sup>13</sup> en el manual en este punto hay un cambio de notación inconsistente, se nombra como  $\Lambda$  a la matriz  $\Gamma$  (pág. 74).

La matriz de covarianzas imagen se calcula como en 76

$$G = R + S^2 R^{-1} S^2 - 2S^2 \quad (180)$$

y la matriz de covarianzas anti-imagen se calcula como en 77

$$Q = S^2 R^{-1} S^2 \quad (181)$$

Como puede apreciarse en este modelo la extracción se lleva a cabo por el algoritmo más simple del modelo canónico, haciendo las sustituciones discutidas más arriba en el punto 2.3. Sin embargo el resultado final es el mismo que si se hubiera trabajado con las matrices  $G$  y  $Q$ , originales.

El programa no ofrece los autovalores de la matriz  $S^{-1}RS^{-1}$ , sino el producto interno de los vectores columna de la matriz de estructura  $F_g$ , bajo la denominación de *suma de cuadrados de las saturaciones* (SS loadings), por lo que es difícil saber cuales son los autovalores mayores que la unidad de dicha matriz.

Como vemos, el Análisis Imagen, tal como es ejecutado por el SPSS entraña una serie de pequeños problemas que deben ser tenidos en cuenta para la correcta comparación con otro tipo de extracciones.

Dada la especial disposición de resultados en las salidas del programa, la información recogida en ellas es un poco menos directa que en otras extracciones.

Las comunalidades vienen recogidas, según su definición en el modelo, en la diagonal de la matriz de covarianza imagen. Esta matriz siempre se incluye en la salida del análisis, aunque no se especifique.

La matriz que analiza el programa es  $U^{-1}RU^{-1}$ , en lugar

de la matriz  $G$  del modelo original de Guttman (1953), como sugieren Harris (1962) y Kaiser (1963). Por lo tanto, esta extracción se corresponde más con el Análisis Factorial Imagen (punto 2.7), y no con el Análisis de Componentes Imagen (punto 2.3).

Como sabemos, la relación existente entre los autovalores de ambas matrices puede expresarse como

$$\Lambda_G = \frac{(\Lambda_{U^{-1}RU^{-1}} - I)^2}{\Lambda_{U^{-1}RU^{-1}}} \quad (182)$$

pero ninguna de las matrices de autovalores, de cualquiera de estas dos matrices, puede ser conseguida en la salida del programa. En su lugar, aparecen las sumas de cuadrados de los vectores columna de la matriz de estructura  $F$ . Esta matriz  $F$  es la matriz de autovalores de la matriz  $G$  reescalada por los autovalores de la misma matriz y las unicidades de cada variable, según la fórmula

$$F = U\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (183)$$

Si calculamos la suma de cuadrados de cada uno de las columnas de la matriz de estructura  $F$  mediante su producto interno, llegamos al desarrollo

$$F'F = \Lambda^{\frac{1}{2}}A'U^2A\Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (184)$$

la matriz del término de la izquierda será una matriz diagonal, de dimensiones  $r \times r$ , con las sumas de cuadrados correspondientes a cada factor en la diagonal. Llamemos a cada uno de estos elementos  $ss_{jj}$  (*Sum of Squares*).

Al desarrollar la operación de la fórmula 184 por sus sumatorios obtenemos

$$ss_{jj} = \sum_{i=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{2}} a_i u_i^2 a_i \lambda_j^{\frac{1}{2}} = \lambda_j \sum_{i=1}^n a_i^2 u_i^2 \quad (185)$$

en nuestro caso, puesto que todas las comunalidades teóricas son iguales, podemos sustituir los cuadrados de las unicidades individuales de cada variable  $i$  por el cuadrado de la unicidad media de todas las variables ( $\bar{u}^2$ ), con lo que ese valor puede ser considerado una constante para una muestra dada, y extraerlo del sumatorio. Es decir,

$$\begin{aligned} ss_{jj} &= \lambda_j \sum_{i=1}^n a_i^2 u_i^2 \approx \lambda_j \sum_{i=1}^n a_i^2 \bar{u}^2 = \\ &= \lambda_j \bar{u}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (186) \\ &= \lambda_j \bar{u}^2 \end{aligned}$$

Puesto que el producto interno de un autovector es la unidad.

Con este desarrollo, podemos estimar cada uno de los autovalores de la matriz  $G$  a partir de las sumas de cuadrados de los vectores columna correspondientes de la matriz de estructura, y aplicar la aproximación

$$\lambda_j \approx \frac{ss_j}{\bar{u}^2} \quad (187)$$

El SPSS define la proporción de varianza explicada de las variables a partir de cada uno de los factores (*Pct. of Var.*) como el cociente entre la suma de cuadrados ( $ss$ ) y el número de variables ( $n$ ). Como las sumas de cuadrados son sistemáticamente inferiores a los autovalores

correspondientes, la estimación de la varianza explicada que realiza el programa está sesgada hacia la infraestimación.

Veamos un pequeño ejemplo orientativo. Sea la matriz de correlaciones

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.64 & 0 & 0 \\ 0.64 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.64 \\ 0 & 0 & 0.64 & 1 \end{bmatrix} \quad (188)$$

La matriz de autovalores  $\Lambda$  correspondientes a la matriz  $U^{-1}RU^{-1}$  será

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2.778 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.610 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.610 \end{bmatrix} \quad (189)$$

A partir de ella podemos calcular los autovalores de la matriz  $G$  mediante la fórmula 182, y llegar a

$$\Lambda_G = \begin{bmatrix} 1.138 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.138 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.249 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.249 \end{bmatrix} \quad (190)$$

El resultado de analizar la matriz  $R$  mediante la extracción *IMAGE* da lugar a la siguiente tabla final

Variable	Communality *	Factor	SS Loadings	Pct of Var	Cum Pct
X1	.40960 *	1	.67174	16.8	16.8
X2	.40960 *	2	.67174	16.8	33.6
X3	.40960 *	3	.14746	3.7	37.3
X4	.40960 *	4	.14746	3.7	100.0

Tabla 1

Si sólo retenemos dos factores, como cabe esperar dados los autovalores de  $G$ , llegaríamos a concluir que el porcentaje de varianza total explicada es 33.6%, cantidad inferior a las comunialidades de las variables, definidas por el cuadrado de la correlación múltiple. Además, el último valor del porcentaje acumulado de varianza explicada es truncado al 100%, cuando en realidad, si se extraen todos los factores posible, sumarán lo mismo que la comunialidad media de todas las variables (41%).

Calculando los datos a partir de los autovalores de la matriz  $G$ , la tabla final debería haber sido

Variable	Communality *	Factor	Eigenvalues	Pct of Var	Cum Pct
X1	.40960 *	1	1.1380	28.5	28.5
X2	.40960 *	2	1.1380	28.5	57.0
X3	.40960 *	3	.2845	6.2	63.2
X4	.40960 *	4	.2845	6.2	69.4

Tabla 2

De haber utilizado esta última tabla, concluiríamos que el porcentaje de varianza explicada es del 57%, cantidad que sobreestimaría la comunialidad media de las variables. De hecho, esta estimación, al no estar reescalada como de hecho lo está la matriz de estructura, aporta poca información. Tal vez este sea el motivo por el que se ha sustituido la tabla 2 por la tabla 1 en las salidas del programa.

Aplicando la aproximación de la fórmula 187 llegaríamos a la tabla

Variable	Communality *	Factor	Eigenvalues	Pct of Var	Cum Pct
X1	.40960 *	1	1.1378	28.5	28.5
X2	.40960 *	2	1.1378	28.5	57.0
X3	.40960 *	3	.2498	6.3	63.3
X4	.40960 *	4	.2498	6.3	69.6

Tabla 3



que es bastante aproximada a la tabla 2.

Puesto que, para el número de factores elegido, la matriz de estructura es reescalada para reproducir la comunalidad definida por la correlación múltiple, la tabla final del programa no hace otra cosa que promediar las comunalidades de todas y cada una de las variables utilizadas. El problema es como determinar el número de autovalores mayores que la unidad de la matriz  $G$ , ya que, como sabemos, la regla K1 tenderá a sobreestimar dicho número. Según el modelo teórico, sólo deben ser retenidos los autovalores mayores que la unidad de la matriz de covarianza imagen.

Una regla práctica que puede extraerse de la aplicación de la fórmula 187 es precisamente una aproximación al número de autovalores mayores que la unidad de la extracción de Análisis Imagen. Si reescribimos la fórmula 187 de la siguiente forma

$$ss_j = \lambda_j \bar{u}^2 \quad (191)$$

podemos pensar que las sumas de cuadrados correspondientes a autovalores mayores que la unidad siempre serán mayores que la unicidad media. Por lo tanto, un límite suficientemente bueno para el número de autovalores mayores que la unidad  $r$ , puede ser el número de factores con sumas de cuadrados superiores a la unicidad media.

Aplicado a nuestro ejemplo, deberemos retener aquellos factores correspondientes a autovalores mayores que el valor 0.5904. Aquí, los dos primeros factores, como se puede observar en la tabla 1, y comprobar en la tabla 2.

Este valor inicial se puede conseguir promediando los complementarios de la diagonal de la matriz de covarianzas imagen, ofrecida inicialmente por el programa.

Desgraciadamente, cuando el número de variables es elevado, esta regla puede ser muy laboriosa, a nivel práctico.

### 2.9.7. ANÁLISIS ALFA. (ALPHA; Kaiser, 1963.)

Puesto que las comunialidades de las variables no están definidas de antemano en este modelo, deben ser estimadas de forma iterativa. En cada iteración  $i$  se calculan

a) Los autovalores  $\Lambda^{(i)}$  y los autovectores  $A^{(i)}$  de la matriz<sup>14</sup>

$$H^{-1(i-1)} (R - I) H^{-1(i-1)} + I \quad (192)$$

que puede ser reexpresada como

$$\begin{aligned} H^{-1} (R - I) H^{-1} + I &= H^{-1} (R - I + H^2) H^{-1} = \\ &= H^{-1} [R - (I - H^2)] H^{-1} = \\ &= H^{-1} (R - U^2) H^{-1} \end{aligned} \quad (193)$$

que coincide con matriz de la fórmula 126, y se recalculan las nuevas comunialidades como

$$h_k^{2(i)} = \left( \sum_{j=1}^I |\lambda_j^{(i)}| a_{kj}^{2(i)} \right) h_k^{2(i-1)} \quad (194)$$

Si tenemos en cuenta que la fórmula 127 toma la forma general

$F = H A \Lambda^{\frac{1}{2}}$  de reproducción de la estructura factorial a partir de los autovalores y autovectores de la matriz en 192 y utilizando la operación<sup>15</sup>  $F'F$ , es fácil llegar al desarrollo

<sup>14</sup> Hay que resaltar que en el SPSS reports las comunialidades vienen expresadas como  $h_i$  y no como  $h_i^2$  por lo que las fórmulas aparecen escritas con distintas potencias.

<sup>15</sup> para que las fórmulas en las que se encuentran los  $\lambda_i$  sean iguales que las utilizadas en el punto 2.7, se deberán elevar al cuadrado los autovalores. Esto no afecta la exposición de este

de la fórmula 194 para el cálculo de las comunales de cada una de las variables. Estos valores se encontrarán en la diagonal de esta operación.

b) Los valores iniciales de las comunales  $h^{2(0)}$  son

$$h_i^{2(0)} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{r^{ii}} & |R| \geq 10^{-8} \text{ y todos } 0 \leq h_i^{2(0)} \leq 1 \\ \max_j |r_{ij}| & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (195)$$

donde  $r^{ii}$  es el  $i$ -ésimo elemento diagonal de la matriz  $R^{-1}$ .

Si  $|R| \geq 10^{-8}$  y todos los  $r^{ii}$  son iguales a 1, el procedimiento finaliza.

Si para algún  $i$ ,  $\max_j |r_{ij}| > 1$ , el procedimiento finaliza.

c) Las iteraciones finalizan si alguna de las siguientes condiciones es cierta

$$\max_k |h_k^{2(i)} - h_k^{2(i-1)}| < EPS \quad (196)$$

$$i = MAX \quad (197)$$

$$h_k^{2(i)} = 0 \text{ para algún } k \quad (198)$$

La solución final vendrá dada por los valores de las comunales cuando las iteraciones finalizan, a menos que la condición en 198 se verifique, en cuyo caso el

procedimiento termina. La matriz de estructura factorial será

$$F_r = H^{(f)} A_r^{(f)} \Lambda_r^{\frac{1}{2}(f)} \quad (199)$$

donde  $f$  es la iteración final (ver nota 15).

Si conociéramos los autovalores de la matriz 184, podría utilizarse como regla de decisión el retener los factores correspondientes a autovalores mayores que la unidad. Desgraciadamente, el SPSS no ofrece los autovalores de  $H^{-1}(R-U^2)H^{-1}$  sino directamente la estructura factorial reescalada por la fórmula 199 (equivalente a 127). En su lugar, en la tabla de estadísticos finales se ofrece el producto interno de cada uno de los vectores columna de la matriz  $F$ .

## 2.10. COMPARACIÓN DE MODELOS.

En la tabla 5 se recogen las matrices teóricas planteadas por los diferentes autores, y las matrices utilizadas por el programa para cada extracción.

Aunque, como se ha discutido, las matrices teóricas y las matrices utilizadas por el programa, pueden arrojar autovalores comparables, los procesos de estimación no son exactamente iguales.

Extracción	Teórico		SPSS	
	Matriz	Estimación	Matriz	Estimación
PC	$R$	autodescomposición	$R$	autodescomposición
PAF	$R-U^2$	autodescomposición	$R-U^2$	iterativo
ULS	$R-U^2$	numérica	$R-U^2$	Newton-Raphson
ML	$U^{-1}SU^{-1}$	numérica	$UR^{-1}U$	Newton-Raphson
GLS	$E^{-1}RE^{-1}$	numérica	$UR^{-1}U$	Newton-Raphson
IMA	$R+S^2R^{-1}S^2-2S^2$	autodescomposición	$S^{-1}RS^{-1}$	autodescomposición
ALPHA	$H^{-1}(R-U^2)H^{-1}$	iterativa	$H^{-1}(R-U^2)H^{-1}$	iterativo

Tabla 4: Comparación de modelos.

Las principales diferencias pueden resumirse en:

1. El número de factores es siempre estimado de antemano por la regla K1.
2. La estimación numérica utilizada el procedimiento de Newton-Raphson, en lugar del de Fletcher-Powell, propuesto por los autores originales.

3. En los casos de Análisis Imagen y Análisis Alfa, no se reflejan los autovalores de la matriz analizada. El conocimiento de estas cantidades es fundamental para decidir sobre la bondad del modelo.

4. Se utilizan matrices equivalentes para las extracciones, y no las matrices teóricas originales.

5. La extracción de Ejes Principales ajusta las estimaciones de las saturaciones de la matriz de estructura y las estimaciones de las comunalidades, de forma iterativa.

6. En Análisis Imagen, como se utiliza la reformulación de Jöreskog (1962), debería aparecer el estadístico de contraste asociado.

Todo esto implica que es necesario tener un conocimiento muy ajustado del comportamiento de los diferentes algoritmos para poder juzgar los resultados de las diferentes extracciones. De lo contrario, será difícil juzgar hasta que punto haber utilizado el programa nos lleva en dirección a utilizar el modelo teórico deseado.

Si el número de factores está bien definido los procedimientos de extracción del programa coincidirán con los modelos teóricos, ya que las matrices son comparables y los algoritmos son eficientes.

Desde nuestro punto de vista, el problema estriba en la correcta determinación del número de factores. Las dos posibles soluciones son: disponer de una regla de decisión precisa para decidir el número de factores, o conocer de antemano el número de factores esperable.

Si se desea abordar el problema desde la primera vía, existen diferentes reglas que han demostrado su buen

comportamiento para la detección correcta del número de factores. En el siguiente apartado pasamos a discutirlos con mayor detalle. Como veremos, la regla K1 no es precisamente una de las que mejor se comportan en diversas situaciones.

La segunda vía de solución, exige un conocimiento bastante detallado de los resultados que se esperan encontrar tras el análisis de los datos. Si la teoría que respalda la recogida de información está bien conformada y es sólida, ella misma justificará el número de factores esperable. Sin embargo, esta situación se presta más a análisis de tipo confirmatorio que a análisis de tipo exploratorio, y por lo tanto se recurrirá a programas como el EQS o el LISREL.

Nuestra experiencia nos dicta que situaciones en las que la teoría justifica una clara disposición de las variables en un número determinado de factores, son las más infrecuentes en la investigación en Psicología. Por ello, nos proponemos probar el comportamiento de varias reglas de fácil utilización, con la esperanza de proponerlas como alternativas a la regla K1.

### 3. REGLAS PARA LA DETERMINACION DEL NUMERO DE FACTORES.

#### 3.1. RANGO MINIMO Y LOS LIMITES DE GUTTMAN.

Según Thurstone, el objetivo de un Análisis de Factor Común es el de reducir las dimensiones del espacio de los datos, encontrando una solución con un número de factores comunes menor que el número de variables introducidas en el análisis. Para poder determinar este número de factores comunes, sugirió que, este número, debería ser igual al rango de la matriz de correlaciones después de insertar un conjunto "apropiado" de comunalidades en la diagonal reemplazando los unos de dicha diagonal. Ésta es la llamada matriz reducida y puede escribirse como  $R_c = R - U^2$ . El término "apropiado" se refiere a un conjunto de valores que mantengan la matriz reducida gramiana. Esto significa que la matriz reducida debe poder ser reproducida mediante la multiplicación de una matriz dada, digamos  $F$ , por su traspuesta, es decir que la siguiente igualdad debe cumplirse

$$FF' = (R - U^2) \quad (200)$$

Por otra parte, una matriz gramiana sólo posee autovalores no negativos, y por ello su rango es igual al número de sus autovalores positivos. El problema aparece a la hora de encontrar aquella estimación de la comunalidad que mantenga a un mínimo el rango de la matriz reducida, y por ello el rango de la matriz  $F$ , en definitiva la estructura factorial.



Si la comunalidad es sobreestimada, los factores intentarán explicar cantidades mayores a los correspondientes valores no diagonales, y no reducirían el rango de la matriz. Si la comunalidad es infraestimada se produciría una matriz no-gramiana con autovalores negativos, lo que no tendría sentido desde el punto de vista de variabilidad de una variable.

Ha habido muchos intentos de estimar la comunalidad directamente, pero parece que ninguno de ellos ha conseguido alcanzar siempre el criterio de rango mínimo. Por ello, Guttman (1954, 1956) consideró la estimación de límites inferiores para la comunalidad. Estos límites inferiores de la comunalidad también son límites inferiores del rango mínimo.

La demostración de estos límites inferiores, se basa en transformaciones congruentes de matrices cuadradas simétricas que establece que siendo  $R$  y  $B$  dos matrices cuadradas de orden  $n \times n$  tales que exista una matriz cuadrada  $A$  no singular de orden  $n \times n$  que las transforme de la siguiente manera

$$B = A'RA \quad (201)$$

se dice que la matriz  $B$  es congruente con la matriz  $R$ . De esta propiedad, se deduce que cualquier matriz simétrica  $R$  de rango  $r$  es congruente con una matriz diagonal  $D$  cuyos  $r$  primeros valores, ordenados en forma descendente de magnitud, son no nulos, y los demás iguales a cero. Y en la ley de inercia de Sylvester que establece que "cualquier matriz diagonal  $D$  congruente a una matriz simétrica  $R$  contiene el mismo número de elementos diagonales positivos, negativos y nulos".

Los tres límites inferiores para la comunalidad, desarrollados por Guttman, pueden resumirse de la manera

siguiente (ver Mulaik, 1972, 135-149):

1. Sea  $r_1$  el número de autovalores mayores que la unidad de la matriz  $R$  con unos en la diagonal. Entonces  $r_1$  también es el número de autovalores positivos de la matriz  $R$ , con ceros en la diagonal,  $R_1$ . Donde, entonces

$$R_1 = R - I \quad (202)$$

2. Sea  $r_2$  el número de autovalores positivos de la matriz  $R_2$  donde

$$R_2 = R - D_2 \quad (203)$$

donde  $D_2$  es una matriz diagonal donde el  $j$ -ésimo elemento diagonal es igual a  $1 - r_j^2$  y  $r_j$  es la mayor correlación no-diagonal de la columna  $j$  de la matriz de correlaciones. El número  $r_2$  es un límite inferior para el rango mínimo de una matriz de correlaciones reducida.

3. Sea  $r_3$  el número de autovalores positivos de la matriz  $R_3$  donde

$$R_3 = R - S^2 \quad (204)$$

donde  $S^2$  es una matriz diagonal con el  $j$ -ésimo elemento diagonal igual a  $1 - R_j^2$ , y  $R_j^2$  es el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple de la  $j$ -ésima variable predicha por las  $n-1$  restantes variables. El valor  $r_3$  es un límite inferior para el rango mínimo de una matriz de correlaciones reducida (Roff -1936- parece ser el primer autor en comunicar este límite).

Los tres límites quedan ordenados como sigue:

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r \quad (205)$$

donde  $r$  es el mínimo rango de  $F$  y por tanto de  $R$ , la matriz de correlaciones.

Como podremos comprobar más adelante, estos límites son de especial importancia en algunos de los métodos de extracción del modelo de factor común, especialmente el tercero que fundamenta los Ejes Principales.

También Thurstone (1947), resaltando la importancia del rango mínimo propuso un número mínimo de variables para poder dar sentido a un factor común, es decir, el problema de la identificación. Basándose en el principio científico que dicta que el número de observaciones experimentales independientes debe exceder el número de parámetros independientes, para garantizar la estabilidad de la estimación de estos parámetros, demostró el número de factores independientes  $r$  que vendría determinado por un número  $n$  de variables de una matriz de correlaciones. La misma fórmula fue propuesta por Lederman (1937) y Harman (1960)

$$r \leq \frac{(2n+1) - \sqrt{8n+1}}{2} \quad (206)$$

Algunos analistas han creído que de esta fórmula se puede establecer un límite superior para el número de factores que pueden ser definidos a partir de una matriz de correlaciones de orden  $n$ , sin embargo Guttman (1958) demostró que alterando los valores de la diagonal de  $R$ , manteniendo la restricción de encontrarse entre 0 y 1, se pueden conseguir matrices con rango  $n-1$ . Evidentemente, una solución de este estilo poco valor tendrá desde los presupuestos del modelo de factor común.

Yanai e Ichikawa (1990) demuestran un nuevo límite inferior para la comunalidad, y un límite superior para la misma, bajo el modelo de factor común, basados ambos en los autovalores de la matriz de correlaciones.

Ambos límites lo son de algunas de las variables de la

estructura factorial, y no de todas las analizadas. Para utilizar estos límites, será necesario ordenar por orden decreciente de comunalidad las variables, y comparar sus comunalidades con los complementarios, respecto a 1, de los autovalores menores que la unidad. Por tanto, se obtienen tantos límites inferiores como autovalores menores que la unidad haya. Un procedimiento similar es el necesario para calcular los límites superiores.

Desafortunadamente, la demostración se basa en las matrices poblacionales, no ofreciendo resultados del comportamiento de los límites con matrices muestrales.

Según el ejemplo ofrecido por los autores, el procedimiento parece prometedor para estructuras factoriales poco claras, como el *middel model*, definido por Tucker et al. (1969).

### 3.2. LA REGLA K1 DE KAISER-GUTTMAN.

La regla K1 fue propuesta por Kaiser (1960) como desarrollo del más débil de los límites para la comunalidad de Guttman. La regla consiste en mantener los factores correspondientes a los autovalores mayores que la unidad de la matriz de correlaciones R.

La fundamentación de Kaiser es principalmente psicométrica, y establece que los factores correspondientes a autovalores menores o iguales que la unidad arrojarán un índice de generalizabilidad negativo (ver fórmula 125), como se discutió en el apartado del Análisis Canónico.

Otra razón informal ha sido, que no parecía lógico retener factores que eran capaces de explicar una cantidad de variabilidad inferior a la aportada por cada una de las variables a la matriz de correlaciones (Zwick y Velicer,

1986). Cuanto mayor sea la cuantía del autovalor de la componente (factor), mayor será la cantidad de varianza explicada por ella. Los autovalores próximos a cero, aportarán poco poder de aglomeración de la información contenida en las variables, y los autovalores mayores que la unidad aglomerarán mayor información. Pero no parece que se puedan comparar, en iguales términos, la variabilidad de una cualquiera de las variables de la matriz de correlaciones, y la varianza común a todas ellas acumulada en una combinación lineal.

Cliff (1988) demuestra que, en realidad un mal desarrollo de la fórmula de generalizabilidad de los factores fue la que llevó a plantear que los autovalores menores que la unidad tendrían correlación canónica negativa, y por tanto generalizabilidad negativa. En su artículo demuestra que la fiabilidad de una componente dependerá tanto del autovalor como de la fiabilidad de las propias variables que lo componen.

Segun Cliff, la fiabilidad será negativa solo para autovalores menores que el complemento de la fiabilidad de una única variable. El problema estriba en que, como hemos vistos, es difícil que conozcamos la fiabilidad de las variables en estudio, y mucho más estimarla a partir del propio modelo factorial.

Zwick y Velicer (1986), llevaron a cabo un estudio de tipo Monte Carlo sobre diversas reglas y comprobaron que la K1 tiende a la sobreestimación del número de factores en matrices muestrales. Igualmente, Lee y Comrey (1979) concluyen que la regla K1 sobreestima la comunalidad, retiene demasiados factores y por ello distorsiona las conclusiones que puedan derivarse en investigaciones que la utilicen. En esta línea se encuentran también las opiniones de Linn (1968), Browne (1968), Cattell y Jaspers (1967),

Revelle y Rocklin (1979), Yeomans y Golder (1982), Zwick y Velicer (1982) y Horn (1965).

Tanto Mote (1970) como Humphreys (1964) piensan que la regla de Kaiser y Guttman puede infraestimar el número real de factores. Su trabajo se basó en puntuaciones reales de pruebas psicométricas, y la decisión era tomada basada en el campo de la interpretabilidad de los factores, y de criterios subjetivos apriorísticos.

Gorusch (1974) apunta la interpretación de la regla K1 por muchos investigadores como el número de factores de una estructura dada, y no como un límite inferior de dicho número. Adicionalmente informa que el número de factores retenidos por esta regla suele oscilar entre 1/3 y 1/5 de las variables utilizadas en el análisis.

### 3.3. EL TEST DE "SIGNIFICACIÓN" DE BARTLETT.

El test de significación de Bartlett (1950, 1951) supone que la matriz de correlaciones poblacional puede ser descompuesta en dos matrices según la fórmula

$$R = PP' + \theta I \quad (207)$$

donde  $R$  es la matriz de correlaciones poblacional,  $PP'$  es la matriz de covarianzas reproducida por los  $r$  componentes "significativos" y  $\theta I$  es una matriz de varianzas error, todas ellas, iguales a  $\theta$ . Es decir que tras la extracción de  $r$  componentes las componentes restantes sólo representan varianza error, y la varianza de estas  $n-r$  restantes componentes error son todas iguales<sup>16</sup>. De esta forma, al utilizar una matriz de correlaciones muestral el test de presencia o ausencia de componentes de error no es más que

---

<sup>16</sup> Un razonamiento similar es el invocado en el Scree test.

un test de significación sobre la igualdad de las varianzas de las componentes tal cual son extraídos de la matriz de correlaciones (sin reescalar a escala típica para conseguir varianzas iguales a la unidad). Puesto que la varianza de una componente viene representada por su autovalor, el test puede llevarse a cabo sobre el tamaño de los autovalores.

Puesto que en la práctica los autovalores de las Componentes Principales de una matriz muestral vienen ordenados en orden descendiente de magnitud, el test puede llevarse a cabo de manera secuencial de la siguiente manera: Primero se prueba que todos los autovalores extraídos son iguales, excepto por diferencias de error de muestreo. Si esta hipótesis es rechazada la primera componente principal es aceptada como significativamente distinta de las demás. Seguidamente se hipotetiza que las  $n-1$  restantes componentes son iguales, excepto por diferencias aleatorias. Si esta hipótesis es rechazada se supone que las dos primeras componentes son "significativas", y se continúa con las  $n-2$  componentes restantes, y así sucesivamente. El número de los  $r$  componentes principales significativas viene determinado por el momento en que la hipótesis para los  $n-r$  componentes restantes no puede ser rechazada.

El estadístico utilizado para realizar la secuencia de contrastes se basa en el cociente entre el producto de los  $n-r$  autovalores de error y la  $(n-r)$ -ésima potencia de la media aritmética de esos autovalores restantes. Este estadístico se denomina  $Q$  y puede expresarse de la siguiente forma

$$Q = \frac{\hat{\lambda}_{r+1} + \dots + \hat{\lambda}_n}{\left( \frac{\hat{\lambda}_{r+1} + \dots + \hat{\lambda}_n}{n-r} \right)^{n-r}} \quad (208)$$

donde  $r$  es el número de componentes excluidos como

distintos, y  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo autovalor de la matriz de correlaciones muestral.

La distribución muestral de  $Q$  es desconocida, pero su logaritmo neperiano corregido por una constante  $K$  sigue una distribución aproximada a ji-cuadrado. Siendo  $K$  igual a

$$K = -(N-1) + \frac{2n+5}{6} + \frac{2r}{3} \quad (209)$$

donde  $N$  es el número de sujetos de la muestra,  $n$  es el número de variables,  $r$  es el número de componentes supuestas como significativamente distintas, en el momento de la serie de pruebas.

Entonces

$$\chi^2 = K \ln Q \quad (210)$$

se distribuye aproximadamente según un ji-cuadrado con  $(n-r-1)(n-r+2)/2$  grados de libertad.

Al parecer, esta prueba es sensible al número de sujetos utilizados. Según Gorusch (1973, 1974) mantiene que a medida que el tamaño de la muestra aumenta, la prueba de significación se hace más potente, y por ello, cada vez se encuentra un menor número de diferencias substanciales entre autovalores. Según este autor, en cualquier estudio empírico se encuentran, inevitablemente, una cierta cantidad de factores (componentes) irrelevantes, pobremente definidos y desiguales. Dada la presencia de estos factores (componentes), el aumento del tamaño de la muestra, y con ello el poder de la prueba, puede llevar a la retención de éstos.

El tamaño de la muestra a partir del cual esto puede suceder, depende tanto del nivel de significación elegido (Horn y Engstrom, 1979) como del tamaño relativo de estas



componentes (factores) (Gorusch, 1973). Zwick y Velicer (1982) apuntan que, sin embargo, la precisión de la estimación de los autovalores poblacionales aumenta a medida que el tamaño de la muestra aumenta, con lo que las diferencias entre los autovalores de estas componentes residuales se hace cada vez menor.

En cualquier caso, para evitar la retención de un número excesivo de componentes, Horn y Engstrom (1979) sugieren variar el nivel de significación para tamaños de muestra diferentes. Aunque, Zwick y Velicer (1986) no encontraron una atenuación sustancial del efecto del tamaño de la muestra, variando el nivel de significación.

Sólo cuando el número de variables se aproxima al tamaño de la muestra, la sobreestimación del número de factores parece ser sistemática (Zwick y Velicer, 1982).

La corrección del estadístico de Bartlett, que lleva al *ML ratio*, Hakstian 1982 ( comunicación personal de Richman, 1983), comunica que se comporta de manera similar al test de Bartlett.

#### 3.4. ANALISIS PARALELO.

El Parallel Analysis (PA) desarrollado por Horn (1965) es una adaptación, orientada hacia matrices muestrales, de la regla  $K_1$ . En su trabajo, Horn (1965) descubrió que, mientras los autovalores de matrices poblacionales de variables independientes son todos iguales a la unidad, las matrices muestrales extraídas de dichas poblaciones arrojan autovalores mayores que la unidad, en primer lugar, y autovalores posteriores menores que 1. Horn propone comparar los autovalores correspondientes a muestras aleatorias de poblaciones independientes con los de las muestras reales a analizar, con tamaños muestrales iguales. Las componentes a

retener, serán aquellas correspondientes a autovalores de la matriz a analizar mayores que los autovalores de la matriz muestral de variables independientes.

Zwick y Velicer (1986) mantienen, que este abordaje integra el énfasis de la regla K1 poblacional en la fiabilidad y la capacidad de aglomeración de datos, así como los efectos muestrales del tamaño de la muestra.

Zwick y Velicer (1986) informan de los resultados de unos trabajos de simulación llevados a cabo por Richman (trabajo sin publicar, 1984) sobre el procedimiento PA con extracciones mediante Componentes Principales. Según estos autores, PA se comporta de manera muy precisa cuando los datos provienen de estructuras correspondientes al modelo formal de factor común, es decir, una estructura con agrupación clara de variables en los factores, sin variables de saturaciones bajas o distribuidas simultáneamente en distintos factores. PA retenía demasiados factores cuando las matrices de correlaciones correspondían al *modelo medio* (middle model; Tucker, Koopman y Linn, 1969). El procedimiento era más ajustado para tamaños grandes ( $N=500$ ) que para tamaños pequeños ( $N=100$ ) de muestra.

Humphreys y Montanelli (1975) aplican el procedimiento PA a Ejes Principales, e informan que el método se comporta adecuadamente. Posteriormente, Montanelli y Humphreys (1976) desarrollaron un modelo de regresión para predecir los autovalores, procedentes de muestras de correlaciones aleatorias, con el cuadrado de las correlaciones múltiples sustituidos en la diagonal principal. Las predicciones resultaron muy precisas (Montanelli y Humphreys, 1976), y Green (1983) ha utilizado el modelo de regresión para el Análisis Factorial de variables dicotómicas. Bobko y Schemmer (1984) han propuesto un método de regresión similar para Componentes Principales.

En el estudio de Zwick y Velicer (1986) donde se comparó el comportamiento de este procedimiento, frente al K1, la prueba de Bartlett, el scree y el MAP, el PA fue el que demostró tener un mejor comportamiento. Su desviación del número de factores teórico, y su variabilidad en las diferentes condiciones, fueron las menores de todos ellos. Cuando se produjeron errores de estimación, estos fueron de sobreestimación.

Estos últimos autores, piensan que, a pesar del buen comportamiento del procedimiento PA, la generación de muestras del mismo tamaño de sujetos y variables que las sujetas ha estudio es costoso. Por ello recomiendan la utilización de modelos de regresión como los de Montanelli y Humphreys (1976) para Ejes Principales, o el de Bobko y Schemmer (1984) para componentes principales, si bien su comportamiento no está suficientemente probado aun.

Nosotros pensamos que, dadas la versatilidad de los actuales paquetes estadísticos para la generación de muestras aleatorias de manera interactiva, y la capacidad de los ordenadores de gran formato, la aplicación de este procedimiento no resulta demasiado engorrosa, ni computacionalmente costosa, para números de variables suficientemente grandes.

En una línea similar, Everett (1983) propone la división de la muestra total en dos muestras para la determinación del número de factores a partir de la comparación de las puntuaciones factoriales. El procedimiento parece adecuado especialmente para los Análisis Factoriales de tipo taxonómico (en la terminología de Hakstian y Muller, 1973) más que en lo de tipo exploratorio.

En una línea de razonamiento algo similar, Everett (1983) propone la comparación de las estructuras generadas

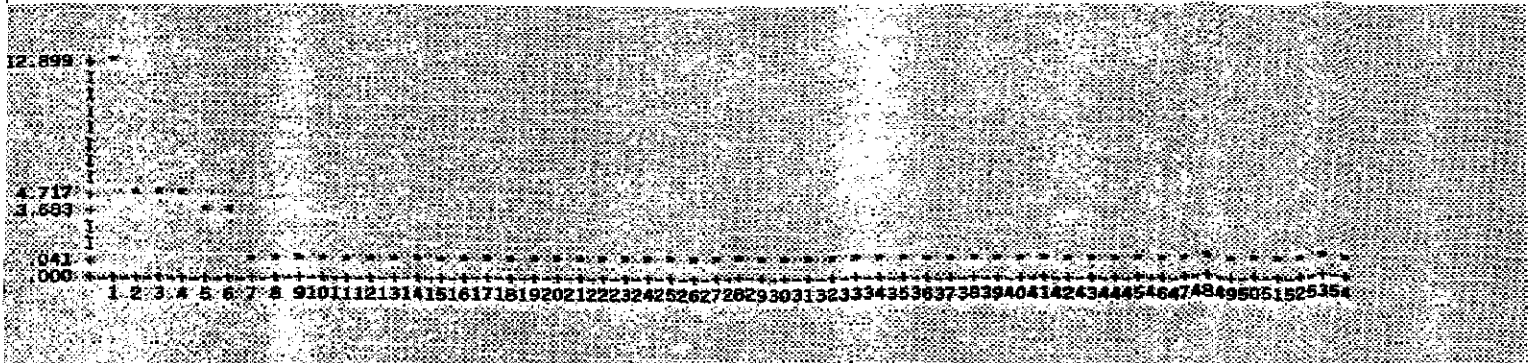
por dos submuestras de la muestra de interés. Pero su estudio sólo utiliza la extracción de componentes principales.

### 3.5. EL SCREE TEST.

El scree test, o prueba de sedimentación, fue desarrollada por Cattell (1966, 1977) y posee una característica eminentemente gráfica. Según este autor, los factores más relevantes de una estructura pueden ser distinguidos fácilmente de los factores triviales de error por una ruptura en la cuantía de sus varianzas. Este concepto, en realidad, está muy próximo al de variabilidad residual, pero en este caso no existen estadísticos ni contrastes. De hecho, Horn y Engstrom (1979) comparan en un estudio de simulación el comportamiento del scree respecto al test de Bartlett, y concluyen que su comportamiento es similar, si bien no es exactamente el mismo.

El método consiste en la representación gráfica de todos los posibles autovalores sucesivos (tantos como variables) en el eje de abscisas, y sus cuantías en el eje de ordenadas. Si se disponen éstos en orden decreciente de magnitud, la gráfica adquiere, en la mayoría de los casos, el aspecto típico similar a la pendiente de una montaña que se nivela a medida que el orden de los autovalores aumenta, hasta llegar prácticamente a una línea horizontal.

Básicamente se trata de encontrar dónde termina la montaña y dónde empieza el valle, el punto de separación de ambos será el correspondiente al número de factores a retener. Es decir Cattell, supone que en el momento que los factores sean incapaces de acaparar variabilidad de las variables, tenderán a hacerse iguales en variabilidad y, por lo tanto, a tener autovalores similares.

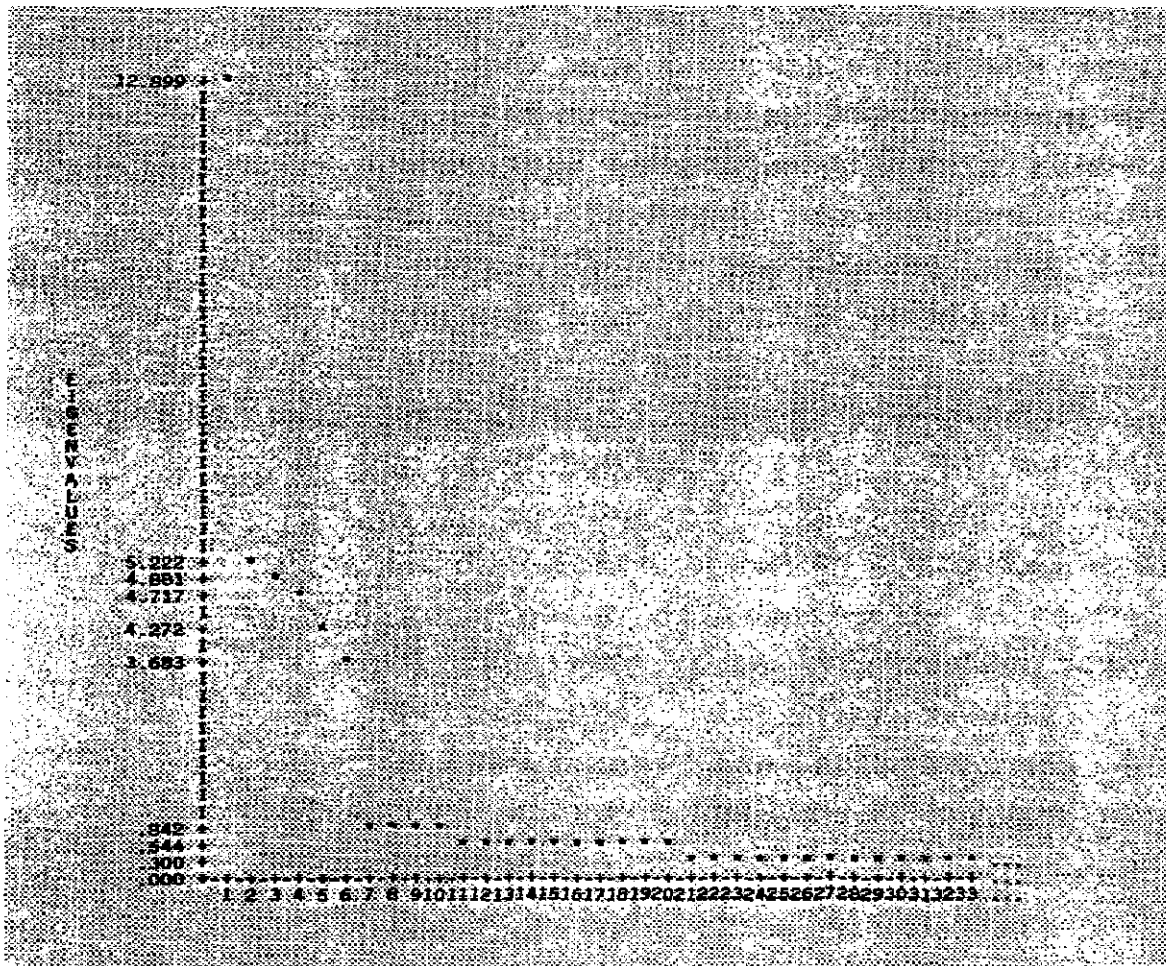


1 Scree a 132 columnas.

Cattell (1966) y Cattell y Vogelmann (1977) llevaron a cabo numerosas extracciones con este método, demostrando su superioridad frente al criterio K1 de Kaiser-Guttman. Cattell y Jaspers (1967), Cattell y Vogelmann (1977); y Tucker, Koopman y Linn (1969) informan que la prueba era precisa en la mayoría de las situaciones probadas por ellos. Cliff y Pennel (1967) y Linn (1968) concluyen que los puntos de ruptura en las gráficas son mas claros para un tamaño de muestra mayor (N=400 vs. N=100).

Sin embargo, este procedimiento presenta sus propios problemas, ya que su comportamiento depende excesivamente de aspectos como el número de variables de estudio, la ortogonalidad de los factores, el error de medida en las variables, etc. Además, su utilización necesita de un cierto entrenamiento y una representación gráfica lo más ajustada posible. Mientras Cattell y Vogelmann (1977), Zwick y Velicer (1982), obtuvieron una fiabilidad interjueces elevada, Crawford y Koopman (1979) informan de una fiabilidad interjueces extremadamente bajo.

El SPSS ofrece la posibilidad de representar esta prueba, pero no es excesivamente preciso, y se ve alterado fácilmente por la anchura del papel utilizado (80 a 132 columnas). También el número de variables puede distorsionar el gráfico. Puesto que el SPSS intenta representar tantos autovalores como variables existan, el programa puede llegar a "empaquetar" demasiado las variables, cuando, en realidad, normalmente esperaremos encontrar el punto de ruptura en los primeros factores.



2 Scree test a 80 columnas.

Adicionalmente, no queda clara la estrategia a seguir cuando aparecen "mesetas" de autovalores en mitad de la pendiente, diversidad de picos intermedios o una falta de nivelación en los últimos autovalores. Cattell (1977) llega a sugerir la utilización de rectas de regresión o de parcialización del gráfico en subgráficos.

El propio Cattell (1977) sugiere que reglas rápidas como el scree o la K1 deberán ser seguidas de otros procedimientos más pausados como las pruebas de significación de Máxima Verosimilitud. De hecho, la mayoría de los estudios de simulación en los que se intenta determinar el comportamiento de nuevas reglas de decisión, incluyen el scree entre las reglas tradicionales de comparación (Zwick y Velicer, 1982; etc.

En el estudio de Zwick y Velicer (1986), el scree se comportó de manera más precisa y menos variable que las reglas K1 y Bartlett, siendo más precisa cuando las saturaciones eran elevadas o el tamaño de la muestra aumentaba (Cliff y Pennell, 1967; Linn, 1968; Zwick y Velicer, 1982). El número de variables no pareció afectar la precisión de la prueba, si bien ellos utilizaron diagramas a medida, en lugar de los diagramas estándar de nuestro trabajo.

En el estudio de Zwick y Velicer (1982), el scree se comportaba mejor que el MAP, cuando las componentes de mayor relevancia estaban constituidas por 6 o menos variables y las saturaciones eran bajas. Este hecho se repitió en el estudio posterior de los mismos autores (1986), para situaciones aún más complejas. En este último estudio, el scree tendía a la sobreestimación, especialmente cuando las saturaciones eran bajas, o cuando existían variables complejas o únicas (como fueron definidas por los autores).

### 3.6. INDICE DE INTERPRETABILIDAD.

Crawford (1975) y Revelle & Rocklin (1979) proponen retener los factores ya rotados basándose en su índice de interpretabilidad. Este índice se basa en el concepto de estructura factorial simple, de manera que, una matriz de estructura factorial debe reunir los siguientes requisitos para ser interpretable:

- a. Deberá tener un número reducido de factores.
- b. Los factores deberán explicar una gran cantidad de varianza común.
- c. Cada columna debe tener un número elevado de saturaciones cercanas a cero.

d. Cada factor deberá tener varias saturaciones elevadas.

Basándose en las sumas de cuadrados y productos cruzados que se pueden llevar a cabo sobre la matriz de estructura, llegan a un estadístico de Interpretabilidad. Este estadístico se utiliza sobre la estructura rotada, y es el siguiente:

$$I(m) = k_1 T(m) + k_2 F(m) \quad (m=1, 2, \dots, k; k \leq n) \quad (211)$$

donde la cantidad  $T(m)$  disminuye cuando parsimonia de las filas de la matriz de estructura (Test) aumenta, y  $F(m)$  disminuye con el aumento de la parsimonia de las columnas (Factores), para un número de factores  $m$ .

Aunque el procedimiento parece prometedor, presenta el problema de necesitar una decisión a priori sobre el número de factores y así poder llevar a cabo la rotación.

En el estudio de Crawford (1975), se prueba el comportamiento del Índice de Interpretabilidad para varios procedimientos de extracción, diversos procedimientos de rotación, y diferentes números de factores.

Los resultados son poco concluyentes, ya que el Índice puede presentar varios mínimos y máximos locales.

El criterio de interpretabilidad teórica ha sido defendido como el último recurso a la hora de decidir sobre el número de factores. La mayoría de los autores que han tratado estos temas defienden que, poco sentido tiene mantener en una estructura factores que conceptualmente carecen de interpretación.

En esta línea, Bentler y Mooijaart (1989), demuestran que entre dos modelos, el más parsimonioso arroja menor error típico de estimación, por lo que las estimaciones son más ajustadas. Así, concluyen que la parsimonia de una estructura puede ser un buen criterio para escoger entre varios candidatos. Afirmaciones



similares han sido mantenidas por De Leeuw (1988), Rao y Miller (1971)

### 3.7. MINIMUM AVERAGE PARTIAL METHOD (MAP).

Bajo el modelo de Componente Principal y del Análisis Imagen, Velicer (1976) propone una regla para la determinación del número de componentes a retener, siempre que sean utilizados los modelos como extracciones previas de AF, como hacen Host (1965) y van de Geer (1971). Velicer (1976), Zwick y Velicer (1982) proponen el MAP como indicador alternativo para la determinación del número de factores, basado en la matriz de correlaciones parciales muestral.

Dados los  $r$  primeros autovalores, se va eliminando sucesivamente el efecto de cada uno de ellos y se calcula el promedio de los cuadrados de las correlaciones parciales. El número de factores correspondiente al valor mínimo de este índice, será el punto de detención en la extracción. Es decir, cuando el índice alcanza un mínimo, el número de componentes eliminados es el número de componentes a retener. Velicer (1976) demuestra que el valor del índice seguirá decreciendo hasta que una componente característica es extraída, momento en que el valor del índice comenzará a aumentar.

Según Velicer (1976), este procedimiento es congruente con la idea de factores "comunes" del Análisis Factorial, es exacto, puede ser aplicado a cualquier tipo de matrices de covarianza y está lógicamente relacionado con concepto de factores que representan más de una variable.

El estadístico utilizado es  $f_m$

$$f_m = \frac{\sum_{i \neq j} (r_{ij}^*)^2}{p(p-1)} \quad (212)$$

donde  $r_{ij}^*$  es el elemento correspondiente a la la matriz de correlaciones parciales ( $R_{11}^*$ ) después de dejar fuera  $m$  variables. Este estadístico es función de  $m$ , el número de variables dejadas fuera del análisis, y alcanza un mínimo para el mejor número de factores  $m$  a retener.

Si  $m$  es el número de factores determinados por este procedimiento, y  $m^*$  es el número determinado por  $K1$ ,  $m$  es un límite inferior para  $m^*$ , ya que  $m \leq m^*$ .

La función  $f_m$  determina sistemáticamente menos factores que los mantenidos por Jöreskog (1967) y Schönemann y Wang (1972) en su reanálisis de 6 estudios factoriales clásicos.

Zwick y Velicer (1982) suponen que el valor determinado por el MAP será menor que el de  $K1$ , especialmente cuando el número de variables es elevado. En dicho estudio, el MAP infraestima el número de factores cuando el número de variables por factor era bajo, y las saturaciones se encontraban en torno a 0.5 (bajas), situación en la que, según los autores, los factores están tan pobremente definidos como la parte única de una sola variable. Sólo en estas condiciones, el MAP se comporta de forma inapropiada.

En el estudio de Zwick y Velicer (1986), el MAP se comportó de forma más precisa, y menos variable, que el  $K1$ , la prueba de Bartlett y el scree, con una tendencia generalizada a la infraestimación, especialmente, cuando las saturaciones eran bajas, o la proporción de variables por factor era también baja. Fue mas preciso con saturaciones elevadas, y cuando la proporción de variables por factor era elevada.

Este criterio parece especialmente recomendable para los casos en los que existen componentes en las que sólo satura una variable (variables únicas), ya que no las retiene. Por ello,

Zwick y Velicer (1986) declaran su clara relación con el concepto de parsimonia (ver también, Bentlery Mooijaart, 1989).

#### 4. DELIMITACION DEL PROBLEMA.

Como hemos visto, los distintos métodos de extracción utilizan distintas matrices para la descomposición factorial, así como distintos algoritmos y procedimientos de estimación. También, hemos podido revisar distintas reglas para la decisión sobre el número de factores a retener, cuando teóricamente no se tiene una idea preconcebida, o hipótesis de trabajo, sobre el número idóneo de factores. Algunas de las reglas están fuertemente asociadas al método de extracción, mientras que otras parten de presupuestos teóricos sobre el propio modelo de factor común y el cumplimiento de los supuestos del modelo. Sin embargo, hasta la fecha, no parece que exista unanimidad sobre cuál es la mejor regla o heurístico para despejar esta incógnita.

En su día pareció que la regla más fructífera era la K1, tanto por su parsimonia como por la economía de cálculo que implicaba. Tal vez por ello, se tomó la decisión de incluirla como valor por defecto "inicial" en el SPSS, a pesar de las consecuencias que puede acarrear en determinadas condiciones de trabajo. La proporción de variables, la proporción de sujetos, el tipo de estructura, el error de medida de los datos o el valor esperado de la comunalidad, son algunos de los factores que pueden influir en el comportamiento de esta regla (ver más arriba). Posiblemente, la idea de incluir esta regla no fue más que la de permitir una extracción inicial que permitiera la ejecución del procedimiento bajo unas condiciones "mínimas" de especificación del modelo factorial.

Por experiencia sabemos que, muy excepcionalmente, el

primer análisis de unos datos, y especialmente cuando este análisis es exploratorio, es el más adecuado para apoyar la teoría que queremos defender. Sólo cuando el trabajo es de refutación de una teoría dada, y no se pretende ofrecer una alternativa mejor, sino simplemente contrastar con otra muestra diferente a la original, solemos finalizar los análisis numéricos en la primera extracción y pasar a consideraciones de otra índole. Por ello, pensamos que el propósito de los diseñadores del SPSS, simplemente, era "hacer andar" las extracciones, confiando en la intención de los usuarios de revisar cuidadosamente los supuestos y teorías implícitas en los datos.

Por otra parte, los modelos factoriales son desarrollos teóricos de análisis y se refieren a la organización de *parámetros* en la población, mientras que nosotros habitualmente utilizamos *muestras*, suficientemente económicas, para contrastar nuestras teorías. Es difícil que el ajuste entre las estimaciones a partir de una muestra dada, y los valores de los parámetros coincidan con exactitud, si bien la eficiencia de la estimación es la meta que todos perseguimos. Precisamente la teoría de la estimación es la que permite suponer que, en el límite, se conseguirá un ajuste perfecto entre el modelo teórico de parámetros y las muestras *infinitamente grandes*.

De hecho, en el límite de la proporción de factores a variables, la regla de Kaiser tiene un comportamiento ideal, al igual que tantas otras. Pero nuestro problema sigue siendo el trabajo diario con muestras que poco tienen de ideales, debido al coste que conlleva la recogida de información, tanto a nivel teórico como económico.

*En esta línea, pretendemos probar el comportamiento de esta regla, y otros heurísticos similares de fácil obtención, en una ejecución normal de un Análisis Factorial Exploratorio, con el afán de descubrir las condiciones en*

las que peor se comporta cada una de las reglas y las condiciones en que la utilización de cada una de ellas pueda ser más beneficiosa.

Dado que cada programa de análisis estadístico utiliza algoritmos diferentes, nosotros haremos referencia

#### **4.1. NATURALEZA DEL PROBLEMA.**

El modelo factorial es un modelo intrínsecamente indeterminado, tanto por la indeterminación de la solución espacial, como por la indeterminación de los parámetros incluidos en el modelo. Sin embargo, su uso extensivo en la investigación psicológica como herramienta de reducción de la información, nos ha llevado a abordar los problemas inherentes a él, para poder sugerir una serie de reglas prácticas que reduzcan la incertidumbre inicial de las investigaciones de carácter exploratorio.

Personalmente, no apoyamos la utilización extensiva de este método de análisis, y mucho menos como instrumento en sí mismo para la "generación" de nuevas teorías. Como cualquier herramienta, el análisis factorial debe encontrarse supeditado a las teorías que han llevado a un análisis de los datos de esta índole, y nunca al contrario. Puede que la impresión que causa el hecho de poder clarificar la estructura subyacente a unos datos determinados, dote al análisis factorial de un carácter casi "mágico", pero nunca debe ser utilizado si no es en el proceso normal de refutación de una teoría suficientemente articulada. Sin ella, difícilmente podrán ser interpretados los resultados arrojados por esta técnica de análisis, o por cualquier otra.

Durante las décadas de los 60 y 70, proliferaron los estudios cuyo cuerpo fundamental de análisis era el análisis

factorial. Al igual que entonces, en los últimos años, podemos encontrar innumerables investigaciones en psicología cuya base de análisis son los modelos de ecuaciones estructurales, de los que el modelo de factor común puede considerarse un caso particular. En parte parece existir la necesidad de técnicas que reduzcan el número de variables observadas a un subconjunto de variables menor de mayor coherencia, en parte da la sensación de que las técnicas de análisis siguen evoluciones de moda y popularidad. Sin embargo, no es difícil encontrar publicaciones en las que, en nuestra opinión, otro tipo de análisis, como el Escalamiento Multidimensional, el Análisis Discriminante o el Análisis Cluster, parecen tentativas más acordes con los supuestos teóricos que se desean contrastar.

Dado el volumen de información que nos vemos obligados a manejar en las ciencias del comportamiento, necesitamos poder recurrir a técnicas como el análisis factorial para aprovechar al máximo la información que podamos obtener de los sujetos. Lo que no podemos olvidar son los problemas que acarrearán cada una de las técnicas utilizadas y sus limitaciones. En el caso del análisis factorial, los tres puntos calientes son: la estimación de la estructura factorial, la rotación de la solución inicial hacia una solución más interpretable, y la estimación de las puntuaciones factoriales. Nuestra investigación intenta profundizar el primero de ellos.

Existen diferentes procedimientos de estimación de los parámetros de la estructura factorial, muchos de los cuales hemos recogido en la primera parte de este trabajo. Como hemos podido ver, no todos ellos son equivalentes ya que parten de modelos y/o supuestos distintos. Hakstian y Muller (1973) proponen una organización conceptual de los distintos modelos y procedimientos de estimación basados en los criterios de el modelo lineal adoptado, la naturaleza del muestreo llevado a cabo y la lógica (rationale) teórica

adoptada. Sin embargo, a nivel práctico, excepto para Componentes Principales, la determinación previa del número de factores de la estructura es de vital importancia.

El abordaje para determinar suficientemente una estructura factorial es, bien fijar de antemano el número de factores mediante una estimación adecuada de dicho número (o un presupuesto teórico sobre el mismo), o bien fijar de antemano la comunalidad, mediante la correspondiente estimación. Una de las dos condiciones debe ser fijada, de antemano, para poder estimar la otra.

El SPSS, programa con el que se han analizado los datos de este trabajo, condiciona la estimación de las saturaciones de la estructura, y por ello la de la comunalidad, al número de factores para, a partir de ahí, proseguir con la extracción. La excepción es el caso de Componentes Principales, donde la solución es determinada e igual al número de variables introducidas en la matriz muestral.

Por defecto, en el programa, el número de factores  $r$  se corresponde con el número de autovalores mayores que la unidad de la matriz de correlaciones, y siempre respecto a esta matriz, aunque los datos sean introducidos en el programa en forma de puntuaciones o en forma de matriz de varianza-covarianza. Este comportamiento se repite en los principales programas de análisis estadístico, como el BMDP o el SAS.

Sin embargo, esta regla puede ser alterada fácilmente especificando el número de factores que se desean extraer. Puesto que algunos de los diversos procedimientos de extracción parten de matrices distintas, los autovalores asociados a ellas también lo serán. Nosotros proponemos una serie de reglas prácticas, o heurísticos, tan fáciles de utilizar como el K1, pero que pueden ser mejores estimadores



iniciales del número de factores adecuado.

Una determinación incorrecta del número de factores correspondientes a la estructura subyacente a unos datos determinados acumula errores que, en último término, afectaran a la interpretación final de los resultados.

En primer lugar, si el número de factores no es el adecuado, la estimación de la comunalidad de las variables tampoco puede serlo, ya que el cálculo de éstas está condicionado a los primeros. Si la regla utilizada para la determinación inicial es la K1, las comunales se verán infladas por el efecto de factores accesorios. Esto nos llevará a pensar que se está explicando una mayor cantidad de variabilidad de las variables de lo que son capaces de explicar los principales factores de la estructura subyacente. Adicionalmente, puede llevarnos a retener variables que sólo participan de los factores de menor relevancia, y descartar variables que participando de los primeros factores, poseen una comunalidad menor. Además, como la proporción de varianza explicada total se calcula a partir del número de variables analizadas, retener las variables correspondientes a los factores residuales lleva una disminución de este estadístico que puede no corresponderse con la comunalidad media real de las variables de interés.

Aunque Mote (1970) y Humphreys (1964) proponen la retención de un mayor número de factores (componentes) que el necesario, para descartar tras la rotación aquellos que no sean fácilmente interpretables, facilitando así la clarificación de la estructura, la mayoría de los autores (Zwick y Velicer, 1982; Rummel, 1970; Mulaik, 1972; Gorusch, 1974, entre otros) piensan que la retención de demasiados factores afectará el proceso de rotación de manera perniciosa. Las dimensiones prioritarias del espacio factorial se verán oscurecidos por la presencia de

dimensiones artificiosas, con lo que las saturaciones de los factores más relevantes pueden verse disminuidas.

Por último, las puntuaciones factoriales deben ser estimadas cuando el número de factores es menor que el número de variables. Un desvirtuamiento de la matriz de estructura irradiará su efecto a los procedimientos de estimación de las puntuaciones, con lo que las escalas generadas a partir de estas puntuaciones pueden sufrir problemas psicométricos graves.

Por tanto, creemos que es necesario conseguir estimaciones iniciales lo más ajustadas posibles del número de factores, de manera que los procesos subsiguientes del análisis, se vean afectados en la menor medida posible por la decisión preliminar del número de factores a retener. Si otras reglas diferentes de la K1 aparecen como mejores alternativas, parece innecesario arrastrar los efectos de sobreestimación en estadios ulteriores del análisis.

#### 4.2. DISEÑO DEL EXPERIMENTO.

Históricamente, la forma de abordar este problema ha tomado dos vías alternativas. La primera, utilizada extensivamente por Harman, Kaiser, Jöreskog, Guttman y otros, es la de reanalizar matrices muestrales, ya utilizadas por otros autores anteriormente. Las dimensiones de estas matrices han sido defendidas teóricamente en diversas ocasiones previas, y por tanto sus dimensiones y/o estructura se suponen conocidas, por lo que suelen utilizarse como "estándar" para nuevas reglas.

La segunda, más utilizada después del aumento casi ilimitado de la capacidad de los ordenadores, es la generación de muestras aleatorias de estructura conocida, las llamadas simulaciones o métodos de Monte Carlo.

El primer caso, de las matrices "históricas" basadas en datos reales, adolece del problema de nunca poder estar seguros de hasta qué punto los parámetros fueron bien estimados en oportunidades anteriores, pero permite una comparación bastante directa con otros autores.

El segundo, puesto que depende en gran medida del método de generación de número aleatorios (o pseudoaleatorios), se ve influido por la potencia de cálculo del ordenador utilizado, de la precisión de los cálculos, y algoritmos, del lenguaje utilizado y, en último término, por la máquina utilizada. Por ello no permite comparaciones directas, pero sí permite una manipulación exhaustiva de los datos. Adicionalmente, este procedimiento puede ser criticado por no representar situaciones reales, si bien las estructuras utilizadas pueden llegar a ser tan complejas como las encontradas habitualmente en la realidad (Hakstian, Rogers y Cattell, 1982).

Nosotros hemos optado por el segundo método, ya que permite la determinación previa exacta de los parámetros a utilizar. Los algoritmos y procedimiento utilizados se discuten más abajo.

De la revisión teórica de las reglas más utilizadas, llevada a cabo en el punto 3, hemos podido observar que la mayoría de ellas varían en comportamiento, dependiendo de las siguientes variables: el tamaño relativo de la muestra de sujetos respecto al número de factores y respecto al número de variables, el número relativo de variables respecto al número de factores, el tamaño de la muestra, el número de variables, la magnitud de la saturación de las variables en los factores, la comunalidad de las variables la complejidad de la estructura y la existencia de variables especiales (variables complejas y variables únicas, en la terminología de Zwick y Velicer, 1986).

Nosotros nos proponemos manipular algunas de estas variables y generar muestras aleatorias bajo esas restricciones. Las condiciones que pueden afectar el comportamiento de cada una de las reglas de decisión se han considerado factores independientes de un diseño de tipo experimental, para poder llevar a cabo un análisis de los resultados obtenidos mediante análisis de varianza. Estos factores experimentales independientes serán denominados, de ahora en adelante, variables independientes para evitar confusiones.

La primera variable independiente es el *número de factores* ( $r$ ) de la estructura factorial. Aunque inicialmente el modelo de factor común fue desarrollado para el caso de un sólo factor general, su uso más frecuente ha sido para detectar más de un factor. Sin embargo el número de factores deseados depende siempre de la teoría en estudio y no de limitaciones teóricas del modelo de factor común. Dada la diversidad de situaciones en las que se ha aplicado esta

técnica, decidimos tomar tres posibles valores representativos del trabajo habitual en Psicología. Los valores utilizados corresponden a las situaciones de un número bajo de factores (2 factores), un número medio (6 factores), y un número alto (12 factores). Por supuesto que estos valores no cubren todo el espectro de posibilidades utilizadas normalmente en psicología, pero si nos parecieron suficientemente representativos. Así, por ejemplo, en Karsten, Grote y Ruiz (1991) el análisis de los datos de un cuestionario de 72 items dió lugar a 19 factores tras la utilización de la regla K1, si bien sólo se retuvieron 10 de ellos interpretables teóricamente, lo que ya pareció un número suficientemente elevado.

La segunda variable manipulada fue la *proporción de factores a variables* ( $r/n$ ). Como se ha visto, la mayoría de los modelos factoriales tienen un comportamiento adecuado a partir de una proporción de  $r/n=.3$  o menor. Lo mismo rige para las reglas de determinación del número de factores. Nosotros decidimos tomar los valores  $1/3$ ,  $1/6$  y  $1/9$ , lo que dió lugar a condiciones desde las 6 variables hasta las 108 variables.

La tercera variable independiente es la *proporción de variables a sujetos* ( $n/N$ ). Los analistas recomiendan una proporción mínima de 1:6 para un adecuado comportamiento de los estimadores, y muestras cercanas a los 150 sujetos. Nosotros decidimos utilizar las proporciones  $1/2$  (mala),  $1/6$  (adecuada) y  $1/12$  (buena). Esto dió lugar a muestras con una composición desde 12 sujetos hasta 1296 sujetos. En la tabla 5 se recogen los tamaños correspondientes a cada combinación de las dos variables independientes anteriores.

r		2			6			12		
		3	6	9	3	6	9	3	6	9
N	2	12	24	36	36	72	108	72	144	216
	6	36	72	108	108	216	216	216	432	648
	12	72	144	216	216	432	432	432	864	1296

**Tabla 5:** Tamaños de muestra por combinación de variables manipuladas.

Como puede observarse en la tabla, hay situaciones en las que el número de sujetos es claramente inferior a la cantidad mínima aconsejable para la utilización de esta técnica de análisis. Las razones para incluirlas en el diseño fueron las siguientes:

Las extracciones factoriales se llevan a cabo sobre la matriz de correlaciones, por lo que el número de sujetos es necesario sólo para el cálculo de los estadísticos de bondad de ajuste de GLS y ML. Por tanto, las extracciones pueden realizarse en lo que respecta a la ejecución de los algoritmos. El reducido número de sujetos influirá sobre la estimación de las correlaciones sobreestimando su valor. Adicionalmente afectará la estimación de las correlaciones parcial y múltiple, llevando a situaciones en las que, siendo la estructura subyacente tan clara como en otras condiciones experimentales, las estimaciones son especialmente vulnerables. Con ello esperamos poder detectar el comportamiento de las reglas en situaciones límite, y tal vez así, poder apreciar tendencias que de otro modo permanecerían encubiertas.

Puesto que los estadísticos de ajuste de Máxima Verosimilitud (ML) y Mínimos Cuadrados Generalizados (GLS) dependen del tamaño de la muestra, podremos observar su

evolución cuando el supuesto de multinormalidad está asegurado por el procedimiento de generación de los datos (Jöreskog, 1973; Saris, Satorra y Sörbom, 1987, Satorra, 1987; Satorra y Saris, 1985).

La comunalidad de las variables se controló, pero no se varió para las distintas condiciones. En todas las muestras la comunalidad teórica fue de 0.6. Este valor pudo ser establecido mediante la normalización de Kaiser de las filas de la matriz de estructura teórica, por lo que es un parámetro, aunque en cada muestra su estimación podrá tomar un valor distinto. La elección de este valor obedece a que es una cantidad suficientemente elevada como para presuponer la utilización de una técnica de sumarización de información como esta, pero no tan alto como para hacer pensar en muestras ideales, sino próximas a las de trabajo habitual en psicología.

La estructura fue establecida en todas las condiciones como simple, de manera que una variable sólo puede tener una saturación alta en un único factor común, mientras que en los restantes satura de manera insignificante. Puesto que queremos establecer una comunalidad fija para cada variable, las matrices de estructura se generaron de manera que, la saturación inicial de una variable en el factor significativo de referencia es de 0.8, el resto de las saturaciones en los demás factores son iguales a 0.1. Se calcula la longitud de cada vector fila y se normaliza, posteriormente se le asigna una longitud de 0.6, lo que disminuye proporcionalmente las saturaciones. Esto implica que, en la situación de mayor número de variables (108), la saturación mayor de una variable en un factor es de 0.474, y las menores toman el valor de 0.059.

#### 4.3. REGLAS Y HEURÍSTICOS.

Se han utilizado diversas reglas todas ellas pensando en un número mínimo de extracciones. Por supuesto que tanto la eliminación de variables, como el ajuste iterativo y "manual" de los distintos criterios podrían llevar a distintos resultados, algunos de ellos incluso más consistentes con la teoría. Pero aquí tratamos de comprobar el comportamiento de heurísticos, no de reglas teóricas.

Regla	Matriz	Estimación
SCREE	$R$	gráfica
PC	$R$	autodescomposición
PAF	$R - \hat{U}^2$	iterativa
ULS	$R - U^2$	Newton-Raphson
INA	$S^{-1}RS^{-1}$	autodescomposición
ALPHA	$H^{-1}(R - U^2)H^{-1}$	iterativa
GLS	$(S - R)S^{-1}$	Newton-Raphson
ML	$UR^{-1}U$	Newton-Raphson

Tabla 6

Las reglas propuestas pueden agruparse respecto a dos criterios, el tipo de extracción y la subordinación a la regla K1.

Respecto al tipo de extracción, las reglas hacen referencia a las matrices sobre las que se lleva a cabo la autodescomposición, así como al procedimiento de estimación (ver punto 3). Las principales diferencias se recogen en la tabla 2.

El segundo criterio de clasificación agrupa a las reglas por subgrupos, según estén supeditadas o no a la decisión impuesta por K1. De estos subgrupos de reglas, el primer elemento tomará siempre el número de factores definidos por la regla K1. Corresponden a los valores de las



diferentes extracciones de una ejecución normal del programa. Los otros elementos vienen definidos más abajo. Las reglas GLS1 y ML1 fueron utilizadas para poder recoger aquellas extracciones en las que la extracción abortaba, ya que de las pruebas preliminares conocíamos la tendencia de estas extracciones a no cumplir el criterio de convergencia.

Las reglas utilizadas y la información recogida fueron:

1. SCREE. Se decide el número de factores  $r$  mediante la combinación de las siguientes condiciones.

\* Buscar el punto de ruptura en la gráfica de autovalores consecutivos entre la pendiente de los mayores autovalores y la línea base de los autovalores residuales.

\* Que cualquier meseta intermedia esté constituida por más de dos autovalores.

\* Que las mesetas intermedias próximas a los residuos estén por encima del punto de valor 1 de las ordenadas.

\* Que exista un distanciamiento "evidente" entre las pendiente de mayores autovalores y las mesetas de estabilización de la pendiente. Es decir, que la monotonía esté rota de manera patente.

Se anota el número de autovalores  $r$  decididos por esta regla, y el porcentaje de varianza explicada por ellos.

Esta prueba siempre lleva a cabo a partir de la matriz de correlaciones, con unos en la diagonal, independientemente de la extracción pedida. Por ello el porcentaje de varianza explicada puede ser leído directamente de los estadísticos finales de la extracción de Componentes Principales.

Esta prueba tiene el inconveniente de no ofrecer resolución gráfica, sino una resolución con la separación de líneas estándar de la salida. Ello implica que la separación de los puntos del eje de ordenadas es meramente orientativa. Adicionalmente, la anchura del gráfico determinada para la salida, normalmente 80 o 132 columnas, afecta a la pendiente de las gráficas, así como el número de autovalores contenidos en ellas, siendo más pendiente cuanto menor sea el número de puntos en el eje de abscisas y cuanto menor sea la anchura del papel o pantalla (80 columnas es el mínimo). Aunque nosotros hemos tenido que elegir la anchura de 132 columnas debido a la generación excesiva de información de salida en los listados, aconsejamos la utilización de 80 columnas para una mayor resolución, esto puede variar la decisión tomada con esta regla.

2. PC. Se toman de la extracción por Componentes Principales aquellos autovalores mayores que la unidad. Es la regla por defecto del SPSS para la determinación de  $r$ . En todas las demás reglas, menos en 5, se mantiene esta regla como vigente a menos que la extracción aborte por algún motivo. Se anota el valor *Cumulative Percentage* (CP), correspondiente al número  $r$  de autovalores.

3. PAF1. Se toman el  $r$  y el  $cp$  decididos por la extracción PC (opción por defecto) calculados por la extracción de Ejes Principales (PAF). Si este valor coincide con el número de autovalores mayores que 1 de esta estimación final,  $PAF1=PAF2=PAF3$ .

4. PAF2. Se toma el  $r$  y el  $cp$  sólo de los autovalores mayores que la unidad bajo la extracción de Ejes Principales con el  $r$  decidido por K1.

5. PAF3. Se reanaliza la muestra para el valor de  $r$  decidido por PAF2 y se anota el nuevo valor de  $cp$ . Estos valores deben corresponder a los más próximos al límite más

fuerte de los propuestos por Guttman (1953), si bien hay que recordar que la estimación de la comunalidad es iterativa y que está condicionada inicialmente por el número de factores determinados para la extracción.

6. **ULS1.** Se toma nota de  $r$  y  $cp$  decididos por  $K1$  en la extracción de Mínimos Cuadrados (Unweighted Least Squares). Si todos los autovalores utilizados son mayores que la unidad  $ULS1=ULS2$ .

7. **ULS2.** Se toma el  $r$  sólo de los autovalores mayores que la unidad y el  $cp$  de los estadísticos finales decididos por  $K1$ .

8. **IMA1.** Se toma nota de  $r$  y  $cp$  decididos por  $K1$  con la extracción de Análisis Imagen (image analysis). Si todas las sumas de cuadrados correspondientes a los factores de la estructura utilizados son mayores que la unidad  $IMA1=IMA2$ .

9. **IMA2.** Se toma el  $r$  correspondiente solamente a las sumas de cuadrados mayores que la unidad de cada uno de los factores, y el  $cp$  de la extracción decidida por  $K1$ . Como en los estadísticos finales no aparecen los autovalores sino las sumas de cuadrados de las columnas de la matriz de estructura, puede suceder que estos valores no estén ordenados de forma decreciente, por lo que deberá revisarse la tabla completa de estadísticos finales.

10. **ALPHA1.** Se toma nota de  $r$  y  $cp$  decididos por  $K1$  bajo la extracción de Análisis Alfa (Alpha Analysis). Si todas las sumas de cuadrados de la tabla de estadísticos finales son mayores que la unidad  $ALPHA1=ALPHA2$ .

11. **ALPHA2.** Se toma el  $r$  de las sumas de cuadrados mayores que la unidad y el  $cp$  decididos por  $K1$ , con la extracción de Análisis Alfa. Las sumas de cuadrados pueden presentarse con una ordenación diferente a la de magnitud

decreciente, por lo que deben revisarse todos los factores presentes en la tabla de estadísticos finales. Es relativamente frecuente, en algunas condiciones, que una suma de cuadrados mayor que la unidad suceda a otra menor que esta cantidad.

12. GLS1. Bajo la extracción de Mínimos Cuadrados Generalizados, o ponderados, (Generalized Least Squares) y la regla K1, se toma nota de  $r$  y  $cp$ . Es frecuente en algunas condiciones que el nivel crítico informado sea 1.0000 dado que el valor del  $\chi^2$  es muy pequeño. El nivel de significación utilizado es .005.

13. GLS2. El número decidido por GLS1 cuando la extracción no es la de K1. Si la extracción es infructuosa se disminuye el número de factores hasta que pueda llevarse a cabo la extracción. Si el estadístico es significativo se aumenta el número de factores hasta que no lo sea, es decir, hasta que los autovalores que quedan por extraer no puedan considerarse significativamente distintos (puedan ser considerados iguales). Cuando la extracción falla en cualquier caso, se intenta reducir el criterio de convergencia aumentando el valor hasta 0.1. Esto implica que las comunales no serán tan bien estimadas, pero parece que el criterio de  $cp$  no varía excesivamente.

14. GLS3. El número de factores  $r$  y  $cp$  correspondientes a autovalores mayores que la unidad bajo la extracción fructuosa de Mínimos Cuadrados Generalizados y la regla K1 vigente.

15. ML1. Bajo la extracción de Máxima Verosimilitud (Maximum Likelihood) y la regla K1, se toma nota de  $r$  y  $cp$ . Si la extracción es infructuosa se disminuye el número de factores hasta que pueda llevarse a cabo la extracción. Si el estadístico es significativo se aumenta el número de factores hasta que no lo sea, es decir, hasta que los

autovalores que quedan por extraer no puedan considerarse significativamente distintos (sean iguales). Si el estadístico es igual a 1.0000 reducir el número de factores. El alpha es .001

16. ML2. El número decidido por ML1 cuando la extracción no es la de K1.

17. ML3. El número de factores y  $c_p$  correspondientes a autovalores mayores que la unidad bajo la extracción fructuosa de Máxima Verosimilitud.

La combinación de estas variables independientes puede ser analizado en un diseño de cuatro factores. Los tres primeros factores, con tres niveles cada uno, corresponden al número de factores, la proporción de variables y la proporción de sujetos, dando lugar a un diseño completo de  $3 \times 3 \times 3$ , es decir 27 condiciones. El cuarto factor es de medidas repetidas y corresponde a las 15 reglas heurísticas utilizadas. A cada una de las 27 condiciones son asignadas cinco muestras generadas de manera independiente. Como ya se ha comentado, GLS1 y ML1 fueron excluidas del análisis. Su interés para nosotros sólo era el de poder recoger las extracciones abortadas. Sus valores son iguales a los de GLS2 y ML2, respectivamente, cuando la extracción es fructífera, en caso contrario, GLS1 y ML1 el valor de estas reglas se deja en blanco (user missing values).

#### 4.3. VARIABLES DEPENDIENTES.

Puesto que nuestro interés se centra en la capacidad para la determinación del número exacto de factores, y puesto que cada método de extracción utiliza distintos métodos de estimación y ajuste de las communalidades, se utilizaron dos variables dependientes distintas como medida

de la bondad de las extracciones.

1. La diferencia entre el número de factores extraído y el número de factores teórico de la estructura, todo ello dividido por el número de factores teóricos. Este indicador, planteado así, permite la comparación directa entre las condiciones de distinto número de factores, y puede ser interpretado como la proporción de factores sobre o infraestimado por cada regla.

2. La diferencia entre la comunalidad media reproducida por la estructura para todas las variables contenidas en ella y la comunalidad media de la estructura teórica. Este indicador se obtiene recogiendo el valor de las salidas del SPSS llamado "cumulative percentage" (CP) que corresponde a la suma de los autovalores de los factores retenidos (excepto en el caso de imagen y alpha) dividido por el número de variables contenidas en la matriz de correlaciones. A cp se le resta el valor teórico de la comunalidad, es decir, 0.6.

Un inconveniente de este indicador es no tener una excesiva precisión (3 dígitos), con lo que pequeñas diferencias entre las diferentes reglas no se reflejan. El cálculo manual de este indicador ofreció mayor precisión, pero no se consideró pertinente su cálculo adicional, debido a los costes que añadía.

El valor de este estadístico coincide con el porcentaje de varianza explicada de la matriz analizada, y puede ser interpretado, también, como la comunalidad media de todas las variables analizadas. Esta última interpretación, es válida para las extracciones de Análisis Imagen y Análisis Alfa.

La precisión de este estadístico es suficiente como para permitir la comparación de reglas que, definiendo el

mismo número de factores, estiman mejor la comunalidad a través de diferentes condiciones. Con ello podemos determinar cuáles de las reglas se comportan de manera mas estable, y cuáles son más sensibles a las combinaciones de tratamientos, a la hora de estimar la comunalidad.

#### 4.4. SIMULACIÓN Y GENERACIÓN DE LOS DATOS.

Para la generación aleatoria de las muestras se desarrolló un programa de BASIC que permitiera las siguientes tareas:

1. Generar la estructura teórica con las condiciones de número de factores, número de variables y estructura deseados.
2. Manipular la comunalidad mediante la mencionada normalización.
3. Generar valores aleatorios de distribuciones normales independientes.
4. Crear las variables observadas que, en último término, serían las muestras a analizar.

Como puede leerse en la memoria, se escribieron varios programas antes de la versión definitiva, y con distintos lenguajes. Las primeras versiones fueron módulos independientes que utilizaban como aleatorizador el generador de números del SPSS y como manipulador de matrices el BASIC suministrado con el DOS 3.2 para los PC's de IBM. Este generador, propuesto por Brent (1974), tiene un buen comportamiento para la generación de distribuciones muestrales normales (Lewis y Orav, 1989).

Como inconvenientes, exigía escribir ficheros de

órdenes independientes con el número de variables y tamaño de las muestras de cada condición correspondientes, para poder ejecutarlos en el SPSS. No ofrecía, por ello, suficiente versatilidad, y necesitaba de la ejecución separada de los programas de BASIC y de SPSS, consumiendo mucho tiempo y espacio. Por otra parte, los requerimientos de espacio de memoria en disco desbordaban la capacidad de nuestras máquinas.

Esto nos llevo a decidir cambiar de equipo y migrar a los sistemas de mayor capacidad de nuestra universidad. La versión definitiva integra todos los módulos en un sólo programa que puede verse en el anexo 4. Este programa está escrito en la versión 2.0 de BASIC/VM para el IBM 3090.

El algoritmo para generar muestras aleatorias de la distribución normal es el propuesto por Lewis y Orav (1989)

$$Z_i = [-2 \log(X_i)]^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi X_i) \quad (212)$$

donde  $Z_i$  es una variable aleatoria distribuida aproximadamente de manera normal  $N(0,1)$ , y  $X_i$  son valores del generador pseudoaleatorio del BASIC, conseguidos por la función RND (líneas 550-670). El aleatorizador es reinicializado para cada variable (líneas 570 y 630), y se generan tantas variables como factores comunes y únicos son necesarios para la condición experimental correspondiente. Las variables así creadas serán directamente utilizadas por el algoritmo que genera las variables observadas, ya que al utilizar el SPSS la matriz de correlaciones como punto de partida para las extracciones, la escala original de los factores no es relevante.

El generador de estructuras simplemente calcula la proporción de variables que saturan en cada factor y les asigna el valor 0.8 o 0.1 según corresponda (líneas 240 y 247-340).



La normalización de Kaiser se efectúa en la líneas 350 a 470 utilizando la fórmula

$$\alpha'_{ij} = \frac{\alpha_{ij} h_i}{\left( \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (213)$$

donde las  $\alpha_{ij}$  son las saturaciones de la variable  $i$  en el factor  $j$  de la matriz  $F$ ,  $h_i$  es la raíz cuadrada de la nueva comunalidad, y el denominador es la longitud del vector fila  $i$  de la matriz  $F$ , es decir, la antigua comunalidad de la estructura original. La nueva matriz  $F$  con las  $\alpha'_{ij}$  transformadas es la utilizada para el siguiente paso. La matriz de estructura de los factores únicos, la matriz  $D$ , es generada a partir de la comunalidad teórica en las líneas 480-490.

Las variables normales originadas por el aleatorizador se utilizan finalmente para generar las variables observadas mediante la fórmula básica del modelo de factor común (líneas 680-720)

$$Z = CF' + UD \quad (214)$$

donde la matriz  $F$  de dimensiones  $n \times r$  contiene la estructura factorial normalizada, la matriz diagonal  $D$  de dimensiones  $n \times n$  contiene la raíz cuadrada de las unicidades, la matriz  $C$  de dimensiones  $N \times r$  contiene las puntuaciones de  $N$  sujetos en  $r$  factores comunes normales, y la matriz  $U$  de dimensiones  $N \times n$  contiene las puntuaciones de los  $N$  sujetos en las  $n$  variables normales que constituyen los factores específicos, y la matriz  $Z$  de dimensiones  $N \times n$  contiene las puntuaciones observadas de la muestra  $N$  sujetos en  $n$  variables provenientes de una población con estructura factorial conocida. Todos los cálculos se realizan en doble precisión.

La muestra contenida en matriz Z, con la estructura de procedencia determinada, se graba en el disco (líneas 730-830), y se repite el proceso cinco veces (línea 540) para generar 5 muestras independientes por condición.

En cada condición es necesario variar los "parámetros" que la caracterizan editando el programa y modificando las líneas 200-246 según convenga. Posteriormente se compila, y se ejecuta con el módulo BASICRUN.

Una vez generadas las cinco muestras, éstas son analizadas con el SPSSX para comprobar el comportamiento de las reglas. La ejecución de las órdenes se realiza en modo "batch" para poder ser ejecutados en máquinas paralelas con colas de trabajo, y para no acumular tiempos de espera durante la lectura de las pantallas. Uno de los ficheros de órdenes ejecutados con el SPSS puede ser encontrado en el anexo 4.

Para la lectura de los listados finales del SPSS nos valimos de la utilidad BROWSE del sistema, personalizada en el "profile" correspondiente para la búsqueda de palabras clave.

Las comunicaciones con el 3090 y 4060 no fue por terminal ASCII directo, sino mediante transmisión por un modem VOXDATA de Telecom de 9.600 baudios, para lo que fue necesario utilizar el programa de transmisión Procom+, personalizado en las funciones para la transmisión de comandos de consola.

La comprobación de la normalidad de las variables y su independencia se encuentran en los anexos 1 y 2. En el anexo 1 se encuentra la distribución de las variables generadas por el procedimiento de Brent (1974) en una muestra de 1296 sujetos. En el anexo 2, puede encontrarse una muestra de 10.000 puntuaciones generadas por el algoritmo recogido en

Lewis y Orav (1989).

En ninguna de las muestras se verificó el supuesto de multinormalidad de las variables observadas ya que el proceso de generación así lo aseguraba en las poblaciones de partidas.

#### 4.5. RESULTADOS ESPERADOS.

1. Nuestra principal hipótesis de partida ya ha sido expresada a lo largo de este texto en repetidas ocasiones. Pensamos que la regla K1, que determina el número de factores a retener a partir del número de autovalores de la matriz de correlaciones muestral, mayores que la unidad, *sobreestima el número de factores*. Esperamos que su comportamiento vaya en la línea determinada por Guttman (1953), y a medida que las condiciones sean más próximas a las ideales de un modelo de factor común, su valor converja hacia la estimación perfecta. Sin embargo, las estimaciones de la comunalidad generadas por esta regla, esperamos que estén sesgadas hacia la sobreestimación, ya que la matriz analizada no está reducida en la diagonal.

2. En aquellas condiciones en las que la regla K1 se comporte adecuadamente, las reglas alternativas cuyas decisiones están supeditadas al comportamiento de la primera, esperamos que ofrezcan estimaciones más ajustadas de la comunalidad. Entre ellas, Ejes Principales (PAF1) y Mínimos Cuadrados (ULS1) parecen las alternativas más plausibles, dada la matriz que se pretende ajustar, ya que ésta es la más próxima al modelo de factor común.

3. Dada la tendencia, informada por autores como Gorusch (1974), a retener una proporción de factores por variables entre  $1/3$  y  $1/5$ , la regla K1 deberá sobreestimar el número de factores en las condiciones de menor proporción

de variables, especialmente en las de 9 variables por factor.

4. Esperamos que las estimaciones del número de factores a partir del Análisis Imagen (IMA2) y Alfa (ALP2) estén sesgadas hacia la infraestimación, ya que las tablas finales se refieren a las sumas de cuadrados de las columnas de las matrices de estructura y no a los autovalores correspondientes. Los mayores sesgos deberán corresponder a IMA2, ya que la matriz sobre la que se lleva a cabo la extracción está diseñada para eliminar explícitamente las partes de las correlaciones de las variables debidas a las dimensiones anti-imagen de las variables. Es decir, en el caso del Análisis Imagen, la correlación entre dos variables es corregida al convertir la matriz  $G$  en gramiana. Esto lleva a una reducción de las correlaciones, que refleje tan solo aquella parte de la correlación debida a las dimensiones imagen, extensivamente, la común a todas las demás variables menos ellas mismas. Este efecto deberá dejarse notar especialmente en la estimación de la comunalidad.

5. Entre los límites de la sobreestimación de la comunalidad de  $K1$  y la infraestimación de IMA2 deberán encontrarse todas las demás. La excepción puede ser el Scree, ya que decide sobre el espectro total de autovalores, y puede dar como resultado mayor número de autovalores que la propia  $K1$ .

6. La corrección del test de Bartlett, ofrecida por los estadísticos de ajuste de Máxima Verosimilitud y Mínimos Cuadrados Generalizados, esperamos que dependan del tamaño de la muestra, ya que este valor entra a formar parte integrante de los propios estadísticos.

7. En las extracciones de Máxima Verosimilitud y Mínimos Cuadrados Generalizados, las reglas ML2 y GLS2,

respectivas, puede que arrojen valores críticos próximos a la unidad. Dado que es esperable que la regla K1 sobreestime el número de factores, los estadísticos asociados a estas extracciones difícilmente alcanzarán valores significativos, reflejando el hecho de que los autovalores restantes pueden ser considerados estadísticamente iguales.

8. La extracción de Mínimos Cuadrados generalizados no debe diferir mucho en comportamiento de Mínimos Cuadrados sin Ponderar (ULS), ya que todas las variables tienen igual variabilidad teórica, y la ponderación llevada a cabo afectará por igual a todas las variables.

## 5. RESULTADOS Y DISCUSION.

Para contrastar nuestras hipótesis de trabajo, se dispusieron los datos para poder llevar a cabo un análisis de varianza completo de efectos fijos. con las variables especificadas anteriormente.

Las tres variables independientes fueron:

1. El número de factores de la estructura, con tres niveles, de valor 2, 6 y 12 factores. Factor de efectos fijos.
2. La proporción de variables por número de factores, con tres niveles  $1/3$ ,  $1/6$  y  $1/9$ . Las muestras, por tanto, oscilaban entre 6 y 108 variables. Factor de efectos fijos.
3. La proporción de sujetos por número de variables, con tres niveles,  $1/2$ ,  $1/6$  y  $1/12$ . Esto lleva a una proporción mínima de número de sujetos por factor de  $1/6$ , y un máximo de 108 sujetos por factor. En consecuencia, las muestras oscilaban entre 12 y 1296 sujetos. Factor de efectos fijos.
4. El método de estimación de la comunalidad utilizado, es decir, las distintas reglas probadas, con 15 niveles de medidas repetidas para cada combinación de las condiciones anteriores. Las extracciones descartadas de las consideradas en el apartado 4 fueron GLS1 y ML1, debido a poder considerar equiparables los valores obtenidos con ellos a los obtenidos con GLS2 y ML2. Esta variable fue considerada como un factor intragrupo.

Las variables dependientes utilizadas fueron, la *diferencia entre la proporción de varianza explicada y la comunalidad teórica y la proporción de factores sobre o infraestimados*, calculada como la diferencia entre el número de factores extraídos menos el número de factores teóricos de la estructura que había generado la muestra, todo ello dividido por el número de factores teóricos.

Se llevaron a cabo dos análisis de varianza independientes, uno sobre cada una de las variables dependientes.

#### 5.0. COMPROBACION DE SUPUESTOS.

La comprobación de los supuestos necesarios para poder llevar a cabo este tipo de análisis, lleva a consideraciones distintas en cada variable dependiente.

La Proporción de Varianza Explicada puede ser considerada como la comunalidad media de cada una de las variables, y su diferencia respecto a la comunalidad teórica impuesta a cada variable puede ser considerada como el grado de sesgo en la estimación de la comunalidad poblacional. Por tratarse de una media muestral de las comunalidades de las variables contenidas en la estructura menos una constante (la comunalidad media poblacional) la distribución de esta variable puede considerarse, a nivel teórico, cuando menos simétrica, y presumiblemente, deberá tender a una distribución normal para tamaños suficientemente grandes.

Sin embargo, debemos esperar una cierta asimetría en la distribución de las comunalidades medias estimadas. De un lado, en las combinaciones de condiciones más favorables teóricamente, las estimaciones tenderán a aglutinarse en torno al valor diferencia nula. De otro, la tendencia general es la sobreestimación de la comunalidad, más que la infraestimación, ya que la mayoría de los valores iniciales de estimación de la

unicidad se basan en el cuadrado de la correlación múltiple. Además, aquellas reglas que se basan en el criterio  $K_1$ , sabemos por la literatura que tienden a la sobreestimación, ya que retienen mayor número de factores del debido.

Los diagramas de cajas (Box and whisker plots) mostraron una distribución aproximadamente simétrica para cada combinación de condiciones. Los diagramas de probabilidad normal (normal plots) indicaban una clara tendencia a la normalidad. Esta tónica general variaba según la regla de estimación.

Respecto a la homocedasticidad, al tratarse de un diseño completo con igual número de observaciones por combinación de tratamientos el análisis de varianza resulta relativamente robusto a la violación de este supuesto (San Martín y Pardo, 1989; Winer, 1971). En cualquier caso, debemos ser conservadores en la interpretación de los niveles críticos. Como la prueba de esfericidad de Mauchly lo aconsejaba, se utilizó el ajuste de los grados de libertad mediante la  $\epsilon$  de Greenhouse y Geisser (1958). De nuevo debemos recordar que, cuando las combinaciones de condiciones son más favorables para el análisis factorial, la variabilidad de las estimaciones es previsible que disminuya. Como sabemos, la mayoría de los modelos deben converger, teóricamente, cuando la proporción de variables por factor tiende al límite y el número de sujetos es suficientemente grande.

La otra variable dependiente, Proporción de Factores sobre o infraestimados, ofrece una problemática diferente. Aunque, como discutiremos, su naturaleza se presta más a un análisis descriptivo, decidimos utilizarla, no sin cierta cautela, en el análisis de varianza subsiguiente.

Puesto que la estimación de la comunalidad depende del número de factores de la estructura factorial, la información aportada por el grado de sobre o infraestimación del número de factores nos pareció relevante para el análisis de los resultados. Sin embargo, no todas las condiciones corresponden



a un igual número de factores teóricos por lo que decidimos expresarlo en forma de proporción, para ganar comparabilidad entre condiciones.

Estas proporciones pueden tomar valores tanto positivos como negativos, correspondiendo a la sobreestimación y a la infraestimación, respectivamente, por lo que una transformación resulta complicada. Adicionalmente, el número de casillas con valores nulos para todas las observaciones es relativamente elevado, pudiendo peligrar la consistencia de los resultados de los análisis de varianza.

#### 5.1. ANOVA DE MEDIDAS REPETIDAS

Para explorar los resultados, las condiciones experimentales se dispusieron en dos diseños de  $3 \times 3 \times 3 \times 15$ , con el último factor anidado a la combinación de factores anteriores como medidas repetidas. Por cada combinación de niveles existen cinco medidas independientes que constituyen cada una de las observaciones del diseño. Se realizaron dos análisis de varianza independientes para cada una de las variables dependientes.

Los datos obtenidos fueron analizados con el procedimiento MANOVA del SPSS y con el CRISP. Los valores críticos de la distribución F de Snedecor, con los grados de libertad corregidos por la  $\epsilon$  de Greenhouse y Geisser, fueron calculados con el programa MICROSTAT. Los resultados obtenidos aparecen resumidos en las tablas 7 y 8

A la vista de los resultados, respecto a la Estimación de la Comunalidad, parece que sólo existen diferencias significativas en el factor proporción de sujetos (M), y el factor de medidas repetidas, que representa las distintas estimaciones de la comunalidad. Las interacciones significativas corresponden a todas aquellas que implican el factor de medidas repetidas. La cuádruple interacción sólo alcanza un nivel de

significación del 0.011, tras ser corregida. La constante del modelo lineal fue significativa ( $p < 0.000$ ) indicando que la media general tendía a un sesgo en la estimación.

Factor de Variabilidad	gl	SC	M.C.	F	F	P(CON)
Entre Sujetos (Total)	134	20.9073				
Nóm. Factores (R)	2	1.3282	0.6641	10.031	0.0001	
Prop. Variables (N)	2	7.6524	3.8262	57.794	0.0000	
Prop. Sujetos (M)	2	0.7380	0.3690	5.574	0.0049	
Factores × Variables	4	0.3757	0.0939	1.419	0.2310	
Factores × Sujetos	4	0.5610	0.1402	2.118	0.0828	
Variables × Sujetos	4	2.1190	0.5298	8.002	0.0000	
Factores × Variables × Sujetos	8	0.9830	0.1229	1.856	0.0740	
Error Intersujetos	106	7.1500	0.0662			
Intrasujetos (Total)	1890	26.0527				
Proc. de Extracción	14	4.8206	0.3443	52.338	0.0000	0.0000
Factores × Extracción	28	0.4573	0.0163	2.482	0.0000	0.0159
Variables × Extracción	28	3.8942	0.1391	21.140	0.0000	0.0000
Sujetos × Extracción	28	1.3678	0.0489	7.426	0.0000	0.0000
Factores × Variables × Extracción	56	1.5225	0.0272	4.132	0.0000	0.0000
Factores × Sujetos × Extracción	56	1.4020	0.0250	3.805	0.0000	0.0000
Variables × Sujetos × Extracción	56	1.7088	0.0305	4.638	0.0000	0.0000
Factores × Variables × Sujetos × Extracción	112	0.9325	0.0083	1.266	0.0361	0.1667
Error Intra	1512	0.9472	0.0066			

**Tabla 7:** Resultados del ANCOVA comunalidad.

En cuanto a la variable Proporción de Factores Estimados, el análisis ofrece indicios de mayores diferencias que en la anterior variable. Todos los factores (R, N, M y T) ofrecen diferencias. Las interacciones dobles de variables por sujetos, factores por tipo de estimación, variables por tipo de estimación, sujetos por tipo de estimación son significativas. Las interacciones triples que implican el procedimiento de estimación eran todas significativas, pero la cuádruple

interacción no lo fue. De nuevo la constante del modelo lineal indica que existe una tendencia global al sesgo ( $p < 0.05$ ).

Factor de Variabilidad	gl	SC	M.C.	F	F	F(CON)
Entre Sujetos (Total)	134	2.218				
Núm. Factores (R)	2	0.014	0.0072	0.556	0.5779	
Prop. Variables (N)	2	0.013	0.0067	0.517	0.6007	
Prop. Sujetos (M)	2	0.469	0.2342	18.202	0.0000	
Factores × Variables	4	0.046	0.0116	0.899	0.4714	
Factores × Sujetos	4	0.098	0.0246	1.908	0.1135	
Variables × Sujetos	4	0.052	0.0130	1.011	0.4024	
Factores × Variables × Sujetos	8	0.135	0.0169	1.314	0.2425	
Error Intersujetos	106	1.390	0.0129			
Intrasujetos (Total)	1890	7.078				
Proc. de Extracción	14	3.599	0.2571	383.731	0.0000	0.0000
Factores × Extracción	28	0.073	0.0026	3.876	0.0000	0.0002
Variables × Extracción	28	1.391	0.0497	74.148	0.0000	0.0000
Sujetos × Extracción	28	0.358	0.0128	19.101	0.0000	0.0000
Factores × Variables × Extracción	56	0.134	0.0024	3.582	0.0000	0.0000
Factores × Sujetos × Extracción	56	0.132	0.0024	3.520	0.0000	0.0000
Variables × Sujetos × Extracción	56	0.246	0.0044	6.561	0.0000	0.0000
Factores × Variables × Sujetos × Extracción	112	0.132	0.0012	1.747	0.0000	0.092
Error Intra	1512	1.013	0.0007			

Tabla 8: Resultados del ANOVA para la estimación del número de factores.

La interpretación de los resultados la haremos primero por apartados, para poder estudiar así las medias que han resultado significativamente distintas en cada combinación de condiciones. Debemos recordar primero que, en este diseño, los niveles de las variables independientes han sido elegidos arbitrariamente, por lo que no es aconsejable extrapolar los resultados aquí discutidos a otros niveles diferentes. Las medias de cada condición y combinaciones de condiciones pueden encontrarse en el anexo X.

Puesto que la cuádruple interacción es significativa para la variable dependiente Estimación de la Comunalidad, primero analizaremos esta interacción. Con ello podemos apreciar mejor tendencias que se irradian a condiciones de mayor orden, cuando las medias se aglomeran. También podemos, de esta forma, explicar adecuadamente las condiciones experimentales más simples en las que alguno, o varios, de los Procedimientos de Estimación han resultado infructuosos, por no ser capaces de llegar a una solución.

En la tabla 9 se recogen los diversos fallos, y número de ellos, en las extracciones correspondientes y para las combinaciones de número de factores ( $r$ ), número de variables por factor ( $n$ ) y número de sujetos por variable ( $N$ ) correspondientes.

$r$	$n$	$N$	PAF	GLS	ML
2	3	2	4 Heywood	1 fallo	
		6	1 Heywood		
	6	2			
	9	2		1 fallo	
6	3	2	2 Heywood	3 fallos	1 fallo
	6	2		1 fallo	
	9	2		3 fallos	
12	3	2		1 fallo	1 fallo
	6	2		3 fallos	
	9	2		4 fallos	

**Tabla 9:** Número y naturaleza de los fallos de extracción por combinaciones de tratamientos

Estos errores de estimación obligaron a reducir el número de factores de manera arbitraria, con lo que ambas variables dependientes se vieron afectadas. Las muestras que produjeron estos fallos no fueron sustituidas por otras, ya que nuestra

intención fue siempre, en la medida de lo posible, equiparar las ejecuciones del programa a la situación real en la que se puede encontrar un experimentador, en un momento dado y con unos datos ya recogidos.

Como podemos observar en la tabla 9, aparecen dos comportamientos diferentes para las dos extracciones que más fallos sufren. Tanto PAF como GLS se comportan especialmente mal cuando el número de sujetos es pequeño (2 por variable), pero, mientras que PAF es más sensible a las situaciones de menor número de factores, GLS se comporta peor con un mayor de los números de factores. En el caso de Ejes Principales (PAF), la aparición de estimaciones de la comunalidad por encima de la unidad abortó la extracción. En el caso de Mínimos Cuadrados Generalizados (GLS) y Máxima Verosimilitud (ML), el programa no era capaz de encontrar mínimos locales.

En ambos casos, es posible insertar nuevos valores iniciales de estimación de la comunalidad, con lo que la extracción suele mejorar, pero, repetimos, no se quiso alterar la ejecución por defecto.

#### 5.1.1. Procedimiento de Estimación.

Los distintos Procedimientos de Estimación son las 15 medidas repetidas llevadas a cabo sobre cada muestra experimental de estructura conocida, es decir, las reglas propuestas. Este tratamiento es significativo en sus niveles pudiendo pensar que unos procedimientos de estimación difieren significativamente de otros en la Estimación de la Comunalidad y en la Estimación del Número de Factores. Esto era esperable, tanto por las diferencias teóricas de los distintos procedimientos de extracción/estimación, como por la diferencia de los propios procesos de estimación (ver más arriba apartado 4.3).

Respecto a la Estimación del Número de Factores, se pueden

apreciar cuatro grupos de estimadores más o menos diferenciados. A nivel teórico deben aparecer dos grandes grupos de estimadores, aquellos cuyo número de factores viene guiado por la regla K1, y el resto de ellos. Este hecho se refleja en los gráficos como un patrón de dientes de sierra, donde los primeros elementos de cada pareja de estimadores están aproximadamente al mismo nivel de la regla K1 (en los gráficos, el valor PC). El patrón se ve roto por los estimadores que, por un motivo u otro, abortaron durante la extracción normal.

Puesto que en todas las situaciones, y ante cualquier anomalía, el número de factores se determinó de manera sustractiva respecto a la línea base del número de factores definidos por K1, el valor de la extracción por componentes principales es el máximo, excepto para la regla scree (SC).

La prueba de sedimentación (scree test), al contrario que el resto de las reglas, fija el número de factores basándose en la gráfica de todos los autovalores de la matriz correspondiente (la de correlaciones sin reducir), y no en un subconjunto de los  $r$  primeros autovalores significativos (GLS y ML) o interpretables (ALPHA, PAF).

En el extremo de la infraestimación, y diferenciada de todos los demás, se encuentra la regla IMA2, con una tendencia a infraestimar un 14'5% menos de factores. Más próximo a la estimación perfecta se encuentra el grupo de las regla PAF2, PAF3, ULS2 y ALP2. Sobre el punto de estimación perfecta, y sin diferir significativamente de él, se encuentran las reglas PAF1, GLS2, SC, ML2, PC, ULS1, IMA1 y ALP1. Y, a caballo de los dos últimos grupos, se encuentra un subgrupo formado por las reglas ML3 y GL3.

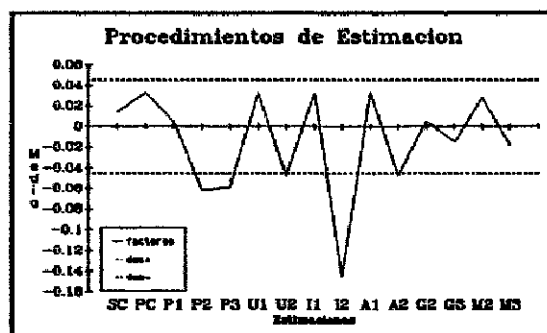


Gráfico 1

El comportamiento de la regla IMA2 era esperable. Los

valores de la tabla final del Análisis Imagen bajo el epígrafe de sumas de cuadrados corresponden, como se dijo, a la suma de los cuadrados de las saturaciones de la matriz de estructura. Ahora bien, como sabemos, la matriz de estructura debe ser reescalada, a partir de los autovectores, proporcionalmente a la cuantía de los autovalores para reflejar las correlaciones entre factores y variables. Por ello, el producto interno de los vectores columna de la matriz  $F$  no se corresponde directamente con los autovalores.

Si quisiéramos determinar el número de autovalores mayores que la unidad de esa tabla, no podemos elegir directamente el número de valores mayores que la unidad, ya que esta cantidad será menor que el de los autovalores mayores que la unidad. Lo más correcto hubiera sido elegir aquellos factores correspondientes a sumas de cuadrados mayores o iguales a la comunalidad media de las variables, para tener una estimación más correcta del número de autovalores adecuado. En nuestro caso esto no estribaría mayor problema, ya que conocemos con exactitud la comunalidad poblacional, pero en un análisis exploratorio esto difícilmente es así. Por ello decidimos verificar el comportamiento de los heurísticos más simples posible, que son las reglas aquí estudiadas (ver también apartado 5.1.5).

En el caso de las extracciones de Ejes Principales, puede que la infraestimación del número de factores haya alcanzado un valor tan bajo debido a las extracciones anormales con casos Heywood. Si observamos en el gráfico 1 la diferencia entre PC y P1, que teóricamente debieran haber sido

iguales, es debida a las extracciones abortadas. Si substraemos esta distancia de la alcanzada por P2 y P3 (correspondientes a PAF2 y PAF3), las diferencias respecto a la estimación perfecta (el valor 0) se hubieran encontrado dentro del margen de

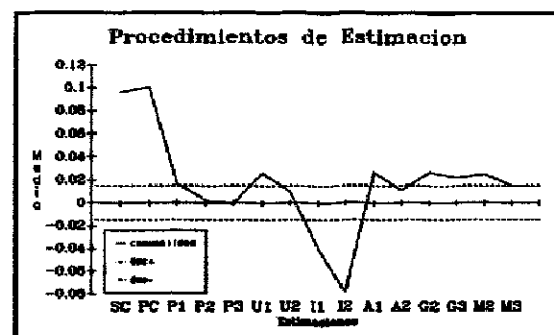


Gráfico 2

variaciones esperables por azar.

Estos dos comportamientos se repetirán en los distintos gráficos, por lo que deberán tenerse presentes para una correcta interpretación de los mismos.

Como podrá observarse, en los gráficos se han incluido una o dos líneas punteadas, paralelas al eje de abscisas, con el nombre de  $dms+$  y  $dms-$ . Estas líneas corresponden a los valores de diferencia mínima significativa a un nivel de significación del 0'05. Así dispuestas, pretenden establecer los límites a partir de los cuales, para dicho nivel de significación, una media puede ser interpretada como significativamente distinta del valor 0. Con ello podemos establecer qué estimaciones se apartan del valor de estimación perfecta, puesto que las variables dependientes están definidas como diferencias respecto al parámetro correspondiente.

A la vista de las comparaciones múltiples de medias y respecto a la comunalidad estimada, podemos concluir que existen cuatro grupos de valores. En el extremo de la infraestimación de la comunalidad se encuentra la regla IMA2 y significativamente más cercana al valor cero la regla IMA1. En el extremo de la sobreestimación, y significativamente mayor que los demás, se encuentra el grupo formado por las reglas K1 (PC) y el scree (SC).

En torno al punto de estimación perfecta se encuentran un gran grupo formado por PAF3, PAF2, ULS2, ALP2, PAF1, ML3, GLS3, ML2, ULS1, ALP1 y GLS2, por orden creciente de valor.

Como era de esperar los procedimientos más próximos al tercero de los límites de Guttman (PAF) son los que mejor se comportan, pero no difieren significativamente de sus compañeros de grupo. Esto es especialmente llamativo en el caso de la estimación ALP2, ya que cabía esperar que los valores de este



proceso de estimación estuvieran sesgados y más próximos al Imagen (ver gráfico 4).

A nivel general, la regla K1 sistemáticamente sobreestima la comunalidad, y de forma diferenciada respecto a las demás reglas (excepto el scree). Esto era de esperar, ya que es la única de las reglas que trabaja sobre la matriz de correlaciones completa, sin reducción de la diagonal. Por ello, la cantidad de variabilidad disponible es mayor que en el resto de estimadores, y la autodescomposición de la matriz lleva a un engrosamiento de los autovalores que, en definitiva, revierte en inflar la estimación de las comunalidades.

De forma global, parece que las reglas asociadas a la extracción de Ejes Principales se comportan bien, aunque la relativamente grande infraestimación del número de factores que presentan es debida, fundamentalmente, al mal comportamiento que demostraron en las condiciones de bajo número de sujetos, donde aparecieron casos Heywood. Dado que las interacciones con los factores del diseño serán las que más iluminen la discusión, preferimos no evaluar aún ninguna de las reglas de manera definitiva.

#### **5.1.2. Interacción entre el número de factores, la proporción de variables, la proporción de sujetos y el procedimiento de estimación.**

La cuádruple interacción es más fácil de interpretar de lo que a simple vista parece. En primer lugar, el nivel crítico para la F corregida de la variable Estimación del Número de Factores, no alcanza el nivel de significación ( $p=0.167$ ), aunque el estadístico no corregido por la  $\epsilon$  tiene un nivel crítico significativo ( $p=0.0361$ ). Según comunica Winer (1971), los estudios de Monte-Carlo llevados a cabo por Collier et al. (1967) demuestran que la corrección de Greenhouse y Geisser es demasiado conservadora, y la prueba clásica del ANOVA se separa menos del

nivel nominal de significación que la mencionada corrección, cuando las desviaciones de la homocedasticidad son moderadas.

Aunque las interacciones no alcancen la significación, puede ser interesante inspeccionar los gráficos de la cuádruple interacción, ya que la acumulación de los efectos es la que luego puede dar lugar a la significación en interacciones de menor orden. Por tanto, lo que se expone a continuación respecto a esta variable dependiente debe interpretarse de manera descriptiva, y no debemos extrapolar inferencias sobre situaciones que no sean la meramente experimental del presente estudio.

De nuevo puede observarse el patrón característico de dientes de sierra, debido a la alternancia, en cada pareja de estimadores, de la regla guiada por el criterio K1 vigente y la guiada por el número de autovalores (o sumas de cuadrados en el caso del análisis alfa y el análisis imagen) mayores que la unidad del análisis de la matriz correspondiente.

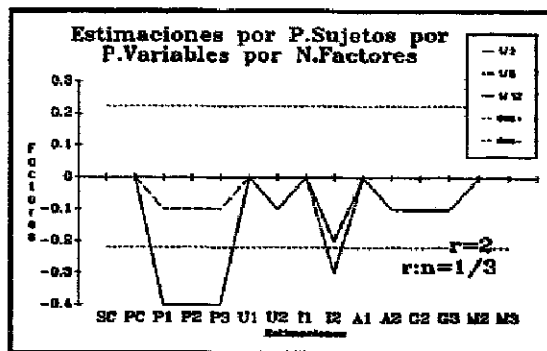


Gráfico 3

Debemos recordar que el número de factores definidos por K1 es el máximo para cualquier combinación de tratamientos, menos para el Scree que, al decidir sobre la gráfica de todos los autovalores de la matriz de correlaciones muestral, permite la aparición de un número mayor de factores que el propio K1.

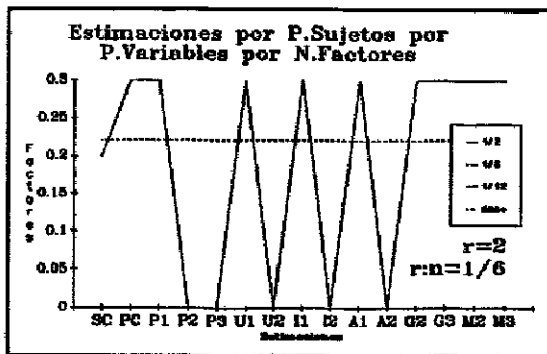


Gráfico 4

El estudio simultáneo de los gráficos 3 a 11 sugiere una evolución de las combinaciones de condiciones bastante simple. En las condiciones donde la proporción de variables es menor (3) para cualquier número de factores, el comportamiento diferencial

de las distintas reglas es más evidente. En estas situaciones (gráficos 3, 6 y 9) la diversidad aumenta con el número de factores, y el comportamiento parece mejorar, a nivel general, con el aumento del número de sujetos. La excepción es la regla IMA2 que empeora con el incremento del número de sujetos.

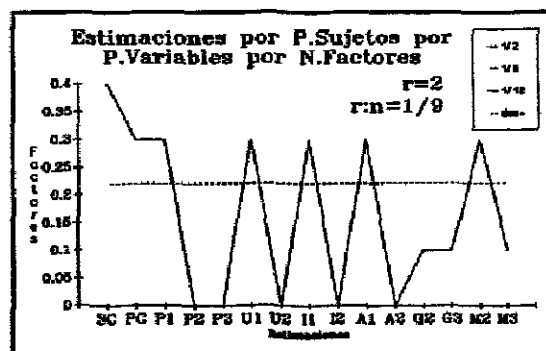


Gráfico 5

En las condiciones de menor número de factores (2), las diferencias respecto a la línea de estimación perfecta son más pronunciadas que para el resto de condiciones. Si comparamos los gráficos respecto a las líneas de diferencia mínima significativa debemos ser cautelosos. Estas

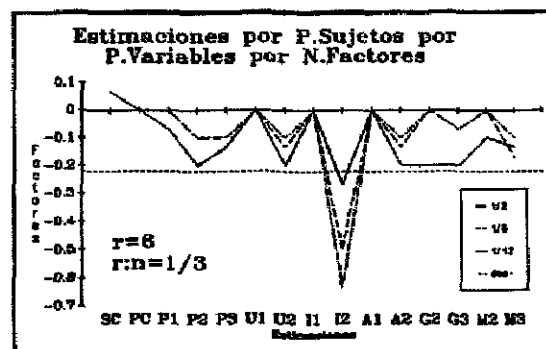


Gráfico 6

diferencias no están corregidas para su atenuación hacia el conservadurismo, y se refieren al nivel de significación nominal del 5% de la prueba sin corregir. Su inclusión es debida a dos motivos. En primer lugar, su constancia a través de las diferentes combinaciones de tratamientos obliga a los gráficos a tener un mismo patrón de medida en el eje de ordenadas. De no haberse utilizado, en las gráficas con menor rango de medidas aparecerían diferencias relativas llamativas que, en cuantía, serían menores que para otras condiciones.

En segundo lugar, no tenemos un interés especial en mostrarnos conservadores en el contraste de nuestras hipótesis, puesto que ya lo hemos sido suficientemente en el diseño de la simulación (igualdad de medidas por casilla, igualdad de comunales por variable, estructuras factoriales simples, etc.). Aunque no deseamos extrapolar estos resultados más allá del ámbito de la simulación, si estamos interesados en detectar tendencias que puedan ser más pronunciadas en condiciones de

análisis menos favorables que las aquí expuestas.

Si observamos los gráficos 3 a 5, correspondientes a las condiciones de 2 factores podemos observar la tendencia a la sobreestimación que presenta la regla K1 cuando el número de sujetos es menor (2), y que arrastra al resto de reglas de decisión basadas en ella. Esta tendencia se contrarresta en la situación de 3 variables por factor llevando a una estimación perfecta del número de factores, mientras que las reglas independientes del K1 presentan una ligera infraestimación.

Otro fenómeno fácil de observar es el mal comportamiento de Ejes principales (P), Mínimos Generalizados (G) y Máxima Verosimilitud (M). Las combinaciones de condiciones en las que las extracciones abortaron prematuramente aparecen como mesetas en los gráficos, que nivelan las parejas de estimadores de ese tipo de extracción (ver gráficos 3, 5, 6, 7, 8 y 9).

Como podemos observar en los gráficos, las reglas que arrastran su decisión basadas en este número de factores, los del K1, se comportan especialmente mal para un número de sujetos bajo (2 sujetos por variable), condición en la que sobreestiman de manera evidente (aunque no significativa en una línea conservadora) el número de factores. Como veremos después, esto no quiere decir que la estimación de la comunalidad deba

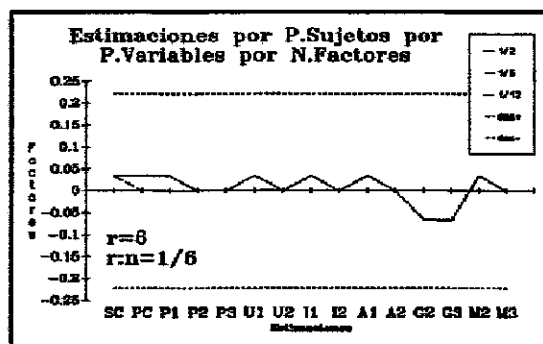


Gráfico 7

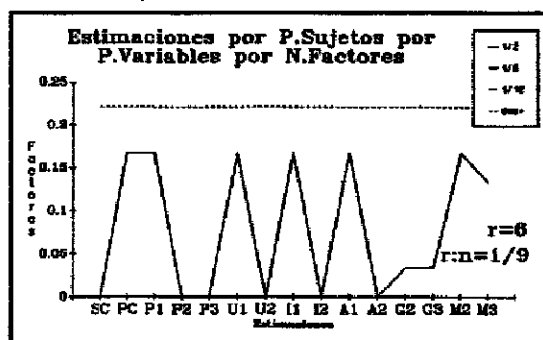


Gráfico 8

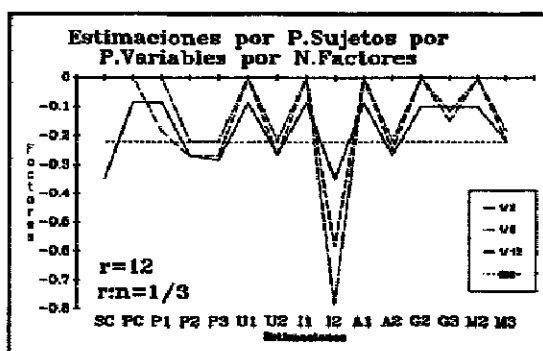


Gráfico 9

apartarse tanto de la comunalidad verdadera como la propia extracción de componentes principales, ya que se llevan a cabo sobre matrices reducidas o derivadas de la matriz de correlaciones.

La única excepción a esta regla son las extracciones GLS y ML que, basadas en un criterio de convergencia, pueden dar lugar a un número de factores menor que el definido por K1. Tal es el caso de ML2 y, especialmente, GLS2. Para estas reglas la extracción fue infructuosa en numerosas ocasiones

cuando la proporción de sujetos era de 1/2, debiendo ir reduciéndose el número de factores y/o variar el criterio de convergencia para poder llegar a una extracción fructuosa. Las extracciones abortaron siempre en condiciones de 2 sujetos por variable, y, con mayor frecuencia en condiciones con un número reducido de variables (1/3). Este hecho se refleja en las gráficas como pequeñas muestras correspondientes a una proporción de factores menor que las de la propia regla K1.

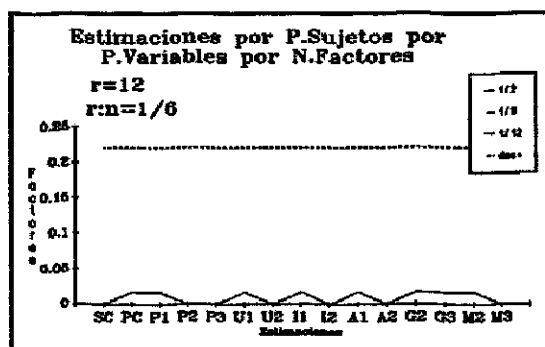


Gráfico 10

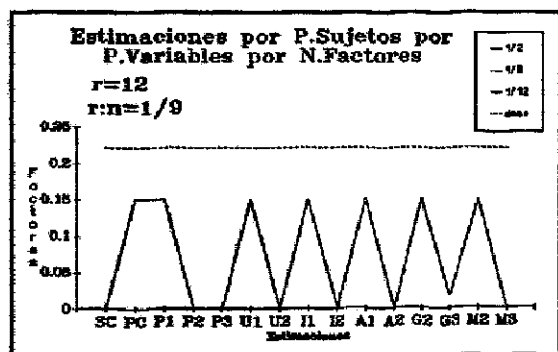


Gráfico 11

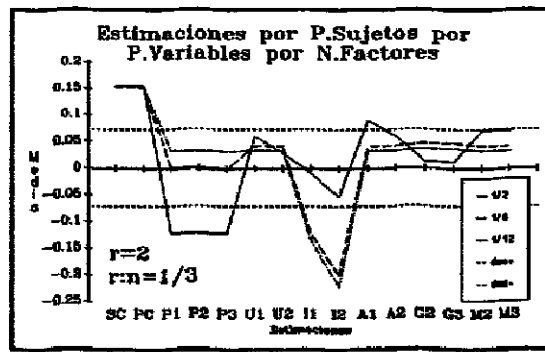


Gráfico 12

Igualmente queda reflejado en las gráficas la obtención de variables con comunalidades mayores que la unidad para la extracción de ejes principales. Parece que el algoritmo utilizado en esta extracción es especialmente sensible cuando el número de sujetos es bajo (2) y la proporción de variables está en torno

al mínimo aceptable (1/3). A nivel práctico cabe recomendar no utilizar la extracción PAF en esta combinación de condiciones, pero parece difícil que se llegue a una situación de este estilo en un análisis real, ya que todos los autores recomiendan no utilizar este tipo de técnicas de análisis para estas situaciones. En cualquier caso, una investigación inicialmente bien planteada puede llegar a una circunstancia como ésta si existe un número elevado de *casos de valor perdido* (missing values) en diversas variables, y más aún si la técnica de eliminación utilizada es la denominada *pairwise*. Este es el procedimiento utilizado por la mayoría de los programas estadísticos, entre ellos el SPSS, y recomendamos de manera preventiva verificar el número de observaciones *real* sobre el que se lleva a cabo el análisis antes de seguir adelante.

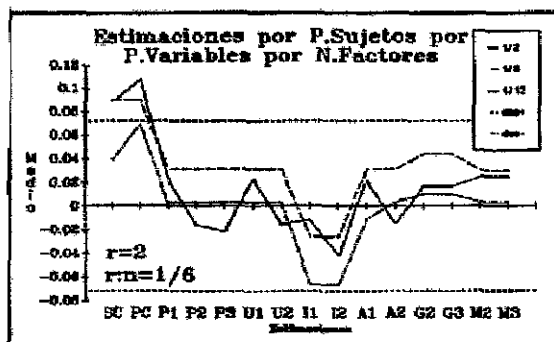


Gráfico 13

Las gráficas correspondientes a las estimaciones de la communalidad tienen un cierto paralelismo con las vistas más arriba, pero plantean comentarios adicionales de interés. Las interacciones en esta variable sí resultaron significativas, a un nivel crítico de 0'0000 para la prueba sin atenuar, y de 0'01 para la corrección

conservadora.

Las interacciones significativas corresponden al análisis imagen en su mayor parte, como era de esperar, ( $DMS_{0.95}=0.072$ ). La regla IMA2 difiere en la condición de mayor número de factores (12) y 6 variables por factor en las condiciones de 2 y 12 variables. Para el mismo número de factores y 3 variables por factor, todas las condiciones de número de sujetos son diferentes entre sí. Para 6 factores, tanto con 3 como 6 variables por factor, las

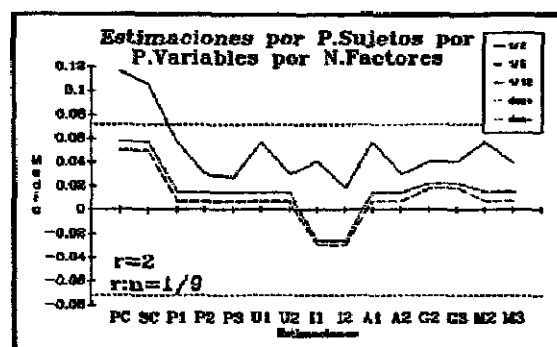


Gráfico 14

condiciones de 6 y 12 sujetos por variable difieren de la de 2 sujetos (como IMA1). Y para la condición de 2 factores y 3 variables por factor, también la condición de dos sujetos por variable difiere significativamente de las otras dos (igual lo hacen IMA1, PAF1 y PAF2). La regla IMA1 en la condición de 12 factores y 3 variables por factor, presenta diferencias entre la condición de 2 sujetos por variable y las otras dos.

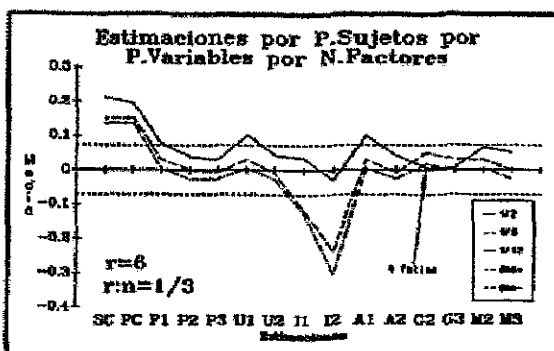


Gráfico 15

Si las extracciones llevadas a cabo con análisis imagen no se hubieran tratado como una extensión del modelo de factor común, sería difícil poder hablar en sentido estricto de una mala estimación de la communalidad, ya que, para el modelo teórico, la communalidad viene determinada como la correlación

múltiple al cuadrado.

Las reglas asociadas a ejes principales se ven afectadas por su mal comportamiento en el tratamiento de communalidades que en la estimación se aproximan a la frontera de la unidad. Así, PAF1, PAF2 Y PAF3, muestran una infraestimación evidente en la situación de 2 sujetos por variable y condición de 2 factores y 3 variables por factor. Además, PAF3 se diferencia en la condición de 12 variables de la de 2 variables, para la combinación de 12 factores y 3 variables.

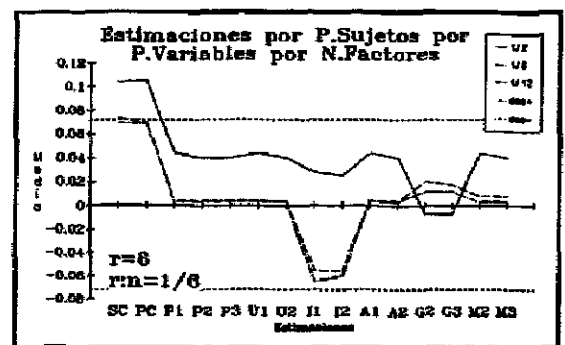


Gráfico 16

La condición de 6 factores y 3 variables es la que más diferencias adicionales presenta. ULS1, ALP1, ML3 y el Scree presentan diferencias entre la condición de 2 sujetos por factor y la condición de 12 sujetos. Por último, el scree presenta

diferencias en la condición de 12 factores y 3 variables, entre 2 sujetos y las otras dos condiciones de sujetos.

Parece que para las condiciones de menor número de variables las diferencias entre las distintas estimaciones se acrecientan, siendo especialmente dispares cuando el número de sujetos también es bajo. Pero es otro tipo de comparación el que a nosotros nos interesa.

Si observamos las gráficas, el estimador que más sobreestima sistemáticamente la comunalidad es componentes principales. Sólo cuando la proporción de variables y la proporción de sujetos aumentan, respecto al número de factores, la sobreestimación se mantiene entre los márgenes de loa aceptable por azar.

Es decir, a medida que la situación de sujetos, y, especialmente, la proporción de variables, tienden hacia un mínimo, como de hecho supone el modelo de factor común, el primero de los límites de Guttman (la regla K1) se comporta de una manera razonable.

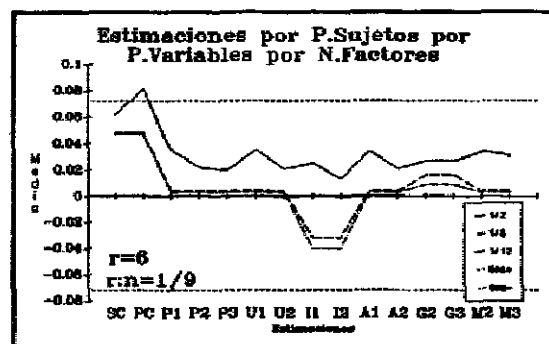


Gráfico 17

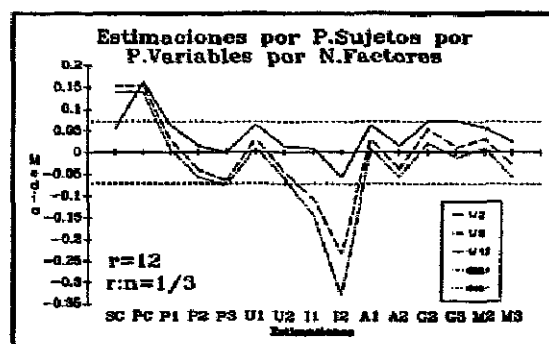


Gráfico 18

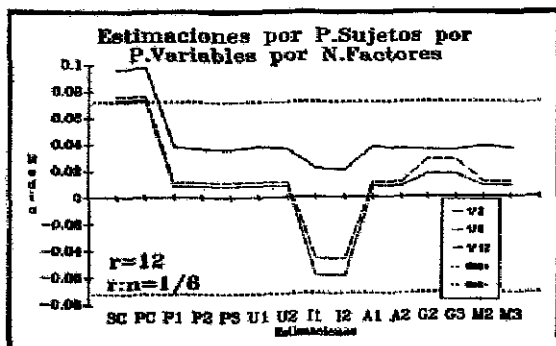


Gráfico 19

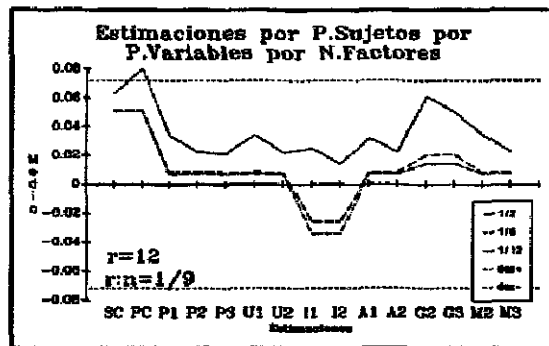


Gráfico 20



**5.1.3. Interacción entre el número de factores, la proporción de sujetos por variable y el procedimiento de estimación de la comunalidad.**

En esta interacción ambas variables independientes son significativas a la combinación de efectos. El sesgo en la estimación de la comunalidad alcanza un nivel crítico de 0.03 y el número de factores estimados es significativo al 0.000 (ambos niveles corregidos para ser conservadores).

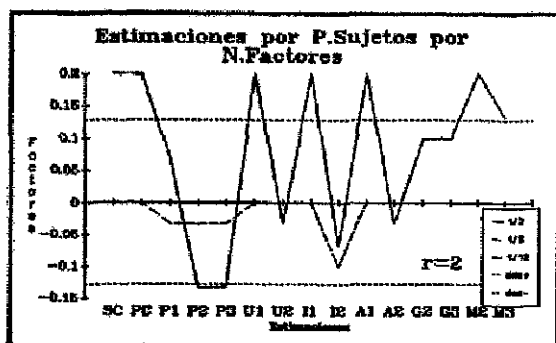


Gráfico 21

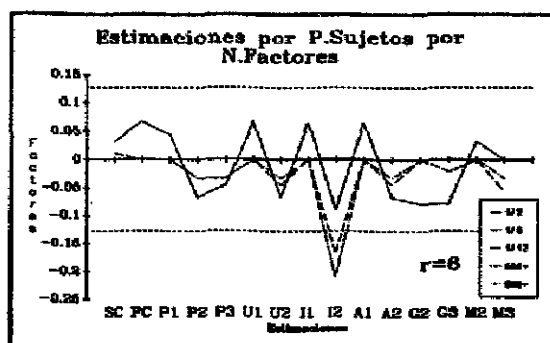


Gráfico 22

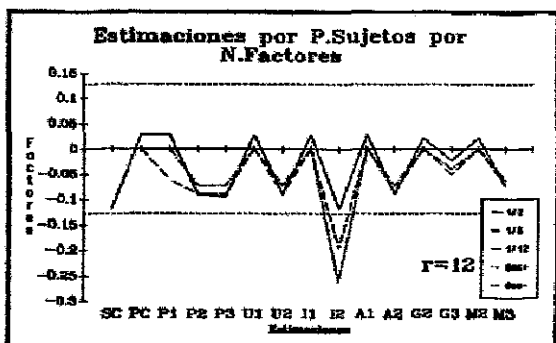


Gráfico 23

El comportamiento discutido más arriba de nuevo puede apreciarse aquí. Para la condición de menor número de factores y 2 sujetos por variable, la sobreestimación del número de factores es evidente en las reglas cuyo número de factores viene definido por K1 (PC, ULS1, IMA1, ALP1 y ML2). Las reglas que presentaron más fallos en la extracción (PAF1 y GLS2) no se separan significativamente de la estimación perfecta (gráficos 21 y 24,  $DMS_{0.95}=0.128$ ). En cuanto a estas dos últimas reglas, no debemos considerar el hecho de no sobrepasar el límite de significación como un buen comportamiento. Como se vio más arriba, el resultado de la acumulación de condiciones lleva a enmascarar lo que anteriormente fue considerado una clara infraestimación. Este efecto se arrastra a los estimadores PAF2 y PAF3, que infraestiman significativamente el número de factores. ML3

también sobrepasa el nivel de significación para esta combinación de condiciones.

La comunalidad sigue una pauta en consonancia, a lo que debemos añadir la infraestimación de IMA1 e IMA2 para 6 y 12 variables. También debemos resaltar la sobreestimación de las reglas K1 y Scree para cualquier número de variables, respecto a la estimación perfecta.

A medida que el número de factores aumenta, las diferencias en la estimación del número de factores disminuyen y dejan de ser significativas (gráficos 22 y 23,  $DMS_{0.95}=0.042$ ). De nuevo la excepción es IMA2 que empeora su estimación a medida que factores y variables aumentan. Sin embargo, la estimación de la comunalidad se mantiene por encima del nivel de significación para las reglas asociadas a K1 discutidas anteriormente, y dos variables por factor. Además, K1 y el Scree siguen sobreestimando para cualquier número de variables (gráficos 25 y 26).

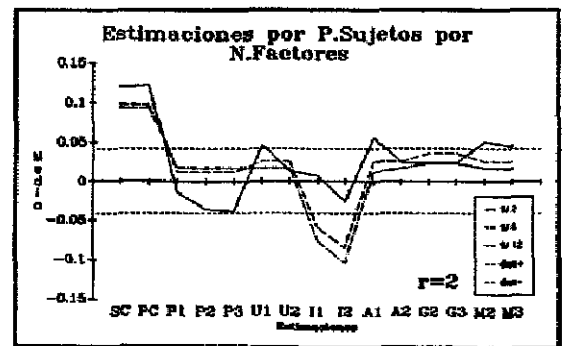


Gráfico 24

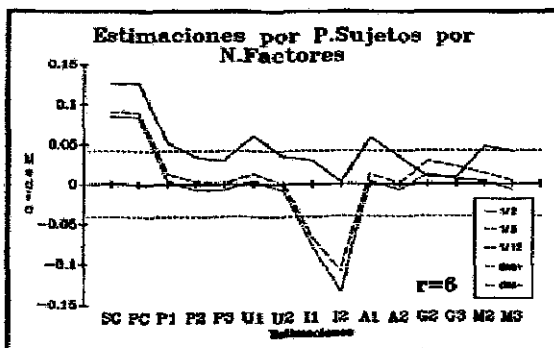


Gráfico 25

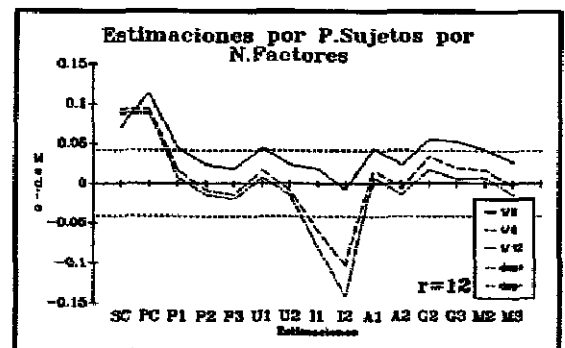


Gráfico 26

**5.1.4. Interacción entre el número de factores, la proporción de variables por factor y el procedimiento de estimación de la comunalidad.**

Esta interacción es significativa ( $p<0.000$ ) para ambas

variables dependientes.

El sesgo en la estimación del número de factores es significativamente peor en la condición de menor número de variables para cualquier número de factores, aunque no en todos los estimadores (DMS<sub>0.95</sub>=0.128).

Las reglas asociadas a ejes principales parecen ser especialmente sensibles a un número bajo de variables. PAF1 infraestima significativamente en la condición de 3 variables por factor y dos factores en la estructura factorial, posiblemente debido a los fallos de estimación. Como puede apreciarse en el gráfico 27, para otro número de variables distinto PAF1 se encuentra al mismo nivel que los demás estimadores condicionados a K1, lo que viene a corroborar nuestras sospechas.

Para ese mismo número de 3 variables, la regla PAF2 y PAF3 tienden a separarse cada vez más de la línea de estimación perfecta en dirección a la infraestimación. Revisando todas las medidas englobadas en la combinación de 12 factores y tres variables por factor pudimos observar una clara infraestimación del número de factores (para cualquier número de sujetos), con una moda de 8 factores estimados (una media de -0,29 de factores estimados). Sin embargo, la comunalidad estimada por PAF2 y PAF3, sólo sobrepasa el nivel de significación en la condición de 12 factores (para PAF3).

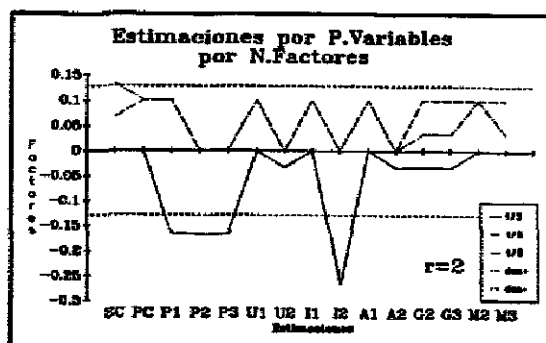


Gráfico 27

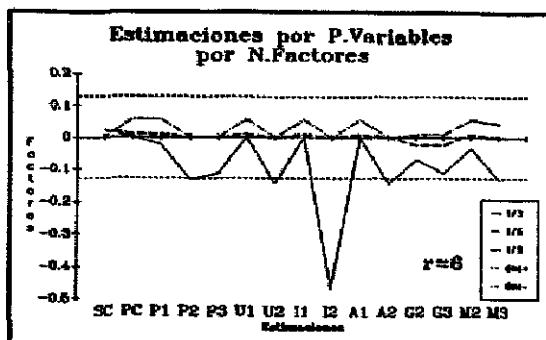


Gráfico 28

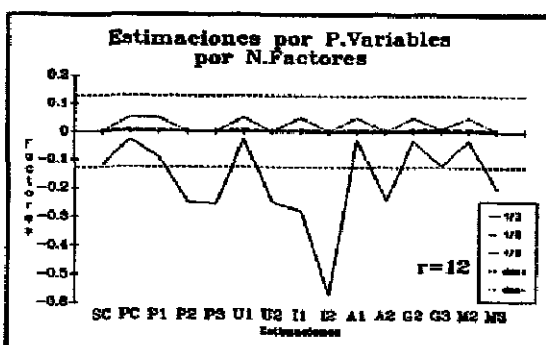


Gráfico 29

Aunque K1 no difiere significativamente en el número de factores estimados, la communalidad si es sistemáticamente sobreestimada para cualquier combinación de factores y variables. Si observamos las gráficas desde un punto de vista descriptivo, K1, a pesar de no sobrepasar el nivel de significación, tiende a la sobreestimación a medida que el número de variables aumenta.

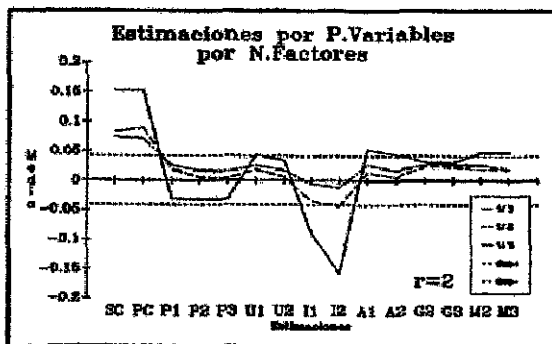


Gráfico 30

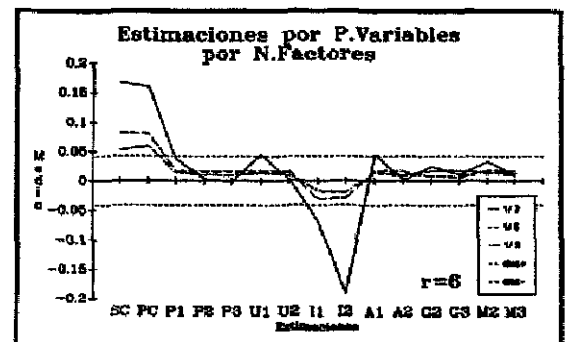


Gráfico 31

Sólo para la condición de 12 factores y 3 variables por factor, se aprecia una infraestimación del número de factores. Esta disminución del número de factores estimados medio es debida a la condición de 2 sujetos por variable, única en la que K1 infraestima el número de factores.

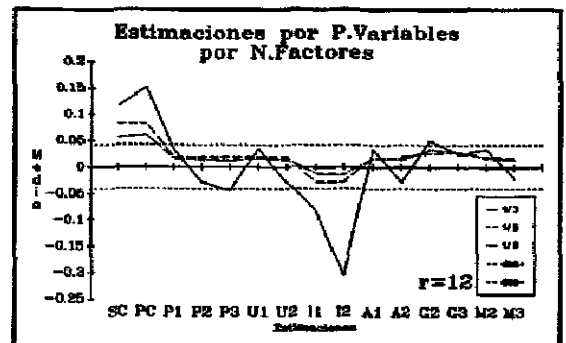


Gráfico 32

En cuanto al resto de las reglas, ULS2, ALP2, GLS3 y ML3, a medida que el número de factores aumenta, y siempre para 3 variables por factor, la tendencia en la estimación del número de factores es hacia el incremento de la infraestimación. Si bien, GLS3 nunca llega a traspasar el nivel de significación.

De nuevo, a nivel descriptivo, se aprecia un mal comportamiento generalizado de estas reglas, hacia la infraestimación, para el menor número de variables. Este comportamiento se agrava con el incremento del número de factores.

Es conveniente resaltar que a medida que aumenta el número de factores, el cociente Proporción de Factores Estimados se ve dividido por una cantidad cada vez mayor. Por ello, las desviaciones del número de factores se ven atenuadas al recogerse en dicho cociente. Por ello, las desviaciones en la condición en la condición de 12 factores, son aún mayores respecto al número de factores infraestimados por estas reglas.

Aunque las diferencias de estimación de la comunalidad no llega a ser significativa en todos los casos, se puede apreciar la tendencia sobreestimadora de K1 y el Scree, para cualquier número de variables y factores. A pesar de mantenerse en la sobreestimación, ambas reglas se comportan mejor para 6 y 9 variables por factor.

La regla IMA2 infraestima la comunalidad sensiblemente más en las condiciones de menor número de variables. En cuanto a Ejes Principales, parece ser la regla más prometedora para la estimación de la comunalidad. Excepto para la condición en que se produjeron extracciones anormales, y para un número de variables reducido, las estimaciones de la comunalidad son muy próximas a la estimación perfecta.

ULS, ALPHA, GLS y ML, también tienen un comportamiento mejor que K1 en la estimación de la comunalidad. Aunque la condición de menor número de variables es la que ofrece mayores divergencias.

#### **5.1.5. Interacción entre la proporción de variables, la proporción de sujetos y las reglas de estimación**

El efecto sobre ambas variables dependientes es significativo para esta combinación de tratamientos ( $p < 0.0000$ ), y la evolución de los estimadores resulta interesante.

Para la condición límite de 2 sujetos por variable, los

estimadores asociados a la regla K1 pasan de la sobreestimación del número de factores a la estimación correcta. Dentro de la condición de menor número de variables, aparece una ligera infraestimación del número de factores para el número de sujetos menor. Para un número de sujetos mayor, la estimación es correcta. La sobreestimación es más grave a medida que el número de variables aumenta.

Sin embargo, las reglas asociadas al número de autovalores mayores que la unidad de la extracción correspondiente sólo presentan diferencias en la condición de menor número de variables. A medida que aumenta el número de variables, las estimaciones pasan de la infraestimación significativa, a estimaciones más próximas a la línea de estimación perfecta. Las excepciones son IMA2, que empeora a medida que el número de sujetos aumenta, y ML3 que alcanza exactamente la significación en la condición de 6 sujetos por variable.

La regla GLS3 es la que presenta un comportamiento más prometedor en el gráfico de la condición de 3 variables por factor, pero la atenuación que se observa en la infraestimación, respecto a otras reglas, seguramente es debido a los fallos de estimación (ver tabla 9).

Respecto a la estimación de la comunalidad, de nuevo Componentes Principales se mantiene claramente por encima de la significación en todas las condiciones de proporción de

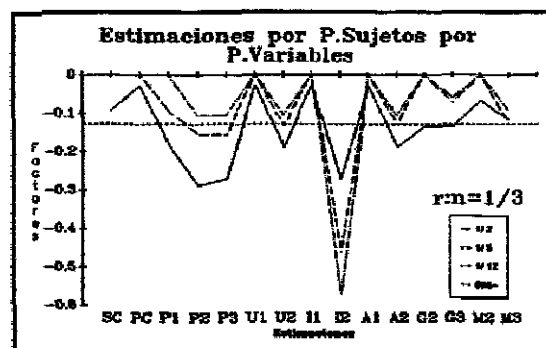


Gráfico 33

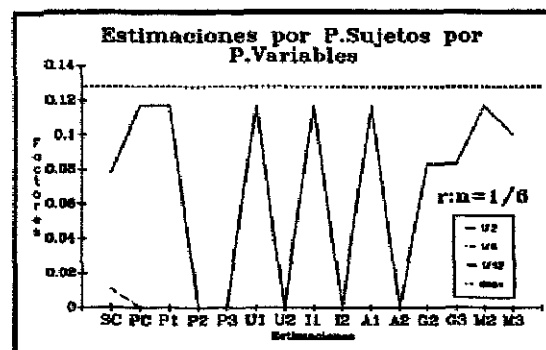


Gráfico 34

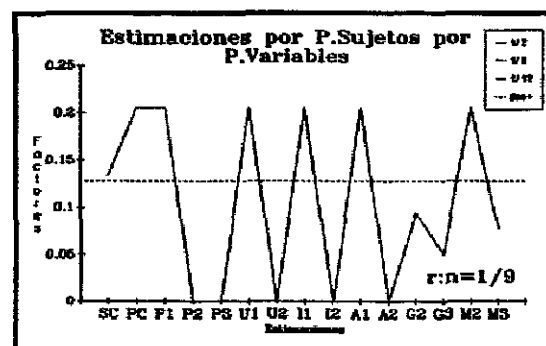


Gráfico 35

variables. Aunque los gráficos muestran una tendencia a mejorar la estimación a medida que el número de variables y sujetos aumenta, estas diferencias nunca llegan a ser significativas. El Scree muestra una tendencia similar.

Las reglas asociadas a Ejes Principales siempre se mantienen dentro de los márgenes de la estimación correcta.

Las reglas ULS1, ALP1 y ML2, asociadas a K1, son significativas en la condición de 3 variables y 2 sujetos por variable, y dado el patrón mostrado por GLS2, cabría esperar que, de no ser por las extracciones incorrectas, la sobreestimación para esta regla también hubiera sido significativa. En la condición de mayor número de factores (12) la tendencia a la sobreestimación de estas mismas reglas alcanza la significación en la mayoría de los casos.

El comportamiento de IMA2 empeora a medida que el número de variables y sujetos aumenta, hasta la condición de 12 variables por factores, en el que la estimación no difiere significativamente de la estimación correcta. Aquí es donde mejor se puede explicar el comportamiento aparentemente anómalo de la regla IMA2.

Cuando el número de variables por factor es pequeño la estimación de la comunalidad a partir del cuadrado de la correlación múltiple es especialmente ajustada, mejorando a medida que el número de variables por factor aumenta, como supone el modelo teórico. Para estas combinaciones de condiciones, la estimación de la correlación múltiple de una variable a partir de las demás, es esperable que mejore a medida que el número de sujetos utilizado para la estimación aumente. Si esto es así, las diferencias entre la comunalidad estimada y la comunalidad teórica deberán disminuir. Eso es lo que de hecho sucede con la mayoría de las reglas.

Para las reglas basadas en la extracción de Análisis Imagen,

esto no es así. Aunque en los gráficos la tendencia parezca la contraria, esto es efecto de la particular elección de la regla y de los algoritmos utilizados por el programa para la estimación de la proporción de varianza explicada por cada factor.

En primer lugar, el valor informado bajo el epígrafe de *suma de cuadrados de las saturaciones*, no es otra cosa que el producto interno de cada vector columna de la matriz F.

Ahora bien, esta matriz está calculada a partir de la matriz de autovectores A, la matriz de unicidades estimadas U y la matriz de autovalores Λ, según la fórmula arriba expuesta

$$F = \hat{U} A \Lambda^{\frac{1}{2}} \quad (215)$$

Si tomamos uno de los vectores columna de la matriz de estructura, su producto interno, en definitiva su suma de cuadrados (ss) puede escribirse como

$$f'_j f_j = ss_j = \lambda_j^{\frac{1}{2}} a'_j \hat{U}^2 a_j \lambda_j^{\frac{1}{2}} \quad (216)$$

Dadas las características de los autovalores, el producto que aparece entre los autovalores en la término de la derecha de la ecuación, puede reemplazarse por un escalar que represente la unicidad media de las variables, como se discutió mas arriba. En nuestro caso, dado que todas las variables poseen la misma comunalidad teórica, esto no estriba mayor problema, y podemos estimar entonces los autovalores a partir de las sumas de

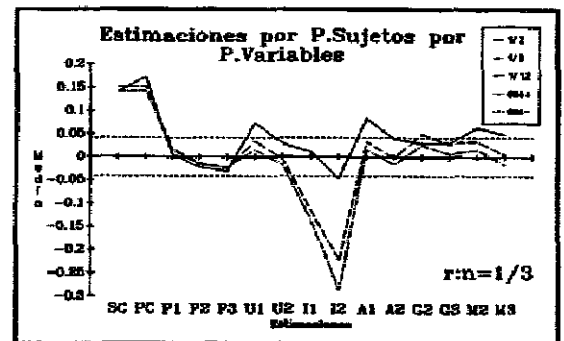


Gráfico 36

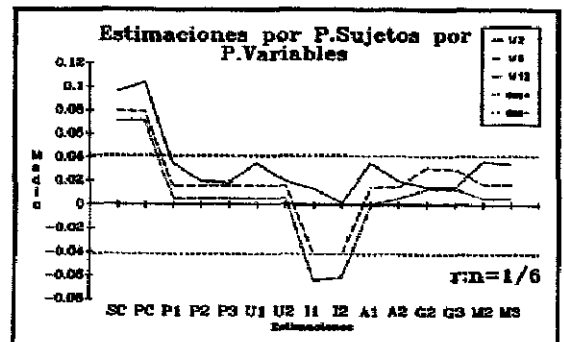


Gráfico 37

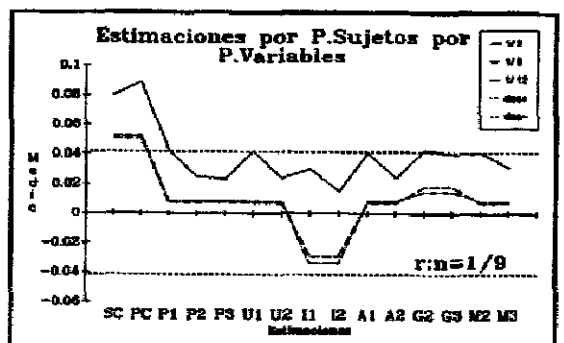


Gráfico 38



cuadrados a partir de la operación

$$\hat{\lambda}_j = \frac{SS_j}{U^2} \quad (217)$$

Siendo esto así, a medida que el número de sujetos aumenta, la estimación de la comunalidad será mas precisa, y el denominador se reducirá en cuantía.

Dado un valor prefijado de la suma de cuadrados, digamos 1. Si llevamos a cabo dos extracciones con distinta precisión, para que ambos cocientes coincidan en el mismo valor 1, deberán corresponder a cuantías de los autovalores distintos. La extracción de menor valor de unicidad se corresponderá con un autovalor menor, y la extracción de mayor unicidad irá asociada a un autovalor de mayor cuantía.

Pero teóricamente, por el diseño de la simulación, todas las muestras deben tener autovalores similares, puesto que la magnitud de éstos no depende del número de sujetos, sino, en todo caso, del número de variables de la matriz analizada.

El resultado final es que a medida que la precisión de la estimación de la comunalidad aumenta, la unicidad disminuye y la suma de cuadrados con un valor igual a la unidad corresponde a un autovalor de menor orden, con lo que el número de factores decidido por la regla es menor.

Por tanto desaconsejamos la utilización de esta regla tal y como ha sido planteada en este trabajo.

También hay que tener en cuenta que, en el Análisis Imagen, la comunalidad no es estimada, sino que viene definida teóricamente por el modelo, como la correlación múltiple al cuadrado, de una variable con las restantes. Como sabemos por los trabajos de Roff (1936) y Guttman (1953), la estimación a partir de la correlación múltiple es un límite inferior para la

comunalidad. Puesto que la comunalidad se define en este modelo por la correlación múltiple, los valores de comunalidad de este modelo y del modelo de Factor Común divergirán sistemáticamente, y deberán hacerlo tanto más cuanto mejor sea la estimación de la correlación múltiple.

Dado el especial comportamiento de IMA2, paralelamente al incremento de la infraestimación de la comunalidad, la diferencia entre el número de factores estimados y el número de factores teórico aumenta, y los valores de la estimación del número de factores se dirigen en mayor medida hacia la infraestimación.

Este patrón de comportamiento de infraestimación del número de factores desaparece cuando el número de variables utilizado en la estimación es mayor, y la estimación es igualmente precisa para todas las situaciones.

#### 5.1.6. Interacción del número de factores con los métodos de estimación

La interacción entre ambos tratamientos es significativa con un nivel crítico de 0.000 para la estimación de la comunalidad y 0.02 para la estimación del número de factores.

Las diferencias aquí encontradas son debidas a los efectos de interacciones discutidas más arriba, y no creemos que deban ser interpretados como efectos puros.

La estimación de número de factores presenta el patrón general discutido hasta ahora. Para los estimadores asociados a K1, ULS1, IMA1, ALP1 y ML2, el número es sobreestimado para la condición de menor número de factores y se aproxima a la

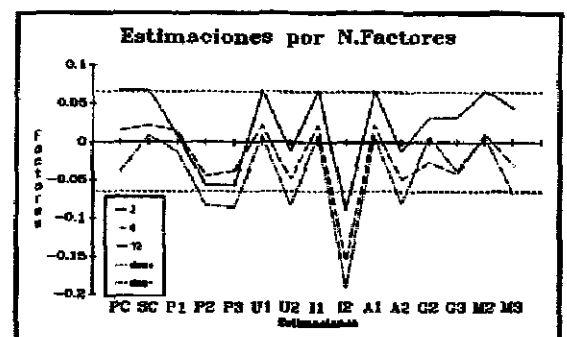


Gráfico 39

estimación perfecta a medida que estos aumentan sin llegar a una diferencia significativa ( $DMS_{0.95}=0.065$ ). PAF1 y GLS2, afectados por las extracciones incorrectas, presentan un patrón ligeramente diferente, siendo significativa la diferencia para GLS2 entre 2 y 6 factores (ver gráfico 39).

El Scree presenta un comportamiento significativo, pasando de la sobreestimación con 2 factores a la infraestimación con 12 factores. Esto puede ser debido a la menor precisión de esta prueba cuando el número de variables aumenta, y se utiliza la presentación a 132 columnas, como es el caso en este estudio.

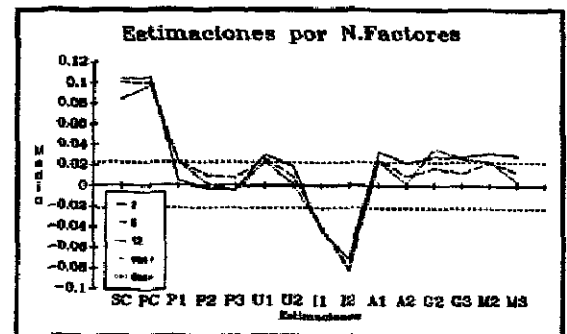


Gráfico 40

Las estimaciones de las reglas basadas en sus propias matrices también disminuyen la estimación del número de factores a medida que el número de factores aumenta, pero esta vez en dirección a la infraestimación. Sin duda esto es efecto de la condición de menor número de variables, ya que para números de variables superiores a 3 por factor, las estimaciones eran correctas.

Dada la aglomeración de interacciones en este apartado, es muy arriesgado concluir de manera definitiva a partir de estos resultados. Aunque parece que para el mayor número de factores, las reglas asociadas a K1 son las que mejor se comportan.

Respecto a la estimación de la comunalidad, las diferencias significativas son menores en número, sólo las mejoras de ALP2 y ML3 entre 2 y 12 factores son significativas ( $DMS_{0.95}=0.022$ ). Ahora bien, desde el punto de vista de la separación de la línea base de estimación perfecta, el Scree, PC, ULS1, ALP1 y ML2 se mantienen por encima de la sobreestimación permisible por azar para cualquier número de factores. ALP2 y ML3 sobrepasan el

límite de significación para 2 factores, y GLS2 y GLS3 para 2 y 12 factores. Por su parte PAF1 sobreestima significativamente para 6 y 12 factores (ver gráfico 40).

#### 5.1.7. Interacción entre la proporción de variables y el procedimiento de estimación

Esta interacción es significativa con un nivel crítico menor de 0.000 para ambas variables dependientes.

El número de factores estimado experimenta un evolución general clara para los dos grupos principales de estimadores. Los estimadores condicionados por la regla K1 pasan de la estimación perfecta (excepto PAF1 que infraestima significativamente, y GLS2 y ML2 con una infraestimación no significativa) para 3 variables por factor, a una ligera sobreestimación, que no alcanza a sobrepasar la significación, para 6 variables por factor, y llegando a la sobreestimación significativa para 9 variables por factor (menos para GLS2).

Por su parte, las reglas basadas en sus matrices correspondientes pasan de la infraestimación significativa, en la condición de 3 variables, a la estimación perfecta (o no significativamente diferente de ella) para mayor número de variables (ver gráfico 41). El Scree no llega a encontrarse fuera de la significación en ningún momento, si bien las condiciones de 3 y 12 variables difieren significativamente entre sí.

La estimación de la comunalidad es sobreestimada significativamente en la condición de 3 variables por las reglas ULS1, ALP1, GLS2 y ML2, mientras que PAF3 infraestima. Las reglas GLS2 y GLS3 también sobreestiman la comunalidad para 9 variables, aunque no de forma significativamente diferente a como lo hacen con otro número de variables.

IMA1 e IMA2 infraestiman de manera evidente en la condición

de menor número de variables (3), mejoran en la condición de 6 variables, y no difieren significativamente de la estimación perfecta en la condición de mayor número de variables.

Las reglas K1 y el Scree son las que mayor sobreestimación presentan en la condición de 3 variables, mejoran sustancialmente para 6 variables y mejoran algo más (aunque no significativamente) en la condición de 9 variables por factor.

Parece que las reglas que no se basan en la matriz de correlaciones (excepto PAF2 y PAF3) se mantienen estables en su estimación de la comunalidad a través de cualquier número de variables, sin diferenciarse significativamente entre ellas.

#### 5.1.8. Interacción entre la proporción de sujetos y el método de estimación

De nuevo la interacción es significativa para esta interacción de factores del diseño, y para ambas variables dependientes ( $p < 0.000$ ).

La estimación del número de factores para las reglas basadas en la regla K1 es significativamente elevada para el menor número de sujetos, menos PAF1 y GLS2 que no llegan a sobrepasar el límite de la significación. Cuando el número de sujetos por variable aumenta, la estimación del número de factores es perfecta. El hecho de que

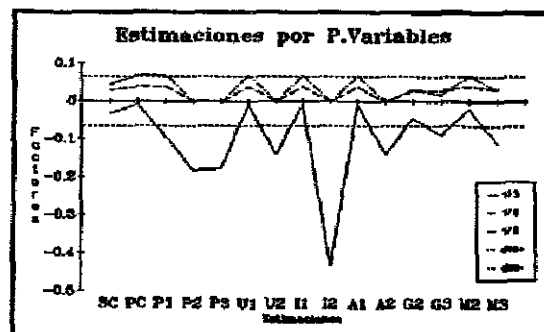


Gráfico 41

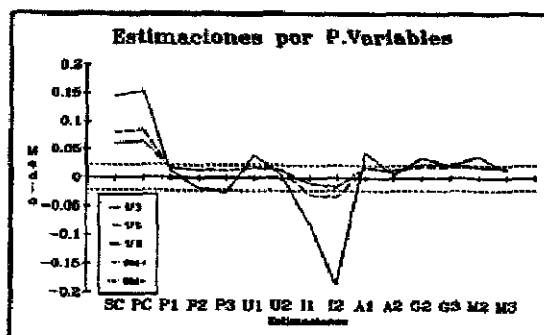


Gráfico 42

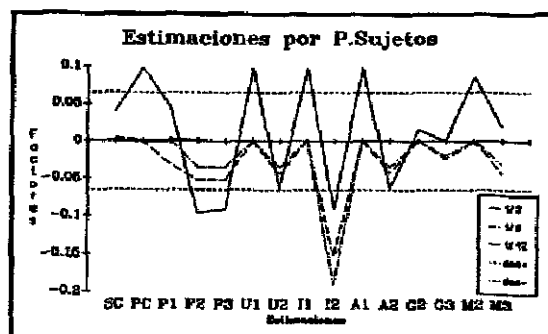


Gráfico 43

PAF1, GLS1 y ML3 sean más bajos que en el resto de las reglas asociadas, es debido presumiblemente a los fallos de extracción, que coincidían, en la mayoría de los casos, con esta proporción de sujetos.

Las reglas de Ejes Principales PAF2 y PAF3 presentan una clara infraestimación del número de factores para 2 sujetos por variable, que mejora, sin llegar a ser significativa la diferencia, en las otras dos condiciones de número de sujetos.

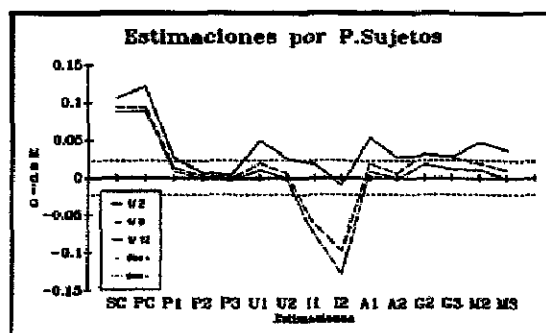


Gráfico 44

Aunque las diferencias no son significativas, un posible patrón para las estimaciones de ULS2 y ALP2, es la tendencia a mejorar la estimación con el aumento del número de sujetos.

Respecto a la estimación de la communalidad, de nuevo los estimadores condicionados a la decisión de K1 sobreestiman significativamente para el menor número de sujetos, cosa que no es de extrañar ya que también han sobreestimado el número de factores para esta misma condición. Esta estimación mejora significativamente en las condiciones de mayor número de sujetos.

Solamente las reglas que infraestimaron significativamente el número de factores, no sobreestiman la communalidad para la condición de 2 sujetos por variable (PAF2, PAF3, IMA2) además de la regla IMA1.

La mejora del Scree y ULS2 es entre las condiciones de 2 y 12 sujetos, mientras que ML3 sigue un patrón similar a las reglas definidas por K1.

Tanto el Scree y K1 como GLS2 y GLS3 sobreestiman significativamente el número de factores tanto para 2 como para 6 variables por factor.

El comportamiento de las reglas asociadas a la extracción de análisis imagen, empeoran con el aumento del número de sujetos.

### 5.1.9. Número de factores.

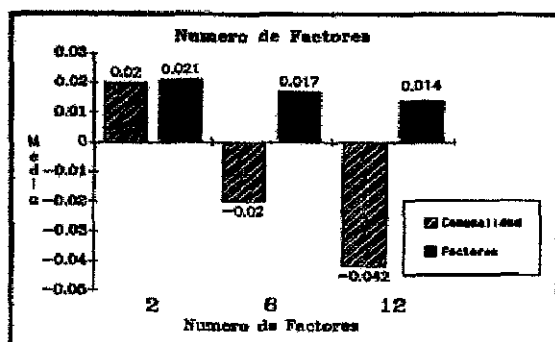


Gráfico 45

El número de factores no hace diferir significativamente la estimación de la comunalidad ( $p=0.5579$ ), aunque sí difiere el número de factores estimados ( $p=0.0001$ ), como se puede apreciar en el gráfico 45.

Cuando se toman todas las condiciones englobadas para cada uno de los números de factores (Proporción de Variables y Proporción de Sujetos), las diferencias de estimación de la comunalidad no son significativamente diferentes. Por ello, para cualquier número de factores en la estructura teórica, el promedio de estimación de la comunalidad es similar en todas las condiciones.

Sin embargo, en las condiciones de 6 y 12 factores teóricos, la infraestimación del número de factores es significativamente menor que la sobreestimación de la condición de 2 factores ( $p<0.02$ ).

Por lo que hemos podido discutir hasta aquí, en las condiciones de estructuras de 2 factores, 3 variables por factor, y 2 ó 6 sujetos por variable, son en las que las extracciones de Ejes Principales fallaron, debido a la presencia de casos Heywood. Si a esto añadimos que la variable dependiente Proporción de Factores estimados es un cociente, cuyo denominador es el número de factores teóricos, en la situación de dos factores teóricos las desviaciones de la estimación del número

de factores reciben una ponderación mayor que en las otras condiciones.

Como hemos visto, tanto para 2, 6 ó 12 factores, se dieron infraestimaciones y sobreestimaciones del número de factores, por lo que nos inclinamos a pensar que esta diferencia significativa es un artefacto del procedimiento de ponderación de dicha variable dependiente.

Otro aspecto a tener en cuenta es la presencia de regla IMA2, en las condiciones de menor número de variables por factor, que puede eclipsar las tendencias a la sobreestimación de otras condiciones de número de factores, al promediarse con las otras reglas estudiadas.

Dada la variabilidad de las distintas reglas en las combinaciones de condiciones discutidas mas arriba, es difícil que se aprecien tendencias claras en las condiciones que no consideran interacciones de los distintos tratamientos manipulados en este estudio.

#### 5.1.10. Proporción de Variables por Factor.

De manera similar al caso inmediatamente anterior, las diferencias en la estimación de la comunalidad no son significativas ( $p=0.6$ ) respecto a la Proporción de Variables por Factor. La estimación del número de factores si lo fue ( $p<0.0000$ ).

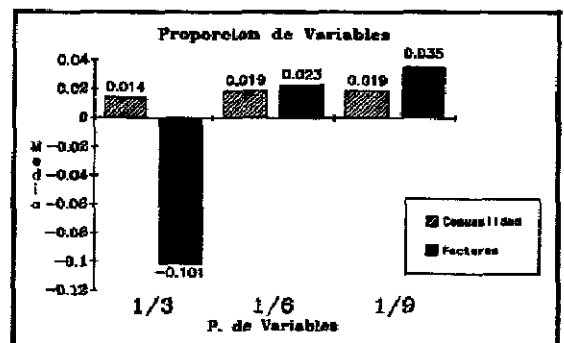


Gráfico 46

En la condición de menor número de variables, el promedio de la proporción de factores estimados fue significativamente menor que en las otras dos condiciones ( $p<0.0000$ ), siendo la tendencia hacia la infraestimación.



Parece razonable pensar que esto es debido al comportamiento de las reglas que no se basan en la matriz de correlaciones para la determinación del número de factores. Estas reglas (PAF2, PAF3, ULS2, ALP2, IMA2, GLS3 y ML3), infraestimaron el número de factores en esta condición, y especialmente, si el número de sujetos también era reducido. Por el contrario, las reglas supeditadas a la regla K1, en estas situaciones se comportaron especialmente bien. Este resultado concuerda con los de Gorusch (1974), que mantiene que la regla K1 retiene de 1/3 a 1/5 de las variables utilizadas en el análisis. Sólo las reglas GLS2 y ML2, también condicionadas a la regla K1, infraestimaron el número de factores en estas situaciones, pero debido a los fallos de convergencia en las extracciones.

#### 5.1.11. Proporción de sujetos por variable.

Tanto la estimación del número de factores como la estimación de la comunalidad, varían significativamente con el número de sujetos por variables de cada una de las muestra utilizadas en este análisis ( $p < 0.0000$ ).

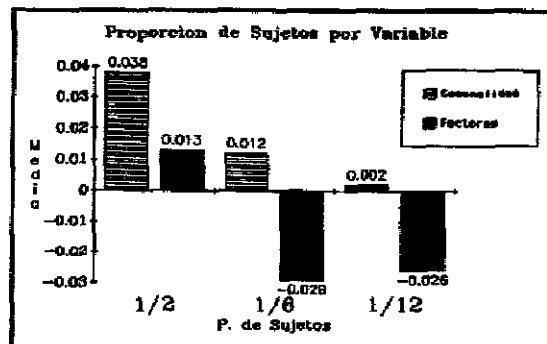


Gráfico 47

La estimación del número de factores para la condición de 2 sujetos por variable, es significativamente mayor que para las situaciones de 6 y 12 sujetos por variable ( $p < 0.03$ ), en las que el número de factores medio es infraestimado. Esto es debido a la tendencia a la sobreestimación que las reglas basadas en la regla K1 han demostrado para esta situación de menor número de sujetos por variable.

Podemos concluir que, excepto cuando la proporción de variables por factor es de 1/3, la regla K1 presenta una tendencia a la sobreestimación para una proporción de 2 sujetos

por variable. Estos resultados son congruentes con los de Zwick y Velicer (1986), quienes encontraron sobreestimaciones del número de factores definidos por K1, para esta proporción de sujetos y proporciones de variables por factor similares.

Pensamos que este efecto es debido a la mala estimación de las correlaciones simples cuando el número de sujetos es insuficiente, ya que, si traducimos los tamaños de muestra a proporciones de sujetos de factor, encontramos que, por ejemplo, para la condición de 2 sujetos por variable, 6 variables por factor y 2 factores, la proporción de sujetos por factor es de 1/6, la misma que en la combinación de 6 factores, 6 variables por factor y 6 sujetos por variable. Pero, mientras que en la primera combinación de tratamientos, el número de factores es sobreestimado por K1, en la segunda la estimación es correcta.

Sólo en la combinación de 12 factores, 3 variables por factor y 2 sujetos por variable, se puede apreciar una infraestimación del número de factores al utilizar la regla K1. Estos resultados no concuerdan plenamente con los de Hakstian y Rogers (1982). En la simulación llevada a cabo por estos autores, la infraestimación más clara de la regla K1 se verificó en la combinación de 6 factores, una proporción de variables por factor de 1/2, estructura factorial compleja y una estructura correspondiente al modelo factorial *middle model*. También se observaron algunas infraestimaciones en las condiciones del *modelo formal* y estructura compleja, con 6 factores y una proporción de variables 1/2, así como 12 factores y una proporción de variables de 1/2.5, aunque el promedio de todas las muestras analizadas no era de infraestimación. Sin embargo, para las mismas combinaciones y estructuras simples, la estimación fue perfecta.

Las diferencias entre la condición de menor número de sujetos y las otras dos condiciones respecto a la comunalidad media estimada, son significativas ( $p < 0.0003$ ), manteniéndose en todos los casos en la sobreestimación. De nuevo, el efecto de

sobreestimación de la regla K1, desplaza la media de la comunalidad estimada. A pesar de ello, existe una tendencia general a mejorar la estimación a medida que el número de sujetos aumenta.

### 5.1.12. Interacción del número de factores y la proporción de variables.

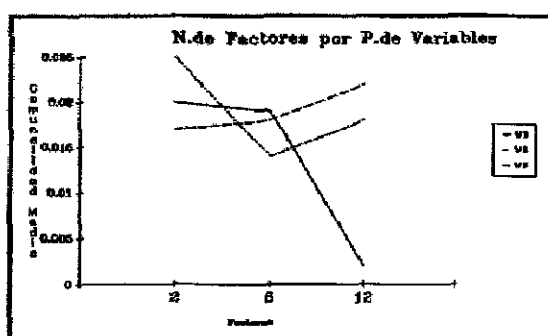


Gráfico 49

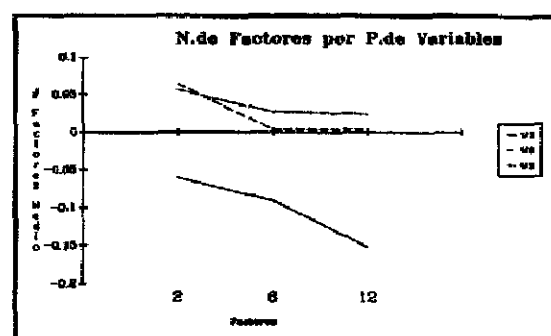


Gráfico 48

Mientras que nosotros esperados encontrar aquí una interacción interpretable, los resultados para ambas variables dependientes no alcanzan el nivel de la significación. Pensamos que la gran variabilidad de las diferentes reglas utilizadas enturbian tendencias que, de otro modo, hubieran podido ser interpretables (ver gráficos 48 y 49).

En cualquier caso, si separamos el criterio de la significación estadística del criterio de significación teórica, podemos estudiar estos gráficos, aunque sólo sea de una manera descriptiva.

Para un número bajo de factores, cualquier proporción de variables lleva a la infraestimación del número de factores, siendo más marcado el efecto para el mayor número de variables. Esto, sin duda, es debido al comportamiento de la regla IMA2, que es la que más empeora con el aumento de variables

Parece razonable pensar que, dada la especial construcción de la variable dependiente que *proporción de factores estimados*,

las gráficas no reflejan el hecho de que, cuando el número de factores es mayor, el número absoluto de factores sobreestimados también lo es.

### 5.1.13. Interacción del número de factores con la proporción de sujetos por variable.

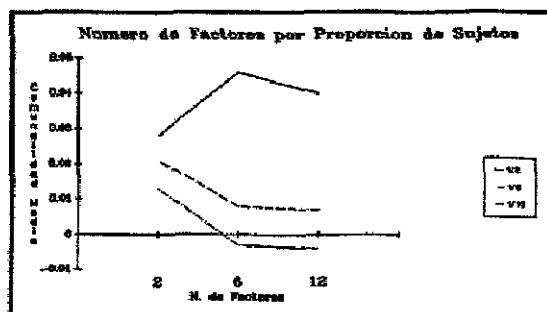


Gráfico 51

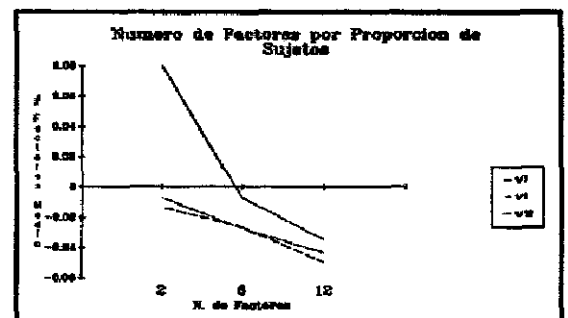


Gráfico 50

Esta interacción no llegó a ser significativa para ninguna de las dos variables dependientes. Por ello, para los niveles de tratamiento utilizados, en este análisis no podemos concluir que una variable influya en la otra de ninguna manera especial, aunque los gráficos 50 y 51 son bastante sugestivos.

La tendencia de el conjunto global de reglas es a la infraestimación, aunque la presencia de las reglas correspondientes a Análisis Imagen deben estar contrarrestando, de nuevo, las medias de estas combinaciones de condiciones.

Llama la atención la sobreestimación para 2 factores y 2 sujetos por variable. Las combinaciones de cualquier número de factores y 2 sujetos por variable son, precisamente, las que corresponden a las sobreestimaciones de la regla K1. El desproporcionado aumento que se observa en 2 factores y 1/2 de sujetos, de nuevo es debido a la construcción de la variable dependiente. De hecho, la combinación correspondiente en el gráfico de la estimación de la comunalidad va, si acaso, en la dirección contraria.

### 5.1.14. Interacción de la proporción de variables por factor y la proporción de sujetos por variable.

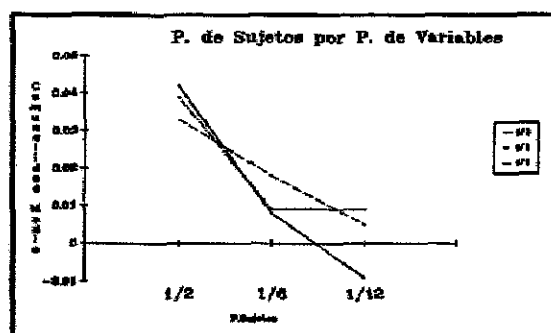


Gráfico 53

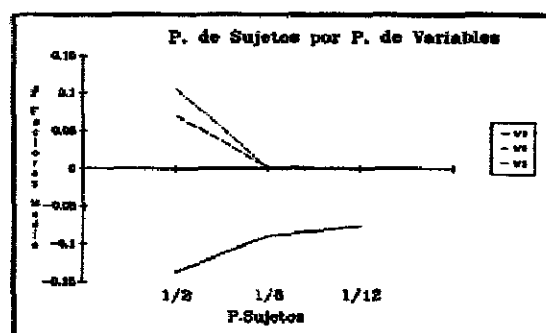


Gráfico 52

Esta interacción no fue significativa respecto a la estimación de la comunalidad media, pero sí lo fue respecto al número de factores estimado ( $p < 0.000$ ). En esta última variable el número de factores es significativamente sobreestimado (1.3 de cada diez factores) para la combinación de 2 de sujetos por variable y 3 de variables por factor, mientras que para  $1/6$  ó  $1/9$  de variables por factor el número de factores es infraestimado ( $DMS_{0.95} = 0.077$ ), como puede apreciarse en el gráfico 52.

A nivel descriptivo, parece que el promedio de reglas tiende a infraestimar el número de factores en las condiciones de menor proporción de variables. Esto nos lleva a pensar que tres variables por factor no siempre son suficientes para definir cada uno de los factores, siendo aconsejable utilizar mayor número de variables para que una variable latente quede inequívocamente definida.

Si al bajo número de variables se añade un número también bajo de sujetos, los efectos son aún más graves. En cualquier caso, es cuestionable que se lleguen a utilizar voluntaria e intencionadamente tamaños de muestra tan reducidos como los nuestros.

Una posible explicación de este mal comportamiento puede ser

el hecho de utilizarse la correlación múltiple como estimación de la comunalidad. A medida que el número de variables aumenta, la estimación de la correlación múltiple de una variable a partir de las demás deberá mejorar. Desafortunadamente, poco apoyo podemos encontrar en la gráfica de la estimación de la comunalidad.

**5.1.15. Interacción del número de factores, la proporción de variables por factor y la proporción de sujetos por variable.**

Esta interacción tampoco fue significativa para la estimación de la comunalidad, mientras que para el número de factores estimado roza el nivel de significación ( $p=0.07$ ).

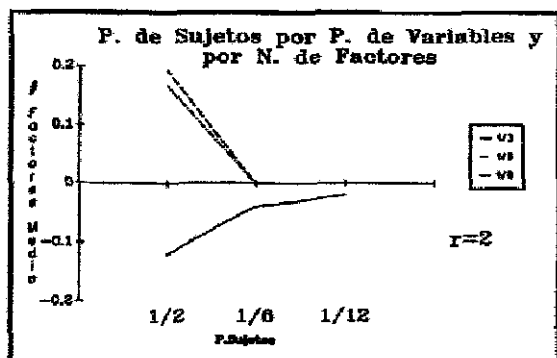


Gráfico 54

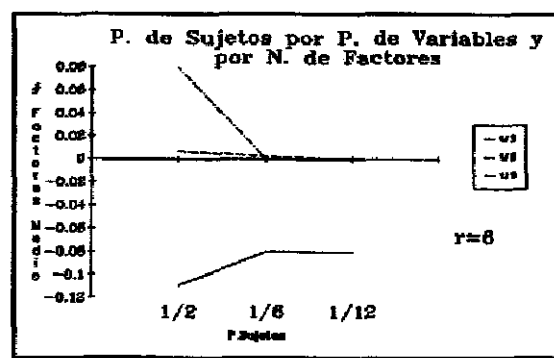


Gráfico 55

Si observamos el comportamiento de infraestimación del número de factores, para la condición de tres variables por factor, podemos ver que la infraestimación es más evidente a medida que el número de factores aumenta. Esto sólo puede ser debido a la mala elección de la regla IMA2. Esta regla es la única que empeora con el incremento de los valores de las variables independientes (aumento del número de sujetos, aumento del número de variables y aumento del número de factores).

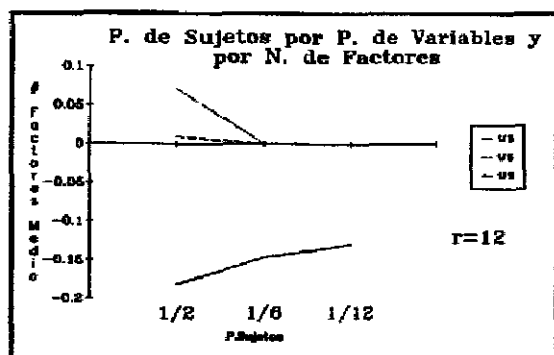


Gráfico 56

Cabe resaltar también que, en la condición de mayor número de factores, y menor número de variables, es en la que las diferentes reglas han demostrado un peor comportamiento. En esta combinación de condiciones K1 se comportó especialmente bien, frente a las demás reglas, aunque en todos los caso hubo infraestimación.

Esto confirma nuestra idea, de una falta de identificación de los factores para un número tan bajo de variables. Así, para la condición en la que K1 infraestimó el número de factores, la proporción de variables por factor correspondientes a la infraestimación fue de 3.2 variables por factor, y para PAF2 y ULS2 fue de 4.1 variables por factor.

Este mismo comportamiento se observó para diferentes números de variables, pero igual proporción de variables por factor.

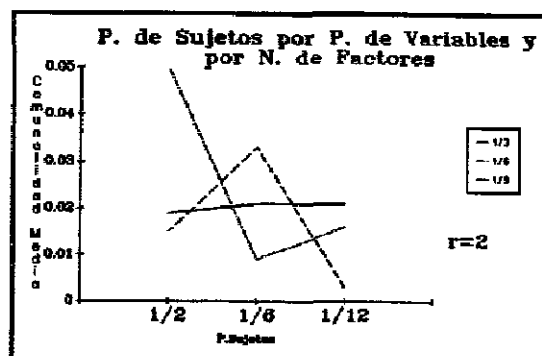


Gráfico 57

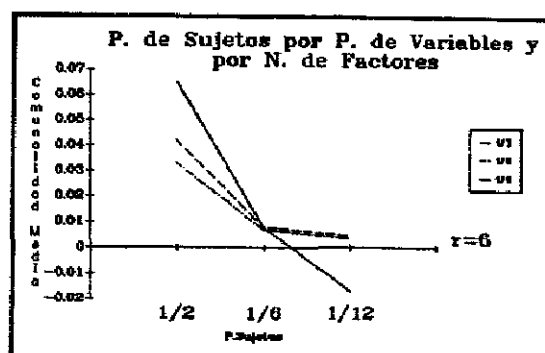


Gráfico 58

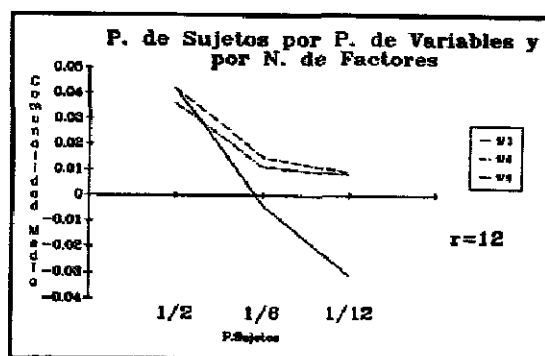


Gráfico 59

## 6. CONCLUSIONES.

A la vista de nuestros resultados, podemos concluir que no todos las reglas que hemos definido se comportan igual, ni en la estimación del número de factores, ni en la estimación de la comunalidad.

Al contrario que los resultados comunicados por Zwick y Velicer (1986) y otros autores en la misma línea (ver punto 3.2), la regla K1 no sobreestima sistemáticamente el número de factores, pero sí sobreestima la comunalidad. Este resultado está más en la línea de Hakstian y Rogers (1982).

Para cualquier número de factores, la regla K1 sobreestima el número de factores cuando la proporción de sujetos por variable es baja. Si la proporción de variables por factor también es la menor posible (1/3), la regla K1 es la que mejor se comporta, de las aquí estudiadas. Además, infraestima el número de factores si a esta combinación de condiciones añadimos un número elevado de factores (12).

Por lo tanto, podemos confiar en el comportamiento de esta regla para la determinación del número de factores, excepto en las situaciones mencionadas, en las que se debe optar por otra alternativa, por ejemplo ULS2.

Para la estimación de la comunalidad no es recomendable utilizar la regla K1 en ninguna de las situaciones aquí estudiadas. Las reglas PAF2 y ULS2, son más precisas en la estimación de la comunalidad, y deben ser preferidas a la regla K1. De lo contrario, se tenderá a una sobreestimación de la varianza explicada de las variables por los factores.



El Scree no debe ser utilizado en el formato de 80 columnas, y debe observarse con cautela cuando el número de variables es elevado. Al haber detectado errores de representación, aconsejamos que, si el investigador tiene la posibilidad, opte por una presentación gráfica más precisa.

Análisis Imagen debe ser considerado como un modelo distinto del de Factor Común. Aquellos analistas que deseen utilizar Análisis Imagen por su coherencia conceptual, deberán abstenerse de comparar sus estimaciones de la comunalidad con los de otros modelos factoriales. Este resultado concuerda con los consejos dados por Velicer y Fava (1987).

El procedimiento de estimación del modelo Mínimos Cuadrados Generalizados se comporta especialmente mal cuando la proporción de sujetos es baja, no siendo capaz de converger a una solución única. Este comportamiento se agrava cuando el número de factores de la estructura es mayor, y la proporción de variables por factor es elevada (1/9). Si este modelo es el deseable por el analista, a nivel conceptual, para ponderar las variables en función de su error típico, recomendamos comprobar el comportamiento de convergencia de las extracciones con este algoritmo, utilizando diferentes estimaciones iniciales de la comunalidad.

La estimación de la comunalidad por GLS es sistemáticamente más elevada que la de ULS o PAF, atenuándose las diferencias cuando el número de sujetos aumenta. Aunque esta diferencia de estimaciones de la comunalidad no es *significativa* respecto a las otras extracciones, en la mayoría de los casos. Este resultado nos obliga a reconsiderar el comportamiento de este procedimiento de estimación.

Las modificaciones del test de Bartlett, incluidas en Mínimos Cuadrados Generalizados y Máxima Verosimilitud, arrojaron con frecuencia valores del estadístico de contraste próximos o iguales a la unidad, cuando los tamaños de la muestra aumentaban.

Esto sugiere la reducción del número de factores sucesivamente, hasta encontrar un nivel crítico significativo, procedimiento contrario a la filosofía de la prueba. Cuando esto se hizo así, la determinación del número de factores llevaba hacia la infraestimación. En cualquier caso, estos resultados son contrarios a las ideas de Gorusch (1973), y son más coherentes con los resultados de Zwick y Velicer (1982).

No podemos aconsejar la utilización de este estadístico hasta no estar más seguros de su comportamiento en otras situaciones. Recomendamos interpretar con escepticismo los valores del mismo, y no confiar, de momento, demasiado en él.

Para la situación límite de 2 sujetos por variable, el algoritmo de Ejes Principales convergía hacia casos Heywood. Estas situaciones correspondían a tamaños de muestra de 12 y 36 sujetos. Estos tamaños son infrecuentes en este tipo de análisis, pero no dejan de reflejar un mal comportamiento del algoritmo. Lo que llama la atención es, que el algoritmo no se basa en la matriz de puntuaciones directas, sino en la matriz de correlaciones, en la que no se refleja el tamaño de la muestra. Por tanto pensamos que este comportamiento puede ser debido a la estimación incorrecta de las correlaciones simples, y como efecto subsidiario, una matriz de correlaciones poco clara. Cuando, en la fase preliminar a la simulación, se comprobó la estimación de Ejes Principales para la matriz poblacional reproducida por la estructura factorial, las estimaciones fueron adecuadas. Será necesario investigar en esta línea para concluir de forma definitiva.

A la vista de nuestros resultados, se plantean varias vías de trabajo, que pretendemos seguir, para resolver nuevas dudas que han surgido durante la investigación.

Las principales líneas de investigación posibles se pueden englobar en tres apartados principales: la mejor estimación del número de factores, la comparación de las soluciones factoriales

y la estimación de las puntuaciones factoriales.

Respecto a la estimación del número de factores, debemos probar el comportamiento de las mejores reglas que hemos obtenido, y el de nuevas reglas de fácil implementación. Ahora que disponemos de un algoritmo para la creación de muestras provenientes de poblaciones de características conocidas, debemos poner a prueba situaciones en las que las matrices de estructura sean fácilmente comparables a estructuras conocidas de datos reales.

Así, por ejemplo, deseamos poner a prueba el comportamiento de la regla K1, ULS2, PAF2 y los estadísticos asociados ML y GLS, en condiciones de mayor y menor comunalidad teórica, estructuras más complejas (como el *middle model*) y números de factores seleccionados al azar. Además, parece deseable determinar el tamaño de la muestra a valores fijos mayores, y comprobar si las reglas que ofrecieron problemas en estas situaciones siguen comportándose igual.

Nos proponemos comprobar el comportamiento del Paralell Analysis. Dado que hemos comprobado el buen comportamiento del generador de muestras aleatorias normales del SPSS, no debe resultar excesivamente complicado generar muestras con variables completamente aleatorias, de número de variables y tamaños de muestra iguales a las muestras sometidas a estudio.

Dado que hemos podido encontrar diferencias entre los distintos procedimientos de extracción (estimación) de las estructuras factoriales, deseamos comprobar el grado de congruencia de las estructuras generadas por distintos procedimientos de estimación.

En el programa SPSS existe la posibilidad de salvar las estructuras factoriales para su posterior análisis o estudio. Nos proponemos aplicar el procedimiento de comparación de estructuras desarrollado por Velicer y Fava (1987), y correcciones de su

estadístico y que parezcan convenientes. Los programas EQS y LISREL, ahora disponibles en nuestra universidad, también pueden ser de gran ayuda para este propósito.

Respecto a la estimación de las puntuaciones factoriales, deseamos comprobar la congruencia de los distintos procedimientos de generación de este tipo de puntuaciones. En concreto, el SPSS dispone de tres algoritmos de estimación de las puntuaciones factoriales, el de Bartlett, el de regresión y el de Anderson-Rubin. Deseamos contrastar los resultados de Perez Gil (1989) con nuestro generador de muestras, y ahondar en el estudio de las propiedades psicométricas de este tipo de puntuaciones, como sugieren Marradi (1981), Swamborn (1991, comunicación personal) y Melembreg (1991, comunicación personal).

## 7. RECOMENDACIONES FINALES.

La realización de este trabajo nos ha permitido llegar a una serie de conclusiones que nos permite recomendar las siguientes estrategias de trabajo y consideraciones.

Es importante tener una idea clara del procedimiento de estimación que se desea utilizar, ya que no todos los modelos ofrecen los mismos resultados.

Los investigadores que prefieran Componentes Principales por su solidez conceptual deben saber que su comparabilidad con el modelo de Factor Común no es directa, debido a la sobreestimación sistemática de la comunalidad.

Aquellos investigadores que deseen ceñirse al modelo de Factor Común deben saber que la determinación del número de factores puede llevarse a cabo por la regla K1, a menos que el número de sujetos sea tan reducido como el utilizado en nuestro estudio, en cuyo caso la regla ULS2 es más recomendable. También deben esperar una infraestimación del número de factores con la utilización de la regla K1 en situaciones de 12 factores, 3 variables por factor y dos sujetos por variable. La regla K1 es especialmente recomendable cuando el número de variables por factor se encuentra próximo al límite conceptual de 3 variables por factor. Las extracciones de GLS y ML merecen una utilización muy cautelosa, dado el comportamiento aquí observado.

El modelo de Análisis Imagen aparece como claramente distinto de los demás modelos factoriales. A menos que se esté muy interesado en replicar estudios generados por este procedimiento de análisis, se debe considerar de antemano una

reducción sistemática de la comunalidad (tal como se define en el modelo de factor común), que empeorará a medida de aumento el número de sujetos. El comportamiento mejora cuando aumenta el número de variables.

Las gráficas de la interacción cuádruple pueden servir de guía para crear expectativas en estudios que utilicen valores de la variables independientes como los aquí utilizados.

No recomendamos la utilización de los estadísticos de ML y GLS como único indicador de la bondad de ajuste del modelo. Su comportamiento nos parece dudoso, y es aconsejable utilizar, además, otras reglas para determinar el número de factores.

**Apéndice I: NORMAS DE NOTACION.**

Puesto que los modelos se desarrollan teóricamente sobre las poblaciones de variables, y no sobre las muestras de análisis, la notación utilizada seguirá las siguientes reglas.

Las matrices se representan en negrita cursiva ( $A$ ). Los vectores columna se representan en minúscula ( $a$ ). Si estos vectores corresponden a una matriz de mayores dimensiones se añadirá un subíndice, correspondiente a la columna que representan ( $a_j$ ). Los vectores fila se representan como el traspuesto de un vector columna, añadiendo una prima ( $a'$ ). Los elementos de una matriz se representan en cursiva normal, sin negrita, con los subíndices correspondientes a su fila y columna respectivamente ( $a_{ij}$ ). También pueden utilizarse subíndices en las matrices, para distinguirlas de otras que con igual nombre puedan aparecer resultado de una operación intermedia.

A menos que se explicita de manera contraria las matrices utilizadas en un modelo no se distinguirán de las que puedan aparecer con igual nombre en otro modelo distinto, o de sus homólogas en esos otros modelos. En cualquier caso se intentará evitar cualquier posible confusión de notación mediante los comentarios pertinentes en el texto que las acompañe.

La utilización de superíndices entre paréntesis corresponderá al número de la iteración, cuando una matriz sea ajustada sucesivamente por este procedimiento ( $U^{(i)}$ ).

Las operaciones que se pueden efectuar con las matrices, sus

propiedades y su notación son las correspondientes a la axiomática general de matrices como vienen recogidas, por ejemplo, en Saerle (1982).

Las variables, como las de entrada en un modelo, son variables aleatorias con forma de distribución conocida y se representan como un vector de dimensiones  $n \times 1$  cuyos elementos son las coordenadas en el espacio de cada una de las variables aleatorias. Explicitar un tamaño para la población de puntuaciones no tendría sentido ya que las poblaciones por definición son de tamaño infinito.

De esta forma, la matriz de covarianzas de las  $n$  variables contenidas en el vector  $Z$  vendrá definida por la operación  $E(ZZ')$  que dará lugar a una matriz  $R$  de dimensiones  $n \times n$  cuyos elementos serán las operaciones

$$E(z_i, z_j) = \text{var}(z_i, z_j) = \sigma_{ij} \quad (1)$$

donde  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . En la diagonal  $i=j$  por lo que los elementos diagonales de  $R$  corresponden a las varianzas de las variables aleatorias. Si las variables están estandarizadas la matriz de covarianzas  $R$  será la matriz de correlaciones poblacionales, y los elementos diagonales serán unitarios.

Cuando se hable de una realización del modelo, es decir, una muestra, se explicitará el tamaño de la muestra en las dimensiones de la matriz. Las filas corresponderán a las variables y las columnas corresponderán a las puntuaciones de los sujetos de la muestra en esa variable.

En estos casos, las operaciones y notación utilizadas para calcular las estimaciones de los parámetros del modelo variarán ligeramente. De esta forma, la matriz de correlaciones de  $n$  variables estandarizadas provenientes de una muestra de tamaño  $N$  vendrá definida por la operación  $R = \frac{1}{N-1} Z'Z$ , donde los



elementos de  $R$  vienen definidos como la estimación insesgada de la covarianza (la correlación) entre las variables  $z_i$  y  $z_j$ ; como

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N z_{ik} z_{jk}}{N-1} = \frac{1}{N-1} (\mathbf{z}'_i \mathbf{z}_j) \quad (2)$$

Esta será la notación y operaciones que se utilizarán en los programas de cálculo desarrollados aquí. Si existiera confusión entre la notación de vectores aleatorios y la de matrices muestrales, se hará explícito.

Aunque aquí se ha intentado mantener una homogeneidad en la notación de los diversos modelos, diferentes autores denominan de distinta forma a las mismas matrices. Por ello es muy importante que se tenga en cuenta que es el desarrollo teórico de cada modelo lo que hemos querido recopilar, y se ha mantenido igual a los manuales de los que se ha recogido, pero no así la notación. Si se quieren comparar las fórmulas aquí referidas con las de los textos originales deberá tenerse en cuenta que, en la mayoría de los casos, no coincidirán.

**Apéndice II: MEMORIA DE LA SIMULACION.**

Inicialmente, se utilizó el propio generador del SPSS/PC+ (versión 3.0) para la creación de las variables distribuidas normalmente con la orden `compute` y la especificación para variables normales con los parámetros de media 0 y desviación típica 1. Para asegurar la independencia de las variables, ya que el generador de números no asegura la independencia, y dado que con tamaños de muestra elevados es fácil alcanzar valores de significación para correlaciones despreciables, se introdujeron las muestras en un análisis de componentes principales que extrajera, por tanto, el mismo número de componentes que variables. Después, se salvaron las puntuaciones factoriales resultantes, según la transformación de Anderson-Rubin, el cual establece una media 0 y una desviación típica de 1 para las puntuaciones factoriales de todos los factores. Estas puntuaciones fueron grabadas en soporte magnético y constituyeron las muestras de variables independientes de partida. El ordenador utilizado fue un IBM 80286. El procesador de textos utilizado para crear los ficheros de instrucciones fue el *WordPerfect* (5.0), dado que ofrecía mayor versatilidad de edición que la del *Review* suministrado con el SPSS/PC+ (3.0).

Para que nuestros datos, hasta ahora independientes respecto a las variables, estuvieran sujetos a una estructura factorial conocida, se introducían en un programa de BASIC con las características reseñadas en el punto 4. Las puntuaciones resultantes se grababan como muestras de variables tipificadas de estructura conocida, como aquellas utilizadas habitualmente como punto de partida en un análisis factorial, es decir,

aquellas sobre las que se calcula la matriz  $R$  de correlaciones<sup>17</sup>. En este punto, tuvimos que enfrentarnos con los problemas típicos de la utilización de lenguajes de programación generales para las tareas algebraicas del cálculo matricial. Para asegurarnos de la correspondencia entre los resultados de los algoritmos implementados en el programa y los cálculos deseados, se monitorizó la tarea de cálculo del ordenador mediante pantallas de información (displays) que reprodujeran fidedignamente las matrices utilizadas en los cálculos y sus resultados. Este fue el programa prototipo, ya que una vez verificada la eficiencia del programa, no tenía sentido la pérdida de tiempo de computación en una visualización de datos intermedios, sobre todo teniendo en cuenta que una sola pantalla no es capaz de ofrecer simultáneamente demasiada información y que la masa de datos sería muy voluminosa.

El prototipo fue modificado para realizar secuencialmente y sin interrupción, todas las muestras posibles, mediante la preparación de ficheros con los datos muestrales y las matrices de estructuras factoriales necesarias. Se ejecutó y depuró hasta que los resultados fueron los deseados.

Las muestras así generadas deberían ser introducidas en el SPSS/PC+ para observar el comportamiento de las reglas de decisión sobre el número de factores propuestas en el apartado 4.

Una vez generadas las muestras independientes con el generador del SPSS, nos dimos cuenta de que dichas muestras iniciales ocupaban por sí mismas un espacio de memoria mayor a

---

<sup>17</sup> Las variables introducidas en el programa tienen todas igual variabilidad, al contrario de lo que supone el modelo  $Z=CF'+UD$ , en el que cada variable factorial posee la varianza correspondiente a su autovalor. Este aspecto no es contemplado por el programa, pero tampoco es imprescindible, ya que esto no va a tener repercusión sobre la matriz de correlaciones, que es sobre la que se extraen los autovalores (ver SPSS Statistical Algorithms, 1985; pág 68).

los 12 Megas de disco fijo. Esto suponía que la ejecución del programa de BASIC duplicaría esta cantidad y no dispondríamos del espacio necesario en el disco duro de los equipos de que disponíamos (20 Megas). Por ello, tuvimos que recurrir a introducir paulatinamente las muestras y hacer salvaguardias (Backups) de los datos que se fueran generando.

Sin embargo, al ejecutar las muestras de mayor tamaño, nos encontramos con que la versión de BASIC para PC era incapaz de ejecutar los cálculos con ese volumen de datos, lo que cerraba la puerta a parte de las condiciones experimentales que, probablemente, serían las de mayor interés, dada su similitud a las situaciones reales del trabajo de investigación en psicología con estas técnicas. Como no estábamos dispuestos a renunciar a estas condiciones experimentales, decidimos buscar ordenadores de mayor potencia. Así, llegamos a utilizar el VAX de Digital de nuestro centro de cálculo.

El primer paso, ahora, era conseguir que el programa de comunicaciones (*XTALK VI*), que utilizamos como puente entre nuestro PC (que debía trabajar como terminal tonto) y el VAX fuera eficaz tanto en la transmisión de datos como en la reproducción de los comandos. Afortunadamente, los miembros del Centro de Cálculo se encontraban en una fase de prueba muy avanzada a este respecto, y no existieron demasiados problemas a la hora de disponer de los manuales y documentación correspondientes. Los Teléfonos-Modem *VOX-DATA* de que disponemos funcionan a 9.600 baudios, una velocidad suficiente para la transmisión de datos, aunque el programa *KERMIT* (versión 32) que ejecuta el protocolo de transmisión no resulta excesivamente rápido. Esto supuso que la transmisión de los datos requiriera un tiempo considerable. El sistema operativo *DEC/VMS*, por su parte, no estribaba demasiada dificultad.

Sin embargo, la eficacia encontrada hasta ahora en el VAX empezó a ser menos evidente cuando probamos las distintas utilidades que necesitábamos. El procesador de textos *EDT* era

suficientemente bueno para nuestras necesidades, pero la versión de BASIC ofrecía marcadas diferencias con la versión de PC, y los programas debían ser reescritos bajo los nuevos formatos de variables y definición de canales de acceso a ficheros. Lo que no pudimos afrontar, fue la antigüedad del SPSSX (release 9.1, 1982) instalado en el VAX. Esta versión no permitía el trabajo en modo interactivo, y en modo batch no funcionaba tan bien como sería deseable.

Por otra parte, dado que debíamos revisar todo lo hecho hasta ahora, el tiempo de trabajo interactivo que necesitábamos era considerable, y el número de usuarios de este ordenador lentificaba considerablemente la ejecución de comandos. En vista de todos estos inconvenientes, decidimos mudar el trabajo al IBM 4281 del mismo centro de cálculo.

En este ordenador contábamos con una de las últimas versiones del SPSSX (versión 3.0, 1989) que reunía todos los requisitos necesarios de procesamiento interactivo y batch. La versión del BASIC era también diferente aunque suficientemente versátil. El sistema operativo general (CP) y el sistema operativo de las máquinas virtuales (el CMS), junto con sus utilidades, no resultaban complicadas. El procesador de textos XEDIT resultó bastante potente, y sólo faltaba probar el programa de transmisión PC-MAINFRAME. Desafortunadamente no existían utilidades del tipo KERMIT, por no tratarse de un terminal ASCII, y tuvimos que optar por utilizar el VAX como nodo intermedio de transmisión y utilizar el MAIL de la facultad a través de la red EARN-BITNET.

El programa XTALK no era capaz de reproducir el código correspondiente al carácter "#" (ascii 209), necesario para la definición del tipo de variables decimales y para la definición de canales de datos en el BASIC. Por ello, no podíamos escribir los programas de BASIC en interactivo y debíamos escribir los programas con el procesador de textos e introducir el carácter en forma EBCDIC, para luego interpretar los ficheros de programa

y supervisarlos en interactivo.

Posteriormente, decidimos utilizar otro programa de comunicaciones más versátil, el Procom Plus, que permitía la redefinición del teclado y de las teclas de función para la emisión de caracteres de control para el limpiado de pantalla, el movimiento del cursor, etc., ya que la mayoría de las utilidades del 4281 son a pantalla completa y es necesaria una presentación muy ajustada de ella para poder operar. La traducción de los caracteres de pantalla permitió visualizar los códigos de control como el #, transformando su valor hexadecimal original al equivalente ASCII<sup>18</sup>. Como, además, un carácter ASCII cualquiera puede ser introducido directamente pulsando la tecla *Alt* y la secuencia numérica correspondiente en el teclado numérico expandido, no era necesario reinterpretar los ficheros de programa y era posible trabajar en interactivo.

Puesto que el formato de lectura de ficheros del BASIC no permitía la disposición de los datos en forma de más de una columna, como son grabados por el SPSS, si se efectuaba en formato nativo-secuencial, se reescribieron los ficheros de comandos del SPSS para que los datos adquirieran este formato. Podríamos haber escrito un programa más complejo para ficheros de acceso aleatorio o indexados, pero el SPSS no respeta la longitud de registro por sujeto en la grabación de puntuaciones factoriales a menos que se especifique, cosa que no era necesaria para la lectura secuencial en el BASIC/PC. Además, algunas muestras contienen 108 variables, y no es posible crear ficheros con una longitud de registro tal que contenga todas las variables simultáneamente. De esta forma, deberíamos haber escrito prácticamente un programa de BASIC diferente para cada tipo de muestra. También, podríamos haber importado los ficheros utilizados originalmente para la creación de las muestras en el

---

<sup>18</sup> Estos ordenadores no utilizan el mismo diccionario de códigos que los ordenadores personales, sino otro llamado EBCDIC.

SPSS/PC+ y modificarlos, pero las características del SPSSX exigen formatos diferentes para su ejecución en modo batch y resultaba más simple la creación de nuevos ficheros que especificaran la grabación de los datos en una única columna.

Dadas las complicaciones que fueron apareciendo para la transmisión, modificación y/o reescritura de los ficheros de órdenes del SPSS, decidimos adoptar otro procedimiento de generación de números. Utilizando un algoritmo bastante frecuente, recogido en Lewis y Orav (1989), volvimos a escribir los programas con una nueva filosofía más integrada.

Una vez se escribieron los programas correspondientes, se procedió a su ejecución. Por ahorro de tiempo, algunos de los programas, aquellos con mayores requisitos de memoria, fueron ejecutados en las máquinas de colas batch, con la ventaja de poder dedicar la máquina a otra tareas simultáneamente. Los programas del intérprete/compilador BASIC/VM (release 2.0) eran compilados previamente y ejecutados con BASICRUN.

Debido a los requisitos de memoria dinámica necesarios para la creación de las muestras correspondientes a algunas de las condiciones (más de 4M para las condiciones M32XX y M33XX), ha sido necesario modificar el programa generador de BASIC para la liberación intermedia de memoria mediante la grabación de las matrices intermedias en un OVERLAY y la posterior lectura para su transformación, y redimensionar las matrices ya existentes o, de lo contrario, la orden DIM desbordaría la memoria antes de tiempo.

En este período de tiempo, el centro de cálculo de la universidad llevó a cabo la sustitución del IBM 4586 por un 3090 del 4586 y el VAX 780 por un 6030. Esto nos permitió una mayor potencia de cálculo y ejecutar todas las muestras con la misma estructura básica de programa.

A modo orientativo, podemos reseñar que las muestras de la

condición M333 ocupan más de 450 bloques en disco (más de 1.5 Megas) cada una y necesitan 10 Megas de memoria de trabajo para su generación. Los análisis del SPSS, por su parte, pueden llevarse a cabo con 4 a 6 megas de memoria.

Debido a las necesidades de espacio en disco, las muestras no podían ser conservadas, por lo que debían ser pasadas a cinta y destruidas del espacio de trabajo.

Puesto que los listados del SPSS resultaban demasiado voluminosos, tanto para su grabación en el espacio de trabajo disponible, como para su lectura posterior en busca de la información relevante, optamos por varios trucos. En las extracciones sólo se requerían los estadísticos finales de dichas extracciones, desechando el listado por defecto del programa. Se estableció la longitud de las páginas de listado al mínimo (24) y se cambió el título del análisis de cada muestra, para que en la cabecera de cada pantalla apareciera el número de muestra revisado. Se redefinieron las funciones del presentador de ficheros por pantalla BROWSE, de manera que fuera posible la búsqueda de palabras claves en los listados. De esta forma, no era necesario revisar pantalla a pantalla los listados, sino "saltar" directamente a las zonas de información relevante.

Como, además, las comunicaciones del 3090 no estaban completamente resultas cuando nosotros estábamos ya en un estado muy avanzado de la simulación, decidimos no utilizar más las colas batch y ejecutar todos los programas en interactivo, para lo que fue conveniente redefinir las teclas de función para la repetición instantánea de conjuntos de comandos del sistema operativo.

Para solucionar muchos de los problemas que fuimos encontrando, intentamos tener en cuenta siempre que la idea inicial fue intentar llegar a una serie de pruebas que pudieran ser aplicadas directamente sobre paquetes estándar comercializados sin añadir esfuerzos computacionales adicionales.



Además, el BASIC es uno de los lenguajes de programación más simples y más asequibles, pudiendo encontrarse implementados en cualquier ordenador con el software de instalación.

Por otra parte, una vez comenzado el trabajo con BASIC no interesaba dar marcha atrás y comenzar con nuevos lenguajes de programación, posiblemente más potentes y estructurados. Si bien no pocos manuales ofrecen programas de cálculo en FORTRAN o APL, y las librerías de módulos científicos para estos lenguajes están muy desarrolladas, no pareció rentable un cambio de lenguaje.

**9. BIBLIOGRAFIA.**

- Alwin, D.F. y Jackson, D.J. (1979). Measurement models for response errors in surveys: Issues and applications. EN: K. F. Schuessler (Ed): *Sociological Methodology 1980*. San Francisco: Jossey-Bass, 68-119.
- Anderson, T.W. (1958). *An Introduction to multivariate statistical analysis*. NY: John Wiley & Sons.
- Anderson, T.W. y Rubin, H. (1956). Statistical inference in factor analysis. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 111-150.
- Akaike, H. (1987). Factor Analysis and AIC. *Psychometrika* 52, 3, 317-332.
- Bargmann, R.E. (1957). *A study of Independence and Dependence in Multivariate Normal Analysis*. Mimeo Series N° 186, Chapel Hill, N.C.: Institute of Statistics.
- Bartlett, M.S. (1951). A further note on tests of significance in factor analysis. *British Journal of Psychology, Statistical Section*, 4, 1-2.
- Bartlett, M.S. (1950). Tests of significance in factor analysis. *British Journal of Psychology*, 3, 77-85.
- Bekker, P.A. (1986): A note on the identification of restricted factor loading matrices. *Psychometrika*, 51, 4, 607-611.

- Bentler, P.M. (1985). *Theory and Implementation of EQS: A Estructural Equation Program*. Los Angeles: BMDP Statistical Software.
- Bentler, P.M. y Mooijaart, A. (1989). Choice of structural model via parsimony: A rationale based on precision. *Psychological Bulletin*, 106, 315-317.
- Blalock, H.M. (Ed) (1971). *Causal Models in the Social Sciences*. Chicago: Aldine-Atherton.
- Bobko, P. y Schemmer, F.M. (1984). Eigenvalue shrinkage in principal-component based factor analysis. *Applied Psychological Measurement*, 8, 439-451.
- Bollen, K.A. (1989). *Structural Equations with Latent Variables*. NY: John Willey & Sons.
- Bollen, K.A. y Jöreskog, K.G. (1985). Uniqueness does not imply identification: A note on confirmatory factor analysis. *Sociological Methods and Research*, 14, 155-153.
- Browne, M.W. (1968). A note on lower bounds for the number of common factors. *Psychometrika*, 33, 233.
- Browne, M.W. (1968b). A comparison of factor analytic techniques. *Psychometrika*, 33, 267-334.
- Browne, M.W. (1967). On oblique Procrustes rotation. *Psychometrika*, 32, 125-132.
- Burt, C. (1939). The factorial analysis of emotional traits. *Character and Personality*, 7, 238-254, 285-299.
- Cattell, R.B. (1966): *The Scree Test for the Number of Factors*. *Multivariate Behavioral Resaerach*, 1, 245-276.

Cattell, R.B. y Jaspers, J.A. (1967): *A General Plasmode for Factor Analytic Exercises and Research*. Multivariate Behavioral Research Monographs.

Butler, J.M. (1968). Descriptive factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 3, 355-370.

Butler, J.M. y Hook L.H. (1966). Multiple factor analysis in terms of weighted multiple regression. *Educational and Psychological measurement*, 26, 545-565.

Cattell 1977

Cattell 1967

Cattell, R.B. (1966). The scree test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1, 245-276.

Cattell, R.B. y Jaspers, J.A. (1967). *A General Plasmode for Factor Analytic Exercises and Research*. Multivariate Behavioral Research Monographs.

Cattell, R.B. y Vogelmann, S.A. (1977). A Comprehensive Trial of the Scree and KG Criteria for Determining the number of Factors. *Multivariate Behavioral Research*. 12, 289-325.

Cholesky, A.L. (1915). Referenciado por Harman (1980).

Cliff, N. (1988). The eigenvalues-greater-than-one rule and the reliability of components. *Psychological Bulletin*, 103, 276-279.

Cliff, N. y Pennell, R. (1967). The Influence of Communalities, Factor Strength and Loading Size on the Sample Characteristics of Factor Loadings. *Psychometrika*, 32, 309-329.

- Comrey, A.L. (1978): Common methodological problems in factor analysis. *Journal of Consulting and Clinical Psychology*, 46, 648-659.
- Cooley, W.W. y Lohnes, P.R. (1962). *Multivariate Procedures for the Behavioral Sciences*. NY: John Wiley & Sons.
- Crawford, C.B. (1975). Determining the number of interpretable factors. *Psychological Bulletin*, 82, 226-237.
- Crawford, C.B. y Koopman, P. (1979). Note: Inter-rater reliability of scree test and mean square ratio test of number of factors. *Perceptual and Motor skills*, 49, 223-226.
- Crombach, L.J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16, 297-334.
- Crombach, L.J. Rajaratnam N. y Gleser, G.C. (1963). Theory of generalizability: A liberalization of reliability theory. *British Journal of Statistical Psychology*, 16, 137-163.
- Driel, O.P. (1978). On various causes of improper solutions in maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 43, 225-243.
- Duncan, O.D. (1975). *Introduction to Structural Equation Models*. New York: Academic Press.
- Dwyer, P.S. (1944). A matrix presentation of least squares and correlation theory with matrix justification of improved methods of solution. *Annals of Mathematical Statistics*, 15, 82-89.
- Everitt, B.S. (1981). A Monte Carlo investigation of the

likelihood ratio test for the number of components in a mixture of normal distributions. *Multivariate Behavioral Research*, 16, 171-180.

## Fadeva

Geiser, S. y Greenhouse, S.W. (1958). An extension of Box's results on the use of the F distribution in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29, 885-891.

Goldberger, S. (1964). *Econometric Theory*. New York: John Wiley & Sons.

Gorusch, R.L. (1973). Using Bartlett's significance test to determine the number of factors to extract. *Educational and Psychological Measurement*, 33, 361-364.

Gorusch, R.L. (1974). *Factor Analysis*. Philadelphia: Saunders.

Green, S.B. (1983). Identifiability of spurious factors using linear factor analysis with binary items. *Applied Psychological Measurement*, 7, 139-147.

Greenhouse, S.W. y Geisser, S. (1959). On methods of the analysis of profile data. *Psychometrika*, 24, 95-112.

Gujarati, D.N. (1989). *Basic Econometrics*. New York: McGraw-Hill.

Guttman, L. (1956). "Best possible" systematic estimates of communalities. *Psychometrika*, 21, 273-285.

Guttman, L. (1955): The determinance of factor score matrices with implications for five others basic problems of common factor theory. *British Journal of Statistical*

- Psychology*, 8, 65, 81.
- Guttman, L. (1954). Some necessary conditions for common-factor analysis. *Psychometrika*, 19, 149-161.
- Guttman, L. (1953). Image theory for the structure of quantitative variates. *Psychometrika*, 18, 277-296.
- Hakstian, A. y Muller, V.J. (1973). Some notes on the number of factors problem. *Multivariate Behavioral Research*, 461-475.
- Hakstian, A.R., Rogers, W.T. y Cattell, R.B. (1982). The behavior of number of factor rules with simulated data. *Multivariate Behavioral Research*, 17, 193-219.
- Harman, H.H. (1980). *Análisis Factorial Moderno*. Madrid: Saltés.
- Harman, H.H. (1976). *Modern Factor Analysis*. Chicago: University of Chicago Press.
- Harman, H.H. (1960). Factor analysis. EN: H.S. Wilf y A. Ralston (Ed): *Mathematical Methods for Digital Computers*. NY: John Willey & Sons, 204-212.
- Harman, H.H. (1967). *Modern Factor Analysis*. Chicago: University of Chicago Press.
- Harman, H.H. y Fukuda, Y. (1966). Resolution of the Heywood case in the minres solution. *Psychometrika*, 31, 563-571.
- Harman y Jones, W.H. (1966). Factor analysis by minimizing residulas (minres). *Psychometrika* 31, 351-368.
- Harris, C.W. (1967). On factors and factor scores. *Psychometrika*, 32, 363-379.

- Harris, C.W. y Kaiser, H.F. (1964). Oblique factor analytic solutions by orthogonal transformations. *Psychometrika*, 29, 347-362.
- Harris, C.W. (1963). Canonical factor models for the description of change. EN C.W. Harris (Ed) *Problems in Measuring Change*. Madison Wis.: University of Wisconsin Press.
- Harris, C.W. (1962). Some Rao-Guttman relationships. *Psychometrika*, 27, 247-263.
- Harris, C.W. (1956). Relationships between two systems of factor analysis. *Psychometrika*, 21, 185-190.
- Heise, D.R. (1975). *Causal Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Horn, J.L. (1969). On the internal consistency reliability of factors. *Multivariate Behavioral Research*, 4, 115-125.
- Horn, J.L. (1965): A rationale and test for the number of factors in factor analysis. *Psychometrika*, 30, 179-185.
- Horn, J.L. y Engstrom, R.E. (1979): Cattell's scree test in relation to Bartlett's chi-square test and other observations on the number of factors problem. *Multivariate Behavioral Research*, 14, 283-300.
- Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24, 417-441, 498-520.
- Howe, W.G. (1955). *Some contributions to factor analysis*. Report N° ONRL-1919, Oake Ridge, Tenn.: Oak Ridge National Laboratory.



- Humphreys, L.G. (1964). Number of cases and number of factors: An example where  $N$  is very large. *Educational and Psychological Measurement*, 24, 457.
- Humphreys, L.G. e Ilgen, D.R. (1969): Note on a criterion for the number of common factors. *Educational and Psychological Measurement*, 29, 571-578.
- Humphreys, L.G. y Montanelli, R.G. (1975). An investigation of the parallel analysis criterion for determining the number of common factors. *Multivariate Behavioral Research*, 10, 193-206.
- Ihara, M., Kano, Y. (1986): A new estimator of the uniqueness in factor analysis. *Psychometrika*, 51, 4, 563-566.
- Jackson, D.N. y Chan, D.W. (1980): Maximum-likelihood estimation in common factor analysis: A cautionary note. *Psychological Bulletin*, 88, 502-508.
- Jennrich, R.I. (1986): A Gauss-Newton algorithm for exploratory factor analysis. *Psychometrika*, 51, 2, 277-284.
- Jöreskog, K.G. (1981). Analysis of covariance structures. *Scandinavian Journal of statistics*, 8, 65-92.
- Jöreskog, K.G. (1979). Basic ideas of factor and component analysis. En: Magidan, J. (Ed.). *Advances in factor analysis and structural equations models*, (pp. 5-20). Cambridge, MA: Abt.
- Jöreskog, K.G. (1974). Analyzing Psychological data by structural analysis of covariance matrices. EN: R.C. Atkinson, D.H. Krantz, R.D. Luce y P. Suppes (Ed): *Contemporary Developments in Mathematical Psychology*.

- San Francisco: Freeman, 1-56.
- Jöreskog, K.G. (1973). A general method for estimating a linear structural equation system . En: A.S. Goldberger y O.D. Duncan (Ed).: *Structural Equation Models in the Social Sciences*. New York: Seminar Pres: 82-115.
- Jöreskog, K.G. (1969). Efficient estimation in image factor analysis. *Psychometrika*, 34, 51-75.
- Jöreskog, K.G. (1967): Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, 32, 443-482.
- Jöreskog, K.G. (1966). Testing a simple structure hypothesis in factor analysis. *Psychometrika*, 31, 165-178.
- Jöreskog, K.G. (1962). On the statistical treatment of residuals in factor analysis. *Psychometrika*, 27, 335-354.
- Jöreskog, K.G. y Lawley, D.N. (1968). New methods in maximum likelihood in factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 21, 85-96.
- Jöreskog, K.G. y Sörbom, D. / SPSS Inc. (1988). *LISREL 7: A Guide to the Program and Applications*. Chicago: IL. SPSS Inc.
- Jöreskog, K.G. y Sörbom, D. (1986). *LISREL VI: Analysis of Linear Structural Relationships by Maximum Likelihood and Least Square Methods*. Mooresville. IN: Scientific Software.
- Jöreskog, K.G. y Sörbom, D. (1986b). *SIMPLIS: A Fast and Simple Version of LISREL*. Mooresville. IN: Scientific Software.

- Kaiser, H.F. (1970). A second generation little jiffy. *Psychometrika*, 35, 401-415.
- Kaiser, H.F. (1965). Psychometric approaches to factor analysis. *Proceedings of the 1964 Invitational Conference on Testing Problems*. Princeton, N.J.: Educational Testing Service, 37-45.
- Kaiser, H.F. (1963). Image Analysis. EN: C.W. Harris (Ed), *Problems in Measuring Change*. Madison, Wis: University of Wisconsin Press, 156-166.
- Kaiser, H.F. (1962). Formulas for component scores. *Psychometrika*, 27, 83-87.
- Kaiser, H.F. (1961). A note on Guttman's lower bound for the number of common factors. *British Journal of Statistical Psychology*. 14 (1), 1.
- Kaiser, H.F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and Psychological Measurement*, 20, 141-151.
- Kaiser, H.F. y Caffrey, J. (1965). Alpha factor analysis, *Psychometrika*, 30, 1-14.
- Karsten, S. Groot, C.A.M. y Ruiz, M.A. (1991). *Onderwijspolitiek in verjelijkend perspectief*. Onderwijsresearchdagen '91. Amsterdam.
- Kenny, D.A. (1979). *Correlation and Casuality*. New York: John Wiley & Sonsns.
- Lawley, D.N. (1949). Problems in factor analysis. *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, 62, 394-399.
- Lawley, D.N. (1943). A note on Karl Pearson's selection

- formulae. *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, 2, 28-30
- Lawley, D.N. (1942). Further investigation in factor estimation. *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, 61, 176-185.
- Lawley, D.N. (1940). The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood. *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, 60, 64-82.
- Lee, H.B. y Comrey, A.L. (1979). Distortions in a commonly used factor analytic procedure. *Multivariate Behavioral Research*, 14, 301-321.
- Lee, S-Y y Poon, W-Y. (1986). Maximum Likelihood estimation of polyserial correlations. *Psychometrika*, 51, 113-121.
- Lewis, P.A. y Orav, E.J. (1989). *Simulation Methodology for Statisticians, Operations Analysts and Engineers*. (Vol. 1). Belmont, CA.: Wadsworth & Brooks/Cole.
- Linn, R.L. (1968). A Monte Carlo approach to the number of factors problem. *Psychometrika*, 33, 37-71.
- Lord, F.M. (1953). The relation of test score to the trait underlying the test. *Educational and Psychological Measurement*, 15, 517-548.
- Lord, F.M. y Novick, M.R. (1968). *Statistical Theories of Mental Test Scores*. Reading, MA.: Addison-Wesley.
- Marsh, H.W., Balla, J.R. y McDonald, R.P. (1988). Goodness-of-fit indexes in confirmatory factor analysis: The effect of sample size. *Psychological Bulletin*, 103, 391-410.

- Marradi, A. (1981). Factor Analysis as an aid in the formation and refinement of empiricallu useful concepts. EN: D.J. Jakson y E.F. Borgatta. *Factor Analysis and Measurement in Sociological Research: A multidimensional Perspective*. Beverly Hills, CA: SAGE.
- McDonald, R.P. (1985): *Factor Analysis and related methods*. Hillsdale, NJ:Lawrence Elrbaum.
- McDonald, R.P. y Mulaik, S.A. (1979): Determinancy of common factors. A nontechnical review. *Psychological Bulletin*, 86, 297-306.
- Montanelli, R.G. y Humphreys, L.G. (1976). Latent roots of latent data correlation matrices with squared multiple correlations on the diagonal: A Monte Carlo study. *Psychometrika*, 41, 341-348.
- Mote, T.A. (1970). An artifact of the rotation of too few factors: Study orientation vs. trait anxiety. *Revista Internacional de Psicología*, 37, 61-91.
- Mulaik, S.A. (1986). Factor analysis and *Psychometrika*: major developments. *Psychometrika*, 51, 1, 23-33.
- Mulaik, S.A. (1981). A note on sufficient conditions that a common factor will be determinate in an infinite domain of variables. *Psychometrika*, 46, 105-108.
- Mulaik, S.A. (1972). *The Foundations of Factor Analysis*. NY: McGraw-Hill.
- Ortega, J.M. y Kaiser, H.F. (1963). The  $LL^T$  and QR for simetric tridiagonal matrices. *The computer Journal*, 6, 99-101.
- Pearson, K. (1901). On lines and planes of closest fit to

- system of points in space. Referenciado por Harman (1980).
- Perez Gil, J.A. (1989). Analisis factorial: El uso de métodos de extracción inicial de factores y sus implicaciones en la construcción de escalas de medidas para los factores. *Actas del Primer Symposium Nacional de Metodología de las Ciencias Humanas, Sociales y de la Salud*. Salamanca.
- Rao, C.R. (1955). Estimation and tests of significance in factor analysis. *Psychometrika*, 20, 93-111.
- Revelle, W. y Rocklin, T. (1979): Very simple structure: An alternative procedure for estimating the optimal number of interpretable factors. *Multivariate Research*, 14, 403-414.
- Reynolds, T.J. y Cliff, N. (1984). An interactive preference ordering model and its Monte Carlo evaluation. *Psychometrika*, 49, 247-255.
- Rummel, R.J. (1970). *Applied Factor Analysis*. Evanston: Northwestern University Press.
- Ruiz, M.A. y San Martín, R.A. (1988). *Guía Práctica para la Utilización del SPSS en Técnicas Multivariadas*. Madrid: Universidad Autónoma (publicación interna).
- San Martín, R.A. Olea, J. y Ruiz, M.A. (1988). *Psicoestadística Multivariada: 2. Componentes Principales*. Madrid: U.A.M. (publicación interna).
- San Martín, R.A. y Pardo, A. (1989). *Psicoestadística: Contrastes Paramétricos y No Paramétricos*. Madrid: Pirámide.
- Saris, W.E. y Stronkhorst, L.H. (1984). *Causal Modelling in*

- Non-Experimental Research*. Amsterdam: Sociometric Research.
- Satorra, A. (1987). alternative test criteria in covariance structure analysis: A unified approach. *Psychometrika*, en prensa.
- Satorra, A. y Saris, W.E. (1985). Power of the likelihood ratio test in covariance structure analysis. *Psychometrika*, 50:83-90.
- Searle, (1982). *Matrix Algebra Useful for Statistics*. NY: John Wiley & Sons.
- Schöneman, P.H. (1965). *On the Formal Differentiation of Traces and Determinants*. Research Memorandum N° 27, Chapel Hill, N.C.: The Psychometric Laboratory.
- Sobel, M.E. y Bohrnstedt, G.W. (1989). Use of null models in evaluating the fit of covariance structure models. *Sociological Methodology*, 49, 152-178.
- Spearman, C. (1904). General Intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, 15, 201-293.
- Spearman, C. (1927). *The Abilities of Man*. New York: Macmillan.
- SPSS Inc. (1985). *SPSS Reports: SPSS Statistical Algorithms*. Chicago, Ill.: SPSS Inc.
- Steiger, J.H. y Schönemann, P.H. (1978). *A history of factor indeterminacy in theory construction and data analysis in behavioral sciences*. S. Shye (Ed). San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

- Thomson, E.H. (1934). Hotelling's method modified to give Spearman's  $g$ . *Journal of Educational Psychology*, 25, 366-374.
- Thurstone, L.L. (1947). *Multiple Factor Analysis*. Chicago: University of Chicago Press.
- Tucker, L.B., Koopman, R.F. y Linn, R.L. (1969). Evaluation of factor analytic research procedures by means of simulated correlation matrices. *Psychometrika*, 34, 421.
- Tyron, R.C. (1959). Domain sampling formulation of cluster and factor analysis. *Psychometrika*, 24, 113-135.
- Tyron, R.C. (1957). Comunalidad of a variable: Formulation by cluster analysis. *Psychometrika*, 22, 241-260.
- Upperman, P.M. (1984). The ratio of the true to estimated values when determining the number of items in a batch by means of weighting. *Kwantitative Methoden*, 15, 110-122.
- Velicer, W.F. y Fava, F.L. (1987). An evaluation of the effects of variable sampling on Component, Image and Factor Analysis. *Multivariate Behavioral Research*, 1987, 22, 193-209.
- Velicer, W.F. (1977). An empirical comparison of the similarity of principal component, image and factor patterns. *Multivariate Behavioral Research*, 12, 3-22.
- Velicer, W.F. (1976). Determining the number of components from the matrix of partial correlations. *Psychometrika*, 41, 321-327.
- Velicer, W.F. (1974). A comparison of the stability of factor analysis, principal component analysis and rescaled image



- analysis. *Educational and Psychological Measurement*, 34, 563-572.
- Velicer, W.F., Peacock, A.C. y Jackson, D.N. (1982). A comparison of component and factor patterns: A Monte Carlo approach. *Multivariate Behavioral Research*, 17, 371-388.
- Wilkinson, J.H. (1960). Householder's method for the solution of the algebraic eigenproblem. *The computer Journal*, 3, 23-27.
- Williams, J.S. (1981). A note on the uniqueness of minimum rank solutions in factor analysis. *Psychometrika*, 46, 109-110.
- Winer, B.J. (1971). *Statistical Principles in Experimental Design*. New York: McGraw-Hill.
- Yanai, H.D. e Ichikawa, N. (1990). New lower and upper bounds for communality in factor analysis. *Psychometrika*, 55, 405-410.
- Yanai, H.D. y Mukherjee, B.N. (1987). A generalized method of image analysis from an intercorrelation matrix which may be singular. *Psychometrika*, 52, 555-564.
- Yeomans, K.A. y Golder, P.A. (1982). The Guttman-Kaiser criterion as a predictor of the number of common factors. *Statistician*, 31, 221-229.
- Zwick, W.R. y Velicer, W.F. (1982). Factors influencing four rules for determining the number of components to retain. *Multivariate Behavioral Research*, 17, 253-269.
- Zwick, W.R. y Velicer, W.F. (1986). Comparison of five rules for determining the number of componentes to retain.

*Psychological Bulletin*, 3, 432-442.

EN EL DIA DE LA FECHA, EL TRIBUNAL QUE SIGUIENTE  
A LA PRESENTE TESIS DOCTORAL LA CALIFICACION DE APTO CON LAUDE POR UNANIMIDAD  
MADRID, 28 de octubre de 1994

EL PRESIDENTE,

EL SECRETARIO,

FDO. VICENTE PONSODA FDO. ANTONIO PARDO

PRIMER VOCAL,

SEGUNDO VOCAL,

TERCER VOCAL,

FDO. JOAN GUARDIA FDO. GERARDO PRIETO FDO. JUAN LUIS CHORRO