UA
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Dpto. de Análisis Económico:
Teoría Económica e Historia Económica

Tesis Doctoral

LA EVALUACION DEL RENDIMIENTO PRODUCTIVO CON INDICES DE MALMQUIST Y SU APLICACION *DEA* A LA INDUSTRIA MANUFACTURERA DE LA OCDE (1970–1993)

Autor: D. José Luis Zofío Prieto

Director: D. José Ramón Lasuén Sancho

AGRADECIMIENTOS

La realización de una tesis doctoral culmina en el acto público en que se sanciona su validez. Para entonces –no soy el primero en descubrirlo–, el doctorando y su obra han vivido una relación personal tan intensa que su lectura tiene sabor a despedida. Amores, odios, alegrías, frustraciones, condicionantes académicos que afectan a su desarrollo, dudas sobre la culminación final del proyecto, etc., son algunos de los sentimientos que ligan a cualquier autor con su obra pero, especialmente, con la primera. A lo largo de la década de los años noventa el doctorando ha tomado contacto con la investigación y docencia de la mano de una serie de personas que, ya sea de forma consciente a través del consejo o inconscientemente a través del ejemplo, han venido a determinar su concepción de una institución como la Universidad y la labor que en ella se debe desarrollar.

Desde una perspectiva vital, la realización del presente proyecto de investigación y los primeros años de docencia, suponen la culminación del período de adaptación al entorno social en que se desenvuelve esta profesión. Es pues el momento de rendir cuentas y hacer un balance profesional y personal de los seis años en que se ha venido desarrollando esta actividad. En contraposición al resto del texto, esta exposición no pretende seguir un orden concreto que responda a la importancia de quienes han contribuido a su culminación, porque sin el concurso de todos ellos, no podría haber llegado a buen término.

En primer lugar, y como muchos doctorandos que han alcanzado este punto, la motivación para invertir numerosos años de vida en la consecución de un título cuyo valor de mercado es nulo –a excepción de la universidad–, proviene únicamente del deseo personal de dedicar el tiempo a aquellas tareas que resultan más gratas. Poder dedicarse a aquello que a uno le satisface supone en sí una libertad y un logro personal que por si solos pueden justificar la realización de una tesis doctoral. Este objetivo personal no podría ser entendido sin el marco familiar en que mis padres me han educado, marco en el que el éxito no queda determinado por alcanzar metas materiales sino, precisamente, por el placer que reporta el dedicarse a aquello que más satisface. Naturalmente, existe un mínimo vital necesario para subsistir lo cual implica que en las primeras etapas de formación, la institución que corre con los gastos es la familia. En mi caso particular, otra institución, el Estado, me ha permitido una independencia personal que sin lugar a dudas, también es necesario agradecer. En este sentido, las experiencias adquiridas en mi etapa de becario, no hubieran sido posibles sin la existencia de los programas de formación de personal investigador financiados por el Ministerio de Educación. Esta aportación ha contribuido también de forma sustancial a la realización del proyecto de tesis.

Mi primer agradecimiento profesional se entremezcla con aquel personal por provenir de mi familia más directa. Debo mencionar aquí a mi padre, D. José Luis Zofío Ferrer, quién me ha transmitido a lo largo de estos años el apoyo y consejo ponderado que solo una persona conocedora del sistema puede aportar.

En segundo lugar debo a D. Angel Prieto Guijarro, perteneciente al Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la inmersión en el mundo de la investigación y, especialmente, en el campo del análisis económico relativo a la economía industrial de productividad y eficiencia en el que me he especializado. Gracias a él he sido instruido en los usos profesionales que todo doctorando con vocación académica debe aprender y que en mi opinión se manifiestan, fundamentalmente, en la perseverancia y rigor necesarios para poder avanzar y alcanzar las metas propuestas. Creo que su aportación se refleja suficientemente en los méritos académicos que el doctorando a podido alcanzar hasta el momento. Estos méritos se demuestran en aspectos tan diversos como las publicaciones realizadas –de las cuales es con frecuencia coautor – o la capacidad para integrarse en los circuitos científicos internacionales.

En este sentido debo agradecer a todas las personas que he ido conociendo a lo largo de estos años su apoyo y aliento para continuar en el camino elegido. Destaca aquí el colectivo del Departamento de Economía de la Universidad de Oviedo cuyo máximo exponente es D. Antonio Alvarez Pinilla, y las personas de D. Jesús Pastor Ciurana, Vicerrector de Investigación de la Universidad Miguel Hernández y D. Emili Grifell Tatjé de la Universidad Autónoma de Barcelona. Así mismo, es de destacar el apoyo y confianza prestados por D. C.A. Knox

Lovell de la Universidad de Georgia a quién he visitado en numerosas ocasiones con objeto de profundizar en los temas tratados en esta investigación.

Mi formación profesional se ha visto así mismo beneficiada por las múltiples externalidades que genera el desarrollar la labor investigadora dentro un grupo dedicado a tales labores. Con relación a los primeros años debo agradecer a todos mis compañeros y docentes del Instituto L. R. Klein de la Universidad Autónoma de Madrid el apoyo que me han prestado. Siendo imposible nombrar a todos aquellos cuya aportación ha sido esencial, quisiera centrar mi agradecimiento en la persona de su mentor, D. Antonio Púlido San Román, quién a lo largo de estos años ha mostrado afecto y estimable dedicación al doctorando.

Los últimos años de labor investigadora que ahora culminan han podido compatibilizarse con mi vocación académica gracias a D. José Ramón Lasuén Sancho, director del Departamento de Análisis Económico: Teoría Económica e Historia Económica de la Universidad Autónoma de Madrid, quién depositó en mi su confianza para llevar a cabo labores docentes y de investigación. A él debo la oportunidad de poder finalizar estos años con éxito tal como demuestra su papel como director del presente proyecto de tesis. Sin embargo, la presente labor investigadora no es la única abordada por el doctorando, sino que la actividad desarrollada dentro del Departamento de Análisis Económico ha podido ampliar su ámbito de formación a la economía de los servicios y más concretamente, de la cultura. En este sentido, debo agradecer a Dª Maribel García Gracia, la oportunidad de integrarme a un proyecto de investigación de excelentes perspectivas. Dentro del ámbito personal querría extender mi gratitud a los compañeros del Departamento de Análisis Económico y muy especialmente a D. Julián Sánchez González, cuya amistad me ha servido de apoyo en múltiples ocasiones y ha hecho del día a día una rutina placentera.

La última mención debe ser hacia mi esposa Dª Irene Fernández González quién, respetando y compartiendo mis ideales vitales, me ha mostrado en todos estos años su compresión y apoyo en los momentos más difíciles. A ella, gracias.

INDICE

INTRODUCCION

1. *La definición de un modelo de evaluación del rendimiento de las actividades...*

La supervivencia de la empresa en el entorno económico actual depende genéricamente de su capacidad competitiva. Esta capacidad se encuentra condicionada por multitud de factores que confluyen en el mercado en el que opera al determinar, a través de la demanda y oferta, el precio y cantidad que es capaz de intercambiar en un determinado período. El equilibrio final para la empresa condiciona, en última instancia, la existencia o ausencia de un beneficio sobre el que se sustenta su viabilidad a largo plazo. Desde la perspectiva de oferta en la que se encuadra este proyecto de tesis, la capacidad de la empresa para obtener tal beneficio depende de su rendimiento productivo. En concreto de su habilidad para explotar la tecnología de producción potencial que, evitando ineficiencias productivas a lo largo del tiempo, le permita presentar una estructura de costes tal que, junto a los ingresos, representen un nivel de beneficio que garantice su supervivencia.

El presente proyecto de tesis se centra en la determinación de un modelo que permita la evaluación dinámica del rendimiento productivo de diversas actividades, ya sean estas empresas, organizaciones, etc., de tal forma que sean factibles comparaciones de productividad entre los competidores pertenecientes a una misma industria. Así, el marco de análisis propuesto no solo permite determinar la evolución productiva de una actividad a lo largo del tiempo en términos absolutos –considerando su habilidad para incrementar en el tiempo la producción obtenida con relación a los factores empleados–, sino también en términos relativos, al comparar su evolución con aquella experimentada por las empresas que, liderando los procesos tecnológicos, definen los óptimos productivos que brinda la tecnología en cada período, *i.e.* productividad potencial.

De esta forma, la primera aportación original de este proyecto de tesis se realiza en el capítulo inicial, presentando de una forma intuitiva e inteligible, el modelo dinámico de evaluación del rendimiento productivo propuesto. El objeto es familiarizar al lector con los conceptos y terminología que son adoptados en los capítulos sucesivos a la hora de formalizar el modelo teóricamente. La introducción del modelo se realiza asumiendo la más simple de las tecnologías posibles, al caracterizarse un proceso que obtiene un único producto a partir de un único factor. Se puede así sustentar la presentación del modelo con una exposición gráfica que facilite su comprensión aunque, naturalmente, puede afirmarse sin error, que la relevancia empírica de tal proceso es prácticamente nula. La realidad de cualquier tecnología es ciertamente más compleja al reflejar normalmente procesos multiproducto y multifactor. Así, junto a la presentación básica del modelo propuesto, en la sección 1.1 se muestran las condiciones que, a lo largo de la literatura, han permitido la extensión analítica de modelos dinámicos de rendimiento al caso real de tecnologías con múltiples productos y factores. En particular, se aborda la necesidad de utilizar funciones agregadoras de estas variables que, de acuerdo a la teoría de los números índices, permitan recoger en un único escalar la información relativa a la evolución de la productividad de los factores.

2. *...basado en la caracterización de la tecnología por funciones de distancia...*

Desde una perspectiva teórica, la formalización del modelo de evaluación del rendimiento para tecnologías multiproducto y multifactor se realiza a través del concepto de función de distancia, contemporáneamente introducido por Malmquist (1953) y Shephard (1953)[1]. Citando a Färe y Primont (1995a:8): "*...el uso de funciones de distancia de factores y productos permite modelizar tecnologías multiproducto y multifactor y, al mismo tiempo, representarlas con formas funcionales adecuadas*". Hoy día, la función de distancia se muestra como una de las piedras angulares del análisis de la producción, al representar de forma plena el proceso de transformación de factores en productos. Debido a que el objetivo final es evaluar la evolución del rendimiento productivo en términos

[1] Resulta así mismo posible acomodar la existencia de múltiples productos y factores a través de funciones de costes, ingresos o beneficio aunque esta representación de la tecnología

absolutos y relativos, en el segundo capítulo se muestra cómo la función de distancia puede ser interpretada como medida de rendimiento relativo respecto a un óptimo potencial, *i.e.* medida de eficiencia –véase Farrell (1957)–, y cómo las condiciones teóricas que verifica la tecnología se transmiten a la función de distancia condicionando las interpretaciones que de ésta pueden realizarse.

En concreto, y tal como se pone de manifiesto en la sección 2.2, de adoptarse la definición más laxa que puede realizarse de la tecnología como conjunto de posibilidades de producción cerrado, convexo y con fuerte disponibilidad de factores y productos, la función de distancia refleja la eficiencia técnica de las actividades. Por el contrario si la tecnología resulta más restringida al verificar homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– y homoteticidad simultánea –separabilidad–, ésta puede ser interpretada como una medida de eficiencia productiva –englobando la eficiencia técnica y de escala–.

El que las características de la tecnología resulten fundamentales a la hora de interpretar la función de distancia como medida de rendimiento productivo, se debe a las propiedades que, desde una perspectiva equivalente, impone sobre éstas. Esto resulta de especial relevancia tal como se pone de manifiesto en el tercer capítulo a la hora de mostrar las propiedades de los índices de Malmquist pues, al estar éstos definidos en términos de funciones de distancia, sus propiedades se derivan directamente de aquellas satisfechas por éstas. Es decir, las características de la tecnología se manifiestan en primera instancia en las propiedades satisfechas por las funciones de distancia y, posteriormente, en aquellas de los índices de Malmquist de rendimiento productivo. Este aspecto resulta así mismo fundamental para la interpretación teórica de los índices y su posterior descomposición, con objeto de identificar las fuentes que dan origen a las variaciones en la productividad de los factores. Así, al determinar la idoneidad de un índice desde una perspectiva axiomática –atendiendo a las propiedades satisfechas– o tecnológica –en función de la flexibilidad del proceso productivo– es preciso prestar atención preferente a las características de la tecnología.

---

exige especificar un comportamiento económico optimizador, *e.g.* maximización del beneficio, que no exige la función de distancia.

Todas estas consideraciones justifican el análisis detallado que se realiza en el segundo capítulo de la tecnología, así como de las funciones de distancia que la representan, sus propiedades e interpretación.

3. ... que permite formalizar el análisis a través de índices Malmquist.

La selección de la función de distancia para formalizar el modelo de rendimiento productivo no solo se ha sustentado en su capacidad para modelizar procesos multiproducto–multifactor e identificar los niveles contemporáneos de eficiencia productiva, sino que también se debe a la sencillez con que pueden dinamizarse estas relaciones cuando se considera tal representación de la tecnología. La definición de los denominados índices de Malmquist permite generar un modelo dinámico del rendimiento productivo, haciendo uso exclusivo de la información facilitada por las funciones de distancia. Tal como se recoge en la sección 3.1, la posibilidad de emplear funciones de distancia para definir índices de rendimiento productivo se inicia con la publicación, a principios de los años ochenta, del artículo de Caves, Christensen y Diewert, *The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output, and Productivity*, en la revista de la Sociedad Internacional para el Avance de la Teoría Económica con Relación a la Estadística y las Matemáticas, *Econometrica*. El objetivo de estos autores es definir un marco teórico que permita, a través de *ratios* de funciones de distancia, establecer comparaciones entre los rendimientos obtenidos por distintas actividades en igual momento temporal, o de una misma actividad a lo largo del tiempo.

La literatura relativa a tales índices presenta así una vida inferior a veinte años, mostrando la novedad del campo de análisis en el que se enmarca el presente proyecto de tesis. Sin embargo, desde entonces han acontecido importantes avances teóricos en la evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist. Así, por mencionar únicamente dos aspectos, Caves, Christensen y Diewert (1982a) no consideran la posibilidad de que las actividades sean ineficientes y, por tanto, no alcancen el máximo potencial de la tecnología representado por la función –frontera– de producción, o la propia descomposición del índice de productividad con objeto de identificar las fuentes responsables de la variación en el rendimiento productivo. Tal como se muestra en las distintas secciones del tercer capítulo, diversos autores han ido aportando flexibilidad al concepto de índice de productividad de Malmquist, al permitir la existencia de situaciones de ineficiencia productiva e identificar las fuentes que de esta forma condicionan la variación en el rendimiento –en concreto el cambio en la tecnología y en la eficiencia productiva–. Así, en la sección 3.2 no solo se aborda el análisis del índice de Malmquist propuesto por estos autores y las extensiones realizadas por diversos autores entre los que destacan Färe *et al.* (1994b) y Ray y Desli (1997), sino que se plantea la segunda aportación original del presente proyecto de tesis: la formalización del modelo propuesto en el primer capítulo a través de la metodología de los índices de Malmquist, *i.e.* cómo puede desarrollarse el concepto de variación en las productividad de los factores dentro de la teoría de la producción inherente a tales índices.

Las formulaciones presentadas se corresponden con las diversos desarrollos realizados para evaluar el rendimiento productivo desde la óptica del conjunto de posibilidades de producción de productos, factores o aquel que engloba ambas dimensiones: el tecnológico. La razón para esta múltiple presentación es mostrar el modelo de rendimiento propuesto desde las perspectivas existentes, de forma que, eventualmente, pueda ser utilizado como una referencia rápida para abordar cualquier problema aplicado.

Efectivamente, asociada a una determinada orientación parcial, productos o factores, hay una presunción respecto a la endogeneidad o exogeneidad de estas variables en los procesos productivos. En el caso de las medidas de productos (factores), los factores (productos) se considerarían exógenos, teniendo las actividades discrecionalidad respecto a la combinación y cuantía de productos (factores) que generan (emplean). Cualquiera de estas orientaciones parciales puede venir justificada en casos en que, o bien los factores utilizados (*e.g.* de existir un fuerte poder de negociación por parte de los sindicatos), o bien los productos obtenidos (industrias con producción regulada), sean ajenos al productor y la única forma de incrementar su eficiencia y productividad sea actuando en la dimensión sobre la que tiene control. Sin embargo, pueden darse situaciones en las que las actividades tengan libertad absoluta para ajustar los servicios que prestan y el volumen de factores que utilizan. En tal situación, la decisión de adoptar una única orientación, ya sea de productos o factores, podría no ser bienvenida, al dar como resultado unos valores de rendimiento productivo pasivos en la dimensión alternativa del proceso de producción sobre la que el productor sí dispone de control. Estas consideraciones ponen de manifiesto la importancia de introducir el modelo desde la totalidad de perspectivas relevantes: productos, factores y tecnológica.

Con objeto de contactar con las formulaciones geométricas del índice de Malmquist inicialmente planteadas por Caves, Christensen y Diewert (1982a) y posteriormente adoptadas por numerosos autores, se ha decido formalizar el modelo de rendimiento de acuerdo a esta representación. La razón para adoptar estas formulaciones se deriva de los resultados alternativos que pueden obtenerse con relación a la evolución del rendimiento dependiendo del período base –tecnología– que se elige para relativizar las variaciones en la productividad. En este proyecto de tesis, el modelo propuesto se desarrolla bajo esta perspectiva con objeto de ser coherente con la representación normalmente aceptada del índice de Malmquist. Sin embargo, su especificación no solo se presenta desde esta perspectiva, sino que el deseo del autor de desarrollar un marco de análisis completo a través de índices de Malmquist que satisfagan la propiedad transitiva –circular–, hace que en la sección 3.4 se presente el modelo considerando un único período base de referencia. Resulta así posible proceder a una representación consistente por subperiodos de las variaciones en la productividad, siendo factible acumular (desacumular) su evolución a través de la multiplicación (división) de índices temporalmente sucesivos. La tercera contribución original de la presente investigación se corresponde con la exposición completa del modelo propuesto, de forma que satisface tal propiedad.

Una vez formalizado el modelo de evaluación del rendimiento a través de índices de Malmquist, tanto en sus formulaciones geométricas respecto a períodos sucesivos de análisis, como respecto a un único período con objeto de que satisfaga la propiedad transitiva, la cuarta aportación original se centra en el análisis de las diversas descomposiciones propuestas en la literatura. Una de las motivaciones que da origen a este proyecto de tesis es la posibilidad de poder contribuir a la resolución de la polémica existente respecto a la descomposición del índice de Malmquist.

En los últimos años ha surgido una importante controversia con relación a la descomposición del índice de productividad de Malmquist, cuyo máximo exponente han sido los intercambios entre Färe, Grosskopf y Norris (1997) y Ray y Desli (1997), en la revista de la Asociación Económica Americana, *The American Economic Review*. En estos intercambios ninguna posición parece predominar, por lo que resulta difícil establecer si existe una descomposición acertada del índice de Malmquist en términos que permitan identificar las contribuciones que el cambio en la tecnología y en la eficiencia productiva tienen sobre la variación en el rendimiento de las actividades. En particular, la disputa gira en torno a la contribución que realizan los rendimientos a escala a la variación en la productividad de los factores. Cualquiera que sea la dimensión del proceso en que se centra el análisis –productos, factores o ambos–, si la tecnología no se caracteriza por rendimientos constantes a escala, la variación en la escala de operaciones de la actividad debe ser individualizada de otras fuentes de variación en la productividad.

En la presente investigación se presta especial atención a estas cuestiones. La definición de un marco analítico general que englobe todos los componentes que se han ido identificado en la literatura, constituye la única posibilidad para proceder a un análisis riguroso y consistente. El objetivo del modelo de rendimiento propuesto es facilitar un marco teórico que, integrando las distintas descomposiciones, permita considerarlas como un caso particular. Se aboga así por un modelo genérico, más amplio, que informe de todos los elementos que contribuyen a la variación en la productividad de los factores. De esta forma, resulta posible identificar e integrar las diferentes propuestas dentro de un único marco analítico, mostrando cómo las distintas piezas del *puzzle* pueden ser interpretadas de forma coherente.

Realizadas estas consideraciones, en las secciones 3.3 y 3.4 se aborda la descomposición del índice de productividad de los factores, ya sea en su formulación geométrica o respecto a una única tecnología base de referencia. Se pretende así integrar las distintas alternativas existentes en la literatura y mostrar cómo la descomposición contemporáneamente propuesta por Simar y Wilson (1998a) y Zofio y Lovell (1998) informa completamente sobre la evolución del rendimiento productivo. Así, se intenta poner de manifiesto que, aunque todas las descomposiciones existentes son factibles desde una perspectiva teórica, algunas resultan parciales pues, si bien inciden sobre ciertos aspectos del cambio acontecido en la tecnología y eficiencia, obvian otros elementos relevantes para su interpretación. En este sentido, se intenta mostrar cómo la propuesta realizada por lo autores citados resulta coherente con el marco analítico introducido en el presente proyecto de tesis al recoger toda la información considerada relevante.

4. *El desarrollo del modelo a través de técnicas de optimización matemática...*

Los análisis de productividad basados en los índices de Malmquist han experimentado un crecimiento excepcional en los últimos años, como consecuencia de su transición desde el ámbito teórico al aplicado. Efectivamente, Caves, Christensen y Diewert (1982a) introducen el índice de Malmquist desde una perspectiva teórica, poniendo de manifiesto las dificultades existentes para calcular funciones de distancia a través de las tradicionales técnicas de regresión econométrica. Estos autores ya aventuran que el índice por ellos definido resulta difícil de implantar: "*Cada uno de los dos índices Malmquist de factores, $Q^k(x^l,x^k)$, $Q^l(x^l,x^k)$, se define respecto a la tecnología y niveles de producto de una empresa en particular. Pero sin conocer los parámetros de la tecnología no es posible calcular ningún índice*", Caves, Christensen y Diewert (1982a: 1.397). De hecho, en los años sucesivos a su proposición teórica, el índice no fue desarrollado, siendo necesario esperar una década hasta que Färe *et al.* (1989, 1994), en un documento de trabajo que no sería publicado hasta 1994, mostrasen cómo es factible aproximar la tecnología de producción, calcular las funciones de distancia y formar los índices de Malmquist a través del denominado Análisis Envolvente de Datos, *Data Envelopment Analysis*, DEA.

El Análisis Envolvente de Datos, al permitir aproximar la tecnología potencial de producción de una forma empírica, según se muestra en la sección 4.2, constituye una técnica de optimización adecuada para el cálculo de las funciones de distancia. Esta técnica fue introducida en el campo de la investigación operativa a finales de los setenta por Charnes, Cooper y Rhodes en su artículo *Measuring the Efficiency of Decision Making Units*, publicado en la revista de la Asociación Europea de Sociedades de Investigación Operativa, *European Journal of Operational Research*. De esta forma, y a diferencia de lo que suele acontecer en la investigación académica, las herramientas aplicadas se encontraban disponibles antes incluso de que los resultados obtenidos fuesen interpretables como funciones de distancia, y permitiesen calcular índices de Malmquist según el artículo seminal de Caves, Christensen y Diewert (1982a). Su elevada flexibilidad y rápida difusión entre la comunidad científica hace que pueda ser aplicada a un amplio espectro de problemas, tal como se pone de manifiesto en la sección 4.1.

El análisis detallado de esta técnica con relación al cálculo de funciones de distancia de productos, factores y tecnológica es abordado en la sección 4.3. Los programas de optimización presentados permiten implantar el modelo de rendimiento productivo propuesto en esta investigación, al resolver las funciones de distancia que integran los índices de Malmquist y caracterizar, de una forma aplicada, la tecnología de producción. De hecho, en la sección 4.3 se muestra cómo una vez resueltos los programas, es posible recurrir al conjunto del cuerpo teórico y empírico relativo a la programación matemática para interpretar los resultados obtenidos. En concreto, por ser ésta una de las cuestiones centrales para identificar la contribución de los rendimientos a escala en la evolución de la productividad, se hace especial énfasis en la identificación de la magnitud y sentido de éstos, siguiendo las apreciaciones realizadas por Banker y Thrall (1992).

Así mismo, la resolución de los programas matemáticos propuestos en la literatura permite analizar las consecuencias que, sobre los índices de productividad teóricos, tiene el decantarse por esta técnica aplicada. Efectivamente, como en tantas ocasiones, los requisitos teóricos exigibles con objeto de poder interpretar los resultados obtenidos –en términos de sus propiedades axiomáticas y tecnológicas– pueden entrar en conflicto con las técnicas de optimización que se encuentran al alcance del investigador. En esta ocasión, y al igual que se analizan con detalle las virtudes de esta técnica, en la sección 4.5 también se critican las limitaciones que su empleo confiere al análisis del rendimiento productivo.

Estas consideraciones hacen preciso aclarar que la caracterización teórica del índice de Malmquist y la función de distancia en la que se basa, es independiente de la técnica empleada para su desarrollo empírico. El índice de Malmquist es susceptible de ser desarrollado empíricamente a través de funciones de distancia, calculadas por medio de técnicas no paramétricas –deterministas– como el Análisis Envolvente de Datos, o a través de la estimación de funciones de distancia paramétricas –estocáticas–[2]. Sin embargo, esta última posibilidad se encuentra en sus inicios, por lo que la vasta literatura existente hasta la fecha con relación al cálculo de índices de productividad de Malmquist se basa en funciones de distancia no parámetricas que exigen un dominio básico del DEA, véase Färe, Grosskopf y Roos (1998).

Una vez que se muestra cómo es posible calcular empíricamente las funciones de distancia a través del Análisis Envolvente de Datos, el modelo de evaluación del rendimiento productivo se ilustra a través de un simple ejemplo ideado por Grifell–Tatjé y Lovell (1999a). Este ejemplo permite mostrar el desarrollo completo del modelo propuesto desde la aproximación de la tecnología y el cálculo de las funciones de distancia a través de las técnicas DEA, pasando por la definición e interpretación de los índices de rendimiento productivo de Malmquist, hasta la representación final de las distintas descomposiciones existentes de la variación en la productividad de los factores.

5. *...ilustrado con la evolución de la productividad en la industria de la OCDE.*

La última aportación original que se realiza en esta investigación es el análisis de la evolución del rendimiento productivo en la industria manufacturera de diversas naciones pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, OCDE. De acuerdo al marco analítico presentado, se hace uso de la información publicada por la OCDE en la *International Sectoral*

---

[2] Existe además la posibilidad de estimar índices de productividad a través de las técnicas estándar relativas a los números índices, *e.g.* índices de productividad de Törnquist, cuyo resultado es equivalente, bajo ciertas hipótesis relativas al comportamiento del productor, al del índice de productividad Malmquist, Caves, Christensen y Diewert (1982a:1.398). Sin embargo, tal como se pone de manifiesto empíricamente en el capítulo quinto, al contrario que el DEA, tales técnicas no permiten caracterizar de forma explícita la tecnología de producción.

DataBase, ISDB98, con objeto de caracterizar la tecnología de producción de la industria manufacturera a través del tiempo, y poder evaluar el rendimiento de catorce naciones –incluida la totalidad del G7– en el período de 1970 a 1993.

Pese a que la organización citada considera a la ISDB98 como un instrumento fundamental para realizar análisis de productividad comparativos en el ámbito internacional, la definición y cálculo que se hace de las variables en ella incluida dista mucho de la práctica habitual comúnmente aceptada en la academia. Así, en la sección 5.1 no solo se realiza una descripción detallada de la ISDB98 –cobertura en términos de variables, países, rango temporal, etc.–, sino que también se critica la definición de las variables incluidas, por las consecuencias que tienen sobre el análisis empírico realizado. Es una constante en todo análisis académico la necesidad de profundizar en la información publicada por los institutos estadísticos nacionales con objeto de mejorar los análisis realizados. Sin embargo, en el caso de comparaciones internacionales, esta práctica es ciertamente difícil, dado que la información facilitada por los diversos países procede de fuentes estadísticas muy heterogéneas, que llevan a una dispar disponibilidad de datos –ciertos institutos pueden poner énfasis en aspectos que otros no llegan a considerar– así como a la presentación, definición y cálculo de las variables.

Aquí reside la importancia de la labor de instituciones como la OCDE en su objetivo de compilar información homogénea entre naciones, si bien resulta evidente que en análisis clásicos como los publicados en Caves (1992), Hickman (1992) o Jorgenson (1995), se obvian estas fuentes de información, prefiriendo colaborar con equipos investigadores de distintos países con objeto de llevar a cabo análisis más fiables. Esta realidad pone de manifiesto que, a pesar de los esfuerzos desarrollados, las estadísticas publicadas por organismos internacionales adolecen de importantes deficiencias. Tales deficiencias son puestas de manifiesto en la crítica que se realiza en la sección 5.1, al comparar la definición de las variables facilitadas en la ISDB98 con la práctica habitual realizada en estudios académicos.

Sin embargo, pese a las deficiencias puestas de manifiesto, la ISDB98 constituye un instrumento adecuado para ilustrar el modelo de evaluación de rendimiento propuesto. La potencialidad del modelo y de las técnicas de optimización empleadas para su implantación se muestran en la sección 5.3, donde se calculan los índices de Malmquist que configuran el modelo de rendimiento productivo. Las conclusiones alcanzadas muestran la riqueza de resultados que se obtiene a través de esta metodología, frente a los estudios básicos de productividad basados en la tradicional metodología de los números índices –abordada en la sección precedente, 5.2–. Si bien la información relativa a las industrias líderes y evolución general de la productividad por naciones, tanto en términos absolutos como relativos, presenta un alto nivel de compatibilidad, el valor añadido de la metodología basada en los índices de Malmquist reside, precisamente, en la identificación que se hace de la tecnología. Más concretamente, en aquellas características cuya variación permite explicar el progreso en el rendimiento productivo de las industrias manufactureras –identificando al progreso técnico y las mejoras en la eficiencia productiva–.

Finalmente, el análisis pormenorizado de los componentes que caracterizan la evolución del rendimiento en la industria manufacturera, permite comparar las distintas propuestas realizadas en la literatura para descomponer el índice de productividad de Malmquist. Esta comparación muestra las distintas dimensiones del proceso productivo en las que cada una de ellas hace énfasis, y las consecuencias que tienen respecto a la interpretación de la variación de la productividad de los factores. En concreto, en la sección 5.4 se aborda la descomposición del índice de productividad de Malmquist desde las diversas perspectivas, detallando la evolución seguida por las naciones que presentan los desarrollos productivos más relevantes.

El presente proyecto de investigación finaliza con la discusión de las aportaciones realizadas y de los resultados más relevantes que han sido alcanzados, tanto a nivel teórico como aplicado.

Capítulo I

LA EVALUACION DINAMICA DEL RENDIMIENTO PRODUCTIVO

El objetivo del presente capítulo es introducir un marco teórico que permita la evaluación dinámica del rendimiento productivo de un conjunto de actividades tecnológicas –empresas, industrias, organizaciones, etc.–. Tal evaluación se realiza tanto en términos absolutos –considerando la capacidad de la *actividad de incrementar en el tiempo la producción obtenida con relación a* los factores empleados–, como relativos –comparando la anterior evolución con aquella de los óptimos productivos que brinda la tecnología en cada momento–. La novedad del modelo propuesto reside en un concepto de productividad relativa de los factores que establece la evolución del rendimiento obtenido por una actividad frente a aquel de actividades análogas que, produciendo con igual tecnología, son capaces de alcanzar un óptimo *potencial* en términos de producción generada y factores empleados, *i.e.* la productividad relativa se equipara con la noción de eficiencia productiva conocida en los análisis de productividad.

1.1 Evaluación del rendimiento *absoluto* y *relativo* en términos estáticos y dinámicos

1.1.1 Caracterización del rendimiento *absoluto* y *relativo* –estático–

A continuación se introducen de forma intuitiva una serie de conceptos básicos, relacionados con la teoría de la producción, que son empleados para definir diversos índices de productividad representativos del modelo teórico aquí propuesto. La formalización de estos conceptos se realiza en los próximos capítulos, de forma que la exposición del modelo aquí desarrollada pretende únicamente facilitar al lector su comprensión e introducir un esquema de análisis coherente.

Los conceptos que se analizan en la presente investigación tienen su base en la tecnología entendida como proceso productivo que transforma una serie de factores en productos. La definición de la tecnología nos permite evaluar el rendimiento de las observaciones desde diversas, pero equivalentes, perspectivas: (i) desde un punto de vista primal o tecnológico que se identifica con la capacidad para obtener producción en función de los factores utilizados; (ii) teniendo en cuenta su equivalente económico –dual–, a través de la existencia de un beneficio económico que garantice la remuneración de los factores empleados –incluida la compensación a la actividad empresarial o capital–, asegurando la viabilidad de la actividad en el mercado. La evaluación tecnológica del rendimiento exige la introducción de conceptos como eficiencia productiva, técnica y de escala –*i.e.* la capacidad de generar la máxima producción potencial dado el nivel de factores empleados–, mientras que desde una perspectiva económica se introduce el concepto de eficiencia asignativa, –*i.e.* la capacidad de obtener el máximo beneficio dada la tecnología y los precios de mercado–.

Se entiende por tecnología al conjunto de procesos o técnica que permite obtener, en un determinado lapso temporal –período–, la producción de bienes y servicios a través de la transformación y concurso de factores productivos. Citando a Stone (1956:27): "*Un sistema productivo puede ser considerado como un sistema de procesos de transformación en los que recursos naturales, otros factores de producción y productos –intermedios–, son combinados para producir otros productos. Estos procesos de transformación tienen lugar en establecimientos y pueden ser convenientemente agrupados en industrias*". Así, la determinación del proceso productivo o *tecnología* exige disponer, desde una perspectiva física, de información relativa a las cuantías de productos generados y de factores utilizados.

Ahora bien, los economistas, en su necesidad de inferir características generales relativas a los procesos productivos, se ven obligados a prescindir por deseo o imposibilidad practica, de la información concreta, específica y detallada relativa al proceso de transformación asociado a cualquier tecnología. El gráfico 1.1.1 ilustra la tecnología como proceso de transformación *–black box–* en el periodo *t* de una serie de factores, x^t, en productos, y^t, de acuerdo al *conjunto de posibilidades de producción* representado por $T^t(x,y)$.

x^t - Factores ⟶ $T^t(x,y)$- Tecnología ⟶ y^t - Productos

Gráfico 1.1.1. El proceso de transformación tecnológico estático.

Así, en la definición más laxa que puede existir, se establecen una serie de correspondencias entre factores y productos que representan conjuntos de posibilidades de producción donde es posible analizar el rendimiento de los diversas actividades. La habilidad de un determinado proceso en la consecución de producción queda sujeta a una serie de axiomas o leyes que, en principio, restringen la tecnología, *i.e.* el proceso de conversión de los factores implicados en los productos obtenidos. En general, la existencia de tales restricciones se impone sobre el proceso transformador con objeto de que la tecnología resulte coherente o bien conformada *–well behaved–* y permita un análisis del comportamiento del productor que esté conforme con los hechos estilizados que el análisis neoclásico considera caracterizan al mundo real, Chambers (1988). Desde un punto de vista aplicado pueden ser contrastados de acuerdo a la evidencia observada, *e.g* las características de los rendimientos a escala, sustituibilidad entre productos y factores, ausencia de producción o disponibilidad gratuita, etc.. La definición concreta de la tecnología de producción a través de axiomas característicos se aborda en el segundo capítulo.

Atendiendo a estas consideraciones y con objeto de ilustrar conceptos básicos resulta factible representar la tecnología en el caso más simple de acuerdo al gráfico 1.1.2. En él se presenta el conjunto de posibilidades de producción, $T^t(x,y)$, que permite generar un producto, y^t, a partir de un único factor de producción, x^t. El conjunto de posibilidades de producción se corresponde con todas aquellas combinaciones factor-producto que son factibles de acuerdo a la tecnología; gráficamente, tales combinaciones se corresponden con el área sombreada. Ahora bien, dentro del conjunto de posibilidades de producción es posible identificar las combinaciones de factor-producto que representan el máximo de producción generable para cada nivel de factor empleado ó, alternativamente, el menor nivel de factor utilizable para obtener una determinada cuantía de producto. Tales combinaciones, *máximas* o *mínimas*, se corresponden con el *subconjunto técnicamente eficiente* del conjunto de posibilidades de producción; gráficamente, tal subconjunto se corresponde con la *frontera de producción* representada por $f^t(\mathrm{x})$[3]. La posibilidad de que una actividad *i* no obtenga en el período *t* la máxima producción con el mínimo empleo de factores implica que ésta incurre en una *ineficiencia técnica*; gráficamente se sitúa en el interior del conjunto de posibilidades de producción, $(\mathrm{x}_i^t, \mathrm{y}_i^t)$. Así, actividades que con igual nivel de factores obtienen el máximo producto, $(\mathrm{x}_i^t, \tilde{\mathrm{y}}_i^t)$ –orientación de *outputs*–, ó que para igual nivel de producción, utilizan la cuantía mínima de factores, $(\tilde{\mathrm{x}}_i^t, \mathrm{y}_i^t)$ –orientación de *inputs*–, presentan *eficiencia técnica* al situarse sobre el subconjunto eficiente de posibilidades de producción o frontera de producción. Realizadas estas consideraciones es posible definir la eficiencia técnica como[4]

$$\mathrm{TE}_i^t = (\mathrm{y}_i^t/\mathrm{x}_i^t) / (\tilde{\mathrm{y}}_i^t/\mathrm{x}_i^t) = \mathrm{y}_i^t/\tilde{\mathrm{y}}_i^t \big| \mathrm{x}_i^t, \tag{1.1.1}$$

que adopta valores inferiores a la unidad de verificarse ineficiencia, $\mathrm{y}_i^t < \tilde{\mathrm{y}}_i^t$, mientras que si la actividad evaluada se sitúa sobre la frontera eficiente, su valor es igual a la unidad, $\mathrm{TE}_i^t = 1$ siendo $\mathrm{y}_i^t = \tilde{\mathrm{y}}_i^t$.

[3] La formalización matemática de la correspondencia entre productos y factores es representada de forma convencional a través de una *función de producción* expresada en términos matemáticos, $\mathrm{y} \leq f(\mathrm{x})$. La representación del máximo de producción generable se realiza en forma de igualdad, $\mathrm{y} = f(\mathrm{x})$ quedando así definida la *frontera de producción*.

[4] En la presente exposición se considera como dimensión relevante para el análisis aquella orientada en *outputs*; es decir, donde los óptimos de referencia se determinan para un nivel o escala de factores. Sin embargo, tal como se muestra en los capítulos de formalización del modelo, existe la posibilidad de considerar una perspectiva de *inputs* –e incluso *graph* que considera ambas dimensiones– donde los óptimos se definen para un determinado nivel de producción –y factores–.

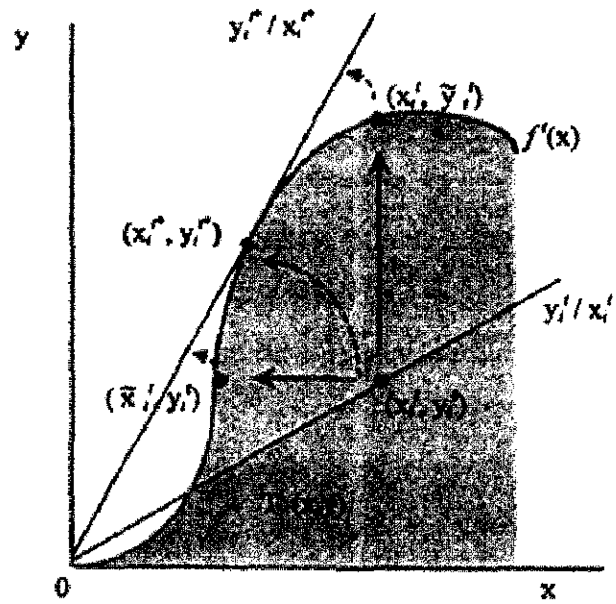


Gráfico 1.1.2. Representación de la tecnología de producción en *t*.

Sin embargo, el rendimiento productivo de una actividad no queda únicamente caracterizado en términos de su (in)eficiencia técnica sino que incluye el concepto de *eficiencia de escala*. Si una actividad obtiene el máximo nivel de producción por unidad de factor, *i.e.* productividad, se dice que su escala de operaciones –en la dimensión de productos y factores– es óptima; gráficamente, tal situación queda representada por la actividad (x_i^{t*}, y_i^{t*}), cuyo radio vector presenta la máxima pendiente. Así, una observación puede ser técnicamente eficiente y, sin embargo, al incurrir en *ineficiencia de escala*, no obtener el máximo producto medio –productividad– que brinda la tecnología; gráficamente, la actividad $(x_i^t, \tilde{y}_i^t)$ es eficiente desde una perspectiva técnica pero ineficiente en su escala de operaciones pues no alcanza la *productividad óptima de los factores*,

$$OFP_i^t = y_i^{t*}/x_i^{t*}, \tag{1.1.2}$$

de forma que $\tilde{y}_i^t/x_i^t < y_i^{t*}/x_i^{t*}$. Caracterizada la ineficiencia de escala, es factible definirla como la razón entre la productividad observada en el subconjuto técnicamente eficiente para la escala considerada y aquella máxima u óptima,

$$SE_i^t = (\tilde{y}_i^t/x_i^t) / (y_i^{t*}/x_i^{t*}). \tag{1.1.3}$$

Al igual que la eficiencia técnica, (1.1.1), esta magnitud presenta valores inferiores a la unidad si la productividad evaluada no alcanza aquella óptima, $(\tilde{y}_i^t/x_i^t) < (y_i^{t*}/x_i^{t*})$ y valores unitarios si presenta eficiencia de escala, $(\tilde{y}_i^t/x_i^t) = (y_i^{t*}/x_i^{t*})$, $SE_i^t = 1$.

Una actividad que sea eficiente tanto en sentido técnico como en la escala de operaciones se dice que presenta *eficiencia productiva*, situándose en lo que denominamos *subconjunto óptimo* de posibilidades de producción; gráficamente, tal situación queda representada por la observación (x_i^{t*}, y_i^{t*}) que se diferencia del resto de actividades en el hecho de que éstas últimas resultan *subóptimas* por no obtener el máximo de productividad factible. Considerando los conceptos expuestos, el objetivo de cualquier análisis de eficiencia productiva debe centrarse inicialmente en la determinación del rendimiento absoluto de las observaciones, que queda caracterizado por la *productividad absoluta de los factores*,

$$AFP_i^t = y_i^t/x_i^t, \tag{1.1.4}$$

y su comparación con el óptimo observado dada la tecnología de producción –productividad óptima de los factores–. El rendimiento *absoluto* de la observación (x_i^t, y_i^t) queda representado en el gráfico 1.1.2 por el radio vector que une el origen de coordenadas y la observación evaluada, (x_i^t, y_i^t) mientras que el rendimiento óptimo se corresponde con el alcanzado por (x_i^{t*}, y_i^{t*}) que, por presentar una pendiente superior, implica $y_i^t/x_i^t < y_i^{t*}/x_i^{t*}$. Así, es posible establecer como definición de rendimiento relativo la razón entre la producciones medias y óptimas observadas; es decir, la *productividad relativa de los factores*, RFP_i^t, o *eficiencia productiva* PE_i^t,

$$RFP_i^t = PE_i^t = AFP_i^t / OFP_i^t = (y_i^t/x_i^t) / (y_i^{t*}/x_i^{t*}), \tag{1.1.5}$$

que puede descomponerse de forma excluyente de acuerdo a las magnitudes previamente definidas de eficiencia técnica y de escala, $(y_i^t/x_i^t) / (y_i^{t*}/x_i^{t*}) = y_i^t / \tilde{y}_i^t \cdot [(\tilde{y}_i^t/x_i^t) / (y_i^{t*}/x_i^{t*})]$,

$$RFP_i^t = PE_i^t = TE_i^t \cdot SE_i^t. \tag{1.1.6}$$

En caso de que la actividad evaluada no presente ineficiencia técnica o de escala, es decir, sea eficiente en términos productivos su productividad coincide con aquella óptima y (1.1.5) será unitaria, $(y_i^t/x_i^t) = (y_i^{t*}/x_i^{t*})$, $RFP_i^t = 1$, mientras que si es ineficiente en algún sentido el valor es inferior a uno, $RFP_i^t < 1$, *i.e.* $(y_i^t/x_i^t) < (y_i^{t*}/x_i^{t*})$.

Frente a la anterior caracterización tecnológica del rendimiento productivo, resulta posible valorar el rendimiento económico de una actividad incorporando al análisis la información relativa al precio de mercado de los productos generados y factores utilizados. Dada esta información se dice que una observación presenta *eficiencia asignativa* si produce y utiliza una cuantía de productos y factores que maximiza el beneficio. Esta situación queda representada en el gráfico 1.1.3 donde se puede apreciar cómo la actividad $(y_i^{t\#}, x_i^{t\#})$ maximiza el beneficio al situarse en el mayor nivel de isobeneficio, $\pi_i^{t\#}(p^t, w^t)$ –tangente al conjunto de posibilidades de producción–. En esta situación, si el precio de productos y factores se denota por p^t y w^t respectivamente, la observación (x_i^t, y_i^t) presenta *ineficiencia asignativa* pues $(p^t \cdot y_i^t - w^t \cdot x_i^t) < (p^t \cdot y_i^{t\#} - w^t \cdot x_i^{t\#})$. La medida de rendimiento económico *absoluto* para la actividad (x_i^t, y_i^t) queda determinada por $\pi_i^t(p^t, w^t) = (p^t \cdot y_i^t - w^t \cdot x_i^t)$ mientras que aquella *relativa* se corresponde con

$$AE_i^t = (p^t \cdot y_i^t - w^t \cdot x_i^t) - (p^t \cdot y_i^{t\#} - w^t \cdot x_i^{t\#}). \tag{1.1.7}$$

siendo sus valores negativos si no obtiene el máximo beneficio, $(p^t \cdot y_i^t - w^t \cdot x_i^t) < (p^t \cdot y_i^{t\#} - w^t \cdot x_i^{t\#})$ y nulos si alcanza tal situación, $AE_i^t = 0$.

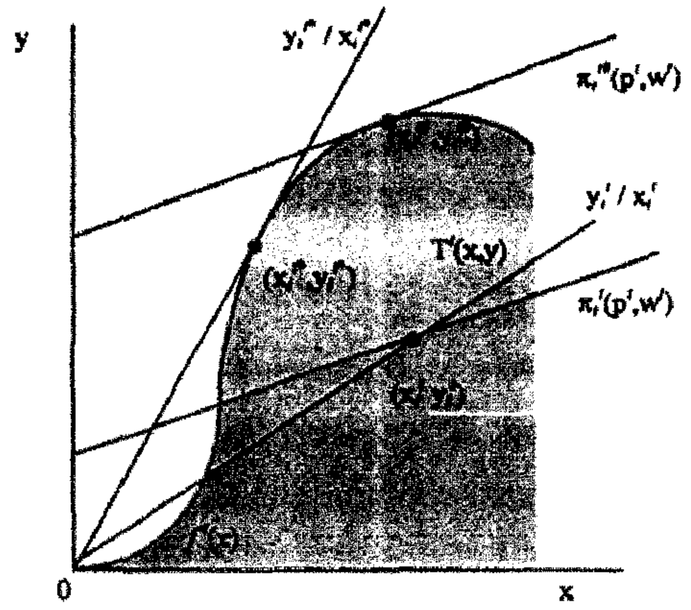


Gráfico 1.1.3. Producción óptima desde una perspectiva tecnológica y económica.

Así, la evaluación del rendimiento absoluto o relativo de una actividad respecto a un óptimo puede realizarse desde una perspectiva basada en relaciones técnicas de producción o económicas si bien es necesario tener en cuenta que el óptimo de referencia puede ser diverso. El gráfico 1.1.3 pone de manifiesto la diferencia entre el óptimo físico representado por la máxima productividad, y_i^{t*}/x_i^{t*}, y el óptimo económico que se corresponde con el máximo beneficio generable sujeto a los precios de mercado de productos y factores, $(y_i^{t\#},x_i^{t\#})$. El primero se relaciona con el concepto de rendimientos a escala –central en esta investigación– mientras que el segundo se encuentra relacionado con el concepto de economías de escala.

1.1.2 Generalización del rendimiento *absoluto* y *relativo* –estático–

La exposición realizada hasta el momento de la eficiencia productiva y económica considera un único *output* y un único *input*. Históricamente, esta aproximación se ha mostrado valida proponiéndose una serie de medidas individuales en función del objetivo de análisis. Así, por ejemplo, en términos agrícolas, el factor relevante en el proceso productivo dada su relativa escasez es la tierra cultivada y, por tanto, la cosecha obtenida por hectárea resulta el indicador relevante para determinar el éxito de diversas explotaciones. A nivel industrial, se consideran medidas que ponen en relación el producto obtenido con la cuantía de mano de obra utilizada (productividad aparente del trabajo) si bien, conforme se capitalizan los procesos industriales, puede resultar más justificado el uso de este último factor en detrimento del primero dada su progresiva pérdida de peso dentro de la producción y estructura de costes. En la generación de productos especialmente intensivos en energía puede estar justificado la medición de productividad en términos *TOE (Tonnes of Oil Equivalent)*, *BTU (British Termal Units)*, GW (*Gigavatios*), etc.

La versatilidad y facilidad de cálculo de estas medidas con objeto de realizar comparaciones entre unidades productivas es incuestionable, y justifica su creciente uso entre los gestores de las empresas a través del conocido *benchmarking*. Sin embargo, su gran inconveniente reside en la parcialidad con la que caracteriza el rendimiento productivo, al considerar como única dimensión relevante el factor elegido para la relativización del producto obtenido. De esta forma, se ignora la influencia que otros factores o su presencia conjunta (por sustituibilidad, complementariedad, etc.) puedan tener sobre el producto final, *e.g.* tierra más fertilizantes o mano de obra más capital. Así, resulta necesario generalizar el análisis del rendimiento productivo y económico al caso multiproducto y multifactor con objeto de dotarle de mayor operatividad.

En este contexto es también posible caracterizar el rendimiento *absoluto* de una observación tanto desde una perspectiva productiva como económica. Tal como establece Diewert (1992a), con objeto de obtener tal magnitud resulta necesario hacer uso de funciones agregadoras de productos y factores de forma que, dada la actividad genérica i en el periodo t, se obtienen $g^t(y_i^t) = \mu^t \cdot y_i^t$ y $h^t(x_i^t) = \nu^t \cdot x_i^t$ donde μ^t y ν^t son los pesos respectivos de productos y factores. Esta agregación permite obtener un escalar representativo de la productividad absoluta –total– de los factores:

$$AFP_i^t = g^t(y_i^t) \,/\, h^t(x_i^t) = \mu^t \cdot y_i^t \,/\, \nu^t \cdot x_i^t. \tag{1.1.8}$$

Desde una perspectiva económica el primer objetivo es determinar la existencia de un beneficio económico que garantice la remuneración de los factores empleados. Siendo $p^t=(p^t_1,...,p^t_M)$ y $w^t=(w^t_1,...,w^t_N)$ los vectores de precios de productos y factores observados, podemos definir el ingreso obtenido y coste incurrido por una observación en un periodo por $R_i^t=p^t\cdot y_i^t$ y $C_i^t=w^t\cdot x_i^t$. De esta forma, el beneficio obtenido $\pi_i^t(p,w)= p^t\cdot y_i^t-w^t\cdot x_i^t$ permite considerar una evaluación *absoluta* en términos económicos que garantice la continuidad de la actividad empresarial a través de, al menos, un beneficio económico, $\pi_i^t(p,w) = 0$.

Frente a esta caracterización absoluta en el caso multiproducto y multifactor, la evaluación *relativa* del rendimiento de las actividades incorpora una valoración comparativa del proceso, pues si bien en términos absolutos una actividad puede ser viable, $g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t) = \mu^t\cdot y_i^t/\nu^t\cdot x_i^t > 0$, la posible existencia de ineficiencias hace factibles procesos productivos cuyos rendimientos, tanto físicos como económicos, son superiores al de actividades análogas y sin que esto suponga, dado el entorno de competencia imperfecta en que se desenvuelve la actividad empresarial, la desaparición de las actividades que operan con técnicas ineficientes. La evaluación *relativa* de la actividad presupone la definición de un objetivo a alcanzar que se asocia a un óptimo de producción. En la presente investigación, la productividad óptima de los factores previamente introducida, que se corresponde con $\max\{g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t) : (y_i^t,x_i^t) \in T^t(y,x)\}$, *i.e*

$$\mathrm{OFP}_i^t = g^t(y_i^t)^* / h^t(x_i^t)^* = \mu^t\cdot y_i^{t*} / \nu^t\cdot x_i^{t*} \qquad (1.1.9)$$

La caracterización de este óptimo a nivel tecnológico nos permite definir una frontera de producción o estándar de referencia respecto a la cual relativizar el rendimiento de las distintas observaciones, *i.e.* dada una determinada actividad, la razón de productividades observadas y óptimas define la productividad relativa de los factores

$$\mathrm{RFP}_i^t = \mathrm{AFP}_i^t/\mathrm{OFP}_i^t = (g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t)) / (g^t(y_i^t)^*/h^t(x_i^t)^*). \qquad (1.1.10)$$

En términos económicos, podemos definir como óptimo el máximo beneficio observado, $\max\{p^t\cdot y^t_i - w^t\cdot x^t_i : (y^t_i, x^t_i) \in T^t(y,x)\} = p^t\cdot y_i^{t\pi} - w^t\cdot x_i^{t\pi}$, que permite identificar la cuantía óptima de productos obtenidos y factores utilizados que maximizan tal magnitud. De acuerdo a lo establecido previamente, el óptimo económico no coincidirá con el óptimo tecnológico; es decir, aquellos valores que maximizan la productividad absoluta de los factores, *i.e.* $(y_i^{t\pi}, x_i^{t\pi})$ *vs.* (y_i^{t*}, x_i^{t*}). Definido el máximo beneficio, el rendimiento económico de una empresa puede ser ahora evaluado en función del diferencial de beneficios, *i.e.* $AE_i^t = (p^t\cdot y_i^{t\pi} - w^t\cdot x_i^{t\pi}) - (p^t\cdot y_i^t - w^t\cdot x_i^t)$.

1.1.3 Caracterización del rendimiento *absoluto* y *relativo* –dinámico–

La caracterización realizada del rendimiento puede considerarse estática pues compara el resultado obtenido por una actividad, ya sea en términos tecnológicos o económicos, con óptimos contemporáneos. La introducción de una dimensión temporal en el análisis permite analizar el rendimiento desde una perspectiva dinámica; es decir, considerando la evolución del rendimiento absoluto de una actividad productiva a través del tiempo y su rendimiento relativo respecto a los óptimos que se determinen en cada período.

La evaluación *dinámica* del rendimiento obtenido por una actividad debe incorporar los conceptos anteriores identificando los cambios temporales que en éstos puedan acontecer, de forma que sea posible descomponer la variación en el rendimiento productivo desde t a $t+1$ en términos de variaciones en la eficiencia técnica y de escala. Así mismo, la comparación de las variaciones en las productividades absolutas respecto a los óptimos productivos de los distintos períodos –variación en la productividad relativa– permite analizar cual ha sido el cambio tecnológico acontecido. El gráfico 1.1.4 muestra la transición de la tecnología de producción entre ambos momentos temporales, $t = 0, 1$, y como esto condiciona a la actividad en la obtención de productos a partir de los factores utilizados. Así, el objetivo es caracterizar el paso de (x^0, y^0) a (x^1, y^1) en términos de $T^0(x, y)$ y $T^1(x, y)$.

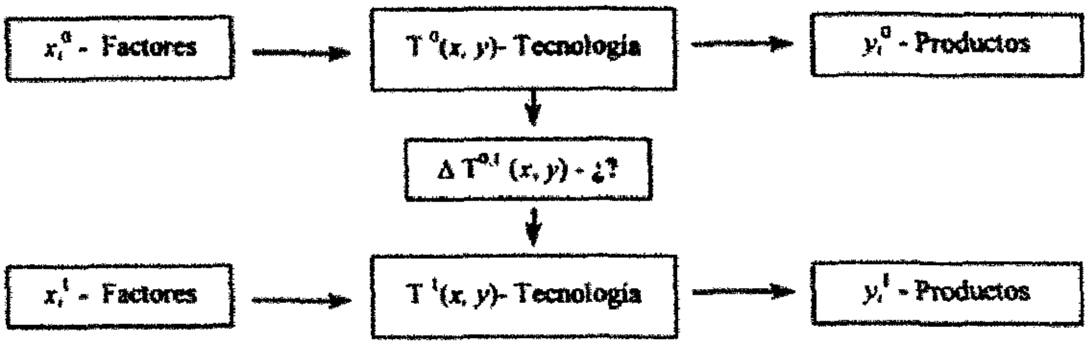


Gráfico 1.1.4. Comparación de tecnologías en períodos sucesivos, $t = 0, 1$.

1.1.3.1 Variaciones en la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$

La evaluación dinámica del rendimiento relativo de los factores exige determinar cuál ha sido la evolución de esta magnitud a través del tiempo. Si consideramos que la productividad relativa de los factores en ambos períodos se corresponde respectivamente con $RFP_i^t = (y_i^t/x_i^t) / (y_i^{t*}/x_i^{t*})$ y $RFP_i^{t+1} = (y_i^{t+1}/x_i^{t+1}) / (y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*})$, podemos expresar la *variación en la productividad relativa de los factores* como

$$\Delta RFP_i^{t,t+1} = \frac{RFP_i^{t+1}}{RFP_i^t} = \frac{AFP_i^{t+1}/OFP_i^{t+1}}{AFP_i^t/OFP_i^t} = \frac{(y_i^{t+1}/x_i^{t+1})/(y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*})}{(y_i^t/x_i^t)/(y_i^{t*}/x_i^{t*})}, \qquad (1.1.11)$$

siendo posible atribuir tal variación del rendimiento a los cambios acontecidos en la eficiencia técnica y de escala de la actividad. Siendo la productividad relativa de los factores equivalente a la eficiencia productiva de las actividades, (1.1.6), se puede reexpresar (1.1.11) de acuerdo a

$$\begin{aligned}\Delta RFP_i^{t,t+1} &= \frac{RFP_i^{t+1}}{RFP_i^t} = \frac{PE_i^{t+1}}{PE_i^t} = \frac{TE_i^{t+1}\cdot SE_i^{t+1}}{TE_i^t\cdot SE_i^t} = \frac{(y_i^{t+1}/\tilde{y}_i^{t+1})\cdot\left[(\tilde{y}_i^{t+1}/x_i^{t+1})/(y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*})\right]}{(y_i^t/\tilde{y}_i^t)\cdot\left[(\tilde{y}_i^t/x_i^t)/(y_i^{t*}/x_i^{t*})\right]} = \\ &= \Delta PE_i^{t,t+1} = \Delta TE_i^{t,t+1}\bullet\Delta SE_i^{t,t+1} = \frac{(y_i^{t+1}/\tilde{y}_i^{t+1})}{(y_i^t/\tilde{y}_i^t)}\bullet\frac{\left[(\tilde{y}_i^{t+1}/x_i^{t+1})/(y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*})\right]}{\left[(\tilde{y}_i^t/x_i^t)/(y_i^{t*}/x_i^{t*})\right]}.\end{aligned} \quad (1.1.12)$$

La variación en la productividad relativa de los factores en términos de eficiencia técnica y de escala queda representada en el gráfico 1.1.5 a través de las distancias que separan en cada período a la actividad evaluada (x_i^t, y_i^t), $t = 0, 1$, de las fronteras eficientes $f^t(x)$ y de las productividades óptimas, (y_i^{t*}/x_i^{t*}). En el caso de la eficiencia técnica, se puede apreciar cómo la distancia entre las producciones observadas y aquellas óptimas en cada período no se ha visto alterada. Siendo $TE_i^0 = y_i^0/\tilde{y}_i^0$ y $TE_i^1 = y_i^1/\tilde{y}_i^1$, (1.1.1), la *variación en la eficiencia técnica intertemporal* de t a t+1 se corresponde con $\Delta TE_i^{0,1} = y_i^1/\tilde{y}_i^1 \;/\; y_i^0/\tilde{y}_i^0$. En el ejemplo gráfico propuesto no existe alteración en la eficiencia técnica por lo que tal expresión es igual a la unidad, *i.e.* $y_i^1/\tilde{y}_i^1 = y_i^0/\tilde{y}_i^0$. Respeto a la variación en la eficiencia de escala, ésta queda expresada en cada periodo por $SE_i^0 = (\tilde{y}_i^0/x_i^0)\,/\,(y_i^{0*}/x_i^{0*})$ y $SE_i^1 = (\tilde{y}_i^1/x_i^1)\,/\,(y_i^{1*}/x_i^{1*})$, (1.1.3), de forma que la *variación en la eficiencia de escala* resulta ser $\Delta SE_i^{0,1} = [(\tilde{y}_i^1/x_i^1)\,/\,(y_i^{1*}/x_i^{1*})]\,/\,[(\tilde{y}_i^0/x_i^0)\,/\,(y_i^{0*}/x_i^{0*})]$. Como en el caso de la eficiencia técnica, en esta ocasión la eficiencia de escala ha permanecido inalterada en el ejemplo gráfico, por lo que su variación se corresponde con la unidad, *i.e.* $[(\tilde{y}_i^1/x_i^1)\,/\,(y_i^{1*}/x_i^{1*})] = [(\tilde{y}_i^0/x_i^0)\,/\,(y_i^{0*}/x_i^{0*})]$. Dado que en la transición de t a t+1, la actividad no presenta variación alguna en sus niveles de eficiencia, su productividad relativa permanece inalterada o, de forma equivalente no ha existido *variación en la eficiencia productiva intertemporal* y tal expresión presentará, así mismo, un valor unitario. La eficiencia productiva (1.1.6) puede descomponerse en cada período en eficiencia técnica y de escala: $PE_i^0 = (\tilde{y}_i^0/x_i^0)\cdot[(\tilde{y}_i^0/x_i^0)\,/\,(y_i^{0*}/x_i^{0*})]$ y $PE_i^1 = (\tilde{y}_i^1/x_i^1)\cdot[(\tilde{y}_i^1/x_i^1)\,/\,(y_i^{1*}/x_i^{1*})]$ por lo que su variación intertemporal es $\Delta PE_i^{0,1} = \{(\tilde{y}_i^1/x_i^1)\cdot[(\tilde{y}_i^1/x_i^1)\,/\,(y_i^{1*}/x_i^{1*})]\}\,/\,\{(\tilde{y}_i^0/x_i^0)\cdot[(\tilde{y}_i^0/x_i^0)\,/\,(y_i^{0*}/x_i^{0*})]\}$. Así, en el ejemplo propuesto $\Delta RFP_i^{0,1} = RFP_i^1/\,RFP_i^0 = (AFP_i^1/OFP_i^1)\,/\,(AFP_i^0/\,OFP_i^0) = \Delta PE_i^{0,1} = \Delta TE_i^{0,1}\cdot\Delta SE_i^{0,1} = 1$.

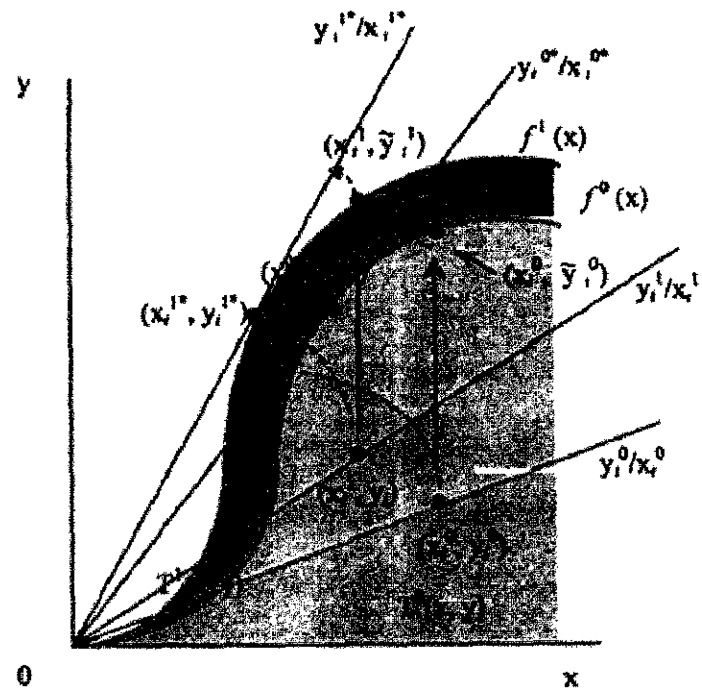


Gráfico 1.1.5. Variación en la productividad relativa de los factores de t a t+1.

El modelo de evaluación dinámica del rendimiento productivo presentado permite determinar la evolución relativa de una actividad –(1.1.11)– en términos de su eficiencia productiva, (1.1.12). Esta evaluación hace necesario relativizar en cada período discreto el rendimiento absoluto AFP_i^t respecto a los óptimos que brinda la tecnología OFP_i^t con objeto de establecer su evolución a lo largo del tiempo. Tal caracterización del rendimiento relativo permite asimismo evaluar la evolución dinámica en términos absolutos de una actividad y aquella acontecida en los óptimos de producción. Efectivamente, dada la relación establecida en (1.1.11) es posible reexpresar la variación en la productividad relativa de los factores como

$$\Delta\mathrm{RFP}_i^{t,t+1}=\frac{\mathrm{AFP}_i^{t+1}/\mathrm{AFP}_i^t}{\mathrm{OFP}_i^{t+1}/\mathrm{OFP}_i^t}=\frac{\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}}{\Delta\mathrm{OFP}_i^{t,t+1}}=\frac{(y_i^{t+1}/x_i^{t+1})/(y_i^t/x_i^t)}{(y_i^{t+1^*}/x_i^{t+1^*})/(y_i^{t^*}/x_i^{t^*})}; \qquad (1.1.13)$$

es decir, como la razón entre la *variación en la productividad absoluta de los factores* y la *variación en la productividad óptima de los factores*. El gráfico 1.1.6, idéntico a 1.1.5 en términos de (x_i^t, y_i^t) y $(x_i^{t^*}, y_i^{t^*})$, muestra la información recogida en

(1.1.13) a través del incremento en las pendientes de los radio–vectores representativos de las productividades de la actividad evaluada (x_t^t, y_t^t) y óptima (x_t^{t*}, y_t^{t*}), t = 0, 1. Tal como se puede apreciar, las variaciones absolutas y óptimas son idénticas por lo que la productividad relativa de (x_t^t, y_t^t) respecto a (x_t^{t*}, y_t^{t*}) ha permanecido inalterada, $\Delta RFP_t^{0,1} = (AFP_t^1 / AFP_t^0) / (OFP_t^1 / OFP_t^0) = \Delta AFP_t^{0,1} / \Delta OFP_t^{0,1} = 1$.

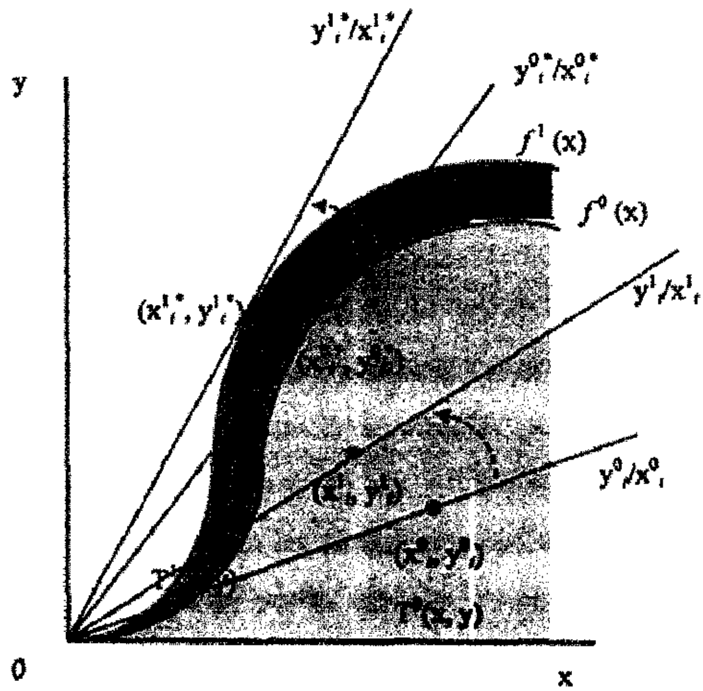


Gráfico 1.1.6. Variación en la productividad absoluta y óptima de los factores de t a t+1.

En el próximo epígrafe se analiza la variación de la productividad de los factores en términos absolutos mientras que la variación en los óptimos de la tecnología se aborda en el siguiente.

1.1.3.2 Variaciones en la productividad absoluta –total– de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$

El cambio en el rendimiento absoluto obtenido por una actividad desde t a $t+1$, *i.e.* en términos dinámicos, se corresponde con la variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$. Dados los vectores factor–producto representativos de una actividad en dos períodos sucesivos, (x_i^t, y_i^t) y (x_i^{t+1}, y_i^{t+1}), si consideramos que los rendimientos absolutos se corresponden respectivamente con (y_i^t/x_i^t) y (y_i^{t+1}/x_i^{t+1}), la variación en la productividad absoluta de los factores se define por

$$\Delta AFP_i^{t,t+1} = (y_i^{t+1}/x_i^{t+1})/(y_i^t/x_i^t). \qquad (1.1.14)$$

La variación en el rendimiento obtenido por la actividad se realiza en términos absolutos y no relativos al no considerar las alteraciones que se hayan podido producir respecto a los óptimos determinados por la tecnología en cada período; es decir, la variación existente en los rendimientos relativos desde una perspectiva dinámica que comprenda las situaciones óptimas en *ambos* momentos temporales. En el gráfico 1.1.6 se puede apreciar cómo la actividad (x_i^t, y_i^t) ha experimentado con el transcurso de tiempo un crecimiento en su rendimiento productivo al ser su productividad en $t = 1$ superior a la existente en $t = 0$, $(y_i^1/x_i^1) > (y_i^0/x_i^0)$, $\Delta AFP_i^{t,t+1} > 1$.

La cuestión que se plantea es si resulta factible descomponer la variación en la productividad absoluta (1.1.14) de una forma coherente con las nociones de eficiencia técnica y de escala ya expuestas. Las actividades, en un intento de mejorar continuamente su productividad, transforman sus procesos de producción de acuerdo a las posibilidades actuales y –expectativas– futuras que brinda la tecnología. Naturalmente, tal potencialidad tecnológica ha de deducirse a través de un proceso de evaluación por comparación o *benchmarking* que toma como referencia a aquellas actividades líderes dentro del sector o industria, así como las posibles direcciones futuras de progreso tecnológico; es decir, aquellas actividades que determinan la OFP_i^t en cada periodo, (x_i^{t*}, y_i^{t*}) y las mejoras que se derivan de los procesos de investigación y desarrollo, *e.g.* patentes. Esta evaluación por comparación del rendimiento presupone que la actividad evaluada, en su transición productiva de t a t+1 a través de transfomaciones técnicas y de escala, tiene como objetivo mejorar su posición relativa respecto a un óptimo tangible de producción que le sirve de referencia y una serie de expectativas futuras basadas en información relativa a óptimos intangibles por no haberse aún materializado. Son las variaciones futuras de la tecnología óptima de producción las que condicionan un entorno de riesgo e incertidumbre operativo cuya gestión implica incurrir en elevados costes de información sobre la mejor práctica técnica, *best practice*, y los procesos de avance tecnológico.

Así, las actividades productivas en su intento de mejorar la posición relativa han de considerar ambas situaciones, pues resulta evidente que la tecnología de producción se encuentran en constante evolución, por lo que aquellas actividades que transformen sus procesos tomando únicamente en consideración la tecnología actual –óptimo *best practice*–, sin anticipar posibles variaciones futuras, *i.e. technological paths*, adoptan una pauta de comportamiento equiparable a la ausencia de expectativas de cambio tecnológico. De esta forma, dado el entorno de riesgo e incertidumbre en que operan, no debe sorprender que la situación final que se establezca en la transición de t a t+1 no sea la inicialmente planeada en términos relativos, *i.e.* alcanzar el rendimiento óptimo, si las expectativas han sido erróneas.

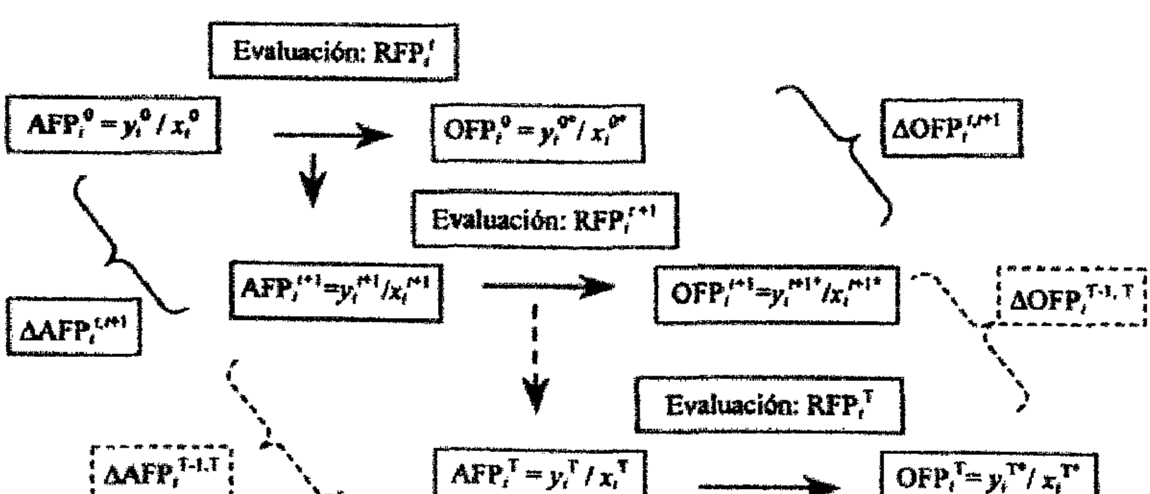


Gráfico 1.1.7. Estrategia dinámica de mejora en el rendimiento productivo, t = 0,...,T

El gráfico 1.1.7 ilustra la estrategia o proceso de evaluación dinámica que realizan las actividades a lo largo del tiempo en la mejora de su rendimiento productivo. Dado un determinado periodo temporal de análisis inicial, $t = 0,...,T$, el gestor de una actividad i–ésima evalúa la diferencia entre el rendimiento obtenido, AFP_i^t y aquel óptimo que se verifica en el sector o industria, OFP_i^t. Este diferencial, que se corresponde en el modelo propuesto con el rendimiento relativo de los factores, RFP_i^t, puede tener su origen tanto en causas técnicas como de escala y fuerza a la observación a transformar su tecnología con objeto de aproximarse al rendimiento óptimo que se verifica en el período t –óptimo tangible– y su posible variación de acuerdo a las expectativas futuras de cambio tecnológico, *i.e.* las alteraciones en el propio óptimo. Tal transformación se materializa en la productividad absoluta de la actividad en $t+1$, AFP_i^{t+1}, que puede ser comparada respecto a aquella en t a través de la variación en la productividad absoluta de los factores $\Delta AFP_i^{t,t+1}$. Sin embargo, si bien respecto al óptimo en t la nueva productividad absoluta AFP_i^{t+1} puede suponer un avance en el rendimiento relativo, esta situación se debe comparar con óptimos contemporáneos para evaluar si la situación final supone un avance o empeoramiento de la situación; es decir, se ha de comparar AFP_i^{t+1} en términos del rendimiento óptimo en $t+1$, OFP_i^{t+1}, –y así establecer el rendimiento relativo RFP_i^{t+1}–, ó de forma dinámica como ha evolucionado la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1} = (y_i^{t+1}/x_i^{t+1})/(y_i^t/x_i^t)$ respecto a la variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_i^{t,t+1} = (y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*})/(y_i^{t*}/x_i^{t*})$. El modelo de evaluación expresado en (1.1.13) es capaz de evaluar la situación *final* en términos relativos desde t a $t+1$ de forma que si la actividad evaluada presenta una productividad relativa de los factores unitaria en $t+1$, $RFP_i^{t+1}=1$, ésta habrá realizado la transformación tecnológica necesaria para alcanzar la optimalidad productiva –realizando una previsión acertada de las expectativas tecnológicas–. Sin embargo, si $RFP_i^{t+1} < 1$, entonces la transformación tecnológica manifestada en $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ habrá fracasado en su intento de alcanzar el óptimo; es decir, existe un error de previsión respecto la evolución del óptimo de la tecnología de producción o cambio productivo.

Así mismo, el modelo (1.1.13) permite considerar a $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ como un proceso de *transformación tecnológica* que acometen las actividades con relación a óptimos productivos que, en un período contemporáneo les sirve de referencia; es decir, permite analizar cuál es el resultado de las transformaciones tecnológicas respecto al óptimo tangible que representa la productividad óptima de los factores en el período t. Resulta así posible comparar AFP_i^t y AFP_i^{t+1} respecto a OFP_i^t con objeto de determinar si, de acuerdo la situación óptima existente en el período de evaluación, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ implica una aproximación respecto a tal referente o no. Tal evaluación equivale a asumir una gestión de la tecnología productiva que equivale a unas expectativas nulas de variación de las productividades óptimas de los factores al considerar un óptimo de referencia invariable. Si consideramos que las actividades transforman sus procesos tecnológicos de acuerdo a la evaluación comparativa que realizan en un período t, entonces resulta de interés observar si, transcurrido el tiempo, tal transformación supone alteraciones en su eficiencia relativa en términos técnicos y de escala. Así, la transformación tecnológica representada por la variación en la productividad absoluta, $\Delta AFP_i^{t,t+1} = (y_i^{t+1}/x_i^{t+1}) \ / \ (y_i^t/x_i^t)$, puede ser descompuesta en términos de las transformaciones acontecidas en la eficiencia técnica y de escala –eficiencia productiva– respecto a un *único* óptimo temporal OFP_i^t.

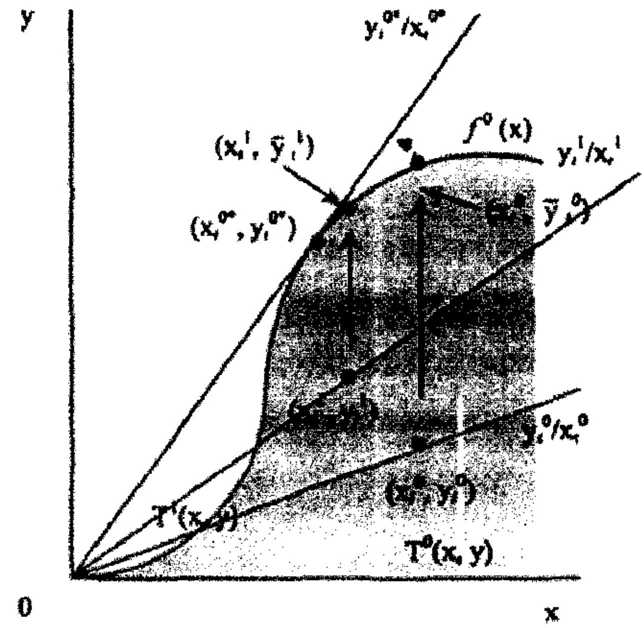


Gráfico 1.1.8. Descomposición de la productividad absoluta de los factores de t a t+1

En el gráfico 1.1.8 –idéntico a los gráficos 1.1.5 y 1.1.6 en términos de (x_i^t,y_i^t)– se puede apreciar cómo la transición productiva de (x_i^0,y_i^0) a (x_i^1,y_i^1) supone un progreso en términos de eficiencia técnica respecto a la frontera tecnológica representada por $f^t(x)$, $t = 0$, dando origen a una *transformación técnica* positiva para la actividad i. En términos genéricos, se define en la presente investigación la transformación técnica de una actividad como las variaciones en la eficiencia técnica respecto a una única frontera de referencia,

$$TT_i^{t,t+1} = (y_i^{t+1}/\bar{y}_i^{t+1})/(y_i^t/\bar{y}_i^t). \qquad (1.1.15)$$

En el ejemplo gráfico se puede observar cómo tal variación presenta valores superiores a la unidad, $TT_i^{0,1} > 1$, al haberse reducido la distancia entre la producción obtenida y aquella potencial entre $t = 0$ y $t = 1$ respecto a la tecnología presente en $t = 0$. Así mismo, es posible observar cómo la transformación productiva supone una mejora en la escala de operaciones de la actividad, dado que el diferencial existente entre las productividades de referencia sobre las fronteras eficientes y aquella óptima en t también se ha reducido. Así, se define la *transformación de escala* como

$$ST_i^{t,t+1} = [(\tilde{y}_i^{t+1}/x_i^{t+1}) / (y_i^{t*}/x_i^{t*})] / [(\tilde{y}_i^{t}/x_i^{t}) / (y_i^{t*}/x_i^{t*})], \qquad (1.1.16)$$

pudiéndose observar cómo el óptimo de referencia resulta único, $OFP_i^t = (y_i^{t*}/x_i^{t*})$. En el gráfico 1.1.8 se aprecia la mejora en la escala de operaciones de la observación (x_i^1, y_i^1) al encontrarse más próxima a la escala óptima representada por (x_i^{0*}, y_i^{0*}), por lo que su eficiencia de escala es superior, *i.e.* $ST_i^{0,1} > 1$. Considerando la transformación técnica y de escala, resulta factible expresar la variación acontecida en la productividad absoluta de los factores respecto al óptimo tecnológico en $t = 0$, como

$$\Delta AFP_i^{t,t+1} = TT_i^{t,t+1} \cdot ST_i^{t,t+1}, \qquad (1.1.17)$$

de forma que en el gráfico 1.1.8 se observa $\Delta AFP_i^{0,1} = TT_i^{0,1} \cdot ST_i^{0,1} = \{y^1_i/\tilde{y}^1_i \cdot [(\tilde{y}^1_i/x^1_i) / (y^{0*}_i/x^{0*}_i)]\} / \{y^0_i/\tilde{y}^0_i \cdot [(\tilde{y}^0_i/x^0_i) / (y^{0*}_i/x^{0*}_i)]\} = (y^1_i/x^1_i)/(y^0_i/x^0_i)$. Así, la evolución de la productividad absoluta puede relativizarse respecto al óptimo de producción de un determinado periodo en términos de la transformación técnica y de escala –transformación tecnológica–. Si la transformación tecnológica experimentada por la actividad entre t y $t+1$ supone un progreso productivo, se habrá producido un incremento en la productividad absoluta habiéndose acercado la actividad al óptimo tangible en t.

Sin embargo, tal óptimo se encuentra en constante evolución como consecuencia de los procesos continuos de investigación y desarrollo, lo que obliga a las actividades a un proceso continuo de evaluación por comparación, *benchmarking*, en la búsqueda de mejoras en el rendimiento productivo. Así, tal como se pone de manifiesto en los gráficos 1.1.5 y 1.1.6, la variación positiva de la productividad absoluta no presupone que la situación relativa haya experimentado un progreso, dado que para alcanzar tal conclusión habría que evaluar su evolución en términos relativos, (1.1.11-12) o, alternativamente, si la evolución en términos absolutos supera, iguala o resulta inferior a la variación en la productividad óptima de los factores o cambio productivo, (1.1.13).

1.1.3.3 Variaciones en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$

La variación en la productividad relativa de los factores puede ser expresada según (1.1.13) de acuerdo a $\Delta RFP_i^{t,t+1} = [(y_i^{t+1}/x_i^{t+1}) / (y_i^t/x_i^t)] / [(y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*}) / (y_i^{t*}/x_i^{t*})]$ que establece, precisamente, la razón entre la variación en la productividad absoluta de los factores previamente definida, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, y la variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$. Se define así $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ como la variación acontecida en las productividades óptimas dadas la tecnologías en $t = 0$ y $t=1$, $T^0(x,y)$ y $T^1(x,y)$,

$$\Delta OFP_i^{t,t+1} = (y_i^{t+1*} / x_i^{t+1*}) / (y_i^{t*} / x_i^{t*}), \tag{1.1.18}$$

La evaluación *dinámica* del rendimiento relativo de una actividad exige determinar las variaciones –incrementos o retrocesos– que puedan acontecer con el paso del tiempo en los óptimos tecnológicos. El gráfico 1.1.9 ilustra la variación en la tecnología desde $T^0(x, y)$ a $T^1(x, y)$. La ampliación en el conjunto de posibilidades de producción condiciona a las actividades que en $t = 1$ pueden explotar la nueva tecnología con objeto de obtener mejoras productivas y relativas. Así mismo, la variación en la tecnología implica incrementos en los óptimos de producción generables, *i.e.* *progreso* productivo. Tal como puede observarse, la alteración –positiva– acontecida en el conjunto de posibilidades de producción desde $t=0$ a $t=1$ se refleja en el avance del subconjunto óptimo de posibilidades de producción y, por tanto, el progreso productivo se traduce en un incremento en las productividades máximas. Gráficamente, tal variación queda reflejada por el incremento en la pendiente de los radio vectores que reflejan las óptimos de producción en cada período, *i.e.* $(y^{1*}_i/x^{1*}_i) > (y^{0*}_i/y^{0*}_i)$, $\Delta OFP_i^{t,t+1} > 1$.

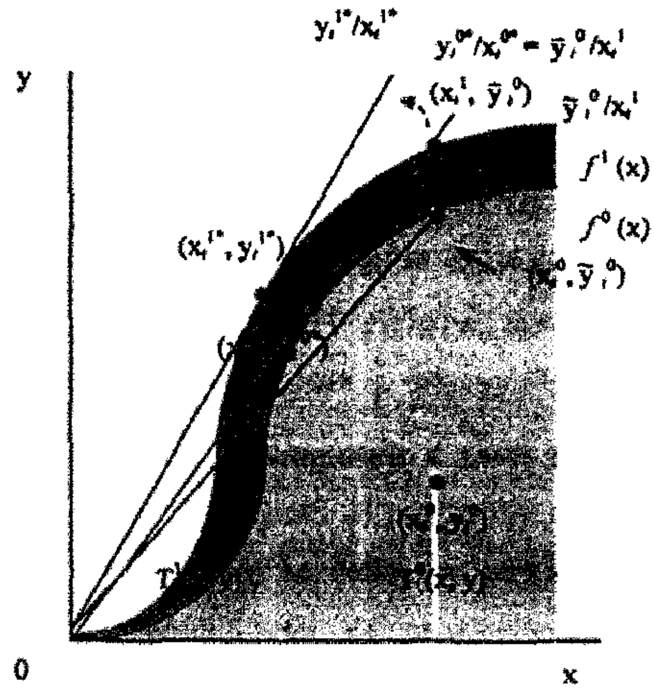


Gráfico 1.1.9. El cambio –progreso– tecnológico entre t a t +1

Ahora bien, el concepto de cambio productivo definido en términos del óptimo de producción se corresponde con una alteración en la escala de operaciones de forma que el nuevo óptimo representa unas cuantías de producción generada y factores empleados distintas a aquellas existentes en el período precedente. La necesidad de determinar si una particular escala de operaciones mejora o empeora respecto al óptimo con el paso del tiempo implica resolver la caracterización del cambio productivo en términos del *cambio técnico* y *cambio de escala*.

La variación acontecida en el conjunto de posibilidades de producción no tiene solo reflejo en el subconjunto óptimo, sino también en aquel eficiente. Esta posibilidad queda representada en el gráfico 1.1.9 por el avance en las fronteras de producción, f^0(x) y f^1(x). Esta alteración se corresponde con el desplazamiento en la función de producción, identificado en el articulo seminal sobre crecimiento de Solow (1957) y se encuentra tratado de forma exhaustiva por Chambers (1988). La posibilidad de generar distintos niveles producción para igual escala de operaciones –cuantía de factores– de acuerdo a la nueva tecnología se identifica en la teoría de la producción con el concepto de cambio técnico –*progreso* si se genera más producción–. Se define en la presente investigación el *cambio técnico* como

$$TC_i^{t,t+1} = (\bar{y}_i^t/x_i^t)/(\tilde{y}_i^t/x_i^t) = (\bar{y}_i^t/\tilde{y}_i^t)\,|\,x_i^t; \tag{1.1.19}$$

gráficamente, el cambio técnico se ilustra por el diferencial en la generación de producción, $TC_i^{0,1} = (\bar{y}^0_i/x_i^0)/(\tilde{y}^0_i/x^0_i) = (\bar{y}^0_i/\tilde{y}^0_i)\,|\,x^0_i$, que en el ejemplo propuesto adopta valores superiores a la unidad , $\bar{y}^0_i > \tilde{y}^0_i$, $TC_i^{0,1} > 1$. Obsérvese que la tecnología existente en $t+1$ queda incorporada a través de la proyección de la observación (x_i^t, y_i^t) sobre el subconjunto de producción eficiente presente en tal período, $f^{t+1}(x)$. El cambio técnico se define en términos de variaciones del subconjunto eficiente de posibilidades de producción –frontera– para una determinada escala de operaciones, *i.e.* aquella de la actividad evaluada x_i^0, y no respecto al subconjunto óptimo con objeto de no incorporar a tal medida un eventual cambio de escala óptima. Así, la existencia de cambio técnico dada una escala de operaciones resulta independiente del cambio de escala al excluirse esta posibilidad.

Ahora bien, dada la escala de operaciones de la actividad cuyo rendimiento se evalúa, ¿se ha visto alterada su posición relativa respecto al óptimo desde $t = 0$ a $t = 1$? El cambio de escala se corresponde con la divergencia de las productividades observadas en los subconjuntos eficientes de producción para una escala de operaciones determinada –observación de referencia– respecto a las productividades máximas –escalas óptimas– en ambos períodos. Dada la escala representada por x_i^t, la variación en la razón de las productividades obtenidas en las fronteras o subconjuntos eficientes respecto a los óptimos en t y $t+1$ se define como cambio de escala

$$SC_i^{t,t+1} = [(y_i^{t+1*}/x_i^{t+1*})/(\bar{y}_i^t/x_i^t)]\,/\,[(y_i^{t*}/x_i^{t*})/(\tilde{y}_i^t/x_i^t)]. \tag{1.1.20}$$

En términos del gráfico 1.1.9, tal variación se corresponde con la expresión $SC_i^{0,1} = [(y_i^{1*}/x_i^{1*})/(\bar{y}_i^0/x_i^0)]\,/\,[(y_i^{0*}/x_i^{0*})/(\tilde{y}_i^0/x_i^0)]$, pudiéndose observar cómo el diferencial entre t y $t+1$ se incrementa. Así, $[(y_i^{1*}/x_i^{1*})/(\bar{y}_i^0/x_i^0)] >$

$[(y_i^{0*}/x_i^{0*})/(\tilde{y}_i^{0}/x_i^{0})]$, $SC_i^{0,1} > 1$. Resulta necesario resaltar que los valores relativos al cambio de escala, al igual que aquellos técnicos, reflejan valores superiores a la unidad si el diferencial entre las productividades eficientes y óptimas entre t y t+1 se incrementa, lo cual implica que desde la perspectiva de la escala que sirve de referencia para evaluar la variación en la tecnología, x_i^t, ésta queda relegada a una situación inferior respecto al nuevo óptimo.

Una vez definido el cambio técnico y el cambio de escala podemos mostrar cómo la variación en los óptimos productivos de la tecnología, (1.1.18), puede ser expresado en términos del cambio técnico y de escala,

$$\Delta OFP_i^{t,t+1} = TC_i^{t,t+1} \cdot SC_i^{t,t+1}, \tag{1.1.21}$$

de forma que en el ejemplo gráfico, $\Delta OFP_i^{0,1} = TC_i^{0,1} \cdot SC_i^{0,1} = (y_i^{1*}/x_i^{1*}) / (y_i^{0*}/y_i^{0*})$ $= (\tilde{y}_i^{0}/\tilde{y}_i^{0}) \cdot [(y_i^{1*}/x_i^{1*})/(\tilde{y}_i^{0}/x_i^{0})] / [(y_i^{0*}/y_i^{0*})/(\tilde{y}_i^{0}/x_i^{0})]$.

1.1.3.4 El rendimiento relativo, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$, en términos de la variación en la productividad absoluta, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, y óptima, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$, de los factores

La evolución del rendimiento relativo de una actividad a través del tiempo supone, en última instancia, comparar la variación en la productividad absoluta de la actividad respecto a la variación en la productividad óptima, (1.1.13). Con relación al primer concepto, la variación en la productividad absoluta de los factores supone una transformación tecnológica de la actividad evaluada con objeto de mejorar su rendimiento absoluto que puede ser expresada en términos técnicos y de escala respecto a un óptimo temporal, (1.1.17). Respecto al segundo concepto, la variación en la productividad óptima o cambio productivo refleja las alteraciones en las tecnologías eficientes y óptimas de producción a través del cambio técnico y de escala, (1.1.21).

Dada la relación establecida en (1.1.13) y la posibilidad de descomponer las variaciones en las productividades absolutas y óptimas resulta factible expresar la evolución del rendimiento relativo de acuerdo a

$$\Delta RFP_i^{t,t+1} = \frac{\Delta AFP_i^{t,t+1}}{\Delta OFP_i^{t,t+1}} = \frac{TT_i^{t,t+1}}{TC_i^{t,t+1}} \bullet \frac{ST_i^{t,t+1}}{SC_i^{t,t+1}} = \Delta TE_i^{t,t+1} \bullet \Delta SE_i^{t,t+1} = \Delta PE_i^{t,t+1}. \qquad (1.1.22)$$

Así, la evaluación del rendimiento relativo en términos de la eficiencia productiva puede ser analizada comparando la evolución de la transformación técnica, $TT_i^{t,t+1}$, respecto al cambio técnico, $TC_i^{t,t+1}$, y aquella en la escala de operaciones, $ST_i^{t,t+1}$, respecto al cambio de escala, $SC_i^{t,t+1}$. La interpretación de tales razones se corresponde respectivamente con las variaciones en la eficiencia técnica y de escala. Efectivamente, si respecto a una determinada tecnología de referencia, *e.g.* t, una actividad experimenta transformaciones técnicas positivas y, al mismo tiempo, la propia tecnología experimenta un cambio técnico de igual magnitud, su posición relativa no se habrá visto alterada siendo $\Delta TE_i^{t,t+1} = TT_i^{t,t+1} / TC_i^{t,t+1} = 1$. De forma análoga, si bien una actividad puede experimentar una transformación de escala positiva respecto a la escala de operaciones óptimas en t, si tal transformación se corresponde con una escala final de operaciones que se distancia a su vez de la escala óptima en $t+1$, puede acontecer que su posición relativa en términos de eficiencia de escala no se haya visto alterada, $\Delta SE_i^{t,t+1} = ST_i^{t,t+1} / SC_i^{t,t+1} = 1$.

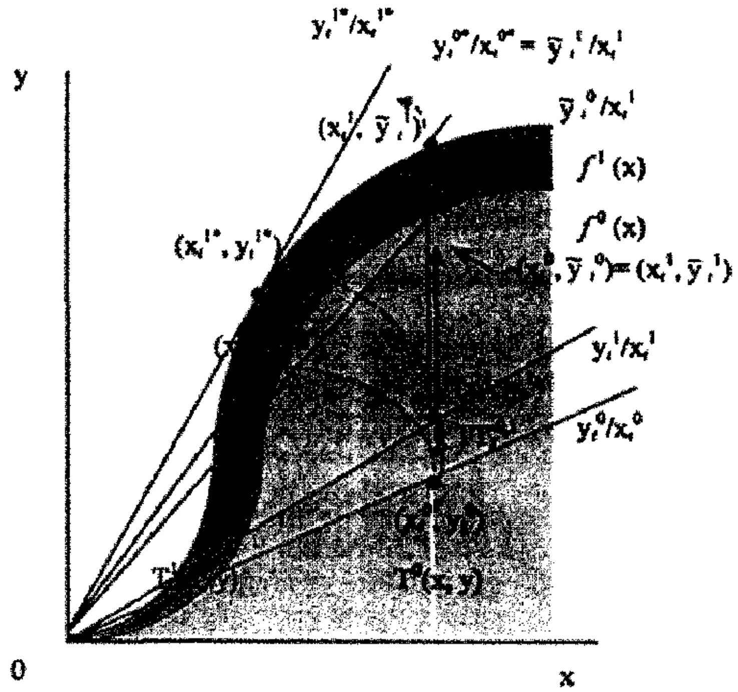


Gráfico 1.1.10. Descomposición de la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$.

En el gráfico 1.1.10 la observación (x_i^1, y_i^1) no altera su escala de producción respecto a (x_i^0, y_i^0), *i.e.* $x_i^1 = x_i^0$, aunque la cuantía de producto obtenida se incrementa de forma que, respecto al subconjunto eficiente representado por $f^0(x)$, su transformación tecnológica es positiva, $TT_i^{0,1} > 1$. Sin embargo, si bien la observación analizada se acerca a la frontera $f^0(x)$, la alteración de esta última puesta de manifiesto por $TC_i^{0,1} > 1$ hace que la posición relativa de la actividad en términos de eficiencia técnica no se haya visto alterada, *i.e.* $TT_i^{0,1} = TC_i^{0,1}$ siendo $\Delta TE_i^{0,1} = TT_i^{0,1} / TC_i^{0,1} = 1$. De forma análoga en relación a la transformación de escala, se puede apreciar cómo en la transición de t a t+1 de (x_i^t, y_i^t), la eficiencia respecto al óptimo representado por (x_i^{0*}, y_i^{0*}) no se ha visto alterada, $ST_i^{0,1} = 1$, mientras que el cambio de escala representado para la tecnología respecto a x_i^t muestra un incremento en el diferencial entre las proyecciones eficientes y óptimas, $SC_i^{0,1} > 1$. Al haber existido un empeoramiento en la eficiencia de escala, $\Delta SE_i^{0,1} = ST_i^{0,1} / SC_i^{0,1} < 1$, el resultado final es que la posición relativa de la observación se ha visto empeorada, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta TE_i^{0,1} \cdot \Delta SE_i^{0,1} = TT_i^{0,1} / TC_i^{0,1} \cdot ST_i^{0,1} / SC_i^{0,1} < 1$.

1.1.4 Generalización rendimiento *absoluto* y *relativo* –dinámico–

El concepto de productividad relativa de los factores que establece el modelo de evaluación del rendimiento productivo propuesto en la presente investigación, (1.1.11), puede generalizarse al caso de múltiples productos y factores definiendo funciones agregadoras que permitan establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{RFP}_i &= \frac{\mathrm{RFP}_i^{t+1}}{\mathrm{RFP}_i^t} = \frac{\mathrm{AFP}_i^{t+1}/\mathrm{OFP}_i^{t+1}}{\mathrm{AFP}_i^t/\mathrm{OFP}_i^t} = \frac{\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})/h^{t+1}(x_i^{t+1})\right]/\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*/h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t)\right]/\left[g^t(y_i^t)^*/h^t(x_i^t)^*\right]} = \\ &= \frac{\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}}{\Delta\mathrm{OFP}_i^{t,t+1}} = \frac{\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})/h^{t+1}(x_i^{t+1})\right]/\left[g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t)\right]}{\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*/h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]/\left[g^t(y_i^t)^*/h^t(x_i^t)^*\right]},\end{aligned} \qquad (1.1.23)$$

por lo que, de acuerdo a lo expuesto previamente, resulta factible expresar la $\Delta\mathrm{RFP}_i^{t,t+1}$ en términos de la variación en la productividad absoluta, $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}$, y óptima, $\Delta\mathrm{OFP}_i^{t,t+1}$, de los factores.

El objetivo final del análisis es poder observar, dentro de un contexto multiproducto y multifactor, tanto las variaciones en el rendimiento *absoluto* de un proceso productivo como la alteración *relativa* que tal variación supone respecto al óptimo del sector productivo. Con relación a las variaciones en el rendimiento absoluto, éstas se corresponden en la presente investigación con el concepto de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}$, que a su vez resulta ser aquella comúnmente aceptada o estándar en análisis productivo bajo la conocida denominacion de *variación en la productividad total de los factores*, $\Delta\mathrm{TFP}_i^{t,t+1}$. Así, para Jorgenson y Griliches (1967) o Diewert (1992b) el cambio en la productividad total de los factores se interpreta como la variación de un número índice de productos dividido por un número índice de factores, *i.e.* $\Delta\mathrm{TFP}_i^{t,t+1} = (g^{t+1}(y_i^{t+1}) / g^t(y_i^t)) / (h^{t+1}(x_i^{t+1}) / h^t(x_i^t))$ que resulta equivalente a la aquí presentada dado que $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1} = (g^{t+1}(y_i^{t+1}) / h^{t+1}(x_i^{t+1})) / (g^t(y_i^t) / h^t(x_i^t))$. Sin embargo, respecto al concepto de cambio productivo o variación en los óptimos de producción, $\Delta\mathrm{OFP}_i^{t,t+1}$, así como a la variación del rendimiento relativo de las actividades como razón entre ambas, $\Delta\mathrm{RFP}_i^{t,t+1}=\Delta\mathrm{PE}_i^{t,t+1}$, no se encuentra referencia alguna en la literatura en la forma aquí descrita, por lo que confieren un carácter novedoso al modelo aquí propuesto de análisis del rendimiento productivo.

La representación introducida del rendimiento productivo de acuerdo a (1.1.23), $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ y $\Delta RFP_i^{t,t+1}$, supone una concepción ideal y precisa de estos conceptos aunque su aplicación empírica pueda dar origen a diversos resultados. Efectivamente, constatada la necesidad de agregar productos y factores con objeto de dotar al análisis de operatividad práctica en procesos multiproducto y multifactor, ¿cuáles habrían de ser los pesos de productos μ^t, $g^t(y^t_i) = \mu^t_i \cdot y^t_i$ y factores ν^t, $h^t(x^t_i) = \nu^t \cdot x^t_i$, $t = 0, 1$, que permiten evaluar el rendimiento productivo de las observaciones? La definición de funciones agregadoras basadas en distintas propuestas tiene importantes consecuencias desde una perspectiva teórica y empírica.

Desde un punto de vista teórico, resulta conveniente establecer unas funciones –pesos– que garanticen que los índices de rendimiento productivo satisfagan una serie de propiedades básicas o tests que resultan esenciales para su interpretación coherente, *e.g.* identidad, monoticidad, transitividad, proporcionalidad, separabilidad, etc. y, así mismo, se correspondan con tecnologías genéricas que no impongan restricciones indeseadas sobre el proceso productivo. Ambas condiciones permiten establecer la idoneidad de las funciones agregadoras propuestas dentro del marco axiomático y tecnológico de los números índices, exigiéndose en el último caso que los índices definidos sean *exactos –superlativos–* para tecnologías de producción flexibles. Así, la representación realizada en (1.1.23) de las funciones agregadoras, $g^t(y^t_i)$, $h^t(x^t_i)$, t=0,1, es genérica debiéndose imponer una serie de restricciones sobre éstas con objeto de obtener resultados cuya interpretación se fundamente en criterios deseables, *i.e.* axiomáticos y tecnológicos –ver Diewert (1992a) con relación a las propiedades de números índices en general y Førsund (1997) para aquellos de productividad en el contexto que nos ocupa–.

Desde un punto de vista empírico, la elección de diversas funciones conlleva resultados numéricos alternativos. Así, por ejemplo, es factible agregar productos y factores según sus precios de mercado o de acuerdo a precios sombra que se derivan de definiciones precisas de la tecnología de producción según técnicas optimizadoras. En el primer caso, los pesos considerados para agregar productos y factores, μ^t y ν^t, se corresponden con los precios observados para cada una de estas variables, definiéndose por ejemplo índices de productividad de Laspeyres, (1871), Paasche, (1874), Fisher (1921) ó Törnqvist (1936) –siendo estos dos últimos respectivamente *exactos*, bajo ciertas condiciones, para unas tecnologías cuadráticas y translogarítmicas–. En el segundo caso, resulta factible proponer índices de productividad que caracterizan la tecnología a partir de funciones de producción, costes, transformación o distancia dándose origen, en este último caso, a índices de Malmquist (1953). Estas relaciones se abordan en detalle al inicio del tercer capítulo cuando se habla genéricamente sobre la conveniencia de definir distintos índices de rendimiento productivo.

Nótese que en el caso de agregación por precios, esta aproximación en la medición de la productividad de los factores permite homogeneizar las cuantías de productos y factores en un agregado monetario. Si tal es la decisión adoptada, el análisis del rendimiento productivo de las actividades entra en el campo tradicional de los números índices, determinándose la idoneidad del índice elegido para realizar el análisis de acuerdo a los mencionados criterios axiomáticos o económicos, véase Diewert (1976). Sin embargo, en la presente investigación no se considera esta posibilidad, pues implica introducir elementos de carácter económico en una caracterización de la tecnología que, finalmente, exige adoptar hipótesis restrictivas respecto al comportamiento de los agentes con objeto de mostrar su idoneidad para caracterizar las variaciones en la productividad total de los factores –criterios económicos–. Así, se recurre a técnicas de optimización matemática que permiten establecer precios sombra para las funciones agregadoras de factores y productos. Tales técnicas se conocen en la literatura de analisis de eficiencia y productividad por Análisis Envolvente de Datos –*Data Envelopment Analysis*– y son introducidas en el cuarto capítulo[5]. El AED se configura así como un método que permite caracterizar la tecnología de forma plena, estableciendo las ponderaciones que permiten calcular los índices representativos del rendimiento productivo de las actividades y permitiendo extrapolar de forma sencilla el modelo de análisis

---

[5] Una ventaja adicional de determinar índices de rendimiento productivo basados en precios sombra radica en que para su determinación solo se requiere información sobre cantidades, mientras que el uso de precios de mercado implica disponer de este nivel de información adicional.

presentado a procesos multiproducto y multifactor. Las implicaciones de adoptar esta aproximación con objeto de determinar las ponderaciones de las funciones agregadoras y así evaluar la productividad relativa de los factores se aborda en los próximos capítulos.

Por último, la generalización de la evolución del resultado económico de una determinada actividad exige hacer uso de los conceptos ya introducidos por lo que podemos definir ésta de la siguiente forma: $[(p^{t+1}\cdot y_i^{t*} - w^{t+1}\cdot x_i^{t*}) - (p^{t+1}\cdot y_i^{t+1} - w^{t+1}\cdot x_i^{t+1})] - [p^t\cdot y_i^{t*} - w^t\cdot x_i^{t*} - (p^t\cdot y^t_i - w^t\cdot x^t_i)]$. El gráfico 1.1.11 muestra la mejora que en términos económicos ha experimentado la actividad (x_i^t, y_i^t) desde t=0 a t=1, al reducirse la diferencia existente entre el beneficio obtenido por la actividad en cada momento temporal respecto al máximo, *i.e.* el rendimiento económico de la actividad se incrementa con el tiempo. De acuerdo a lo considerado anteriormente, podría ser factible considerar una descomposición paralela del rendimiento económico relativo en términos absolutos y óptimos. Sin embargo, el desarrollo de estas ideas supone abandonar la dimensión tecnológica de análisis en la que se centra la presente investigación.

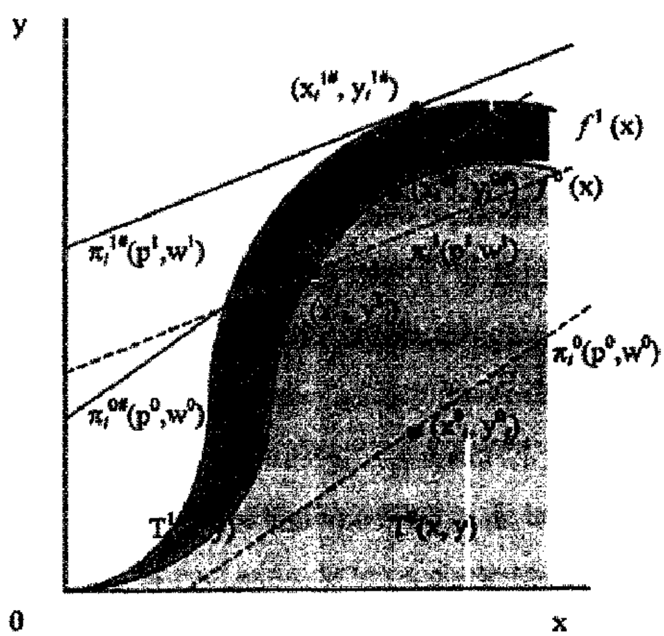


Gráfico 1.1.11. Rendimiento económico desde t a t +1.

Así, los desarrollos aquí propuestos con objeto de caracterizar las variaciones en la productividad relativa de los factores en un contexto multiproducto y multifactor se centran en una definición tecnológica del rendimiento productivo. Su extensión a un concepto de rendimiento que englobe un análisis económico en términos de eficiencia asignativa –capacidad para producir las cuantías de productos con un uso de factores que maximizan el beneficio– no se contempla, pues se entiende que son los análisis primales, físicos, aquellos adecuados para evaluar el rendimiento en el largo plazo. Se considera así que el análisis del rendimiento productivo entendido como la optimización del resultado productivo a través del tiempo es aquel relevante en períodos prolongados donde la tecnología y conjunto de factores productivos pueden ser alterados sin restricciones. Por el contrario en análisis del rendimiento a corto plazo, son los criterios económicos aquellos que suelen prevalecer –optimización del resultado económico–.

1.2 Caracterización del rendimiento productivo de las actividades

Introducidos los conceptos anteriores se concluye el presente capítulo mostrando el esquema teórico de análisis dinámico propuesto en esta investigación para evaluar el rendimiento productivo de las observaciones. La base sobre la que descansa tal caracterización es el concepto de variación en la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$. Tal como se ilustra en el gráfico 1.2.1, la definición en términos relativos del rendimiento productivo resulta equivalente a la variación en la eficiencia productiva de las observaciones $\Delta PE_i^{t,t+1}$. Dado que la eficiencia productiva de una actividad puede ser establecida en términos técnicos y de escala –$PE_i^t = TE_i^t \cdot SE_i^t$– es factible explicar su evolución a través de las variaciones en la eficiencia técnica y de escala, $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta PE_i^{t,t+1} = \Delta TE_i^{t,t+1} \cdot \Delta SE_i^{t,t+1}$.

Así mismo, la variación en el rendimiento relativo de una actividad puede ser también evaluada comparando la evolución de la productividad absoluta respecto a aquella presente en los óptimos tecnológicos, $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta AFP_i^{t,t+1} / \Delta OFP_i^{t,t+1}$. Con relación a la productividad absoluta es posible profundizar en el análisis a través de la descomposición de tal transformación tecnológica en sus términos técnicos y de escala, $\Delta AFP_i^{t,t+1} = TT_i^{t,t+1}$ y $ST_i^{t,t+1}$. Respecto al cambio productivo, éste puede analizarse atendiendo a la evolución del cambio técnico y de escala experimentado por la tecnología, $\Delta OFP_i^{t,t+1} = TC_i^{t,t+1} \cdot SC_i^{t,t+1}$. La razón de estos valores se corresponde con la situación final que, en términos relativos, experimenta una actividad de acuerdo a las tecnologías presentes en t y $t+1$ de forma que $\Delta TE_i^{t,t+1} = TT_i^{t,t+1} / TC_i^{t,t+1}$ y $\Delta SE_i^{t,t+1} = ST_i^{t,t+1} / SC_i^{t,t+1}$.

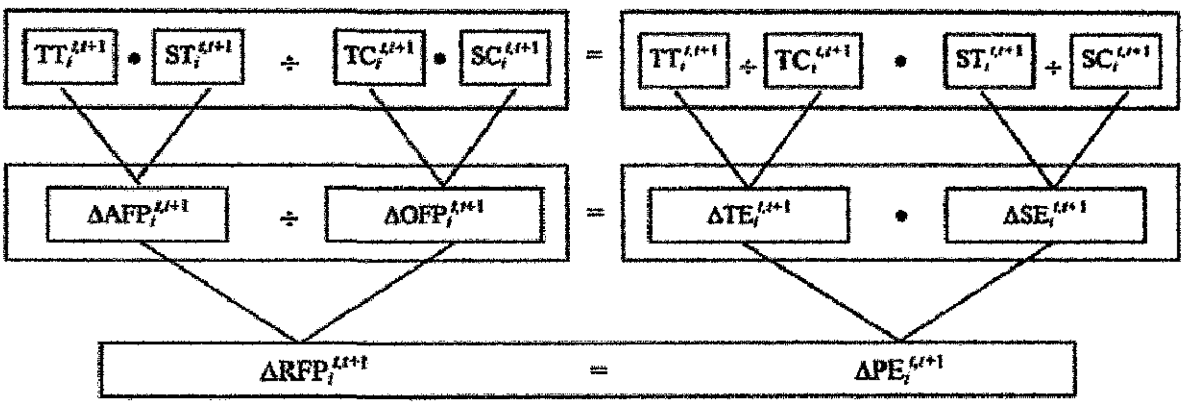


Gráfico 1.2.1. Modelo teórico de análisis del rendimiento productivo

Así, con relación a los modelos tradicionales de rendimiento productivo donde se considera como única variable de análisis la variación en la productividad absoluta –total– obtenida por los factores, el presente marco teórico amplía los objetivos planteando un modelo más genérico de análisis. El esquema teórico presentado en el gráfico 1.2.1 será de gran utilidad en capítulos posteriores, pues permite ilustrar las distintas definiciones realizadas de índices de rendimiento productivo –índices de productividad de Malmquist– e integrar las diversas descomposiciones propuestas. El objetivo es facilitar la comprensión de unos conceptos que resultan de vital importancia para concretar un modelo teórico que permita abordar la correcta caracterización del rendimiento productivo.

Capítulo II

TECNOLOGIA, FUNCIONES DE DISTANCIA Y EFICIENCIA PRODUCTIVA

Una vez introducido el marco analítico que se propone en la presente investigación, este capítulo tiene como objetivo caracterizar formalmente la tecnología de producción introduciendo el concepto de función de distancia. La posibilidad de asociar a la función de distancia las nociones previamente definidas de eficiencia productiva –técnica y de escala– permite desarrollar índices de cuantías de Malmquist que, haciendo uso de tales elementos, permiten evaluar la evolución del rendimiento productivo de acuerdo al marco analítico presentado en el capítulo previo.

2.1 Caracterización de la tecnología de producción

La tecnología de producción se ha definido como el conjunto de procesos o técnica que permite obtener en un determinado lapso temporal –período– la producción de bienes y servicios a través de la transformación y concurso de factores productivos. Supongamos i=1,...,I, actividades productivas que emplean, en un período t, los factores $x^t_i = (x^t_{i1},\ldots,x^t_{iN}) \in \Re^N_+$ para producir $y^t_i = (y^t_{i1},\ldots,y^t_{iM}) \in \Re^M_+$ bienes y servicios según una tecnología que define un conjunto de posibilidades de producción. Dicha tecnología puede ser representada a través de una correspondencia de productos $x \rightarrow P^t(x) \subseteq \Re^M_+$ o, inversamente, por la correspondencia de factores $y \rightarrow L^t(y) \subseteq \Re^N_+$. $P^t(x)$ y $L^t(y)$ representan, respectivamente, los vectores de productos y^t generables a partir de un volumen determinado de factores x^t y los vectores x^t que permiten obtener al menos una cantidad de productos y^t. Estos conjuntos pueden ser representados gráficamente para el caso M = N = 2 de acuerdo al gráfico 2.1.1.

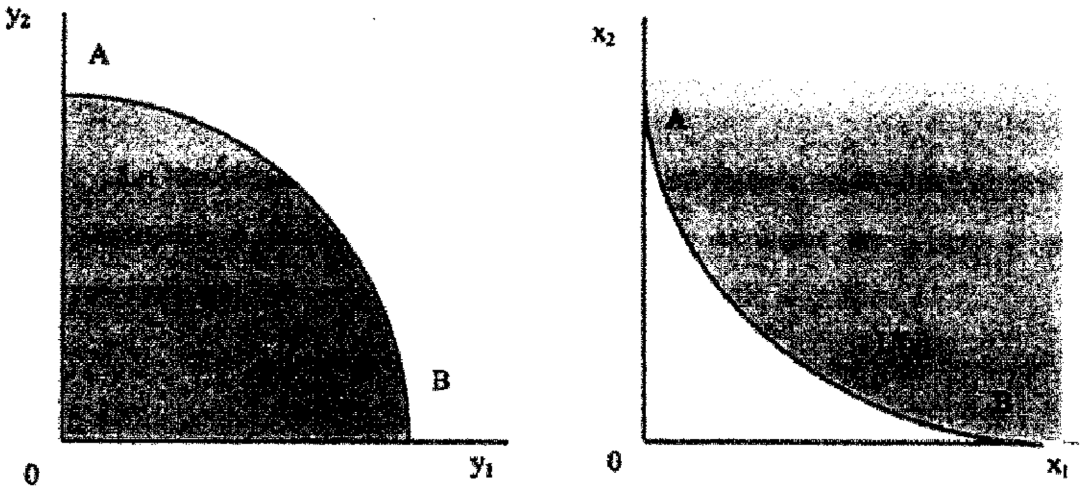


Gráfico 2.1.1a-b. Conjunto de posibilidades de producción: productos y factores.

El gráfico 2.1.1a muestra el conjunto de vectores de productos generables por ese nivel de factores, $P^t(x)$, mientras que 2.1.1b representa aquel conjunto de factores, $L^t(y)$, que permiten obtener tal cuantía de producto. Tales conjuntos pueden caracterizarse genéricamente por

$$\begin{aligned} P^t(x) &= \{y : (x, y) \text{ es factible}\}, \\ L^t(y) &= \{x : (y, x) \text{ es factible}\}; \end{aligned} \tag{2.1.1-2}$$

siendo la relación entre $P^t(x)$ y $L^t(y)$ tal que: $y^t \in P^t(x) \Leftrightarrow x^t \in L^t(y)$, *e.g.* Färe, Grosskopf y Lovell (1985:23) y verificándose

$$P^t(x) = \{y : x \in L^t(y)\} \text{ y } L^t(y) = \{x : y \in P^t(x)\}\,. \tag{2.1.3}$$

Así, la tecnología de producción puede expresarse análogamente como el conjunto de vectores factor–producto,

$$T^t(x,y) = \{(x,y) : y \in P^t(x)\} = \{(x,y) : x \in L^t(y)\}\,(x^t, y^t) \in \Re_+^{N+M}\,, \tag{2.1.4}$$

pudiéndose inferir tanto desde la correspondencia de productos como de factores

$$
\begin{aligned}
P^t(x) &= \{y : (x, y) \in T^t(x, y)\}, \\
L^t(y) &= \{x : (y, x) \in T^t(x, y)\}.
\end{aligned}
\qquad (2.1.5\text{-}6)
$$

La tecnología de producción existente, manifestada en las correspondencias de productos y factores, queda conjuntamente explícita en $T^t(x,y)$ y puede representarse gráficamente en el caso M=N=1 de acuerdo al gráfico 2.1.2.

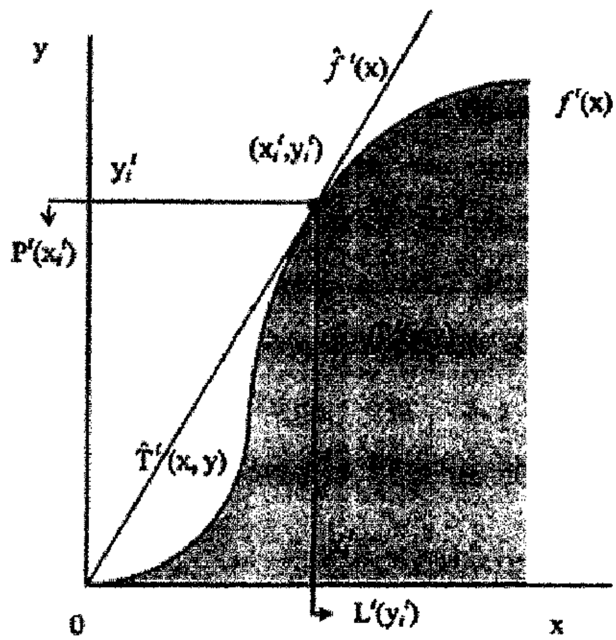


Gráfico 2.1.2. Representación de la tecnología de producción, $T^t(x,y)$.

Si consideramos por ejemplo la actividad (x_i^t, y_i^t), que emplea una cuantía de factores representada por x_i^t, el conjunto de *outputs* producibles queda expresado por $P^t(x_i^t) = [0, y_i^t]$ e inversamente, el producto y_i^t puede ser generado por el vector de factores recogido en el intervalo $L^t(y_i^t) = [x_1, \infty)$ –excluyendo la posibilidad de rendimientos marginales negativos–.

Con objeto de que la tecnología caracterice procesos productivos coherentes o bien conformados –*well behaved*– en términos de teoría de la producción, es necesario establecer el siguiente marco axiomático, véanse Shephard (1970), McFadden (1978) o Färe (1988):

T.1: $0 \in T^t(x, y), (0, y) \in T^t(x, y) \Rightarrow y = 0$,

T.2: Si $(x, y) \in T^t(x, y) \Rightarrow (\mu x, y) \in T^t(x, y)\ \forall\ \mu \leqq 1$,

T.3: Si $(x, y) \in T^t(x, y) \Rightarrow (x, \lambda y) \in T^t(x, y)\ \forall, 0 < \lambda \leqq 1$,

T.4: Si $(x, y) \in T^t(x, y) \Rightarrow (x', y') \in T^t(x, y)\ \ \forall\ (x', -y') \geq (x, -y)$.

T.5: $(T^t(x, y)\ \cap \{(x,y): x \leq \bar{x}\})$ es un conjunto acotado para cada $\bar{x} \in \Re^N_+$,

T.6: $T^t(x, y)$ es un conjunto cerrado,

T.7: $T^t(x,y)$ es un conjunto convexo.

El axioma T.1 elimina la posibilidad de obtener producción alguna sin el empleo de recursos, *i.e* la producción gratuita es eliminada. T.2 establece que un incremento proporcional en los factores no reduce la cuantía de producción obtenida. T.3 se corresponde con la relación inversa, reducciones proporcionales en la producción son compatibles con cuantías de factores utilizadas estables –conjuntamente ambos axiomas definen la débil disponibilidad de factores y productos–. T.4 establece que $T^t(x, y)$ satisface fuerte disponibilidad de factores y productos. Así, dado que $(x, y) \in T^t(x, y)$, $\forall\ (x' \geq x, y' \leq y) \Rightarrow (x', y') \in T^t(x, y)$, entonces $x \in L^t(y)$, $x' \in L^t(y)$, e $y \in P^t(x)$, $y' \in P^t(x)$. La relación de desigualdad entre dos vectores es tal que $x' \geq x$ implica $x'_n \geq x_n\ \forall\ n = 1...N$ –cada elemento de x' es, al menos, igual a su correspondiente elemento en x–. Frente al axioma de fuerte disponibilidad, aquel débil disponibilidad –T.2 y T.3– implica que dado $(x, y) \in T^t(x, y) \Rightarrow (\mu x, \lambda y) \in T^t(x, y), \forall\ \mu \geqq 1, 0 < \lambda \leqq 1$. T.5 presupone que factores finitos no permiten obtener una cuantía infinita de producción y, conjuntamente a T.6, que garantiza la existencia de máximos y mínimos, establecen que el conjunto de posibilidades de producción es compacto. Con relación al último axioma, T.7 presupone que dados dos vectores de factor–producto observados, $(x', y') \in T^t(x, y)$, $(x'', y'') \in T^t(x, y)$, su combinación lineal, $(x''', y''') = (\lambda x' + (1-\lambda)x'', \lambda y' + (1-\lambda)y'') \in T^t(x, y), \lambda \in [0,1]$.

Adicionalmente, con objeto de determinar la magnitud de los rendimientos a escala y definir funciones de distancia que satisfagan separabilidad en productos y factores, resulta adecuado caracterizar tecnologías de producción que verifican homogeneidad lineal y homoteticidad simultánea.

T.8. $T^{t}(x,y)$ es linealmente homogénea de grado $+\alpha$.

T.9. $T^{t}(x,y)$ es simultáneamente homotética en productos y factores.

El axioma T.8 supone que si $(x, y) \in T^{t}(x,y) \Rightarrow (\mu x, \mu^{\alpha} y) \in T^{t}(x,y)$, $T^{t}(x,y) = \mu^{\alpha} T^{t}(x,y)$, $\forall \mu > 0$; en caso de $\alpha=1$, la tecnología presenta homogeneidad lineal siendo los rendimientos a escala constantes: $T^{t}(x,y) = \mu T^{t}(x,y)$, $\forall \mu > 0$. Finalmente, el axioma T.9 establece que si la tecnología presenta homoteticidad en productos, entonces la correspondencia P: $\Re^{N}_{+} \rightarrow P^{t}(x)$ se caracteriza por definir un conjunto de productos que puede ser representado por $P^{t}(x) = h^{t}(x) \cdot P^{t}(1_N)$ donde $h^{t}(\cdot): \Re^{N}_{+} \rightarrow \Re_{+}$ representa una función homogénea de grado uno que, satisfaciendo los axiomas de la tecnología, agrega los factores y 1_N es un vector unitario de dimensión (Nx1)–. Por el contrario, si la tecnología presenta homoteticidad en factores, la correspondencia L: $\Re^{M}_{+} \rightarrow L^{t}(y)$ se caracteriza por representar un conjunto de factores que puede ser representado por $L^{t}(y) = g^{t}(y) \cdot L^{t}(1_M)$ donde $g^{t}(\cdot)$: $\Re^{M}_{+} \rightarrow \Re_{+}$ representa una función agregadora de los productos y 1_M es un vector unitario de dimensión (Mx1). En el caso de la representación tecnológica, la existencia de homoteticidad simultánea implica que $T^{t}(x,y) = h^{t}(x) \cdot T^{t}(1_N, y) = g^{t}(y) \cdot T^{t}(x, 1_M)$. Así, dada la definición realizada de esta propiedad, de verificar las funciones agregadoras homogeneidad lineal de primer grado, $h^{t}(\mu x) = \mu h^{t}(x)$ y $g^{t}(\mu y) = \mu g^{t}(y)$, la tecnología es separable verificando rendimientos constantes a escala –T.8, $\alpha = 1$–. Así, es posible apreciar la relación existente entre homoteticidad simultánea y homogeneidad lineal[6].

En lo sucesivo se diferencian los conjuntos de posibilidades de producción de acuerdo al conjunto de axiomas que se asume verifican; en el caso de que la tecnología satisfaga T.1–T.7, se denota por $T^{t}(x,y)$ al conjunto de posibilidades de producción, mientras que una tecnología que adicionalmente se caracterice por la existencia homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– y homoteticidad simultánea –separabilidad–, T.1–T.9, queda identificada por

[6] Hanoch (1970) demuestra cómo la existencia de homoteticidad simultánea implica separabilidad de productos y factores y homogeneidad de grado α.

$\hat{T}^t(x,y)$ –observándose $T^t(x,y) \subseteq \hat{T}^t(x,y)$–. Es posible representar ambas tecnologías en el caso M=N=1 de acuerdo al grafico 2.1.2, donde se muestran las tecnologías representadas por $T^t(x,y)$ y $\hat{T}^t(x,y)$, así como sus respectivas fronteras: $f^t(x)$ y $\hat{f}^t(x)$. La consideración de los axiomas T.8–T.9 supone una estructura de producción ciertamente restrictiva que, sin embargo, debe contemplarse con objeto de establecer índices de productividad –determinantes de la eficiencia productiva– basados en funciones de distancia que verifiquen las propiedades deseables de proporcionalidad y separabilidad –con objeto de mostrar de forma intuitiva a tales índices como razones de funciones agregadoras de productos a funciones agregadoras factores–.

2.2 Funciones de distancia e índices de eficiencia y cuantía

2.2.1 Funciones de distancia de producto, factor y tecnológica

Dada una caracterización de la tecnología como la recogida en T.1-T.7 es posible constatar cómo ésta puede ser alternativamente definida a través de las funciones de distancia de productos y factores establecidas por Shephard (1970) –prescindiendo del subíndice identificativo de la actividad–:

$$\begin{aligned} D_O^t(x,y) &= \min_\theta\left\{\theta > 0 : (y/\theta) \in P^t(x)\right\} = \min_\theta\left\{\theta > 0 : (x, y/\theta) \in T^t(x,y)\right\}, \\ D_I^t(y,x) &= \max_\lambda\left\{\lambda > 0 : (x/\lambda) \in L^t(y)\right\} = \max_\lambda\left\{\lambda > 0 : (x/\lambda, y) \in T^t(x,y)\right\}; \end{aligned} \qquad (2.2.1\text{-}2)$$

de forma que éstas caracterizan la tecnología de forma plena al comprobarse que[7]

$$\begin{aligned} D_O^t(x,y) \leq 1 &\Leftrightarrow (x,y) \in T^t(x,y), \\ D_I^t(y,x) \geq 1 &\Leftrightarrow (x,y) \in T^t(x,y). \end{aligned} \qquad (2.2.3\text{-}4)$$

---

[7] Färe and Primont (1995a:15–21) muestran como la asunción de débil disponibilidad de productos y factores es condición necesaria y suficiente para que las funciones de *outputs* e *inputs* caractericen la tecnología.

La función de distancia de productos, *outputs*, muestra así la mínima expansión radial del vector de productos, máxima producción generable, consistente con las posibilidades que brinda la tecnología dado un determinado nivel de factores. Por su parte, aquella de factores, *inputs*, se corresponde con la máxima contracción radial del vector de factores –mínimo de factores utilizables–. Ahora bien, es posible definir una función de distancia que considere simultáneamente la expansión de los productos y contracción de factores. Tal función, introducida por Färe, Grosskopf y Lovell (1985) se denomina tecnológica –*graph*– por quedar definida, frente a aquella de productos y factores, en el conjunto de posibilidades de producción $T^t(x,y)$, y no únicamente en el espacio definido por las correspondencias $P^t(x)$ o $L^t(y)$. La función de distancia tecnológica se define por:

$$D_T^t(x,y) = \min_{\phi}\{\phi > 0 : (\phi \cdot x, y/\phi) \in T(x,y)\} \,. \tag{2.2.5}$$

Al igual que en caso de las funciones de productos y factores, la función tecnológica caracteriza la tecnología de forma que

$$D_T^t(y,x) \leq 1 \Leftrightarrow (x,y) \in T(x,y) \,. \tag{2.2.6}$$

Efectivamente, sea un vector $(x,y) \in T^t(x,y)$, entonces $D_T^t(x,y) \leq 1$. Asumiendo así que $D_T^t(x,y) \leq 1$, por definición $(x \cdot \phi, y/\phi) \in T^t(x,y)$, y de acuerdo a T.5, cualquier $(x, -y) \geq (x \cdot \phi,\ y/\phi) \in T^t(x,y)$.

La función de distancia tecnológica (2.2.5) muestra la mínima expansión equiproporcional del vector de productos y la máxima contracción equiproprocional del vector de factores consistente, una vez más, con la posibilidades que brinda la tecnología; es decir, aquellas reestructuraciones productivas que permiten alcanzar el máximo potencial de producción con el mínimo potencial de factores utilizados[8].

[8] Así mismo, es posible definir una función de distancia genérica que considere simultáneamente la expansión de los productos y contracción de factores de una forma aditiva y no multiplicativa. Tal función se denomina función de distancia direccional y queda definida de la siguiente forma,

Las funciones de distancia de productos, factores y tecnológica cumplen una serie de propiedades asociadas a los axiomas satisfechos por la tecnología de producción, *e.g.* Färe y Primont (1995a):

D.1. a. $D^f_O(x, 0) = 0, \forall x \in \Re^N_+$, b. $D^f_O(0, y) = +\infty, y \geq 0$, c. $D^f_O(x,y) = D^f_O(x',y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$, a'. $D^f_I(x, 0) = +\infty, x \in \Re^n_+$, b'. $D^f_I(0, y) = 0, y \geq 0$, c'. $D^f_I(x, y) = D^f_I(x',y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$,; a''. $D^f_T(0,0) = 0$, c''. $D^f_T(x, y) = D^f_T(x',y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y')$.

D.2. a. $D^f_O(x,y) \geq D^f_O(x,y'), y' \leq y, \forall x \in \Re^N_+$, a'. $D^f_O(x',y) \leq D^f_O(x,y), x' \geq x, \forall y \in \Re^M_+$ b. $D^f_I(x, y) \geq D^f_I(y', x), x' \leq x, \forall y \in \Re^M_+$, b'. $D^f_I(y', x) \leq D^f_I(x, y), y' \geq y, \forall x \in \Re^N_+$, c. $D^f_T(x, y) \geq D_T(x, y'), y \geq y', \forall (x, y) \in T^f(x,y)$, c'. $D^f_T(x, y) \leq$

$$D_T(x, y, g_x, g_y) = \max\{\beta \geq 0 : (x - \beta g_x, y + \beta g_y) \in T(x, y)\};$$

donde el vector no nulo, $(g_x, g_y) \in \Re^{N+M}_+$, determina la dirección en la que $D_T(x,y,\cdot)$ queda definida. Dicha función, al igual que sus homólogas de productos y factores permite caracterizar la tecnología de forma que

$$D_T(x, y, g_x, g_y) \geq 0 \Leftrightarrow (x, y) \in T(x, y),$$

La función de distancia direccional $D_T(x,y, g_x, g_y)$ se relaciona con las funciones de distancia de *outputs* e *inputs* previas. Si consideramos como vectores direccionales $(x, 0)$ ó $(0,y)$, se verifica

$$D_T(x, y, g_x, 0) = 1 - 1/D_I(x, y),$$
$$D_T(x, y, g_x, 0) = (1 - D_O(x_i, y_i)) - 1;$$

de forma que las expresiones anteriores muestran cómo las funciones de distancia direccionales son caracterizaciones completas de las funciones de distancia unidimensionales de Shephard si bien no de la función tecnológica -de acuerdo a su definición en los espacios de productos o factores-. La función de distancia direccional definida se basa en la función de escasez de Luenberger, *shortage function*, por considerar este autor tal distancia como la escasez de x e y con objeto de alcanzar la frontera de $T(x,y)$ mientras que la interpretación aquí adoptada se corresponde con medidas de eficiencia, Luenberger (1992,1995). Por otra parte, para aquellos familiarizados con este concepto de función de distancia, es posible hacer referencia a la función de medida de McFadden, *gauge function*, que esta definida en términos de los productos. Si representamos el conjunto de posibilidades de producción por $T^* = \{(-x, y): (-x, y) \in T\}$, dicha función queda definida por $H(-x, y) = \min\{\theta > 0: (-x/\theta, y/\theta) \in T^*\}$, McFadden (1978)

Conviene finalizar esta nota sobre funciones de distancia direccionales resaltando que por ser aditivas, no constituyen un instrumento natural para medir la productividad total de los factores en el modo expuesto en la presente sección –ratio entre productividades- aunque en el caso de la eficiencia beneficio donde el objetivo es maximizar la *diferencia* entre ingresos y costes, *i.e* constituye un objetivo aditivo, éstas presentan características de dualidad que favorecen su interpretación como medidas de rendimiento *económico* de las observaciones, Chambers *et al.* (1998).

$D^t_T(x',y)$, $x \geq x'$, $\forall\ (x,y) \in T^t(x,y)$, c''. $D^t_T(x, y) \leq D^t_T(x', y')$, $(x',-y') \leq (x,-y)$, $\forall\ (x, y) \in T^t(x,y)$.

D.3. a. $D^t_O(x, \mu y) = \mu D^t_O(x, y)$, $\mu>0$, $\forall\ (x, y) \in T^t(x,y)$, b. $D^t_I(\mu x, y) = \mu D^t_I(x,y)$, $\mu>0$, $\forall\ (x,y) \in T^t(x,y)$, c. $D^t_T(x, \mu y) \leq D^t_T(x, y)$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\forall\ (x, y) \in T^t(x,y)$, c'. $D^t_T(\mu x, y) \leq D^t_T(x, y)$, $\mu \geq 1$, $\forall\ (x, y) \in T^t(x,y)$.

D.1.c establece la propiedad de identidad en las funciones consideradas. D.2. establece las propiedades de monoticidad de éstas respecto a productos y factores. D.3. a. y b. caracteriza a las funciones de productos y factores como homogéneas de primer grado con relación a los productos y factores. D.3.c establece que la función de distancia tecnológica es no decreciente en factores y D.3.c' en productos.

2.2.2 Funciones de distancia e índices de eficiencia técnica, TE^t

Una vez definidas las funciones de distancia de productos, factores y tecnológica, así como sus propiedades, resulta posible mostrar como éstas pueden ser interpretadas como medidas de eficiencia técnica. Con objeto de formalizar la evaluación del rendimiento *relativo* de cualquier observación en términos tecnológicos, resulta necesario definir aquel subconjunto eficiente de posibilidades de producción perteneciente a $T^t(x,y)$ que ha de servir como referencia para contrastar si una unidad es eficiente o no.

Definiendo los siguientes subconjuntos isocuanta–eficiente de la tecnología en función de la dimensión de análisis considerada:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Isoc}\,P(x) = \{y : y \in P(x), y/\theta \notin P(x), \theta \in (0,1)\},\\
&\mathrm{Isoc}\,L(y) = \{x : x \in L(y), x/\lambda \notin L(y), \lambda \in (1,+\infty)\},\\
&\mathrm{Isoc}\,T(x,y) = \{(x,y) : (x,y) \in T(x,y), (x\phi, y/\phi) \notin T(x,y), \phi \in (0,1)\},
\end{aligned} \qquad (2.2.7\text{-}8\text{-}9)$$

las actividades productivas serán eficientes si pertenecen a tales subconjuntos y, así, no resultan factibles incrementos equiproporcionales en la cuantía de productos obtenidos con una determinada cuantía de factores, (2.2.7); reducciones análogas en los factores utilizados para un nivel dado de productos, (2.2.8); o la conjunción de incrementos y reducciones simultáneas de productos y factores, (2.2.9). La condición de eficiencia técnica en función de la pertenencia a tales subconjuntos no es, sin embargo, la generalmente aceptada en la literatura, véase Lovell (1993). Tal condición se verifica cuando un incremento en cualquiera de los bienes que produce la actividad solo puede conseguirse mediante la reducción de algunos de los restantes bienes producidos –liberando así recursos– o incrementando, al menos, alguno de los factores utilizados. De esta forma, una actividad será ineficiente cuando pueda producir con igual cuantía de factores más de, al menos, un producto, o igual producto con menor cuantía de, al menos, algún factor, Koopmans (1951).

La condición de pertenencia al subconjunto isocuanta de la tecnología, (2.2.7–8–9), no asegura la existencia de eficiencia técnica en términos de Koopmans, pues todavía podrían ser factibles reestructuraciones productivas adicionales de carácter no equiproporcional como las que implican las funciones de distancia (2.2.1–2) y (2.2.5). Con objeto de descartar tal posibilidad se deben definir subconjutos eficientes compatibles con la condición de eficiencia de Koopmans. Tales conjuntos quedan representados por las combinaciones de vectores que satisfacen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EficL}^t(y) = \{x : x \in \mathrm{L}^t(y), x' \notin \mathrm{L}^t(y), x' \leq x\} \\
&\mathrm{EficP}^t(x) = \{y : y \in \mathrm{P}^t(x), y' \notin \mathrm{P}^t(x), y' \geq y\} \qquad\qquad (2.2.10\text{-}11\text{-}12) \\
&\mathrm{EficT}^t(x,y) = \{(x,y) : (x',-y') \leq (x,-y) \Rightarrow (x',-y') \notin \mathrm{T}^t(x,y)\}.
\end{aligned}$$

Las definiciones anteriores implican que los subconjuntos isocuanta y eficientes verifican $\mathrm{EficP}^t(x) \subseteq \mathrm{IsocP}^t(x)$, $\mathrm{EficL}^t(y) \subseteq \mathrm{IsocL}^t(y)$ y $\mathrm{EficT}^t(x,y) \subseteq \mathrm{IsocT}^t(x,y)$, véase Färe, Grosskopf y Lovell (1985). Estas relaciones quedan representadas en el gráfico 2.2.1 según las tecnologías de producción representadas por $\mathrm{P}^t(x)$ y $\mathrm{L}^t(y)$. Tal como puede apreciarse en 2.2.1a, Isoc $\mathrm{P}^t(x)$ queda representado por aquellos vectores de producto que no pueden incrementarse en cuantía igual a y^t/θ sin que esto exija un nivel de factores utilizados superiores a x^t y, por tanto, la salida del conjunto de vectores que pueden ser obtenidos, al menos, por esa determinada cuantía de factores. Frente a esta caracterización, Efic P(x) recoge aquellos vectores de $\mathrm{IsocP}^t(x)$ que presentan mayor cuantía observada de alguno de los bienes producidos dados los restantes. Así, (y^{t}_{1B}, y^{t}_{2B}) pertenece a Isoc $P^{t}(x)$ al no ser factible expansión radial alguna pero no a Efic $P^{t}(x)$ dado que para igual cuantía de y^{t}_{2B} es factible obtener, con igual nivel de factores, mayor producción de y^{t}_{1B}, *i.e.* $(y^{t}_{1B}{}', y^{t}_{2B})$. Análogo razonamiento puede hacerse en el espacio de los factores para el vector (x^{t}_{1B}, x^{t}_{2B}) –2.2.1b– que podría obtener igual producto con una menor cuantía del factor x^{t}_{2}, *i.e.* $(x_{1B}, x^{t}_{2B}{}')$.

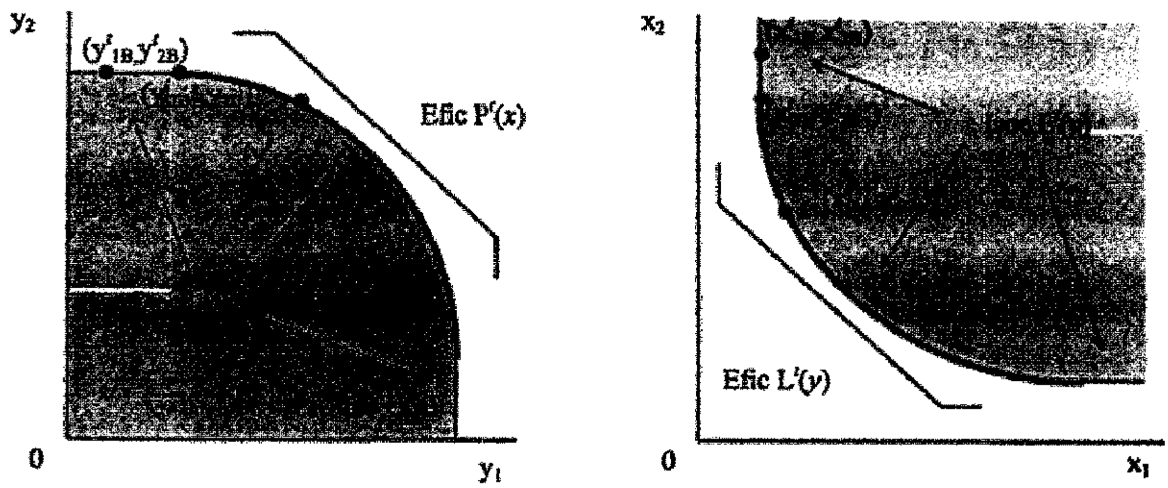


Gráfico 2.2.1a-b. Conjunto eficiente de posibilidades de producción: productos, factores.

En términos del conjunto de posibilidades de producción $T^{t}(x,y)$, los vectores que satisfacen la condición de eficiencia de Koopmans se caracterizan por no poder producir mayor cuantía de bienes sin incrementar los factores utilizados o, alternativamente, reducir los factores utilizados sin incurrir en una menor producción de bienes. El gráfico 2.2.2 muestra, para el caso M = N = 1, la condición de eficiencia según la *frontera* de producción $f^{t}(x)$. La identificación del conjunto de vectores eficientes sobre tal representación se corresponde con los tramos resaltados, pues combinaciones como $(x_1{}^{t}, y_1{}^{t})$ son ineficientes al poderse obtener con $x_1{}^{t}$ una cuantía superior de producto, $y_2{}^{t}$. De forma análoga respecto a $(x_3{}^{t}, y_3{}^{t})$, es factible obtener una cuantía de producto $y_3{}^{t}$ con menor uso de factores, $x_2{}^{t}$.

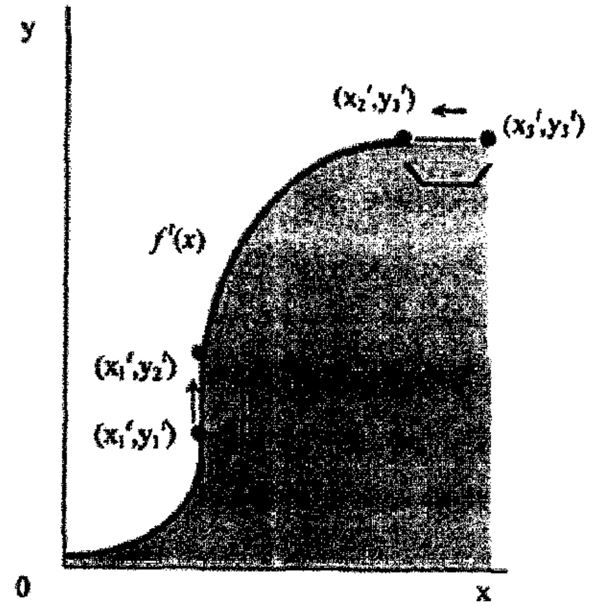


Gráfico 2.2.2. Conjunto eficiente de posibilidades de producción: tecnológica.

Las condiciones que garantizarían la inexistencia de combinaciones ineficientes sobre las isocuantas definidas, *i.e.* Isoc $P^t(x)$ = Efic $P^t(x)$, Isoc $L^t(y)$ = Efic $L^t(y)$ e Isoc $T^t(x,y)$ = Efic $T^t(x,y)$, pueden encontrarse en Färe, Grosskopf y Lovell (1985).

Realizadas esta consideraciones es posible mostrar cómo las funciones de distancia proveen una medida escalar de eficiencia respecto a Isoc(·). Así, considerando que una actividad es técnicamente eficiente si pertenece a (2.2.7–8–9), las funciones de distancia permiten verificar la condición de eficiencia técnica al comprobarse que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{IsocP}^t(x) = \{(x,y) : \mathrm{D}_\mathrm{O}^t(x,y) = 1\}, \\ &\mathrm{IsocL}^t(y) = \{(x,y) : \mathrm{D}_\mathrm{I}^t(x,y) = 1\}, \qquad (2.2.13\text{-}14\text{-}15) \\ &\mathrm{IsocT}^t(x,y) = \{(x,y) : \mathrm{D}_\mathrm{T}^t(x,y) = 1\}; \end{aligned}$$

de forma que valores $D_O^t(x,y) < 1$, $D_I^t(x,y) > 1$ y $D_T^t(x,y) < 1$ indican que la actividad objeto de evaluación no pertenece al subconjunto isocuanta–eficiente, cuantificando el escalar correspondiente a la función de distancia la severidad *relativa* de tal ineficiencia, *i.e.* la distancia respecto a la frontera de posibilidades de producción representada por IsocT(x,y). El gráfico 2.2.2 permite mostrar cómo la observación (x_i^t, y_i^t) resulta ineficiente al no pertenecer a Isoc$T^t(x,y)$ que, en esta ocasión, queda representado por $f^t(x)$. Se deduce por tanto que las funciones de distancia consideradas en esta investigación para evaluar el rendimiento técnico, (2.2.1–2) y (2.2.5) representan niveles de eficiencia que implican una caracterización equiproporcional de las variaciones de los vectores de productos, factores o ambos y, por tanto, dada una actividad evaluada, su calificación como eficiente o no se realiza en términos de Isoc$(\cdot)$ y no Efic$(\cdot)$[9]. Por tanto, la noción de eficiencia aquí considerada, (2.2.7–8–9) es más débil que la considerada por Koopmans (1951), (2.2.10–11–12); es decir, si una observación (x_i^t, y_i^t) resulta eficiente, su pertenencia al subconjunto Efic$^t(\cdot)$ implica que pertenece a Isoc$^t(\cdot)$ pero no viceversa[10].

---

[9] Las técnicas de programación matemática DEA empleadas en la presente investigación con objeto de evaluar empíricamente la eficiencia productiva, permiten calcular las funciones de distancia aproximando una tecnología de producción cuyo subconjunto de referencia se corresponde con las isocuantas definidas por (2.2.7–8–9) así como los subconjuntos eficientes (2.2.10–11–12). Sin embargo, los índices de productividad $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ y $\Delta RFP_i^{t,t+1}$ que caracterizan el rendimiento productivo se definen en términos de las funciones de distancia introducidas y por tanto evalúan la eficiencia productiva respecto a Isoc$(\cdot)$ y no Efic$(\cdot)$. Así, pese a que las técnicas de programación matemática disponibles permiten establecer la eficiencia en sentido de Koopmans (1951), las definiciones teóricas de índices de productividad exigen una condición de eficiencia productiva menos estricta.

[10] La importancia de adoptar una condición de eficiencia en el sentido de Koopmans (1951) en la definición de índices de productividad $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ ha sido explorada por Grifell-Tatjé, Lovell y Pastor (1998). Así, estos autores definen un índice de Malmquist basado en una función de distancia que incorpora la componente radial y aditiva (*slacks*) que ellos denominan *función de cuasi-distancia* compatible con la definición de eficiencia a la Koopmans. Sin embargo, tal como pone de manifiesto Førsund (1998:29–31), existen razones suficientes como para cuestionar el coste adicional que implica esta formulación. En primer lugar, el índice de Malmquist no satisface algunas propiedades deseables, *e.g.* homogeneidad, y, en segundo lugar, la propia existencia de holguras o *slacks*, se deriva de la técnica de programación matemática DEA que supone la aproximación lineal más pesimista de la tecnología –*inner bound* en palabras de Varian (1984)– ante la falta de información adicional sobre el proceso de producción; sin embargo, se pueden asumir procesos tecnológicos –y programaciones DEA con objeto de aproximarlos empíricamente– donde esta situación no se verifique, véase Bessent, Bessent y Elam (1988). Así, el hecho de que las funciones de distancia definidas no se correspondan con el concepto de eficiencia de Koopmans tiene escasa relevancia a efectos de análisis del rendimientos productivo en términos dinámicos como el introducido en la presente investigación.

La cuantía concreta de ineficiencia de una determinada observación se corresponde así con el valor de su función de distancia por lo que es posible definir[11]:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{TE}^t_{\mathrm{O}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\mathrm{O}}(x,y),\\
&\mathrm{TE}^t_{\mathrm{I}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\mathrm{I}}(x,y),\\
&\mathrm{TE}^t_{\mathrm{T}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\mathrm{T}}(x,y).
\end{aligned} \qquad (2.2.16\text{-}17\text{-}18)$$

Así, (2.2.3–4) y (2.2.6) cuantifican la distancia de una determinada observación respecto a los subconjuntos isocuanta–eficientes o fronteras de producción. El gráfico 2.2.3 muestra la función de distancia de productos y factores de acuerdo a las correspondencias $P^t(x)$ y $L^t(y)$. Tal como se puede apreciar en 2.2.3a, dada una actividad (x_i^t, y_i^t), el vector representado por la actividad $(x_i^t, y_i^t/\theta)$ se corresponde con la proyección equiproporcional de $(x_i^t, y^t_{i1}, y^t_{i2})$ hasta la frontera implicando $D^t_O(x_i^t, y_i^t) < 1$. Análogamente, en 2.2.3b, el vector $(x^t_{i1}/\lambda, x^t_{i2}/\lambda, y_i^t)$ muestra la proyección de $(x^t_{i1}, x^t_{i2}, y_i^t)$ hasta el subconjunto eficiente por lo que $D^t_I(x_i^t, y_i^t) > 1$.

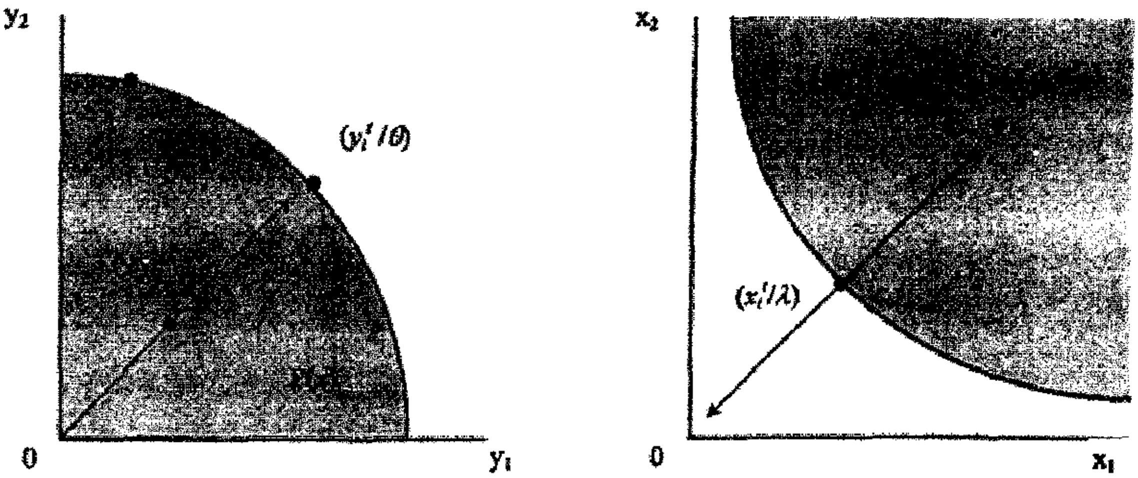


Gráfico 2.2.3a-b. Ineficiencia técnica: funciones de distancia de productos y factores.

[11] El concepto de eficiencia técnica se debe a Farrell (1957), quién establece una medida de eficiencia técnica de factores que se corresponde con la inversa de la función de distancia de Shephard (1953): $\left(1/D^t_I(x,y)\right) = \min_{\lambda}\{\lambda > 0 : (\lambda x) \in L^t(y)\}$.

De forma similar pero con relación a la función de distancia tecnológica, el gráfico 2.2.4 permite mostrar cómo $(\tilde{x}_i^{\prime}, \tilde{y}_i^{\prime})$ se corresponde con la proyección de $(x_i^{\prime}, y_i^{\prime})$ una vez realizada la máxima expansión de producto y contracción de factor de acuerdo al escalar $D_T^{\prime}(x_i^{\prime}, y_i^{\prime}) = \phi < 1$. La variación equiproporcionalmente simultánea de productos y factores origina una senda hiperbólica hacia la frontera de posibilidades de producción hasta alcanzar la observación de referencia representada por $(x_i \cdot \phi, y_i^{\prime}/\phi) = (\tilde{x}_i^{\prime}, \tilde{y}_i^{\prime})$ –de aquí el adjetivo con el que se califica a esta función de distancia en la literatura–. Así mismo es posible ilustrar las funciones de distancia de productos y factores en $T^{\prime}(x,y)$, de forma que las primeras incrementan el vector de productos observados *dado* el vector de factores hasta alcanzar $(x_i^{\prime}, y_i^{\prime}/\theta) = (x_i^{\prime}, \tilde{y}_i^{\prime})$, mientras que aquella de factores reduce la cuantía de estos *dado* el vector de productos hasta $(x_i/\lambda, y_i) = (\tilde{x}_i^{\prime}, y_i^{\prime})$.

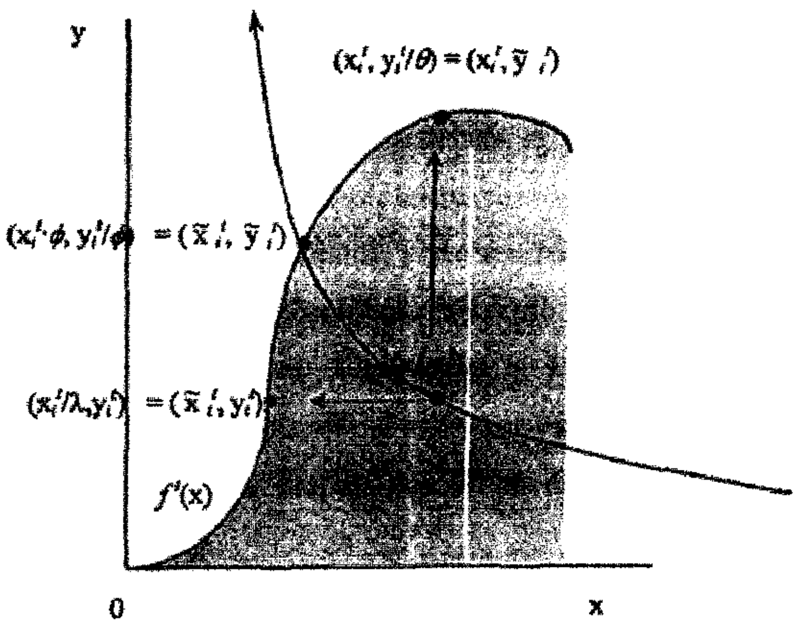


Gráfico 2.2.4. Funciones de distancia de productos, factores y tecnológica.

El gráfico 2.2.4 pone de manifiesto la diferencia fundamental en las definiciones de las funciones de distancia consideradas: su orientación en términos del proceso productivo. Así, cada una de éstas se caracteriza por la dimensión del proceso sobre la que se centran con objeto de calcular la distancia entre una determinada observación y el subconjunto eficiente de producción –frontera–. Los índices de productos o factores se denominan radiales porque, en el primer caso, cuantifican el incremento proporcional que sería necesario efectuar en el vector observado de productos, mientras que las de factores muestran la reducción equiproporcional en los vectores de factores con objeto de alcanzar igual objetivo. Frente a éstas, la medida tecnológica considera aquel incremento de productos y reducción de factores, equiproporcionales y simultáneos, que resultan necesarios para alcanzar el estándar de referencia. Tal como se puede apreciar en el gráfico 2.2.4 que representa una tecnología caracterizada por T.1–T.7 –rendimientos variables a escala y ausencia de separabilidad–, cada una de estas funciones revela unos valores ó niveles de eficiencia distintos[12].

2.2.2.1. Funciones de distancia, eficiencia técnica e índices de cuantía.

Las funciones de distancia de productos, factores y tecnológica son un instrumento adecuado para evaluar la eficiencia técnica de una actividad. Ahora bien, tal interpretación de la función de distancia es equivalente a un índice de cuantía tecnológico que permite comparar los productos y factores observados con aquellos potenciales, máximos y mínimos, y que son resultado de la proyección de la actividad evaluada sobre el subconjunto eficiente o frontera de producción. Formalmente, siguiendo a Caves, Christensen y Diewert (1982a) podemos mostrar como las funciones de distancia se corresponden con índices de cuantía de múltiples productos y factores. Siendo por definición $D_O^t(x, \tilde{y}) = D_I^t(\tilde{x}, y) =$

[12] De acuerdo a lo comentado en la introducción, asociada a una determinada orientación hay una presunción respecto a la endogeneidad o exogeneidad de productos o factores. Así, cualquiera de estas orientaciones parciales, *output* o *input*, puede venir justificada en casos en que la cuantía de factores utilizadas o el denominado *output mix* sean ajenos al productor y la única forma de incrementar su eficiencia y productividad sea actuando en la dimensión sobre la que tiene control. Sin embargo, si esta no es la situación, la decisión de adoptar una única orientación no sería adecuada y daría como resultado unos valores de eficiencia pasivos con relación a la dimensión del proceso de producción alternativa sobre la que el productor sí dispone de control. Estas consideraciones muestran la importancia de contemplar una medida como la tecnológica que tiene en cuenta ambas dimensiones del proceso.

$D_T^t(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$, es posible establecer los siguientes índices de Malmquist de productos, factores y tecnológico[13]:

$$M_O^t(x^t, y^t, \tilde{y}^t) = \frac{D_O^t(x^t, y^t)}{D_O^t(x^t, \tilde{y}^t)} = \frac{D_O^t(x^t, y^t)}{D_O^t(x^t, y^t / D_O^t(x^t, y^t))} = \frac{D_O^t(x^t, y^t)}{1} = D_O^t(x^t, y^t)$$

$$M_I^t(x^t, \tilde{x}^t, y^t) = \frac{D_I^t(x^t, y^t)}{D_I^t(\tilde{x}^t, y^t)} = \frac{D_I^t(x^t, y^t)}{D_I^t(x^t / D_I^t(x^t, y^t), y^t)} \frac{D_I^t(x^t, y^t)}{1} = D_I^t(x^t, y^t)$$

$$M_T^t(x^t, \tilde{x}^t, y^t, \tilde{y}^t) = \frac{D_T^t(x^t, y^t)}{D_T^t(\tilde{x}^t, \tilde{y}^t)} = \frac{D_T^t(x^t, y^t)}{D_T^t(x^t \cdot D_T^t(x^t, y^t), y^t / D_T^t(x^t, y^t))} =$$

$$= \frac{D_T^t(x^t, y^t)}{1} = D_T^t(x^t, y^t)$$

(2.2.19-20-21)

Estos índices, al comparar cuantías observadas con eficientes, permiten constatar cómo la resolución de la ineficiencia de carácter técnico conlleva ganancias de rendimiento productivo, al incrementar la productividad absoluta de las actividades en la proporción establecida por las funciones de distancia (2.2.1–2) y (2.2.5). Efectivamente, tal como se ilustra en el gráfico 2.2.5, las proyecciones sobre la frontera del conjunto de posibilidades de producción –representada por IsocP(x), IsocL(y) e IsocT(x,y)– de acuerdo a las funciones de distancia, permiten comparar la productividad de la actividad evaluada (x_i^t, y_i^t) y aquella proyectada sobre la frontera en la dimensión considerada, *i.e.* $(x_i^t, y_i^t/\theta) = (x_i^t, \tilde{y}_i^t)$ en el caso de la función de productos, $(x_i^t/\lambda, y_i^t) = (\tilde{x}_i^t, y_i^t)$ en la de factores y $(x_i^t \cdot \phi, y_i^t/\phi) = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ en la tecnológica. El gráfico 2.2.5 presenta las interpretaciones equivalentes de la función de distancia como índices de eficiencia y cuantía. En 2.2.5a se observan las proyecciones eficientes de la observación (x_i^t, y_i^t) –gráfico 2.2.4– y los radio–vectores que, intersectando al origen con tales proyecciones, determinan la productividad proyectada sobre los subconjuntos eficientes. Observando las pendientes de tales radio–vectores se observa en 2.2.5b cómo la productividad absoluta obtenida por la observación (x_i^t, y_i^t), $AFP_i^t = y_i^t/x_i^t$, es

[13] La introducción genérica de los índices de Malmquist se postpone al próximo capítulo con objeto de analizarlos en el contexto dinámico de productividades relevante en la presente investigación.

inferior a aquellas de sus proyecciones sobre el conjunto eficiente cualquiera que sea la función considerada, *i.e.* $y_i^t / x_i^t < (y_i^t / \theta) / x_i^t$, $y_i^t / x_i^t < y_i^t / (x_i^t / \lambda)$ y, finalmente, $y_i^t / x_i^t < (y_i^t / \phi) / (x_i^t \cdot \phi)$.

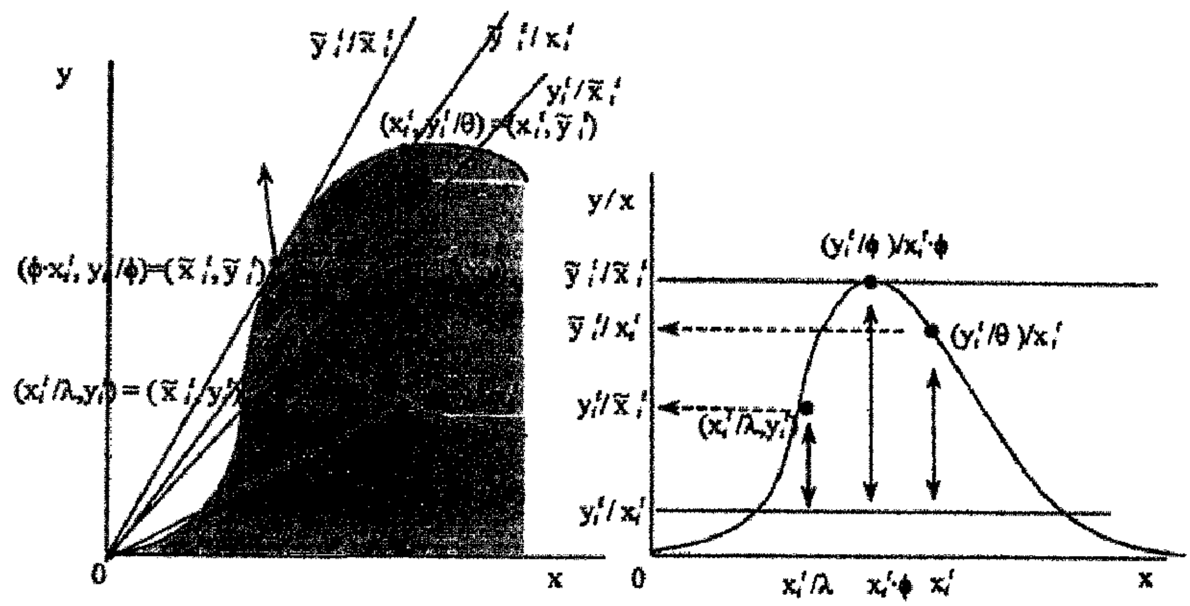


Gráfico 2.2.5a-b. Evaluación del rendimiento *relativo*: eficiencia técnica

Así, las funciones de distancia definidas son consistentes con el objetivo de establecer el rendimiento *relativo* de las actividades, al constituir herramientas adecuadas para evaluar, en un primer estadio, la productividad observada de las actividades respecto a la proyección eficiente sobre el subconjunto eficiente de posibilidades de producción. Sin embargo, la evaluación relativa considerada esta sujeta a la definición concreta que se haga de la función de distancia –productos, factores o tecnológica– por lo que los resultados obtenidos dependen de la escala de operaciones; gráficamente se puede observar como el valor de las funciones de distancia difiere dependiendo de la orientación elegida. Por tanto, ¿bajo que circunstancias es $D_O^t(x,y)$ independiente del nivel de factores, $D_I^t(x,y)$ del nivel de productos y $D_T^t(x,y)$ de una combinación concreta de ambos? Las funciones de productos, factores y tecnológica son independientes de la escala de operaciones de productos y factores si la tecnología verifica T.8 y T.9, *i.e.* la tecnología de producción exhibe homogeneidad de primer grado –rendimientos constantes a escala– y, al presentar homoteticidad simultánea, es separable en productos y factores. El análisis de las funciones de distancia bajo estas características tecnológicas y su *interpretación en términos del modelo de rendimiento* productivo propuesto se aborda en la siguiente sección.

2.2.3 Homogeneidad (rendimientos a escala) y homoteticidad (separabilidad)

Las funciones de productos, factores y tecnológica introducidas pueden interpretarse de forma equivalente como medidas de eficiencia técnica –al establecer la distancia que separa el vector de productos y factores de la actividad observada de su proyección sobre la frontera de producción Isoc(·), (2.2.7–8–9), y como índices de cuantía tecnológicos –al establecer la distancia en términos de productividades absolutas de las actividades observadas, AFP_i^t, respecto a sus proyecciones, (2.2.19–20–21). Ahora bien, la evaluación del rendimiento productivo de una actividad no se detiene en este estadio intermedio, sino que se corresponde con su capacidad para generar la máxima productividad, OFP_i^t, *i.e.* su eficiencia productiva en términos de la escala óptima de operaciones, (1.1.6).

Al igual que en la sección precedente, resulta posible hacer uso del concepto de función de distancia para evaluar si una determinada observación pertenece al subconjunto óptimo de posibilidades de producción presentando la máxima productividad potencial. Si asumimos que la tecnología es homogénea de primer grado –presenta rendimientos constantes a escala– y simultáneamente homotética –es separable en productos y factores–, satisfaciendo T.1–T.9, se denota al conjunto de posibilidades de producción por $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$ y resulta posible definir las *siguientes funciones de distancia de productos, factores y tecnológica:*

$$\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^t(x,y)=\min_{\theta}\left\{\hat{\theta}>0:(y/\hat{\theta})\in\hat{\mathrm{P}}^t(x)\right\}=\min\left\{\hat{\theta}>0:(x,y/\hat{\theta})\in\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)\right\},$$
$$\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^t(y,x)=\max_{\lambda}\left\{\hat{\lambda}>0:(x/\hat{\lambda})\in\hat{\mathrm{L}}^t(y)\right\}=\max_{\lambda}\left\{\hat{\lambda}>0:(x/\hat{\lambda},y)\in\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)\right\},$$
$$\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^t(x,y)=\min_{\phi}\{\hat{\phi}>0:(\hat{\phi}\cdot x,y/\hat{\phi})\in\hat{\mathrm{T}}(x,y)\},$$

(2.2.22-23-24)

Dada esta caracterización de la tecnología es posible demostrar como las funciones de distancia definidas sobre $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$ verifican

D.3.a'. $\mathrm{D}^t_{\hat{o}}(\mu x, y) = \mu^{-1}\mathrm{D}^t_{\hat{o}}(x, y)$, $\mu>0$, $\forall(x, y) \in \mathrm{T}^t(x,y)$, b'. $\mathrm{D}^t_{\hat{i}}(x, \mu y) = \mu^{-1}\mathrm{D}^t_{\hat{i}}(x,y)$, $\mu>0$, $\forall (x, y) \in \mathrm{T}^t(x,y)$, c''. $\mathrm{D}^t_{\hat{T}}(\mu x, \mu^{-1}y) = \mu^{-1}\mathrm{D}^t_{\hat{T}}(x, y)$, $\mu > 0$, $\forall (x_i^t,y_i^t) \in \mathrm{T}^t(x,y)$,

i.e. las funciones de productos, factores y tecnológicas son homogéneas de grado menos uno en factores, productos y ambas dimensiones respectivamente. Adicionalmente, Färe y Primont (1995b) demuestran cómo éstas son así mismo separables en productos y factores,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}^t_{\hat{o}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\hat{o}}(1_N,y)/h^t(x) = J^t\left[g^t(y)\right]/h^t(x),\\
&\mathrm{D}^t_{\hat{i}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\hat{i}}(x,1_M)\cdot g^t(y)^{-1} = \left(J^t\left[g^t(y)\right]/h^t(x)\right)^{-1},\\
&\mathrm{D}^t_{\hat{T}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\hat{T}}(1_N,1_M)\cdot(g^t(y)/h^t(x))^{1/2} = \left(J^t\left[g^t(y)\right]/h^t(x)\right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{2.2.25-26-27}$$

donde la función invertible $J^t(\cdot)$ debe ser determinada en cada caso. Así, las funciones pueden expresarse como razones entre funciones agregadoras de productos y factores, pudiéndose establecer la siguiente propiedad:

D.4. a. $\mathrm{D}^t_{\hat{o}}(x,y) = J^t\left[g^t(y)\right]/h^t(x)$; a'. $\mathrm{D}^t_{\hat{i}}(x,y) = \left(J^t\left[g^t(y)\right]/h^t(x)\right)^{-1}$;

a''. $\mathrm{D}^t_{\hat{T}}(x,y) = \left(J^t\left[g^t(y)\right]/h^t(x)\right)^{1/2}$.

Esta relación permite establecer la siguiente relación existente entre las funciones de productos, factores y tecnológica:

$$\mathrm{D}^t_{\hat{o}}(x,y) = \mathrm{D}^t_{\hat{i}}(x,y)^{-1} = \mathrm{D}^t_{\hat{T}}(x,y)^2. \tag{2.2.28}$$

Las propiedades adicionales satisfechas por estas funciones de distancia son las ya expuestas en la sección 2.2.1 para las funciones definidas sobre $T^{t}(x,y)$, *i.e.* satisfacen D.1, D.2. y D.3.

2.2.4 Funciones de distancia e índices de eficiencia productiva, PE^{t}

Las funciones de distancia (2.2.22–23–24) pueden ser interpretadas como medidas de eficiencia productiva con objeto de determinar la capacidad de las actividades para obtener la máxima productividad potencial y así pertenecer al subconjunto óptimo de posibilidades de producción. Definiendo los siguientes subconjuntos isocuanta–óptimos de la tecnología en función de la dimensión de análisis considerada:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{P}}(x)=\{y: y\in\hat{\mathrm{P}}(x), y/\theta\notin\hat{\mathrm{P}}(x), \theta\in(0,1)\}\\
&\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{L}}(y)=\{x: x\in\hat{\mathrm{L}}(y), x/\lambda\notin\hat{\mathrm{L}}(y), \lambda\in(1,+\infty)\} \qquad (2.2.29\text{-}30\text{-}31)\\
&\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{T}}(x,y)=\{(x,y):(x,y)\in\hat{\mathrm{T}}(x,y),(x\cdot\phi, y/\phi)\notin\hat{\mathrm{T}}(x,y), \phi\in(0,1)\},
\end{aligned}
$$

es posible establecer la condición de pertenencia en términos de las funciones de distancia a través de –(2.2.25–26–27)–:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{P}}^{t}(x)=\{(x,y):\mathrm{D}^{t}_{\hat{o}}(x,y)=1\}=\{(x,y):J^{t}[g^{t}(y)]/h^{t}(x)=1\},\\
&\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{L}}^{t}(y)=\{(x,y):\mathrm{D}^{t}_{\hat{i}}(x,y)=1\}=\{(x,y):(J^{t}[g^{t}(y)]/h^{t}(x))^{-1}=1\},\\
&\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{T}}^{t}(x,y)=\{(x,y):\mathrm{D}^{t}_{\hat{t}}(x,y)=1\}=\{(x,y):(J^{t}[g^{t}(y)]/h^{t}(x))^{1/2}=1\};
\end{aligned}
$$

(2.2.32-33-34)

Bajo estas premisas, las funciones de distancia (2.2.22–23–24) informan sobre la productividad absoluta en términos de aquella óptima, *i.e.* sobre la productividad relativa de los factores o eficiencia productiva, RFP^{t} = PE^{t} = AFP^{t}/OFP^{t}. Así, de verificarse $\mathrm{D}^{t}_{\hat{o}}(x,y)<1$, $\mathrm{D}^{t}_{\hat{i}}(x,y)>1$ ó $\mathrm{D}^{t}_{\hat{t}}(x,y)<1$, la actividad no alcanza la productividad óptima de forma que su productividad absoluta resulta inferior a la potencial, $AFP^{t}=g^{t}(y^{t})/h^{t}(x^{t})<OFP^{t}=g^{t}(y^{t})^{*}/h^{t}(x^{t})^{*}$. En este caso,

los escalares $\hat{\theta}$, $\hat{\lambda}$ y $\hat{\phi}$ cuantifican la ineficiencia productiva, *i.e.* la distancia en términos relativos al óptimo productivo –mínima expansión posible de la productividad absoluta–. Esta caracterización implica que las funciones de distancia introducidas son susceptibles de ser interpretadas como índices de cuantía.

2.2.4.1 Funciones de distancia, eficiencia productiva e índices de cuantía

Al evaluar la (in)eficiencia productiva de una actividad, las funciones de distancia (2.2.22–23–24) definidas sobre $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$ ponen de relieve los diferenciales entre las productividades absolutas observadas y aquellas óptimas, RFP^t. Tal comparación implica la posibilidad de considerarlas como índices de cuantía que relativizan la productividad observada, AFP^t, en términos de la producción obtenida, factores empleados, o ambos vectores, respecto a aquella que habría de ser generada con objeto de presentar la máxima productividad potencial, OFP^t. Atendiendo a esta caracterización es posible definir los siguientes índices productivos de Malmquist de productos, factores y tecnológico –siendo por definición, $\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,\hat{y})$ $=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(\hat{x},y)$ $=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(\hat{x},\hat{y})$ $=$ 1–:

$$\mathrm{M}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x^t,y^t,\hat{y}^t)=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,\hat{y})}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,y/\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,y))}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,y)}{1}=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{o}}}(x,y),$$

$$\mathrm{M}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x^t,\hat{x}^t,y^t)=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(\hat{x},y)}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x/\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x,y),y)}\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x,y)}{1}=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{i}}}(x,y),$$

$$\mathrm{M}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x^t,\hat{x}^t,y^t,\hat{y}^t)=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(\hat{x},\hat{y})}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x\cdot\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y),y/\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y))}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y)}{1}=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y),$$

(2.2.35-36-37)

y considerando que, por satisfacer la tecnología de producción las propiedades de homogeneidad lineal y homoteticidad simultánea, T.8–T.9, es posible expresar las funciones de distancia de acuerdo a (2.2.32–33–34) y se observa

$$\mathrm{M}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(x^t,y^t,\hat{y}^t)=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(x,y)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(x,\hat{y})}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(1_N,y)/h^t(x)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(1_N,\hat{y})/h^t(x)}=\frac{J^t\left[g^t(y)\right]}{J^t\left[g^t(\hat{y})\right]}=\frac{g^t(y)}{g^t(\hat{y})}=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(x,y),$$

$$\mathrm{M}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(x^t,\hat{x}^t,y^t)=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(x^t,y^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(\hat{x}^t,y^t)}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(x,1_M)\cdot g^t(y)^{-1}}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(\hat{x},1_M)\cdot g^t(y)^{-1}}=\frac{(J^t)^{-1}\left[h^t(x)\right]}{(J^t)^{-1}\left[h^t(\hat{x})\right]}=\frac{h^t(x)}{h^t(\hat{x})}=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(x,y),$$

$$\mathrm{M}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x^t,\hat{x}^t,y^t,\hat{y}^t)=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x^t,y^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(\hat{x}^t,\hat{y}^t)}=\frac{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(1_N,1_M)\cdot(g^t(y)/h^t(x))^{1/2}}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(1_N,1_M)\cdot(g^t(\hat{y})/h^t(\hat{x}))^{1/2}}=$$

$$=\frac{(g^t(y)/h^t(x))^{1/2}}{(g^t(\hat{y})/h^t(\hat{x}))^{1/2}}=\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x,y).$$

(2.2.38-39-40)

Las expresiones anteriores pueden considerarse como índices de productividad que pueden ser expresados como razones de funciones agregadoras de productos y factores –separables– permitiendo comparar cuantías observadas con aquellas potenciales. Al igual que en el caso previamente introducido, (2.2.19–20–21), estos índices muestran posibles ganancias de productividad; sin embargo, obsérvese cómo frente a las funciones de distancia definidas sobre $\mathrm{T}^t(x,y)$, las previamente establecidas muestran incrementos de productividad absoluta que implican proyecciones sobre el subconjunto óptimo de posibilidades de producción y no sobre el técnicamente eficiente o frontera de producción, *i.e.* la resolución de ineficiencias productivas y no técnicas al situar a las observaciones sobre $\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{P}}(x)$, $\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{L}}(y)$ y $\mathrm{Isoc}\hat{\mathrm{T}}(x,y)$.

Así, las funciones de distancia (2.2.22–23–24) permiten comparar, tal como se muestra en el gráfico 2.2.6, la productividad de la actividad evaluada (x_i^t,y_i^t) con aquella máxima proyectada sobre el conjunto óptimo de producción, $y_i^{t*}/x_i^{t*}=(y_i^t/\hat{\theta})/x_i^t=y_i^t/(x_i^t/\hat{\lambda})=(y_i^t/\hat{\phi})/(x_i^t\cdot\hat{\phi})$. Observando el gráfico 2.2.6b se puede apreciar la equivalencia existente entre las funciones de distancia, (2.2.28), dado que la proyección óptima resulta idéntica, *i.e.* no hay diferencias en el resultado obtenido dependiendo de la dimensión u orientación elegida para el análisis.

El gráfico 2.2.6a muestra las proyecciones de (x_i^t,y_i^t) sobre el subconjunto óptimo de posibilidades de producción representado por (2.2.29–30–31). Tales proyecciones se corresponden respectivamente con el aumento de productos determinado por $\hat{\theta}<1$, $(x_i^t, y_i^t/\hat{\theta}) = (x_i^t, \hat{y}_i^t)$, de factores, $\hat{\lambda} > 1$, $(x_i^t/\hat{\lambda}, y_i^t) = (\hat{x}_i^t, y_i^t)$ y, finalmente, incrementos y reducciones equiproporcionales de ambos vectores, $\hat{\phi} < 1$, $(x_i^t \cdot \hat{\phi}, y_i^t/\hat{\phi}) = (\hat{x}_i^t, \hat{y}_i^t)$ –que en esta ocasión se corresponde con la actividad óptima representada por (x_i^{t*}, y_i^{t*})–. En todos los casos las proyecciones se realizan sobre el conjunto óptimo de posibilidades de producción determinado en el ejemplo gráfico por (x_i^{t*}, y_i^{t*}), gráfico 2.2.6b, de forma que se verifica la igualdad entre la productividad óptima y aquellas proyectadas, $y_i^{t*}/x_i^{t*} = (y_i^t/\hat{\theta})/x_i^t = y_i^t/(x_i^t/\hat{\lambda}) = (y_i^t/\hat{\phi})/(x_i^t \cdot \hat{\phi})$.

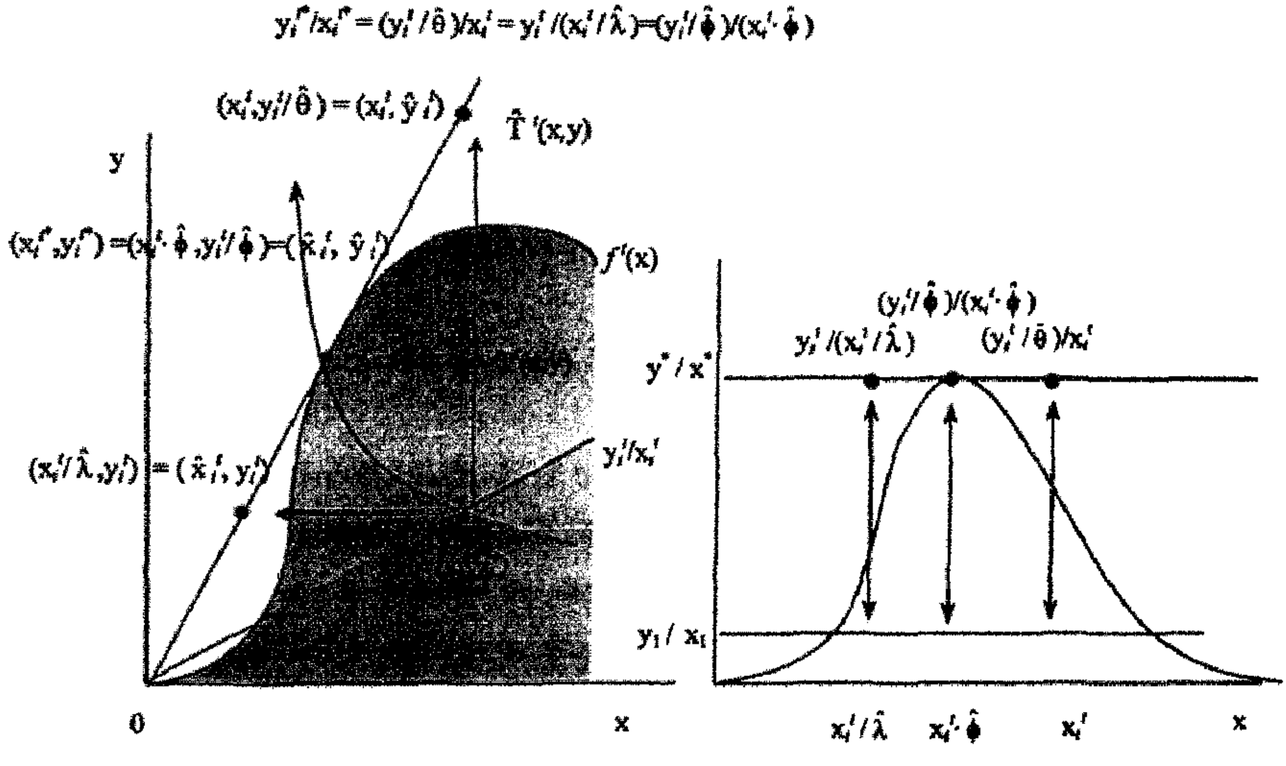


Gráfico 2.2.6a-b. Evaluación del rendimiento *relativo*: eficiencia productiva.

En el caso de que las actividades evaluadas pertenezcan al subconjunto óptimo de posibilidades de producción, las funciones de distancia presentan valores unitarios $D_{\hat{O}}^t(x,y) = D_{\hat{I}}^t(x,y) = D_{\hat{T}}^t(x,y) = 1$, (2.2.32–33–34), por lo que la productividad absoluta evaluada se corresponde con la óptima: $AFP^t = OFP^t = g^t(y^t)^*/h^t(x^t)^*$.

La cuantía concreta de ineficiencia productiva viene determinada por el valor de la función de distancia, (2.2.22–23–24), por lo que es posible considerar:

$$\begin{aligned} &PE_O(x,y) = D_{\hat{O}}(x,y), \\ &PE_I(x,y) = D_{\hat{I}}(x,y), \\ &PE_T(x,y) = D_{\hat{T}}(x,y). \end{aligned} \qquad (2.2.41\text{-}42\text{-}43)$$

Al igual que en el caso de las funciones de distancia definidas sobre $T^t(x,y)$ determinantes de la eficiencia técnica, aquellas definidas sobre $\hat{T}^t(x,y)$ implican una caracterización equiproporcional de las variaciones de los vectores de productos, factores o ambos y, de nuevo, dada una actividad evaluada, su calificación como eficiente se realiza en términos de los subconjuntos isocuanta (2.2.29–30–31) y no en términos de aquellos eficientes análogos a las formulaciones (2.2.10–11–12). Así, una vez más, la noción de eficiencia productiva considerada en (2.2.32–33–34) es más débil que la que se derivaría de adoptar la noción de Koopmans (1951).

2.2.5 Indices de eficiencia de escala, SE^t

En el desarrollo realizado en la sección precedente se asumía la existencia de homogeneidad lineal y homoteticidad simultánea con objeto de asegurar la separabilidad de la función de distancia y que ésta pueda ser representada intuitivamente como razón entre una función agregadora de productos a otra de factores –extendiendo el modelo presentado en el capítulo previo desde el caso de un único producto y factor al de múltiples productos y factores–. En este sentido, las diferencias que existen entre las funciones presentadas y definidas sobre $T^t(x,y)$, (2.2.1–2–5), y $\hat{T}^t(x,y)$, (2.2.22–23–24) se deben al hecho de que la tecnología de producción satisfaga o no las propiedades presentadas en T.8–T.9, *i.e.* a la (in)existencia de homogeneidad de primer grado (rendimientos constantes a escala) y homoteticidad simultánea (separabilidad). Así, si la tecnología de producción no verifica tales propiedades, las funciones de distancia difieren tanto en valor como en interpretación. En el primer caso, si la función no presenta homogeneidad lineal, la tecnología se caracteriza por presentar rendimientos variables a escala, y la diferencia en los valores obtenidos bajo la asunción respectiva de rendimientos constantes y variables se debe a la magnitud de los rendimientos a escala. En el segundo, caso si la tecnología no es simultáneamente homotética, la función de distancia no es separable y su valor no es interpretable de forma intuitiva como la razón de una función agregadora de productos a otras de factores.

La asunción de tales propiedades –al igual que T.1–T.7– resulta necesaria para poder identificar y evaluar la eficiencia productiva respecto al subconjunto óptimo así como con objeto de poder interpretar a las funciones de distancia en la forma deseada, *e.g.* equivalencia de las propias funciones de distancia (2.2.28) debida a T.8. o su separabilidad, (2.2.25–26–27), T.9. Por otra parte, aunque éstas son contrastables empíricamente a través de métodos optimizadores, esto no impide que se pueda considerar desde una perspectiva teórica la posibilidad de comparar las funciones de distancia definidas sobre $\mathrm{T}^t(x,y)$ y $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$. En este sentido, de acuerdo a lo expuesto en la sección 2.1, ambas tecnologías verifican $\mathrm{T}^t(x,y) \subseteq \hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$. Siendo $\mathrm{T}^t(x,y)$ un subconjunto de $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$, Grosskopf (1986) muestra cómo las funciones de distancia se encuentran "anidadas" según

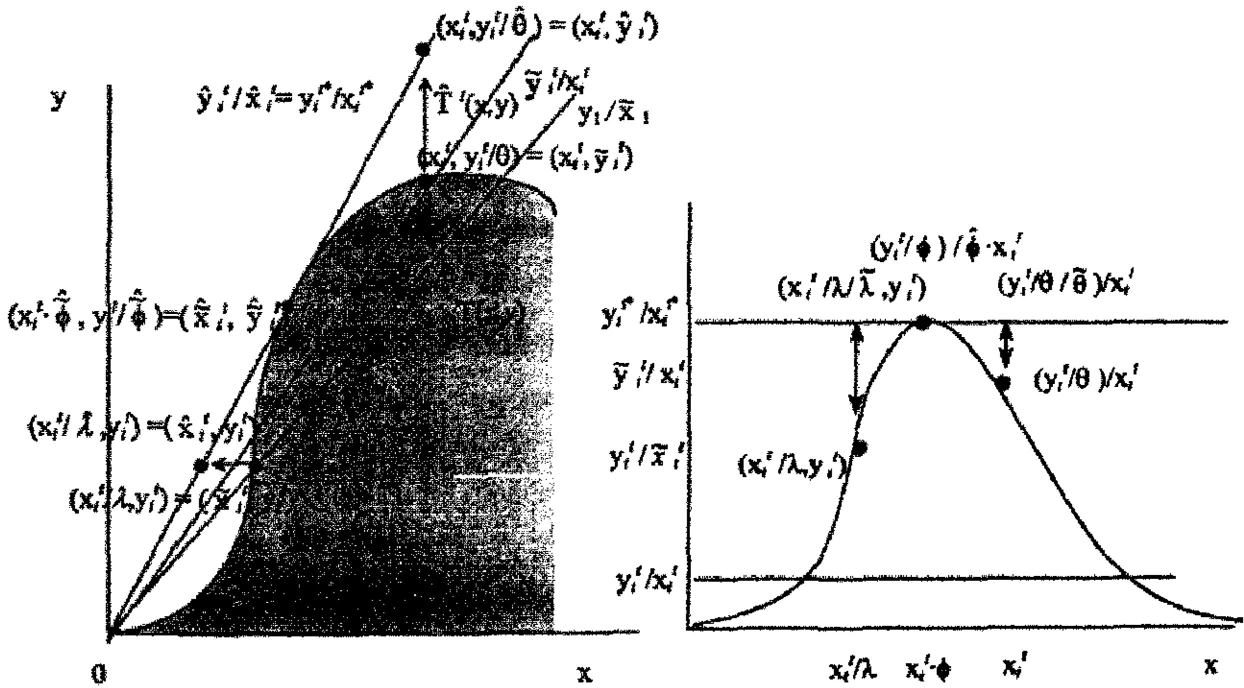
$$
\begin{aligned}
&0 < \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}(x,y) \leq \mathrm{D}_{\mathrm{O}}(x,y) \leq 1, \\
&1 \leq \mathrm{D}_{\mathrm{I}}(x,y) \leq \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}(x,y) < +\infty \qquad\qquad (2.2.44\text{-}45\text{-}46) \\
&0 < \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}(x,y) \leq \mathrm{D}_{\mathrm{O}}(x,y) \leq 1.
\end{aligned}
$$

Tomando en consideración lo establecido previamente, la distancia o diferencial de valores existente entre $\mathrm{D}^t_d(x,y)$ y $\mathrm{D}^t_{\hat{d}}(x,y)$, d =O,I,T, se debe a la magnitud de los rendimientos a escala. Así, si $\mathrm{D}^t_d(x,y)$ puede ser interpretada como medida de eficiencia técnica y $\mathrm{D}^t_{\hat{d}}(x,y)$ de eficiencia productiva, su diferencial es interpretable como una medida de eficiencia de escala. Desde una óptica equivalente, al representar $\mathrm{D}^t_d(x,y)$ un índice de cuantía que establece el diferencial entre la productividad absoluta observada respecto a aquella de referencia sobre el conjunto eficiente –frontera– y $D_{\hat{d}}^{t}(x,y)$ respecto a la productividad potencial obtenida en la escala óptima de operaciones, la diferencia existente entre estas funciones es interpretable como la pérdida de productividad absoluta en la proyección eficiente respecto a la óptima, *i.e.* el efecto de una escala de operaciones ineficiente en términos del rendimiento productivo.

Realizadas estas consideraciones, es posible establecer como cuantía concreta de la eficiencia de escala la razón de las funciones de distancia $D_{\hat{d}}^{t}(x,y)$ a $D_{d}^{t}(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
SE_O(x,y) &= D_{\tilde{O}}(x,y) = D_{\hat{O}}(x,y)/D_O(x,y) = PE_O(x,y)/TE_O(x,y),\\
SE_I(x,y) &= D_{\tilde{I}}(x,y) = D_{\hat{I}}(x,y)/D_I(x,y) = PE_I(x,y)/TE_I(x,y), \qquad (2.2.47\text{-}48\text{-}49)\\
SE_T(x,y) &= D_{\tilde{T}}(x,y) = D_{\hat{T}}(x,y)/D_T(x,y) = PE_T(x,y)/TE_T^{t}(x,y).
\end{aligned}
$$

Al igual que en los casos de la eficiencia técnica y productiva, es posible ilustrar estas relaciones a través del gráfico 2.2.7 donde se hace abstracción de la unidad evaluada, (x_i^t, y_i^t), con objeto de mostrar la independencia existente entre eficiencia técnica y de escala. En 2.2.7b se recoge en el eje de ordenadas la productividad absoluta en función del volumen de *factor* empleado en el proceso productivo, *i.e la escala de operaciones*, de forma que se puede apreciar como la eficiencia de escala de cualquier proyección eficiente sobre la frontera desde cualquier actividad ineficiente (x_i^t, y_i^t) –ya sea en la dimensión de productos, factores o tecnológica– queda definida en términos de la óptima. En el ejemplo que nos ocupa, la ganancia productiva que implica la resolución de la ineficiencia técnica en la dimensión de productos, $(x_i^t, \tilde{y}_i^t) = (y_i^t/\theta, x_i^t)$, se corresponde con un producto medio inferior al óptimo, $\tilde{y}_i^t/x_i^t < y_i^{t*}/x_i^{t*}$. Este resultado se debe a que, dadas las características de la tecnología y desde la perspectiva del nivel de *factores* utilizado, resulta imposible alcanzar la cuantía óptima de producto que para x_i^t se corresponde con $\hat{y}_i^t$ –lo que supondría una productividad $\tilde{y}_i^t/x_i^t = y_i^{t*}/x_i^{t*}$–. En el caso de los factores, la proyección eficiente presenta un producto medio inferior al óptimo, $y_i^t/\tilde{x}_i^t < y_i^{t*}/x_i^{t*}$, porque, de nuevo, dada la tecnología y desde la perspectiva del nivel de *producto* alcanzado, no es posible alcanzar la cuantía óptima de factor que para y_i^t se corresponde con $\hat{x}_i^t$ –lo que supondría una productividad, $y_i^t/\hat{x}_i^t = y_i^{t*}/x_i^{t*}$–. Un razonamiento análogo puede realizarse para el caso de la función de distancia tecnológica, donde considerando la resolución de las posibles ineficiencias a través del incremento y reducción equiproporcional de productos y factores se alcanza una situación que, en este caso, es óptima $\tilde{y}_i^t/\tilde{x}_i^t = y_i^{t*}/x_i^{t*}$.



Gráfica 2.2.7a-b. Evaluación del rendimiento *relativo*: eficiencia de escala.

2.2.5.1 Funciones de distancia e índices de eficiencia y cuantía

Dadas las relaciones establecidas en (2.2.47–48–49) es posible relacionar las funciones de distancia introducidas de acuerdo a

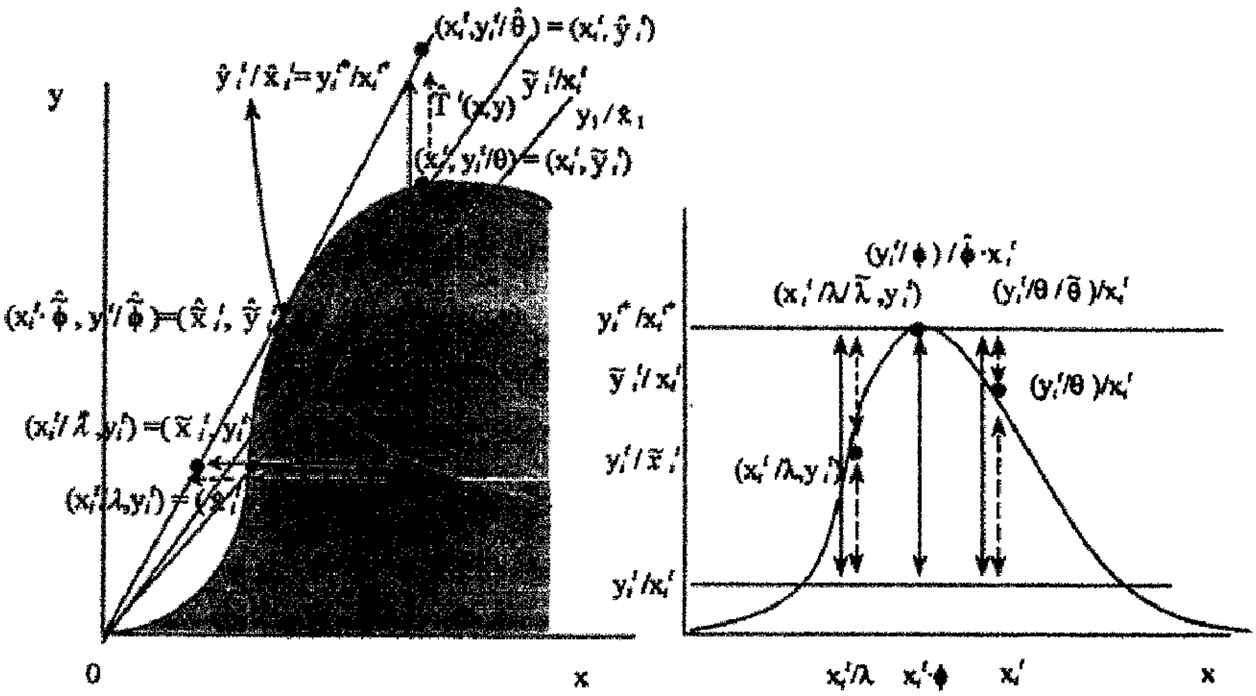
$$\begin{aligned} D_{\hat{O}}(x,y) &= D_O(x,y)\cdot D_{\tilde{O}}(x,y), \\ D_{\hat{I}}(x,y) &= D_I(x,y)\cdot D_{\tilde{I}}(x,y), \\ D_{\hat{T}}(x,y) &= D_T(x,y)\cdot D_{\tilde{T}}(x,y); \end{aligned} \qquad (2.2.50\text{-}51\text{-}52)$$

es decir, resulta factible descomponer la eficiencia productiva de forma excluyente entre eficiencia técnica y eficiencia de escala:

$$\begin{aligned} PE_O(x,y) &= TE_O(x,y)\cdot SE_O(x,y) \\ PE_I(x,y) &= TE_I(x,y)\cdot SE_I(x,y) \\ PE_T(x,y) &= TE_T(x,y)\cdot SE_T(x,y); \end{aligned} \qquad (2.2.53\text{-}54\text{-}55)$$

Esta caracterización de la eficiencia productiva se corresponde con la productividad relativa de los factores considerada en la introducción del modelo de rendimiento de la presente investigación, RFP_i^l. El gráfico 2.2.8, idéntico a 2.2.5–6–7, permite ilustrar el modelo en términos de las funciones de distancia introducidas. En el caso de la actividad (x_i^l, y_i^l), las funciones de distancia $D_{\hat{O}}^l(x_i^l, y_i^l) = \hat{\theta}$, $D_{\hat{I}}^l(x_i^l, y_i^l) = \hat{\lambda}$ y $D_{\hat{T}}^l(x_i^l, y_i^l) = \hat{\phi}$ muestran el diferencial entre las productividades obtenidas por la propia actividad, $AFP_i^l = y_i^l/x_i^l$, y el óptimo potencial que se puede generar dada la tecnología, $OFP_i^l = y_i^{l*}/x_i^{l*}$. Tomando en consideración (2.2.28) se observa $RFP_i^l = AFP_i^l/OFP_i^l = \hat{\theta} = \hat{\lambda}^{-1} = \hat{\phi}^{-1/2} = (y_i^l/x_i^l)/(y_i^{l*}/x_i^{l*}) < 1$ –gráficamente tal ineficiencia viene determinada por las líneas continuas–.

Esta ineficiencia productiva puede ser descompuesta en ineficiencia técnica y de escala. Respecto a la ineficiencia técnica, las funciones $D_O^l(x_i^l, y_i^l) = \theta$, $D_I^l(x_i^l, y_i^l) = \lambda$ y $D_T^l(x_i^l, y_i^l) = \phi$ muestran el diferencial entre la productividad absoluta de la actividad evaluada, $AFP_i^l = y_i^l/x_i^l$, y las proyecciones eficientes sobre el subconjunto eficiente –frontera– de producción: $\theta = (y_i^l/x_i^l)/(\tilde{y}_i^l/x_i^l) < 1$ en el caso de la función de productos, $\lambda = (y_i^l/\tilde{x}_i^l)/(y_i^l/x_i^l) > 1$ en el de factores y $\phi = (y_i^l/x_i^l) / (\tilde{y}_i^l/\tilde{x}_i^l) < 1$ en la tecnológica. Así, la resolución de las ineficiencias de carácter técnico suponen ganancias productivas respecto a la productividad observada dado que: $\tilde{y}_i^t/x_i^t > y_i^t/x_i^t$, $y_i^t/\tilde{x}_i^t > y_i^t/x_i^t$ y, finalmente, $\tilde{y}_i^t/\tilde{x}_i^t > y_i^t/x_i^t$; en el gráfico 2.2.8a la ineficiencia técnica queda recogida por la líneas discontinuas que unen la actividad evaluada y las fronteras.



Gráfica 2.2.8a-b. Evaluación del rendimiento *relativo*: eficiencia productiva, técnica y de escala.

Sin embargo, tales ganancias no implican alcanzar la situación óptima representada por $OFP_i^t = y_i^{t*}/x_i^{t*}$. En el caso de las funciones de productos y factores se observa: $\tilde{y}_i^t/x_i^t < y_i^{t*}/x_i^{t*}$, $y_i^t/\tilde{x}_i^t < y_i^{t*}/x_i^{t*}$ mientras que en el caso de la tecnológica el subconjunto eficiente de referencia coincide con aquel óptimo, *i.e.* $\tilde{y}_i^t/\tilde{x}_i^t = y_i^{t*}/x_i^{t*}$, gráfico 2.2.8b. Estos últimos diferenciales de productividad alcanzada en las dimensiones de productos y factores, se deben a una escala de operaciones ineficiente de forma que si la actividad no varía la escala productiva, las ganancias de eficiencia técnica no permiten explotar el óptimo de productividad que brinda la tecnología, *i.e.* persisten ineficiencias que son atribuibles única y exclusivamente a una escala inadecuada de operaciones. Así, en la gráfica 2.2.8b, la ineficiencia de escala queda representada por las líneas discontinuas que unen las proyecciones sobre la frontera eficiente en la dimensión seleccionada y la productividad óptima.

Se puede finalizar la presente sección resumiendo la interpretación del valor de las funciones de distancia en términos de eficiencia. Una actividad que presenta una función de distancia $D_d(x,y)= 1$, d =O,I,T, resulta eficiente en términos productivos –técnicos y de escala– alcanzando la productividad máxima potencial. Ahora bien, las funciones de distancia $D_{\hat{O}}(x,y)< 1, D_{\hat{I}}(x,y)> 1, D_{\hat{T}}(x,y)< 1$, representativas de ineficiencia productiva pueden incorporar las dos fuentes de ineficiencia ya introducidas: aquella que se deriva de la existencia de ineficiencia técnica dada la tecnología de producción, $T^t(x,y)$, y cuya resolución implica ganancias productivas potenciales, y aquella que procede de la existencia de ineficiencia de escala por presentar la actividad un volumen de operaciones inadecuado de acuerdo a $\hat{T}^t(x,y)$.

Las relaciones establecidas en (2.2.53-54-55) resumen la formalización del modelo de rendimiento estableciendo la productividad relativa de los factores, equivalente a la eficiencia productiva, en términos de las funciones de distancia introducidas por Malmquist (1953) y Shephard (1953). Los resultados reflejados hasta el momento dentro de la teoría de la producción suponen un enfoque interpretativo coherente basado en los desarrollos realizados por Shepard (1953) y discípulos como Färe (1988) mientras que, en el ámbito de medición de eficiencia productiva, contactan con los desarrollos de Farrell (1957). Dada la escasa difusión de Shephard (1953) –sería publicado de nuevo una vez revisado en Shephard (1970)–, Farrell (1957) no establece el nexo entre función de distancia y eficiencia. Serían las investigaciones lideradas por Färe, Grosskopf y Lovell (1985) y Färe y Primont (1995a) aquellas que formalizarían el nexo existente entre ambos conceptos, *i.e.* la posibilidad de interpretar a la función de distancia –caracterizadora de la tecnología– como un índice válido para establecer la eficiencia productiva de las actividades.

El presente capítulo ha permitido establecer las bases teóricas para considerar a la función de distancia como elemento esencial en la formalización del modelo de rendimiento productivo. Su evaluación resulta contemporánea, aunque la importancia del desarrollo teórico presentado queda patente en su extensión al ámbito dinámico que permite evaluar las variaciones en el rendimiento productivo –productividad–, a través de los índices de Malmquist presentados en el próximo capítulo.

En lo que respecta al presente proyecto de investigación, la potencialidad de las funciones de distancia como representaciones de la tecnología se plasma en la posibilidad de evaluar el rendimiento de las observaciones, *i.e.* su interpretación como índices de eficiencia, aunque su resurgir en los años setenta se encuentra relacionado con la búsqueda de condiciones de dualidad entre los espacios físico –cuantía– y económico –precios–, *i.e* entre el primal de la tecnología representado por la función de producción y su dual representado por las funciones de costes, ingresos y, finalmente, beneficios, *e.g.* McFadden (1978). El atractivo de tales funciones reside en que, bajo condiciones de regularidad como las expuestas en las secciones anteriores –axiomas–, las propiedades descritas de la función de distancia de productos y factores (2.2.1–2), tienen un reflejo directo en las funciones de ingresos y costes, por lo que ambas pueden ser derivadas o recuperadas en función de sus homónimas. Con relación a la función de distancia tecnológica (2.2.5), ésta no es dual de la función de beneficios –frente a la función de distancia direccional que si lo es, véase Chambers, Chung y Färe (1998)–. La relevancia de tales relaciones no es de aplicación directa en el objetivo de esta tesis, pero su búsqueda en el establecimiento de las bases del análisis dual puso de manifiesto la importancia de interpretar a la función de distancia como un indicador del nivel de eficiencia, *e.g.* Vera (1981) analiza sus aplicaciones potenciales señalando las relaciones duales comentadas, la evaluación del rendimiento a través del concepto de eficiencia y los números índices como aquellas más prometedores. Son estas dos últimas las que a lo largo del presente y próximo capítulo van a ser relevantes para el análisis.

Capítulo III

LA EVALUACION DEL RENDIMIENTO PRODUCTIVO CON INDICES DE MALMQUIST

En el capítulo inicial se ha introducido un modelo dinámico de rendimiento productivo basado en el concepto de productividad relativa de los factores o eficiencia productiva. Tal modelo puede ser formalizado teóricamente en términos de la función de distancia introducida por Malmquist (1953) y Shephard (1953), al poderse interpretar este concepto como un indicador válido de eficiencia. El objetivo del presente capítulo es dotar al modelo de rendimiento relativo de un carácter dinámico, definiendo índices de productividad de Malmquist que, por basarse en las funciones de distancia ya presentadas, exigen la caracterización de tecnología en los términos axiomáticos del capítulo previo. El hecho de que tales funciones de distancia representen la eficiencia productiva, técnica y de escala posibilita que los propios índices de productividad puedan ser así mismo descompuestos en otros característicos de tales conceptos, *i.e.* permiten interpretar el índice de Malmquist de una forma consistente con la exposición teórica del capítulo anterior; es decir, analizando la contribución que cada una de estas variables hace al rendimiento relativo de las actividades.

3.1 La medición de la productividad a través de números índices

El presente proyecto de investigación aborda el análisis de la variación en el rendimiento relativo de las actividades, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$, en términos de la evolución absoluta y óptima de los factores: $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ y $\Delta OFP_i^{t,t+1}$. Cada uno de estos términos se encuentra definido como un índice de productividades que, en el caso de un único producto y factor, (1.1.13), resulta de fácil comprensión. Sin embargo, tal como se puso de manifiesto en las secciones 1.1.2 y 1.1.4, en el caso –común– de que la tecnología responda a procesos multiproducto y multifactor, la determinación del rendimiento productivo exige hacer uso de funciones agregadoras. En tal caso, y centrando el desarrollo en el concepto de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}$, por ser aquel habitualmente tratado en la literatura, tal magnitud puede representarse a través de

$$\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1} = \frac{g^{t+1}(y_i^{t+1})/h^{t+1}(x_i^{t+1})}{g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t)}; \tag{3.1.1}$$

es decir, como la razón de números índices de productividad. Las funciones agregadoras se corresponden con $g^t(y_i^t) = \mu^t \cdot y_i^t$ y $h^t(x_i^t) = \nu^t \cdot x_i^t$ en t y, de forma análoga en $t+1$, y donde μ^t y ν^t son los pesos respectivos que permiten la agregación lineal de los productos y factores. Una cuestión de vital importancia ya introducida en el primer capítulo hace referencia a la necesidad de elegir unas funciones –pesos– que satisfagan una serie de propiedades con objeto de dotar de idoneidad a los índices de rendimiento definidos, ya sea desde una perspectiva axiomática como tecnológica. Esta idoneidad exige respectivamente la satisfacción de una serie de axiomas o *tests* y la posibilidad de considerar sus expresiones como aproximaciones válidas de tecnologías de producción genéricas –*i.e.* que supongan una caracterización básica de la tecnología de producción sin incurrir en imposiciones no deseadas sobre ésta–.

3.1.1 La aproximación axiomática en la elección de números índices

Los índices de productividad de la forma (3.1.1) deben satisfacer una serie de propiedades con objeto de que puedan ser interpretados de una forma coherente; es decir, que constituyan índices de productividad idóneos. Diewert (1992b) presenta veinte *tests* que pueden ser exigibles a cualquier número índice, ya sea de precios o cuantías, aunque existe un consenso generalizado con relación a cinco propiedades en función de las cuales se puede determinar la idoneidad de los índices de productividad: identidad, monoticidad, transitividad –circularidad–, homogeneidad –proporcionalidad– y separabilidad[14].

Con relación a la propiedad de identidad, (1), ésta establece que siendo $(x^t_i, y^t_i) = (x_i^{t+1}, y_i^{t+1})$, entonces $g^{t+1}(y_i^{t+1}) = g^t(y_i^t)$ y $h^{t+1}(x_i^{t+1}) = h^t(x_i^t)$. De forma análoga para las actividades óptimas, por lo que si $(x_i^{t*}, y_i^{t*}) = (x_i^{t+1*}, y_i^{t+1*})$, un índice equivalente a (3.1.1) pero representativo de $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ debe verifica igual propiedad. Es decir, si la actividad evaluada no altera sus valores de producción obtenida y factores empleados, se exige que el índice representativo de su productividad absoluta no varíe e igual propiedad se establece con relación a la actividad que define la productividad óptima de los factores y, por tanto a su propio índice, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ –así como, finalmente, a la variación en la productividad relativa que, como razón entre ambos, también verificará las propiedades de los índices de variación en la productividad absoluta y óptima, $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta AFP_i^{t,t+1} / \Delta OFP_i^{t,t+1}$–.

La propiedad de monoticidad, (2), establece que siendo $y_i^{t+1} > y_i^t$, entonces $g^{t+1}(y_i^{t+1}) > g^t(y_i^t)$ y si $x_i^{t+1} > x_i^t$ entonces $h^{t+1}(x_i^{t+1}) > h^t(x_i^t)$ –de forma análoga para (x_i^{t*}, y_i^{t*}) y (x_i^{t+1*}, y_i^{t+1*})–. Esta condición implica que los índices $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ y $\Delta RFP_i^{t,t+1}$ son monotónicos: de incrementarse el vector de productos y^{t+1} y aquel de factores x_i^t, los índices propuestos deben reflejar un incremento en sus propias cuantías mientras que incrementos en y^t y x_i^{t+1} deben hacer que los índices propuestos reflejen valores de productividad inferiores –de igual forma respecto a los valores óptimos–.

Respecto a la propiedad de transitividad (3), ésta implica que de existir un número de t=1,...,T períodos de análisis, resulta posible proceder a una agregación o desagregación consistente de las variaciones de la productividad por subperíodos. Suponiendo la existencia de tres momentos temporales, t, t+1 y t+2, en el caso de las variaciones en la productividad absoluta de los factores esto implica que $\Delta AFP_i^{t,t+2} = \Delta AFP_i^{t,t+1} \cdot \Delta AFP_i^{t+1,t+2}$, de forma que los índices se encuentran "encadenados". Una vez más es posible extender esta condición a los índices de variación en la

[14] De acuerdo a lo considerado en el capítulo precedente, la inclusión de la propiedad de separabilidad se realiza con objeto de que los índices puedan expresarse como razón entre funciones agregadoras de productos y factores, de forma que constituyen una extensión del concepto intuitivo de productividad al caso multiproducto y multifactor.

productividad óptima y relativa con objeto de que el conjunto del modelo de evaluación del rendimiento presentado sea conforme a la condición de transitividad.

Con relación a las propiedades de identidad y monoticidad, éstas resultan satisfechas de verificarse $g^{t+1}(\cdot) = g^t(\cdot)$ y $h^{t+1}(\cdot) = h^t(\cdot)$, es decir, se eliminan los superíndices temporales de forma que los pesos de ponderación μ^t y ν^t son iguales en los dos períodos. Claramente esto implica que, con objeto de realizar una análisis del rendimiento productivo, resulta necesario elegir una determinada tecnología de referencia; es decir un período base para el análisis –así, por ejemplo, en la introducción gráfica el período base elegido para analizar $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ y $\Delta RFP_i^{t,t+1}$ es $t = 0$–. Dado que el valor de los índices de rendimiento productivo puede variar en función del período de referencia elegido, puede resultar apropiado establecer una solución de compromiso *a la* Fischer (1921), generando la media geométrica de los índices con base en t y t+1. Respecto a la propiedad de circularidad, resulta así mismo necesario seleccionar un determinado período base respecto al cual evaluar las variaciones en el rendimiento productivo de forma que se verifique esta propiedad circular –de acuerdo a la terminología de Frisch (1936)–.

Con objeto de que los índices satisfagan la propiedad de proporcionalidad, (4), resulta necesario que las funciones agregadoras sean homogéneas de primer grado lo cual implica que los distintos índices de productividad son así mismo homogéneos de grado uno en y_i^t y de grado menos uno en x_i^t, t, t+1; así, considerando la productividad absoluta de los factores, $\mu AFP_i^{t,t+1} = g^t(\mu y_i^t)/h^t(x_i^t)$; $\mu^{-1} AFP_i^{t,t+1} = g^t(y_i^t)/h^t(\mu x_i^t)$, $\mu > 0$. Respecto a los índices de variación en la productividad, la propiedad de proporcionalidad se deriva de los resultados anteriores por lo que estos han de ser homogéneos de grado uno en y_i^{t+1} y x_i^t y de grado menos uno en y_i^t y x_i^{t+1}. Respecto a y_i^{t+1} y x_i^t se verifica que $\mu \Delta AFP_i^{t,t+1} = (g^{t+1}(\mu y_i^{t+1})/h^{t+1}(x_i^{t+1}))\ /\ (g^t(y_i^t)/h^t(x_i^t))$, y $\mu \Delta AFP_i^{t,t+1} = (g^{t+1}(y_i^{t+1})/h^{t+1}(x_i^{t+1}))\ /\ (g^t(y_i^t)/h^t(\mu x_i^t))\mu > 0$ –de forma similar para el resto de vectores y las variaciones en la productividad óptima y relativa–.

Finalmente, con relación a la propiedad de separabilidad, (5), ésta debe ser entendida en el contexto productivo aquí presentado como el hecho de que las funciones agregadoras en (3.1.1), y sus homólogas para la variación en la productividad óptima y relativa, dependen únicamente de los argumentos presentes en ellas, *i.e.* productos y factores respectivamente. La verificación de esta propiedad dependerá de la asunción que se realice respecto a la relación funcional existente entre los vectores de productos y factores y en concreto, apelando a los desarrollos realizados en la sección 2.2.3, a que la tecnología sea separable, *i.e.* el axioma T.9 determinante de la condición de homoteticidad simultánea. Si la tecnología de producción presenta tal propiedad, los índices de cuantía representativos de la variación en la productividad –entendidos como funciones de distancia de acuerdo la sección 2.2.4.1– implican que las funciones agregadoras de productos y factores dependen únicamente de estos argumentos y la representación que se puede hacer de tales variaciones se corresponde con la razón entre ambas funciones. Siendo esta representación conveniente para extender de forma intuitiva el modelo presentado en el primer capítulo –basado en una tecnología con un único producto y factor– al caso multiproducto y multifactor, es evidente que desde una perspectiva física resulta imposible separar el vector de productos de aquel de factores, dado que la producción obtenida depende de los factores empleados. Así, la propiedad de separabilidad se asume a nivel teórico con objeto de facilitar la interpretación de los índices pero sin que constituya, en sí, una condición relevante respecto a la cual determinar la idoneidad axiomática de los índices.

Estas propiedades deseables pueden analizarse de forma teórica una vez definidos los índices de productividad que determinan el rendimiento de las actividades. La definición de índices de rendimiento productivo de Malmquist, en términos de funciones de distancia, hace que las propiedades por estos satisfechas se deriven de aquellas presentes en las propias funciones de distancia –la siguiente sección 3.2 de este capítulo analiza esta cuestión en detalle–. Así mismo, una vez que se ha decidido una determinada técnica de optimización para aproximar la tecnología de producción, calculando las funciones de distancia y los pesos agregadores de productos y factores, éstas son contrastables empíricamente –estas consideraciones se abordan en el capítulo 4.5.1 relativo a la técnica de optimización matemática utilizada para calcular empíricamente las funciones de distancia: el Análisis Envolvente de Datos, DEA–.

3.1.2 La aproximación tecnológica en la elección de números índices

La aproximación tecnológica o económica desde una perspectiva dual como se conoce en la literatura, establece que los índices de productividad definidos deben responder a caracterizaciones genéricas de la tecnología. El precursor de esta aproximación a la hora de determinar la idoneidad de los números índices es Erwin Diewert, quien en 1976 muestra como los índices tradicionales de Fisher (1921) y Törnqvist (1936) son *exactos –superlativos–* respecto a funciones agregadoras que suponen la caracterización de tecnologías flexibles, *e.g.* funciones de producción, transformación, costes o de distancia que resultan, por ejemplo, cuadráticas o translogarítmicas. La primera de estas formas funcionales, que es introducida por Diewert (1971), se corresponde con el índice de Fischer, mientras que la segunda, propuesta por Christensen, Jorgenson y Lau (1971, 1973), se corresponde con el índice de Törnqvist[15]. El adjetivo flexible responde a la siguiente interpretación: "*Una función agregadora se considera 'flexible' si puede facilitar una aproximación de segundo orden a cualquier función arbitraria linealmente homogénea y dos veces diferenciable. La forma funcional de un número índice se considera 'superlativa' si es exacta* (*i.e. consistente con*) *a la forma de una función agregadora 'flexible'* ". Diewert (1976:115). Es decir, que la tecnología subyacente al número índice elegido se corresponda con aproximaciones de un orden elevado de la tecnologías –homogéneas– y, así, no imponga restricciones indeseables sobre sus características –por ejemplo, numerosas características de la tecnología como

---

[15] El índice de Törnqvist (1936) ha demostrado ser el índice superlativo más ampliamente utilizado por la sencillez de su cálculo. En el caso $t = 0,1$, y múltiples productos y factores, el índice define las variaciones en la productividad total de los factores a través de la expresión:

$$T(p^0,p^1,w^0,w^1,y_i^0,y_i^1,x_i^1,x_i^0)=\prod_{m=1}^{M}\left(y_m^1/y_m^0\right)^{(1/2)\left[s_m^0+s_m^1\right]}\Big/\prod_{n=1}^{N}\left(x_n^1/x_n^0\right)^{(1/2)\left[s_n^0+s_n^1\right]},$$

que se corresponde, así mismo, con la razón de un índice Törnqvist de productos a uno de factores y donde las cuantías son agregadas de acuerdo a ponderaciones que representan el peso que los productos y factores tienen en los ingresos y costes, $s^t_m = p^t_m \cdot y^t_m / \Sigma^M_{m=1}\, p^t_m \cdot y^t_m$ y $s^t_n = w^t_n \cdot x^t_m / \Sigma^N_{n=1}\, x^t_n \cdot x^t_m$. Es fácil comprobar como en el caso de un único producto y factor, la expresión se corresponde con la variación en la productividad establecida en (3.1.1). Con objeto de facilitar su cálculo es factible expresar tal índice en logaritmos,

$$\ln T(p^0,p^1,w^0,w^1,y_i^0,y_i^1,x_i^1,x_i^0)=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{2}\left[(s_m^1+s_m^0)(\ln y_m^1-\ln y_m^0)\right]-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2}\left[(s_n^1+s_n^0)(\ln x_n^1-\ln x_n^0)\right]$$

pueden ser las elasticidades de sustitución o la existencia de cambio técnico sesgado, que se corresponden con propiedades de segundo orden. En el primer caso, funciones de producción como la Cobb–Douglas ó CES, *Constant Elasticity of Substitution*, restringen la información de la tecnología al resultar la elasticidad de sustitución unitaria o constante respectivamente.

Esta interpretación tecnológica presenta gran relevancia pues permite obtener índices de rendimiento productivo sin tener que estimar o calcular los parámetros que definen la tecnología de acuerdo a una aproximación flexible –cuadrática o translogarítmica–, bien por el desconocimiento habitual de su forma funcional, bien porque no se disponga de suficientes observaciones como para poder realizar una estimación consistente, *e.g.* grados de libertad. Naturalmente, el calcular índices de productividad a través de los datos observados de precios y cantidades exige el conocimiento de ambos conjuntos de variables, situación que no siempre se observa, *e.g.* en sectores donde no existen precios de mercado explícitos como actuaciones públicas en el ámbito sanitario, educativo, justicia, etc. y, por otra parte, tiene como coste fundamental la imposibilidad de caracterizar la propia tecnología de producción.

La definición de índices de rendimiento productivo de Malmquist como los presentados en el presente capítulo no exigen establecer, desde una perspectiva teórica, la idoneidad de formulaciones agregadoras basadas en precios de mercado, debido a que éstos se basan en funciones de distancia como las introducidas en el segundo capítulo, (2.2.1.2) y (2.2.5). Estas funciones responden teóricamente a tecnologías aún más flexibles que las que se derivan de funciones agregadoras como la cuadrática o translogarítmica, pues exige únicamente la asunción de los axiomas T.1–T.7 ya introducidos con objeto de que las funciones de distancia se encuentren definidas. El propio autor que da origen a esta aproximación reconocía, un lustro después de su introducción, la idoneidad del uso de funciones de distancia para definir índices de cuantía y productividad basados en ellas: "*...comparaciones (de factores, productos y productividad) basadas en estimaciones econométricas de la estructura de producción han sido comúnmente apreciadas como más deseables que comparaciones basadas en números índices (i.e. Malmquist), sustentándose en la creencia de que los números índices son únicamente consistentes con estructuras de* *producción restrictivas. Nuestros resultados muestran que esta creencia es errónea; de hecho, las estructuras de producción que nosotros hemos considerado en este artículo son tan generales que serían difíciles de estimar econométricamente.*", Caves, Christensen y Diewert (1982a: 1.411).

Desde una perspectiva empírica, resulta sin embargo necesario recurrir a técnicas optimizadoras concretas para así poder caracterizar tecnologías multiproducto y multifactor –a través de precios virtuales que permiten su agregación–, facilitando información relativa a rendimientos a escala, sustituibilidad entre factores, etc.. Sin embargo, en el caso del presente proyecto de tesis, su desarrollo se realiza a través de técnicas no paramétricas, que no presuponen la elección de forma funcional alguna –aunque esta sea flexible– por lo que se preserva la generalidad de la tecnología. Tal como se ha introducido previamente, estas técnicas conocidas como Análisis Envolvente de Datos se abordan en el próximo capítulo.

3.2 La definición de índices de Malmquist de evaluación del rendimiento productivo

De forma independiente Sten Malmquist y Ronald Shephard introdujeron en el año 1953 el concepto de función de distancia dentro de la teoría del consumo y de la producción. Dentro de la teoría del consumo, la función de distancia se relaciona con la cuantía máxima que se puede contraer el vector de bienes y servicios consumidos sin que se vea alterado un determinado nivel de utilidad. Malmquist (1953:210) hace referencia a la posibilidad de una deflación proporcional en el vector de consumo de forma que "*...para un punto de cuantía $Q_I=\{q_I\}$, una constante α queda determinada de tal forma que el punto de cuantía $\alpha Q_I=\{\alpha q_I\}$ se sitúa en el nivel (de indiferencia) S_a*". Esta idea es homóloga a la introducida en el contexto de la teoría de la producción por Shephard (1953), en la que la función de distancia (de factores) representa la cuantía máxima de contracción en el vector de *inputs* empleados manteniendo constante el vector de productos generado. Este concepto de la función de distancia, que permite la caracterización de la tecnología de producción, ha sido formalizado extensamente en el capítulo precedente siendo posible resaltar, en el contexto que nos ocupa, cómo puede ser interpretada como un índice de cuantía que compara productividades, (2.2.19–20–21) y (2.2.35–36–37).

Las formulaciones presentadas en estas ecuaciones fueron inicialmente propuestas por Caves, Christensen y Diewert (1982a), quienes consolidan a la función de distancia como un concepto clave para medir el nivel de eficiencia y productividad de los factores dentro del análisis microeconómico moderno. En este artículo, los autores establecen como objetivo prioritario "*... proponer un marco de análisis .... que sea válido para estructuras de producción muy genéricas y que, aún así, se pueda desarrollar empíricamente usando únicamente los precios y cuantías observados de productos y factores. La clave de la aproximación propuesta es la noción de índices de Malmquist de factores, productos y productividad.*", Caves, Christensen y Diewert (1982a: 1.393). De esta forma, los autores mencionados introducen dentro de la aproximación tecnológica a los números índices –frente a aquella axiomática–, el concepto de índice de cuantía basado en funciones de distancia, dando origen a la denominación genérica de *índice de Malmquist*[16]. Así, definiendo la tecnología según las condiciones de regularidad –axiomas– presentados en el capítulo anterior es factible introducir al índice de Malmquist como vía teóricamente válida para el análisis del rendimiento productivo.

3.2.1 Indices de transformación técnica, $TT_d^{t,t+1}$, d=O,I,T

Considerando las i=1,...,I, actividades introducidas que emplean los factores x_i^t para producir los bienes y servicios y_i^t según una tecnología que verifica T.1–T.7, $T^t(x,y)$, es posible seguir los planteamientos de Caves, Christensen y Diewert (1982a) y definir índices de productividad de Malmquist en la dimensión de *outputs*, *inputs* y *graph* como la razón entre las funciones de distancia de la observación i en t

[16] De acuerdo a lo considerado en el párrafo anterior, el concepto de función de distancia de Malmquist (1953) se corresponde en la teoría del consumidor con la proporción que separa a un vector de consumo de un determinado nivel de indiferencia, mientras que Shephard (1953) desarrolla igual concepto en el contexto de la teoría de la producción considerando la proporción que separa al vector de factores de una determinada isocuanta. Dado que ambos autores introdujeron de forma contemporánea pero independiente ambos conceptos, sorprende que Caves, Christensen y Diewert (1982a) denominen al índice de productividad propuesto como Malmquist en vez de Shephard. Sin embargo, es cierto que Diewert (1976:123) atribuye a Malmquist la idea de generar índices de cuantía en términos de funciones de distancia como consecuencia del crédito que Moorsteen (1961) otorga a Malmquist con relación al origen de este concepto –no ha de olvidarse que Shephard (1953) permanecería prácticamente desconocido hasta su revisión en Shephard (1970)–.

= 0, 1 respecto a la tecnología de referencia en t = 0 ó t = 1. Si consideramos aquella en t = 0 –superíndice–, se definen los siguientes índices de Malmquist

$$
\begin{aligned}
M_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} = TT_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right),\\
M_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)} = TT_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right),\\
M_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)} = TT_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right).
\end{aligned}
\tag{3.2.1-2-3}
$$

Así, el índice originariamente propuesto se corresponde con el término de transformación tecnológica del modelo de evaluación de rendimiento productivo desarrollado en la presente investigación. Dados los valores de las funciones de distancia introducidas en (2.2.1–2–5) y centrándonos en (3.2.1), el índice de Malmquist se corresponde con la transformación técnica de la observación (x^t_i,y^t_i) entre dos períodos sucesivos y respecto a un año base[17]. Así, $M_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \gtreqless 1$, implicando valores superiores a la unidad que la actividad ha mejorado su nivel de eficiencia, valores unitarios que la distancia respecto a la frontera de producción se ha mantenido constante y, por último, valores inferiores a la unidad que la situación productiva en el ámbito técnico ha empeorado. Si bien la función de distancia

[17] Caves, Chistensen y Diewert (1982a) realizan una caracterización más restrictiva de (3.2.1) al asumir por hipótesis que las observaciones son eficientes al obtener el máximo nivel de producto generable dada la tecnología –de forma que las funciones de distancia *contemporáneas* son unitarias, $D^0_O(x^0_i,y^0_i) = 1$–. Bajo este supuesto –o de verificarse esta situación para (x^t_i,y^t_i)–, el índice de Malmquist no solo es interpretable como transformación técnica sino que así mismo se corresponde con el concepto de cambio técnico –al representar la actividad (x^t_i,y^t_i) el potencial de producción generable según $T^t(x,y)$, t=0,1, situándose en el subconjunto eficiente o frontera de producción en ambos períodos–. Así, en la definición de Caves Chistensen y Diewert (1982a), (3.2.1) representa una medida local del cambio técnico acontecido en ambos periodos, $TT_i^{0,1} = TC_i^{0,1}$, de forma que $M_O^0(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1) \gtreqless 1$, según la función de distancia *intertemporal* de la actividad evaluada en t = 1 sea $D^0_O(x^1_i,y^1_i) \gtreqless 1$. Si el índice presenta valores superiores a la unidad la actividad (x^1_i,y^1_i) genera mayor nivel producción que el alcanzable de acuerdo a $T^0(x,y)$ para el nivel de factor x^1_i, *i.e. progreso* técnico asociado a la variación existente en las fronteras de producción. Alternativamente, valores unitarios implican la ausencia de cambio técnico e inferiores a la unidad la existencia de *regreso* técnico, concepto de difícil interpretación económica por lo que tales situaciones deben corresponderse con perdidas de eficiencia de (x^1_i,y^1_i) aunque esta posibilidad queda eliminada por hipótesis de acuerdo al planteamiento de estos autores. En cualquier caso, de existir ineficiencias, (3.2.1) no puede considerarse como una medida de cambio técnico incluso si $D^0_O(x^1_i,y^1_i) > 1$ dado que se desconoce si (x^1_i,y^1_i) pertenece a la frontera de producción en t =1.

contemporánea presenta valores inferiores o iguales a la unidad, $D^0_O(x^0_i, y^0_i) \leq 1$, (2.2.3), la función de distancia *intertemporal* recogida en el numerador del índice puede presentar valores superiores a la unidad, $D^0_O(x^1_i, y^1_i) \gtreqless 1$. Esta función de distancia es análoga a las funciones contemporáneas, con la salvedad de que el conjunto de posibilidades de producción respecto al cual se evalúa el rendimiento técnico es $T^0(x,y)$ de forma que si (x^1_i, y^1_i) presenta mejoras productivas respecto a esta tecnología de referencia expandiendo el conjunto de posibilidades de producción, su función de distancia será superior a la unidad mostrando que el vector de *outputs* observados debe ser minorado para alcanzar la frontera de producción existente en el período anterior[18]. Razonamientos análogos pueden realizarse con objeto de interpretar los índices de factores y tecnológico.

La definición realizada en (3.2.1–2–3) del índice de transformación tecnológica considera como tecnología de referencia aquella del período base, $t = 0$; sin embargo, tal como se ha puesto de manifiesto, resulta factible evaluar el rendimiento técnico de una observación respecto a la tecnología presente en $t = 1$. En este caso, se define el índice de Malmquist por

$$\begin{aligned} M^1_O\left(x^0_i, x^1_i, y^0_i, y^1_i\right) &= \frac{D^1_O(x^1_i, y^1_i)}{D^1_O(x^0_i, y^0_i)} = TT^1_O\left(x^0_i, x^1_i, y^0_i, y^1_i\right), \\ M^1_I\left(x^0_i, x^1_i, y^0_i, y^1_i\right) &= \frac{D^1_I(x^1_i, y^1_i)}{D^1_I(x^0_i, y^0_i)} = TT^1_I\left(x^0_i, x^1_i, y^0_i, y^1_i\right), \\ M^1_T\left(x^0_i, x^1_i, y^0_i, y^1_i\right) &= \frac{D^1_T(x^1_i, y^1_i)}{D^1_T(x^0_i, y^0_i)} = TT^1_T\left(x^0_i, x^1_i, y^0_i, y^1_i\right) \quad . \end{aligned} \tag{3.2.4-5-6}$$

En general, los índices (3.2.1–2–3) y (3.2.4–5–6) difieren entre sí, a no ser que las variaciones en la tecnología de producción sean neutrales en el sentido de Hicks, véase Färe, Grosskopf y Russell (1998). Así, con objeto de eludir la elección de un determinado período de referencia resulta factible establecer la media geométrica de ambos índices,

---

[18] Una definición formal de esta función sería:
$$D^t_O(x^{t+1}, y^{t+1}) = \min_\theta\left\{\theta > 0 : (y^{t+1}/\theta) \in P^t(x)\right\} = \min_\theta\left\{\theta > 0 : (x^{t+1}, y^{t+1}/\theta) \in T^t(x, y)\right\}$$

$$M_O^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)=\left[\frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{1/2}=$$
$$=\left[TT_i^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet TT_i^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right]^{1/2}=TT_O^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right),$$
$$M_I^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)=\left[\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{1/2}= \qquad (3.2.7\text{-}8\text{-}9)$$
$$=\left[TT_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet TT_I^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right]^{1/2}=TT_I^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right),$$
$$M_T^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)=\left[\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{1/2}=$$
$$=\left[TT_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet TT_T^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right]^{1/2}=TT_T^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)$$

3.2.2 El índice de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$

El índice de Malmquist propuesto por Caves, Christensen y Diewert (1982a), identificable con el término de transformación tecnológica, no refleja sin embargo las variaciones acontecidas en el rendimiento productivo de las actividades respecto al subconjunto óptimo de posibilidades de producción al estar constituido por funciones de distancia que, de acuerdo a lo presentado en el capítulo precedente, únicamente caracterizan la eficiencia técnica respecto al subconjunto eficiente. Es decir, los índices (3.2.1–2–3), al excluir las variaciones que se hayan podido producir en la eficiencia de escala no pueden interpretarse como índices de variación en la productividad absoluta de los factores[19]. El hecho de que la formulación original establecida en (3.2.1–2–3) no contempla las variaciones en la eficiencia de escala y, por tanto, no se corresponde con el concepto de productividad absoluta de los factores, es puesto de manifiesto en Grifell-Tatjé y Lovell (1995). Con objeto de definir un índice $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ que considere las variaciones en la eficiencia técnica y de escala, estos autores proponen la generalización de las formulaciones (3.2.10–11–12) –en un modelo análogo a los analizados en la sección 3.3.1 relativa a

[19] Efectivamente, este hecho se traduce en que las equivalencias entre las medias geométricas de los índices de Malmquist que estos autores proponen con índices de productividad de Törnqvist, implican la corrección de estos últimos por un factor de elasticidad de escala establecido de forma local para los niveles de *inputs* observados; es decir, el valor del índice de Törnqvist se hace neto de las contribuciones que los cambios de escala aportan obteniéndose así el índice de Malmquist (3.2.1–2–3).

la descomposición de los índices de Malmquist–, véase Grifell–Tatjé y Lovell (1999a).

De acuerdo a lo establecido en la sección 2.2.4.1, (2.2.38–39–40), se puede definir un índice de Malmquist que refleja la productividad absoluta de los factores como la razón de las funciones de distancia en términos de la tecnología de referencia $\hat{T}^t(x,y)$ –homogénea de primer grado y simultáneamente homotética de acuerdo a T.8 y T.9 respectivamente–:

$$
\begin{aligned}
M_A^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} \\
&= TT_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet ST_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) = \\
&= \Delta AFP_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^1)\right]/h^0(x_i^1)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^1)/h^0(x_i^1)}{g^0(y_i^0)/h^0(x_i^0)}.
\end{aligned}
\tag{3.2.10}
$$

Este índice presenta valores $M_A^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \gtreqless 1$ si la actividad evaluada incrementa, mantiene constante o ve decaer su productividad absoluta. El índice de Malmquist se corresponde con la razón entre funciones de distancia definidas sobre $\hat{T}^0(x,y)$; es decir, se emplea la tecnología en $t = 0$ como base de referencia única para evaluar la relación existente en los procesos productivos en ambos períodos consecutivos. Analizando las funciones de distancia contemporáneas en (3.2.10) es posible observar por (2.2.3) que $D_{\hat{O}}^0(x^0,y^0) \leq 1$, mientras que las funciones intertemporales pueden ser $D_{\hat{O}}^0(x^1,y^1) \gtreqless 1$ en función que la observación en $t = 1$ sea más, igual ó menos productiva que el óptimo observado en $t = 0$; es decir, $D_{\hat{O}}^0(x^1,y^1) > 1$ implica que la productividad absoluta de (x^1,y^1) es superior a la del óptimo en $T^0(x,y)$, (x^{0*},y^{0*}). La expresión (3.2.10) permite así mismo observar cómo de existir variaciones en la productividad absoluta, éstas puede ser descompuestas de forma excluyente en la transformación técnica y de escala acontecida respecto a la tecnología existente en $t = 0$, $TT_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)$ y $ST_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)$ respectivamente.

Dada la definición realizada de (3.2.10) sobre $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$ y la relación existente entre las funciones de distancia establecida en (2.2.28), podemos definir los siguientes índices equivalentes de variación en la productividad absoluta de los factores en la dimensión de factores y tecnológica:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} \\
&= \mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)^{-1} \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)^{-1} = \\
&= \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^1)\right]/h^0(x_i^1)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^1)/h^0(x_i^1)}{g^0(y_i^0)/h^0(x_i^0)}, \\
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} \\
&= \mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)^{2} \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)^{2} = \\
&= \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^1)\right]/h^0(x_i^1)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^1)/h^0(x_i^1)}{g^0(y_i^0)/h^0(x_i^0)}.
\end{aligned}
\qquad (3.2.11\text{–}12)
$$

Por tanto, la variación en la productividad absoluta, $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}$, puede obtenerse como agregado desde una orientación de productos, factores o tecnológica. Las condiciones que lo permiten se relacionan con la existencia de los axiomas de homogeneidad lineal de primer grado –rendimientos constantes a escala– y homoteticidad simultánea –separabilidad–. De hecho, de no verificarse tales axiomas, las funciones de distancia definidas sobre tecnologías $\mathrm{T}^t(x,y)$ no pueden ser interpretadas como índices de productividad absoluta de los factores, (3.2.1–2–3), de acuerdo al conjunto de propiedades que han de satisfacer –véase la próxima sección– dejando de ser equivalentes, *i.e.* su valor numérico difiere en función de los rendimientos –variables– a escala y no son separables, (3.2.7–8–9). Dado que los índices (3.2.10–11–12) son una generalización de (3.2.7–8–9) –en términos de Grifell–Tatjé y Lovell (1999a) al quedar estos últimos incorporados en los primeros–, resulta evidente que si bien los agregados $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}$ ofrecen valores equivalentes independientemente de la orientación elegida, no ocurre así con los términos que lo integran, $\mathrm{TT}_i^{t,t+1}$ y $\mathrm{ST}_i^{t,t+1}$. Esta relación permite concluir que la elección de una orientación específica en la determinación de los índices agregados de rendimiento productivo es irrelevante, aunque su descomposición en índices cuyas funciones de distancia se encuentran definidas sobre $T^t(x,y)$ podrán presentar valores dispares en función de la escala de operaciones –véase el ejemplo presentado en la sección 4.4–.

La posibilidad de considerar la media geométrica de índices referenciados a $t=0$ y $t=1$ da como resultado la siguiente expresión en la dimensión de productos [20]

$$
\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \left[\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(\frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right) \bullet \left(\frac{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(TT_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet ST_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right) \bullet \left(TT_O^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet ST_O^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)\right]^{1/2} = \\
&= TT_O^{0,1} \bullet ST_O^{0,1} = \Delta AFP_i^{0,1} = \frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right]/h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right]/h^t(x_i^0)} = \frac{g^t(y_i^1)/h^t(x_i^1)}{g^t(y_i^0)/h^t(x_i^0)},\ t=0,1,
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

mientras que con relación a los factores

$$
\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \left[\left[\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1} \bullet \left(\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(TT_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet ST_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^{-1} \bullet \left(TT_I^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet ST_I^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left(TT_I^{0,1} \bullet ST_I^{0,1}\right)^{-1} = \Delta AFP_i^{0,1} = \frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right]/h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right]/h^t(x_i^0)} = \frac{g^t(y_i^1)/h^t(x_i^1)}{g^t(y_i^0)/h^t(x_i^0)},\ t=0,1,
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

y, por último, aquel tecnológico viene dado por

---

[20] Una vez más, la asunción de tecnologías homogéneas de primer grado y simultáneamente homotéticas, $\hat{T}^t(x,y)$, garantizan que en la transición de $t=0$ a $t=1$ la variación en la productividad absoluta presenta neutralidad de forma que el índice (3.2.13) es único con independencia del período de referencia elegido, véase Färe, Grosskopf y Rusell (1998).

$$M_A^{0,1}(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)=\left[\left[\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\bullet\left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\left(\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right)^2\bullet\left(\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\left(TT_T^0(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)\bullet ST_T^0(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)\right)^2\bullet\left(TT_T^1(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)\bullet ST_T^1(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)\right)^2\right]^{1/2}=$$

$$=\left(TT_T^{0,1}\bullet ST_T^{0,1}\right)^2=\Delta AFP_i^{0,1}=\frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right]/h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right]/h^t(x_i^0)}=\frac{g^t(y_i^1)/h^t(x_i^1)}{g^t(y_i^0)/h^t(x_i^0)},t=0,1, \tag{3.2.15}$$

Al igual que en el caso anterior, $M_A^{0,1}(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)\gtreqless 1$ si la actividad evaluada mejora, no ve alterado o empeora su rendimiento absoluto. Las fuentes responsables de las variaciones en el rendimiento productivo se corresponden con la media geométrica de las transformaciones técnicas, $TT_d^{0,1}$, d=O,I,T, –variación de la distancia relativa de la actividad respecto al subconjunto eficiente o frontera de producción–, y de la escala de operaciones, $ST_d^{0,1}$ d=O,I,T, –variación en la distancia existente respecto a la escala óptima de producción–; es decir, la media geométrica correspondiente a la productividad total de los factores o eficiencia productiva respecto a la productividad óptima en $t=0$ y $t=1$.

3.2.2.1 La idoneidad del índice de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$

Una vez analizados los índices de Malmquist de transformación tecnológica, $TT_d^{0,1}=M_d^{0,1}(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)$, (3.2.7–8–9), sus homólogos de escala, $ST_d^{0,1}$, d=O,I,T, y de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{0,1}$ $=M_A^{0,1}(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1)$, resulta posible discutir su idoneidad como índices de rendimiento productivo en los términos axiomáticos y tecnológicos previamente establecidos.

De forma genérica, al estar definidos los índices de Malmquist en términos de funciones de distancia, éstos verificarán las propiedades satisfechas por las propias funciones y, así, su idoneidad en términos axiomáticos provendrá de las propiedades puestas de manifiesto en el segundo capítulo. Iniciando el análisis con las funciones definidas sobre $T^t(x,y)$ –(2.2.1–2) y (2.2.5)–, éstas verifican las propiedades D.1.c y D.2. de identidad y monoticidad por lo que los índices introducidos las verifican.

Respecto a la propiedad de transitividad –circularidad–, el empleo de los índices introducidos en t=1,..,T, actualizando de forma continua la tecnología de referencia conllevaría el que no se verificase tal propiedad aunque esta discusión se reserva a la sección 3.4 donde se aborda esta cuestión con detenimiento.

Con relación a la propiedad de proporcionalidad, las funciones de distancia resultan homogéneas en la dimensión en la que están definidas, D.3a en la de productos y D.3.b en la de factores, aunque no lo son en el vector de factores –función de distancia de *outputs*–, productos –*inputs*–, o simultáneamente –*graph*–. Así, al no verificarse estas propiedades –D.3a', D.3b' y D.3c'' en la sección 2.2.3–, cualquier variación en los vectores de factores y productos no conlleva una variación proporcional en la función de distancia, *i.e.* se observan rendimientos variables a escala. Esta ausencia de proporcionalidad se traduce en que los índices basados en estas funciones de distancia no verifican tal propiedad. Así, los índices de productos $TT_O^{0,1}$ y $ST_O^{0,1}$ no son homogéneos de grado uno en x^t y menos uno en x^{t+1}, mientras $TT_I^{0,1}$ y $ST_I^{0,1}$, no lo son respecto a y^t e y^{t+1} y, finalmente, los tecnológicos, $TT_T^{0,1}$ y $ST_T^{0,1}$, no son homogéneos en magnitud alguna. Por tanto, se puede concluir que $TT_d^{0,1}$ y $ST_d^{0,1}$, d=O,I,T, no satisfacen la propiedad de proporcionalidad. Respecto a la propiedad de separabilidad, al no verificarse las condiciones de homogeneidad lineal y homoteticidad simultánea que implican D.4, estos índices no pueden expresarse como razones entre funciones agregadoras de productos y factores.

Por el contrario los índices de Malmquist establecidos a partir de las funciones de distancia definidas sobre $\tilde{T}^t(x,y)$, que satisfacen las propiedades D.1–D.4, verifican el conjunto de propiedades previamente establecidas a excepción de aquella transitiva por verse la tecnología de referencia actualizada en períodos sucesivos. Es decir, $M_A^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)$ cumple los *tests* de identidad, monoticidad, proporcionalidad y separabilidad.

Con relación a la idoneidad tecnológica de los índices de Malmquist de la forma $\mathrm{TT}_d^{0,1}$, d=O,I,T, al estar basados sobre funciones de distancia que solo requieren la imposición de una estructura mínima bajo los axiomas T.1–T.7, no exigen restricción alguna sobre la características que tradicionalmente definen a la tecnología de producción. Sin embargo, el índice de rendimiento caracterizador de la variación en la productividad absoluta de los factores, $\mathrm{M}_{\Lambda}^{0}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right)$, impone condiciones más restrictivas sobre la tecnología, *i.e.* homogeneidad lineal y homoteticidad simultánea a través de T.8–T.9.

De esta forma se puede apreciar la relación de intercambio, o coste–beneficio, existente en la búsqueda de un índice de productividad que sea idóneo desde una perspectiva axiomática y tecnológica. Un índice definido sobre tecnologías que no imponen restricciones a priori no satisfará las propiedades de proporcionalidad y separabilidad. El hecho de que estas se verifiquen implican que la tecnología debe presentar homogeneidad lineal y homoteticidad simultánea algo que, en sí, implica fuertes restricciones sobre el proceso de producción –especialmente la última de ellas que, como ya se ha puesto de manifiesto al inicio del capítulo, se considera única y exclusivamente con objeto de poder representar a los índices como funciones agregadores de productos a factores pero sin que sea relevante a la hora de caracterizar su idoneidad axiomática–.

La discusión hasta ahora realizada de los índices de rendimiento productivo y su idoneidad se ha centrado en un plano teórico. Sin embargo, el desarrollo empírico de cualquier análisis exige la adopción de decisiones relacionadas con la modelización de la tecnología a través de técnicas de optimización que permitan calcular las funciones de distancia. Es en este estadio cuando resultaría posible imponer condiciones tales como la homogeneidad lineal –rendimientos a escala–, la propia homoteticidad –separabilidad–, o realizar estimaciones sin su imposición con objeto de contrastar estadísticamente –y a *posteriori*– su existencia. La discusión que surge en el momento de la definición empírica de la tecnología se postpone al próximo capítulo, donde se introducen las técnicas de optimización matemática conocidas como Análisis Envolvente de Datos empleadas en la presente investigación.

Abordadas las condiciones de idoneidad de los índices de rendimiento (3.2.7–8–9) y (3.2.10–11–12) relativos a las variaciones en la productividad absoluta de los factores podemos proseguir introduciendo las definiciones relativas a la productividad óptima de los factores.

3.2.3 Indices de cambio técnico, $TC_d^{t,t+1}$, d=O,I,T

En la exposición del marco analítico adoptado para evaluar el rendimiento productivo de las actividades se ha introducido, de forma intuitiva, el concepto de variación en la productividad óptima de los factores como el cambio existente en las máximas producciones medias representativas de la escala óptima de producción en cada período. Tal variación puede descomponerse de forma excluyente en un componente de cambio técnico que determina, para una escala de operaciones de referencia, las variaciones acontecidas en el subconjunto eficiente o frontera de producción, y en otro de escala que muestra las variaciones en la divergencia existente entre el rendimiento obtenido en tal frontera y aquel presente en el óptimo de máxima productividad. Al igual que en el caso de los índices de Malmquist definidos en (3.2.7–8–9), es posible recurrir al concepto de función de distancia con objeto de definir un índice de Malmquist que se corresponde con el cambio técnico. Con objeto de establecer esta magnitud se recurre a funciones de distancia definidas sobre $T^t(x,y)$ y $T^{t+1}(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
M_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0) &= \frac{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)} = TC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \\
M_I^{0,1}(x_i^0,y_i^0) &= \frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)} = TC_I^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \\
M_T^{0,1}(x_i^0,y_i^0) &= \frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)} = TC_T^{0,1}(x_i^0,y_i^0)
\end{aligned}
\qquad (3.2.16\text{-}17\text{-}18)
$$

El índice $M_d^{0,1}(x_i^0,y_i^0)$, d = O,I,T, refleja la variación en la frontera de producción acontecida en la escala de producción representada por (x^0_i, y^0_i). Centrándonos en la dimensión de productos, el resultado numérico, $M_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \gtreqless$

1, depende de la desigualdad $D^0_O(x^0_i,y^0_i) \gtreqless D^1_O(x^0_i,y^0_i)$. Si la distancia de (x^0_i,y^0_i) a la frontera de producción en $t = 1$, $f^1(x)\,|\,x_i^0$, es superior a la existente en $t = 0$, $f^0(x)\,|\,x_i^0$, existe progreso técnico mientras que si la distancia permanece constante, la frontera de producción no se ha visto alterada; finalmente, en caso de que sea inferior, el potencial de producción se habría visto reducido –ver el gráfico 1.1.9 en el primer capítulo para una ilustración del primer caso–. Al igual que en los índices anteriores, la magnitud del cambio técnico puede ser diferente a la establecida en (3.2.16–17–18), al considerar como escala de referencia la observación en $t =1$, (x^1_i,y^1_i). En tal caso, el resultado final de considerar ambas variaciones vendría determinado por la siguiente media geométrica:

$$
\begin{aligned}
M_O^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\frac{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2} = \\
&= \left[TC_O^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) \bullet TC_O^{0,1}\left(x_i^1,y_i^1\right)\right]^{1/2} = TC_O^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) \\
M_I^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2} = \\
&= \left[TC_I^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) \bullet TC_I^{0,1}\left(x_i^1,y_i^1\right)\right]^{1/2} = TC_I^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) \\
M_T^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2} = \\
&= \left[TC_T^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) \bullet TC_T^{0,1}\left(x_i^1,y_i^1\right)\right]^{1/2} = TC_T^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)
\end{aligned}
\qquad (3.2.19\text{-}20\text{-}21)
$$

3.2.4 El índice de variación en la productividad óptimas de los factores, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$

Con objeto de establecer una medida de cambio productivo en la tecnología, resulta factible ampliar el cambio técnico reflejado en (3.2.16–17–18) introduciendo las variaciones acontecidas entre el rendimiento productivo presente en las fronteras de producción dada la escala de operaciones y el óptimo tecnológico existente. Considerando al igual que en (3.2.16–17–18) la actividad de referencia (x^0_i,y^0_i), podemos establecer el siguiente índice de cambio productivo:

$$\begin{aligned} M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) &= \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)} = \frac{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)} = \\ &= TC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \bullet SC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0) = \\ &= \Delta OFP_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^0)^*\right]/h^0(x_i^0)^*}{J^1\left[g^1(y_i^0)^*\right]/h^1(x_i^0)^*}. \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Al igual que en los caso anteriores, $M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) \gtreqless 1$ identifica mejoras en la productividad máxima obtenida en los conjuntos de posibilidades de producción $T^0(x,y)$ y $T^1(x,y)$, siendo posible identificar en desarrollos aplicados que actividades lideran el cambio productivo reflejado en la escala óptima de producción, a través del valor que adoptan las funciones de distancia $D_{\hat{O}}^t(x_i^0,y_i^0)$, t = 0, 1. La interpretación de los términos de cambio técnico y de escala en los que se descompone $M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right)$, pone de manifiesto la evolución de los nuevos valores eficientes y óptimos respecto a las escalas de referencia de las actividades cuyo rendimiento se pretende evaluar. Así, valores de $TC_d^{0,1}(x_i^0,y_i^0)$ y $SC_d^{0,1}(x_i^0,y_i^0)$ superiores a la unidad ponen de manifiesto que, para la escala representada por (x^0_i,y^0_i), el diferencial de productividades ya sea entre fronteras eficientes –cambio técnico– o entre éstas y los óptimos existentes en ambos períodos –cambio de escala–, se ha incrementado. En el primer caso, este resultado implica que desde la perspectiva de la escala evaluada, ha existido progreso técnico al incrementarse la productividad –algo que deja en peor situación a la actividad (x^0_i,y^0_i), que opera con esa dotación de factores, al incrementar su ineficiencia técnica–. Así mismo, con relación al cambio de escala, el incremento del diferencial implica un alejamiento de la escala óptima desde un período al siguiente; es decir, $SC_i^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \gtreqless 1$ refleja el hecho de que se haya incrementado, permanecido constante o reducido la distancia entre las productividades en las fronteras eficientes para la escala de la unidad evaluada, (x_i^0,y_i^0), y el máximo de productividad representado por las escalas óptimas en $t = 0$ y $t = 1$. Adicionalmente, y para ambos índices, valores unitarios reflejan la ausencia de mejoras productivas mientras que valores inferiores a la unidad son reflejo de reducciones en los diferenciales de productividad.

La descomposición de la variación en la productividad óptima se encuentra condicionada por la escala de operaciones seleccionada. Considerando de nuevo la relación existente entre las funciones de distancia establecida en (2.2.28), se pueden definir los siguientes índices equivalentes de variación en la productividad óptima de los factores desde la perspectiva de los factores y tecnológica,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= \mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)^{-1} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)^{-1} = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^0)^*\right] / h^0(x_i^0)^*}{J^1\left[g^1(y_i^0)^*\right] / h^1(x_i^0)^*}, \\
\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} = \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} = \\
&= \mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)^{2} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)^{2} = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^0)^*\right] / h^0(x_i^0)^*}{J^1\left[g^1(y_i^0)^*\right] / h^1(x_i^0)^*}.
\end{aligned}
\tag{3.2.23-24}
$$

Estas caracterizaciones de la variación en la productividad óptima de los factores y su descomposición en cambio técnico y de escala considera como escala de referencia aquella presente en t=0, (x_i^0,y_i^0). Sin embargo resulta posible realizar este análisis considerando como valor de referencia la escala presente en t=1, (x_i^1,y_i^1). En tal caso, la media geométrica de (3.2.22–23–24) y su análogo en t+1 permite descomponer la eficiencia productiva en aquella técnica y de escala, tomando en consideración la escala productiva de la actividad evaluada en ambos períodos. Así, desde una perspectiva de productos se obtiene:

$$
\begin{aligned}
M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(\frac{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right) \bullet \left(\frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^1,y_i^1)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(TC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \bullet SC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\right) \bullet \left(TC_O^{0,1}(x_i^1,y_i^1) \bullet SC_O^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\right)\right]^{1/2} = \\
&= \left[TC_O^{0,1} \bullet SC_O^{0,1}\right]^{1/2} = \Delta OFP_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^0)^*\right]/h^0(x_i^0)^*}{J^1\left[g^1(y_i^0)^*\right]/h^1(x_i^0)^*}.
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

En aquella de factores:

$$
\begin{aligned}
M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\left[\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1} \bullet \left(\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)} \bullet \frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(TC_I^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \bullet SC_I^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\right)^{-1} \bullet \left(TC_I^{0,1}(x_i^1,y_i^1) \bullet SC_I^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\right)^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left(TC_I^{0,1} \bullet SC_I^{0,1}\right)^{-1} = \Delta OFP_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^0)^*\right]/h^0(x_i^0)^*}{J^1\left[g^1(y_i^0)^*\right]/h^1(x_i^0)^*},
\end{aligned} \tag{3.2.26}
$$

y, finalmente, el índice definido desde la perspectiva tecnológica resulta igual a:

$$
\begin{aligned}
M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\left[\frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} \bullet \left[\frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{2}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{2} \bullet \left(\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)} \bullet \frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{2}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\left(TC_T^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \bullet SC_T^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\right)^{2} \bullet \left(TC_T^{0,1}(x_i^1,y_i^1) \bullet SC_T^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\right)^{2}\right]^{1/2} = \\
&= \left(TC_T^{0,1} \bullet SC_T^{0,1}\right)^{2} = \Delta OFP_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^0)^*\right]/h^0(x_i^0)^*}{J^1\left[g^1(y_i^0)^*\right]/h^1(x_i^0)^*}.
\end{aligned} \tag{3.2.27}
$$

Al igual que en los casos (3.2.22–23–24), $M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) \gtreqless 1$ identifica mejoras en la productividad máxima obtenida en los conjuntos óptimos de posibilidades de producción de $T^0(x,y)$ y $T^1(x,y)$, siendo factible descomponer tal variación en la componente de cambio técnico, $TC_d^{0,1}$ y de escala, $SC_d^{0,1}$, d=O,I,T.

3.2.4.1 La idoneidad del índice de variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$

Al igual que en la sección 3.2.2.1, resulta posible determinar la idoneidad de los índices representativos del cambio técnico, $TC_d^{0,1} = M_d^{0,1}(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1)$, (3.2–19–20–21), d=O,I,T, del cambio de escala $SC_d^{0,1}$, y la propia variación en la productividad óptima, $M_P^{0,1}(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1)$, considerando las propiedades de las funciones de distancia que los conforman.

Desde una perspectiva axiomática, al estar las funciones de distancia que integran $TC_d^{0,1}$ y $SC_d^{0,1}$, d=O,I,T, definidas sobre $T^t(x,y)$ y ser homólogas a (2.2.1–2) y (2.2.5), los índices satisfacen la propiedad de identidad, D.1.c, y monoticidad, D.2. pero no así la de proporcionalidad, D.3.a', D.3.b' y D.3.c', o separabilidad, D.4. Así, al igual que en los casos de los índices determinantes de la transformación técnica y de escala, $TT_d^{0,1}$ y $ST_d^{0,1}$, $TC_d^{0,1}$ y $TS_d^{0,1}$ satisfacen las propiedades de identidad y monoticidad pero no las restantes. Frente a esta situación, el índice $M_P^{0,1}(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1)$ satisface las propiedades seleccionadas para establecer la idoneidad de un índice de rendimiento productivo al observar las funciones de distancia que lo definen las propiedades D.1–D.3, así como D.4 con objeto de representar al índice como razón de una función agregadora de productos a una de factores, *i.e.* las funciones de están definidas sobre $\hat{T}^t(x,y)$.

Desde una perspectiva tecnológica, los índices $TC_d^{0,1}$, d=O,I,T, exigen únicamente T.1–T.7 para estar definidas por lo que la tecnología de producción resulta ciertamente laxa y no impone restricciones adicionales sobre el proceso productivo. Por el contrario, el índice $M_P^{0,1}(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1)$ implica la presencia de homogeneidad lineal de primer grado –rendimientos constantes a escala–, T.8, y de homoteticidad simultánea –separabilidad–, T.9, imponiendo condiciones restrictivas sobre la tecnología, $\hat{T}^t(x,y)$.

3.2.5 El índice de variación en la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$

Una vez presentados los índices de variación en las productividades absolutas y óptimas, que determinan el modelo de evaluación del rendimiento productivo recogido en (1.1.22) y el gráfico 1.2.1, es posible caracterizar el rendimiento de una observación a través de las variaciones en la productividad relativa de los factores o eficiencia productiva, $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta PE_i^{t,t+1}$. Tal variación informa sobre la evolución en el rendimiento de una actividad respecto a aquella establecida por las escalas óptimas de producción, *i.e.* la razón entre la variación en la productividad absoluta y óptima, y así, sobre la situación final en la que se encuentra una actividad en términos de eficiencia productiva en la transición entre dos períodos temporales.

Atendiendo a la definición de la variación en la productividad relativa de los factores, el índice de Malmquist que refleja tal magnitud se corresponde con la razón entre aquel representativo de la variación en la productividad absoluta, (3.2.13–14–15), y óptima, (3.2.25–26–27) –pudiéndose así mismo considerar la media geométrica de tales índices–. Desde la perspectiva de productos el índice de Malmquist de variación en la productividad relativa viene establecido por:

$$
\begin{aligned}
&M_R^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\\
&=\left[\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{1/2}\Big/\left[\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2}=\\
&=\left[\left(\frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right)\bullet\left(\frac{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)\right]^{1/2}\Big/\\
&\Big/\left[\left(\frac{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)\bullet\left(\frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)\right]^{1/2}=\\
&=\left[\left(TT_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet ST_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)\bullet\left(TT_O^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet ST_O^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)\right]^{1/2}\Big/\\
&\Big/\left[(TC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\bullet SC_O^{0,1}(x_i^0,y_i^0))\bullet(TC_O^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\bullet SC_O^{0,1}(x_i^1,y_i^1))\right]^{1/2}=\\
&=(TT_O^{0,1}\bullet ST_O^{0,1})/(TC_O^{0,1}\bullet SC_O^{0,1})=\Delta AFP_i^{0,1}/\Delta OFP_i^{0,1}=\\
&=\Delta RFP_i^{0,1}=\frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right]/h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right]/h^t(x_i^0)}\Big/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^1\left[g^1(y_i^t)^*\right]/h^1(x_i^t)^*},\ t=0,1.
\end{aligned}
$$

(3.2.28)

Desde una perspectiva de factores, el índice se corresponde con:

$$
\begin{aligned}
&M_R^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\\
&=\left[\left[\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\bullet\left[\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\right]^{1/2}\Big/\left[\left[\frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\bullet\left[\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{-1}\right]^{1/2}=\\
&=\left[\left(\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1}\bullet\left(\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\Big/\\
&\Big/\left[\left(\frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1}\bullet\left(\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}\bullet\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}=\\
&=\left[\left(TT_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet ST_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^{-1}\bullet\left(TT_I^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet ST_I^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^{-1}\right]^{1/2}\Big/\\
&\Big/\left[(TC_I^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\bullet SC_I^{0,1}(x_i^0,y_i^0))^{-1}\bullet(TC_I^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\bullet SC_I^{0,1}(x_i^1,y_i^1))^{-1}\right]^{1/2}=\\
&=(TT_I^{0,1}\bullet ST_I^{0,1})^{-1}/(TC_I^{0,1}\bullet SC_I^{0,1})^{-1}=\Delta AFP_i^{0,1}/\Delta OFP_i^{0,1}=\\
&=\Delta RFP_i^{0,1}=\frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right]/h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right]/h^t(x_i^0)}\Big/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^1\left[g^1(y_i^t)^*\right]/h^1(x_i^t)^*},\ t=0,1.
\end{aligned}
$$

(3.2.29)

mientras que, finalmente, aquel tecnológico viene determinado por:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\mathrm{M}_{A}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/\mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\\
&=\left[\left[\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\right]^{1/2}/\left[\left[\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^1,y_i^1)}\right]^2\right]^{1/2}=\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right)^2\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right)^2\right]^{1/2}/\\
&/\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right)^2\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^1,y_i^1)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{T}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{T}^{1}(x_i^1,y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2}=\\
&=\left[\left(\mathrm{TT}_{T}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet\mathrm{ST}_{T}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^2\bullet\left(\mathrm{TT}_{T}^{1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet\mathrm{ST}_{T}^{1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^2\right]^{1/2}/\\
&/\left[\left(\mathrm{TC}_{T}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\bullet\mathrm{SC}_{T}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\right)^2\bullet\left(\mathrm{TC}_{T}^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\bullet\mathrm{SC}_{T}^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\right)^2\right]^{1/2}=\\
&=(\mathrm{TT}_{T}^{0,1}\bullet\mathrm{ST}_{T}^{0,1})^2/(\mathrm{TC}_{T}^{0,1}\bullet\mathrm{SC}_{T}^{0,1})^2=\Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}/\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}=\\
&=\Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1}=\frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right]/h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right]/h^t(x_i^0)}/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^1\left[g^1(y_i^t)^*\right]/h^1(x_i^t)^*},t=0,1.
\end{aligned}
\tag{3.2.30}
$$

Si $\mathrm{M}_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0x_i^1,y_i^1\right)$ resulta superior a la unidad, la actividad ha experimentado una variación positiva en su eficiencia productiva, superando la variación de su productividad absoluta a la acontecida en las escalas óptimas de producción, *i.e.* la actividad mejora su productividad relativa. Por el contrario si $\mathrm{M}_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0x_i^1,y_i^1\right)$ es igual a la unidad, la magnitud del cambio es idéntica y si resulta inferior, la actividad presenta una variación en la productividad absoluta inferior a las experimentadas por los óptimos.

Tal como se puede apreciar en (3.2.28–29–30), el índice de variación en la productividad relativa, $\mathrm{M}_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0x_i^1,y_i^1\right)$, puede descomponerse en los agregados de transformación técnica y de escala: $\mathrm{TT}_{d}^{0,1}$ y $\mathrm{ST}_{d}^{0,1}$, d=O,I,T, que reflejan el índice de variación en la productividad absoluta, $\Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}$, y aquellos de cambio técnico y de escala: $\mathrm{TC}_{d}^{0,1}$ y $\mathrm{SC}_{d}^{0,1}$, d=O,I,T, que reflejan la variación en la productividad óptima, $\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}$. La posibilidad de comparar la evolución relativa de ambos agregados puede ser analizada de forma equivalente si consideramos la equivalencia existente entre las variaciones en la productividad relativa de los factores y en la eficiencia productiva, $\Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1}=\Delta\mathrm{PE}_i^{0,1}$.

3.2.6 Los índices de variación en la eficiencia técnica y de escala, $\Delta TE_d^{t,t+1}$ y $\Delta SE_d^{t,t+1}$

Atendiendo a la definición realizada de variación en la eficiencia productiva, $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta PE_i^{t,t+1} = \Delta TE_d^{t,t+1} \cdot \Delta SE_d^{t,t+1}$, d=O,I,T, los índices de Malmquist (3.2.28–29–30) pueden expresarse de forma equivalente por:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right) \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)\right]^{1/2} \bullet \\
&\bullet \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right) \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)\right]^{1/2} = \\
&= \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \\
&= (\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0,1}/\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) \bullet (\mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0,1}/\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) = \Delta \mathrm{TE}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \Delta \mathrm{SE}_{\mathrm{O}}^{0,1} = \Delta \mathrm{PE}_i^{0,1} = \Delta \mathrm{RFP}_i^{0,1},
\end{aligned}
\tag{3.2.31}
$$

aquel definido en la dimensión de productos;

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) &= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1} \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2} \bullet \\
&\bullet \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1} \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2} = \\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= (\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0,1}/\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0,1})^{-1} \bullet (\mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0,1}/\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1})^{-1} = \Delta \mathrm{TE}_{\mathrm{I}}^{0,1} \bullet \Delta \mathrm{SE}_{\mathrm{I}}^{0,1} = \mathrm{PE}_i^{0,1} = \Delta \mathrm{RFP}_i^{0,1},
\end{aligned}
\tag{3.2.32}
$$

en la dimensión de factores y, finalmente,

$$M_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)= \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^2 / \left(\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2}\bullet$$

$$\bullet\left[\left(\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^2 / \left(\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2} = \tag{3.2.33}$$

$$=\left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\bullet\left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2=\left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2=$$

$$=(TT_T^{0,1}/TC_T^{0,1})^2\bullet(ST_T^{0,1}/SC_T^{0,1})^2=\Delta TE_T^{0,1}\bullet\Delta SE_T^{0,1}=\Delta PE_i^{0,1}=\Delta RFP_i^{0,1},$$

en la tecnológica.

Así, las variaciones en la eficiencia productiva que se corresponden con la capacidad de las actividades para mejorar su rendimiento absoluto respecto al óptimo en la transición de t=0 a t=1, pueden descomponerse en un término de cambio en la eficiencia técnica, $\Delta TE_d^{0,1}$, y de escala, $\Delta SE_d^{0,1}$, d=O,I,T. Estos componentes reflejan la situación final en términos de eficiencia productiva en la que permanece la actividad evaluada tras las variaciones acontecidas en su propio proceso productivo y la tecnología. En el caso de la variación en la eficiencia técnica desde la dimensión de productos, $\Delta TE_O^{0,1} = D_O^1(x_i^1,y_i^1)/D_O^0(x_i^0,y_i^0)$, pudiéndose apreciar como tal componente se define como la razón de funciones de distancia *contemporáneas*, *i.e.* definidas respecto a los tecnologías existentes en ambos períodos. Iguales comentarios pueden realizarse respecto a la situación relativa final en términos de eficiencia de escala, $\Delta SE_O^{0,1} = D_{\bar{O}}^1(x_i^1,y_i^1)/D_{\bar{O}}^0(x_i^0,y_i^0)$.

Dado que cada uno de estos términos puede así mismo descomponerse en los elementos de transformación y cambio técnico y de escala: $TT_d^{0,1}$, $ST_d^{0,1}$, $TC_d^{0,1}$ y $SC_d^{0,1}$, d=O,I,T, es posible interpretar las situaciones relativas finales de eficiencia de acuerdo a la evolución comparada de estos términos. Considerando que $\Delta TE_d^{0,1} = TT_d^{0,1}/TC_d^{0,1}$, d=O,I,T, la variación en la eficiencia técnica relaciona las posibles variaciones en la transformación técnica respecto a un único subconjunto eficiente ó frontera de referencia, $TT_d^{0,1}$, con las variaciones experimentadas por ese mismo subconjunto eficiente, $TC_d^{0,1}$. Así, suponiendo que una actividad mejora su productividad absoluta respecto al subconjunto eficiente en t=0, $TT_d^{0,1}>1$, y contemporáneamente, tal referente mejora la productividad obtenida en igual proporción en t=1, $TC_d^{0,1}>1$, la situación relativa permanecerá finalmente inalterada, $\Delta TE_d^{0,1} = TT_d^{0,1}/TC_d^{0,1} = 1$ –nótese que la actividad de referencia en t=0 y t=1 constituye el nexo de unión entre ambas comparaciones–. En términos de las funciones de distancia que caracterizan estos componentes se obtiene:

$$\Delta TE_O^{0,1} = \frac{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} = TT_O^{0,1}/TC_O^{0,1} = \left[\left(\frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)}\right) \Big/ \left(\frac{D_O^0(x_i^0,y_i^0)}{D_O^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}\right)\right]^{1/2},$$

$$\Delta TE_I^{0,1} = \left[\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \left(TT_I^{0,1}/TC_I^{0,1}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1} \Big/ \left(\frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2},$$

$$\Delta TE_T^{0,1} = \left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} = \left(TT_T^{0,1}/TC_T^{0,1}\right)^{2} = \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{2} \Big/ \left(\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{2}\right]^{1/2} \quad (3.2.34\text{-}35\text{-}36)$$

Así mismo, es posible establecer un razonamiento análogo respecto a la variación en la eficiencia de escala, $\Delta SE_d^{0,1} = ST_d^{0,1}/SC_d^{0,1}$, d=O,I,T, pero considerando como subconjunto de referencia aquel óptimo reflejado por las escalas que generan la mayor productividad. Si en esta ocasión la actividad evaluada mejora su escala de producción respecto al subconjunto óptimo existente en t=0, $ST_d^{0,1}>1$, y, a su vez esta escala de referencia óptima en t=0 resulta subóptima respecto a aquella óptima en t=1 en igual proporción a la mejora original de escala de la actividad evaluada, $SC_d^{0,1}>1$, entonces la situación relativa final permanecerá inalterada, $\Delta SE_d^{0,1} = ST_d^{0,1}/SC_d^{0,1} = 1$. En términos de las funciones de distancia que caracterizan estos componentes, y considerando de nuevo como tecnología y actividad de referencia las observadas en t=0:

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathrm{SE}_{\mathrm{O}}^{0,1} &= \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} = \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0,1} / \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1} = \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right) / \left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{1}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}\right)\right]^{1/2}, \\
\Delta \mathrm{SE}_{\mathrm{I}}^{0,1} &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \left(\mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0,1} / \mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1}\right)^{-1} = \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1} / \left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{1}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{I}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}, \\
\Delta \mathrm{TE}_{\mathrm{T}}^{0,1} &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2} = \left(\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0,1} / \mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0,1}\right)^{2} = \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{1}(x_i^0,y_i^0)}\right)^{2} / \left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{1}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{T}}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}\right)^{2}\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

(3.2.37-38-39)

Atendiendo a las representaciones equivalentes de la variación en la productividad relativa de los factores, (3.2.28–29–30) y (3.2.31–32–33) así como los desagregados sobre los que se sustenta el modelo de evaluación del rendimiento productivo, se pueden resumir estas relaciones en una serie de equivalencias. Comenzando por la dimensión de productos se verifica que:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) / \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) = \\
&\quad = \left[\left(\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right) \bullet \left(\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)\right]^{1/2} / \\
&\quad / \left[\left(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0) \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\right) \bullet \left(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1}(x_i^1,y_i^1) \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\right)\right]^{1/2} = \\
&\quad = (\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0,1}) / (\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) = \Delta \mathrm{AFP}_i^{0,1} / \Delta \mathrm{OFP}_i^{0,1} = \\
&\quad = (\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0,1} / \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) \bullet (\mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0,1} / \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) = \Delta \mathrm{TE}_i^{0,1} \bullet \Delta \mathrm{SE}_i^{0,1} = \\
&\quad = \Delta \mathrm{PE}_i^{0,1} = \Delta \mathrm{RFP}_i^{0,1} = \frac{J^t\left[g^t(y_i^1)\right] / h^t(x_i^1)}{J^t\left[g^t(y_i^0)\right] / h^t(x_i^0)} \Big/ \frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right] / h^0(x_i^t)^*}{J^1\left[g^1(y_i^t)^*\right] / h^1(x_i^t)^*}, t = 0,1,
\end{aligned}
$$

(3.2.40)

mientras que si se elige la dimensión de factores como relevante, se observa:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/\,\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\\
&=\left[\left(\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^{-1}\bullet\left(\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^{-1}\right]^{1/2}/\\
&/\left[(\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0))^{-1}\bullet(\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1}(x_i^1,y_i^1))^{-1}\right]^{1/2}=\\
&=(\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0,1}\bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0,1})^{-1}/(\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0,1}\bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1})^{-1}=\Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}/\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}=\\
&=(\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0,1}/\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0,1})^{-1}\bullet(\mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0,1}/\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0,1}))^{-1}=\Delta\mathrm{TE}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{SE}_i^{0,1}=\\
&=\Delta\mathrm{PE}_i^{0,1}=\Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1}=\frac{J^t\left[g^t(y_i^1)/h^t(x_i^1)\right]}{J^t\left[g^t(y_i^0)/h^t(x_i^0)\right]}/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*/h^0(x_i^t)^*\right]}{J^1\left[g^1(y_i^t)^*/h^1(x_i^t)^*\right]},\ t=0,1.
\end{aligned}
$$

(3.2.41)

Por último, centrándonos en aquella tecnológica, estas relaciones se expresan por:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\\
&=\left[\left(\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^2\bullet\left(\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^1\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)\right)^2\right]^{1/2}/\\
&/\left[(\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0)\bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0,1}(x_i^0,y_i^0))^2\bullet(\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0,1}(x_i^1,y_i^1)\bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0,1}(x_i^1,y_i^1))^2\right]^{1/2}=\\
&=(\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0,1}\bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{T}})^2/(\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0,1}\bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0,1})^2=\Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}/\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}=\\
&=(\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0,1}/\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0,1})^2\bullet(\mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^{0,1}/\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0,1}))^2=\Delta\mathrm{TE}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{SE}_i^{0,1}\\
&=\Delta\mathrm{PE}_i^{0,1}=\Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1}=\frac{J^t\left[g^t(y_i^1)/h^t(x_i^1)\right]}{J^t\left[g^t(y_i^0)/h^t(x_i^0)\right]}/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*/h^0(x_i^t)^*\right]}{J^1\left[g^1(y_i^t)^*/h^1(x_i^t)^*\right]},\ t=0,1.
\end{aligned}
$$

(3.2.42)

3.2.6.1 La idoneidad del índice de variación en la productividad relativa de los factores, $\Delta\mathrm{RFP}_i^{t,t+1}$

Es posible concluir la presente sección haciendo referencia a las propiedades satisfechas por el índice de variación en la productividad relativa de los factores, $\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0 x_i^1,y_i^1\right)$, tanto desde una perspectiva axiomática como tecnológica. Las propiedades que verifica el índice pueden deducirse de la discusión realizada sobre los índices que lo conforman: el índice de variación en la productividad absoluta, $\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)$, y óptima, $\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)$. Como agregado satisface las propiedades de identidad, monoticidad, proporcionalidad y separabilidad aunque los términos en los que se descompone: $TT_d^{0,1}$, $ST_d^{0,1}$, $TC_d^{0,1}$ y $SC_d^{0,1}$, d=O,I,T, solo satisfacen las dos primeras propiedades por estar establecidos en términos de funciones de distancia definidas sobre $T^t(x,y)$. Dado que los índices de variación en la eficiencia técnica, $\Delta TE_d^{t,t+1}$, y de escala, $\Delta SE_d^{t,t+1}$, se componen de tales elementos, éstos tampoco verifican las propiedades de proporcionalidad y separabilidad. Respecto a las restricciones que $M_R^{0,1}(x_i^0,y_i^0 x_i^1,y_i^1)$ impone sobre la tecnología, éstas se corresponden con las analizadas de homogeneidad lineal de primer grado –rendimientos constantes a escala–, T.8, y homoteticidad simultánea –separabilidad–, T.9.

3.3 La descomposición del índice de productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$

La presente sección tiene como objetivo integrar, dentro del marco analítico propuesto en la presente investigación, las distintas descomposiciones propuestas del índice $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ de variación en la productividad absoluta de los factores. El objetivo es mostrar la capacidad que tienen estas descomposiciones alternativas para mostrar toda la información relevante que caracteriza el rendimiento productivo de las actividades. El punto de partida lo constituye la descomposición contemporáneamente propuesta por Simar y Wilson (1998a) y Zofío y Lovell (1998), y que es posible derivar del modelo original recogido en los índices (3.2.40–41–42). Esta descomposición, comparada con aquellas publicadas en el *American Economic Review* por Färe *et al.* (1994b) y Ray y Desli (1997), facilita información completa desde el punto de vista del modelo de evaluación del rendimiento y, así mismo, permite integrarlas en un único marco analítico[21].

[21] La posibilidad de definir descomposiciones alternativas del índice $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ de Malmquist no finaliza con estas propuestas. Diewert (1992b), inspirado por Hicks (1961) y Moorsten (1961), sugiere la utilización de ratios de índices de Malmquist de productos y factores. Esta aproximación, que ha sido desarrollada por Bjurek (1996) y considerada en Grifell–Tatjé y Lovell (1999a), se corresponde con la combinación de los índices (3.2.7–8) previamente establecidos.

La motivación detrás de cualquier descomposición del índice de variación en la productividad absoluta de los factores estriba en la identificación de las fuentes que contribuyen a las alteraciones en el rendimiento productivo. Fundamentalmente, aquellas atribuibles a las variaciones en la tecnología –cambio técnico y de escala– y que, por encontrarse al alcance de las actividades productivas, deben ser aprovechadas por éstas si no quieren sufrir perdidas de eficiencia respecto a las actividades que lideran los procesos de cambio tecnológico. De acuerdo al modelo propuesto, la capacidad para igualar las variaciones en la tecnología por parte de las actividades se realiza a través de sus procesos de transformación tecnológica –técnica y de escala–.

Resulta posible iniciar la exposición relativa a la descomposición del índice de Malmquist de variación en la productividad absoluta $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, partiendo del concepto sobre el que se sustenta el modelo de evaluación del rendimiento, $\Delta RFP_i^{t,t+1}$. Dado que $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta AFP_i^{t,t+1} \ / \ \Delta OFP_i^{t,t+1}$, entonces $\Delta AFP_i^{t,t+1} = \Delta OFP_i^{t,t+1} \cdot \Delta RFP_i^{t,t+1} = (TC_d^{t,t+1} \cdot SC_d^{t,t+1}) \cdot (TT_d^{t,t+1}/TC_d^{t,t+1}) \cdot (ST_d^{t,t+1}/SC_d^{t,t+1}) = (TC_d^{t,t+1} \cdot TT_d^{t,t+1}/TC_d^{t,t+1}) \cdot (SC_d^{t,t+1} \cdot ST_d^{t,t+1}/SC_d^{t,t+1}) = (TC_d^{t,t+1} \cdot \Delta TE_d^{t,t+1}) \cdot (SC_d^{t,t+1} \cdot \Delta SE_d^{t,t+1})$. Es decir, es posible expresar las variaciones en la productividad absoluta en términos de la evolución experimentada por los óptimos productivos –contribución potencial que realiza la tecnología a través del cambio técnico y de escala– y la variación *relativa* de la eficiencia productiva, *i.e.* la capacidad de la actividad evaluada de igualar tal variación potencial a través de su transformación tecnológica. Esta última transformación se corresponde finalmente con el índice $\Delta AFP_i^{t,t+1} = TT_i^{t,t+1} \cdot ST_i^{t,t+1}$ definido en la sección precedente, véase (3.2.13–14–15).

Realizadas estas consideraciones, es posible reexpresar (3.2.28–29–30) y (3.2.31–32–33) con objeto de establecer la descomposición de la variación en la productividad absoluta de los factores en los términos establecidos por Zofío y Lovell (1998). Considerando como dimensión relevante aquella de productos, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{A}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet \mathrm{M}_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)= \\
&= \mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{A}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/\,\mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\right)= \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1} = \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}/\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} = \\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{O}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{O}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{O}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{O}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2}\bullet\frac{\mathrm{D}_{O}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{O}^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \\
&= (\mathrm{TC}_O^{0,1}\bullet\mathrm{TT}_O^{0,1}/\mathrm{TC}_O^{0,1})\bullet(\mathrm{SC}_O^{0,1}\bullet\mathrm{ST}_O^{0,1}/\mathrm{SC}_O^{0,1}) = \\
&= (\mathrm{TC}_O^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{TE}_O^{0,1})\bullet(\mathrm{SC}_O^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{SE}_O^{0,1}) = \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{PE}_i^{0,1} = \\
&= \mathrm{TECHCH}_{FGNZ}\bullet\mathrm{EFFCH}_{FGNZ} = \mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet\mathrm{SC}_O^{0,1}\bullet\mathrm{SEFFCH} = \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}.
\end{aligned}
\tag{3.3.1}
$$

Desde la perspectiva de los factores:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{A}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet \mathrm{M}_{R}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)= \\
&= \mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{A}^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/\,\mathrm{M}_{P}^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\right)= \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1} = \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1}/\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} = \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{I}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{I}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{I}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{I}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{I}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{I}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{I}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{I}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{I}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{I}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{I}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{I}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\bullet \\
&\bullet\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\tilde{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{\mathrm{D}_{\tilde{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= (\mathrm{TC}_I^{0,1}\bullet\mathrm{TT}_I^{0,1}/\mathrm{TC}_I^{0,1})^{-1}\bullet(\mathrm{SC}_I^{0,1}\bullet\mathrm{ST}_I^{0,1}/\mathrm{SC}_I^{0,1})^{-1} = \\
&= ((\mathrm{TC}_I^{0,1})^{-1}\bullet\Delta\mathrm{TE}_I^{0,1})\bullet((\mathrm{SC}_I^{0,1})^{-1}\bullet\Delta\mathrm{SE}_I^{0,1}) = \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}\bullet\Delta\mathrm{PE}_i^{0,1} = \\
&= \mathrm{TECHCH}_{FGNZ}\bullet\mathrm{EFFCH}_{FGNZ} = \mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet(\mathrm{SC}_I^{0,1})^{-1}\bullet\mathrm{SEFFCH} = \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1},
\end{aligned}
\tag{3.3.2}
$$

y, finalmente, considerando la función de distancia tecnológica:

$$
\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet M_R^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)= \\
&= M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet\left(M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)/\,M_P^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\right)= \\
&= \Delta OFP_i^{0,1}\bullet\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1}\bullet\Delta AFP_i^{0,1}/\Delta OFP_i^{0,1} = \\
&= \left[\left(\frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{D_{\hat{T}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{T}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2 = \\
&= \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2\bullet \\
&\bullet\left[\left(\frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{T}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{T}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{D_{\hat{T}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{T}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^2 = \\
&= (TC_T^{0,1}\bullet TT_T^{0,1}/TC_T^{0,1})^2\bullet(SC_T^{0,1}\bullet ST_T^{0,1}/SC_T^{0,1})^2 = \\
&= ((TC_T^{0,1})^2\bullet\Delta TE_T^{0,1})\bullet((SC_T^{0,1})^2\bullet\Delta SE_T^{0,1}) = \Delta OFP_i^{0,1}\bullet\Delta PE_i^{0,1} = \\
&= TECHCH_{FGNZ}\bullet EFFCH_{FGNZ} = TECHCH\bullet PEFFCH\bullet(SC_T^{0,1})^2\bullet SEFFCH = \Delta AFP_i^{0,1}.
\end{aligned}
\tag{3.3.3}
$$

En estas formulaciones, la última línea establece la relación existente entre el modelo propuesto y la notación adoptada en Färe *et al.* (1997) y Ray y Desli (1997) con objeto de facilitar su comparación. Frente a la anterior caracterización de la productividad absoluta de los factores, Färe *et al.* (1989, 1994) establecen

$$
\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \left[\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right]^{1/2}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \\
&= \Delta OFP_i^{0,1}\bullet\Delta PE_i^{0,1} = TECHCH_{FGNZ}\bullet EFFCH_{FGNZ} = \Delta AFP_i^{0,1},
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

en la dimensión de productos,

$$
\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \left[\left(\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{D_{\hat{I}}^1(x_i^1,y_i^1)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= \Delta OFP_i^{0,1}\bullet\Delta PE_i^{0,1} = TECHCH_{FGNZ}\bullet EFFCH_{FGNZ} = \Delta AFP_i^{0,1},
\end{aligned}
\tag{3.3.5}
$$

en la dimensión de factores, y

$$M_A^{0,1}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) = \left[\left(\frac{D_\dagger^0(x_i^0, y_i^0)}{D_\dagger^1(x_i^0, y_i^0)} * \frac{D_\dagger^0(x_i^1, y_i^1)}{D_\dagger^1(x_i^1, y_i^1)}\right)^2\right]^{1/2} * \left[\frac{D_\dagger^1(x_i^1, y_i^1)}{D_\dagger^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^2 = \tag{3.3.6}$$
$$= \Delta OFP_i^{0,1} * \Delta PE_i^{0,1} = TECHCH_{FGNZ} * EFFCH_{FGNZ} = \Delta AFP_i^{0,1},$$

en la tecnológica.

Algunas apreciaciones resultan necesarias. En primer lugar, el término de cambio técnico, $TECHCH_{FGNZ}$, refleja las variaciones en las productividades óptimas, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$, y no el cambio técnico de acuerdo a la definición adoptada en el presente modelo y comúnmente aceptada en la literatura económica, $TC_i^{t,t+1}$. En segundo lugar, el término $EFFCH_{FGNZ}$ se corresponde con la variación en la productividad relativa de los factores o eficiencia productiva, $\Delta PE_i^{t,t+1} = \Delta RFP_i^{t,t+1}$. Este término informa sobre la capacidad de la actividad evaluada para alcanzar la escala óptima de producción donde se verifica la máxima productividad, *i.e.* la situación relativa final de la observación respecto al subconjunto óptimo de producción.

3.3.1 La crítica a la descomposición del índice $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ de Färe *et al.* (1989, 1994)

La formulación y descomposición inicialmente propuesta por Färe *et al.* (1989, 1994) ha encontrado oposición en la década de los noventa por dos razones fundamentales.

En primer lugar, y tal como se ha puesto de manifiesto en la sección precedente, supone un índice de variación en la productividad que impone restricciones sobre la tecnología. Al estar definidas las funciones de distancia que lo conforman sobre $\hat{T}^t(x,y)$, se exige que la tecnología verifique homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala–, T.8 y adicionalmente, si se desea que pueda expresarse como razón entre funciones agregadoras de productos y factores, que sea simultáneamente homotética –separable–, T.9 –si bien Färe *et al.* (1989, 1994) no imponen tal condición–.

Esta definición del índice no se corresponde con la inicialmente formulada por Caves *et al.* (1982a), (3.2.1–2–3) y (3.2.7–8–9), que no presupone tales restricciones por lo que numerosos autores consideran que el índice de variación en el rendimiento productivo no debe restringir la tecnología, *i.e.* debe corresponderse con al siguiente formulación –considerando como referencia la tecnología presente en $t=0$–:

$$
\begin{aligned}
M_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} = \frac{D_O^0(x_i^1,y_i^1)}{D_O^1(x_i^1,y_i^1)} \bullet \frac{D_O^1(x_i^1,y_i^1)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} \\
&= TT_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) = TC_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet \Delta TE_O^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right), \\
M_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)} = \frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)} \bullet \frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)} \\
&= TT_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) = TC_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet \Delta TE_I^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right), \\
M_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)} = \frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)} \bullet \frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)} \\
&= TT_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) = TC_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet \Delta TE_T^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right)
\end{aligned}
\qquad (3.3.7\text{-}8\text{-}9)
$$

Sin embargo, como se ha puesto de manifiesto, estos índices de rendimiento productivo no reflejan las variaciones en la productividad de los factores de acuerdo a las condiciones necesarias para que puedan interpretarse de tal forma –aproximación axiomática–. Definir índices de rendimiento como (3.3.7–8–9), donde la tecnología no verifica T.8 y T.9, tiene como consecuencia el que no se satisfagan las propiedades previamente consideradas de proporcionalidad y separabilidad, de modo que estos índices no son capaces de reflejar o incorporar las contribuciones que hace la variación en la escala de producción sobre el rendimiento productivo, haciéndoles sensibles a la dimensión elegida para el análisis –esta es pues la característica que permite identificar a un índice de rendimiento como medida adecuada de productividad–. Los primeros autores en poner esta situación de manifiesto han sido Grifell–Tatjé y Lovell (1995), quienes muestran la importancia de definir índices $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ si el objetivo es establecer una medida correcta de variación en la productividad. De esta forma, estos autores consolidan la definición del índice de Malmquist de Färe *et al.* (1989, 1994) frente a la original de Caves, Christensen y Diewert (1982a)[22].

Si bien existe un consenso respecto a la correcta definición del índice de Malmquist, habiendo finalizado la controversia existente sobre este punto, no es este el caso respecto a su descomposición. Tal como se ha defendido al inicio de la presente sección, el criterio elegido para caracterizar la idoneidad de una determinada descomposición del índice $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ de Malmquist se basa en que ésta sea capaz de identificar correctamente el cambio en la tecnología –técnico y de escala– y en la eficiencia productiva –técnica y de escala–. De acuerdo a las definiciones adoptadas de estos términos y la descomposición propuesta por Färe *et al.* (1989, 1994), (3.3.4–5–6), se puede comprobar como en el primer nivel de desagregación, $\Delta AFP_i^{t,t+1} = \Delta OFP_i^{t,t+1} \cdot \Delta PE_i^{t,t+1}$, los términos que recogen los cambios en la tecnología –variación en la productividad óptima, $\Delta OFP_i^{t,t+1}$– y de variación en la productividad relativa, $\Delta RFP_i^{t,t+1} = \Delta PE_i^{t,t+1}$, no permiten identificar la evolución del cambio técnico y de escala ni la contribución de las variaciones en la eficiencia técnica y de escala de producción –por estar éstas incorporadas en las formulaciones y no haberse hecho explícitas–. Sería necesario esperar un lustro hasta Färe *et al.* (1994b), para que esta crítica motivase a los autores a descomponer el término de variación en la eficiencia productiva, $\Delta PE_i^{t,t+1}$. Así, en una extensión de (3.3.4–5–6), estos autores proponen la siguiente descomposición:

$$
\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) &= \left[\frac{D_O^0(x_i^0, y_i^0)}{D_O^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_O^0(x_i^1, y_i^1)}{D_O^1(x_i^1, y_i^1)}\right]^{1/2} \bullet \frac{D_O^1(x_i^1, y_i^1)}{D_O^0(x_i^0, y_i^0)} = \\
&= \left[\frac{D_O^0(x_i^0, y_i^0)}{D_O^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_O^0(x_i^1, y_i^1)}{D_O^1(x_i^1, y_i^1)}\right]^{1/2} \bullet \frac{D_O^1(x_i^1, y_i^1)}{D_O^0(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_O^1(x_i^1, y_i^1)}{D_O^0(x_i^0, y_i^0)} \\
&= \Delta OFP_i^{0,1} \bullet \Delta PE_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \bullet \Delta TE_O^{0,1} \bullet \Delta SE_O^{0,1} = \\
&= TECHCH_{FGNZ} \bullet EFFCH_{FGNZ} = TECHCH_{FGNZ} \bullet PEFFCH \bullet SEFFCH = \Delta AFP_i^{0,1},
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

considerando como dimensión relevante la de productos;

[22] En el caso de un único producto y factor, los índices (3.2.1–2–3) de Caves *et al.* (1982a) no reflejan las variaciones en la productividad –producto medio– obtenidas por las actividades.

$$\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) &= \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^0, y_i^0)}{D_I^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_I^0(x_i^1, y_i^1)}{D_I^1(x_i^1, y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2} \bullet \left[\frac{D_I^1(x_i^1, y_i^1)}{D_I^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^0, y_i^0)}{D_I^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_I^0(x_i^1, y_i^1)}{D_I^1(x_i^1, y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2} \bullet \left[\frac{D_I^1(x_i^1, y_i^1)}{D_I^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_I^1(x_i^1, y_i^1)}{D_I^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} \\
&= \Delta OFP_i^{0,1} \bullet \Delta PE_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \bullet \Delta TE_I^{0,1} \bullet \Delta SE_I^{0,1} = \\
&= TECHCH_{FGNZ} \bullet EFFCH_{FGNZ} = TECHCH_{FGNZ} \bullet PEFFCH \bullet SEFFCH = \Delta AFP_i^{0,1},
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

respecto a la de factores y, finalmente,

$$\begin{aligned}
M_A^{0,1}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) &= \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^0, y_i^0)}{D_T^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^1, y_i^1)}{D_T^1(x_i^1, y_i^1)}\right)^{2}\right]^{1/2} \bullet \left[\frac{D_T^1(x_i^1, y_i^1)}{D_T^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{2} = \\
&= \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^0, y_i^0)}{D_T^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^1, y_i^1)}{D_T^1(x_i^1, y_i^1)}\right)^{2}\right]^{1/2} \bullet \left[\frac{D_T^1(x_i^1, y_i^1)}{D_T^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_T^1(x_i^1, y_i^1)}{D_T^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} \\
&= \Delta OFP_i^{0,1} \bullet \Delta PE_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \bullet \Delta TE_T^{0,1} \bullet \Delta SE_T^{0,1} = \\
&= TECHCH_{FGNZ} \bullet EFFCH_{FGNZ} = TECHCH_{FGNZ} \bullet PEFFCH \bullet SEFFCH = \Delta AFP_i^{0,1},
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

en la tecnológica.

La diferencia existente entre las formulaciones originales (3.3.4–5–6) y esta última propuesta radica en la descomposición de la variación en la productividad relativa de los factores o eficiencia productiva, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta PE_i^{0,1}$ –que refleja la variación en la situación relativa final en términos de las productividades óptimas–, en los elementos de eficiencia técnica *pura*, PEFFCH = $\Delta TE_d^{0,1}$, y de escala, SEFFCH $=\Delta SE_d^{0,1}$, d=O,I,T, –informando, una vez más, sobre la situación relativa final en la que queda la actividad desde ambas perspectivas–.

Al igual que en el caso anterior, resulta necesario hacer diversas apreciaciones. En primer lugar, al descomponer la variación en la eficiencia productiva en términos técnicos y de escala se refleja la situación relativa final en la que permanece la actividad, pero no la contribución absoluta que hace la variación en la escala de operaciones; es decir, respecto a (3.3.1–2–3), (3.3.10–11–12) obvia la información relativa a la transformación en el proceso productivo de la actividad que se establece en el modelo aquí propuesto, y que queda explícita a través de los términos introducidos, $\Delta\,\mathrm{AFP}_i^{0,1} = \mathrm{TT}_d^{0,1} \cdot \mathrm{ST}_d^{0,1}$, d=O,I,T. Este nivel adicional de descomposición permite caracterizar la aportación que la variación de la transformación tecnológica en términos técnicos, $\mathrm{TT}_d^{0,1}$ y de escala, $\mathrm{ST}_d^{0,1}$, tienen respecto a las tecnologías existentes en cada período. En segundo lugar, la propuesta de Färe *et al.* (1994b) no incide sobre el cambio en la tecnología, $\Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1}$, y, por tanto, las contribuciones que realiza el cambio técnico y de escala a las variaciones en las productividades óptimas: $\Delta\,\mathrm{OFP}_i^{0,1} = \mathrm{TC}_d^{0,1} \cdot \mathrm{SC}_d^{0,1}$ –considerando como escala de referencia aquella de la actividad evaluada–.

Así, se debe considerar que la descomposición que provee información completa respecto al proceso de variación del rendimiento productivo se basa en la definición del índice de productividad absoluta presente en (3.2.10–11–12), sección 3.2.3. En la dimensión de productos se observa:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) &= \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} = \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^1,y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \\
&= \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) = \\
&= \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^1)\right]/h^0(x_i^1)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^1)/h^0(x_i^1)}{g^0(y_i^0)/h^0(x_i^0)}.
\end{aligned}
\qquad (3.3.13)
$$

Este primer estadio, que permite identificar las contribuciones que la transformación técnica y de escala realizan a la productividad absoluta, puede expresarse de forma equivalente a través de (3.3.1–2–3):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1\right) \bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0,1}\left(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1\right) = \\
&\qquad = \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1\right) \bullet \left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) / \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0,1}\left(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1\right)\right) = \\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^0, y_i^0)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^1, y_i^1)}\right]^{1/2} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^0, y_i^0)} = \\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0, y_i^0)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1, y_i^1)}\right]^{1/2} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0, y_i^0)} \bullet \left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^0, y_i^0)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^1, y_i^1)}\right]^{1/2} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^0, y_i^0)} = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} \bullet \Delta\mathrm{RFP}_i^{0,1} = \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} \bullet \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1} / \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} = \\
&= (\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0,1} / \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) \bullet (\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0,1} / \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1}) = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_i^{0,1} \bullet \Delta\mathrm{PE}_i^{0,1} = (\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{O}}^{0,1}) \bullet (\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \Delta\mathrm{SE}_{\mathrm{O}}^{0,1}) = \\
&= \mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}} \bullet \mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}} = \mathrm{TECHCH} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \mathrm{SEFFCH} = \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1},
\end{aligned}
$$

(3.3.14)

de forma que (3.1.14) se amplia con objeto de introducir la información relativa a la variación en la productividad óptima de los factores. Resulta así que la descomposición ampliada propuesta por Färe *et al.* (1994b), (3.3.10–11–12), no refleja toda la información relativa a la variación en el rendimiento productivo y, por tanto, resulta parcial.

La problemática puesta de manifiesto hasta el momento llevaría a Ray y Desli (1997) a proponer su propia descomposición del índice $\Delta\mathrm{AFP}_i^{t,t+1}$. Comenzando por la dimensión de productos se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\tilde{\mathrm{O}}\mathrm{A}}^{0,1}\left(x_i^0, y_i^0, x_i^1, y_i^1\right) = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0, y_i^0)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1, y_i^1)}\right]^{1/2} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^1(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^0(x_i^0, y_i^0)} \bullet \left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^0(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^1, y_i^1)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^1(x_i^0, y_i^0)}\right]^{1/2} = \\
&= \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{O}}^{0,1} \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0,1} = \mathrm{TECHCH} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet \mathrm{SEFFCH}_{\mathrm{RD}} = \Delta\mathrm{AFP}_i^{0,1},
\end{aligned}
$$

(3.3.15)

mientras que con relación a la función de distancia de productos y tecnológica, se observan:

$$M_A^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\left[\left(\frac{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{-1}\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\bullet$$
$$\bullet\left[\left(\frac{D_I^0(x_i^1,y_i^1)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_I^1(x_i^1,y_i^1)}{D_I^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{-1}\right]^{1/2}=TC_I^{0,1}\bullet\Delta TE_I^{0,1}\bullet ST_I^{0,1}=$$
$$=TECHCH\bullet PEFFCH\bullet SEFFCH_{RD}=\Delta AFP_i^{0,1}\,, \qquad (3.3.16\text{-}17)$$

$$M_A^{0,1}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)=\left[\left(\frac{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}\right)^{2}\right]^{1/2}\bullet\left[\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2}\bullet$$
$$\bullet\left[\left(\frac{D_T^0(x_i^1,y_i^1)}{D_T^0(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{D_T^1(x_i^1,y_i^1)}{D_T^1(x_i^0,y_i^0)}\right)^{2}\right]^{1/2}=TC_T^{0,1}\bullet\Delta TE_T^{0,1}\bullet ST_T^{0,1}=$$
$$=TECHCH\bullet PEFFCH\bullet SEFFCH_{RD}=\Delta AFP_i^{0,1},$$

Esta formulación, pese a caracterizar el cambio técnico en la forma comúnmente aceptada en la literatura –en función de la escala de operaciones–, no considera relevante la variación en la productividad relativa de los factores o eficiencia productiva, $\Delta RFP_i^{0,1}=\Delta PE_i^{0,1}$, así como la descomposición de las productividades absolutas y óptimas: $\Delta AFP_i^{0,1}= TT_i^{0,1}\cdot ST_i^{0,1}$ y $\Delta OFP_i^{0,1}= TC_i^{0,1}\cdot SC_i^{0,1}$ –si bien la primera podría obtenerse a partir del término de eficiencia técnica dado que $\Delta TE_i^{0,1} = TT_i^{0,1}/TC_i^{0,1}$–. De esta forma, la descomposición (3.3.15–16–17) adolece, una vez más, de facilitar información parcial respecto a la variación en el rendimiento productivo y, con relación a las posibles alteraciones de escala, únicamente proporciona información sobre la transformación experimentada por la actividad, $SEFFCH_{RD} = ST_i^{t,t+1}$, sin detallar la posición relativa final en la que ésta permanece, $\Delta SE_i^{t,t+1}$.

Sería precisamente sobre estos dos términos alternativos de escala donde se centrarían los intercambios entre Färe *et al.* (1997) y Ray y Desli (1997), sin que estos autores fuesen capaces de identificar y lo más relevante, integrar, la información alternativa –pero complementaria– que sus respectivas descomposiciones ofrecen. Sin embargo, el modelo propuesto en esta investigación es capaz de interpretar cada uno los términos recogidos en las distintas propuestas e integrarlos en un único marco analítico[23].

3.4 La propiedad transitiva –circular– y los índices de Malmquist

La presentación metodológica realizada hasta el momento ha caracterizado la variación del rendimiento productivo considerando un par de períodos consecutivos. Sin embargo, en análisis empíricos donde se analizan series de datos a largo plazo es posible exigir una propiedad adicional, ya contemplada dentro de la aproximación axiomática, que permite determinar la idoneidad de los índices de productividad: la existencia de transitividad o circularidad, véase Frisch (1936).

Un índice de productividad, *e.g.* de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, verifica la propiedad de circularidad si en el caso de tres períodos consecutivos se verifica que $\Delta AFP_i^{t,t+2} = \Delta AFP_i^{t,t+1} \cdot \Delta AFP_i^{t+1,t+2}$; es decir, resulta posible descomponer o agregar de forma consistente la evolución de la productividad en índices referidos a subperíodos sucesivos –de forma análoga para los índices correspondientes a las variaciones en la productividad óptima y relativa: $\Delta OFP_i^{t,t+1}$ y $\Delta RFP_i^{t,t+1}$–. La formulación de los índices de variación en la productividad absoluta, (3.2.10–11–12), óptima, (3.2.22–23–24) y relativa, (3.2.28–29–30), no satisface la propiedad transitiva al actualizarse de forma continúa la tecnología de referencia respecto a la cual se evalúa el rendimiento productivo, *i.e.* el período base de referencia no resulta único, véanse Berg *et al.* (1992) y Førsund (1993).

---

[23] Antes de concluir la presente sección es posible hacer referencia a la formulación de Grifell–Tatjé y Lovell (1999a) –ya propuesta en un documento de trabajo en 1994– que resulta análoga a la presentada por Ray y Desli (1997), (3.3.15–16–17), si bien el término de variación en la eficiencia de escala es obtenido de forma equivalente a través de:

$$\mathrm{SEFFCH}_{GL} = \left[\frac{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^1,y_i^0)}{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^0,y_i^0)} \cdot \frac{D_{\bar{O}}^{1}(x_i^1,y_i^1)}{D_{\bar{O}}^{1}(x_i^0,y_i^1)}\right]^{1/2} = \mathrm{ST}_O^{0,1},$$

verificándose que $\mathrm{SEFFCH}_{RD} = \mathrm{SEFFCH}_{GL} = \mathrm{ST}_i^{t,t+1}$.

Con objeto de que los índices de productividad previamente definidos verifiquen la propiedad transitiva resulta necesario elegir una tecnología de referencia que sirva de período base para acometer las comparaciones de rendimiento productivo, *i.e.* el periodo base de referencia ha de permanecer inalterado.

3.4.1 El índice transitivo de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta\mathrm{AFP}_{b,i}^{t,t+1}$

Realizadas estas consideraciones es posible redefinir los índices de productividad absoluta de los factores introducidos en la sección 3.2 con objeto de que satisfagan la propiedad transitiva. Si se consideran los índices de variación de la productividad entre los períodos t y t+1, (3.2.10–11–12), y se establece como período base aquel inicial, b=0, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)&=\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}=\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\\
&=\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)\bullet\mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)=\\
&=\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^{t+1})\right]/h^0(x_i^{t+1})}{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}=\frac{g^0(y_i^{t+1})/h^0(x_i^{t+1})}{g^0(y_i^t)/h^0(x_i^t)},
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

en la dimensión de productos,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)&=\left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}=\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}\\
&=\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)^{-1}\bullet\mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)^{-1}=\\
&=\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^{t+1})\right]/h^0(x_i^{t+1})}{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}=\frac{g^0(y_i^{t+1})/h^0(x_i^{t+1})}{g^0(y_i^t)/h^0(x_i^t)},
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

en la dimensión de factores y, finalmente,

$$\begin{aligned} M_A^0\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right) &= \left[\frac{D_T^0(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t,y_i^t)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{D_T^0(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t,y_i^t)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= TT_T^0\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)^{\frac{1}{2}} \bullet ST_T^0\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \Delta AFP_{0,i}^{t,t+1} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^{t+1})\right]/h^0(x_i^{t+1})}{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)} = \frac{g^0(y_i^{t+1})/h^0(x_i^{t+1})}{g^0(y_i^t)/h^0(x_i^t)}. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

en la tecnológica.

Estos índices de variación en la productividad absoluta y los términos de transformación técnica y de escala en los que se descomponen permiten analizar la evolución en la productividad absoluta en períodos adyacentes considerando como base de referencia para las funciones de distancia que los definen la tecnología presente en $t = 0$. Suponiendo la existencia de $t = 0,1,2$ periodos, (3.4.1–2–3) satisfacen la propiedad de transitividad al verificarse: $M_A^0\left(x_i^0,x_i^2,y_i^0,y_i^2\right) = M_A^0\left(x_i^0,x_i^1,y_i^0,y_i^1\right) \bullet M_A^0\left(x_i^1,x_i^2,y_i^1,y_i^2\right)$ –de forma análoga para los términos $TT_d^0\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)$ y $ST_d^0\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)$, d=O,I,T–.

Adicionalmente, resulta posible obtener de forma directa el índice de variación acumulada de la productividad entre el periodo considerado como base y cualquier otro, $M_A^0\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)$, a través de:

$$\begin{aligned} M_A^0\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right) &= \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} = \frac{D_O^0(x_i^t,y_i^t)}{D_O^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{O}}^0(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0,y_i^0)} \\ &= TT_O^0\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right) \bullet ST_O^0\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right) = \\ &= \Delta AFP_{0,i}^{0,t} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^t)/h^0(x_i^t)}{g^0(y_i^0)/h^0(x_i^0)}, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

en la dimensión de productos,

$$\begin{aligned} M_A^0\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right) &= \left[\frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} = \left[\frac{D_I^0(x_i^t,y_i^t)}{D_I^0(x_i^0,y_i^0)} \bullet \frac{D_{\hat{I}}^0(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1} \\ &= TT_I^0\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)^{-1} \bullet ST_I^0\left(x_i^0,x_i^t,y^0,y_i^t\right)^{-1} = \\ &= \Delta AFP_{0,i}^{0,t} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^t)/h^0(x_i^t)}{g^0(y_i^0)/h^0(x_i^0)}, \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

en la dimensión de factores y, finalmente,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0, y_i^0)}\right]^2 = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^0, y_i^0)}\right]^2 \\
&= \mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right)^2 \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right)^2 = \\
&= \Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{0,t} = \frac{J^0\left[g^0(y_i^t)\right] / h^0(x_i^t)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right] / h^0(x_i^0)} = \frac{g^0(y_i^t) / h^0(x_i^t)}{g^0(y_i^0) / h^0(x_i^0)}.
\end{aligned}
\tag{3.4.6}
$$

en la tecnológica.

De esta forma, suponiendo de nuevo la existencia de $t = 0,1,2$ períodos, el índice $\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0, x_i^2, y_i^0, y_i^2\right)$ y sus componentes pueden obtenerse directamente a través de las formulaciones (3.4.4–5–6) o, de acuerdo a los establecido anteriormente, por multiplicación sucesiva de índices temporalmente correlativos: $\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0, x_i^2, y_i^0, y_i^2\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) \bullet \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2\right)$.

3.4.2 El índice transitivo de variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta\mathrm{OFP}_{b,i}^{t,t+1}$

La posibilidad de establecer un índice de variación en la productividad optima de los factores que satisfaga la propiedad transitiva, implica establecer un óptimo de referencia respecto al cual se evalúa la evolución de los restantes en períodos sucesivos. Eligiendo, al igual que en el caso anterior, como referencia base la actividad observada en b=0, y considerando las formulaciones introducidas en (3.2.22–23–24), se establece el siguiente índice en la dimensión de productos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) &= \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}\right) \bullet \left(\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}\right) = \\
&= \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1} = \frac{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t+1})^*\right] / h^0(x_i^{t+1})^*\right] / \left[J^{t+1}\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*\right] / h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right] / h^0(x_i^t)^*\right] / \left[J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right] / h^t(x_i^t)^*\right]}.
\end{aligned}
\tag{3.4.7}
$$

mientras que en la dimensión de factores y tecnológica se obtienen, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t},y_i^{t})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^{t},y_i^{t})}\right]^{-1} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t},y_i^{t})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^{t},y_i^{t})}\right)^{-1} \bullet \left(\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^{t},y_i^{t})/\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{I}}}^{t}(x_i^{t},y_i^{t})}\right)^{-1} = \\
&= \mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1})^{-1} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1})^{-1} = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,I}^{t,t+1} = \frac{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t+1})^*\right]/h^0(x_i^{t+1})^*\right]/\left[J^{t+1}\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*\right]/h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t})^*\right]/h^0(x_i^{t})^*\right]/\left[J^{t}\left[g^{t}(y_i^{t})^*\right]/h^{t}(x_i^{t})^*\right]},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) &= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^{t},y_i^{t})/\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{t}(x_i^{t},y_i^{t})}\right]^{2} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t},y_i^{t})/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^{t},y_i^{t})}\right)^{2} \bullet \left(\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{0}(x_i^{t},y_i^{t})/\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{T}}}^{t}(x_i^{t},y_i^{t})}\right)^{2} = \\
&= \mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1})^{2} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1})^{2} = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,I}^{t,t+1} = \frac{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t+1})^*\right]/h^0(x_i^{t+1})^*\right]/\left[J^{t+1}\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*\right]/h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t})^*\right]/h^0(x_i^{t})^*\right]/\left[J^{t}\left[g^{t}(y_i^{t})^*\right]/h^{t}(x_i^{t})^*\right]},
\end{aligned}
$$

(3.4.8–9)

Los índices introducidos permiten determinar la evolución correlativa de la productividad óptima de los factores entre t y $t+1$, así como de los términos de cambio técnico y de escala en los que se descompone –considerando como referencia las escalas de operaciones observadas en ambos períodos, (x_i^t,y_i^t) y (x_i^{t+1},y_i^{t+1}) y la tecnología del período base, b = 0–. Los índices (3.4.7–8–9) satisfacen la propiedad transitiva de forma que siendo los períodos existentes t = 0,1,2, se verifica $\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^2,y_i^2\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right) \bullet \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^1,y_i^1,x_i^2,y_i^2\right)$ –de forma análoga para los términos $\mathrm{TC}_d^0(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1})$ y $\mathrm{SC}_d^0(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1})$, d=O,I,T–.

Como en el caso de las variaciones en la productividad absoluta de los factores es posible calcular el índice acumulado de variación en la productividad óptima entre el período considerado como base y otro cualquiera a través de:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t\right)=\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}=\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)= \\
&=\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)\bullet\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)= \\
&=\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right]/h^t(x_i^t)^*},
\end{aligned} \qquad (3.4.10)$$

en la dimensión de productos y

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t\right)=\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}=\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1}\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1}= \\
&=\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)^{-1}\bullet\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)^{-1}= \\
&=\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right]/h^t(x_i^t)^*},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t\right)=\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2}=\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{2}\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{2}= \\
&=\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)^{2}\bullet\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)^{2}= \\
&=\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right]/h^t(x_i^t)^*},
\end{aligned}$$

(3.4.11-12)

en aquella de factores y tecnológica.

Por tanto, existiendo t = 0,1,2 períodos, el índice $\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^2,y_i^2\right)$ y sus componentes de cambio técnico y de escala pueden obtenerse directamente a través de las formulaciones (3.4.10–11–12), o como multiplicación de índices temporalmente sucesivos de acuerdo a (3.4.7–8–9): $\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^2,y_i^2\right)$ = $\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^1,y_i^1\right)\bullet\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^1,y_i^1,x_i^2,y_i^2\right)$.

3.4.3 El índice transitivo de variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta \mathrm{RFP}_{0,i}^{t,t+1}$

Resulta posible ahora completar el modelo de evaluación del rendimiento productivo a través de índices de variación en la productividad relativa de los factores que satisfacen la propiedad transitiva. Si se considera que tales índices son el resultado de comparar la evolución de la productividad absoluta con la óptima con objeto de determinar si ha existido alguna alteración en la eficiencia productiva de la actividad, es posible establecer la siguiente relación en la dimensión de productos:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) / \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) = \\
&= \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t}, y_i^{t+1})} / \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t}, y_i^{t}) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t}, y_i^{t})} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t}, y_i^{t})} \right) / \\
&/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t}, y_i^{t}) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^{t}, y_i^{t}) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})} \right) = \\
&= \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) / \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) = \\
&= \Delta \mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1} / \Delta \mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1} = \Delta \mathrm{RFP}_{0,i}^{t,t+1} = \\
&= \frac{J^0\left[g^0(y_i^{t+1})\right] / h^0(x_i^{t+1})}{J^0\left[g^0(y_i^{t})\right] / h^0(x_i^{t})} / \frac{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t+1})^*\right] / h^0(x_i^{t+1})^*\right] / \left[J^{t+1}\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*\right] / h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t})^*\right] / h^0(x_i^{t})^*\right] / \left[J^{t}\left[g^{t}(y_i^{t})^*\right] / h^{t}(x_i^{t})^*\right]},
\end{aligned}
\tag{3.4.13}
$$

mientras que en aquella de factores, el índice se corresponde con:

$$
\begin{aligned}
&M_R^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)= M_A^0\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)/ M_P^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)=\\
&=\left[\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^{t+1})}\right]^{-1} / \left[\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})/D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)/D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{-1} =\\
&=\left(\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)}\right)^{-1} /\\
&/\left(\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})/D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)/D_I^t(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})/D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)/D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right)^{-1} =\\
&= TT_I^0\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)^{-1} \bullet ST_I^0\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)^{-1} / TC_I^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)^{-1} \bullet SC_I^0\left(x_i^t, y_i^t x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)^{-1} =\\
&= \Delta AFP_{0,i}^{t,t+1} / \Delta OFP_{0,i}^{t,t+1} = \Delta RFP_{0,i}^{t,t+1} =\\
&= \frac{J^0\left[g^0(y_i^{t+1})\right] / h^0(x_i^{t+1})}{J^0\left[g^0(y_i^t)\right] / h^0(x_i^t)} / \frac{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t+1})^*\right] / h^0(x_i^{t+1})^*\right] / \left[J^{t+1}\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*\right] / h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right] / h^0(x_i^t)^*\right] / \left[J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right] / h^t(x_i^t)^*\right]},
\end{aligned}
$$

(3.4.14)

y, por último, en la dimensión tecnológica se observa:

$$
\begin{aligned}
&M_R^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)= M_A^0\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)/ M_P^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)=\\
&=\left[\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^{t+1})}\right]^{2} / \left[\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})/D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)/D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{2} =\\
&=\left(\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)}\right)^{2} /\\
&/\left(\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})/D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)/D_T^t(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})/D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)/D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right)^{2} =\\
&= TT_T^0\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)^{2} \bullet ST_T^0\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)^{2} / TC_T^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)^{2} \bullet SC_T^0\left(x_i^t, y_i^t x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)^{2} =\\
&= \Delta AFP_{0,i}^{t,t+1} / \Delta OFP_{0,i}^{t,t+1} = \Delta RFP_{0,i}^{t,t+1} =\\
&= \frac{J^0\left[g^0(y_i^{t+1})\right] / h^0(x_i^{t+1})}{J^0\left[g^0(y_i^t)\right] / h^0(x_i^t)} / \frac{\left[J^0\left[g^0(y_i^{t+1})^*\right] / h^0(x_i^{t+1})^*\right] / \left[J^{t+1}\left[g^{t+1}(y_i^{t+1})^*\right] / h^{t+1}(x_i^{t+1})^*\right]}{\left[J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right] / h^0(x_i^t)^*\right] / \left[J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right] / h^t(x_i^t)^*\right]}.
\end{aligned}
$$

(3.4.15)

Al igual en los casos anteriores, los índices presentados de variación en la productividad relativa verifican la propiedad transitiva, pudiendo caracterizar de forma completa la evolución del rendimiento productivo de las actividades. Así, siendo t =0,1,2, se verifica $M_R^0\left(x_i^0, y_i^0, x_i^2, y_i^2\right) = M_R^0\left(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1\right) \bullet M_R^0\left(x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2\right)$ –de forma análoga para los términos en los que se descompone la variación en la productividad absoluta, $\Delta\,\mathrm{AFP}_{b,i}^{0,t} = \mathrm{TT}_d^0 \cdot \mathrm{ST}_d^0$, y óptima, $\Delta\,\mathrm{OFP}_{b,i}^{0,t} = \mathrm{TC}_d^0 \cdot \mathrm{SC}_d^0$, d=O,I,T–.

De acuerdo a lo establecido en la sección 3.2, (3.2.40–41–42), es posible expresar los índices (3.4.13–14–15) de forma equivalente de acuerdo a la variación en la eficiencia productiva dado que esta magnitud se corresponde con la productividad relativa de los factores, *i.e.* $\Delta\,\mathrm{RFP}_{b,i}^{0,1} = \Delta\,\mathrm{PE}_{b,i}^{0,1} = \Delta\,\mathrm{AFP}_{b,i}^{0,1} / \Delta\,\mathrm{OFP}_{b,i}^{0,1} = \Delta\,\mathrm{TE}_d^{0,1} \cdot \Delta\,\mathrm{SE}_d^{0,1}$, donde $\Delta\,\mathrm{TE}_d^{0,t} = \mathrm{TT}_d^0 / \mathrm{TC}_d^0$ y $\Delta\,\mathrm{SE}_d^{0,t} = \mathrm{ST}_d^0 / \mathrm{SC}_d^0$, d=O,I,T. Estos términos de variación en la eficiencia técnica y de escala se definen del siguiente modo, con objeto de que satisfagan la propiedad de circularidad:

$$\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{O}}^{t,t+1}(x_i^t,y_i^t x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)} = \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^0 / \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^0 =$$
$$= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right) \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right),$$
$$\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{I}}^{t,t+1}(x_i^t,y_i^t x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1} = (\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^0 / \mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^0)^{-1} = \qquad (3.4.16\text{-}17\text{-}18)$$
$$= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1} \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t) / \mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1},$$
$$\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{T}}^{t,t+1}(x_i^t,y_i^t x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2} = (\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^0 / \mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^0)^{2} =$$
$$= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{2} \Big/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t) / \mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{2},$$

en el caso de las variaciones en la eficiencia técnica, mientras que los términos de variación en la eficiencia de escala se definen como:

$$
\begin{aligned}
&\Delta SE_{O}^{t,t+1}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \frac{D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)} = ST_{O}^{0}/SC_{O}^{0} = \\
&= \left(\frac{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right) \Big/ \left(\frac{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/D_{\bar{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right), \\
&\Delta SE_{I}^{t,t+1}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \left[\frac{D_{\bar{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1} = (ST_{I}^{0}/SC_{I}^{0})^{-1} = \qquad (3.4.19\text{-}20\text{-}21) \\
&= \left(\frac{D_{\bar{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1} \Big/ \left(\frac{D_{\bar{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\bar{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/D_{\bar{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1}, \\
&\Delta SE_{T}^{t,t+1}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \left[\frac{D_{\bar{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2} = (ST_{T}^{0}/SC_{T}^{0})^{2} = \\
&= \left(\frac{D_{\bar{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{-1} \Big/ \left(\frac{D_{\bar{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\bar{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/D_{\bar{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)^{2}.
\end{aligned}
$$

Así, resulta posible expresar la variación en la productividad óptima de los factores, (3.4.13–14–15), en los términos equivalentes que supone la variación en la eficiencia productiva –técnica y de escala–. En el caso de la dimensión de productos se verifica

$$
\begin{aligned}
&M_{R}^{0}(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}) = \left[\left(\frac{D_{O}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{O}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right) \Big/ \left(\frac{D_{O}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{O}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{O}^{0}(x_i^t,y_i^t)/D_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right] \bullet \\
&\bullet \left[\left(\frac{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}\right) \Big/ \left(\frac{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/D_{\bar{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right] = \\
&= \left[\frac{D_{O}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right] = \left[\frac{D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right] = \\
&= (TT_{O}^{0}/TC_{O}^{0}) \bullet (ST_{O}^{0}/SC_{O}^{0}) = \Delta TE_{O}^{t,t+1} \bullet \Delta SE_{O}^{t,t+1} = \Delta PE_{O,t}^{t,t+1} = \Delta RFP_{O,t}^{t,t+1};
\end{aligned}
$$

(3.4.22)

en la dimensión de factores se observa

$$
\begin{aligned}
M_R^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) &= \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)}\right) / \left(\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t) / D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right)\right]^{-1} \bullet \\
&\bullet \left[\left(\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t)}\right) / \left(\frac{D_I^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^0(x_i^t, y_i^t) / D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right)\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{-1} = \left[\frac{D_I^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{-1} = \\
&= \left(TT_I^0 / TC_I^0\right)^{-1} \bullet \left(ST_I^0 / SC_I^0\right)^{-1} = \Delta TE_I^{t,t+1} \bullet \Delta SE_I^{t,t+1} = \Delta PE_{0,i}^{t,t+1} = \Delta RFP_{0,i}^{t,t+1};
\end{aligned}
\tag{3.4.23}
$$

y, una vez más, en la tecnológica

$$
\begin{aligned}
M_R^0\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) &= \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)}\right) / \left(\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t) / D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right)\right]^{2} \bullet \\
&\bullet \left[\left(\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t)}\right) / \left(\frac{D_T^0(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^0(x_i^t, y_i^t) / D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right)\right]^{2} = \\
&= \left[\frac{D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{2} \bullet \left[\frac{D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{2} = \left[\frac{D_T^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{2} = \\
&= \left(TT_T^0 / TC_T^0\right)^{2} \bullet \left(ST_T^0 / SC_T^0\right)^{2} = \Delta TE_T^{t,t+1} \bullet \Delta SE_T^{t,t+1} = \Delta PE_{0,i}^{t,t+1} = \Delta RFP_{0,i}^{t,t+1}.
\end{aligned}
\tag{3.4.24}
$$

Al igual que en el caso de los índices de variación en la productividad absoluta y óptima que verifican la propiedad transitiva, resulta factible establecer la formulación directa que permite obtener la variación acumulada de la productividad relativa de los factores entre el período considerado como base y cualquier otro, $M_R^0\left(x_i^0, y_i^0, x_i^t, y_i^t\right)$. Si se consideran las formulaciones de los índices acumulativos absolutos, (3.4.4–5–6), y óptimos, (3.4.10–11–12), se puede obtener el siguiente índice en la dimensión de productos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}^0_{\mathrm{R}}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^t,y_i^t\right) &= \mathrm{M}^0_{\mathrm{A}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)/\mathrm{M}^0_{\mathrm{P}}\left(x_i^t,y_i^t\right)= \\
&=\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^0,y_i^0)}\right]\Big/\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^t,y_i^t)}\right]= \\
&=\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\mathrm{O}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\mathrm{O}}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^0,y_i^0)}\right]\Big/\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\mathrm{O}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\mathrm{O}}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{O}}}(x_i^t,y_i^t)}\right]= \\
&=\left(\mathrm{TT}^0_{\mathrm{O}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\bullet\mathrm{ST}^0_{\mathrm{O}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\right)/\left(\mathrm{TC}^0_{\mathrm{O}}(x_i^t,y_i^t)\bullet\mathrm{SC}^0_{\mathrm{O}}(x_i^t,y_i^t)\right)= \\
&=\Delta\mathrm{AFP}^{0,t}_{0,t}/\Delta\mathrm{OFP}^{0,t}_{0,t}=\Delta\mathrm{RFP}^{0,t}_{0,t}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)}\Big/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right]/h^t(x_i^t)^*}.
\end{aligned}
\tag{3.4.25}
$$

En la dimensión de factores se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}^0_{\mathrm{R}}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^t,y_i^t\right) &= \mathrm{M}^0_{\mathrm{A}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)/\mathrm{M}^0_{\mathrm{P}}\left(x_i^t,y_i^t\right)= \\
&=\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\Big/\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}= \\
&=\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\mathrm{I}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\mathrm{I}}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}\Big/\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\mathrm{I}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\mathrm{I}}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{I}}}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}= \\
&=\left(\mathrm{TT}^0_{\mathrm{I}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\bullet\mathrm{ST}^0_{\mathrm{I}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\right)^{-1}/\left(\mathrm{TC}^0_{\mathrm{I}}(x_i^t,y_i^t)\bullet\mathrm{SC}^0_{\mathrm{I}}(x_i^t,y_i^t)\right)^{-1}= \\
&=\Delta\mathrm{AFP}^{0,t}_{0,t}/\Delta\mathrm{OFP}^{0,t}_{0,t}=\Delta\mathrm{RFP}^{0,t}_{0,t}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)}\Big/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right]/h^t(x_i^t)^*}
\end{aligned}
\tag{3.4.26}
$$

y, finalmente, el índice tecnológico responde a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}^0_{\mathrm{R}}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^t,y_i^t\right) &= \mathrm{M}^0_{\mathrm{A}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)/\mathrm{M}^0_{\mathrm{P}}\left(x_i^t,y_i^t\right)= \\
&=\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2}\Big/\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2}= \\
&=\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\mathrm{T}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\mathrm{T}}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{2}\Big/\left[\frac{\mathrm{D}^0_{\mathrm{T}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\mathrm{T}}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}^0_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}^t_{\hat{\mathrm{T}}}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2}= \\
&=\left(\mathrm{TT}^0_{\mathrm{T}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\bullet\mathrm{ST}^0_{\mathrm{T}}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\right)^{2}/\left(\mathrm{TC}^0_{\mathrm{T}}(x_i^t,y_i^t)\bullet\mathrm{SC}^0_{\mathrm{T}}(x_i^t,y_i^t)\right)^{2}= \\
&=\Delta\mathrm{AFP}^{0,t}_{0,t}/\Delta\mathrm{OFP}^{0,t}_{0,t}=\Delta\mathrm{RFP}^{0,t}_{0,t}=\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)\right]/h^0(x_i^t)}{J^0\left[g^0(y_i^0)\right]/h^0(x_i^0)}\Big/\frac{J^0\left[g^0(y_i^t)^*\right]/h^0(x_i^t)^*}{J^t\left[g^t(y_i^t)^*\right]/h^t(x_i^t)^*}
\end{aligned}
\tag{3.4.27}
$$

Atendiendo a estas formulaciones y dados los $t = 0,1,2$ períodos, es posible determinar $\mathrm{M}^0_{\mathrm{R}}\left(x_i^0,y_i^0,x_i^2,y_i^2\right)$ calculando (3.4.25–26–27) o multiplicando sucesivamente índices temporalmente consecutivos: $M_R^0(x_i^0, y_i^0, x_i^2, y_i^2)$ = $M_R^0(x_i^0, x_i^1, y_i^0, y_i^1) \bullet M_R^0(x_i^1, x_i^2, y_i^1, y_i^2)$.

La representación realizada de los índices de variación acumulada de la productividad puede realizarse, de forma equivalente, considerando la variación en la productividad relativa entendida como variación en la eficiencia productiva y los términos de eficiencia técnica y de escala en los que ésta se descompone. En este caso se obtiene:

$$\begin{aligned}
M_R^0(x_i^0, y_i^0, x_i^t, y_i^t) &= \left[\frac{D_O^0(x_i^t, y_i^t)}{D_O^0(x_i^0, y_i^0)} \Big/ \frac{D_O^0(x_i^t, y_i^t)}{D_O^t(x_i^t, y_i^t)}\right] \bullet \left[\frac{D_{\bar{O}}^0(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{O}}^0(x_i^0, y_i^0)} \Big/ \frac{D_{\bar{O}}^0(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{O}}^t(x_i^t, y_i^t)}\right] = \\
&= \left[\frac{D_O^t(x_i^t, y_i^t)}{D_O^0(x_i^0, y_i^0)}\right] \bullet \left[\frac{D_{\bar{O}}^t(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{O}}^0(x_i^0, y_i^0)}\right] = \left[\frac{D_{\hat{O}}^t(x_i^t, y_i^t)}{D_{\hat{O}}^0(x_i^0, y_i^0)}\right] = \\
&= \left(TT_O^0(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t) / TC_O^0(x_i^t, y_i^t)\right) \bullet \left(ST_O^0(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t) / SC_O^0(x_i^t, y_i^t)\right) = \\
&= \Delta TE_O^{0,t} \bullet \Delta SE_O^{0,t} = \Delta PE_{0,t}^{O} = \Delta RFP_{0,t}^{O},
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

seleccionando la orientación de productos,

$$\begin{aligned}
M_R^0(x_i^0, y_i^0, x_i^t, y_i^t) &= \left[\frac{D_I^0(x_i^t, y_i^t)}{D_I^0(x_i^0, y_i^0)} \Big/ \frac{D_I^0(x_i^t, y_i^t)}{D_I^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_{\bar{I}}^0(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{I}}^0(x_i^0, y_i^0)} \Big/ \frac{D_{\bar{I}}^0(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{I}}^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{D_I^t(x_i^t, y_i^t)}{D_I^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} \bullet \left[\frac{D_{\bar{I}}^t(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{I}}^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} = \left[\frac{D_{\hat{I}}^t(x_i^t, y_i^t)}{D_{\hat{I}}^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{-1} = \\
&= \left(TT_I^0(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t) / TC_I^0(x_i^t, y_i^t)\right)^{-1} \bullet \left(ST_I^0(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t) / SC_I^0(x_i^t, y_i^t)\right)^{-1} = \\
&= \Delta TE_I^{0,t} \bullet \Delta SE_I^{0,t} = \Delta PE_{0,t}^{I} = \Delta RFP_{0,t}^{I},
\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

considerando la de factores, y

$$\begin{aligned}
M_R^0(x_i^0, y_i^0, x_i^t, y_i^t) &= \left[\frac{D_T^0(x_i^t, y_i^t)}{D_T^0(x_i^0, y_i^0)} \Big/ \frac{D_T^0(x_i^t, y_i^t)}{D_T^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{2} \bullet \left[\frac{D_{\bar{T}}^0(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{T}}^0(x_i^0, y_i^0)} \Big/ \frac{D_{\bar{T}}^0(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{T}}^t(x_i^t, y_i^t)}\right]^{2} = \\
&= \left[\frac{D_T^t(x_i^t, y_i^t)}{D_T^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{2} \bullet \left[\frac{D_{\bar{T}}^t(x_i^t, y_i^t)}{D_{\bar{T}}^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{2} = \left[\frac{D_{\hat{T}}^t(x_i^t, y_i^t)}{D_{\hat{T}}^0(x_i^0, y_i^0)}\right]^{2} = \\
&= \left(TT_T^0(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t) / TC_T^0(x_i^t, y_i^t)\right)^{2} \bullet \left(ST_T^0(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t) / SC_T^0(x_i^t, y_i^t)\right)^{2} = \\
&= \Delta TE_T^{0,t} \bullet \Delta SE_T^{0,t} = \Delta PE_{0,t}^{T} = \Delta RFP_{0,t}^{T},
\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

en la tecnológica.

3.4.4 La descomposición del índice transitivo de variación en la productiva absoluta de los factores, $\Delta\,\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1}$

Al igual que en la sección 3.3 se recogían las descomposiciones alternativas existentes en la literatura, relativas al índice de variación de la productividad absoluta dentro del marco analítico propuesto en la presente investigación, en esta sección se extiende el análisis a las descomposiciones de los índices con objeto de que satisfagan la propiedad transitiva.

Comenzando con la propuesta de Simar y Wilson (1998a) y Zofío y Lovell (1998), la descomposición del índice desde una perspectiva de productos se corresponde con

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right) &= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\\
&= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)/\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\right)\\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_{0,i}^{t,t+1} = \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1}/\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1} =\\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\hat{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]=\\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{O}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{O}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{O}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{O}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\bar{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\bar{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]\bullet\\
&\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{O}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\bar{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]=\\
&= (\mathrm{TC}_{O}^{0}\bullet\mathrm{TT}_{O}^{0}/\mathrm{TC}_{O}^{0})\bullet(\mathrm{SC}_{O}^{0}\bullet\mathrm{ST}_{O}^{0}/\mathrm{SC}_{O}^{0})=\\
&= (\mathrm{TC}_{O}^{0}\bullet\Delta\mathrm{TE}_{O}^{t,t+1})\bullet(\mathrm{SC}_{O}^{0}\bullet\Delta\mathrm{SE}_{O}^{t,t+1}) = \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{PE}_{0,i}^{t,t+1}\\
&= \mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}}\bullet\mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}} = \mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet\mathrm{SC}_{O}^{0}\bullet\mathrm{SEFFCH} = \Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1},
\end{aligned}
\tag{3.4.31}
$$

mientras que aquella de factores resulta ser

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right) &= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\\
&= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)/\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\right)\\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_{0,i}^{t,t+1} = \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1}/\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1} =\\
&=\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}=\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]^{-1}\bullet\\
&\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}=\\
&=(\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0}\bullet\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0}/\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0}\bullet\mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0}/\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}=\\
&=((\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{I}}^{t,t+1})\bullet((\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet\Delta\mathrm{SE}_{\mathrm{I}}^{t,t+1})=\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{PE}_{0,i}^{t,t+1}\\
&=\mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}}\bullet\mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}}=\mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet\mathrm{SEFFCH}=\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1},
\end{aligned}
\tag{3.4.32}
$$

y, por último, la tecnológica responde a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right) &= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\\
&= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)/\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\right)\\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_{0,i}^{t,t+1} = \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1}/\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1} =\\
&=\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2}=\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]^{2}\bullet\\
&\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{2}=\\
&=(\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0}\bullet\mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0}/\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0})^{2}\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0}\bullet\mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^{0}/\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0})^{2}=\\
&=((\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0})^{2}\bullet\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{T}}^{t,t+1})\bullet((\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0})^{2}\bullet\Delta\mathrm{SE}_{\mathrm{T}}^{t,t+1})=\Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{t,t+1}\bullet\Delta\mathrm{PE}_{0,i}^{t,t+1}\\
&=\mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}}\bullet\mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}}=\mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0})^{2}\bullet\mathrm{SEFFCH}=\Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1},
\end{aligned}
\tag{3.4.33}
$$

Los índices propuestos, así como aquellos en los que se descomponen, satisfacen la propiedad transitiva de forma que son factibles desagregaciones consistentes del conjunto de información que caracteriza la evolución del rendimiento productivo de las actividades. Así mismo, haciendo uso de los desarrollos previos, es posible determinar las expresiones de los índices (3.4.31–32–33) que permiten calcular la variación acumulada del rendimiento entre el período base y cualquier otro. En este caso se observa que, con relación al índice de productos, la descomposición de la variación acumulada del rendimiento puede obtenerse a través de

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right) &= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\\
&= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)/\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\right)\\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_{0,t}^{0,t}=\Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_{0,t}^{0,t}/\Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}=\\
&=\left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]=\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]=\\
&=(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0}\bullet\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{0}/\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0})\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0}\bullet\mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{0}/\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0})=\\
&=(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{0}\bullet\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{O}}^{0,t})\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0}\bullet\Delta\mathrm{SE}_{\mathrm{O}}^{0,t})=\Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}\bullet\Delta\mathrm{PE}_{0,t}^{0,t}\\
&=\mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}}\bullet\mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}}=\mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{0}\bullet\mathrm{SEFFCH}=\Delta\mathrm{AFP}_{0,t}^{t,t+1},
\end{aligned}
\tag{3.4.34}
$$

mientras que la de factores resulta ser

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right) &= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\\
&= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet\left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)/\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0,x_i^t,y_i^0,y_i^t\right)\right)\\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}\bullet\Delta\mathrm{RFP}_{0,t}^{0,t}=\Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}\bullet\Delta\mathrm{AFP}_{0,t}^{0,t}/\Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}=\\
&=\left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]^{-1}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}=\\
&=\left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]^{-1}\bullet\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{I}}}^{0}(x_i^0,y_i^0)}\right]^{-1}=\\
&=(\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0}\bullet\mathrm{TT}_{\mathrm{I}}^{0}/\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0}\bullet\mathrm{ST}_{\mathrm{I}}^{0}/\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}=\\
&=((\mathrm{TC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet\Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{I}}^{0,t})\bullet((\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet\Delta\mathrm{SE}_{\mathrm{I}}^{0,t})=\Delta\mathrm{OFP}_{0,t}^{0,t}\bullet\Delta\mathrm{PE}_{0,t}^{0,t}\\
&=\mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}}\bullet\mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}}=\mathrm{TECHCH}\bullet\mathrm{PEFFCH}\bullet(\mathrm{SC}_{\mathrm{I}}^{0})^{-1}\bullet\mathrm{SEFFCH}=\Delta\mathrm{AFP}_{0,t}^{t,t+1},
\end{aligned}
\tag{3.4.35}
$$

y, una vez más, resulta posible concluir con aquella tecnológica:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right) &= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t\right) \bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right) \\
&= \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^t, y_i^t\right) \bullet \left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right) / \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{0}\left(x_i^0, x_i^t, y_i^0, y_i^t\right)\right) \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{0,t} \bullet \Delta\mathrm{RFP}_{0,i}^{0,t} = \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{0,t} \bullet \Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{0,t} / \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{0,t} = \\
&= \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}\right]^2 \bullet \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^0, y_i^0)}\right]^2 = \\
&= \left[\left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}\right) \bullet \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}\right)\right]^2 \bullet \left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^0, y_i^0)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{t}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{T}}^{0}(x_i^0, y_i^0)}\right]^2 = \\
&= (\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0} \bullet \mathrm{TT}_{\mathrm{T}}^{0} / \mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0})^2 \bullet (\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0} \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{T}}^{0} / \mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0})^2 = \\
&= ((\mathrm{TC}_{\mathrm{T}}^{0})^2 \bullet \Delta\mathrm{TE}_{\mathrm{T}}^{0,t}) \bullet ((\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0})^2 \bullet \Delta\mathrm{SE}_{\mathrm{T}}^{0,t}) = \Delta\mathrm{OFP}_{0,i}^{0,t} \bullet \Delta\mathrm{PE}_{0,i}^{0,t} \\
&= \mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FGNZ}} \bullet \mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FGNZ}} = \mathrm{TECHCH} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet (\mathrm{SC}_{\mathrm{T}}^{0})^2 \bullet \mathrm{SEFFCH} = \Delta\mathrm{AFP}_{0,i}^{t,t+1},
\end{aligned}
\tag{3.4.36}
$$

Naturalmente, sería posible presentar las descomposiciones alternativas propuestas por Färe *et al.* (1994b) y Ray y Desli (1997) que, ya sea de forma interanual o acumulada, satisfacen la propiedad transitiva. Sin embargo, dado que éstas suponen una reorganización de los diversos índices recogidos en (3.4.34–35–36) y con objeto de evitar una presentación *ad nauseam*, resulta suficiente indicar que tales formulaciones suponen una extensión de las ecuaciones (3.3.10) a (3.3.17) con objeto de que las variaciones en el rendimiento satisfagan la propiedad citada.

Se finaliza así la presentación de los índices que satisfacen la propiedad transitiva o de circularidad. Esta propiedad puede añadirse a las previamente consideradas de identidad, monoticidad, proporcionalidad y separabilidad, si se considera fundamental a la hora de determinar la idoneidad de un índice de rendimiento productivo. Desde una perspectiva axiomática, se amplia el conjunto de propiedades exigibles pero, una vez más, su asunción implica un coste en términos tecnológicos. Así, ¿qué repercusión tiene esta propiedad sobre la tecnología de producción en los procesos de evaluación del rendimiento productivo? Tal como se ha puesto de manifiesto en la anterior sección, con objeto de que los índices de productividad sean transitivos resulta necesario establecer una tecnología de referencia base respecto a la cual relativizar el rendimiento. La ventaja de adoptar tal decisión reside en la posibilidad de realizar agregaciones y desagregaciones consistentes en índices de variación por subperíodos, si bien presenta como desventaja fundamental el hecho de que conforme el horizonte temporal se alarga, la tecnología de producción puede alterarse sustancialmente quedando obsoleta aquella que sirve de base de referencia.

En análisis aplicados es necesario decidir si resulta adecuado elegir un período base, con objeto de que se verifique la propiedad transitiva, o si por el contrario se renuncia a esta propiedad en aras de una mejor caracterización de la tecnología con el transcurso del tiempo. Corresponde así al investigador el sopesar los pros y los contras en la elección de un determinado modelo de evaluación del rendimiento productivo. En esta investigación, se exige la condición transitiva a la hora de definir índices de productividad pues, en la ilustración empírica del modelo que se aborda en el quinto capítulo, uno de los objetivos es poder mostrar la desagregación consistente del rendimiento por subperíodos.

Capítulo IV

EL ANALISIS ENVOLVENTE DE DATOS, DEA, TECNOLOGÍA Y FUNCIONES DE DISTANCIA

La definición original del índice de Malmquist introducida en el capítulo precedente, (3.2.1–2–3), que caracteriza la transformación técnica en el modelo de rendimiento propuesto, fue establecida en 1982 por Caves, Christensen y Diewert desde una perspectiva teórica. Sin embargo, estos autores ya advertían sobre la necesidad desarrollar empíricamente tal índice, aproximando la tecnología a través de técnicas aplicadas de optimización que permitiesen calcular las funciones de distancia: "*Cada uno de los dos índices Malmquist de factores,* $Q^k(x^j,x^k)$, $Q^j(x^j,x^k)$, *se define respecto a la tecnología y niveles de producto de una empresa en particular. Pero sin conocer los parámetros de la tecnología no es posible calcular ningún índice*", Caves *et al.* (1982a: 1.397).

El desarrollo de esta metodología quedaría circunscrito a un ámbito teórico hasta que Färe *et al.* (1989, 1994), en un documento de trabajo que data de 1989 pero que no sería publicado hasta 1994, muestran como es factible caracterizar la tecnología a través de procesos de programación matemática conocidos como Análisis Envolvente de Datos, *Data Envelopment Analysis*, DEA, que se introduce en las próximas secciones. La circulación restringida del documento de trabajo de Färe *et al.* (1989, 1994) y el lapso temporal entre su aparición y su posterior publicación en el libro colectivo de Charnes *et al.* (1994) explican que Diewert (1992b: 241) todavía precisara "...Siguiendo a Caves *et al.* (1982:1.402), definimos el siguiente *índice de productividad teórico* Π^0 y Π^1.", –cursiva en el original–. Hoy día, la posibilidad de aproximar la tecnología de producción a través de programación matemática ha mostrado que la caracterización teórica del índice de Malmquist tiene un reflejo empírico, habiéndose realizado multitud de estudios de productividad basados en esta técnica –véase, por ejemplo, la revisión bibliográfica de Färe, Grosskopf y Roos (1998)–.

El objetivo del presente capítulo es mostrar como el modelo de evaluación del rendimiento productivo introducido puede ser desarrollado empíricamente a través de la técnica de optimización matemática conocida como Análisis Envolvente de Datos, DEA. Esta técnica permite caracterizar la tecnología de producción y calcular las funciones de distancia definidas en el segundo capítulo con objeto de identificar la eficiencia productiva de las actividades.

El capítulo se inicia con una breve introducción sobre la creciente importancia del DEA como técnica de análisis de datos, desde sus orígenes a finales de los años setenta, hasta su estadio de desarrollo actual. A continuación, y siguiendo un orden inverso al acontecido históricamente pero coherente con la exposición del modelo e introducción de los índices en el segundo y tercer capítulos, se discuten las formulaciones propuestas por Banker, Charnes y Cooper (1984) que permiten calcular la eficiencia técnica de un conjunto de actividades observadas. Posteriormente se considera el programa seminal planteado en el artículo de Charnes, Cooper y Rhodes (1978) que, dando origen a esta técnica, permite evaluar la eficiencia productiva de una actividad, $RFP_i^{t,t+1} = PE_i^{t,t+1}$, pero no descomponerla en su componente técnica y de escala, $RFP_i^{t,t+1} = PE_i^{t,t+1} = TE_i^{t,t+1} \cdot SE_i^{t,t+1}$. Así, cronológicamente, sería necesario esperar hasta el artículo mencionado de Banker, Charnes y Cooper (1984) para que el modelo teórico de evaluación del rendimiento pudiese ser implementado.

En las secciones segunda y tercera se analiza el potencial y flexibilidad del DEA en la definición de los programas duales de estas primeras formulaciones, con objeto de extraer conclusiones respecto a la tecnología de producción –con especial énfasis en los rendimientos a escala dada la relevancia que tienen en esta investigación–, así como las formulaciones que permiten calcular las funciones de distancia intertemporales necesarias para desarrollar empíricamente los índices de Malmquist.

Con objeto de facilitar la interpretación del modelo de evaluación productiva presentado en el ámbito teórico, y mostrar su desarrollo empírico a través de los programas de optimización matemática, se resuelve en la cuarta sección un sencillo ejemplo ideado por Grifell–Tatjé y Lovell (1999a) con objeto de mostrar las descomposiciones alternativas del índice de productividad absoluta de los factores.

Finalmente, se concluye el capítulo mostrando si en el transito desde los desarrollos teóricos de los índices de productividad de Malmquist hasta su aplicación empírica, es posible mantener su idoneidad desde una perspectiva axiomática y tecnológica.

4.1 Breve introducción al Análisis Envolvente de Datos

La literatura básica existente sobre el análisis DEA suele marcar como inicio de esta técnica de evaluación de la eficiencia productiva el artículo publicado en 1978 por Charnes, Cooper y Rhodes: *Measuring the Efficiency of Production Units* en el *European Journal of Operations Research*[24]. Desde entonces, el crecimiento de la literatura teórica y aplicada relacionada con esta técnica ha resultado exponencial, centrándose los análisis realizados inicialmente en la prestación de servicios por parte del Sector Público.

Estudios bibliométricos realizados por Seiford (1996) y Sarafoglou (1998) muestran la importancia creciente que esta adquiriendo este sistema de evaluación al conseguir, dentro del ámbito internacional, un lugar de referencia estable en el campo del análisis económico –con el *Journal of Productivity Analysis* (Kluwer Academic Publishers) y los *European Workshop on Efficiency and Productivity* y *North American Workshop on Efficiency and Productivity* como revista y forums más destacados– así como en el campo de la investigación operativa –con el *European Journal of Operations Research* (North–Holland Publishing Company) e INFORMS como revista y forum más destacados–. En el ámbito nacional son de resaltar las contribuciones realizadas en publicaciones como la *Revista Española de Economía Agraria* –donde se publica por Prieto (1987) el primer artículo sobre el DEA en español–, la *Revista de Economía Aplicada*, la *Revista Española de Economía* o la revista de la Sociedad Española de Investigación Operativa, *Top*. Además, esta técnica goza de sesiones *cuasi*–exclusivas en múltiples congresos

[24] Sin embargo, las primeras formulaciones, sugeridas ya en el artículo de Farrell (1957), deben ser atribuidas a las investigaciones de Boles (1963) en la Universidad de California.

como los Encuentros de Economía Pública, Jornadas de Economía Industrial, *Oviedo Workshop on Efficiency and Productivity Analysis*, etc..

Sin embargo, el empleo del DEA ha conseguido traspasar la frontera del estricto ámbito académico y esta experimentando una generalizada aplicación entre organismos privados y públicos, consultores profesionales y analistas en general, dando origen a un incipiente mercado de servicios tal como refleja el número creciente de programas informáticos comercializados –véase, por ejemplo, Charnes *et al.* (1994, cap.5) para una comparación entre los existentes, o Cooper, Seiford y Tone (2000) donde se ofrecen códigos DEA para resolver multitud de modelos–. ¿Qué justifica esta evolución del Análisis Envolvente de Datos?

En primer lugar, supone un proceso de análisis de datos sustitutivo de la técnica de análisis por definición: la regresión estadística. Tal como ponen de manifiesto Charnes *et al.* (1994:4) "*en contraste con aproximaciones paramétricas, cuyo objeto es optimizar un único plano de regresión que intersecta a los datos, el DEA optimiza respecto a cada observación individual, calculando una frontera discreta determinada por un conjunto de DMUs* –unidades de toma de decisión, *decision making units– Pareto eficientes*". Es decir, el DEA provee información individualizada para cada actividad evaluada frente a la estimación media, que se asume es aplicable a cada actividad, que facilita el análisis por regresión.

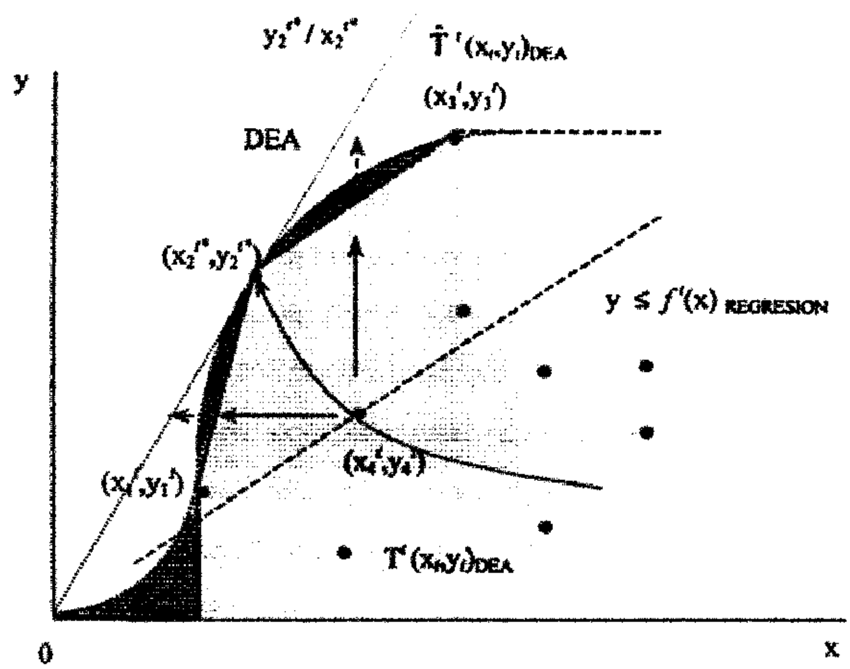


Gráfico 4.1.1 Comparación del DEA y el análisis por regresión.

En el gráfico 4.1.1 se puede apreciar la aproximación que el DEA realiza de la tecnología presentada en el primer capítulo y formalizada en el segundo, $T^t(x,y)$. El área sombreada representa tal conjunto de posibilidades de producción de acuerdo al análisis de la actividad que representa el DEA, mientras que sus características en términos de los axiomas T.1–T.9 son analizadas en la próxima sección. Dentro del conjunto, el trazo continuo muestra la frontera o subconjunto eficiente –respecto al cual se evalúa la eficiencia técnica–, el cual queda definido como combinación lineal de las actividades, i=1,..,3, que son capaces de generar la mayor cuantía de producto para diversas escalas de operaciones –dotación de factores–. Así mismo, resulta posible identificar la actividad que determina el óptimo de producción –máxima productividad–, (x_2^{t*},y_2^{t*}), y el conjunto $\hat{T}^t(x,y)$ sobre el que se definen las funciones de distancia determinantes de la eficiencia productiva.

La aproximación que el DEA realiza de la tecnología o conjunto de posibilidades de producción es el primer paso en la determinación empírica del rendimiento productivo, a la vez que permite una elevada flexibilidad en la asunción de hipótesis o axiomas respecto a la propia tecnología. Definidas las posibilidades de producción y los subconjuntos eficientes y óptimos, el siguiente paso es proceder al cálculo de las propias funciones de distancia, lo cual exige seleccionar una determinada orientación en función de las características del proceso productivo que se analiza; es decir si la evaluación debe realizarse desde la perspectiva de productos, factores o tecnológica, *d*=O,I,T. El gráfico 4.1.1 muestra como las funciones de distancia relativas a la observación (x_4^l, y_4^l) determinan cuan alejada se encuentra la actividad de los subconjuntos de referencia. En el caso representado, el trazo continuo muestra la eficiencia técnica mientras que el discontinuo expresa el nivel de eficiencia de escala –y ambos, conjuntamente, la eficiencia productiva–. El DEA provee una caracterización individual de la tecnología de producción potencial en la dimensión seleccionada generado hiperplanos –*facets*– de referencia específicos que permiten calcular los niveles de eficiencia relativa respecto a éstos. El coste de disponer de tal información individualizada es la necesidad de resolver tantos programas de optimización como actividades sean evaluadas mientras que en el caso de la regresión, representada en el gráfico 4.1.1 por la línea de tendencia que intersecta la nube de puntos, se procede a realizar una única optimización ya sea esta mínimo cuadrática o máximo verosímil. El beneficio que se obtiene es la capacidad de proveer información detallada para cada actividad, con relación a las características del proceso productivo que ha de servirle de referencia, *e.g.* rendimientos a escala.

La determinación presentada de la eficiencia productiva permite mostrar un aspecto adicional de divergencia entre el DEA y la regresión. La eficiencia se calcula respecto a subconjuntos o fronteras potenciales de producción caracterizadas a partir de las observaciones realizadas, de forma que la información relativa a la tecnología *best–practice* se obtiene de una forma *ex–post*, tras haber procedido al proceso de optimización. Por el contrario, la aproximación paramétrica requiere la imposición de una forma funcional concreta sobre la tecnología de producción que implica su restricción previa al proceso de optimización, *i.e. a priori* –funciones CD, CES, translog, etc.. que imponen condiciones sobre los rendimientos a escala, sustituibilidad entre factores, etc.–. La interpretación de los niveles de eficiencia obtenidos a partir del DEA debe realizarse con precaución, *i.e.* como indicaciones de mejoras productivas potenciales, dado el carácter determinista de esta técnica[25]. La existencia de observaciones extremas, originadas por el denominado *ruido estadístico*, puede alterar sustancialmente los valores de eficiencia al definirse fronteras extremas. Al contrario, el carácter estocástico de la regresión estadística permite acomodar tales observaciones con objeto de que su efecto sobre una relación *media* quede incorporado a las estimaciones de eficiencia.

Todas estas consideraciones relativas a la comparación de la regresión estadística con el DEA pueden ser extendidas, sin perdida de generalidad, al análisis de fronteras paramétricas basado en la técnica de regresión, pudiéndose encontrar una evaluación comparada de ambas técnicas en Fried, Lovell y Schmidt (1993).

En segundo lugar, destaca como causa adicional que justifica el creciente interés de esta técnica, su flexibilidad y capacidad de adaptación para acometer diversos estudios tal como el propio doctorando ha podido constatar, *e.g.* Prieto y Zofío (1996), Zofío y Lovell (1998), Cabrera y Zofío (2000), Zofío y Prieto (2000), Zofío y Lovell (2000) y Prieto y Zofío (2000). Desde la aparición de las formulaciones DEA básicas en su forma primal, *ratio form*, y dual, *envelope form* –ambas analizadas en las próximas secciones en el contexto de productividad que nos ocupa en la presente investigación–, las extensiones realizadas han sido múltiples.

Así, con relación a su capacidad para aproximar la tecnología de producción, destaca la posibilidad de considerar diversos rendimientos variables a escala –véase Banker, Charnes y Cooper (1984) y Groskopff (1986); relaciones marginales de sustitución, Rosen, Schaffnit y Paradi: (1998); disponibilidad asimétrica de productos y factores ya sea esta fuerte –gratuita– o débil –costosa–, Färe, Grosskopf y Lovell (1985); existencia de variables no discrecionales sobre las que la actividad no tiene control directo, Banker y Morey (1986) y Banker y Morey (1989); incorporación de información cualitativa a través de variables categóricas –*dummy*–; restricciones sobre los precios sombra o ponderaciones, Thompson *et al.* (1986), y un largo etcétera. Una vez caracterizada la tecnología, es posible considerar diversas

[25] En la actualidad se realizan importantes esfuerzos con objeto de dotar a esta técnica de un carácter estocástico que permita acometer procesos de evaluación estadística de los resultados obtenidos, *e.g.* niveles de confianza, contrastación de hipótesis, etc., –véanse, por ejemplo, Simar y Wilson (1996), Simar y Wilson (1998b)–.

transformaciones tecnológicas con objeto de alcanzar la frontera, *i.e.* índices de eficiencia entre los que destacan los modelos radiales –multiplicativos–, que implican una variación equiproporcional de los vectores de productos y factores –y que son aquellos considerados en la presente investigación dada su capacidad para proveer un cálculo de las funciones de distancia sobre la que se basa el modelo de evaluación del rendimiento de productividades, Charnes, Cooper y Rhodes (1978)– ó los modelos aditivos que implican la suma de vectores en la obtención de niveles eficientes, Charnes *et al.* (1985).

La proyección futura de los niveles actuales de investigación y aplicación del Análisis Envolvente de Datos pone de manifiesto su elevado potencial no siendo de extrañar que, en breves años, alcance el rango de instrumento fundamental de análisis de datos tal como, por ejemplo, lo constituye hoy día la propia regresión estadística con la que la hemos comparado.

4.2 El DEA y la caracterización de la tecnología de producción

La elección del Análisis Envolvente de Datos como técnica para desarrollar empíricamente el modelo de evaluación del rendimiento productivo presentado en esta investigación se justifica, de acuerdo a lo expuesto, por su simplicidad, flexibilidad, facilidad de cálculo y, particularmente, su capacidad para caracterizar la tecnología de producción de forma consistente con los axiomas introducidos en el segundo capítulo y que, desde una perspectiva teórica, permiten considerar a la función de distancia como elemento clave del modelo propuesto.

El inicio de la presente exposición considera la definición de tecnología realizada en la sección 2.1. La tecnología de producción expresa el conjunto de procesos o técnica que permite obtener en un determinado lapso temporal –período– la producción de un bien o servicio a través de la transformación y concurso de factores productivos. En términos genéricos

$$\mathrm{T}^t(x,y)=\{(x,y): x \ \text{ puede producir } \ y\}, \qquad (4.2.1)$$

mientras en términos formales la tecnología queda representada de acuerdo a (2.1.4):

$$\mathrm{T}^t(x,y)=\{(x,y):y\in \mathrm{P}^t(x)\}=\{(x,y):x\in \mathrm{L}^t(y)\},(x^t,y^t)\in \mathrm{R}_+^{N+M}, \qquad (4.2.2)$$

asumiéndose que verifica, con objeto de que se encuentre bien definida, los axiomas T.1–T.7.

La caracterización empírica de la tecnología $\mathrm{T}^t(x,y)$ en análisis aplicados exige disponer de un conjunto de i=1,...,I, actividades observadas, (x_i^t,y_i^t), que emplean en un determinado momento temporal, t, los factores $x_i^t = (x_{i1}^t,...,x_{1N}^t) \in \Re_+^N$ para producir $y_i^t = (y_{i1}^t,...,y_{iM}^t) \in \Re_+^M$ bienes y servicios. Dado este conjunto de observaciones, el Análisis Envolvente de Datos como técnica de investigación operativa permite analizar la tecnología de producción asumiendo las siguientes condiciones:

A.1. a. $\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t > 0$, b. $\sum_{n=1}^{N} x_{in}^t > 0$, i=1,...I; n=1,...,N

A.2. a. $\sum_{i=1}^{I} y_{im}^t > 0$, b. $\sum_{m=1}^{M} y_{im}^t > 0$, i=1,...I; m=1,...,M,

A.1.a. establece que al menos alguna de las actividades observadas debe emplear cada uno de los factores considerados –de forma análoga respecto a la obtención de productos en A.2.a.–. A.1.b. establece que cada actividad debe al menos emplear alguno de los factores considerados –de forma análoga respecto a los productos obtenidos en A.2.b–.

Considerando estas condiciones e introduciendo como variable de convexidad, $z_i^t \in \Re_+^I$, es posible aproximar (4.2.2) de acuerdo a

$$\mathrm{T}^t(x,y)=\left\{\begin{array}{l}(x,y):\sum_{i=1}^{I} z_i^t x_{in}^t \le x_n^t, n=1,...,\mathrm{N} \\ \qquad\quad \sum_{i=1}^{I} z_i^t y_{im}^t \ge y_m^t, m=1,...,\mathrm{M} \\ \qquad\quad \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, i=1,...,\mathrm{I}\end{array}\right\}, \qquad (4.2.3)$$

donde las actividades observadas pertenecen a la tecnología de producción, $(x_i^t, y_i^t) \in T^t(x,y)$, así como todas las combinaciones lineales generables entre estas de acuerdo a la variable z_i^t, $(z_i^t x_i^t, z_i^t y_i^t) \in T^t(x,y)$, $\sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1$. El gráfico 4.1.1 permite representar la aproximación que el DEA realiza de la tecnología (4.2.3) de acuerdo a las i=1,...I actividades observadas y sus posibles combinaciones lineales. Considerando, por simplicidad, que se hallan observado únicamente las i=1,...,4 actividades representadas, el conjunto de posibilidades de producción se corresponde con:

$$T^t(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} (x,y): z_1^t x_1^t + z_2^t x_2^t + z_3^t x_3^t + z_4^t x_4^t \leq x^t, \\ \qquad z_1^t y_1^t + z_2^t y_2^t + z_3^t y_3^t + z_4^t y_4^t \geq y^t, \\ \qquad z_1^t + z_2^t + z_3^t + z_4^t = 1, \\ \qquad z_i^t \geq 0, i = 1,...,I \end{array} \right\} \tag{4.2.4}$$

Si se considera, por ejemplo, $z_1 = 1$, $z_2 = z_3 = z_4 = 0$, se obtiene la primera actividad, i=1, y considerando las desigualdades, se genera el área al sureste de la primera actividad. Si de forma alternativa se considera $z_1 = z_2 = 1/2$, $z_3 = z_4 = 0$, se obtiene el punto intermedio combinación lineal de (x_1^t, y_1^t) y (x_2^{t*}, y_2^{t*}) y todo el área generada por esta observación. Resulta posible proceder de forma análoga para el resto de actividades y valores del vector z^t, con objeto de obtener el área sombreada comprendida entre las observaciones i=1,2,3 y sus extensiones. Nótese que a excepción de las tres primeras observaciones, la actividad i=4, es ineficiente al encontrarse dominada en la generación del conjunto DEA de posibilidades de producción que caracteriza la tecnología, *i.e.* esta actividad no juega ningún papel en su definición.

El conjunto DEA de posibilidades de producción (4.2.3) se dice aproxima de forma consistente la tecnología de producción $T^t(x,y)$, (4.2.2), al satisfacer los axiomas T.1–T.7. que la caracterizan de forma genérica, véase Färe y Grosskopf (1996). En la próxima sección se muestra la técnica de programación matemática que permite calcular las funciones de distancia sobre (4.2.3) determinantes de la eficiencia técnica de las actividades; sin embargo, ¿cómo habría de ser la aproximación DEA del conjunto de posibilidades de producción, $\hat{T}^t(x,y)$, que satisfaciendo T.8 y T.9, permite calcular las funciones de distancia caracterizadoras de la eficiencia productiva?

El conjunto DEA que permite aproximar la estructura productiva $\hat{T}^t(x,y)$ se caracteriza por satisfacer la propiedad de homogeneidad lineal de primer grado sobre la tecnología. En tal caso se observa que

$$\hat{T}^t(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} (x,y): \sum_{i=1}^{I} z_i^t x_{in}^t \le x_n^t, n = 1,\dots,N \\ \qquad \sum_{i=1}^{I} z_i^t y_{im}^t \ge y_m^t, m = 1,\dots,M \\ \qquad z_i^t \ge 0, i = 1,\dots,I. \end{array} \right\}, \tag{4.2.5}$$

definiéndose el cono convexo –máximo hiperplano que intersecta el origen– que contiene al conjunto de actividades observadas gracias al valor libre –no negativo– que puede asumir las variables de intensidad z_i^t. Sin embargo, con relación a la asunción de separabilidad entre productos y factores resulta evidente la imposibilidad de imponer tal propiedad al ser las variables de intensidad únicas para ambos vectores. De esta forma se manifiesta la imposibilidad empírica de establecer una tecnología que satisfaga tal propiedad por lo que las funciones de distancia y los propios índices de Malmquist aplicados adolecen de esta deficiencia tal como se pone de manifiesto en la última sección del presente capítulo.

De nuevo el gráfico 4.1.1 permite mostrar al conjunto de posibilidades de producción que tiene como soporte la actividad (x_2^{t*}, y_2^{t*}). En el caso representado este conjunto viene determinado por

$$\hat{T}^t(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} (x,y): z_1^t x_1^t + z_2^t x_2^t + z_3^t x_3^t + z_4^t x_4^t \le x^t, \\ \qquad z_1^t y_1^t + z_2^t y_2^t + z_3^t y_3^t + z_4^t y_4^t \ge y^t, \\ \qquad z_i^t \ge 0, i = 1,\dots,I. \end{array} \right\} \tag{4.2.6}$$

En esta ocasión, la consideración de cualquier valor no negativo para las variables de intensidad de una actividad z_i, *e.g.* $z_1 > 0$, $z_2 = z_3 = z_4 = 0$, permite proyectar esta actividad hacia o desde el origen definiendo como conjunto de posibilidades de producción el cono que presenta como soporte la actividad considerada –en este caso (x_1^t, y_1^t)–. Procediendo de forma análoga con el resto de observaciones y sus posibles combinaciones lineales es posible constatar que la proyección de la segunda actividad, $z_2 > 0$, $z_1 = z_3 = z_4 = 0$, es aquella que define el cono que incorpora al conjunto de actividades observadas. En la próxima sección se muestra como tal representación de la tecnología permite calcular la eficiencia productiva de las actividades.

Así, se puede concluir que el DEA es una técnica válida para aproximar la tecnología de producción sobre la que han de calcularse las funciones de distancia que caracterizan el rendimiento productivo de las observaciones.

4.3 La determinación del rendimiento productivo a través del Análisis Envolvente de Datos

4.3.1 Cálculo de las funciones $D_d^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$ d=O,I,T, – eficiencia técnica–

Una vez aproximada la tecnología de producción de acuerdo al DEA, resulta necesario calcular las funciones de distancia (2.2.1–2–5) representativas de la eficiencia técnica en las dimensiones de productos, factores y tecnológica. En el caso de la función de distancia de *outputs*, (2.2.1), el objetivo es calcular la mínima expansión radial del vector de productos –máxima producción generable–, consistente con las posibilidades que brinda la tecnología, $T^t(x, y)$ –y dado un determinado nivel de factores–. De acuerdo a la tecnología aproximada por el DEA según el conjunto de posibilidades de producción (4.2.3), es posible calcular la función de distancia para la actividad i', $(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$, resolviendo el siguiente programa de optimización:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \theta_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t \geq y_{i'm}^t / \theta_{i'}^t, m = 1,\dots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t \leq x_{i'n}^t, n = 1,\dots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\dots,I
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

El objetivo del presente programa es obtener el escalar $\theta_{i'}^t > 0$, que permite la mínima expansión posible del vector de productos con objeto de alcanzar el subconjunto eficiente de posibilidades de producción –nótese que el conjunto de posibilidades de producción establecido en (4.2.3) se encuentra incorporado a la formulación en el conjunto de las restricciones de productos y factores–. El programa (4.3.1), que exige el uso de técnicas de optimización no lineales dado el carácter fraccional de las m = 1,...,M primeras restricciones, puede ser resuelto a través de técnicas de optimización lineales resolviendo:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \varphi_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t + \varphi_{i'}^t y_{i'm}^t \leq 0, \; m = 1,\dots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t \leq x_{i'n}^t, n = 1,\dots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\dots,I,
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

de forma que al calcular $\varphi_{i'}^t = (\theta_{i'}^t)^{-1}$, estamos obteniendo la inversa de la función de distancia de productos (2.2.1). De acuerdo a la definición de eficiencia débil adoptada en la presente investigación, $\text{IsocP}^t(x)$, (2.2.13), una actividad será técnicamente eficiente si el valor de la función objetivo en (4.3.1–2) resulta unitario,

$\theta_{i'}^{\,t} = \varphi_{i'}^{\,t} = 1$ –no siendo factibles incrementos en el vector de productos generados–, mientras que si éste resulta inferior a la unidad, $\theta_{i'}^{\,t} < 1$, la actividad presenta ineficiencia técnica, (2.2.16) [26]. La información relevante que se obtiene en la resolución del programa (4.3.2), que se corresponde con la formulación dual de aquel introducido por Banker, Charnes y Cooper (1984) –analizado en detalle en la próxima sección por su interpretación intuitiva en términos de productividades–, permite también identificar, a través de las variables optimizadas $z_i^{t*} \neq 0$, las actividades que definen la frontera de referencia *best practice* para $(x_{i'}^{t}, y_{i'}^{t})$, –*i.e.* que definen $\mathrm{IsocP}^t(x)$ de una forma empírica–. Así, variables no nulas revelan la *intensidad* con la que las actividades eficientes determinan el potencial de producción respecto al cual se compara a la actividad evaluada –de ahí el nombre con el que se conoce en la literatura DEA a las variables z_i^{t*}–. Adicionalmente, de revelarse la actividad evaluada $(x_{i'}^{t}, y_{i'}^{t})$ como eficiente en el proceso de optimización, $\theta_{i'}^{\,t} = \varphi_{i'}^{\,t} = 1$, su multiplicador asociado $z_{i'}^{t}$ resulta unitario mientras los restantes son nulos $z_i^t = 0,\ i \neq i'$, verificándose las *n y m* restricciones en forma de igualdad.

En el gráfico 4.1.1, la evaluación de la actividad (x_4^t, y_4^t) en la dimensión de productos identifica como actividad de referencia eficiente la combinación lineal de las actividades (x_2^t, y_2^t) y (x_3^{t*}, y_3^{t*}), de forma que siendo $(x_4^t, \tilde{y}_4^t) = (x_4^t, y_4^t/\theta_4^t)$, la producción máxima potencial resulta $\tilde{y}_4^t = z_2^{t*} \cdot y_2^{t*} + z_3^{t*} \cdot y_3^t$.

Al igual que en los capítulos precedentes, resulta posible introducir el programa DEA que permite establecer el nivel de eficiencia técnica desde la perspectiva de los factores. Considerando que el objetivo es calcular el escalar λ_i^t que indica la máxima contracción radial del vector de factores –mínimo de factores utilizables– dado el nivel de producto obtenido, (2.2.3), es posible determinar tal valor resolviendo:

[26] Quedan así excluidas las formulaciones bietápicas del programa (4.3.1) que permiten, tras su transformación canónica, introducir las variables de holgura o *slacks*, que posibilitan identificar la eficiencia de una actividad en términos de los subconjuntos Efic(·), (2.2.10–11–12) –ver Charnes *et al.* (1994) para una introducción de estas formulaciones–.

$$\begin{aligned}
\max \quad & D_1^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \lambda_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t \geq y_{i'm}^t, m = 1,\ldots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t \leq x_{i'n}^t / \lambda_{i'}^t, n = 1,\ldots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\ldots,I,
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

respecto al que se pueden realizar consideraciones similares a (4.3.1), con relación al conjunto aproximado de posibilidades de producción (4.2.3) –recogido en las restricciones–, el valor de las variables de intensidad z_i^t y la no linealidad de la variable objetivo λ_i^t en las n=1,...,N restricciones de factores. De nuevo es posible reexpresar (4.3.3) con objeto de facilitar su cálculo a través el siguiente cambio de variable: $\gamma_i^t = (\lambda_i^t)^{-1}$, y, así, resolver

$$\begin{aligned}
\min \quad & D_1^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \gamma_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t \geq y_{i'm}^t, m = 1,\ldots,M \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t + \gamma_{i'}^t x_{i'n}^t \geq 0, n = 1,\ldots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\ldots,I.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

De nuevo la resolución del programa (4.3.4) permite determinar si una unidad es técnicamente eficiente al pertenecer al subconjunto IsocL^t(y), (2.2.8). De verificarse un escalar (4.3.3–4) unitario, $(\gamma_{i'}^t)^{-1} = \lambda_{i'}^t = 1$, no son factibles reducciones en el vector de factores y la actividad evaluada es técnicamente eficiente, mientras que $\lambda_i^t > 1$ indica la posibilidad de reducciones potenciales, *i.e.* la actividad es ineficiente, (2.2.17). En el caso de la actividad (x_4^t, y_4^t) en el gráfico 4.1.1, la evaluación de su eficiencia en la dimensión de factores identifica como actividad de referencia la combinación lineal de las actividades (x_1^t, y_1^t) y (x_2^{t*}, y_2^{t*}), de forma que siendo $(\tilde{x}_4^t, y_4^t) = (x_4^t/\lambda_4^t, y_4^t)$, el empleo mínimo potencial de factores resulta $\tilde{x}_4^t = z_1^{t*} \cdot x_1^t + z_2^{t*} \cdot x_2^{t*}$.

Por último, se deben introducir los programas DEA que permiten calcular la función de distancia tecnológica, (2.2.5), que muestra la mínima expansión equiproporcional del vector de productos y la máxima contracción equiproprocional del vector de factores consistente, una vez más, con la posibilidades que brinda la tecnología; es decir, aquellas reestructuraciones productivas que permiten alcanzar el máximo potencial de producción con el mínimo potencial de factores utilizados. La función de distancia tecnológica se calcula resolviendo,

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_T^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \phi_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t \geq y_{i'm}^t / \phi_{i'}^t, m = 1,\ldots, M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t \leq \phi_{i'}^t x_{i'n}^t, n = 1,\ldots, N, \qquad\qquad (4.3.5) \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\ldots, I.
\end{aligned}
$$

Este programa debe resolverse a través de técnicas de optimización no lineales aunque Färe, Grosskopf y Lovell (1994:204) sugieran que puede ser transformado en un programa lineal a través de la siguiente formulación:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_T^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^2 = \zeta_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^{t\prime} \geq y_{i'm}^t, m = 1,\dots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^{t\prime} \leq \zeta_{i'}^t x_{i'n}^t, n = 1,\dots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^{t\prime} = \phi_{i'}^t, \\
& z_i^{t\prime} \geq 0, i = 1,\dots,I,
\end{aligned}
\tag{4.3.6}
$$

donde al multiplicar la función objetivo y las restricciones en (4.3.5) por $\phi_{i'}^t$ se obtiene $\zeta_{i'}^t = (\phi_{i'}^t)^2$ y $z_i^{t\prime} = \phi_{i'}^t \cdot z_i^t$. Sin embargo, aunque (4.3.6) sea análogo al programa (4.3.4), su naturaleza no lineal se manifiesta en la última restricción $\sum_{i=1}^{I} z_i^{t\prime} = \phi_{i'}^t$, equivalente a $\sum_{i=1}^{I} z_i^{t\prime} = (\zeta_{i'}^t)^{1/2}$. La confusión generada por la propuesta de Färe, Grosskopf y Lovell (1994) se remonta a Färe, Grosskopf y Lovell (1985) donde proponen igual transformación a (4.3.6) en la resolución de funciones de distancia tecnológicas definidas sobre una especificación de la tecnología que resulta homogénea de primer grado exhibiendo rendimientos constantes a escala, *i.e.* $\hat{T}^t(x,y)$ –véase (2.4.5–6)–. En términos DEA se excluye la restricción $\sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1$ siendo entonces posible expresar el programa análogo a (4.3.5) en términos lineales –la discusión relativa a esta cuestión se pospone a la sección 4.3.3 donde se analiza el cálculo de las funciones de distancia que determinan la eficiencia productiva, *i.e.* que se definen sobre $\hat{T}^t(x,y)$ –.

Así, al exigir la transformación propuesta por Färe, Grosskopf y Lovell (1994) el empleo de técnicas de optimización no lineales, Zofío y Lovell (2000) proponen, con objeto de obtener directamente la función de distancia tecnológica $D_T^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$, invertir las m=1,...,M restricciones no lineales de productos. Esta forma de reexpresar (4.3.5) exige la resolución de [27]:

[27] La inversión de las restricciones no lineales en (4.3.1) no persigue su linealización, pues con relación a la situación original logra la linealidad en $\theta_{i'}^t$ pero no así en z_i^t. El objetivo de tal inversión es facilitar el cálculo de $\theta_{i'}^t$ a través de técnicas de optimización no lineales. Así, el modelo exige para su resolución la utilización de métodos de optimización como el aquí utilizado del gradiente reducido generalizado (GRG) –véase Lasdon y Smith, (1992)–. Una visión general de los

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \phi_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\left(\sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t\right)^{-1} + \phi_{i'}^t \left(y_{i'm}^t\right)^{-1} \geq 0, m = 1,\dots,M \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t + \phi_{i'}^t x_{i'n}^t \leq 0, n = 1,\dots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\dots,I.
\end{aligned}
\tag{4.3.7}
$$

Al igual que (4.3.2) y (4.3.4), la resolución de (4.3.7) permite establecer si una actividad es eficiente perteneciendo a $\text{IsocT}^t(x,y)$, (2.2.9), $\phi_{i'}^t = 1$, o si, por el contrario, son factibles reestructuraciones productivas que incrementen los productos generados y reduzcan los factores empleados, $\phi_{i'}^t < 1$, (2.2.18).

Considerando de nuevo el ejemplo gráfico 4.1.1, la evaluación de la actividad (x_4^t, y_4^t) en la dimensión tecnológica, identifica como actividad de referencia la resultante de la combinación lineal de las actividades (x_2^{t*}, y_2^{t*}) y (x_3^t, y_3^t), de forma que la producción y factores potenciales se corresponden con $(\tilde{x}_4^t, \tilde{y}_4^t) = (x_4^t \cdot \phi_4^t, y_4^t/\phi_4^t) = (z_2^{t*} \cdot x_2^{t*} + z_3^{t*} \cdot x_3^t, z_2^{t*} \cdot y_2^{t*} + z_3^{t*} \cdot y_3^t)$.

4.3.2 La interpretación primal de la función de distancia $D_d^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$

Los programas (4.3.1–6) permiten calcular las funciones de distancia $D_d^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$, d=O,I,T, de acuerdo a técnicas de optimización matemática DEA que aproximan la tecnología $T^t(x,y)$ sobre la que estas funciones se encuentran definidas. En la sección 2.2.2.1 se muestra como las funciones de distancia, determinantes del nivel de eficiencia técnica de las observaciones, pueden ser interpretadas de forma equivalente como índices de cuantía que permiten establecer el diferencial de rendimiento productivo entre las actividades observadas y sus

métodos de programación no lineal puede encontrase en Gill, Murray y Wright (1981) y Fletcher (1987).

proyecciones eficientes. La formulación primal de los programas (4.3.1–3–5) facilita la interpretación a las funciones de distancia calculadas en este sentido. Centrándose en la función de productos para exponer este desarrollo –si bien se podría realizar en términos de la función de factores o tecnológica–, Banker, Charnes y Cooper (1984) muestran como el dual de la formulación de productos (4.3.1) se corresponde con:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni'}^t + \upsilon_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi}^t + \sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni}^t + \upsilon_{i'}^t \geq 0, i = 1,\dots,I \\
& \sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi'}^t = 1 \\
& \mu_m^t, v_n^t \geq 0, m = 1,\dots,M; n = 1,\dots,N,
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

donde la función objetivo minimiza del empleo potencial de factores para la producción unitaria *virtual*, $\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{t*} y_{mi'}^t = 1$, sujeta a la restricción optimizada $-\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{t*} y_{mi}^t + \sum_{n=1}^{N} v_n^{t*} x_{ni}^t + \upsilon_{i'}^{t*} = 0$, que define el hiperplano de referencia representativo del subconjunto eficiente de posibilidades de producción. En el gráfico 4.1.1, la evaluación de la actividad (x_4^t, y_4^t) en la dimensión de productos identifica la recta combinación lineal de las actividades (x_2^{t*}, y_2^{t*}) y (x_3^t, y_3^t) como subconjunto de referencia respecto al cual evaluar la eficiencia. El programa (4.3.8) puede ser expresado de forma equivalente como:

$$\min \quad D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \frac{\sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni'}^t + \upsilon_{i'}^t}{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi'}^t}$$

$$\text{s.a} \qquad \qquad (4.3.9)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni}^t + \upsilon_{i'}^t}{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi}^t} \geq 1, \; i = 1,\ldots,I$$

$$\mu_m^t, v_n^t \geq 0, \; m = 1,\ldots,M, n = 1,\ldots,N,$$

que representa procesos optimizadores basados en programas fraccionales susceptibles de generar infinitas soluciones dado que si para una determinada actividad i', (μ^t, v^t) representa los valores optimizados de las ponderaciones, $(\beta\mu^t,\beta v^t)$ también constituye una solución, $\beta > 0$. Con objeto de poder expresar el programa en términos lineales se recurre a la transformación propuesta por Charnes y Cooper (1962) mientras que para establecer una única solución representativa, (μ^{t*},v^{t*}), es posible establecer como condición de normalización la restricción que verifica $\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{t*} y_{mi}^t = 1$, véase Cooper, Seiford y Tone (2000). Se obtiene así el programa (4.3.8) que es el normalmente utilizado para calcular la función de distancia de productos.

Sin embargo, con objeto de expresar la función de distancia de productos en la función objetivo de acuerdo a su significado en términos de rendimiento productivo, es finalmente posible reformular (4.3.9) obteniendo:

$$\max \quad D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi'}^t}{\sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni'}^t + \upsilon_{i'}^t}$$

$$\text{s.a} \qquad\qquad (4.3.10)$$

$$\frac{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi}^t}{\sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni}^t + \upsilon_{i'}^t} \leq 1, i = 1,\ldots,I$$

$$\mu_m^t, v_n^t \geq 0, m = 1,\ldots,M; n = 1,\ldots,N.$$

Así, se puede apreciar como la caracterización de la tecnología a través del DEA recogida en (4.2.3) y el posterior cálculo de las funciones de distancia de productos, permite interpretar a ésta como la razón de agregados *virtuales* de productos y factores incorporando el parámetro $\upsilon_{i'}^t$ representativo de la escala de operaciones –nótese, así mismo, que (4.3.10) establece como límite de la función de distancia la unidad, siendo coherente con el desarrollo teórico del segundo capítulo–.

Con relación a los pesos agregadores de productos, μ_m^t, y factores, v_n^t, estos pueden ser interpretados como los precios sombra –en contraposición con los precios de mercado de acuerdo a la discusión mantenida en la sección 1.1.4–, que se derivan del proceso de optimización. El programa (4.3.10) "*asigna...a la DMU las ponderaciones más favorables que permiten las restricciones*" Charnes, Cooper y Rhodes (1978:430), mostrando la relativización que se realiza del rendimiento productivo. La función objetivo muestra así la capacidad de la actividad evaluada para maximizar rendimiento obtenido respecto al nivel de factores utilizados dada la producción potencial que, reflejada en las restricciones, tienen el resto de $i = 1,\ldots, I$ actividades observadas. La relativización del rendimiento obtenido se observa en iguales restricciones, al reflejar como valor máximo de rendimiento generable no aquel observado en términos absolutos, sino la unidad que representa el máximo posible de referencia. Así, en el proceso de maximización, el valor de la función objetivo, $D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$, refleja la distancia existente entre el rendimiento obtenido por la actividad evaluada y la unidad, garantizando el problema la existencia de, al menos, una actividad eficiente. Así, en la resolución de (4.3.10), los pesos de productos y factores representan las ponderaciones más favorables para la actividad evaluada en el proceso de maximización de la función objetivo. A través de estas ponderaciones se refleja, en primer lugar, la importancia de cada producto generado, $\mu_m^{i} \neq 0$ y factor empleado, $v_n^{i} \neq 0$, en la determinación del nivel de eficiencia de la actividad: $\sum_{m=1}^{M}\mu_m^{i*}y_{mi'}^{i} / \sum_{n=1}^{N}v_n^{i}x_{ni'}^{i}$ y, en segundo lugar, el hiperplano de referencia, *facet*, que establece el máximo de producción generable –subconjunto eficiente de acuerdo a lo ya establecido con relación a (4.3.8)–.

Con relación al parámetro de escala, υ_i^{i}, éste recoge la presencia de rendimientos variables a escala. Banker Charnes y Cooper (1984) muestran como es posible caracterizar tales rendimientos en términos del hiperplano de referencia optimizado y, más concretamente, de υ_i^{i*}. Siendo $\upsilon_i^{i*} > 0$, se verifican rendimientos decrecientes a escala mientras $\upsilon_i^{i*} < 0$ pone de manifiesto la existencia de rendimientos crecientes y, finalmente, un parámetro nulo denota la presencia de rendimientos constantes. Una interpretación precisa del efecto que tiene la presencia del parámetro de escala υ_i^{i*} se obtiene atendiendo a la función objetivo del programa (4.3.8). La relación $\sum_{n=1}^{N}v_n^{i}x_{ni'}^{i}$ refleja la cuantía mínima de factores que habría de ser necesaria para generar la producción unitaria en presencia de rendimientos constantes a escala, $\upsilon_i^{i*} = 0$. Alternativamente, la presencia de rendimientos decrecientes a escala, $\upsilon_i^{i*} > 0$, incrementa la necesidad de factores empleados mientras que un valor negativo del parámetro de escala, $\upsilon_i^{i*} < 0$, al reflejar rendimientos crecientes, reduce la necesidad de factores productivos.

En el gráfico 4.1.1, los pesos del único producto, μ^{i*}, y factor, v^{i*}, que permiten la evaluación de la actividad (x_4^{i}, y_4^{i}) son positivos, poniendo de manifiesto la necesidad de ponderar ambas variables en el proceso de optimización, mientras que el parámetro de escala υ_4^{i*} resulta positivo, reflejando la existencia de rendimientos decrecientes a escala en la recta –hiperplano– de referencia que es combinación lineal de las actividades (x_2^{i*}, y_2^{i*}) y (x_3^{i}, y_3^{i}), *i.e.* $\mu^{i*}\bar{y} - v^{i*}\cdot x^{i} - \upsilon_4^{i*} = 0$.

La función de distancia de productos de la observación (x_4^t, y_4^t) es $D_O^t(x_4^t, y_4^t) = y_4^t / [(v^{t*} \cdot x_4^t + \upsilon_4^{t*}) / \mu^{t*}]$, donde la producción observada se relativiza respecto al conjunto eficiente de posibilidades de producción, *i.e.* $TE_4^t = y_4^t / \tilde{y}_4^t$.

4.3.3 Cálculo de las funciones $D_d^t(x_i^t, y_i^t)$, d=O,I,T, –eficiencia productiva–

Las apreciaciones realizadas en la anterior sección sirven de introducción a la exposición relativa a las funciones de distancia $D_d^t(x_i^t, y_i^t)$, d=O,I,T, determinantes de la eficiencia productiva de una actividad.

Tal como se ha puesto de manifiesto teóricamente en la sección 2.2, la evaluación de la eficiencia productiva de una actividad exige la caracterización de una tecnología $\hat{T}^t(x, y)$ que presenta homogeneidad lineal –T.8, rendimientos constantes a escala–, y, con objeto de que la función de distancia definida sobre ella pueda ser expresada como razón de funciones agregadoras de productos y factores, la existencia de homoteticidad simultánea –T.9, *i.e.* la función de distancia es separable en ambos conjuntos de variables–. Empíricamente, la aproximación de la tecnología de producción $\hat{T}^t(x, y)$ que realiza el DEA de acuerdo a (4.2.5), permite imponer la condición de homogeneidad lineal, mientras que este no es el caso respecto a aquella de homoteticidad simultánea. Así, en los procesos de optimización que se presentan en esta sección, tal separabilidad no es factible.

Esta realidad pone de manifiesto las limitaciones que existen en la transición de un análisis teórico, que tiene como objetivo mostrar de forma intuitiva la representación de índices de productividad como funciones agregadoras de productos a funciones agregadoras de factores, y los instrumentos matemáticos que se encuentran al alcance del investigador con objeto de desarrollar el análisis en términos aplicados. Esta circunstancia no hace sino mostrar la relación de dependencia existente entre los productos obtenidos y los factores utilizados de forma que, en sí, el proceso productivo ha de ser inseparable, *i.e.* no tiene sentido separar el vector de productos de aquel de factores pues éste último es función de los primeros–. La consecuencia fundamental de la ausencia de homoteticidad simultánea en análisis empíricos es que, a diferencia de los desarrollos teóricos expuestos en el tercer capítulo, es imposible mostrar los índices de Malmquist definidos en términos de funciones de distancia, como representaciones de funciones agregadoras de productos a aquellas de factores.

Estas consideraciones pueden apreciarse observando los programas de optimización relativos al cálculo de las funciones de distancia determinantes de la eficiencia productiva. Banker y Thrall (1992) demuestran como la tecnología de producción caracterizada por el DEA –presente en la resolución del programa (4.3.8)– satisface homogeneidad lineal de primer grado, exhibiendo rendimientos constantes a escala, si el parámetro υ_i^{t*} optimizado, resulta nulo. Bajo esta condición, y centrando de nuevo el desarrollo en la función de distancia de productos, es posible expresar el primal introducido en (4.3.8) de acuerdo a:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \sum_{n=1}^{N} \hat{v}_n^t x_{ni'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}_m^t y_{mi}^t + \sum_{n=1}^{N} \hat{v}_n^t x_{ni}^t \geq 0, i = 1,\dots,I \\
& \sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}_m^t y_{mi'}^t = 1 \\
& \hat{\mu}_m^t, \hat{v}_n^t \geq 0, m = 1,\dots,M; n = 1,\dots,N,
\end{aligned}
\tag{4.3.11}
$$

donde, en esta ocasión, la función objetivo muestra la cuantía mínima de factores necesaria para obtener la unidad *–virtual–* de producción sujeta a la restricción optimizada $-\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}_m^{t*} y_{mi}^{t*} + \sum_{n=1}^{N} \hat{v}_n^t x_{ni}^t = 0$, representativa del hiperplano que, intersectando al origen de coordenadas, define el límite exterior del cono convexo que sirve de referencia para evaluar la eficiencia productiva, *i.e.* el subconjunto óptimo de posibilidades de producción. El programa (4.3.11) puede ser expresado de forma equivalente como:

$$\min \quad D^{t}_{\hat{O}}(x^{t}_{i'}, y^{t}_{i'})^{-1} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \hat{v}^{t}_{n} x^{t}_{ni'}}{\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}^{t}_{m} y^{t}_{mi'}}$$

$$\begin{aligned} & \text{s.a} \\ & \frac{\sum_{n=1}^{N} \hat{v}^{t}_{n} x^{t}_{ni} + \upsilon^{t}_{i'}}{\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}^{t}_{m} y^{t}_{mi}} \geq 1, \ i = 1, \ldots, I \\ & \hat{\mu}^{t}_{m}, \hat{v}^{t}_{n} \geq 0, \ m = 1, \ldots, M, n = 1, \ldots, N, \end{aligned} \qquad (4.3.12)$$

que, una vez más, pone de manifiesto la necesidad de proceder al cálculo de (4.3.11) con objeto de proceder a su linealización dado el carácter fraccional que presenta –introduciendo la condición de normalización $\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}^{t}_{m} y^{t}_{mi} = 1$ con objeto de obtener una única solución representativa–. Sin embargo, y al igual que en las funciones de distancia determinantes de la eficiencia técnica, (4.3.11) nos facilita la expresión final de la función de distancia de productos como objetivo de un programa que puede ser interpretado en términos de productividades. Invirtiendo la formulación anterior se obtiene:

$$\max \quad D^{t}_{\hat{O}}(x^{t}_{i'}, y^{t}_{i'}) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}^{t}_{m} y^{t}_{mi'}}{\sum_{n=1}^{N} \hat{v}^{t}_{n} x^{t}_{ni'}}$$

$$\begin{aligned} & \text{s.a} \\ & \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}^{t}_{m} y^{t}_{mi}}{\sum_{n=1}^{N} \hat{v}^{t}_{n} x^{t}_{ni}} \leq 1, i = 1, \ldots, I \\ & \hat{\mu}^{t}_{m}, \hat{v}^{t}_{n} \geq 0, m = 1, \ldots, M; n = 1, \ldots, N, \end{aligned} \qquad (4.3.13)$$

Este programa se corresponde con la formulación originalmente introducida por Charnes, Cooper y Rhodes (1978) y que, de forma análoga a la interpretación realizada de (4.3.10), expresa la máxima productividad generable por la actividad evaluada relativizada respecto al conjunto de las i=1,...,I actividades observadas. De nuevo, el valor de referencia máximo es la unidad y, atendiendo a Banker (1984), su resolución permite establecer la escala de operaciones más productiva, *most productive scale size (mpss)*, en términos de los pesos respectivos de productos y factores, $\hat{\mu}^{i}_{m}$ y $\hat{v}^{i}_{n}$. Así, una actividad que se revela como eficiente al resolver (4.3.13), obtiene la máxima productividad al conseguir un valor unitario en el proceso de optimización de acuerdo a la agregación –mas favorable– de productos y factores que se deriven del proceso.

Las relaciones expuestas en el programa (4.3.13) pueden ilustrase una vez más a través del gráfico 4.1.1. El conjunto de posibilidades de producción $\hat{T}^{i}(x,y)$, aproximado en términos de (4.2.5), queda representado por el cono convexo cuyo soporte es la actividad (x_2^{i*},y_2^{i*}). En el proceso de optimización, (x_2^{i*},y_2^{i*}) define la recta –hiperplano– que, intersectando al origen, sirve de referencia en la evaluación de cualquier actividad. De esta forma la función de distancia para la observación (x_4^{i},y_4^{i}) resulta ser $D_{O}^{i}(x_4^{i},y_4^{i}) = y_4^{i}/(\hat{v}^{i*}\cdot x_4^{i}/\hat{\mu}^{i*})$, donde el denominador representa la producción potencial, $\hat{y}_4^{i}$, generable con el nivel de factores x_4^{i}, y que viene determinada por $\hat{\mu}^{i*}\cdot\hat{y} - \hat{v}^{i*}\cdot x^{i} = 0$ en (4.3.11). Si ahora se reordenan los pesos de productos y factores es posible obtener $D_{O}^{i}(x_4^{i},y_4^{i}) = (\hat{\mu}^{i*}/\hat{v}^{i*})\cdot(y_4^{i}/x_4^{i})$; expresión que se corresponde con (2.2.25) siendo la función transformadora $J^{i}(\cdot) = \hat{\mu}^{i*}/\hat{v}^{i*}(\cdot)$. En el caso de la observación (x_4^{i},y_4^{i}), es posible expresar la función de distancia como $D_{O}^{i}(x_4^{i},y_4^{i}) = [y_4^{i}/x_4^{i}]/[(\hat{v}^{i*}\cdot x_4^{i}/\hat{\mu}^{i*})/x_4^{i}] = [y_4^{i}/x_4^{i}] / [\hat{y}_4^{i}/x_4^{i}]$, de forma que se aprecia como $D_{O}^{i}(x_4^{i},y_4^{i}) = PE_4^{i} = RFP_4^{i} = AFP_4^{i}/OFP_i^{i}$. En el ejemplo gráfico, OFP_i^{i} se corresponde con la productividad de (x_2^{i*},y_2^{i*}) dado que $D_{O}^{i}(x_2^{i},y_2^{i}) = (\hat{\mu}^{i*}/\hat{v}^{i*})\cdot(y_2^{i}/x_2^{i}) = 1$, de forma que esta observación se revela eficiente en términos productivos, $OFP_i^{i} = y_2^{i*}/x_2^{i*}$.

Analizada la formulación en forma de ratios que permiten el cálculo de las funciones de distancia, podemos proceder a analizar la expresión del programa dual *envolvente* siguiendo un proceso de presentación inverso al de la sección anterior. Charnes, Cooper y Rhodes (1978) muestran como la formulación dual a (4.3.11) se corresponde con:

$$
\begin{aligned}
\max\quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \hat{\varphi}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^t + \hat{\varphi}_{i'}^t y_{i'm}^t \le 0,\ m = 1,\dots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^t \le x_{i'n}^t, n = 1,\dots,N, \\
& \hat{z}_i^t \ge 0, i = 1,\dots,I,
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

donde la ausencia del parámetro de escala, υ_i^t, se traduce en la desaparición de su restricción asociada, $\sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1$, respecto a su análogo (4.3.2). Al igual que en la sección anterior, una actividad será eficiente en términos productivos si $(\hat{\varphi}_{i'}^t)^{-1} = \hat{\theta}_{i'}^t = 1$, donde $\hat{\theta}_{i'}^t$ representa la función de distancia de productos –representativa de la eficiencia productiva–, que se correspondería con un programa análogo a (4.3.1) sin la restricción asociada a los rendimientos variables a escala, *i.e.*

$$
\begin{aligned}
\min\quad & D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \hat{\theta}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^t \ge y_{i'm}^t / \hat{\theta}_{i'}^t, m = 1,\dots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^t \le x_{i'n}^t, n = 1,\dots,N, \\
& \hat{z}_i^t \ge 0, i = 1,\dots,I
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

Por el contrario, siendo $(\hat{\varphi}_{i'}^t)^{-1} = \hat{\theta}_{i'}^t < 1$, la actividad evaluada no alcanza la máxima productividad potencial, no perteneciendo al subconjunto óptimo de posibilidades de producción, $\text{Isoc}\,\hat{P}(x)$, (2.2.32), que determina la escala óptima de operaciones y las características de los rendimientos a escala en el hiperplano de referencia para la actividad evaluada. De nuevo, la resolución de (4.3.14) no solo permite determinar la eficiencia productiva de la actividad evaluada sino, así mismo, identificar a las actividades que definen el hiperplano óptimo de referencia perteneciendo a Isoc $\hat{P}(x)$ y sus características en términos de rendimientos a escala. Esta última apreciación muestra la potencialidad del programa (4.3.14) –y sus análogos en la dimensión de factores y tecnológicas que se exponen posteriormente–, en la determinación de la tecnología de producción. Si bien la función de distancia que calculan se corresponde con (2.2.22), $D_{\delta}^{l}(x_{i'}^{l}, y_{i'}^{l})$, *i.e.* respecto a los hiperplanos óptimos–, es posible determinar si los rendimientos a escala que existen en los hiperplanos eficientes en la resolución del programa (4.3.2) son crecientes, constantes o decrecientes.

Considerando la identificación de las actividades que, al configurar el subconjunto óptimo de producción determinan la escala más productiva, las variables optimizadas $\hat{z}_i^{l*} \neq 0$ señalan aquellas que son referencia para la actividad evaluada –el resto de observaciones cuyas variables $\hat{z}_i^{l*}$ son nulas no definen el hiperplano de referencia–. Además, y como se ha puesto de manifiesto en (4.3.2), de ser la actividad evaluada $(x_{i'}^{l}, y_{i'}^{l})$ eficiente en términos productivos, su variable asociada $z_{i'}^{l}$ es unitaria, siendo los restantes valores nulos: $\hat{z}_i^{l*} = 0$, $i \neq i'$, verificándose las m y n restricciones en forma de igualdad.

Con relación a los rendimientos a escala, Banker y Thrall (1992) muestran como la solución óptima de las variables z_i^{l} permiten caracterizarlos. Relacionado los resultados presentados por estos autores con el parámetro de escala optimizado, $\upsilon_{i'}^{l*}$, se verifican las siguientes relaciones[28]:

(i) Si $\sum_{i=1}^{I} \hat{z}_i^{l*} > 1$ en las soluciones óptimas de (4.3.14), $\upsilon_{i'}^{l*} > 0$ en la resolución de (4.3.8), presentando la tecnología rendimientos decrecientes a escala locales –en la referencia óptima de $(x_{i'}^{l}, y_{i'}^{l})$–.

(ii) Si $\sum_{i=1}^{I} \hat{z}_i^{l*} < 1$ en las soluciones optimas de (4.3.14), $\upsilon_{i'}^{l*} < 0$ en la resolución de (4.3.8), presentando la tecnología rendimientos crecientes a escala locales –en la referencia óptima de $(x_{i'}^{l}, y_{i'}^{l})$–.

---

[28] Las relaciones establecidas por Banker y Thrall (1992) asumen que la actividad evaluada en la resolución de (4.3.14) es eficiente. Sin embargo, este resultado puede generalizarse al conjunto de observaciones, sean eficientes o no, tal como muestran Banker, Chang y Cooper (1996).

(iii) Si $\sum_{i=1}^{I} \hat{z}_i^{l^*} = 1$ en algunas de las soluciones óptimas posibles a (4.3.14), $\upsilon_i^{l^*} = 0$ en algunas resoluciones de (4.3.8), presentando la tecnología rendimientos constantes a escala locales –en la referencia óptima de $(x_i^{\,l}, y_i^{\,l})$–[29].

De esta forma, una observación que representa la escala de operaciones más productiva en la resolución de (4.3.14), $(\hat{\varphi}_{i'}^{\,l})^{-1} = \hat{\theta}_{i'}^{\,l} = 1$, al presentar entre las soluciones posibles en (4.3.8) un parámetro de escala asociado nulo, sus variables $\hat{z}_i^{l^*}$ son tales que $\sum_{i=1}^{I} \hat{z}_i^{l^*} = 1$ y prevalece una tecnología con rendimientos constantes a escala, $(x_i^{\,l}, y_i^{\,l}) = (x_i^{\,l^*}, y_i^{\,l^*})$, véase Ahn, Charnes y Cooper (1989)[30]. En contraposición a esta situación de eficiencia productiva, si una observación $(x_i^{\,l}, y_i^{\,l})$ se revela como ineficiente en términos productivos al resolver (4.3.14), *i.e.* no obtiene el máximo rendimiento generable en la escala de operaciones más productiva, la función de distancia calculada según (4.3.14) no solo cuantifica la magnitud de tal ineficiencia, sino que permite identificar si ésta se debe a la existencia de ineficiencia de escala, *i.e.* a la existencia rendimientos crecientes o decrecientes a escala. Así, en presencia de rendimientos constantes, (iii) nos indica que de existir ineficiencia productiva, ésta se debe únicamente a causas técnicas y no de escala, pues la actividad esta operando en la escala de operaciones más productiva. Las consideraciones realizadas hasta el momento son de gran importancia en la identificación de aquellas actividades que determinan la escala óptima de producción, así como las características de los rendimientos a

---

[29] El hecho de que esta última relación se verifique para algunas resoluciones se debe a la existencia de múltiples soluciones a ambos programas, (4.3.14) y (4.3.8) –entre las que se encuentra la expresada en (iii), véase la primera apreciación, *remark* 1, en Banker y Thrall (1992:78)–.

[30] En la definición estricta de la escala de operaciones más productiva –*mpss*– caracterizada por Banker (1984), se exige una función objetivo unitaria, $(\hat{\varphi}_{i'}^{\,l})^{-1} = \hat{\theta}_{i'}^{\,l} = 1$, y la ausencia de ganancias de producción no equiproporcionales como las representadas por unas holguras –*slacks*– no nulas en la forma canónica de (4.3.14). Sin embargo, a efectos del presente proyecto de investigación y por la razones expuestas en la sección 2.2, el análisis se realiza en términos de las funciones de distancia definidas que implican evaluaciones equiproporcionales de eficiencia (débil) –Banker y Thrall (1992) realizan igual asunción en su análisis de los rendimientos a escala a través del DEA–.

escala en ejercicios aplicados –como el que se propone en el quinto capítulo de la presente investigación con objeto de ilustrar el modelo de evaluación del rendimiento productivo–.

En el ejemplo 4.1.1, la actividad (x_4^t, y_4^t) presenta una función objetivo en la resolución de (4.3.14) igual a $D_O^t(x_4^t, y_4^t) = \hat{\theta}_4^t = (\hat{\varphi}_4^t)^{-1} < 1$, por lo que no es capaz de alcanzar la máxima productividad potencial. Ahora bien, ¿contribuye la existencia de una escala de operaciones subóptima a esta ineficiencia productiva? Atendiendo a la restricción de factores se observa que $\hat{z}_1^{t*} \cdot x_1^t + \hat{z}_2^{t*} \cdot x_2^{t*} + \hat{z}_3^{t*} \cdot x_3^t + \hat{z}_4^{t*} \cdot x_4^t = x_4^t$ –la restricción se verifica en forma de igualdad al no existir holgura, *slack*, de factores–. Siendo, $\hat{z}_1^{t*} = \hat{z}_3^{t*} = \hat{z}_4^{t*} = 0$, $\hat{z}_2^{t*} \cdot x_2^{t*} = x_4^t$, por lo que $\hat{z}_2^{t*} = x_4^t / x_2^{t*} > 1$, presentando la tecnología rendimientos decrecientes a escala locales –y, según (i) el parámetro de escala asociado en la resolución de (4.3.8), υ_4^{t*}, es positivo–. Este resultado pone de manifiesto que la actividad puede obtener ganancias productivas reduciendo su escala de operaciones, lo cual implica la existencia de ineficiencia de escala. Respecto a la actividad que se revela como eficiente, $D_O^t(x_2^t, y_2^t) = \hat{\theta}_2^t = (\hat{\varphi}_2^t)^{-1} = 1$, representando la escala de operaciones más productiva. Observando para esta actividad la restricción de factores optimizada, $\hat{z}_1^{t*} \cdot x_1^t + \hat{z}_2^{t*} \cdot x_2^{t*} + \hat{z}_3^{t*} \cdot x_3^t + \hat{z}_4^{t*} \cdot x_4^t = x_2^{t*}$, las variables $\hat{z}_1^{t*}$, $\hat{z}_3^{t*}$ y $\hat{z}_4^{t*}$ son nulas de forma que $\hat{z}_2^{t*} = x_2^{t*} / x_2^{t*} = 1$, $\upsilon_4^{t*} = 0$, y la tecnología presenta rendimientos constantes a escala locales.

Es posible proceder a la representación de programas análogos a (4.3.14) en la dimensión de factores y tecnológica. Comenzando por la función de factores, $\hat{\lambda}_{i'}^t$, el programa *envolvente* que permite su cálculo es:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D_i^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \hat{\gamma}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^t \geq y_{i'm}^t,\ m = 1,\dots,M \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^t + \hat{\gamma}_{i'}^t x_{i'n}^t \geq 0,\ n = 1,\dots,N, \\
& \hat{z}_i^t \geq 0,\ i = 1,\dots,I.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Siendo la función de factores $\hat{\lambda}_{i'}^t = (\hat{\gamma}_{i'}^t)^{-1}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\max \quad & D_i^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \hat{\lambda}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^t \geq y_{i'm}^t, m = 1,\dots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^t \leq x_{i'n}^t / \hat{\lambda}_{i'}^t, n = 1,\dots,N, \\
& \hat{z}_i^t \geq 0, i = 1,\dots,I,
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

La formulación de los programas (4.3.14–15–16–17) permite demostrar como la función objetivo en (4.3.14) coincide con la función de distancia de factores (4.3.17), $\hat{\lambda}_{i'}^t = \hat{\varphi}_{i'}^t$, *i.e.* se verifica a nivel empírico la relación teórica establecida en (2.2.28), por la que la función de distancia de factores es inversa a la función de productos, $(\hat{\lambda}_{i'}^t)^{-1} = \hat{\theta}_{i'}^t$. Efectivamente, partiendo de (4.3.14) es posible dividir el conjunto de restricciones por la función objetivo $\hat{\varphi}_{i'}^t$, de forma que se obtiene:

$$\max \quad D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \hat{\varphi}_{i'}^t$$
$$\text{s.a}$$
$$-\sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^{t\,\prime} + y_{i'm}^t \leq 0, \; m = 1,\dots,M$$
$$\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^{t\,\prime} \leq x_{i'n}^t / \hat{\varphi}_{i'}^t, n = 1,\dots,N, \qquad (4.3.18)$$
$$z_i^{t\,\prime} \geq 0, i = 1,\dots,I,$$

$\hat{z}_i^{t\,\prime} = \hat{z}_i^t / \hat{\varphi}_{i'}^t$, siendo este programa equivalente a (4.3.17), $\hat{\varphi}_{i'}^t = \hat{\lambda}_{i'}^t$.

Dado el programa (4.3.16–17), es posible hacer similares apreciaciones a las realizadas para (4.3.14–15) tanto en relación a la identificación de la escala de operaciones más productiva, que exige el valor unitario de la función objetivo, $(\hat{\gamma}_{i'}^t)^{-1} = \hat{\lambda}_{i'}^t = 1$ –*i.e.* la observación pertenece a Isoc $\hat{L}(y)$, (2.2.30)–, como en relación a los rendimientos a escala, (i), (ii), (iii). En el ejemplo 4.1.1, la actividad (x_4^t, y_4^t) presenta una función de distancia de factores, (4.3.16), inferior a la unidad: $D_I^t(x_4^t, y_4^t) = \hat{\lambda}_4^t = (\hat{\gamma}_4^t)^{-1} < 1$, por lo que no alcanza la máxima productividad potencial. Atendiendo a la restricción de productos se observa que $\hat{z}_1^{t*} \cdot y_1^t + \hat{z}_2^{t*} \cdot y_2^{t*} + \hat{z}_3^{t*} \cdot y_3^t + \hat{z}_4^{t*} \cdot y_4^t = y_4^t$ –de nuevo, la restricción se verifica en forma de igualdad al no existir holgura, *slack*, de productos–. Siendo, $\hat{z}_1^{t*} = \hat{z}_3^{t*} = \hat{z}_4^{t*} = 0$, se obtiene $\hat{z}_2^{t*} \cdot y_2^{t*} = y_4$, por lo que $\hat{z}_2^{t*} = y_4^t / y_2^{t*} < 1$, presentando la tecnología rendimientos crecientes a escala locales –según (ii) el parámetro de escala asociado en la resolución de un programa análogo a (4.3.8), υ_4^{t*}, sería negativo–. Una vez más, este resultado implica que un incremento en la escala de operaciones permitiría ganancias productivas, *i.e.* existe ineficiencia de escala. Respecto a la actividad que se revela como eficiente, $D_I^t(x_2^t, y_2^t) = (\hat{\gamma}_2^t)^{-1} = \hat{\lambda}_2^t = 1$, representando la escala de operaciones más productiva. Observando para esta actividad la restricción de productos optimizada, $\hat{z}_1^{t*} \cdot y_1^t + \hat{z}_2^{t*} \cdot y_2^{t*} + \hat{z}_3^{t*} \cdot y_3^t + \hat{z}_4^{t*} \cdot y_4^t = y_2^{t*}$, las variables $\hat{z}_1^{t*}$, $\hat{z}_3^{t*}$ y $\hat{z}_4^{t*}$ son nulas de forma que $\hat{z}_2^{t*} = y_2^{t*} / y_2^{t*} = 1$, $\upsilon_4^{t*} = 0$, y la tecnología presenta rendimientos constantes a escala locales.

Respecto a la función de distancia tecnológica, el programa que permite su cálculo es:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D_T^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \hat{\phi}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^t \geq y_{i'm}^t / \hat{\phi}_{i'}^t, m = 1,\ldots,M \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^t \leq \hat{\phi}_{i'}^t\, x_{i'n}^t, n = 1,\ldots,N, \\
& \hat{z}_i^t \geq 0, i = 1,\ldots,I
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

que, al igual que (4.3.5), debe resolverse haciendo uso de técnicas de optimización no lineales. Sin embargo, dada la relación teórica ya introducida (2.2.28), Färe, Grosskopf y Lovell (1985) muestran como es posible transformar (4.3.16) en el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D_T^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^2 = \hat{\zeta}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^{t\prime} \geq y_{i'm}^t, m = 1,\ldots,M \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^{t\prime} + \zeta_{i'}^t x_{i'n}^t \geq 0\ , n = 1,\ldots,N, \\
& \hat{z}_i^{t\prime} \geq 0, i = 1,\ldots,I,
\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

donde, al multiplicar la función objetivo y las restricciones en (4.3.8) por $\hat{\phi}_{i'}^t$, se obtiene $\hat{\zeta}_{i'}^t = (\hat{\phi}_{i'}^t)^2$ y $z_i^{t\prime} = z_i^t \cdot \hat{\phi}_{i'}^t$. Tal como se puede apreciar, (4.3.20) resulta equivalente a (4.3.16), de forma que $\zeta_{i'}^t = \gamma_i^t$ o, alternativamente, $(\hat{\phi}_{i'}^t)^2 = (\hat{\lambda}_{i'}^t)^{-1}$, y considerando la relación previamente establecida $(\hat{\lambda}_{i'}^t)^{-1} = \hat{\theta}_{i'}^t$, es posible obtener las siguientes relaciones entre las funciones de distancia: $\hat{\phi}_{i'}^t = (\hat{\lambda}_{i'}^t)^{-1/2} = \hat{\theta}_{i'}^{t\ 1/2}$. La transformación presentada en (4.3.20) fue inicialmente propuesta por Färe, Grosskopf y Lovell (1985) aunque sorprende que, en un artículo posterior, Färe *et al.* (1989) no hiciesen uso de esta relación y propusieran, como solución alternativa para resolver (4.3.19), el linealizar las m=1,...,M restricciones a través de la expresión $\sum_{i=1}^{I} y^t_{mi}\hat{z}_i^t \geq 2\, y^t_{mi'} - \rho_{i'}^t\, y^t_{mi'}$. Dada esta aproximación, el programa a resolver es:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathrm{D}_T^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) \equiv \rho_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^t \hat{z}_i^{t\prime} \geq 2y_{mi'}^t - \rho_{i'}^t y_{i'm}^t, m = 1,\dots,\mathrm{M} \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^t \hat{z}_i^{t\prime} \leq \rho_{i'}^t x_{i'n}^t, n = 1,\dots,\mathrm{N}, \\
& \hat{z}_i^{t\prime} \geq 0, i = 1,\dots,\mathrm{I}.
\end{aligned}
\tag{4.3.21}
$$

Sin embargo, esta aproximación solo resulta igual a la restricción no lineal en el caso de que la observación sea eficiente, $\rho_{i'}^t = \hat{\phi}_{i'}^t = 1$, representando la escala de operaciones más productiva –la máxima productividad absoluta–, mientras que conforme $\hat{\phi}_{i'}^t$ diverge del valor unitario, el diferencial entre el valor verdadero y aproximado de la función objetivo se incrementa, haciendo sensible cualquier resultado a la magnitud de esta diferencia, –véase Zofío y Prieto (2000) para un ejemplo de esta desventaja de la aproximación lineal[31]–. Aún desconociendo la razón que motiva a Färe *et al.* (1989) para proponer (4.3.21), pudiendo haber calculado (4.3.20) en su pionero artículo sobre eficiencia medioambiental –donde la tecnología caracterizada es $\hat{\mathrm{T}}^t(x,y)$ presentando homogeneidad lineal (rendimientos constantes a escala)–, es más adecuado proponer una única formulación que facilite el calculo de (4.3.19) a través de técnicas optimizadoras no lineales, con objeto de evitar confusiones si se desea calcular tal función de distancia con rendimientos variables a escala, (4.3.5) –que, en ningún caso, puede transformarse en un programa lineal–. Esta motivación lleva a Zofío y Lovell

[31] Es de suponer que Färe *et al.* (1989) eran conscientes de la limitación de la transformación propuesta por Färe, Grosskopf y Lovell (1985) en el caso de rendimientos variables a escala, (4.3.4) –*i.e.* su carácter no lineal–. De no ser así, no tendría sentido plantear una aproximación lineal como (4.3.21) cuando ya existía una transformación válida desde hacía un lustro. Sin embargo, Färe, Grosskopf y Lovell (1994; cap.8) incurren en el error de considerar que bajo la ausencia de homogeneidad lineal –rendimientos variables a escala incluyendo $\sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1$–,

(2000) a extender la transformación introducida en (4.3.7) en la resolución de (4.3.5), a (4.3.19). En tal caso, el resultado obtenido se corresponde directamente con la función de distancia tecnológica –y no con la inversa de la de factores (productos), que es la finalmente obtenida en (4.3.20), debiéndose hallar, además, su raíz cuadrada–:

$$\begin{aligned}
\min \quad & D_{T}^{t}(x_{i'}^{t}, y_{i'}^{t}) = \hat{\phi}_{i'}^{t} \\
& \text{s.a} \\
& -\left(\sum_{i=1}^{I} y_{im}^{t}\hat{z}_{i}^{t}\right)^{-1} + \hat{\phi}_{i'}^{t}\left(y_{i'm}^{t}\right)^{-1} \geq 0, m = 1,\dots,M \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^{t}\hat{z}_{i}^{t} + \hat{\phi}_{i'}^{t}x_{i'n}^{t} \leq 0, n = 1,\dots,N, \\
& \hat{z}_{i}^{t} \geq 0, i = 1,\dots,I.
\end{aligned} \qquad (4.3.22)$$

Se pueden hacer ahora las mismas consideraciones realizadas respecto a (4.3.14–15) y (4.3.16–17), con relación a los programas (4.3.21–22). En concreto, la resolución de (4.3.21) permite identificar la actividad que representa la escala de operaciones más productiva. En caso de que la observación evaluada sea eficiente en términos productivos, $\hat{\phi}_{i'}^{t} = 1$, mientras que si esta incurre en ineficiencia productiva, $\hat{\phi}_{i'}^{t} < 1$, identificando las variables $\hat{z}_{i}^{t}$ la(s) actividad(es) que le sirven de referencia al ser sus valores asociados positivos. Con relación a las características de los rendimientos a escala, las suma de estas variables permiten determinar si estos son decrecientes, crecientes o constantes de acuerdo a (i), (ii) y (iii).

Una vez más en el gráfico 4.1.1 respecto a la actividad (x_4^t, y_4^t), la optimización de (4.3.21) presenta una función objetivo inferior a la unidad: $D_{T}^{t}(x_4^t, y_4^t) = \hat{\phi}_4^t < 1$, por lo que no alcanza la máxima productividad potencial. Considerando en esta ocasión la restricción de factores, se observa que $\hat{z}_1^{t*} \cdot x_1^t + \hat{z}_2^{t*} \cdot x_2^{t*} + \hat{z}_3^{t*} \cdot x_3^t + \hat{z}_4^{t*} \cdot x_4^t = \hat{\phi}_4^t x_4^t$, donde $\hat{\phi}_4^t x_4^t = x_2^{t*}$. Siendo, $\hat{z}_1^{t*} = \hat{z}_3^{t*} = \hat{z}_4^{t*} =$

(4.3.5), se puede seguir resolviendo la transformación (4.3.6) a través de técnicas de optimización lineales.

0, se observa que $\hat{z}_2^{i*}\cdot x_2^{i*} = \hat{\phi}_4^i x_4^i$, por lo que $\hat{z}_2^{i*} = \hat{\phi}_4^i x_4^i / x_2^{i*} = x_2^{i*} / x_2^{i*} = 1$, presentando la tecnología rendimientos constantes a escala locales y así, tal como se pone de manifiesto en la próxima sección, no presenta ineficiencia de escala y toda la ineficiencia productiva es atribuible a causas técnicas. Respecto a la actividad que se revela como eficiente, $D_T^i(x_2^i, y_2^i) = \hat{\phi}_2^i = 1$, obteniendo la actividad la mayor productividad absoluta entre las $i=1,...,I$ actividades observadas. En esta ocasión, en la restricción de factores optimizada, $\hat{z}_1^{i*}\cdot x_1^i + \hat{z}_2^{i*}\cdot x_2^{i*} + \hat{z}_3^{i*}\cdot x_3^i + \hat{z}_4^{i*}\cdot x_4^i = x_2^{i*}$, las variables $\hat{z}_1^{i*}$, $\hat{z}_3^{i*}$ y $\hat{z}_4^{i*}$ son nulas de forma que $\hat{z}_2^{i*} = x_2^{i*}/x_2^{i*} = 1$, $\upsilon_4^{i*} = 0$, y la tecnología presenta una vez más rendimientos constantes a escala locales.

4.3.4 La determinación de $D_{\tilde{d}}^i(x_i^i, y_i^i)$, $\tilde{d}$ =O,I,T, –eficiencia de escala–

En la sección anterior se ha mostrado la capacidad del Análisis Envolvente de Datos para determinar el rendimiento relativo –eficiencia técnica y productiva– de un conjunto de observaciones, así como para la posibilidad de comprobar si la incapacidad para alcanzar la máxima productividad tienen origen en una escala de operaciones subóptima –condiciones (i) a (iii)– y, así, existen rendimientos decrecientes o crecientes a escala. Sin embargo, si bien a través de los resultados expuestos se puede determinar la presencia de ineficiencia de escala, hasta el momento no se ha discutido cómo podría determinarse su magnitud. El objetivo de la presente sección es profundizar en esta técnica y mostrar como a través suya se puede obtener la medida de eficiencia de escala introducida la sección 2.2.4. Se avanza así en la aplicación empírica del modelo teórico presentado en esta investigación, relacionando los programas presentados para calcular la eficiencia técnica y productiva.

Desde un perspectiva teórica, la presentación realizada en la sección 2.2.4 permite concluir que la eficiencia de escala se corresponde con la razón entre la función de distancia $D_d^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})$, definida sobre la tecnología $\hat{T}(x,y)$, caracterizada por homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– y homoteticidad simultánea –separabilidad–, y $D_d^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})$, definida sobre $T(x,y)$. Esta relación permite establecer la razón de desigualdad expresada en (2.2.44–45–46) y que, finalmente, da origen a (2.2.47–48–49). Así, la función de distancia definida sobre $\hat{T}(x,y)$, $D_d^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})$, incorpora como diferencial entre la productividad observada y la máxima generada en la escala óptima, cualquier ineficiencia de carácter técnico y de escala. Habiéndose definido ya los diferenciales de productividad y técnicos, los segundos puede obtenerse indirectamente.

Estas relaciones tienen su reflejo aplicado a través del cálculo de las anteriores funciones de distancia. Si la formulación DEA (4.3.13), que permite calcular $D_d^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})$, caracteriza la capacidad de cualquier actividad para alcanzar la máxima productividad absoluta determinando la escala óptima de operaciones, *i.e.* eficiencia productiva, y, a través de (4.3.10), caracteriza su capacidad para alcanzar el máximo del rendimiento productivo que la tecnología permite dada su escala de operaciones, *i.e.* eficiencia técnica $-D_d^{t}(x_i^{t}, y_i^{t})-$, la distancia entre ambas permite establecer la eficiencia de escala –debida, desde una perspectiva aplicada, a la ausencia de homogeneidad lineal (rendimientos variables a escala) dado que la asunción de homoteticidad no puede desarrollarse–. Tal como manifiestan Banker, Charnes y Cooper (1984: 1.078): "*La formulación en forma de ratio CCR* –(4.3.13)– *introducida por Charnes, Cooper y Rhodes, como parte de su Análisis Envolvente de Datos, comprende tanto las ineficiecias técnicas como de escala a través del valor óptimo de la ratio...Una separación en eficiencia técnica y de escala es alcanzada a través de los métodos desarrollados en este artículo...*". Tales métodos implican la definición del programa (4.3.10) y la obtención indirecta de la magnitud representativa de la eficiencia de escala como razón entre las funciones objetivo optimizadas en (4.3.13) –eficiencia productiva– y (4.3.10) –eficiencia técnica–:

$$D_{\hat{O}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=\frac{D_{\hat{O}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})}{D_{O}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})}=\frac{\dfrac{\sum_{m=1}^{M}\hat{\mu}_{m}^{t^{*}}y_{mi'}^{t}}{\sum_{n=1}^{N}\hat{v}_{n}^{t^{*}}x_{ni'}^{t}}}{\dfrac{\sum_{m=1}^{M}\mu_{m}^{t^{*}}y_{mi'}^{t}}{\sum_{n=1}^{N}v_{n}^{t^{*}}x_{ni'}^{t}+\upsilon_{i'}^{t^{*}}}}=\frac{\sum_{n=1}^{N}v_{n}^{t^{*}}x_{ni'}^{t}+\upsilon_{i'}^{t^{*}}}{\sum_{n=1}^{N}\hat{v}_{n}^{t^{*}}x_{ni'}^{t}} \tag{4.3.23}$$

Así, la tercera igualdad muestra como la eficiencia de escala queda determinada como la razón entre las productividades relativizadas respecto a la óptima generada en la escala de operaciones más productiva –subconjunto optimo– (numerador) y respecto al subconjunto eficiente o frontera de posibilidades de producción dada la escala de operaciones de la actividad evaluada (denominador). Dada la condición de normalización y (iii), la última igualdad muestra como desde una dimensión de productos, la ausencia de ineficiencia de escala implicaría la presencia de rendimientos constantes a escala en el hiperplano de referencia, $\upsilon_{i'}^{t}=0$, y la eventual igualdad de los pesos de los factores entre las soluciones posibles.

Analizando conjuntamente estos resultados desde la perspectiva teórica y su reflejo aplicado, Färe, Grosskopf y Lovell (1994) ponen de manifiesto el siguiente resultado –extendiendo el resultado a las distintas dimensiones–:

$$SE_{O}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{O}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=PE_{O}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/TE_{O}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{O}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/D_{O}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=\hat{\theta}_{i'}^{t^{*}}/\theta_{i'}^{t^{*}}$$

$$SE_{I}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{I}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=PE_{I}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/TE_{I}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{I}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/D_{I}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=\hat{\lambda}_{i'}^{t^{*}}/\lambda_{i'}^{t^{*}},$$

$$SE_{T}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{T}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=PE_{T}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/TE_{T}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{T}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/D_{T}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=\hat{\phi}_{i'}^{t^{*}}/\phi_{i'}^{t^{*}}.$$

(4.3.24-25-26)

De coincidir las funciones de distancia calculadas, la actividad presentaría eficiencia de escala: $SE_{d}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{d}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=D_{\hat{d}}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})/D_{d}^{t}(x_{i'}^{t},y_{i'}^{t})=1$, d=O,I,T. Tal como expresan Banker, Charnes y Cooper (1984: 1.088): "*La eficiencia técnica y de escala agregadas en (15)* –(4.3.16) en su formulación canónica que es equivalente a (4.3.13) en la dimensión de productos–, *es menor o igual que la eficiencia técnica pura (de factores) en (19A)* –(4.3.4) en su formulación canónica que resulta equivalente a (4.3.10) pero, una vez más, desde la dimensión de productos–, *verificándose la igualdad sí y solo sí existe una solución óptima a (15) tal que la suma de los valores óptimos de los pesos,* λ_j^* *–*$\hat{z}_i^{t*}$*– suma la unidad...*".

Esta última condición revela que, desde una perspectiva aplicada, para que una actividad presente eficiencia de escala debe operar en una escala de operaciones cuyo referente sobre la frontera de producción presente homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala–. Este resultado es consistente con la condición de escala de operaciones más productiva (*mpss*) ya introducida en (iii) y su reflejo de la condición teórica que debe caracterizar la tecnología con objeto de poder establecer una función de distancia respecto a ésta, *i.e.* máxima productividad. Así, una actividad cuya proyección eficiente sobre la frontera verifique las condiciones expuestas, presentará eficiencia de escala y la existencia de cualquier ineficiencia tendrá un origen técnico no estando relacionada con una escala de operaciones subóptima.

Una vez más podemos ilustrar este resultado con el gráfico 4.1.1, reincidiendo en el resultado ya obtenido para la actividad (x_4^t, y_4^t). Esta actividad presenta una función de distancia tecnológica, (4.3.22), inferior a la unidad: $D_T^t(x_4^t, y_4^t) = \hat{\phi}_4^{t*} < 1$, por lo que no genera la máxima productividad potencial. Atendiendo sin embargo a la restricción de productos en esta ocasión se observa que $\hat{z}_1^{t*} \cdot y_1^t + \hat{z}_2^{t*} \cdot y_2^{t*} + \hat{z}_3^{t*} \cdot y_3^t + \hat{z}_4^{t*} \cdot y_4^t = y_4^t / \hat{\phi}_4^{t*}$ donde $y_4^t / \hat{\phi}_4^{t*} = y_2^{t*}$. Siendo, $\hat{z}_1^{t*} = \hat{z}_3^{t*}$ $\hat{z}_4^{t*} = 0$, se observa que $\hat{z}_2^{t*} \cdot y_2^t = y_4^t / \hat{\phi}_4^{t*}$, por lo que $\hat{z}_2^{t*} = (y_4^t / \hat{\phi}_4^{t*}) / y_2^{t*} = y_2^{t*} / y_2^{t*} = 1$, presentando la tecnología rendimientos constantes a escala y debiéndose la totalidad de la ineficiencia productiva a causas técnicas.

4.4 El cálculo de funciones de distancia intertemporales

En la sección 4.3 se han introducido los programas de optimización matemática que permiten caracterizar el rendimiento relativo o eficiencia productiva de una actividad en términos *contemporáneos*. Sin embargo, la evolución del rendimiento productivo de una forma dinámica como la recogida en las expresiones (3.2.28) a (3.2.33) implica la resolución de funciones de distancia *intertemporales*. Con objeto de obtener tales funciones de distancia resulta necesario considerar como tecnología de referencia para evaluar el rendimiento de una actividad en $t+1$ aquella existente en t –véanse las apreciaciones realizadas en la sección 3.2.1–.

Centrando el análisis en la perspectiva dual, el programa que habría de resolverse en la dimensión de productos con objeto de obtener funciones de distancia de la forma $\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})$ resulta análogo a (4.3.2):

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})^{-1} = \varphi_{i'}^{t+1} \\
& \text{s.a} \\
& -\sum_{i=1}^{I} \mathrm{y}_{im}^{t}\mathrm{z}_{i}^{t} + \varphi_{i'}^{t+1}\mathrm{y}_{i'm}^{t+1} \leq 0, \; m = 1,\dots,\mathrm{M} \\
& \sum_{i=1}^{I} \mathrm{x}_{in}^{t}\mathrm{z}_{i}^{t} \leq \mathrm{x}_{i'n}^{t+1}, n = 1,\dots,\mathrm{N}, \\
& \sum_{i=1}^{I} \mathrm{z}_{i}^{t} = 1, \\
& \mathrm{z}_{i}^{t} \geq 0, i = 1,\dots,\mathrm{I},
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

mientras que el cálculo desde la dimensión de los factores exige la resolución de

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathrm{D}_{\mathrm{I}}^{t}(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})^{-1} = \gamma_{i'}^{t+1} \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} \mathrm{y}_{im}^{t}\mathrm{z}_{i}^{t} \geq \mathrm{y}_{i'm}^{t+1}, m = 1,\dots,\mathrm{M}, \\
& -\sum_{i=1}^{I} \mathrm{x}_{in}^{t}\mathrm{z}_{i}^{t} + \mathrm{x}_{i'n}^{t+1}\gamma_{i'}^{t+1} \geq 0, n = 1,\dots,\mathrm{N}, \\
& \sum_{i=1}^{I} \mathrm{z}_{i}^{t} = 1, \\
& \mathrm{z}_{i}^{t} \geq 0, i = 1,\dots,\mathrm{I}
\end{aligned}
\tag{4.4.2}
$$

y, finalmente, la función tecnológica intertemporal se obtiene a través de:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_O^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) = \phi_{i'}^{t+1} \\
& \text{s.a} \\
& -\left(\sum_{i=1}^{I} y_{im}^t z_i^t\right)^{-1} + \phi_{i'}^{t+1}\left(y_{i'm}^{t+1}\right)^{-1} \geq 0, m = 1,\dots,M \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^t z_i^t + x_{i'n}^{t+1}\phi_{i'}^{t+1} \leq 0, n = 1,\dots,N, \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\dots,I.
\end{aligned}
\tag{4.4.3}
$$

Los programas planteados responden a una caracterización de la tecnología como la representada en (4.2.3) –rendimientos variables a escala–, $T^t(x,y)$, si bien las funciones de distancia intertemporales que responden a una tecnología de referencia caracterizada por homogeneidad lineal (4.2.5), $\hat{T}^t(x,y)$, deben calcularse eliminado la restricción $\sum_{i=1}^{I} z_i^t=1$. Con relación a la información que se puede obtener en términos del rendimiento relativo y la propia tecnología de referencia en t = 0, es posible realizar consideraciones similares a las ya establecidas para sus programas contemporáneos análogos. Conviene señalar únicamente que los valores de las funciones de distancia ya no se encuentran acotadas por la unidad, pues en caso de que exista progreso productivo, algunos procesos pueden no ser factibles de acuerdo a la tecnología existente en el período precedente. En este caso, con objeto de evaluar el rendimiento y establecer la distancia a los subconjuntos óptimos y eficientes, resulta necesario reducir e incrementar los vectores de productos y factores respectivamente, *i.e.* $D_O^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) > 1$, $D_I^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) < 1$, $D_T^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) > 1$.

Las programas (4.4.1–2–3) permiten calcular funciones de distancia intertemporales de la forma $D_d^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})$ y $D_d^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})$. Sin embargo, de decidirse por índices de productividad geométricos con objeto de no elegir en modo arbitrario un determinado período –tecnología– como base de referencia, *i.e.* (3.2.28) a (3.2.33), resulta además necesario calcular funciones de distancia de la forma $D_d^{t+1}(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$ y $D_d^{t+1}(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$. En este caso, las programas a resolver son:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & D_O^{t+1}(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \varphi_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\sum_{i=1}^{I} y_{im}^{t+1} z_i^{t+1} + \varphi_{i'}^t y_{i'm}^t \leq 0, \quad m = 1,\ldots,M, \\
& \sum_{i=1}^{I} x_{in}^{t+1} z_i^{t+1} \leq x_{i'n}^t, n = 1,\ldots,N, \qquad (4.4.4) \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^{t+1} = 1, \\
& z_i^t \geq 0, i = 1,\ldots,I,
\end{aligned}
$$

en la dimensión de productos,

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_I^{t+1}(x_{i'}^t, y_{i'}^t)^{-1} = \gamma_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{i=1}^{I} y_{im}^{t+1} z_i^{t+1} \geq y_{i'm}^t, m = 1,\ldots,M, \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^{t+1} z_i^{t+1} + \gamma_{i'}^t x_{i'n}^t \geq 0, n = 1,\ldots,N, \qquad (4.4.5) \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^{t+1} = 1, \\
& z_i^{t+1} \geq 0, i = 1,\ldots,I,
\end{aligned}
$$

desde la perspectiva de los factores y

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D_O^{t+1}(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = \hat{\phi}_{i'}^t \\
& \text{s.a} \\
& -\left(\sum_{i=1}^{I} y_{im}^{t+1} z_i^{t+1}\right)^{-1} + \hat{\phi}_{i'}^t \left(y_{i'm}^t\right)^{-1} \geq 0,\ m = 1,\dots,M, \\
& -\sum_{i=1}^{I} x_{in}^{t+1} z_i^{t+1} + \hat{\phi}_{i'}^t x_{i'n}^t \leq 0, n = 1,\dots,N, \qquad (4.4.6) \\
& \sum_{i=1}^{I} z_i^{t+1} = 1, \\
& z_i^{t+1} \geq 0, i = 1,\dots,I,
\end{aligned}
$$

en aquella tecnológica. Al igual que en las funciones de distancia intertemporales previas, éstas últimas responden a la caracterización (4.2.3), $T^t(x,y)$, que realiza el DEA de la tecnología de producción mientras el calculo de funciones de distancia sobre (4.2.5), $\hat{T}^t(x,y)$, exige, una vez más, la eliminación de la restricción $\sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1$.

La siguiente sección ilustra el cálculo de las funciones de distancia presentadas con un simple ejemplo, que pretende mostrar el modelo de evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist –así como las descomposiciones alternativas que existen del índice de productividad absoluta analizadas en la sección 3.3–. Sin embargo, antes de proceder con este ejemplo conviene poner de manifiesto como en un contexto dinámico, la elección de una dimensión para el análisis, *e.g.* productos, puede llevar a resultados opuestos respecto a otras elecciones alternativas en la identificación de la fuentes que contribuyen a las variaciones en el rendimiento absoluto.

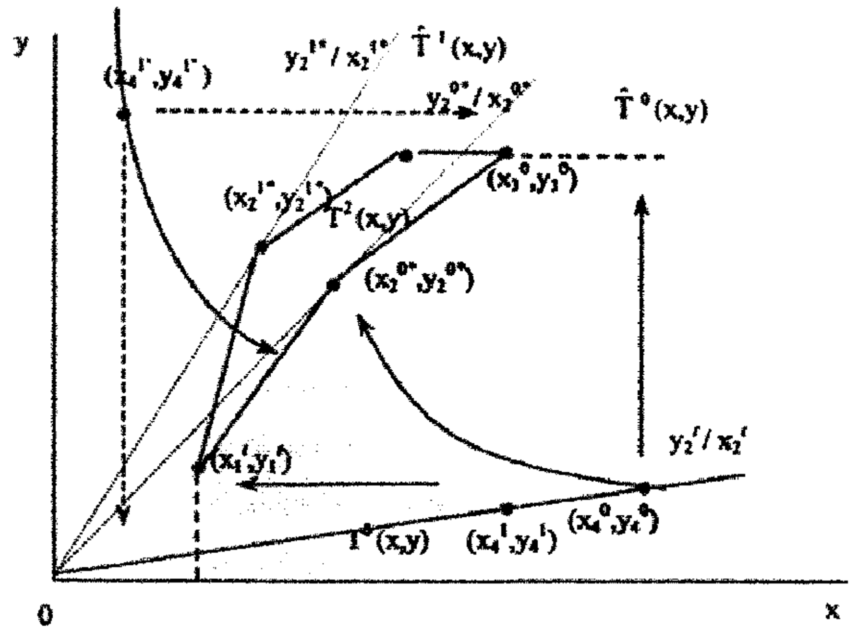


Gráfico 4.4.1. Funciones de distancia intertemporales.

En el gráfico 4.4.1 se muestran los subconjuntos eficientes y óptimos respecto a los cuales se evalúa la eficiencia técnica y productiva en ambos períodos temporales. En el caso de la tecnología (4.2.5), $\hat{T}^t(x,y)$, ésta queda definida en ambos períodos por (x_2^t,y_2^t), t=0,1, mientras que con relación a (4.2.3), $T^0(x,y)$ y $T^1(x^1,y^1)$, éstas son respectivamente generadas por (x_1^t,y_1^t), que no varía en t+1 respecto al período anterior, (x_2^0,y_2^0), (x_3^0,y_3^0) y (x_1^t,y_1^t), (x_2^1,y_2^1) y (x_3^1,y_3^1). De acuerdo a esta representación, la única actividad ineficiente es (x_4^0,y_4^0), pudiéndose calcular diferentes funciones de distancia –eficiencia técnica– de acuerdo a la dimensión elegida: productos, factores o tecnológica. Sin embargo, dependiendo de la orientación, cada una de estas funciones de distancia, $D_d^t(x_4^t,y_4^t)$, d=O,I,T, identifica una recta, *facet*, de referencia diversa por lo que su valor numérico difiere, *i.e.* no se verifica (2.2.28) como acontece bajo la especificación tecnológica $\hat{T}^t(x,y)$ donde la recta de referencia en el cálculo de $D_{\hat{d}}^t(x_4^t,y_4^t)$, d=O,I,T, es única –quedando definida por (x_2^{0*},y_2^{0*})–. Los distintos resultados obtenidos en función de la orientación elegida no resultan contradictorios pues todos ellos ponen de manifiesto, en mayor o menor medida, el carácter ineficiente de (x_4^0,y_4^0). Sin embargo, la descomposición de las variaciones posibles en la productividad absoluta de los factores en los términos de transformación técnica y de escala, $\Delta AFP_4^{0,1} = TT_4^{0,1} \cdot ST_4^{0,1}$, si puede llevar a resultados contradictorios.

Observando el radio–vector que une el origen con la actividad ineficiente (x_4^1, y_4^1) en ambos momentos temporales, se puede apreciar como en la transición de t a t+1 no se produce variación alguna en su productividad absoluta, $AFP_4^0 = y_4^0/x_4^0 = AFP_4^1 = y_4^1/x_4^1$. Esto no significa sin embargo que su posición en términos de eficiencia técnica y de escala respecto a la frontera existente en t=0 no se haya visto alterada. Desde una perspectiva de productos se puede apreciar como la transformación técnica realizada aleja a la actividad de la frontera eficiente, $TT_4^{0,1} = D_O^0(x_4^1, y_4^1)/D_O^0(x_4^0, y_4^0) < 1$, mientras que por el contrario, le acerca a la escala de operaciones más productiva, $ST_4^{0,1} = D_{\bar{O}}^t(x_4^1, y_4^1) / D_{\bar{O}}^t(x_4^0, y_4^0) > 1$, dándose la circunstancia de que las perdidas de productividad que implican la transformación técnica son exactamente compensadas por las ganancias que genera una alteración en la escala de operaciones positiva hacia la óptima; así, $\Delta AFP_4^{0,1} = TT_4^{0,1} \cdot ST_4^{0,1} = 1$, (3.2.10). Por el contrario, si nos centramos ahora en la dimensión de factores, la actividad muestra una mejora en términos técnicos, $(TT_4^{0,1})^{-1} = [D_O^0(x_4^1, y_4^1)/D_O^0(x_4^0, y_4^0)]^{-1} > 1$, al acercarse a la frontera de producción en t=0 mientras se aleja de la escala de producción óptima desde la perspectiva de los productos, $(ST_4^{0,1})^{-1} = [D_{\bar{O}}^t(x_4^1, y_4^1)/D_{\bar{O}}^t(x_4^0, y_4^0)]^{-1} < 1$. Al igual que en el caso anterior la productividad óptima permanece inalterada, $\Delta AFP_4^{0,1} = (TT_4^{0,1} \cdot ST_4^{0,1})^{-1} = 1$, (3.2.11), pero se alcanzan conclusiones contradictorias respecto a la evolución tecnológica seguida por la actividad. Estos resultados contrapuestos, que pueden tener importantes consecuencias en los procesos de gestión empresarial pueden ser evitados, tal como ponen de manifiesto Zofio y Lovell (2000) de elegir la orientación tecnológica pues ésta, por considerar ambas dimensiones del análisis, productos y factores, ofrece una única solución[31].

---

[31] Adicionalmente es posible mostrar gráficamente como bajo ciertas circunstancias puede no existir solución a los programas (4.4.1–2–3) previamente introducidos. Supongamos que la transformación productiva de la actividad ineficiente fuese $(x_4^{1'}, y_4^{1'})$ en vez de (x_4^1, y_4^1); en este caso, ya sea desde una perspectiva de productos o factores no existiría solución al problema de optimización planteado, *i.e.* no es posible definir un hiperplano de referencia para evaluar la

4.5. La evaluación del rendimiento productivo: un ejemplo

Una vez introducidos los programas de optimización matemática que permiten calcular las funciones de distancia, es posible ilustrar con un sencillo ejemplo el modelo de evaluación del rendimiento productivo presentado en esta investigación y que se resume en las ecuaciones (3.2.28) a (3.2.33) y el gráfico 1.2.1. El ejemplo procede de Grifell–Tatjé y Lovell (1999a) con objeto de enlazar con las distintas descomposiciones del índice de Malmquist abordadas en el tercer capítulo –siendo este análisis el objetivo fundamental de dicho artículo–.

4.5.1 La evaluación básica del rendimiento productivo sin caracterizar la tecnología de producción

El cuadro 4.5.1 y el gráfico 4.5.1 presentan los valores observados del único producto y factor en cada una de las actividades, así como los índices de rendimiento productivo entre los momentos temporales $t = 0$ y $t = 1$: $\Delta AFP_i^{0,1}$, $\Delta OFP_i^{0,1}$ y $\Delta RFP_i^{0,1}$.

Tal como se puede apreciar en el cuadro 4.5.1 las actividades A, B y H han experimentado un incremento en su productividad mientras que C y D, por permanecer constantes, no presentan variación alguna y, finalmente, E, F y G han sufrido un deterioro en su rendimiento. Estas variaciones absolutas en el rendimiento deben relativizarse respecto a la variación en la productividad óptima de los factores con objeto de establecer si, en términicos relativos, las observaciones han conseguido mejorar su posición. En el ejemplo propuesto, la variación en la productividad óptima viene determinada por la variación entre las productividades absolutas de B en t=0 y A en t=1, $\Delta OFP_i^{0,1} = 2{,}206$. Únicamente la primera actividad ha conseguido mejorar su posición relativa con lo que en conjunto, y respecto a la variación en la tecnología potencial de producción –subconjuntos óptimos y eficientes–, el resultado obtenido puede calificarse como discreto –el promedio de variación en la productividad relativa es del 0,572–.

eficiencia técnica en el caso de rendimientos variables a escala. Por el contrario, la consideración

Actividad	x_t^0	y_t^0	x_t^1	x_t^1	AFP_t^0	AFP_t^1	$\Delta AFP_t^{0,1}$	$\Delta OFP_t^{0,1}$	$\Delta RFP_t^{0,1}$
A	40	37	40	100	0,925	2,500*	2,703	2,206	1,225
B	150	170	150	250	1,133*	1,667	1,471	2,206	0,667
C	300	330	300	330	1,100	1,100	1,000	2,206	0,453
D	380	370	380	370	0,974	0,974	1,000	2,206	0,453
E	380	370	480	410	0,974	0,854	0,877	2,206	0,398
F	430	360	515	410	0,837	0,796	0,951	2,206	0,431
G	480	380	550	420	0,792	0,764	0,965	2,206	0,437
H	380	333	300	297	0,876	0,990	1,130	2,206	0,512

* OFP_t^t

Fuente: Grifell–Tatjé y Lovell (1999a)

Cuadro 4.5.1. Datos para un experimento controlado.

Gráficamente se puede observar la aproximación lineal *envolvente* que hace el DEA de la tecnología de producción en ambos períodos. Geométricamente, la variación en la productividad óptima viene determinada por el incremento en el ángulo de los radio-vectores que, uniendo el origen con las actividades B^0 y A^1, representan las productividades absolutas por ellas obtenidas.

de la medida tecnológica sí permitiría calcular la función de distancia.

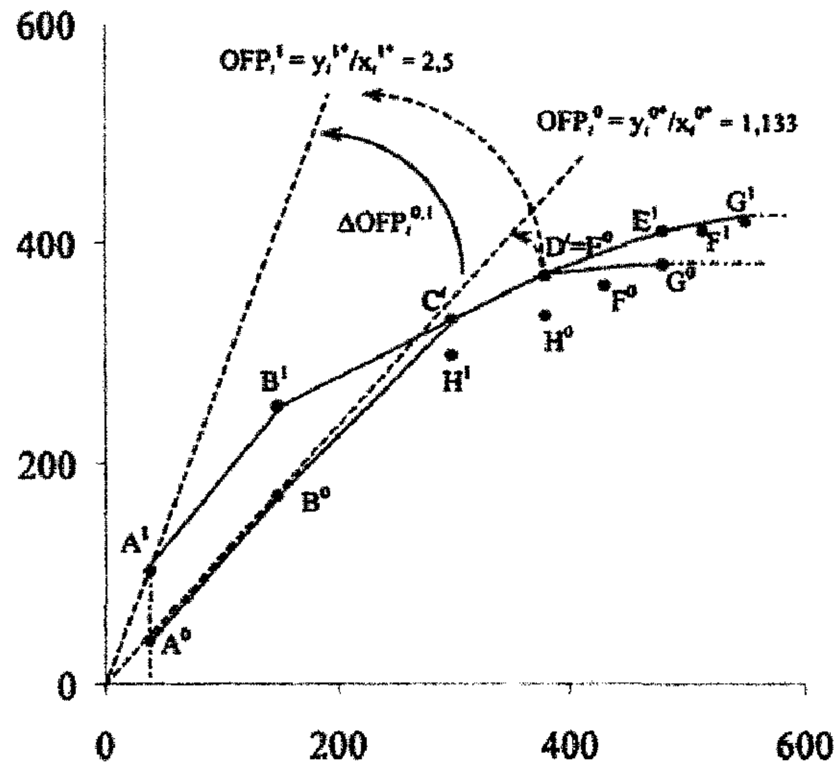


Gráfico 4.5.1. Las fronteras de producción DEA en ambos períodos

4.5.2 La evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist

Estos resultados globales deben desarrollarse en términos de los índices de Malmquist ya introducidos con objeto de caracterizar plenamente la variación del rendimiento productivo de las actividades y la tecnología. Tal como se ha mostrado en el tercer capítulo, las variaciones en las productividades absolutas, óptimas y relativas se obtienen con independencia de la dimensión seleccionada para el análisis: productos, factores y tecnológica, y el período de referencia seleccionado: inicial, final o la media geométrica entre ambos. Sin embargo, la descomposición que se realiza de estos índices difiere en función de estas variables por lo que, por simplicidad y coherencia con el ejemplo seleccionado de Grifell–Tatjé y Lovell (1999a), se ha decidido considerar la dimensión de productos y el período inicial de referencia, t=0, para realizar el análisis.

El cuadro 4.5.2 presenta las funciones de distancia contemporáneas e intertemporales que habiendo sido calculadas de acuerdo a los programas especificados, permiten determinar la eficiencia productiva de las distintas actividades en cada período y los índices de Malmquist de rendimiento productivo. Analizando las funciones de distancia contemporáneas determinantes de la eficiencia productiva, $D_{\hat{O}}^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$, t=0, es posible apreciar como B^0 es la única actividad eficiente definiendo el conjunto óptimo de posibilidades de producción, (2.2.32–33–34) $-D_{\hat{O}}^t(x_B^t, y_B^t) = 1-$, *i.e.* B^0 representa la escala de operaciones más productiva, *mpss*. Por el contrario, en t = 1, A^1 es la única actividad que se revela como eficiente atendiendo a $D_{\hat{O}}^{t+1}(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})$. A partir de esta información se puede determinar que las productividades óptimas en cada período temporal se corresponden con la productividad absoluta de estas actividades. Respecto a las funciones de distancia determinantes de la eficiencia técnica, $D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)$, $t = 0,1$, es posible apreciar como solo dos actividades, G^t y F^t, son ineficientes en ambos períodos al no pertenecer al subconjunto eficientes de posibilidades de producción, (2.2.13–14–15), $D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) < 1$, i' = F,G, t = 0,1. Del análisis de las funciones de distancia intertemporales es posible destacar que únicamente las actividades A^1 y B^1 han expandido el subconjunto de posibilidades de producción en t = 1 en términos productivos, $D_{\hat{O}}^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) > 1$, i' = A, B. Sin embargo, en términos técnicos son cinco las actividades que expanden el subconjunto eficiente de posibilidades de producción, $D_O^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) > 1$, i'= A, B, E, F, G y únicamente H^1 se encuentra por debajo del potencial de producción existente en t=0, $D_O^t(x_H^{t+1}, y_H^{t+1}) < 1$.

Actividad	$D_{\hat{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)$	$D_O^{t}(x_i^t,y_i^t)$	$D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})$	$D_O^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})$	$D_{\hat{O}}^{t}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})$	$D_O^{t}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})$	$D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^t,y_i^t)$	$D_O^{t+1}(x_i^t,y_i^t)$
A	0,816	1,000	1,000	1,000	2,206	2,703	0,370	0,370
B	1,000	1,000	0,667	1,000	1,471	1,471	0,453	0,680
C	0,971	1,000	0,440	1,000	0,971	1,000	0,440	1,000
D	0,859	1,000	0,389	1,000	0,859	1,000	0,389	1,000
E	0,859	1,000	0,342	1,000	0,754	1,079	0,389	1,000
F	0,739	0,960	0,318	0,988	0,702	1,079	0,335	0,923
G	0,699	1,000	0,305	1,000	0,674	1,105	0,317	0,927
H	0,773	0,900	0,396	0,900	0,874	0,900	0,351	0,900

Cuadro 4.5.2. Funciones de distancia contemporáneas e intertemporales.

Actividad	$\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta PE_i^{0,1}$	$\Delta AFP_i^{0,1}$	$TT_i^{0,1}$	$ST_i^{0,1}$	$\Delta OFP_i^{0,1}$	$TC_i^{0,1}$	$SC_i^{0,1}$
A	1,225	2,703	2,703	1,000	2,206	2,703	0,816
B	0,667	1,471	1,471	1,000	2,206	1,471	1,500
C	0,453	1,000	1,000	1,000	2,206	1,000	2,206
D	0,453	1,000	1,000	1,000	2,206	1,000	2,206
E	0,398	0,877	1,079	0,813	2,206	1,000	2,206
F	0,431	0,951	1,124	0,846	2,206	1,040	2,121
G	0,437	0,965	1,105	0,873	2,206	1,079	2,044
H	0,512	1,130	1,000	1,130	2,206	1,000	2,206

Cuadro 4.5.3. Descomposición de la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta AFP_i^{0,1} / \Delta OFP_i^{0,1}$.

Actividad	$\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta PE_i^{0,1}$	$\Delta TE_i^{0,1} = TT_i^{0,1} / TC_i^{0,1}$	$TT_i^{0,1}$	$TC_i^{0,1}$	$\Delta SE_i^{0,1} = ST_i^{0,1} / SC_i^{0,1}$	$ST_i^{0,1}$	$SC_i^{0,1}$
A	1,225	1,000	2,703	2,703	1,225	1,000	0,816
B	0,667	1,000	1,471	1,471	0,667	1,000	1,500
C	0,453	1,000	1,000	1,000	0,453	1,000	2,206
D	0,453	1,000	1,000	1,000	0,453	1,000	2,206
E	0,398	1,079	1,079	1,000	0,369	0,813	2,206
F	0,431	1,081	1,124	1,040	0,399	0,846	2,121
G	0,437	1,024	1,105	1,079	0,427	0,873	2,044
H	0,512	1,000	1,000	1,000	0,512	1,130	2,206

Cuadro 4.5.4. Descomposición de la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta TE_i^{0,1} \cdot \Delta SE_i^{0,1}$.

Una vez analizada la información que proporcionan las funciones de distancia es posible afrontar el análisis del rendimiento productivo a través de los índices de Malmquist. Comenzando por los índices de productividad ya calculados y presentados en el cuadro 4.5.1, $\Delta AFP_i^{0,1}$, $\Delta OFP_i^{0,1}$ y $\Delta RFP_i^{0,1}$, la resolución de los índices de Malmquist (3.2.10), (3.2.22) y (3.2.28) permite obtener igual resultado. Sin embargo, gracias a la caracterización de la tecnología presentada en el segundo capítulo es factible descomponer estos índices en sus componentes de eficiencia y cambio técnico y de escala.

4.5.2.1 Las variaciones en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{0,1} = TT_i^{0,1} \cdot ST_i^{0,1}$

El cuadro 4.5.3 muestra como la variación en la productividad absoluta de los factores se incrementa un 170,3%, $\Delta AFP_A^{0,1} = 2,703$, gracias a la transformación tecnológica positiva que, desde la perspectiva de la tecnología existente en t=0, alcanza un valor igual a $TT_A^{0,1} = 2,703$. Este incremento en la producción obtenida pone de manifiesto como las variaciones en la productividad absoluta responden únicamente a causas técnicas dado que la escala de operaciones, x_A^t, ha permanecido inalterada en ambos períodos. Así, la transformación de escala resulta unitaria, $ST_A^{0,1} = 1$, mostrando como la ausencia de transformaciones en este sentido hace imposible que puedan realizan aportación alguna a los incrementos en el rendimiento absoluto. Similares comentarios pueden realizarse respecto a la actividad B, donde la ausencia de variaciones en la escala de operaciones hace que sus ganancias de productividad provengan únicamente de fuentes técnicas. La situación de la actividad H resulta distinta al presentar un incremento en su productividad absoluta, $\Delta AFP_H^{0,1} = 1,130$, que responde enteramente a mejoras en la escala de producción. Efectivamente, respecto a los subconjuntos eficientes y óptimos en t=0, la actividad H no consigue acercarse a la frontera de producción, $TT_H^{0,1} = 1$, mientras que en t =1 se encuentra más cerca de la escala de operaciones más productiva en t = 0, $ST_H^{0,1} = 1,130$. Respecto a las procesos productivos C y D, éstos han permanecido inalterados desde t a t+1 por lo que sus índices $\Delta AFP_i^{0,1}$ resultan unitarios así como los términos

–técnico y de escala– en los que se descomponen. Con relación a las actividades que sufren retrocesos en su productividad absoluta, E, F y G, se puede apreciar como éstas se deben completamente a un empeoramiento en su eficiencia de escala desde la perspectiva del óptimo de producción existente en t=0, *i.e.* incrementan los factores empleados cuando deberían reducirlos. De hecho, pese a que en términos técnicos, experimentan transformaciones positivas, estas ganancias productivas se ven contrarrestadas y superadas por las perdidas que generan las transformaciones de escala.

4.5.2.2 Las variaciones en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_i^{0,1} = TC_i^{0,1} \cdot SC_i^{0,1}$

Es posible abordar ahora el análisis de las variaciones en la productividad óptima de los factores. En el ejemplo considerado, tal variación supone una mejora en los máximos de la productividad absoluta del 120,6%, $\Delta OFP_i^{0,1} = 2{,}206$, que se corresponde con las productividades alcanzadas por B^0 y A^1 en ambos períodos. Esta variación de la tecnología puede ser analizada desde la perspectiva de cada actividad atendiendo a la descomposición que de ella se hace en términos técnicos y de escala. De acuerdo a la justificación previa introducida, en el presente ejemplo se consideran las escalas de operaciones en t = 0 como referencia. Desde la perspectiva, por ejemplo, de la única actividad ineficiente, x_H^0, se observa como el nuevo conjunto eficiente de posibilidades de producción permite obtener igual cuantía de *output*, $TC_H^{0,1} = 1$, *i.e.* la frontera de producción no ha sufrido ninguna variación –igual razonamiento puede hacerse respecto a la escala de operaciones de las actividades C, D y E por ser $x_H^0 = x_C^0 = x_D^0 = x_E^0$–. Así, la totalidad de la mejora en la productividad óptima se debe al cambio de escala de la tecnología que, desde la perspectiva de estas actividades, implica un incremento en los diferenciales existentes entre las productividades observadas en los óptimos y en los subconjuntos eficientes, *i.e.* las actividades que produzcan en esta escala ven empeorada su situación en términos de eficiencia escala si no alteran su escala de operaciones siguiendo la evolución de aquella que ahora se manifiesta más productiva –véase la discusión de la descomposición en el índice de Malmquist $\Delta AFP_i^{0,1}$ en la próxima sección–. Así, en el ejemplo analizado la escala de operaciones se ha reducido, por lo que el óptimo de producción se encuentra más alejado de cualquier otra escala y se incrementan los diferenciales de productividades a excepción de la primera actividad, $SC_i^{0,1} > 1$, $i \neq$ A.

El progreso técnico generalizado que experimenta la tecnología fuera del rango determinado por las actividades C, D y E, $[x_C^0, x_D^0 = x_E^0 = x_H^0]$, se muestra gráficamente a través del desplazamiento al alza de la frontera, y unos valores del cambio técnico superiores a la unidad para el conjunto de actividades a excepción de las tres previamente mencionadas. Con relación a la contribución del cambio de escala a la variación en la productividad óptima, ésta difiere en función de la escala de referencia que se considere. Mientras en el caso de F y G el diferencial entre las productividades óptimas y eficientes se incrementa, $SC_i^{0,1} > 1$, en el caso de A este diferencial se reduce $SC_A^{0,1} < 1$. Así, al igual que el progreso técnico implica un incremento en la distancia entre las productividades obtenidas en el subconjunto o frontera eficiente para la escala de referencia de ser el valor calculado mayor que la unidad –interpretándose este incremento de una forma negativa al incrementarse la ineficiencia técnica de la actividad–, en el caso del cambio de escala la interpretación es análoga, valores superiores a la unidad reflejan incrementos en los diferenciales de productividades óptimas y eficientes –pudiéndose de nuevo interpretar este incremento de una forma negativa pues la escala que sirve de referencia para la evaluación se encuentra ahora más alejada de aquella óptima–.

Esta discusión permite analizar la variación en la productividad óptima desde la perspectiva de las actividades que la generan. Atendiendo en primer lugar a aquella que se revela como escala óptima en $t = 0$, el cambio técnico experimentado por la tecnología resulta idéntico a su transformación técnica por no haber visto alterada su escala de operaciones –análogamente para B, C y D–. Sin embargo, este progreso productivo desde la perspectiva de x_A^0, debe ponderarse con objeto de poner de manifiesto como la escala de operaciones representada por esta actividad ha mejorado su posición relativa respecto a la óptima existente en $t = 0$, x_B^{0*}, *i.e.* el diferencial entre las productividades óptimas y las existentes en la frontera o subconjunto eficiente se ha visto reducido informando el cambio de escala de esta situación, $SC_A^{0,1}$=0,801. Por el contrario, respecto a la escala óptima de operaciones en *t*=0, x_B^{0*}, podemos observar como el cambio en la tecnología le releva de su condición eficiente en *t* = 1. En este caso la variación en la productividad óptima refleja un progreso técnico $TC_B^{0,1}$=1,471, igual a la transformación técnica de esta actividad al no haberse visto alterada, como en el caso de A, su escala de operaciones, y un empeoramiento de su situación en términos de escala al haberse incrementado el diferencial entre las productividades óptimas y eficientes para x_B^{0*}, $SC_A^{0,1}$=1,500.

Actividad	Descomp.	$\Delta AFP_i^{0,1}$	$\Delta OFP_i^{0,1}$	$\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta PE_i^{0,1}$	$TC_i^{0,1}$	$TT_i^{0,1}/TC_i^{0,1} = \Delta TE_i^{0,1}$	$SC_i^{0,1}$	$ST_i^{0,1}/SC_i^{0,1} = \Delta SE_i^{0,1}$	$\Delta ST_i^{0,1}$
			$TECCH_{FGNZ}$	$EFFCH_{FGNZ}$	TECHCH	PEFFCH		SEFFCH	$SEFFCH_{RD}$
A	ZL	2,703	2,206	1,225	2,703	1,000	0,816	1,225	–
	FGNZ	2,703	2,206	1,225	–	1,000	–	1,225	–
	RD	2,703	–	–	2,703	1,000	–	–	1,000
B	ZL	1,471	2,206	0,667	1,471	1,000	1,500	0,667	–
	FGNZ	1,471	2,206	0,667	–	1,000	–	0,667	–
	RD	1,471	–	–	1,471	1,000	–	–	1,000
C	ZL	1,000	2,206	0,453	1,000	1,000	2,206	0,453	–
	FGNZ	1,000	2,206	0,453	–	1,000	–	0,453	–
	RD	1,000	–	–	1,000	1,000	–	–	1,000
D	ZL	1,000	2,206	0,453	1,000	1,000	2,206	0,453	–
	FGNZ	1,000	2,206	0,453	–	1,000	–	0,453	–
	RD	1,000	–	–	1,000	1,000	–	–	1,000
E	ZL	0,877	2,206	0,398	1,000	1,079	2,206	0,369	–
	FGNZ	0,877	2,206	0,398	–	1,079	–	0,369	–
	RD	0,877	–	–	1,000	1,079	–	–	0,813
F	ZL	0,951	2,206	0,431	1,040	1,081	2,121	0,399	–
	FGNZ	0,951	2,206	0,431	–	1,081	–	0,399	–
	RD	0,951	–	–	1,040	1,081	–	–	0,846
G	ZL	0,965	2,206	0,437	1,079	1,024	2,044	0,427	–
	FGNZ	0,965	2,206	0,437	–	1,024	–	0,427	–
	RD	0,965	–	–	1,079	1,024	–	–	0,873
H	ZL	1,130	2,206	0,512	1,000	1,000	2,206	0,512	–
	FGNZ	1,130	2,206	0,512	–	1,000	–	0,512	–
	RD	1,130	–	–	1,000	1,000	–	–	1,130

Cuadro 4.5.5. Descomposición de la variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \cdot \Delta RFP_i^{0,1}$.

4.5.2.3 Las variaciones en la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta AFP_i^{0,1} / \Delta OFP_i^{0,1}$

Se puede ahora abordar la evolución de la productividad relativa de los factores a través de las variaciones en aquellas absolutas y óptimas, (3.2.28), y de la descomposición que puede hacerse de esta magnitud en las variaciones de la eficiencia técnica y de escala, (3.2.31). La primera posibilidad queda reflejada en el cuadro 4.5.3 mientras que la segunda se ilustra en el cuadro 4.5.4.

Así, considerando las conclusiones iniciales presentadas en la sección 4.5.1, únicamente la actividad A presenta un mejora en su rendimiento productivo relativo, $\Delta RFP_A^{0,1}$ = 1,225. Esta mejora tiene su origen en la variación positiva que ha experimentado en términos de su escala de operaciones. Observando los índices representativos de la transformación técnica y el cambio técnico se puede apreciar como estos presentan igual magnitud, $TT_A^{0,1} = TC_A^{0,1} = 2{,}703$, de forma que no ha existido variación alguna en su eficiencia técnica $\Delta TE_A^{0,1} = TT_A^{0,1} / TC_A^{0,1} = 1$. Al definir la actividad A la frontera de producción en ambos periodos, su nivel de eficiencia técnica no debe verse alterado y esto se pone de manifiesto considerando que, respecto a la tecnología de referencia en t=0, consigue unas ganancias productivas que, finalmente, son igualadas por el cambio en la tecnología –precisamente por ser esta observación aquella que lidera el progreso técnico para su escala de operaciones–. Sin embargo, la situación final relativa en términos de escala si ha experimentado un progreso importante, pues esta actividad pasa de presentar una escala subóptima respecto a la tecnología en t = 0 a definir el subconjunto óptimo en t =1. Si bien no experimenta transformación de escala alguna respecto al óptimo en t = 0 por seguir produciendo con igual nivel de factores, $ST_A^{0,1} = 1$, el cambio de escala previamente comentado refleja la reducción en el diferencial entre las escalas óptimas y eficientes –de hecho, el máximo posible, dado que A define la escala de producción óptima en t = 1–.

Similares comentarios podrían realizarse del resto de actividades observadas, si bien caracterizando una situación generalizada de regresión productiva en términos relativos. Centrándose en F, se aprecia como su eficiencia técnica se ha visto incrementada en la mayor proporción observada, $\Delta TE_F^{0,1}$ = 1,081, acercándose así a la frontera de producción; sin embargo, la regresión que implica una transformación de escala inferior a la unidad, $ST_F^{0,1}$ = 0,846, reforzada por un cambio de escala positivo que refleja el incremento en la distancia entre las productividades óptimas y las eficientes para su escala de operaciones, $SC_F^{0,1}$=2,121, pone de manifiesto como su eficiencia de escala ha empeorado, $\Delta SE_F^{0,1} = ST_F^{0,1}/SC_F^{0,1}$ =0,399, hasta el punto de contrarrestar las ganancias productivas puestas de manifiesto por la variación técnica superior a la unidad. Respecto a la actividad H, la regresión en su eficiencia de escala relativa la sitúa en una peor posición, sin que puede verse amortiguada tal regresión productiva por ganancias de eficiencia técnica dado que esta permanece constante, $\Delta TE_H^{0,1}$ = 1.

4.5.3 La descomposición del índice $\Delta AFP_i^{t,t+1}$ de Malmquist

Se puede finalizar el presente ejemplo ilustrando las distintas propuestas realizadas en la literatura con objeto de descomponer el índice de productividad de Malmquist. Tal como se ha puesto de manifiesto en el tercer capítulo, la descomposición defendida en la presente investigación se corresponde con (3.2.13), cuadro 4.5.3. Esta descomposición queda integrada en el modelo de evaluación del rendimiento productivo, recogido en el cuadro 4.5.5, a través de la expresión (3.3.1). Atendiendo a la formulación $\Delta AFP_i^{0,1} = TT_i^{0,1} \cdot ST_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \cdot \Delta RFP_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \cdot \Delta AFP_i^{0,1}/\Delta OFP_i^{0,1}$, se muestra como la propuesta contemporáneamente realizada por Simar y Wilson (1998a) y Zofio y Lovell (1998) recoge los índices que caracterizan de forma completa el rendimiento productivo de las actividades. Así, tomando como referencia la actividad A que experimenta un mayor incremento en su productividad absoluta, $\Delta AFP_A^{0,1}$ = 2,703, esta variación puede ponerse en relación con la variación en la productividad óptima, $\Delta OFP_A^{0,1}$ = 2,206 y la propia productividad relativa, $\Delta RFP_A^{0,1}$ = 1,225. Esta relativización de la productividad absoluta en términos de la óptima y la relativa puede extenderse a cada uno de los índices en los que estas variaciones pueden descomponerse con objeto de obtener la descomposición básica $\Delta AFP_A^{0,1} = TT_A^{0,1} \cdot ST_A^{0,1}$. Así, el término de transformación tecnológica pondera el cambio técnico experimentado por la tecnología con la evolución relativa de la actividad: $TT_A^{0,1} = TC_A^{0,1} \cdot \Delta TE_A^{0,1} = TC_A^{0,1} \cdot TT_A^{0,1} / TC_A^{0,1}$. Análogo razonamiento puede realizarse respecto a la transformación de escala obteniéndose $ST_A^{0,1} = SC_A^{0,1} \cdot \Delta SE_A^{0,1} = SC_A^{0,1} \cdot ST_A^{0,1} / SC_A^{0,1}$.

Si bien Färe *et al.* (1989, 1994) no establecieron de forma explícita modelo alguno de rendimiento productivo, la descomposición por ellos propuesta puede ser interpretada e integrada en el marco analítico introducido alcanzándose iguales conclusiones a nivel agregado. De hecho, su descomposición agregada de la $\Delta AFP_i^{0,1}$ es equivalente a la anteriormente expuesta: $\Delta AFP_i^{0,1} = \Delta OFP_i^{0,1} \cdot \Delta RFP_i^{0,1}$ aunque en ningún momento establecen la básica aquí adoptada, $\Delta AFP_i^{0,1} = TT_i^{0,1} \cdot ST_i^{0,1}$. Estos autores denominan al último multiplicando $EFFCH_{FGNZ}$ que, de ser igual a la unidad, $\Delta AFP_i^{0,1} / \Delta OFP_i^{0,1} = 1$, refleja la ausencia de variaciones en el nivel de eficiencia productiva respecto los óptimos de producción, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta PE_1^{0,1}$. Posteriormente, Färe *et al.* (1994b) desagregan este término relativo en los componentes que relativizan la evolución seguida por la eficiencia técnica y de escala, $\Delta RFP_i^{0,1} = \Delta AFP_i^{0,1} / \Delta OFP_i^{0,1} = \Delta TE_i^{0,1}\ \Delta SE_i^{0,1}$. Esta descomposición de la variación en la productividad relativa o $EFFCH_{FGNZ}$, se corresponde con los términos que Färe *et al.* (1994b) denominan PEFFCH y SEFFCH, cuya interpretación corresponde a las variaciones en las posiciones relativas de las actividades en términos de eficiencia técnica y de escala en cada período o, alternativamente, indican si las observaciones han explotado las oportunidades derivadas del progreso técnico y de rendimiento productivo en términos de mejoras en la escala de operaciones. Nótese, sin embargo, que la ausencia de una descomposición de la variación en la productividad óptima de los factores imposibilita la caracterizaron del cambio técnico en el modo adoptado en la presenta investigación y la descomposición de los términos agregados $\Delta TE_i^{0,1}$ y $\Delta SE_i^{0,1}$ respecto al propio cambio técnico y de escala: $\Delta TE_i^{0,1} = TT_i^{0,1} / TC_i^{0,1}$ y $\Delta SE_i^{0,1} = ST_i^{0,1} / SC_i^{0,1}$.

Por último, podemos considerar la descomposición propuesta por Ray y Desli (1997) –análoga a la de Grifell–Tatjé y Lovell (1999a) de la que se extrae el presente ejemplo–. Esta descomposición obvia la expresión de la variación de la productividad absoluta de los factores en términos de los óptimos productivos y su valor relativizado, $\Delta \mathrm{AFP}_i^{0,1} = \Delta \mathrm{OFP}_i^{0,1} \cdot \Delta \mathrm{RFP}_i^{0,1}$. Los primeros autores tampoco obtienen la descomposición básica aquí propuesta, $\Delta \mathrm{AFP}_i^{0,1} = \mathrm{TT}_i^{0,1} \cdot \mathrm{ST}_i^{0,1}$, considerando que la variación absoluta puede ser descompuesta directamente en cambio técnico, la evolución de la eficiencia técnica relativa, y un único término que recoge la información relacionada con la transformación de escala, $\Delta \mathrm{AFP}_i^{0,1} = \mathrm{TC}_i^{0,1} \cdot \Delta \mathrm{TE}_i^{0,1} \cdot \Delta \mathrm{ST}_i^{0,1}$; es decir, TECHCH, PEFFCH y $\mathrm{SEFFCH}_{\mathrm{RD}}$.

En resumen, todas las descomposiciones propuestas reflejan de forma agregada la variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta \mathrm{AFP}_i^{0,1}$, aunque difieren en los términos que las configuran. La ausencia hasta el momento de un marco integrador que permitiese esclarecer el significado de los distintos componentes ha originado una elevada confusión a nivel teórico y aplicado. Las principales conclusiones en lo concerniente a la descomposición del índice de productividad absoluta de Malmquist ya han sido expuestas en el tercer capítulo: 1) el cambio técnico establecido por Färe *et al.* (1989, 1994) representa las variaciones en el rendimiento obtenido por las escalas más productivas en cada período, $\Delta \mathrm{OFP}_i^{0,1}$; 2) los términos de eficiencia pura y eficiencia de escala, PEFFCH y SEFFCH, introducidos Färe *et al.* (1994b) informan sobre la evolución *relativa* de la eficiencia técnica y de escala con relación a la evolución de los óptimos pero no sobre la variación *absoluta* que se establece en el modelo propuesto; es decir, descomposición básica en la transformación tecnológica y de escala $\Delta \mathrm{AFP}_i^{0,1} = \mathrm{TT}_i^{0,1} \cdot \mathrm{ST}_i^{0,1}$; 3) La descomposición de Ray y Desli (1997) tampoco recoge la descomposición básica y aunque caracteriza el cambio técnico en el modo aquí adoptado, obvia importante información que resulta necesaria para la evaluación del rendimiento, *e.g.* la posición relativa final en términos de la escala de operaciones, $\Delta \mathrm{SE}_i^{0,1}$. Únicamente las descomposiciones planteadas por Simar y Wilson (1998a) y Zofío y Lovell (1998), si bien no fueron desarrolladas dentro de modelo alguno de evaluación del rendimiento productivo, permitiría la completa caracterización del modelo aquí propuesto –a través de la observación de los índices en los que se descompone la variación en la productividad absoluta–.

4.6 La idoneidad de los índices de Malmquist calculados a través de técnicas DEA

En los capítulos precedentes se ha mostrado como cualquier propuesta para definir índices de rendimiento productivo debe ser ponderada con unos criterios de idoneidad axiomática y tecnológica con objeto de validarla. En la sección 3.1 se han discutido las propiedades esenciales que desde una perspectiva axiomática debe cumplir un índice de cuantías con objeto de representar de forma adecuada variaciones en la productividad de los factores: identidad, monoticidad, transitividad –con objeto de realizar agregaciones y desagregaciones consistentes de las variaciones en la productividad por subperíodos–, proporcionalidad –homogeneidad– y separabilidad –con objeto de facilitar su interpretación como razón de funciones agregadoras de productos y factores–. Así mismo, se ha establecido como criterio de idoneidad el que el índice finalmente propuesto responda a una caracterización flexible de la tecnología de producción.

El objetivo de la presente sección es poner de relieve como el uso de la técnica de optimización matemática DEA permite calcular índices de productividad que responden a los criterios de idoneidad tanto desde una perspectiva axiomática como tecnológica. Si bien en la sección 3.1. se realiza una exposición cronológica de los criterios existentes para establecer su idoneidad comenzando con aquellos axiomáticos –no sería hasta la década de los setenta cuando Erwin Diewert introduce la aproximación tecnológica de los números exactos (superlativos)–, dada la presentación realizada en este capítulo iniciamos la discusión por este último nivel.

4.6.1 Propiedades de los índices DEA de rendimiento productivo $D^t_d(x^t_i, y^t_i)$, d=O,I,T

Si teóricamente se ha mostrado como la definición de funciones de distancia suponen una caracterización válida de la tecnología de producción, (2.2.3–4–6), y como esta caracterización resulta flexible al exigir únicamente que la tecnología satisfaga los axiomas T.1–T.7 –con objeto de que las propias funciones de distancia se encuentren definidas–, la información recogida en la sección 4.2 establece que la aproximación que el DEA realiza de la tecnología verifica tales axiomas y, así, las funciones de distancia calculadas sobre (4.2.3) puede considerarse que representan una tecnología de producción flexible –de hecho, la más laxa posible a excepción de (4.2.1) y su expresión formal en (4.2.2)–. De este modo, las funciones de distancia calculadas haciendo uso del DEA son idóneas, desde una perspectiva tecnológica, al estar definidas sobre tecnologías que no imponen restricciones indeseadas. Si las funciones de distancia satisfacen tal criterio de idoneidad, los índices de Malmquist definidos en estos términos, (3.2.1–2–3), también representan variaciones productivas de las actividades observadas y de la propia tecnología, (3.2.16–17–18), que resultan idóneos desde esta perspectiva –siendo válidas la totalidad las apreciaciones realizadas en la sección 3.2.3.1–.

Así, ¿qué ocurre sin embargo desde una perspectiva axiomática? Cumplen las funciones de distancia de la forma $D^t_d(x^t_i, y^t_i)$, d=O,I,T, y los índices de Malmquist calculados según la técnica DEA los axiomas exigidos para determinar su idoneidad. Con objeto de proceder al análisis se deben considerar las formulaciones primales planteadas en las secciones precedentes y las consideraciones realizadas en la sección 3.1.1. Centrándonos de nuevo en la dimensión de productos, el programa (4.3.10) permite calcular la función de distancia representativa del nivel de eficiencia técnica y, con objeto de verificar si el índice de rendimiento productivo (3.2.1) verifica las propiedades de idoneidad exigidas, resulta necesario expresar la formulación intertemporal análoga a (4.3.10), $D^t_O(x^{t+1}_i, y^{t+1}_i)$, que constituye el numerador:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad D_O^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi'}^{t+1}}{\sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni'}^{t+1} + \upsilon_{i'}^{t+1}} \\
&\text{s.a} \\
&\frac{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^t y_{mi}^t}{\sum_{n=1}^{N} v_n^t x_{ni}^t + \upsilon_{i'}^{t+1}} \le 1, i = 1,\dots,I \\
&\mu_m^t, v_n^t \ge 0, m = 1,\dots,M; n = 1,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{4.6.1}
$$

Tal como se puede apreciar, la resolución del programa (4.6.1) –dual de la inversa de (4.4.1)– establece como tecnología de referencia aquella existente en t. Si ahora establecemos el índice de Malmquist (3.2.1), TT_d^t, en términos de las formulaciones DEA (4.3.10) y (4.6.1) optimizadas, se obtiene:

$$
M_O^t\left(x_{i'}^t, x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^t, y_{i'}^{t+1}\right) = \frac{D_O^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})}{D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t)} = \frac{\dfrac{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{t,t+1*} y_{mi'}^{t+1}}{\sum_{n=1}^{N} v_n^{t,t+1*} x_{ni'}^{t+1} + \upsilon_{i'}^{t,t+1*}}}{\dfrac{\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{t,t*} y_{mi'}^t}{\sum_{n=1}^{N} v_n^{t,t*} x_{ni'}^t + \upsilon_{i'}^{t,t*}}},
\tag{4.6.2}
$$

donde ahora los pesos de productos y de factores, así como el parámetro de escala, son de la forma, $\mu_m^{t,s*}$, $v_m^{t,s*}, \upsilon_m^{t,s*}$ donde t refleja como la tecnología de referencia se corresponde con el período inicial mientras $s = t$, t+1 denota si el peso se corresponde con la actividad observada en el período inicial o final. El índice (4.6.2) expresa la razón de índices de cuantías de productos y factores si bien difiere de los números índices tradicionales en la corrección que realiza el parámetro de escala y en que los pesos de agregación difieren dependiendo del período en que se analiza la actividad evaluada. Esta situación de variación en los pesos de agregación es resultado directo de la condición de normalización ya introducida en la sección 5.2, $\sum_{m=1}^{M}\mu_m^{t,s^*} y_{mi'}^{s} = 1$, $s = t,\ t+1$, si bien no dificulta el análisis de las propiedades del índice. En definitiva, (4.6.2) puede considerarse como un índice de rendimiento productivo pues permite evaluar la eficiencia técnica pero no constituye un indice de productividad si atendemos a la propiedades que debe verificar de acuerdo a lo ya establecido en los capítulos anteriores y que se abordan a continuación.

Con relación a las propiedades del índice, si se calculan las funciones de distancia de una actividad que no sufre variaciones productivas en el tiempo, $(x_i^t, y_i^t) = (x_i^{t+1}, y_i^{t+1})$, el resultado obtenido en la resolución de (4.3.10) y (4.6.1) es idéntico, $D_O^t(x_{i'}^t, y_{i'}^t) = D_O^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1})$, por lo que el índice de Malmquist de transformación técnica (3.2.1) –y su expresión DEA (4.6.2)– es unitario verificándose la propiedad de identidad.

Con relación a la propiedad de monoticidad se aprecia como en cualquier momento temporal, *e.g.* $t = 0, 1$, un incremento en el vector de productos, $y^{t\prime} > y^t$, $\forall y_m$, eleva la productividad absoluta, $\mathrm{AFP}_{i'}^t(y^{t\prime}, x^t) > \mathrm{AFP}_{i'}^t(y^t, x^t)$, $\sum_{m=1}^{M}\mu_m^{t,t^*} y_{mi'}^{t\prime} / \sum_{n=1}^{N} v_n^{t,t^*} x_{ni'}^{t} + \upsilon_{i'}^{t,t^*} > \sum_{m=1}^{M}\mu_m^{t,t^*} y_{mi'}^{t} / \sum_{n=1}^{N} v_n^{t,t^*} x_{ni'}^{t} + \upsilon_{i'}^{t,t^*}$, mientras un incremento en los factores, $x^{t\prime} > x^t$, $\forall x_n$, la reduce, $\mathrm{AFP}_{i'}^t(y^t, x^{t\prime}) < \mathrm{AFP}_{i'}^t(y^t, x^t)$, $\sum_{m=1}^{M}\mu_m^{t,t^*} y_{mi'}^{t} / \sum_{n=1}^{N} v_n^{t,t^*} x_{ni'}^{t\prime} + \upsilon_{i'}^{t,t^*} < \sum_{m=1}^{M}\mu_m^{t,t^*} y_{mi'}^{t} / \sum_{n=1}^{N} v_n^{t,t^*} x_{ni'}^{t} + \upsilon_{i'}^{t,t^*}$. Dada esta evolución en $t=0, 1$, la variación en la productividad absoluta $\Delta\mathrm{AFP}_{i'}^{t,t+1}(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1})$ será creciente ante $y^{t+1\prime} > y^{t+1}$ y $x^{t\prime} > x^t$ mientras que será decreciente si $y^{t\prime} > y^t$ y $x^{t+1\prime} > x^{t+1}$. La inclusión de la condición de normalización no altera los resultados expuestos pues su objeto es poder transformar de forma equivalente las expresiones finales recogidas en (4.6.2) en modo que permitan el cálculo de las propias funciones de distancia cuyo valor, finalmente, determina el índice de Malmquist (3.2.1). Así, alteraciones en alguno de los vectores de productos y factores de (4.6.2) en la forma considerada conllevan alteraciones en sus pesos con objeto de que se satisfaga tal condición aunque manteniéndose la variación relativa del índice ya mostrada.

Con relación a la propiedad de transitividad, su discusión exigiría incorporar formulaciones equivalentes a (4.6.2) para períodos sucesivos en la forma ya presentada, pudiéndose entonces mostrar como el mantenimiento de una tecnología de referencia base hace que los índices así definidos puedan agregarse de forma consistente por subperíodos.

Respecto a la propiedad de proporcionalidad, ésta se verifica si incrementos proporcionales en el vector de productos, y^{t+1} (y^t), origina incrementos (reducciones) proporcionales en el índice mientras que con relación al vector de factores se debe dar tal circunstancia ante incrementos (reducciones) en el vector x^t (x^{t+1}). Si bien con relación a las variaciones en los productos, la expresión (4.6.2) presenta tal proporcionalidad al ser $\sum_{m=1}^{M} \mu_m^{t,s*} y_{mi'}^{s}$ homogénea de primer grado, no acontece de igual forma respecto a los factores. El proceso de optimización conjunta de las funciones agregadoras de productos y factores, así como la presencia del parámetro de escala, $\upsilon_m^{t,s*}$, en ésta última tiene como consecuencia que la función agregadora $\sum_{n=1}^{N} v_n^{t,s*} x_{ni'}^{t} + \upsilon_{i'}^{t,s*}$ quede supeditada a las cuantías de producción observada y la magnitud de los rendimientos a escala en el programa (4.3.8) que es aquel finalmente resuelto –y, así, el propio índice de rendimiento productivo–.

Finalmente resulta posible analizar la propiedad de separabilidad. Observando la formulación (4.6.2) se puede apreciar que la optimización conjunta de los pesos de productos y factores, y la existencia del parámetro relativo a la escala de operaciones, no permiten expresar la función de distancia como la razón entre funciones agregadoras de productos y factores, *i.e.* la tecnología de producción no presenta homoteticidad simultánea.

Así, es posible concluir que, al igual que a nivel teórico según lo expuesto en la sección 3.2.3.1, el índice DEA de rendimiento productivo determinante de la transformación técnica verifica las propiedades de identidad y monoticidad y transitividad pero no aquellas de proporcionalidad –homogeneidad– y separabilidad. Este resultado es extensible a los índices $ST_d^{t,t+1}$, $TC_d^{t,t+1}$ y $SC_d^{t,t+1}$,

d=O,I,T, por estar conformados por funciones de distancia definidas sobre $T^t(x,y)$ y, por tanto, presentar características similares a las ya expuestas.

4.6.2 Propiedades de los índices DEA de productividad $D^t_{\hat{d}}(x^t_i, y^t_i)$, $\hat{d}$ =O,I,T

Los índices de productividad relativos a la variación en la productividad absoluta, $\Delta AFP^{t,t+1}_i$, óptima, $\Delta OFP^{t,t+1}_i$ y relativa, $\Delta RFP^{t,t+1}_i$, se caracterizan teóricamente por estar conformados por funciones de distancia que, al definirse sobre $\hat{T}^t(x,y)$, (4.2.5), exigen que la tecnología presente homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala–, T.8– y homoteticidad simultánea –separabilidad–, T.9. Así, frente a la caracterización de la tecnología que implicaban los índices de rendimiento productivo basados en $D^t_d(x^t_i, y^t_i)$, d=O,I,T, las funciones de distancia de la forma $D^t_{\hat{d}}(x^t_i, y^t_i)$, $\hat{d}$ =O,I,T, exigen una estructura productiva más restrictiva por lo que éstas últimas funciones de distancia son menos flexibles en términos de la tecnología que les es inherente. Sin embargo, tal como se ha puesto de manifiesto en la presente investigación, esta caracterización de la tecnología resulta necesaria si se desea establecer unos índices de productividad que permitan evaluar la eficiencia respecto al máximo potencial que obtiene la escala de operaciones más productiva –T.8, homogeneidad lineal– pudiéndose representar tal situación de forma intuitiva como razón de funciones agregadoras de productos a factores –extendiendo el análisis realizado en el primer capítulo al caso de tecnologías multiproducto y multifactor– a través del axioma T.9 –homoteticidad simultánea–. Es decir, se recurre a $\hat{T}^t(x,y)$ con objeto de definir funciones de distancia que permitan evaluar el rendimiento productivo en su conjunto y no solo aquel técnico como el previamente establecido. Tal decisión no impide caracterizar el proceso productivo en la forma flexible o laxa establecida por $T^t(x,y)$ sino ampliar el ámbito de análisis con objeto de introducir las variaciones en la productividades absolutas, óptimas y relativas. Así, a nivel aplicado no se renuncia a la información que, con relación a los rendimientos a escala, es capaz de facilitar el

Análisis Envolvente de Datos al calcular las funciones de distancia $D_d^t(x_i^t, y_i^t)$, d=O,I,T, que se encuentran en las descomposiciones de los índices.

Realizadas esta apreciaciones respecto a la conveniencia tecnológica de definir el rendimiento respecto a $\hat{T}^t(x,y)$, los índices de productividad de Malmquist basados en funciones de distancia definidas sobre esta tecnología verifican las propiedades ya expuestas a nivel teórico desde una perspectiva axiomática –sección 3.2–.

Efectivamente, centrándonos de nuevo en la dimensión de productos, el programa (4.3.13) permite calcular la función de distancia representativa del nivel de eficiencia productiva –técnica y de escala– y, con objeto de verificar las propiedades que satisface el índice de productividad (3.2.10), resulta una vez más necesario expresar su formulación intertemporal análoga, $D_{\hat{O}}^t(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})$:

$$\begin{aligned}
&\max \quad D_{\hat{O}}^t(x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^{t+1}) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}_m^t y_{mi'}^{t+1}}{\sum_{n=1}^{N} \hat{v}_n^t x_{ni'}^{t+1}} \\
&\qquad \text{s.a} \\
&\qquad \frac{\sum_{m=1}^{M} \hat{\mu}_m^t y_{mi}^t}{\sum_{n=1}^{N} \hat{v}_n^t x_{ni}^t} \le 1, i = 1,\dots,I \\
&\qquad \hat{\mu}_m^t, \hat{v}_n^t \ge 0,\ m = 1,\dots,M; n = 1,\dots,N.
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Tal como se puede apreciar, la resolución del programa (4.6.3) –dual de la inversa de (4.3.4)– establece como tecnología de referencia aquella existente en t. Si ahora establecemos el índice de Malmquist (3.2.10), $M_{\hat{A}}^t\left(x_{i'}^t, x_{i'}^{t+1}, y_{i'}^t, y_{i'}^{t+1}\right)$, en términos de las formulaciones DEA (4.3.13) y (4.6.3) optimizadas, se obtiene:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{t}\left(x_{r}^{t}, x_{r}^{t+1}, y_{r}^{t}, y_{r}^{t+1}\right)=\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_{r}^{t+1}, y_{r}^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_{r}^{t}, y_{r}^{t})}=\frac{\dfrac{\sum_{m=1}^{M}\hat{\mu}_{m}^{t,t+1*}\, y_{mr}^{t+1}}{\sum_{n=1}^{N}\hat{v}_{n}^{t,t+1*}\, x_{nr}^{t+1}}}{\dfrac{\sum_{m=1}^{M}\hat{\mu}_{m}^{t,t*}\, y_{mr}^{t}}{\sum_{n=1}^{N}\hat{v}_{n}^{t,t*}\, x_{nr}^{t}}}, \tag{4.6.4}$$

donde, de nuevo, los pesos de productos y de factores responden a $\hat{\mu}_{m}^{t,s*}$ y $\hat{v}_{n}^{t,s*}$, reflejando t el período base de referencia elegido para realizar la comparación de productividades absolutas y $s = t$, t+1, el período en que se observa a la actividad evaluada. De forma análoga a (4.6.2), el índice (4.6.4) refleja la expresión de índices de cuantías de productos y factores sin el parámetro relativo a la escala de operaciones, *i.e.* un índice de productividad en la forma definida en la literatura económica excepto por el hecho de que los pesos agregadores son *virtuales* al derivarse del proceso de optimización y no aquellos de mercado como en los números índices tradicionales[32].

Con relación a la propiedad de transitividad, al igual que la sección anterior, su discusión exigiría incorporar formulaciones equivalentes a (4.6.4) para períodos sucesivos pudiéndose entonces mostrar como el mantenimiento de una

---

[32] Así, si se seleccionan como pesos agregadores los precios *de mercado* observados de los productos y factores, p^t y w^t, y considerando como períodos de referencia t y t+1, se obtienen respectivamente los índices de Paasche y Laspeyres, cuya media geométrica es el conocido índice de Fischer:

$$\Delta \mathrm{AFP}_{r}^{t,t+1}=\left[\frac{p^{t}\cdot y^{t+1}}{w^{t}\cdot x^{t+1}} / \frac{p^{t}\cdot y^{t}}{w^{t}\cdot x^{t}}\right]^{1/2}\cdot\left[\frac{p^{t+1}\cdot y^{t+1}}{w^{t+1}\cdot x^{t+1}} / \frac{p^{t+1}\cdot y^{t}}{w^{t+1}\cdot x^{t}}\right]^{1/2}=\left[\frac{p^{t}\cdot y^{t+1}}{p^{t}\cdot y^{t}}\cdot\frac{p^{t+1}\cdot y^{t+1}}{p^{t+1}\cdot y^{t}}\right]^{1/2} / \left[\frac{w^{t}\cdot x^{t+1}}{w^{t}\cdot x^{t}}\cdot\frac{w^{t+1}\cdot x^{t+1}}{w^{t+1}\cdot x^{t}}\right]^{1/2}.$$

Nótese la similitud entre esta formulación y la que se obtendría de combinar la media geométrica de (4.6.5), que considera como periodo base t y aquel referenciado a t+1. Diversos autores han explorado la relación existente entre el índice geométrico de Malmquist y el de Fisher concluyendo que "*asumiendo rendimientos constantes a escala, maximización de beneficios y eficiencia asignativa, el índice de productividad (I)* –media geométrica de índices de Malmquist– *puede ser aproximado razonablemente por el cociente de un índices de factores de Fischer y un índice de productos de Fischer. Solo bajo situaciones muy específicas, que no es probable que acontezcan, podría estar aproximación convertirse en igualdad*", Balk (1993: 682). Esta última apreciación se realiza con relación a las condiciones de igualdad entre ambos índices que postulan Färe y Grosskopf (1992).

tecnología de referencia base tiene como resultado que los índices puedan encadenarse de forma consistente por subperiodos.

En esta ocasión, la propiedad de identidad y monoticidad se observan en modo análogo al establecido para (4.6.2), mientras que respecto a la propiedad de proporcionalidad, ésta es verificada en el caso del índice (4.6.4), pues no solo incrementos proporcionales en el vector de productos, y^{t+1} (y^t), originan incrementos (reducciones) proporcionales en el índice sino que, en esta ocasión, incrementos en el vector x^t (x^{t+1}), también originan aumentos (reducciones) proporcionales. Este resultado se observa tanto en las funciones agregadoras de productos, $\sum_{m=1}^{M}\mu_m^{t,s*}y_{mi'}^{s}$, como de factores, $\sum_{n=1}^{N}v_n^{t,s*}x_{ni'}^{t}$, homogéneas de primer grado. En este último caso, tal propiedad se debe a la desaparición del parámetro de escala, $\upsilon_m^{t,s*}$, en la caracterización de tecnologías que presentan rendimientos constantes a escala.

Se puede concluir la presente sección discutiendo la propiedad de separabilidad del índices $\Delta AFP_t^{t,t+1}$ en su aproximación DEA (4.6.4). Observando la optimización conjunta de productos y factores es posible concluir la inexistencia de homoteticidad simultánea. En caso de que tal propiedad de verificase, la función objetivo en cualquier período podría representarse de acuerdo a $D_O^t(x_{i'}^s, y_{i'}^s) = \sum_{m=1}^{M}\hat{\mu}^{t,s*}y_{i'}^{s} / \sum_{n=1}^{N}\hat{v}_n^{t,s*}x_{ni'}^{s} = g^t(y_{i'}^t)/f^t(x_{i'}^s)$, expresándose la función de distancia como razón entre la producción obtenida y los factores empleados. Sin embargo, tal como se aventura en la sección 4.2, el proceso de optimización simultáneo de ambos conjuntos de pesos, $\hat{\mu}^{t,s*}$ y $\hat{v}_n^{t,s*}$, imposibilita una agregación independiente por lo que productos y factores no son separables en la forma descrita. Dado que con relación a la función de factores y tecnológica se pueden realizar análogos razonamientos, es posible concluir que la técnica DEA no permite representa una tecnología homotética en *outputs*, *inputs* o simultáneamente –situación coherente con el hecho de que desde una perspectiva teórica cualquier proceso productivo es inseparable pues resulta evidente que la producción obtenida depende de la cuantía de productos empleada–. Así, frente a los desarrollos teóricos establecidos en el segundo y tercer capítulos con objeto de extender el concepto intuitivo de productividad al caso de múltiples productos y factores, el empleo de técnicas DEA no permite su separabilidad por lo que los índices de productividad absoluta, optima y relativa no satisfacen tal propiedad; es decir, los resultados obtenidos no pueden interpretarse como razones entre funciones agregadoras de productos y factores que dependan únicamente de las variables que las constituyen[33].

El hecho de que esta propiedad no se satisfaga tiene una importante consecuencia a nivel aplicado: la posibilidad de que en el proceso de optimización con objeto de calcular las funciones de distancia de la forma (4.3.13) y (4.6.3), sea posible identificar actividades que, para diversas escalas de operaciones en función de los productos y factores observados, representen la escala de operaciones más productiva. Así, "*a cada combinación posible de productos y factores, le corresponde una mpss –most productive scale size–*", Banker (1984:37), siendo este resultado consecuencia de la búsqueda de los pesos más favorables para la actividad evaluada en el proceso de optimización. Así, acontece que dadas las distintas posibilidades de agregación en función de los productos y factores, *i.e.* ausencia de separabilidad, pueden existir diversas actividades que representen, con sus niveles de productos y factores respectivos, la escala de operaciones más productiva para tales combinaciones, *e.g.* aquellas que presenten la mayor cuantía observada en algunos de los m productos o el menor nivel en los n factores. En definitiva, no resulta posible garantizar una única escala de referencia en la evaluación del rendimiento productivo al poderse determinar diversas escalas óptimas.

Los resultados establecidos desde la perspectiva de productos con relación al índice de Malmquist (3.2.10) de variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_i^{t,t+1}$, y su aproximación empírica DEA en (4.6.4) son extensibles a

---

[33] Esta discrepancia entre los resultados teóricos derivados de la asunción de axiomas, *e.g.* T.9 –homoteticidad simultánea–, y las posibilidades empíricas de cálculo no solo se manifiesta en el uso de métodos de optimización DEA sino que también se pondría de manifiesto si las funciones de distancia fuesen calculadas de forma econométrica de acuerdo a la discusión realizada por Diewert (1976:124–129) respecto a la separabilidad de las funciones de productos y factores en términos de la tecnología subyacente -véase Caves *et al.* (1982a: 1401–1403) ó Diewert

la dimensión de factores y tecnológica, así como al propio índice de variación en la productividad óptima (3.2.22–23–24), $\Delta OFP_i^{t,t+1}$, y su combinación en aquel de productividad relativa $\Delta RFP_i^{t,t+1}$, (3.2.28–29–30), o su representación equivalente en (3.2.31–32–33).

Es posible finalizar esta sección concluyendo que el desarrollo teórico del modelo de evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist se encuentra sujeto, en su aplicación empírica, a las posibilidades y técnicas que estén al alcance del investigador. Las técnicas de optimización matemática englobadas de forma genérica bajo el nombre de Análisis Envolvente de Datos muestran como este método constituye una herramienta valida para realizar los análisis empíricos. En el próximo capítulo se ilustra el modelo de evaluación del rendimiento productivo a través de estas técnicas considerando la variación experimentada en el rendimiento productivo de las industrias manufactureras de la OCDE.

(1992b:240–243) donde se definen índices de Malmquist sin imponer tal condición sobre el proceso productivo-.

Capítulo V

LA EVOLUCION DEL RENDIMIENTO PRODUCTIVO EN LA INDUSTRIA MANUFACTURERA DE LA OCDE

En los capítulos precedentes se ha especificado un marco analítico que permite el análisis del rendimiento productivo resaltando las diversas relaciones existentes entre las variaciones en procesos productivos de las actividades y la tecnología que les posibilita. El presente capítulo constituye la última etapa del proceso investigador, al concretar el potencial de análisis teórico y aplicado que se ha venido exponiendo hasta el momento. Así, constituyen sus objetivos: (i) el ilustrar el modelo de evaluación del rendimiento productivo analizando la evolución de la industria manufacturera en un conjunto de países de la OCDE, (ii) calculando las funciones de distancia –tecnología de producción– y los índices de Malmquist (iii) que, habiendo sido desarrollados de forma teórica en el segundo y tercer capítulo, (iv) exigen el uso de técnicas de optimización matemática como las ya presentadas en el cuarto capítulo a través del Análisis Envolvente de Datos.

Respecto a las funciones de distancia calculadas se ha seleccionado la dimensión de productos en la descomposición de la variación en la productividad absoluta en transformación técnica y de escala, aquella óptima en cambio técnico y de escala, y, finalmente, la productividad relativa en el cambio de eficiencia técnica y de escala. Las razones para seleccionar tal dimensión se sustentan en el hecho de que la maximización del producto obtenido como conducta empresarial para elevar el rendimiento productivo, supone un objetivo creíble dentro de la industria manufacturera al no estar sujeto a restricciones adicionales a la propia tecnología. Si bien esta selección podría ser cuestionada en otras industrias donde la existencia de regulaciones gubernamentales impone límites a la producción generable –siendo un buen ejemplo de esta situación las industrias conocidas en el ámbito anglosajón como *utilities* (energía eléctrica, gas, agua, etc..)–, este no es el caso de la industria manufacturera atendiendo a los epígrafes concretos que esta engloba, tal como se pone de manifiesto en las siguientes secciones. La selección de las dimensiones alternativas de factores y tecnológica sería así mismo factible, aunque la comparación entre las distintas alternativas no se realiza por responder a las causas teóricas puestas ya de manifiesto en él segundo capitulo. Adicionalmente, convine recordar que con relación a los índices de productividad absoluta, óptima y relativa, los resultados obtenidos son equivalentes no importa cuál sea la dimensión de análisis seleccionada si bien los términos en los que se descompone sí pueden sufrir alteraciones –véase la discusión en la sección 4.5–. Así, en la interpretación de las fuentes últimas que originan las alteraciones en el rendimiento productivo de las actividades, se ha de tener siempre presente la orientación en la que se centra el análisis.

Con relación a los índices de Malmquist elegidos, estos se corresponden con las formulaciones recogidas en la sección 3.4 con objeto de que los resultados obtenidos satisfagan la propiedad de transitividad –circularidad–. Esta elección responde a la posibilidad de agregar –y desagregar– de una forma consistente la evolución de la productividad observada por subperíodos compatibles. En el caso de análisis de productividad donde el horizonte temporal es elevado, la consideración de índices transitivos permite así mismo identificar los ciclos económicos presentes en el desarrollo sectorial siendo ésta una característica deseable en el análisis de la industria manufacturera que aquí se realiza. Así, se han resuelto los índices interanuales que satisfacen tal propiedad así como aquellos acumulativos desde el período inicial hasta cualquier período temporal considerado en el estudio. Con relación a las definiciones realizadas, las variaciones en la productividad absoluta, óptima y relativa se corresponden con (3.4.4), (3.4.10) y (3.4.25) –así como su formulación equivalente (3.4.28)–.

Los programas de optimización calculados se corresponden con las formulaciones duales presentadas en el cuarto capítulo, en concreto los programas

(4.3.2) y (4.3.14) que permiten determinar la eficiencia técnica y productiva de forma contemporánea y los programas (4.4.1) y su análogo eliminado la restricción $\sum_{i=1}^{I} z_i^t=1$, para calcular las funciones de distancia intertemporales. La resolución de los programas primales sería así mismo factible permitiendo obtener igual resultado a los anteriores.

Realizadas estas consideraciones respecto a la dimensión, índices y programas seleccionados para llevar a cabo el análisis, se debe resaltar que el objetivo final es ilustrar las variaciones en la productividad absoluta, óptima y relativa a través de las fuentes que les dan origen, *i.e.* descomposición de los índices asociados. Los datos objeto de estudio, correspondientes a la industria manufacturera de un conjunto de naciones de la OCDE, presentan así una componente temporal y de sección cruzada, donde el análisis del rendimiento se realiza asumiendo que cada una de las industrias nacionales tiene acceso potencial a los óptimos de producción. Así, pese a la heterogeneidad que pueda manifestare entre las distintas industrias por estar cada nación especializada en la producción de algunas manufacturas concretas –*e.g.* industrias metálicas, productos químicos, maquinaria y equipo, etc.– debe entenderse que el referente es alcanzable y que, así, es razonable comparar el rendimiento productivo de España con aquel de los Estados Unidos. Esta hipótesis no resulta aventurada si consideramos que los procesos de globalización de la sociedad de la información y el conocimiento ponen a disposición de las empresas la vanguardia de los avances científicos y tecnológicos. Hoy día, las revistas especializadas, *forums* y ferias tecnológicas, las estrategias productivas y de marketing de las multinacionales, etc., garantizan que las más recientes innovaciones se encuentren con celeridad al alcance de todos los agentes. Únicamente razones relacionadas con la gestión del conocimiento, de los derechos de propiedad o proteccionistas pueden suponer un obstáculo para la difusión de nuevas tecnologías y, por tanto, la imposibilidad de alcanzar los estándares más productivos. Aún así, los acuerdos internacionales como los alcanzados en el seno de la organización Mundial del Comercio o la propia Unión Europea y que tienden a la liberalización de los mercados, buscan en última instancia la difusión del conocimiento y fomentar la competitividad de las empresas lo que, a su vez, fuerza a éstas a hacer uso de las tecnologías más avanzadas.

Si bien el objetivo de la presente investigación es ilustrar la evolución del rendimiento productivo de acuerdo al modelo propuesto, un primer estadio de análisis debe abordar la descripción de las fuentes estadísticas disponibles y variables finalmente consideradas. La introducción estadística que se realiza pone de manifiesto que, cualquier análisis del rendimiento productivo no debe solo resolver un marco teórico integrador, sino que debe hacer frente a una definición adecuada de las variables que permiten caracterizar el proceso productivo. En los próximas secciones se critica la definición de las variables disponibles para realizar análisis de productividad comparativos a nivel internacional, estableciendo como criterio la distancia existente entre la práctica habitual desarrollada en países líderes con elevada tradición estadística, *e.g.* los Estados Unidos, el Reino Unido ó Alemania, y el mínimo común denominador con el que los investigadores deben conformarse si quieren considerar en el análisis un conjunto representativo de naciones.

5.1 La base de datos internacional elaborada a nivel sectorial por la OCDE, *ISDB98*

5.1.1 Análisis de las fuentes estadísticas y variables seleccionadas

"La base de datos internacional a nivel sectorial, (ISDB) ha sido especialmente diseñada para facilitar el cálculo de índices de productividad total de los factores, de la productividad del empleo y de la productividad del capital, a un nivel industrial detallado", OCDE (1998a). Esta frase resume "*the state of the art*" en cuanto a la disponibilidad de información estadística que, avalada por la Organización para el Desarrollo y la Cooperación Económica, OCDE, se encuentra al alcance de los investigadores. Tal como se pone de manifiesto en la presente sección, el optimismo que se deriva de ella se yuxtapone con la realidad

académica relativa a la correcta definición y construcción de las variables que han de considerarse en análisis comparativos de productividad a nivel internacional.

La ISDB es el resultado del esfuerzo de la OCDE para elaborar una base de datos que suponga un mínimo común denominador con el que poder afrontar análisis comparativos de productividad a nivel sectorial. Este requisito explica que con objeto de ampliar lo más posible el número de países a la vez que se provee de información homogénea, las variables incluidas en la base de datos respondan a una definición simple que se aleja de los óptimos disponibles en algunos de los países de las OCDE. Sin embargo, su sencillez y potencialidad analítica justifica su empleo para ilustrar las posibilidades de nuevos modelos como es el caso del presente proyecto de investigación. Por ello no debe sorprender que análisis más precisos sobre la productividad comparada a nivel sectorial entre países, exijan la colaboración conjunta y simultánea de varios equipos investigadores que, elaborando los datos necesarios de acuerdo a una metodología común, permitan una comparación más precisa del rendimiento productivo. Así, análisis ya clásicos como los presentados en Caves (1992), Hickman (1992) o Jorgenson (1995) no acuden a la información suministrada por las organizaciones internacionales –OCDE, Eurostat, etc.– sino que se dirigen directamente a las agencias estadísticas nacionales. De hecho, la propia OCDE no hace sino recopilar las informaciones estadísticas de diversas fuentes nacionales y que, en el caso de la ISDB, se corresponde con las publicaciones relativas a la contabilidad nacional, empleo, flujos y stock de capital, comercio y balanza de pagos. Esta realidad no impide que antes de ilustrar el modelo de rendimiento productivo de acuerdo a la información facilitada por la ISDB, se discuta la correcta definición de las variables que habrían de caracterizar la tecnología de producción.

La ISDB, en su última edición de 1998, incluye información relativa a la actividad económica de quince países miembros –el G7 (distinguiendo entre la R.F.A y a partir de 1990 la Alemania unificada) más Australia, Bélgica, Dinamarca, Finlandia, los Países Bajos, Noruega y Suecia–, en un período temporal máximo que abarca desde 1960 a 1997. Sin embargo, la falta de datos hasta 1970 y después de 1993 es una constante que limita cualquier análisis temporal al rango 1970–93. La actividad económica se divide en categorías presentadas de acuerdo a la clasificación *ISIC* de actividades industriales –*International Sectoral Industry Classification*–. Las rúbricas fundamentales de esta clasificación se recogen en el cuadro 5.1.1.

Cód. ISIC	Descripción
1.-	Agricultura, caza, pesca y silvicultura,
2.-	Minería y cantería
3.-	Manufacturas
4.-	Electricidad, gas y agua
5.-	Construcción
6.-	Comercio al por mayor, al por menor, restaurantes y hoteles
7.-	Transporte, almacenaje y comunicaciones
8.-	Finanzas, seguros, inmobiliarias, y servicios a negocios
9.-	Servicios comunitarios, sociales y gubernamentales

Fuente: ISDB98, OECD (1998a)

Cuadro 5.1.1. Clasificación de actividades en la ISDB98.

Cada una de estas actividades se subdivide hasta alcanzar 33 categorías siendo la más detallada la correspondiente a la industria manufacturera. En el presente proyecto de investigación se ha decidido considerar este sector de actividad por ser el más analizado en la literatura relativa a la productividad de los factores de forma que los rasgos principales relativos a su evolución o hechos estilizados constituyen parte del acervo genérico en el análisis económico aplicado. Esta elección simplifica la discusión de los resultados obtenidos en la evolución del rendimiento productivo al poderse apelar a hechos contrastados en multitud de análisis.

Considerando que el objetivo reconocido por la OCDE es facilitar el cálculo de índices de productividad, las variables contempladas en la ISDB resultan ser las más adecuadas para caracterizar los procesos tecnológicos de producción, considerando que los criterios para su selección son: "*la disponibilidad de datos para las principales variables, cubriendo un período de largo tiempo con definiciones idénticas o muy cercanas a las definiciones estandarizadas usadas en la ISDB*", OECD (1998a). Las variables disponibles en cada una de las rúbricas recogidas ene el cuadro 5.1.1 se encuentran recogidas en el cuadro 5.1.2

Variable	Descripción
GDP	Valor Añadido a precios de mercado
EE	Numero de asalariados
ET	Número de ocupados
HWY	Número medio de horas trabajadas
IT	Inversión bruta
KTO	*Stock* de capital bruto
RKMV	Ratio de maquinaria y equipo sobre el *stock* de capital bruto
NTO	*Stock* de capital neto
CTO	Consumo de capital fijo
IND	Ratio de impuestos indirectos sobre el valor añadido
OP	Ratio del excedente bruto de explotación sobre el valor añadido neto de impuestos indirectos.
WSSS	Remuneración de asalariados
XGS	Exportaciones de bienes en $U.S.
MGS	Importaciones de bienes en $U.S.
TFP	Indice de productividad total de los factores

Fuente: ISDB98, OECD (1998a)

Cuadro 5.1.2. Variables incluidas en la ISDB98.

Las variables monetarias relativas al valor añadido, inversión y *stock* de capital se presentan en términos corrientes y constantes –considerando 1990 como año base– y son expresadas tanto en moneda nacional como en $U.S. a través de paridades de poder de compra. Con relación a la variable de productividad total de los factores, ésta muestra para cada país la evolución del índice de Törnqvist generado a partir del valor añadido, número de ocupados y *stock* de capital bruto –véase la sección 5.2 su formulación se presenta de forma concreta–. Esta definición condiciona la propia elección de variables para analizar la evolución del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist pues uno de los objetivos que se plantea en esta investigación es la comparación de los resultados obtenidos siguiendo ambas metodologías.

Según la dirección estadística de la OCDE, "*Los contenidos de la base de datos evolucionarán siguiendo los recientes desarrollos en estudios de productividad y la aplicación del nuevo marco estadístico de cuentas nacionales* (*el SNA de 1993*)", OECD (1998a). Tal evolución será bienvenida por el conjunto de la comunidad académica dadas las limitaciones a las que se debe enfrentar cualquier análisis de productividad de basarse en las variables recogidas en el cuadro 5.1.2.

En primer lugar, en los "*recientes desarrollos en estudios de productividad*" a los que alude la OCDE existe un consenso generalizado sobre la idoneidad de caracterizar la tecnología considerando la producción, empleo, capital y consumos intermedios (incluyendo la energía) mientras que "*...la ISDB combina un rango de series de datos relacionadas primariamente con la producción industrial* (Valor Añadido) *y factores de producción primarios...*", OECD (1998a). Es decir, la consideración del valor añadido y los factores primarios como variables representativas de la producción, confinan la descripción de la tecnología a la propia función de valor añadido agregado, dejando fuera del análisis el resto de factores productivos que tienen una incidencia relevante sobre la producción –real– obtenida en el proceso productivo. Esta limitación del análisis que se aborda en detalle en la siguiente sección, implica la necesidad de asumir condiciones restrictivas sobre la tecnología de producción y el abandono del objetivo de integrar los factores productivos primarios y secundarios con el propósito de identificar las fuentes que dan origen a las variaciones en el rendimiento productivo.

En segundo lugar, la propia definición de los *inputs* primarios relativos al empleo y capital resulta básica al no contemplar los avances que, basados en la metodología de los números índices, permiten realizar una medición ajustada en términos cuantitativos y cualitativos de los factores de producción. Resumiendo la información que se presenta en las próximas secciones con relación a una correcta generación de datos, el empleo observado deber ser ajustado en función de las diversas categorías laborales (ocupación a tiempo completo, parcial, educación, edad, sexo, raza, etc...), mientras que la agregación del *stock* de capital según el método de inventario permanente, debe ser realizada a través de funciones de supervivencia que consideren su eficiencia productiva a lo largo del tiempo y no de acuerdo a funciones de depreciación que responden a una visión económica

–contable– de su valor en la empresa y no a su capacidad efectiva para generar producción en términos físicos. El objetivo final en la elaboración efectiva de estos índices es determinar con la mayor precisión posible el flujo real de servicios que los factores productivos aportan al proceso productivo.

Considerando estas cuestiones de carácter genérico, es posible apreciar que los criterios de calidad exigidos por la OCDE para publicar de forma oficial estadísticas productivas limitan la disponibilidad de variables y, por tanto, los análisis de rendimiento realizados con base en la ISDB98 deben ser considerados como referencias aproximadas de los procesos tecnológicos que, aún siendo válidas en términos genéricos, se encuentran alejadas del potencial metodológico y aplicado al alcance de la comunidad científica. Sin embargo, estas limitaciones no impiden que sea un base de datos adecuada para ilustrar el modelo de evaluación del rendimiento productivo. En este sentido sirven de referencia los múltiples análisis sobre productividad y crecimiento basados en la ISDB, *e.g.* Fecher y Perelman (1992) y Arcelus y Arocena (1999), ó en bases de datos con definiciones similares de las variables y, por tanto, del proceso productivo, *e.g.* Penn World Tables, véase Summers *et al.* (1980).

En las próximas secciones, 5.1.2–5.1.4, se analizan las restricciones que, sobre la tecnología, impone su representación a través de la función de valor añadido y la agregación de las diversas categorías de empleo y capital con objeto de establecer unos indicadores precisos de los servicios productivos que proporcionan. Sin embargo, con relación a esta última cuestión, es necesario precisar que la agregación propuesta no tiene como objetivo la consecución de una variable monetaria sino la elaboración de un índice ponderado en términos de la unidades de medida disponibles o seleccionadas, *e.g.* número de ocupados u horas trabajadas con relación al empleo. La elaboración de estos índices, que aúnan los servicios prestados por diversas categorías atendiendo a sus diversas particularidades, supone la caracterización de la tecnología desde una perspectiva física, siendo coherente con el modelo de evaluación del rendimiento basado en índices de Malmquist[34]. Esta aseveración responde al hecho de que la función de distancia, al definirse con carácter multidimensional, permite representar la tecnología como un proceso *físico* de transformación de factores en productos en contraposición con la metodología tradicional de los números índices que exigen su agregación económica –una excepción entre los factores productivos la constituye el capital cuya heterogeneidad se resuelve a través de su valoración en unidades monetarias–[35].

5.1.2 La función de valor añadido como representación válida de la tecnología: homoteticidad y separabilidad

El desarrollo aplicado de cualquier modelo de evaluación del rendimiento productivo, se inicia con la concreción de la tecnología a través de las variables representativas de la producción obtenida y factores utilizados. Numerosos estudios sobre productividad comparada a nivel internacional resaltan la importancia de definir procesos generadores de producción de acuerdo a los siguientes factores: empleo, capital y consumos intermedios, si bien este último suele diferenciarse en *inputs* energéticos y los restantes. De existir un único agregado de la producción generada, la tecnología representada a través del conjunto de posibilidades de producción de acuerdo a la formulación (2.1.4) adopta la forma siguiente :

$$\mathrm{T}^t(x,y)=\{(x,y): y\in \mathrm{P}^t(x)\}=\{(x,y): x\in \mathrm{L}^t(y)\}\;(x^t,y^t)\in \Re_+^{1+3}, \qquad (5.1.1)$$

que puede ser expresada de forma equivalente a través de la siguiente función de producción $f^t: \Re_+^3 \rightarrow \Re_+$, véase Färe (1988):

---

[34] La necesidad de elaborar índices agregadores de los servicios productivos proporcionados por los factores queda expuesta por Jorgenson, Gollop y Fraumeni (1987), quienes en su análisis sobre la evolución de la productividad en los Estados Unidos llegan a identificar hasta 81.600 categorías de empleo y 24 de capital.

[35] Tal como se pone de manifiesto en los próximos epígrafes, la determinación de los índices físicos de servicios productivos proporcionados, por ejemplo, por el empleo o el capital exige, sin embargo, disponer de los precios de mercado de cada una de las categorías con objeto de proceder a su ponderación en función de las proporciones que representan sobre la totalidad de los costes laborales o la remuneración a la propiedad –capital–.

$$f^{t}(x) = \max \{y : (x,y) \in T^{t}(x,y)\} \tag{5.1.2}$$

Atendiendo a esta representación alternativa, la tecnología puede expresarse de acuerdo a:

$$Y = f^{t}(L, K, M) \tag{5.1.3}$$

donde Y representa el valor agregado de la producción, L, los servicios productivos del empleo, K, aquellos del capital, y M, las aportaciones realizadas en términos de consumos intermedios. En esta situación, la ausencia de estadísticas oficiales que en el ámbito internacional provean de información relativa a la última de las variables exige, como alternativa para poder realizar análisis de productividad, la asunción de separabilidad entre los denominandos *inputs* primarios –empleo y capital– y los secundarios, *i.e.* los consumos intermedios[36]. En este caso se verifica que la tecnología de producción representada por (5.1.3) puede expresarse de acuerdo a:

$$Y = \hat{f}^{t}(L, K, M) \equiv c^{t}(h^{t}(L, K), M) \tag{5.1.4}$$

donde la función h^{t} (L, K) representa el valor añadido generado en el proceso productivo. La relevancia de la condición de separabilidad que permite expresar la tecnología de acuerdo a (5.1.4) estriba en que, de verificarse, es posible representar la propia tecnología de producción a partir de la función de valor añadido –entendida como un índice real de cantidades no observable, Diewert (1978)– haciendo énfasis en las diferencias que existen entre unos factores que resultan fundamentales –*primarios*– y el resto –el papel distintivo que juegan estos factores

[36] La caracterización de la tecnología de producción por medio de funciones de valor añadido resulta sin embargo atractiva más allá de su capacidad para representar la tecnología de forma adecuada –que resulta el criterio relevante en la presente investigación–. Efectivamente, su naturaleza eminentemente económica permite identificar los orígenes de la renta generada en los procesos productivos facilitando el análisis de su distribución entre los distintos agentes involucrados al "agotar" el valor de la producción.

es el hecho que justifica, precisamente, la separabilidad entre ambos conjuntos de factores[37]. Blackorby *et al.* (1978) muestran como la condición para que exista separabilidad entre los conjuntos de factores es la existencia de homoteticidad lo cual implica, en términos de los axiomas introducidos en el segundo capítulo, que la tecnología debe satisfacer T.8–9, *i.e.* el conjunto de posibilidades de producción (5.1.1) se corresponde con $\hat{T}(x,y)$, si bien la condición de separabilidad implicaría en esta ocasión que la función de producción puede expresarse a través de aquella de valor añadido:

$$V = h^{f}(L, K) \tag{5.1.5}$$

Considerando la discusión realizada en el segundo capítulo, la definición teórica de la función de distancia en términos del valor añadido exige homoteticidad sobre el proceso tecnológico $\hat{T}(x,y)$. De esta forma, la representación de la tecnología a través de (5.1.5) añade un nivel de homoteticidad adicional a T.9, pues no solo se exige la separabilidad entre productos y factores sino que, además, entre estos últimos resulta necesario separar los *inputs* primarios de los secundarios –según (5.1.4)–. Debido a que los datos disponibles para el análisis del rendimiento productivo en las industrias manufactureras de la OCDE exigen tal caracterización de la tecnología –al no disponer de información sobre los consumos intermedios–, la conclusión anterior es relevante en el análisis empírico aquí seleccionado.

---

[37] Las condiciones restrictivas que la asunción de separabilidad entre *inputs* primarios y secundarios en el sentido de Leontieff (1947) impone sobre el proceso productivo (*i.e.* la existencia de homoteticidad que se manifiesta, por ejemplo, en que la relación marginal de sustitución entre capital y empleo es independiente de los consumos intermedios, véase Arrow (1974)) y la propia información adicional a la que se renuncia al no considerar los segundos una vez que se describe la tecnología a través de la función de valor añadido, supone una aliciente para que, de existir información suficiente, se incluyan en los análisis la totalidad de variables disponibles. Así, Diewert (1978) defiende el empleo del mayor volumen de información en la caracterización de la tecnología de producción dadas las condiciones restrictivas que se imponen sobre la tecnología y el más probable sesgo en el que incurren los estudios que consideran la función de valor añadido. Así mismo, en un contexto de comparaciones internaciones de productividad, Klein (1993:37) defiende que *"En el estudio de las tendencias de la productividad y de las leyes de la producción en general, sostendría firmemente el uso de la producción bruta en vez del valor añadido, junto a los insumos intermedios como factores de producción explicativos"*.

Ahora bien, ¿cómo deben ser interpretados los índices de productividad una vez calculados empíricamente?. Los resultados teóricos presentados con relación a las propiedades de la tecnología y los índices de productividad dependerán de si las observaciones realizadas permiten contrastar la presencia de separabilidad, *i.e.* la homoteticidad de la tecnología de producción –véase Denny y May (1978) para su contratación empírica con relación a la industria manufacturera–. De ser así, se podrá dar una respuesta adecuada a las propiedades teóricas satisfechas por los índices en términos del análisis concreto que se haya realizado. Sin embargo, en el ejemplo que nos ocupa, no se dispone de la información necesaria para realizar tal contrastación estadística por lo que, si se desea que la función de valor añadido caracterice de forma correcta el rendimiento productivo, se debe asumir que esta satisfaga tal propiedad. De no ser así, la tecnología de producción no se encuentra correctamente representada por la función de valor añadido, al haberse omitido información relevante sobre el proceso productivo, *e.g.* los procesos de sustituibilidad entre los consumos intermedios y los *inputs* primarios, encontrándose sesgados los índices de productividad obtenidos.

De esta forma, como en cualquier estudio de productividad donde la función de producción se corresponde con un agregado de valor añadido, en el presente ejemplo se asume que la tecnología presenta tales características sabiendo que, de no ser así, los resultados generados difieren de aquellos que se habrían obtenido de contar con la información adicional que, con relación al proceso productivo, incorporan los consumos intermedios y la propia producción[38]. Es decir, se asume la existencia de separabilidad entre los *inputs* primarios y secundarios a través de la existencia de una tecnología homotética, de forma que los segundos no afectan a la evolución del valor añadido generado, y éste a su vez, supone una caracterización equivalente de la producción obtenida, *e.g.* $V = Y - M$ en el caso de que la separabilidad existente sea aditiva como en el caso de la doble deflación acometida por las diversos institutos nacionales de estadística en la obtención del valor añadido

[38] De llevar este razonamiento al límite, cualquier representación de la tecnología sería inadecuada dada la imposibilidad de incorporar al análisis la totalidad de información relevante para su caracterización. Sin embargo, resulta evidente que la representación de la tecnología a través de la función de valor añadido implica una definición más restrictiva, al exigir la presencia de homoteticidad.

presente en la propia ISDB98. De no verificarse tal circunstancia, los factores no serían separables y el valor añadido no sirve como representación alternativa de la tecnología.

Realizadas estas apreciaciones, la definición del valor añadido a precios de mercado realizada por la ISDB98 se corresponde con la habitualmente establecida: "*la producción bruta al coste de los factores menos los consumos intermedios a los precios de adquisición*", OECD(1998a: 30)[39].

5.1.3 La heterogeneidad del empleo en los procesos productivos

El factor empleo habría de presentar en su medición un perfil más sencillo que otros factores productivos, pues la obtención de un agregado teórico aceptable de los servicios laborales exige únicamente información relativa al número de individuos involucrados u horas trabajadas por éstos (cantidad) y su retribución bajo la forma de sueldos y salarios (precios). Sin embargo, la ausencia de información estadística que permita agregar a los diversos individuos de acuerdo a sus particularidades dificulta la generación de un agregado que refleje de forma acertada la contribución que el trabajo realiza al proceso productivo.

Efectivamente, la aportación de los servicios productivos del empleo en la producción presenta una elevada heterogeneidad en función de las características personales de cada ocupado. Así, el rendimiento productivo depende de variables sociodemográficas clave relativas al tipo de ocupación –propia o ajena–, sexo, edad, educación, etc... De existir esta información, es posible proceder a una agregación de los servicios que cada trabajador aporta incorporando las particularidades de cada uno de ellos en función de la categoría laboral a la que pertenece, *e.g.* una mujer de treinta años con educación universitaria que trabaja por cuenta propia ofreciendo servicios a empresas frente a, por ejemplo, un hombre de cincuenta años que con

---

[39] Sin embargo, la OCDE no pública en la ISDB98 las estadísticas relativas a la producción bruta o los consumos intermedios dado que no dispone de información relativa a los segundos. Así, la información relativa al valor añadido se recoge de las agencias estadísticas de los países miembros sin generar datos consistentes de consumos intermedios.

una formación de graduado escolar trabaja por cuenta ajena en la cadena de montaje de una industria manufacturera.

La importancia de agregar el empleo en un índice *efectivo* que recoja las diferentes características es conocida desde hace varias décadas gracias a las investigaciones de Kendrick (1961), Denison (1961), Jorgenson y Griliches (1967) etc.. Así, estos autores han realizado un esfuerzo considerable desde el ámbito académico para poder contar con información suficiente que permita clasificar la fuerza laboral por categorías. Asumiendo la existencia de l categorías, Jorgenson, Gollop y Fraumeni (1987), muestran cómo es posible agregar los servicios prestados por cada una de ellas y proceder a calcular su variación temporal a través de la definición de un número índice. De seleccionar aquel propuesto por Törnqvist (1936), la variación en los servicios prestados por el empleo en una determinada actividad o proceso productivo i, L^t_i, entre los períodos temporales $t = 0, 1$, se corresponde con:

$$L_i^{0,1}(L_i^0, L_i^1) = \sum_{l=1}^{L} v_{li}(\ln L_{li}^1 - \ln L_{li}^0) \tag{5.1.6}$$

donde $v_{li} = 1/2\ (v^0_{li} + v^1_{li})$ representa la ponderación de los servicios productivos de cada una de las l categorías laborales en función de su proporción sobre los costes laborales: $v^t_{li} = p_{li} \cdot L_{li} / \sum^{L}_{l=1} p_{li} \cdot L_{li}$.

Sin embargo, ¿cómo se reflejan los servicios productivos del empleo L^t_i? Cuando se dispone de un nivel de información básico, existe la posibilidad de considerar simplemente al número de ocupados en cada categoría como variable representativa de los servicios prestados. En tal situación, el flujo de servicios laborales L^t_i es proporcional al número de ocupados, O^t_i

$$L^t_{li} = Q_{li} \cdot O^t_{li} \tag{5.1.7}$$

donde Q_{li} refleja la constante de proporcionalidad que transforma el número de ocupados en servicios productivos[40]. Así, sustituyendo (5.1.7) en (5.1.6) se obtiene la variación en los servicios del empleo L'_i en términos del número de ocupados,

$$L_i^{0,1}(O_i^0, O_i^1) = \sum_{l=1}^{L} v_{li}(\ln O_{li}^1 - \ln O_{li}^0) \tag{5.1.8}$$

De existir suficiente información estadística es posible considerar como variable relevante para determinar los servicios prestados por el empleo el número de horas trabajadas, H^t_{li} de tal forma que el índice de variación queda determinado por

$$L_i^{0,1}(H_i^0, H_i^1) = \sum_{l=1}^{L} v_{li}(\ln H_{li}^1 - \ln H_{li}^0) \tag{5.1.9}$$

Con relación al número de ocupados, ésta última variable presenta como ventaja un mejor reflejo del tiempo efectivo que tales individuos dedican a actividades productivas –que, por ejemplo, puede variar de forma sustancial entre industrias ó países–[41]. A pesar de ello, pese a los esfuerzos que realiza la OCDE con objeto de generar estadísticas de calidad homogénea de horas trabajadas –véase OECD(1998b)–, las lagunas y deficiencias encontradas en numerosos países hacen que en la ISDB98 no existan datos relativos a Bélgica, Dinamarca u Holanda o que estos se presenten para reducidos períodos temporales, *e.g.*

[40] En términos agregados la componente de proporcionalidad depende de las variaciones que puedan acontecer en los números de ocupados por categorías. Así, esta componente puede ser considerada como un indicador de calidad cuya variación en el tiempo muestra si el número de ocupados que generan un mayor flujo de servicios –establecida en términos de su proporción sobre los costes laborales– se incrementan o reducen, véase Chinloy (1974).

[41] Sin embargo, los institutos estadísticos nacionales se ven con frecuencia obligados a considerar las horas pagadas –únicas generalmente disponibles en el ámbito empresarial– en vez de las efectivamente trabajadas. La utilización de las horas pagadas presenta elevadas deficiencias dado que el tiempo efectivo de trabajo pude variar sustancialmente al alza (*e.g.* horas extraordinarias no remuneradas) o a la baja (*e.g.* períodos de enfermedad).

Australia (1978–1993). Adicionalmente, asumiendo que existiese siquiera información sobre al menos los ocupados en las *l* categorías –información que no es facilitada por la ISDB98–, la ausencia de información relativa al coste de las distintas categorías, p_{lt}, imposibilitaría la agregación de la fuerza de trabajo –número de ocupados– a partir de categorías consideradas según (5.1.8). La conclusión es la necesidad de recurrir al número total de ocupados (asalariados por cuenta ajena más ocupados por cuenta propia) como *proxi* de los servicios prestados por el empleo en el proceso productivo, sin que exista la posibilidad de agregarlos en función de sus características.

Así, si bien el análisis teórico presentado constituye un objetivo de referencia en la construcción de una variable *efectiva* del empleo que permita una mejor determinación del rendimiento productivo, éste es imposible de concretar empíricamente en la realización de comparaciones internacionales dada la ausencia de información estadística adecuada para su consecución.

5.1.4 ¿Qué capital es factor productivo?

La definición de un índice representativo de los servicios prestados por el capital presenta, frente a su homólogo del empleo, un número elevado de dificultades a nivel teórico. Las siguientes apreciaciones realizadas por *Sir* John Hicks permiten establecer el esquema de la presente sección:

"*La mayoría de las controversias económicas sobre definiciones surgen del fallo de no tener en mente la relación entre cada definición y el propósito para el cual ésta ha de ser usada*" Hicks (1942:175).

"*El capital (no soy el primero en descubrirlo) es un tema muy amplio, con muchos aspectos; donde quiera que uno empiece, resulta difícil traer en perspectiva a unos pocos de éstos. Es, simplemente, como si uno hiciese fotografías de un edificio; aunque resulte ser el mismo, se muestra diferente desde los diversos ángulos*", Hicks (1973:v).

"*La medición del capital es uno de los más horribles trabajos que los economistas han propuesto a los estadísticos*", Hicks (1981:204).

El objetivo que nos planteamos en la presente sección es el de definir y explicar la cuantificación del capital –y sus servicios– del que se hace uso en la presente investigación. El primer paso consiste así en definir de una forma correcta aquella vertiente del edificio que debe ser considerada en los análisis del rendimiento productivo, dado que su definición se ve alterada sustancialmente dependiendo de que su concepción sea aquella habitual que le identifica como una activo empresarial (perspectiva contable), o como factor productivo que presta sus servicios en la generación de producción (perspectiva tecnológica). Para ello nos servimos del marco teórico representado por la correspondencia establecida en el conjunto de posibilidades de producción expuesta inicialmente –una de cuyas representaciones es la función de producción neoclásica- y que relaciona flujos de factores empleados con aquellos de productos obtenidos. Bajo esta conceptualización se entiende por capital los servicios prestados por bienes tangibles e intangibles como pueden ser edificaciones, maquinaria, tierra, inventarios, patentes, etc.. Ahora bien, esta concepción no se corresponde con las estimaciones realizadas por las agencias estadísticas nacionales de las cuantías de *stock* de capital existentes pues éstas responden a un concepto de riqueza generada y no de capacidad productiva disponible. Así, se discute cuál es el proceso de cuantificación correcto que permite establecer el *stock* de capital que en un momento determinado presta sus servicios en los procesos productivos.

Teniendo en cuenta estas consideraciones que muestran la necesidad de acotar el concepto de capital relevante en la teoría de la producción y, por extensión, del análisis del rendimiento productivo, es posible comenzar destacando que la elaboración de una teoría del interés y el capital es, sin lugar a dudas, una de las más complejas en cuanto a su formalización conceptual, dadas las profundas implicaciones que presenta dentro del conjunto de la teoría económica. Desde Marx (1867) hasta las controversias de Cambridge, Harcourt (1972), el desacuerdo entre los economistas, unas veces conceptual y otras semántico, sobre cuál debe ser su definición y cómo debe ser medido, ha dado origen a uno de los mayores debates intelectuales desde el inicio del pensamiento económico. El capital resulta ser, dependiendo del énfasis que se quiera poner en su caracterización y objetivo de cálculo, el agregado de factores primarios, trabajo y recursos naturales, necesario para su producción y que le otorgan un determinado valor[42]; el consumo diferido por parte de individuos; el *stock* de bienes duraderos; los flujos de servicios generados por este factor en un determinado período, etc..

Con objeto de evitar cualquier indefinición respecto al concepto de capital que se usa en la presente investigación, y una vez establecida la relación entre factores y productos generados en un determinado momento temporal, su naturaleza de flujo implica que el concepto de servicios prestados por el capital disponible en las empresas es aquel relevante para realizar el análisis del rendimiento de las actividades, *i.e.* la producción generada en un período temporal es un flujo que exige una concepción homóloga del capital. La caracterización de la actividad empresarial y su evaluación de acuerdo a su productividad relativa exige la elección de un determinado período en el que realizar el análisis.

La elección de la dimensión temporal del proceso productivo –que por convención social se sitúa en el año fiscal–, no es banal y debemos preguntarnos si ésta resulta adecuada para evaluar el rendimiento de una determinada empresa. En principio, el objeto de evaluar una actividad mercantil con ánimo de lucro, reside en establecer su grado de éxito una vez que ésta puede darse por concluida.

---

[42] Con relación al capital como factor productivo que presta servicios, este insumo representa un conjunto de bienes heterogéneos que poseen diversas características físicas y que deben ser agregados en términos monetarios con objeto de obtener un único factor que permita representar su aportación conjunta en la obtención de otros productos. Este concepto podría ser extendido a otros factores dados los diversos niveles de cualificación del empleo o las potencias caloríficas de las diversas fuentes energéticas, de no quedar patente que el capital, a diferencia de estos otros factores debe ser, en sí mismo, producido por el sistema industrial. De esta forma, el *stock* de capital acumulado no puede considerarse como un factor de producción originalmente disponible sino que su existencia esta condicionada a la oferta del resto de insumos, *i.e.* recursos naturales y el propio empleo. Así, aunque en análisis de largo plazo del rendimiento productivo se considere por conveniencia como cualquier otro producto intermedio que realiza una aportación al proceso productivo, no debe olvidarse el hecho de que su producción proviene de la utilización del resto de insumos. Esta problemática representa el eje de la conocida controversia de Cambridge.

Es entonces el momento de confrontar los gastos incurridos para la realización de la actividad con los ingresos derivados y establecer, finalmente, el grado de beneficio obtenido. Si el lapso temporal de medición queda determinado por la propia actividad no habrían de existir problemas para imputar ingresos y costes. Sin embargo, conforme la función empresarial se va haciendo compleja y una misma empresa, entendida como establecimiento con personalidad jurídica propia que desarrolla una actividad sin solución de continuidad, acomete actividades multiproducto en las que diversas generaciones de tecnologías (productos e insumos) se solapan en el tiempo, la dificultad para imputar ingresos y costes a una determinada actividad se vuelve compleja[43]. La definición de una función que relaciona los productos generados con los flujos de servicios proporcionados por los factores en un período establecido *ad-hoc* se presenta como irrealizable, pues si bien en algunos casos las opciones son claras, e.g. Gw / *t* consumidos, en el caso de los bienes de capital –*e.g.* activos fijos– esta posibilidad presenta grandes dificultades tal como se expone a continuación.

La adquisición de un bien de capital por parte del empresario exige la resolución de la incertidumbre a futuro de la actividad y así, la toma de decisión binaria –se adquiere o no– a la que se enfrenta el empresario[44]. Si bien en algunos

---

[43] "*La dificultad para imputar los gastos a ventas individuales o siquiera a las ganancias brutas de un período contable, mes o año, es un problema siempre presente para el contable en la determinación periódica de la renta empresarial. Cuanto más largo es el período para la determinación de la renta, menor la cuantía del error cometido. La precisión absoluta puede ser obtenida solo cuando la iniciativa queda completada y la empresa termina.*", Crandell (1935:399). La historia esta repleta de ejemplos que ponen de manifiesto estas prácticas; así, el comercio veneciano del siglo XIII, cuyo máximo exponente nos llega a través de *El Libro de las Maravillas*, se basaba en empresas o expediciones comerciales cuyo desenlace, bajo la forma de reparto de los beneficios generados, solo podia establecerse tras la finalización del viaje. Este libro inspiraría a Cristóbal Colón en su intento de establecer rutas comerciales con la India alternativas a aquellas que implicaban el paso por Persia. *Las Capitulaciones de Santa Fe*, firmadas en abril de 1492, pueden considerase como un contrato-programa en el que se estipulan algunas condiciones relativas al viaje. Entre ellas destacan "5°) El derecho a participar con la octava parte de los gastos de cualquier armada, recibiendo a cambio la octava parte de los beneficios". Dichas condiciones serían aplicadas en los viajes subsiguientes que haría Colón. Sin embargo, estas prácticas, que implican la determinación irregular de beneficios, serían cada vez más esporádicas y ya en el siglo XVII no se realizaban: "*Por ejemplo, calcular dividendos para los viajes separados era irrealizable las Compañía de la Indias Orientales hacia 1660. El cálculo de los beneficios se convirtió, así, en un asunto de estimación periódica en lugar de los resultados conocidos de las empresas completas*", Littleton (1993).

[44] Prácticamente, el empresario se apoya en el cálculo del Valor Actual Neto, V.A.N., asociado a una inversión o, alternativamente, en el diferencial entre el tipo de interés representativo

casos es posible –con costes superiores– sortear tal problemática externalizando los riesgos asociados a la adquisición de ciertos bienes a través de operaciones como el *leasing* o arrendamiento financiero, *renting*, etc., en la práctica habitual la ausencia de mercados que permitan estas opciones exige la adquisición de bienes y servicios de capital[45]. Desde la perspectiva del analista, tales opciones simplifican la medición de los servicios prestados por los bienes de capital al ser su precio –de alquiler– y servicios prestados fácilmente identificables; de hecho si todos los bienes de capital fuesen alquilados, los problemas de valoración y asignación intertemporal del coste del bien no surgirían. Sin embargo, debemos exponer aquí la problemática a la que nos enfrentamos una vez que se adopta la decisión de inversión, *i.e.* la adquisición de bienes o servicios de capital que se agregan al *stock* existente, en lo que concierne a su valoración periódica y, por tanto, a la imputación de los flujos de servicios que de ellos se derivan. Los bienes y servicios incorporados de esta forma presentan las siguientes características propias: (i) son bienes producidos para producir[46] (ii) su

---

del coste de oportunidad de uso, y la Tasa Interna de Rentabilidad, T.I.R.. En ambos casos, el cálculo de ambas magnitudes implica la actualización de aquellos ingresos futuros –inciertos– asociados a una decisión de inversión que implica gastos –ciertos– a realizar en el periodo de análisis.

[45] La aparición de mercados de *leasing* o arrendamiento financiero responde a la necesidad que los agentes económicos tienen de reducir incertidumbres futuras. El *leasing* surgió el siglo pasado en EE.UU. cuando los fabricantes de bienes de transporte como barcos, locomotoras, etc., comenzaron a ofrecer esta opción –ejemplo de innovación contractual–. En la actualidad más de la mitad de las decisiones de inversión productivas realizada en ese país se realiza bajo esta forma contractual, Amat (1989).

[46] Según el Sistema de Cuentas Nacionales, *System of National Accounts, SNA*, los activos fijos –que se identifican con bienes de capital como veremos posteriormente– se definen como "*activos tangibles e intangibles producidos como outputs a partir de procesos de producción que son usados repetida o continuamente en otros procesos de producción por más de un año*", Naciones Unidas (1993; par. 10.33). Esta característica es una de las fuentes de discrepancia en la controversias de Cambridge en la crítica neokeyneasiana a la función de producción neoclásica: a) la imposibilidad de valorar el capital en sus propias unidades de medida técnicas, frente al trabajo o la tierra, pues es producido por éstos factores primarios resultando necesario una determinada medida de tipo de interés –precio– que no puede ser determinada de forma "interna" a través de las productividad marginal del propio capital, *i.e.* la circularidad que implica su valoración, b) la ausencia de unicidad entre precios relativos de los factores, *e.g.* r (interés) / w (salario), y técnicas empleadas –intensidad capital/trabajo- que puede acontecer bajo estrictas condiciones neoclásicas como la competencia perfecta, Harcourt (1972). La relevancia de esta última cuestión es ciertamente importante a la hora de justificar una determinada distribución de la renta, *i.e.* la hipótesis de que cada factor debe ser retribuido y empleado de acuerdo a su contribución –marginal– al proceso productivo –la justicia de esta distribución derivada de las estimaciones de funciones neoclásicas–. A efectos de la presente investigación, sin embargo, el factor más relevante es el primero en cuanto a la valoración de los bienes de capital que se realiza.

carácter duradero, que implica que los flujos de servicios que emanan de ellos no se circunscriban a un único período, *i.e.* el bien o servicio no se consume en *t*, y, así, (iii) el precio de adquisición no pueda ser imputado enteramente en el momento de compra y deba ser diferido a lo largo de su –desconocida– vida útil.

Esta conceptualización del capital entendido como los flujos de servicios proporcionados por un determinado *stock* resulta *ex post* al entenderse como aquellos flujos derivados del capital efectivamente *materializado*, Hicks (1974), frente su concepción *ex ante* como activo financiero susceptible de ser invertido de acuerdo a composiciones de cartera optimizadas –que incluyen su materizalización en activos fijos, bienes de equipo, edificios, etc.–. La distinción es relevante pues los bienes tangibles adoptan un carácter *material* lo que dificulta y, a veces imposibilita, su relocalización sin altos costes de transacción[47]. Frente a esto, el capital financiero, *e.g.* fondos propios de la empresa, no se encuentra materializado y, así, su aportación a la producción efectiva, comercializable, es difícil de identificar –de hecho, los fondos financieros propios constituyen reservas, uno de cuyos objetivos es la adquisición posterior de bienes tangibles–. Queda así clarificado que, pese a que las decisiones de diversificación de cartera –entre la que se incluye el capital realizado– son imprescindibles para la supervivencia de la empresa, en la presente investigación se adopta una visión "productiva" y no "inversora", una visión *ex post* y no *ex ante*[48].

5.1.4.1 Los flujos de servicios de capital al proceso productivo y su valoración

El concepto de flujos de capital resulta abstracto y exige una definición concreta con objeto de poder realizar una cuantificación adecuada de este factor productivo. Según Triplett (1998) los servicios de capital se definen como "*el factor,*

---

[47] Véanse los esfuerzos realizados para modelizar esta situación en análisis aplicados a través de las conocidas funciones *putty–clay*, *e.g.* Kon (1983).

[48] Esta distinción es justificable en industrias como la manufacturera, aunque en el caso de ciertos servicios como los financieros, *i.e.* banca y seguros, las transacciones constituyen la actividad productiva en sí misma por lo que el desarrollo de un modelo de producción resulta complejo y la valoración de los factores empleados se encuentra más allá de las estadísticas habitualmente disponibles.

por período, que fluye hacia el proceso productivo desde un bien de capital". De esta definición se concluye que su cuantía se define de forma circular, al exigir la cuantificación previa de los bienes de capital, *i.e.* la inversión previa materializada en *stocks* de los cuales emanan tales servicios y ésta a su vez queda definida en términos de los flujos de servicios que se espera puedan proveer. ¿Por qué resulta necesario estimar *stocks* de capital cuando, desde un vista productivo estamos interesados en los flujos descritos? Si se observasen los flujos de servicios provenientes de un bien de capital, *e.g.* un medio de transporte que ofrece un determinado servicio –físico– en Kilos/Km. de carga transportada por período a lo largo de su vida útil, y que pudiese ser valorado a través de precios adecuados, *e.g.* de alquiler, se tendría una representación adecuada de los servicios prestados por el capital en cada período. Sin embargo, observar estos flujos no resulta factible, debido a que el propietario y usuario de los bienes tangibles son la misma persona y por tanto, no se observan transacciones comerciales –físicas y valorables– para estos servicios. La ausencia de un sistema contable que refleja estas transacciones *internas* hace necesario el apoyarse en los datos relativos a la adquisición de los bienes –que incorporan los flujos de servicios que el bien es capaz de proporcionar hasta el final de su vida útil– y, posteriormente determinar cuál ha sido la contribución periódica de éstos a la producción. Es decir, la adquisición de los bienes por parte del productor se realiza en base a los flujos de servicios que estos van a prestar y posteriormente estos deben ser determinados partiendo del *stock* al cual pertenecen.

Formalmente, supongamos adoptada la decisión de invertir en un determinado bien de capital k en un momento temporal t, I^{t}_{k}, *e.g.* un vehículo, que es activo N períodos en cada uno de los cuales j ($t \leq j \leq$ N) provee unos servicios de capital, k^{j}_{k}, a lo largo de su vida útil, *e.g.* los Kilos/Km. de carga que un vehículo industrial puede prestar por período. Dado el período inicial, este *stock* de servicios productivos puede representarse en términos discretos por:

$$\mathrm{I}_k^t = \mathrm{k}_k^t + \mathrm{k}_k^{t+1} + ... + \mathrm{k}_k^j + ... + \mathrm{k}_k^{t+\mathrm{N}} = \sum_{j=t}^{t+\mathrm{N}} \mathrm{k}_k^j \qquad (5.1.10)$$

El *stock* de servicios de capital representado por I^t_k es en sí un flujo respecto al conjunto del *stock* de capital existente de esa clase de bien en *t*. Si consideramos que en *t* todavía prestan servicios generaciones de capital con antigüedad T, el *stock* de capital existente en este período en términos de los flujos de servicios presentes y futuros que este puede proveer quedan representados por

$$K^t_k = I^t_k + I^{t-1}_k + ... + I^j_k + ... + I^{t-T}_k = \sum_{j=t-T}^{t} I^j_k = \sum_{j=t}^{t+N} k^j_k \qquad (5.1.11)$$

De esta forma, el capital es el nexo entre el pasado y el futuro al relacionar los servicios de producción presentes y futuros a través de las decisiones pasadas y presentes de inversión. La relación recogida en (5.1.11) se corresponde con la expresión básica o de inicio del método de inventario permanente, *Perpetual Inventory Method*, *PIM*, que debe mostrar los flujos de servicios que presta un determinado bien de capital.

5.1.4.2 El método de inventario permanente –*stock* de capital bruto, neto y productivo–

Ahora bien, dada la ausencia de información relativa a los servicios prestados por los bienes de capital, k^j_k, y los propios *stocks* de los que se derivan –que habría de ser recogida a través de encuestas directas o censos de capital existente respectivamente–, el método del inventario permanente se constituye en la única opción para inferir, a partir de los flujos de inversión, el *stock* de capital presente en una determinada industria o economía[49]. El desarrollo empírico de la ecuación (5.1.11) se basa en la información estadística efectivamente observada relativa a los flujos de inversión –por ser aquella recogida por los planes contables a nivel de empresa y por los institutos estadísticos nacionales en los agregados de contabilidad nacional–. La última revisión del Sistema de Cuentas Nacionales,

[49] Dado que cualquier bien de capital desaparece transcurridos los períodos de su vida útil la existencia de flujos de inversión observados con antigüedad suficiente garantiza que se pueda reconstruir el *stock* existente a partir de éstos.

System of National Accounts, SNA, que data de 1993 reconoce a la formación bruta de capital fijo, *gross fixed capital formation*, *GFCF*, como aquella macromagnitud representativa de los flujos de inversión y al método de inventario permanente como aquel más adecuado para estimar el *stock* de capital, Naciones Unidas (1993, par. 6.189). En sus directrices, ampliamente seguidas por los países de la OCDE que se contemplan en la presente investigación, la formación bruta de capital fijo contempla todos los bienes duraderos (rinden servicios más allá del período contable de adquisición), tangibles (los bienes intangibles como patentes y derechos de propiedad, *copyright*, son excluidos), fijos (el inventario y trabajos en proceso –circulante– se excluyen) y reproducibles (si bien los bienes ambientales como bosques, tierra, minerales, etc. tampoco se consideran). Dadas estas características, los bienes de capital incluidos son –fundamentalmente con relación a la industria manufacturera–: maquinaria y equipo, edificaciones y vehículos –medios de transporte–. La definición comúnmente aceptada de *stock* de capital identifica a éste con el conjunto de los bienes propiedad las empresas que, en un momento determinado, es usado en los procesos productivo o que se posee en expectativa de que pueda ser usado en el futuro.

5.1.4.2.1 El *stock* de capital bruto, *Gross Capital Stock, GCS.*

Suponiendo la existencia de un bien de capital k del cual se van adquiriendo diversas generaciones en los j períodos precedentes a t, el método del inventario permanente estima el *stock* de capital bruto en tal período como adición de toda la inversión pasada valorada al precio de adquisición, para esa categoría de activo, en un período base, *e.g.* t,

$$\mathrm{GCS}_k^t = \varphi_i^0\,\mathrm{I}_k^t + \varphi_k^1\,\mathrm{I}_k^{t-1} + \ldots + \varphi_k^j\,\mathrm{I}_k^j + \ldots + \varphi_k^{\mathrm{T}}\mathrm{I}_k^{t-\mathrm{T}} \qquad (5.1.12)$$

donde las ponderaciones φ^j_k representan la proporción de los bienes k de la generación j que sobreviven en cada período, $\sum^{\mathrm{T}}_{j=0} \varphi^j_k = 1$. Suponiendo el caso más simple en que cada generación adquirida se retirase en un igual período, *e.g.* al final de su vida media de servicio estimada T, las ponderaciones φ^j_k serían unitarias hasta el período inmediatamente posterior a aquel de vida media en que ya no hay ningún bien activo, φ_k^{T+1}, en que sería nula recogiendo la baja de la generación al completo. Esta secuencia de retiro se corresponde con una función de supervivencia de salida simultánea, *simultaneous exit*, OCDE (1993), de tal forma que el *stock* de capital bruto, GCS^t_k, resulta equivalente a (5.1.11). Sin embargo, resulta improbable que cada generación del bien de capital *k* tenga igual fecha de desaparición o *caducidad* por lo que es más realista que las ponderaciones φ^j_k respondan a una función de supervivencia que distribuye los retiros en torno a la vida media de la generación, *e.g. bell shaped*. La formulación específica de la función de supervivencia –o su reflejo de inverso en aquella de mortalidad– difiere entre países: log–normal en Francia, gamma en Alemania, Weibull en Finlandia, Winfrey en los Estados Unidos, etc.. En el caso concreto de los *stocks* de capital bruto presentados en la ISDB98, la información recopilada es consistente con los datos facilitados por los diversos países, habiéndose utilizado en todos los casos una función de supervivencia de estas características, véase OECD (1998a).

5.1.4.2.2 El *stock* de capital neto, *Net Capital Stock, NCS.*

Una cuestión fundamental en la determinación del *stock* de capital a través del método del inventario permanente es la valoración de las diversas generaciones *j* del bien *k* en las que se va invirtiendo hasta el momento *t*. De acuerdo a la definición previa, en el *stock* de capital bruto (5.1.11) cada una de éstas resulta valorada de acuerdo al precio de adquisición seleccionado en un determinado período base, *e.g. t*; es decir, como si fuesen nuevas no importa cual sea su edad, condición física y, aún más importante, los años de vida útil que les restan. Sin embargo, esta asunción resulta poco realista debido a que a lo largo del tiempo, el valor remanente de las diversas generaciones de capital puestas en servicio en períodos precedentes resulta cada vez menor. Así, desde una perspectiva contable, el valor económico de los activos debe corregirse de acuerdo a la depreciación –perdida de valor– sufrida por los bienes de capital. En tal caso, el valor del *stock* de capital neto responde a

$$\mathrm{NCS}_k^t = \varphi_k^0 \cdot \phi_k^0 \cdot \mathrm{I}_k^t + \varphi_k^1 \cdot \phi_k^1 \cdot \mathrm{I}_k^{t-1} + \ldots + \varphi_k^j \cdot \phi_k^j \cdot \mathrm{I}_k^j + \ldots + \varphi_k^{\mathrm{T}} \cdot \phi_k^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{I}_k^{t-\mathrm{T}} \tag{5.1.13}$$

donde las ponderaciones ϕ_k^j, que suelen responder a diversos patrones –regresiva, progresiva ó lineal–, indican la proporción de los bienes k de la generación j que no ha sido amortizada en cada periodo, $\sum_{j=0}^{\mathrm{T}} \phi_k^j = 1$. El *stock* de capital neto, muestra *el valor* de los flujos de servicios futuros que las diversas generaciones aún activas del bien de capital k son capaces de proveer a su propietario, *i.e.* su aportación futura al proceso productivo –por ejemplo, años que aún les restan de vida útil–. Desde una perspectiva contable, el *stock* de capital neto refleja el valor del capital entendido como una activo para la empresa y, así, en caso de que fuese vendido, su precio refleja las expectativas que, sobre su flujo futuro de servicios, debe prestar el comprador.

5.1.4.2.3 El *stock* de capital productivo, *Productive Capital Stock*, *PCS*.

Los *stocks* de capital bruto y neto representan toda la información que los institutos estadísticos nacionales facilitan con relación a la cuantía de este factor que se encuentra disponible para los procesos de producción. En el caso del *stock* de capital bruto (5.1.11), la valoración única según el precio de adquisición –cómo sí las distintas generaciones de activos prestasen servicios con igual capacidad que las nuevas–, adolece de una elevada falta de realismo. Así, su utilización, por no tener en cuenta su edad, condición física y vidas de servicio útil que les restan, es desaconsejable de disponer de información más precisa. Ahora bien, ¿supone una información más precisa de los servicios prestados por el capital los valores el *stock* de capital neto? De acuerdo a la definición comúnmente aceptada en análisis económico, la depreciación ϕ_k^j considerada en la obtención del *stock* de capital neto muestra la *pérdida de valor* experimentada por un bien de capital como consecuencia de su empleo en el proceso productivo. En el Sistema de Cuentas Nacionales, el concepto de depreciación se identifica con el consumo de capital fijo que, de acuerdo a su definición, se corresponde con el deterioro físico, obsolescencia o daños accidentales.

Sin embargo, la pérdida de valor de un bien de capital considerado como un activo empresarial no refleja necesariamente la pérdida de capacidad productiva en términos de los servicios de capital que puede prestar en un determinado período –aunque sí sobre su vida útil–. En este sentido, un bien de capital puede prestar similar servicio productivo desde el inicio hasta el final de su vida útil sin sufrir decadencia alguna; es decir, sin sufrir merma alguna en las aportaciones que realiza al servicio productivo. En la literatura sobre medición de capital desde la perspectiva productiva que aquí interesa, *e.g.* Triplett (1996), suele utilizarse como caso extremo para ejemplarizar esta posibilidad el caso de una bombilla que ilumina con igual intensidad desde el momento en que comienza su funcionamiento hasta el segundo en que se funde –sin alterar su consumo de energía–. En esta situación, el deterioro o pérdida de eficiencia productiva es nulo mientras que sufre la depreciación asociada al hecho de que su vida útil se ve reducida período tras período –agotamiento– .

Así, es necesario considerar que el *stock* de capital del cual emanan los servicios productivos calculado a través del método de inventario permanente (5.1.11) debe ser "ajustado", no desde una perspectiva contable o económica sino desde una perspectiva física o tecnológica que refleje la capacidad productiva de las diversas generaciones de capital a lo largo del tiempo. El gráfico 5.1.1 permite analizar el concepto de decadencia o pérdida de eficiencia que un determinado bien sufre a lo largo de su vida útil.

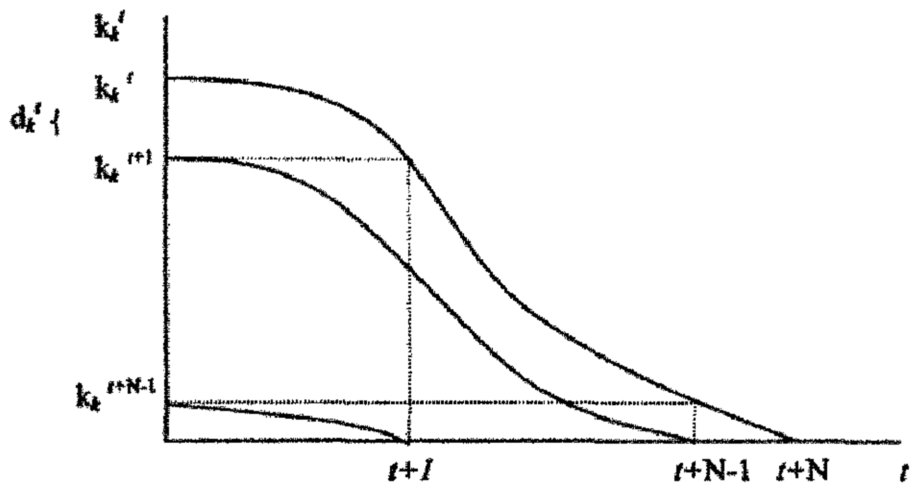


Gráfico 5.1.1 Decadencia en la prestación de servicios productivos.

Tal como se puede apreciar el bien k genera k_k^t servicios de capital en el período de adquisición y k_k^{t+1} en el siguiente. La diferencia entre ambos flujos de servicios

$$d_k^t = k_k^t - k_k^{t+1}, \tag{5.1.14}$$

se denomina decadencia del bien k entre períodos adyacentes y, si extrapolamos la decadencia hasta los N *períodos de vida útil, los servicios prestados* se vuelven nulos. En cada período, los flujos de servicios del bien k vienen determinados por las funciones de decadencia o de pérdida de eficiencia. Aquellas más alejadas del eje de coordenadas se corresponden con la función de servicios evaluado en t, frente a las que representan flujos en períodos posteriores que son inferiores con objeto de mostrar cómo igual bien de capital pero con un período –año– más de vida es capaz de proveer menos servicios presentes y futuros –la función de servicios t+1 muestra cómo este bien no provee servicio alguno en t+N–1 precisamente porque ha perdido ese año de vida–. El desplazamiento de la función de servicios muestra, conjuntamente, el menor nivel de servicios prestados y la pérdida de años de vida –que tendrá su reflejo en la depreciación del activo–. Dada una serie de generaciones *j* de bienes de capital *k* como la recogida en (5.1.11) que conforman un *stock* de capital, la combinación de decadencia y retiros –ausentes de la producción una vez acabada su vida útil–, se denomina deterioro.

$$D_k^t = K_k^t - K_k^{t+1} \tag{5.1.15}$$

La ecuación (5.1.11) no recoge la decadencia sufrida por cada una de las generaciones correspondientes a inversiones pasadas y, al no ajustase el valor del capital de acuerdo a su eficiencia relativa, no muestra explícitamente la posibilidad de que generaciones precedentes sean menos eficientes que aquellas adquiridas, por ejemplo, en el período corriente. Así, partiendo de nuevo del *stock* de capital bruto es posible determinar aquel productivo a través de

$$PCS_k^t = \varphi_k^0 \cdot \theta_k^0 \cdot I_k^t + \varphi_k^1 \cdot \theta_k^1 \cdot I_k^{t-1} + ... + \varphi_k^j \cdot \theta_k^j \cdot I_k^j + ... + \varphi_k^T \cdot \theta_k^T \cdot I_k^{t-T} \tag{5.1.16}$$

donde las ponderaciones θ^j_k, reflejan la eficiencia relativa del bien de capital en cada período de su vida útil, $0 \leq \theta^j_k \leq 1$ –véase Hulten y Wykoff (1981) para distintas funciones de eficiencia productiva–. En esta ocasión, la secuencia de ponderaciones debe reflejar la capacidad del bien *k* de aportar servicios productivos a lo largo de su vida útil, siendo $\theta^0_k = 1$ para mostrar la plenitud productiva en el momento de adquisición –el flujo máximo de servicios prestados se normaliza a la unidad– y $\theta_k^{T+1} = 0$ para mostrar que el bien de capital está agotado –en el caso de que no haya decadencia, $\theta^j_k = 1$ y, de nuevo, el *stock* de capital productivo coincide con aquel bruto–[50]. Así, el *stock* de capital productivo (5.1.16), lleva implícita la pérdida de productividad que éste sufre como resultado de disminuciones en su eficiencia, *i.e.* reducciones en el flujo de servicios que éste es capaz de prestar por la decadencia

[50] Volviendo al ejemplo ya presentado, la adquisición de bombillas halógenas que producen iguales servicios, *i.e.* *lumens/t*, a lo largo de su vida útil sin que haya una pérdida apreciable de eficiencia. La ecuación (5.1.10) y (5.1.11) relativas a un bien de estas características implica que las ponderaciones establecidas por el perfil de decadencia o de pérdida de eficiencia en (5.1.16) serían unitarias y el bien sería retirado únicamente cuando finalizase su vida útil –la bombilla se funde–.

que sufre con el paso del tiempo hasta su retiro –piénsese por ejemplo en un vehículo que es capaz de transportar determinados Kilos/Km. el primer año pero que, conforme aparecen las revisiones y averías en períodos sucesivos, no puede alcanzar iguales niveles[51]–.

Nótese que las ponderaciones relativas a la depreciación, ϕ^{j}_{k}, y la decadencia, θ^{j}_{k}, que sirven para calcular el *stock* de capital desde una perspectiva económica, *neto*, y tecnológica, *productivo*, no tienen por qué coincidir en general. De hecho, desde la perspectiva tecnológica, es normal que la capacidad productiva de los bienes de capital tangibles sea próxima a la unidad en los primeros años de vida, para posteriormente presentar una tendencia progresiva, mientras que desde la perspectiva económica, éstos tienen a sufrir una fuerte depreciación en el primer año como reflejo del coste que supondría su reasignación –piénsese en la inversión materializada en un vehículo que, tras su matriculación, tiende a perder el 20% de su valor–. Así existe un paralelismo de conceptos en términos de *stock*: neto y productivo así como de ponderaciones: depreciación *–age–price profile–* y decadencia *–age–efficiency profile–* siendo necesario tener presente las importantes diferencias existentes entre éstos.

5.1.4.3 El *stock* de capital productivo y los flujos de servicios al proceso productivo

La definición realizada en la presente investigación de la tecnología o proceso productivo enfatiza su condición de flujo, siendo necesario considerar un concepto de capital que sea compatible con tal caracterización. Así, la definición de *stock* de capital productivo debe ser *convertida* con objeto de identificar al conjunto de flujos presentes –individualizándolos de aquellos futuros–, que las diversas generaciones de capital instalado son capaces de ofrecer (5.1.16).

---

[51] En este sentido Feldstein y Rothschild (1974) distinguen entre deterioro por desde la perspectiva de la producción (*output*) y de los factores (*inputs*). En el primer caso los servicios que es capaz de producir un bien al envejecer cada vez son menores pero es que, además, exige un mayor nivel de factores como resultado de las revisiones de mantenimiento y reparaciones a las que este debe ser sometido con objeto de garantizar su correcto funcionamiento "como si fuese nuevo".

La solución más sencilla y generalmente aceptada en la mayoría de los análisis de productividad es que los servicios prestados por el capital son proporcionales al *stock* instalado, de tal forma que éstos últimos permiten representar de una forma conveniente la evolución de los primeros sin necesidad de individualizarlos, *i.e.* en términos de su variación temporal, éstos son sustitutivos lo cual implica que la capacidad utilizada del *stock* instalado es constante –algo que en principio es cuestionable dada la evidencia relativa a las variaciones de la capacidad utilizada–. Así, de existir información relevante con relación a la capacidad utilizada –índices de proporción del capital utilizado respecto a su empleo pleno, *e.g.* horas en uso respecto a las tecnológicamente factibles– es posible proceder a la multiplicación del *stock* de capital por la proporción de capacidad utilizada obteniendo un indicador de los flujos proporcionados por el capital. Sin embargo, si bien en el corto o medio plazo, las fluctuaciones en la capacidad utilizada pueden afectar la evolución de la productividad, su impacto en análisis de largo plazo como el aquí considerado resulta reducido al compensarse la sobreutilización con la infrautilización a lo largo de los ciclos económicos. Así, la necesidad de asumir que los servicios prestados por el capital son una proporción constante del *stock* productivo instalado resulta relativamente razonable.

5.1.4.4 La agregación de diversas categorías heterogéneas de capital

La presentación realizada hasta el momento se ha planteado con relación a un único bien de capital k del cual existen diversas generaciones productivas en un determinado período. Sin embargo, resulta evidente que procesos productivos complejos como, por ejemplo, los manufactureros, implican el uso de múltiples categorías de capital. Al igual que ocurría con relación al empleo, (5.1.6), la correcta identificación de los servicios prestados por el capital implica el cálculo de un índice agregador de las diversas categorías de capital existentes.

La agregación de los diversos tipo de capital debe realizarse atendiendo a la naturaleza de los mismos, con objeto de recoger sus diversas características –véase, por ejemplo, las propuestas de Denison (1957), Kendrick (1961b) o Jorgenson y

Christensen (1967). Esta naturaleza suele ser determinada de acuerdo a la doble vertiente que representa la clase del activo: duraderos (divididos en bienes de equipo y de consumo), residenciales (en propiedad o alquilados), etc. y su titularidad (grandes empresas, pymes, familias, instituciones, etc.). En general, las k categorías de capital son determinadas a través del método de inventario permanente ya descrito u otras posibilidades no abordadas aquí al no ser estar presentes en la ISDB98 –*e.g.* de acuerdo a su valor contable. En este contexto, siguiendo a Jorgenson, Gollop y Fraumeni (1987) –como en el caso del empleo–, es posible agregar los servicios prestado por cada una de ellas a través de la definición de un número índice. De seleccionar de nuevo el índice de Törnqvist, la variación en los servicios prestados por el capital en una determinada actividad o proceso productivo i, $K^t{}_i$, entre los períodos temporales $t = 0, 1$, se corresponde con:

$$K_i^{0,1}(K_i^0, K_i^1) = \sum_{k=1}^{K} v_{ki}(\ln K_{ki}^1 - \ln K_{ki}^0) \qquad (5.1.17)$$

donde $v_{ki} = 1/2\ (v^0{}_{ki} + v^1{}_{ki})$ representa la ponderación de los servicios productivos de cada una de las k categorías de capital en función de su proporción sobre el denominado coste total de uso del capital: $v^t{}_{ki} = p_{ki} \cdot K_{ki} / \sum^{K}{}_{k=1} p_{ki} \cdot K_{ki}$.

En esta ocasión, se asume que los servicios prestados por las k categorías de capital son proporcionales al *stock* de capital productivo, de forma que este representa el valor K_i^t en (5.1.17), *e.g.*

$$K^t{}_{ki} = Q_{ki} \cdot PCS_{ki}^{t-1}, \qquad (5.1.18)$$

donde Q_{ki} representa la constante de proporcionalidad que transforma el *stock* de capital del activo k en flujos de servicios –pudiéndose analizar cambios en la *calidad* del capital de forma análoga al empleo–[52]. Así, sustituyendo (5.1.18) en

[52] El retraso en un período del *stock* de capital productivo que determina el flujo de servicios en un período t, responde a que la inversión realizada presenta un tiempo de madurez en el que su eficiencia productiva no es plena. Esto representación supone que en la estructura de ponderaciones del *stock* de capital productivo, (5.1.16), la primera de ellas, $\theta^0{}_k$, sería nula. En análisis de productividad a largo plazo esta hipótesis no altera de forma sustancial la variable

(5.1.17) se obtiene la variación en los servicios del empleo K^t_i en términos del *stock* de capital productivo,

$$K_i^{0,t}(PCS_i^{-1}, PCS_i^0) = \sum_{k=1}^{K} v_{ki}(\ln PCS_{ki}^0 - \ln PCS_{ki}^{-1}) \qquad (5.1.19)$$

Con relación a las ponderaciones v^t_{ki} necesarias para su agregación, éstas quedan determinadas según el denominado coste de uso de capital o precio de alquiler, *rental price*, p_{ki}. Si con relación al empleo las ponderaciones se derivan de multiplicar el coste de cada una de las categorías laborales por el flujo de servicios que proveía –en términos del número de ocupados u horas trabajadas, (5.1.8–9), en esta ocasión su determinación resulta sustancialmente más compleja al no poder observarse los pagos realizados por las empresas por los *k* bienes de capital, *i.e.* resulta necesario calcular un coste imputado.

Al inicio de la presente sección se ha discutido la conveniencia de adquirir bienes de capital con objeto de desarrollar actividades productivas internalizando el coste de transacción a lo largo de diversos periodos. Ahora bien, este carácter intertemporal hace que no existan siempre transacciones externas que revelen el coste en que se incurre por el uso del capital instalado, por lo que no se dispone de un valor concreto con el que poder ponderar los diversos tipos de capital para su agregación. Una primera posibilidad es utilizar, en cualquier caso, los precios de alquiler existentes en el mercado para las diversas categorías de bienes de capital. La lógica de esta posibilidad se basa en que, suponiendo que una empresa alquile la totalidad de los bienes de capital que emplea, *e.g.* espacio de oficina y vehículos, el precio de cada unos de estos viene determinado por el coste en el que incurre con objeto de poder disponer de ellos. Así, los precios de alquiler –*renting, leasing,...*– representan el coste de uso del capital en un período, pudiéndose emplear parar agregar los diversos flujos de capital que emanan de los *k stocks* existentes. De decidirse la misma empresa por adquirir el edificio y la flota de vehículos, es razonable pensar que los mismos precios de alquiler que existan en el mercado para

---

relativa a los flujos provistos por el *stock* de capital por lo que, por conveniencia, no se retrasa el estas categorías de bienes, representan un precio aceptable, p_k, para proceder a su agregación con objeto de establecer las diversas ponderaciones v^t_{ki} –aunque resulta evidente que si la empresa se decide a su adquisición debe ser porque internalizando la transacción reduce el coste en el que incurre por su uso–.

El uso los precios de alquiler de mercado para agregar las diversas categorías de bienes es reconocido por Dale Jorgenson (1990:41): "*las tasas de alquiler para los servicios de capital facilitan las bases para la remuneración a la propiedad, así como las tasas salariales facilitan las bases para la retribución al empleo. La información sobre las transacciones de alquileres sería necesaria con objeto de emplear las fuentes estadísticas relativas a los factores de capital de un modo análogo a las existentes para el factor empleo. Estos datos no se encuentran disponibles de una forma fácilmente accesible, incluso para la sustancial proporción de activos con mercados de alquiler en actividad*". El paralelismo que realiza este autor entre el coste de uso del capital y la remuneración a la propiedad se deriva del hecho de que en competencia perfecta –y rendimientos constantes– el beneficio contable se corresponde con la remuneración a la propiedad –capital– de tal forma que es factible determinar su tasa de rentabilidad en términos de los costes de los activos instalados. Esta tasa de rentabilidad se considera *ex-post* –o interna– al derivarse del proceso productivo ya ejecutado, pues su cálculo implica los ingresos netos realizados: ingresos menos los costes no relacionados con los bienes de capital.

Dentro de este contexto, el coste de uso de capital o precio de alquiler del activo *k* para la actividad *i* en el período *t*, p^t_{ki}, se corresponde coste de la inversión realizada, p_{Iki}^t ajustada por la tasa de rentabilidad o coste de oportunidad, r_k^t, la tasa de depreciación , ϕ^t_k, las ganancias de capital, $p_{Ii}^t - p_{Ii}^{t-1}$, y los impuestos existentes sobre la inversión , t^t, *i.e.*

$$p_{ki}^t = r_k^t \cdot p_{Iki}^{t-1} + \phi^t_k \cdot p_{Iki}^t - [p_{Iki}^t - p_{Iki}^{t-1}] + t^t \cdot p_{Iki}^t \qquad (5.1.20)$$

stock de capital productivo, *i.e.* $K^t_{ki} = Q_{ki} \cdot PCS_{ki}^t$.

Es decir, el coste de uso de capital o precio de alquiler es solo una proporción del coste de la inversión, que se corresponde con su tasa de rentabilidad más la depreciación sufrida por el capital y los impuestos existentes. Con objeto de calcular el coste de uso del capital resulta necesario determinar su tasa de rentabilidad *interna* a partir de la remuneración a la propiedad –capital–, ψ^t_i, *i.e.* los ingresos netos. La tasa interna de rentabilidad r_k^t se corresponde con

$$r_k^t = \{\psi^t_i - PCS_k^{t-1} \cdot (\phi^t_k \cdot p_{Iki}^t - [p_{Iki}^t - p_{Iki}^{t-1}] + t^t \cdot p_{Iki}^t)\} / PCS_k^{t-1} \cdot p_{Iki}^{t-1}, \qquad (5.1.21)$$

siendo ahora posible resolver el coste de uso de capital o precio de alquiler, p^t_{ki}, al conocerse la totalidad de las variables involucradas en su determinación. Sin embargo, no es siempre posible calcular la tasa interna de rentabilidad según (5.1.21), pudiéndose hacer uso del coste de oportunidad *ex–ante* del capital que suele ser representado, por conveniencia, con la rentabilidad de las letras del Tesoro –si bien este coste de oportunidad suele ser reservado en análisis de productividad para identificar los procesos decisorios de inversión, véase Hulten (1990)–. En cualquier caso, una vez determinado el coste de uso del capital, p^t_{ki}, es posible proceder a la agregación de acuerdo al índice representado en (5.1.17)

De acuerdo a lo expuesto en esta sección, el concepto de *stock* de capital que permite representar de una forma adecuada los flujos de servicios aportados por los bienes de capital al proceso productivo es, precisamente, aquel productivo, PCS, (5.1.16). La razón estriba en que la inversión realizada en un activo se pondera de acuerdo a la eficiencia efectiva que es capaz de proporcionar, y no en función de su valor contable, concepto que se relaciona con el *stock* de capital neto, NCS, (5.1.13). Sin embargo, atendiendo a los datos publicados por los diversos institutos nacionales de estadística, es posible apreciar que los únicos publicados son aquellos básicos, que hacen referencia al *stock* de capital bruto (5.1.12) y, en algunos casos, el neto; es decir, priman la visión económica del *stock* de capital, *wealth stock*, frente a la tecnológica, *productive stock*, no debiendo sorprender este hecho si consideramos que uno de los objetivos de la contabilidad nacional es determinar el reparto del producto interior bruto entre las rentas de los distintos agentes, atendiendo a su valoración económica de tal forma que su expresión en términos de la producción (valor añadido) resulta un mero equivalente de esta visión económica.

Así, a excepción de algunos intentos realizados por el *Bureau of Labor Statistics* de los Estados Unidos para determinar el *stock* de capital productivo en ciertos sectores, Harper (1997), no existen estimaciones adecuadas de *stocks* de capital productivo. Ante esta situación, ¿qué *stock* de los disponibles es preferible? En principio, de asumirse que la depreciación sufrida coincide con la pérdida de eficiencia –en términos de la relación neoclásica por la cual el precio de un bien de capital se corresponde con su productividad marginal–, el *stock* de capital neto reflejaría la capacidad productiva de los bienes de capital, siendo equivalente al productivo. En estas circunstancias, se podría utilizar en los análisis de evolución de la productividad. Sin embargo, es conocido que los patrones contables de depreciación no se corresponden con la capacidad efectiva de producción de los activos por lo que existen discrepancias entre ambos *stocks* de capital. Asumiendo esta discrepancia, es preferible el empleo del *stock* de capital neto para evaluar los flujos de servicios del capital en (5.1.18) respecto al *stock* bruto, donde los bienes de capital son evaluados como si fueran nuevos –en términos de las relaciones previas cómo si su eficiencia fuese máxima–.

Con relación a la base de datos utilizada para ilustrar el modelo de evolución del rendimiento productivo propuesto en esta investigación, la ISDB98 facilita únicamente información agregada sobre los *stocks* de capital netos y brutos –de acuerdo al método de inventario permanente ya descrito–. Sin embargo, los primeros solo están disponibles para un número limitado de naciones, al no existir datos con relación a Japón, los Países Bajos o comenzar desde hace escaso tiempo: Italia (1980), Noruega (1978), Suecia (1979) y el Reino Unido (1986). Así, en la presente investigación resulta necesario hacer uso, pese a los defectos establecidos, del *stock* de capital bruto, GCS. Adicionalmente, y al igual que con relación al empleo, suponiendo que existiese información sobre los *stocks* de capital en *k* categorías, la ausencia de información relativa al coste de uso del capital imposibilita su agregación en un índice de acuerdo a (5.1.17), por lo que en el análisis realizado en esta investigación se considera el valor monetario agregado del *stock* de capital bruto. Esta situación revela, una vez más y desde la perspectiva del capital, las diferencias existentes entre el óptimo teórico puesto de manifiesto en esta sección y las variables que, finalmente, pueden considerarse en los análisis internacionales que comparan el rendimiento productivo.

5.1.5 Tecnología y agregación de las diversas categorías de empleo y capital

En las secciones anteriores se han puesto de manifiesto los métodos que, basados en la teoría de los números índices, permiten la agregación de diversas categorías de factores en un único índice que refleja los servicios productivos por ellos prestados. Sin embargo, desde una perceptiva tecnológica, se debe afrontar si es lícito proceder a la agregación de estas categorías sin alterar las relaciones productivas que ligan las diversas categorías de factores con la producción obtenida. Esto resulta equivalente a preguntarnos si, al igual que en el caso de separabilidad entre los *inputs* primarios y secundarios en la definición de la función de valor añadido, la agregación de las diversas categorías de factores en un único índice resulta en una representación válida de la tecnología.

La posibilidad de agregar los flujos de servicios proporcionados por el empleo y el capital exige la existencia de una función agregadora que, sobre la condición se separabilidad entre los conjuntos de factores primarios y secundarios en la definición de la función de valor añadido, debe extenderse a todos aquellos *inputs* cuya diversidad ha de resolverse a través de un proceso de agregación. En el caso del empleo y del capital, la existencia de l categorías laborales y k bienes de capital, esta condición nos lleva a una formulación de la tecnología de la forma

$$Y = \hat{f}^t\ (L, K, M) \equiv c^t(h^t(L, K), M) \equiv c^t(h^t(l^t(L_1,\ldots,L_L), k^t(K_1,\ldots, K_K)), M). \quad (5.1.22)$$

Al igual que con relación al valor añadido, la condición necesaria para poder expresar la tecnología de producción de acuerdo a (5.1.22) es la existencia de separabilidad entre los diversos factores productivos, lo cual implica una vez más la existencia de homoteticidad, Blackorby, Primont y Russell (1978) [53]. En términos de los axiomas introducidos en el segundo capítulo, esto implica que la tecnología debe satisfacer un nivel adicional de homoteticidad en T.9, ampliándose la condición de separabilidad de las funciones de distancia (2.2.22–23–24) a los factores primarios de trabajo y capital.

Dado que los datos disponibles de empleo y capital relativos a la industria manufacturera suponen la agregación de las diversas categorías existentes, resulta necesario asumir que, de querer reflejar de forma correcta la tecnología de producción, ésta debe satisfacer una representación como la recogida en (5.1.22). De existir información para poder contrastar la existencia de separabilidad con objeto de establecer si la tecnología es homotética, es posible determinar si las evaluaciones del rendimiento productivo basadas en esta representación de la tecnología son adecuadas o no –véase Berndt y Christensen (1974) con relación al empleo y Diewert (1980) respecto al capital–. De no ser así, resulta necesario extender la discusión realizada respecto al valor añadido, y reconocer que los cálculos de las variaciones en el rendimiento productivo se encuentran sesgadas de no presentar la tecnología homoteticidad –y, por tanto, no satisfacer las condiciones de separabilidad ya sea entre *inputs* primarios y secundarios (valor añadido) o entre los primeros (con objeto de obtener agregación consistente de éstos)–.

5.2 La evaluación básica del rendimiento productivo sin caracterizar la tecnología

Siguiendo el ejemplo presentado en 4.4, el objetivo de la presente sección es exponer las conclusiones que se pueden alcanzar con relación a la evaluación básica del rendimiento productivo de acuerdo a los datos publicados por la OCDE, sin necesidad de caracterizar la tecnología de producción a través de funciones de distancia y definir índices de Malmquist. Tal como se ha puesto de manifiesto los datos considerados proceden de la ISDB98 –*International Sectoral Database 1998*–, habiendo sido analizados en detalle en la sección precedente.

[53] De nuevo, las condiciones restrictivas de la asunción de separabilidad entre los *inputs* primarios de empleo y capital se manifiesta, por ejemplo, en que relación marginal de sustitución entre los diversos tipos de empleo es independiente del capital y viceversa.

La tecnología expresada por el conjunto de posibilidades de producción queda definida desde la perspectiva del *output* por el agregado del valor añadido generado en la industria, GDPD, y desde la perspectiva de los factores por el *stock* de capital bruto estimado de acuerdo al método de inventario permanente, KTVD, y el número de ocupados, ET, incluyendo el número de ocupados por cuenta ajena y propia –las variables monetarias están expresadas en precios constantes de 1990 y son homogeneizadas en dólares estadounidenses según las paridades de poder adquisitivo de igual año–. El cuadro 5.2.1 recoge los valores absolutos de las variables en los años inicial y final del periodo considerado, 1970 y 1993 respectivamente. Se puede apreciar cómo, en términos absolutos, Noruega y los Estados Unidos representan los extremos inferior y superior en términos del valor añadido generado, *stock* de capital y empleo, existiendo una elevada heterogeneidad de escala entre los países considerados tal como muestra la desviación típica de las distintas variables.

País	1970			1993		
	GDPD Mill. $U.S.	KTVD Mill. $U.S	ET Miles	GDPD Mill. $U.S.	KTVD Mill. $U.S	ET Miles
Australia (AUS)	29.207,4	55.672,8	1.310,9	41.831,3	93.241,9	1.012,0
Bélgica (BEL)	18.548,8	42.008,8	1.030,6	33.104,8	N.D.	659,5
Canadá (CAN)	45.153,6	92.462,2	1.744,0	79.092,1	185.487,8	1.840,0
Dinamarca (DNK)	9.310,2	20.664,0	532,0	14.090,7	37.301,7	456,3
Finlandia (FIN)	8.287,2	28.513,9	485,2	15.811,1	58.800,6	361,0
Francia (FRA)	135.226,9	264.136,9	5.186,9	196.631,0	481.868,9	3.950,6
R.F.A. (WGR)	253.906,4	383.260,6	9.575,0	329.607,3	614.469,1	7.995,0
Italia (ITA)	94.327,2	256.969,5	4.653,7	198.801,5	501.220,6	3.830,1
Japón (JPN)	250.158,7	333.610,9	12.302,0	618.745,0	1.451.060,4	14.419,0
Países Bajos (NLD)	28.796,2	61.540,8	1.206,9	45.543,2	119.187,1	876,0
Noruega (NOR)	7.838,8	18.849,6	370,0	8.870,1	36.667,6	N.D.
Suecia (SWE)	20.955,9	44.773,8	1.083,1	26.478,9	72.752,0	708,4
Reino Unido (GBR)	156.230,9	289.477,9	8.333,7	177.978,3	427.218,9	4.357,0
EE.UU. (USA)	659.006,5	1.125.435,9	18.906,0	1.051.986,4	2.256.354,3	17.662,0
Media	122.639,6	215.527,0	4.765,7	202.755,1	487.356,2	4.471,3
Desv. Típica	176.958,0	292.846,0	5.613,2	296.763,7	659.627,5	5.624,2
Máximo	659.006,5	1.125.435,9	18.906,0	1.051.986,4	2.256.354,3	17.662,0
Mínimo	7.838,8	18.849,6	370,0	8.870,1	36.667,6	361,0

Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.2.1 Variables y estadísticos descriptivos: 1970 y 1993.

Así mismo, es posible apreciar el incremento medio en el valor añadido y *stock* de capital, mientras el número de ocupados sufre un retroceso que alcanza una pérdida conjunta de empleo de más de ocho millones de individuos. El cuadro 5.2.2 recoge la tasas de variación medias interanuales y acumuladas entre 1970 y 1993 de las variables relevantes.

	Índice de variación acumulado (1970, 1993)					Tasa de variación acumulada (1970, 1993), %					Tasa de variación media interanual $(t, t+1)$, %				
País	GDPD	KTVD	ET	$\Delta TAFP_{70,t}^{70,93}$	$\Delta TRFP_{70,t}^{70,93}$	GDPD	KTVD	ET	$\Delta TAFP_{70,t}^{70,93}$	$\Delta TRFP_{70,t}^{70,93}$	GDPD	KTVD	ET	$\Delta TAFP_{70,t}^{70,93}$	$\Delta TRFP_{70,t}^{70,93}$
Australia (AUS)	1,43	1,67	0,77	1,53	1,08	43,22	67,48	-22,80	52,86	8,27	1,57	2,27	-1,12	1,86	0,35
Bélgica (BEL)	1,78	2,14	0,64	2,06	1,46	78,47	114,46	-36,01	106,12	46,00	2,55	3,37	-1,92	3,19	1,66
Canadá (CAN)	1,75	2,01	1,06	1,41	1,00	75,16	100,61	5,50	41,38	0,15	2,47	3,07	0,23	1,52	0,01
Dinamarca (DNK)	1,51	1,81[1]	0,86	1,40[1]	0,99[1]	51,35	80,52[1]	-14,23	39,90[1]	1,97[1]	1,82	2,72[1]	-0,67	1,54	0,092
Finlandia (FIN)	1,91	2,06	0,74	1,99	1,41	90,79	106,22	-25,59	98,73	40,76	2,85	3,20	-1,28	3,03	1,50
Francia (FRA)	1,45	1,82	0,76	1,53	1,09	45,41	82,43	-23,83	53,46	8,70	1,64	2,65	-1,18	1,88	0,36
R.F.A. (WGR)	1,30	1,60	0,83	1,32	0,94	29,81	60,33	-16,50	32,07	-6,45	1,14	2,07	-0,78	1,22	-0,29
Italia (ITA)	2,11	1,95	0,82	2,06	1,46	110,76	95,05	-17,70	106,39	46,19	3,29	2,95	-0,84	3,20	1,66
Japón (JPN)	2,47	4,35	1,17	1,52	1,08	147,34	334,96	17,21	52,04	7,70	4,02	6,60	0,69	1,84	0,32
Países Bajos (NLD)	1,58	1,94	0,73	1,70	1,21	58,16	93,67	-27,42	70,49	20,76	2,01	2,92	-1,38	2,35	0,82
Noruega (NOR)	1,13	1,95	0,76[2]	1,13[2]	0,80[2]	13,16	94,53	-23,81[2]	12,73[2]	-15,94[2]	0,54	2,94	-1,29[2]	0,57	-0,82
Suecia (SWE)	1,26	1,62	0,65	1,54	1,09	26,36	62,49	-34,60	53,88	9,00	1,02	2,13	-1,83	1,89	0,38
Reino Unido (GBR)	1,14	1,48	0,52	1,68	1,19	13,92	47,58	-47,72	68,10	19,07	0,57	1,71	-2,78	2,28	0,76
EE.UU. (USA)	1,60	2,00	0,93	1,41*	1,00	59,63	100,49	-6,58	41,18*	0,00	2,05	3,07	-0,30	1,51*	0,00
Media	1,60	2,05	0,81	1,65	1,17	60,25	104,64	-19,25	64,73	16,68	1,97	3,00	-1,01	2,15	0,63
Desv. Típica	0,38	0,72	0,17	0,26	0,18	37,88	71,62	17,33	25,87	18,32	1,01	1,18	0,91	0,68	0,67
Máximo	2,47	4,35	1,17	2,06	1,46	147,34	334,96	17,21	106,39	46,19	4,02	6,60	0,69	3,20	1,66
Mínimo	1,13	1,48	0,52	1,32	0,94	13,16	47,58	-47,72	32,07	-6,45	0,54	1,71	-2,78	1,22	-0,29

[1] Hasta 1992, [2] hasta 1991 –países excluidos de los estadísticos descriptivos–

* $\Delta TOFP_{70,USA}^{70,93} = 41.2\%$

Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.2.2. Evolución básica del rendimiento productivo, 1970 y 1993, %.

Se puede apreciar la elevada heterogeneidad en la evolución de las variables entre los países, con especial relevancia en el número de asalariados, donde en los veintitrés años considerados se observa una caída media del 19,7%. Únicamente Japón y Canadá presentan una evolución contraria con ganancias en el número de ocupados del 17,2% y 5,5% respectivamente, mientras el Reino Unido es aquel que ha sufrido en mayor medida el efecto de la crisis industrial, con una pérdida de empleo del 47,7%. El proceso de intensificación capitalista que se ha venido observando desde los años setenta queda de manifiesto en el índice acumulativo de KTVD que, sí bien en términos medios duplica su valor al alcanzar el 102,9%, muestra su máximo en Japón donde ha llegado a triplicarse, 335,0%. Por el contrario, el valor mínimo corresponde de nuevo al Reino Unido, donde se incrementa en un 47,6%[54]. Respecto al agregado representativo de la producción, el Valor Añadido aumenta un promedio del 60,2%, experimentado de nuevo el máximo en Japón, 147,3%, y el valor mínimo en el Reino Unido.

Dada la evolución de las variables relevantes, resulta difícil establecer de forma intuitiva la existencia de ganancias de productividad absoluta dado el carácter relativo de esta magnitud. En términos genéricos, y de acuerdo a lo expuesto en el primer capítulo, la variación en la productividad pone en relación la evolución de la producción respecto a aquella seguida por los factores. En el caso de la industria manufacturera, la variación positiva del Valor Añadido es superada por el incremento en el *stock* de capital mientras que, respecto a la evolución del empleo, ésta presenta variaciones negativas. Así, de considerarse productividades simples de *output* sobre *input*, desde la perspectiva del *stock* de capital existe una regresión en la productividad, mientras que con relación a la productividad aparente del empleo se incrementa. Siendo el objetivo de cualquier análisis de productividad el idear una metodología que permita alcanzar un compromiso, resulta necesario agregar la evolución conjunta de ambos factores productivos y, dependiendo de la ponderación que finalmente se aplique a cada uno de ellos, la productividad crecerá, se mantendrá constante o decaerá. En el

---

[54] La posibilidad de analizar el sesgo en las variaciones tecnológicas a través de índices de Malmquist ha sido considerado por Färe *et al.* (1997), mientras que una aplicación empírica que pone de relieve este proceso de intensificación del capital en la industria manufacturera haciendo uso de la ISDB97 puede encontrase en Arcelus y Arocena (1999).

cuadro 5.2.2, la notación ΔTAFP muestra la variación acumulada de la productividad absoluta de los factores calculada de acuerdo a la metodología propuesta por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico dentro del análisis básico de la *ISDB98*. Siguiendo a Meyer zu Schlochtern y Meyer zu Schlochtern (1994), el análisis de la productividad implica su cálculo a través de un índice de Törnqvist, donde los pesos de agregación se derivan de la proporción que sobre el gasto tiene la remuneración de asalariados. En el caso de $\Delta TAFP_{b,i}^{t,t+1}$ tales proporciones han sido situadas por la OCDE en el 75% y 25% para el trabajo y capital respectivamente[55]. En concreto, la fórmula del índice de variación en la productividad total –absoluta– de los factores se corresponde con:

$$\Delta TAFP_{70,i}^{t,t+1} = \frac{GDPD_i^{t+1} / \left[\left(ET_i^{t+1} \right)^{0.75} \cdot \left(KTVD_i^{t+1} \right)^{0.25} \right]}{GDPD_i^t / \left[\left(ET_i^t \right)^{0.75} \cdot \left(KTVD_i^t \right)^{0.25} \right]} \tag{5.2.1}$$

donde en esta ocasión las proporciones existentes el período de referencia base, 1970, se observan para la totalidad del período. El anexo 1.1 muestra los valores calculados según esta formulación para los países de la OCDE considerados en el análisis. Observando la media por países se aprecia cómo ninguna de las naciones consideradas ha experimentado retroceso alguno en su productividad –poniéndose de manifiesto la mayor ponderación de las variaciones experimentadas por el

[55] "*Aunque resulta práctica común el utilizar las proporciones de los factores calculadas para agregar trabajo y capital en una medida compuesta de factores en el proceso productivo..., una inspección preliminar de las fuentes de datos sugiere que el uso automático de los datos disponibles para las distintas variables y sectores puede ser arriesgado. De hecho, en un importante número de casos las diferencias en las proporciones de los factores, ambas entre sectores y países, parecen reflejar más las diferencias entre la cobertura de las distintas categorías en las estadísticas que diferencias reales entre las proporciones de factores*", Meyer zu Schlochtern y Meyer zu Schlochtern (1994:13). Así, estos autores ponen de manifiesto la falta de homogeneidad entre las distintas estadísticas incluso para unas variables tan básicas como las consideradas en esta investigación y que, de acuerdo a lo expuesto en la sección precedente, se encuentran muy alejadas de los estándares aplicados en países donde existe una riqueza de información adicional para poder depurar los distintos agregados de productos y factores. Pese a esta heterogeneidad en los datos disponibles, debida fundamentalmente a deficiencias estadísticas, es importante destacar la existencia de una "*llamativa tendencia central, con la mayoría de los sectores y países mostrando proporciones del trabajo cercanas al 75 por ciento*" –*op. cit.*–. Así, la OCDE se decanta por la aplicación de los pesos mencionados en la determinación de la productividad total –absoluta– de los factores del sector manufacturero que es reflejada en el cuadro 5.2.2 y gráfico 5.2.1.

número de ocupados que del *stock* de capital–[56]. Bélgica, Finlandia e Italia destacan por sus incrementos medios de productividad al superar el 3,0% mientras que la República Federal Alemana y Noruega son los que menor variación presentan al situarse en torno al 1,0%. Sin embargo, este crecimiento generalizado por países no se observa de forma homogénea por subperíodos, siendo de destacar los retrocesos experimentados en la productividad media en 1975 y 1991. En el primer caso, este resultado es consecuencia de la regresión productiva que, comenzando con la crisis del *shock* petrolífero de 1973 tras el embargo impuesto por la OPEP, lleva a un estancamiento en el crecimiento sectorial en 1974 y un declive claro en 1975 –manifestada en una caída del 3,0% en la productividad–. Con relación al inicio de la década de los noventa, es de destacar el debilitamiento sufrido por la economía mundial a partir de 1989, como consecuencia de la guerra del golfo pérsico que, una vez más, encareció de forma significativa los precios energéticos, y las incertidumbres sobre la situación geopolítica derivadas de la reunificación alemana y subsiguiente extinción de la URSS.

El índice (5.2.1) puede referenciarse respecto a un período base, no solo en términos de las proporciones aplicadas, sino también respecto a los valores observados. El propósito de esta formulación es observar la evolución de la variación en la productividad absoluta de forma acumulada –y, adicionalmente, al considerarse la constancia de las proporciones de los factores a lo largo del período, la formulación propuesta satisface la propiedad de transitividad o circularidad–. Eligiendo el inicio del período, la formulación del índice se corresponde con:

$$\Delta \mathrm{TAFP}_{70,i}^{70,t} = \frac{\mathrm{GDPD}_i^t / \left[\left(\mathrm{ET}_i^t \right)^{0,75} \cdot \left(\mathrm{KTVD}_i^t \right)^{0,25} \right]}{\mathrm{GDPD}_i^{70} / \left[\left(\mathrm{ET}_i^{70} \right)^{0,75} \cdot \left(\mathrm{KTVD}_i^{70} \right)^{0,25} \right]} \qquad (5.2.2)$$

[56] La OCDE presenta dentro de la ISDB98 la variación en la productividad total –absoluta– de los factores experimentada en cada uno de los sectores productivos considerados de acuerdo a (5.2.1). Sin embargo, ha sido necesario calcular tal variable con objeto de disponer de la información necesaria para poder establecer el modelo básico de evaluación del rendimiento productivo que exige el cálculo de la variación en la productividad óptima de los factores.

Esta magnitud, presentada en el anexo 1.2, ha experimentado un incremento medio del 64,7% entre 1970 y 1993 con una tasa de variación interanual del 2,0%. Con relación a los países previamente mencionados, Bélgica, Finlandia e Italia duplican su productividad absoluta en el período de veintitrés años considerado, mientras que Noruega apenas si la incrementa en un 13,0%.

El gráfico 5.2.1 muestra la evolución media acumulada de las variables recogidas en el cuadro 5.2.1 pudiéndose apreciar la evolución superior del *stock* de capital respecto al valor añadido –con unas tasas de variación medias interanuales del 3,0% y 2,0% respectivamente–, aquella inferior del empleo que cae en un 1,0%, y, finalmente, cómo la productividad absoluta muestra una evolución creciente que se corresponde con una tasa del 2,15%.

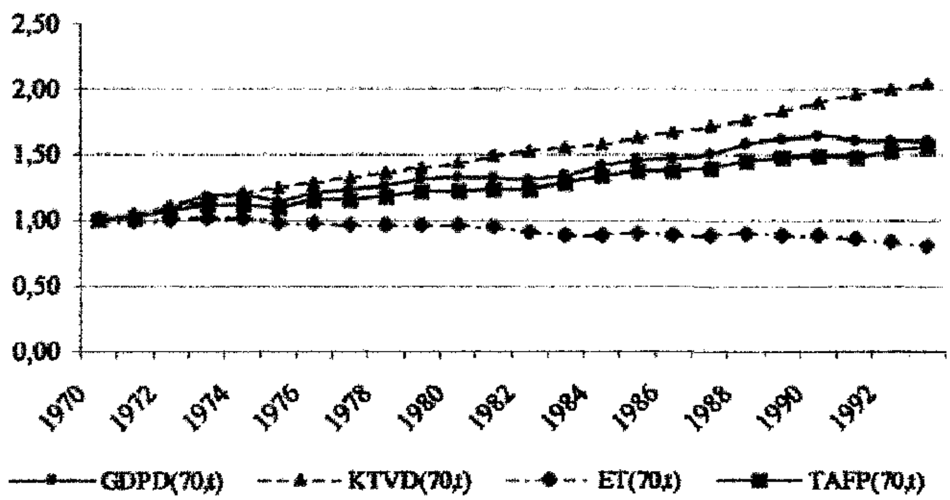


Gráfico 5.2.1. Evolución básica del rendimiento productivo, 1970 y 1993, %.

La evolución de los variables de producción y factores con relación a los casos extremos representados por Japón y el Reino Unido permite ilustrar de forma intuitiva el concepto y evolución de la productividad, de acuerdo a los cálculos realizados siguiendo el índice sugerido por la OCDE. Ambos países presentan ganancias de productividad similares, pese a la variación absolutamente contraria de las variables implicadas. El primero de estos países es aquel que ha sufrido un mayor crecimiento en la industria manufacturera con unos incrementos medios interanuales del valor añadido, capital y empleo del 4,0%, 6,6% y 0,7%; es decir, Japón crece por haber movilizado una elevada proporción de recursos de forma que, al estar justificadas las tasas de variación en la producción obtenida por el incremento en los factores empleados, la evolución de su productividad total –absoluta– resulta reducida, *i.e.* la variación en la producción no explicada por la variación en los factores se encuentra por debajo de la media de la OCDE. Por el contrario, el Reino Unido muestra el menor crecimiento de la industria aunque su productividad absoluta supera incluso a la japonesa al haber reducido su fuerza laboral a la mitad y acumular capital en la menor proporción observada. Así, si bien desde una punto de vista productivo ambos países experimenta iguales variaciones de productividad, las implicaciones socioeconómicas de ambas han de ser muy distintas. Japón ha generado actividad económica movilizando recursos y creando empleo mientras que el crecimiento del Reino Unido se ha sustentando en la destrucción de empleo y una escasa acumulación de capital. Así, la explicación de igual variación en la productividad absoluta es sin embargo dispar y las consecuencias durante el período de tiempo considerado se observan en las colas del desempleo y las reestructuraciones productivas que han tenido lugar en ambos países.

La evaluación básica del rendimiento productivo haciendo uso exclusivo de los datos publicados se concluye a través de la evaluación del rendimiento relativo de las actividades, $\Delta\mathrm{TRFP}_{70,i}^{70,t}$, que pone en relación la variación en la productividad absoluta de cada uno de los países con las variaciones experimentadas por las productividades óptimas de los factores, $\Delta\mathrm{TRFP}_{70,i}^{70,t}=\Delta\mathrm{TAFP}_{70,i}^{70,t}/\Delta\mathrm{TOFP}_{70,i}^{70,t}$. Desde la perspectiva del modelo de evaluación del rendimiento presentado en el primer capítulo, la variación de la productividad óptima se identifica con las variaciones de las productividades máximas absolutas en los distintos períodos temporales. El cálculo de la productividad absoluta de los factores a través de la metodología propuesta por la OCDE dentro de la ISDB98 –ecuaciones (5.2.1–2)– permite determinar los países que presentan las productividades óptimas en cada período. Considerando que los datos presentados en el cuadro 5.2.2 y gráfico 5.2.1 representan la variación acumulada desde 1970 a 1993, resulta suficiente observar la productividad absoluta de los catorce países en ambos periodos con objeto de determinar las productividades óptimas. El valor máximo observado se corresponde con Estados Unidos, país que lidera la productividad absoluta: $\mathrm{TAFP}^{70}_{70,\mathrm{USA}} = \mathrm{TOFP}^{70}_{70,\mathrm{USA}} =$ 12,55 y $\mathrm{TAFP}^{93}_{70,\mathrm{USA}} = \mathrm{TOFP}^{93}_{70,\mathrm{USA}} =$ 17,72. Así, el índice de variación en la productividad óptima es $\Delta\mathrm{TOFP}^{70,93}_{70,\mathrm{USA}} = 1{,}41$, sirviendo este valor para relativizar las productividades absolutas de los distintos países.

Tal como se puede apreciar, ya sea atendiendo a la evolución interanual –anexo 1.3– o acumulada –anexo 1.4– del índice de variación en la productividad relativa, $\Delta\mathrm{TRFP}^{70,t}_{b,i}$, los Estados Unidos no presentan alteración alguna en su productividad por ser esta la nación que lidera la productividad de los factores en la totalidad de periodos. Con relación a este referente, los países de la OCDE considerados incrementan su productividad relativa media en un 16,7%, presentando valores especialmente significativos Bélgica, Finlandia e Italia, cuya productividad absoluta supera la variación en la productividad óptima en más de un 40% mientras que la República Federal Alemana y Noruega experimentan retrocesos respecto a este óptimo en un 15,9% y 6,4% respectivamente. Así, la evolución de la productividad relativa no supone sino un reescalamiento de las variaciones en la productividad absoluta puestas de manifiesto previamente.

La información presentada en el cuadro 5.2.1 representa el potencial analítico de la metodología tradicional de los números índices. Se puede ahora mostrar cómo es posible caracterizar de forma expresa la tecnología de producción a través del cálculo de funciones de distancia con objeto de identificar las fuentes que dan origen a las variaciones presentadas.

5.3 La evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist

La información obtenida con relación a la evolución del rendimiento productivo en la sección precedente no exige el cálculo de las funciones de distancia y la definición de índices de Malmquist. El empleo de índices de Törnqvist de acuerdo a la formulación (5.2.1–2) requiere únicamente las proporciones de productos y factores sobre ingresos y costes con objeto de proceder a su agregación y si bien su cálculo resulta de extrema simplicidad, el coste en el que se incurre al emplearlo es el desconocimiento concreto de la tecnología de producción y, por tanto, de las fuentes que dan origen a las variaciones en la productividad, *i.e.* aunque el índice resulte superlativo para una tecnología translog, ésta resulta desconocida pues no ha sido necesario estimar función alguna para la obtención de las variaciones en la productividad.

De acuerdo a lo manifestado en los capítulos precedentes, es posible proceder a la definición de índices de Malmquist basados en funciones de distancia con objeto de realizar igual análisis de rendimiento productivo, pero sustituyendo las proporciones de productos y factores por unos pesos *virtuales* que permitan caracterizar la tecnología de producción a través del Análisis Envolvente de Datos. El análisis del rendimiento se realiza a través de los índices presentados en la sección 3.4 con objeto de que los resultados obtenidos satisfagan la propiedad transitiva o circular.

Así, el modelo de evaluación del rendimiento productivo en la dimensión y contexto temporal que nos ocupa queda explícito a través del índice de Malmquist de variación en la productividad relativa (3.4.13):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) / \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) = \\
&= \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^{t+1})} / \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t)} \right) / \\
&/ \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \right) = \qquad (5.3.1) \\
&= \left(\mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) \right) \\
&/ \left(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \right) = \\
&= \Delta\mathrm{AFP}_{70,i}^{t,t+1} / \Delta\mathrm{OFP}_{70,i}^{t,t+1} = \Delta\mathrm{RFP}_{70,i}^{t,t+1},
\end{aligned}
$$

cuya formulación equivalente en términos de las variaciones en la eficiencia productiva se corresponde con (3.4.22):

$$
\begin{aligned}
&M_R^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)=\left[\left(\frac{D_O^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)}\right)\Big/\left(\frac{D_O^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_O^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_O^t(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]\bullet\\
&\bullet\left[\left(\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}\right)\Big/\left(\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\right)\right]=\\
&=\left[\frac{D_O^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}\right]=\left[\frac{D_{\bar{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\right]=\\
&=\left(TT_O^{70}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)/TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\right)\bullet\\
&\bullet\left(ST_O^{70}\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)/SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\right)=\\
&=\Delta TE_O^{70,t}\bullet\Delta SE_O^{70,t}=\Delta PE_{70,t}^{70,t}=\Delta RFP_{70,t}^{t,t+1}.
\end{aligned}
\tag{5.3.2}
$$

Adicionalmente, y con objeto de mostrar la evolución acumulada consecuencia de la agregación por subperíodos consecutivos de las variaciones en las productividades (5.3.1–2) es posible definir

$$
\begin{aligned}
&M_R^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^t,y_i^t\right)=M_A^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)/M_P^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)=\\
&=\left[\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right]\Big/\left[\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\right]=\\
&=\left[\frac{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_O^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\bullet\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right]\Big/\left[\frac{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\right]=\\
&=\left(TT_O^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)\bullet ST_O^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)\right)\Big/\left(TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\right)=\\
&=\Delta AFP_{70,t}^{70,t}/\Delta OFP_{70,t}^{70,t}=\Delta RFP_{70,t}^{70,t},
\end{aligned}
\tag{5.3.3}
$$

como índice de variación en la productividad relativa o eficiencia productiva que relativiza la productividad absoluta respecto a la óptima, y

$$
\begin{aligned}
&M_R^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^t,y_i^t\right)=\left[\frac{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_O^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\Big/\frac{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}\right]\bullet\left[\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\Big/\frac{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\right]=\\
&=\left[\frac{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}{D_O^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right]\bullet\left[\frac{D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right]=\left[\frac{D_{\bar{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}{D_{\bar{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right]=\\
&=\left(TT_O^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)/TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\right)\bullet\left(ST_O^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)/SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\right)=\\
&=\Delta TE_{O,t}^{70,t}\bullet\Delta SE_{O,t}^{70,t}=\Delta PE_{70,t}^{70,t}=\Delta RFP_{70,t}^{70,t},
\end{aligned}
\tag{5.3.4}
$$

desde la perspectiva de las variaciones en la eficiencia técnica y de escala.

Con objeto de determinar empíricamente los índices de Malmquist y los componentes que permiten su interpretación, ha sido necesario resolver los programas de optimización DEA para obtener las funciones de distancia que los integran. En el segundo anexo se presentan la totalidad de funciones de distancia contemporáneas, $D_O^t(x_i^t, y_i^t)$ y $D_{\hat{O}}^t(x_i^t, y_i^t)$ –obtenidas a través de la resolución de los programas (4.2.8–20)– e intertemporales, $D_O^{70}(x_i^t, y_i^t)$ y $D_{\hat{O}}^{70}(x_i^t, y_i^t)$ –(4.3.1) y su análoga eliminando la restricción que impone rendimientos variables, $\sum_{i=1}^{I} z_i^t = 1$–, que caracterizan respectivamente la eficiencia técnica y productiva de los países de la OCDE. La resolución de estas funciones de distancia permiten caracterizar la tecnología de producción en los distintos períodos.

La siguiente sección tiene como objetivo establecer una serie de conclusiones con relación a las características de la tecnología y su evolución en el tiempo con objeto de facilitar la explicación ulterior de las variaciones en la productividad, *i.e.* la interpretación tecnológica de los índices (5.3.1–2–3–4).

5.3.1 La caracterización de la tecnología de producción

Con relación a las funciones de distancia que permiten evaluar la productividad relativa o eficiencia productiva, así como los niveles de eficiencia técnica y de escala de los países analizados respecto a la tecnología existente en el período inicial de 1970, su análisis permite extraer una serie de conclusiones relevantes con relación a los subconjuntos óptimos de producción:

1.- La preeminencia de la triada postbélica con liderazgo de los Estados Unidos...

En 1970, año inicial que sirve de base de referencia para analizar le evolución del rendimiento productivo, la República Federal de Alemania, Japón y los Estados Unidos presentan la escalas de operaciones más productivas, *mpss*, presentando valores unitarios de la función de distancia, $D_{\hat{O}}^{70}(x_i^{70}, y_i^{70}) = 1$ –anexo 2.1–. Esta multiplicidad de escalas óptimas –máximas productividades absolutas–

en función de las distintas combinaciones posibles de productos y factores –abordada en la sección 4.6.2– queda ilustrada en el gráfico 5.3.1 a través de la isocuanta unitaria óptima, (2.2.33), introducida por Farrell (1957)[57].

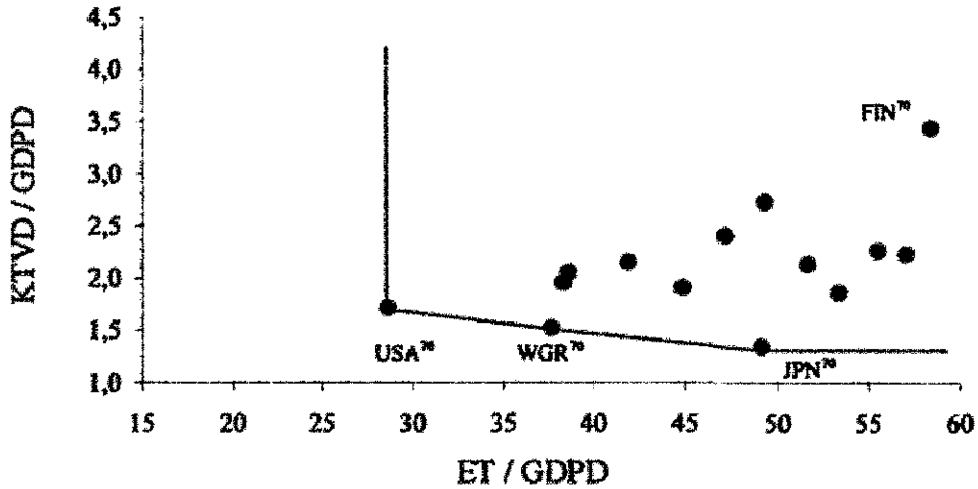


Gráfico 6.3.1. Isocuanta unitaria óptima, 1970.

La isocuanta unitaria muestra en el eje de abscisas el número de ocupados necesarios para generar un millón de $U.S. de valor añadido, mientras el eje de ordenadas presenta los millones de $U.S. de *stock* de capital necesarios para obtener igual cuantía de valor añadido. Los tres países mencionados muestran las menores combinaciones de empleo y capital necesarias por unidad de *output* de forma que definen el subconjunto óptimo de posibilidades de producción. Frente a esta situación óptima, la productividad relativa o eficiencia productiva media se sitúa en el 77% mientras que el valor mínimo le corresponde a Finlandia que alcanza únicamente el 41% de la productividad absoluta de referencia de acuerdo a (4.2.19) –siendo la R.F.A. y los EE.UU. los países que le sirven de referencia–.

[57] Farrell (1957) identifica al subconjunto óptimo de posibilidades de producción como eficiente. Sin embargo, de acuerdo a la exposición realizada en la presente investigación, es relevante distinguir entre los subconjuntos eficientes y óptimos con objeto de caracterizar de forma completa el rendimiento productivo.

Resulta posible profundizar en las características de la tecnología observando la evolución de los países que definen el óptimo de posibilidades de producción conforme se avanza en el período temporal de evaluación y permanece constante la tecnología de referencia base en el año 1970. En términos DEA resulta posible identificar tales países a través de las variables z_i, i=1,...,14, obtenidas en la resolución de los programas introducidos. Las variables de intensidad z_i adoptan valores positivos si el país asociado sirve de referente en la evaluación del rendimiento de los restantes países –véase la sección 4.3–. El cuadro 5.3.1 muestra qué países presentan la escala de operaciones más productiva en la evaluación de la eficiencia productiva y la frecuencia con que se revelan como valores de referencia, *i.e.* definen la frontera de referencia al evaluar el rendimiento del resto de naciones.

	R.F.A (WGR)		Japón (JPN)		EE.UU. (USA)	
Año	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje
1970	12	85,7	3	21,4	10	71,4
1971	12	85,7	2	14,3	12	85,7
1972	12	85,7	2	14,3	12	85,7
1973	11	78,6	1	7,1	13	92,9
1974	11	78,6	1	7,1	13	92,9
1975	7	50,0	0	0,0	14	100,0
1976	7	50,0	0	0,0	14	100,0
1977	5	35,7	0	0,0	14	100,0
1978	6	42,9	0	0,0	14	100,0
1979	4	28,6	0	0,0	14	100,0
1980	4	28,6	0	0,0	14	100,0
1981	1	7,1	0	0,0	14	100,0
1982-93	0	0,0	0	0,0	14	100,0

Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.1 Países eficientes y referencias observadas respecto a la tecnología del período base t = 1970.

Así, entre los tres países que en algún período constituyen la referencia para relativizar el rendimiento productivo, los Estados Unidos presentan la mayor frecuencia –a excepción del año inicial–. De hecho, a partir de 1982 su productividad absoluta se configura como la única relevante para evaluar el rendimiento de los restantes países. Este resultado se corresponde con la intensificación capitalista del proceso productivo a lo largo del período analizado, de forma que siendo los Estados Unidos el país que presenta una mayor *ratio* capital–trabajo en 1970, esta nación va adquiriendo relevancia conforme transcurre el tiempo y los diversos países transforman sus procesos productivos en esta dirección –hasta constituir el único referente desde 1982–. Este proceso se ilustra en el gráfico 5.3.2 donde se superpone la isocuanta unitaria eficiente correspondiente a 1993. Dado que la evaluación de la eficiencia productiva supone geométricamente la proyección radial de las actividades desde el origen hasta la frontera de producción existente en 1970, se puede observar cómo en 1993 tales proyecciones se realizan sobre la extensión definida por los Estados Unidos. Si se mostrase la secuencia de variaciones en la tecnología a lo largo de los veintitrés años objeto de estudio, quedaría de manifiesto el protagonismo creciente de este país como referente –cuadro 5.3.2–.

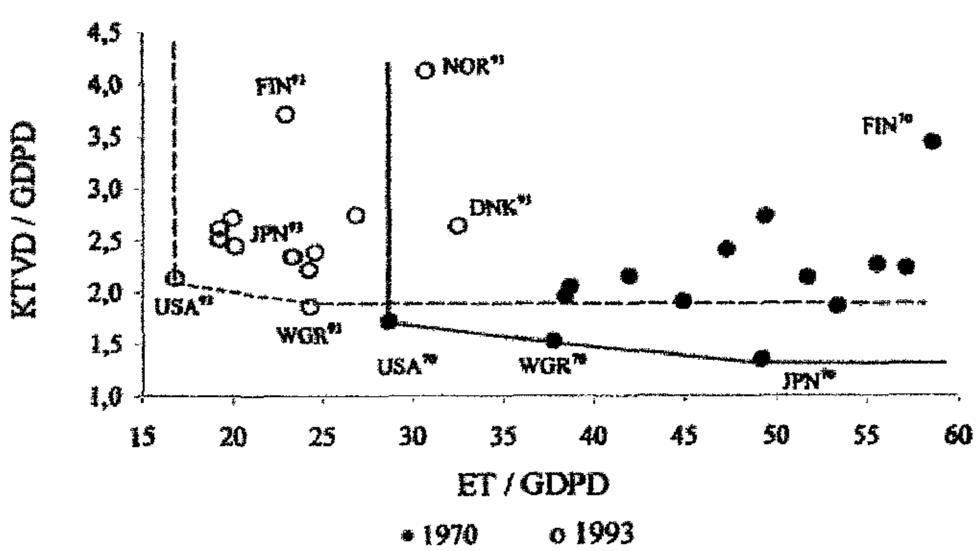


Gráfico 5.3.2 Isocuantas unitarias eficientes, 1970 y 1993.

Observando la eficiencia productiva de los Estados Unidos se aprecia cómo esta nación lidera el progreso tecnológico –variaciones en la productividad óptima de los factores– con valores de la función de distancia superiores a la unidad a excepción del período base, $D_{\hat{0}}^{70}(x_{USA}^{t}, y_{USA}^{t}) > 1$, t=1971,...,1993 –su propias funciones de distancia contemporáneas son siempre iguales a la unidad mostrando cómo este es el único país que alcanza la máxima productividad absoluta en todos los períodos, $D_{\hat{0}}^{t}(x_{USA}^{t}, y_{USA}^{t}) = 1$, –ver anexo 2.3–. Esta circunstancia no se observa en ningún otro país dado que en 1971 y 1972, la R.F.A. y Japón experimentan retrocesos productivos respecto a los óptimos de productividad absoluta en 1970. En términos medios, el conjunto de países de la OCDE no conseguirá superar la productividad absoluta que sirve de base de referencia hasta 1984, año en que la media de las funciones de distancia representativas de la productividad relativa o eficiencia productiva superan la unidad, *i.e.* el conjunto de los países analizados muestra un retraso de catorce años en términos de los niveles de productividad de los Estados Unidos, R.F.A y Japón en 1970.

La composición del subconjunto o frontera óptima de producción presenta una elevada estabilidad a lo largo del período de estudio si se considera la productividad relativa o eficiencia productiva de forma contemporánea –y no respecto a un período base de referencia–. Si se analizan los países que a lo largo del período de estudio configuran los referentes de eficiencia contemporáneos se aprecia cómo la situación inicial no se ve sustancialmente alterada con el paso del tiempo –anexo 2.3–. El cuadro 5.3.2 recoge los países que en algún período conforman el subconjunto óptimo de producción y el número de ocasiones en que sirven de referencia a otras naciones –incluyéndose a sí mismos–. Adicionalmente, se muestra la productividad relativa o eficiencia productiva que, en términos contemporáneos, alcanzan cada uno de los países líderes en los períodos en que no resultan eficientes.

	R.F.A (WGR)			Japón (JPN)			EE.UU. (USA)	
Año	Número	Porcentaje	Eficiencia	Número	Porcentaje	Eficiencia	Número	Porcentaje
1970	12	85,7	1.00	3	21,4	1.00	10	71,4
1971	12	85,7	1.00	1	7,1	1.00	10	71,4
1972	0	0,0	0,97	13	92,9	1.00	13	92,9
1973	0	0,0	0,95	13	92,9	1.00	13	92,9
1974	12	85,7	1.00	4	28,6	1.00	9	64,3
1975	13	92,9	1.00	0	0,0	0,97	8	57,1
1976	13	92,9	1.00	0	0,0	0,94	8	57,1
1977	12	85,7	1.00	0	0,0	0,93	10	71,4
1978	11	78,6	1.00	0	0,0	0,92	10	71,4
1979	11	78,6	1.00	0	0,0	0,93	10	71,4
1980	12	85,7	1.00	0	0,0	0,95	10	71,4
1981	12	85,7	1.00	0	0,0	0,95	12	85,7
1982	13	92,9	1.00	0	0,0	0,97	12	85,7
1983	13	92,9	1.00	0	0,0	0,95	12	85,7
1984	12	85,7	1.00	0	0,0	0,93	11	78,6
1985	12	85,7	1.00	0	0,0	0,93	12	85,7
1986	12	85,7	1.00	0	0,0	0,90	12	85,7
1987	11	78,6	1.00	0	0,0	0,92	12	85,7
1988	10	71,4	1.00	0	0,0	0,92	13	92,9
1989	10	71,4	1.00	0	0,0	0,93	13	92,9
1990	10	71,4	1.00	0	0,0	0,94	13	92,9
1991	11	78,6	1.00	0	0,0	0,94	13	92,9
1992	10	71,4	1.00	0	0,0	0,90	13	92,9
1993	8	57,1	1.00	0	0,0	0,86	13	92,9

Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.2. Países eficientes, referencias observadas y eficiencia productiva en caso de no representar un óptimo, períodos contemporáneos.

De nuevo son la República Federal de Alemania, Japón y los Estados Unidos, los países que en algún momento establecen la máxima productividad absoluta respecto a la cual evaluar la productividad relativa o eficiencia productiva de las restantes. Sin embargo, al igual que cuando se considera el período inicial de referencia –cuadro 5.3.1–, Japón deja de ser referente a partir de 1975 por lo que de este año en adelante son la R.F.A. y los EE.UU. los países cuyos procesos sirven de referencia para proceder a la evaluación del rendimiento. A pesar de ello, y observando las relaciones de dominio, Japón y los EE.UU. relegan a una –reducida– ineficiencia a la R.F.A en 1972 y 1973 mientras que a partir de 1975 esta situación se invierte definiendo la R.F.A. la isocuanta unitaria óptima en detrimento de Japón. De hecho, esta nación experimenta un deterioro continuo en su rendimiento productivo de tal forma que en el año 1993 su eficiencia relativa alcanza su menor nivel situándose en el 0,86 –un nivel de ineficiencia relativa del 13,8%–.

Así, se puede concluir que si bien en la década de los años setenta y ochenta, la triada postbélica tiende a definir el óptimo de referencia para evaluar el rendimiento productivo, en los primeros años de los noventa Japón experimenta pérdidas importantes de eficiencia que la relegan a una posición inferior al de la R.F.A. y los EE.UU. –si bien su ineficiencia media en los veintitrés años de análisis alcanza el 94,5% siendo la más reducida a excepción de la presentada por los dos países líderes–.

2. ... con una elevada convergencia en los niveles de productividad

El análisis de los valores determinantes de la productividad relativa o eficiencia productiva no solo pone de manifiesto la posición preeminente de la R.F.A., Japón y los EE.UU. sino que muestra la convergencia en términos de productividades absolutas en la totalidad de las industrias consideradas –anexos 2.3–4–. Si la eficiencia productiva media se sitúa en el 77,5% al inicio del período, el valor observado en 1993 se eleva hasta alcanzar el 86,4%. Estos resultados, que ponen de relieve una convergencia intemporal entre las productividades absolutas de las industrias líderes –productividades óptimas– y el resto de procesos de aproximadamente el 9,0%, tendrá su reflejo en secciones subsiguientes a través de la evolución positiva que, en promedio, experimenta la productividad relativa de los factores.

3.– La intensificación capitalista de los procesos productivos

Con objeto de mostrar la variación sufrida por la tecnología de producción a través del tiempo se ha superpuesto el conjunto de posibilidades de producción de 1993 sobre aquel de 1970 –véase el gráfico 5.3.2–. En él se ilustra la variación experimentada por el proceso productivo manufacturero en los extremos anuales del período considerado. Analizando las funciones de distancia contemporáneas presentadas en el anexo 2.3 es posible apreciar cómo en 1993 son de nuevo la República Federal de Alemania y los Estados Unidos los países que determinan el óptimo en términos productivos, mientras Japón deja de definir la isocuanta eficiente, $D_{\hat{O}}^{93}(x_{JAP}^{93}, y_{JAP}^{93}) < 1$[58].

La intensificación capitalista del proceso productivo puede apreciarse por el desplazamiento del conjunto de países hacia mayores valores en la relación KTVD/GDPD y menores en ET/GDPD, *i.e.* un nivel algo superior de capital junto a una reducción drástica del número de ocupados por unidad de valor añadido generado –millón de $U.S.–[59]. Así, tras veintitrés años y considerando el caso de EE.UU., este país utiliza aproximadamente una cuantía similar de *stock* de capital por millón de $U.S. de valor añadido, habiendo reducido, sin embargo, los empleos necesarios en un 41,5% –de 28,7 ocupados en 1970 a 16,8 en 1993–. Esta evolución de las cuantías de factores necesarias por unidad de producto son generalizables al conjunto de países y ponen de manifiesto las variaciones positivas de productividad que se está experimentando en las industrias manufactureras –los valores numéricos se corresponden con resultados obtenidos en la resolución de (5.3.1) y que se presentan en las siguientes secciones–. De hecho, solo dos naciones, Dinamarca y Noruega, no experimentan ganancias productivas en suficiente cuantía como para superar los niveles de productividad absoluta de los países que definen el subconjunto eficiente en 1970. Por el contrario, Finlandia, que presentaba la menor productividad relativa de las existentes en 1970 –mayor ineficiencia productiva–, experimenta una elevada mejora en su productividad absoluta hasta superar en un 26% la productividad absoluta de Estados Unidos en 1970.

---

[58] El gráfico 5.3.2 refleja la presencia de tecnologías de producción cuya variación en el tiempo hace que estas se intersecten. Esta situación puede dar origen a índices de productividad contradictorios dependiendo de la tecnología que se considere como base para realizar la evaluación del rendimiento en caso de que no se elija un período base para realizar la evaluación, *i.e.* el índice definido no satisface la propiedad de circularidad. Esta conclusión lleva a Førsund (1993) a abogar por el uso de índices como el seleccionado en este análisis.

[59] Esta representación permite ilustrar los resultados obtenidos por Fecher y Perelman (1992) y Arcelus y Arocena (1999) -entre otros- haciendo uso de igual base de datos.

4.– La existencia de ineficiencia de escala...

Los resultados presentados hasta el momento hacen referencia a la evaluación del rendimiento productivo respecto al subconjunto óptimo de posibilidades de producción; es decir, en términos de la productividad relativa o eficiencia productiva de las naciones. Sin embargo, es posible analizar el nivel de eficiencia técnica y de escala de la industria manufacturera observando las funciones de distancia intertemporales $D_O^{70}(x_i^t, y_i^t)$ –anexo 2.2– y contemporáneas $D_O^t(x_i^t, y_i^t)$ –anexo 2.4–. Si bien en 1970 solo la República Federal de Alemania, Japón y los Estados Unidos presentan unos procesos óptimos alcanzando la máxima productividad, el número de países eficientes en sentido técnico se completa con Dinamarca y Noruega. La posición eficiente de estas dos naciones se mantiene constante a lo largo del periodo, al ser sus funciones de distancia contemporáneas unitarias. Adicionalmente, los Países Bajos y Bélgica se incorporan al subconjunto eficiente de posibilidades de producción (2.2.8) a partir de 1975 y 1981 respectivamente.

En 1970, el nivel de eficiencia técnica se eleva respecto a la eficiencia productiva en un 9,1% –en términos medios– y, observando las funciones de distancia contemporáneas –anexos 2.3 y 2.4–, se aprecia cómo el diferencial entre la eficiencia productiva y técnica se mantiene constante en torno al 10%. Efectivamente, el tercer anexo presenta la evolución de la ineficiencia de escala desde la perspectiva del período base, –anexo 3.1– y en términos contemporáneos –anexo 3.2–. En cualquiera de estos casos se concluye que la eficiencia de escala apenas sí se ha visto alterada en términos medios a lo largo del período de análisis.

Observando los diversos países, y de acuerdo a las conclusiones presentadas en el segundo capítulo, los países que son eficientes en términos productivos –R.F.A., Japón y los EE.UU.– no experimentan ineficiencias de carácter técnico o de escala, mientras que aquellos que son técnicamente eficientes –los anteriores más Dinamarca y Noruega– deben la existencia de ineficiencia productiva a una escala de operaciones subóptima. Sin embargo, existen países que, produciendo en la escala óptima de operaciones presentan una elevada ineficiencia productiva. Es este el caso de Italia y del Reino Unido que deben tal situación a una ineficiencia de carácter técnico dado que su escala de operaciones resulta similar a aquella del país que les sirve de referencia: la República Federal de Alemania.

Estos resultados ponen de manifiesto que las transformaciones productivas experimentadas en las diversas industrias manufactureras –óptimas y subóptimas– no tienden a converger hacia una escala única, sino que el progreso tecnológico experimentado tiende a mantener la distancia existente entre las distintas naciones. Esta ausencia de convergencia contemporánea se debe fundamentalmente a la evolución paralela que experimentan todos los países. Si, de forma genérica, la R.F.A., Japón y los EE.UU. se configuran como escalas de referencia óptimas a lo largo del período, el resto de países podría mejorar su eficiencia productiva respecto a estos óptimos, reduciendo su nivel de factores por unidad *output* generado con objeto de reducir esta ineficiencia, *i.e.* ganancias técnicas. Sin embargo, no son creíbles variaciones productivas que tiendan a incrementar la eficiencia de escala dado que parece poco realista que, por ejemplo, Dinamarca y Noruega –únicos países con ineficiencia de escala–, puedan acercarse a los niveles absolutos de los tres países que configuran la tríada. Así, pese a que el resto de países efectivamente alteran sus procesos acercándose a la escala de operaciones determinada por los países mencionados –acumulando capital y destruyendo empleo–; éstos no permanecen a su vez ociosos sino que así mismo tienden a incrementar la cuantía de capital y reducir la necesidad de empleo por unidad de valor añadido. De esta forma, la razón entre la escala óptima y la del resto de países permanece constante en torno al 10,0% ya mencionado. Ahora bien, respecto a los países que presentan una escala de operaciones subóptima, ¿la existencia de esta persistente ineficiencia de escala se debe a la presencia de rendimientos crecientes o decrecientes a escala?

5.– ...debida a la presencia generalizada de rendimientos crecientes a escala

La observación de las variables de intensidad z_i obtenidas en la resolución de los programas de optimización DEA no sólo permiten identificar los países de referencia, sino también analizar el sentido de los rendimientos a escala con objeto de poner de manifiesto si los países que presentan ineficiencia de escala operan con procesos que exhiben rendimientos crecientes, constantes o decrecientes. El cuarto anexo muestra la existencia y sentido de los rendimientos a escala respecto al período base t = 1970 –4.1– y de forma contemporánea –4.2.–. En la sección 4.3 se ha puesto de manifiesto cómo el valor conjunto de las variables de intensidad permiten determinar la existencia de rendimientos decrecientes, $\Sigma^{I}_{i=1}z_i > 1$ (i), constantes, $\Sigma^{I}_{i=1}z_i = 1$ (ii) ó decrecientes, $\Sigma^{I}_{i=1}z_i < 1$ (iii). De acuerdo a la información presentada en la sección precedente, los valores recogidos en el anexo 4.1 se corresponden con la suma de las variables de intensidad de la R.F.A., Japón y Los Estados Unidos, $\Sigma^{3}_{i=1}z_i = z_{WGR} + z_{JPN} + z_{USA}$, $z_i \geq 0$ –si bien a partir de 1982, se corresponde con el valor de la variable asociada a los EE.UU.–. Atendiendo a estos agregados se puede observar cómo en términos medios predomina la existencia de rendimientos crecientes a escala en todo el período considerado. Este resultado no debe sorprender si se considera que los Estados Unidos –país que constituye el referente de forma preferente– presenta la mayor escala de operaciones. Así, con la única excepción de Japón desde 1970 a 1977, la información que nos facilita la resolución de los programas de optimización establece que los países podrían mejorar su productividad relativa –eficiencia productiva– aumentando su escala de operaciones. El caso de Japón supone una excepción al ser este el único país que presenta como referente a la R.F.A. y, por tanto, debería reducir su escala de operaciones al presentar rendimientos decrecientes, *i.e.* Japón debe transformar su proceso productivo con objeto de acercarse a los niveles de capital y empleo que presenta la R.F.A.; es decir, debe reducir sus niveles absolutos de capital y empleo con objeto de acercarse a la R.F.A. y así incrementar su productividad relativa.

Este resultado se confirma atendiendo al sentido de los rendimientos a escala en períodos contemporáneos. El anexo 4.2. muestra cómo en términos generales, el sentido de los rendimientos a escala es creciente. Al igual que el caso anterior, la suma de las variables de intensidad para cada industria responde a las variables de intensidad de la R.F.A., Japón y Los Estados Unidos, $\Sigma^3_{r=1} z_r = z_{WGR} + z_{JPN} + z_{USA}$, $z_r \geq 0$, si bien y según el cuadro 5.3.2, a partir de 1975 las únicas referencias son las de la R.F.A. y los EE.UU –*i.e.* la escala de operaciones de Japón deja de jugar un papel de referencia–. Se puede concluir que las variaciones en la escala de operaciones que sigue la mayoría de las industrias manufactureras es similar, pues la presencia de rendimientos crecientes a escala es constante a lo largo del período considerado –así como la propia magnitud de la ineficiencia de escala que muestra, de esta forma, una distancia constante entre las escalas observadas y aquellas óptimas–. Únicamente Japón, que de acuerdo al cuadro 5.2.2 sigue una evolución dispar en su escalas de operaciones –incrementando el número de ocupados en los años considerados–, presenta una evolución de la escala que le distancia de aquella óptima que representaba al inicio del período [60].

6.– La estabilidad de las conclusiones alcanzadas en el período de análisis

El análisis realizado de la variación en la eficiencia productiva y técnica se ha centrado en primer lugar en la evolución acontecida respecto a la tecnología base de referencia correspondiente a 1970. El análisis del rendimiento productivo expuesto en las siguientes secciones considera como referencia los óptimos definidos por la R.F.A., Japón y los EE.UU y, por tanto, las escalas de operaciones definidas por estos países. Además, la evolución contemporánea seguida por la industria de la OCDE no muestra alteraciones sustanciales de considerar el rendimiento interanual o contemporáneo, de forma que son estos mismos países los que van determinado las características de la tecnología y los óptimos de referencia a lo largo del tiempo. En las próximas secciones se hace uso extensivo de las conclusiones puestas de manifiesto a la hora de explicar la

[60] Aún no siendo objetivo del presente proyecto de investigación, esta variación en la escala de operaciones debe buscarse en la propia idiosincrasia empresarial imperante en Japón, *i.e.* la evolución contraria en el número de ocupados que presenta su industria manufacturera responde el compromiso o pacto existente entre capital y trabajo para establecer relaciones de larga duración entre ambas partes.

evolución del rendimiento productivo de las industrias manufactureras de la OCDE.

5.3.2. La variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta \mathrm{AFP}_{b,i}^{t,t+1}$

Introducidas una serie de conclusiones genéricas con relación a la evolución de la tecnología de producción, es posible discutir en detalle las variaciones en las productividades absolutas, óptimas, y relativas de los factores que configuran el modelo de evaluación del rendimiento presentado en la ecuaciones (5.3.1–2–3–4). Con relación a la variación en la productividad absoluta recogida en (5.3.1), ésta queda definida a través del índice

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) &= \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t)} = \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t)} = \\ &= \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) = \Delta \mathrm{AFP}_{70,i}^{t,t+1}, \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

que refleja la evolución de las variaciones interanuales de esta magnitud referenciadas al período inicial, t=1970, mientras que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{70}\left(x_i^{70}, x_i^t, y_i^{70}, y_i^t\right) &= \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{70}, y_i^{70})} = \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^{70}, y_i^{70})} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t)}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{70}, y_i^{70})} = \\ &= \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^{70}, x_i^t, y_i^{70}, y_i^t\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^{70}, x_i^t, y_i^{70}, y_i^t\right) = \Delta \mathrm{AFP}_{70,i}^{70,t}, \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

recoge idénticas variaciones de forma acumulada mostrando cómo la formulación anterior satisface la propiedad transitiva o circular. Centrándonos en la primera de las representaciones, el gráfico 5.3.3 presenta las variaciones interanuales del índice de Törnqvist (5.2.1) ya introducido –anexo 1.1– y los valores calculados del índice (5.3.5) –anexo 5.1–.

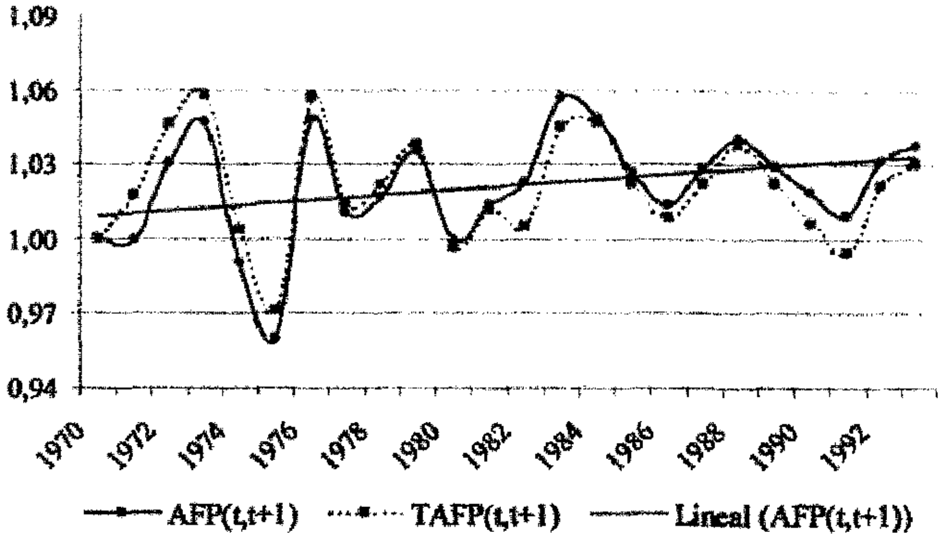


Gráfico 5.3.3. Evolución interanual de la productividad absoluta de los factores respecto al período de referencia base, *t* = 1970, (5.2.1) y (5.3.5).

La evolución paralela de ambos índices es notable alcanzado unos niveles de correlación que, de acuerdo al índice de Pearson, se eleva al 89,2% –significativo para un nivel de confianza α=0,01–. Así, los ciclos económicos experimentados desde 1970 son recogidos de igual forma por ambos índices, pudiéndose destacar las crisis petrolíferas de los años setenta y noventa, si bien en la primera de ellas el índice de Malmquist acusa las regresiones de productividad en mayor medida que el índice de Törnqvist –un 96,0% frente al 97,1% en 1975 respecto a productividad existente en 1974 y considerando como tecnología de referencia base la existente en 1970–. Por el contrario, en el segundo período la evolución es inversa sin que el índice de Malmquist llegue siquiera a señalar regresión alguna –un 0,9% de incremento frente a un retroceso del 0,5% en el índice de Törnqvist en 1991. La evolución de ambos índices pone de manifiesto la compatibilidad de ambas metodologías de evaluación del rendimiento productivo, considerando que éstas únicamente difieren –en ultima instancia– en la magnitud de las ponderaciones de la funciones de agregación de productos y factores, *i.e.*

proporciones sobre ingresos y gastos frente a los pesos *virtuales* derivados del proceso de optimización.

Dado que los índices (5.2.1) y (5.3.5) satisfacen la propiedad transitiva resulta posible ilustrar la evolución interanual de forma acumulada. El gráfico 5.3.4 recoge la media de los valores acumulados de ambos índices como resultado de la multiplicación por subperíodos compatibles de los índices (5.2.1) y (5.3.5) o, con objeto de obtenerlos de forma directa, del cálculo de los índices de Törnqvist (5.2.2) y Malmquist (5.3.6) –anexos 1.2 y 5.2–.

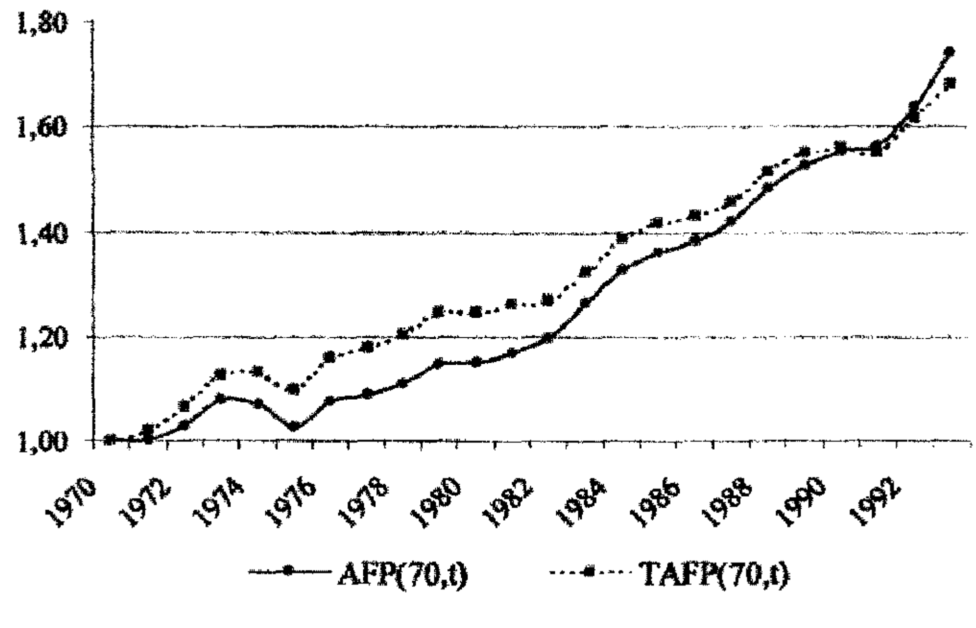
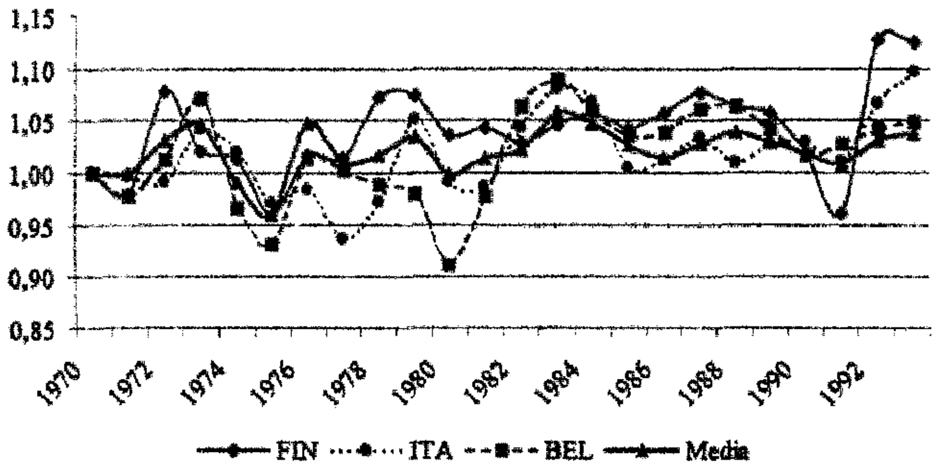


Gráfico 5.3.4. Evolución acumulada de la productividad absoluta de los factores respecto al período de referencia base, t=1970, (6.2) y (6.7).

Los resultados muestran cómo en los veintitrés años considerados la productividad absoluta se eleva en términos medios un 74,1% con relación al índice de Malmquist, lo cual representa una tasa de crecimiento interanual del 2,4%, mientras que considerando el índice de Törnqvist tal variación asciende al 68,3%, 2,3%. La evolución cíclica del rendimiento con la presencia de fases alcistas y regresivas se observa de forma generalizada en los países analizados, si bien el agregado final que permite cuantificar sus ganancias absolutas de productividad difiere de acuerdo a las magnitudes particulares que cada industria presenta.

Analizando la evolución de la $\Delta AFP_{70,t}^{t,t+1}$ por países a través de las variaciones interanuales se aprecia cómo ninguna nación sufre retroceso alguno en su productividad absoluta, siendo Finlandia aquella que presenta un mayor valor con un índice medio igual $\Delta AFP_{70,FIN}^{t,t+1}=1,042$ seguida de Italia, $\Delta AFP_{70,ITA}^{t,t+1}=1,040$, y Bélgica, $\Delta AFP_{70,BEL}^{t,t+1}=1,034$. Por el contrario, los países que menores ganancias de productividad obtienen son la República Federal Alemana, $\Delta AFP_{70,WGR}^{t,t+1}=1,008$, y Dinamarca y Japón, $\Delta AFP_{70,DNK}^{t,t+1}=\Delta AFP_{70,JPN}^{t,t+1}=1,010$. En el caso de la R.F.A., éste resultado pone de manifiesto la situación tan favorable desde la que este país parte en el año inicial de 1970. Tal como se ha puesto de manifiesto, la R.F.A. representa la escala de operaciones más productiva junto a los EE.UU. a lo largo del período considerado –cuadros 5.3.1 y 5.3.2– y, si a diferencia de este segundo país, su productividad absoluta apenas si se ha visto incrementada en estos veintitrés años respecto a las ganancias paralelas de otras naciones, el hecho de que pueda detentar de forma continua un papel predominante en el subconjunto óptimo de posibilidades de producción es sólo posible gracias a unos valores iniciales de rendimiento productivo muy superiores al de resto de las naciones.

Los gráficos 5.3.5 a 5.3.7 presentan la evolución interanual y acumulada de la productividad absoluta de los países que lideran las ganancias de esta magnitud. Es posible apreciar cómo Finlandia, Italia y Bélgica alcanzan de forma generalizada tasas de variación interanuales superiores a la media de los países de la OCDE. Por el contrario, la R.F.A., Dinamarca y Japón presenta tasas de variación interanuales y acumuladas inferiores –gráficos 5.3.6 y 5.3.8–.



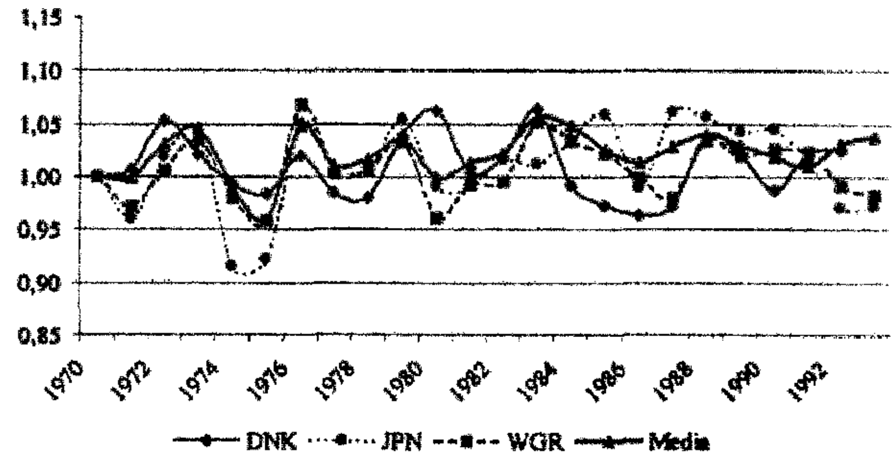
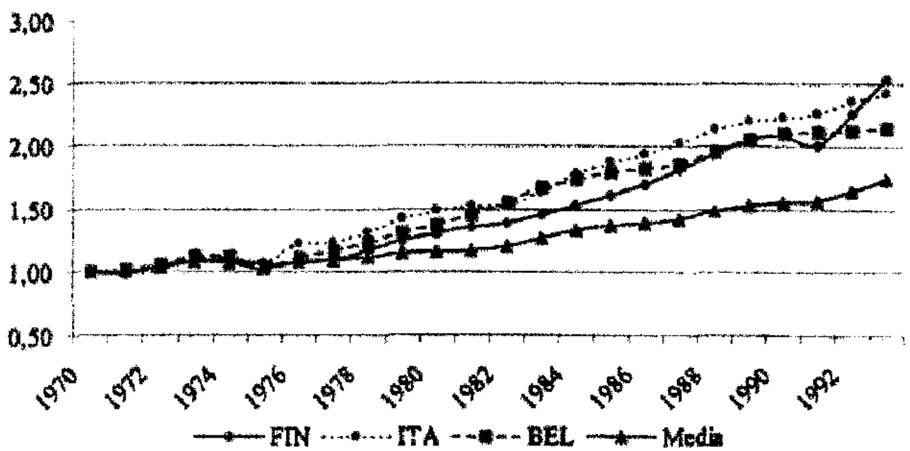


Gráfico 5.3.5 y 5.3.6. Países líderes en la evolución interanual de la variación en la productividad absoluta de los factores respecto al período de referencia base, $t = 1970$, (5.3.5).



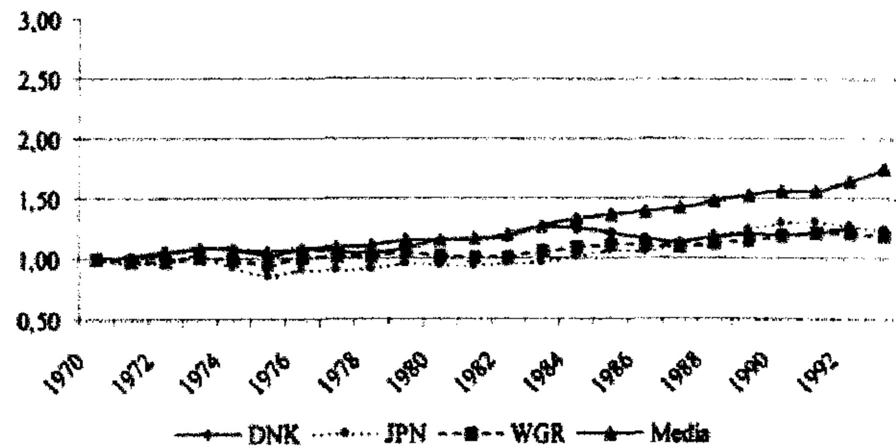


Gráfico 5.3.7. y 5.3.8. Países con menor evolución acumulada de la variación en la productividad absoluta de los factores respecto al período de referencia base, $t = 1970$, (5.3.6).

La ventaja de definir índices de productividad transitivos se manifiesta en la posibilidad de analizar de una forma consistente la evolución del rendimiento por subperíodos; es decir, en modo tal que se pueden realizar agregaciones y desagregaciones compatibles de acuerdo, por ejemplo, a las variaciones cíclicas de la actividad industrial. Esta posibilidad permite incidir en las diferencias relativas entre naciones a lo largo del tiempo. Así, la evolución media presentada en los gráficos 5.3.3 y 5.3.4 se caracteriza por una elevada heterogeneidad entre naciones, tal como se ha podido apreciar de forma particular en los gráficos 5.3.5 a 5.3.8. El cuadro 5.3.3 presenta la evolución de la variación en la productividad absoluta de los factores por décadas, habiéndose ordenado los países en forma descendente de acuerdo al valor obtenido por cada uno de ellos en el período de análisis, 1970-93.

	1970-79		1980-89		1990-93		1970-93	
País	$\Delta AFP_{70,i}^{70,79}$	T.V.I	$\Delta AFP_{70,i}^{80,89}$	T.V.I	$\Delta AFP_{70,i}^{90,93}$	T.V.I	$\Delta AFP_{70,i}^{70,93}$	T.V.I
Finlandia (FIN)	1,25	2,47	1,67	5,89	1,22	6,79	2,54	4,14
Italia (ITA)	1,41	3,92	1,57	5,17	1,09	2,92	2,43	3,93
Bélgica (BEL)	1,31	3,04	1,60	5,40	1,02	0,72	2,15	3,38
Países Bajos (NLD)	1,36	3,45	1,36	3,48	1,06	1,86	1,95	2,95
EE.UU. (USA)	1,22	2,28	1,31	3,02	1,07	2,18	1,71	2,36
Francia (FRA)	1,27	2,65	1,31	3,08	1,03	0,90	1,71	2,35
Canadá (CAN)	1,16	1,68	1,19	1,99	1,10	3,28	1,53	1,86
Suecia (SWE)	0,96	-0,46	1,32	3,16	1,18	5,77	1,50	1,78
Reino Unido (GBR)	0,94	-0,65	1,42	3,93	1,12	3,95	1,50	1,78
Australia (AUS)	1,05	0,51	1,27	2,69	1,10	3,36	1,47	1,68
Noruega (NOR)	1,03	0,28	1,22	2,24	1,02	0,55	1,27	1,15
Dinamarca (DNK)	1,08	0,89	1,09	0,99	1,05	1,56	1,24	0,98
Japón (JPN)	0,96	-0,40	1,34	3,27	0,96	-1,51	1,23	0,91
R.F.A. (WGR)	1,06	0,66	1,12	1,26	1,00	-0,13	1,18	0,73
Media	1,15	1,45	1,34	3,25	1,07	2,30	1,74	2,32
Desv. Típica	0,16	1,53	0,17	1,47	0,07	2,25	0,44	1,09
Máximo	1,41	3,92	1,67	5,89	1,22	6,79	2,54	4,14
Mínimo	0,94	-0,65	1,09	0,99	0,96	-1,51	1,18	0,73

T.V.I. Tasa de variación interanual, %.
Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.3. Evolución de la productividad absoluta de los factores por subperíodos.

Centrando el análisis en la década de los setenta se observa cómo hasta 1979, la media de los índices nacionales presentaba un incremento acumulado del 14,7%, siendo la tasa de crecimiento interanual del 1,45%. Sin embargo, la elevada desviación típica muestra las importantes diferencias por países de forma que en el último año dos naciones: Italia y los Países Bajos, incrementan su productividad en más de un 30%. Frente a esta evolución, Japón, Suecia y el Reino Unido se sitúan a unos niveles de productividad inferiores a los existentes en 1970. La evolución de la productividad absoluta experimenta una elevada aceleración en los años ochenta al presentar un incremento medio del 34,3%, 3,3% de variación interanual, que representa unos crecimientos que, prácticamente, doblan a las variaciones en el rendimiento obtenidas en el subperíodo precedente. En esta década, los países que presentan unas industrias manufactureras más dinámicas resultan ser Finlandia, Bélgica e Italia, con unos incrementos en la productividad absoluta cercanos al 60%, mientras que Dinamarca y Canadá apenas si obtienen variaciones en sus rendimientos superiores a los de la década de los setenta. Finalmente, la evolución acumulada en los primeros años de la década de los noventa se sitúa en un nivel intermedio pese a la crisis de finales de los ochenta. En los cuatro años considerados de esta década el crecimiento en la productividad absoluta alcanza en términos medios un 7,2% con un incremento interanual del 2,3%. Sigue destacando Finlandia con un incremento superior al 20% que hace se sitúe en la posición líder en el conjunto del período considerado mientras Japón acusa una importante recesión que le lleva a unas pérdidas interanuales de productividad del –1,5%.

Es importante destacar que de acuerdo a lo manifestado previamente, la descomposición realizada por subperíodos supone una desagregación consistente de la productividad absoluta, por lo que la multiplicación de las variaciones acumuladas en las tres décadas consideradas permiten obtener la variación total experimentada desde 1970 hasta 1993.

5.3.2.1 La descomposición de la variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP_{b,i}^{t,t+1}$

La ventaja de analizar la evolución del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist estriba en la posibilidad de identificar las fuentes responsables de las variaciones en las productividades absolutas de los factores, De acuerdo a las formulaciones (5.3.5) y (5.3.6) es posible descomponer las variaciones en la productividad absoluta en la transformación tecnológica que persigue la actividad evaluada con objeto de mejorar su productividad relativa –eficiencia productiva– intentando alcanzar la producción potencial que brinda la tecnología con objeto de situarse sobre la frontera de producción –transformación tecnológica– al tiempo que persigue la escala de operaciones más productiva –transformación de escala–.

El gráfico 5.3.9 muestra los promedios de la variación interanual de la productividad absoluta de los factores y sus componentes de transformación técnica y de escala –anexos 5.1–3–5–.

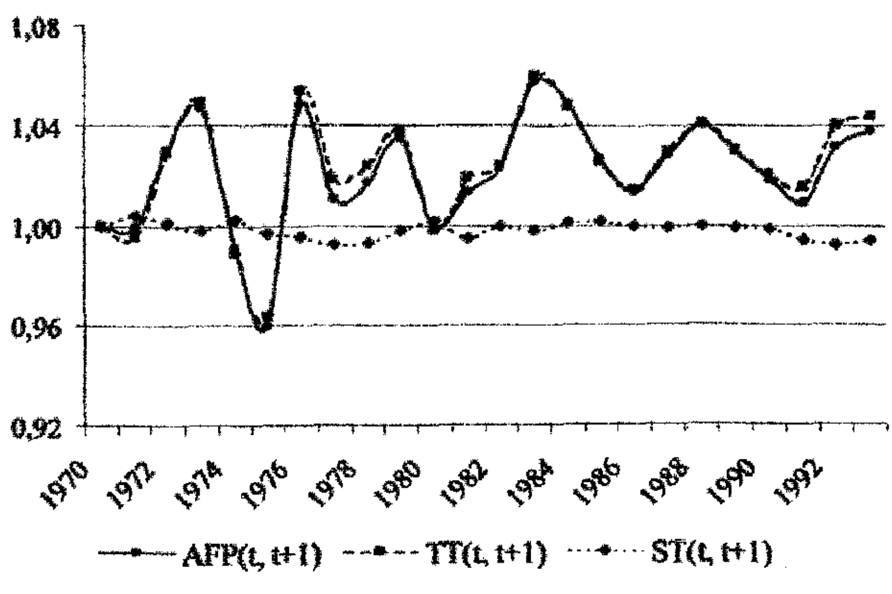


Gráfico 5.3.9. Descomposición de la evolución interanual de la productividad absoluta de los factores en transformación técnica y de escala respecto al período de referencia base, t = 1970, (5.3.5).

Tal como se puede apreciar, los incrementos en la productividad absoluta se corresponden en modo generalizado con transformaciones tecnológicas positivas sin que la transformación de escala juegue, en promedio, un papel relevante. Efectivamente, de acuerdo a la información facilitada en la sección 5.2.1, la presencia de una persistente ineficiencia de escala debida a rendimientos crecientes se mantiene constante a lo largo del período de estudio, como consecuencia de las alteraciones análogas en la escala de operaciones en las industrias manufactureras del conjunto de naciones. El incremento generalizado en el valor añadido generado y el *stock* de capital junto a la disminución del número de ocupados es un fenómeno observado en todas las industrias manufactureras, a excepción de Japón y, en menor medida, Canadá. La consecuencia de esta evolución en su conjunto es que la eficiencia de escala en términos relativos se mantiene constante, siendo la R.F.A. y los EE.UU. los países que definen los subconjuntos óptimos de producción a lo largo del período analizado.

Así, se puede establecer que con relación a la tecnología de referencia base existente en 1970, las industrias manufactureras son capaces de incrementar su eficiencia técnica sin que existan mejoras perceptibles en términos de sus escalas de operaciones. Estos resultados son congruentes en análisis internacionales, dadas las dificultades que se verifican a nivel nacional para alterar la escala absoluta de operaciones de forma lo suficientemente perceptible como para que tenga reflejo en ganancias de rendimiento productivo. La dimensión de las diversas industrias manufactureras se encuentra limitada por razones históricas de desarrollo tecnológico, demanda interna, competitividad, etc., no debiendo sorprender que sean difíciles alteraciones sustanciales en los niveles de producción y empleo que permitan alcanzar los rendimientos a escala crecientes de los países líderes ya mencionados.

El gráfico 5.3.10 permite observar la descomposición acumulada de la productividad absoluta en la transformación técnica y de escala, verificándose las relaciones comentadas y poniéndose de manifiesto que, en términos medios, existe incluso un deterioro en la eficiencia de escala que contrarresta las mejoras técnicas experimentadas por el conjunto de las industrias manufactureras, anexos 5.2–4–6.

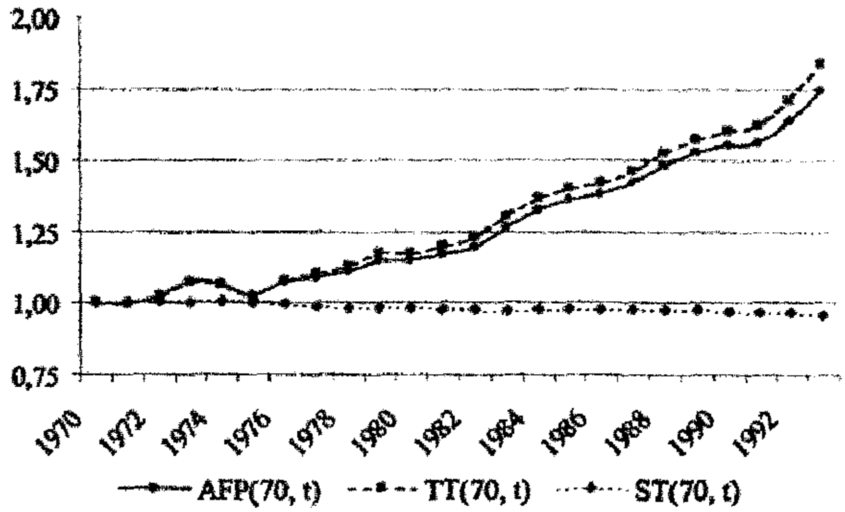


Gráfico 5.3.10. Descomposición de la evolución acumulada de la productividad absoluta de los factores en transformación técnica y de escala respecto al período de referencia base, $t = 1970$, (5.3.6).

La significatividad estadística de la relación existente entre las variaciones en la productividad absoluta y la transformación técnica se refleja en el gráfico 5.3.11 a través de la regresión de la variación acumulada de la primera magnitud en función de la segunda.

frontera de producción definida por ella misma en 1970 del 19,6%, $TT_{O,WGR}^{70,93}=1,20$. Por el contrario, el hecho de que se considere como escala de referencia óptima la existente en el periodo inicial, hace que la variación en la escala de operaciones en 1993 indique una transformación de escala inferior a la unidad, *i.e.* una menor eficiencia de escala respecto a tal óptimo, $ST_{O,WGR}^{70,93}=0,99$.

Respecto al resto de los países, existe una ganancia generalizada en la transformación técnica, mientras aquella de escala muestra un deterioro generalizado respecto a las escalas de operaciones óptimas en 1970 –sin rebasar en su caída el 10%–. La única excepción la constituye Dinamarca que resulta ser la única nación que altera su proceso tecnológico de forma que se acerca a las escalas de operaciones más productivas.

5.3.3 La variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_{b,i}^{t,t+1}$

La variación en la productividad óptima de los factores se corresponde, de acuerdo a la formulación recogida en (5.3.1) y (5.3.3), con las alteraciones acontecidas en las máximas productividades absolutas observadas en los distintos períodos. Desde la perspectiva de la actividad objeto de análisis, ésta viene determinada por

$$
\begin{aligned}
M_P^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) &= \frac{D_{\tilde{O}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\tilde{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\tilde{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_{\tilde{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)} = \\
&= \left(\frac{D_{O}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{O}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{O}^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{D_{\tilde{O}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\tilde{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\tilde{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_{\tilde{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right) = \\
&= TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) \bullet SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) = \Delta OFP_{70,i}^{t,t+1}.
\end{aligned}
\tag{5.3.7}
$$

El hecho de que este índice satisfaga la propiedad transitiva, permite obtener la variación acumulada por subperíodos compatibles a través de su multiplicación sucesiva. Tal resultado es equivalente a la resolución del siguiente índice:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)=\left[\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]=\left[\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}\right]= \qquad (5.3.8)$$
$$=\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)=\Delta\mathrm{OFP}_{70,i}^{70,t}.$$

Los valores calculados de la variación interanual en la productividad óptima (5.3.7) quedan recogidos en el anexo 6.1 y la representación gráfica del promedio de variaciones para el conjunto de industrias consideradas, junto a la variación en la productividad óptima calculada de acuerdo al índice de Törnqvist, $\Delta\mathrm{TOFP}_{70,\mathrm{USA}}^{t,t+1}$, se reflejan en el gráfico 5.3.12. Adicionalmente y dado que son los Estados Unidos el país que define la productividad óptima en el caso del índice de Törnqvist, se ha decido representar la evolución de su índice Malmquist.

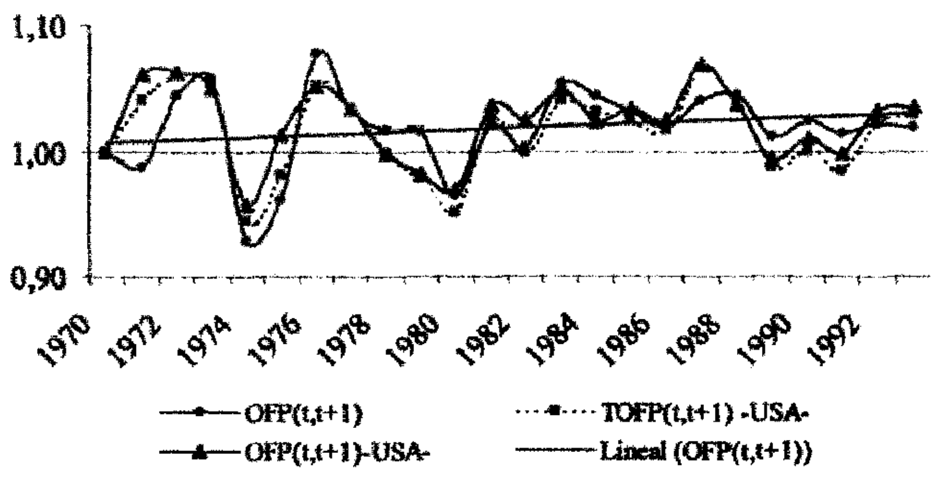


Gráfico 5.3.12. Evolución interanual de la productividad óptima de los factores respecto al período de referencia base, t = 1970, $\Delta\mathrm{TOFP}_{70,\mathrm{USA}}^{t,t+1}$ y (5.3.7).

De nuevo es posible resaltar la compatibilidad entre la evolución del promedio de la productividad óptima de los factores para el conjunto de industrias manufactureras y la derivada del índice de Törnqvist. El coeficiente de correlación de Pearson entre estas dos magnitudes alcanza un valor del 81,0% –significativo para un nivel de confianza α=0,01–. Con relación al índice de Malmquist de variación en la productividad óptima establecido en función de los Estados Unidos, el coeficiente de correlación se eleva hasta el 95,9% –α=0,01–. Este resultado pone manifiesto la relación existente entre la nación que lidera la variación en la productividad óptima desde la perspectiva de los índices de Törnquist y Malmquist. Una vez más, se constata la alternativa válida que supone la metodología de análisis del rendimiento a través de índices de Malmquist respecto al tradicional análisis por medio de números índices –y, más concretamente, la compatibilidad de los índices de productividad óptima establecidos con pesos virtuales derivados de procesos de optimización y las proporciones sobre los ingresos y gastos–. Observando el gráfico 5.3.12 se aprecian las evoluciones cíclicas de las variaciones en la productividad óptima en los períodos analizados en la introducción del capítulo, con el énfasis manifestado en las crisis de los años setenta y noventa.

Al igual que en el caso de la evolución en la productividad absoluta, resulta posible mostrar la variación acumulada de los índices presentados. Esta información puede analizarse de forma individual para las diversas industrias en el anexo 6.2, mientras que en el gráfico 5.3.13 se presenta la evolución promedio para las países considerados y la establecida a través del índice de Törnqvist, $\Delta TOFP^{70,t}_{70,USA}$. Así mismo, se presenta el índice acumulado relativo a los Estados Unidos.

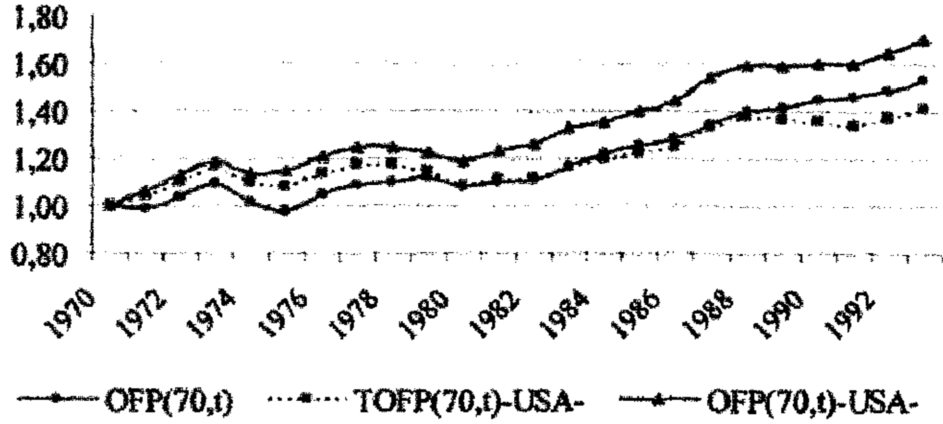


Gráfico 5.3.13. Evolución acumulada de la productividad óptima de los factores respecto al periodo de referencia base, t = 1970, $\Delta TOFP_{70,USA}^{70,t}$ y (5.3.8).

En términos medios, la productividad óptima existente en 1993 es un 53,6% superior a la existente en 1970, lo cual implica un tasa de variación interanual del 1,82%. Esta magnitud, representada en el gráfico 5.3.12 a través de la tendencia lineal, se configura como la variación de referencia respecto a la cual relativizar las ya analizadas variaciones en la productividad absoluta –anexo 5.1–. El objetivo es determinar la evolución en la productividad relativa de las industrias manufactureras. Frente a esta evolución del índice de Malmquist, el índice de Törnqvist presenta una ganancia acumulada del 41,2% con una tasa de variación internual del 1,51%. Con relación a la evolución del índice relativo a los Estados Unidos, se puede apreciar en el anexo 6.2 que ésta representa la mayor de las ganancias en las variaciones de las productividades existentes para las diversas escalas de operaciones óptimas –más productivas–. La existencia de varias escalas óptimas de producciones y las múltiples combinaciones que se pueden generar en su variación es abordada en la sección 4.5, no debiendo sorprender que la distancia entre la productividad óptima para la escala de operaciones de los Estados Unidos pueda distanciarse, en términos absolutos, de las existentes para otras naciones y, por tanto, del promedio.

Así, analizando la variación de la productividad óptima desde la perspectiva de los distintos países, aquellos que deben relativizar sus ganancias de productividad absoluta respecto al máximo determinado por $\Delta OFP_{70,i}^{70,t}=1{,}71$, son Bélgica, Finlandia, Italia, los Países Bajos y los Estados Unidos; es decir, las naciones que lideran las variaciones en la productividad absoluta de acuerdo al cuadro 5.3.3. El resto de industrias reflejan variaciones en las productividades óptimas que se corresponden con incrementos de inferior magnitud. Este resultado se debe a que en los procesos de optimización se obtienen las ponderaciones que hacen que éstas sean comparadas con las escalas óptimas de producción más favorables en cada uno de los períodos que conforman el índice (5.3.8).

La evolución de la productividad óptima de los factores para los diversos países puede descomponerse por subperíodos tal como se muestra en el cuadro 5.3.4. Siguiendo la ordenación realizada en el cuadro 5.3.3, se aprecia la elevada relación entre las variaciones de las productividades absolutas y óptimas. Por países, se aprecia el elevado progreso de la tecnología que ponen de manifiesto las evaluaciones de las industrias que, precisamente, lideran las variaciones en la productividad absoluta de los factores. Efectivamente, la elevada correlación existente entre ambas ordenaciones –con un coeficiente de Spearman de correlación por rangos igual a ρ = 0,916, α=0,01– no hace sino poner de manifiesto cómo son estas industrias las que lideran el cambio en la tecnología. Comenzado en la década de los setenta, se aprecia un crecimiento medio acumulado del 11,9%, siendo la tasa de variación interanual del 1,23%. Por países, todos ellos revelan progresos productivos de la tecnología, siendo el rango de variación del 18,4% al variar entre $\Delta OFP_{70,i}^{70,t}=1{,}22$ para Finlandia, Países Bajos y los Estados Unidos y la variación del $\Delta OFP_{70,i}^{70,t}=1{,}04$ de Japón. La variación de la productividad óptima de los factores se incrementa de forma notable en la década de los ochenta, reflejando el crecimiento generalizado en las variaciones absolutas de los factores. En términos medios, el progreso experimentado por la tecnología alcanza el 28,8% –un 2,84% de variación interanual–, poniendo de manifiesto la elevada aceleración que presenta esta magnitud. Respecto al inicio de la década de los noventa, las variaciones se sitúan una vez más en una situación intermedia respecto a las décadas anteriores. El crecimiento acumulado en la productividad óptima alcanza en promedio el 5,2% mientras que la tasa de variación interanual se corresponde con el 1,69%.

País	1970-79		1980-89		1990-93		1970-93	
	$\Delta OFP_{70,i}^{70,79}$	T.V.I	$\Delta OFP_{70,i}^{80,89}$	T.V.I	$\Delta OFP_{70,i}^{90,93}$	T.V.I	$\Delta OFP_{70,i}^{70,93}$	T.V.I
Finlandia (FIN)	1,22	2,28	1,31	3,02	1,07	2,18	1,71	2,36
Italia (ITA)	1,13	1,39	1,39	3,71	1,09	2,84	1,71	2,36
Bélgica (BEL)	1,14	1,46	1,39	3,73	1,08	2,55	1,71	2,36
Países Bajos (NLD)	1,22	2,28	1,31	3,02	1,07	2,18	1,71	2,36
EE.UU. (USA)	1,22	2,28	1,31	3,02	1,07	2,18	1,71	2,36
Francia (FRA)	1,15	1,57	1,33	3,22	1,08	2,54	1,65	2,20
Canadá (CAN)	1,09	0,92	1,27	2,69	1,04	1,25	1,43	1,57
Suecia (SWE)	1,06	0,60	1,23	2,28	1,12	3,89	1,45	1,63
Reino Unido (GBR)	1,02	0,23	1,30	2,97	1,06	1,81	1,40	1,48
Australia (AUS)	1,06	0,65	1,25	2,53	1,01	0,34	1,34	1,28
Noruega (NOR)	1,18	1,86	1,36	3,45	1,00	-0,08	1,60	2,26
Dinamarca (DNK)	1,06	0,63	1,16	1,66	1,02	0,82	1,26	1,05
Japón (JPN)	1,04	0,45	1,32	3,14	1,04	1,28	1,43	1,56
R.F.A. (WGR)	1,06	0,66	1,12	1,26	1,00	-0,13	1,18	0,73
Media	1,12	1,23	1,29	2,84	1,05	1,69	1,54	1,85
Desv. Típica	0,07	0,74	0,08	0,71	0,04	1,17	0,18	0,55
Máximo	1,22	2,28	1,39	3,73	1,12	3,89	1,71	2,36
Mínimo	1,02	0,23	1,12	1,26	1,00	-0,13	1,18	0,73

T.V.I. Tasa de variación interanual, %.
Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.4. Evolución de la productividad óptima de los factores por subperíodos.

5.3.3.1 La descomposición de la variación en la productividad óptima de los factores, $\Delta OFP_{b,i}^{t,t+1}$

Resulta ahora posible proceder a identificar las fuentes de variación en la productividad óptima de los factores desde la perspectiva de las distintas industrias manufactureras. El objetivo es establecer si, dada la variación en la productividad óptima de los factores, su origen refleja cambio técnico y de escala de acuerdo al modelo propuesto de evaluación del cambio en la tecnología. El gráfico 5.3.14 muestra los promedios de variación interanual de las variaciones en la productividad óptima y sus componentes de cambio técnico y de escala –anexos 6.1–3–5–.

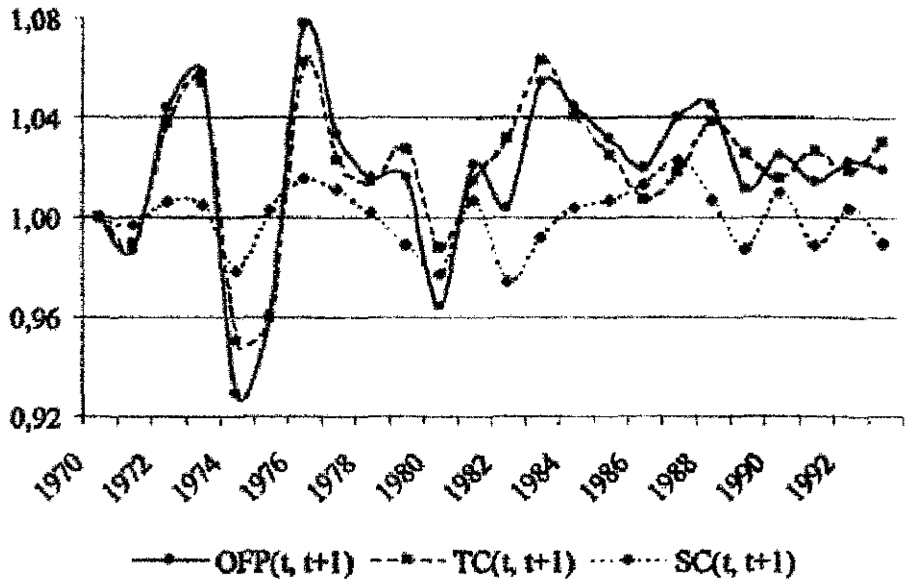


Gráfico 5.3.14. Descomposición de la evolución interanual de la productividad óptima de los factores en cambio técnico y de escala respecto al período de referencia base, t = 1970, (5.3.7).

Los resultados obtenidos muestran que la principal fuentes de variación en la productividad óptima se corresponde con avances de carácter técnico. Así, los desplazamientos de la frontera de producción reflejan desplazamientos del subconjunto eficiente o frontera de posibilidades de producción, sin que existan alteraciones especialmente significativas en los diferenciales existentes en las productividades sobre las fronteras eficientes y las escalas óptimas de operaciones. El cambio de escala refleja alteraciones en las escalas de operaciones de los procesos productivos que se revelan como óptimos y que, en los períodos en que se verifican, alteran la eficiencia de escala de la observación que sirve de referencia para la evaluación. Valores positivos del cambio se escala ponen de manifiesto que las naciones que lideran la variación en la productividad óptima han alterado su escala de operaciones de forma que incrementan el diferencial de productividades en las proyecciones eficientes, *i.e.* sitúan a la escala que le sirve de referencia en una situación claramente inferior en términos de eficiencia de escala. Por el contrario, valores negativos implican una disminución en el diferencial de productividades o, alternativamente, que los procesos óptimos convergen en su escala de operaciones hacia la escala de referencia.

Así, se puede determinar que la fuente fundamental de las variaciones en la productividad óptima de los factores procede del cambio técnico mientras que, considerando la perspectiva de las distintas escalas de operaciones observadas en las industrias manufactureras nacionales a lo largo del período, no se observan alteraciones sustanciales en las escalas óptimas de operaciones que, en un período determinado, pudiesen situar al resto de industrias en una situación más o menos favorable en términos de escala. Una vez más, este resultado no debe sorprender si consideramos la evolución paralela en las variables objeto de estudio. Efectivamente, el conjunto de naciones considerado presenta incrementos en el valor añadido y *stock* de capital con una disminución progresiva en el número de ocupados. Así, no se producen divergencias significativas en las combinaciones entre productos y factores que puedan reflejar alteraciones sustanciales en las diversas escalas de operaciones.

Esta conclusión se refleja en el gráfico 5.3.15 donde se muestra la descomposición de la variación en la productividad óptima acumulada en cambio técnico y de escala, anexos 6.2–4–6. En términos medios se aprecia cómo en los veintitrés años objeto de estudio es el cambio técnico la fuente principal de la variación en la productividad óptima de los factores, mientras que aquel de escala apenas si realiza aportación alguna.

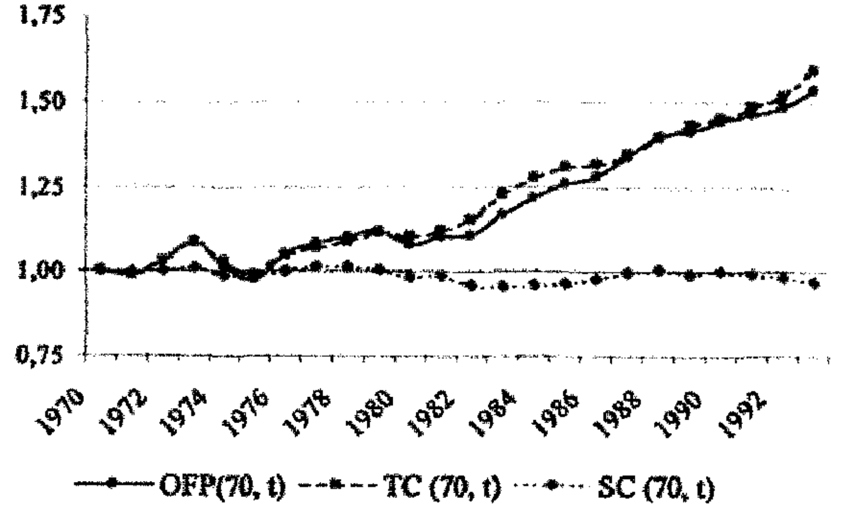


Gráfico 5.3.15. Descomposición de la evolución acumulada de la productividad óptima de los factores en cambio técnico y de escala respecto al período de referencia base, *t* = *1970*, (*5.3.8*).

Una vez más, la significatividad de la relación existente entre las variaciones acumuladas en la productividad óptima y el cambio técnico queda patente en el gráfico 5.3.16, donde se muestra la regresión de la variación acumulada de la primera en función de la segunda.

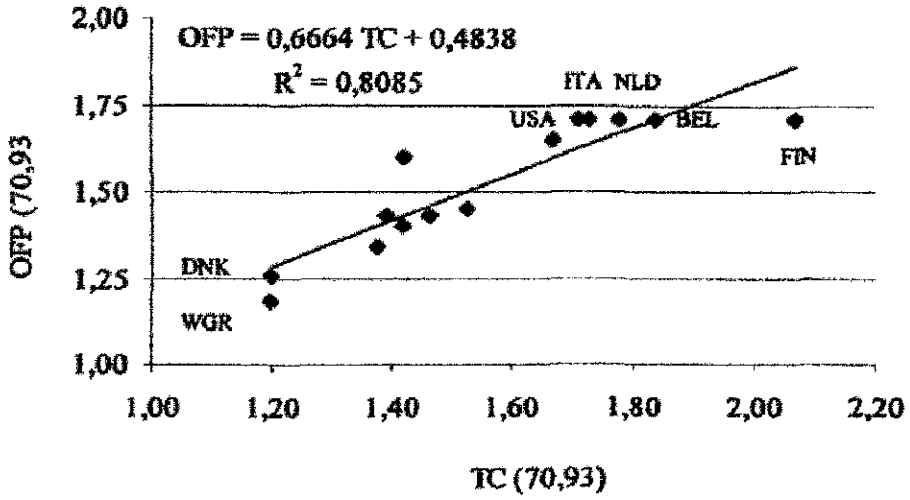


Gráfico 5.3.16. Distribución de la variación óptima de los factores y la componente de cambio técnico respecto al período de referencia base, *t* = 1970, (5.3.8).

De acuerdo a la ordenación de la variación acumulada de la productividad óptima de los factores puesta de manifiesto en el cuadro 5.3.4, Finlandia, Bélgica, Italia, los Países Bajos y los EE.UU. revelan el mayor crecimiento con origen en un elevado progreso técnico. La República Federal Alemana y los Estados Unidos son los países que lideran el progreso en la tecnología, al representar las escalas óptimas en todos los periodos considerados –junto a Japón hasta 1974–, cuadro 5.3.2. Así, las variaciones en la productividad óptima de las distintas naciones refleja, desde su propia escala de operaciones, las variaciones en las fronteras definidas por estos tres países en 1970 y la R.F.A. y los EE.UU. en 1993. Así, en el caso de Finlandia, el anexo 6.4 muestra que, dada la escala de operaciones de este país en 1993, la variación acontecida en el subconjunto eficiente o frontera de producción desde 1970 a este último periodo implica la práctica duplicación de la productividad óptima alcanzada: $TC_{O,FIN}^{70,93}=2{,}07$. Adicionalmente y, desde la perspectiva de este país, la variación en la escala de operaciones en la industria finlandesa desde 1970 a 1993, $TS_{O,FIN}^{70,93}=0{,}83$ –anexo 6.6–, supone una convergencia hacia la escalas óptimas de operaciones que le sirven de referencia en ambos periodos, y que en 1970 se corresponden con las determinadas por la R.F.A. y los EE.UU. –países que le sirven de referencia en ambos periodos–, mientras que en 1993 se corresponde únicamente con los EE.UU.. Esta evolución del subconjunto eficiente o frontera de posibilidades de producción a partir de los países que sirven de referencia a Finlandia es idéntica para el resto de los países que revelan $\Delta OFP_{O,i}^{70,93}=1{,}71$ –*i.e.* Bélgica, Italia, los Países Bajos y los propios EE.UU. Por el contrario, el resto de los países revelan diversas escalas óptimas donde surgen como países de referencia otras combinaciones de los países eficientes desde una perspectiva productiva: R.F.A., Japón y los EE.UU., dando origen a valores alternativos que se sitúan entre las variaciones máximas y mínimas de los países que definen los subconjunto óptimos de referencia en ambos periodos $\Delta OFP_{O,USA}^{70,93}=1{,}71$ y $\Delta OFP_{O,WGR}^{70,93}=1{,}18$.

De forma equivalente, el progreso en la tecnología que lideran estos países se traduce en que la variación en la productividad óptima de los factores implica el incremento de las productividades en los subconjuntos eficientes –dado que el cambio técnico es superior a la unidad– y la posible convergencia hacia –o divergencias desde– la escala de operaciones óptima en función de que los valores del cambio de escala sean inferiores o superiores a la unidad. Desde la perspectiva de Finlandia, la nación que lidera la variación en la productividad óptima son los EE.UU. dado que es el único país que le sirve de referencia en el último período por lo que se puede concluir, de forma equivalente a lo expuesto en el párrafo anterior, que los progresos en la tecnología propiciados por los EE.UU suponen incrementos en las productividades de las fronteras de referencia para Finlandia –cambio técnico– y la convergencia hacia la escala de operaciones de este país –cambio de escala–.

5.3.4 La variación en la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_{b,i}^{t,t+1}$

Una vez analizadas las evoluciones de las productividades absolutas y óptimas en las secciones 5.3.2 y 5.3.3, el siguiente pase dentro del modelo de evaluación es relativizar ambas evoluciones con objeto de establecer la variación del rendimiento relativo de las industrias manufactureras. La variación en la productividad relativa de los factores puede interpretarse de forma equivalente como la razón entre la variación en la productividad absoluta y óptima de los factores (5.3.1–3), o como la variación en la eficiencia productiva (5.3.2–4). En este sentido, la primera de las interpretaciones permite analizar las variaciones en los diferenciales de las productividades propias para las distintas industrias respecto a aquellas seguidas por la escalas de operaciones más productivas, mientras que la segunda permite identificar las fuentes que originan las variaciones en tales posiciones relativas.

Comenzado por la evolución del índice interanual de variación en la productividad relativa recogida en el anexo 7.1, el gráfico 5.3.17 muestra los promedios de variación para las industrias consideradas así como la obtenida de acuerdo al índice de Törnquist, $\Delta TRFP_{70,i}^{t,t+1} = \Delta TAFP_{70,i}^{t,t+1} / \Delta TOFP_{70,USA}^{t,t+1}$ –anexo 1.3–.

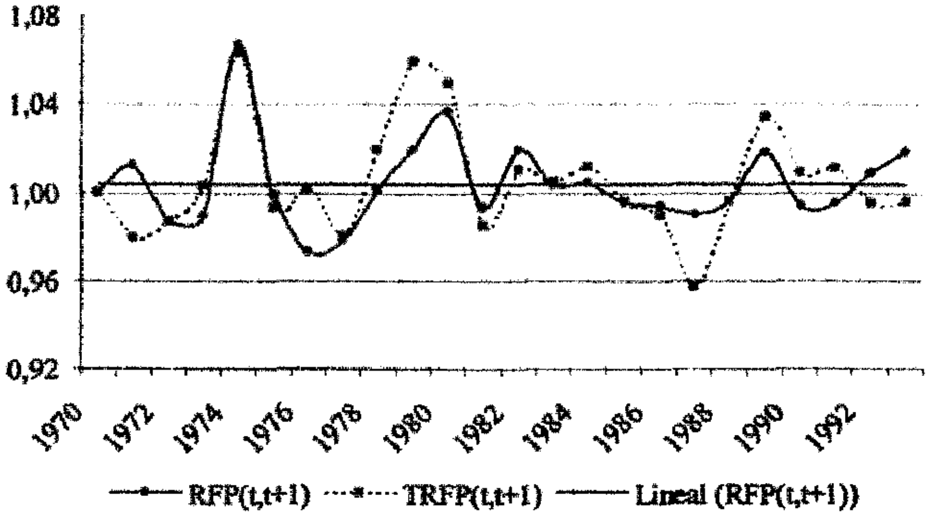


Gráfico 5.3.17. Evolución interanual de la productividad relativa de los factores respecto al período de referencia base t = 1970, $\Delta TRFP_{70,t}^{t,t+1}$ y (5.3.1–3).

Al igual que en los pares de índices relativos a la productividad absoluta y óptima, los resultados obtenidos para ambas formulaciones presentan un elevado nivel de compatibilidad que se plasma en un índice de correlación de Pearson del 99,6% –significativo para un nivel α=0,01–. Atendiendo a la representación acumulada de estos índices en el gráfico 5.3.18, que se corresponde con $\Delta TRFP_{70,t}^{70,t} = \Delta TAFP_{70,t}^{70,t} / \Delta TOFP_{70,USA}^{70,t}$ y (5.3.2–4) –anexos 1.4 y 7.2 respectivamente–, se aprecia unas ganancias medias en la productividad relativa del 12,2% de acuerdo a una tasa media de variación interanual del 0,5% –según los índices de Törnqvist calculados, estos valores se corresponden con el 16,7% y el 0,6% respectivamente–. Este resultado pone de manifiesto la convergencia –*catching up*– en términos de productividades del conjunto de industrias de la OCDE respecto a la triada postbélica que representan la R.F.A., Japón y los EE.UU., siendo esta evolución consecuencia directa de los menores niveles de ineficiencia contemporánea que en términos productivos –técnicos– se han puesto de manifiesto en la sección 5.3.1 –nótese que tales índices son interpretables como índices de cuantía de acuerdo a lo expuesto en el segundo capítulo–

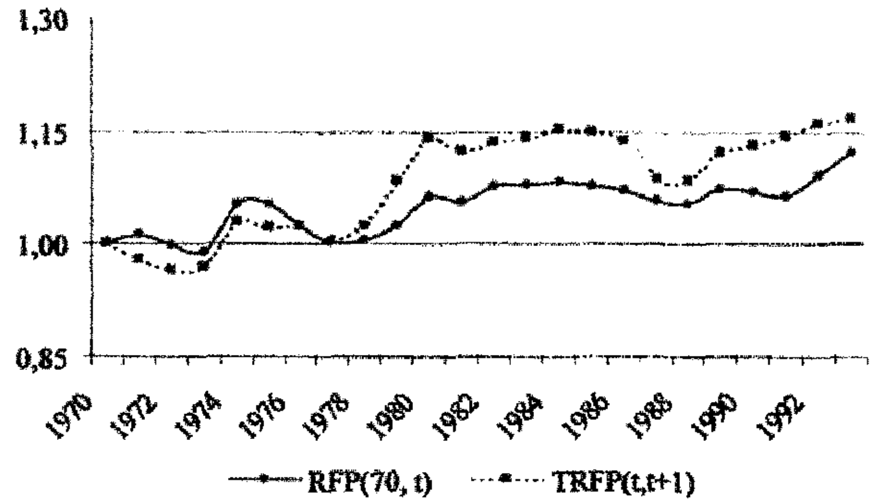


Gráfico 5.3.18. Evolución acumulada de la productividad relativa de los factores respecto al período de referencia base t = 1970, $\Delta TRFP^{70,t}_{70,t}$ y (5.3.2–4).

La evolución de la productividad relativa presenta una elevada heterogeneidad entre países. Los gráficos 5.3.19 y 5.3.20 presentan la evolución interanual y acumulada de Finlandia, Italia y Bélgica –cuadro 5.3.5–. Frente a las variaciones experimentadas por estos países líderes, destaca la evolución negativa de Noruega, Japón y Dinamarca, cuyos índices de variación acumulada resultan inferiores a la unidad, presentando tasas negativas de variación interanual –gráficos 5.3.21–22 y cuadro 5.3.6 –.

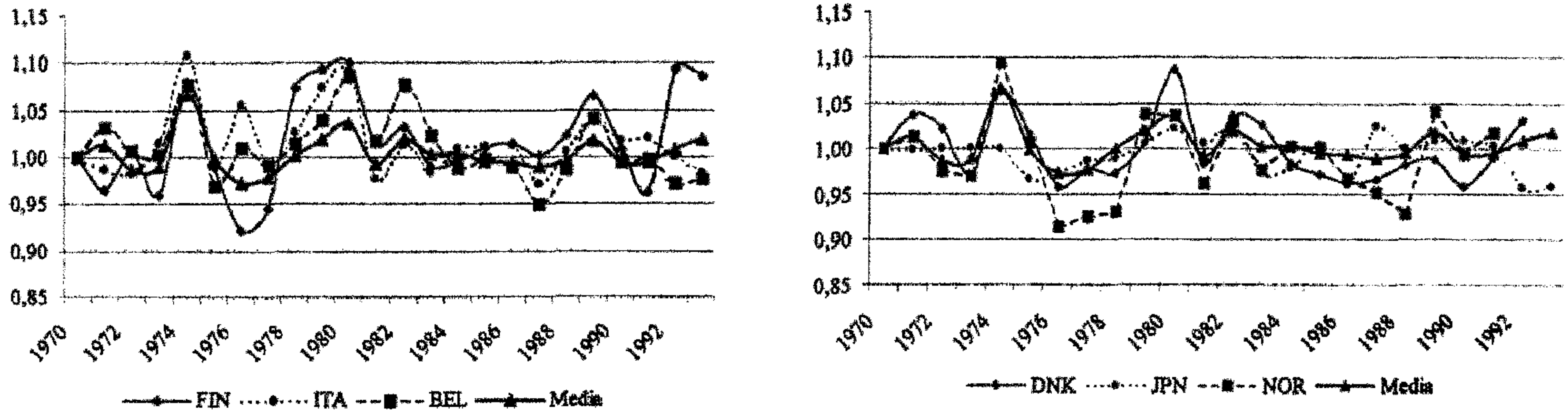


Gráfico 5.3.19 y 5.3.20. Países líderes en la evolución interanual de la productividad relativa de los factores respecto al período de referencia base, $t = 1970$, (5.3.1–2).

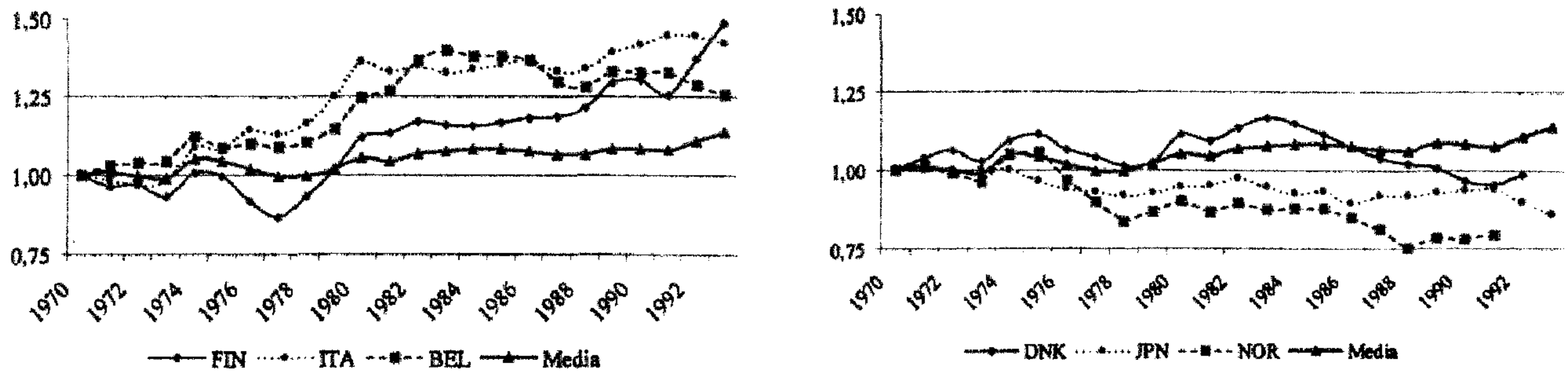


Gráfico 5.3.21. y 5.3.22. Países con menor evolución acumulada de productividad relativa de los factores respecto al período de referencia base, $t = 1970$, (5.3.3–4).

Considerando la evolución individual de las industrias, destaca la progresión experimentada por Finlandia, que alcanza la mayor productividad relativa en tan solo quince años dado que, hasta 1978, sus variaciones de eficiencia productiva se situaban por debajo de las experimentadas por los óptimos –presentando valores acumulados en su productividad relativa inferiores a la unidad a excepción de 1974–. Esta evolución de la eficiencia productiva experimenta una aceleración notable en los dos últimos años, al incrementarse su variación en la productividad relativa un 18,6% –"saltando" su índice de $\Delta RFP^{70,91}_{70,FIN}=1,25$ a $\Delta RFP^{70,93}_{70,FIN}=1,49$–. Por el contrario, la evolución seguida por Italia y Bélgica es más pausada, sin que sus variaciones interanuales se desvíen excesivamente de la tasa calculada del 1,53% y 1,0% respectivamente. Respecto a los países que presentan peor evolución relativa, destacan Noruega y Japón con unos índices acumulados iguales a $\Delta RFP^{70,91}_{70,NOR}=0,80$ y $\Delta RFP^{70,93}_{70,JAP}=0,86$, que implican unos retrocesos interanuales de –1,1% y –0,6% respectivamente. El inicio de la pérdida de eficiencia productiva de estos países comienza en 1976 y 1975 respectivamente, y contrasta con la evolución de Dinamarca que, con una leve caída en su productividad relativa que le sitúa en $\Delta RFP^{70,92}_{70,DNK}=0,99$, presenta el inicio de sus pérdidas en 1990.

Una vez presentadas las evoluciones máximas y mínimas por países, se aborda la evolución por subperíodos de la productividad relativa. Siguiendo la desagregación por décadas planteada anteriormente en los cuadros 5.3.3 y 5.3.4, es posible apreciar cómo en los años setenta apenas si se producen ganancias de productividad relativa, al alcanzarse una mejora relativa acumulada del 2,4% con una tasa de variación interanual del 0,2%. En esta primera etapa destaca la evolución de Italia y Bélgica, así como la pobre situación alcanzada por Finlandia que, situándose en el valor medio, $\Delta RFP^{70,79}_{70,FIN}=1,02$, sin embargo está realizando reestructuraciones productivas que le permitirán alcanzar al final del período las mayores ganancias de productividad relativa. De hecho, en la década de los ochenta esta industria manufacturera experimenta un espectacular avance en su eficiencia productiva del 28,0%, que prácticamente duplica a la segunda existente y que se corresponde con un avance del 15,4% de Bélgica. Respecto a las industrias que presentan pérdidas de eficiencia productiva, Noruega ya destaca en los años setenta con una pérdida del 13,2%, $\Delta RFP^{70,79}_{70,NOR}=0,87$, cuyo ritmo negativo de variación interanual se sitúa en el −1,6% y tiende a mantenerse en la década de las ochenta, −1,2%, $\Delta RFP^{70,79}_{70,NOR}=0,90$. Esta evolución negativa de Noruega, y en general de los países escandinavos a excepción de Finlandia, tiende a variar en la década de los noventa cuando experimentan unas ganancias generalizadas en la productividad relativa que, sin embargo, no consiguen alterar el carácter negativo en todo el período considerado. En estos últimos cuatro años destaca la evolución negativa de Japón, Bélgica y Francia, alcanzando el primero de estos países la mayor tasa de variación negativa por subperíodos al situarse en el −2,8%.

País	1970-79		1980-89		1990-93		1970-93	
	$\Delta RFP^{70,79}_{70,i}$	T.V.I	$\Delta RFP^{80,89}_{70,i}$	T.V.I	$\Delta RFP^{90,93}_{70,i}$	T.V.I	$\Delta RFP^{70,93}_{70,i}$	T.V.I
Finlandia (FIN)	1,02	0,19	1,28	2,78	1,14	4,51	1,49	1,74
Italia (ITA)	1,25	2,50	1,13	1,41	1,00	0,07	1,42	1,53
Bélgica (BEL)	1,15	1,55	1,15	1,61	0,95	-1,78	1,26	1,00
Países Bajos (NLD)	1,11	1,14	1,04	0,44	0,99	-0,32	1,14	0,58
EE.UU. (USA)	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
Francia (FRA)	1,10	1,07	0,99	-0,13	0,95	-1,60	1,04	0,15
Canadá (CAN)	1,07	0,75	0,94	-0,68	1,06	2,01	1,07	0,29
Suecia (SWE)	0,91	-1,06	1,08	0,85	1,06	1,80	1,04	0,15
Reino Unido (GBR)	0,92	-0,88	1,09	0,94	1,06	2,10	1,07	0,29
Australia (AUS)	0,99	-0,14	1,01	0,16	1,09	3,01	1,09	0,39
Noruega (NOR)	0,87	-1,56	0,90	-1,17	1,02	0,62	0,80	-1,08
Dinamarca (DNK)	1,02	0,27	0,94	-0,66	1,02	0,73	0,99	-0,06
Japón (JPN)	0,93	-0,85	1,01	0,13	0,92	-2,75	0,86	-0,64
R.F.A. (WGR)	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
Media	1,02	0,21	1,04	0,41	1,02	0,60	1,12	0,46
Desv. Típica	0,10	1,11	0,10	1,04	0,06	1,97	0,18	0,67
Máximo	1,25	2,50	1,28	2,78	1,14	4,51	1,49	1,74
Mínimo	0,87	-1,56	0,90	-1,17	0,92	-2,75	0,86	-0,64

T.V.I. Tasa de variación interanual, %.
Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.5. Evolución de la productividad relativa de los factores por subperíodos.

5.3.4.1 La descomposición de la variación en la productividad relativa de los factores, $\Delta RFP_{b,i}^{t,t+1}$

La evolución presentada hasta el momento supone una caracterización global de la productividad relativa de los factores –o eficiencia productiva desde la perspectiva del modelo de evaluación propuesto–, experimentada por la industria manufacturera en su conjunto. Sin embargo, de acuerdo al modelo de evaluación del rendimiento presentado en (5.3.1–2–3–4), es posible interpretar estas variaciones en términos de la evolución seguida por la productividad absoluta de cada una de la industrias consideradas, frente a aquella que se revela como óptima o, de forma equivalente, a través de las variaciones en la eficiencia técnica y de escala que experimentan las industrias.

Iniciando la discusión de la variación en la productividad relativa como resultado de comparar las variaciones entre las productividades absolutas y óptimas, el cuadro 5.3.6 muestra los valores acumulados de las magnitudes implicadas. De acuerdo a la ordenación descendente ya considerada en los cuadros 5.3.3–4–5, Finlandia presenta la industria manufacturera con mayores ganancias relativas al superar en un 48,7% la evolución óptima que le sirve de referencia y que, de acuerdo a lo presentado en la anterior sección, corresponde a los EE.UU. Le siguen las industrias manufactureras de Italia, Bélgica y los Países Bajos que, identificando a igual nación como referente, consiguen superar las variaciones en la productividad óptima obteniendo importantes mejoras. Por el contrario, Noruega, Dinamarca y Japón presentan variaciones alternativas en la productividad óptima de los factores, consecuencia de la presencia de diversas escalas de operaciones que se revelan como las más productivas. Sin embargo, ninguna de estas industrias es capaz de superar tales variaciones, siendo las únicas que experimentan pérdidas de productividad relativa.

País	$\Delta AFP_{70,i}^{70,93}$	T.V.I	$\Delta OFP_{70,i}^{70,93}$	T.V.I	$\Delta RFP_{70,i}^{70,93}$	T.V.I
Finlandia (FIN)	2,54	4,14	1,71	2,36	1,49	1,74
Italia (ITA)	2,43	3,93	1,71	2,36	1,42	1,53
Bélgica (BEL)	2,15	3,38	1,71	2,36	1,26	1,00
Países Bajos (NLD)	1,95	2,95	1,71	2,36	1,14	0,58
EE.UU. (USA)	1,71	2,36	1,71	2,36	1,00	0,00
Francia (FRA)	1,71	2,35	1,65	2,20	1,04	0,15
Canadá (CAN)	1,53	1,86	1,43	1,57	1,07	0,29
Suecia (SWE)	1,50	1,78	1,45	1,63	1,04	0,15
Reino Unido (GBR)	1,50	1,78	1,40	1,48	1,07	0,29
Australia (AUS)	1,47	1,68	1,34	1,28	1,09	0,39
Noruega (NOR)	1,27	1,15	1,60	2,26	0,80	-1,08
Dinamarca (DNK)	1,24	0,98	1,26	1,05	0,99	-0,06
Japón (JPN)	1,23	0,91	1,43	1,56	0,86	-0,64
R.F.A. (WGR)	1,18	0,73	1,18	0,73	1,00	0,00
Media	1,74	2,32	1,54	1,85	1,12	0,46
Desv. Típica	0,44	1,09	0,18	0,55	0,18	0,67
Máximo	2,54	4,14	1,71	2,36	1,49	1,74
Mínimo	1,18	0,73	1,18	0,73	0,86	-0,64

T.V.I. Tasa de variación interanual, %
Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.6. Evolución acumulada de la productividad absoluta, óptima y relativa.

Es ahora posible interpretar los valores unitarios de los países cuyas variaciones en la productividad absoluta constituyen, así mismo, aquellas óptimos y que, por tanto, no experimentan variación alguna en su productividad relativa o eficiencia productiva. De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, la R.F.A. y los EE.UU. determinan en todos los años observados las escalas de operaciones más productivas, de forma que sus variaciones en la productividad absoluta se revelan como óptimas. Esta circunstancia es puesta de manifiesto por el valor unitario de la variación en la productividad relativa en las tres décadas consideradas, $\Delta RFP_{70,WGR}^{70,93} = \Delta RFP_{70,USA}^{70,93} = 1,00$.

La discusión individual realizada hasta el momento en términos de productividades absolutas y óptimas no permite determinar si ha existido convergencia alguna en las actividades industriales de la OCDE. Observando el gráfico 5.3.18 se aprecia la presencia de un proceso de convergencia continuo a finales de los años setenta – que se plasma a través de la línea de tendencia–, mientras que en los primeros años de la década no se produce convergencia alguna, dado que en 1978 el valor del índice acumulado de productividad relativa se sitúa en la unidad, indicando que el diferencial medio entre las productividades absolutas y óptimas es idéntico al existente en 1970. Este resultado puede ser ilustrado a la luz del gráfico 5.3.23 que muestra las variaciones interanuales de tales productividades. Atendiendo a los ciclos representados de la productividad relativa, las mayores ganancias en términos medios se producen en los años que caracterizan las crisis energéticas puestas de manifiesto anteriormente. Centrándonos en la década de los setenta se aprecia que las reducciones en las productividades óptimas son superiores a las caídas en las productividades absolutas o, alternativamente, que existe un proceso de convergencia en tales subperíodos.

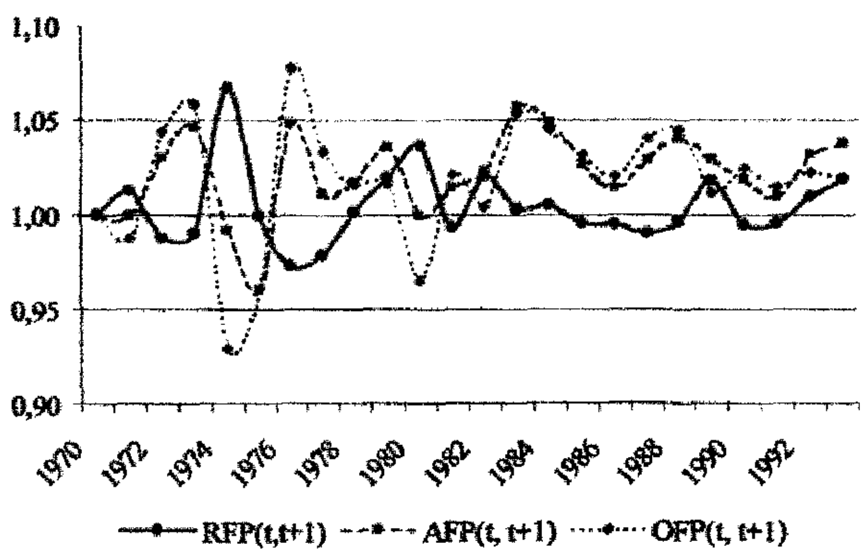


Gráfico 5.3.23. Evolución interanual comparada de la productividad relativa, absoluta y óptima de los factores respecto al período de referencia base $t = 1970$.

Así, considerando el año 1974, en el que se produce la mayor convergencia con un incremento medio en la productividad relativa del 6,7% respecto al período precedente, se aprecia que la reducción en el promedio de las productividad óptima alcanza el -7,6% mientras la reducción en la productividad absoluta lo hace tan solo en un -0,9%. Este resultado pone de manifiesto que la crisis alcanza con mayor profundidad a los países que definen la variación en la productividad óptima: la R.F.A., Japón y los EE.UU. para posteriormente en 1975 presentar similares caídas de productividad por lo que la productividad relativa apenas sí sufre variación alguna, –0,1%, al caer la variación en la productividad óptima al –4,1% y aquella absoluta al –4,2%. Sin embargo, en plena recuperación, el año 1976 refleja un mayor incremento en la variación óptima, 7,8%, frente a la absoluta, 4,8%, por lo que la productividad relativa se reduce en un 2,7%. Esta evolución cíclica justifica la ausencia de ganancias de productividad relativa hasta finales de la década de los setenta.

Similares comentarios pueden realizarse con objeto de ilustrar las continuas ganancias en la productividad relativa que existen desde finales de los setenta hasta el final de período de análisis. El gráfico 5.3.24 muestra la evolución media acumulada de la productividad relativa, óptima y absoluta, pudiéndose ahora justificar el incremento acumulado del 12,2% en la productividad relativa a partir de los incrementos en el promedio de la productividad absoluta –que alcanza el 74,1% frente al 54,6% de la productividad óptima–.

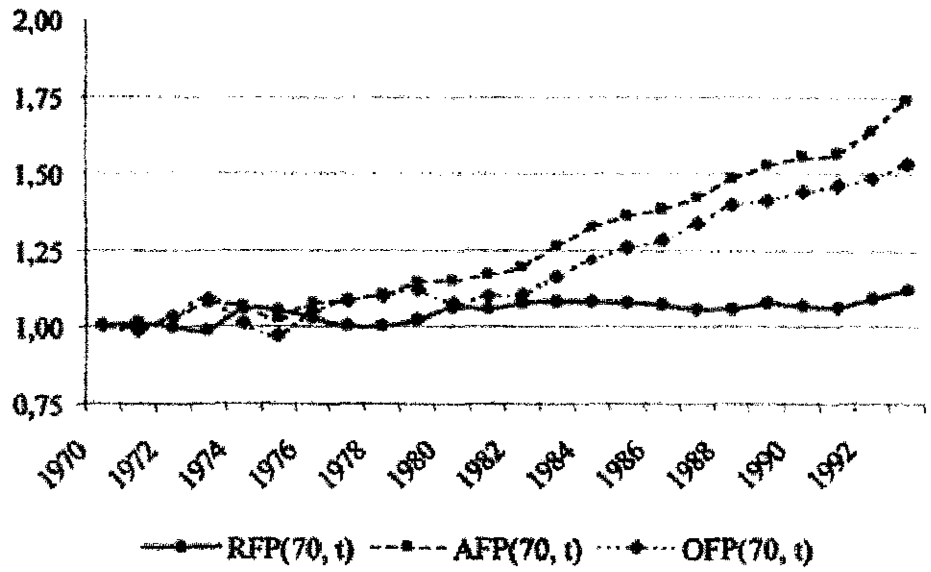


Gráfico 5.3.24. Evolución interanual comparada de la productividad relativa, absoluta y óptima de los factores respecto al período de referencia base, $t = 1970$.

La evolución presentada de la productividad relativa no hace sino cuantificar la convergencia existente en la eficiencia productiva ya puesta de manifiesto en la discusión de los anexos 2.3–4 en la sección 5.3.1. Es precisamente esta interpretación la que permite descomponer tales variaciones en función del cambio experimentado por una determinada industria en su eficiencia técnica y de escala. Efectivamente, de acuerdo a las expresiones (5.3.2–4), la razón entre las productividades absolutas –expresadas en las transformaciones técnicas y de escala – y óptimas –expresas en el cambio técnico y de escala– pueden ser interpretadas como variaciones en la eficiencia productiva cuyo origen es atribuible a las variaciones en la eficiencia técnica y de escala.

Atendiendo a los anexos 7.3–4–5–6, se observa que las ganancias de productividad relativa de las industrias manufactureras a excepción de Noruega, Japón y Dinamarca tiene su origen en un incremento en la eficiencia técnica, *i.e.* aproximación a la producción potencial puesta de manifiesto por el subconjunto eficiente o frontera de producción. Por el contrario, las ganancias productivas con origen en un acercamiento a las escalas de operaciones más productivas apenas si son relevantes. En el gráfico 5.3.25 se muestra la descomposición de la evolución interanual la productividad relativa o eficiencia productiva en eficiencia técnica y de escala apreciándose la elevada variabilidad de ambas fuentes del rendimiento relativo.

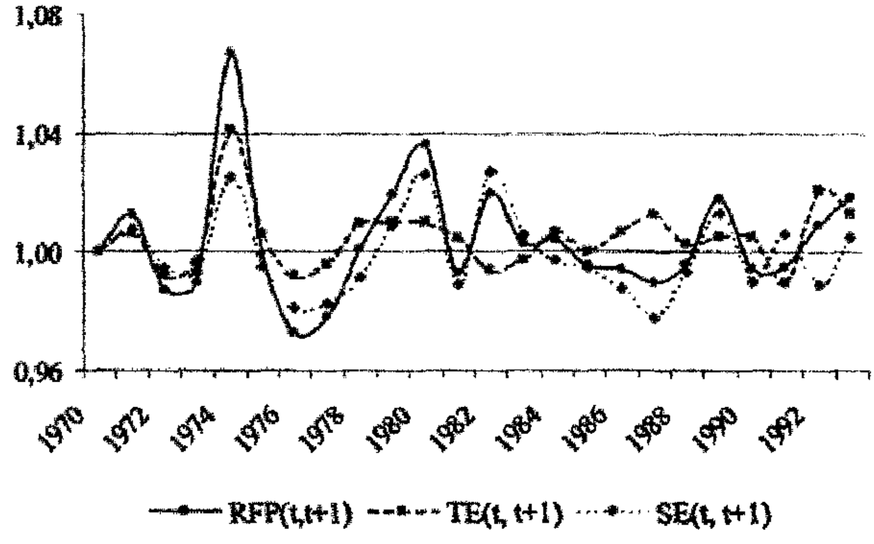


Gráfico 5.3.25. Descomposición de la evolución interanual de la productividad relativa o eficiencia productiva en eficiencia técnica y de escala respecto al período de referencia base, $t = 1970$.

Sin embargo, mientras que con relación a la variación en la eficiencia técnica, ésta presenta valores superiores a la unidad de forma generalizada, no ocurre así con las variaciones en la eficiencia de escala que alterna valores superiores e inferiores a la unidad de una forma continua. Así, la evolución paralela en las diversas escalas de operaciones puesta ya de manifiesto, tiene como consecuencia que a períodos de convergencia en las escalas de operaciones –*e.g.* de 1970 a 1975 y de 1982 a 1986– le sucedan otros de divergencia –*e.g.* de 1976 a 1981 y de 1987 a 1993– de tal forma que el resultado final en los veintitrés años considerados es que la posición relativa no se ha vista alterada de forma sustancial. Esta conclusión se ilustra a través del gráfico 5.3.26. donde se muestra igual descomposición pero en términos acumulados. Si en términos medios la productividad relativa o eficiencia productiva se incrementa un 12,2%, las ganancias derivadas de incrementos técnicos se elevan al 13,5% mientras que se aprecia una leve pérdida de eficiencia de escala que se cifra en un –1,2%.

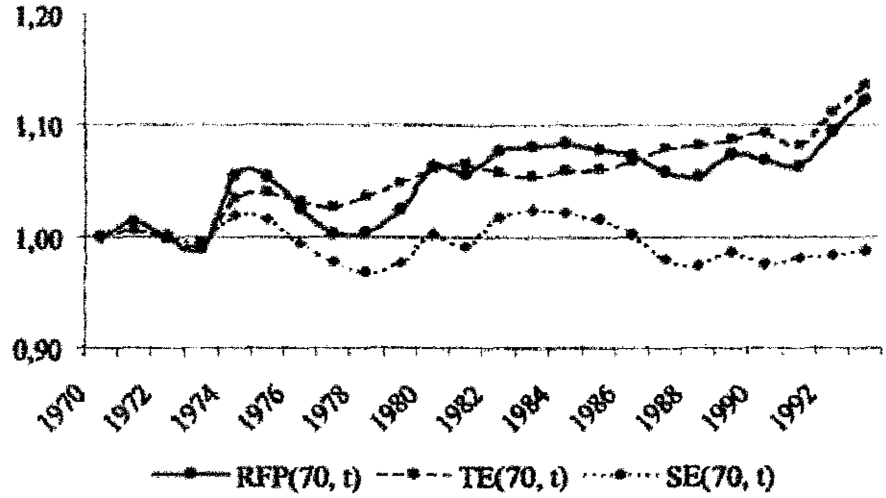
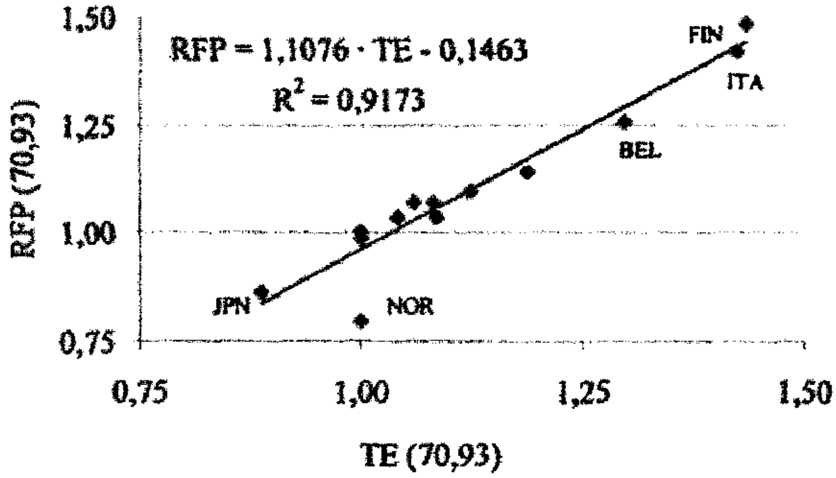


Gráfico 5.3.26. Descomposición de la evolución acumulada de la productividad relativa o eficiencia productiva en eficiencia técnica y de escala respecto al período de referencia base $t = 1970$.

Así se puede concluir que, en promedio, la mayor fuente de incremento en la productividad relativa o eficiencia productiva corresponde a la eficiencia técnica, mientras que las variaciones en la eficiencia de escala no influencian de forma apreciable en tales ganancias. Al igual que en el caso de las variaciones en la productividades absolutas y óptimas con respecto a sus transformaciones y cambios técnicos respectivos, la significatividad estadística de esta relación se refleja en el gráfico 5.3.27, donde se muestra la regresión de los índices individuales de variación en la productividad relativa o eficiencia productiva en función de la eficiencia técnica.



5.3.27. Distribución de la variación relativa o eficiencia productiva de los factores y la componente de eficiencia técnica respecto al período base, t = 1970, (5.3.4).

La situación expuesta no difiere sustancialmente cuando se desciende al análisis individual de las industrias manufactureras. En el caso de Finlandia, el cuadro 5.3.7 muestra cómo las ganancias productivas derivadas de los incrementos en la eficiencia técnica suponen el 96,0% mientras que aquellas de escala suponen únicamente el 4,0%. A excepción de Canadá, en el resto de industrias la variación en la eficiencia de escala implica perdidas de productividad relativa o eficiencia productiva siendo los casos más relevantes Noruega y Dinamarca. La explicación a este hecho proviene de que estos dos países definen el subconjunto eficiente o frontera de producción en 1970 y 1993 por lo que, en términos técnicos, su posición relativa no se ha visto alterada, $\Delta TE^{70,93}_{70,NOR} = \Delta TE^{70,93}_{70,DNK} = 1,00$. Sin embargo, con el transcurso del tiempo, sus escalas de operaciones respectivas se han ido distanciado de las de los países que determinan la escala óptima –la R.F.A y los EE.UU.–, de forma que su productividad relativa se ha visto reducida en un –20,4% y –1,4% respectivamente, $\Delta SE^{70,93}_{70,NOR} = 0,80$ y $\Delta SE^{70,93}_{70,DNK} = 0,99$.

País	$\Delta RFP_{70,t}^{70,93}$	T.V.I	$\Delta TE_{70,t}^{70,93}$	T.V.I	$\Delta SE_{70,t}^{70,93}$	T.V.I
Finlandia (FIN)	1,49	1,74	1,43	1,58	1,04	0,16
Italia (ITA)	1,42	1,53	1,42	1,55	1,00	-0,01
Bélgica (BEL)	1,26	1,00	1,30	1,13	0,97	-0,14
Países Bajos (NLD)	1,14	0,58	1,19	0,75	0,96	-0,17
EE.UU. (USA)	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
Francia (FRA)	1,04	0,15	1,04	0,17	1,00	-0,02
Canadá (CAN)	1,07	0,29	1,06	0,25	1,01	0,03
Suecia (SWE)	1,04	0,15	1,08	0,35	0,95	-0,20
Reino Unido (GBR)	1,07	0,29	1,08	0,34	0,99	-0,05
Australia (AUS)	1,09	0,39	1,12	0,50	0,97	-0,11
Noruega (NOR)	0,80	-1,08	1,00	0,00	0,80	-1,08
Dinamarca (DNK)	0,99	-0,06	1,00	0,00	0,99	-0,06
Japón (JPN)	0,86	-0,64	0,89	-0,52	0,97	-0,12
R.F.A. (WGR)	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	1,12	0,46	1,13	0,51	0,99	-0,05
Desv. Típica	0,18	0,67	0,17	0,64	0,02	0,10
Máximo	1,49	1,74	1,43	1,58	1,04	0,16
Mínimo	0,86	-0,64	0,89	-0,52	0,95	-0,20

T.V.I. Tasa de variación interanual, %
Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.3.7. Descomposición de las variaciones en la productividad relativa o eficiencia productiva en eficiencia técnica y de escala.

La exposición realizada en esta sección finaliza el ejemplo con el que se ilustra el modelo de evaluación del rendimiento productivo propuesto, mostrando la potencialidad analítica de los índices de rendimiento productivo que, basados en funciones de distancia, permiten caracterizar la tecnología de producción. Sin embargo, es posible complementar este análisis mostrando las diversas propuestas existentes en la literatura respecto a la descomposición del índice de variación en la productividad absoluta de los factores. El objetivo de la próxima sección es realizar una exposición coherente que, dentro del marco del nuevo modelo, permita sopesar los pros y los contras de las distintas propuestas.

5.4 La descomposición del índice de Malmquist de variación en la productividad absoluta de factores, $\Delta AFP_{k,i}^{t,t+1}$

De acuerdo a la exposición realizada del modelo de evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist, la variación en la productividad absoluta de los factores supone una transformación del proceso productivo que persigue, como objetivo, la mejora del rendimiento a través del aumento de la productividad potencial en sentido técnico y de escala. Así, las actividades tienen como objetivo alcanzar la producción potencial que brinda la tecnología –frontera de producción determinada por las actividades líderes– situándose en la escala de operaciones más productiva, (5.3.5–6). En el contexto del ejemplo que nos ocupa, la evolución de las industrias manufactureras refleja ganancias productivas que pueden ser interpretadas en tales términos siguiendo la discusión realizada en la sección 5.3.2. De esta forma, algunas de las naciones consideradas presentan procesos productivos que son eficientes en términos productivos, representando la escala de operaciones más productiva. Desde la óptica del modelo propuesto, las ganancias productivas de estas naciones no suponen alteraciones en su eficiencia productiva, establecida en términos relativos, por ser ellas mismas las que lideran el progreso tecnológico. Es decir, la transformación técnica que les sería atribuible desde la perspectiva de la descomposición inicialmente establecida supone, en sí, una ampliación del conjunto de posibilidades de producción, *i.e.* progreso tecnológico, el cual tiene una concreción específica en el presente modelo a través del concepto de variación en la productividad óptima de los factores y su descomposición en cambio técnico y de escala (5.3.7–8).

Dada la evolución de la productividad absoluta de cualquier industria, su comparación con aquella óptima revela la capacidad relativa de cada nación para superar, igualar o quedar rezagada de tales referentes, quedando así definida la variaciones en la productividad relativa. De acuerdo a la propuesta realizada en la sección 3.3 y que queda ilustrada a través del ejemplo resuelto en la sección 4.4, es posible proceder a relacionar estos conceptos desde la óptica de la variación en la productividad absoluta.

Así, de acuerdo a (5.3.1–2–3–4), la descomposición ampliada del índice de variación en la productividad absoluta contemporáneamente propuesta por Simar y Wilson (1998a) y Zofío y Lovell (1998) queda resumida en:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) = \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) = \\
&\qquad = \mathrm{M}_{\mathrm{P}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \left(\mathrm{M}_{\mathrm{A}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) / \mathrm{M}_{\mathrm{R}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)\right) = \\
&= \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{70}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\mathrm{O}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \right) \bullet \\
&\bullet \left(\frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) / \mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{70}(x_i^t, y_i^t) / \mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{t+1}(x_i^{t+1}, y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{O}}}^{t}(x_i^t, y_i^t)} \right) = \\
&= \left(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{TT}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) / \mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)\right) \bullet \\
&\bullet \left(\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{ST}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right) / \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)\right) = \\
&= \Delta \mathrm{OFP}_{70,i}^{t,t+1} \bullet \Delta \mathrm{RFP}_{70,i}^{t,t+1} = \Delta \mathrm{OFP}_{70,i}^{t,t+1} \bullet \Delta \mathrm{PE}_{70,i}^{t,t+1} = \\
&= \left(\mathrm{TC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \Delta \mathrm{TE}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)\right) \bullet \\
&\bullet \left(\mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right) \bullet \Delta \mathrm{SE}_{\mathrm{O}}^{70}\left(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}\right)\right) = \\
&= \mathrm{TECHCH}_{\mathrm{FONZ}} \bullet \mathrm{EFFCH}_{\mathrm{FONZ}} = \\
&= \mathrm{TECHCH} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet \mathrm{SC}_{\mathrm{O}}^{70} \bullet \mathrm{SEFFCH} = \Delta \mathrm{AFP}_{70,i}^{t,t+1}.
\end{aligned}
\tag{5.4.1}
$$

Esta formulación, que resulta equivalente a (3.4.30) en el contexto temporal que nos ocupa, satisface la propiedad transitiva de forma que, en términos acumulados, la descomposición se corresponde con:

$$
\begin{aligned}
M_A^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right) &= M_F^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet M_R^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^t,y_i^t\right)=\\
&= M_F^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet\left(M_A^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)/M_F^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\right)=\\
&=\left(\frac{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\right)\bullet\left(\frac{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right)=\\
&=\left(\frac{D_O^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_O^t(x_i^t,y_i^t)}{D_O^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right)\bullet\left(\frac{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})}\right)= \qquad (5.4.2)\\
&=\left(TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet TT_O^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)/TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\right)\bullet\\
&\bullet\left(SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet ST_O^{70}\left(x_i^{70},x_i^t,y_i^{70},y_i^t\right)/SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\right)=\\
&=\Delta OFP_{70,i}^{70,t}\bullet\Delta RFP_{70,i}^{70,t}=\Delta OFP_{70,i}^{70,t}\bullet\Delta PE_{70,i}^{70,t}=\\
&=\left(TC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet\Delta TE_O^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^t,y_i^t\right)\right)\bullet\left(SC_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t\right)\bullet\Delta SE_O^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^t,y_i^t\right)\right)=\\
&=TECHCH_{FGNZ}\bullet EFFCH_{FGNZ}=\\
&=TECHCH\bullet PEFFCH\bullet SC_O^{70}\bullet SEFFCH=\Delta AFP_{70,i}^{70,t}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, las expresiones anteriores pueden ser reformuladas con objeto de exponer la descomposición de la variación en la productividad absoluta de los factores propuesta por Färe *et al.* (1994b). En el caso del índice transitivo de variación interanual, esta descomposición alternativa viene determinada por:

$$
\begin{aligned}
M_A^{70}&\left(x_i^t,x_i^{t+1},y_i^t,y_i^{t+1}\right)=\\
&=\frac{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}=\\
&=\frac{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\hat{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)/D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}\bullet\frac{D_{\hat{O}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t)}=\\
&=\Delta OFP_{70,i}^{t,t+1}\bullet\Delta RFP_{70,i}^{t,t+1}=\Delta OFP_{70,i}^{t,t+1}\bullet\Delta PE_{70,i}^{t,t+1}= \qquad (5.4.3)\\
&=\Delta OFP_{70,i}^{t,t+1}\bullet\Delta TE_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)\bullet\Delta SE_O^{70}\left(x_i^t,y_i^t,x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right)=\\
&=TECHCH_{FGNZ}\bullet EFFCH_{FGNZ}=\\
&=TECHCH_{FGNZ}\bullet PEFFCH\bullet SEFFCH=\Delta AFP_{70,i}^{t,t+1},
\end{aligned}
$$

cuya expresión equivalente en términos acumulados resulta ser:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{A}^{70}\left(x_i^{70},x_i^{t},y_i^{70},y_i^{t}\right) &= \frac{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{t}(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{0}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{0}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})} \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{70,i}^{70,t} \bullet \Delta\mathrm{RFP}_{70,i}^{70,t} = \Delta\mathrm{OFP}_{70,i}^{70,t} \bullet \Delta\mathrm{PE}_{70,i}^{70,t} = \\
&= \Delta\mathrm{OFP}_{70,i}^{70,t} \bullet \Delta\mathrm{TE}_{O}^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^{t},y_i^{t}\right) \bullet \Delta\mathrm{SE}_{O}^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^{t},y_i^{t}\right) = \\
&= \mathrm{TECHCH}_{FGNZ} \bullet \mathrm{EFFCH}_{FGNZ} = \\
&= \mathrm{TECHCH}_{FGNZ} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet \mathrm{SEFFCH} = \Delta\mathrm{AFP}_{70,i}^{70,t}.
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Estas formulaciones adolecen de los problemas puestos de manifiesto en la sección 3.3.1 y que se resumen, en primer lugar, en una caracterización del cambio técnico, que en realidad se corresponde con la variación en la productividad óptima y no la definición comúnmente aceptada en la literatura. En segundo lugar, muestra la posición relativa final en la que permanece la industria tanto en términos técnicos como de escala, pero obvia la información relativa a la transformación técnica y de escala que permite determinar las fuentes primarias de la variación en la productividad absoluta de acuerdo a (5.3.5–6). De forma alternativa es posible recoger las formulaciones que reflejan la propuesta de Ray y Desli (1997), y que se corresponden con:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{A}^{70}\left(x_i^{t},x_i^{t+1},y_i^{t},y_i^{t+1}\right) &= \frac{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})/\mathrm{D}_{\hat{0}}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{70}(x_i^t,y_i^t)/\mathrm{D}_{\hat{0}}^{t}(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{0}^{t+1}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{0}^{t}(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{70}(x_i^{t+1},y_i^{t+1})}{\mathrm{D}_{\hat{0}}^{70}(x_i^t,y_i^t)} = \\
&= \mathrm{TC}_{O}^{70}\left(x_i^{t},y_i^{t},x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) \bullet \Delta\mathrm{TE}_{O}^{70}\left(x_i^{t},y_i^{t},x_i^{t+1},y_i^{t+1}\right) \bullet \mathrm{ST}_{O}^{70}\left(x_i^{t},x_i^{t+1},y_i^{t},y_i^{t+1}\right) = \\
&= \mathrm{TECHCH} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet \mathrm{SEFFCH}_{RD} = \Delta\mathrm{AFP}_{70,i}^{t,t+1},
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

en términos de variaciones interanuales que satisfacen la propiedad de transitividad y

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{A}^{70}\left(x_i^{70},x_i^{t},y_i^{70},y_i^{t}\right) &= \frac{\mathrm{D}_{O}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)} \bullet \frac{\mathrm{D}_{O}^{t}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{O}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})} \bullet \frac{\mathrm{D}_{\hat{O}}^{70}(x_i^t,y_i^t)}{\mathrm{D}_{\hat{O}}^{70}(x_i^{70},y_i^{70})} \\
&= \mathrm{TC}_{O}^{70}\left(x_i^{t},y_i^{t}\right) \bullet \Delta\mathrm{TE}_{O}^{70}\left(x_i^{70},y_i^{70},x_i^{t},y_i^{t}\right) \bullet \mathrm{ST}_{O}^{70}\left(x_i^{70},x_i^{t},y_i^{70},y_i^{t}\right) = \\
&= \mathrm{TECHCH} \bullet \mathrm{PEFFCH} \bullet \mathrm{SEFFCH}_{RD} = \Delta\mathrm{AFP}_{70,i}^{70,t},
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

que recoge iguales variaciones de forma acumulada respecto al período base.

A diferencia de la formulación propuesta por Färe *et al.* (1994b), Ray y Desli (1997) enfatizan conceptos alternativos de la variación en el rendimiento productivo dejando de lado un importante nivel de información, tal como puede concluirse de comparar (5.4.5–6) con (5.4.1–2). Es por ello que, de acuerdo al desarrollo teórico expuesto en la sección 3.3 y el ejemplo adoptado en 4.4, la única formulación que refleja el conjunto de información definida en el modelo de evaluación del rendimiento es aquella de Zofío y Lovell (1998).

El cuadro 5.4.1 recoge la ordenación decreciente –en función de la variación en la productividad absoluta– del conjunto de componentes que permiten evaluar el rendimiento productivo de la industria manufacturera. Según los resultados obtenidos, Finlandia presenta las mayores ganancias en términos absolutos con un incremento del 154,0% en los veintitrés años del período considerado, $\Delta AFP^{70,93}_{70,FIN}=2,54$. En un primer estadio, las descomposiciones propuestas por Zofío y Lovell (1998) y Färe *et al.* (1994b) coinciden en la identificación de la variación en la productividad óptima de los factores determinada por los EE.UU. y la R.F.A.. De acuerdo a la discusión realizada en 5.3.3, $\Delta OFP^{70,93}_{70,FIN}$ = 1,71 y la variación en la productividad relativa, $\Delta RFP^{70,93}_{70,FIN}$ = $\Delta PE^{70,93}_{70,FIN} = \Delta AFP^{70,93}_{70,FIN} / \Delta OFP^{70,93}_{70,FIN} = 1,49$. Ambas componentes se identifican en la segunda de las propuestas por cambio técnico, $TECHCH_{FGNZ}$, y cambio en la eficiencia, $EFFCH_{FGNZ}$. En el siguiente estadio de análisis, es posible relativizar la información sobre los componentes respectivos de las variaciones en las productividades absolutas –transformación técnica y de escala– y óptimas –cambio técnico y de escala–, para así proceder a identificar la relación existente entre las ganancias productivas propias a cada industria –productividad absoluta– con las ganancias potenciales que brinda la tecnología –productividad óptima–.

Observando la transformación técnica obtenida por Finlandia respecto al subconjunto eficiente o frontera de producción existente en al año de referencia base, 1970, es posible concluir que la industria manufacturera de este país ha superado con creces la expansión del conjunto de posibilidades de producción liderada por los Estados Unidos. Efectivamente, la posición relativa final en términos de eficiencia técnica denota un avance del 43,4%, $\Delta TE^{70,93}_{70,FIN}=1,43$, que responde a la relación existente entre la transformación técnica obtenida por esta industria y la propia de los Estados Unidos que, dada su posición de liderazgo en términos productivos, se corresponde con el cambio técnico. Así, $\Delta TE^{70,93}_{70,FIN}$ = $TT^{70,93}_{70,FIN} / TC^{70,93}_{70,FIN}$ = 2,96/2,07 = 1,43. La interpretación de estas magnitudes es la siguiente: la industria manufacturera de Finlandia experimenta una transformación de su proceso productivo que implica una mejora en la eficiencia respecto a la frontera de 1970 del 196,5%. Sin embargo, en igual período de tiempo, el cambio técnico experimentado por la tecnología incrementa la cuantía de producto generable para el nivel de factores de referencia –Finlandia– un 106,7%, por lo que la ganancia neta desde 1970 a 1993 se sitúa en el 43,4%.

País	$\Delta AFP^{70,93}_{70,i}$	$\Delta OFP^{70,93}_{70,i}$	$\Delta RFP^{70,93}_{70,i}$	$TC^{70,93}_{70,i}$	$\Delta TE^{70,93}_{70,i}$	$SC^{70,93}_{70,i}$	$\Delta SE^{70,93}_{70,i}$	Tasas de variación interanuales, T.V.I. $\Delta AFP^{70,93}_{70,i}$	$\Delta OFP^{70,93}_{70,i}$	$\Delta RFP^{70,93}_{70,i}$	$TC^{70,93}_{70,i}$	$\Delta TE^{70,93}_{70,i}$	$SC^{70,93}_{70,i}$	$\Delta SE^{70,93}_{70,i}$
		TECCH FONZ	EFFCH FONZ	TECCH	PEFFCH		SEFFCH FONZ		TECCH FONZ	EFFCH FONZ	TECCH	PEFFCH		SEFFCH FONZ
Finlandia (FIN)	2,54	1,71	1,49	2,07	1,43	0,83	1,04	4,14	2,36	1,74	3,21	1,58	-0,82	0,16
Italia (ITA)	2,43	1,71	1,42	1,73	1,42	0,99	1,00	3,93	2,36	1,53	2,41	1,55	-0,05	-0,01
Bélgica (BEL)	2,15	1,71	1,26	1,84	1,30	0,93	0,97	3,38	2,36	1,00	2,68	1,13	-0,32	-0,14
Países Bajos (NLD)	1,95	1,71	1,14	1,78	1,19	0,96	0,96	2,95	2,36	0,58	2,53	0,75	-0,17	-0,17
EE.UU. (USA)	1,71	1,71	1,00	1,71	1,00	1,00	1,00	2,36	2,36	0,00	2,36	0,00	0,00	0,00
Francia (FRA)	1,71	1,65	1,04	1,67	1,04	0,99	1,00	2,35	2,20	0,15	2,25	0,17	-0,05	-0,02
Canadá (CAN)	1,53	1,43	1,07	1,46	1,06	0,98	1,01	1,86	1,57	0,29	1,66	0,25	-0,09	0,03
Suecia (SWE)	1,50	1,45	1,04	1,52	1,08	0,95	0,95	1,78	1,63	0,15	1,85	0,35	-0,21	-0,20
Reino Unido (GBR)	1,50	1,40	1,07	1,42	1,08	0,99	0,99	1,78	1,48	0,29	1,53	0,34	-0,05	-0,05
Australia (AUS)	1,47	1,34	1,09	1,38	1,12	0,97	0,97	1,68	1,28	0,39	1,40	0,50	-0,11	-0,11
Noruega (NOR)	1,27	1,60	0,80	1,42	1,00	1,12	0,80	1,15	2,26	-1,08	1,69	0,00	0,56	-1,08
Dinamarca (DNK)	1,24	1,26	0,99	1,20	1,00	1,05	0,99	0,98	1,05	-0,06	0,82	0,00	0,22	-0,06
Japón (JPN)	1,23	1,43	0,86	1,39	0,89	1,03	0,97	0,91	1,56	-0,64	1,45	-0,52	0,11	-0,12
R.F.A. (WGR)	1,18	1,18	1,00	1,20	1,00	0,99	1,00	0,73	0,73	0,00	0,78	0,00	-0,05	0,00
Media	1,74	1,54	1,12	1,60	1,13	0,97	0,99	2,32	1,85	0,46	2,01	0,51	-0,15	-0,05
Desv. Típica	0,44	0,18	0,18	0,24	0,17	0,05	0,02	1,09	0,55	0,67	0,68	0,64	0,24	0,10
Máximo	2,54	1,71	1,49	2,07	1,43	1,03	1,04	4,14	2,36	1,74	3,21	1,58	0,11	0,16
Mínimo	1,18	1,18	0,86	1,20	0,89	0,83	0,95	0,73	0,73	-0,64	0,78	-0,52	-0,82	-0,20

Fuente: Elaboración propia, ISDB98

Cuadro 5.4.1. Descomposición de la variación en la productividad absoluta de los factores, $\Delta AFP^{70,t}_{70,i}$.

Con relación a la transformación de escala pueden realizarse similares comentarios. La situación relativa de la industria finlandesa en términos de escala de operaciones ha mejorado en los veintitrés años considerados un 3,7%, $\Delta SE^{70,93}_{70,FIN}=1,04$. Esto implica que la ineficiencia de escala que presenta este país entre 1970 y 1993 se ha reducido en esta proporción, pudiéndose determinar la evolución concreta seguida por esta industria y la propia tecnología a través de la descomposición de este índice. Dado que $\Delta SE^{70,93}_{70,FIN} = ST^{70,93}_{70,FIN}/SC^{70,93}_{70,FIN} = 0,86/0,83 = 1,04$, los cambios experimentados por el proceso productivo de la industria finlandesa desde 1970 a 1993 le han alejado un 14,3% de la escala óptima que le sirve de referencia en 1970 –definida por y la R.F.A. y los EE.UU.; es decir, el diferencial de productividades entre las proyecciones eficientes y óptimas de Finlandia en 1970 y 1993 respecto a la tecnología existente en 1970, se ha visto incrementado en tal proporción. Sin embargo, en estos veintitrés años, la tecnología ha experimentado un cambio de escala que, desde la perspectiva de la escala de operaciones finlandesa en 1993, refleja una reducción de los diferenciales de las productividades eficientes y óptimas entre 1970 y 1993 en un 17,4%. Así, si bien desde la perspectiva de la tecnología existente en 1970, esta industria se aleja de las escalas de operaciones más productivas, la realidad indica que el progreso tecnológico experimentado por la tecnología –liderado por los EE.UU y la R.F.A.– está dado origen a un cambio en la escala óptima de operaciones en la línea de la evolución seguida por Finlandia, *i.e.* existe una leve convergencia en la evolución industrial de esta nación respecto a aquella seguida por los procesos industriales que se revelan como óptimos, $\Delta SE^{70,93}_{70,FIN}=1,04$.

En conclusión, Finlandia es capaz de superar las ganancias productivas puestas de manifiesto por los países que definen el subconjunto o frontera óptima de producción, con ganancias productivas tanto de origen técnico como de escala, $\Delta AFP^{70,93}_{70,FIN} = \Delta OFP^{70,93}_{70,FIN} \cdot \Delta RFP^{70,93}_{70,FIN} = \Delta OFP^{70,93}_{70,FIN} \cdot \Delta TE^{70,93}_{70,FIN} \cdot \Delta SE^{70,93}_{70,FIN} = \Delta OFP^{70,93}_{70,FIN} \cdot (TT^{70,93}_{70,FIN}/TC^{70,93}_{70,FIN}) \cdot (ST^{70,93}_{70,FIN}/SC^{70,93}_{70,FIN}) = 1,71 \cdot (2,96/2,07) \cdot (0,86/0,83) = 1,71 \cdot 1,43, \cdot 1,04 = 2,54$.

El análisis realizado de la industria que presenta las mayores ganancias productivas es extrapolable a cualquiera de las naciones consideradas, pudiéndose resaltar el caso de Noruega por ser la nación que presenta las mayores pérdidas de productividad relativa. Pese a que las ganancias productivas en términos absolutos de su industria manufacturera se elevan a un 27,2% desde 1970 a 1991, $\Delta AFP^{70,91}_{70,NOR} = 1,27$, su evolución relativa es muy inferior al 59,8% de ganancia productiva puesta conjuntamente de manifiesto por las naciones que definen los óptimos productivos: la R.F.A y los EE.UU., $\Delta OFP^{70,91}_{70,NOR} = 1,60$. La comparación entre las ganancias propias y las potencialmente generables por los países eficientes resultan en una pérdida de productividad relativa o eficiencia productiva del 20,4%, $\Delta RFP^{70,91}_{70,NOR} = \Delta PE^{70,91}_{70,NOR} = \Delta AFP^{70,91}_{70,NOR} \; / \; \Delta OFP^{70,91}_{70,NOR} = 1,27/1,60 = 0,80$, cuyo origen técnico y de escala puede ser analizado descomponiendo tales magnitudes.

Analizando las variaciones en la eficiencia técnica y de escala, se constata que la totalidad de la pérdida de la productividad relativa se debe a una variación deficiente en la escala de operaciones y que, desde un punto de vista técnico, no existe ineficiencia de esta clase. Efectivamente, atendiendo a la transformación técnica y de escala de esta industria entre 1970 y 1991, se observa que respecto al subconjunto o frontera eficiente de 1970 existe un incremento en la productividad obtenida del 42,1%, $TT^{70,91}_{70,NOR} = 1,42$, mientras que, por el contrario, existe un alejamiento respecto a la escala óptima que se traduce en unas pérdidas de productividad del 10,5%, $ST^{70,91}_{70,NOR} = 0,89$ –así, el incremento final del 27,2% en la productividad absoluta responde a estas dos fuentes: $\Delta AFP^{70,91}_{70,NOR} = TT^{70,91}_{70,NOR} \cdot ST^{70,91}_{70,NOR} = 1,42 \cdot 0,89 = 1,27$. Con objeto de determinar la posición final en la que permanece la industria noruega al final del período, es necesario relativizar estas variaciones respecto al cambio productivo experimentado por la tecnología. Desde la perspectiva de Noruega en 1991, la variación en el subconjunto o frontera eficiente en el período considerado representa un cambio técnico que asciende al 42,1% , $TC^{70,91}_{70,NOR} = 1,42$. Este resultado pone de manifiesto que esta nación –al igual que Dinamarca– resulta eficiente en términos técnicos en ambos períodos por lo que lideran el cambio técnico experimentado por la tecnología, $\Delta TE^{70,91}_{70,NOR} =$

$TT^{70,91}_{70,NOR}$ / $TC^{70,91}_{70,NOR}$ = 1,42 / 1,42 = 1,00. No ocurre así con relación al cambio de escala pues esta nación no representa una de las escalas de operaciones más productivas. Así, considerando la pérdida de productividad respecto a los óptimos existentes en 1970, $ST^{70,91}_{70,NOR}$ = 0,89, ésta se ve reforzada por el cambio de escala en las operaciones de los países más productivos –una vez más la R.F.A y los EE.UU.– que hace que el diferencial entre las productividades de la proyecciones eficientes y óptimas se incrementen, $SC^{70,91}_{70,NOR}$ =1,12. Se presenta así una situación de retroceso relativo o pérdida de eficiencia en términos de escala del 20,4%, $\Delta SE^{70,91}_{70,NOR} = ST^{70,91}_{70,NOR} / SC^{70,91}_{70,NOR}$ = 0,89/1,12 = 0,80. Dada la ausencia de variación en la eficiencia técnica, la pérdida de eficiencia productiva tiene su origen en una evolución deficiente en la escala de operaciones, $\Delta RFP^{70,91}_{70,NOR} = \Delta PE^{70,91}_{70,NOR} = \Delta TE^{70,91}_{70,NOR} \cdot \Delta SE^{70,91}_{70,NOR}$ = 1,00 · 0,80 =0,80.

El resultado final en términos de la industria manufacturera noruega es la imposibilidad de alcanzar las ganancias productivas de los países que definen el subconjunto o frontera óptima de producción, debido una escala de operaciones ineficiente, $\Delta AFP^{70,91}_{70,NOR} = \Delta OFP^{70,91}_{70,NOR} \cdot \Delta RFP^{70,91}_{70,NOR} = \Delta OFP^{70,91}_{70,NOR} \cdot \Delta TE^{70,91}_{70,NOR} \cdot \Delta SE^{70,91}_{70,NOR} = \Delta OFP^{70,91}_{70,NOR} \cdot (TT^{70,91}_{70,NOR} / TC^{70,91}_{70,NOR}) \cdot (ST^{70,91}_{70,NOR} / SC^{70,91}_{70,NOR})$ = 1,60 · (1,42/1,42) · (0,89/1,12) = 1,60 · 1,00 · 0,80 = 1,27.

Una industria cuyo análisis presenta elevado interés es el concerniente a la República Federal Alemana. Esta industria refleja el menor incremento en la productividad absoluta al conseguir unas mejoras en esta magnitud del 18,3%, $\Delta AFP^{70,93}_{70,WGR}$ =1,18, sin que su productividad relativa sufra variación alguna al ser, junto a los EE.UU., una de las naciones que en los veintitrés años considerados lidera el progreso tecnológico, al definir las escalas óptimas de operaciones, $\Delta RFP^{70,93}_{70,WGR} = \Delta PE^{70,93}_{70,WGR} = \Delta AFP^{70,93}_{70,WGR} / \Delta OFP^{70,93}_{70,WGR}$ = 1,18/1,18=1,00. En este caso, la descomposición de los índices de productividad absoluta permite interpretar la evolución seguida por esta nación respecto al óptimo por ella definida en 1970 y los cambios que propicia su propia transformación productiva a lo largo del tiempo –transformación productiva que, por definir de forma contemporánea los óptimos productivos, se identifican con la variación experimentada por la tecnología.

Descendiendo al ámbito técnico del análisis se puede apreciar cómo respecto al subconjunto eficiente o frontera de producción existente en el periodo base de referencia, la R.F.A. incrementa la producción obtenida en un 19,6%, $TT^{70,93}_{70,WGR}=1{,}20$. Esta transformación técnica ha de relativizarse con la evolución seguida por el subconjunto o frontera eficiente en los veintitrés años considerados, con objeto de determinar la posición relativa en la que la R.F.A. finalmente permanece. En este caso, al liderar esta industria las variaciones en el subconjunto o frontera eficiente resulta evidente que su transformación técnica constituye, así mismo, el cambio técnico experimentado por la tecnología, $TC^{70,93}_{70,WGR}=1{,}20$, por lo que no se produce avance o retroceso en la eficiencia técnica relativa en 1970 y 1993, $\Delta TE^{70,93}_{70,WGR}=TT^{70,93}_{70,WGR}\,/\,TC^{70,93}_{70,WGR}=1{,}00$.

Resulta posible proceder de forma análoga en el ámbito de la escala de operaciones. Con relación a los óptimos existentes en 1970, la R.F.A. presenta una transformación de escala que implica un alejamiento del 1,1% de la escala propia de operaciones óptima en 1970, $ST^{70,93}_{70,WGR}=0{,}99$. Así, la propia variación en la escala de operaciones es interpretada por el modelo como un mínimo alejamiento de la escala óptima representada por esta misma nación en 1970. Sin embargo, resulta evidente que, de definir esta industria los óptimos productivos en los años de estudio, desde la perspectiva de la R.F.A en 1993, ha debido existir un cambio de escala en las operaciones de tal magnitud que refleja una reducción equivalente en los diferenciales de productividades eficiente y óptimas de 1970 a 1993, $SC^{70,93}_{70,WGR}=0{,}99$. Por tanto, en términos relativos, la posición final de la R.F.A. en cuanto a eficiencia de escala se refiere permanece inalterada, $\Delta SE^{70,93}_{70,FIN}=ST^{70,93}_{70,WGR}\,/SC^{70,93}_{70,WGR}=0{,}99/0{,}99=1{,}00$.

La descomposición realizada de la variación en la productividad absoluta indica que ésta se corresponde con la óptima de la tecnología, por lo que en términos técnicos y de escala sus transformaciones productivas coinciden con los cambios –progresos– experimentados por la tecnología: $\Delta AFP^{70,93}_{70,WGR}=$

$\Delta OFP_{70,WGR}^{70,93} \cdot \Delta RFP_{70,WGR}^{70,93} = \Delta OFP_{70,WGR}^{70,93} \cdot \Delta TE_{70,WGR}^{70,93} \cdot \Delta SE_{70,WGR}^{70,93} = \Delta OFP_{70,WGR}^{70,93} \cdot (TT_{70,WGR}^{70,93} \,/\, TC_{70,WGR}^{70,93}) \cdot (ST_{70,WGR}^{70,93} / SC_{70,WGR}^{70,93}) = 1{,}18 \cdot (1{,}20/1{,}20) \cdot (0{,}99/0{,}99) = 1{,}18 \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}00 = 1{,}18.$

Observando las descomposiciones (5.4.3–4), se observa cómo toda esta información relativa a la evolución seguida por las industrias manufactureras y la tecnología se perdería de recurrir a la propuesta de Färe *et al.* (1994b). Esta descomposición informa únicamente del primer estadio en la descomposición de la variación de la productividad absoluta: $\Delta AFP_{70,i}^{70,93} = \Delta OFP_{70,i}^{70,93} \cdot \Delta RFP_{70,i}^{70,93}$, descomponiendo las variaciones en la productividad relativa o eficiencia productiva, $\Delta RFP_{70,i}^{70,93} = \Delta PE_{70,i}^{70,93}$, en su componente técnica y de escala: $\Delta AFP_{70,i}^{70,93} = \Delta OFP_{70,i}^{70,93} \cdot \Delta TE_{70,i}^{70,93} \cdot \Delta SE_{70,i}^{70,93}$. Sin embargo, no permite analizar las variaciones acontecidas en el segundo estadio de análisis que ilustra el sentido y magnitud de las transformaciones técnicas y de escala, así como de las variaciones en la propia tecnología en términos del cambio técnico y de escala: $\Delta TE_{70,i}^{70,93} = TT_{70,i}^{70,93} / TC_{70,i}^{70,93}$ y $\Delta SE_{70,i}^{70,93} = ST_{70,i}^{70,93} / SC_{70,i}^{70,93}$.

Con relación a la descomposición propuesta por Ray y Desli (1997), que se encuentra recogida en (5.4.5–6), ésta no permite expresar la variación en la productividad absoluta de los factores como relación entre la óptima que ha de servirle de referencia y la productividad relativa. La información que facilita esta descomposición puede resumirse en la siguiente formulación: $\Delta AFP_{70,i}^{70,93} = TC_{70,i}^{70,93} \cdot \Delta TE_{70,i}^{70,93} \cdot ST_{70,i}^{70,93}$. De esta forma, si bien se accede a información no contemplada en la propuesta de Färe *et al.* (1994b), *i.e.* el cambio técnico y la transformación de escala, se aprecia cómo no permite discutir la totalidad la evolución del rendimiento productivo experimentada por las actividades respecto a aquella seguida por la tecnología.

Se puede así concluir la presente sección poniendo de manifiesto la generalidad y consistencia analítica del modelo propuesto en la presente investigación, a la hora de descomponer el índice de Malmquist de productividad absoluta de los factores. En relación a otras definiciones propuestas en la literatura, la idoneidad del modelo planteado proviene de su capacidad para recoger el conjunto de la información relativa a la evolución del rendimiento productivo, permitiendo ilustrar de una forma continua y coherente las variaciones experimentadas en los procesos de las observaciones evaluadas dentro del contexto tecnológico en que desenvuelven su actividad.

CONCLUSIONES

El objetivo del presente proyecto de tesis es establecer un marco de análisis del rendimiento productivo que se base en los índices de productividad de Malmquist introducidos por Caves, Christensen y Diewert (1982a). El análisis del rendimiento descansa en el concepto de función de distancia que, por su capacidad y flexibilidad para caracterizar la tecnología de producción, se esta convirtiendo en la actualidad en unos de los instrumentos fundamentales para el análisis de la eficiencia y productividad con la que operan las actividades.

La exposición que aquí se realiza de las funciones de distancia, su combinación en índices de productividad y las técnicas de optimización que permiten su cálculo, tiene como objetivo profundizar en una metodología que presenta interés creciente entre teóricos e investigadores aplicados por las ventajas que ofrece sobre planteamientos alternativos, basados en la aproximación tradicional de números índices o en estimaciones econométricas derivadas del análisis por regresión.

Atendiendo a los desarrollos realizados es importante precisar los siguientes objetivos que, en opinión del doctorando, han sido alcanzados:

1. La definición de un nuevo modelo dinámico de evaluación del rendimiento productivo

El modelo, que es introducido de forma intuitiva en el primer capítulo de la presente investigación, se basa en el concepto de eficiencia productiva de las actividades o, de acuerdo a la terminología adoptada en esta investigación, productividad relativa de los factores, (1.1.5). Este concepto refleja los diferenciales de productividad que existen entre el rendimiento alcanzado por la actividad a evaluar, y el máximo potencial de las actividades líderes en sentido tecnológico.

Desde una perspectiva estática, este diferencial es atribuible tanto a causas técnicas –incapacidad para alcanzar la frontera de producción– como de escala –incapacidad para producir un nivel de productos o utilizar la cuantía de factores que se corresponde con la máxima productividad potencial–, (1.1.6), véase Chambers (1988) para una introducción genérica dentro de la aproximación neoclásica a la teoría de la producción. Estos conceptos, que permiten caracterizar el rendimiento absoluto y relativo en términos estáticos o contemporáneos, deben ser extendidas a un ámbito dinámico. Es en este contexto cuando se introducen los conceptos de variación en la productividad absoluta de los factores –identificado en la literatura económica por la productividad total de los factores– con objeto de diferenciarla de los cambios experimentados en el rendimiento de las actividades óptimas –productividad óptima de los factores–. La variación absoluta del rendimiento obtenido por una actividad a través del tiempo puede ser comparada respecto a aquella óptima con objeto de obtener, precisamente, la variación en la productividad relativa de los factores, (1.1.11).

Siguiendo el esquema presentado en el gráfico 1.2.1, esta variación relativa que compara la evolución propia de la actividad –absoluta– con aquella seguida por las actividades líderes –óptima– puede ser descompuesta de forma equivalente en términos de variación técnica y de escala atendiendo a la presentación de la eficiencia productiva realizada en términos contemporáneos.

La primera aportación realizada en esta investigación se basa en la definición de un modelo que permite relacionar ambas visiones, equivalentes, de la variación en el rendimiento relativo de las actividades. Si la variación en la productividad absoluta de los factores puede identificarse en un primer estadio con transformaciones productivas que, respecto a una tecnología de referencia, se obtienen desde una dimensión técnica y de escala, (1.1.15) y, a su vez, la variación en la productividad óptima puede identificarse con los conceptos de cambio técnico y de escala respecto a una actividad de referencia (1.1.21), resulta entonces posible completar el modelo de evaluación del rendimiento productivo al poder identificar desde ambas dimensiones, técnica y de escala, cuál ha sido la evolución *simultánea* en el tiempo seguida por las actividades productivas y por la propia tecnología –que viene determinada por la evolución de las actividades líderes–, (1.1.12–13).

Desde la perspectiva de las actividades, su objetivo se centra en alcanzar la máxima productividad, lo cual implica explotar el potencial representado por las fronteras de producción –eficiencia técnica– así como la consecución de una escala óptima de operaciones –eficiencia de escala–. En términos dinámicos, estas variaciones en sus procesos productivos deben compararse con aquellas de la tecnología, *i.e.* de las empresas líderes, para de esta forma poder identificar cuál ha sido la evolución de la tecnología y de la eficiencia productiva, véase el gráfico 1.1.7.

Solo cuando el presente modelo ha sido validado, resulta posible proceder a la descomposición del índice de productividad absoluta en términos de los elementos previamente comentados. De hecho, pese a que en el primer capítulo no se aborda la descomposición propuesta por el doctorando en Zofío y Lovell (1998), se sientan las bases sobre las que se sustenta su análisis en el tercer capítulo así como su comparación con otras propuestas realizadas en la literatura. De esta forma, aunque simple en su exposición inicial con objeto de presentar el modelo de una forma intuitiva e inteligible, la originalidad del modelo se basa en la capacidad para relacionar una serie de conceptos dinámicos ampliamente conocidos en la literatura como, por ejemplo, el cambio técnico –tecnología– y la transformación técnica de las actividades, y otros de nuevo cuño como el cambio de escala –de la tecnología– con la transformación de escala de las actividades. Todos estos elementos pueden relacionarse de una forma coherente, tal como se expone en el capítulo inicial, siendo su entendimiento fundamental para la exposición formal del modelo.

El marco analítico presentado se caracteriza por su orientación primal, si bien podría ser extendido haciendo uso de relaciones duales que liguen el modelo de rendimiento *productivo* con homólogos económicos que, asumiendo un comportamiento optimizador de las actividades, permitan determinar la evolución del rendimiento *económico* a través de los ingresos, los costes y, finalmente, los beneficios. En este sentido sería necesario hacer uso de las relaciones duales que, basadas en la función de distancia de productos, factores o *graph*, permitiesen establecer estos avances metodológicos. En este sentido, las investigaciones realizadas por Färe y Primont (1995a), Chambers, Chung y Färe (1996) y

Grifell-Tatjé y Lovell (1999b), habrían de servir como base para establecer el modelo económico dual complementario al aquí presentado.

2. La caracterización de la tecnología a través de funciones de distancia

Existen numerosas formas de representar la tecnología siendo la más conocida aquella de la función de producción que, en un determinado período temporal, relaciona la producción potencial generable con los factores utilizados. Esta representación de la tecnología resulta conveniente dada la sencillez para proceder a su análisis y estimación a partir de técnicas econométricas. Sin embargo, su gran inconveniente reside en la imposibilidad de considerar procesos multiproducto, por lo que su modelización solo puede realizarse a través de funciones de ingresos, costes o beneficio a partir de las cuales –y asumiendo un comportamiento optimizador–, es posible derivar información sobre la tecnología.

Sin embargo, siguiendo los desarrollos realizados por Shephard (1953), existe la posibilidad de modelizar de forma directa y sencilla la tecnología de producción a través de la denominada función de distancia. Su capacidad para caracterizar la tecnología en procesos multiproducto y multifactor han llevado al doctorando a su elección con objeto de implantar el modelo de rendimiento productivo introducido en el primer capítulo.

Así, el segundo capítulo del presente proyecto de tesis se dedica por completo a la definición de la tecnología en términos del conjunto de posibilidades de producción. En concreto, dada la relevancia que presenta para esta investigación, en la sección 2.1 se hace énfasis en las condiciones axiomáticas que deben verificarse con objeto de que la función de distancia pueda definirse sobre la tecnología permitiendo su representación –véanse los axiomas T.1–T.9–. En esta sección se muestra cómo es posible analizar la tecnología de producción desde diversas perspectivas, ya sea centrándose en el conjunto de posibilidades de producción de productos, factores o tecnológico. Estas formas equivalentes de representar al proceso productivo condicionan la definición de la propia función de distancia, así como cualquier análisis que quiera realizarse del rendimiento productivo, (2.2.1.2–5).

Tras la introducción de la tecnología y su caracterización a través de la función de distancia, (2.2.3–4–6), se muestra cómo ésta última puede ser interpretada como una medida de eficiencia (2.2.16–17–18). Gracias a esta interpretación resulta posible establecer si una actividad resulta eficiente al situarse sobre las funciones de isoproducto, isocuanta o frontera de producción de tal forma que no sean factibles variaciones *equiproporcionales* de factores y productos, (2.2.13–14–15). Esta es la razón por la cual la noción de eficiencia adoptada en la presente investigación puede calificarse de débil. Desde la condición propuesta por Koopmans (1957), una actividad se considera eficiente cuando no son factibles reestructuraciones productivas que permitan aumentar su productividad. Sin embargo, la definición radial o equiproporcional de la función de distancia restringe esta posibilidad a incrementos y reducciones simultáneos de productos y factores, por lo que se descartan otras reducciones parciales que implicarían la pertenencia a los subconjuntos eficientes de posibilidades de producción, (2.2.10–11–12). La definición de eficiencia que se deriva de la función de distancia está justificada por la interpretación que de ella puede hacerse como índice de cuantía, lo cual permite la definición de índices de rendimiento productivo *a la* Malmquist, (2.2.19–20–21).

Es ahora el momento de abordar la interpretación de las funciones de distancia en función de las propiedades que satisfacen a través de las características de la tecnología de producción. Si ésta se caracteriza por los axiomas T.1–T.7, $T^{t}(x,y)$, dado que no se ha exigido que satisfaga homogeneidad lineal, la medida de eficiencia refleja diferenciales de productividad respecto a la frontera o conjunto eficiente de posibilidades de producción, caracterizado por rendimientos variables a escala. Sin embargo, si se asume que la tecnología es homogénea de primer grado –rendimientos constantes a escala, T.8– y simultáneamente homotética –separable en productos y factores T.9–, $\hat{T}^{t}(x,y)$, ésta puede ser interpretada como medida de eficiencia productiva, *i.e.* refleja diferenciales de productividad respecto a la máxima productividad observada en el subconjunto óptimo de producción –gracias a T.9 esta representación puede ser representada intuitivamente como la razón de una función agregadora de productos a una de factores–. Estos resultados, que se ponen de manifiesto en la sección 2.2 a través de las propiedades satisfechas por la función de distancia, muestran sus distintas interpretaciones como medidas de eficiencia técnica y productiva.

Naturalmente, los resultados puestos de manifiesto responden a una caracterización teórica de la tecnología que, a todos los efectos, resulta desconocida en análisis empíricos. Así, desde una perspectiva aplicada, la consideración de los axiomas T.1–T.7 sobre la aproximación realizada a la tecnología *best practice* –*e.g.* a través de la técnica de optimización DEA aplicada en esta investigación–, permite identificar el nivel de eficiencia técnica. Esto sin perjuicio de que pueden posteriormente imponerse los axiomas T.8–T.9 con objeto de identificar el nivel de eficiencia productiva respecto a la máxima productividad absoluta –que resulta ser una dimensión de análisis diversa a la de la eficiencia técnica–. Ambas evaluaciones no implican la convivencia de tecnologías simultáneas, sino la necesidad de proceder a identificar subconjuntos de referencia diversos en función del nivel de eficiencia que se quiera evaluar. Así, respecto a la frontera de producción –subconjunto eficiente– se evalúa la eficiencia técnica, mientras que respecto al subconjunto óptimo se evalúa la eficiencia productiva.

Considerando desde una perspectiva cuantitativa que la eficiencia productiva se identifica con la función de distancia definida sobre una tecnología que verifica rendimientos constantes a escala, $-\hat{T}^{c}(x,y)$, T.8–T.9–, mientras la eficiencia técnica se corresponde con aquella definida sobre una tecnología que presenta rendimientos variables, $T^{v}(x,y)$, cualquier discrepancia entre ambas refleja las diferencias de productividad existentes entre el subconjunto eficiente y óptimo de posibilidades de producción, *i.e.* el diferencial de rendimiento debido a la escala de operaciones. De esta forma, resulta posible establecer la eficiencia de escala de una actividad como diferencial entre su eficiencia técnica y productiva o, de forma equivalente, se puede descomponer su eficiencia productiva en términos técnicos y de escala.

A la hora de representar la tecnología a través de funciones de distancia existen muchas alternativas de forma que las presentadas en esta investigación no agotan las posibilidades existentes. La elección de funciones de distancia alternativas como las *direccionales* establecidas por Briec (1997) o Chambers, Chung y Färe (1998), implican interpretaciones alternativas en términos de eficiencia y, como en el caso de las medidas *no radiales* de Russell –véase Färe, Grosskopf y Lovell (1985) o Grifell–Tatjé, Lovell y Pastor (1998)–, éstas pueden llevar a una definición consistente de la eficiencia en los términos establecidos por Koopmans (1957). Sin embargo, es necesario investigar las relaciones existentes entre las distintas definiciones de eficiencia –*e.g. a la* Koopmans– y sus propiedades duales con objeto de tener presente el tipo de modelo productivo–económico que se desea formalizar. A pesar de estas apreciaciones, resulta evidente que existen otras alternativas de interés a la hora de definir la eficiencia productiva y que pueden resultar adecuadas para el desarrollo del modelo propuesto en el presente proyecto de tesis.

3. El desarrollo formal del modelo de evaluación del rendimiento productivo a través de índices de Malmquist

La elección de la función de distancia como representación válida de la tecnología y del nivel de eficiencia de las actividades, facilita el desarrollo dinámico del modelo de evaluación del rendimiento productivo. La extensión del modelo estático de rendimiento relativo o eficiencia productiva puede realizarse gracias a la metodología de los índices de cuantía de Malmquist, introducida por Caves, Christensen y Diewert (1982a). El tercer capítulo se centra en la formalización de cada una de las componentes introducidas en el capítulo inicial a través de índices de Malmquist, *i.e.* como *ratios* de funciones de distancia. Para ello no sólo se analizan las formulaciones inicialmente propuestas por estos autores y las extensiones posteriores en el contexto del modelo de evaluación del rendimiento propuesto sino que, adicionalmente, se definen nuevos índices con objeto de completar aquellas definiciones que no han sido previamente consideradas en la literatura.

Desde la perspectiva de variación en la productividad absoluta de los factores y de los términos de transformación técnica y de escala en los que se descompone, es posible mostrar cómo el índice de Malmquist originalmente introducido por los autores mencionados se corresponde con el término de transformación técnica, véase (3.2.1–2–3). Tal identificación se puede realizar atendiendo a las características de la tecnología sobre la que se definen las funciones de distancia que conforman el índice, y que no impone la condición de homogeneidad lineal, *i.e.* se asumen rendimientos variables a escala. Siguiendo un orden cronológico al de la aparición de los índices propuestos por distintos autores, es posible poner de manifiesto que el índice introducido por Färe *et al.* (1989, 1994) se puede identificar con el índice de variación en la productividad absoluta de los factores al imponer la condición de homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– sobre la tecnología y, así, sobre las propias funciones de distancia. Con relación al término de transformación de escala, su definición ha sido generalmente ignorada en la literatura si atendemos a la descomposición básica de índice de productividad absoluta introducida en (3.2.13–14–15). Sin embargo, su definición puede encontrarse por primera vez en la propuesta de descomposición completa –en términos de cambios en la tecnología y la eficiencia productiva– realizada por Ray y Desli (1997).

Respecto al índice de Malmquist que refleja las variaciones en las productividades obtenidas por las actividades líderes que operan en las escalas óptimas, en la sección 3.2. se pone de manifiesto que éste se corresponde con la noción de cambio técnico adoptada por Färe *et al.* (1989, 1994), mientras que en la presente investigación se asocia con el índice de variación en la productividad óptima de los factores. Por el contrario, dado que estos autores imponen, una vez más, la condición de homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– y ésta no es generalmente aceptada en la definición de cambio técnico, Ray y Desli (1997) proponen un índice de Malmquist a partir de funciones de distancia que no verifican tal propiedad, definiendo el cambio técnico en la forma comúnmente reconocida en la literatura así como en la presente investigación, (3.2.19–20–21). Sin embargo, respecto al índice de cambio de escala en el que puede descomponerse la variación en la productividad óptima de los factores (3.2.21–22–23), su definición resulta novedosa si consideramos que fue contemporáneamente introducida por Simar y Wilson (1998a) y Zofío y Lovell (1998).

Finalmente, el índice de variación en la productividad relativa de los factores se corresponde con la variación en la eficiencia productiva de las actividades. De acuerdo a Färe *et al.* (1989, 1994), esta variación se asocia a las variaciones en la eficiencia técnica que, posteriormente, descompondrán en las denominadas variaciones en la eficiencia técnica *pura* y de escala, Färe *et al.* (1994b). Resulta difícil comprender por qué no denominaron a la variación en la productividad relativa de los factores como variaciones en la eficiencia productiva, como es normalmente definido tal concepto en la literatura y tal como se adopta en esta investigación. Este *lapsus* les obliga a adjetivar la eficiencia técnica en sí como *pura* –en vez de técnica– e introducir posteriormente el término de variación en la eficiencia de escala.

Estas reflexiones ponen de manifiesto las definiciones alternativas que de iguales conceptos han realizado los autores citados lo largo de la pasada década. El enfrentamiento estaba servido pues la mayoría de las controversias económicas surgen de utilizar diversas definiciones para un mismo concepto. Es decir, de la falta de comprensión para valorar el esfuerzo ajeno otorgándole un espacio nuevo y, por qué no, adoptando si es preciso nuevas definiciones y conceptos. Una de las aportaciones originales del presente proyecto de tesis con relación a la descomposición del índice de Malmquist es acabar con la asociación de varias definiciones a un mismo concepto de forma que se establece un marco completo de rendimiento productivo que permita una relación biyectiva entre ellos.

Así, si la controversia entre los autores previamente citados se centraba, por ejemplo, en la *correcta* definición del cambio técnico o la variación en la eficiencia de escala, en el marco analítico aquí propuesto tal dificultad desaparece al poder acomodar la totalidad de los conceptos presentados. Esto no significa una solución de compromiso, que más allá de cuestiones semánticas, permita satisfacer a la totalidad de las partes sino, muy al contrario, la superación de unos marcos restrictivos al proponer uno más genérico que permite la interpretación coherente de los distintos términos. Más concretamente, la elaboración de un modelo de rendimiento dinámico haciendo especial énfasis en los rendimientos a escala dado que este es el rasgo distintivo de las diversas definiciones propuestas de los índices de Malmquist.

Con objeto de que no puedan existir ambigüedades respecto a la definición de los diversos conceptos que conforman el modelo de evaluación del rendimiento, su interpretación se aborda desde las características que los índices de Malmquist satisfacen y, más concretamente, de su idoneidad en términos axiomáticos –propiedades que verifican– y tecnológicos –flexibilidad de la tecnología respecto a la cual se referencian–. Es decir, con objeto de evaluar cada uno de ellos e interpretar su significado se ha atendido a estas dos perspectivas. Desde una perspectiva axiomática se exige a los índices que satisfagan una serie de propiedades: identidad, monoticidad, transitividad, proporcionalidad y, con objeto de que puedan ser representados de forma intuitiva como razones de productos a factores, separabilidad. Desde una perspectiva tecnológica se exige que los índices provean medidas de rendimiento productivo con tecnologías lo menos restrictivas posibles.

Desde un inicio queda patente que la consecución de ambos objetivos es contradictoria, existiendo una relación de intercambio concreta entre las propiedades de proporcionalidad y separabilidad y la flexibilidad de la tecnología. Así, de cumplirse éstas propiedades, la tecnología debe satisfacer los axiomas de homogeneidad lineal –que restringe los rendimientos a escala a ser constantes, T.8– y de homoteticidad –que posibilita la separación entre productos y factores, T.9–. De acuerdo a lo expuesto en la sección 3.2, la relación de intercambio entre las propiedades de los índices de Malmquist y la flexibilidad tecnológica que les subyace se analiza a través de las propiedades de las funciones de distancia.

Cuando la tecnología no verifica los axiomas previamente citados las funciones de distancia de productos, factores y tecnológica no son homogéneas en factores, productos o ambas dimensiones (T.8) no pudiéndose expresar, además, como razón entre funciones agregadoras de productos y factores (T.9). Si las funciones de distancia no satisfacen estas propiedades los índices definidos sobre ellas tampoco las satisfarán y así no se verificarán las propiedades de proporcionalidad y separabilidad. Naturalmente, la tecnología inherente a tales índices será la más laxa posible pues, para que las funciones de distancia que componen el índice estén definidas –y, por tanto, los propios índices–, solo se exige que éstas satisfagan T.1–T.7. Es este el caso de los índices representativos de las transformaciones y cambios en términos técnicos y de escala, así como las propias variaciones en la eficiencia técnica y de escala. Por el contrario, cuando la tecnología satisface los axiomas T.8–T.9, las funciones de distancia confieren a los índices las propiedades de proporcionalidad y separabilidad. En el presente proyecto de tesis se ha confiado en estas propiedades –especialmente la primera (proporcionalidad) dado que la segunda se contempla con objeto de ilustrar el concepto de productividad como razón entre productos y factores (separabilidad)– para denominar a los índices que las satisfacen con el término de productividad dándose origen así a las denominaciones de variación en la productividad absoluta, óptima y relativa de los factores. El coste en el que se incurre con objeto de que verifiquen estas propiedades es que, para poder definir un índice de productividad, la tecnología debe caracterizarse por homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– y homoteticidad –separabilidad–.

Una vez realizadas estas apreciaciones resulta de vital importancia subrayar que los resultados obtenidos no implican el adoptar una posición *a priori* sobre cómo debe considerarse la tecnología de producción. Muy al contrario, las relaciones puestas de manifiesto muestran las condiciones que deben verificarse de querer interpretar los índices calculados como indicadores de rendimiento productivo –una vez más las transformaciones y cambios en términos técnicos y de escala así como las variaciones en la eficiencia técnica y de escala– o como índices de variación de productividades. De hecho, en el modelo de rendimiento propuesto se asume que la tecnología es la más laxa posible, satisfaciendo T.1–T.7, con objeto de identificar los índices de rendimiento productivo respecto al subconjunto eficiente de posibilidades de producción y, posteriormente, se imponen las condiciones T.8–T.9 con objeto de identificar el subconjunto óptimo que permite evaluar la productividad relativa de los factores o eficiencia productiva. Es decir, la imposición de los axiomas de homogeneidad y homoteticidad permite identificar, a través del concepto de función de distancia, la máxima productividad generable dentro del conjunto de posibilidades de producción que satisface T.1–T.7. Así, por ejemplo, desde una perspectiva aplicada, la imposición de homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala– no implica aceptar que la tecnología satisfaga tal propiedad, sino que es un instrumento adecuado para identificar la máxima productividad. Dado que esto resulta equivalente a determinar la escala de operaciones más productiva, el procedimiento permite identificar las posibles ineficiencias de escala y su contribución a las variaciones en la productividad, algo que entraría en contradicción con la asunción de una tecnología con rendimientos constantes a escala si esta se hubiera efectivamente realizado.

Con objeto de que la formalización del modelo propuesto sea de fácil accesibilidad, se ha hecho el esfuerzo de aportar su definición desde diversas perspectivas. Así, con relación a la dimensión del proceso productivo sobre la que se centra el análisis, se consideran índices de Malmquist basados en funciones de distancia con dimensión de productos, factores y tecnológica. Por otra parte, con relación a la elección de la tecnología de referencia respecto a la cual se evalúa el rendimiento, se aborda una formulación geométrica del modelo –alcanzado un compromiso entre los resultados obtenidos al actualizar la tecnología de referencia en períodos sucesivos– así como la elección de una única tecnología base con objeto de que las formulaciones satisfagan la propiedad transitiva. Finalmente, las diversas propuestas realizadas en la literatura para descomponer el índice de productividad absoluta –total– de los factores se presentan en cada una de estas formulaciones con el objetivo de facilitar su comprensión.

El desarrollo del modelo de rendimiento productivo aquí propuesto se ha realizado a través de índices de Malmquist que se sustentan en el concepto de función de distancia. Sin embargo, sería posible implementarlo desde otras perspectivas a través del análisis econométrico basado en funciones de producción, costes, ingresos o beneficios. Se entra así en la formalización del modelo neoclásico de productividad total de los factores con su desarrollo a través de técnicas econométricas –véase Nadiri (1970) para una introducción clásica de estas definiciones–. De esta forma se plantean otras posibles alternativas en la formalización del análisis que no han sido consideradas en el presente proyecto de tesis y cuya exploración sería interesante.

4. El desarrollo empírico del modelo a través de las técnicas de optimización conocida como Análisis Envolvente de Datos

El presente proyecto de tesis pretende ofrecer una visión del modelo de rendimiento productivo que abarque desde su definición formal hasta su aplicación concreta a la evaluación dinámica de la productividad en el ámbito industrial. Sin embargo, como en cualquier análisis académico, el desarrollo empírico del modelo teórico exige disponer de las técnicas matemáticas que lo permiten. En el caso que nos ocupa estas técnicas se encuentran disponibles gracias al denominado Análisis Envolvente de Datos, *Data Envelopment Analysis*, DEA.

En el cuarto capítulo se analizan los aspectos de esta técnica que se relacionan de una forma directa con el objetivo planteado en la presente proyecto: elaborar un modelo de rendimiento productivo con especial énfasis en la contribución de los rendimientos a escala a las variaciones en la productividad. Así, tras la breve introducción realizada en la sección 4.1 que informa sobre el nacimiento, evolución y desarrollo de esta técnica, en la sección 4.2. se aborda el primer paso para implantar el modelo: la aproximación de la tecnología de producción desconocida a partir de las actividades observadas, *i.e.* en función de la mejor práctica técnica, véanse (4.2.3–5). La flexibilidad del DEA se aprecia en su capacidad para incorporar de forma satisfactoria los axiomas teóricos introducidos en el segundo capítulo, generando conjuntos convexos sobre los que resulta posible aplicar todo el cuerpo teórico de la optimización por programación matemática con objeto de calcular las funciones de distancia.

El cálculo de las funciones de distancia puede realizarse a través de una diversidad de programas y atendiendo a sus formulaciones duales y primales. Con objeto de seguir la exposición analítica seguida en el segundo capítulo, el punto de partida lo constituyen las formulaciones que permiten optimizar las funciones de distancia de acuerdo a sus definiciones en (2.2.1–2–5), *i.e.* que se pueden identificar con niveles de eficiencia técnica. Sin embargo, las formulaciones que se identifican directamente con tales definiciones, (4.3.1–3–5), dan origen a programas de optimización no lineales, siendo posible realizar unas sencillas transformaciones con objeto de que se pueda hacer uso de técnicas lineales para su resolución (4.3.2–4–7), véase Banker, Charnes y Cooper (1984). Estas formulaciones duales de la función de distancia, que son las normalmente aplicadas en la literatura empírica, pueden ser interpretadas de forma intuitiva como índices de cuantía de productividad gracias a sus formulaciones primales –por ser las originalmente introducidas en términos de eficiencia productiva por Charnes, Cooper y Rhodes (1978)–. Los programas introducidos permiten identificar los pesos virtuales de productos y factores que posibilitan la agregación de estas variables con objeto de obtener el escalar representativo de la eficiencia técnica y productiva –en función de que se haya o no introducido el parámetro representativo de los rendimientos variables a escala–.

Así, a lo largo de este proceso y ya sea en términos primales o duales, se presta especial atención a los elementos distintivos de los programas que no solo permiten calcular las funciones de distancia representativas de las distintas medidas de eficiencia, sino también caracterizar la tecnología de producción. Estas discusiones muestran cómo es posible emplear el acervo general sobre la teoría de optimización matemática con objeto de identificar los parámetros que permiten establecer el sentido de los rendimientos a escala –decrecientes, decrecientes y constantes–, véanse las relaciones (i), (ii) y (iii) debidas a Ahn, Charnes y Cooper (1989) y Banker y Thrall (1992) en la sección 4.3. La información que con relación a las características de la tecnología puede extraerse de la resolución de los programas de optimización resulta fundamental, tal como se pone manifiesto en el quinto capítulo, donde se analiza la evolución del rendimiento productivo en la industria manufacturera de la OCDE. De ahí que no solo se ponga énfasis en la interpretación de los parámetros con objeto de determinar el sentido de los rendimientos a escala, sino que también se haga uso de esta información para identificar qué actividades u observaciones son las que lideran el rendimiento productivo.

La implantación de los índices de Malmquist de forma aplicada exige calcular funciones de distancia intertemporales. Los programas necesarios para su cálculo son introducidos desde una perspectiva dual en la sección 4.3. Sin embargo, las funciones de distancia no siempre pueden ser resueltas a través de esta técnica de forma que los índices de distancia no son calculables. En esta misma sección se ilustra bajo qué circunstancias los programas de optimización son irresolubles, abogándose por el uso de funciones de distancia tecnológicas. Adicionalmente, se pone manifiesto los distintos resultados que, en función de las escala de operaciones, pueden ser obtenidos de los índices de rendimiento productivo en los que se descomponen la productividad absoluta, óptima y relativa. Centrándose en la primera de éstas, pueden darse situaciones en que las transformaciones técnicas y de escala presenten resultados contradictorios entre las orientaciones elegidas, véase Zofío y Lovell (2000).

Así mismo, en el capítulo cuarto se pretende mostrar de una forma sencilla la mecánica aplicada que permite implantar el modelo de rendimiento productivo a través del Análisis Envolvente de Datos. Para ello, en la sección 4.5, se considera el ejemplo que Grifell–Tatje y Lovell (1999a) presentan con objeto de ilustrar la descomposición por ellos propuesta del índice de productividad absoluta de los factores –similar a la planteada por Ray y Desli (1997), por lo que las apreciaciones realizadas sobre esta última pueden extenderse a la primera–. Dado que el ejemplo ideado por estos autores recoge todas las situaciones que pueden presentarse con relación al cambio en la tecnología y en la eficiencia productiva, éste resulta adecuado para ilustrar, de acuerdo a una tecnología monoproducto y monofactor como la presentada en el primer capítulo, el modelo de evaluación sugerido en esta investigación.

En primera instancia se muestra la posibilidad de realizar una evaluación básica del rendimiento que permite obtener los datos esenciales con relación a la evolución absoluta, óptima y relativa, cuadro 4.5.1. Nótese que, si bien para la obtención de estos valores no es necesario caracterizar la tecnología de producción, los resultados obtenidos sirven como referente para establecer si los índices de Malmquist propuestos facilitan la respuesta adecuada respecto a la evolución del rendimiento productivo.

Así, posteriormente, se procede a hacer uso del Análisis Envolvente de Datos para aproximar la tecnología y calcular las funciones de distancia contemporáneas e intertemporales, cuadro 4.5.2. Las relaciones existentes entre estas funciones de distancia de acuerdo a los índices de Malmquist permiten alcanzar los resultados previamente establecidos, mostrando la validez de esta técnica en la obtención de los valores de referencia. Sin embargo, el análisis no finaliza aquí, sino que al caracterizar la tecnología de producción de una forma estática y dinámica, es posible identificar las fuentes responsables de las variaciones experimentadas en las productividades absolutas, óptimas y relativas, cuadro 4.5.4. La discusión que se realiza para las actividades que presentan una evolución más relevante ilustra la comparación simultánea del cambio en los procesos productivos y la propia tecnología, lo que permite identificar las variaciones en la productividad relativa. Dado que las variaciones en la tecnología se corresponden con las transformaciones productivas de las actividades líderes, el modelo relativiza en última instancia el comportamiento de cada actividad respecto a aquel que ha de servirle como guía, *i.e.* la variación en la productividad absoluta –desagregable en las transformaciones técnicas y de escala respecto a una tecnología de referencia– respecto a las variaciones en la productividad óptima –desagregable en cambio técnico y de escala respecto a la escala de operaciones de la actividad evaluada–.

Todas estas relaciones pueden emplearse para proponer una descomposición del índice de productividad que informa completamente sobre la evolución productiva de la actividad y la propia tecnología, cuadro 4.5.5. Además, resulta posible ilustrar las descomposiciones alternativas propuestas por Färe *et al.* (1994b) y Ray y Desli (1997) mostrando como cada una de ellas se centran en aspectos concretos de la variación en la tecnología y la eficiencia sin caracterizar de forma completa las variaciones acontecidas en éstas.

Finalmente, antes de concluir la discusión relativa al Análisis Envolvente de Datos, en la sección 4.6 se abordan las relaciones existentes entre las premisas teóricas que permiten establecer la idoneidad de los índices de Malmquist a partir de criterios axiomáticos y tecnológicos, y su reflejo aplicado a través de esta técnica de optimización matemática. Estableciendo estos criterios de idoneidad en términos de las funciones de distancia que componen el índice y centrando el análisis en la variación absoluta de los factores, se muestra cómo los programas formulados con objeto de determinar los índices representativos de las transformaciones y cambios en términos técnicos y de escala, así como las propias variaciones en la eficiencia técnica y de escala, satisfacen las propiedades teóricamente establecidas de identidad y monoticidad pero no así las de proporcionalidad y separabilidad, véase (4.5.2). Esto es debido al parámetro de escala que desde una perspectiva primal aproxima una tecnología caracterizada por rendimientos variables. De esta forma, desde una perspectiva tecnológica, la aproximación satisface el criterio de máxima flexibilidad o mínimas restricciones tecnológicas. Por el contrario, cuando se formulan programas de optimización que imponen la condición de homogeneidad lineal –rendimientos constantes a escala–, las formulaciones DEA satisfacen las propiedades de identidad, monoticidad y proporcionalidad puestas de manifiesto como consecuencia de la desaparición del parámetro determinante de la escala de operaciones. Sin embargo, respecto a la propiedad de separabilidad es preciso resaltar que ésta no puede ser impuesta a través del Análisis Envolvente de Datos, de tal forma que las funciones de distancia y los propios índices de Malmquist calculados a través de esta técnica no presentan homoteticidad en *outputs*, *inputs* o simultáneamente. Es decir, resulta imposible imponer la condición de separabilidad dado que en el proceso de optimización los pesos correspondientes a productos y factores son determinados de forma simultánea sin que puedan individualizarse (separarse) los productos obtenidos de los factores empleados.

Conviene finalizar el presente epígrafe poniendo de manifiesto que la estimación de funciones de distancia a través de la técnica del Análisis Envolvente de Datos no es la única existente aunque sí la más consolidada. En tiempos recientes se están proponiendo estimaciones paramétricas como las formuladas por English *et al.* (1993), Coelli y Perelman (1996) o Balk (2000) y, en relación a las funciones tecnológicas o *graph*, Cuesta y Zofío (1999). Pese a que esta aproximación se encuentra en sus inicios y debe resolver importantes problemas teóricos, su proyección futura como campo de investigación presenta excelentes perspectivas.

5. La evaluación del rendimiento productivo en la industria manufacturera de la OCDE

El último capítulo del presente proyecto de tesis pretende ilustrar la potencialidad analítica del modelo de evaluación del rendimiento productivo y su desarrollo empírico a través del análisis envolvente de datos, DEA. El objetivo es determinar la evolución de la productividad en la industria manufacturera de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, OCDE, caracterizando la tecnología de producción con objeto de identificar las fuentes que dan origen al incremento en la productividad de los factores. Los índices de productividad de Malmquist seleccionados se basan en la función de distancia de productos –por ser ésta una propuesta de evaluación creíble– y satisfacen la propiedad de transitividad con objeto de poder realizar agregaciones y desagregaciones consistentes entre subperíodos.

Con el propósito de desarrollar el análisis, se ha recurrido a la información publicada por la OCDE en la última versión de la *International Sectoral DataBase* que data de 1998, ISDB98. Un hecho relevante que debe ponerse de manifiesto es la exclusión de España frente a otros países que en teoría presentan unas operaciones estadísticas de calidad equiparable. Esta ausencia se debe a la falta de datos oficiales relativos al *stock* de capital, ya sea en términos brutos o netos. Siendo ésta una de las variables fundamentales dentro de la ISDB98, la falta de información deja a España fuera de cobertura[61].

Según la OCDE, la ISDB98 constituye la herramienta estadística más adecuada para realizar análisis de productividad comparativos a nivel internacional. Esta afirmación es cierta si nos centramos en fuentes estadísticas oficiales, si bien cuando se desciende al ámbito aplicado de la academia, su valía es ciertamente relativa tal como se pone de manifiesto al comparar la información facilitada en esta base de datos con aquella normalmente deseable –véanse los análisis de Caves

---

[61] En el caso español son conocidas las estimaciones realizadas por el Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas que, sin embargo, no disponen del respaldo oficial que habría de suministrar el Instituto Nacional de Estadística, véase IVIE (1995). Puesto el doctorando en contacto con la OCDE, se le ha informado que, en estos momentos, existe un programa de cooperación entre el IVIE y esta organización con objeto de hacer uso de esta información para posteriores publicaciones.

(1992), Hickman (1992) o Jorgenson (1995)–. Respecto a la idoneidad de la ISDB98, ésta puede juzgarse de acuerdo a dos parámetros fundamentales: su cobertura en el ámbito geográfico, sectorial, temporal y variables (información recogida), así como la definición de estas últimas. Con relación a la cobertura geográfica, sectorial y temporal, éstas resultan adecuadas al incluir el G7 más una serie de naciones con una calidad estadística elevada, una desagregación a 33 ramas de actividad y abarcar un horizonte temporal efectivo de veinticinco años.

Sin embargo, con relación a las variables disponibles, destaca la ausencia de la producción y los consumos intermedios, lo cual restringe el análisis de la tecnología de producción a la función de valor añadido. Se debe así renunciar a la información relativa a la producción final y a establecer la influencia que los factores no primarios –consumos intermedios entre los que destaca la energía– tienen sobre el proceso productivo. Concretamente, con objeto de que la función de valor añadido se encuentre definida y permita analizar la evolución del rendimiento productivo –siendo una representación válida de la tecnología– debe asumirse que los *inputs* primarios –trabajo y capital– resultan separables de aquellos secundarios, (5.1.4). Esta condición implica imponer condiciones de separabilidad restrictivas sobre la tecnología de producción que pueden no verificarse en la realidad –véanse Diewert (1978) y Denny y May (1978)–.

Con relación a la definición de las variables destaca la simplicidad con la que los servicios prestados por el empleo y el capital son considerados. En el primer caso, la única información disponible de forma generalizada es la del número de ocupados que, tal como se pone de manifiesto en la sección 5.1, dista enormemente de los índices normalmente definidos atendiendo a las características socioeconómicas y demográficas de los trabajadores, (5.1.9). En el segundo caso, el *stock* de capital considerado se corresponde con aquel bruto, calculado de acuerdo al método del inventario permanente, *i.e.* valorando las inversiones realizadas en las diversas generaciones de capital a su precio de adquisición original, (5.1.12), y sin ponderar cada una de ellas en función de la eficiencia física que, en cada momento temporal, les resta (5.1.16). De esta forma no se hace uso de funciones de eficiencia con objeto de determinar el *stock de capital productivo*. Por el contrario, la OCDE sí facilita información respecto al *stock* de capital neto, que responde a una concepción económica (contable) del valor del inmovilizado instalado. Tal *stock* de capital se obtiene, al igual que aquel productivo, a partir del *stock* de capital bruto pero ponderando las inversiones pasadas con las funciones de depreciación oportunas (5.1.13). Debido a que las funciones de supervivencia productivas –*age efficiency profiles*– y económicas –*age price profiles*– no han de coincidir, así como a la limitada cobertura geográfica del *stock* de capital neto, se ha debido emplear la formulación básica del *stock* de capital bruto como variable representativa de este factor productivo.

Así, tanto con relación a las variables disponibles como a la definición de los servicios prestados por el empleo y capital, se han puesto de manifiesto las discrepancias existentes entre las estadísticas incluidas en la ISDB98 y la práctica habitual que se realiza en ambientes académicos. Estas deficiencias no impiden que la ISDB98 constituya una base de datos adecuada para reflejar la potencialidad del modelo de evaluación del rendimiento puesto de manifiesto en esta investigación. La determinación del rendimiento productivo en esta industria es ampliamente conocida a nivel aplicado, de forma que los resultados obtenidos son fácilmente reconocibles por los economistas interesados en el área de la productividad y la eficiencia. Siguiendo la exposición realizada en el ejemplo de evaluación presentado en la sección 4.2, el resto del capítulo esta estructurado atendiendo a una evaluación básica del rendimiento que puede realizarse sin caracterizar la tecnología de producción –sección 5.2–y al cálculo que se realiza de los índices de Malmquist de acuerdo a la metodología introducida –sección 5.3–.

En el primer caso se realiza un análisis del rendimiento productivo atendiendo a la definición del índice de Törnqvist propuesto por la OCDE en la propia ISDB98, (5.2.1–2), véanse Meyer zu Schlochtern y Meyer zu Schlochtern (1994) y OCDE (1998a). Este análisis permite adelantar de forma general la evolución creciente de la productividad absoluta de los factores que alcanza en términos medios el 64,7%, siendo Italia, Bélgica y Finlandia los países que presentan mayores variaciones productivas al situarse en torno al 100%, y la República Federal Alemana aquel con menores ganancias al incrementar su productividad absoluta en los veintitrés años considerados un 32,0%, véase el cuadro 5.2.2. Respecto a la productividad óptima, ésta alcanza el 41,2%, estando liderada en todo el periodo por los Estados Unidos. Finalmente, es posible identificar un proceso de convergencia generalizado en la industria manufacturera al incrementarse la productividad relativa a una tasa media de variación interanual del 0,6% –*i.e.* un 16,7% acumulado desde 1970 hasta 1993–.

Gracias a los cálculos realizados del índice de Törnqvist propuesto por la OCDE, resulta posible contrastar los resultados obtenidos de acuerdo a esta metodología tradicional de números índices con aquella de los índices de Malmquist. La sección 5.3 discute los resultados obtenidos al calcular estos índices de acuerdo a la técnica de optimización matemática que constituye el Análisis Envolvente de Datos, (5.3.1–2–3–4). Dado que el cálculo de las funciones de distancia que integran estos índices exigen una aproximación empírica de la tecnología, ha sido posible constatar una serie de hechos relevantes:

1) El liderazgo de la tríada postbélica constituída por la República Federal Alemana, Japón y los Estados Unidos. Desde 1970 a 1981 éstos países definen los óptimos productivos –máxima productividad potencial– respecto a los cuales se evalúa la productividad relativa o eficiencia productiva de los restantes. A partir de ese año, los Estados Unidos constituyen la única escala de operaciones más productiva.

2) La evolución de los procesos productivos de las naciones evaluadas muestra una convergencia elevada, al observarse valores crecientes de las funciones de distancia contemporáneas representativas de la productividad relativa –desde el 77,5% en 1970 al 86,4% en 1993, véanse los anexos 2.3–4–. En términos productivos tal evolución se corresponde con un proceso de intensificación capitalista frente al empleo[62].

3) Una vez determinada la evolución creciente de la eficiencia productiva resulta posible determinar si su origen se debe a causas técnicas o de escala. La funciones de distancia contemporáneas representativas de la eficiencia técnica y de escala muestran cómo la convergencia en la eficiencia productiva se debe

fundamentalmente a mejoras técnicas, al permanecer la ineficiencia de escala en un valor constante en torno al 10%, véanse los anexos 2.1–2. Adicionalmente, el análisis de los multiplicadores derivados del proceso de optimización muestra que el sentido de la ineficiencia de escala corresponde a rendimientos crecientes –situación que no debe sorprender si consideramos que los volúmenes absolutos de las naciones líderes son los más elevados–.

Establecidas estas conclusiones genéricas con relación a las naciones líderes, las características de la tecnología de producción, y las fuentes que determinan la productividad relativa o eficiencia productiva, se aborda posteriormente la cuantificación de la variaciones que en la productividad absoluta –total–, óptima y relativa así como su descomposición con objeto de determinar las fuentes que les dan origen. Los resultados obtenidos con relación a las productividades agregadas se han presentado en la sección 3.2 junto a los cálculos del índice de Törnqvist. Así, resulta posible ilustrar la compatibilidad existente entre ambas metodologías, al ser las evoluciones de las magnitudes muy similares –si bien el modelo de los índices de Malmquist resulta superior al poder identificar las fuentes que, desde una perspectiva tecnológica, permiten explicar las variaciones en las productividades–.

1) Con relación a las variaciones en la productividad absoluta, (5.3.5–6), ésta se ha incrementado en término medio un 74,1% –de acuerdo a una tasa de variación interanual de 2,4%–. Los países líderes en ganancias son, al igual que en relación al índice de Törnqvist, Finlandia, Italia y Bélgica, mientras que aquel con menores ganancias es, una vez más, la República Federal Alemana. Gracias a la definición transitiva de los índices de Malmquist, resulta posible analizar la evolución agregada por subperíodos. En la década de los años setenta se presenta una elevada heterogeneidad con progresos de Italia y los Países Bajos superiores al 30% mientras que Japón, Suecia y el Reino Unido, al ser los países más afectados por la crisis petrolífera de principios de la década, se sitúan en niveles

[62] Esto representa un cambio técnico no neutral que puede ser cuantificado dentro del marco de los índices de Malmquist de acuerdo a la metodología propuesta por Färe *et al.* (1997) tal como muestran Arcelus y Arocena (1999) haciendo uso de la ISDB97.

de productividad inferiores a los verificados en 1970. En este período, la media de las naciones consideradas se incrementa un 14,7%, lo que representa una tasa de variación interanual del 1,45%. La evolución de la productividad mejora de forma sustancial en los años ochenta al duplicarse la tasa media de incremento que alcanza el 34,4%, siendo la variación interanual del 3,3%. Finalmente, en los años noventa, las tasas de crecimiento se deceleran notablemente al situarse el incremento interanual en el 2,3%.

Resulta ahora posible proceder a la desagregación de la variación en la productividad absoluta de los factores en términos técnicos y de escala, (5.3.5–6). Los resultados obtenidos muestran que, en términos generales, las ganancias de productividad se deben a mejoras técnicas respecto al subconjunto eficiente o frontera de posibilidades de producción, mientras que la ineficiencia de escala apenas si varía en los veintitrés años considerados, véanse los gráficos (5.3.9–10). De esta forma, aunque el conjunto de países altera su escala de producción en la misma dirección que los países líderes y, especialmente, los Estados Unidos, incrementando de forma significativa el valor añadido y el *stock* de capital al tiempo que reducen el número de ocupados, esta nación presenta un comportamiento análogo de tal forma que las posiciones relativas apenas varían por lo que la presencia de rendimientos crecientes a escala resulta constante –este resultado se corresponde con la escasa variación en la eficiencia de escala, tal como se muestra en la descomposición acumulada de la productividad relativa de los factores en el gráfico 5.3.26–. Por países destaca Finlandia, que muestra las evoluciones extremas tanto en términos de transformaciones técnicas como de escala, al presentar unas variaciones acumuladas del 196% y –14% respecto a la productividad combinada de los EE.UU. y la R.F.A. que le sirven de referencia.

2) En relación a la productividad óptima de los factores, (5.3.7–8), ésta se corresponde con la evolución productiva de las naciones líderes. Así, el rendimiento potencial de las escalas de operaciones más productivas se eleva un 53,6% en los veintitrés años considerados, *i.e.* un incremento interanual del 1,82%. Dada la multiplicidad de escalas óptimas que pueden presentarse de acuerdo a la metodología del Análisis Envolvente de Datos, estos valores suponen

el promedio de la evolución de las escalas identificadas como óptimas, siendo las mayores variaciones aquellas correspondientes a las naciones que líderan la productividad absoluta de los factores y que, por tanto, tienden a determinar las variaciones en la tecnología. Por tanto, su descomposición por subperíodos muestra una elevada correlación con la ya comentada para las variaciones en la productividad absoluta, siendo la década de los ochenta cuando se observan los mayores incrementos –un 28,8% de variación media acumulada que se corresponde un una tasa interanual del 2,84%–.

En concreto, las naciones líderes que determinan la variación en la productividad óptima son la R.F.A. y los Estados Unidos –junto a Japón hasta 1974 tal como se muestra en el cuadro 5.3.2–. La evolución seguida por estos dos países determina el valor más frecuente de esta magnitud, un 71% acumulado desde 1970 a 1993, sirviendo de referencia para Finlandia, Bélgica, Italia, los Países Bajos y los propios EE.UU.

Si atendemos ahora a la descomposición de las variaciones en las productividades óptimas en términos medios puede apreciarse que la mayor contribución se identifica con el cambio técnico, *i.e.* con progresos del subconjunto eficiente o frontera de producción, que permiten obtener una mayor cuantía de valor añadido por unidad de capital y empleo. Por el contrario, la variación en la productividad óptima de los factores no revela, desde una perspectiva genérica, alteraciones sustanciales en los diferenciales de productividad entre los subconjuntos eficientes y óptimos lo que, una vez más refleja la evolución paralela de los procesos productivos de las industrias líderes y el resto de naciones, véanse los gráficos 5.3.14–15.

3) Una vez analizada la evolución en la productividad absoluta y óptima, así como las fuentes que originan sus variaciones, resulta posible completar el análisis de la evolución del rendimiento productivo comparando ambas magnitudes según las formulaciones básicas (5.3.1–3). De acuerdo al modelo propuesto en el presente proyecto de tesis, esta evolución resulta equivalente a la variación en la eficiencia productiva que, considerando la evolución paralela de la variación en la productividad absoluta en sus términos de transformación técnica y de escala y de

la productividad óptima en cambio técnico y de escala, puede así mismo descomponerse en las variaciones en la eficiencia técnica y de escala, (5.3.2–4).

La evolución de la productividad relativa de los factores en términos medios permite cuantificar el anticipado proceso de convergencia que viene experimentándose en la industria manufacturera de la OCDE. El valor acumulado de esta magnitud alcanza el 12% desde 1970 a 1993 lo cual supone una aproximación interanual al rendimiento óptimo del 0,5%. Este proceso de convergencia se inicia a finales de los años setenta dado que en 1978 el valor acumulado de la variación en la productividad relativa era unitario, mostrando la igualdad entre las variaciones de las productividades absolutas y óptimas. Descendiendo al análisis individual por naciones, esta evolución presenta una elevada heterogeneidad. Así, mientras Finlandia, Italia y los Países Bajos acercan su rendimiento a aquel de las naciones líderes un 49%, 42% y 26% respectivamente, Dinamarca, Japón y Noruega ven cómo su rendimiento resulta inferior al experimentado por sus óptimos de referencia en un 1%, 14% y 20%.

La evolución previamente analizada se corresponde con los diferenciales de crecimiento entre las productividades absolutas y óptimas, véase el cuadro 5.3.6. De forma equivalente es posible analizar las fuentes que dan origen a las variaciones en la productividad relativa en términos de eficiencia técnica y de escala. Los resultados representados en los gráficos 5.3.25–26 y recogidos en el cuadro 5.3.7, revelan que las ganancias de eficiencia productiva tienen su origen en mejoras técnicas –como consecuencia del acercamiento generalizado al subconjunto eficiente o frontera de producción–, mientras que las ganancias en términos de eficiencia de escala apenas sí son relevantes. Estos resultados son coherentes con las conclusiones ya puestas de manifiesto con relación a las evoluciones relativas de la transformación y cambio técnico –variación en la eficiencia técnica– y a la transformación y cambio de escala –variación en la eficiencia de escala–. La fuentes responsables del proceso de convergencia en términos medios no difieren de forma sustancial cuando se desciende al análisis individual por industrias. Sin embargo, destacan Dinamarca y Noruega por sus pérdidas de eficiencia relativa con origen en un alejamiento de la escala de operaciones óptima. Si bien ambas naciones son eficientes en sentido técnico, a lo largo del período experimentan una perdida de eficiencia de escala responsable de que la evolución en su productividad absoluta sea inferior a la óptima que les sirve de referencia.

Los análisis realizados ponen de manifiesto el potencial analítico del modelo propuesto a la hora de caracterizar la evolución del rendimiento productivo, recurriendo a su formulación en índices de Malmquist y su cálculo a través de la técnica del Análisis Envolvente de Datos. Sin embargo, antes de finalizar el análisis de los resultados obtenidos, conviene concluir con la descomposición de la variación en productividad absoluta de los factores desde la perspectiva introducida por el doctorando en Zofío y Lovell (1998), así como su comparación con aquellas propuestas por Färe *et al.* (1994b) y Ray y Desli (1997).

Las comparaciones entre estas descomposiciones, que pueden realizarse tanto en términos de variaciones interanuales como acumuladas –véanse las formulaciones (5.4.1) a (5.4.6)–, ponen de manifiesto que la única descomposición a partir de la cual es posible deducir la evolución completa del rendimiento productivo es aquella que se deriva del modelo aquí propuesto y que se corresponde con Zofío y Lovell (1998). El próximo cuadro resume la información facilitada por las distintas descomposiciones, pudiéndose seguir de forma empírica a través de la discusión realizada en la última sección del capítulo quinto, donde se analizan los casos de Finlandia y Noruega por presentar, respectivamente, las industrias con la mayor y menor variación en las productividades relativas.

	(1)	(2)	(1)/(2)	(3)	(4)	(3)/(4)	(5)	(6)	(5)/(6)
Índice	$\Delta AFP_{70,i}^{70,93}$	$\Delta OFP_{70,i}^{70,93}$	$\Delta RFP_{70,i}^{70,93}$	$TT_{70,i}^{70,93}$	$TC_{70,i}^{70,93}$	$\Delta TE_{70,i}^{70,93}$	$ST_{70,i}^{70,93}$	$SC_{70,i}^{70,93}$	$\Delta SE_{70,i}^{70,93}$
		$TECCH_{FGNZ}$	$EFFCH_{FGNZ}$		TECCH	PEFFCH	$SEFFCH_{RD}$		$SEFFCH_{FGNZ}$
CCD				*	*				
FGNZ	*	*	*			*			*
RD	*				*	*	*		
ZL	*	*	*		*	*		*	*

Información facilitada por las descomposiciones consideradas.

Atendiendo a los resultados presentados, las descomposiciones de Zofío y Lovell (1998), ZL, y Färe *et al.* (1994b), FGNZ, informan sobre la evaluación básica del rendimiento al facilitar las variaciones en la productividad absoluta, óptima y relativa. Por el contrario, la formulación original de Caves Christensen y Diewert (1982a), CCD, y la propuesta por Ray y Desli (1997), RD, no aportan información alguna con relación a las variaciones en las productividades óptimas y relativas. En el caso del índice de Malmquist original, al no considerarse representaciones homogéneas de la tecnología –rendimientos constantes a escala–, resulta imposible determinar la escala de operaciones más productivas y, así, proceder a la evaluación de la eficiencia productiva, *i.e.* solo se facilita información respecto a la variación en la eficiencia técnica. Adicionalmente, al no contemplar la posibilidad de que las actividades operen de forma ineficiente sin alcanzar la producción potencial, tal variación se corresponde, así mismo, con el cambio técnico de la tecnología, *i.e.* la evolución de las actividades es aquella que determinan el cambio en la tecnología . Respecto a la descomposición propuesta por Ray y Desli (1997), ésta no extiende las condiciones previas aplicables a la variación en la productividad absoluta a las variaciones en la productividad óptima y relativa.

A partir de este nivel de análisis, el objetivo de la descomposición se centra en facilitar información suficiente para evaluar la evolución de la tecnología y de la eficiencia productiva de las actividades. En este sentido, la descomposición de la variación en la productividad óptima en cambio técnico y de escala y de la variación en la productividad relativa o eficiencia productiva en eficiencia técnica y de escala que realizan Zofío y Lovell (1998), facilita la identificación de la transformación técnica y de escala. Dado que Färe *et al.* (1994b) no proceden a descomponer la evolución de la productividad óptima –que en su modelo constituye el cambio tecnológico–, no es posible comparar la evolución paralela de las variaciones en la tecnología (cambio técnico y de escala) y de los procesos productivos de las actividades (transformación técnica y de escala). Así, la información que facilitan se centra en la descomposición de la productividad relativa o eficiencia productiva en las variaciones en la eficiencia técnica y de escala, *i.e.* la situación final en la que la actividad evaluada permanece en ambas dimensiones del proceso productivo.

En el caso de la propuesta de Ray y Desli (1997), al no informar sobre las variaciones en la productividad óptima o relativa, no es posible descomponerlas en los términos mencionados y, por tanto, estos autores centran su descomposición de la productividad absoluta en el cambio técnico, la situación relativa final en términos de eficiencia técnica –de forma que se podría calcular el término de transformación técnica– y, finalmente, el término relativo a la escala de operaciones que se corresponde con la transformación de escala. Si bien su descomposición se corresponde con aquella básica propuesta en esta investigación del índice de Malmquist –en transformación técnica y de escala–, ésta no permite la caracterización completa de la evolución del rendimiento productivo. Así, es posible concluir que la propuesta aquí realizada engloba en un único marco analítico la información facilitada por las descomposiciones previas, al tiempo que permite identificar de forma coherente el significado de cada uno de los términos definidos.

Con relación a las direcciones futuras del análisis aplicado, sería deseable poder desarrollar bases de datos que permitiesen una definición apropiada y consistente de las variables representativas de los procesos tecnológicos. De esta forma resulta necesario realizar un esfuerzo importante en la consecución de estadísticas fiables relativas a producción, consumos intermedios, características socioeconómicas de los ocupados y, finalmente, de eficiencia operativa del *stock* de capital instalado. Esto implicaría importantes cambios en las operaciones estadísticas nacionales pues éstas tendrían como meta no solo reflejar desde una perspectiva de riqueza económica la evolución de un país –objetivo actual de la Contabilidad Nacional–, sino también reflejar fehacientemente la evolución de la tecnología en los distintos sectores productivos.

Hoy día resulta necesario apoyarse en las estadísticas de Contabilidad Nacional para realizar análisis de productividad, si bien su definición no resulta la más adecuada en múltiples casos. Véase en este sentido la discusión realizada respecto al valor añadido, cuya determinación resulta fundamental para abordar la distribución de rentas en la nación, pero que restringe la representación que podemos realizar de la tecnología de producción o, como segundo ejemplo, la cuantificación del *stock* de capital en términos netos o productivos. La primera dirigida a valorar la riqueza instalada en inmovilizado inmaterial mientras la segunda pretende determinar los servicios efectivos que tales activos prestan al proceso productivo. En este sentido resultan fundamentales los esfuerzos que distintas instituciones están realizado –así, es de destacar la conferencia sobre el *stock* de capital que esta promoviendo la OCDE desde hace unos años: *Conference on Capital Stock Measurement*–. Las valoraciones realizadas son válidas tanto a nivel internacional como nacional, por lo que resulta vital incidir en estos aspectos también en España. Sería así posible elevar la calidad de las estadísticas al alcance de los investigadores, situando la información disponible en la vanguardia teórica y aplicada.

BIBLIOGRAFIA

Ahn, T., A. Charnes y W. Cooper (1989), "A Note on the Efficiency Characterizations Obtained in Different DEA Models", *Socio–Economic Planning Sciences*, 22, pp. 253–257.

Amat, O. (1989), *El Leasing: Modelos, Fundamentos y Comparación con Otras Opciones*, Deusto, Bilbao.

Arcelus, F. y P. Arocena (1999), "Measuring Sectoral Productivity Across Time and Across Countries", *Journal of Operational Research*, 119, pp. 254-266.

Arrow, J. (1974), "The Measurement of Real Value Added" en David, P. y M. Reder (edts.), *Nations and Households in Economic Growth*, Academic Press, New York.

Balk, B. (1993), "Malmquist Productivity Indexes and Fisher Ideal Indexes: Comment", *Economic Journal*, 103, pp. 680-682.

Balk, B. (2000), "Scale Efficiency and Productivity Change", de próxima publicación en el *Journal of Productivity Analysis.*

Balk, B. y R. Althin (1996), "A New, Transitive Productivity Index", *Journal of Productivity Analysis*, 7, pp. 19–27.

Banker, R. (1983), "Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operations Research*, 17, pp. 35–44.

Banker, R. y R. Thrall (1992), "Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operations Research*, 62 (1), pp. 74–84.

Banker, R, H. Chang, y W. Cooper (1996), "Equivalence and Implementation of Alternative Methods for Determining Returns to Scale in Data Envelopment Analysis, *European Journal of Operations Research*, 89, pp. 473–481.

Banker, R., A. Charnes y W. Cooper (1984), "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis". *Management Science*, 30 (9), pp. 1.078-1.092.

Banker, R. y M. Morey (1986), "Efficiency Analysis for Exogenously Fixed Inputs and Outputs", *Operations Research*, 34(4), pp. 513–521.

Banker, R. y M. Morey (1989), "Incorporating Value Judgments in Efficiency Analysis", en Chan, J., J. Patton y M. James (edts.), *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*. Volume 5.A, Research Annual, Greenwich, Conn. and London: JAI Press, pp. 245–67

Banker, R., T. Triantis y O. Girod (1998), "A Mathematical Programming Approach for Measuring Technical Efficiency in a Fuzzy Environment", *Journal of Productivity Analysis*, 10(1), pp. 85–102.

Briec, W. (1997), "A Graph Type Extension of Farrell Technical Efficiency Measure", *Journal of Productivity Analysis*, 8, pp. 95–110.

Berndt, E. y L. Christensen (1974), "Testing the Existence of a Consistent Aggregate Index of Labor Inputs", *The American Economic Review*, 64 (3) pp. 391–404.

Bessent, A., W. Bessent, y J. Elam (1988), "Efficiency Frontier Determination by Constrained Facet Analysis", *Operations Research*, 36, pp. 785–796.

Bjurek, H. (1996), "The Malmquist Total factor Productivity Index", *Scandinavian Journal of Economics*, 98, pp. 303-313.

Blackorby, C., D. Primont y R. Russell (1978), *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North–Holland, Amsterdam.

Boles, J. (1963), Efficiency Squared – Efficient Computation of Efficiency Indexes, Working Paper, University of California.

Cabrera, M. y J.L. Zofío (2000), "Titularidad, Estructura de Mercado y Eficiencia Técnica en las Líneas de Transporte Aéreo: Un Análisis de Frontera *Graph* No Paramétrico", de próxima publicación en la *Revista de Economía Aplicada*.

Caves, R. (edt.) (1992) *Industrial Efficiency in Six Nations*, MIT Press, London.

Caves, D., L. Christensen, y E. Diewert (1982a), "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output, and Productivity", *Econometrica*, 50(6), pp. 1.393-1.414.

Caves, D., L. Christensen, y E. Diewert (1982b), "Multilateral Comparison of Output, Input, and Productivity Using Superlative Index Numbers", *Economic Journal*, 92 (365), pp. 73-86.

Chambers, R. (1988), *Applied Production Analysis*, Cambridge University Press, New York.

Chambers, R., Y. Chung y Färe, R. (1996), "Benefit and Distance Functions", *Journal of Economic Theory*, 70, pp. 407–419.

Chambers, R., Y. Chung y Färe, R. (1998), "Profit, Directional Distance Functions and Nerlovian Efficiency", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 98 (2), pp. 351-364.

Charnes, A. y W. Cooper (1962), "Programming with Linear Fractional Functions", *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, pp. 181-185.

Charnes, A., W. Cooper, B. Golany, L. Seiford y J. Stutz (1985), "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto–Koopmans Efficient Empirical Production Functions", *Journal of Econometrics*, 30(12), pp. 91–107.

Charnes, A., W. Cooper, A. Lewin y Seiford, L. (edts.) (1994), *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Charnes, A., W. Cooper y Rhodes, E. (1978), "Measuring the Efficiency on Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, 2, pp. 429-444.

Chinloy, P. (1974), "Sources of Quality Change in Labor Input", *American Economic Review*, 10, pp. 108-119.

Christensen, L., D. Jorgenson y L. Lau, (1971), "Conjugate Duality and the Trascendental Logarithmic Production Function", *Econometrica*, 39 (4), pp. 255-256.

Christensen, L., D. Jorgenson y L. Lau (1973), "Trascendental Logarithmic Production Frontiers", *Review of Economics and Statistics*, 55 (1), pp. 28-45.

Coelli, T. and S. Perelman (1996), "Efficiency Measurement, Multiple-output Technologies and Distance Functions: With Application to European Railways", CREPP Working Paper, 96/05. University of Liege, Belgium.

Cooper, W., L. Seiford y K. Tone (2000), *Data Envelopment Analysis, A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Crandell, W. (1935), *The Conditions of Economic Progress*, The Macmillan Press, London.

Cuesta, R.A. y J.L. Zofío, (1999), "Graph Hyperbolic Efficiency and Distance Functions: A Parametric Approach", Working Paper, Departamento de Economía, Universidad de Oviedo.

Debreu, G. (1951), "The Coefficient of Resource Utilization", *Econometrica*, 19(3), pp. 273-292.

Denison, E. (1957), "Theoretical Aspects of Quality Change, Capital Consumption, and Net Capital Formation" en *Conference On Research in Income and Wealth: Problems of Capital Formation*, Princeton University Press, New Jersey.

Denison, E. (1961), "Measurement of Labor Input: Some Questions of Definition and the Adequacy of Data" en *Conference On Research in Income and Wealth: Output, Input and Productivity Measurement*, Princeton University Press, New Jersey.

Denny, M. y J. May (1978), "Homotheticity and Real Value Added in canadian Manufacturing" en Fuss, M. y McFadden, D. (edts.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North–Holland Publishing Co., Amsterdam.

Diewert, E. (1976), "Exact and Superlative Index Numbers", *Journal of Econometrics*, 4, pp. 115-145.

Diewert, E. (1978), "Hicks' Aggregation Theorem and the Existence of a Real Value–Added Function", en Fuss, M. y D. McFadden (edts.) (1978), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North–Holland Publishing Co., Amsterdam.

Diewert, E. (1980), "Aggregation problems in the Measurement of Capital", en Usher, D. (edt.), *The Measurement of Capital*, Chicago University Press, Chicago.

Diewert, E. (1992a), "The Measurement of Productivity", *Bulletin of Economic Research*, 44 (3), pp. 163-198.

Diewert, E. (1992b), "Fisher Ideal Output, Input and Productivity Indexes Revisited", *Journal of Productivity Analysis*, 3, pp. 211-248

Dogrimaci, A. y N. Adam, (edts.) (1981) *Aggregate and Industry-Level Productivity Analysis*, Martinus-Nijhoff, Boston.

Eichorn, W y J. Voeller (1976), *Theory of Price Index*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems 140, Springer Verlag, Berlin.

English, M., S. Grosskopf, K. Hayes y S. Yaisawarng (1993), "Output Allocative and Technical Efficiency of Banks", *Journal of Banking and Finance*, 17, pp. 349-366.

Färe, R. (1988), *Fundamentals of Production Theory*, Springer Verlag, Berlin.

Färe, R., E. Grifell-Tatjé, S. Grosskopf y C.A.K. Lovell (1997), "Biased Technical Change and the Malmquist Productivity Index". *Scandinavian Journal of Economics*, 99, pp. 119-127.

Färe, R. y S. Grosskopf (1992), "Malmquist Productivity Indexes and Fisher Ideal Indexes," *Economic Journal*, 102, pp. 158-160.

Färe, R. y S. Grosskopf (1996), *Intertemporal Production Frontiers: With Dynamic DEA*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Färe, R., S. Grosskopf, B. Lindgren y P. Roos (1989, 1994), "Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Approach" en Charnes, A., W. Cooper, A. Lewin y L. Seiford (edts.) (1994), *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Färe, R., S. Grosskopf y C.A.K. Lovell (1985), *The Measurement of Efficiency of Production*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Färe, R., S. Grosskopf y C.A.K. Lovell (1994), *Production Frontiers*. Cambridge University Press, New York.

Färe, R., S. Grosskopf, C.A.K. Lovell y C. Pasurka (1989), "Multilateral Productivity Comparisons When Some Outputs Are Undesirable: A Nonparametric Approach", *The Review of Economic and Statistics*, 71(1), pp. 90-98.

Färe, R., S. Grosskopf, y M. Norris (1997), "Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries: Reply", *American Economic Review*, 87 (5), pp. 1040-1043.

Färe, R., S. Grosskopf, M. Norris y Z. Zhang (1994b), "Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries", *American Economic Review*, 84 (1), pp. 66-83.

Färe, R., S. Grosskopf y P. Roos (1998), "Malmquist Productivity Indexes. A Survey of Theory and Practice", en Färe, R., Grosskopf, S. y Russell, R (1998): *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Färe, R. y D. Primont (1995a), *Multi-output Production and Duality: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Färe, R. y D. Primont, (1995b), "On Inverse Homotheticity", *Bulletin of Economic Research*, 47(2), pp. 161-166.

Färe, R., S. Grosskopf y R. Russell (edts.) (1998), *Index Numbers: Essays in Honour of Sten Malmquist*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Farrell, M. (1957), "The measurement of productive efficiency". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie A, General, 120 (3), pp. 282-284.

Fecher, F. y S. Perelman, (1992), "Productivity growth, Technological Progress and R&D in OECD industrial activities", en Gerold Krause-Junk (edt.) *Public Finance and Steady Economic Growth*, University of Hamburg, Hamburg.

Feldstein, M. y M. Rothschild (1974), "Toward an Economic Theory of Economic Replacement Investment", *Econometrica*, 42, pp. 68–81.

Fletcher, R. (1987), *Practical Methods of Optimization*, John Wiley, New York.

Fischer, I. (1921), "The Best Form of Index Number", *Journal of the American Statistical Association*, 17, pp. 533–537.

Førsund, F. (1993), "Productivity Growth in Norwegian Ferries," en H. Fried, C. A. K. Lovell y S. Schmidt (edts.), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*. New York: Oxford University Press.

Førsund, F. (1997), The Malmquist Productivity Index, TFP and Scale, Working Paper, Department of Economics and Business Administration, University of Oslo.

Fried, H., C.A.K. Lovell, y S. Schmidt, (1993) (edts.), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Oxford University Press. Oxford, New York.

Frisch, R. (1936), "Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers", *Econometrica*, 4, pp. 1-38.

Fuss, M. y D. McFadden (edts.) (1978), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North–Holland Publishing Co., Amsterdam.

Gill, P., W. Murray y M. Wright (1981), *Practical Optimization*, Academic Press. New York.

Green, A. (1964), *Aggregation in Economic Analysis: An Introductory Survey*, Princeton University Press, New Jersey.

Grifell-Tatjé, E. y C.A.K. Lovell (1995), "A Note On the Malmquist Productivity Index", *Economic Letters*, 47, pp. 169-175.

Grifell-Tatjé, E. y C.A.K. Lovell (1999a), "A Generalized Malmquist Productivity Index", *Top*, 7 (1), pp. 81–101.

Grifell-Tatjé, E. y C.A.K. Lovell (1999b), "Profits and Productivity", *Management Science*, 45 (9), pp. 1177–1193.

Grifell-Tatje, E., C.A.K. Lovell, y J.T. Pastor (1998), "A Quasi-Malmquist Productivity Index", *Journal of Productivity Analysis*; 10(1), pp. 7-20.

Grosskopf, S. (1986), "The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency ", *The Economic Journal*, 96, pp. 499-513.

Hanoch, G. (1970), "Homotheticity in Joint Production", *Journal of Economic Theory*, 2, 423-426.

Harcourt, G. (1972), *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, Cambridge University Press, London.

Harper, M. (1997), "Estimating Capital Inputs for Productivity Measurement: An Overview of Concepts and Methods", working paper, Bureau of Labor Statistics, Washington.

Hickman, B. (edt.) (1992), *International Productivity and Competitiveness*, Oxford University Press, New York.

Hicks, J. (1942), "Maintaining Capital Intact: A Further Suggestion", *Economica*, pp. 391-53.

Hicks, J. (1961), "Measurement of Capital in Relation to the Measurement of Economic Aggregates", en Lutz, F.A. y D.C. Hague (edts.), *The Theory of Capital*, Mc Millan, London.

Hicks, J. (1973), *Capital and Time: A New Austrian Theory*. Oxford University Press, London.

Hicks, J. (1974), "Capital Controversies. Ancient and Modern", *American Economic Review*, pp. 307-316.

Hulten, C. y F. Wickoff (1981), "The Estimation of Economic Depreciation Using Vintage Price Assets, *Journal Of Econometrics*, 15, pp. 367–396.

Hulten, C. (1990), "The Measurement of Capital" en Berndt, E. y J. Tripplet (edts.), *Fifty Years of Economic Measurement*, Studies in Income and Wealth, vol. 54, University of Chicago Press for the National Bureau of Economic Research, Chicago.

IVIE (1995), *El Stock de Capital en España y sus Comunidades Autónomas*, Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, Fundación BBV, Bilbao.

Johnson, W. (1913), "The Pure Theory of Utility Curves", *Economic Journal*, 23, pp. 483-513

Jorgenson, D. (1990), "Productivity and Economic Growth", en Berndt, E. y J. Tripplet (edts.), *Fifty Years of Economic Measurement*, Studies in Income and Wealth, vol. 54, University of Chicago Press for the National Bureau of Economic Research, Chicago.

Jorgenson, D. (1995), *Productivity. International Comparison of Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Jorgenson, D., F. Gollop y B. Fraumeni (1987), *Productivity and U.S. Economic Growth*, North Holland, Amsterdam.

Jorgenson, D. y Z. Griliches (1967), "The Explanation of Productivity Change", *Review of Economic Studies*, 34 (99), pp. 249-283.

Kendrick, J. (1961), *Productivity Trends in the United States*, National Bureau of Economic Research, Princeton, New Jersey.

Kendrick, J. (1961b), Some Theoretical Aspects of Capital Measurement, *American Economic Review*, 52, pp. 102–111.

Klein, L. (1993), "Restructuring the World Economy" en Hickman, G. (edt.) *International Productivity and Competitiveness*, Oxford University Press, New York.

Kon, Y. (1983), "Capital Input Choice under Price Uncertainty: A Putty-Clay Technology Case", *International Economic Review*; 24(1), pp. 183–197.

Koopmans, T. (1951), "An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities" en T. Koopmans (edt.) *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph. 13, John Wiley and Sons Inc., New York.

Koopmans, T. (1977), "Examples of Production Relations Based on Microdata", en T. Koopmans (edt.) *The Micro Foundations of Macroeconomics*, vol 6. Macmillan Press. London.

Lasdon, L. y S. Smith (1992), "Solving Sparse Nonlinear Programs Using GRG". *ORSA Journal on Computing*, 4 (1), pp. 2-15.

Laspeyres, E. (1871), "Die Berechnungeiner mittlerer Waarenpreissteigerung", *Järbucher für Nationalokönomie und Stististik*, 16, pp. 296–314.

Leontieff, W. (1947), "A Note on the Interrelations of Subsets of Independent Variables of a Continuous Function with Continuous First Derivatives", *Bulleting of the American Mathematical Society*, 53 (4), pp. 343–350.

Littleton, A. (1933), "Socialized Accounts", *The Accounting Review*, 8, pp. 267–271.

Lovell, C.A.K. (1994), "Linear Programming Approaches to the Measurement and Analysis of Productive Efficiency", *Top*, 2 (2), pp. 175-248.

Luenberger, D. (1992), "New Optimality Principles for Economic Efficiency and Equilibrium", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75, pp. 221-264.

Luenberger, D. (1995), *Microeconomic Theory*, McGraw-Hill, New York.

Malmquist, S. (1953), "Index Numbers and Indifference Curves", *Trabajos de Estadística*, 4(1), pp. 209-242.

Marx, K. (1867), *Das Kapital*, 1ª versión alemana, Otto Meisnner, Hamburg.

McFadden, D. (1978), "Cost, Revenue, and Profit Functions" en Fuss, M. y D. McFadden (edts.), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam.

Meyer zu Schlocthem, F.y J. Meyer zu Schlocthem (1994): "An International Sectoral Data Base for fourteen OECD Countries (second edition)". Economics Department, Working paper Nº 145. Organisation for Economic Co-operation and Development, Paris.

Moorsten, R. (1961), "On Measuring Productive Potential and Relative Efficiency", *Quarterly Journal of Economics*, 75, pp. 451-467.

Naciones Unidas (1993), *A System of National Accounts and Supporting Tables.* Studies in Methods, Series F. No. 2., New York.

Nadiri, I. (1970), "Some Approaches to the Theory and Measurement of Total Factor Productivity Change : A Survey", *Journal of Economic Literature*, 8, pp. 1137-77.

OCDE (1993), *Methods Used by OECD Countries to Measure Stocks of Fixed Capital*, Organisation for Economic Co-operation and Development , Paris.

OCDE (1998a), *ISDB98, User's guide*, Organisation for Economic Co-operation and Development , Paris.

OCDE (1998b), *OECD Data on Skills: Employment by Industry and Occupation*, Working Paper 98/4, Directorate for Science, Technology and Industry, Organisation for Economic Co-operation and Development , Paris.

Paasche, H. (1874), "Uber die Preisentwicklung der Letzen Jahre Nach den Hamburger Börsennotinnungen", *Järbucher für Nationalokönomie und Stististik*, 23, pp. 168–178.

Prieto, A. (1987), "Disponibilidad de Recursos y Eficiencia Productiva". *Revista de Estudios Agrosociales*, 142, pp 47-50.

Prieto, A. J. Revuelta y F. Rodriguez (1991), "Eficiencia Productiva Agraria en las Comarcas de la Comunidad Autónoma de Castilla y Leon". *Revista de Estudios Agrosociales* 151, pp 119-138.

Prieto, A. y J.L. Zofío, (1996), "Modelización de los Efectos de la Regulación Ambiental con Fronteras Tecnológicas DEA". *Revista Española de Economía Agraria*, 175 (1), pp. 63-86.

Prieto, A. y J.L. Zofío (2000), "Evaluating Effectiveness in Public Provision of Infrastructure and Equipment: The Case of Spanish Municipalities", de próxima publicación en el *Journal of Productivity Analysis*.

Ray. S. y E. Desli (1997), "Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries: Comment", *American Economic Review*, 87 (5), pp. 1.033-1.039.

Rosen, D., C. Schaffnit y J. Paradi, (1998), "Marginal Rates and Two-dimensional Level Curves in DEA", *Journal of Productivity Analysis*, 9 (3), pp. 205-232.

Sarafoglou, N. (1998), "The Most Influential DEA Publications: A Comment on Seiford", *Journal of Productivity Analysis*, 9(3), pp. 279-81.

Seiford, L. (1996), "Data Envelopment Analysis: The Evolution of the State of the Art (1978-1995)", *Journal of Productivity Analysis*; 7(2-3), pp. 99-137.

Shephard, R. (1953), *Cost and Production Functions*. Princeton University Press, New Jersey.

Shephard, R. (1970), *Theory of Cost and production Functions*. Princeton University Press, New Jersey.

Simar, L. y P. Wilson, (1996), "Aspects of Statistical Analysis in DEA-Type Frontier Models", *Journal of Productivity Analysis*, 7(2-3), pp. 177-85.

Simar, L. y P. Wilson, (1998a), Productivity Growth in Industrialized Countries, Working Paper, Institut de Statistique y CORE, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Simar, L. y P. Wilson, (1998b), "Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Frontier Models", Management Science, 44 (1) pp. 49-61.

Solow, R. (1957), "Technical Change and the Aggregate Production Function". *Review of Economics and Statistics*, 39 (3), pp. 312-320.

Stone, R. (1956), "Quantity and Price Indexes in National Accounts", Organization for Economic Co-operation, Paris.

Summers, R., I. Kravis y A. Heston (1980), "International Comparisons of Real Product and Its Composition: 1950-77", *Review of Income and Wealth*, 26(1), pp. 19-66.

Thompson, R., F. Singleton, R. Thrall y B. Smith (1986), "Comparative Site Evaluations for Locating a High–Energy Physics Lab in Texas", *Interfaces*, 16(6), pp. 35–49.

Törnqvist, L. (1936), "The Bank of Finland's Consumer Price Index", *Bank of Finland Monthly Bulletin*, 19, pp. 1-8.

Triplett, J. (1996), "Depreciation in Production Analysis and in Income and Wealth Accounts: Resolution of an Old Debate", *Economic Inquiry*, 34, pp. 93–115.

Tripplet, J. (1998), *A Dictionary of Usage for Capital Measurement Issues*, Second Meeting of the Camberra Group on Capital Stock Statistics, OECD, Paris.

Varian, H. (1984), "The Non Parametric Approach to Production Analysis", *Econometrica*, 52(3), pp. 579–597.

Vera, J. (1981), Una Aplicación de la Dualidad a la Teoría de la Producción: La Función de Distancia, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.

Zofío, J.L (1996), *Modelos de Estimación de Eficiencia Técnica: Una Aplicación a los Sectores Industriales de la OCDE*, Memoria de licenciatura-Tesina, Dpto. de Economía Aplicada, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Zofío, J.L. y C.A.K. Lovell, (1998), Graphyperbolic Productivity Indexes: A Reexamination of U.S. Agricultural Productivity Growth, Working Paper, Department of Economics, University of Georgia, Athens.

Zofío, J.L. y C.A.K. Lovell, (2000), "Graph Efficiency and Productivity Measures: An Application to U.S. Agriculture", de próxima publicación en *Applied Economics*.

Zofío, J.L. y A. Prieto (2000), "Environmental Efficiency and Regulatory Standards: The Case of CO2 Emissions from OECD Industries" de próxima publicación en *Resource and Energy Economics*.

ANEXOS

ANEXO 1. Evolución de la variación en la productividad absoluta de los factores según el índice de Törnqvist propuesto por la OCDE, (5.2.1–2).

Anexo 1.1. Evolución interanual de la productividad absoluta –total– de los factores, $\Delta TAFP_i^{t,t+1}$, (5.2.1).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Medi
Australia (AUS)	1,03	1,01	1,07	1,01	0,97	1,03	1,04	1,01	1,03	1,01	1,01	0,96	1,03	1,04	1,01	1,03	1,04	1,03	0,99	1,02	1,02	1,01	1,04	1,02
Bélgica (BEL)	1,03	1,07	1,08	1,02	0,97	1,11	1,03	1,05	1,05	1,04	1,04	1,06	1,06	1,03	1,03	1,00	1,01	1,05	1,04	1,00	0,99	0,99	0,99	1,03
Canadá (CAN)	1,04	1,05	1,05	1,00	0,97	1,04	1,04	1,01	0,99	0,93	1,00	0,94	1,07	1,10	1,04	0,99	1,03	1,02	1,00	1,00	0,97	1,04	1,05	1,02
Dinamarca (DNK)	1,04	1,06	1,03	1,03	1,04	1,03	1,00	0,99	1,04	1,05	0,99	1,01	1,06	1,00	0,98	0,96	0,96	1,03	1,01	0,98	1,01	1,02		1,02
Finlandia (FIN)	0,98	1,07	1,02	1,01	0,94	1,00	1,00	1,06	1,08	1,04	1,03	1,02	1,03	1,05	1,04	1,04	1,06	1,05	1,04	1,01	0,94	1,10	1,11	1,03
Francia (FRA)	1,04	1,04	1,04	1,01	0,99	1,07	1,03	1,02	1,03	1,00	1,01	1,02	1,02	1,00	1,01	1,01	1,01	1,06	1,04	1,00	0,99	1,00	1,00	1,02
R.F.A. (WGR)	1,00	1,03	1,05	1,00	1,00	1,09	1,01	1,02	1,04	0,97	1,00	0,99	1,04	1,03	1,02	1,00	0,98	1,03	1,02	1,03	1,02	0,98	0,97	1,01
Italia (ITA)	0,98	1,06	1,09	1,02	0,94	1,13	1,01	1,05	1,08	1,04	1,00	1,00	1,03	1,07	1,04	1,03	1,04	1,05	1,02	1,01	1,00	1,03	1,01	1,03
Japón (JPN)	1,00	1,06	1,07	0,95	0,97	1,08	1,03	1,03	1,08	1,01	1,01	1,02	1,00	1,03	1,05	0,98	1,04	1,05	1,03	1,03	1,00	0,96	0,96	1,02
Países Bajos (NLD)	1,03	1,05	1,07	1,03	0,95	1,10	1,02	1,04	1,01	1,01	1,02	1,01	1,07	1,05	1,01	1,01	0,96	1,03	1,04	1,01	1,00	1,00	1,02	1,02
Noruega (NOR)	1,02	1,03	1,05	1,02	0,97	0,99	0,96	0,96	1,04	0,98	0,98	1,02	1,03	1,05	1,02	0,98	1,02	0,98	1,01	1,00	1,00			1,01
Suecia (SWE)	1,02	1,01	1,05	1,03	0,98	1,00	0,96	0,99	1,06	1,00	0,99	1,03	1,07	1,07	1,00	1,01	1,02	1,01	1,02	1,01	0,99	1,04	1,08	1,02
Reino Unido (GBR)	1,01	1,04	1,08	0,98	0,96	1,04	1,01	1,00	0,99	0,94	1,02	1,05	1,07	1,05	1,03	1,03	1,06	1,06	1,04	1,01	1,01	1,03	1,04	1,02
EE.UU. (USA)*	1,04	1,06	1,05	0,94	0,98	1,05	1,03	1,00	0,98	0,95	1,03	1,00	1,04	1,03	1,03	1,02	1,07	1,04	0,99	1,00	0,98	1,02	1,03	1,02
Media	1,02	1,05	1,06	1,00	0,97	1,05	1,01	1,02	1,04	1,00	1,01	1,01	1,05	1,04	1,02	1,01	1,02	1,03	1,02	1,01	0,99	1,02	1,02	1,02
Desv. Típica	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,04	0,03	0,03	0,03	0,04	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,01	0,02	0,03	0,04	0,01
Máximo	1,04	1,07	1,09	1,03	1,04	1,13	1,04	1,06	1,08	1,05	1,04	1,06	1,07	1,10	1,05	1,04	1,07	1,06	1,04	1,03	1,02	1,10	1,11	1,03
Mínimo	0,98	1,01	1,02	0,94	0,94	0,99	0,96	0,96	0,98	0,93	0,98	0,94	1,00	1,00	0,98	0,96	0,96	0,98	0,99	0,98	0,94	0,96	0,96	1,01

* $\Delta TOFP_i^{t,t+1}$

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 1.2. Evolución acumulada de la productividad absoluta –total– de los factores, $\Delta TAFP_i^{70,t}$, (5.2.2).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.
Australia (AUS)	1.03	1.03	1.10	1.12	1.08	1.11	1.16	1.17	1.21	1.23	1.24	1.19	1.23	1.28	1.29	1.33	1.38	1.41	1.39	1.42	1.45	1.46	1.53	1,86
Bélgica (BEL)	1.03	1.11	1.20	1.22	1.18	1.31	1.35	1.42	1.49	1.55	1.61	1.70	1.81	1.87	1.92	1.93	1.95	2.03	2.12	2.12	2.10	2.08	2.06	3,19
Canadá (CAN)	1.04	1.09	1.15	1.15	1.12	1.17	1.21	1.23	1.21	1.13	1.12	1.06	1.13	1.24	1.28	1.27	1.31	1.33	1.32	1.32	1.29	1.35	1.41	1,52
Dinamarca (DNK)	1.04	1.10	1.14	1.17	1.21	1.26	1.26	1.25	1.31	1.37	1.36	1.38	1.47	1.47	1.44	1.38	1.33	1.37	1.39	1.36	1.38	1.40		1,54
Finlandia (FIN)	0.98	1.05	1.07	1.08	1.02	1.02	1.02	1.08	1.16	1.21	1.25	1.27	1.31	1.37	1.42	1.48	1.57	1.66	1.73	1.74	1.63	1.79	1.99	3,03
Francia (FRA)	1.04	1.08	1.12	1.14	1.13	1.20	1.24	1.27	1.31	1.30	1.32	1.34	1.36	1.36	1.38	1.39	1.39	1.48	1.54	1.55	1.53	1.53	1.53	1,88
R.F.A. (WGR)	1.00	1.03	1.08	1.08	1.08	1.17	1.18	1.20	1.24	1.20	1.20	1.18	1.23	1.27	1.30	1.30	1.27	1.31	1.33	1.37	1.39	1.37	1.32	1,22
Italia (ITA)	0.98	1.04	1.13	1.16	1.09	1.24	1.25	1.31	1.42	1.47	1.48	1.48	1.53	1.64	1.71	1.76	1.82	1.92	1.96	1.98	1.98	2.04	2.06	3,20
Japón (JPN)	1.00	1.07	1.14	1.08	1.05	1.13	1.16	1.20	1.30	1.31	1.32	1.34	1.35	1.39	1.45	1.42	1.48	1.55	1.59	1.64	1.65	1.58	1.52	1,84
Países Bajos (NLD)	1.03	1.08	1.16	1.19	1.14	1.25	1.27	1.33	1.34	1.36	1.39	1.41	1.50	1.58	1.60	1.61	1.55	1.59	1.65	1.68	1.67	1.67	1.70	2,35
Noruega (NOR)	1.02	1.05	1.10	1.12	1.09	1.08	1.05	1.00	1.05	1.03	1.01	1.03	1.06	1.11	1.14	1.11	1.13	1.11	1.12	1.12	1.13			0,57
Suecia (SWE)	1.02	1.03	1.09	1.11	1.09	1.09	1.05	1.04	1.10	1.10	1.10	1.13	1.21	1.29	1.30	1.31	1.34	1.35	1.37	1.39	1.37	1.43	1.54	1,89
Reino Unido (GBR)	1.01	1.05	1.13	1.11	1.06	1.10	1.11	1.12	1.11	1.04	1.06	1.11	1.19	1.25	1.29	1.33	1.40	1.49	1.54	1.56	1.57	1.62	1.68	2,28
EE.UU. (USA)*	1.04	1.10	1.16	1.10	1.08	1.13	1.17	1.17	1.15	1.09	1.12	1.11	1.16	1.20	1.23	1.25	1.33	1.38	1.36	1.36	1.34	1.37	1.41	1,51
Media	1.02	1.07	1.13	1.13	1.10	1.16	1.18	1.20	1.24	1.24	1.25	1.27	1.32	1.38	1.41	1.42	1.45	1.50	1.53	1.54	1.53	1.59	1.65	2,15
Desv. Típica	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05	0.08	0.10	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20	0.21	0.22	0.22	0.24	0.27	0.27	0.26	0.25	0.26	0,68
Máximo	1.04	1.11	1.20	1.22	1.21	1.31	1.35	1.42	1.49	1.55	1.61	1.70	1.81	1.87	1.92	1.93	1.95	2.03	2.12	2.12	2.10	2.08	2.06	3,20
Mínimo	0.98	1.03	1.07	1.08	1.02	1.02	1.02	1.00	1.05	1.03	1.01	1.03	1.06	1.11	1.14	1.11	1.13	1.11	1.12	1.12	1.13	1.35	1.32	1,22

T.V.I. Tasa de variación interanual, %.

* $\Delta TOFP_i^{70,t}$

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 1.3. Evolución interanual de la productividad relativa de los factores, $\Delta TRFP_{70,t}^{t,t+1}$

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	0,99	0,95	1,01	1,07	0,99	0,97	1,01	1,02	1,06	1,06	0,99	0,96	0,99	1,01	0,98	1,01	0,97	0,99	1,00	1,02	1,03	0,99	1,01	1,00
Bélgica (BEL)	0,99	1,01	1,03	1,08	0,99	1,06	1,00	1,05	1,08	1,09	1,01	1,06	1,02	1,00	1,00	0,99	0,94	1,01	1,05	1,00	1,00	0,97	0,97	1,02
Canadá (CAN)	1,00	0,99	1,00	1,06	0,99	0,99	1,01	1,01	1,01	0,98	0,97	0,94	1,03	1,06	1,01	0,98	0,96	0,98	1,01	1,00	0,99	1,02	1,02	1,00
Dinamarca (DNK)	1,00	1,00	0,98	1,09	1,06	0,98	0,97	1,00	1,07	1,11	0,97	1,02	1,02	0,97	0,95	0,95	0,90	0,99	1,03	0,98	1,03	0,99		1,00
Finlandia (FIN)	0,94	1,01	0,97	1,06	0,96	0,95	0,97	1,06	1,10	1,09	1,01	1,02	0,99	1,01	1,01	1,02	1,00	1,01	1,06	1,01	0,96	1,07	1,08	1,02
Francia (FRA)	1,00	0,98	0,98	1,07	1,01	1,01	1,00	1,03	1,05	1,05	0,99	1,02	0,98	0,97	0,99	0,99	0,94	1,02	1,05	1,01	1,00	0,98	0,97	1,00
R.F.A. (WGR)	0,96	0,97	0,99	1,06	1,02	1,03	0,98	1,02	1,06	1,02	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00	0,98	0,92	0,99	1,03	1,03	1,04	0,96	0,94	1,00
Italia (ITA)	0,94	1,00	1,03	1,08	0,96	1,07	0,98	1,05	1,10	1,09	0,98	1,00	0,99	1,04	1,01	1,01	0,97	1,01	1,04	1,01	1,02	1,01	0,98	1,02
Japón (JPN)	0,97	1,00	1,01	1,01	0,99	1,02	0,99	1,04	1,10	1,06	0,98	1,02	0,97	1,00	1,02	0,96	0,98	1,01	1,04	1,03	1,02	0,94	0,93	1,00
Países Bajos (NLD)	0,99	0,99	1,02	1,09	0,97	1,04	0,99	1,04	1,04	1,06	1,00	1,01	1,03	1,02	0,99	0,99	0,90	0,99	1,06	1,01	1,01	0,98	0,99	1,01
Noruega (NOR)	0,98	0,98	0,99	1,08	0,99	0,94	0,93	0,96	1,07	1,03	0,96	1,02	0,99	1,02	1,00	0,96	0,95	0,94	1,03	1,00	1,02			0,99
Suecia (SWE)	0,98	0,95	1,00	1,09	1,00	0,95	0,93	0,99	1,08	1,05	0,97	1,03	1,03	1,03	0,98	0,99	0,96	0,97	1,03	1,01	1,01	1,02	1,05	1,00
Reino Unido (GBR)	0,97	0,98	1,03	1,03	0,98	0,99	0,98	1,00	1,02	0,99	0,99	1,05	1,03	1,02	1,01	1,01	0,99	1,02	1,05	1,01	1,02	1,01	1,01	1,01
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	0,98	0,99	1,00	1,06	0,99	1,00	0,98	1,02	1,06	1,05	0,98	1,01	1,00	1,01	1,00	0,99	0,96	1,00	1,03	1,01	1,01	0,99	1,00	1,01
Desv. Típica	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,04	0,02	0,03	0,03	0,04	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,01	0,02	0,03	0,04	0,01
Máximo	1,00	1,01	1,03	1,09	1,06	1,07	1,01	1,06	1,10	1,11	1,01	1,06	1,03	1,06	1,02	1,02	1,00	1,02	1,06	1,03	1,04	1,07	1,08	1,02
Mínimo	0,94	0,95	0,97	1,00	0,96	0,94	0,93	0,96	1,00	0,98	0,96	0,94	0,97	0,97	0,95	0,95	0,90	0,94	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	1,00

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 1.4. Evolución acumulada de la productividad relativa de los factores, $\Delta TRFP_{70,t}^{70,t}$.

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	0,99	0,94	0,95	1,02	1,00	0,98	0,99	1,00	1,06	1,13	1,11	1,07	1,06	1,07	1,05	1,06	1,04	1,02	1,02	1,04	1,08	1,07	1,08	0,35
Bélgica (BEL)	0,99	1,00	1,03	1,11	1,10	1,16	1,15	1,21	1,30	1,42	1,44	1,53	1,56	1,56	1,57	1,55	1,46	1,47	1,55	1,56	1,56	1,51	1,46	1,66
Canadá (CAN)	1,00	0,99	0,99	1,05	1,04	1,03	1,03	1,05	1,06	1,04	1,00	0,95	0,97	1,03	1,05	1,02	0,98	0,96	0,97	0,97	0,96	0,98	1,00	0,01
Dinamarca (DNK)	1,00	1,00	0,98	1,07	1,13	1,11	1,07	1,07	1,14	1,26	1,22	1,24	1,26	1,22	1,17	1,11	1,00	0,99	1,02	1,00	1,03	1,02		0,09
Finlandia (FIN)	0,94	0,95	0,92	0,98	0,95	0,90	0,87	0,92	1,02	1,11	1,12	1,14	1,13	1,15	1,16	1,19	1,18	1,20	1,27	1,27	1,22	1,31	1,41	1,50
Francia (FRA)	1,00	0,98	0,96	1,04	1,05	1,06	1,06	1,08	1,14	1,19	1,18	1,20	1,17	1,14	1,12	1,11	1,05	1,07	1,13	1,14	1,14	1,12	1,09	0,36
R.F.A. (WGR)	0,96	0,93	0,93	0,98	1,00	1,03	1,01	1,03	1,09	1,11	1,08	1,06	1,06	1,06	1,06	1,04	0,96	0,95	0,98	1,00	1,04	1,00	0,94	-0,29
Italia (ITA)	0,94	0,94	0,97	1,05	1,01	1,09	1,07	1,12	1,24	1,35	1,32	1,33	1,32	1,37	1,39	1,41	1,37	1,39	1,44	1,45	1,48	1,49	1,46	1,66
Japón (JPN)	0,97	0,97	0,98	0,99	0,97	1,00	0,99	1,03	1,13	1,20	1,18	1,21	1,16	1,16	1,18	1,13	1,11	1,12	1,17	1,21	1,23	1,15	1,08	0,32
Países Bajos (NLD)	0,99	0,98	1,00	1,09	1,05	1,10	1,08	1,13	1,17	1,25	1,24	1,26	1,29	1,32	1,30	1,29	1,16	1,15	1,21	1,23	1,24	1,22	1,21	0,82
Noruega (NOR)	0,98	0,95	0,95	1,02	1,01	0,95	0,89	0,86	0,91	0,94	0,91	0,92	0,91	0,93	0,93	0,89	0,85	0,80	0,82	0,82	0,84			-0,82
Suecia (SWE)	0,98	0,94	0,93	1,01	1,01	0,96	0,90	0,89	0,96	1,01	0,98	1,01	1,05	1,08	1,06	1,05	1,01	0,98	1,00	1,02	1,03	1,04	1,09	0,38
Reino Unido (GBR)	0,97	0,95	0,98	1,01	0,99	0,97	0,95	0,95	0,97	0,96	0,95	0,99	1,02	1,04	1,05	1,06	1,05	1,08	1,13	1,14	1,17	1,18	1,19	0,76
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Media	0,98	0,97	0,97	1,03	1,02	1,02	1,00	1,02	1,09	1,14	1,12	1,14	1,14	1,15	1,15	1,14	1,09	1,08	1,12	1,13	1,14	1,16	1,17	0,63
Desv. Típica	0,02	0,03	0,03	0,04	0,05	0,07	0,08	0,10	0,11	0,15	0,15	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,16	0,18	0,20	0,20	0,20	0,18	0,18	0,67
Máximo	1,00	1,00	1,03	1,11	1,13	1,16	1,15	1,21	1,30	1,42	1,44	1,53	1,56	1,56	1,57	1,55	1,46	1,47	1,55	1,56	1,56	1,51	1,46	1,66
Mínimo	0,94	0,93	0,92	0,98	0,95	0,90	0,87	0,86	0,91	0,94	0,91	0,92	0,91	0,93	0,93	0,89	0,85	0,80	0,82	0,82	0,84	0,98	0,94	-0,29

T.V.I. Tasa de variación interanual, %.
Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

ANEXO 2. Funciones de distancia intertemporales integrantes del modelo de evaluación del rendimiento productivo. $M_R^{70}(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1}) = \Delta RFP_{70,i}^{t,t+1}$.

Anexo 2.1. Funciones de distancia intertemporales, $t \neq 1970$, determinantes de la productividad relativa o eficiencia productiva: $RFP_{70,i}^t = PE_{70,i}^t = D_O^{70}(x_i^t, y_i^t)$.

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,81	0,81	0,81	0,85	0,82	0,79	0,80	0,81	0,82	0,85	0,86	0,88	0,86	0,90	0,94	0,95	0,99	1,02	1,04	1,04	1,07	1,11	1,13	1,19
Bélgica (BEL)	0,67	0,67	0,71	0,75	0,75	0,69	0,75	0,78	0,83	0,88	0,92	0,97	1,04	1,12	1,16	1,21	1,22	1,25	1,32	1,38	1,41	1,42	1,42	1,44
Canadá (CAN)	0,81	0,83	0,87	0,92	0,91	0,86	0,90	0,95	0,96	0,94	0,88	0,88	0,86	0,92	1,00	1,04	1,04	1,07	1,09	1,09	1,12	1,12	1,18	1,23
Dinamarca (DNK)	0,67	0,68	0,72	0,73	0,73	0,71	0,73	0,72	0,70	0,73	0,78	0,78	0,79	0,84	0,84	0,81	0,78	0,76	0,79	0,81	0,80	0,82	0,84	
Finlandia (FIN)	0,49	0,48	0,52	0,53	0,54	0,52	0,53	0,53	0,57	0,62	0,64	0,67	0,69	0,72	0,76	0,79	0,84	0,90	0,96	1,01	1,03	0,99	1,12	1,26
Francia (FRA)	0,84	0,85	0,87	0,90	0,90	0,88	0,95	0,99	1,02	1,06	1,06	1,09	1,12	1,15	1,16	1,19	1,21	1,23	1,32	1,38	1,39	1,39	1,40	1,43
R.F.A. (WGR)	1,00	0,97	0,98	1,01	0,99	0,95	1,02	1,02	1,03	1,06	1,02	1,01	1,01	1,06	1,10	1,12	1,12	1,10	1,13	1,16	1,19	1,21	1,20	1,18
Italia (ITA)	0,61	0,60	0,62	0,67	0,69	0,66	0,75	0,76	0,80	0,87	0,91	0,93	0,95	1,00	1,09	1,15	1,19	1,24	1,31	1,35	1,37	1,39	1,45	1,49
Japón (JPN)	1,00	0,96	0,98	1,02	0,93	0,86	0,90	0,91	0,91	0,96	0,96	0,95	0,96	0,97	1,01	1,07	1,06	1,12	1,18	1,23	1,29	1,31	1,27	1,23
Países Bajos (NLD)	0,76	0,77	0,78	0,83	0,86	0,83	0,93	0,96	1,01	1,04	1,06	1,09	1,12	1,21	1,29	1,31	1,33	1,29	1,33	1,39	1,41	1,41	1,43	1,49
Noruega (NOR)	0,68	0,68	0,70	0,72	0,72	0,69	0,69	0,68	0,66	0,70	0,69	0,69	0,71	0,74	0,79	0,81	0,79	0,82	0,82	0,84	0,85	0,86		
Suecia (SWE)	0,71	0,71	0,71	0,74	0,75	0,73	0,72	0,67	0,65	0,69	0,68	0,67	0,70	0,76	0,81	0,81	0,82	0,85	0,86	0,88	0,91	0,92	0,98	1,07
Reino Unido (GBR)	0,78	0,76	0,77	0,83	0,80	0,75	0,76	0,76	0,75	0,74	0,67	0,66	0,70	0,76	0,81	0,84	0,87	0,92	0,98	1,03	1,04	1,07	1,12	1,17
EE.UU. (USA)	1,00	1,06	1,13	1,18	1,13	1,15	1,21	1,25	1,25	1,22	1,19	1,23	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71
Media	0,77	0,77	0,80	0,83	0,82	0,79	0,83	0,84	0,85	0,88	0,88	0,89	0,91	0,96	1,01	1,04	1,05	1,08	1,12	1,16	1,18	1,19	1,25	1,32
Desv. Típica	0,15	0,15	0,16	0,17	0,15	0,15	0,17	0,18	0,19	0,18	0,17	0,18	0,18	0,19	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,24	0,24	0,22	0,18
Máximo	1,00	1,06	1,13	1,18	1,13	1,15	1,21	1,25	1,25	1,22	1,19	1,23	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71
Mínimo	0,49	0,48	0,52	0,53	0,54	0,52	0,53	0,53	0,57	0,62	0,64	0,66	0,69	0,72	0,76	0,79	0,78	0,76	0,79	0,81	0,80	0,82	0,84	1,07

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 2.2. Funciones de distancia intertemporales, $t \neq 1970$, determinantes de la eficiencia técnica: $TE^{t}_{70,t} = D^{70}_{O}(x^{t}_{i}, y^{t}_{i})$

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,89	0,89	0,89	0,93	0,90	0,87	0,88	0,92	0,93	0,96	0,97	0,99	0,99	1,03	1,08	1,09	1,13	1,17	1,19	1,18	1,23	1,29	1,32	1,38
Bélgica (BEL)	0,77	0,77	0,80	0,85	0,84	0,78	0,88	0,92	0,99	1,06	1,11	1,19	1,28	1,39	1,45	1,51	1,53	1,57	1,66	1,74	1,77	1,78	1,80	1,84
Canadá (CAN)	0,86	0,88	0,92	0,97	0,96	0,93	0,97	1,02	1,03	1,00	0,94	0,94	0,92	0,99	1,07	1,12	1,11	1,14	1,16	1,16	1,20	1,20	1,27	1,33
Dinamarca (DNK)	1,00	0,96	0,99	0,98	0,95	0,95	0,99	1,00	1,01	1,05	1,13	1,15	1,17	1,25	1,21	1,14	1,08	1,06	1,11	1,14	1,12	1,16	1,20	
Finlandia (FIN)	0,70	0,68	0,73	0,73	0,73	0,70	0,72	0,74	0,80	0,85	0,87	0,90	0,94	0,99	1,05	1,10	1,18	1,28	1,37	1,46	1,51	1,50	1,79	2,07
Francia (FRA)	0,85	0,87	0,89	0,91	0,91	0,90	0,97	1,01	1,04	1,08	1,09	1,12	1,14	1,17	1,19	1,22	1,24	1,26	1,35	1,41	1,43	1,42	1,45	1,47
R.F.A. (WGR)	1,00	0,97	0,98	1,01	0,99	0,96	1,02	1,03	1,03	1,07	1,03	1,02	1,02	1,07	1,11	1,13	1,13	1,11	1,15	1,17	1,20	1,23	1,22	1,20
Italia (ITA)	0,62	0,61	0,63	0,69	0,70	0,67	0,76	0,77	0,82	0,89	0,93	0,95	0,97	1,02	1,12	1,18	1,23	1,28	1,35	1,39	1,40	1,43	1,49	1,54
Japón (JPN)	1,00	0,96	0,98	1,03	0,94	0,87	0,91	0,91	0,92	0,97	0,96	0,95	0,97	0,98	1,01	1,07	1,06	1,13	1,19	1,24	1,29	1,31	1,27	1,23
Países Bajos (NLD)	0,84	0,84	0,87	0,94	0,98	0,95	1,07	1,11	1,18	1,21	1,24	1,28	1,33	1,45	1,55	1,57	1,58	1,53	1,58	1,64	1,67	1,67	1,69	1,78
Noruega (NOR)	1,00	1,02	1,05	1,11	1,13	1,11	1,12	1,09	1,07	1,14	1,13	1,13	1,16	1,22	1,29	1,33	1,31	1,34	1,34	1,39	1,40	1,42		
Suecia (SWE)	0,81	0,81	0,80	0,83	0,84	0,81	0,80	0,75	0,73	0,77	0,77	0,78	0,82	0,89	0,95	0,95	0,96	1,00	1,00	1,04	1,07	1,10	1,20	1,34
Reino Unido (GBR)	0,79	0,77	0,78	0,83	0,80	0,75	0,76	0,77	0,76	0,74	0,68	0,67	0,71	0,78	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,05	1,07	1,10	1,15	1,20
EE.UU. (USA)	1,00	1,06	1,13	1,23	1,17	1,15	1,21	1,27	1,32	1,34	1,24	1,29	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,59	1,60	1,60	1,65	1,71
Media	0,87	0,86	0,89	0,93	0,92	0,89	0,93	0,95	0,97	1,01	1,01	1,03	1,05	1,11	1,16	1,19	1,21	1,24	1,29	1,33	1,35	1,37	1,42	1,51
Desv. Típica	0,12	0,13	0,13	0,14	0,13	0,14	0,14	0,16	0,17	0,16	0,17	0,18	0,18	0,19	0,20	0,20	0,20	0,20	0,21	0,22	0,22	0,21	0,24	0,28
Máximo	1,00	1,06	1,13	1,23	1,17	1,15	1,21	1,27	1,32	1,34	1,24	1,29	1,33	1,45	1,55	1,57	1,58	1,57	1,66	1,74	1,77	1,78	1,80	2,07
Mínimo	0,62	0,61	0,63	0,69	0,70	0,67	0,72	0,74	0,73	0,74	0,68	0,67	0,71	0,78	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,04	1,07	1,10	1,15	1,20

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 2.3. Funciones de distancia contemporáneas determinantes de la productividad relativa o eficiencia productiva: $RFP_i^t = PE_i^t = D_0^t(x_i^t, y_i^t)$.

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,81	0,83	0,80	0,79	0,82	0,83	0,79	0,79	0,80	0,80	0,84	0,84	0,81	0,81	0,81	0,80	0,81	0,84	0,85	0,82	0,81	0,81	0,83	0,88
Bélgica (BEL)	0,67	0,69	0,70	0,70	0,75	0,73	0,74	0,73	0,74	0,77	0,84	0,85	0,92	0,94	0,93	0,93	0,92	0,87	0,86	0,89	0,89	0,89	0,86	0,84
Canadá (CAN)	0,81	0,83	0,84	0,84	0,90	0,88	0,86	0,86	0,87	0,86	0,84	0,83	0,78	0,80	0,85	0,87	0,85	0,87	0,86	0,85	0,81	0,78	0,81	0,86
Dinamarca (DNK)	0,67	0,70	0,72	0,69	0,74	0,75	0,72	0,70	0,68	0,69	0,75	0,74	0,77	0,79	0,77	0,75	0,72	0,70	0,69	0,68	0,65	0,64	0,67	
Finlandia (FIN)	0,49	0,48	0,48	0,46	0,50	0,49	0,45	0,43	0,46	0,50	0,55	0,56	0,58	0,57	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,64	0,64	0,62	0,68	0,74
Francia (FRA)	0,84	0,87	0,84	0,81	0,88	0,91	0,90	0,90	0,90	0,92	0,96	0,96	0,99	0,97	0,92	0,91	0,90	0,85	0,86	0,90	0,91	0,91	0,89	0,87
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	0,97	0,95	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	0,61	0,61	0,60	0,60	0,67	0,67	0,70	0,70	0,71	0,77	0,84	0,82	0,83	0,81	0,82	0,83	0,84	0,82	0,82	0,85	0,87	0,89	0,89	0,87
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,97	0,94	0,93	0,92	0,93	0,95	0,95	0,97	0,95	0,93	0,93	0,90	0,92	0,92	0,93	0,94	0,94	0,90	0,86
Países Bajos (NLD)	0,76	0,78	0,75	0,73	0,80	0,80	0,81	0,78	0,81	0,85	0,89	0,89	0,91	0,92	0,95	0,93	0,92	0,84	0,83	0,88	0,88	0,89	0,87	0,87
Noruega (NOR)	0,68	0,69	0,67	0,65	0,71	0,72	0,66	0,61	0,57	0,59	0,61	0,59	0,61	0,59	0,60	0,60	0,58	0,55	0,51	0,53	0,53	0,54		
Suecia (SWE)	0,71	0,73	0,70	0,69	0,76	0,79	0,72	0,67	0,64	0,65	0,67	0,66	0,69	0,71	0,74	0,72	0,72	0,74	0,73	0,72	0,70	0,68	0,70	0,74
Reino Unido (GBR)	0,78	0,79	0,78	0,80	0,85	0,83	0,79	0,79	0,77	0,72	0,67	0,65	0,68	0,70	0,70	0,70	0,72	0,75	0,77	0,79	0,79	0,78	0,80	0,84
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	0,77	0,79	0,77	0,77	0,81	0,81	0,79	0,78	0,78	0,79	0,81	0,81	0,82	0,83	0,83	0,82	0,82	0,81	0,81	0,82	0,82	0,81	0,84	0,86
Desv. Típica	0,15	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	0,15	0,14	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14	0,14	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,11	0,08
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Mínimo	0,49	0,48	0,48	0,46	0,50	0,49	0,45	0,43	0,46	0,50	0,55	0,56	0,58	0,57	0,57	0,58	0,58	0,55	0,51	0,53	0,53	0,54	0,67	0,74

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 2.4. Funciones de distancia contemporáneas determinantes de la eficiencia técnica: $TE_i^t = D_O^t(x_i^t, y_i^t)$

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,89	0,91	0,89	0,89	0,90	0,91	0,88	0,88	0,90	0,90	0,92	1,00	0,87	0,85	0,87	0,85	0,88	0,94	0,95	0,91	0,91	0,92	0,95	1,00
Bélgica (BEL)	0,77	0,79	0,80	0,81	0,85	0,82	0,85	0,85	0,88	0,92	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Canadá (CAN)	0,86	0,89	0,89	0,90	0,95	0,93	0,92	0,92	0,93	0,92	0,88	0,87	0,80	0,82	0,87	0,89	0,88	0,91	0,90	0,87	0,84	0,81	0,85	0,91
Dinamarca (DNK)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,08	1,00	1,00	
Finlandia (FIN)	0,70	0,66	0,67	0,64	0,65	0,62	0,62	0,64	0,70	0,72	0,73	0,74	0,74	0,71	0,71	0,73	0,78	0,84	0,85	0,85	0,86	0,84	0,95	1,00
Francia (FRA)	0,85	0,88	0,86	0,83	0,89	0,92	0,91	0,91	0,92	0,94	0,97	0,97	1,00	0,97	0,93	0,91	0,91	0,86	0,87	0,91	0,92	0,92	0,91	0,88
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	0,97	0,95	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	0,62	0,61	0,61	0,62	0,68	0,67	0,71	0,71	0,72	0,78	0,85	0,83	0,83	0,82	0,83	0,84	0,85	0,83	0,84	0,87	0,88	0,90	0,91	0,89
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,96	0,95	0,94	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,95	0,94	0,95	0,97	0,99	0,94	0,89
Países Bajos (NLD)	0,84	0,85	0,83	0,82	0,88	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,96	1,00	1,00	0,97	1,00	1,00
Noruega (NOR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00		
Suecia (SWE)	0,81	0,83	0,80	0,80	0,87	0,88	0,83	0,77	0,75	0,76	0,77	0,76	0,78	0,80	0,82	0,82	0,83	0,86	0,85	0,84	0,83	0,81	0,84	0,88
Reino Unido (GBR)	0,79	0,80	0,79	0,81	0,85	0,84	0,79	0,79	0,77	0,73	0,68	0,65	0,68	0,70	0,70	0,71	0,72	0,75	0,78	0,80	0,79	0,79	0,81	0,85
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	0,87	0,87	0,86	0,86	0,89	0,90	0,89	0,89	0,89	0,90	0,91	0,92	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,92	0,93	0,93	0,93	0,92	0,94	0,94
Desv. Típica	0,12	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,10	0,08	0,08	0,07	0,08	0,08	0,07	0,06
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,08	1,00	1,00	1,00
Mínimo	0,62	0,61	0,61	0,62	0,65	0,62	0,62	0,64	0,70	0,72	0,68	0,65	0,68	0,70	0,70	0,71	0,72	0,75	0,78	0,80	0,79	0,79	0,81	0,85

[1] Hasta 1992, [2] hasta 1991 –países excluidos de los estadísticos descriptivos–

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

ANEXO 3. Eficiencia de escala.

Anexo 3.1. Ineficiencia de escala intetemporal, $ASE^{t}_{70,t} = D^{70}_{O}(x^{t}_{i},y^{t}_{i}) = PE^{t}_{70,t} / TE^{t}_{70,t} = D^{70}_{O}(x^{t}_{i},y^{t}_{i}) / D^{70}_{O}(x^{t}_{i},y^{t}_{i})$.

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,88	0,88	0,88	0,88	0,88	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,88	0,88	0,87	0,86	0,86	0,86
Bélgica (BEL)	0,87	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,85	0,84	0,84	0,83	0,83	0,82	0,81	0,81	0,80	0,80	0,80	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80	0,79	0,78
Canadá (CAN)	0,94	0,94	0,94	0,95	0,95	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,94	0,94	0,93	0,93	0,93
Dinamarca (DNK)	0,67	0,71	0,72	0,75	0,76	0,75	0,73	0,71	0,70	0,69	0,69	0,68	0,68	0,68	0,69	0,71	0,72	0,72	0,71	0,71	0,71	0,70	0,70	
Finlandia (FIN)	0,71	0,71	0,72	0,73	0,74	0,74	0,73	0,73	0,72	0,73	0,74	0,74	0,73	0,73	0,72	0,72	0,71	0,71	0,70	0,69	0,69	0,66	0,62	0,61
Francia (FRA)	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
Italia (ITA)	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97
Japón (JPN)	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Países Bajos (NLD)	0,91	0,91	0,90	0,88	0,88	0,87	0,87	0,86	0,86	0,86	0,86	0,85	0,85	0,84	0,83	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,85	0,85	0,85	0,84
Noruega (NOR)	0,68	0,67	0,66	0,64	0,64	0,62	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61		
Suecia (SWE)	0,88	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,89	0,89	0,88	0,86	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,84	0,83	0,81	0,80
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	0,96	0,97	1,00	1,00	0,98	0,94	0,92	0,95	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,89	0,89	0,88	0,88	0,88	0,88	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87	0,88	0,89
Desv. Típica	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Mínimo	0,67	0,67	0,66	0,64	0,64	0,62	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61	0,62	0,61

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 3.2. Ineficiencia de escala contemporánea , $ASE_i^t = D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t) = PE_i^t / TE_i^t = D_{\hat{O}}^t(x_i^t,y_i^t) / D_O^t(x_i^t,y_i^t)$.

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,91	0,91	0,90	0,89	0,91	0,91	0,90	0,89	0,88	0,89	0,91	0,84	0,93	0,94	0,94	0,93	0,92	0,90	0,89	0,90	0,89	0,89	0,87	0,88
Bélgica (BEL)	0,87	0,88	0,87	0,86	0,89	0,89	0,87	0,86	0,85	0,84	0,87	0,85	0,92	0,94	0,93	0,93	0,92	0,87	0,86	0,89	0,89	0,89	0,86	0,84
Canadá (CAN)	0,94	0,94	0,94	0,94	0,95	0,95	0,94	0,94	0,94	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,98	0,98	0,97	0,96	0,95	0,97	0,96	0,96	0,94	0,95
Dinamarca (DNK)	0,67	0,70	0,72	0,69	0,74	0,75	0,72	0,70	0,68	0,69	0,75	0,74	0,76	0,78	0,77	0,75	0,72	0,70	0,69	0,68	0,60	0,64	0,67	
Finlandia (FIN)	0,71	0,73	0,72	0,72	0,77	0,79	0,73	0,67	0,65	0,70	0,76	0,76	0,79	0,81	0,80	0,79	0,75	0,70	0,71	0,75	0,75	0,74	0,71	0,74
Francia (FRA)	0,99	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,98	0,98	0,98	0,96	0,95	0,95	0,97	0,95	0,93	0,93	0,93	0,97	0,98	0,97	0,97	0,95	0,96	0,97
Países Bajos (NLD)	0,91	0,91	0,90	0,90	0,91	0,80	0,81	0,78	0,81	0,85	0,89	0,89	0,91	0,92	0,95	0,93	0,92	0,85	0,87	0,88	0,88	0,91	0,87	0,87
Noruega (NOR)	0,68	0,69	0,67	0,65	0,71	0,72	0,66	0,61	0,57	0,59	0,61	0,59	0,61	0,59	0,60	0,60	0,58	0,55	0,51	0,53	0,53	0,54		
Suecia (SWE)	0,88	0,88	0,87	0,86	0,88	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,87	0,87	0,89	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,86	0,85	0,84	0,83	0,84
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	0,90	0,90	0,90	0,89	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,88	0,90	0,89	0,91	0,91	0,91	0,91	0,90	0,88	0,87	0,88	0,88	0,88	0,90	0,92
Desv. Típica	0,12	0,11	0,12	0,12	0,10	0,10	0,12	0,14	0,14	0,13	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,14	0,15	0,14	0,15	0,14	0,11	0,08
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Mínimo	0,67	0,69	0,67	0,65	0,71	0,72	0,66	0,61	0,57	0,59	0,61	0,59	0,61	0,59	0,60	0,60	0,58	0,55	0,51	0,53	0,53	0,54	0,67	0,74

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

ANEXO 4. Sentido de los rendimientos variables a escala, $\Sigma^{l}_{i=1} z_i \gtrless 1$.

Anexo 4.1. Sentido de los rendimientos variables a escala respecto al período base, t=1970.

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,13	0,11	0,12	0,11	0,08	0,08	0,08	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05
Bélgica (BEL)	0,11	0,10	0,09	0,08	0,08	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,03
Canadá (CAN)	0,12	0,11	0,12	0,13	0,12	0,10	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10
Dinamarca (DNK)	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	
Finlandia (FIN)	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Francia (FRA)	0,39	0,37	0,35	0,34	0,32	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,27	0,26	0,26	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,22	0,21
R.F.A. (WGR)	1,00	0,93	0,84	0,82	0,74	0,60	0,53	0,52	0,50	0,50	0,49	0,45	0,44	0,42	0,42	0,43	0,44	0,44	0,44	0,44	0,45	0,46	0,45	0,42
Italia (ITA)	0,30	0,30	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27	0,26	0,25	0,24	0,23	0,23	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,22	0,21	0,20
Japón (JPN)	1,00	1,09	1,16	1,25	1,33	1,19	1,09	1,00	0,89	0,80	0,76	0,69	0,65	0,66	0,68	0,70	0,69	0,68	0,70	0,71	0,73	0,76	0,77	0,76
Países Bajos (NLD)	0,09	0,08	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Noruega (NOR)	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01		
Suecia (SWE)	0,11	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04	0,04
Reino Unido (GBR)	0,79	0,80	0,80	0,82	0,80	0,70	0,63	0,62	0,59	0,56	0,47	0,33	0,31	0,29	0,29	0,28	0,28	0,27	0,27	0,27	0,27	0,25	0,24	0,23
EE.UU. (USA)	1,00	0,96	0,98	1,04	1,03	0,94	0,98	1,02	1,06	1,09	1,05	1,04	0,97	0,95	1,00	0,99	0,98	0,98	1,00	1,00	0,98	0,95	0,93	0,93
Media	0,37	0,36	0,36	0,36	0,36	0,32	0,30	0,29	0,28	0,28	0,26	0,25	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23	0,24	0,25
Desv. Típica	0,40	0,40	0,40	0,43	0,43	0,38	0,37	0,36	0,35	0,34	0,32	0,30	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
Máximo	1,00	1,09	1,16	1,25	1,33	1,19	1,09	1,02	1,06	1,09	1,05	1,04	0,97	0,95	1,00	0,99	0,98	0,98	1,00	1,00	0,98	0,95	0,93	0,93
Mínimo	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 4.2. Sentido de los rendimientos variables a escala en períodos contemporáneos, $\Sigma^{I}_{i=1} z_i \gtreqless 1$.

País	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Australia (AUS)	0,13	0,13	0,09	0,09	0,12	0,14	0,14	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,10	0,09	0,10	0,11
Bélgica (BEL)	0,11	0,11	0,07	0,07	0,11	0,11	0,10	0,09	0,07	0,07	0,07	0,06	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
Canadá (CAN)	0,12	0,13	0,11	0,11	0,17	0,17	0,18	0,16	0,17	0,20	0,21	0,22	0,19	0,19	0,21	0,21	0,20	0,21	0,22	0,21	0,18	0,15	0,15	0,17
Dinamarca (DNK)	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	
Finlandia (FIN)	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
Francia (FRA)	0,39	0,43	0,33	0,32	0,45	0,52	0,51	0,48	0,44	0,39	0,41	0,39	0,44	0,44	0,38	0,35	0,33	0,30	0,26	0,26	0,28	0,29	0,28	0,25
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	0,65	0,63	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	0,30	0,36	0,28	0,27	0,37	0,46	0,47	0,46	0,42	0,42	0,44	0,39	0,40	0,37	0,26	0,25	0,25	0,24	0,23	0,23	0,25	0,26	0,24	0,22
Japón (JPN)	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,16	1,20	1,23	1,26	1,29	1,33	1,39	1,45	1,51	1,60	1,55	1,42	1,32	1,30	1,25	1,22	1,26	1,30	1,34
Países Bajos (NLD)	0,09	0,09	0,07	0,06	0,07	0,09	0,07	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,05	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
Noruega (NOR)	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02		
Suecia (SWE)	0,11	0,11	0,07	0,07	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,12	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06
Reino Unido (GBR)	0,79	0,46	0,58	0,57	0,67	0,72	0,72	0,72	0,73	0,74	0,74	0,72	0,67	0,63	0,59	0,57	0,53	0,51	0,52	0,51	0,48	0,42	0,41	0,42
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	0,37	0,28	0,31	0,30	0,37	0,40	0,40	0,40	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,35	0,34	0,34	0,36	0,39
Desv. Típica	0,40	0,34	0,36	0,35	0,39	0,41	0,42	0,43	0,43	0,44	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,47	0,45	0,43	0,43	0,42	0,42	0,43	0,44	0,46
Máximo	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,16	1,20	1,23	1,26	1,29	1,33	1,39	1,45	1,51	1,60	1,55	1,42	1,32	1,30	1,25	1,22	1,26	1,30	1,34
Mínimo	0,03	0,00	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

ANEXO 5. Evolución de la variación en la productividad absoluta de los factores, $M_A^{70}\left(x_i^t, x_i^{t+1}, y_i^t, y_i^{t+1}\right)$, (5.3.5–6).

Anexo 5.1. Evolución interanual de la variación en la productividad absoluta de los factores respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.5).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,00	1,01	1,05	0,97	0,97	1,01	1,01	1,01	1,04	1,02	1,02	0,99	1,04	1,05	1,01	1,04	1,03	1,02	0,99	1,04	1,04	1,02	1,05	1,02
Bélgica (BEL)	1,00	1,05	1,06	1,00	0,93	1,08	1,04	1,06	1,06	1,05	1,06	1,07	1,07	1,04	1,04	1,01	1,02	1,06	1,05	1,02	1,00	1,01	1,01	1,03
Canadá (CAN)	1,02	1,05	1,06	0,99	0,95	1,05	1,05	1,01	0,98	0,94	1,00	0,97	1,08	1,09	1,04	1,00	1,03	1,01	1,01	1,02	1,00	1,06	1,05	1,02
Dinamarca (DNK)	1,01	1,05	1,02	0,99	0,98	1,02	0,98	0,98	1,04	1,06	1,00	1,02	1,06	0,99	0,97	0,96	0,97	1,04	1,02	0,99	1,02	1,03		1,01
Finlandia (FIN)	0,98	1,08	1,02	1,01	0,96	1,02	1,01	1,07	1,07	1,04	1,04	1,03	1,05	1,06	1,04	1,06	1,08	1,06	1,06	1,02	0,96	1,13	1,12	1,04
Francia (FRA)	1,02	1,02	1,03	1,00	0,98	1,08	1,04	1,03	1,04	1,00	1,03	1,02	1,03	1,01	1,02	1,02	1,02	1,07	1,04	1,01	1,00	1,01	1,02	1,02
R.F.A. (WGR)	0,97	1,01	1,03	0,98	0,96	1,07	1,00	1,01	1,03	0,96	0,99	0,99	1,05	1,03	1,02	1,00	0,98	1,03	1,02	1,03	1,02	0,99	0,98	1,01
Italia (ITA)	0,98	1,04	1,08	1,03	0,95	1,14	1,02	1,06	1,08	1,05	1,02	1,02	1,05	1,10	1,05	1,04	1,04	1,05	1,03	1,01	1,02	1,05	1,03	1,04
Japón (JPN)	0,96	1,02	1,04	0,91	0,92	1,05	1,00	1,01	1,05	0,99	0,99	1,02	1,01	1,04	1,06	0,99	1,06	1,06	1,04	1,04	1,01	0,97	0,97	1,01
Países Bajos (NLD)	1,00	1,02	1,06	1,04	0,97	1,11	1,03	1,06	1,02	1,02	1,03	1,03	1,08	1,06	1,01	1,01	0,97	1,03	1,04	1,02	1,00	1,01	1,04	1,03
Noruega (NOR)	1,00	1,02	1,03	1,01	0,96	1,01	0,98	0,97	1,05	0,99	1,00	1,03	1,05	1,06	1,03	0,99	1,03	1,00	1,03	1,01	1,02			1,01
Suecia (SWE)	1,00	0,99	1,04	1,02	0,97	0,98	0,94	0,97	1,05	0,99	0,99	1,04	1,08	1,07	1,00	1,01	1,03	1,01	1,03	1,03	1,01	1,07	1,10	1,02
Reino Unido (GBR)	0,98	1,01	1,07	0,97	0,93	1,01	1,00	0,99	0,98	0,91	0,98	1,06	1,09	1,06	1,04	1,04	1,06	1,06	1,04	1,02	1,03	1,04	1,05	1,02
EE.UU. (USA)	1,06	1,06	1,05	0,96	1,01	1,05	1,03	1,00	0,98	0,97	1,04	1,03	1,05	1,02	1,03	1,03	1,07	1,04	0,99	1,01	1,00	1,03	1,04	1,02
Media	1,00	1,03	1,05	0,99	0,96	1,05	1,01	1,02	1,04	1,00	1,01	1,02	1,06	1,05	1,03	1,01	1,03	1,04	1,03	1,02	1,01	1,03	1,04	1,02
Desv. Típica	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,04	0,03	0,03	0,03	0,04	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,02	0,04	0,04	0,01
Máximo	1,06	1,08	1,08	1,04	1,01	1,14	1,05	1,07	1,08	1,06	1,06	1,07	1,09	1,10	1,06	1,06	1,08	1,07	1,06	1,04	1,04	1,13	1,12	1,04
Mínimo	0,96	0,99	1,02	0,91	0,92	0,98	0,94	0,97	0,98	0,91	0,98	0,97	1,01	0,99	0,97	0,96	0,97	1,00	0,99	0,99	0,96	0,97	0,97	1,01

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 5.2. Evolución acumulada de la productividad absoluta de los factores respecto al periodo de referencia base, t =1970, $M_A^{70}(x_i^{70}, x_i^t, y_i^{70}, y_i^t)$, (5.3.6).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,00	1,00	1,05	1,01	0,98	0,99	1,00	1,01	1,05	1,06	1,09	1,07	1,11	1,16	1,18	1,22	1,26	1,29	1,28	1,33	1,38	1,40	1,47	1,68
Bélgica (BEL)	1,00	1,05	1,12	1,12	1,03	1,11	1,16	1,23	1,31	1,37	1,45	1,55	1,67	1,74	1,80	1,82	1,86	1,96	2,06	2,10	2,11	2,12	2,15	3,38
Canadá (CAN)	1,02	1,07	1,14	1,13	1,07	1,12	1,18	1,19	1,16	1,09	1,09	1,06	1,14	1,24	1,29	1,29	1,33	1,35	1,35	1,39	1,38	1,46	1,53	1,86
Dinamarca (DNK)	1,01	1,06	1,08	1,08	1,06	1,08	1,06	1,04	1,08	1,15	1,15	1,18	1,25	1,24	1,21	1,16	1,13	1,17	1,20	1,18	1,21	1,24		0,98
Finlandia (FIN)	0,98	1,06	1,08	1,09	1,05	1,07	1,08	1,16	1,25	1,29	1,35	1,39	1,45	1,53	1,60	1,69	1,82	1,94	2,05	2,09	2,00	2,26	2,54	4,14
Francia (FRA)	1,02	1,05	1,07	1,07	1,05	1,13	1,18	1,22	1,27	1,27	1,31	1,34	1,37	1,39	1,42	1,44	1,47	1,58	1,65	1,66	1,66	1,68	1,71	2,35
R.F.A. (WGR)	0,97	0,98	1,01	0,99	0,95	1,02	1,02	1,03	1,06	1,02	1,01	1,01	1,06	1,10	1,12	1,12	1,10	1,13	1,16	1,19	1,21	1,20	1,18	0,73
Italia (ITA)	0,98	1,01	1,09	1,12	1,07	1,21	1,23	1,31	1,41	1,48	1,52	1,54	1,63	1,78	1,87	1,94	2,03	2,13	2,20	2,22	2,26	2,36	2,43	3,93
Japón (JPN)	0,96	0,98	1,02	0,93	0,86	0,90	0,91	0,91	0,96	0,96	0,95	0,96	0,97	1,01	1,07	1,06	1,12	1,18	1,23	1,29	1,31	1,27	1,23	0,91
Países Bajos (NLD)	1,00	1,02	1,08	1,13	1,09	1,21	1,25	1,32	1,36	1,38	1,43	1,47	1,59	1,69	1,71	1,74	1,69	1,74	1,81	1,85	1,85	1,87	1,95	2,95
Noruega (NOR)	1,00	1,02	1,06	1,07	1,02	1,02	1,00	0,97	1,03	1,02	1,01	1,04	1,09	1,16	1,19	1,17	1,20	1,20	1,24	1,25	1,27			1,15
Suecia (SWE)	1,00	0,99	1,03	1,05	1,02	1,00	0,94	0,91	0,96	0,95	0,94	0,98	1,06	1,13	1,13	1,15	1,19	1,20	1,23	1,27	1,28	1,37	1,50	1,78
Reino Unido (GBR)	0,98	0,99	1,06	1,03	0,96	0,97	0,97	0,96	0,94	0,86	0,84	0,89	0,97	1,03	1,07	1,11	1,18	1,26	1,31	1,33	1,37	1,43	1,50	1,78
EE.UU. (USA)	1,06	1,13	1,18	1,13	1,15	1,21	1,25	1,25	1,22	1,19	1,23	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Media	1,00	1,03	1,08	1,07	1,02	1,07	1,09	1,11	1,15	1,15	1,17	1,20	1,26	1,33	1,36	1,38	1,42	1,48	1,53	1,55	1,56	1,64	1,74	2,32
Desv. Típica	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,10	0,12	0,15	0,16	0,19	0,21	0,23	0,24	0,26	0,28	0,30	0,31	0,34	0,37	0,37	0,36	0,40	0,44	1,09
Máximo	1,06	1,13	1,18	1,13	1,15	1,21	1,25	1,32	1,41	1,48	1,52	1,55	1,67	1,78	1,87	1,94	2,03	2,13	2,20	2,22	2,26	2,36	2,54	4,14
Mínimo	0,96	0,98	1,01	0,93	0,86	0,90	0,91	0,91	0,94	0,86	0,84	0,89	0,97	1,01	1,07	1,06	1,10	1,13	1,16	1,18	1,21	1,20	1,18	0,73

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Anexo 5.3. Evolución interanual de la transformación técnica respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.5).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,00	1,00	1,05	0,97	0,96	1,01	1,05	1,01	1,04	1,02	1,02	1,00	1,04	1,04	1,01	1,04	1,03	1,02	1,00	1,04	1,05	1,02	1,05	1,02
Bélgica (BEL)	0,99	1,04	1,06	0,99	0,93	1,13	1,05	1,07	1,07	1,05	1,07	1,08	1,08	1,04	1,04	1,02	1,03	1,06	1,05	1,02	1,01	1,01	1,02	1,04
Canadá (CAN)	1,02	1,04	1,06	0,99	0,97	1,04	1,05	1,01	0,98	0,94	1,00	0,98	1,08	1,08	1,04	1,00	1,03	1,01	1,01	1,03	1,00	1,06	1,04	1,02
Dinamarca (DNK)	0,96	1,03	0,99	0,98	1,00	1,04	1,01	1,00	1,04	1,07	1,02	1,02	1,06	0,97	0,95	0,95	0,98	1,05	1,03	0,99	1,03	1,03		1,01
Finlandia (FIN)	0,98	1,07	1,01	1,00	0,96	1,02	1,02	1,09	1,06	1,02	1,05	1,04	1,05	1,06	1,05	1,07	1,08	1,07	1,07	1,03	1,00	1,20	1,15	1,05
Francia (FRA)	1,02	1,02	1,03	1,00	0,99	1,08	1,04	1,03	1,04	1,00	1,03	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	1,02	1,08	1,04	1,01	1,00	1,02	1,02	1,02
R.F.A. (WGR)	0,97	1,01	1,04	0,98	0,96	1,07	1,00	1,01	1,03	0,96	1,00	1,00	1,05	1,03	1,02	1,00	0,98	1,03	1,02	1,03	1,02	0,99	0,98	1,01
Italia (ITA)	0,98	1,04	1,09	1,02	0,95	1,14	1,01	1,06	1,08	1,05	1,02	1,02	1,06	1,10	1,05	1,04	1,04	1,05	1,03	1,01	1,02	1,05	1,03	1,04
Japón (JPN)	0,96	1,02	1,05	0,92	0,92	1,05	1,00	1,01	1,06	0,99	0,99	1,02	1,01	1,04	1,06	0,99	1,06	1,06	1,04	1,04	1,01	0,97	0,97	1,01
Países Bajos (NLD)	1,00	1,03	1,09	1,04	0,97	1,12	1,04	1,06	1,03	1,02	1,04	1,03	1,09	1,07	1,01	1,01	0,97	1,03	1,04	1,01	1,00	1,01	1,05	1,03
Noruega (NOR)	1,02	1,04	1,05	1,01	0,99	1,01	0,97	0,98	1,06	0,99	1,00	1,03	1,05	1,06	1,03	0,99	1,03	1,00	1,03	1,01	1,02			1,02
Suecia (SWE)	0,99	0,99	1,04	1,02	0,97	0,98	0,94	0,97	1,05	1,01	1,01	1,05	1,09	1,07	1,00	1,01	1,04	1,01	1,03	1,04	1,03	1,09	1,12	1,02
Reino Unido (GBR)	0,98	1,01	1,07	0,97	0,93	1,02	1,00	0,99	0,98	0,91	0,98	1,07	1,09	1,06	1,04	1,04	1,06	1,06	1,04	1,02	1,03	1,04	1,05	1,02
EE.UU. (USA)	1,06	1,06	1,09	0,95	0,98	1,05	1,05	1,04	1,01	0,93	1,03	0,98	1,05	1,02	1,03	1,03	1,07	1,04	1,00	1,01	1,00	1,03	1,04	1,02
Media	1,00	1,03	1,05	0,99	0,96	1,05	1,02	1,02	1,04	1,00	1,02	1,02	1,06	1,05	1,02	1,01	1,03	1,04	1,03	1,02	1,01	1,04	1,04	1,02
Desv. Típica	0,03	0,02	0,03	0,03	0,02	0,05	0,03	0,04	0,03	0,05	0,02	0,03	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,06	0,05	0,01
Máximo	1,06	1,07	1,09	1,04	1,00	1,14	1,05	1,09	1,08	1,07	1,07	1,08	1,09	1,10	1,06	1,07	1,08	1,08	1,07	1,04	1,05	1,20	1,15	1,05
Mínimo	0,96	0,99	0,99	0,92	0,92	0,98	0,94	0,97	0,98	0,91	0,98	0,98	1,01	0,97	0,95	0,95	0,97	1,00	1,00	0,99	1,00	0,97	0,97	1,01

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 5.4. Evolución acumulada de la transformación técnica respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.6).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,00	1,00	1,04	1,01	0,98	0,99	1,03	1,04	1,08	1,09	1,12	1,11	1,16	1,21	1,23	1,27	1,31	1,33	1,33	1,39	1,45	1,48	1,54	1,91
Bélgica (BEL)	0,99	1,04	1,10	1,09	1,01	1,14	1,20	1,28	1,37	1,44	1,55	1,67	1,80	1,88	1,95	1,98	2,04	2,15	2,25	2,29	2,31	2,33	2,38	3,85
Canadá (CAN)	1,02	1,07	1,13	1,12	1,08	1,13	1,19	1,20	1,17	1,09	1,09	1,07	1,15	1,25	1,30	1,30	1,33	1,35	1,36	1,39	1,40	1,48	1,55	1,92
Dinamarca (DNK)	0,96	0,99	0,98	0,95	0,95	0,99	1,00	1,01	1,05	1,13	1,15	1,17	1,25	1,21	1,14	1,08	1,06	1,11	1,14	1,12	1,16	1,20		0,82
Finlandia (FIN)	0,98	1,04	1,05	1,05	1,01	1,03	1,06	1,15	1,22	1,24	1,30	1,35	1,42	1,51	1,58	1,69	1,83	1,96	2,09	2,16	2,15	2,57	2,96	4,84
Francia (FRA)	1,02	1,05	1,07	1,07	1,06	1,14	1,18	1,22	1,27	1,28	1,32	1,35	1,38	1,40	1,43	1,46	1,48	1,60	1,67	1,68	1,68	1,70	1,73	2,42
R.F.A. (WGR)	0,97	0,98	1,01	0,99	0,96	1,02	1,03	1,03	1,07	1,03	1,02	1,02	1,07	1,11	1,13	1,13	1,11	1,15	1,17	1,20	1,23	1,22	1,20	0,78
Italia (ITA)	0,98	1,01	1,10	1,13	1,07	1,22	1,24	1,31	1,42	1,49	1,52	1,55	1,64	1,80	1,89	1,96	2,05	2,16	2,22	2,25	2,28	2,39	2,46	3,99
Japón (JPN)	0,96	0,98	1,03	0,94	0,87	0,91	0,91	0,92	0,97	0,96	0,95	0,97	0,98	1,01	1,07	1,06	1,13	1,19	1,24	1,29	1,31	1,27	1,23	0,92
Países Bajos (NLD)	1,00	1,03	1,12	1,17	1,13	1,27	1,32	1,40	1,44	1,47	1,52	1,58	1,72	1,84	1,86	1,88	1,82	1,88	1,95	1,98	1,98	2,01	2,11	3,30
Noruega (NOR)	1,02	1,05	1,11	1,13	1,11	1,12	1,09	1,07	1,14	1,13	1,13	1,16	1,22	1,29	1,33	1,31	1,34	1,34	1,39	1,40	1,42			1,69
Suecia (SWE)	0,99	0,98	1,02	1,04	1,00	0,98	0,92	0,90	0,94	0,95	0,96	1,01	1,10	1,17	1,17	1,19	1,23	1,24	1,27	1,32	1,35	1,48	1,65	2,20
Reino Unido (GBR)	0,98	0,99	1,06	1,03	0,96	0,97	0,97	0,96	0,95	0,86	0,85	0,91	0,99	1,05	1,09	1,13	1,20	1,28	1,33	1,36	1,40	1,46	1,53	1,87
EE.UU. (USA)	1,06	1,13	1,23	1,17	1,15	1,21	1,27	1,32	1,34	1,24	1,29	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,59	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Media	1,00	1,02	1,08	1,06	1,02	1,08	1,10	1,13	1,17	1,17	1,20	1,23	1,30	1,36	1,40	1,42	1,46	1,52	1,57	1,60	1,62	1,71	1,84	2,53
Desv. Típica	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,11	0,13	0,16	0,17	0,20	0,23	0,24	0,26	0,29	0,31	0,33	0,34	0,37	0,40	0,40	0,39	0,47	0,53	1,24
Máximo	1,06	1,13	1,23	1,17	1,15	1,27	1,32	1,40	1,44	1,49	1,55	1,67	1,80	1,88	1,95	1,98	2,05	2,16	2,25	2,29	2,31	2,57	2,96	4,84
Mínimo	0,96	0,98	0,98	0,94	0,87	0,91	0,91	0,90	0,94	0,86	0,85	0,91	0,98	1,01	1,07	1,06	1,06	1,11	1,14	1,12	1,16	1,20	1,20	0,78

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Anexo 5.5. Evolución interanual de la transformación de escala respecto al periodo de referencia base, t =1970, (5.3.5).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00
Bélgica (BEL)	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00
Canadá (CAN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00
Dinamarca (DNK)	1,05	1,02	1,03	1,02	0,98	0,98	0,97	0,98	0,99	0,99	0,98	1,00	1,00	1,03	1,03	1,02	0,99	0,99	1,00	1,00	0,99	0,99		1,00
Finlandia (FIN)	1,00	1,01	1,02	1,01	1,00	1,00	0,99	0,99	1,01	1,02	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,96	0,94	0,97	0,99
Francia (FRA)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Países Bajos (NLD)	1,00	0,99	0,98	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00
Noruega (NOR)	0,98	0,99	0,98	0,99	0,97	1,00	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			0,99
Suecia (SWE)	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,98	1,00
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	0,96	1,00	1,03	1,00	0,98	0,96	0,97	1,04	1,00	1,04	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00
Desv. Típica	0,01	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,01	0,00
Máximo	1,05	1,02	1,03	1,02	1,03	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,00	1,04	1,00	1,03	1,03	1,02	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Mínimo	0,98	0,99	0,96	0,99	0,97	0,96	0,96	0,96	0,97	0,98	0,97	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,96	0,94	0,97	0,99

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 5.6. Evolución acumulada de la transformación de escala respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.6).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,00	1,01	1,01	1,00	1,00	1,01	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,97	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	-0,22
Bélgica (BEL)	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	0,98	0,97	0,96	0,96	0,95	0,94	0,93	0,93	0,92	0,92	0,92	0,91	0,91	0,92	0,92	0,91	0,91	0,90	-0,45
Canadá (CAN)	1,00	1,00	1,01	1,01	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,06
Dinamarca (DNK)	1,05	1,07	1,11	1,13	1,11	1,09	1,06	1,03	1,03	1,02	1,00	1,00	1,00	1,03	1,06	1,07	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04		0,16
Finlandia (FIN)	1,00	1,02	1,03	1,04	1,04	1,03	1,02	1,01	1,02	1,04	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,00	0,99	0,99	0,98	0,97	0,93	0,88	0,86	-0,67
Francia (FRA)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	-0,07
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,05
Italia (ITA)	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,06
Japón (JPN)	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-0,01
Países Bajos (NLD)	1,00	0,99	0,97	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,94	0,94	0,94	0,93	0,92	0,92	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93	0,92	-0,34
Noruega (NOR)	0,98	0,97	0,95	0,94	0,92	0,91	0,91	0,91	0,90	0,90	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89			-0,53
Suecia (SWE)	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,00	0,98	0,97	0,96	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	0,95	0,93	0,91	-0,41
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	-0,10
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	0,96	0,97	1,00	1,00	0,98	0,94	0,92	0,95	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Media	1,00	1,01	1,00	1,01	1,00	1,00	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97	0,96	-0,20
Desv. Típica	0,01	0,02	0,04	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,22
Máximo	1,05	1,07	1,11	1,13	1,11	1,09	1,06	1,03	1,03	1,04	1,04	1,03	1,02	1,03	1,06	1,07	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	1,04	1,00	0,00
Mínimo	0,98	0,97	0,95	0,94	0,92	0,91	0,91	0,91	0,90	0,90	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,88	0,86	-0,67

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

ANEXO 6. Evolución de la variación en la productividad óptima de los factores, (5.3.7–8).

Anexo 6.1. Evolución interanual de la variación en la product. óptima de los factores respecto al período de refer. base, $t = 1970$, $M_p^{70}\left(x_t^t, y_t^t, x_t^{t+1}, y_t^{t+1}\right)$, (5.3.7).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	0,98	1,03	1,06	0,94	0,95	1,06	1,01	1,00	1,03	0,97	1,01	1,02	1,05	1,04	1,03	1,02	1,00	1,02	1,02	1,05	1,03	1,00	0,98	1,01
Bélgica (BEL)	0,97	1,04	1,06	0,93	0,96	1,07	1,05	1,05	1,02	0,96	1,04	0,99	1,05	1,05	1,04	1,02	1,07	1,07	1,01	1,02	1,01	1,04	1,04	1,02
Canadá (CAN)	0,99	1,05	1,06	0,92	0,97	1,07	1,05	1,00	0,99	0,97	1,01	1,04	1,05	1,02	1,03	1,01	1,01	1,02	1,03	1,07	1,04	1,02	0,98	1,02
Dinamarca (DNK)	0,97	1,03	1,05	0,93	0,97	1,06	1,01	1,01	1,03	0,98	1,02	0,98	1,04	1,01	1,00	1,00	1,01	1,06	1,03	1,03	1,03	0,99		1,01
Finlandia (FIN)	1,01	1,07	1,06	0,94	0,97	1,10	1,07	1,00	0,98	0,94	1,03	1,00	1,06	1,06	1,03	1,04	1,08	1,04	0,99	1,01	1,00	1,03	1,04	1,02
Francia (FRA)	0,99	1,05	1,06	0,92	0,95	1,09	1,04	1,03	1,02	0,96	1,03	0,99	1,05	1,06	1,04	1,03	1,07	1,07	0,99	1,00	1,00	1,03	1,05	1,02
R.F.A. (WGR)	0,97	1,04	1,06	0,93	0,96	1,07	1,00	1,01	1,03	0,96	0,99	0,99	1,05	1,03	1,02	1,00	0,98	1,03	1,02	1,03	1,02	0,99	0,98	1,01
Italia (ITA)	0,99	1,05	1,06	0,93	0,96	1,08	1,03	1,03	1,01	0,96	1,05	1,01	1,07	1,09	1,04	1,03	1,08	1,05	0,99	0,99	0,99	1,05	1,05	1,02
Japón (JPN)	0,96	1,02	1,04	0,91	0,95	1,08	1,02	1,02	1,05	0,97	0,99	0,99	1,04	1,06	1,05	1,03	1,03	1,06	1,03	1,04	1,01	1,01	1,01	1,02
Países Bajos (NLD)	0,99	1,05	1,08	0,95	0,97	1,11	1,07	1,01	0,98	0,97	1,04	1,00	1,06	1,03	1,03	1,03	1,07	1,04	0,99	1,01	1,00	1,03	1,04	1,02
Noruega (NOR)	0,99	1,05	1,06	0,92	0,95	1,10	1,05	1,05	1,01	0,95	1,03	1,00	1,07	1,06	1,02	1,02	1,08	1,08	0,99	1,01	1,00			1,02
Suecia (SWE)	0,97	1,04	1,05	0,92	0,94	1,07	1,02	1,02	1,03	0,96	1,00	1,00	1,05	1,04	1,03	1,01	1,00	1,03	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,02
Reino Unido (GBR)	0,96	1,03	1,05	0,91	0,95	1,08	1,00	1,01	1,04	0,98	1,02	1,01	1,07	1,05	1,03	1,02	1,02	1,03	1,01	1,03	1,04	1,01	1,00	1,02
EE.UU. (USA)	1,06	1,06	1,05	0,96	1,01	1,05	1,03	1,00	0,98	0,97	1,04	1,03	1,05	1,02	1,03	1,03	1,07	1,04	0,99	1,01	1,00	1,03	1,04	1,02
Media	0,99	1,04	1,06	0,93	0,96	1,08	1,03	1,02	1,02	0,96	1,02	1,00	1,05	1,04	1,03	1,02	1,04	1,04	1,01	1,02	1,01	1,02	1,02	1,02
Desv. Típica	0,03	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	0,02	0,01	0,02	0,01	0,01	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,01
Máximo	1,06	1,07	1,08	0,96	1,01	1,11	1,07	1,05	1,05	0,98	1,05	1,04	1,07	1,09	1,05	1,04	1,08	1,08	1,04	1,07	1,04	1,05	1,05	1,02
Mínimo	0,96	1,02	1,04	0,91	0,94	1,05	1,00	1,00	0,98	0,94	0,99	0,98	1,04	1,01	1,00	1,00	0,98	1,02	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	1,01

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 6.2. Evolución acumulada de la variación en la product. óptima de los factores respecto al periodo de referencia base, t =1970, $M_P^{70}\left(x_t^t, y_t^t\right)$, (5.3.8).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	0,98	1,01	1,07	1,00	0,95	1,01	1,03	1,03	1,06	1,03	1,04	1,06	1,12	1,16	1,20	1,21	1,21	1,23	1,26	1,33	1,37	1,37	1,34	1,28
Bélgica (BEL)	0,97	1,01	1,07	0,99	0,95	1,01	1,07	1,11	1,14	1,10	1,14	1,14	1,19	1,26	1,30	1,33	1,43	1,53	1,55	1,58	1,59	1,65	1,71	2,36
Canadá (CAN)	0,99	1,04	1,09	1,01	0,97	1,04	1,10	1,09	1,09	1,05	1,06	1,09	1,15	1,17	1,21	1,22	1,23	1,26	1,29	1,38	1,43	1,46	1,43	1,57
Dinamarca (DNK)	0,97	1,00	1,05	0,98	0,95	1,01	1,02	1,03	1,06	1,03	1,05	1,04	1,07	1,08	1,08	1,08	1,09	1,15	1,19	1,23	1,27	1,26		1,05
Finlandia (FIN)	1,01	1,09	1,16	1,09	1,05	1,16	1,25	1,25	1,22	1,15	1,19	1,18	1,25	1,33	1,37	1,43	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Francia (FRA)	0,99	1,04	1,10	1,01	0,96	1,05	1,09	1,13	1,15	1,11	1,14	1,13	1,18	1,26	1,31	1,34	1,44	1,54	1,53	1,53	1,52	1,57	1,65	2,20
R.F.A. (WGR)	0,97	1,01	1,07	0,99	0,95	1,02	1,02	1,03	1,06	1,02	1,01	1,01	1,06	1,10	1,12	1,12	1,10	1,13	1,16	1,19	1,21	1,20	1,18	0,73
Italia (ITA)	0,99	1,04	1,11	1,03	0,99	1,06	1,09	1,12	1,13	1,09	1,14	1,15	1,23	1,33	1,38	1,42	1,52	1,60	1,58	1,57	1,56	1,63	1,71	2,36
Japón (JPN)	0,96	0,98	1,02	0,93	0,89	0,96	0,98	0,99	1,04	1,01	0,99	0,99	1,03	1,09	1,14	1,18	1,22	1,29	1,33	1,38	1,39	1,41	1,43	1,56
Países Bajos (NLD)	0,99	1,04	1,13	1,07	1,04	1,15	1,23	1,25	1,22	1,19	1,23	1,24	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Noruega (NOR)	0,99	1,03	1,10	1,01	0,96	1,06	1,11	1,17	1,18	1,13	1,17	1,16	1,25	1,32	1,35	1,37	1,48	1,60	1,58	1,60	1,60			2,26
Suecia (SWE)	0,97	1,01	1,07	0,98	0,92	0,99	1,00	1,02	1,06	1,02	1,02	1,01	1,06	1,10	1,13	1,14	1,14	1,18	1,23	1,29	1,34	1,40	1,45	1,63
Reino Unido (GBR)	0,96	0,99	1,04	0,95	0,90	0,96	0,97	0,98	1,02	1,00	1,02	1,03	1,10	1,15	1,19	1,22	1,24	1,28	1,30	1,33	1,38	1,40	1,40	1,48
EE.UU. (USA)	1,06	1,13	1,18	1,13	1,15	1,21	1,25	1,25	1,22	1,19	1,23	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Media	0,99	1,03	1,09	1,01	0,97	1,05	1,09	1,10	1,12	1,08	1,10	1,11	1,17	1,22	1,26	1,28	1,34	1,40	1,41	1,44	1,46	1,48	1,54	1,85
Desv. Típica	0,03	0,04	0,05	0,05	0,07	0,07	0,10	0,10	0,07	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,18	0,19	0,17	0,16	0,14	0,16	0,18	0,55
Máximo	1,06	1,13	1,18	1,13	1,15	1,21	1,25	1,25	1,22	1,19	1,23	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,58	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Mínimo	0,96	0,98	1,02	0,93	0,89	0,96	0,97	0,98	1,02	1,00	0,99	0,99	1,03	1,08	1,08	1,08	1,09	1,13	1,16	1,19	1,21	1,20	1,18	0,73

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.
T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Anexo 6.3. Evolución interanual del cambio técnico respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.7).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	*Media*
Australia (AUS)	0,98	1,02	1,05	0,96	0,95	1,05	1,04	0,99	1,03	0,99	0,94	1,14	1,07	1,03	1,03	1,01	0,96	1,01	1,04	1,05	1,04	0,98	0,99	1,01
Bélgica (BEL)	0,97	1,03	1,05	0,95	0,96	1,09	1,05	1,04	1,02	1,00	1,03	1,08	1,08	1,04	1,04	1,02	1,03	1,06	1,05	1,02	1,01	1,01	1,02	1,03
Canadá (CAN)	0,99	1,04	1,05	0,93	0,99	1,06	1,05	0,99	0,99	0,98	1,01	1,06	1,06	1,01	1,03	1,01	0,99	1,02	1,04	1,07	1,04	1,01	0,98	1,02
Dinamarca (DNK)	0,96	1,03	0,99	0,98	1,00	1,04	1,01	1,00	1,04	1,07	1,02	1,02	1,06	0,97	0,95	0,95	0,97	1,05	1,02	0,92	1,12	1,03		1,01
Finlandia (FIN)	1,03	1,05	1,06	0,99	1,00	1,03	1,00	0,99	1,04	1,01	1,03	1,04	1,09	1,06	1,03	1,00	1,01	1,05	1,06	1,02	1,02	1,06	1,10	1,03
Francia (FRA)	0,99	1,05	1,06	0,93	0,96	1,09	1,04	1,03	1,02	0,96	1,03	0,99	1,05	1,06	1,04	1,02	1,07	1,07	1,00	1,00	1,00	1,03	1,05	1,02
R.F.A. (WGR)	0,97	1,04	1,06	0,94	0,96	1,07	1,00	1,01	1,03	0,96	1,00	1,00	1,05	1,03	1,02	1,00	0,98	1,03	1,02	1,03	1,02	0,99	0,98	1,01
Italia (ITA)	0,99	1,05	1,07	0,93	0,96	1,07	1,02	1,03	1,01	0,96	1,05	1,01	1,07	1,09	1,04	1,02	1,07	1,04	1,00	0,99	1,00	1,04	1,05	1,02
Japón (JPN)	0,96	1,02	1,05	0,92	0,93	1,07	1,02	1,02	1,03	0,96	0,99	1,02	1,01	1,04	1,06	1,03	1,08	1,06	1,03	1,03	0,99	1,02	1,03	1,02
Países Bajos (NLD)	0,99	1,06	1,10	0,96	0,86	1,12	1,04	1,06	1,03	1,02	1,04	1,03	1,09	1,07	1,01	1,01	0,99	1,05	1,00	1,01	1,04	0,98	1,05	1,03
Noruega (NOR)	1,02	1,04	1,05	1,01	0,99	1,01	0,97	0,98	1,06	0,99	1,00	1,03	1,05	1,06	1,03	0,99	1,03	1,00	1,03	1,01	1,02			1,02
Suecia (SWE)	0,97	1,03	1,04	0,94	0,95	1,05	1,01	1,00	1,03	1,00	1,02	1,03	1,06	1,03	1,01	1,00	0,99	1,02	1,05	1,05	1,05	1,05	1,07	1,02
Reino Unido (GBR)	0,96	1,02	1,04	0,92	0,95	1,08	1,00	1,01	1,04	0,98	1,03	1,01	1,07	1,05	1,03	1,02	1,01	1,03	1,02	1,03	1,04	1,01	1,00	1,02
EE.UU. (USA)	1,06	1,06	1,09	0,95	0,98	1,05	1,05	1,04	1,01	0,93	1,03	0,98	1,05	1,02	1,03	1,03	1,07	1,04	1,00	1,01	1,00	1,03	1,04	1,02
Media	0,99	1,04	1,05	0,95	0,96	1,06	1,02	1,01	1,03	0,99	1,01	1,03	1,06	1,04	1,02	1,01	1,02	1,04	1,03	1,02	1,03	1,02	1,03	1,02
Desv. Típica	0,03	0,01	0,03	0,03	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,02	0,03	0,03	0,02	0,04	0,02	0,02	0,03	0,03	0,02	0,04	0,01
Máximo	1,06	1,06	1,10	1,01	1,00	1,12	1,05	1,06	1,06	1,07	1,05	1,14	1,09	1,09	1,06	1,03	1,08	1,07	1,06	1,07	1,12	1,06	1,10	1,03
Mínimo	0,96	1,02	0,99	0,92	0,86	1,01	0,97	0,98	0,99	0,93	0,94	0,98	1,01	0,97	0,95	0,95	0,96	1,00	1,00	0,92	0,99	0,98	0,98	1,01

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 6.4. Evolución acumulada del cambio técnico respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.8).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	0,98	1,00	1,05	1,00	0,95	1,00	1,04	1,03	1,07	1,06	0,99	1,13	1,21	1,24	1,28	1,29	1,24	1,25	1,29	1,36	1,41	1,38	1,38	1,40
Bélgica (BEL)	0,97	1,00	1,04	0,99	0,95	1,04	1,09	1,13	1,15	1,16	1,19	1,28	1,39	1,45	1,51	1,53	1,57	1,66	1,74	1,77	1,78	1,80	1,84	2,68
Canadá (CAN)	0,99	1,03	1,08	1,01	1,00	1,06	1,11	1,10	1,09	1,07	1,07	1,14	1,21	1,23	1,26	1,27	1,26	1,28	1,33	1,42	1,48	1,49	1,46	1,66
Dinamarca (DNK)	0,96	0,99	0,98	0,95	0,95	0,99	1,00	1,01	1,05	1,13	1,15	1,17	1,24	1,20	1,14	1,08	1,06	1,11	1,13	1,04	1,16	1,20		0,82
Finlandia (FIN)	1,03	1,08	1,14	1,13	1,13	1,16	1,15	1,14	1,18	1,19	1,22	1,27	1,39	1,47	1,51	1,51	1,53	1,61	1,72	1,75	1,78	1,89	2,07	3,21
Francia (FRA)	0,99	1,03	1,10	1,02	0,97	1,06	1,10	1,13	1,16	1,11	1,15	1,14	1,20	1,28	1,33	1,36	1,46	1,55	1,55	1,55	1,54	1,59	1,67	2,25
R.F.A. (WGR)	0,97	1,01	1,06	0,99	0,96	1,02	1,03	1,03	1,07	1,03	1,02	1,02	1,07	1,11	1,13	1,13	1,11	1,15	1,17	1,20	1,23	1,22	1,20	0,78
Italia (ITA)	0,99	1,04	1,12	1,04	1,00	1,07	1,10	1,13	1,14	1,10	1,15	1,16	1,25	1,36	1,41	1,44	1,54	1,60	1,60	1,59	1,58	1,65	1,73	2,41
Japón (JPN)	0,96	0,98	1,03	0,94	0,88	0,94	0,96	0,98	1,00	0,96	0,95	0,97	0,98	1,01	1,07	1,10	1,18	1,26	1,30	1,34	1,33	1,35	1,39	1,45
Países Bajos (NLD)	0,99	1,05	1,16	1,12	0,95	1,07	1,11	1,18	1,21	1,24	1,28	1,33	1,45	1,55	1,57	1,58	1,56	1,64	1,64	1,67	1,73	1,69	1,78	2,53
Noruega (NOR)	1,02	1,05	1,11	1,13	1,11	1,12	1,09	1,07	1,14	1,13	1,13	1,16	1,22	1,29	1,33	1,31	1,34	1,34	1,39	1,40	1,42			1,69
Suecia (SWE)	0,97	1,00	1,04	0,97	0,92	0,97	0,97	0,98	1,01	1,01	1,03	1,06	1,12	1,16	1,17	1,17	1,16	1,18	1,24	1,30	1,36	1,43	1,52	1,85
Reino Unido (GBR)	0,96	0,99	1,03	0,94	0,90	0,96	0,97	0,98	1,02	1,00	1,03	1,04	1,11	1,17	1,21	1,24	1,25	1,29	1,31	1,34	1,40	1,41	1,42	1,53
EE.UU. (USA)	1,06	1,13	1,23	1,17	1,15	1,21	1,27	1,32	1,34	1,24	1,29	1,26	1,32	1,36	1,40	1,44	1,54	1,60	1,59	1,60	1,60	1,65	1,71	2,36
Media	0,99	1,03	1,08	1,03	0,99	1,05	1,07	1,09	1,12	1,10	1,12	1,15	1,23	1,28	1,31	1,32	1,34	1,39	1,43	1,45	1,49	1,52	1,60	2,01
Desv. Típica	0,03	0,04	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08	0,10	0,09	0,09	0,11	0,11	0,13	0,15	0,16	0,17	0,19	0,20	0,21	0,21	0,19	0,21	0,24	0,68
Máximo	1,06	1,13	1,23	1,17	1,15	1,21	1,27	1,32	1,34	1,24	1,29	1,33	1,45	1,55	1,57	1,58	1,57	1,66	1,74	1,77	1,78	1,89	2,07	3,21
Mínimo	0,96	0,98	0,98	0,94	0,88	0,94	0,96	0,98	1,00	0,96	0,95	0,97	0,98	1,01	1,07	1,08	1,06	1,11	1,13	1,04	1,16	1,20	1,20	0,78

Fuente: *Elaboración propia, ISDB98.*
T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Anexo 6.5. Evolución interanual del cambio de escala respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.7).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,00	1,01	1,01	0,98	1,00	1,01	0,97	1,01	1,00	0,97	1,08	0,90	0,98	1,01	1,00	1,01	1,04	1,01	0,99	1,00	0,99	1,02	0,99	1,00
Bélgica (BEL)	1,00	1,01	1,01	0,98	0,99	0,98	1,00	1,01	1,00	0,96	1,01	0,92	0,97	1,01	1,00	1,01	1,05	1,01	0,96	1,01	1,00	1,03	1,01	1,00
Canadá (CAN)	1,00	1,01	1,01	0,99	0,98	1,01	1,00	1,01	1,00	0,99	1,00	0,98	0,99	1,01	1,00	1,00	1,02	1,01	0,99	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00
Dinamarca (DNK)	1,01	1,00	1,07	0,96	0,97	1,03	0,99	1,00	0,99	0,91	1,00	0,97	0,97	1,04	1,06	1,05	1,03	1,01	1,01	1,12	0,92	0,96		1,00
Finlandia (FIN)	0,98	1,02	1,01	0,95	0,97	1,08	1,08	1,01	0,95	0,93	1,00	0,96	0,97	1,00	1,01	1,04	1,06	0,98	0,93	0,99	0,98	0,98	0,94	0,99
Francia (FRA)	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,01	1,00	1,00	1,02	1,01	0,99	0,98	1,03	1,02	1,00	1,00	0,96	0,99	1,00	1,00	1,02	1,00	0,98	1,00
Países Bajos (NLD)	1,00	1,00	0,98	0,98	1,13	0,99	1,03	0,95	0,96	0,95	1,00	0,97	0,97	0,96	1,02	1,01	1,08	0,99	0,99	1,00	0,96	1,05	0,99	1,00
Noruega (NOR)	0,97	1,01	1,01	0,91	0,96	1,09	1,08	1,06	0,95	0,96	1,04	0,97	1,02	1,00	1,00	1,03	1,05	1,08	0,96	1,00	0,98			1,01
Suecia (SWE)	1,00	1,01	1,01	0,98	1,00	1,02	1,01	1,01	1,00	0,96	0,98	0,97	0,98	1,01	1,02	1,01	1,01	1,01	0,99	1,00	0,99	0,99	0,97	1,00
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	0,96	1,00	1,03	1,00	0,98	0,96	0,97	1,04	1,00	1,04	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	1,00	1,01	1,00	0,98	1,00	1,02	1,01	1,00	0,99	0,98	1,01	0,97	0,99	1,00	1,01	1,01	1,02	1,01	0,99	1,01	0,99	1,00	0,99	1,00
Desv. Típica	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,02	0,00
Máximo	1,01	1,02	1,07	1,00	1,13	1,09	1,08	1,06	1,02	1,04	1,08	1,04	1,03	1,04	1,06	1,05	1,08	1,08	1,01	1,12	1,02	1,05	1,01	1,00
Mínimo	0,97	1,00	0,96	0,91	0,96	0,98	0,97	0,95	0,95	0,91	0,98	0,90	0,97	0,96	1,00	1,00	0,96	0,98	0,93	0,99	0,92	0,96	0,94	0,99

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 6.6. Evolución acumulada del cambio de escala respecto al período de referencia base, t =1970, (5.3.8).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,00	1,01	1,02	1,00	1,00	1,01	0,99	1,00	0,99	0,97	1,05	0,94	0,92	0,93	0,93	0,94	0,97	0,99	0,98	0,98	0,97	0,99	0,97	-0,11
Bélgica (BEL)	1,00	1,02	1,03	1,01	1,00	0,98	0,98	0,99	0,99	0,95	0,96	0,88	0,86	0,87	0,86	0,87	0,91	0,92	0,89	0,90	0,90	0,92	0,93	-0,32
Canadá (CAN)	1,00	1,00	1,01	1,00	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0,98	0,98	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	-0,09
Dinamarca (DNK)	1,01	1,01	1,08	1,03	1,00	1,02	1,02	1,02	1,00	0,92	0,92	0,89	0,86	0,90	0,95	1,00	1,03	1,04	1,05	1,18	1,09	1,05		0,22
Finlandia (FIN)	0,98	1,00	1,01	0,96	0,93	1,01	1,08	1,10	1,04	0,97	0,97	0,93	0,90	0,90	0,91	0,95	1,01	0,99	0,92	0,92	0,90	0,88	0,83	-0,82
Francia (FRA)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,05
R.F.A. (WGR)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,05
Italia (ITA)	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,05
Japón (JPN)	1,00	0,99	0,99	0,99	1,01	1,02	1,02	1,02	1,04	1,05	1,05	1,02	1,05	1,07	1,07	1,07	1,03	1,02	1,02	1,03	1,05	1,04	1,03	0,11
Países Bajos (NLD)	1,00	0,99	0,98	0,96	1,08	1,07	1,11	1,06	1,01	0,96	0,96	0,93	0,91	0,87	0,90	0,91	0,98	0,97	0,96	0,96	0,93	0,97	0,96	-0,17
Noruega (NOR)	0,97	0,98	0,99	0,90	0,86	0,94	1,02	1,08	1,03	1,00	1,03	1,00	1,02	1,02	1,02	1,05	1,10	1,19	1,14	1,15	1,12			0,56
Suecia (SWE)	1,00	1,02	1,03	1,01	1,01	1,02	1,03	1,05	1,05	1,01	0,99	0,96	0,95	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	0,95	-0,21
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,05
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	0,96	0,97	1,00	1,00	0,98	0,94	0,92	0,95	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Media	1,00	1,00	1,01	0,99	0,99	1,00	1,01	1,02	1,00	0,98	0,99	0,96	0,95	0,96	0,96	0,98	1,00	1,00	0,99	1,00	0,99	0,98	0,97	-0,15
Desv. Típica	0,01	0,01	0,03	0,03	0,05	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,04	0,04	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,06	0,06	0,08	0,06	0,05	0,05	0,24
Máximo	1,01	1,02	1,08	1,03	1,08	1,07	1,11	1,10	1,05	1,05	1,05	1,02	1,05	1,07	1,07	1,07	1,10	1,19	1,14	1,18	1,12	1,05	1,03	0,11
Mínimo	0,97	0,98	0,96	0,90	0,86	0,94	0,98	0,94	0,92	0,92	0,92	0,88	0,86	0,87	0,86	0,87	0,91	0,92	0,89	0,90	0,90	0,88	0,83	-0,82

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.
T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

ANEXO 7. Evolución de la variación en la productividad relativa o eficiencia productiva de los factores, (5.3.1–2–3–4).

Anexo 7.1. Evolución interanual de la variación en la product. relativa de los fact. respecto al período de refer. base, $t=1970$, $M_R^{70}(x_i^t, y_i^t, x_i^{t+1}, y_i^{t+1})$, (5.3.1–2).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,02	0,97	0,99	1,03	1,02	0,95	0,99	1,01	1,00	1,05	1,01	0,96	0,99	1,01	0,98	1,02	1,04	1,00	0,97	0,99	1,00	1,02	1,07	1,00
Bélgica (BEL)	1,03	1,01	1,00	1,08	0,97	1,01	0,99	1,01	1,04	1,09	1,02	1,08	1,02	0,99	1,00	0,99	0,95	0,99	1,04	1,00	1,00	0,97	0,98	1,01
Canadá (CAN)	1,03	1,00	1,01	1,08	0,98	0,98	1,00	1,01	0,99	0,97	0,99	0,94	1,02	1,07	1,01	0,99	1,02	0,99	0,98	0,96	0,96	1,03	1,07	1,00
Dinamarca (DNK)	1,04	1,02	0,97	1,06	1,02	0,96	0,98	0,97	1,01	1,09	0,98	1,04	1,03	0,98	0,97	0,96	0,97	0,98	0,99	0,96	0,99	1,03		1,00
Finlandia (FIN)	0,97	1,01	0,96	1,08	0,99	0,92	0,94	1,07	1,09	1,10	1,01	1,03	0,99	1,00	1,01	1,01	1,00	1,02	1,07	1,01	0,96	1,09	1,09	1,02
Francia (FRA)	1,04	0,98	0,96	1,09	1,03	0,99	1,00	1,00	1,02	1,05	0,99	1,04	0,98	0,95	0,98	0,99	0,95	1,01	1,05	1,01	1,00	0,98	0,97	1,00
R.F.A. (WGR)	1,00	0,97	0,98	1,05	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	0,99	0,98	1,01	1,11	0,99	1,05	0,99	1,03	1,07	1,09	0,98	1,01	0,98	1,01	1,01	1,01	0,97	1,01	1,04	1,02	1,02	1,00	0,98	1,02
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,97	0,98	0,99	0,99	1,01	1,02	1,01	1,02	0,97	0,98	1,00	0,96	1,03	1,00	1,01	1,01	1,00	0,96	0,96	0,99
Países Bajos (NLD)	1,02	0,96	0,98	1,10	1,00	1,00	0,96	1,04	1,04	1,05	1,00	1,02	1,02	1,03	0,98	0,99	0,91	1,00	1,05	1,01	1,00	0,98	1,01	1,01
Noruega (NOR)	1,02	0,98	0,97	1,10	1,01	0,91	0,93	0,93	1,04	1,04	0,96	1,03	0,98	1,00	1,00	0,97	0,95	0,93	1,04	1,00	1,02			0,99
Suecia (SWE)	1,02	0,95	0,99	1,11	1,03	0,92	0,92	0,96	1,02	1,03	0,99	1,05	1,03	1,03	0,98	1,00	1,03	0,98	0,99	0,98	0,97	1,02	1,06	1,00
Reino Unido (GBR)	1,01	0,99	1,02	1,06	0,98	0,94	1,00	0,98	0,94	0,93	0,96	1,05	1,02	1,01	1,00	1,02	1,04	1,03	1,03	0,99	0,99	1,03	1,05	1,00
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	1,01	0,99	0,99	1,07	1,00	0,97	0,98	1,00	1,02	1,04	0,99	1,02	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	1,00	1,02	0,99	0,99	1,01	1,02	1,01
Desv. Típica	0,02	0,02	0,02	0,04	0,02	0,04	0,03	0,04	0,04	0,05	0,02	0,04	0,02	0,03	0,01	0,02	0,04	0,02	0,03	0,02	0,02	0,04	0,04	0,01
Máximo	1,04	1,02	1,02	1,11	1,03	1,05	1,00	1,07	1,09	1,10	1,02	1,08	1,03	1,07	1,01	1,02	1,04	1,03	1,07	1,02	1,02	1,09	1,09	1,02
Mínimo	0,97	0,95	0,96	1,00	0,97	0,91	0,92	0,93	0,94	0,93	0,96	0,94	0,97	0,95	0,97	0,96	0,91	0,93	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96	0,99

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 7.2. Evolución acumulada de la productividad relativa de los factores respecto al período de referencia base, t =1970, $M_R^{70}\left(x_i^{70}, y_i^{70}, x_i^t, y_i^t\right)$, (5.3.3–4).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,02	0,99	0,98	1,01	1,03	0,98	0,97	0,98	0,99	1,03	1,04	1,01	1,00	1,00	0,98	1,00	1,04	1,05	1,02	1,00	1,01	1,03	1,09	0,39
Bélgica (BEL)	1,03	1,04	1,04	1,12	1,09	1,10	1,09	1,11	1,15	1,25	1,27	1,37	1,40	1,38	1,38	1,37	1,30	1,28	1,33	1,33	1,32	1,29	1,26	1,00
Canadá (CAN)	1,03	1,03	1,04	1,12	1,09	1,07	1,07	1,08	1,07	1,04	1,03	0,97	0,99	1,06	1,07	1,06	1,08	1,07	1,05	1,01	0,97	1,00	1,07	0,29
Dinamarca (DNK)	1,04	1,06	1,03	1,09	1,11	1,07	1,04	1,01	1,02	1,11	1,10	1,14	1,17	1,15	1,12	1,07	1,04	1,02	1,01	0,96	0,96	0,99		-0,06
Finlandia (FIN)	0,97	0,97	0,93	1,01	1,00	0,92	0,87	0,93	1,02	1,12	1,13	1,17	1,16	1,15	1,17	1,18	1,18	1,21	1,29	1,30	1,25	1,37	1,49	1,74
Francia (FRA)	1,04	1,01	0,97	1,06	1,09	1,08	1,08	1,08	1,10	1,15	1,14	1,19	1,16	1,10	1,08	1,07	1,02	1,02	1,08	1,09	1,09	1,07	1,04	0,15
R.F.A. (WGR)	1,00	0,97	0,95	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Italia (ITA)	0,99	0,97	0,98	1,09	1,08	1,14	1,13	1,16	1,25	1,36	1,33	1,35	1,33	1,34	1,35	1,37	1,33	1,34	1,39	1,42	1,45	1,45	1,42	1,53
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,97	0,94	0,93	0,92	0,93	0,95	0,95	0,97	0,95	0,93	0,93	0,90	0,92	0,92	0,93	0,94	0,94	0,90	0,86	-0,64
Países Bajos (NLD)	1,02	0,98	0,96	1,05	1,05	1,06	1,02	1,06	1,11	1,17	1,16	1,19	1,21	1,25	1,22	1,21	1,10	1,09	1,14	1,15	1,16	1,14	1,14	0,58
Noruega (NOR)	1,02	0,99	0,96	1,05	1,06	0,97	0,90	0,84	0,87	0,90	0,87	0,90	0,87	0,88	0,88	0,85	0,81	0,75	0,78	0,78	0,80			-1,08
Suecia (SWE)	1,02	0,98	0,97	1,07	1,10	1,01	0,93	0,89	0,91	0,93	0,92	0,96	1,00	1,03	1,00	1,01	1,04	1,02	1,00	0,98	0,95	0,98	1,04	0,15
Reino Unido (GBR)	1,01	1,00	1,02	1,08	1,07	1,01	1,00	0,98	0,92	0,86	0,83	0,87	0,89	0,90	0,90	0,91	0,96	0,98	1,01	1,00	0,99	1,02	1,07	0,29
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Media	1,01	1,00	0,99	1,05	1,05	1,02	1,00	1,00	1,02	1,06	1,06	1,08	1,08	1,08	1,08	1,07	1,06	1,05	1,07	1,07	1,06	1,09	1,12	0,46
Desv. Típica	0,02	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,08	0,09	0,10	0,14	0,14	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,14	0,15	0,16	0,17	0,17	0,17	0,18	0,67
Máximo	1,04	1,06	1,04	1,12	1,11	1,14	1,13	1,16	1,25	1,36	1,33	1,37	1,40	1,38	1,38	1,37	1,33	1,34	1,39	1,42	1,45	1,45	1,49	1,74
Mínimo	0,97	0,97	0,93	1,00	0,97	0,92	0,87	0,84	0,87	0,86	0,83	0,87	0,87	0,88	0,88	0,85	0,81	0,75	0,78	0,78	0,80	0,90	0,86	-0,64

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Anexo 7.3. Evolución interanual de las variaciones de la eficiencia técnica respecto al período de referencia base, t =1970, (5.1.1–2).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,02	0,98	1,00	1,01	1,02	0,96	1,00	1,02	1,00	1,02	1,09	0,87	0,98	1,02	0,98	1,03	1,07	1,01	0,96	0,99	1,01	1,04	1,05	1,01
Bélgica (BEL)	1,02	1,02	1,01	1,05	0,96	1,04	1,00	1,03	1,05	1,05	1,04	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01
Canadá (CAN)	1,03	1,00	1,01	1,06	0,98	0,99	1,00	1,02	0,98	0,96	0,99	0,92	1,02	1,07	1,01	0,99	1,03	1,00	0,97	0,96	0,96	1,05	1,06	1,00
Dinamarca (DNK)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,08	0,92	1,00		1,00
Finlandia (FIN)	0,94	1,02	0,95	1,01	0,97	1,00	1,03	1,10	1,02	1,01	1,02	1,00	0,97	1,00	1,02	1,07	1,07	1,02	1,00	1,01	0,98	1,13	1,05	1,02
Francia (FRA)	1,03	0,98	0,97	1,08	1,03	0,99	1,00	1,00	1,02	1,04	1,00	1,03	0,97	0,95	0,98	0,99	0,95	1,01	1,05	1,01	1,00	0,99	0,97	1,00
R.F.A. (WGR)	1,00	0,97	0,98	1,05	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	0,98	0,99	1,02	1,10	0,99	1,06	0,99	1,03	1,07	1,09	0,98	1,01	0,98	1,01	1,01	1,01	0,98	1,01	1,03	1,02	1,02	1,01	0,98	1,02
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,98	0,98	0,99	1,03	1,04	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,99	0,99	1,01	1,01	1,02	0,96	0,94	1,00
Países Bajos (NLD)	1,01	0,97	0,99	1,08	1,14	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,98	1,04	1,00	0,97	1,03	1,00	1,01
Noruega (NOR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			1,00
Suecia (SWE)	1,02	0,97	1,00	1,08	1,02	0,94	0,93	0,97	1,02	1,01	0,99	1,02	1,02	1,04	0,99	1,01	1,04	0,99	0,98	0,99	0,98	1,04	1,05	1,00
Reino Unido (GBR)	1,01	0,99	1,03	1,05	0,98	0,94	1,00	0,98	0,94	0,93	0,96	1,05	1,02	1,01	1,00	1,02	1,05	1,03	1,03	0,99	0,99	1,03	1,05	1,00
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	1,01	0,99	1,00	1,04	1,01	0,99	1,00	1,01	1,01	1,01	1,00	0,99	1,00	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00	1,00	1,01	0,99	1,02	1,01	1,01
Desv. Típica	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,03	0,02	0,03	0,03	0,04	0,03	0,04	0,02	0,02	0,01	0,02	0,04	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,01
Máximo	1,03	1,02	1,03	1,10	1,14	1,06	1,03	1,10	1,07	1,09	1,09	1,05	1,02	1,07	1,02	1,07	1,07	1,03	1,05	1,08	1,02	1,13	1,06	1,02
Mínimo	0,94	0,97	0,95	1,00	0,96	0,94	0,93	0,97	0,94	0,93	0,96	0,87	0,97	0,95	0,98	0,96	0,95	0,98	0,96	0,96	0,92	0,96	0,94	1,00

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 7.4. Evolución acumulada de las variaciones en la eficiencia técnica respecto al período de referencia base, t =1970, (5.1.3–4).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,02	1,00	1,00	1,01	1,02	0,99	0,99	1,01	1,01	1,03	1,12	0,98	0,96	0,97	0,96	0,99	1,06	1,07	1,03	1,02	1,03	1,07	1,12	0,50
Bélgica (BEL)	1,02	1,04	1,05	1,10	1,06	1,10	1,10	1,13	1,19	1,25	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,13
Canadá (CAN)	1,03	1,04	1,05	1,11	1,08	1,07	1,07	1,09	1,07	1,02	1,02	0,94	0,95	1,02	1,03	1,02	1,06	1,05	1,02	0,98	0,95	1,00	1,06	0,25
Dinamarca (DNK)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,08	1,00	1,00		0,00
Finlandia (FIN)	0,94	0,96	0,92	0,93	0,90	0,89	0,92	1,01	1,03	1,04	1,06	1,06	1,02	1,02	1,04	1,12	1,20	1,22	1,22	1,24	1,21	1,36	1,43	1,58
Francia (FRA)	1,03	1,01	0,98	1,05	1,09	1,08	1,08	1,08	1,10	1,15	1,14	1,18	1,15	1,10	1,08	1,07	1,02	1,03	1,07	1,09	1,09	1,07	1,04	0,17
R.F.A. (WGR)	1,00	0,97	0,95	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Italia (ITA)	0,98	0,97	0,99	1,09	1,08	1,14	1,13	1,16	1,25	1,36	1,33	1,34	1,31	1,33	1,34	1,36	1,33	1,34	1,39	1,41	1,44	1,45	1,42	1,55
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,96	0,95	0,94	0,97	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,95	0,94	0,95	0,97	0,99	0,94	0,89	-0,52
Países Bajos (NLD)	1,01	0,98	0,97	1,05	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,17	1,14	1,19	1,19	1,15	1,19	1,19	0,75
Noruega (NOR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			0,00
Suecia (SWE)	1,02	0,99	0,98	1,06	1,09	1,02	0,95	0,92	0,94	0,94	0,94	0,96	0,98	1,01	1,00	1,02	1,06	1,05	1,03	1,02	0,99	1,03	1,08	0,35
Reino Unido (GBR)	1,01	1,00	1,03	1,09	1,07	1,01	1,01	0,98	0,93	0,86	0,83	0,87	0,89	0,90	0,90	0,92	0,96	0,99	1,02	1,01	1,00	1,03	1,08	0,34
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Media	1,01	1,00	0,99	1,03	1,04	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,06	1,05	1,06	1,06	1,07	1,08	1,08	1,09	1,09	1,08	1,11	1,13	0,51
Desv. Típica	0,02	0,02	0,04	0,05	0,07	0,08	0,08	0,08	0,10	0,13	0,14	0,14	0,13	0,12	0,13	0,13	0,12	0,12	0,13	0,14	0,14	0,16	0,17	0,64
Máximo	1,03	1,04	1,05	1,11	1,19	1,19	1,19	1,19	1,25	1,36	1,33	1,34	1,31	1,33	1,34	1,36	1,33	1,34	1,39	1,41	1,44	1,45	1,43	1,58
Mínimo	0,94	0,96	0,92	0,93	0,90	0,89	0,92	0,92	0,93	0,86	0,83	0,87	0,89	0,90	0,90	0,92	0,95	0,94	0,95	0,97	0,95	0,94	0,89	-0,52

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.
T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Anexo 7.5. Evolución interanual de la eficiencia de escala respecto al período de referencia base, t=1970, (5.1.1–2).

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	Media
Australia (AUS)	1,00	0,99	0,99	1,02	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,03	0,93	1,10	1,01	0,99	1,00	0,99	0,97	0,99	1,01	0,99	1,00	0,98	1,01	1,00
Bélgica (BEL)	1,01	0,99	0,99	1,03	1,01	0,98	0,99	0,98	0,99	1,04	0,98	1,08	1,02	0,99	1,00	0,99	0,95	0,99	1,04	1,00	1,00	0,97	0,98	1,00
Canadá (CAN)	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	0,98	1,00	1,01	1,00	1,00	0,98	1,00	1,00
Dinamarca (DNK)	1,04	1,02	0,97	1,06	1,02	0,96	0,98	0,97	1,01	1,09	0,98	1,03	1,03	0,99	0,97	0,96	0,96	0,99	0,98	0,89	1,07	1,03		1,00
Finlandia (FIN)	1,02	0,99	1,01	1,07	1,02	0,92	0,92	0,98	1,07	1,09	1,00	1,04	1,02	0,99	0,99	0,95	0,93	1,01	1,06	0,99	0,99	0,97	1,03	1,00
Francia (FRA)	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00
R.F.A. (WGR)	1,00	0,99	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Italia (ITA)	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	1,01	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	1,00	1,01	1,00	0,98	0,99	1,01	1,02	0,97	0,98	1,00	1,00	1,04	1,01	1,00	1,00	0,98	1,00	1,02	1,00
Países Bajos (NLD)	1,00	0,99	0,99	1,02	0,88	1,00	0,96	1,04	1,04	1,05	1,00	1,02	1,02	1,03	0,98	0,99	0,92	1,01	1,01	1,01	1,04	0,95	1,01	1,00
Noruega (NOR)	1,02	0,98	0,97	1,10	1,01	0,91	0,93	0,93	1,04	1,04	0,96	1,03	0,98	1,00	1,00	0,97	0,95	0,93	1,04	1,00	1,02			0,99
Suecia (SWE)	1,00	0,99	0,99	1,02	1,01	0,98	0,99	0,99	1,00	1,02	0,99	1,02	1,01	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	1,01	0,99	0,99	0,98	1,01	1,00
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Media	1,01	0,99	0,99	1,03	0,99	0,98	0,98	0,99	1,01	1,03	0,99	1,03	1,01	1,00	0,99	0,99	0,98	0,99	1,01	0,99	1,01	0,99	1,01	1,00
Desv. Típica	0,01	0,01	0,01	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02	0,01	0,00
Máximo	1,04	1,02	1,01	1,10	1,02	1,00	1,01	1,04	1,07	1,09	1,01	1,10	1,03	1,03	1,00	1,00	1,04	1,01	1,06	1,01	1,07	1,03	1,03	1,00
Mínimo	1,00	0,98	0,97	1,00	0,88	0,91	0,92	0,93	0,98	0,99	0,93	1,00	0,97	0,98	0,97	0,95	0,92	0,93	0,98	0,89	0,98	0,95	0,98	1,00

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.

Anexo 7.6. Evolución acumulada de la variación en la eficiencia de escala respecto al período de referencia base, t =1970, (5.1.3–4)..

País	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	T.V.I.
Australia (AUS)	1,00	0,99	0,98	1,00	1,01	0,99	0,98	0,98	0,98	1,00	0,93	1,03	1,04	1,03	1,03	1,02	0,99	0,98	0,99	0,98	0,98	0,96	0,97	-0,11
Bélgica (BEL)	1,01	1,00	0,99	1,02	1,02	1,00	0,99	0,97	0,96	1,00	0,98	1,05	1,08	1,07	1,07	1,05	1,00	0,99	1,03	1,02	1,02	0,99	0,97	-0,14
Canadá (CAN)	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,02	1,02	1,03	1,02	1,02	1,00	1,01	0,03
Dinamarca (DNK)	1,04	1,06	1,03	1,09	1,11	1,07	1,04	1,01	1,02	1,11	1,10	1,13	1,16	1,15	1,12	1,07	1,03	1,02	1,00	0,89	0,96	0,99		-0,06
Finlandia (FIN)	1,02	1,01	1,02	1,09	1,11	1,03	0,94	0,92	0,98	1,07	1,07	1,11	1,14	1,13	1,12	1,06	0,99	1,00	1,06	1,05	1,04	1,00	1,04	0,16
Francia (FRA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	-0,02
R.F.A. (WGR)	1,00	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Italia (ITA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-0,01
Japón (JPN)	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,98	0,98	0,98	0,96	0,95	0,95	0,97	0,95	0,93	0,93	0,93	0,97	0,98	0,97	0,97	0,95	0,96	0,97	-0,12
Países Bajos (NLD)	1,00	0,99	0,99	1,01	0,89	0,89	0,86	0,89	0,93	0,98	0,98	1,00	1,02	1,05	1,03	1,02	0,94	0,95	0,96	0,97	1,01	0,96	0,96	-0,17
Noruega (NOR)	1,02	0,99	0,96	1,05	1,06	0,97	0,90	0,84	0,87	0,90	0,87	0,90	0,87	0,88	0,88	0,85	0,81	0,75	0,79	0,78	0,80			-1,08
Suecia (SWE)	1,00	0,99	0,98	1,00	1,01	1,00	0,99	0,97	0,97	0,99	0,99	1,01	1,02	1,02	1,00	0,99	0,98	0,97	0,98	0,97	0,96	0,94	0,95	-0,20
Reino Unido (GBR)	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	-0,05
EE.UU. (USA)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00
Media	1,01	1,00	1,00	1,02	1,02	0,99	0,98	0,97	0,98	1,00	0,99	1,02	1,02	1,02	1,02	1,00	0,98	0,97	0,99	0,98	0,98	0,98	0,99	-0,05
Desv. Típica	0,01	0,02	0,02	0,03	0,06	0,04	0,05	0,05	0,04	0,05	0,05	0,06	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,07	0,06	0,07	0,06	0,02	0,02	0,10
Máximo	1,04	1,06	1,03	1,09	1,11	1,07	1,04	1,01	1,02	1,11	1,10	1,13	1,16	1,15	1,12	1,07	1,03	1,02	1,06	1,05	1,04	1,00	1,04	0,16
Mínimo	1,00	0,99	0,96	1,00	0,89	0,89	0,86	0,84	0,87	0,90	0,87	0,90	0,87	0,88	0,88	0,85	0,81	0,75	0,79	0,78	0,80	0,94	0,95	-0,20

Fuente: Elaboración propia, ISDB98.
T.V.I. Tasa de variación media interanual, %.

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha, acordo calificar la presente Tesis Doctoral con la censura de Sobresaliente Cum laude por unani

Madrid, 15 DICIEMBRE 2000