



FACULTAD DE CIENCIAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

**Acotaciones en norma y un principio de
casi-ortogonalidad para familias de
operadores maximales a lo largo de
direcciones de \mathbb{R}^2**

M^a Angeles Alfonso Cubero

TESIS DOCTORAL DIRIGIDA POR D. FERNANDO SORIA DE DIEGO
Y D^{ña}. ANA MARÍA VARGAS REY.

MADRID, MAYO DE 2003.

A mis padres y a mi hermano Enrique

Índice

Introducción	1
1 Diferenciación de integrales y operadores maximales	7
1.1 El teorema de diferenciación de Lebesgue	7
1.2 Bases de diferenciación	11
1.3 La función maximal fuerte	13
1.4 La función maximal universal	16
1.5 Funciones maximales en \mathbf{N} direcciones	20
1.6 La función maximal sobre un conjunto de Cantor	25
2 Principio de casi-ortogonalidad: el caso $p=2$	31
2.1 Preliminares	31
2.2 Demostración del Teorema 2.1.1	32
2.3 Demostración del Teorema 2.1.2	41
2.4 Aplicaciones	44
3 Principio de casi-ortogonalidad: el caso general	49
3.1 Enunciado y demostración de los resultados	49
3.2 Aplicaciones	56
4 Problemas relacionados	63
4.1 Un principio de comparación	63
4.2 Resultados para conjuntos regulares Ahlfors-David	66
Bibliografía	77

Introducción

Uno de los problemas más importantes en Análisis Real es el estudio de la convergencia puntual de una familia de operadores. Para resolverlo, la herramienta básica es el *operador maximal* asociado a la familia considerada, cuyas propiedades de acotación entre espacios funcionales describen las clases óptimas para dicha convergencia. El ejemplo principal es el conocido Teorema de diferenciación de Lebesgue, que constituye el punto de partida de la teoría de diferenciación de integrales. Este teorema demuestra que las medias de una función localmente integrable f sobre bolas que se contraen hacia un punto x tienden a $f(x)$ en casi todo punto. Es decir,

$$(1) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x),$$

para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. El operador maximal asociado a este problema fue introducido en 1930 por Hardy y Littlewood, para el caso unidimensional, y por Wiener para $n > 1$. Se define por

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

El operador M está acotado de L^p en L^p , $1 < p \leq \infty$, y satisface una desigualdad de tipo débil $(1, 1)$. Como consecuencia de ello, se obtiene (1).

Cuando $n > 1$, es natural preguntarse qué ocurre si, en lugar de tomar las medias de f sobre bolas, consideramos otro tipo de conjuntos: cubos, rectángulos, la familia formada por traslación y dilatación de un cierto convexo de \mathbb{R}^n , etc. Las respuestas que se obtienen en cada caso son muy diferentes. Para colecciones de cubos se cumple el mismo resultado que para las bolas. En cambio, para la familia de todos los rectángulos del plano (1) puede ser falso, incluso para funciones acotadas. Si restringimos la familia anterior, quedándonos tan sólo con

los rectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, (1) se cumple para todas las funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, para $1 < p \leq \infty$, pero es falso para algunas funciones integrables.

En esta memoria abordamos un problema intermedio a los dos últimos que hemos mencionado. Consideramos la colección de todos los rectángulos orientados en las direcciones de una cierta familia de vectores $\Omega \subset S^1$, y buscamos caracterizar los conjuntos Ω para los que el operador maximal asociado está acotado o cumple alguna desigualdad de tipo débil que nos permita demostrar el resultado análogo a (1).

En el primer capítulo hacemos un recorrido por los resultados ya conocidos. Comenzamos viendo con detalle la demostración del Teorema de Lebesgue y de la acotación del operador de Hardy-Littlewood, pues en estas pruebas está ya contenida la esencia del resultado. El paso crucial es un lema de cubrimiento de tipo Vitali para la familia de bolas.

Para generalizar el teorema de Lebesgue a otro tipo de conjuntos, Busemann y Feller [6] introdujeron el concepto de base de diferenciación, y probaron que para una base no centrada invariante por homotecias, la diferenciación (1) para todas las funciones integrables es equivalente a la desigualdad débil (1, 1) del operador maximal asociado.

Los resultados para bases de rectángulos en \mathbb{R}^2 se remontan a los años 20 del siglo pasado. En 1927, Nikodym [30] construyó un paradójico subconjunto de \mathbb{R}^2 : un conjunto N de medida 1, con la propiedad de que por cada punto $x \in N$ pasa una recta cuya intersección con N es únicamente el punto x . La existencia de tal conjunto demostraba que (1) es falso si f es la función característica de un subconjunto compacto de N , y la base de diferenciación es la de todos los rectángulos del plano, con cualquier orientación.

En cambio, la función maximal asociada a la base de rectángulos con lados paralelos a los ejes (la llamada *función maximal fuerte*) está acotada en L^p , $1 < p \leq \infty$, como consecuencia de la acotación del operador de Hardy-Littlewood. Por tanto, esta base diferencia las funciones de L^p , para todo $p > 1$. En el caso de L^1 , Saks [32] demostró que el conjunto de funciones integrables para las que no existe el límite (1) es de segunda categoría en L^1 .

En 1977, Córdoba [11] estudió el operador maximal asociado a una base de rectángulos orientados en un conjunto de N direcciones equidistribuidas del plano,

probando que está acotado en L^2 con norma menor o igual que $C(\log 3N)^4$, para una cierta constante C . Este resultado fue mejorado por Strömberg [38], que utilizó un lema de cubrimiento geométrico para hallar la cota óptima, $C \log 3N$. Después, Strömberg pasó a trabajar sobre el operador asociado a un conjunto lagunar de N direcciones (de decrecimiento exponencial) [37], que también fue estudiado por Córdoba y R. Fefferman [14]. El resultado óptimo para el maximal sobre un conjunto lagunar fue probado en 1978 por Nagel, Stein y Wainger [29], que demostraron su acotación en todos los espacios L^p , $p > 1$, con constante independiente de N .

El caso general de un operador sobre N direcciones cualesquiera permaneció abierto durante años, aunque se conjeturaba que la norma en L^2 de este operador crecería con N a lo sumo como $\log N$, tal como sucede en el caso equidistribuido. Este resultado fue finalmente demostrado por Katz [27], en 1999. Su prueba se aparta de las técnicas usadas tradicionalmente en este tipo de problemas (los lemas de cubrimiento, la transformada de Fourier y la teoría de Littlewood-Paley). Parecía deseable, por tanto, hallar una demostración más sencilla de este resultado que permitiera comprender mejor la geometría del problema.

La función maximal sobre rectángulos orientados en las direcciones de un conjunto de Cantor ha sido objeto de estudio durante muchos años. Se conjeturó que, al igual que la función maximal sobre un conjunto lagunar, estaría acotada. Pero en 1996 Katz [25] halló un contraejemplo, mostrando que el operador asociado al conjunto de Cantor ternario no está acotado en L^p , para $1 < p \leq 2$. Hare [21] extendió la prueba de Katz a conjuntos de Cantor generales.

En el capítulo segundo demostramos un principio de casi-ortogonalidad en L^2 para operadores maximales sobre familias de rectángulos orientados en un conjunto Ω de direcciones del plano. La idea clave es tomar un subconjunto Ω_0 de Ω , que descomponga el conjunto original en trozos disjuntos Ω_j , $j \geq 1$, separados por los elementos de Ω_0 , y estudiar la relación que existe entre el operador maximal M_Ω , asociado al conjunto total, y los maximales M_{Ω_j} . Para estos operadores, demostramos los siguientes teoremas.

Teorema 0.0.1 *Existen constantes C_1, C_2 , independientes de Ω , tales que*

$$(2) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \leq C_1 \sup_{1 \leq l} \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 + C_2 \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2.$$

Teorema 0.0.2 *Existe una constante C , independiente de Ω , tal que*

$$(3) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} + \sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

Esto significa que estamos acotando la norma $\|M_\Omega\| = \|\sup_j M_{\Omega_j}\|$ por $\sup_j \|M_{\Omega_j}\|$, más un término que depende de Ω_0 , es decir, del modo en que hemos hecho la partición.

Las demostraciones de (2) y de su versión fuerte (3) utilizan lemas de cubrimiento geométricos, en el mismo espíritu de los trabajos de Strömberg [38], Córdoba y Fefferman [14], y un lema de dualidad de Carbery [8].

Entre las varias aplicaciones del principio de casi-ortogonalidad, presentamos una sencilla prueba, por inducción sobre el número N de direcciones, del teorema de Katz: si $\text{card}(\Omega) = N > 1$, entonces $\|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \log N$. También generalizamos un resultado de Sjögren y Sjölin [33], que demostraron la acotación en L^p , $1 < p \leq \infty$ del operador maximal sobre rectángulos orientados en una familia multi-lagunar de direcciones. Nuestro principio implica que dentro de un conjunto separador Ω_0 de tipo lagunar, podemos introducir cualquier tipo de conjunto que dé lugar a un operador maximal acotado en L^2 .

En el tercer capítulo, probamos el principio de casi-ortogonalidad en L^p , para p distinto de 2.

Teorema 0.0.3 *Dado $2 \leq p < \infty$, existe una constante C_p tal que*

$$(4) \quad \|M_\Omega f\|_p \leq C_p \left[\|M_{\Omega_0} f\|_p + \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|Sf\|_p \right].$$

Teorema 0.0.4 *Si $1 < p < 2$, existe una constante C_p tal que*

$$(5) \quad \|M_\Omega f\|_p \leq C_p \left[\|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} + \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|S\|_{L^p \rightarrow L^p}^{2/p} \right] \|f\|_p.$$

Las demostraciones siguen los pasos de la de Nagel, Stein y Wainger [29], y una idea de Christ que aparece en [7]. El uso de una descomposición de Littlewood-Paley causa la aparición de una función cuadrado S en la desigualdad. El principio de casi-ortogonalidad para p distinto de 2 tiene también aplicaciones a distintos tipos de conjuntos Ω , que presentamos al final del capítulo 3.

En el cuarto capítulo demostramos un principio de comparación, corolario del Teorema 0.0.2. Dadas dos familias de direcciones, Φ y Ψ , cuyos elementos están entrelazados de modo que entre dos elementos de la familia Ψ hay una cantidad uniformemente acotada de elementos de Φ , se tiene que si el maximal M_Ψ está acotado en L^2 , también lo está M_Φ .

Usamos este principio para dar una nueva prueba de un resultado de Arutyunyan [4] sobre el maximal asociado a un conjunto de Cantor centrado cuyas razones de disección (el cociente entre la longitud de un intervalo de la construcción y la de "su padre") tienden a $1/2$. También estudiamos el operador asociado al producto de dos familias lagunares.

En la segunda sección del capítulo, adaptamos las ideas de Katz [25] y Hare [21] sobre el maximal asociado a conjuntos de Cantor, probando el siguiente teorema.

Teorema 0.0.5 *Sea E un conjunto regular Ahlfors-David. Entonces, el operador maximal M_E no está acotado en L^2 , ni es de tipo débil $(2,2)$.*

Los resultados que se presentan en el capítulo segundo de esta memoria se han plasmado en los artículos [2], [3]. Los del capítulo tercero han aparecido en [1].

Con estas últimas líneas, quiero agradecer a Ana y a Fernando todo lo que me han enseñado, su ayuda y apoyo constantes, sin los cuales no habría podido llegar hasta aquí. Gracias a Tony por las conversaciones que tuvimos y por todo lo que se preocupó por mí, haciendo que mi estancia en Edimburgo fuera tan agradable.

Gracias a mi padre y a José Luis por leer esta memoria y por sus sugerencias. A Gustavo, por las conversaciones sobre matemáticas (y sobre otros temas) y por sus buenos consejos. A los amigos del departamento, con quienes he compartido tantos buenos ratos, y que me han animado en los momentos difíciles: Connie, Cristina, Marina, Rocío, Elena, Javi, Marijose, Amparo, Andrei, Jon, Giacomo, David, Fágner... Al Foro Matemático, Emilia, Susana, Jaime y Sergio, por su entusiasmo: que sigamos reuniéndonos muchos años. A Cristina, Lucía, Maribel, Laura, Juanfran, Carolina, Almudena, Marimar, Auxi, Nancho, a la capilla de la U.A.M. y a tantos otros amigos dispersos por el mundo, por haber estado a mi lado durante estos años.

Capítulo 1

Diferenciación de integrales y operadores maximales

1.1 El teorema de diferenciación de Lebesgue

El problema de la diferenciación de integrales en \mathbb{R}^n es uno de los temas principales en el Análisis de variable real. El ejemplo principal, que dio origen a esta teoría, es el conocido teorema de Lebesgue.

Teorema 1.1.1 (Teorema de diferenciación de Lebesgue)

Sea f una función localmente integrable en \mathbb{R}^n , y sea $B(x, r)$ la bola abierta con centro en x y radio r . Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(1.1) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x).$$

Es decir, el límite de las medias de f sobre bolas que se contraen hacia un punto x es, en casi todo punto de \mathbb{R}^n , igual al valor de f en el punto x . El hecho de que las medias se calculen sobre bolas euclídeas es importante. Si en lugar de bolas tomamos otro tipo de conjuntos que se contraen hacia x , el resultado análogo al de Lebesgue puede no ser cierto. La teoría de diferenciación de integrales trata de caracterizar las familias de conjuntos para las que se cumple un resultado como (1.1).

El estudio de la diferenciación de integrales está íntimamente ligado con la acotación de un operador maximal. En el caso del teorema de Lebesgue, el ope-

rador asociado es la *función maximal de Hardy-Littlewood*, que se define por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

El resultado clave sobre la función maximal es el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2 (Hardy-Littlewood)

(i) *M es un operador de tipo débil (1,1), es decir, existe una constante C tal que para todo $\lambda > 0$, y para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

(ii) *M está acotado de L^p en L^p , $1 < p < \infty$, es decir, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

donde C_p depende de p , pero no de f .

Incluimos aquí las demostraciones de los teoremas 1.1.1 y 1.1.2, pues ilustran las ideas principales de la teoría de diferenciación, que aparecerán varias veces en este trabajo. Empezaremos viendo cómo a partir de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood se demuestra el Teorema de Lebesgue.

Demostración del Teorema 1.1.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y denotemos por $f_r(x)$ la media $\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy$. Para probar la convergencia puntual de $\{f_r(x)\}_{r>0}$, basta ver que la medida del conjunto

$$E_\lambda = \{x : |\limsup_{r \rightarrow 0} f_r(x) - \liminf_{r \rightarrow 0} f_r(x)| > \lambda\}$$

es 0 para todo $\lambda > 0$. Por otro lado, el Teorema de Lebesgue es cierto para las funciones continuas. Por tanto, si g es continua y $g_r(x)$ denota, como arriba, la media de g sobre la bola $B(x,r)$, el conjunto E_λ se puede escribir también de la forma

$$E_\lambda = \{x : |\limsup_{r \rightarrow 0} (f_r - g_r)(x) - \liminf_{r \rightarrow 0} (f_r - g_r)(x)| > \lambda\}.$$

Este conjunto está claramente contenido en

$$\{x : 2M(f - g)(x) > \lambda\}.$$

Aplicando ahora (i) del teorema maximal de Hardy-Littlewood,

$$|E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |(f - g)(x)| dx,$$

y, puesto que las funciones continuas son densas en $L^1(\mathbb{R}^n)$, la integral $\int |f - g|$ puede hacerse tan pequeña como queramos.

No es difícil ver que las funciones f_r convergen a f en L^1 y, por tanto, el límite de $f_r(x)$ debe ser $f(x)$ en casi todo punto.

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $f \chi_{B(0,H)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por lo que (1.1) se cumple para casi todo $x \in B(0, H)$. Al ser H arbitrario, el teorema está demostrado. □

Demostración del Teorema 1.1.2. Por definición del operador maximal, si x pertenece a $A_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$, existen un radio r y una bola $B_x = B(x, r)$ de modo que

$$(1.2) \quad \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy > \lambda.$$

Así pues, el conjunto A_λ está contenido en la unión de todas las bolas B_x que cumplen la condición anterior. Por la regularidad de la medida de Lebesgue, basta considerar un subconjunto compacto K de A_λ y demostrar para éste la desigualdad

$$|K| \leq \frac{C}{\lambda} \int |f(x)| dx,$$

con C independiente también de K . Como K es compacto, existe una familia finita de bolas $\{B_{x_j}\}_{j=1}^N$ de entre las que cumplen (1.2) que lo recubren.

El punto principal de la demostración es un lema de cubrimiento de tipo Vitali. Vamos a extraer una subfamilia $\{B_k\}_{k \geq 1}$ de la familia de bolas $\{B_x\}_{x \in A_\lambda}$, que goce de las dos buenas propiedades siguientes.

- (a) Las bolas $\{B_k\}$ son disjuntas.
- (b) La unión de las bolas de la subfamilia cubre gran parte de K y, por tanto, de A_λ . Es decir, no perdemos “mucho” al no considerar la familia completa.

Escogemos como B_1 la bola más grande de la familia $\{B_{x_j}\}$ (nótese que el tamaño de las bolas está acotado por $\|f\|_{L^1}/\lambda < \infty$). A continuación, tomamos como B_2 la mayor de las bolas de la familia que son disjuntas con B_1 . En general,

B_j será la mayor de entre las bolas de la familia original que no cortan a $\bigcup_{k < j} B_k$. Obtenemos así una subfamilia, finita o infinita, de bolas disjuntas. Ya tenemos, por tanto, la propiedad (a).

Por otro lado, K está contenido en la unión $\bigcup_{j \geq 1} 3B_j$, donde $3B_j$ es la bola con el mismo centro que B_j y radio 3 veces mayor. En efecto, si una bola B_x de la familia inicial no pertenece a la subfamilia, existe una B_k , de radio mayor o igual que el de B_x , con $B_k \cap B_x \neq \emptyset$, y por tanto $B_x \subset 3B_k$. En consecuencia, tenemos también la propiedad (b),

$$|K| \leq \sum_{j \geq 1} |3B_j| = 3^n \sum_{j \geq 1} |B_j|.$$

Por (1.2), el último término de la desigualdad anterior está mayorado por

$$\frac{3^n}{\lambda} \sum_{j \geq 1} \int_{B_j} |f| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\cup B_j} |f| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

En la penúltima desigualdad hemos usado que las B_j son disjuntas. Esto demuestra (i) del teorema. El resultado (ii) se obtiene interpolando (i) con la estimación trivial

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

para toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

□

Según acabamos de ver, la convergencia en casi todo punto se obtiene combinando dos resultados: la convergencia para una clase densa de funciones (demostración del Teorema 1.1.1) junto con la existencia de una desigualdad de tipo débil para el operador maximal (Teorema 1.1.2).

La desigualdad débil (1, 1) es lo mejor que podemos probar para el operador M , que no está acotado en L^1 . En efecto, si f no es idénticamente igual a 0, existe un radio r tal que $\int_{B(0,r)} |f| > \alpha > 0$. Si $|x| > r$, la bola $B(x, 2|x|)$ contiene a la bola $B(0, r)$, por lo que

$$Mf(x) \geq \frac{1}{(2|x|)^n} \int_{B(0,r)} |f| > \frac{\alpha}{(2|x|)^n},$$

y, consiguientemente, Mf no es integrable.

1.2 Bases de diferenciación

A la vista del Teorema de Lebesgue, surge naturalmente la siguiente cuestión: ¿será cierto (1.1) si sustituimos las bolas $B(x, r)$ por otro tipo de conjuntos? ¿Se tiene un resultado análogo al del Teorema 1.1.2 para la función maximal asociada?

En esta sección introducimos la noción de base de diferenciación asociada a conjuntos generales, definimos el operador maximal correspondiente y enunciaremos algunos teoremas generales de diferenciación.

Definición 1.2.1 *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{B}(x)$ una colección de conjuntos medibles de medida positiva, que contienen a x , y tales que en $\mathcal{B}(x)$ hay conjuntos de diámetro arbitrariamente pequeño. Llamaremos base de diferenciación a la colección $\mathcal{B} = \cup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$.*

Ejemplos importantes de bases de diferenciación:

- \mathcal{B}_0 , donde $\mathcal{B}_0(x)$ es la colección de todas las bolas abiertas que contienen a x .
- \mathcal{B}_1 , donde $\mathcal{B}_1(x)$ es la colección de todos los cubos que contienen a x .
- \mathcal{B}_2 , donde $\mathcal{B}_2(x)$ es la colección de todos los paralelepípedos que contienen a x y cuyas caras son paralelas a los hiperplanos coordenados.
- \mathcal{B}_3 , donde $\mathcal{B}_3(x)$ es la colección de todos los paralelepípedos que contienen a x .
- \mathcal{B}_0^* , donde $\mathcal{B}_0^*(x)$ es la colección de todas las bolas abiertas centradas en x .
- Análogamente se definen las bases centradas \mathcal{B}_1^* , \mathcal{B}_2^* , \mathcal{B}_3^* .

Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, decimos que \mathcal{B} diferencia f si el límite

$$(1.3) \quad \lim_{B \in \mathcal{B}(x): \text{diam} B \rightarrow 0} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy$$

existe y es igual a $f(x)$ en casi todo punto. Se dice que \mathcal{B} diferencia el espacio de funciones E si (1.3) se cumple para toda $f \in E$. En la sección anterior hemos visto que, como consecuencia de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood, la base \mathcal{B}_0^* diferencia $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

El operador maximal asociado a una base de diferenciación \mathcal{B} se define, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, mediante

$$M_{\mathcal{B}}f(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}(x)} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Hay una estrecha relación entre las propiedades de acotación de $M_{\mathcal{B}}$, la diferenciación (1.3) y la existencia, para los elementos de \mathcal{B} , de un lema de cubrimiento semejante al que aparece en la demostración del Teorema de Hardy-Littlewood .

Veamos ahora la generalización más sencilla del Teorema 1.1.1 a otras bases distintas de \mathcal{B}_0^* .

Una base \mathcal{F} es *regular* con respecto a otra base \mathcal{B} si existe una constante $c > 0$, tal que para todo $F \in \mathcal{F}$, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $F \subset B$ y $|F| \geq c|B|$. Claramente, esto implica que

$$M_{\mathcal{F}}f(x) \leq \frac{1}{c} M_{\mathcal{B}}f(x).$$

Por tanto, si $M_{\mathcal{B}}$ está acotado en L^p o es de tipo débil para algún valor de p , $1 \leq p \leq \infty$, el mismo resultado se cumple para $M_{\mathcal{F}}$.

Es fácil ver que las bases \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_1^* son regulares con respecto a \mathcal{B}_0^* . Sus operadores maximales asociados están mayorados por el de Hardy-Littlewood y, en consecuencia, son de tipo débil (1,1) y están acotados en L^p . Como en la demostración del Teorema 1.1.1, esto implica que las bases \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_1^* diferencian $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora introduciremos dos nuevas definiciones.

Definición 1.2.2 *Una base \mathcal{B} se llama base de diferenciación de Busemann-Feller si todos sus elementos son abiertos y si para todo $x \in B \in \mathcal{B}$, se tiene que $B \in \mathcal{B}(x)$.*

Definición 1.2.3 *Una base de Busemann-Feller \mathcal{B} se denomina base de densidad si diferencia las funciones características de los conjuntos medibles.*

Las bases \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 y \mathcal{B}_3 son de Busemann-Feller, pero las correspondientes bases centradas no lo son.

Enunciamos a continuación tres teoremas debidos a Busemann y Feller [6]. Sus demostraciones, así como otros resultados relacionados, se pueden encontrar en [19], cap. III.

Teorema 1.2.4 *Sea \mathcal{B} una base de diferenciación de Busemann-Feller invariante por homotecias. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

- (a) \mathcal{B} diferencia L^1 .
- (b) $M_{\mathcal{B}}$ es de tipo débil $(1,1)$.

Teorema 1.2.5 *Sea \mathcal{B} una base de diferenciación de Busemann-Feller invariante por homotecias. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

- (a) \mathcal{B} es una base de densidad.
- (b) Para cada λ , $0 < \lambda < 1$, existe una constante positiva $c(\lambda) < \infty$ tal que para todo conjunto medible y acotado A ,

$$|\{M_{\chi_A} > \lambda\}| \leq c(\lambda)|A|.$$

Teorema 1.2.6 *Sea \mathcal{B} una base de densidad. Entonces \mathcal{B} diferencia L^∞ .*

El siguiente resultado se debe a B. Rubio [31] (véase [19], pg 90).

Teorema 1.2.7 *Sea $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ una función estrictamente creciente, con $\phi(0) = 0$ y tal que $\phi(u)$ es de orden mayor o igual que u cuando $u \rightarrow \infty$. Sea $\phi(L) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int \phi(|f|) < \infty\}$. Sea \mathcal{B} una base de Busemann-Feller invariante por homotecias que diferencia $\phi(L)$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$ y para toda $f \in \phi(L)$, $f \geq 0$,*

$$|\{M_{\mathcal{B}}f > \lambda\}| \leq c \int \phi\left(\frac{f}{\lambda}\right).$$

1.3 La función maximal fuerte

A partir de ahora, y durante la mayor parte de la memoria, nos centraremos en el estudio de las funciones maximales asociadas a bases de rectángulos en \mathbb{R}^2 . Esta sección está dedicada a la base \mathcal{B}_2 , formada por todos los rectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

\mathcal{B}_2 no es una familia regular con respecto a \mathcal{B}_1 , ya que la excentricidad de los rectángulos (es decir, la razón entre las longitudes de sus lados mayor y menor) no está acotada. El operador maximal asociado a \mathcal{B}_2 se denomina *función maximal fuerte*, y se suele denotar por M_S .

Veamos algunas propiedades de M_S .

- M_S está acotada de L^p en L^p , $1 < p \leq \infty$

Si $1 < p < \infty$, la acotación en L^p de M_S es consecuencia del resultado unidimensional para el operador de Hardy-Littlewood no centrado. En efecto, si definimos los operadores

$$M_1 f(x_1, x_2) = \sup_{x_1 \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y_1, x_2)| dy_1,$$

$$M_2 f(x_1, x_2) = \sup_{x_2 \in J} \frac{1}{|J|} \int_I |f(x_1, y_2)| dy_2,$$

donde I, J son intervalos en \mathbb{R} , se tiene que

$$M_S f(x) \leq M_1 M_2 f(x),$$

lo que implica, si $1 < p < \infty$, que

$$\|M_S f\|_p \leq \|M_1 M_2 f\|_p \leq C_p \|M_2 f\|_p \leq C_p^2 \|f\|_p.$$

El caso $p = \infty$ es trivial.

Como consecuencia de la acotación de M_S , si $1 < p < \infty$ podemos repetir el argumento de la demostración del Teorema 1.1.1, concluyendo que \mathcal{B}_2 diferencia $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$. Además, por el Teorema 1.2.5, \mathcal{B}_2 es base de densidad, y por tanto diferencia $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (Teorema 1.2.6).

- M_S no es de tipo débil (1,1)

Si $p = 1$ no podemos utilizar el resultado unidimensional. La acotación débil de cada uno de los operadores M_i no implica la acotación débil de su composición. De hecho, M_S resulta no ser de tipo débil (1,1). Para demostrarlo, tomamos el cubo unidad $Q = (0, 1) \times (0, 1)$, y la función $f(x, y) = \chi_Q(x, y)$. Dado un número natural N , consideremos la región $R_N = (0, 1) \times (0, N) \cup \{(x, y) : 1 \leq x < N, 0 < y < \frac{N}{x}\}$. El área de R_N es mayor que $N \log N$, y para todo $(x, y) \in R_N$, $M_S f(x, y) > \frac{1}{2N}$. Por tanto, si M_S fuese de tipo débil (1,1), se tendría que

$$N \log N < |R_N| \leq \left| \left\{ x : M_S f(x) > \frac{1}{2N} \right\} \right| \leq 2CN \|f\|_1 = 2CN,$$

y, en consecuencia, C debería ser mayor que $\frac{\log N}{2}$, para cualquier $N \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, M_S no es de tipo débil (1,1).

Por el Teorema 1.2.4, \mathcal{B}_2 no diferencia $L^1(\mathbb{R}^2)$. De hecho, Saks [32] demostró que el conjunto de funciones de $L^1(\mathbb{R}^2)$ tales que

$$\limsup_{B \in \mathcal{B}_2(x): \text{diam} B \rightarrow 0} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = +\infty$$

es de segunda categoría. Es decir, para “casi toda” $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, \mathcal{B}_2 no diferencia $\int f$.

En vista del resultado anterior, Zygmund propuso el siguiente problema: dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, ¿podemos elegir siempre un par de ejes rectangulares, de modo que la base de rectángulos paralelos a dichos ejes diferencie $\int f$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$? La respuesta es no, como demostró Marstrand [28] (véase [20], cap.7).

• **\mathcal{B}_2 diferencia $L(1 + \log^+ L)$**

Es un corolario inmediato del siguiente teorema de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund [24].

Teorema 1.3.1 *Para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ y para todo $\lambda > 0$,*

$$|\{M_S f > \lambda\}| \leq c \int \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda}\right),$$

donde c es una constante positiva, independiente de f y λ .

Además, \mathcal{B}_2 no diferencia ningún espacio peor, en el siguiente sentido:

Si $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función tal que

$$\frac{u(1 + \log^+ u)}{\psi(u)} \rightarrow \infty \text{ cuando } u \rightarrow \infty,$$

entonces \mathcal{B}_2 no diferencia $\psi(L)$. En particular, no diferencia $L(1 + \log^+ L)^{1-\epsilon}$, para ningún $\epsilon > 0$. Estos resultados se pueden encontrar en [20], 7.3.

Observaciones:

1. En dimensión n , se demuestra de manera análoga que M_S está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, pero no es de tipo débil (1,1). El teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund dice, en este caso, que \mathcal{B}_2 diferencia $L(1 + \log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

2. El tamaño de las constantes. La constante C_p del operador de Hardy-Littlewood, que se obtiene por interpolación en (ii) del Teorema 1.1.2, es del orden de $\frac{1}{p-1}$ cuando $p \rightarrow 1$. Ésta es la mejor constante posible, en cualquier dimensión n .

Por tanto, para el operador maximal fuerte en \mathbb{R}^2 tenemos

$$(1.4) \quad \|M_S\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \frac{C}{(p-1)^2}.$$

1.4 La función maximal universal

La base de diferenciación \mathcal{B}_3 , formada por todos los rectángulos de \mathbb{R}^2 , con cualquier orientación, tiene propiedades muy distintas a las de \mathcal{B}_2 . El operador maximal asociado se denomina *función maximal universal*, M_U . \mathcal{B}_3 contiene a todos los elementos de \mathcal{B}_2 , de donde se deduce que M_U no es de tipo débil (1,1), pues M_S tampoco lo es. Pero M_U resulta ser mucho peor que M_S . Sólo está acotada en el caso trivial, $p = \infty$.

En 1927, Nikodym [30] encontró un subconjunto N del cubo unidad, de medida 1 (es decir, que llena todo el cubo) y con la propiedad de que para cada punto $x \in N$ existe una línea $\ell(x)$ tal que $N \cap \ell(x) = \{x\}$. En una observación al final del artículo de Nikodym, Zygmund señaló que esto implica inmediatamente que \mathcal{B}_3 no es base de densidad. Si tomamos un subconjunto cerrado $F \subset N$, con $|F| \geq 1 - \epsilon$, y $f = \chi_F$, se tiene para todo punto del cubo unidad

$$\liminf_{\text{diam}(R) \rightarrow 0} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy = 0,$$

ya que podemos acercarnos a cada punto $x \in F$ mediante una sucesión de rectángulos paralelos a $\ell(x)$ con $\frac{|R \cap F|}{|R|}$ tan pequeño como queramos.

La construcción del conjunto de Nikodym y de otros conjuntos similares, como el de Besikovich (un conjunto de medida cero que contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección), puede encontrarse en [20], capítulo 8. No vamos a presentarla aquí, pero demostraremos el teorema que le sirve como punto de partida.

Teorema 1.4.1 *Consideremos los 2^n triángulos que se obtienen uniendo el punto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ con los puntos $(0, 0), (1, 0), (2, 0) \dots (2^n, 0)$. Llamemos T_h al triángulo con vértices $(0, 1), (h-1, 0), (h, 0)$. Entonces, dado $\alpha, \frac{1}{2} < \alpha < 1$, es posible realizar*

una traslación paralela de cada T_h a lo largo del eje Ox a una nueva posición \bar{T}_h , de modo que

$$|\cup_{h=1}^{2^n} \bar{T}_h| \leq (\alpha^{2^n} + 2(1 - \alpha)) |\cup_{h=1}^{2^n} T_h|.$$

La demostración es consecuencia de la reiteración de un proceso básico, que describiremos a continuación.

Proceso básico. Consideramos dos triángulos adyacentes, T_1 y T_2 , con bases en el eje de las x de igual longitud b , y la misma altura h . Fijamos una constante α , $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Manteniendo fijo T_1 , trasladamos T_2 hacia T_1 hasta que los lados no paralelos de T_1 y T_2 se corten a altura αh (figura 1).

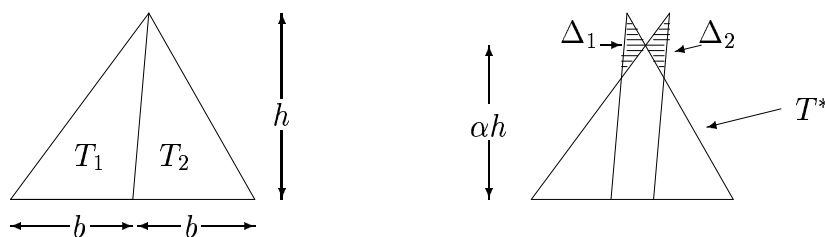


Figura 1

De este modo, hemos obtenido una figura P , formada por un triángulo T^* semejante a $T_1 \cup T_2$, más dos triangulitos sobresalientes, Δ_1 y Δ_2 . Es fácil comprobar que

$$|T^*| = \alpha^2 |T_1 \cup T_2|$$

$$|\Delta_1| + |\Delta_2| = 2(1 - \alpha)^2 |T_1 \cup T_2|,$$

y, por tanto,

$$|P| = [\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2] |T_1 \cup T_2|.$$

Demostración del Teorema 1.4.1. Consideremos los 2^{n-1} pares de triángulos $(T_1, T_2), (T_3, T_4), \dots, (T_{2^{n-1}-1}, T_{2^n})$. A cada uno de estos pares le aplicamos el proceso básico con el α dado por el enunciado del Teorema, obteniendo 2^{n-1} triángulos $T_1^*, \dots, T_{2^{n-1}}^*$, y los correspondientes triangulitos sobresalientes. Observamos ahora que el lado derecho del triángulo T_j^* es paralelo al lado izquierdo de T_{j+1}^* . Por tanto,

podemos trasladar T_{j+1}^* hacia la izquierda, hasta que los dos lados coincidan. Realizamos esta operación hasta que todos los T_j^* sean adyacentes, y su unión forme un triángulo semejante a $(0, 1), (0, 0), (2^n, 0)$, cuya área es

$$\alpha^2 |T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{2^n}|.$$

El área de los triángulos Δ_j (que se han trasladado juntamente con los T_j^*) es menor o igual que

$$2(1 - \alpha)^2 |T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{2^n}|.$$

Aplicamos de nuevo el proceso a los pares de triángulos $(T_1^*, T_2^*), \dots, (T_{2^{n-1}-1}^*, T_{2^{n-1}}^*)$. Después de n repeticiones, se obtiene la figura $\cup_{h=1}^{2^n} \bar{T}_h$, formada por un triángulo semejante a $(0, 1), (0, 0), (2^n, 0)$ y de área

$$\alpha^{2^n} |T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{2^n}|,$$

más unos triángulos adicionales cuya área es menor o igual que

$$(1 - \alpha)^2 [2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^4 + \dots + 2\alpha^{2(n-1)}] |T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{2^n}| \leq$$

$$2(1 - \alpha)^2 \frac{1}{1 - \alpha^2} |T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{2^n}| \leq 2(1 - \alpha) |T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{2^n}|.$$

□

El conjunto $\cup_{h=1}^{2^n} \bar{T}_h$ se suele llamar *árbol de Perron*, pues su aspecto es el de un pequeño triángulo semejante a $T = \cup_{h=1}^{2^n} T_h$ con muchas ramas sobresaliendo.

Si aplicamos una transformación afín al triángulo $(0, 1), (0, 0), (2^n, 0)$ del Teorema 1.4.1, el paralelismo y las semejanzas se conservan. Por tanto, el proceso anterior es válido para cualquier triángulo.

Teorema 1.4.2 *Sea ABC un triángulo de área H . Para todo $\epsilon > 0$ existe n tal que si dividimos la base BC del triángulo en 2^n partes iguales B_1, \dots, B_{2^n} , podemos trasladar los triángulos T_1, \dots, T_{2^n} con bases B_1, \dots, B_{2^n} a nuevas posiciones $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_{2^n}$, de modo que*

$$|\bar{T}_1 \cup \dots \cup \bar{T}_{2^n}| < \epsilon H.$$

Demostración. Tomamos α tal que $2(1 - \alpha) < \epsilon/2$, y después elegimos un n suficientemente grande para que $\alpha^{2^n} < \epsilon/2$. Aplicando el Teorema 1.4.1, se obtiene el resultado.

□

En realidad, no hace falta llegar a construir un conjunto de Nikodym para demostrar que \mathcal{B}_3 no es base de densidad. A partir del árbol de Perron se prueba un resultado más fuerte ([20], 8.6).

Teorema 1.4.3 *Consideremos la base de Busemann-Feller invariante por homotecias \mathcal{B}_T , generada por los triángulos $\{T_h\}_{h=1}^\infty$, donde T_h se define como en el Teorema 1.4.1. Entonces \mathcal{B}_T no es una base de densidad, y $M_{\mathcal{B}_T}$ no está acotado en L^p para $p < \infty$.*

Demostración. Sea M_T el operador maximal asociado a \mathcal{B}_T . Sea E un árbol de Perron construido a partir de $\{T_h\}_{h=1}^{2^n}$, como en el Teorema 1.4.1. Sea \tilde{T}_h el mínimo triángulo con base sobre la recta $y = -1$ y que contiene a \overline{T}_h . Se tiene que

$$\{x : M_T \chi_E(x) > \frac{1}{100}\} \supset \cup \tilde{T}_h.$$

Como $|\cup \tilde{T}_h| \geq |\cup_{h=1}^{2^n} T_h| = A_n$, obtenemos que

$$|\{x : M_T \chi_E > \frac{1}{100}\}| \geq A_n = \frac{A_n}{|E|} |E|.$$

Por el Teorema 1.2.5, esto implica que \mathcal{B}_T no es una base de densidad, y también que $M_{\mathcal{B}_T}$ no está acotado en L^p para $p < \infty$.

□

Asociemos a cada T_h del Teorema 1.4.3 el rectángulo R_h que pasa por $(h-1, 0)$ y tiene como diagonal el segmento $\overline{(h, 0), (0, 1)}$. Sea \mathcal{B}_R la base de Busemann-Feller invariante por homotecias generada por $\{R_h\}$. Si M_R es la función maximal asociada, se tiene

$$M_T f \leq c M_R f,$$

para una constante absoluta c . Por tanto, \mathcal{B}_R , que es una pequeña subbase de \mathcal{B}_3 , tampoco es base de densidad.

Esto nos lleva a formular el siguiente problema. Sea Ω un subconjunto de $[0, 2\pi)$, y consideremos la base \mathcal{B}_Ω de todos los rectángulos orientados en las direcciones $\theta \in \Omega$. ¿Cómo debe estar distribuido Ω para que \mathcal{B}_Ω tenga buenas propiedades de diferenciación?

M. de Guzmán y T. Menárguez demostraron que si la clausura de Ω tiene medida positiva, entonces \mathcal{B}_Ω no es una base de densidad (véase [20], 8.6). Pero

aunque Ω sea un conjunto numerable, la distribución de sus direcciones puede dar lugar a una base mala. Como hemos visto en el Teorema 1.4.3, si $\Omega = \{\arctan 1, \arctan 2, \arctan 3, \dots\}$, entonces \mathcal{B}_Ω no es una base de densidad. Del mismo modo, si $\Omega_p = \{\arctan 1, \arctan 2^p, \arctan 3^p, \dots\}$, \mathcal{B}_{Ω_p} tampoco es una base de densidad. Por el contrario, en la próxima sección veremos que la base asociada a $\Omega = \{\arctan 2, \arctan 2^2, \arctan 2^3, \dots\}$ sí es una buena base de diferenciación (Teorema 1.5.4).

Dada una colección de direcciones Ω , si podemos construir un árbol de Perron general, con los triángulos T_h en las direcciones de los elementos de Ω , se prueba del mismo modo que en la demostración del Teorema 1.4.3 que M_Ω no está acotado en L^p , $p < \infty$, y \mathcal{B}_Ω no es base de densidad. En [23, 36] se pueden encontrar algunas generalizaciones de la construcción del árbol de Perron, y su aplicación al estudio de ciertos conjuntos Ω .

El árbol de Perron ha sido de utilidad para resolver otro tipo de problemas, como el *problema de la aguja de Kakeya*, que consiste en hallar cuál es el ínfimo de las áreas de los subconjuntos de \mathbb{R}^2 en cuyo interior se puede mover una aguja de longitud 1 de forma continua, de modo que al final ocupe el lugar original pero en posición invertida. Por medio del árbol de Perron se prueba que el ínfimo de las áreas es cero ([20], 8.3). Otra importante aplicación la dio C. Fefferman [18], usándolo para demostrar que la función característica del disco unidad de \mathbb{R}^2 no es un multiplicador en L^p para ningún $p \neq 2$.

1.5 Funciones maximales en N direcciones

En las secciones anteriores hemos visto que la función maximal fuerte, asociada a la base de rectángulos paralelos a los ejes, está acotada para todo $p > 1$. En cambio, si permitimos que los rectángulos estén orientados en todas las direcciones del plano, la función maximal universal no está acotada para ningún $p < \infty$. Tiene sentido preguntarse qué ocurre si fijamos un número finito N de direcciones, y tomamos solamente rectángulos paralelos a esas direcciones. ¿De qué modo depende de N la norma de la función maximal asociada?

Sea $\Omega_N \subset [0, 2\pi)$ un conjunto de cardinal N . Definimos \mathcal{B}_{Ω_N} como la base de todos los rectángulos cuyo lado más largo forma un ángulo $\theta \in \Omega_N$ con el eje de

las x . El operador maximal M_{Ω_N} se define del modo usual,

$$M_{\Omega_N} f(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_{\Omega_N}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy.$$

Usando la acotación del maximal fuerte, obtenemos una estimación trivial para M_{Ω_N} . En efecto, sean $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ los elementos de Ω_N , y llamemos M_{θ_j} al operador maximal asociado a la base de rectángulos cuyo lado más largo forma un ángulo θ_j con el eje de las x . Cada uno de los M_{θ_j} es un operador maximal fuerte con respecto a los ejes obtenidos a partir de los ejes coordenados mediante un giro de ángulo θ_j . Por tanto, M_{θ_j} está acotado en L^p , $1 < p \leq \infty$, con la misma norma que M_S . Si $1 < p < \infty$,

$$\|M_{\Omega_N} f\|_p^p \leq \left\| \left(\sum_{j=1}^N (M_{\theta_j} f)^p \right)^{1/p} \right\|_p^p = \sum_{j=1}^N \|M_{\theta_j} f\|_p^p = N \|M_S f\|_p^p \leq CN \|f\|_p^p.$$

En la primera desigualdad hemos usado que $\|\cdot\|_{\ell^\infty} \leq \|\cdot\|_{\ell^p}$.

En consecuencia,

$$(1.5) \quad \|M_{\Omega_N} f\|_p \leq CN^{1/p} \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

La constante $N^{1/p}$ no es la mejor posible. A continuación veremos dos casos particulares, para los que se obtienen las cotas óptimas.

Conjuntos equidistribuidos.

En 1978, Strömberg [38] demostró el siguiente teorema.

Teorema 1.5.1 *Sea Ω_N un conjunto equidistribuido de N elementos. Existe una constante C , independiente de N , tal que para todo $\lambda > 0$,*

$$(1.6) \quad |\{x : M_{\Omega_N} f(x) > \lambda\}| \leq C(\log N) \frac{1}{\lambda^2} \|f\|_2^2,$$

$$(1.7) \quad \|M_{\Omega_N} f\|_2 \leq C(\log N) \|f\|_2.$$

El punto importante de la demostración de Strömberg es un lema de cubrimiento, que desempeña el mismo papel que el lema de Vitali en la demostración del teorema de Lebesgue.

Lema 1.5.2 *Sea Ω_N un conjunto equidistribuido de N elementos. Dada una familia finita $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de rectángulos de la base \mathcal{B}_{Ω_N} , existe una subfamilia $\{R_j\} \subset \{R_\alpha\}$ con las dos propiedades siguientes:*

$$(1.8) \quad \int \left(\sum_j \chi_{R_j} \right)^2 \leq C |\cup_j R_j|$$

$$(1.9) \quad |\cup R_\alpha| \leq C(\log N) |\cup R_j|$$

Estas dos propiedades son análogas a las de la subfamilia del lema de Vitali. En este caso, la subfamilia que nos proporciona el Lema 1.5.2 no es disjunta, pero la desigualdad (1.8) nos da un control sobre el solapamiento de sus miembros, que será suficiente para demostrar el teorema. Por otro lado, (1.9) significa que la subfamilia $\{R_j\}$ cubre gran parte de la familia original.

La demostración de (1.6) sigue los mismos pasos que la del Teorema 1.1.2. Si $A_\lambda = \{x : M_{\Omega_N} f(x) > \lambda\}$, A_λ está contenido en una unión de rectángulos R_α , que cumplen

$$\frac{1}{|R_\alpha|} \int_{R_\alpha} |f(y)| dy > \lambda.$$

Aplicando el Lema 1.5.2 a la familia $\{R_\alpha\}$, obtenemos la subfamilia $\{R_j\}$. Por (1.9), se tiene

$$(1.10) \quad |A_\lambda| \leq C(\log N) |\cup R_j|.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\cup_j R_j| &\leq \sum_j |R_j| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{R_j} |f| = \frac{1}{\lambda} \int |f| \left(\sum_j \chi_{R_j} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_2 \left(\int \left(\sum_j \chi_{R_j} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Utilizando (1.8), la desigualdad anterior se convierte en

$$|\cup_j R_j| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_2 \right)^2,$$

que, combinada con (1.10), nos da (1.6). La estimación (1.7) se obtiene a partir de (1.6) interpolando con la estimación trivial en L^∞ y con (1.5) para $p = 3/2$.

□

Observaciones:

1. Las estimaciones (1.6) y (1.7) son óptimas. En efecto, sea $N \gg 1$ y definamos $f = \chi_{B(0,N)} \cdot \min(1, \frac{1}{|x|})$. Se tiene que

$$\|f\|_2^2 = C \left(\int_0^1 1 + \int_1^N \frac{r}{r^2} dr \right) = C(1 + \log N).$$

Si $x \in B(0, N)$, con $|x| > 1$,

$$M_{\Omega_N} f(x) \geq \frac{1}{2\pi|x|} \sum_{j=1}^{|x|} \frac{2\pi}{j} \geq c \frac{\log |x|}{|x|},$$

de donde

$$\|M_{\Omega_N} f\|_2 \geq C(\log N)^{3/2} = C \log N \|f\|_2,$$

lo que demuestra que (1.7) es óptima. Supongamos ahora que se satisface (1.6). Entonces,

$$\left| \left\{ x : |M_{\Omega_N} f(x)| > \frac{\log N}{N} \right\} \right| \leq C \frac{N^2}{(\log N)^2} \|f\|_2^2 = C \frac{N^2}{(\log N)}.$$

Pero $B(0, N) \subset \{x : |M_{\Omega_N} f(x)| > \frac{\log N}{N}\}$, por lo que ha de cumplirse $C \geq \log N$.

2. Córdoba y Fefferman [13] demostraron el siguiente resultado más general:

Teorema 1.5.3 *Sea \mathcal{B} una base de Busemann-Feller. El operador maximal $M_{\mathcal{B}}$ es de tipo débil (p, p) , $1 < p \leq \infty$ si y sólo si \mathcal{B} satisface la siguiente propiedad de cubrimiento:*

Dada cualquier familia $\{B_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ de \mathcal{B} , podemos encontrar una subfamilia $\{B_j\} \subset \{B_{\alpha}\}$, tal que

$$\begin{aligned} |\cup_{\alpha \in A} B_{\alpha}| &\leq C |\cup_j B_j|, \\ \left\| \sum \chi_{R_j} \right\|_q &\leq C |\cup R_j|^{1/q}. \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Conjuntos lagunares.

Consideremos ahora el caso en que $\Omega_N = \{\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_N\}$ es un conjunto lagunar, es decir, existe una constante λ entre 0 y 1 tal que $\theta_{j+1} \leq \lambda\theta_j$ para todo j . La función maximal asociada a este tipo de conjunto, de decrecimiento exponencial, fue estudiada por Strömberg [37], Córdoba y Fefferman [14], en el caso $p = 2$, utilizando lemas de cubrimiento. El resultado general, debido a Nagel, Stein y Wainger [29], dice lo siguiente:

Teorema 1.5.4 *Sea Ω_N un conjunto lagunar con N elementos. Para toda $f \in L^p$, $1 < p \leq \infty$,*

$$\|M_{\Omega_N} f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

donde la constante C_p es uniforme en N .

Por tanto, haciendo tender N a infinito, la acotación anterior sigue siendo válida. Aquí tenemos un ejemplo de operador maximal asociado a un conjunto infinito de direcciones que está acotado en todos los espacios L^p , con $p > 1$.

Para demostrar el Teorema 1.5.4, Nagel, Stein y Wainger utilizan transformadas de Fourier y teoría de Littlewood-Paley.

* * *

Resumiendo, en dos casos particulares hemos obtenido cotas óptimas. Si Ω_N es un conjunto equidistribuido,

$$\|M_{\Omega_N} f\|_2 \leq C(\log N) \|f\|_2.$$

Si es lagunar,

$$\|M_{\Omega_N} f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p \leq \infty.$$

En cierto modo, estos dos casos son opuestos. Un decaimiento tan rápido como el del conjunto lagunar nos da el mejor resultado que cabría esperar. En cambio, un conjunto equidistribuido, donde las direcciones se separan todo lo posible unas de otras, parece lo peor que podemos encontrarnos. Esta idea fue la que dio pie a que, en los años 70, se formulara la siguiente conjetura.

Teorema 1.5.5 *Existen constantes C y β tales que dados $N \in \mathbb{N}$ y un conjunto Ω_N con N elementos, se tiene*

$$\|M_{\Omega_N} f\|_2 \leq C(\log N)^\beta \|f\|_2.$$

Es decir, la norma en L^2 del operador maximal sobre un conjunto de N direcciones cualesquiera tiene, a lo sumo, crecimiento logarítmico en N . El caso extremo, donde efectivamente se alcanza este crecimiento, es el equidistribuido.

En 1995, Barrionuevo [5] se aproximó a la conjetura, demostrando que

$$\|M_{\Omega_N} f\|_{L^2} \leq CN^{\frac{2}{\sqrt{\log N}}} \|f\|_{L^2},$$

para cualquier Ω_N con N elementos. Nótese que, si N es grande, esta cota crece más lentamente que cualquier potencia de N .

Finalmente, en 1999, N. Katz [27] (véase también [26]) demostró el Teorema 1.5.5 con el mejor exponente posible, $\beta = 1$. Para ello, utiliza técnicas muy diferentes a los métodos geométricos o de transformada de Fourier que se venían empleando en este tipo de problemas. Quedaba aún por hallar una demostración más geométrica, que permitiera entender mejor la geometría de las bases de rectángulos.

El resultado principal del próximo capítulo es un principio de casi-ortogonalidad para familias de operadores maximales sobre rectángulos en varias direcciones. Su prueba retoma los argumentos geométricos usados por Córdoba, Fefferman, Strömberg. Entre otras aplicaciones, este principio nos permitirá dar una sencilla prueba del Teorema 1.5.5.

1.6 La función maximal sobre un conjunto de Cantor

Sea \mathcal{C} el conjunto ternario de Cantor en el intervalo $[0, 1]$, y sea \mathcal{C}_N el conjunto de los extremos de los intervalos del paso N de la construcción de \mathcal{C} . \mathcal{C}_N se define recursivamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{0, 1\}, \\ (1.11) \quad \mathcal{C}_N &= \frac{1}{3}\mathcal{C}_{N-1} \cup \left(1 - \frac{1}{3}\mathcal{C}_{N-1}\right), \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Definimos las bases $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_N}$, formadas, respectivamente, por todos los rectángulos de \mathbb{R}^2 orientados en las direcciones de \mathcal{C} , \mathcal{C}_N , y los operadores maximales asociados a dichas bases, a los que denotaremos por $M_{\mathcal{C}}$, $M_{\mathcal{C}_N}$.

Tras demostrarse que el operador maximal sobre un conjunto lagunar está acotado en L^p , para todo $p > 1$ [29], se conjeturó que $M_{\mathcal{C}}$ se comportaría de modo similar. Debido a la autosemejanza del conjunto de Cantor, se esperaba que la cota para el maximal $M_{\mathcal{C}_N}$ resultara ser, también en este caso, independiente de N , y que también en este caso fuese posible pasar al límite y obtener la acotación de $M_{\mathcal{C}}$. Hubo algunos resultados positivos ([39], [17]) que parecían apuntar en esta dirección. Sin embargo, en 1996, N. Katz [25] dio un contraejemplo que demostraba que $M_{\mathcal{C}}$ no está acotado en norma L^2 . Para $p > 2$, el problema sigue abierto.

Resultados positivos.

Sea Σ un conjunto de vectores unitarios en \mathbb{R}^2 . Sea M_{Σ}^0 el operador maximal sobre segmentos de longitud 1 con direcciones en Σ , definido por

$$M_{\Sigma}^0 f(x) = \sup_{v \in \Sigma} \frac{1}{2} \int_{|t| < 1} |f(x - tv)| dt.$$

En 1979, S. Wainger [40] demostró que existe una constante $C > 0$ tal que, si Σ tiene N elementos, entonces

$$(1.12) \quad \|M_{\Sigma}^0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1 + \log N) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

En 1995, A. Vargas [39] probó que, en el caso particular del conjunto de Cantor, el argumento de Wainger se puede refinar para obtener un resultado mejor. Sea

$$\Sigma_N = \left\{ v = (v_1, v_2) : |v| = 1, v_1 > 0, \frac{v_1}{v_2} \in \mathcal{C}_N \right\}.$$

Entonces,

Teorema 1.6.1 *Existe una constante $C > 0$, independiente de N , tal que para toda $f \in L^2$,*

$$(1.13) \quad \|M_{\mathcal{C}_N}^0 f\|_{L^2} \leq C\sqrt{N+1} \|f\|_{L^2}.$$

Obsérvese que el conjunto \mathcal{C}_N tiene 2^{N+1} elementos, por lo que (1.12) sólo nos dice que la norma de $M_{\mathcal{C}_N}^0$ está acotada por $N + 1$.

Sin embargo, en 1999, N. Katz [26] probó que, para todo subconjunto $\Sigma \subset [0, 1]$ de cardinal N , se tiene la desigualdad

$$\|M_{\Sigma}^0 f\|_{L^2} \leq C \sqrt{1 + \log N} \|f\|_{L^2},$$

de la que (1.13) es un caso particular.

* * *

Consideremos ahora el operador maximal

$$M_{\Sigma} f(x) = \sup_{v \in \Sigma, h > 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(x - tv)| dt,$$

donde Σ es, igual que antes, un conjunto de vectores unitarios en \mathbb{R}^2 . Se define la dimensión de Minkowski, $d(\Sigma)$, del conjunto Σ del modo siguiente

$$(1.14) \quad d(\Sigma) = \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log \mathcal{N}(\delta)}{-\log \delta},$$

donde $\mathcal{N}(\delta)$ es el mínimo número de intervalos cerrados de longitud δ que se necesitan para cubrir Σ .

Sea $L_{rad}^p(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de funciones radiales que pertenecen a L^p .

J. Duoandikoetxea y A. Vargas [17] demostraron el siguiente teorema.

Teorema 1.6.2 *Si $d(\Sigma) < 1$, el operador M_{Σ} está acotado en $L_{rad}^p(\mathbb{R}^2)$ si $p > 1 + d(\Sigma)$, y no está acotado si $p < 1 + d(\Sigma)$.*

El conjunto de Cantor tiene dimensión de Minkowski igual a $\log 2 / \log 3$. Por consiguiente, del Teorema 1.6.2 se deduce que una condición necesaria para que $M_{\mathcal{C}}$ esté acotado en $L^p(\mathbb{R}^2)$ es que $p \geq 1 + \frac{\log 2}{\log 3}$. Esta condición necesaria aparecía ya en el artículo [33] de Sjögren y Sjölin.

Si Σ es una sucesión lagunar, $d(\Sigma) = 0$ y el Teorema 1.6.2 dice que M_{Σ} está acotado en L_{rad}^p para todo $p > 1$, resultado que se deduce del Teorema 1.5.4. Hay que observar, no obstante, que el hecho de que M_{Σ} esté acotado en L_{rad}^p para un cierto p no implica, en general, que lo esté también en L^p . Por ejemplo, si $\Sigma = \{k^{-\gamma}\}_{k=1}^{\infty}$, se tiene que $d(\Sigma) = \frac{1}{\gamma+1}$, de donde M_{Σ} es un operador acotado en

L_{rad}^p para todo $p > \frac{\gamma+2}{\gamma+1}$. Sin embargo, M_Σ no está acotado en L^p , $1 < p < \infty$. Otro ejemplo lo constituye el caso en que $\Sigma = S^1$ y M_Σ es la función maximal universal. Como sabemos, este operador no está acotado si $1 < p < \infty$, pero su comportamiento sobre espacios de funciones radiales es muy diferente, como demuestra el siguiente resultado de Carbery, Hernández y Soria [9].

Teorema 1.6.3 *La función maximal universal en \mathbb{R}^n es de tipo débil restringido n sobre funciones radiales. Como consecuencia, está acotada en $L_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p > n$.*

Resultados negativos. El teorema de Katz.

Sea \mathcal{B}^N la base de rectángulos en \mathbb{R}^2 cuyos lados tienen longitud 1 y $1/N$, orientados en cualquier dirección. En [10], Córdoba demostró que el operador maximal asociado, $M_{\mathcal{B}^N}$, está acotado en L^2 , y

$$(1.15) \quad \|M_{\mathcal{B}^N} f\|_2 \leq C \sqrt{1 + \log N} \|f\|_2.$$

En [25], N. Katz plantea el problema de si la acotación (1.15) es óptima, o si puede mejorarse restringiendo el conjunto de direcciones en que están orientados los rectángulos de la base \mathcal{B}^N . En concreto, estudia el operador maximal asociado a los elementos de la base \mathcal{B}^N que tienen pendientes en $\mathcal{C}_{\log N}$, para el que demuestra el teorema siguiente.

Teorema 1.6.4 *Existen una función f y una constante $c > 0$ tales que*

$$(1.16) \quad \|M_{\mathcal{C}_{\log N}}^N f\|_2 \geq c \sqrt{\log \log N} \|f\|_2.$$

Como consecuencia, el operador maximal M_C , sobre rectángulos con pendientes en todo el conjunto de Cantor, sin restricción en la longitud de sus lados, no está acotado en L^2 ni, por tanto, en L^p para $p < 2$.

En [21], K. Hare adapta las ideas de Katz, y generaliza el Teorema 1.6.4 a conjuntos de Cantor más generales, no necesariamente centrados.

Teorema 1.6.5 *Sea C un conjunto de Cantor cuyas razones de disección (es decir, el cociente entre la longitud de un intervalo y la de aquél del que proviene, al que llamaremos su “padre”) están acotadas lejos de 1. Sea p_k el mínimo de las longitudes de los intervalos del paso k de la construcción. Si $\delta \equiv \inf (p_k)^{1/k} > 0$, entonces la función maximal M_C no está acotada en L^2 . De hecho, ni siquiera es de tipo débil $(2,2)$.*

El Teorema 1.6.5 tiene varios corolarios [21].

Corolario 1.6.6 *Si C es un conjunto de Cantor centrado de dimensión de Hausdorff positiva, entonces M_C no está acotado en L^2 .*

Corolario 1.6.7 *Sea C un conjunto de Cantor centrado de dimensión de Hausdorff positiva. Sea E_n el conjunto de extremos izquierdos de los intervalos del paso n de la construcción de C . Entonces, el operador maximal $M_{\cup E_n}$ no está acotado en L^2 .*

En el capítulo cuarto de la memoria usaremos las ideas de Katz y Hare para probar un resultado similar al de los Teoremas 1.6.4 y 1.6.5 para conjuntos regulares Ahlfors-David.

Capítulo 2

Principio de casi-ortogonalidad: el caso $p=2$

2.1 Preliminares

En este capítulo probaremos un principio de casi-ortogonalidad para familias generales de operadores maximales, y veremos algunas aplicaciones de este resultado. El marco en el que trabajaremos será el siguiente: consideramos un subconjunto Ω de $[0, \frac{\pi}{4})$, que puede ser finito o infinito. Sea \mathcal{B}_Ω la base de todos los rectángulos de \mathbb{R}^2 cuyo lado mayor forma un ángulo α con el eje de las x , para algún α perteneciente a Ω .

Si f es una función localmente integrable, el operador maximal asociado a Ω se define mediante

$$M_\Omega f(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_\Omega} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy.$$

Dividimos Ω en varios trozos disjuntos. Para ello, elegimos $\Omega_0 = \{\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_j > \dots\}$, un subconjunto ordenado de Ω al que llamaremos “conjunto de separadores”. Fijamos $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, y consideramos, para cada $j \geq 1$, los conjuntos $\Omega_j = [\theta_j, \theta_{j-1}) \cap \Omega$. Se tiene que $\theta_j \in \Omega_j$ para todo j . Además, supondremos que el conjunto de separadores está elegido de modo que $\Omega = \cup_{j \geq 1} \Omega_j$.

A cada Ω_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ le hacemos corresponder la base $\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_\Omega$ de los rectángulos que forman un ángulo $\beta \in \Omega_j$ con el eje de las x . Definimos los operadores maximales asociados a cada Ω_j mediante

$$M_{\Omega_j} f(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_j} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Nuestro objetivo es hallar una relación entre M_Ω y los M_{Ω_j} , $j = 0, 1, 2, \dots$. En concreto, nos gustaría obtener la siguiente desigualdad,

$$(2.1) \quad \left\| \sup_{j \geq 1} M_{\Omega_j} \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2},$$

es decir, acotar la norma del supremo de los M_{Ω_j} por el supremo de sus normas. Sin embargo, (2.1) no va a ser siempre cierta. En general, es necesario tener en cuenta el modo en que hemos realizado la partición de Ω . La manera precisa en que el conjunto de separadores entra en la relación (2.1) viene dada por los dos teoremas siguientes.

Teorema 2.1.1 Principio de casi-ortogonalidad de L^2 en $L^{2,\infty}$.

Existen constantes C_1, C_2 , independientes de Ω , tales que

$$(2.2) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \leq C_1 \sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 + C_2 \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2,$$

donde $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}$ denota la norma débil (2, 2) del operador T .

Teorema 2.1.2 Principio de casi-ortogonalidad de L^2 en L^2 .

Existe una constante C , independiente de Ω , tal que

$$(2.3) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} + \sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

donde $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ denota la norma fuerte (2, 2) del operador T .

Es importante notar que, en el Teorema 2.1.2, la constante que aparece ante el supremo de las normas de los Ω_j es 1. Veremos las consecuencias de este hecho en la sección 2.4.

La demostración del Teorema 2.1.1 utiliza el mismo tipo de ideas que Strömberg en [38]. Para probar el Teorema 2.1.2, linealizaremos el operador maximal y aplicaremos un lema de cubrimiento debido a Carbery [7].

2.2 Demostración del Teorema 2.1.1

En esta sección vamos a modificar ligeramente la definición de las bases de diferenciación, pues este cambio facilitará la demostración del teorema. Llamaremos \mathcal{B}_Ω^* a la familia de todos los paralelogramos cuyos lados más cortos son paralelos al

eje de las y , y cuyos lados más largos forman un ángulo α con el eje de las x , para algún $\alpha \in \Omega$. Con cierto abuso de notación, llamaremos “rectángulos” a dichos paralelogramos.

Dado un rectángulo $R \in \mathcal{B}_\Omega^*$, denotaremos por $P_1(R)$ a la proyección de R sobre el eje de las x . Si $P_1(R) = [a_R^1, a_R^2]$, definimos $P_{2,1}(R) = \{y : (a_R^1, y) \in \overline{R}\}$, y $P_{2,2}(R) = \{y : (a_R^2, y) \in \overline{R}\}$. $P_{2,1}(R)$ y $P_{2,2}(R)$ son las proyecciones de los lados verticales de R sobre el eje de las y (véase la figura 2). Se observa que $|P_{2,1}(R)| = |P_{2,2}(R)|$, y también que $|R| = |P_1(R)| \cdot |P_{2,1}(R)|$.

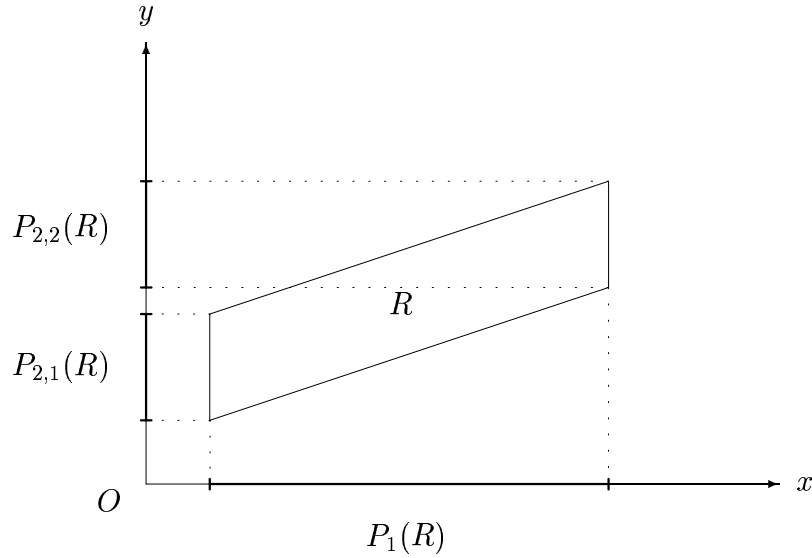


Figura 2

Sin pérdida de generalidad, supondremos que Ω es finito (y por consiguiente Ω_0 también). Para demostrar (2.2), consideramos los conjuntos de nivel de M_Ω . Si $x \in \{M_\Omega f(x) > \lambda\}$, existe un rectángulo $R_x \in \mathcal{B}_\Omega^*$, que contiene a x , y tal que

$$(2.4) \quad \frac{1}{|R_x|} \int_{R_x} |f(y)| dy > \lambda.$$

Por consiguiente,

$$\{M_\Omega f(x) > \lambda\} \subset \bigcup_{x \in \{M_\Omega f(x) > \lambda\}} R_x.$$

Si K es un compacto contenido en $\{M_\Omega f(x) > \lambda\}$, entonces $K \subset \bigcup_{j=1}^s R_{x_j}$ para cierta colección finita de rectángulos $\mathcal{F} = \{R_{x_j}\}_{j=1}^s$, cada uno de los cuales satisface (2.4).

Ahora entra en juego un lema de cubrimiento de tipo Vitali, como el usado en la demostración del Teorema 1.1.2. Seleccionamos una subfamilia $\overline{\mathcal{F}} = \{B_k\}$ a partir de \mathcal{F} . Tomamos como B_1 el rectángulo $R \in \mathcal{F}$ cuya proyección $P_1(R)$ es más larga. Suponiendo que ya hemos elegido B_1, \dots, B_{n-1} , escogemos como B_n el rectángulo R tal que $|P_1(R)|$ es maximal entre los $R \in \mathcal{F} \setminus \{B_k\}_{k=1}^{n-1}$ que satisfacen

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^{n-1} |R \cap B_k| \leq \frac{1}{2}|R|.$$

La desigualdad (2.5) implica fácilmente que la subfamilia $\{B_k\}$ cumple la siguiente propiedad:

$$(2.6) \quad \int \left(\sum \chi_{B_k} \right)^2 \leq 2 \sum |B_k|.$$

Para estimar la norma débil (2, 2) de M_Ω , observamos que

$$\sum |B_k| \leq \frac{1}{\lambda} \sum \int_{B_k} |f| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_2 \left\| \sum \chi_{B_k} \right\|_2.$$

Usando (2.6), la expresión anterior es menor o igual que

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \|f\|_2 \left(\sum |B_k| \right)^{1/2}.$$

Despejando,

$$(2.7) \quad \left(\sum |B_k| \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \|f\|_2.$$

Si demostramos que

$$(2.8) \quad |\cup R_{x_j} \setminus \cup B_k| \leq c_0 \sum |B_k|,$$

entonces, usando (2.7) se obtiene

$$\begin{aligned} |K| &\leq |\cup R_{x_j}| \leq |\cup B_k| + |\cup R_{x_j} \setminus \cup B_k| \leq \\ &\leq (1 + c_0) \left(\sum |B_k| \right) \leq \frac{2(1 + c_0)}{\lambda^2} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Y, en consecuencia,

$$|\{M_\Omega f(x) > \lambda\}| \leq \frac{2(1 + c_0)}{\lambda^2} \|f\|_2^2,$$

si c_0 es independiente del compacto K .

Por tanto, tenemos que probar (2.8). Sea R un rectángulo perteneciente a $\mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}}$. Por construcción,

$$\sum_{B_k: |P_1(B_k)| \geq |P_1(R)|} |R \cap B_k| > \frac{1}{2}|R|.$$

Si $R \in \mathcal{B}_l$, se debe cumplir una de las dos siguientes desigualdades.

$$(2.9) \quad \sum_{B_k \in \mathcal{B}_l: |P_1(B_k)| \geq |P_1(R)|} \frac{|R \cap B_k|}{|R|} > \frac{1}{4},$$

o

$$(2.10) \quad \sum_{B_k \notin \mathcal{B}_l: |P_1(B_k)| \geq |P_1(R)|} \frac{|R \cap B_k|}{|R|} > \frac{1}{4}.$$

Llamemos

$$\mathcal{F}_1 = \bigcup_l \left\{ R \in (\mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}_l : \sum_{B_k \in \mathcal{B}_l: |P_1(B_k)| \geq |P_1(R)|} \frac{|R \cap B_k|}{|R|} > \frac{1}{4} \right\},$$

y

$$\mathcal{F}_2 = \bigcup_l \left\{ R \in (\mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{B}_l : \sum_{B_k \notin \mathcal{B}_l: |P_1(B_k)| \geq |P_1(R)|} \frac{|R \cap B_k|}{|R|} > \frac{1}{4} \right\}.$$

Si $R \in \mathcal{B}_l$ y se cumple (2.9), entonces $R \subset \{x : M_{\Omega_l}(\sum_{B_k \in \mathcal{B}_l} \chi_{B_k}) > \frac{1}{4}\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} |\cup_{\mathcal{F}_1} R| &\leq \sum_{l=1}^N \left| \left\{ M_{\Omega_l} \left(\sum_{B_k \in \mathcal{B}_l} \chi_{B_k} \right) > \frac{1}{4} \right\} \right| \leq 16 \sum_{l=1}^N \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \left\| \sum_{B_k \in \mathcal{B}_l} \chi_{B_k} \right\|_2^2 \\ &\leq 16 \sup_{l=1, \dots, N} \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \left\| \sum_{B_k \in \mathcal{F}} \chi_{B_k} \right\|_2^2 \leq \\ (2.11) \quad &\leq 32 \sup_{l=1, \dots, N} \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \left(\sum |B_k| \right). \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos utilizado (2.6)

Supongamos ahora que existe una constante universal c , con la propiedad de que para todo $R \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{B}_l$, podemos encontrar $\widehat{R}_+, \widehat{R}_- \in \mathcal{B}_0$ que contienen a R y que cumplen

$$(2.12) \quad \frac{|B_k \cap R|}{|R|} \leq c \frac{|B_k \cap \widehat{R}_+|}{|\widehat{R}_+|} + c \frac{|B_k \cap \widehat{R}_-|}{|\widehat{R}_-|},$$

para todo $B_k \notin \mathcal{B}_l$. Esto implicaría que

$$(2.13) \quad \begin{aligned} |\cup_{\mathcal{F}_2} R| &\leq |\{M_{\Omega_0}(\sum \chi_{B_k}) > \frac{1}{8c}\}| \leq 64c^2 \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \cdot \|\sum \chi_{B_k}\|_2^2 \leq \\ &\leq 128c^2 \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \left(\sum |B_k|\right). \end{aligned}$$

Combinando (2.11) y (2.13), obtenemos (2.8) con $c_0 = 32 \sup \|M_{\Omega_l}\|^2 + 128c^2 \|M_{\Omega_0}\|^2$.

Así pues, debemos demostrar (2.12). Para ello, necesitaremos introducir algo de notación.

Definición: Dados $U, V \in \mathcal{B}_\Omega^*$, diremos que U *cruza* V *completamente* si existe un intervalo J , tal que

$$J \subset P_1(U) \cap P_1(V),$$

y, si S es la banda $S = \{(x, y) : x \in J\}$, $\tilde{U} = U \cap S$, $\tilde{V} = V \cap S$, entonces

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset,$$

$$P_{2,i}(\tilde{U}) \cap P_{2,i}(\tilde{V}) = \emptyset \quad \text{para } i = 1, 2.$$

(Véase la figura 3).

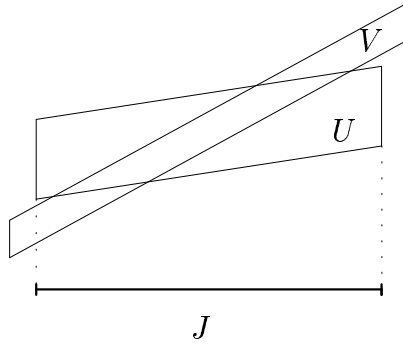


Figura 3

Obsérvese que U cruza V completamente si y sólo si V cruza U completamente. Los dos lemas siguientes son unas sencillas observaciones geométricas.

Lema 2.2.1 *Si V_1, V_2 cruzan U completamente, donde $|P_{2,1}(V_1)| = |P_{2,1}(V_2)|$ y $\text{ángulo}(V_2, U) = \alpha_2 \leq \alpha_1 = \text{ángulo}(V_1, U)$, entonces*

$$|V_1 \cap U| \leq |V_2 \cap U|.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U tiene lados paralelos a los ejes. Entonces, si llamamos $a = |P_{2,1}(U)|$ y $b = |P_{2,1}(V_j)|$,

$$|V_j \cap U| = \frac{a \cdot b}{\tan \alpha_j},$$

por lo que si $\alpha_2 \leq \alpha_1$, entonces $|V_1 \cap U| \leq |V_2 \cap U|$. \square

Lema 2.2.2 *Si V_1, V_2 son paralelos, cruzan completamente U y $|P_1(V_1)| = |P_1(V_2)| = L$, entonces*

$$\frac{|U \cap V_1|}{|V_1|} = \frac{|U \cap V_2|}{|V_2|}.$$

Demostración. De nuevo supondremos que U tiene lados paralelos a los ejes. Pongamos $a = |P_{2,1}(U)|$, $\alpha = \text{ángulo}(V_j, U)$ y $b_j = |P_{2,1}(V_j)|$ para $j = 1, 2$ (nótese que α no depende de j). Entonces, al igual que en el Lema 2.2.1, se tiene

$$\frac{|U \cap V_j|}{|V_j|} = \frac{a \cdot b_j}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{b_j \cdot L} = \frac{a}{L \tan \alpha},$$

que no depende de j . \square

Una vez que tenemos los dos lemas, demostremos (2.12). Sea $R \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{B}_l$, $B \in \overline{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{B}_l$ tal que $B \cap R \neq \emptyset$ y $|P_1(B)| \geq |P_1(R)|$. Sea α_R el ángulo que forma R con el eje de las x , y α_B el ángulo que forma B con el eje de las x . Supondremos que $\alpha_B > \alpha_R$ (el caso $\alpha_B < \alpha_R$ se trata de manera análoga). Entonces, existe un ángulo θ_k del conjunto de separadores Ω_0 , tal que

$$\alpha_B \geq \theta_k > \alpha_R.$$

Sea \tilde{R} el mínimo rectángulo en la dirección de θ_k que contiene a R , y sea \widehat{R}_+ el rectángulo concéntrico con \tilde{R} y 9 veces mayor. Llamaremos \widehat{R}_{mid} al rectángulo en

la dirección de θ_k que cumple

$$\begin{aligned} P_1(\widehat{R}_{mid}) &= P_1(\widehat{R}_+), \\ \widetilde{R} &\subset \widehat{R}_{mid}, \\ |\widetilde{R}| &= \frac{1}{3}|\widehat{R}_{mid}|. \end{aligned}$$

Es decir, \widehat{R}_{mid} es el tercio central de \widehat{R}_+ (véase la figura 4).

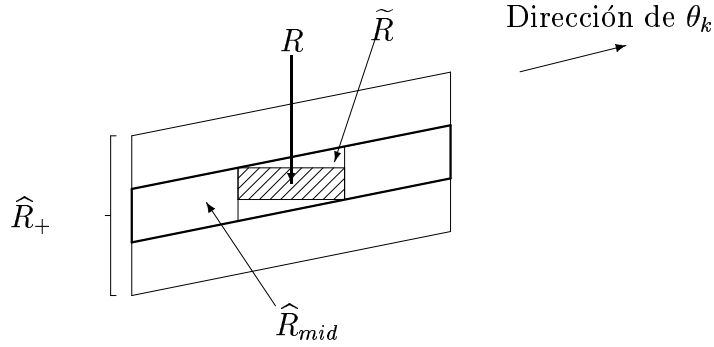


Figura 4

Queremos probar que

$$(2.14) \quad \frac{|B \cap R|}{|R|} \leq c \frac{|B \cap \widehat{R}_+|}{|\widehat{R}_+|},$$

con c una constante universal. Puesto que $\widehat{R}_+ \in \mathcal{B}_0$, esto demuestra (2.12).

Para simplificar la notación, de ahora en adelante escribiremos \widehat{R} en lugar de \widehat{R}_+ . Definimos R^∞ como la mínima banda infinita que contiene a R y tiene su misma pendiente. Sea B' el mínimo rectángulo que contiene a B , con $P_1(B') \supset P_1(\widehat{R})$, y pongamos

$$B^* = B' \cap [P_1(\widehat{R}) \times \mathbb{R}],$$

(véase la figura 5). Es fácil observar que $|B^* \cap \widehat{R}| \leq 3|B \cap \widehat{R}|$.

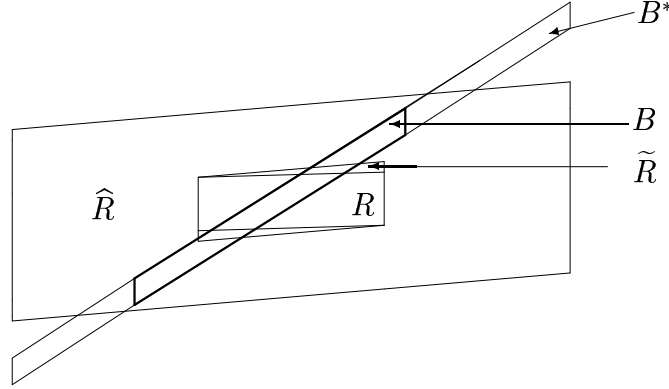


Figura 5

Consideraremos dos casos:

CASO 1: B^* cruza \widehat{R} completamente.

Sea R^{rot} un rectángulo en la dirección de θ_k , tal que

$$P_1(R^{rot}) = P_1(\widehat{R}),$$

$$R^{rot} \subset \widehat{R}_{mid},$$

$$|P_{2,1}(R^{rot})| = |P_{2,1}(R)|.$$

Por el Lema 2.2.1,

$$|B^* \cap R| \leq |B^* \cap R^\infty| \leq |B^* \cap R^{rot}|,$$

y

$$\frac{|B^* \cap R|}{|R|} \leq \frac{|B^* \cap R^{rot}|}{|R|} = \frac{3|B^* \cap R^{rot}|}{|R^{rot}|} = \frac{3|B^* \cap \widehat{R}|}{|\widehat{R}|}.$$

En la última desigualdad hemos utilizado el Lema 2.2.2. Tenemos así que

$$\frac{|B \cap R|}{|R|} \leq \frac{|B^* \cap R|}{|R|} \leq \frac{3|B^* \cap \widehat{R}|}{|\widehat{R}|} \leq \frac{9|B \cap \widehat{R}|}{|\widehat{R}|}.$$

CASO 2: B^* no cruza \widehat{R} completamente.

Podemos suponer que $|P_{2,1}(B^*)| \leq \frac{1}{3}|P_{2,1}(\widehat{R})|$, puesto que, en caso contrario,

$$|\widehat{R} \cap B^*| \geq \frac{1}{9}|\widehat{R}|,$$

de donde se obtiene fácilmente (2.14) (véase la figura 6).

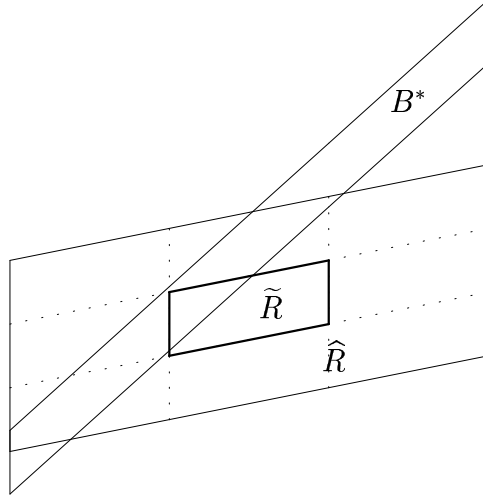


Figura 6

Pero si $|P_{2,1}(B^*)| \leq \frac{1}{3}|P_{2,1}(\widehat{R})|$, se sigue que

$$|B^*| \leq 3|B^* \cap \widehat{R}|.$$

Sea B^{*rot} un rectángulo con pendiente θ_k , tal que

$$P_1(B^{*rot}) = P_1(\widehat{R}) = P_1(B^*),$$

$$B^{*rot} \subset \widehat{R}_{mid},$$

$$|P_{2,1}(B^{*rot})| = |P_{2,1}(B^*)|.$$

Nótese que $|B^*| = |B^{*rot}|$. Por el Lema 2.2.1,

$$|B^* \cap R| \leq |B^* \cap R^\infty| \leq |B^{*rot} \cap R^\infty|,$$

y esto implica que

$$\frac{|B^* \cap R|}{|B^*|} \leq \frac{|B^{*rot} \cap R^\infty|}{|B^{*rot}|}.$$

Por el Lema 2.2.2, la última expresión es igual a

$$\frac{|\widehat{R}_{mid} \cap R^\infty|}{|\widehat{R}_{mid}|} \leq \frac{3|R|}{|\widehat{R}_{mid}|} = \frac{9|R|}{|\widehat{R}|}.$$

De aquí se sigue que

$$\frac{|B^* \cap R|}{|R|} \leq \frac{9|B^*|}{|\widehat{R}|} \leq 27 \frac{|B^* \cap \widehat{R}|}{|\widehat{R}|}.$$

Y, por consiguiente,

$$\frac{|B \cap R|}{|R|} \leq 81 \frac{|B \cap \widehat{R}|}{|\widehat{R}|},$$

lo que demuestra (2.12). \square

2.3 Demostración del Teorema 2.1.2

En esta sección volvemos a utilizar la notación introducida en la sección 2.1. En particular, las bases estarán formadas por verdaderos rectángulos, no paralelogramos como en la sección anterior.

Empezaremos linealizando los operadores M_Ω y M_{Ω_j} . Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, Q_α denotará el cubo unidad de centro α . Dado un conjunto $\Lambda \subset [0, \pi/4)$, para cada α elegimos un rectángulo $R_\alpha \in \mathcal{B}_\Lambda$, tal que $R_\alpha \supset Q_\alpha$. Definimos el operador T_Λ como

$$T_\Lambda f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} \left(\int_{R_\alpha} f \right) \chi_{Q_\alpha}(x).$$

Por definición,

$$(2.15) \quad T_\Lambda f(x) \leq M_\Lambda f(x),$$

cualquiera que sea la elección de rectángulos $\{R_\alpha\}$ que hagamos. Además, existe una sucesión de operadores $\{T_\Lambda f\}$, asociados a retículos de cubos más pequeños de \mathbb{R}^2 , que convergen puntualmente a $M_\Lambda f$. Por esta razón, basta con probar la desigualdad que se obtiene reemplazando M_Ω por T_Ω en (2.3).

Necesitamos la siguiente versión de un resultado de Carbery [8], en el que establecemos la relación entre las constantes de cierta estimación tipo Vitali y la norma del operador.

Teorema 2.3.1 *En las condiciones anteriores, T_Λ es de tipo fuerte (p, p) si y sólo si existe una constante $C_{p'}$, tal que para toda sucesión $\{\lambda_\alpha\} \subset \mathbb{R}$, se cumple*

$$(2.16) \quad \int \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} \chi_{R_\alpha} \right)^{p'} \leq C_{p'} \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^{p'}.$$

Además, el ínfimo de las constantes $(C_{p'})^{1/p'}$ que verifican (2.16) es $\|T_\Lambda\|_{L^p \rightarrow L^p}$.

Demostración. Si T_Λ es de tipo fuerte (p, p) , entonces su adjunto T_Λ^* definido por

$$T_\Lambda^*g(x) = \sum_{\alpha} \left(\int_{Q_\alpha} g \right) \frac{1}{|R_\alpha|} \chi_{R_\alpha}(x),$$

es de tipo fuerte (p', p') , con la misma norma. Tomando $g = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \chi_{Q_\alpha}$, se obtiene (2.16) con $C_{p'} = \|T_\Lambda^*\|_{L^{p'} \rightarrow L^{p'}}^{p'} = \|T_\Lambda\|_{L^p \rightarrow L^p}^{p'}$.

Recíprocamente, si se cumple (2.16), entonces, para toda $h \in L^{p'}$,

$$\int (T_\Lambda^*h)^{p'} \leq C_{p'} \sum_{\alpha} \left(\int_{Q_\alpha} h \right)^{p'} \leq C_{p'} \int |h|^{p'}.$$

(Aquí hemos usado la desigualdad de Jensen y el hecho de que los Q_α tienen interiores disjuntos). Por consiguiente, T_Λ es de tipo fuerte (p, p) y su norma está acotada por $(C_{p'})^{1/p'}$. □

Una vez establecido el Teorema 2.3.1, continuamos con la demostración del Teorema 2.1.2. Definimos T_Ω para una cierta elección de rectángulos $\{R_\alpha\}$. Hemos de demostrar que se cumple la desigualdad (2.16) con $p = 2$ y

$$C_2^{1/2} = \sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} + C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} I^2 &= \int \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{1}{|R_{\alpha}|} \chi_{R_{\alpha}} \right)^2 = \int \left(\sum_l \sum_{\alpha: R_{\alpha} \in \Omega_l} \lambda_{\alpha} \frac{1}{|R_{\alpha}|} \chi_{R_{\alpha}} \right)^2 = \\ &= \int \sum_l \left(\sum_{\alpha: R_{\alpha} \in \Omega_l} \lambda_{\alpha} \frac{1}{|R_{\alpha}|} \chi_{R_{\alpha}} \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_l \sum_{j < l} \int \sum_{R_{\alpha} \in \Omega_l} \sum_{R_{\beta} \in \Omega_j} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \frac{1}{|R_{\alpha}| |R_{\beta}|} \chi_{R_{\alpha}} \chi_{R_{\beta}} = \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Para el primer término, A , usamos (2.15) y el Teorema 2.3.1 con $p = 2$ y $\Lambda = \Omega_l$, obteniendo

$$A \leq \sum_l \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 \left(\sum_{\alpha: R_{\alpha} \in \Omega_l} |\lambda_{\alpha}|^2 \right) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sup_l \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 \right) \left(\sum_l \sum_{\alpha: R_\alpha \in \Omega_l} |\lambda_\alpha|^2 \right) \leq \\
(2.17) \quad &\leq \left(\sup_l \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 \right) \left(\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \right).
\end{aligned}$$

Pasemos ahora a la acotación de B . Como vimos en la sección anterior (desigualdad (2.12)), existe una constante C tal que, si $R_\alpha \in \Omega_l$ y $R_\beta \in \Omega_j$ con $j < l$,

$$\frac{|R_\alpha \cap R_\beta|}{|R_\alpha||R_\beta|} \leq C \frac{|\tilde{R}_\alpha^- \cap R_\beta|}{|\tilde{R}_\alpha^-||R_\beta|} + C \frac{|R_\alpha \cap \tilde{R}_\beta^+|}{|R_\alpha||\tilde{R}_\beta^+|},$$

donde \tilde{R}_α^- (\tilde{R}_β^+), son rectángulos de la base \mathcal{B}_0 , que contienen a R_α (R_β). Por tanto,

$$\begin{aligned}
B &\leq 2C \sum_l \sum_{j < l} \int \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{1}{|\tilde{R}_\alpha^-||R_\beta|} \chi_{\tilde{R}_\alpha^-} \chi_{R_\beta} + \\
&+ 2C \sum_l \sum_{j < l} \int \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{1}{|R_\alpha||\tilde{R}_\beta^+|} \chi_{R_\alpha} \chi_{\tilde{R}_\beta^+} = \\
&= B^- + B^+.
\end{aligned}$$

Vamos a estudiar el término B^- (el otro es análogo). Se tiene que

$$\begin{aligned}
B^- &= 2C \sum_l \sum_{j < l} \int \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{1}{|\tilde{R}_\alpha^-||R_\beta|} \chi_{\tilde{R}_\alpha^-} \chi_{R_\beta} \leq \\
(2.18) \quad &\leq 2C \int \left(\sum_l \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \lambda_\alpha \frac{\chi_{\tilde{R}_\alpha^-}}{|\tilde{R}_\alpha^-|} \right) \left(\sum_j \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \lambda_\beta \frac{\chi_{R_\beta}}{|R_\beta|} \right).
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.18) es menor o igual que

$$\leq 2C \left(\int \left(\sum_l \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \lambda_\alpha \frac{\chi_{\tilde{R}_\alpha^-}}{|\tilde{R}_\alpha^-|} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\int \left(\sum_j \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \lambda_\beta \frac{\chi_{R_\beta}}{|R_\beta|} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

La última integral es igual a I . Para mayorar la primera integral, observamos que $\tilde{R}_\alpha^- \in \Omega_0$ para todo α . En consecuencia, usando de nuevo el Teorema 2.3.1 y (2.15), obtenemos

$$(2.19) \quad B^- \leq 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \left(\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \right)^{1/2} I.$$

Combinando (2.17) y (2.19) se llega a

$$I^2 \leq \left(\sup_l \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 \right) \left(\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}|^2 \right) + C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \left(\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}|^2 \right)^{1/2} I.$$

De aquí se deduce que

$$I \leq \left(\sup_l \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^2} + C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \right) \left(\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}|^2 \right)^{1/2}.$$

Y, por el Teorema 2.3.1, esto concluye la demostración del Teorema 2.1.2. \square

2.4 Aplicaciones

El principio de casi-ortogonalidad (2.1.2) resulta tener interesantes aplicaciones. Por ejemplo, si Ω_0 es un conjunto lagunar, $\|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ es una constante, como ya hemos visto en el primer capítulo (Teorema 1.5.4). En este caso, sí se obtiene (2.1). La norma del supremo de los Ω_j está esencialmente acotada por el supremo de sus normas.

Si además todos los Ω_j son lagunares, $\|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = C$ para todo j , y

$$(2.20) \quad \|M_{\Omega} f\|_2 \leq C \|f\|_2.$$

Es decir, podemos meter conjuntos lagunares dentro de separadores también lagunares, y seguir obteniendo un operador acotado. Los conjuntos multi-lagunares habían sido ya estudiados por Sjögren y Sjölin [33], que obtuvieron (2.20). Nuestro principio de casi-ortogonalidad generaliza su resultado permitiendo introducir otros tipos de conjuntos dentro de separadores lagunares.

Otra importante consecuencia del Teorema 2.1.2 es que, como corolario, se obtiene una prueba muy sencilla del teorema de Katz.

Teorema 2.4.1 *Dado un conjunto $\Omega_N \subset [0, \pi/4)$ con N elementos, donde $N > 1$, existe una constante K independiente de Ω_N , tal que*

$$(2.21) \quad \|M_{\Omega_N}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq K(\log N).$$

Demostración: Podemos suponer que $N = 2^M$. Demostraremos el resultado por inducción sobre M . Para $M = 1, 2$ la desigualdad (2.21) se cumple sin más que tomar K suficientemente grande, debido a la acotación del operador maximal fuerte.

Supongamos ahora que $M \geq 3$ y que (2.21) se cumple para todos los conjuntos de cardinal 2^k , con $1 \leq k < M$. Supondremos que K es suficientemente grande, en concreto, pediremos $K \geq 2C/\log 2$, donde C es la constante del Teorema 2.1.2). Si los elementos de Ω están ordenados, $\{\phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_N\}$, tomamos como Ω_0 el conjunto que consiste solamente en ϕ_N y en el elemento central $\phi_{N/2}$. De este modo, sólo hay dos conjuntos Ω_1 y Ω_2 , cada uno de los cuales tiene $N/2$ elementos.

Por el principio de casi-ortogonalidad 2.1.2

$$(2.22) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} + \sup_{j=1,2} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

Como Ω_0 tiene sólo dos elementos, la norma en L^2 de M_{Ω_0} es una constante. Por otro lado, por hipótesis de inducción,

$$\|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq K(\log(N/2)), \quad j = 1, 2.$$

De modo que (2.22) se convierte en

$$\|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq K(\log(N/2)) + 2C \leq K(\log N) - K(\log 2) + 2C \leq K \log N,$$

pues hemos tomado $K \geq \frac{2C}{\log 2}$.

□

Aquí se observa la importancia de que la constante que multiplica al supremo de las normas de los M_{Ω_j} sea 1. Si fuera mayor, K crecería en cada paso de la inducción.

En su artículo [27], Katz demuestra también un resultado análogo a (2.21) para el tipo débil de M_Ω . En concreto,

$$(2.23) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}} \leq K(\log N)^{1/2},$$

para cualquier conjunto $\Omega \in [0, \frac{\pi}{4})$ que tenga $N > 1$ elementos. Esta cota es óptima, pues se alcanza cuando Ω es un conjunto equidistribuido (véase [38]). Como corolario del Teorema 2.1.1, nosotros solamente podemos obtener el siguiente resultado, más débil.

Corolario 2.4.2 *Existe una constante K tal que, para cualquier conjunto $\Omega \subset [0, \pi/4)$ con N elementos, ($N > 1$)*

$$(2.24) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}} \leq K(\log N)^\beta,$$

donde $\beta > 1/2$ depende de las constantes C_1 y C_2 en (2.2).

Si consiguiéramos demostrar (2.2) con $C_1 = 1$, el mismo argumento del Teorema 2.4.1 implicaría (2.23).

Una modificación de la demostración del Teorema 2.1.2 permite mejorar el resultado (2.24). Este corolario es debido a A. Carbery.

Corolario 2.4.3 *Existe una constante C tal que, para todo conjunto $\Omega \subset [0, \frac{\pi}{4})$ de cardinal $N > 3$, se tiene*

$$(2.25) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2 \leq C \log N (\log \log N)^2.$$

Demostración. Necesitamos el siguiente resultado, análogo al Teorema 2.3.1.

Teorema 2.4.4 *Sea T_Λ como en el Teorema 2.3.1. Entonces T_Λ es de tipo débil $(2, 2)$ si y sólo si existe una constante C_2 , tal que para todo $A \subset \mathbb{Z}^2$, se tiene*

$$(2.26) \quad \int \left(\sum_{\alpha \in A} \frac{1}{|R_\alpha|} \chi_{R_\alpha} \right)^2 \leq C_2 (\#A).$$

Llamemos $B_2(T_\Lambda)$ al ínfimo de las constantes C_2 que satisfacen (2.26). Entonces, $B_2(T_\Lambda)$ es equivalente a $\|T_\Lambda\|_{L^2 \rightarrow L^{2,\infty}}^2$.

Su demostración, excepto por la observación de las constantes, que es similar a la del Teorema 2.3.1 se puede encontrar en [8].

Sea B_N el supremo de $B_2(T_\Lambda)$ sobre todos los T_Λ tales que Λ tiene N elementos. Tenemos que demostrar que

$$B_N \leq C \log N (\log \log N)^2.$$

Fijamos un conjunto Ω de cardinal N , y el operador T_Ω asociado. Al igual que hicimos en la demostración del Teorema 2.4.1, definimos Ω_0 como el conjunto que consta solamente del último elemento y el elemento central de Ω . Por consiguiente,

cada uno de los conjuntos Ω_1 y Ω_2 tiene $N/2$ elementos. Repitiendo la demostración del Teorema 2.1.2, llegamos a

$$(2.27) \quad \int \left(\sum_{\alpha \in A} \frac{1}{|R_\alpha|} \chi_{R_\alpha} \right)^2 \leq B_{N/2} (\#A) +$$

$$+ 2C \left(\int \left(\sum_l \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \frac{\chi_{\tilde{R}_\alpha^\pm}}{|\tilde{R}_\alpha^\pm|} \right)^{p'} \right)^{1/p'} \left(\int \left(\sum_j \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \frac{\chi_{R_\beta}}{|R_\beta|} \right)^p \right)^{1/p}.$$

Aquí, en lugar de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (2.18), hemos usado la desigualdad de Hölder para ciertos $p < 2$ y $p' > 2$ que elegiremos en seguida. Ahora, por el Teorema 2.3.1, el miembro de la derecha de (2.27) está mayorado por

$$(2.28) \quad B_{N/2} (\#A) + 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} (\#A)^{1/p'} \|M_\Omega\|_{L^{p'} \rightarrow L^{p'}} (\#A)^{1/p} =$$

$$= [B_{N/2} + 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} \|M_\Omega\|_{L^{p'} \rightarrow L^{p'}}] (\#A).$$

Por el Teorema 2.4.1, e interpolando con L^∞ ,

$$(2.29) \quad \|M_\Omega\|_{L^{p'} \rightarrow L^{p'}} \leq C (\log N)^{2/p'} \leq \widehat{C},$$

donde \widehat{C} es una constante absoluta, con tal que elijamos p' de forma que $\frac{2}{p'} = \frac{1}{\log \log N}$. Por tanto, (2.28) y (2.29) implican que

$$B_N \leq B_{N/2} + \widetilde{C} \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

Puesto que Ω_0 solo tiene dos elementos, por (1.4) y nuestra elección de p' , obtenemos que

$$\|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \frac{C}{(p-1)^2} \leq C (\log \log N)^2.$$

A partir de esta desigualdad, se demuestra fácilmente por inducción que $B_N \leq C \log N (\log \log N)^2$. Aplicando el Teorema 2.4.4, la demostración de (2.25) está concluida. \square

Capítulo 3

Principio de casi-ortogonalidad: el caso general

3.1 Enunciado y demostración de los resultados

En el capítulo anterior demostramos el principio de casi-ortogonalidad para los tipos débil y fuerte $(2, 2)$. Nuestro objetivo en este capítulo es encontrar una relación similar entre las normas (p, p) de M_Ω y las normas (p, p) de los M_{Ω_j} . En lugar de los argumentos geométricos usados en el capítulo anterior, seguiremos el método de Nagel, Stein y Wainger [29]. Para ello, vamos a cambiar la definición de las funciones maximales. También habremos de considerar una descomposición de Littlewood-Paley, y la función cuadrado asociada.

Sea $\Omega_0 = \{\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_j > \dots\}$ un subconjunto de $[0, \frac{\pi}{4})$. Para cada $j \geq 1$, consideramos conjuntos $\Omega_j \subset [\theta_j, \theta_{j-1})$, donde estamos tomando $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. También supondremos que $\theta_j \in \Omega_j$. Definimos los operadores maximales asociados a los conjuntos Ω_j , $j \geq 0$ mediante

$$M_{\Omega_0} f(x, y) = \sup_{h>0, j} \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x - t \cos \theta_j, y - t \sin \theta_j) dt \right|,$$

y, si $j \geq 1$,

$$M_{\Omega_j} f(x, y) = \sup_{h>0, \theta \in \Omega_j} \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x - t \cos \theta, y - t \sin \theta) dt \right|,$$

para $f \in \mathcal{S}$. La función M_Ω se define como

$$M_\Omega f(x, y) = \sup_{j \geq 1} M_{\Omega_j} f(x, y).$$

Ahora introduciremos una función cuadrado asociada a Ω_0 . Para cada $j \geq 1$, sea $\delta_j = |\theta_{j-1} - \theta_j|$. Consideremos los siguientes sectores angulares,

$$\Delta_j = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_j - \frac{1}{20}\delta_j \leq \arctan\left(\frac{x}{-y}\right) < \theta_{j-1} + \frac{1}{20}\delta_j \right\},$$

y los sectores ligeramente más grandes,

$$\widetilde{\Delta}_j = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_j - \frac{1}{10}\delta_j \leq \arctan\left(\frac{x}{-y}\right) < \theta_{j-1} + \frac{1}{10}\delta_j \right\}.$$

Para cada $j \geq 1$, escogemos una función ω_j , homogénea de grado cero, C^∞ en la esfera S^1 , idénticamente igual a 1 en el sector Δ_j y soportada en el sector $\widetilde{\Delta}_j$. Definimos el operador S_j , asociado al multiplicador ω_j , mediante

$$(S_j f)^\wedge = \omega_j \widehat{f},$$

y la función cuadrado S

$$Sf(x) = \left(\sum_{j \geq 1} |S_j f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Las propiedades de S dependen directamente de la geometría del conjunto de separadores Ω_0 .

Ya podemos presentar los dos resultados principales de este capítulo.

Teorema 3.1.1 *Con la notación anterior, dado $2 \leq p < \infty$, existe una constante C_p tal que*

$$(3.1) \quad \|M_\Omega f\|_p \leq C_p \left[\|M_{\Omega_0} f\|_p + \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|Sf\|_p \right].$$

Para $1 < p < 2$, obtenemos

Teorema 3.1.2 *Si $1 < p < 2$, existe una constante C_p tal que*

$$(3.2) \quad \|M_\Omega f\|_p \leq C_p \left[\|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} + \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|S\|_{L^p \rightarrow L^p}^{2/p} \right] \|f\|_p.$$

El Teorema 3.1.1 es consecuencia de los dos lemas siguientes. Para el primero, necesitamos introducir la función de Hardy-Littlewood direccional en la dirección de θ ,

$$M_\theta f(x) = \sup_{h>0} \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x - t \cos \theta, y - t \sin \theta) dt \right|.$$

Lema 3.1.3 Para cada $j \geq 1$ y para cada $\theta \in \Omega_j$,

$$(3.3) \quad M_\theta f(x) \leq C[M_{\theta_j} f(x) + MM_\theta(S_j f)(x)],$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood usual.

Demostración. Nuestro argumento es una ligera modificación de la demostración del Lema 3 de [16]. Elegimos una función positiva $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\psi = 1$ en $[-1, 1]$. Fijamos $j \geq 1$ y $\theta \in \Omega_j$.

Entonces, si $f \geq 0$,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_\theta f(x) &\leq C \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t}{h}\right) f(x - t \cos \theta, y - t \sin \theta) dt = \\ &= C \sup_{h>0} N_{h,j,\theta} f(x). \end{aligned}$$

Llamemos $m = \widehat{\psi}$. Tomamos una función $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, con $\phi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$. Descomponemos $(N_{h,j,\theta} f)^\wedge(\xi)$ en tres trozos.

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (N_{h,j,\theta} f)^\wedge(\xi) &= m(h\xi_1 \cos \theta + h\xi_2 \sin \theta) \widehat{f}(\xi) = \\ &= m(h\xi_1 \cos \theta + h\xi_2 \sin \theta) \phi(h\delta_j \xi) \widehat{f}(\xi) + \\ &+ m(h\xi_1 \cos \theta + h\xi_2 \sin \theta) (1 - \phi(h\delta_j \xi)) (1 - \omega_j(h\xi)) \widehat{f}(\xi) + \\ &+ m(h\xi_1 \cos \theta + h\xi_2 \sin \theta) (1 - \phi(h\delta_j \xi)) \omega_j(h\xi) \widehat{f}(\xi) = \\ &= \widehat{I_{h,j,\theta}(f)}(\xi) + \widehat{II_{h,j,\theta}(f)}(\xi) + \widehat{III_{h,j,\theta}(f)}(\xi). \end{aligned}$$

Consideramos el multiplicador del primer término, $m(h\xi_1 \cos \theta + h\xi_2 \sin \theta) \phi(h\delta_j \xi)$. Componiendo con una rotación apropiada, podemos escribirlo de la forma

$m(h\eta_1)\phi(h\delta_j\eta)$. Ahora, si diferenciamos este multiplicador con respecto a η_1 y η_2 , vemos que la transformada de Fourier K_1 de $m(h\eta_1)\phi(h\delta_j\eta)$ verifica

$$|z_1|^\alpha |z_2|^\beta |K_1(z)| \leq C\delta_j^{-1+\beta},$$

de forma que el operador $K_1 * f$ está acotado por la función maximal sobre rectángulos con excentricidad δ_j y lados paralelos a los ejes coordenados. Por consiguiente, $\sup_h I_{h,j,\theta}(f)$ está mayorado por $M_{\theta,\delta_j}f$, la función maximal sobre los rectángulos de excentricidad δ_j y lados paralelos a la dirección dada por el ángulo θ . Ahora observamos que $|\theta - \theta_j| \leq \delta_j$, de modo que los rectángulos que aparecen en la definición de $M_{\theta,\delta_j}f$ se pueden incluir en rectángulos de área comparable y lados paralelos a θ_j . Por tanto,

$$\left| \sup_{h>0} I_{h,j,\theta}f(x) \right| \leq CM_{\theta_j}f(x).$$

El segundo término se acota del mismo modo que el primero. Y el tercer término está controlado por $MM_\theta(S_jf)$. Esto concluye la demostración del Lema 3.1.3. \square

El siguiente lema también nos hace falta para demostrar el Teorema 3.1.1.

Lema 3.1.4 *Supongamos que para ciertos $p > 1$, $q \geq 2$ y para cualquier sucesión de funciones $\{f_j\}$, se tiene*

$$(3.6) \quad \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |M_{\Omega_j}f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq B \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p.$$

Entonces,

$$(3.7) \quad \|M_\Omega f\|_p \leq C_p [\|M_{\Omega_0}f\|_p + B\|Sf\|_p],$$

para una constante C_p .

Demostración. A partir de la estimación puntual (3.3) del Lema 3.1.3, se obtiene

$$M_\Omega f(x) = \sup_{j \geq 1, \theta \in \Omega_j} M_\theta f(x) \leq C \left[M_{\Omega_0}f(x) + \sup_{j \geq 1, \theta \in \Omega_j} MM_\theta(S_jf)(x) \right].$$

Por el Teorema de Hardy-Littlewood (1.1.2),

$$\left\| \sup_{j \geq 1, \theta \in \Omega_j} M M_\theta(S_j f) \right\|_p \leq C_p \left\| \sup_{j \geq 1, \theta \in \Omega_j} M_\theta(S_j f) \right\|_p.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \sup_{j \geq 1, \theta \in \Omega_j} M_\theta(S_j f) &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\theta \in \Omega_j} (M_\theta(S_j f))^q \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} (M_{\Omega_j}(S_j f))^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

La hipótesis del lema implica que

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{j \geq 1, \theta \in \Omega_j} M_\theta(S_j f) \right\|_p &\leq B \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |S_j f|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq \\ &\leq B \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |S_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = B \|Sf\|_p. \end{aligned}$$

En la segunda desigualdad hemos usado que $q \geq 2$. Esto demuestra (3.7) y, por consiguiente, el Lema 3.1.4. □

Demostración del Teorema 3.1.1. Es una consecuencia directa del Lema 3.1.4, a partir de la observación de que (3.6) se verifica con $B = \sup \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p}$ y $p = q$. □

Demostración del Teorema 3.1.2. Por razones técnicas, demostraremos el Teorema 3.1.2 con una función cuadrado un poco diferente, \tilde{S} , adaptada a los sectores $\tilde{\Delta}_j$. Tomamos una función $\tilde{\omega}_j$ idénticamente igual a 1 en $\tilde{\Delta}_j$ y soportada en un sector ligeramente más ancho. Entonces, definimos el operador \tilde{S}_j como

$$(\tilde{S}_j f)^\wedge = \tilde{\omega}_j \hat{f},$$

y consideramos la función cuadrado asociada, \tilde{S} .

Esta demostración sigue unas ideas debidas a M. Christ, que se pueden encontrar en [7]. Comenzamos considerando el operador $N_{h,j,\theta} f(x)$, definido en la

demostración del Lema 3.1.3 (véase la ecuación (3.4)). Al igual que hicimos allí, separamos $(N_{h,j,\theta})^\wedge$ en tres trozos, dados por la ecuación (3.5).

Vimos que

$$(3.8) \quad \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} (I_{h,j,\theta}(f) + II_{h,j,\theta}(f)) \leq CM_{\Omega_0} f.$$

Necesitamos estimar el tercer trozo, $III_{h,j,\theta}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el conjunto Ω es finito. Entonces, existe una mínima constante $C(\Omega)$, tal que

$$\left\| \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(f)| \right\|_p \leq C(\Omega) \|f\|_p.$$

Tomamos una sucesión de funciones, $\{g_j\}$. Por (3.5) y (3.8),

$$\begin{aligned} & \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(g_j)| \leq \\ & \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |N_{h,j,\theta}(g_j)| + \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |I_{h,j,\theta}(g_j) + II_{h,j,\theta}(g_j)| \leq \\ & \leq \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} \left| N_{h,j,\theta}(\sup_j |g_j|) \right| + CM_{\Omega_0} \left(\sup_{j \geq 1} |g_j| \right) \leq \\ & \leq \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} \left| III_{h,j,\theta}(\sup_{j \geq 1} |g_j|) \right| + 2C M_{\Omega_0} \left(\sup_{j \geq 1} |g_j| \right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\left\| \sup_{h>0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(g_j)| \right\|_p \leq (C(\Omega) + 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p}) \left\| \sup_{j \geq 1} |g_j| \right\|_p.$$

Por otro lado, se tiene trivialmente que

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\sum_{j \geq 1} \sup_{h>0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(g_j)|^p \right)^{1/p} \right\|_p \leq \\ & \left(\sup_{j \geq 1} \left\| \sup_{h>0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}| \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \left\| \left(\sum_{j \geq 1} |g_j|^p \right)^{1/p} \right\|_p. \end{aligned}$$

Interpolando (con $\phi = \frac{p}{2}$),

$$(3.9) \quad \left\| \left(\sum_{j \geq 1} \sup_{h>0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(g_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq$$

$$(C(\Omega) + 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p})^{1-\phi} \left(\sup_{j \geq 1} \left\| \sup_{h, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}| \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \right)^\phi \left\| \left(\sum_{j \geq 1} |g_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Ahora,

$$\left\| \sup_{h > 0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(f)| \right\|_p \leq \left\| \sup_{h > 0, j \geq 1, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(I - \tilde{S}_j)(f)| \right\|_p + \left\| \left(\sum_{j \geq 1} \sup_{h > 0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}(\tilde{S}_j f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

El primer término de la última expresión es cero, por definición de $III_{h,j,\theta}$ y \tilde{S}_j . Por (3.9), el segundo término está acotado por

$$(C(\Omega) + 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p})^{1-\phi} \left(\sup_{j \geq 1} \left\| \sup_{h > 0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}| \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \right)^\phi \|\tilde{S}f\|_p.$$

Ahora usamos que $C(\Omega)$ es minimal, y por tanto

$$(3.10) \quad C(\Omega) \leq$$

$$(C(\Omega) + 2C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p})^{1-\phi} \left(\sup_{j \geq 1} \left\| \sup_{h > 0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}| \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \right)^\phi \|\tilde{S}\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

De la ecuación (3.10), deducimos la siguiente expresión para $C(\Omega)$

$$C(\Omega) \leq 2 \left[C \|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} + \left(\sup_{j \geq 1} \left\| \sup_{h, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}| \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|\tilde{S}\|_{L^p \rightarrow L^p}^{2/p} \right].$$

Obsérvese ahora que

$$III_{h,j,\theta} f \leq M(N_{h,j,\theta}((\tilde{\omega}_j)^\vee * f)),$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood. El teorema de Hardy-Littlewood (1.1.2) y la acotación uniforme de la norma L^1 de los $(\tilde{\omega}_j)^\vee$ implican que

$$\sup_{j \geq 1} \left\| \sup_{h > 0, \theta \in \Omega_j} |III_{h,j,\theta}| \right\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_p \sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p},$$

lo que demuestra el Teorema 3.1.2. □

3.2 Aplicaciones

La primera aplicación de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2 será una generalización del Teorema 1.5.4. Mostraremos que podemos introducir nuevas direcciones Ω_j entre cada dos separadores lagunares consecutivos, de modo que el operador obtenido siga estando acotado.

Teorema 3.2.1 *Sea Ω_0 una sucesión lagunar. Con las mismas hipótesis del Teorema 3.1.1, se tiene que*

$$(3.11) \quad \|M_{\Omega}f\|_p \leq C_p \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

El Teorema 3.2.1 también generaliza el resultado de Sjögren y Sjölin [33] que mencionamos en la sección 2.4 y en el que cada Ω_j es un conjunto lagunar. Nuestro teorema, en cambio, no depende de la estructura concreta de los Ω_j , y muestra que, cuando el conjunto de separadores es lagunar, sí se obtiene la acotación de la norma de un supremo por el supremo de las normas.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\frac{1}{2} < \lambda < 1$. También supondremos que existe un $0 < \lambda_0 < \lambda$ tal que $\theta_{j+1} \geq \lambda_0 \theta_j$ para todo j . De hecho, podemos tomar $\lambda_0 = \lambda^2$, y añadir términos adicionales a nuestra sucesión de partida, de forma que esto se cumpla. Obviamente, el operador maximal asociado a la nueva sucesión es mayor o igual que el operador maximal de la sucesión original. Necesitamos esta cota inferior λ_0 para asegurarnos de que para todo $j \geq 1$, los sectores $\widetilde{\Delta}_j$ y $\widetilde{\Delta}_{j+2}$ tienen intersección vacía.

Para obtener (3.11), aplicamos los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2. En nuestro caso, por el Teorema 1.5.4, $\|M_{\Omega_0}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_p$, de modo que

$$\|M_{\Omega}f\|_p \leq C_p \|f\|_p + C_p \left(\sup_j \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|Sf\|_p, \quad \text{si } 2 \leq p < \infty,$$

y

$$\|M_{\Omega}f\|_p \leq C_p \|f\|_p + C_p \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \right) \|S\|_{L^p \rightarrow L^p}^{2/p} \|f\|_p, \quad \text{si } 1 < p < 2.$$

El multiplicador

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pm \omega_j(\xi)$$

está acotado en L^p , $1 < p < \infty$, para todas las posibles elecciones de signos. Por un argumento bien conocido que utiliza las funciones de Rademacher, (ver por ejemplo [34]), obtenemos

$$\|Sf\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

lo que demuestra (3.11). □

El Teorema 3.2.1, a su vez, tiene la siguiente aplicación.

Sea $\Omega_0 = \{\theta_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión lagunar. Para cada j , tomemos una familia Ω_j de N direcciones $\{\alpha_{j,k}\}_{k=1,\dots,N} \subset [\theta_j, \theta_{j-1})$. Definamos los operadores maximales M_{Ω_j} como de costumbre,

$$M_{\Omega_j} f(x, y) = \sup_{h>0} \sup_{k=1,\dots,N} \left| \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x - t \cos \alpha_{j,k}, y - t \sin \alpha_{j,k}) dt \right|,$$

y

$$M_{\Omega} f(x, y) = \sup_{j \geq 1} M_{\Omega_j} f(x, y).$$

Por el Teorema de Katz [27],

$$\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \log N.$$

También tenemos la cota trivial

$$\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^1 \rightarrow L^{1,\infty}} \leq CN.$$

Interpolando, si $1 < p \leq 2$, se tiene que

$$\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_p N^{\frac{2}{p}-1} (\log N)^{2-\frac{2}{p}}.$$

Ahora usamos (3.11), obteniendo

$$\|M_{\Omega} f\|_p \leq C_p N^{\frac{2}{p}-1} (\log N)^{2-\frac{2}{p}} \|f\|_p, \quad 1 < p \leq 2.$$

Nótese que en este caso, aunque Ω es un conjunto infinito, continuamos teniendo la misma cota que para cada Ω_j , de N elementos.

Presentemos ahora otras consecuencias del Teorema 3.1.1.

Teorema 3.2.2 *Sea Ω_0 un conjunto de N direcciones uniformemente distribuidas. Supongamos que $(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2}) < \infty$. Entonces,*

$$\|M_{\Omega} f\|_2 \leq \left[C_1 \log N + C_2 \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \right) \right] \|f\|_2,$$

para ciertas constantes universales C_1, C_2 .

Demostración. Es una fácil consecuencia del Teorema 3.1.1. Por el resultado de Strömberg [38],

$$\|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \log N.$$

Además, en este caso $\|Sf\|_2 \sim \|f\|_2$ por Plancherel. □

Observación. Se puede obtener un resultado similar para otros valores de $p \neq 2$. En particular, si $2 \leq p \leq 4$, podemos usar la cota hallada por Córdoba (véase [12]) para la función cuadrado asociada a estas direcciones. Por simplicidad, aquí nos hemos limitado al caso $p = 2$.

Ahora pasaremos a estudiar conjuntos Ω_0 más generales. Para ello, necesitaremos algunas definiciones. Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}$, decimos que un conjunto de intervalos $\{I_\beta\}$ es una descomposición de Whitney para U (con constante C) si

- (i) $I_\beta \subset U$, para todo β .
- (ii) $\bigcup I_\beta = U$.
- (iii) $\frac{1}{C}|I_\beta| \leq d(I_\beta, \partial U) \leq C|I_\beta|$.

Diremos que un conjunto S de cardinal finito N es de tipo Whitney con constantes (C_1, C_2) si para todo $s \in S$ existe una descomposición de Whitney $\{I_\beta^s\}$ de $\{s\}^c$ (con constante C_1) tal que a lo sumo $C_2(\log N)^2$ de los intervalos I_β^s tienen intersección no vacía con S . Este tipo de conjuntos fue introducido por Katz en [26].

Teorema 3.2.3 *Supongamos que Ω_0 es un conjunto de tipo Whitney de cardinal $N > 1$. Entonces,*

$$\|M_{\Omega} f\|_2 \leq C \log N \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \right) \|f\|_2.$$

Demostración. Puesto que Ω_0 tiene N elementos, $\|M_{\Omega_0}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \log N$, por el Teorema de Katz [27]. Para poder aplicar el Teorema 3.1.1, necesitamos encontrar una cota adecuada para la función cuadrado que aparece en (3.1). Vamos a demostrar que, para toda ξ ,

$$\sum_j \omega_j(\xi) \leq C(\log N)^2.$$

Esta estimación, junto con el teorema de Plancherel, probará el Teorema 3.2.3.

Dado $\theta_k \in \Omega_0 \cup \theta_0$, sea $\xi_k = (\cos \theta_k, \sin \theta_k)$. Nótese que si $\theta_{k-1} > \theta \geq \theta_k$ y $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$, entonces

$$\sum_j \omega_j(\xi) \leq \sum_j \omega_j(\xi_{k-1}) + \sum_j \omega_j(\xi_k),$$

por lo que basta demostrar $\sum_j \omega_j(\xi_k) \leq C(\log N)^2$ para toda $k = 1, \dots, N$.

Fijemos k , y consideremos la descomposición de Whitney $\{I_\beta^k\}$ de $\{\theta_k\}^c$, que existe por definición de conjunto de tipo Whitney. Demostraremos que para cualquier β fijo,

$$(3.12) \quad \sum_{j: \theta_j \in I_\beta^k} \omega_j(\xi_k) \leq C,$$

lo que a su vez implica que

$$\sum_j \omega_j(\xi_k) = 1 + \sum_\beta \sum_{j: \theta_j \in I_\beta^k} \omega_j(\xi_k) = 1 + C(\log N)^2.$$

Demostremos (3.12). Se observa que la anchura del soporte de ω_j es menor o igual que $\frac{3}{2}(\theta_{j-1} - \theta_j)$. Por tanto, si

$$(\theta_{j-1} - \theta_j) \leq \frac{2}{3} \min(|\theta_k - \theta_j|, |\theta_k - \theta_{j-1}|),$$

entonces $\omega_j(\theta_k) = 0$. Por otro lado, si se cumple la desigualdad contraria, entonces

$$(\theta_{j-1} - \theta_j) > \frac{2}{3} \min(|\theta_k - \theta_j|, |\theta_k - \theta_{j-1}|) \geq \frac{2}{3C_1} |I_\beta^k|.$$

Ahora, dado que los intervalos $[\theta_j, \theta_{j-1})$ son disjuntos dos a dos, hay a lo sumo $[\frac{3C_1}{2}] + 1$ de tales $\theta_j \in I_\beta^k$, lo que demuestra (3.12). Esto acaba la demostración del Teorema 3.2.3.

□

Veamos, finalmente, un resultado inspirado en el trabajo de Barrionuevo [5].

Teorema 3.2.4 *Existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo Ω_0 con $\sharp(\Omega_0) = N$, se tiene*

$$(3.13) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_0 \left(\sup_{j \geq 1} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \right) N^{\frac{C_0}{\sqrt{\log N}}}.$$

Demostración. Por inducción sobre N . Si tomamos C_0 bastante grande, (3.13) se cumple para los N pequeños.

Dado ϵ pequeño, que determinaremos más adelante, diremos que $\theta_l \in \Omega_0$ es ‘malo’ si

$$\sum_j \omega_j(\theta_l) \geq N^\epsilon,$$

es decir, si el solapamiento de las funciones ω_j en θ_l es grande.

Fijo un θ_l malo, consideremos los índices $j(1) < j(2) < \dots < j(k) < \dots < l$, tales que $\omega_{j(k)}(\theta_l) \neq 0$. Esto quiere decir que

$$\theta_l \in \left[\theta_{j(k)} - \frac{\delta_{j(k)}}{20}, \theta_{j(k)-1} + \frac{\delta_{j(k)}}{20} \right].$$

Los $\theta_{j(k)}$ forman una sucesión lagunar que tiende a θ_l . En efecto,

$$|\theta_l - \theta_{j(k)}| < \frac{1}{20} |\theta_{j(k)} - \theta_{j(k)-1}| < \frac{1}{20} |\theta_{j(k)} - \theta_{j(k-1)}|,$$

y, puesto que $j(k) < l$ para todo k , esto implica que

$$|\theta_{j(k)} - \theta_{j(k-1)}| \leq |\theta_l - \theta_{j(k-1)}| \leq \frac{1}{20} |\theta_{j(k-1)} - \theta_{j(k-2)}|.$$

Definimos los conjuntos

$$G_-(\theta_l) = \{j < l : \omega_j(\theta_l) \neq 0\},$$

$$G_+(\theta_l) = \{j > l : \omega_j(\theta_l) \neq 0\}.$$

Entonces, si θ_l es malo, $\sharp(G_-(\theta_l) \cup G_+(\theta_l)) \geq N^\epsilon$. Sea $\eta_1^- = \theta_{l(1)}$, donde

$$l(1) = \min\{k : \sharp(G_-(\theta_k)) \geq N^\epsilon\}.$$

Sea también $\eta_2^- = \theta_{l(2)}$, donde

$$l(2) = \min\{k : \theta_k \notin G_-(\eta_1^-) \text{ y } \sharp[G_-(\theta_k) \setminus G(\eta_1^-)] \geq N^\epsilon\}.$$

Definimos η_k por inducción. Para cada k , el conjunto $G_-(\eta_k^-)$ es una sucesión lagunar. De modo análogo se definen los η_k^+ , asociados a los conjuntos G_+ . El conjunto $\{\eta_k^+, \eta_k^- : k \geq 1\}$ tiene como mucho $2N^{1-\epsilon}$ elementos. Por el Teorema 3.2.1 se tiene que, para todo k ,

$$(3.14) \quad \left\| \sup_{j \in G_{\pm}(\eta_k^{\pm})} M_{\Omega_j} \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C' \sup_{j \in G_{\pm}(\eta_k^{\pm})} \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

Ahora invocamos la hipótesis de inducción sobre el cardinal del conjunto de separadores, tomando, en lugar de Ω_0 , el conjunto $\{\eta_k^{\pm}\}_k$ que, como hemos señalado, tiene a lo sumo $2N^{1-\epsilon}$ elementos. Por consiguiente,

$$(3.15) \quad \left\| \sup_k \sup_{j \in G_{\pm}(\eta_k^{\pm})} M_{\Omega_j} \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_0 C' \sup \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2} (N^{1-\epsilon})^{\epsilon}.$$

Sea $G = (\cup_k G_-(\eta_k^-)) \cup (\cup_k G_+(\eta_k^+))$. Entonces $\sum_{j \notin G} \omega_j(\theta) < N^{\epsilon}$ para todo θ . Por el Lema 3.1.3, y argumentando como en la demostración del Teorema 3.2.3, se obtiene que

$$(3.16) \quad \left\| \sup_{l \notin G} M_{\Omega_l} \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C'' N^{\epsilon} \sup \|M_{\Omega_l}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

Combinando (3.15) y (3.16), llegamos a

$$\left\| \sup_j M_{\Omega_j} \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq (C_0 C' (N^{1-\epsilon})^{\epsilon} + C'' N^{\epsilon}) \sup \|M_{\Omega_j}\|_{L^2 \rightarrow L^2}.$$

Eligiendo ahora $\epsilon = \frac{C_0}{\sqrt{\log N}}$, obtenemos que $C_0 C' N^{-\epsilon^2} + C'' \leq C_0$, para una constante C_0 que depende de C', C'' . Así (3.13) queda demostrado. □

Capítulo 4

Problemas relacionados

En este capítulo presentamos nuevas aplicaciones de los principios de casi-ortogonalidad. Comenzaremos con una fácil observación: la acotación del operador maximal es invariante por dilataciones del conjunto de direcciones. Por tanto, si Ω contiene sucesiones equidistribuidas de longitud arbitraria, aunque estén contenidas en intervalos muy pequeños, el operador maximal M_Ω no estará acotado.

El resultado principal de la primera sección es un principio de comparación entre familias de direcciones Φ y Ψ , que se obtiene como consecuencia de los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2. Si los elementos de las dos familias se entrelazan de modo adecuado, la acotación de M_Φ y M_Ψ es equivalente. El principio de comparación nos permite dar una nueva prueba de un resultado debido a Arutyunyan [4]. También lo usaremos para demostrar que el operador maximal asociado a las direcciones $\{2^k 3^j\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ no está acotado en L^p , $p < \infty$.

En la segunda sección, extendemos el resultado de Hare (Teorema 1.6.5) a conjuntos regulares Ahlfors-David, más generales que los conjuntos de Cantor.

A partir de ahora, Ω será un conjunto de pendientes, en lugar de un conjunto de vectores de S^1 , como en los capítulos anteriores.

4.1 Un principio de comparación

Iniciamos la sección con una proposición sencilla, que nos será de utilidad más adelante.

Proposición 4.1.1 *Sea $\Omega \subset [0, 1]$ un conjunto de direcciones. Para un $\lambda > 0$,*

sea $\lambda\Omega = \{\lambda\theta : \theta \in \Omega\}$. Definimos el operador maximal mediante

$$M_\Omega f(x, y) = \sup_{\theta \in \Omega} \left| \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x-t, y-\theta t) dt \right|.$$

Entonces,

$$(4.1) \quad \|M_\Omega\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \|M_{\lambda\Omega}\|_{L^2 \rightarrow L^2}$$

Demostración. Si definimos $f^\lambda(x, y) = f(x, \lambda y)$, es fácil ver que $M_{\lambda\Omega}(f(x, y)) = M_\Omega(f^\lambda(x, \frac{y}{\lambda}))$, de donde se obtiene (4.1). □

Veamos ahora un principio de comparación entre operadores maximales asociados a direcciones entrelazadas. Consideremos las dos familias de direcciones, $\Phi = \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset [0, 1]$ y $\Psi = \{\psi_\beta\}_{\beta \in B} \subset [0, 1]$. Supongamos que Φ está entrelazada con Ψ del modo siguiente: para todo $\alpha \in A$, existen $\beta_1, \beta_2 \in B$, con $\psi_{\beta_1} < \phi_\alpha < \psi_{\beta_2}$. Además, $|\{\alpha \in A : \psi_{\beta_1} < \phi_\alpha < \psi_{\beta_2}\}| \leq C$, donde C es una constante independiente de β_1, β_2 .

Proposición 4.1.2 *En las condiciones anteriores, si el maximal M_Ψ está acotado en L^2 , también lo está M_Φ .*

Demostración. Sea $\Theta = \Phi \cup \Psi$. Claramente, $M_\Phi \leq M_\Theta$. Por el principio de casi-ortogonalidad (2.3), tomando Ψ como el conjunto de separadores Ω_0 , se tiene

$$\|M_\Theta\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_\Psi\|_{L^2 \rightarrow L^2},$$

pues el cardinal de los conjuntos intermedios está uniformemente acotado. Por tanto, $\|M_\Phi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_\Psi\|_{L^2 \rightarrow L^2}$. □

Como aplicación de esta proposición, daremos una nueva prueba de un resultado de Arutyunants [4].

Sea C un conjunto de Cantor centrado, y sea I un intervalo del paso N de la construcción de C . Al único intervalo J del paso $N-1$ que contiene a I llamaremos el *padre* de I . Denotaremos por r_N , la razón de disección del paso N , al cociente $|I|/|J|$.

Teorema 4.1.3 *Sea C un conjunto de Cantor centrado cuyas razones de disección r_N tienden a $1/2$ cuando N tiende a ∞ . Entonces, M_{B_C} no está acotado en L^p , $1 < p < \infty$, ni es base de densidad.*

Observación:

La demostración de Arutyunyan consiste en encontrar una sucesión $\{\omega_j\} \subset C$, tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} = 1$. A esta sucesión le aplica un lema de Stokolos [36] en el que prueba que se puede construir un árbol de Perron asociado a sucesiones que cumplen dicha condición.

Nosotros probaremos que, si las razones de disección de un conjunto de Cantor centrado C tienden a $1/2$, existe una sucesión $\Theta = \{\theta_j\} \subset C$, de longitud tan larga como queramos, que está entrelazada con una sucesión equidistribuida. Esto nos permitirá aplicar el principio de comparación 4.1.2 para demostrar que M_C no está acotado en L^2 (véase la observación 1 de la sección 1.5).

Demostración. Dado un intervalo I_N del paso N de la construcción de C , llamemos I_N^1 e I_N^2 a sus hijos, y sea h_N la distancia entre I_N^1 e I_N^2 . Si la razón de disección $\frac{|I_N^1|}{|I_N|}, \frac{|I_N^2|}{|I_N|}$ tiende a $\frac{1}{2}$ cuando N tiende a infinito, entonces $\frac{h_N}{|I_N|}$ tiende a 0. Dado $K > 0$, tomemos un intervalo I_0 de paso N_0 , con N_0 suficientemente grande para que $\frac{h_N}{|I_N|} < 2^{-K}$ para todo $N \geq N_0$. Elegimos como la subsucesión $\{\theta_j\}$ los extremos derechos de los subintervalos de I_0 de paso N , con $N = N_0 + 1, \dots, N_0 + K - 2$ (reordenados de menor a mayor). Para esta sucesión se tiene que

$$2^{-K}|I_0| \leq |\theta_j - \theta_{j-1}| \leq 2^{-K+2}|I_0|.$$

Por tanto, existe una sucesión equidistribuida A_K con 2^K elementos, entrelazada con $\{\theta_j\}$ como en la proposición 4.1.2. Aplicando el principio de comparación, se tiene

$$C(K-2) = \|M_{A_K}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_\Theta\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \|M_C\|_{L^2 \rightarrow L^2},$$

para todo K , lo que implica que el operador maximal sobre el conjunto de Cantor no está acotado en L^2 . Para el caso general, $p \neq 2$, la construcción del árbol de Perron del Teorema 1.4.2 demuestra el resultado.

□

Consideremos ahora el conjunto $\Omega = \{2^{-l}3^{-k} : l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, y el operador maximal asociado

$$M_\Omega f(x, y) = \sup_{\theta \in \Omega} \left| \sup_{h > 0} \int_{-h}^h f(x-t, y-\theta t) dt \right|.$$

Vamos a demostrar que este operador no está acotado en L^p .

Tomamos la sucesión lagunar $\{3^{-k}\}_{k \geq 0} \subset \Omega$ como conjunto de referencia Ω_0 . Definimos los conjuntos de direcciones Ω_j , consistentes en los elementos de Ω tales que

$$(4.2) \quad \frac{1}{3^{j+1}} \leq \frac{1}{2^l 3^k} < \frac{1}{3^j}.$$

De la desigualdad (4.2) se deduce que $k \leq j$. Fijamos j . Para cada k , hay solamente uno o dos valores de l tales que $2^{-l}3^{-k}$ pertenece a Ω_j . Elegimos el primero de estos l , llamándolo $l(k)$, y nos quedamos sólo con el subconjunto de Ω definido por $\{2^{-l(k)}3^{-k}\}$. Si demostramos que el operador maximal asociado a este nuevo conjunto no está acotado, tampoco lo estará M_Ω .

Dado j , consideremos el conjunto $3^j \Omega_j$. Por la Proposición 4.1.1, la acotación de M_{Ω_j} y de $M_{3^j \Omega_j}$ es equivalente. Pero $3^j \Omega_j = \{\frac{3^t}{2^{l(t)}} : 0 \leq t \leq j\}$ y, observando que $l(t) = [t \log_2 3] + 1$, se tiene que

$$\frac{3^t}{2^{l(t)}} = 2^{t \log_2 3 - [t \log_2 3] - 1}.$$

Al ser $\log_2 3$ irracional, el conjunto $\{t \log_2 3 - [t \log_2 3] - 1\}_{t \geq 0}$ es denso en $[-1, 0]$. Por tanto, para todo $K \in \mathbb{N}$, existe un j suficiente grande tal que $3^j \Omega_j$ contiene una sucesión de longitud K comparable con una equidistribuida. Esto demuestra que Ω no es base de densidad y que M_Ω no está acotado en L^p , $p < \infty$.

Este resultado responde a una pregunta reciente de S. Wainger. Después de obtenerlo, hemos descubierto que el problema está también tratado en un artículo de Hare y Klemes [22].

4.2 Resultados para conjuntos regulares Ahlfors-David

En esta sección demostraremos que los argumentos de Katz [25] y Hare [21] se pueden aplicar a conjuntos más generales que los de Cantor, extendiendo así los Teoremas 1.6.4 y 1.6.5.

Definición: Se dice que un conjunto compacto y no vacío E , con dimensión de Hausdorff s , es *regular Ahlfors-David* si para todo $x \in E$, $0 < r \leq \text{diam}(E)$, existen constantes a y b , tales que

$$(4.3) \quad 0 < ar^s \leq \mathcal{H}^s(E \cap B(x, r)) \leq br^s < \infty.$$

Teorema 4.2.1 *Sea $E \subset [0, 1]$ un conjunto regular Ahlfors-David. Entonces, el operador maximal M_E no está acotado en L^2 , ni es de tipo débil $(2, 2)$.*

Demostración. Vamos a probar que E contiene una colección de puntos distribuidos de modo similar a los extremos de los intervalos que aparecen en la construcción de un conjunto de Cantor.

Por la Proposición 4.1.1, podemos suponer que $\text{diam}(E) = 1$. Sea $D_1 = (\frac{a}{b})^{1/s}$, y fijemos un punto $x_0 \in E$. Entonces, existe $x_1 \in E$ a distancia al menos D_1 de x_0 , pues de no ser así contradiríamos (4.3). En efecto, si $E \subset B(x_0, t)$, se tiene

$$a < \mathcal{H}^s(E \cap B(x_0, 1)) = \mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \cap B(x_0, t)) \leq bt^s,$$

de donde t debe ser mayor o igual que D_1 . Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 < x_1$, y denotaremos $A_1 = \{x_0, x_1\}$.

Sean $I_0 = [x_0 - \frac{D_1}{4}, x_0 + \frac{D_1}{4}]$, $I_1 = [x_1 - \frac{D_1}{4}, x_1 + \frac{D_1}{4}]$, $E_0 = E \cap I_0$, $E_1 = E \cap I_1$.

Para E_0 se tiene

$$\mathcal{H}^s(E_0) = \mathcal{H}^s\left(E \cap B(x_0, \frac{D_1}{4})\right) > a \left(\frac{D_1}{4}\right)^s.$$

Y, por otra parte, si $E_0 \subset B(x_0, t)$,

$$\mathcal{H}^s(E_0) \leq bt^s.$$

Por tanto, se debe tener $t \geq (\frac{a}{b})^{1/s} \frac{D_1}{4} = \frac{1}{4} (\frac{a}{b})^{2/s} = D_2$. Esto implica la existencia de un punto $z_0 \in E_0$ cuya distancia a x_0 es mayor o igual que D_2 y menor o igual que $\frac{D_1}{4}$. Llamemos x_{00} al menor de los puntos $\{x_0, z_0\}$, y x_{01} al mayor. Como antes, definimos $I_{00} = [x_{00} - \frac{D_2}{4}, x_{00} + \frac{D_2}{4}]$, $I_{01} = [x_{01} - \frac{D_2}{4}, x_{01} + \frac{D_2}{4}]$, $E_{00} = E \cap I_{00}$ y $E_{01} = E \cap I_{01}$. De modo análogo se comprueba que E_1 contiene dos puntos x_{10} , x_{11} , que distan por lo menos D_2 el uno del otro, y se contruyen los dos intervalos correspondientes I_{10} , I_{11} , y los conjuntos E_{10} , E_{11} . Denotaremos $A_2 = \{x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}\}$. El proceso continúa del mismo modo.

Sea W el conjunto de palabras binarias de longitud finita,

$$W = \{w_1 w_2 \cdots w_n : w_i \in \{0, 1\} n \in \mathbb{N}\} \cup e,$$

donde e es la palabra vacía. Dadas w y $w' \in W$, la palabra ww' denotará su concatenación. Llamaremos W_m al subconjunto de W formado por las palabras de longitud m .

Fijemos un N suficientemente grande y consideremos el conjunto $A_N = \{x_w\}_{w \in W_N}$. Dados $x_w, x_{w'} \in A_N$, si $m + 1$ es el primer dígito en que difieren w y w' , entonces

$$\frac{D_{m+1}}{3} \leq |x_w - x_{w'}| \leq \frac{D_m}{4},$$

con $D_m = \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{m/s}$, si $m \geq 1$ y $D_0 = 2$.

Ahora, siguiendo las ideas de Hare [21], definiremos una partición del intervalo $[0, 1)$. Comenzamos dividiendo el intervalo $[0, 1/2)$ en subintervalos disjuntos, cada uno de los cuales tiene longitud comprendida entre $D_1/2$ y D_1 . Denotaremos por J_0 a esta familia de intervalos. Asimismo, dividimos el intervalo $[1/2, 1)$ en subintervalos disjuntos, de longitud entre $D_1/2$ y D_1 . Estos intervalos forman la familia J_1 . Los elementos de J_0 y J_1 son los intervalos del paso 1, y su unión es el intervalo $[0, 1)$.

Supongamos que tenemos escrito el intervalo $[0, 1)$ como la unión de los intervalos del paso $m - 1$, cuyas longitudes están comprendidas entre $D_{m-1}/2$ y D_{m-1} . Para cada uno de los intervalos de la familia J_w , (donde w es una palabra binaria de longitud $m - 1$), dividimos su mitad izquierda en subintervalos de longitud entre $D_m/2$ y D_m . Es posible hacer dicha partición porque $\frac{D_m}{D_{m-1}} \leq \frac{1}{4}$. Del mismo modo, dividimos la mitad derecha en subintervalos de longitud entre $D_m/2$ y D_m . La colección de los subintervalos provenientes de la mitad izquierda de un elemento de J_w constituirá la familia J_{w0} , y los de la mitad derecha formarán la familia J_{w1} (véase la figura 7).

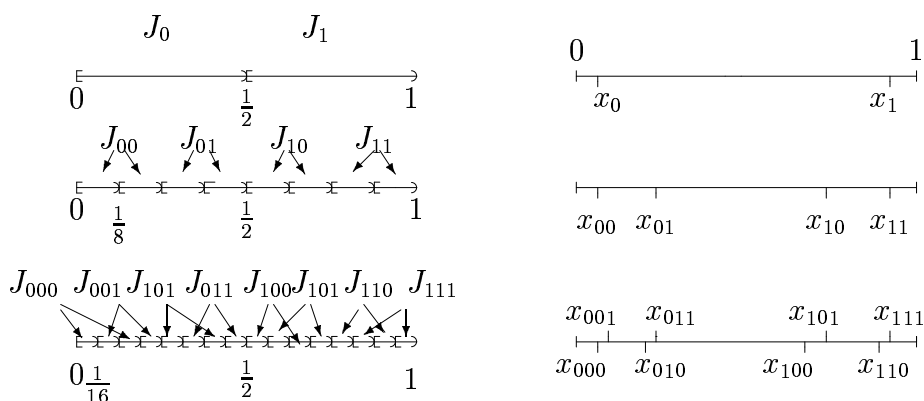


Figura 7

Definimos la función $s : [0, 1) \rightarrow A_N$ del modo siguiente: si $x \in [0, 1)$ pertenece a un intervalo de la familia J_w , con $w \in W_N$, entonces $s(x) = x_w$.

Sea $q_N = \left\lceil \left(\frac{D_N}{2}\right)^{-1} \right\rceil$. Para cada $j = 0, 1, \dots, q_N - 1$, definimos $s(j) = s(j\frac{D_N}{2})$. Además, diremos que $(j, k) \in [\text{Paso } m]$ si $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ pertenecen a un mismo intervalo del paso m , pero a distinto intervalo del paso $m + 1$.

Para cada $j = 0, 1, \dots, q_N - 1$, sea $Q(j)$ el cubo $[0, \frac{D_N}{2}] \times [\frac{jD_N}{2}, \frac{(j+1)D_N}{2}]$. Sea R_j el rectángulo de dimensiones $60 \left(\frac{a}{b}\right)^{-1/s} \times \left(\frac{D_N}{8}\right)$, centrado en el centro de $Q(j)$ y con pendiente $s(j)$. Definimos la función f siguiente,

$$f = \sum_{j=1}^{q_N-1} \chi_{R_j}.$$

Consideramos también el operador maximal

$$M_N g(x) = \sup_{x \in R_j} \frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} |g|,$$

que está claramente mayorado por M_E , puesto que $s(j) \in E$ para todo j .

Las estimaciones fundamentales asociadas a nuestra construcción se resumen en los siguientes tres lemas (véase [25] y [21]).

Lema 4.2.2 *Existe una constante $C > 0$, independiente de N , tal que*

$$\int f^2 \leq CN.$$

Lema 4.2.3 *Existe una constante $c > 0$, independiente de N , tal que para todo j , $1 \leq j \leq q_N - 1$,*

$$\frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f \geq cN.$$

Además, para el conjunto donde está soportada f se tiene

Lema 4.2.4 *Existe una constante $c > 0$, independiente de N , tal que*

$$|\cup R_j| \geq c \frac{\log N}{N}.$$

Combinando estos tres lemas, se demuestra el Teorema 4.2.1. El Lema 4.2.3 implica que, para casi todo punto de $\cup R_j$,

$$M_N f \geq cN.$$

Por el Lema 4.2.4,

$$\int_{\cup R_j} (M_N f)^2 \geq c(\log N)N \geq c(\log N) \int f^2.$$

La última desigualdad es consecuencia del Lema 4.2.2. Esto prueba que M_E no es de tipo fuerte $(2, 2)$. Además, se tiene que

$$N^2 |\{x : M_E f(x) \geq cN\}| \geq CN \log N \geq C \log N \|f\|_2^2,$$

por lo que M_E no es de tipo débil $(2, 2)$. □

Demostración del Lema 4.2.2. Consideremos el operador L definido por

$$Lg(x) = \sum_{k=0}^{q_N-1} \chi_{Q(k)} \left(\frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} g \right).$$

En [10], Córdoba prueba que L está acotado en L^2 , con norma menor o igual que $C \frac{\sqrt{\log q_N}}{\sqrt{q_N}}$.

Sea $S = \cup_k Q(k)$. Se tiene

$$\|\chi_S\|_2 \leq C \frac{1}{\sqrt{q_N}},$$

y, por tanto,

$$\|L^* \chi_S\|_2 \leq C \frac{\sqrt{\log q_N}}{q_N}.$$

Pero

$$L^* \chi_S = \frac{C}{q_N} \sum_{k=0}^{q_N-1} \chi_{R_k} = \frac{C}{q_N} f,$$

de donde $\|f\|_2^2 \leq C \log q_N$. Es fácil comprobar que $\log q_N = O(N)$. □

Demostración del Lema 4.2.3.

Fijemos j . Por definición de f ,

$$\frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f = cq_N \sum_{k=1}^{q_N-1} |R_j \cap R_k|.$$

Fijo j , se comprueba fácilmente que si $|s(j) - s(k)| \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{1/s} \frac{|j-k|D_N}{24}$, entonces

$$(4.4) \quad |R_j \cap R_k| \geq C \frac{D_N^2}{|s(j) - s(k)|}.$$

Sea $m < N$, y supongamos que $(j, k) \in [\text{Paso } m]$, es decir, $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ pertenecen a un mismo intervalo del paso m de la partición de $[0, 1)$. Entonces

$$|j - k| \frac{D_N}{2} \leq D_m$$

y

$$(4.5) \quad |s(j) - s(k)| \leq \frac{D_m}{4}.$$

Si además $\frac{jD_N}{2}$ está en la mitad izquierda del intervalo y $\frac{kD_N}{2}$ en la mitad derecha (o viceversa), entonces $|s(j) - s(k)| \geq \frac{D_{m+1}}{3}$. Por tanto, para estos k ,

$$(4.6) \quad |s(j) - s(k)| \geq \frac{D_{m+1}}{3} = \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b}\right)^{1/s} D_m \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{1/s} |j - k| \frac{D_N}{24}.$$

Hay al menos $[D_m q_N / 4]$ enteros k con esta propiedad. Por tanto, combinando (4.4), (4.5) y (4.6),

$$Cq_N \sum_{k=1}^{q_N-1} |R_j \cap R_k| \geq cq_N \sum_{m=1}^{N-1} \frac{[D_m q_N / 4] D_N^2}{D_m} \geq CN,$$

lo que demuestra el Lema 4.2.3. □

Para probar el Lema 4.2.4 necesitamos un resultado auxiliar.

Lema 4.2.5 *Dado $\lambda > 0$, sea $R_j^\lambda = \{(x, y) \in R_j : 1/\lambda \leq |x| \leq 2/\lambda\}$. Si λ es suficientemente grande, existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{j \neq k} |R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| \leq B \frac{N}{\lambda^2}.$$

Aquí B y λ dependen de a , b y s , pero no de N .

Demostración del Lema 4.2.5.

Al igual que antes, es fácil ver que $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda \neq \emptyset$ sólo si

$$(4.7) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{1/s} |j - k| D_N \leq \frac{C}{\lambda} |s(j) - s(k)|,$$

para una constante C adecuada. Además,

$$|R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| \leq \frac{BD_N^2}{|s(j) - s(k)|}.$$

Fijemos $m < N$ y consideremos el número de pares $(j, k) \in [\text{Paso } m]$, con $j \neq k$ y $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda \neq \emptyset$. Supongamos que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ pertenecen a un mismo intervalo de la familia J_w , para cierta palabra w de longitud m . En consecuencia, $|j - k| \frac{D_N}{2} \leq D_m$ y $|s(j) - s(k)| \leq \frac{D_m}{4}$. Ahora estudiaremos varios casos.

CASO 1: Supongamos que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ están en distintas mitades del intervalo del paso m que les contiene a ambos (es decir, $\frac{jD_N}{2}$ pertenece a un intervalo de la familia J_{w_0} y $\frac{kD_N}{2}$ a un intervalo de la familia J_{w_1} , o viceversa). Por (4.7),

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/s} |j - k| D_N \leq \frac{C}{\lambda} |s(j) - s(k)| \leq \frac{C}{\lambda} D_m,$$

de donde se deduce que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ están a distancia menor o igual que $\frac{C}{\lambda} D_m$ del centro del intervalo del paso m que contiene a ambos, y por tanto hay a lo sumo $(\frac{C}{\lambda} D_m q_N)^2$ pares de enteros (j, k) tales que $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda \neq \emptyset$. Además, en este caso

$$|s(j) - s(k)| \geq \frac{D_{m+1}}{3},$$

lo que implica que

$$|R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| \leq B \frac{D_N^2}{D_{m+1}}.$$

CASO 2: Supongamos ahora que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ están en la misma mitad del intervalo del paso m que les contiene. Por ejemplo, $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ pertenecen a intervalos (necesariamente distintos) de la familia J_{w_0} . En este caso $|s(j) - s(k)| \leq D_{m+1}/4$. Para que la intersección de los rectángulos $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda$ no sea vacía, necesitamos que se cumpla (4.7), que en este caso dice

$$(4.8) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{1/s} |j - k| D_N \leq \frac{C}{\lambda} D_{m+1}.$$

Esto significa que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ están a distancia menor o igual que $\frac{C}{\lambda}D_{m+1}$ del extremo de algún intervalo del paso $m+1$. Hay a lo sumo D_m/D_{m+1} intervalos, y por tanto $(\frac{C}{\lambda}D_{m+1}q_N)^2 D_m/D_{m+1}$ pares (j, k) con $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda \neq \emptyset$.

Si además se tuviera que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ pertenecen a intervalos de la familia J_{w00} , como ambos están contenidos en la mitad izquierda de intervalos distintos de J_{w0} , su distancia es al menos

$$(4.9) \quad |j - k| \frac{D_N}{2} \geq \frac{D_{m+1}}{4}.$$

Si tomamos $\lambda > C = C(a, b, s)$, es imposible que se cumplan simultáneamente (4.8) y (4.9), y la intersección $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda$ es vacía. Así que este último caso no puede darse, lo que nos asegura que $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ no pertenecen ambos a intervalos de la familia J_{w00} . Lo mismo sucede si suponemos que los dos pertenecen a intervalos de la familia J_{w01} . Por tanto,

$$|s(j) - s(k)| \geq D_{m+2}.$$

Hemos probado que hay a lo sumo $(\frac{C}{\lambda}D_{m+1}q_N)^2 D_m/D_{m+1}$ pares (j, k) con $R_j^\lambda \cap R_k^\lambda \neq \emptyset$, y que para ellos se tiene

$$|R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| \leq B \frac{D_N^2}{D_{m+2}}.$$

Si $\frac{jD_N}{2}$ y $\frac{kD_N}{2}$ pertenecen a intervalos (distintos) de la familia J_{w1} , se demuestra el mismo resultado.

Juntando los dos casos,

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq k} |R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| &\leq \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{(j,k) \in [\text{Paso } m]} |R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| \\ &\leq B D_N^2 \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{|w|=m} \left[\left(\frac{(\frac{C}{\lambda}D_m q_N)^2}{D_{m+1}} \right) + \left(\frac{(\frac{C}{\lambda}D_{m+1} q_N)^2 D_m / D_{m+1}}{D_{m+2}} \right) \right] \\ &\leq \frac{B}{\lambda^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{|w|=m} D_m, \end{aligned}$$

donde $\sum_{|w|=m}$ es la suma sobre todos los intervalos del paso m . Como la unión de estos intervalos es $[0, 1)$, son disjuntos, y su longitud está comprendida entre $D_m/2$

y D_m , el término $\sum_{|w|=m} D_m$ es menor o igual que 2, para todo m . Por tanto,

$$\sum_{j \neq k} |R_j^\lambda \cap R_k^\lambda| \leq \frac{BN}{\lambda^2}.$$

□

Demostración del Lema 4.2.4. Seguimos usando la notación del lema 4.2.5.

Sea

$$t_j(x) = \frac{\chi_{R_j}(x)}{\sum_{k=0}^{q_N-1} \chi_{R_k}(x)}, \quad \text{para } x \in \bigcup_k R_k.$$

Claramente, $\sum |R_j^\lambda| \leq B/\lambda$, y

$$\sum_j \int_{R_j^\lambda} t_j^{-1}(x) dx \leq \sum_{j,k} |R_j^\lambda \cap R_k^\lambda|.$$

Si nos limitamos al caso en que $\lambda \leq N$, y aplicamos el Lema 4.2.5, se tiene

$$\sum_j \int_{R_j^\lambda} t_j^{-1}(x) dx \leq B \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{N}{\lambda^2} \right) \leq \frac{BN}{\lambda^2}.$$

Por tanto, para al menos $\lfloor q_N/2 \rfloor$ valores de j , se debe tener

$$\int_{R_j^\lambda} t_j^{-1}(x) dx \leq \frac{2BN}{\lambda^2 q_N}.$$

Teniendo en cuenta que $|R_j^\lambda| \geq D_N/8\lambda$, la desigualdad de Hölder implica que, para esos valores de j ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|R_j^\lambda|} \int_{R_j^\lambda} t_j(x) dx &\geq \left(\frac{1}{|R_j^\lambda|} \int_{R_j^\lambda} t_j^{-1}(x) dx \right)^{-1} \\ &\geq \frac{D_N \lambda^2 q_N}{8\lambda BN} \geq \frac{\tilde{B}\lambda}{N}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_j \int_{R_j^\lambda} t_j(x) dx \geq \frac{\tilde{B}}{N}.$$

El Lema 4.2.5 sólo se puede aplicar si λ es grande, $\lambda \geq C$. Por ello, nos restringiremos a los λ pertenecientes al conjunto Λ ,

$$\Lambda = \left\{ 2^k C : k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{\log N/C}{\log 2} \right\rfloor \right\}.$$

Si j está fijo y λ_1, λ_2 pertenecen a Λ , con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, los conjuntos $R_j^{\lambda_1}$ y $R_j^{\lambda_2}$ son disjuntos, y

$$\left| \bigcup_j R_j \right| = \sum_j \int_{R_j} t_j(x) dx \geq \sum_j \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{R_j^\lambda} t_j(x) dx \geq \frac{\tilde{B} \log N}{N}.$$

□

Bibliografía

- [1] A. ALFONSECA, ‘Strong type inequalities and an almost-orthogonality principle for families of maximal operators along directions in \mathbb{R}^2 ’, *J. London Math. Soc.* 67 (2003) n.1, 208-218.
- [2] A. ALFONSECA, F. SORIA, A. VARGAS, ‘A remark on maximal operators along directions in \mathbb{R}^2 ’, *Math. Res. Let.* 10 (2003) n.1, 41-50.
- [3] A. ALFONSECA, F. SORIA, A. VARGAS, ‘An almost-orthogonality principle in L^2 for directional maximal functions’, aparecerá en los Proceedings of the Mt. Holyoke Conference, Contemporary Maths (A.M.S.)
- [4] G. V. ARUTYUNYANTS ‘Boundedness of some maximal and multiplier operators’, *Russian Math. (Iz. VUZ)* 44 (2000) n.1, 15-18.
- [5] J. A. BARRIONUEVO, ‘A note on the Kakeya maximal operator’, *Mathematical Research Letters* 3 (1995) 61-65.
- [6] H. BUSEMANN, W. FELLER, ‘Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale’, *Fund. Math.* 22 (1934) 226-256.
- [7] A. CARBERY, ‘Differentiation in lacunary directions and an extension of the Marcinkiewicz multiplier theorem’, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* (1) 37 (1988) 157-168.
- [8] A. CARBERY, ‘Covering lemmas revisited’, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) 31 (1988) n.1, 145-150.
- [9] A. CARBERY, E. HERNÁNDEZ, F. SORIA, ‘Estimates for the Kakeya maximal operator on radial functions in \mathbb{R}^n ’, *Harmonic Analysis, ICM-90 Satellite Conference Proceedings* (S. Igari, ed.), Springer-Verlag, Tokyo, (1991) 41-50.

- [10] A. CÓRDOBA, 'The Kakeya maximal function and the spherical summation multiplier', *Amer. J. Math.* 99 (1977), 1-22.
- [11] A. CÓRDOBA, 'The multiplier problem for the polygon', *Ann. of Math.* 105 (1977), 581-588.
- [12] A. CÓRDOBA, 'Geometric Fourier Analysis', *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* (3) 32 (1982) 215-226.
- [13] A. CÓRDOBA, R. FEFFERMAN, 'A geometric proof of the strong maximal theorem.' *Annals of Maths.* 102 (1975) 95-100.
- [14] A. CÓRDOBA, R. FEFFERMAN, 'On differentiation of integrals'. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* (6) 74 (1977) , 2211-2213.
- [15] J. DUOANDIKOETXEA, *Análisis de Fourier* (Addison-Wesley/ Universidad Autónoma de Madrid, 1995).
- [16] J. DUOANDIKOETXEA, A. MOYUA, 'Weighted inequalities for square and maximal functions in the plane', *Studia Mathematica* (1) 102 (1992), 39-47.
- [17] J. DUOANDIKOETXEA, A. VARGAS, 'Directional operators and radial functions on the plane', *Ark. Mat.* 33 (1995), 281-291.
- [18] C. FEFFERMAN, 'The multiplier problem for the ball', *Ann. of Math.* 94 (1971), 330-336.
- [19] M. DE GUZMÁN, *Differentiation of Integrals in \mathbb{R}^n* , (Lecture notes of Mathematics, Springer-Verlag 1975).
- [20] M. DE GUZMÁN, *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, (North Holland Math. Studies, 1981).
- [21] K. E. HARE, 'Maximal operators and Cantor sets', *Canad. Math. Bull.* 43 (2000), 330-342.
- [22] K. E. HARE, I. KLEMES 'Properties of Littlewood-Paley sets', *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 105 (1989) 485-494.

- [23] K. E. HARE, J. O. RÖNNING ‘Applications of generalized Perron trees to maximal functions and density bases’, *J. Fourier Analysis and Applications* 4 (1998), 215-227.
- [24] B. JESSEN, J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, ‘Note on the differentiability of multiple integrals’, *Fund. Math* 25 (1935), 217-234.
- [25] N. H. KATZ, ‘A counterexample for maximal operators over a Cantor sets of directions’, *Maths. Res. Lett.* (4) 3 (1996), 527-536.
- [26] N. H. KATZ, ‘Remarks on maximal operators over arbitrary sets of directions’, *Bull. London. Math. Soc.* (6) 31 (1999) 700-710.
- [27] N. H. KATZ, ‘Maximal operators over arbitrary sets of directions’ *Duke Mathematical Journal* (1) 97 (1999), 67-79.
- [28] J. M. MARSTRAND, ‘A counterexample in the theory of strong differentiation’, *Bull. London Math. Soc* 9 (1977), 209-211.
- [29] A. NAGEL, E. M. STEIN, S. WAINGER, ‘Differentiation in lacunary directions’, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* (3) 75 (1978), 1060-1062.
- [30] O. NIKODYM, ‘Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accesibles’, *Fund. Math.* 10 (1927), 116-168.
- [31] B. RUBIO, ‘Propiedades de derivación y el operador maximal de Hardy-Littlewood’ *Tesis doctoral, Universidad de Madrid 1971*.
- [32] S. SAKS, ‘Remarks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral’, *Fund. Math.* 22 (1934), 257-261.
- [33] P. SJÖGREN, AND P. SJÖLIN, ‘Littlewood-Paley decompositions and Fourier multipliers with singularities on certain sets’, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* (1) 31 (1981), 157-175.
- [34] E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, (Princeton University Press 1970).
- [35] E. M. STEIN, *Harmonic Analysis*, (Princeton University Press 1993).

- [36] A. M. STOKOLOS 'On a problem of M. de Guzman on Fourier multipliers of polygonal domains', *Siberian Math. J.* 36 (1995), 1210-1216.
- [37] J. O. STRÖMBERG, 'Weak estimates for maximal functions with rectangles on certain directions', *Ark. f. Mat.* 15 (1976) 229-240.
- [38] J. O. STRÖMBERG, 'Maximal functions associated to rectangles with uniformly distributed directions', *Annals of Mathematics* 107 (1978), 399-402.
- [39] A. VARGAS, 'A remark on a maximal function over a Cantor set of directions', *Rend. Circ. Mat. Palermo* 44 (1995), 273-282.
- [40] S. WAINGER, 'Applications of Fourier transforms to averages over lower dimensional sets', *Pro. Sym. Pure Math.*, 35, part 1 (1979), 85-94.