Temas de Teoría Analítica de los Números

Fernando Chamizo Lorente

Director: **Antonio Córdoba Barba**

(...) la ciencia hincha; sólo el amor edifica.

Prefacio

En esta memoria se discuten varios temas independientes relacionados con la teoría de los números, divididos en cuatro capítulos. Cada uno de ellos va precedido por una pequeña introducción explicando los contenidos, por lo que no serán mencionados aquí.

Evidentemente una memoria como ésta reflejando el fruto del estudio de varios años, sólo muestra algunas líneas de investigación, otras han quedado reservadas para un estudio posterior o simplemente desechadas. De hecho la independencia de los diferentes capítulos corresponde a diferentes momentos en la actividad investigadora.

Tratándose éste de un trabajo especializado y con poca difusión, se corre el riesgo de hacer su contenido sólo inteligible al que conoce bien de antemano las materias que se discuten. Para facilitar su lectura se ha intentado hacer hincapié en las ideas y relaciones con el resto de la teoría de los resultados que se demuestran. Sin embargo esta memoria no se puede considerar autocontenida, ya que en parte por las propias características de la teoría de los números y en parte por la especialización de los temas, se requieren ciertos conocimientos previos.

A la teoría de los números se la considera habitualmente una rama difícil de las Matemáticas porque algunos problemas de larga historia y aparente ingenuidad han permanecido sin solución hasta nuestros días, pero hay otra razón que justifica su dificultad y en parte su belleza, y es la diversidad de sus métodos, ya que muchas veces se conjugan ideas algebraicas, geométricas y analíticas en un mismo problema. A pesar de que los métodos aquí utilizados se podrían englobar en general dentro del análisis armónico, la diversidad antes citada estará presente en muchos razonamientos.

Tras estas consideraciones generales, no olvidando que esta memoria ha requerido el trabajo de muchas personas a pesar de que el autor es sólo uno, me gustaría reconocer el esfuerzo de algunas de ellas:

Citar a todos los profesores que han desempeñado un papel fundamental en mi formación sería imposible, por ello sólo mencionaré a los dos que han tenido una influencia más decisiva en esta memoria, ambos han sido para mí excelentes profesores y comunicadores de ideas: En primer lugar A. Córdoba quien me ha enseñado no sólo Matemáticas sino una visión estética y general de ellas. Su apoyo ha sido siempre incondicional aun cuando no fui merecedor de él. En segundo lugar H. Iwaniec, quien me ha mostrado las ideas y "trucos" que subyacen a muchos métodos en la teoría de los números. Nunca terminaré de agradecerle el interés que ha puesto en mí y su generosidad revelándome algunas de sus ideas, su influencia es realmente predominante en el primer capítulo.

A otras muchas personas debo mi gratitud por haberme alentado en todo momento, tanto aquellos que están a mi lado: mi familia o mis compañeros María Jesús, Jorge y Yolanda, como los que estan lejos como Luis Angel, que me ofreció su hospitalidad y facilitó una parte de mi formación.

Quiero mostrar también mi agradecimiento a la Fundación Caja de Madrid por haber financiado mis investigaciones y haber manifestado su confianza en ellas al admitir sucesivas renovaciones de mi beca. Espero que la labor que he realizado sea satisfactoria y continuen con la elogiosa política de subvencionar la investigación científica de otras personas.

Madrid Marzo 1994 F. Chamizo Lorente

æ

Índice

æ

CAPÍTULO I

El Problema de la Esfera

En este capítulo expondremos el contenido del trabajo conjunto con el profesor H. Iwaniec [**Ch-Iw**] acerca del problema de la esfera. Hemos intentado en lo que sigue insistir sobre todo en las ideas generales en las que se basa el susodicho trabajo, por ello reduciremos al máximo los detalles técnicos y los cálculos.

El problema de la esfera es un antiguo problema relacionado con el trabajo de Gauss y consiste en contar puntos de coordenadas enteras en el interior de una esfera de radio suficientemente grande. Concretamente, se busca una fórmula asintótica con término de error pequeño para

$$S(R) = \#\{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3 \,/\, \|\vec{x}\| < R\}.$$

Es fácil demostrar que

$$S(R) \sim \frac{4\pi}{3} R^3 \qquad R \to \infty \tag{1.1}$$

pero el error cometido en esta aproximación es difícil de estimar.

Desde un punto de vista aritmético podemos relacionar $S(R)$ con el promedio del número de representaciones como suma de tres cuadrados. Así definiendo

$$r_3(n) = \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \,/\; n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}$$

se tiene

$$S(R) = \sum_{n < R^2} r_3(n).$$

Pero más alla de esta fórmula elemental, el problema tiene una gran riqueza aritmética gracias a la conexión demostrada por Gauss entre $r_3(n)$ y el número de clases para discriminantes negativos (véase Art. 289 de [**Ga**]), este número de clases puede ser expresado en términos del valor en $s = 1$ de ciertas funciones L gracias a la fórmula de Dirichlet (véase Ch. 6 de [**Da**]).

Todas estas relaciones se pueden escribir de una manera sencilla si definimos $R_3(n)$, el número de representaciones primitivas

$$R_3(n) = \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \ / \ \operatorname{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1, \ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\},$$

el cual se relaciona con $r_3(n)$ por medio de la fórmula

$$r_3(n) = \sum_{d^2|n} R_3\left(\frac{n}{d^2}\right). \tag{1.2}$$

Siguiendo a los autores modernos (concretamente [**Gr**]), podemos resumir una parte de la teoría clásica de formas binarias y ternarias con

$$R_3(n) = \frac{1}{2} c_n h(-4n), \qquad\qquad R_3(n) = \frac{1}{\pi} c_n \sqrt{n} L(1, \chi_n) \tag{1.3}$$

donde $n > 1$, $h(-4n)$ es el número de clases para el discriminante $-4n$, $L(s, \chi_n)$ es la función L asociada al caracter real χ_n,

$$\chi_n(m) = \left(\frac{-4n}{m}\right) \qquad \text{y} \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 0, 4, 7 \quad (8) \\ 16 & \text{si } n \equiv 3 \quad (8) \\ 24 & \text{si } n \equiv 1, 2, 5, 6 \quad (8). \end{cases}$$

El problema de la esfera se puede interpretar desde otros puntos de vista. Así por ejemplo $S(R)$ se puede considerar como la cantidad de autovalores menores que R del operador de Laplace en el toro plano tridimensional, en esta situación (1.1) es la ley de Weyl (véase su enunciado en [**Ka**]). Esta interpretación no parece ser útil de cara al estudio del problema de la esfera, pero muestra que, incluso en variedades particulares, puede ser muy difícil dar un término de error preciso en la ley de Weyl, lo cual es un tema con cierto interés en física matemática.

æ

§1. Resultado principal y esquema de la demostración

Nuestro resultado principal de este capítulo es el siguiente

Teorema 1.1: *Para todo $R > 1$ se tiene*

$$S(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 + O_\epsilon\big(R^{29/22+\epsilon}\big) \qquad \forall \epsilon > 0$$

Este teorema mejora un resultado previo de Chen (véase [**Ch**]) y Vinogradov (véase [**Vi**]). A pesar de que la reducción en el exponente del término de error es cuantitativamente pequeña, el método es bastante diferente y tiene las ventajas de producir una prueba más directa de este resultado previo y subrayar la relación con algunos temas clásicos de la teoría de los números.

Si queremos contar puntos del retículo en un dominio relativamente compacto $D \in \mathbb{R}^d$ con volumen $|D|$, la idea básica es usar la fórmula de sumación de Poisson para separar el término principal. Así pues, si χ es la función característica de D

$$\#\text{puntos del retículo } D = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \chi(\vec{n}) = |D| + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{0}\}} \widehat{\chi}(\vec{n}).$$

Normalmente esta identidad es sólo formal, ya que la poca regularidad de que goza χ causa la no convergencia de la serie. Para superar esta dificultad se puede aproximar χ por una función más regular χ_r, entonces si definimos

$$\mathcal{T} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{0}\}} \widehat{\chi}_r(\vec{n}) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{A} = \widehat{\chi}_r(\mathbf{0}) - |D| + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{0}\}} \big(\widehat{\chi}(\vec{n}) - \widehat{\chi}_r(\vec{n})\big),$$

se tiene

$$\#\text{puntos del retículo en } D = |D| + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \chi_r(\vec{n}) - \widehat{\chi}_r(\mathbf{0}) + \mathcal{A} = |D| + \mathcal{T} + \mathcal{A}.$$

Evaluando o aproximando la transformada de Fourier de χ_r, $\mathcal{T}$ se transforma en una suma (trigonométrica) oscilatoria. Para estimar este tipo de sumas se ha desarrollado una extensa teoría desde principios de este siglo (véase [**Gr-Ko**]).

Por otra parte, $\mathcal{A}$ tiene un significado más aritmético, ya que encierra información acerca de la aproximación diofántica de los puntos de la frontera de D. Habitualmente sólo se pueden dar estimaciones triviales para $\mathcal{A}$, ya que es muy difícil contar puntos del retículo en dominios que no poseen cierto "grosor".

Después de estas consideraciones generales podemos presentar la estructura de la demostración:

En §2 calcularemos $\mathcal{T}$ y $\mathcal{A}$ (véase el Teorema 1.2), nótese que una modificación del razonamiento produce expresiones similares para otras sumas regularizadas de $r_3(n)$ (véase el Lema 2.1 de [**Ch-Iw**]), este es el análogo tridimensional de las fórmulas de Hardy-Voronoï con un peso (véase [**Iv**]).

En §3 estimaremos $\mathcal{T}$. La suma trigonométrica asociada a $\mathcal{T}$ tiene características peculiares que permiten llevar a cabo algunas manipulaciones aritméticas de modo que la teoría de sumas trigonométricas sólo se aplica a algunos términos de error y el resultado final no depende significativamente de pequeñas mejoras en la teoría general. En el Corolario 1.3.1 hacemos notar que con nuestra estimación de $\mathcal{T}$ y la cota trivial para $\mathcal{A}$ podemos deducir el resultado de Chen y Vinogradov, de lo que se infiere que una cota no trivial para $\mathcal{A}$ es suficiente para conseguir una mejora.

Este último objetivo se aborda en §4 donde se darán cotas para sumas cortas de caracteres reales con aplicación inmediata a la estimación de las sumas correspondientes de funciones L. La ley de reciprocidad cuadrática juega aquí un papel de fondo importante, ya que permite asociar dos caracteres con diferentes módulos al símbolo de Legendre, con ello podemos controlar el tamaño relativo de la longitud del rango de sumación y el módulo. De nuevo, pequeñas mejoras en la estimación de sumas de caracteres no afectan al resultado final.

Por último, en §5 usaremos las profundas fórmulas (1.3) para escribir $\mathcal{A}$ en términos del valor en $s = 1$ de algunas funciones L, lo cual tras los resultados de §4 produce una cota no trivial para $\mathcal{A}$ que combinada con la cota para $\mathcal{T}$ concluye la demostración del Teorema 1.1.

æ

§2. Sumación de Poisson en $\mathbb{R}^3$

En esta sección probaremos el siguiente teorema

Teorema 1.2: *Para todo* $R > 1$ *y* $0 < \Delta < 1$

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 = \mathcal{T} + \mathcal{A} + O(R)$$

donde

$$\mathcal{T} = \frac{-R}{\pi^2\Delta}\sum_n \frac{r_3(n)}{n^{3/2}}\sin(\pi\Delta\sqrt{n})\cos(\pi(2R+\Delta)\sqrt{n})$$

y

$$\mathcal{A} = 2\pi\Delta R^2 - \frac{R}{\Delta}\sum_{R<\sqrt{n}\le R+\Delta}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}(R+\Delta-\sqrt{n}).$$

Siguiendo las ideas esbozadas en la introducción, para demostrar este teorema aproximaremos la función característica de la esfera de radio R por una función más regular f. En este contexto $\mathcal{A}$ mide el error en la aproximación y $\mathcal{T}$ es el resultado de aplicar sumación de Poisson a f. Por razones de sencillez al calcular la transformada de Fourier; tomaremos f sólo diferenciable a trozos en la coordenada radial, esta baja regularidad causa la ausencia de convergencia absoluta en la serie que define $\mathcal{T}$.

El parámetro Δ representa la anchura de la región donde f no coincide con la función característica de la esfera. La idea intuitiva del principio de incertidumbre (véase Sec. 2.7 de [**Da-Ch**]) induce a pensar que la parte significativa de $\mathcal{T}$ viene dada más o menos por los Δ^{-2} primeros términos, así pues podemos manipular el valor de Δ para dar mayor importancia a la contribución de $\mathcal{T}$ ó $\mathcal{A}$.

Dem. del Teorema 1.2: Sea f la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } |\vec{x}|\le R \\ R\Delta^{-1}|\vec{x}|^{-1}(R+\Delta-|\vec{x}|) & \text{si } R\le|\vec{x}|\le R+\Delta \\ 0 & \text{si } |\vec{x}|\ge R+\Delta. \end{cases}$$

Por la definición de $\mathcal{A}$ y la fórmula de sumación de Poisson

$$S(R)=\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} f(\vec{n})-2\pi\Delta R^2+\mathcal{A}=\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3}\widehat{f}(\vec{n})-2\pi\Delta R^2+\mathcal{A}. \tag{1.4}$$

Tras algunos cálculos se tiene

$$\widehat{f}(\vec{n})=\frac{1}{2\pi^2|\vec{n}|^3}\big(\sin(2\pi R|\vec{n}|)-\frac{2R}{\Delta}\sin(\pi\Delta|\vec{n}|)\cos(\pi(2R+\Delta)|\vec{n}|)\big)$$

y sustituyendo en (1.4)

$$S(R)-\frac{4\pi}{3}R^3=\mathcal{T}+\mathcal{A}+\frac{2\pi}{3}\Delta^2R+\frac{1}{2\pi^2}\sum_n\frac{r_3(n)}{n^{3/2}}\sin(2\pi R\sqrt{n}). \tag{1.5}$$

Obsérvese que a pesar de la poca regularidad de f, podemos aplicar la fórmula de sumación de Poisson justificadamente gracias al teorema de la sección siguiente (véase el Teorema 1.3 más abajo) el cual asegura la convergencia uniforme de las series correspondientes, además dicho resultado implica que el último término en (1.5) es menor que una constante por R. ■

æ

§3. Estimación de la suma trigonométrica

En esta sección acotaremos una suma trigonométrica relacionada con $\mathcal{T}$, concretamente probaremos el siguiente resultado:

Teorema 1.3: *Si* $R > 1$*, para cada* $\epsilon > 0$

$$\sum_{n \asymp N} r_3(n) e(R\sqrt{n}) \ll N^{5/4+\epsilon} + N^{\epsilon} \min\big(R^{3/8}N^{15/16} + R^{1/8}N^{17/16}, R^{7/24}N^{49/48} + R^{5/24}N^{53/48}\big).$$

Dividiendo la serie que define $\mathcal{T}$ en intervalos diádicos y consideramos por separado los casos $n \le \Delta^{-2}$ y $n \ge \Delta^{-2}$, se deduce fácilmente del teorema anterior:

Corolario 1.3.1: *Si* $0 < \Delta < R^{-1/2}$ *entonces*

$$\mathcal{T} \ll \big(R\Delta^{-1/2} + R^{9/8}\Delta^{-1/8} + R^{21/16}\big)\Delta^{-\epsilon}.$$

Obsérvese que sustituyendo esta cota en el Teorema 1.2, eligiendo $\Delta = R^{-2/3}$ y con la estimación trivial $r_3(n) \ll n^{1/2}$, se deduce inmediatamente

Corolario 1.3.1: *Si* $R > 1$ *se tiene*

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 + O_\epsilon\big(R^{4/3+\epsilon}\big) \qquad \forall \epsilon > 0.$$

La base del método de van der Corput para estimar sumas trigonométricas es dividir el rango de sumación y aplicar una o varias veces la desigualdad de Cauchy para reducir la oscilación (proceso A) y transformar la nueva suma por medio de la fórmula de sumación de Poisson combinada con el método de fase estacionaria (proceso B).

Por la propiedades aritméticas de la fase en nuestro caso, se puede reducir la oscilación ”uniendo” dos variables en una y entonces no se necesita ninguna subdivisión significativa en cada variable. Con ello se consigue separar un término diagonal de una suma oscilatoria de menos importancia a la que se puede aplicar sencillas variantes del método de van der Corput.

Dem. del Teorema 1.3: Sea $S_N(R)$ la suma trigonométrica del teorema, se tiene

$$S_N(R) \ll \Big|\sum_{a,b,c} e\big(R\sqrt{a^2+b^2+c^2}\big)\Big| \ll N^{\epsilon} \sum_{x\asymp N} \Big|\sum_{c<\sqrt{N_1}} e\big(R\sqrt{x+c^2}\big)\Big|$$

para algún $N_1 \le N$. Descomponiendo la suma en c en varia sumas de longitud $N^{1/2-\epsilon}$ y aplicando la desigualdad de Cauchy.

$$S_N^2(R) \ll N^{1+\epsilon} \sum_{c_1,c_2} \Big|\sum_{x\asymp N} e\big(R\big(\sqrt{x+c_1^2}-\sqrt{x+c_2^2}\big)\big)\Big| \qquad \text{con } c_1,c_2 < N^{1/2},\ |c_1-c_2| < N^{1/2-\epsilon}.$$

Por tanto existe $D < N^{1-\epsilon}$ tal que

$$S_N^2(R) \ll N^{5/2+\epsilon} + N^{1+\epsilon} \sum_{y\asymp D} \Big|\sum_{x\asymp N} e\big(R\big(\sqrt{x}-\sqrt{x+y}\big)\big)\Big|.$$

Ahora todo el trabajo se reduce a estimar esta última suma trigonométrica. Con razonamientos bien conocidos (véase el Teorema 2.1 de [**Gr-Ko**]) podemos restringirnos al caso en que la derivada de la fase es mayor que una constante o equivalentemente $D \gg N^{3/2}R^{-1}$. Bajo esta hipótesis el Lema 3.6 de [**Gr-Ko**] (esencialmente sumación de Poisson) produce

$$(1.6) \qquad S_N^2(R) \ll N^{5/2+\epsilon} + R^{-1/2}D^{1/2}N^{9/4+\epsilon} + R^{-1/2}D^{-1/2}N^{9/4+\epsilon} \sum_{y\asymp D} \Big|\sum_{x\asymp U} e\big(g(x,y)\big)\Big|$$

donde $U = RDN^{-3/2}$ y g está implicitamente definida como la solución del sistema

$$(1.7) \qquad \begin{cases} f(\alpha(x,y),y) = g(x,y) + x\alpha(x,y) \\ \\ f_x(\alpha(x,y),y) = x \end{cases} \qquad \text{con } f(x,y) = R\big(\sqrt{x}-\sqrt{x+y}\big).$$

Después de aplicar la desiguladad de Cauchy a (1.6), encontramos un valor de T, $1 \le T < U$ tal que

$$S_N^4(R) \ll N^{5+\epsilon} + R^{-1}DN^{9/2+\epsilon} + R^{-1}N^{9/2+\epsilon} \sum_{x\asymp U} \sum_{z\asymp T} \Big|\sum_{y\asymp D} e\big(g(x+z,y)-g(x,y)\big)\Big|.$$

La demostración se puede ahora completar si recordamos los rangos de los parámetros $U = RDN^{-3/2}$, $T < RDN^{-3/2}$ y $N^{3/2}R^{-1} \ll D < N$ y aplicamos versiones sencillas del método de van der Corput, concretamente el Teorema 2.2 de [**Gr-Ko**] y el Teorema 5.11 de [**Ti**]. Desafortunadamente, algunos parámetros que entran en estos teoremas (a saber, λ y λ_3) no son muy fáciles de calcular porque g no se conoce explícitamente. En [**Ch-Iw**] están hechos los cálculos con todo detalle, los únicos puntos fundamentales que mencionaremos aquí son que gracias al teorema del valor medio y diferenciación implícita en (1.7) se puede obtener

$$\frac{\partial^i}{\partial y^i}\big(g(x+z,y)-g(x,y)\big) \asymp T\frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} \qquad \text{y} \qquad \frac{\alpha_{yyy}}{\alpha_{yy}^2\alpha_y} = \frac{h^2(2-h)(3-3h+h^2)^2(5h^2-6h+6)}{3(1-h)^6}$$

donde $i = 2,3$ y $h = 2x\alpha^{1/2}R^{-1} \asymp DN^{-1}$. De estas fórmulas y otros cálculos más sencillos se deduce que la i-ésima derivada $(i = 2,3)$ de $g(x+z,y)-g(x,y)$ se comporta como TND^{-i}. ∎

æ

§4. Estimación de una suma de caracteres

El propósito de esta sección es dar una fórmula asintótica para sumas cortas de funciones L, la cual será usada en la próxima sección para obtener una cota no trivial de $\mathcal{A}$.

Teorema 1.4: *Si* $1 \le K < N^{1/2}$

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv \nu\ (8)}} L(1,\chi_n) = \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K + O\big(K^{7/8}N^{\epsilon} + K^{2/3}N^{1/32+\epsilon}\big).$$

La demostración está completamente basada en la siguiente estimación de formas bilineales de caracteres:

Lema 1.4.1: *Si* $1 \le K < N^{1/2}$ *y* $\alpha = (\alpha_n)$, $\beta = (\beta_n)$ *son vectores complejos arbitrarios*

$$\sum_{N<n\le N+K}\sum_{m\asymp M} \alpha_n\beta_m \left(\frac{n}{m}\right) \ll \|\alpha\|\,\|\beta\|(K^{3/8}M^{1/2} + K^{1/2}M^{1/4}N^{3/64})(MN)^{\epsilon}.$$

Dem. del Teorema 1.4: Por la desiguladad de Polya-Vinogradov (véase [**Da**]) la serie que define $L(1,\chi_n)$ puede ser truncada para así obtener

(1.8) $$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv \nu\ (8)}} L(1,\chi_n) = \sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv \nu\ (8)}}\sum_{m<N} \frac{1}{m}\left(\frac{-4n}{m}\right) + O\big(N^{\epsilon}\big).$$

Gracias a la ley de reciprocidad cuadrática podemos considerar $\chi_n(m)$ como un caracter módulo m que es principal cuando m es un cuadrado. Con argumentos elementales no es difícil probar que la contribución de estos términos es

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv \nu\ (8)}}\sum_{(k,4n)=1} \frac{1}{k^2} = \zeta(2)\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv \nu\ (8)}}\sum_{k|4n} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K + O(1).$$

Sustituyendo en (1.8), después de dividir en intervalos diádicos el rango en m, se puede encontrar $M < N$ tal que

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} L(1,\chi_n) - \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K \ll N^{\epsilon} + N^{\epsilon} \sum_{\substack{m\asymp M \\ m\neq k^2}} \sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} \frac{1}{m}\left(\frac{-4n}{m}\right).$$

Aplicando la desiguladad de Polya-Vinogradov a la suma interior y el Lema 1.4.1 a la suma doble, se tiene

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} L(1,\chi_n) = \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K + O\big(N^{\epsilon}\min(M^{1/2}, K^{7/8} + KM^{-1/4}N^{3/64})\big)$$

y finalmente, eligiendo $M = K^{4/3}M^{1/16}$ se completa la demostración. ■

Ahora demostraremos el Lema 1.4.1. Es interesante comparar la prueba con la del Lema 3 en [**Ju**]. Obsérvese que en ambos casos la desigualdad de Cauchy se usa para separar los coeficientes y controlar el tamaño del módulo. En [**Ju**] los dos argumentos del símbolo de Legendre juegan el mismo papel y se usa Polya-Vinogradov como desigualdad auxiliar, sin embargo en nuestra aplicación del Lema 1.4.1 los rangos de sumación tendrán un tamaño bastante distinto y se necesitan varias aplicaciones de la desigualdad de Cauchy, además en lugar de Polya-Vinogradov se usa una desigualdad más profunda de Burgess.

<u>Dem. del Lema 1.4.1:</u>

Por la linealidad en cada vector, es suficiente considerar sumas de la forma

$$S_{KM} = \sum_{k\asymp K}\sum_{m\asymp M} \alpha_{N+k}\beta_m \left(\frac{N+k}{m}\right)$$

donde (α_{N+k}) y (β_m) son vectores unitarios.

Por la desigualdad de Cauchy aplicada dos veces e intercambiando el orden de sumación

$$S_{KM}^4 \ll K \sum_{k \asymp K} \left| \sum_{m \asymp M} \beta_m \left(\frac{N+k}{m} \right) \right|^4 = K \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_3, m_4}} \beta_{m_1} \beta_{m_2} \overline{\beta}_{m_3} \overline{\beta}_{m_4} \sum_{k \asymp K} \left(\frac{N+k}{m_1 m_2 m_3 m_4} \right).$$

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy una vez más y definimos $h = m_1 m_2 m_3 m_4$

$$S_{KM}^8 \ll K^2 M^\epsilon \sum_{h \asymp M^4} \left| \sum_{k \asymp K} \left(\frac{N+k}{h} \right) \right|^2 \ll K^2 M^\epsilon \Bigg(K M^4 + \sum_{\substack{k_1, k_2 \asymp K \\ k_1 \neq k_2}} \sum_{h \asymp M^4} \left(\frac{(N+k_1)(N+k_2)}{h} \right) \Bigg).$$

La condiciónn $k_1, k_2 < N^{1/2}$ implica que $(N+k_1)(N+k_2)$ no es un cuadrado si $k_1 \neq k_2$, de modo que tenemos una suma de caracteres no principales a la que podemos aplicar la desigualdad de Burgess (véase [**Bu**]) con exponentes $(1/2, 3/16)$, de lo que se deduce el lema. ■

æ

§5. Conclusión de la demostración

Por último usaremos las fórmulas (1.2), (1.3) y los resultados de la sección anterior para deducir

Teorema 1.5: *Con la notación del Teorema 1.2, si* $R^{-1} < \delta < 1/4$

$$\mathcal{A} \ll \big(R^{15/8}\Delta^{7/8} + R^{83/48}\Delta^{2/3}\big)R^{\epsilon}.$$

<u>Dem. del Teorema 1.5:</u> Gracias a (1.2) y a (1.3)

$$\sum_{R^2<n\le x} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{R^2<n\le x}\sum_{d^2|n} \frac{c_{n/d^2}}{\pi d} L(1,\chi_{n/d^2}) = \sum_{d\le\sqrt{x}} \frac{1}{\pi d} \sum_{\frac{R^2}{d^2}<k\le\frac{x}{d^2}} c_k L(1,\chi_k).$$

Dividiendo en progresiones aritméticas módulo 8, cuando $R^2 < x < R^2 + R$ por el Teorema 1.4 se tiene

$$\sum_{R^2<n\le x} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} = 2\pi(x-R^2) + O\big((x-R^2)^{7/8}R^{\epsilon} + (x-R^2)^{2/3}R^{1/16+\epsilon}\big). \tag{1.9}$$

Finalmente, por el Lema de Abel y la definición de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = 2\pi\Delta R^2 - \frac{R}{2\Delta}\int_{R^2}^{(R+\Delta)^2} t^{-1/2} \sum_{R^2<n\le x} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} dt$$

y sustituyendo (1.9) el teorema queda demostrado. ∎

<u>Dem. del Teorema 1.1:</u> Por el Teorema 1.2, el Corolario 1.3.1 y el Teorema 1.5, se tiene

$$S(R) - \frac{4\pi}{3}R^3 \ll \big(R\Delta^{-1/2} + R^{9/8}\Delta^{-1/8} + R^{21/16}\big)\Delta^{-\epsilon} + \big(R^{15/8}\Delta^{7/8} + R^{83/48}\Delta^{2/3}\big)R^{\epsilon}$$

y eligiendo $\Delta = R^{-7/11}$, se concluye la prueba. ∎

æ

CAPÍTULO II

La Gran Criba en Superficies de Riemann

El propósito de este capítulo es dar desigualdades de gran criba en las que las sumas exponenciales son reemplazadas por sumas de funciones involucradas en el análisis armónico de algunas superficies de Riemann. Como consecuencia deduciremos resultados en promedio sobre centros o radios bien espaciados para el "problema del círculo hiperbólico".

Parte de nuestros resultados se pueden trasladar a un marco geométrico más general, para hacer notar esta situación daremos también una desigualdad de gran criba para variedades riemannianas compactas.

La resolución espectral de Laplaciano en superficies de Riemann es técnicamente difícil, por ello preferimos no extender más esta introducción y dedicar toda la primera sección de este capítulo a exponer algunos resultados conocidos y a introducir notación. En esta exposición hemos seguido principalmente [**Iw 1**] y [**Iw 2**], otras referencias serán indicadas explícitamente.

æ

§1. Análisis armónico en superficies de Riemann

Consideremos el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \left\{ z = x + iy \,/\, x \in \mathbb{R},\; y \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

dotado de la métrica hiperbólica

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2),$$

la cual induce el elemento de volumen, $d\mu$, y la distancia, ρ, definidos por

$$d\mu(x+iy) = \frac{dxdy}{y^2} \qquad \rho(z,w) = \operatorname{arc\,cosh}(1 + 2u(z,w))$$

donde

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

Es importante observar que la mayoría de los autores omiten el factor 1/4 al definir $u(z,w)$, en ese caso la definición de la transformada de Selberg–Harish-Chandra (véase más abajo) y la relación entre $u(z,w)$ y $\rho(z,w)$ deben ser modificadas adecuadamente.

Consideremos las transformaciones de Möbius (funciones fraccionarias lineales en z) dejando $\mathbb{H}$ invariante. Sepuede asignar biyectivamente a cada una de estas transformaciones una matriz de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ por la aplicación

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \longrightarrow \qquad (ad-bc)^{-1/2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ \sim$$

donde $\sim$ identifica una matriz con su opuesta. De esta manera es posible demostrar geométricamente que las transformaciones de Möbius que corresponden a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ son exactamente las isometrías de $\mathbb{H}$.

Sea Γ un grupo Fuchsiano (esto es, un grupo subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{H}$), entonces el conjunto de órbitas, $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, define una superficie de Riemann, además en el caso compacto por el teorema de uniformización este es el tipo general de superficies de Riemann de género $g > 2$ (véase [**Go**]).

En lo que sigue no supondremos que $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto, sino que tiene volumen finito o equivalentemente que Γ es un grupo Fuchsiano de primera clase.

El operador de Laplace-Beltrami en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, Δ, asociado con la métrica ρ, viene dado en coordenadas cartesianas por

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -(z-\overline{z})^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Sean λ_j, u_j las soluciones del problema de autovalores

$$-\Delta u_j(z) = \lambda_j u_j(z) \qquad u_j \in L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big) \cap C^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big),$$

si $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto las funciones u_j con una normalización adecuada son suficiente para construir un "análisis armónico" en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, pero en el caso general se deben considerar otras funciones que no pertenecen a $L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$ pero que en algún sentido son autofunciones del Laplaciano; dichas funciones se dice que pertenecen al "espectro continuo" (véase [**Co-Hi**] y [**Bo-Bl**]).

A. Selberg estudió el análisis armónico en superficies de Riemann y otras variedades (véase [**Se 1**]), desarrollando una teoría muy extensa con aplicaciones inmediatas a la teoría de formas modulares (véase [**Se 2**]) y más recientemente a otras partes de la teoría de los números. Entre sus resultados se cuentan el dar un significado geométrico a la fórmula de sumación de Poisson (la famosa fórmula de la traza de Selberg) y caracterizar la resolución espectral del Laplaciano en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Desafortunadamente, la mayoría de las veces en los trabajos de Selberg las demostraciones son suprimidas o sólo esbozadas. Incluso hoy en día parece haber casi una completa ausencia de bibliografía introductoria con pruebas rigurosas (una excepción es el trabajo de próxima publicación [**Iw 2**]).

Antes de dar el teorema espectral presentaremos algunas definiciones:

Si consideramos los elementos de Γ como transformaciones de Möbius, pueden ser clasificados en elementos parabólicos, hiperbólicos y elípticos dependiendo de si tienen un punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o dos puntos fijos no reales en $\mathbb{C}$, respectivamente.

Los puntos fijos de los elementos parabólicos se llaman cúspides. Bajo nuestras hipótesis sobre Γ (que sea un grupo Fuchsiano de primera clase), se puede probar que solamente hay un número finito de cúspides no equivalentes (no relacionadas por elementos de Γ).

Una función de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, o lo que es lo mismo, una función compleja sobre $\mathbb{H}$ que es invariante bajo la acción de Γ, se dice que es una función automorfa. Además diremos que una función automorfa, f, es una forma cuspidal (no holomorfa o de Maass) si pertenece a $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap C^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, es una autofunción de Δ y tiene un decaimiento exponencial hacia cero en cada cúspide. Esta última propiedad se puede reemplazar por

$$\int_0^1 f(\sigma_{\mathbf{a}} z)dx = 0 \qquad \forall \text{ cúspide } \mathbf{a}$$

donde $\sigma_{\mathbf{a}}$ es una transformación de Möbius (en general no perteneciente a Γ) tal que

$$\sigma_{\mathbf{a}}\infty = \mathbf{a} \qquad \sigma_{\mathbf{a}}^{-1}\Gamma_{\mathbf{a}}\sigma_{\mathbf{a}} = \{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \,/\, \gamma(z) = z+n\} \qquad \text{con } \Gamma_{\mathbf{a}} = \{\gamma \in \Gamma \,/\, \gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}.$$

Desde el punto de vista geométrico las cúspides son "puntos del infinito" de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, de manera que $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto si y sólo si no tiene cúspides. Por otra parte las formas cuspidales son, intuitivamente, autofunciones que se comportan como funciones "test" (con decaimiento rápido hacia cero en el infinito) así que en algún sentido representan la parte compacta de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

Otras funciones automorfas importantes son las llamadas series de Eisenstein asociadas a cada cúspide, vienen definidas por

$$E_{\mathbf{a}}(z,s)=\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{a}}\backslash\Gamma}\left(\operatorname{Im}\sigma_{\mathbf{a}}^{-1}\gamma z\right)^{s}\qquad \operatorname{Re}s>1.$$

Formalmente son invariantes por Γ y verifican $\Delta E_{\mathbf{a}}(\cdot,s)=s(1-s)E_{\mathbf{a}}(\cdot,s)$ pero no contaremos las series de Eisenstein entre las autofunciones porque no pertenecen a $L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$.

Consideradas como funciones de s, las series de Eisenstein tienen una continuación meromorfa a todo el plano complejo (este hecho es bastante difícil de demostrar), satisfacen una ecuación funcional que relaciona $E_{\mathbf{a}}(z,s)$ con $E_{\mathbf{a}}(z,1-s)$ y un tipo de "hipótesis de Riemann generalizada" ya que los únicos ceros de $1/E_{\mathbf{a}}(z,\cdot)$ en $\operatorname{Re}s>1/2$ son simples, reales y pertenecen a $(1/2,1]$. Además, en esta región los residuos de $E_{\mathbf{a}}(z,\cdot)$, considerados como funciones de z, son autofunciones de Δ.

Ahora ya estamos pertrechados para enunciar la descomposición espectral de $L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$. Sean $L^2_c\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$ y $L^2_r\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$ los cierres en $L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$ del espacio generado por las formas cuspidales y los residuos de las series de Eisenstein respectivamente, y sea $L^2_E\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$ la suma directa continua de $E_{\mathbf{a}}(z,1/2+it)$, entonces

$$L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)=\mathcal{D}\oplus\mathcal{C}$$

donde

$$\mathcal{D}=L^2_c\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)\oplus L^2_r\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)\qquad\text{and}\qquad \mathcal{C}=L^2_E\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big).$$

Además con el producto escalar natural

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}f(z)\overline{g(z)}\,d\mu(z)$$

la parte discreta, $\mathcal{D}$, es el complemento ortogonal de la parte continua, $\mathcal{C}$, y los dos sumandos directos de $\mathcal{D}$ son ortogonales entre sí.

Con todo esto, se infiere el siguiente teorema espectral: Si $\{u_j(z)\}$ es un sistema ortonormal completo de autofunciones de Δ en $\mathcal{D}$, entonces para toda $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$

$$f(z) = \sum_j \langle f, u_j\rangle u_j(z) + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\langle f, E_{\mathbf{a}}(\cdot, 1/2+it)\rangle E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)dt$$

donde la igualdad y la convergencia deben ser entendidos en sentido $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Este es el análogo hiperbólico del desarrollo de Fourier.

Finalmente, daremos la definición de una transformada que es similar a la transformada de Fourier en el caso euclídeo.

Dada una función k con suficiente regularidad, su transformada de Selberg–Harish-Chandra , h, viene definida por

$$h(t) = \int_{\mathbb{H}} k(u(z,i))(\operatorname{Im} z)^{1/2+it}d\mu(z) = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k\Big(\frac{x^2+(y-1)^2}{4y}\Big)y^{-3/2+it}dxdy.$$

Lo que se puede escribir de la siguiente forma

$$Q(v) = \int_v^{\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u-v}}du \qquad g(r) = 2Q\big(\sinh^2\frac{r}{2}\big) \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irt}g(r)dr$$

y dada una función par, h, esta transformada se puede invertir mediante (véase [**Ku**])

$$g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{irt}h(t)dt \qquad Q(v) = \frac{1}{2}g(2\operatorname{arc\,sinh}\sqrt{v}) \qquad k(u) = \frac{-1}{\pi}\int_u^{\infty}\frac{dQ(v)}{\sqrt{v-u}}.$$

Si suponemos que k es tal que h se puede extender a una función holomorfa en la banda $|\operatorname{Im} t| < 1/2+\epsilon$ de modo que $|h(t)||t|^{2+\epsilon}$ esté acotado, entonces se tiene la siguiente importante consecuencia del teorema espectral que permite desarrollar núcleos automorfos en términos de autofunciones y series de Eisenstein

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} k(u(\gamma z, w)) = \sum_j h(t_j)u_j(z)\overline{u_j(w)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(w, 1/2+it)}dt$$

donde $t_j = (\lambda_j - 1/4)^{1/2}$ y λ_j es el autovalor que corresponde a u_j. Nótese que la elección del signo de t_j es irrelevante ya que h es par.

Si $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto, el término que contiene las series de Eisenstein no aparece, y escogiendo $z = w$ e integrando en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ se obtiene una fórmula que relaciona sumas en $\gamma \in \Gamma$ con sumas en los autovalores, esto da una fórmula de sumación de Poisson para el plano hiperbólico. Selberg también consideró el caso no compacto y dio un significado geométrico a la sumación en $\gamma \in \Gamma$: la fórmula de la traza de Selberg (véase el capítulo 10 de [**Iw 2**]).

æ

§2. Enunciado de los resultados principales

Comenzaremos dando una desigualdad de gran criba en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ y sus aplicaciones al promedio en los centros en el problema del círculo hiperbólico. como en el caso euclídeo, se necesita una condición de espaciamiento. Se define la distancia, d, en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ como la longitud de la geodésica más corta, así pues dados dos representantes z, w en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ de las órbitas correspondientes a dos puntos de Γ, se tiene

$$d(z,w) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \rho(\gamma z, w).$$

En consecuencia, diremos que z_1, z_2, $\dots$, z_R están δ-espaciados en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ si

$$d(z_\nu, z_\mu) > \delta \qquad \forall \nu \neq \mu$$

y no hay geodésicas cerradas uniendo z_ν consigo mismo de longitud menor que δ.

Si hay cúspides, es decir, si $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ no es compacto, podemos imaginar $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ como una superficie con estrechos "tentáculos" que se dirigen hacia las cúspides donde la métrica degenera, las formas cuspidales tienden a cero y las series de Eisenstein tienen un crecimiento potencial; así pues, no es de esperar mucha cancelación cerca de las cúspides y en estas zonas la desigualdad de gran criba degenera. Para cuantificar esta situación, es útil introducir la siguiente función (véase la sección 3.1 de [**Iw 2**])

$$y_\Gamma(z) = \max_{\mathbf{a}} \max_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{Im} \sigma_{\mathbf{a}}^{-1}\gamma z.$$

Intuitivamente, $y_\Gamma(z)$ es la altura de z en el tentáculo al que pertenece, cuya anchura en z es proporcional a $1/y_\Gamma(z)$. Más precisamente, existen dos constantes c_1, c_2, que dependen sólo de Γ, tales que

$$\operatorname{Im} \sigma_{\mathbf{a}}^{-1} z > c_1 \quad \Rightarrow \quad y_\Gamma(z) = \operatorname{Im} \sigma_{\mathbf{a}}^{-1} z \qquad \text{y} \qquad \#\big\{\gamma \,/\, \rho(\gamma z, w) < c_2/y_\Gamma(z)\big\} \leq 1.$$

Después de estos comentarios podemos considerar el siguiente teorema como el análogo hiperbólico de la desigualdad de gran criba.

Teorema 2.1: *Sea* $\{u_j\}$ *un sistema ortonormal de autofunciones de* Δ *en* $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *con autovalores* $\{1/4+t_j^2\}$. *Dados números reales* $T, M \gg 1$ *y puntos* δ*-espaciados* $z_1, z_2, \ldots, z_R \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$ *con* $y_{\Gamma}(z_\nu) < M$, *para toda sucesión* $\{a_j\}$ *y funciones* $a_{\mathbf{a}} \in L^2(\mathbb{R})$ *donde* $\mathbf{a}$ *recorre las cúspides de* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, *si definimos*

$$S = \sum_{\nu=1}^{R} \left| \sum_{|t_j|\le T} a_j u_j(z_\nu) + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} a_{\mathbf{a}}(t) E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2+it)dt \right|^{2l} \qquad l \in \mathbb{Z}^+$$

y

$$||a||_* = \left(\sum_{|t_j|\le T} |a_j|^2 + \frac{1}{(4\pi)^2}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} |a_{\mathbf{a}}(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

entonces se tiene

$$S \ll (T^2+TM)^l(1+\delta^{-2}T^{-2})||a||_*^{2l}$$

donde la constante "$\ll$*" sólo depende de* Γ *y* l.

<u>Observación:</u> *Si* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *es compacto, en el teorema anterior no aparece la suma sobre las cúspides y el término* TM *puede ser suprimido.*

Nuestros próximos resultados están relacionados con el problema del círculo hiperbólico. El problema clásico del círculo consiste en contar puntos de coordenadas enteras en círculos grandes, estos puntos se pueden considerar como elementos de las órbitas del origen bajo traslaciones enteras. Análogamente, en la versión hiperbólica se cuentan elementos de la órbita de un punto bajo la acción de Γ que pertenecen a un círculo grande. Concretamente, el problema es encontrar una fórmula asintótica con un término de error pequeño para

$$\#\{\gamma \in \Gamma \,/\, \rho(\gamma z, w) \le s\}$$

cuando s es grande

Tras un cambio de variable $x = e^s + e^{-s}$, la cantidad anterior es igual a

$$H(x; z, w) = \#\big\{\gamma \in \Gamma \big/ u(\gamma z, w) + 1/2 \leq x/4\big\}.$$

El desarrollo espectral de $H(x; z, w)$ sugiere escribirlo como

$$H(x; z, w) = M(x; z, w) + E(x; z, w)$$

donde

$$M(x; z, w) = \sqrt{\pi} \sum_{\operatorname{Im} t_j \neq 0} \frac{\Gamma(|t_j|)}{\Gamma(|t_j| + 3/2)} u_j(z)\overline{u_j(w)} x^{1/2+|t_j|} + 2\sqrt{2} \sum_{t_j=0} u_j(z)\overline{u_j(w)} x^{1/2} \log x.$$

Nótese que el primer sumatorio es la contribución de las autofunciones correspondientes a los llamados autovalores excepcionales $\lambda_j = 1/4 + t_j^2 < 1/4$ y el segundo sumatorio depende del autoespacio del autovalor $\lambda = 1/4$. El término dominante en $M(x; z, w)$ corresponde a $\lambda = 0$ y es $\pi x / |\Gamma \backslash \mathbb{H}|$. La conjetura es que $E(x; z, w)$ tiene orden menor que cualquier sumando del "término principal" $M(x; z, w)$, concretamente

$$E(x; z, w) \ll x^{1/2+\epsilon} \qquad \forall \epsilon > 0 \quad \text{y} \quad x \geq 3.$$

La mejor cota superior es $E(x; z, w) \ll x^{2/3}$ y se debe a Selberg (véase una demostración en [**Iw 2**], véase también [**La-Ph**] donde se discute un problema más general y en [**Pa**] una cota más débil). Por otra parte existen algunos Ω-resultados que implican que la conjetura es en general lo mejor posible (véase [**Ph-Ru**]).

A continuación deduciremos que la conjetura es verdad en promedio sobre puntos bien espaciados. Tanto los próximos resultados como los corolarios al Teorema 2.2 que daremos más adelante, están en algún sentido más de acuerdo con la idea estadística de promedio que los resultados integrales y son un buen sustituto para ellos cuando la no compacidad no permite integrar.

Nos gustaría señalar además, que los corolarios siguientes se podrían escribir de una manera aritmética como resultados en promedio para el número de representaciones de un entero por algunas familias de formas cuadráticas pero los resultados así obtenidos son demasiado técnicos para ser enunciados de manera sencilla y preferimos omitirlos.

Corolario 2.1.1: *Dados un entero positivo l y un punto $w \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$, para todo $x \gg 1$ y z_1, z_2, $\ldots$,z_R un conjunto de puntos δ-espaciados en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ con $y_{\Gamma}(z_\nu) < M$, se tiene*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll \big(M^l + x^{(l-2)/3} R^{(l-2)/3l}\big) x^{l+\epsilon} \delta^{-2} + x^{4l/3+\epsilon} R^{1/3}$$

donde la constante "$\ll$" sólo depende de Γ, w y l.

<u>Definición:</u> *Diremos que un conjunto de puntos δ-espaciados z_1, z_2, $\ldots$,z_R satisface la propiedad de uniformidad en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ si $R\delta^2 \gg |\Gamma\backslash\mathbb{H}|$, o equivalentemente si la unión (disjunta) de los círculos centrados en z_ν y con radio $\delta/2$ tiene volumen comparable al de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.*

Corolario 2.1.2: *Para $l = 1, 2$, dados más de $x^{l/2}$ puntos δ-espaciados z_1, z_2, $\ldots$,z_R que satisfacen la propiedad de uniformidad en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ y $y_{\Gamma}(z_\nu) \ll 1$, se tiene*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll R x^{l+\epsilon}.$$

En particular, haciendo tender R hacia infinito, si $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es compacto, para $l = 1, 2$ obtenemos

$$\Big(\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} d\mu(z)\Big)^{1/2l} \ll x^{1/2+\epsilon}.$$

Observación: *El resultado integral para $l = 1$ también puede ser deducido del teorema espectral y la identidad de Plancherel (véase en* [**Wo**] *un resultado relacionado y en* [**Ke**] *el análogo euclídeo).*

A continuación nos ocuparemos del promedio sobre los radios, para ello necesitaremos una desigualdad de gran criba para sumas oscilatorias que dependen de t_j. Este es el contenido del siguiente teorema en el que usaremos implícitamente la notación del Teorema 2.1. La ambigüedad en el signo de los t_j no tiene relevancia si convenimos $t_{-j} = -t_j$ y $u_{-j}(z) = \overline{u_j(z)}$.

Teorema 2.2: *Dados $T \gg 1$ y números reales $x_1, x_2, \ldots, x_R \in [X, 2X]$ que estén δ-espaciados con la distancia usual en $\mathbb{R}$ (esto es, $\nu \neq \mu \Rightarrow |x_\nu - x_\mu| > \delta$), para toda sucesión $\{a_j\}$ y funciones $a_{\mathbf{a}} \in L^2(\mathbb{R})$ donde $\mathbf{a}$ recorre las cúspides de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, si definimos*

$$S = \sum_{\nu=1}^{R} \left| \sum_{|t_j| \leq T} a_j x_\nu^{it_j} u_j(z) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} a_{\mathbf{a}}(t) x_\nu^{it} E_{\mathbf{a}}(z, 1/2 + it) dt \right|^{2l} \qquad l \in \mathbb{Z}^+,\ z \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$$

entonces se tiene

$$S \ll T^{2l}(1 + X\delta^{-1}T^{-1})||a||_*^{2l}$$

donde la constante "$\ll$" depende de Γ, z y l.

Observación: *En comparación con la desigualdad de gran criba clásica, la introducción de los factores que dependen de z parece artificial. Realmente, podríamos usar la fórmula de la traza de Selberg en vez del desarrollo espectral de núcleos automorfos (que es más sencillo) evitando así estos factores, y nuestras consideraciones con respecto al signo de t_j se entienden mejor si pensamos en sumas sobre los ceros de la función zeta de Selberg, sin embargo por razones de simplicidad preferimos establecer el teorema de esta manera, que es lo único que se necesita en nuestras aplicaciones.*

Gracias al teorema anterior se pueden establecer resultados similares al Corolario 2.1.1 y al Corolario 2.1.2 pero promediando sobre los radios.

Corolario 2.2.1: *Dado un entero positivo* l *y* $z, w \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$, *si* $x_1, x_2, \ldots, x_R$ *es un conjunto de números reales como en el teorema, se tiene*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll R^{(l-1)/3l} x^{(4l+2)/3+\epsilon} \delta^{-1} + R^{1/3} x^{4l/3+\epsilon}$$

donde la constante "$\ll$*" depende de* Γ, z, w *y* l.

Corolario 2.2.2: *Si* $R\delta \gg X$ *y* $R > X^{1/2}$, *entonces*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x_\nu; z, w)|^2 \ll R x^{1+\epsilon}$$

y haciendo tender R *a infinito*

$$\left(\frac{1}{X} \int_X^{2X} |E(x; z, w)|^2 dx \right)^{1/2} \ll x^{1/2+\epsilon}.$$

<u>Observación:</u> *El momento de orden dos puede ser también obtenido integrando directamente el desarrollo espectral de* $E(x; z, w)$, *los cálculos están hechos de esta manera en en* [**Ph-Ru**], *donde un resultado más preciso se usa para probar algunos* Ω*-resultados.*

Los corolarios anteriores pueden formularse también de manera aritmética, ya que con una elección adecuada de z, w y Γ, $E(x; z, w)$ no es otra cosa (salvo un cambio de variable) que

$$\mathcal{C}(x) = -4\pi + \sum_{n \le x} r(n) r(n+1)$$

donde $r(n)$ es el número de representaciones como suma de dos cuadrados (véase el capítulo 12 de [**Iw 2**]).

La correlación entre $d(n)$ y $d(n+a)$ aparece de forma natural en el estudio de la función ζ de Riemann (véase la pag. 167 en [**Ji**]) mientras que la correlación entre $r(n)$ y $r(n+a)$ corresponde al mismo problema para cierta función L. Se puede sustituir $r(n+1)$ por $r(n+a)$ utilizando los operadores de Hecke, también podríamos promediar en a usando las técnicas introducidas en [**De-Iw**], pero preferimos dar un resultado sencillo sólo para ilustrar la relación con la aritmética.

Corolario 2.2.3: *Para todo* q, a *con* $|a| < q < X^\alpha$ *y* $1/2 < \alpha < 2/3$, *el cardinal de los* $x \le X$ *en la progresión aritmética* $x \equiv a\ (q)$ *con* $|\mathcal{C}(x)| > x^\alpha$ *tiene densidad asintótica cero cuando* $X \to \infty$, *más precisamente*

$$\max_{|a|<q<X^\alpha} \frac{\#\{x \equiv a\ (q)\ x \le X \,/\, |\mathcal{C}(x)| > x^\alpha\}}{X/q} \ll X^{1-2\alpha+\epsilon}$$

donde fijado ϵ *la constante "*$\ll$*" es absoluta.*

A continuación estudiaremos la desigualdad de gran criba para una variedad riemanniana compacta genérica, M, de dimensión n.

De nuevo se necesita una condición de espaciamiento. La función distancia en M, d, es la longitud minimal de los caminos que unen dos puntos. Diremos que los puntos $x_1, x_2, \ldots$ estan δ-espaciados en M si

$$d(x_\nu, x_\mu) > \delta \qquad \forall \nu \ne \mu$$

y diremos que verifican la propiedad de uniformidad si

$$\mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{\nu=1}^{R} B_{\delta/2}(x_\nu)\Big) \gg \mathrm{Vol}(M).$$

donde Vol es el volumen que corresponde a la métrica riemanniana.

En M, el operador de Laplace-Beltrami, Δ está definido localmente por

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \right),$$

la teoría general asegura que las autofunciones de $-\Delta$ se pueden elegir de manera que formen un sistema ortonormal completo en $L^2(M)$ con el producto escalar natural y que los autovalores son no negativos (véase [**Co-Hi**]).

Después de estas definiciones se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3: *Sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión n y sea $\{\phi_j\}$ un sistema ortonormal completo de autofunciones de $-\Delta$, correspondientes a los autovalores $\{\lambda_j\}$. Dados $\Lambda \gg 1$, l un entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_R$ un conjunto de puntos δ-espaciados en M, para toda sucesión $\{a_j\}$*

$$\sum_{\nu=1}^{R} \Big| \sum_{\lambda_j \leq \Lambda} a_j \phi_j(x_\nu) \Big|^{2l} \ll \Lambda^{nl/2} \big(1 + \delta^{-n} \Lambda^{-n/2}\big) \Big(\sum_{\lambda_j \leq \Lambda} |a_j|^2 \Big)^l$$

donde la constante "$\ll$" depende de M y l.

<u>Observación:</u> *Nótese que el Teorema 2.1 podría ser deducido del resultado anterior si $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ es compacto, pero no podemos tratar el caso no compacto porque el análisis armónico en variedades riemannianas no compactas es sólo bien conocido en casos muy especiales (véase* [**Dy-Mc**]*). Nótese también que la desigualdad de gran criba clásica (véase Th. 4 de* [**Bo**]*) se puede deducir como corolario tomando $M = S^1$ y $l = 1$.*

La solución de algunas ecuaciones en derivadas parciales clásicas sobre M (la ecuación de ondas, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, etc.) tras separación de variables se pueden escribir como

$$u(x,t) = \sum_j f_j(t) \phi_j(x).$$

El teorema anterior permite obtener estimaciones en promedio para $u(x,t)$. De cara a ilustrar este punto, enunciaremos en términos físicos una de las posibles consecuencias.

Consideremos la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad u \in C^2(M \times \mathbb{R}) \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

donde f y g tienen armónicos con frecuencias menores que Λ. Esta situación es común en Física: los tonos más altos no se pueden detectar y los desarrollos de Fourier de f y g se truncan.

Corolario 2.3.1: *Para un conjunto arbitrario de puntos δ-espaciados $x_1, x_2, \ldots, x_R$ en M que verifican la propiedad de uniformidad , consideramos partículas "test" p_ν de masa uno oscilando sobre cada x_ν con amplitud $u(x_\nu, t)$. Sea E la energía de u y sea E_ν la energía cinética de la partícula p_ν, entonces si $\delta < \Lambda^{-1/2}$ se tiene*

$$\frac{E_1 + E_2 + \cdots + E_R}{R} \ll E.$$

æ

§3. Algunos resultados auxiliares

Antes de probar los resultados principales daremos algunos lemas técnicos que contienen algunos cálculos relacionados con la transformada de Selberg–Harish-Chandra. En su demostración apelaremos a varios resultados conocidos acerca de funciones especiales.

Lema 1: *Sea k la función característica del intervalo $[0, (\cosh R - 1)/2]$ con $R \geq 1$, entonces para todo $t \in \mathbb{C}$*

$$h(t) \ll R\, e^{R(1/2+|\mathrm{Im}\, t|)}$$

además:

$a)$ *Si t es real*

$$h(t) = 2|t|^{-3/2}\sqrt{2\pi \sinh R}\, \cos\big(tR - \frac{3\pi}{4} \mathit{sign}\, t\big)\big(1 + O\big(t^{-1}\big)\big).$$

$b)$ *Si Re $t = 0$ y $|t| > \epsilon$*

$$h(t) = \sqrt{2\pi \sinh R}\, \frac{\Gamma(|t|)}{\Gamma(3/2 + |t|)} e^{|t|R} + O_\epsilon\big(e^{(1/2-|t|)R}\big).$$

$c)$ *Para los valores especiales $t = 0$ y $t = i/2$ se tiene*

$$h(0) = 2\sqrt{2}Re^{R/2} + O\big(e^{R/2}\big) \qquad h\big(\frac{i}{2}\big) = 2\pi(\cosh R - 1).$$

El próximo resultado completa el lema anterior considerando valores pequeños de R. Nótese que en ese caso la transformada de Selberg–Harish-Chandra es una función de tipo Bessel (salvo términos de error) al igual que la transformada de Fourier del círculo, ello indica que el plano hiperbólico es casi euclídeo en pequeños entornos.

Lema 2: *Sea k como en el Lema 1 pero con $R \leq 1$, entonces*

$$h(t) = 2\pi R t^{-1} \sqrt{\frac{\sinh R}{R}} J_1(Rt) + O\big(R^2 e^{R|\mathrm{Im}\, t|} \min(R^2, |t|^{-2})\big)$$

donde J_1 es la función de Bessel de orden uno.

Lema 3: *Dados $T \gg 1$ y $r > 0$, sean k_1 y k_2 las transformadas inversas de Selberg–Harish-Chandra de*

$$h_1(t) = e^{-t^2/4T^2} \qquad y \qquad h_2(t) = e^{-t^2/4T^2} \cos(rt)$$

respectivamente, entonces

a) *$k_1(t)$ es decreciente en $t > 0$ y verifica*

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) \ll T^2 e^{-T^2 u^2} \qquad \forall u \geq 0.$$

b) *Existe una constante absoluta positiva, c, tal que*

$$k_2\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) \ll T^2 e^{-cT^2(u-r)^2} \qquad \forall u \geq r \qquad y \qquad k_2(0) \ll \min\big(T^2, r^{-2}\big).$$

Dados dos núcleos automorfos $k_1(u(z,w))$ y $k_2(u(z,w))$, definimos su convolución como

$$k_1 * k_2(u(z,w)) = \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,v)) k_2(u(v,w)) d\mu(v).$$

Al igual que en el caso euclídeo, la convolución se transforma en producto en la parte espectral, concretamente se tiene:

Lema 4: *Sean h_1, h_2 y h las transformadas de Selberg–Harish-Chandra de k_1, k_2 y $k_1 * k_2$ respectivamente, entonces*

$$h(t) = h_1(t) \cdot h_2(t).$$

Por último, usaremos los lemas anteriores para hacer algunos cálculos que son útiles al estudiar el problema del círculo hiperbólico.

Lema 5: *Sea* $E(x;z,w)$ *el término de error en el problema del círculo hiperbólico con* $x>2$ *y supongamos* $y_{\Gamma}(z)\cdot y_{\Gamma}(w)<M$*, entonces se tiene*

$$E(x;z,w)\le \sum_{T=2^n} E_T(x;z,w)+O\big(x^{1/2}M^{1/2}+xH\big)$$

donde H *es un número real arbitrario perteneciente a* $(0,1]$, n *recorre los enteros mayores que una constante que depende de* Γ *y*

$$E_T(x;z,w)=\sum_{\pm t_j\in(T,2T]} g(t_j)u_j(z)\overline{u_j(w)}+\frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}}\int_{T<|t|\le 2T} g(t)E_{\mathbf{a}}(z,1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(w,1/2+it)}dt.$$

con g *una función par tal que definiendo* $s=\operatorname{arc\,cosh}(x/2)$*, viene dada por*

$$g(t)=\frac{\sqrt{2\pi H\sinh H\sinh(s+H)}}{t^{5/2}\sinh^2(H/2)}J_1(Ht)\cos\big(t(s+H)-\frac{3\pi}{4}\big)\qquad \forall s,t>0.$$

<u>Dem. del Lema 1:</u> Usando la definición de la transformada de Selberg–Harish-Chandra, tras algunos cálculos se tiene

$$h(t)=2\sqrt{2}\int_{-R}^{R}(\cosh R-\cosh r)^{1/2}e^{irt}dr=4\sqrt{2}\int_{0}^{R}(\cosh R-\cosh r)^{1/2}\cos(rt)dr. \tag{2.1}$$

Se puede identificar esta fórmula con la representación integral de una función de Legendre asociada (véase 8.715.1 en [**Gr-Ry**])

$$h(t)=2\pi\,\mathrm{P}^{-1}_{-1/2+it}(\cosh R)\sinh R. \tag{2.2}$$

Esta función de Legendre se puede expresar en términos de la función hipergeométrica de Gauss (véase 8.723.1 y 9.100 en [**Gr-Ry**]) obteniéndose

$$h(t)=\sqrt{2\pi\sinh R}\,\big(f(t)+f(-t)\big)\qquad \text{con}\quad f(t)=\frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)}F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1-it,\frac{1}{1-e^{2R}}\right).$$

Si $R > \log\sqrt{2}$ y $1 \pm it$ no está cercano a los enteros no positivos, trivialmente por la definición de F

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1 \pm it, \frac{1}{1-e^{2R}}\right) = 1 + O\big(|t|^{-1}e^{-2R}\big)$$

así pues, si t es real

$$h(t) = 2\sqrt{2\pi \sinh R}\ \mathrm{Re}\left(\frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)}\right)\big(1 + O\big(|t|^{-1}e^{-2R}\big)\big)$$

y usando la aproximación de Stirling para la función Γ, a) queda demostrado.

Si t no es real, supongamos por un momento $\mathrm{Im}\, t < 0$ y que $-it$ es no está cercano a los enteros no positivos, entonces de la misma manera tenemos

$$h(t) = \sqrt{2\pi \sinh R}\, \frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)} + O\big(e^{(1/2-it)R}\big).$$

Por la simetría de h, una expresión análoga se sigue en el caso $\mathrm{Im}\, t > 0$. Al tratar el caso en que $-it$ está cercano a los enteros positivos, podemos conseguir el mismo resultado si utilizamos el hecho de que h es analítica y aplicamos el principio del módulo máximo a

$$e^{(1/2-it)R}\left(h(t) - \sqrt{2\pi \sinh R}\frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)}\right)$$

y con esto concluye la prueba de b).

Calculando $h(0)$ con (2.1)

$$h(0) = 4\sqrt{2}\int_0^R \sqrt{e^R - e^r}\big(1 + O\big(e^{-R}\big)\big)dr = 4\sqrt{2}\int_0^R \sqrt{e^R - e^r}dr + O\big(Re^{-R/2}\big),$$

y con el cambio de variable

$$r = \log\left(e^R - u^2\right)$$

la integral se convierte en una integral racional elemental, tras algunos cálculos se tiene

$$h(0) = 2\sqrt{2}Re^{R/2} + 8\sqrt{2}(\log 2 - 1)e^{R/2} + O\big(Re^{-R/2}\big).$$

Por último, el valor de $h(i/2)$ se puede calcular exactamente usando (2.2)

$$h\big(\frac{i}{2}\big) = 2\pi\, \mathrm{P}_{-1}^{-1}(\cosh R)\sinh R$$

y la relación entre las funciones de Legendre asociadas con parámetros enteros y los polinomios de Legendre, precisamente en nuestro caso se obtiene (véase 8.752.3 y 8.820.7 en [**Gr-Ry**])

$$\mathrm{P}_{-1}^{-1}(z) = (z^2-1)^{-1/2}\int_1^z \mathrm{P}_0(s)ds.$$

El primer polinomio de Legendre, P_0, es idénticamente uno, así que sustituyendo en la fórmula para $h(i/2)$ la prueba está completa. ∎

<u>Dem. del Lema 2:</u> Si f es la función definida por

$$f(r) = \sqrt{\cosh R - \cosh r} - \sqrt{\frac{\sinh R}{2R}}\sqrt{R^2 - r^2},$$

se puede escribir h como (véase (2.1) en la demostración del Lema 1)

$$h(t) = 2\sqrt{\frac{\sinh R}{R}}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-r^2}e^{irt}dr + 2\sqrt{2}\int_{-R}^{R} f(r)e^{irt}dr.$$

Con el cambio de variable $r = Ru$, la primera integral es una función de Bessel de orden uno (véase 3.752.2 en [**Gr-Ry**]), de modo que

$$h(t) = 2\pi Rt^{-1}J_1(Rt)\sqrt{\frac{\sinh R}{R}} + 2\sqrt{2}\int_{-R}^{R} f(r)e^{irt}dr.$$

Nótese que si $|f'| \ll R^2$ entonces el lema está probado porque

$$\int_{-R}^{R} f(r)e^{irt}dr = \int_{-R}^{R}\int_{0}^{r} f'(u)e^{irt}dudr \ll R^4 e^{R|\mathrm{Im}\, t|}$$

y por el segundo teorema del valor medio (la variación de f' está acotada)

$$\int_{-R}^{R} f(r)e^{irt}dr \ll t^{-1}\int_{-R}^{R} f'(r)e^{irt}dr \ll R^2 t^{-2} e^{R|\mathrm{Im}\, t|}.$$

Para demostrar $|f'| \ll R^2$ distinguimos dos casos:

1) Si $-R/2 \le r \le R/2$, escribimos f' como

$$f'(r) = \frac{2r\dfrac{\sinh R}{R}(\cosh R - \cosh r) - \dfrac{\sinh^2 r}{r}(R^2 - r^2)}{2\sqrt{\cosh R - \cosh r}\,\sqrt{R^2 - r^2}\left(\sqrt{2\dfrac{\sinh R}{R}}\sqrt{\cosh R - \cosh r} + \dfrac{\sinh r}{r}\sqrt{R^2 - r^2}\right)}.$$

Después de algunas estimaciones sencillas se obtiene

$$f'(r) \ll rR^{-3}\left(2r\frac{\sinh R}{R}(\cosh R - \cosh r) - \frac{\sinh^2 r}{r^2}(R^2 - r^2)\right)$$

y calculando los desarrollos de Taylor de orden dos de $\cosh r$ y $r^{-2}\sinh^2 r$ en $r = 0$ y desarrollando el resultado en $R = 0$, se tiene

$$f'(r) \ll rR \ll R^2.$$

2) Si $0 < R - r \le R/2$ entonces un razonamiento similar conduce a

$$R^{7/2}(R-r)^{3/2}f'(r) \ll 2r^2(\cosh R - \cosh r)\sinh R - R(R^2 - r^2)\sinh^2 r,$$

de nuevo, tras cálculos elementales de los desarrollos de Taylor de la parte derecha en $r = R$ y desarrollando el resultado en $R = 0$, se tiene

$$f'(r) \ll R^{3/2}(R-r)^{1/2} \ll R^2.$$

Nótese que f' es impar, así pues de 1) y 2) deducimos que $f'(r) \ll R^2$ para todo $r \in [-R, R]$ y como mencionamos antes esto es suficiente para demostrar el lema. ∎

<u>Dem. del Lema 3:</u> Si h es la transformada de Selberg–Harish-Chandra de un núcleo genérico k, usando la fórmula que produce k a partir de h y la identidad de Parseval de un modo adecuado, se puede probar (véase el Apéndice en [**Ku**])

$$k(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \tanh(\pi t) h(t) dt, \tag{2.3}$$

este igualdad se puede encontrar en [**Se 1**] con relación al término principal de la fórmula de la traza de Selberg.

$a)$ Hallando la transformada inversa de Selberg–Harish-Chandra , tras un cambio de variable se tiene

$$k_1 \left(\frac{\cosh u - 1}{2} \right) = \sqrt{2}\, \pi^{-3/2} T^3 \int_u^{\infty} \frac{w e^{-w^2 T^2}}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw. \tag{2.4}$$

Definiendo

$$f(w) = \frac{w\, e^{-w^2 T^2}}{\sinh w},$$

f decrece en $w > 0$, integrando por partes en (2.4) obtenemos

$$k_1 \left(\frac{\cosh u - 1}{2} \right) = 2\sqrt{2}\, \pi^{-3/2} T^3 \int_u^{\infty} f'(w) \sqrt{\cosh w - \cosh u}\, dw.$$

Derivando con respecto a u, se deduce que $k_1(t)$ decrece para valores positivos de t, entonces por (2.3) después de una estimación trivial concluimos

$$k_1 \left(\frac{\cosh u - 1}{2} \right) \ll T^2. \tag{2.5}$$

Esta cota es esencialmente lo mejor posible si $uT \ll 1$. Si $uT \gg 1$ procedemos de la siguiente forma:

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) = \sqrt{2}\,\pi^{-3/2}T^3 \int_u^{u+1/uT^2} + \sqrt{2}\,\pi^{-3/2}T^3 \int_{u+1/uT^2}^{\infty} = I_1 + I_2.$$

Utilizando que f es decreciente,y nuestra hipótesis $uT \gg 1$

$$I_1 \ll T^3 f(u) \int_u^{u+1/uT^2} \frac{\sinh w}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw \ll T^2 e^{-T^2u^2},$$

de la misma forma

$$I_2 \ll \frac{T^3}{\sqrt{\cosh(u+1/uT^2) - \cosh u}} \int_{u+1/uT^2}^{\infty} we^{-w^2T^2} dw \ll T^2 e^{-T^2u^2}.$$

Así pues el resultado es cierto si $uT \gg 1$, y por (2.5) se cumple en el resto de los casos.

b) En este caso la fórmula para invertir la transformada de Selberg–Harish-Chandra da

$$k_2\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) = 2^{-1/2}\,\pi^{-3/2}T^3 \int_u^{\infty} \frac{g(w)}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw \tag{2.6}$$

donde

$$g(w) = (w+r)e^{-(w+r)^2T^2} + (w-r)e^{-(w-r)^2T^2}.$$

Podemos suponer que $rT > 1$ (y por tanto $uT > 1$ si $u \neq 0$), ya que en otro caso tras algunos cálculos se tiene

$$g(w) \ll w\,e^{-(w-r)^2T^2} \ll w\,e^{-cw^2T^2}$$

y por *a*) el resultado quedaría probado.

Dividamos el rango de integración en (2.6) de la manera siguiente

$$\int_u^\infty \frac{g(w)}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw = \int_u^{u+T^{-1}} + \int_{u+T^{-1}}^\infty = I_1 + I_2.$$

Para la primera integral usamos la cota

$$I_1 \ll T^{-1} e^{-c(u-r)^2T^2} \int_u^{u+T^{-1}} \frac{1}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw \ll u^{-1/2} T^{-3/2} e^{-c(u-r)^2T^2}$$

y de la misma forma

$$I_2 \ll \frac{1}{\sqrt{\cosh(u+T^{-1}) - \cosh u}} \int_{u+T^{-1}}^\infty g(w)dw \ll u^{-1/2} T^{-3/2} e^{-c(u-r)^2T^2}$$

recordando que en nuestras hipótesis $u > T^{-1}$, se concluye $b)$ si $u \geq r$.

Por otra parte si $u = 0$, gracias a (2.3)

$$k_2(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty t \tanh(\pi t)\, e^{-t^2/4T^2} \cos(rt) dt \ll T^2$$

e integrando por partes

$$k_2(0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(rt) dt$$

donde $f(t)$ es una función que no depende de T con variación acotada. Por el segundo teorema del valor medio se obtiene

$$k_2(0) \ll r^{-1} \int_a^b \sin(rt) dt \ll r^{-2}$$

y esto termina la demostración. ∎

<u>Dem. del Lema 4:</u> Usando la definición, la transformada de Selberg–Harish-Chandra de $k_1 * k_2$ viene dada por

$$\int_{\mathbb{H}} \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,v)) k_2(u(v,i)) (\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(v) d\mu(z)$$

y esto se puede escribir como

$$h(t) = \int_{\mathbb{H}} k_2(u(v,i))(\operatorname{Im} v)^{1/2+it} \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,v)) \Big(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im} v} \Big)^{1/2+it} d\mu(z) d\mu(v). \tag{2.7}$$

La integral interior no depende de v, una demostración de este hecho no trivial se puede encontrar en [**Iw 2**] (véase también [**Ku**]). No repetiremos aquí la demostración, pero nos gustaría mencionar que esta basada en la conmutatividad del operador de Laplace-Beltrami, Δ, con los operadores integrales invariantes en $\mathbb{H}$, de lo que se puede deducir que los autoespacios de Δ (actuando sobre $\Gamma\backslash\mathbb{H}$) son preservados, en particular

$$\int_{\mathbb{H}} k(u(z,v))(\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(z) = \alpha\, (\operatorname{Im} v)^{1/2+it}$$

donde α sólo depende del autovalor $1/4 + t^2$.

Una vez que uno sabe que la integral no depende de v, la demostración se puede terminar fácilmente, ya que eligiendo $v = i$ en la integral mas interior de (2.7)

$$h(t) = \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,i))(\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(z) \int_{\mathbb{H}} k_2(u(v,i))(\operatorname{Im} v)^{1/2+it} d\mu(v)$$

y estas son las definiciones de k_1 y k_2. ■

<u>Dem. del Lema 5:</u> Consideremos los núcleos invariantes

$$k_1(u(z,w)) = \chi\big((s+H)^{-1}\rho(z,w)\big) \qquad k_2(u(z,w)) = \frac{\chi\big(H^{-1}\rho(z,w)\big)}{4\pi \sinh^2(H/2)} \qquad k = k_1 * k_2$$

donde $s = \operatorname{arc\,cosh}(x/2)$ y χ es la función característica del intervalo [0,1].

La integral de $k_2(u(z,w))$ con respecto a z ó w es uno. Por la definición de convolución y la desigualdad triangular para la distancia ρ, se deduce que $k(u)$ toma el valor uno si $u + 1/2 \leq x/4$, así pues

$$H(x; z, w) \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} k(u(\gamma z, w)). \tag{2.8}$$

Sea h la transformada de Selberg–Harish-Chandra de k, por el Lema 1, el Lema 2 y el Lema 4, se tiene

$$(2.9)\quad h(t)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(|t|)}{\Gamma(|t|+3/2)}x^{1/2+|t|}+O\big(x^{1/2}+xH\big)\qquad \text{si } \operatorname{Re}t=0 \text{ y } 0<\epsilon<|\operatorname{Im}t|\le 1/2$$

y (recuérdese que $s=\operatorname{arc}\cosh(x/2)>0$)

$$(2.10)\qquad h(t)=g(|t|)+O\big(e^{s/2}|t|^{-5/2}\big)\qquad \text{si } t\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Con esto el lema se deduce del desarrollo espectral de k en (2.8) y las fórmulas asintóticas (2.9) y (2.10). Lo único que se debe comprobar es que la contribución del término de error en (2.10) es absorbida por el término de error en el enunciado del lema, pero esto es una sencilla consecuencia de la desigualdad de Bessel (véase Prop. 2.7 de [**Iw 2**] o la demostración del Teorema 2.1 más abajo). ■

æ

§4. Demostración de los resultados principales

<u>Dem. del Teorema 2.1:</u>

Por dualidad, existe un vector unitario complejo $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_R)$ tal que

$$S = \Big(\sum_{\nu=1}^{R} b_\nu \Big(\sum_{|t_j| \le T} a_j u_j(z_\nu) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} a_{\mathbf{a}}(t) E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2 + it) dt \Big)^l \Big)^2$$

y desarrollando la potencia l-ésima

$$S = \Big(\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{(4\pi)^k} \binom{l}{k} \sum_{|t_{j_1}|, \dots |t_{j_{l-k}}| \le T} \ \sum_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k} \int_{[-T,T]^k} a_{j_1} \dots a_{j_{l-k}} a_{\mathbf{a}_1}(r_1) \dots a_{\mathbf{a}_k}(r_k) \widetilde{S} d\vec{r} \Big)^2$$

donde

$$\widetilde{S} = \sum_{\nu=1}^{R} b_\nu u_{j_1}(z_\nu) \dots u_{j_{l-k}}(z_\nu) E_{\mathbf{a}_1}(z_\nu, 1/2 + ir_1) \dots E_{\mathbf{a}_k}(z_\nu, 1/2 + ir_k).$$

Por la desigualdad de Cauchy para el producto escalar de $\mathbb{C}^{l-k} \times \big(L^2(\mathbb{R})\big)^k$

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{k=0}^{l} \sum_{|t_{j_1}|, \dots |t_{j_{l-k}}| \le T} \ \sum_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k} \int_{[-T,T]^k} \big|\widetilde{S}\big|^2 d\vec{r}$$

$$\ll ||a||_*^{2l} \sum_{k=0}^{l} \sum_{|t_{j_1}|, \dots |t_{j_{l-k}}| \le T} \ \sum_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k} \int_{\mathbb{R}^k} \phi(t_{j_1}, \dots, t_{j_{l-k}}, r_1, \dots, r_k) \big|\widetilde{S}\big|^2 d\vec{r}$$

donde

$$\phi(t_{j_1}, \dots, t_{j_{l-k}}, r_1, \dots, r_k) = e^{-(t_{j_1}^2 + \dots + t_{j_{l-k}}^2 + r_1^2 + \dots + r_k^2)/4T^2}.$$

Por la definición de $\widetilde{S}$ se tiene

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{\nu,\mu=1}^{R} b_\nu \overline{b_\mu} \big(S_{\nu\mu}\big)^l \tag{2.11}$$

donde

(2.12)

$$S_{\nu\mu} = \sum_j e^{-t_j^2/4T^2} u_j(z_\nu)\overline{u_j(z_\mu)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4T^2} E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(z_\mu, 1/2+it)}dt.$$

Ahora podemos considerar esta expresión como el desarrollo espectral de un núcleo automorfo. Usando los resultados enunciados en §1

$$S_{\nu\mu} = \sum_{\gamma\in\Gamma} k_1(u(\gamma z_\nu, z_\mu))$$

donde k_1 viene dado por el Lema 3. Por tanto

$$S_{\nu\mu} \ll T^2 \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-T^2\rho(\gamma z_\nu, z_\mu)}. \tag{2.13}$$

Podemos suponer, quizá tomando un representante adecuado de la órbita de z_ν, que $d(z_\nu, z_\mu) = \rho(z_\nu, z_\mu)$, esto es, el mayor término bajo el sumatorio ocurre cuando $\gamma = Id$. En algunas "posiciones antipodales" especiales de z_ν y z_μ pueden existir varios γ con $d(z_\nu, z_\mu) = \rho(z_\nu, z_\mu)$, pero este caso puede ser estudiado directamente o evitado mediante un desplazamiento infinitesimal de z_ν ó z_μ.

Definamos

$$d_*(z_\nu, z_\mu) = \inf_{\gamma\neq Id} \rho(\gamma z_\nu, z_\mu).$$

Por nuestras hipótesis $y_{\Gamma}(z_\nu) < M$ se tiene $d_*(z_\nu, z_\mu) \gg M^{-1}$, supondremos inicialmente que $d(z_\nu, z_\mu) \gg T^{-1}$, así pues

$$d_*(z_\nu, z_\mu) \gg M^{-1} + T^{-1}. \tag{2.14}$$

Ahora definamos

$$c(r) = \#\{\gamma \neq Id \,/\, r < \rho(\gamma z_\nu, z_\mu) \leq 2r\},$$

por estimaciones para el problema del círculo hiperbólico que están basadas solamente en contar matrices (véase el Lema 2.11 de [**Iw 2**]) se tiene

$$c(r) \ll Mr + 1 \quad \text{si } 0 < r \leq 1 \qquad \text{y} \qquad c(r) \ll Me^r \quad \text{si } r > 1,$$

entonces por (2.13)

$$S_{\nu\mu} \ll T^2 e^{-T^2 d^2(z_\nu, z_\mu)} + T^2 \sum_{k=0}^{\infty} c\big(2^k d_*(z_\nu, z_\mu)\big) e^{-\frac{T^2}{2} 2^{2k} d_*^2(z_\nu, z_\mu)},$$

y de las cotas para $c(r)$ y (2.14)

$$S_{\nu\mu} \ll (T^2 + TM) e^{-\frac{T^2}{2} d^2(z_\nu, z_\mu)}. \tag{2.15}$$

Hemos probado esta estimación bajo la hipótesis de que $d(z_\nu, z_\mu) \gg T^{-1}$, pero en otro caso se puede aplicar a (2.12) la desigualdad de Cauchy y la siguiente consecuencia de la desigualdad de Bessel en $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ (véase la Proposición 2.7 en [**Iw 2**]):

$$\sum_{|t_j|<T} |u_j(z)|^2 + \sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} |E_{\mathbf{a}}(z, 1/2 + it)|^2 dt \ll T^2 + T y_{\Gamma}(z) \tag{2.16}$$

y (2.15) se sigue fácilmente si $d(z_\nu, z_\mu) \ll T^{-1}$.

Sustituyendo (2.15) en (2.11) se obtiene

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{\nu,\mu=1}^{R} \big(|b_\nu|^2 + |b_\mu|^2\big) |S_{\nu\mu}|^l \ll ||a||_*^{2l} (T^2 + TM)^l \sum_\nu |b_\nu|^2 \sum_\mu e^{-\frac{T^2 l}{2} d^2(z_\nu, z_\mu)}. \tag{2.17}$$

Un círculo hiperbólico de radio r tiene área $4\pi \sinh^2(r/2)$, entonces por la condición de espaciamiento, el número de z_ν incluidos en él está acotado por

$$\frac{\sinh^2(r+\delta)/2}{\sinh^2 \delta/2} \ll \cosh^2 r/2 + \frac{\sinh^2 r/2}{\tanh^2 \delta/2}$$

y esto es también una cota para los z_μ con $r/2 < d(z_\nu, z_\mu) \le r$, por tanto

$$\sum_\mu e^{-\frac{T^2 l}{2} d^2(z_\nu, z_\mu)} \ll 1 + T^{-2}\delta^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\cosh^2 2^k/T + \frac{\sinh^2 2^k/T}{\tanh^2 \delta/2} \right) e^{-l 2^{2k-1}} \ll 1 + T^{-2}\delta^{-2},$$

sustituyendo esta desigualdad en (2.17) se termina la demostración. ∎

<u>DEM. DEL COROLARIO 2.1.1:</u>

Nótese que en el Lema 5 $E_T(x; z, w)$ se aproxima a cero rápidamente cuando T es mucho mayor que H^{-1}. Suprimiendo la última parte de la serie que contribuye menos que el término de error y aplicando la desigualdad de Hölder a los $O\big(H^{-\epsilon}\big)$ términos restantes, se tiene que existe un valor de T tal que

$$\sum_\nu |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll H^{-\epsilon} \sum_\nu |E_T(x; z_\nu, w)|^{2l} + R(x^l M^l + x^{2l} H^{2l}) \tag{2.18}$$

y

$$\sum_\nu |E_T(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll x^l \sup_{T \le H^{-1}} T^{-3l} S + x^l H^{-3l} \sup_{T \ge H^{-1}} T^{-6l} S \tag{2.19}$$

donde S esta definido como en el Teorema 2.1 con ciertos coeficientes

$$a_j \ll u_j(w) \qquad a_{\mathbf{a}}(t) \ll E_{\mathbf{a}}(w, 1/2 + it) \qquad \text{con } T < |t_j|, |t| \le 2T \quad t_j, t \in \mathbb{R}.$$

Por (2.19) y Teorema 2.1 usando (2.16), se obtiene

$$\sum_\nu |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll \big(H^{2-l-\epsilon} + M^l\big) x^l \delta^{-2} + x^l H^{-l-\epsilon} + x^l H^{-\epsilon} M^l + R x^l + R x^{2l} H^{2l}$$

eligiendo $H = R^{-1/3l}x^{-1/3}$ (si R es mayor que cierta potencia de x, $H = x^{-1/2}$ da un mejor resultado) y usando que $R\delta^2 \ll 1$ el corolario queda probado. ■

<u>Dem. del Corolario 2.1.2:</u>

La demostración es una consecuencia directa del Corolario 2.1.1, ya que si $l = 1, 2$

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll M^l x^{l+\epsilon}\delta^{-2} + x^{4l/3+\epsilon}R^{1/3} + x^{l+\epsilon}M^l$$

y por nuestras hipótesis se tiene $\delta^{-2} \asymp R$, $R > x^{l/2}$ y $M \asymp 1$. ■

<u>Dem. del Teorema 2.2:</u>

Comenzamos siguiendo el mismo argumento que en el Teorema 2.1, la única diferencia es que $u_j(z_\nu)$ y $E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2+it)$ se ven reemplazados por $x_\nu^{it_j}u_j(z)$ y $x_\nu^{it}E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)$ respectivamente, de modo que obtenemos la misma desigualdad

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{\nu,\mu=1}^{R} b_\nu \overline{b_\mu} \big(S_{\nu\mu}\big)^l \tag{2.20}$$

pero en este caso

$$S_{\nu\mu} = \sum_j e^{-t_j^2/4T^2} x_\nu^{it_j} x_\mu^{-it_j} u_j(z)\overline{u_j(z)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4T^2} x_\nu^{it} x_\mu^{-it} E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)}dt.$$

Nótese que gracias a nuestro convenio con respecto al signo de t_j podemos escribir $S_{\nu\mu}$ como

$$\sum_j e^{-t_j^2/4T^2}\cos(r_{\nu\mu}t_j)u_j(z)\overline{u_j(z)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4T^2}\cos(r_{\nu\mu}t)E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)}dt$$

donde

$$r_{\nu\mu} = |\log(x_\nu/x_\mu)| \ll X^{-1}|x_\nu - x_\mu|.$$

Podemos suponer (quizá dividiendo en primer lugar el intervalo $[X, 2X]$ en un cierto número de subintervalos) que $\rho(\gamma z, z) > r_{\nu\mu}/2$ si γ no es la identidad, así pues por el desarrollo espectral de núcleos automorfos dado en §1 y por el Lema 3 *b*)

$$S_{\nu\mu} \ll \min\left(T^2, r_{\nu\mu}^{-2}\right) + T^2 \sum_{\gamma \neq Id} e^{-cT^2(\rho(\gamma z,z)-r_{\nu\mu})^2} \ll \min\left(T^2, X^2|x_\nu - x_\mu|^2\right).$$

Sustituyendo en (2.20)

$$S \ll ||a||_*^{2l}\left(T^{2l}S_1 + X^{2l}S_2\right) \tag{2.21}$$

donde

$$S_1 = \sum_{|x_\nu - x_\mu| \leq XT^{-1}} |b_\nu||b_\mu| \qquad S_2 = \sum_{|x_\nu - x_\mu| > XT^{-1}} |b_\nu||b_\mu||x_\nu - x_\mu|^{-2l}.$$

Ahora usamos las desigualdades habituales (véase Sec. 2 de [**Bo**] o Ch. 1 de [**Mo**])

$$S_1 \ll \sum_{|x_\nu - x_\mu| \leq XT^{-1}} (|b_\nu|^2 + |b_\mu|^2) \ll \sum_\nu |b_\nu|^2 \#\{x_\nu \,/\, |x_\nu - x_\mu| \leq XT^{-1}\} \ll 1 + X\delta^{-1}T^{-1}$$

y de la misma forma

$$S_2 \ll \sum_{|x_\nu - x_\mu| > XT^{-1}} |b_\nu|^2|x_\nu - x_\mu|^{-2l} \ll \sum_\nu |b_\nu|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(XT^{-1} + k\delta\right)^{-2l} \ll X^{-2l+1}\delta^{-1}T^{2l-1}.$$

Poniendo estas estimaciones en (2.21) el teorema queda demostrado. ■

<u>Dem. del Corolario 2.2.1:</u>

Con el mismo razonamiento que en la demostración del Corolario 2.1.1, se tiene que para un valor de T adecuado

$$\sum_\nu |E(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll H^{-\epsilon} \sum_\nu |E_T(x; z_\nu, w)|^{2l} + Rx^l + Rx^{2l}H^{2l} \tag{2.22}$$

donde E_T está definido como en el Lema 5. Siguiendo la notación de ese lema, podemos escribir $g(t)$ (cuando $x = x_\nu$) como

$$g(t) = a(H,t)\, e^{its_\nu} + b(H,t)\, e^{-its_\nu}$$

donde $s_\nu = \operatorname{arc\,cosh}(x_\nu/2)$ y

$$a(H,t), b(H,t) \ll X^{1/2}|t|^{-3/2} \min\big(1, (H|t|)^{-3/2}\big).$$

Así pues, como en la demostración del Corolario 2.1.1, se tiene

$$\sum_\nu |E_T(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll X^l \sup_{T \le H^{-1}} T^{-3l} S + X^l H^{-3l} \sup_{T \ge H^{-1}} T^{-6l} S$$

donde S es una suma similar a la del Teorema 2.2 pero cambiando x_ν por e^{s_ν}, y con coeficientes

$$a_j \ll u_j(w) \qquad a_{\mathbf{a}}(t) \ll E_{\mathbf{a}}(w, 1/2 + it) \qquad \text{con } T < |t_j|, |t| \le 2T \quad t_j, t \in \mathbb{R}.$$

Por (2.22) y el Teorema 2.2 (nótese que $x_1, x_2, \dots$ están δ-espaciados y esto implica que $e^{s_1}, e^{s_2}, \dots$ están η-espaciados con $\eta \asymp \delta$) usando (2.16) para acotar $||a||_*$ se tiene

$$\sum_\nu |E(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll H^{-\epsilon}\big(1 + H^{1-l}\big) X^{l+1}\delta^{-1} + X^l H^{-l-\epsilon} + RX^l + RX^{2l}H^{2l} \tag{2.23}$$

eligiendo $H = \max\big(X^{-1/2}, R^{-1/3l}X^{-1/3}\big)$ la prueba se completa. ■

<u>Dem. del Corolario 2.2.2:</u>

Si $l = 1$ el Corolario 2.2.1 se reduce a

$$\sum_\nu^R |E(x_\nu; z, w)|^2 \ll X^{2+\epsilon}\delta^{-1} + R^{1/3}X^{4/3+\epsilon}$$

y reemplazando δ^{-1} por RX^{-1}, cuando $R > X^{1/2}$ el primer término domina al segundo. ■

Dem. del Corolario 2.2.3:

En el Capítulo 12 de [**Iw 2**] se demuestra que

$$\mathcal{C}(x)=E(4x+2;i,i)+2 \qquad \text{si} \quad \Gamma=\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\cap\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \mod 2\right\},$$

entonces por (2.23) eligiendo $l=1$, $\delta=q$ y $H=cX^{\alpha-1}$ con una constante positiva, c, suficientemente pequeña, se tiene

$$X^{2\alpha}\#\{x\equiv a\ (q)\ \ x\asymp X\,/\,|\mathcal{C}(x)|>x^{\alpha}\}\ll X^{2+\epsilon}q^{-1}+X^{2-\alpha},$$

obsérvese que para $q=1$ esto no es otra cosa que la desigualdad de Chebychev.

Sumando sobre los intervalos diádicos cuya unión es $[1,2X]$, se tiene

$$\#\{x\equiv a\ (q)\ \ x\le X\,/\,|\mathcal{C}(x)|>x^{\alpha}\}\ll X^{2-2\alpha+\epsilon}q^{-1}+X^{2-3\alpha}$$

de donde se deduce el corolario. ∎

Dem. del Teorema 2.3:

El principio de la demostración es esencialmente la misma que en el caso hiperbólico si olvidamos la contribución de la parte continua (véase la prueba del Teorema 2.1). Así pues, de manera similar por dualidad, encontramos un vector unitario $\vec{b}=(b_1,b_2,\dots,b_R)$ tal que si llamamos S a la parte izquierda de la desigualdad del teorema

$$S=\left(\sum_{\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_l}\le\Lambda} a_{j_1}\cdot\ldots\cdot a_{j_l}\sum_{\nu=1}^{R} b_\nu\phi_{j_1}(x_\nu)\cdot\ldots\cdot\phi_{j_l}(x_\nu)\right)^2$$

y por la desigualdad de Cauchy e introduciendo un factor regularizante de la forma $e^{-\lambda_j/\Lambda}$, se tiene

(2.24) $$S\ll\left(\sum_{\lambda_j\le\Lambda}|a_j|^2\right)^l\sum_{\nu,\mu} b_\nu\overline{b_\mu}\,(S_{\nu\mu})^l$$

donde

$$S_{\nu\mu} = \sum_{\lambda_j} e^{-\lambda_j/\Lambda} \phi_j(x_\nu)\overline{\phi_j(x_\mu)}.$$

Nótese que $S_{\nu\mu}$ puede considerarse como la solución fundamental de la ecuación del calor. Concretamente, si definimos $u(x, y, t)$ con $x, y \in M$ y $t \in \mathbb{R}^+$ como la solución de

$$\text{(2.25)} \qquad \begin{cases} Lu = 0 \\ u(x, y, 0) = \delta_y(x) \end{cases} \qquad L = -\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x \qquad \delta_y = \text{ delta de Dirac en } y$$

entonces se tiene

$$\text{(2.26)} \qquad S_{\nu\mu} = u(x_\nu, x_\mu, \Lambda^{-1}).$$

Sólo necesitaremos una cota superior para $S_{\nu\mu}$, pero nos gustaría señalar que un análisis mas cuidadoso permite obtener un desarrollo asintótico para $S_{\nu\mu}$ llamado el desarrollo de Minakshisundaram-Pleijel (véase [**Mi-Pl**] y[**Be-Ga-Ma**]), el cual tras ser integrado en $x_\nu = x_\mu$ se puede interpretar en términos de invariantes geométricos, obteniéndose una fórmula que relaciona sumas que contienen autovalores con una suma que tiene significado geométrico. Esta es la base para la demostración analítica del famoso Teorema de Atiyah-Singer (véase [**Bo-Bl**] y [**Gi**]) del que se pueden deducir varios teoremas clásicos del índice como Gauss-Bonnet o Riemann-Roch.

Para estudiar la solución de (2.25) seguiremos [**Be-Ga-Ma**] (véase también pag. 804 de [**Ko**] para un breve esbozo de las ideas más importantes). Sugerimos el interesante trabajo [**Ka**] para una visión física intuitiva de varias de las ideas involucradas.

En primer lugar se construye una parametriz de L, esto es en algún sentido una solución aproximada de (2.25). El resultado preciso es el siguiente (véase Définition E.III.2 y Lemme E.III.3 de [**Be-Ga-Ma**]):

Existen funciones $u_1, u_2 \dots \in C^\infty(M \times M)$ que sólo dependen de la métrica de M y $\rho \in \mathbb{R}$ tales que dada $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\eta(r) = 1$ si $|r| \le \rho$ y $\eta(r) = 0$ if $|r| > 2\rho$, la función definida por

$$H_k(x,y,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} (u_0 + tu_1 + \cdots + t^k u_k) \eta\big(d(x,y)\big)$$

verifica

$$H_k \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}^+) \qquad \lim_{t \to 0^+} H_k(x,y,t) = \delta_y(x) \qquad k > \frac{n}{2} + l \Rightarrow LH_k \in C^l(M \times M \times \mathbb{R}^+).$$

Además, si $d(x,y) < \rho$

$$LH_k(x,y,t) = (4\pi)^{-n/2} t^{-n/2+k} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \Delta_x u_k.$$

Partiendo de H_k, $k > n/2 + 2$, es posible construir la solución, u, de (2.25) iterando cierto operador integral cuyo punto fijo es u (véase [**Ko**]), concretamente el resultado es (véase Proposition E.III.8 de [**Be-Ga-Ma**]):

$$u = H_k - Q_k * H_k \qquad \forall k > \frac{n}{2} + 2 \tag{2.27}$$

donde la "convolución" $A * B$ viene definida por

$$A * B(x,y,t) = \int_0^t \int_M A(x,z,\tau) B(z,y,t-\tau) dV d\tau$$

y

$$Q_k = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} (LH_k)^{*j} \qquad \text{con } (LH_k)^{*j} = LH_k * \overset{l \text{ veces}}{\cdots} * LH_k.$$

Se puede probar (véase Lemme E.III.6 de [**Be-Ga-Ma**]) que Q_k es menor que una potencia positiva de t, así pues por (2.27) y la definición de H_k se tiene que para valores pequeños de t

$$u(x,y,t) \ll t^{-n/2} e^{-c\frac{d^2(x,y)}{4t}}.$$

Por (2.26) y sustituyendo en (2.24) se tiene

$$S \ll \Lambda^{nl/2}\Big(\sum_{\lambda_j\le\Lambda}|a_j|^2\Big)^l\sum_{\nu,\mu}|b_\nu||b_\mu|e^{-c\Lambda d^2(x_\nu,x_\mu)}$$

por tanto

$$S \ll \Lambda^{nl/2}\Big(\sum_{\lambda_j\le\Lambda}|a_j|^2\Big)^l\sum_{\nu}|b_\nu|^2\sum_{\mu}e^{-c\Lambda d^2(x_\nu,x_\mu)}. \tag{2.28}$$

Por la condición de espaciamiento

$$\#\big\{\mu\,/\,d^2(x_\nu,x_\mu)<r\big\}\ll 1+\delta^{-n}\min\big(r,\mathrm{d}(M)\big)$$

donde $\mathrm{d}(M)$ es el diámetro de M. Así pues

$$\sum_\mu e^{-c\Lambda d^2(x_\nu,x_\mu)}\ll 1+\Lambda^{-n/2}\delta^{-n}$$

y sustituyendo en (2.28) se concluye la demostración. ∎

<u>Dem. del Corolario 2.3.1:</u>

Resolviendo la ecuación de ondas (véase [**Co-Hi**]), con la notación del Teorema 2.3 se tiene

$$u(x,t)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}\big(c_j\cos(\sqrt{\lambda_j}t)+\frac{d_j}{\sqrt{\lambda_j}}\sin(\sqrt{\lambda_j}t)\big)\phi_j(x)$$

con

$$f(x)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}c_j\phi_j(x)\qquad g(x)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}d_j\phi_j(x).$$

Por el Teorema 2.3 con $l=1$

$$\sum_\nu\frac{1}{2}|u_t(x_\nu,t)|^2\ll\big(\Lambda^{n/2}+\delta^{-n}\big)\sum_{\lambda_j\le\Lambda}\big(\lambda_j|c_j|^2+|d_j|^2\big). \tag{2.29}$$

Por definición, el sumatorio de la parte derecha es la suma de las energías cinéticas de p_ν, y el de la parte izquierda es E, la energía de u (véase [**Co-Hi**] y [**Fe**]).

Finalmente, por nuestras hipótesis en el espaciamiento y el tamaño de δ, se concluye

$$\Lambda^{n/2} + \delta^{-n} \ll \delta^{-n} \ll R$$

y el resultado se sigue de (2.29). ∎

æ

CAPÍTULO III

Problemas de Puntos del Retículo

Dado $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio convexo tal que su frontera, ∂D, es una curva cerrada simple con radio de curvatura dos veces diferenciable y distinto de cero en cada punto. Consideremos el problema de puntos del retículo asociado a D, esto es, queremos estimar

$$P_D(x) = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \cap \sqrt{x}D\right\} - |D|x \qquad \text{con } x > 1$$

donde $\sqrt{x}D$ es el dilatado de D por una homotecia de razón $\sqrt{x}$ y $|D|$ es el área de D.

La conjetura es $P_D(x) \ll x^{1/4+\epsilon}$ y está motivada por ideas probabilísticas acerca de sumas trigonométricas, en cierta manera análogas a la hipótesis de Lindelöf. El mejor resultado hasta la fecha se debe a Huxley (véase [**Hu 2**]), que reemplaza el 1/4 de la conjetura por 23/73.

Kendall demostró que la conjetura es cierta promediando sobre todos los trasladados de D (véase [**Ke**]), concretamente definiendo

$$P_D(x;a,b) = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, (m-a, n-b) \in \sqrt{x}D\right\} - |D|x$$

se tiene

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |P_D(x;a,b)|^2 da db\right)^{1/2} \ll x^{1/4}.$$

En este capítulo estudiaremos resultados en promedio sobre centros y radios con una condición de espaciamiento. Como ya mencionamos en el capítulo anterior, este tipo de resultados están más de acuerdo con la idea estadística de promedio que los resultados integrales, ya que se fija una muestra finita y que de alguna manera es representativa del conjunto donde se promedia.

En la primera sección, siguiendo las líneas del Capítulo II, daremos los resultados correspondientes para centros bien espaciados y deduciremos que la conjetura también es cierta en promedio de orden cuatro sobre los centros.

En la segunda sección consideraremos sólo los problemas del círculo y del divisor. En estos casos, por las especiales propiedades aritméticas de ciertas transformadas de Fourier, se pueden agrupar varios términos oscilatorios después de la fórmula de sumación de Poisson para obtener las llamadas fórmulas de Hardy-Voronoï. De esta manera se hacen aparecer sumas unidimensionales sobre los enteros en lugar de sumas sobre autovalores o autofunciones y los resultados que se consiguen al promediar sobre radios bien espaciados son más fuertes que los correspondientes para otros problemas (comparénse los resultados de §2 con los corolarios 2.2.1 y 2.2.2 del Capítulo II).

æ

§1. Promedio sobre los centros en dominios generales

Comenzamos dando la definición de espaciamiento sobre los centros:

<u>DEFINICIÓN:</u> *Diremos que* $(a_\nu, b_\nu) \in (0,1] \times (0,1]$ *son centros* δ*-espaciados si se verifica*

$$\langle a_\nu - a_\mu \rangle^2 + \langle b_\nu - b_\mu \rangle^2 \geq \delta^2 \quad \forall \nu \neq \mu$$

donde $\langle \cdot \rangle$ *es la distancia al entero más cercano.*

<u>Observación:</u> *Nótese que esta definición coincide con la dada en la segunda sección del Capítulo* II *para puntos* δ*-espaciados en* M*, si* M *es el toro plano bidimensional* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Con esta notación los resultados de esta sección son los siguientes:

Teorema 3.1: *Sean* (a_ν, b_ν) $\nu = 1, 2, \ldots, R$ *centros* δ*-espaciados y* l *un entero positivo fijado, entonces*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |P_D(x; a_\nu, b_\nu)|^{2l} \ll \big(1 + R^{(l-2)/3l} x^{(l-2)/6}\big) x^{l/2+\epsilon} \delta^{-2} + R^{1/3} x^{2l/3+\epsilon}$$

donde la constante "$\ll$*" depende de* D *y* l*.*

Corolario 3.1.1: *Para cada* $\epsilon > 0$

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |P_D(x; a, b)|^4 da db \right)^{1/4} \ll x^{1/4+\epsilon}.$$

æ

§2. Promedio sobre los radios en el problema del círculo y del divisor

Las fórmulas truncadas de Hardy-Voronoï (véase 3.17, 13.75 en [**Iv**] y [**Ha 2**]) afirman lo siguiente:

Si $\Delta(x)$ es el error en el problema del divisor

$$\Delta(x) = \frac{x^{1/4}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n\leq N} \frac{d(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \pi/4) + O\big(x^{\epsilon}\big) + O\big(x^{1/2+\epsilon}N^{-1/2}\big)$$

y análogamente si $P(x)$ es el error en el problema del círculo

$$P(x) = -\frac{x^{1/4}}{\pi} \sum_{n\leq N} \frac{r(n)}{n^{3/4}} \cos(2\pi\sqrt{nx} + \pi/4) + O\big(x^{\epsilon}\big) + O\big(x^{1/2+\epsilon}N^{-1/2}\big).$$

En ambos casos aparecen sumas de la forma

$$S_N(x) = \sum_{n\asymp N} a_n e(\sqrt{nx}) \qquad \text{con} \qquad a_n \ll x^{1/4}N^{-3/4+\epsilon}.$$

Nuestros resultados de esta sección se derivan de desigualdades de gran criba para este tipo de sumas. El primer resultado se deduce esencialmente de la desigualdad de gran criba clásica aproximando la fase $\sqrt{nx}$ por polinomios lineales en n.

Teorema 3.2: *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_R \in [X, 2X]$ puntos δ-espaciados con la distancia usual en $\mathbb{R}$ (esto es, $\nu \neq \mu \Rightarrow |x_\nu - x_\mu| > \delta$) y sea $\mathcal{E}(x)$ el error en el problema del círculo o del divisor, entonces fijado l se tiene*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{(l+2)/2+\epsilon}\delta^{-1}\big(1 + R^{(l-2)/(3l-1)}X^{(l-1)(l-2)/(6l-2)}\big) + R^{(l-1)/(3l-1)}X^{2l^2/(3l-1)+\epsilon}$$

donde la constante "$\ll$" sólo depende de l.

El análogo del Corolario 3.1.1 es ahora (compárese con[**Ha 2**])

Corolario 3.2.1: *Para* $l = 1, 2$

$$\left(\int_X^{2X} |\mathcal{E}(x)|^{2l} \right)^{1/2l} \ll X^{1/4+\epsilon}.$$

<u>Observación:</u> *Este resultado es mucho más débil que el obtenido recientemente por Tsang que calcula la constante "$\ll$" usando métodos más directos (véase* [**Ts**]*). Obsérvese sin embargo que la desigualdad de Erdös-Turán utilizada en* [**Ts**] *para estudiar la convergencia de ciertas series es otra formulación de la gran criba y ciertos términos de error podrían ser reducidos usando resultados similares a los de esta sección.*

Cuando el espaciamiento, δ, es muy grande el Teorema 3.2 llega a ser trivial, en este caso es ventajoso usar la teoría de pares de exponentes (véase [**Gr-Ko**]) para estimar ciertas sumas trigonométricas y optimizar en otros rangos, el resultado que se obtiene es el siguiente:

Teorema 3.3: *Con la notación del Teorema 3.2, si* (p, q) *es un par de exponentes de van der Corput con* $2q - p - 1 > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^l \delta^{-l} + RX^{ql} \delta^{(p-2q+1)l} + R\delta^{2l}.$$

<u>Observación:</u> *Un resultado de este tipo con* $l = 1$ *fue demostrado por Ivić (véase Sec. 13.7 de* [**Iv**]*) para obtener estimaciones para la medida de los conjuntos*

$$\{x \in [X, 2X] \,/\, |\mathcal{E}(x)| > \lambda\}$$

y con ello calcular momentos de $\mathcal{E}(x)$ *de orden mayor que cuatro. Su trabajo está estrechamente ligado al de Heath-Brown para estimar el momento de orden doce de la función* ζ *de Riemann (véase el capítulo 8 de* [**Iv**]*).*

æ

§3. Demostración de los resultados principales

DEM. DEL TEOREMA 3.1:

Sea χ_D la función característica de D y χ_H la función característica de la bola de radio $H^{1/2}$ donde $1 > H > x^{-1/2}$ es un número que será elegido más adelante. Sea f la función definida por

$$f = f_D * f_H \qquad \text{donde } f_D(\vec{r}) = \chi_D\left(\frac{\vec{r}}{\sqrt{x}+\sqrt{H}}\right) \quad \text{y} \quad f_H(\vec{r}) = \frac{\chi_H\big(H^{-1/2}\vec{r}\big)}{\pi H}$$

donde $*$ indica la convolución habitual en $L^1(\mathbb{R})$ (véase [**Bo-Bl**]).

Nótese que f es mayor que χ_D en todo punto, por tanto

$$P_D(x;a,b) \le -|D|x + \sum_{m,n} f(m-a, n-b)$$

y con la fórmula de sumación de Poisson se obtiene

$$P_D(x;a,b) \le -|D|x + \sum_{m,n} \widehat{f}_D(m,n)\widehat{f}_H(m,n)e(ma+nb). \tag{3.1}$$

En [**Ke**] se puede encontrar un desarrollo asintótico para $\widehat{f}_D(m,n)$ (véase también el Lema 2.1 de [**Bl**] para un enunciado más claro y conciso), en particular se deduce

$$\widehat{f}_D(m,n) \ll x^{1/4}(m^2+n^2)^{-3/4},$$

por otra parte $\widehat{f}_H(m,n)$ es una función de tipo Bessel y verifica (véase [**Ci**])

$$\widehat{f}_H(m,n) \ll 1 \quad \text{si } (m^2+n^2)H < 1 \quad \text{y} \quad \widehat{f}_H(m,n) \ll (m^2+n^2)^{-3/4}H^{-3/4} \quad \text{si } (m^2+n^2)H > 1.$$

Así pues, separando el término principal ($m = n = 0$) en (3.1) y estimando los últimos términos de la serie trivialmente, se tiene

$$P_D(x;a,b) \ll x^{1/2}H^{1/2} + \sum_{L=2^j \le H^{-3/2}} \Big| \sum_{m^2+n^2 \asymp L} a_{mn} e(na+mb) \Big| \tag{3.2}$$

para ciertos a_{mn} que cuando $m^2+n^2 \asymp L$ satisfacen

$$a_{mn} \ll \begin{cases} x^{1/4}L^{-3/4} & \text{si } LH \ll 1 \\ x^{1/4}L^{-3/2}H^{-3/4} & \text{si } LH \gg 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Si en (3.2) sumamos en los centros (a_ν, b_ν) y elevamos a la potencia $2l$, por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\sum_{\nu=1}^{R} |P_D(x; a_\nu, b_\nu)|^{2l} \ll x^\epsilon \sup_{1\le L\le H^{-3/2}} \sum_{\nu=1}^{R} \Big| \sum_{m^2+n^2\asymp L} a_{mn} e(na_\nu + mb_\nu)\Big|^{2l} + Rx^l H^l. \tag{3.4}$$

Ahora podríamos aplicar la desigualdad de gran criba clásica en su versión bidimensional (esto es un caso particular del Lema 2.4 de [**Bo-Iw**]) pero preferimos usar el Teorema 2.3 del Capítulo II para hacer patente su generalidad.

Así pues, recordando que las autofunciones del Laplaciano en el toro plano $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ son $e(nx+my)$ y que los autovalores correspondientes son $-4\pi(m^2+n^2)$, del Teorema 2.3 se deduce

$$\sum_{\nu=1}^{R} \Big| \sum_{m^2+n^2\asymp L} a_{mn} e(na_\nu + mb_\nu)\Big|^{2l} \ll L^l\big(1+\delta^{-2}L^{-1}\big)\Bigg(\sum_{m^2+n^2\asymp L} |a_{mn}|^2\Bigg)^l.$$

Sustituyendo en (3.4) y recordando (3.3) se concluye

$$\sum_{\nu=1}^{R} |P_D(x; a_\nu, b_\nu)|^{2l} \ll x^{l/2+\epsilon}(1+\delta^{-2}) + x^{l/2+\epsilon}H^{-l/2}(1+\delta^{-2}H) + Rx^lH^l$$

y basta elegir $H = \min\big(R^{-2l/3}x^{-1/3}, x^{-1/2}\big)$ para obtener el resultado deseado. ■

<u>Dem. del Corolario 3.1.1:</u>

El corolario se deduce directamente del Teorema 3.1 eligiendo $l=2$ y tomando centros (a_ν, b_ν) uniformemente distribuidos con espaciamiento δ tendiendo a cero. ■

Dem. del Teorema 3.2:

Comenzamos aplicando sumación por partes y Hölder para obtener de las fórmulas truncadas de Hardy-Voronoï que dado $N_0 < X^{1/2}$ existe un $N < N_0$ tal que

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{\epsilon} \sum_{\nu=1}^{R} \big|S_N(x_\nu)\big|^{2l} + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l}$$

donde $S_N(x)$ fue definida en §2.

Dividimos el intervalo $[X, 2X]$ en subintervalos de longitud $H < X$, entonces para alguno de ellos, I_H, se cumple

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{1+\epsilon} H^{-1} \sum_{x_\nu \in I_H} \big|S_N(x_\nu)\big|^{2l} + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l},$$

por dualidad existe un vector $\vec{b}$ de norma uno tal que

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{1+\epsilon} H^{-1} \Big(\sum_{x_\nu \in I_H} b_\nu \big(S_N(x_\nu)\big)^{l} \Big)^2 + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l}.$$

Desarrollando la potencia, intercambiando el orden de sumación y aplicando la desigualdad de Cauchy, se tiene

$$(3.5) \qquad \sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{(l+2)/2+\epsilon} N^{-l/2} H^{-1} \sum_{x_\nu, x_\mu \in I_H} b_\nu \bar{b}_\mu \big(S_{\nu\mu}\big)^{l} + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l}$$

donde

$$S_{\nu\mu} = \sum_{n \asymp N} e\big(\sqrt{n}(\sqrt{x_\nu} - \sqrt{x_\mu})\big).$$

Nótese que para cierta constante "$\ll$"

$$H \ll \sqrt{NX} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{x_\nu} - \sqrt{x_\mu}}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}$$

y por la estimación trivial y el Teorema 2.1 de [**Gr-Ko**] obtenemos

$$S_{\nu\mu} \ll \min\big(N, (NX)^{1/2}|x_\nu - x_\mu|^{-1}\big). \tag{3.6}$$

Así pues, utilizando la condición de espaciamiento

$$\sum_{x_\nu, x_\mu \in I_H} b_\nu \bar{b}_\mu \big(S_{\nu\mu}\big)^l \ll \sum_{x_\nu \in I_H} |b_\nu|^2 \sum_{x_\mu \in I_H} \min\big(N^l, (NX)^{l/2}|x_\nu - x_\mu|^{-l}\big) \ll N^l\big(1+X^{1/2+\epsilon}N^{-1/2}\delta^{-1}\big).$$

Sustituyendo en (3.5) con $H \asymp \sqrt{NX}$ se obtiene

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{(l+2)/2+\epsilon}N^{(l-2)/2}\delta^{-1} + X^{(l+1)/2+\epsilon}N^{(l-1)/2} + RX^l N_0^{-l}$$

si tomamos $N_0 = R^{2/(3l-1)}X^{(l-1)/(3l-1)}$, dependiendo de l el máximo se alcanza si $N \asymp 1$ ó $N \asymp N_0$. Si en contra de nuestras hipótesis N_0 fuera mayor que que $X^{1/2}$, entonces eligiendo $N = X^{1/2}$ se obtiene un mejor resultado. ∎

<u>Dem. del Corolario 3.2.1:</u>

Se deduce directamente del Teorema 3.2 tomando $\delta = XR^{-1}$ y haciendo tender R a infinito. ∎

<u>Dem. del Teorema 3.3:</u>

Partimos de (3.5) en la demostración del Teorema 3.2 tomando $H = X$, es decir

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{l/2+\epsilon}N^{-l/2}\sum_{\nu,\mu} b_\nu \bar{b}_\mu \big(S_{\nu\mu}\big)^l + RX^{l+\epsilon}N_0^{-l}.$$

Si $|x_\nu - x_\mu| \gg \sqrt{NX}$, por la teoría de pares de exponentes (véase [**Gr-Ko**]) se tiene

$$S_{\nu\mu} \ll |x_\nu - x_\mu|^p X^{-p/2}N^{q-p/2} \ll X^{p/2}N^{q-p/2},$$

por otra parte en la demostración del Teorema 3.2 ya habíamos calculado la contribución de los términos con $|x_\nu - x_\mu| < \sqrt{NX}$, así pues

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{l/2+\epsilon}N^{-l/2}\big(N^l(1 + X^{1/2}N^{-1/2}\delta^{-1}) + RX^{pl/2}N^{(2q-p)l/2}\big) + RX^{l+\epsilon}N_0^{-l},$$

ahora eligiendo $N_0 = X\delta^{-2}$ se obtiene el resultado deseado (nótese que esta elección de N sólo es óptima si δ es suficientemente grande). ∎

æ

CAPÍTULO IV

Algunas Series Trigonométricas

Desde los trabajos de Dirichlet y Riemann, la teoría de los números viene usando diferentes resultados del análisis. Rademacher pensaba que en esta relación el análisis no estaba necesariamente subordinado a la teoría de los números como una herramienta. Parte de los recientes desarrollos de ambas disciplinas apoyan esta opinión, así por ejemplo, el análisis armónico en superficies de Riemann probablemente no habría sido objeto de un estudio tan exhaustivo sin la relación cada vez mas estrecha con la teoría de los números. Otro ejemplo quizá más sencillo y clásico está en la conexión entre el teorema del número primo y algunos teoremas tauberianos (véase Ch. 9 de [**Ru**]).

Es un hecho notable que Hardy y Littlewood crearan en gran medida las bases para el análisis armónico moderno y también las de la teoría analítica de los números. El trabajo [**Ha-Li**] es particularmente significativo ya que el propósito principal es dar una ecuación funcional aproximada para cierta función θ truncada, pero parte de los resultados son utilizados allí para encontrar series de Fourier con propiedades especiales.

La fascinación por las series de Fourier con frecuencias suficientemente "dispersas" se remonta a Riemann y Weierstrass. Para las series lacunares, es decir, para las funciones de la forma

$$\sum_k a_k e(n_k x) \qquad \text{con} \qquad n_{k+1}/n_k > \rho > 1,$$

la teoría está prácticamente completa (véase V.6 y XIII.1.17 en [**Zy**]). Entre las sucesiones con crecimiento menor, ocupan un lugar especial los cuadrados $n_k = k^2$ y en general las potencias.

En la primera sección de este capítulo estudiaremos el comportamiento global de ciertas series con frecuencias en los cuadrados, veremos como con algunas de las técnicas desarrolladas por Hardy y Littlewood para la teoría de los números es posible estudiar el comportamiento fractal de algunas gráficas.

La segunda sección está totalmente basada en la parte final de [**Co**]. Sus características son bastante diferentes al resto de esta memoria ya que nuestro propósito principal es enunciar algunos resultados de A. Córdoba para mostrar una vez más la profunda relación entre análisis y aritmética.

æ

§1. La dimensión fractal de una familia de gráficas

En esta sección calcularemos, usando técnicas clásicas de la teoría de los números, la dimensión fractal (”box counting dimension”) de la gráficas, Γ_α, de cada una de las funciones de la siguiente familia

$$F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n^2 x)}{n^\alpha} \qquad 1 < \alpha \leq 2 \qquad x \in [0,1].$$

De hecho el mismo método permite obtener en muchos casos resultados análogos para la parte real e imaginaria de funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(n^2 x)$$

donde a_n es una sucesión decreciente y tal que la serie anterior converge absolutamente.

Las funciones F_α tienen cierto interés histórico, ya que segun Weierstrass (véase [**Du**] y [**Ha 1**]), Riemann creía que $F_2(x)$ podría ser un ejemplo de una función continua pero no diferenciable en ningún punto. Hardy (véase [**Ha 1**]) consideró en general las funciones F_α y entre otras cosas demostró que $F_2(x)$ no tiene derivada en los irracionales ni en los racionales de la forma $x = (2a+1)/4b$ y $x = a/(4b+1)$ con $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Cincuenta años después, Gerver demostró de manera elemental (pero no sencilla) que la derivada existe en el resto de los racionales. En la actualidad hay varias demostraciones alternativas de estos hechos (véanse las referencias de [**Du**]).

Los resultados que se prueban en esta sección fueron anunciados en [**Ch-Co**], donde se consideraron también las series $F_\alpha(x)$ modificadas con un factor logarítmico que aquí omitiremos para mayor simplicidad.

Si denotamos la dimensión fractal (por cajas) de Γ_α por $\dim_B(\Gamma_\alpha)$, cuando las dimensiones superior, $\overline{\dim}_B(\Gamma_\alpha)$, e inferior, $\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha)$, coinciden (véase [**Fa**]), entonces nuestro resultado principal es

Teorema 4.1: *Si* $1 < \alpha \leq 2$*, la dimensión fractal de* Γ_α *existe y además*

$$\dim_B(\Gamma_\alpha) = \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Obsérvese que en particular se deduce que Γ_2 es un fractal, es decir, tiene dimensión fraccionaria. Así pues, a pesar de que la función considerada por Riemann es diferenciable en un conjunto denso, tiene un comportamiento global caótico.

Aunque la dimensión de Γ_2 no está calculada explícitamente en la literatura, podría ser obtenida combinando los resultados de [**Du**] y [**Tr**] (estamos en deuda con el profesor Y. Meyer por esta observación). Nuestra prueba tiene la ventaja de ser más directa y aplicable a otras funciones con frecuencias en los cuadrados.

El Teorema 4.1 se sigue de los lemas siguientes:

Lema 4.1.1: *Si* $1 < \alpha \leq 2$

$$\overline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \leq \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Lema 4.1.2: *Si* $1 < \alpha \leq 2$

$$\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \geq \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Para demostrar el Lemma 4.1.1 consideraremos la subdivisión de Farey en (0,1] y estudiaremos la oscilación de F_α en cada uno de los arcos que resultan. Nuestra principal herramienta es la ecuación funcional aproximada dada por Hardy y Littlewood (véase el Teorema 2.128 de [**Ha-Li**]) para los núcleos de Gauss

$$s_n(x,\theta) = \sum_{0 \leq k \leq n} e(k^2 x + k\theta),$$

de ella dedujeron estimaciones para $s_n(x,\theta)$ que dependen de las convergentes de la fracción continua de x (véase 2.13 y especialmente (2.138) en [**Ha-Li**]), en particular se concluye (véase también el Teorema 6 de [**Fi-Ju-Kö**])

(4.1)
$$\left|x-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}\qquad\Rightarrow\qquad s_n(x)\ll\frac{n}{\sqrt{q}}+\sqrt{q}$$

donde $s_n(x)=s_n(x,0)$.

<u>Dem. del Lema 4.1.1:</u>

Dado $N>1$ consideramos la subdivisión de Farey

$$(0,1]=\bigcup_{\substack{(a,q)=1\\ 0\le a<q\le N}}\mathcal{I}_{a/q}$$

con

$$\mathcal{I}_{0/1}=\left(0,\frac{1}{N+1}\right],\quad \mathcal{I}_{1/1}=\left(\frac{N}{N+1},1\right]\quad\text{ y }\quad \mathcal{I}_{a/q}=\left(\frac{a'+a}{q'+q},\frac{a+a''}{q+q''}\right]\ \text{si } a/q\ne 0,1$$

donde a'/q' y a''/q'' son respectivamente la mayor y la menor fracción irreducible tales que

$$0<\frac{a'}{q'}<\frac{a}{q}<\frac{a''}{q''}<1\qquad 1<q',q''\le N.$$

Por las propiedades elementales de las fracciones de Farey (véase [**Ci-Co**])

(4.2)
$$\mathcal{I}_{a/q}\subset\{x\,/\,|x-\frac{a}{q}|<\frac{1}{qN}\}.$$

Si definimos para $0\le k<N^2$

$$\mathcal{N}^k_{a/q}=\#\{0\le l<N^2\,/\,\big(I_k\times I_l\big)\cap\big(\mathcal{I}_{a/q}\times\mathbb{R}\big)\cap\Gamma_\alpha\ne\emptyset\}\ \text{donde } I_m=\left(\frac{m}{N^2},\frac{m+1}{N^2}\right],$$

entonces $\mathcal{N}_{a/q}^k$ mide la variación de F_α en un intervalo de longitud N^{-2}. Por (4.2) y la definición de la dimensión fractal, se tiene

$$\overline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \le \limsup_{N\to\infty} \frac{\log\Big(\sum_{q<N}\sum_{(a,q)=1} Nq^{-1} \sup_{I_k\cap\mathcal{I}_{a/q}\neq\emptyset} \mathcal{N}_{a/q}^k\Big)}{\log(N^2)}. \tag{4.3}$$

Trivialmente

$$\mathcal{N}_{a/q}^k \le 2 + N^2 \sup_{x,y\in I_k\cap\mathcal{I}_{a/q}} |F_\alpha(x) - F_\alpha(y)|$$

y por la definición de F_α y el teorema del valor medio

$$\mathcal{N}_{a/q}^k \le 2 + 2\pi \left|\sum_{n\le N} n^{2-\alpha} e(n^2\xi)\right| + N^2 \left|\sum_{n>N} n^{-\alpha}\big(e(n^2x_0) - e(n^2y_0)\big)\right|$$

para ciertos ξ, x_0, y_0 pertenecientes a $\mathcal{I}_{a/q}$.

Sumando por partes y aplicando (4.1) (recuérdese (4.2) y $1 < \alpha \le 2$)

$$\mathcal{N}_{a/q}^k \ll N^{2-\alpha}\left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right) + N^2N^{-\alpha}\left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right) = N^{3-\alpha}q^{-1/2} + N^{2-\alpha}q^{1/2}$$

y sustituyendo en (4.3) el lema queda probado. ■

<u>Dem. del Lema 4.1.1:</u>

Fijado N sea $\mathcal{P}$ el conjunto de números primos $q \equiv 3\ (4)$, tales que $q \asymp N$. Por la definición de la dimensión fractal

$$\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \ge \liminf_{N\to\infty} \frac{\log\Big(N^2\sum_{q\in\mathcal{P}}\sum_{0<a<q} \big|F_\alpha(a/q) - F_\alpha(a/q+1/q^2)\big|\Big)}{\log(N^2)}. \tag{4.4}$$

Si hacemos que a recorra unicamente los residuos cuadraticos módulo q, $\mathcal{R}(q)$, entonces la contribución de la suma en a es obviamente mayor que el valor absoluto de

$$\sum_{a\in\mathcal{R}(q)} \big(F_\alpha(a/q) - F_\alpha(a/q+1/q^2)\big) = \operatorname{Im} \sum_n \sum_{r=1}^{(q-1)/2} \frac{e(n^2r^2/q)\big(1-e(n^2/q^2)\big)}{n^\alpha},$$

gracias a la evaluación explícita de las sumas de Gauss (véase Ch. 2 de [**Da**]) se tiene que la suma anterior es igual a

$$\operatorname{Im} \sum_n \frac{(-1+i\sqrt{q})\big(1-e(n^2/q^2)\big)}{2n^\alpha} = \sqrt{q}\sum_n \frac{\cos^2(\pi n^2/q^2)}{n^\alpha} - \sum_n \frac{\sin(2\pi n^2/q^2)}{2n^\alpha} \gg q^{3/2-\alpha}.$$

Así pues, sustituyendo en (4.4) y usando el teorema del número primo en progresiones aritméticas (realmente un resultado mucho más elemental es suficiente) se tiene

$$\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{\log\big(N^2 N^{3/2-\alpha} N/\log N\big)}{\log N^2} = \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

como queríamos demostrar. ■

æ

§2. Series trigonométricas y espacios funcionales

Si n_k es una sucesión B_2, esto es, una sucesión creciente tal que $\forall m \in \mathbb{Z}$ $m = n_k + n_{k'}$ tiene a lo más una solución con $n_k \le n_{k'}$, entonces no es difícil demostrar (véase Th. 5.3 de [**Ru**])

$$f(x) = \sum a_k e(n_k x) \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p \ll \|f\|_2 \quad \forall p \le 4.$$

Los cuadrados no son una sucesión B_2, pero el número de representaciones de un entero como suma de dos cuadrados es pequeño y en promedio está acotado, esto apoya la siguiente conjetura

$$f(x) = \sum a_n e(n^2 x) \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p \ll \|f\|_2 \quad \forall p < 4. \tag{4.5}$$

Esto es tanto como decir que los núcleos de Gauss dan lugar a un multiplicador acotado de L^2 en $L^{4-\epsilon}$ $\forall \epsilon > 0$, sin embargo el problema parece intratable con los métodos del análisis armónico y parece depender en mayor medida de la aritmética de los cuadrados.

Nótese que si la conjetura (4.5) fuera cierta, el operador que escoge las frecuencias en los cuadrados también sería acotado de $L^{4/3+\epsilon}$ en L^2 por dualidad. Haciendo actuar este operador sobre el núcleo de Dirichlet $f(x) = \sum_{n \le N} e((qn+a)x)$ se tendría

$$\|f\|_2^2 = \#\big\{n \le N \,/\, qn + a = k^2\big\} = O\big(N^{1/2+\epsilon}\big)$$

uniformemente en q y a. Es decir

$$Q(N) = \max_{q,a} \#\big\{n \le N \,/\, qn + a = k^2\big\} = O\big(N^{1/2+\epsilon}\big),$$

esta es una famosa conjetura de Rudin. Ya el resultado $Q(N) = o(N)$ es no trivial y requiere un importante teorema de Szemerédi. Recientemente Bombieri, Granville y Pintz han demostrado $Q(N) = O\big(N^{2/3+\epsilon}\big)$ usando técnicas de geometría algebraica.

Se puede probar que la conjetura (4.5) es verdadera bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes (véase [**Co**]), concretamente

Teorema 4.2: *Si existe un* α *tal que* $a_n e(n\alpha)$ *es una sucesión monótona, entonces la conjetura* (4.5) *es cierta.*

De aquí se deduce en particular que $\forall\epsilon > 0$

$$\sum \frac{e(n^2x)}{n^{1/2}(\log n)^{1/2+\epsilon}} \in L^p \qquad \forall p < 4.$$

Usando las propiedades del núcleo $K(x) = \sum n^{-\beta} e(nx)$ (véase V.2.1 en [**Zy**]) o equivalentemente derivación fraccionaria (véase XII.9.22 en [**Zy**]) se concluye también

$$\frac{1}{2} \le \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{e(n^2x)}{n^{1/2}(\log n)^{1/2+\epsilon}} \in L^p \qquad \forall p < \frac{2}{1-\alpha}, \tag{4.6}$$

análogamente, con la notación de §1 se tiene

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad F_\alpha \in L^p \qquad \forall p < \frac{2}{1-\alpha}. \tag{4.7}$$

Por la identidad de Parseval es claro que $F_{1/2} \notin L^2$, de hecho es posible probar (4.7) de forma más sencilla porque no incluye el caso $\alpha = 1/2$. Por otra parte Hardy y Littlewood probaron (véase [**Ha-Li**]) que si $\alpha < 1/2$ la serie $F_\alpha(x)$ ni siquiera es sumable por ningún tipo de medias de Cesàro en los x irracionales. Para el otro valor extremo, $\alpha = 1$, encontraron infinitos x irracionales para los que $F_1(x)$ no converge, mientras que es trivial que $F_\alpha \in L^\infty$ si $\alpha > 1$.

Por analogía con otras situaciones en análisis armónico, cabe pensar que en el caso límite $\alpha = 1$ deberíamos tener $F_1 \in$ B.M.O., donde B.M.O. es el espacio de funciones de oscilación media acotada, éste es el subespacio de L^2 para el que la siguiente seminorma está acotada

$$\|f\|_* = \sup_{I=[a,b]} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| \quad \text{donde} \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f.$$

B.M.O. posee varias propiedades interesantes, entre las más destacables están la dualidad con el espacio de Hardy H^1 en el que las integrales singulares clásicas están acotadas, y la llamada desigualdad de John-Niremberg de la que se deduce que B.M.O. difiere poco de L^∞.

Se puede probar que $F_1 \in$ B.M.O. utilizando los métodos de [**Ha-Li**]. A. Córdoba obtuvo una demostración elemental de un resultado más fuerte, concretamente

Teorema 4.3: *Si $a_n \ll n^{-1}$ entonces*

$$\sum a_n e(n^2 x) \in \text{B.M.O.}$$

Si $a_n \geq 0$, este teorema también se podría deducir utilizando técnicas profundas de análisis armónico, a saber, la descomposición atómica de H^1 y su dualidad con B.M.O., lo que lleva a una condición sobre los coeficientes de Fourier (la condición de Fefferman) para que una función pertenezca a B.M.O. (véase Cor. 2 en [**Sl-St**] y nótese la similitud de la prueba del Th. 3 con la de la desigualdad de Gallagher en [**Mo**]).

DEM. DEL TEOREMA 4.2:

Como $b_n = a_n e(n\alpha)$ es una sucesión monótona, basta probar que

$$\sum_{N=2^j} |b_N|^2 N < \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum b_n e(n^2 x - n\alpha) \in L^p \qquad \forall\ 2 \leq p < 4.$$

La teoría de Littlewood-Paley afirma que separando diferentes trozos diádicos en una serie de Fourier, se comportan como variables aleatorias independientes, concretamente (véase el capítulo XV de [**Zy**])

$$\|f\|_p \asymp \left\| \Big(\sum_{N=2^j} \big|\Delta_N(x)\big|^2 \Big)^{1/2} \right\|_p \quad \text{con} \quad \Delta_N(x) = \sum_{N \leq n < 2N} b_n e(n^2 x - n\alpha),$$

así pues, por la desigualdad de Jensen y sumando por partes

$$\|f\|_p^2 \ll \sum_{N=2^j} \|\Delta_n\|_p^2 \ll \sum_{N=2^j} |b_N|^2 N \|S_N\|_p^2 \tag{4.8}$$

donde

$$S_N(x) = N^{-1/2} \sum_{N \le n < N_0} e(n^2 x - n\alpha) \quad \text{ para algún } N_0 = N_0(N) < 2N.$$

Por (4.8), es suficiente probar que $\|S_N\|_p \ll 1$ para todo $p < 4$. De hecho demostraremos un resultado un poco más fuerte, que S_N tiene norma acotada en el espacio L^4 débil (véase def 1.19 en [**Da-Ch**]), es decir

$$\mu\big(\{x \,/\, |S_N(x)| > \lambda\}\big) \ll \lambda^{-4} \qquad \forall \lambda > 1. \tag{4.9}$$

Si x es irracional, sean p_k/q_k las convergentes de la fracción continua. Por la desigualdad de Hardy y Littlewood citada en §1 (véase [**Ha-Li**]), se tiene

$$S_N(x) \ll N^{1/2} q_k^{-1/2} + N^{-1/2} q_k^{1/2}.$$

Entonces para cada λ, si $q_1 \ll N\lambda^2$

$$|S_N(x)| > \lambda \quad \Rightarrow \quad \exists n \,/\, N^{1/2} q_n^{-1/2} \gg \lambda \quad \text{ y } \quad N^{-1/2} q_{n+1}^{-1/2} \gg \lambda$$

y por tanto

$$\big|x - \frac{p_n}{q_n}\big| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \ll \frac{1}{q_n N \lambda^2}.$$

Así pues

$$\{x \,/\, |S_N(x)| > \lambda\} \subset \{x \,/\, q_1 \ll N\lambda^2\} \cup \bigcup_{p \le q \ll N\lambda^{-2}} \{x \,/\, |x - p/q| \ll q^{-1} N^{-1} \lambda^{-2}\} \cup \mathbb{Q}.$$

Con la desigualdad trivial $|S_N(x)| \le N^{1/2}$ se concluye $\lambda < N^{1/2}$ y por tanto

$$\mu\big(\{x \,/\, |S_N(x)| > \lambda\}\big) \ll N^{-1}\lambda^{-2} + \sum_{q \ll N\lambda^{-2}} N^{-1}\lambda^{-2} \ll \lambda^{-4}$$

lo que prueba (4.9). ∎

<u>Dem. del Teorema 4.3:</u>

Fijado un intervalo $I \subset [0,1]$, sea q la parte entera de $|I|^{-1/2}$, entonces

$$f(x) = \sum a_n e(n^2 x) = F(x) + \sum_{a=0}^{q-1} F_a(x)$$

donde

$$F(x) = \sum_{n<q} a_n e(n^2 x) \qquad \text{y} \qquad F_a(x) = \sum_{\substack{n \equiv a \ (q) \\ n \ge q}} a_n e(n^2 x).$$

Es claro que

$$\|F\|_* \le \frac{1}{|I|} \int_I \Big| \sum_{n<q} a_n \big(e(n^2 x) - e(n^2 x_0)\big) \Big| dx \ll \frac{1}{|I|} \int_I \sum |a_n| n^2 |I| dx \ll 1,$$

por otro lado, gracias a la desigualdad de Jensen

$$\|F_a\|_* \le \frac{1}{|I|} \int_I |F_a|^2 \le \frac{1}{|I|} \sum_{\substack{n \equiv a \ (q) \\ n \ge q}} \sum_{\substack{m \equiv a \ (q) \\ m \ge q}} |a_n||a_m| \min\big(|I|, (n^2 - m^2)^{-1}\big) \ll q^{-2}.$$

Así pues

$$\|f\|_* \le \|F\|_* + \sum_{a=0}^{q-1} \|F_a\|_* \ll 1,$$

y por tanto f pertenece a B.M.O. ∎

æ

Notación

Se da a continuación una lista de algunos de los símbolos y notaciones que se han usado en esta memoria sin definirlos o dar una referencia bibliográfica. Todos ellos son bastante habituales.

$f \sim g \;:=\; \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

$f = O(g) \;:=\; |f| < C|g|$, si la constante C depende de algún parámetro, por ejemplo ϵ, a veces se escribe $f = O_\epsilon(g)$.

$f \ll g \;:=\;$ es otra notación para $f = O(g)$.

$f \gg g \;:=\;$ es otra notación para $g = O(f)$.

$f \asymp g \;:=\; f \ll g$ y $g \gg f$.

$a \equiv b\ (q) \;:=\; q$ divide a $b - a$.

$\widehat{f}(\xi) \;:=\; \int f(x) e^{-ix\xi} dx$.

$\left(\frac{a}{n}\right) \;:=\;$ símbolo de Legendre.

$d(n) \;:=\;$ número de divisores de n.

$\Delta(x) \;:=\; \sum_{n\le x} d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1)$.

$e(x) \;:=\; e^{2\pi i x}$.

$L(s,\chi) \;:=\; \sum \chi(n) n^{-s}$ donde χ es un caracter multiplicativo.

$P(x) \;:=\; \sum_{n\le x} r(n) - \pi x$.

$r(n) \;:=\; \#\big\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, a^2 + b^2 = n\big\}$.

$\zeta(s) \;:=\; \sum n^{-s}$ o su extensión meromorfa a $\mathbb{C}$.

æ

Referencias

[Be-Ga-Ma] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet. ”Le Spectre d’une Variété Riemannienne”. *Lecture Note in Mathematics* **194** Springer-Verlag.

[Bl] P. Bleher. ”On the distribution of the number of lattice points inside a family of convex ovals”. *Duke Math. J.* **67** 3, (1992) pp 461-481

[Bo] E. Bombieri. ”Le Grand Crible dans la Théorie Analytique des Nombres”. *Astérisque* **18** Société Mathématique de France 1974.

[Bo-Bl] B. Boss - D.D. Bleecker. ”Topology and Analysis”. *Universitext.* Springer-Verlag New York Inc. 1985.

[Bo-Iw] E. Bombieri - H. Iwaniec. ”On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$”. *Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (4)* **13** 3, (1986) pp 449-472

[Bu] D. Burgess. ”On character sums and L-series II” *Proc. London Math. Soc. (3)* **13** (1963), pp 524-536. (véase también D. Burgess. ”The character sum estimate with $r=3$” *J. London Math. Soc. (2)* **33** (1986), pp 219-226.)

[Ch] Chen, Jing-Run. ”Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions (II)” *Sci. Sinica* **12** N.6 (1963), pp 751-764.

[Ch-Co] F. Chamizo - A. Córdoba. ”The fractal dimension of a family of Riemann’s graphs” *C. R. Acad. Sci. Paris* **317** Série I, (1993), pp 455-460 (Corrigendum to appear).

[Ch-Iw] F. Chamizo - H. Iwaniec. "On the sphere problem". (Preprint)

[Ci] J. Cilleruelo. "Sobre la distribución de puntos del retículo en círculos". *Tesina.* Universidad Autónoma de Madrid (1984)

[Ci-Co] J. Cilleruelo - A. Córdoba. "La Teoría de los Números". Ed. Mondadori. Madrid (1992)

[Co] A. Córdoba. "Translation invariant operators". *Proceedings of the Seminar held at El Escorial, June 1979.* Asociación Matemática Española, Madrid 1980, pp 117-176.

[Co-Hi] R. Courant - D. Hilbert. "Methods of Mathematical Physics". *Vol I,II.* Interscience Publishers, New York 1953.

[Da] H. Davenport. "Multiplicative number theory". *Second edition. Graduate texts in Mathematics 74* Springer Verlag.

[Da-Ch] K.M. Davis - Chang Y.-C. "Lectures on Bochner-Riesz Means". *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **114** Cambridge University Press 1987.

[De-Iw] J.M. Deshouillers - H. Iwaniec. "Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms" *Invent. Math.* **70** (1982), pp 219-288.

[Du] J.J. Duistermaat. "Selfsimilarity of Riemann's non differentiable function" *Nieuw Arch. Wisk. (4)* **9** N.3, (1991), pp 303-337.

[Dy-Mc] H. Dym - H.P. McKean. "Fourier Series and Integrals". Academic Press Inc. 1972.

[Fa] K. Falconer. "Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications" John Wiley & sons 1990.

[Fe] R.P. Feynman. "Física". *Vol I.* Fondo educativo interamericano 1971.

[Fi-Ju-Kö] H. Fiedler - W. Jurkat - O. Körner. "Asymptotic expansions of finite theta series" *Acta Arith.* **XXXII** (1977), pp 129-146.

[Ga] C.F. Gauss. "Disquisitiones Arithmeticae". Leipzig (1801). (English Translation by A.A. Clarke. *Yale University Press*, New Haven 1966).

[Ge] J. Gerver "The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π". *Amer. J. of Math.* **92** (1970), pp 33-55 (véase también *Amer. J. of Math.* **93** (1971), pp 33-41).

[Gi] P.B. Gilkey. "The Index Theorem and the Heat Equation". *Mathematical Lecture Series* **4** Publish or Perish Inc. Boston 1974.

[Go] G. González. Notas del curso "Curvas y sus Jacobianas". *Universidad Autónoma de Madrid* 1992-1993 (no publicado).

[Gr] E. Grosswald. "Representation of Integers as sums of squares". Springer Verlag 1985.

[Gr-Ko] S.W. Graham - G. Kolesnik. "Van der Corput's Method of Exponential Sums". *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **126** Cambridge University Press 1991.

[Gr-Ry] I.S. Gradshteyn - I.M. Ryzhik. "Table of integrals, series and products". *Fifth edition. (Ed. A. Jeffrey)* Academic Press 1994.

[Ha 1] G.H. Hardy. "Weierstrass' non differentiable function" *Trans. Amer. Math. Soc.* **70** (1916), pp 199-213

[Ha 2] G.H. Hardy. "The lattice points of a circle". *Proc. Roy. Soc. London (A)* **107** (1925), pp 623-635

[Ha-Li] G.H. Hardy - J.E. Littlewood. "The trigonometric series associated with elliptic θ-functions" *Acta Math.* **37** (1914), pp 193-239

[Hu 1] M.N. Huxley. "Introduction to Kloostermania". *Banach Center Publications V.17* PWN-Polish Scientific Publishers. Warszawa 1985 pp 217-306.

[Hu 2] M.N. Huxley. "Exponential sums and lattice points II" *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), pp 279-301

[Iv] A. Ivić. "The Riemann Zeta-function". John Wiley & sons 1985.

[Iw 1] H. Iwaniec "Non-Holomorphic Modular forms and their applications" *Chapter 8 of R.A. Rankin (Ed.) "Modular forms". Symposium on Modular forms of one and several variables. Durham 1983.* Halsted Press. New York 1984 pp 157-196.

[Iw 2] H. Iwaniec. Notas del curso "Lectures on the spectral theory of automorphic forms". *Universidad Autónoma de Madrid,* June 1993 (to appear in *Rev. Mat. Hisp. Amer.*).

[Ji] J.I. Jiménez "La función zeta de Riemann; conjeturas". *Tesina.* Universidad Autónoma de Madrid (1992)

[Ju] M. Jutila. "On mean values of Dirichlet polynomials with real characters". *Acta Arith.* **XXVII** (1975), pp 191-198.

[Ka] M. Kac. "Can one hear the shape of a drum?". *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), pp 1-23. (Included in "The Chauvenet papers" V.II (Ed. J.C. Abbott) M.A.A. 1978 pp 433-455).

[Ke] D. Kendall. "On the number of lattice points inside a random oval". *Quart. J. Math (Oxford Ser.)* **19** (1948), pp 1-26.

[Ko] T. Kotake. "The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators". *Comm. Pure Appl. Math.* **XXII** (1969), pp 789-806.

[Ku] T. Kubota. "Elementary Theory of Eisenstein Series". Kodansha Ltd. Tokyo 1973.

[La-Ph] P. Lax - R. Phillips. "The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non Euclidean spaces". *J. Functional Anal.* **46** (1982), pp 280-350.

[Mi-Pl] S. Minakshisundaram - Å. Pleijel. "Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds". *Canad. J. Math.* **1** (1949), pp 242-256.

[Mo] H.L. Montgomery. "Topics in multiplicative number theory". *Lecture Notes in Mathematics* **227** Springer-Verlag (1971)

[Pa] S.J. Patterson. "A lattice point problem in hyperbolic space". *Mathematika* **22** (1975), pp 81-88 (véase también Corrigendum en *Mathematika* **23** (1976), p 27).

[Ph-Ru] R. Phillips - Z. Rudnick. "The circle problem in the hyperbolic plane". (Preprint).

[Ra] B. Randol. "A Dirichlet series of eigenvalue type with applications to asymptotic estimates". *Bull. London Math. Soc.* **13** (1981), pp 304-315.

[Ru] W. Rudin. "Functional Analysis". Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. New Delhi 1990.

[Se 1] A. Selberg. "Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly simmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet's series". *J. Indian Math. Soc.* **20** (1956), pp 47-87.

[Se 2] A. Selberg. "On the estimation of Fourier coefficients of modular forms". *Proc. Symp. Pure Math.* **VIII** American Math. Soc., Providence 1965, pp 1-5.

[Sl-St] W.T. Sledd - D.A. Stegenga. "An H^1 multiplier theorem". *Ark. Mat.* **2** (1981), pp 265-270

[Ti] E.C. Titchmarsh. "The Theory of the Riemann Zeta-function". Oxford Clarendon Press 1951.

[Tr] C. Tricot. "Dimensiones de graphes". *C. R. Acad. Sci. Paris* **303** Série 1, (1986), pp 609-612.

[Ts] Tsang K.-M. "Higher-power moments of $\Delta(x)$, $E(t)$ and $P(x)$". *Proc. London Math. Soc.* **65** (1992), pp 65-84.

[Vi] I.M. Vinogradov. "On the number of integer points in a sphere" (Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **27** (1963), pp 957-968.

[Wo] W. Wolfe. "The asymptotic distribution of lattice points in hyperbolic space". *J. Functional Anal.* **31** (1979), pp 333-340.

[Zy] A. Zygmund. "Trigonometric series". Second edition. Vol I, II. Cambridge University Press. New York (1968)

Topics in Analytic Number Theory

Fernando Chamizo Lorente

Supervisor: **Antonio Córdoba Barba**

(...) knowledge inflates with pride, but love builds up.

Preface

In this work, several independent topics related on number theory are discussed. They are distributed into four chapters, each of them is preceded by a small introduction explaining its contents, so they will not be mentioned here.

Along the following pages are shown the results of the several years of study, obviously only a part of the fields of research are reflected here, some other have been reserved for a posterior study or simply quit. In fact, the independence among the chapters corresponds to different moments in the research.

Though this is a specialized work, particular emphasis is put on elementary explanations of the underlying ideas and relations with the rest of the theory in order to do the topics understandble for persons who are not very familiar with them. Nevertheless this work cannot be considered self-contained and some prerequisites are needed because of the specialization of some methods and, in general, by the wideness of number theory.

The very extended idea considering number theory as a difficult branch of Mathematics is probably motivated by the existence of some problems with a long history and naive appearance that remain unsolved, but there is another reason justifying its difficulty and in some sense its beauty, it is the diversity of its methods, sometimes algebraic, analytic and geometric ideas converge in the same problem. Although the methods used here belong, in general, to harmonic analysis, this diversity will be present in many arguments.

There are several persons who have contributed with their effort to make possible this work, I should like to thank some of them:

A preferential role in my education has been played by my teachers. I only shall mention two of them directly vinculated with the present work, they have been for me excellent teachers and transmisors of ideas: Firstly A. Córdoba who have taught to me Mathematics and a global and aesthetic view of them. His support has always been unconditional even when I did not deserve it. Secondly H. Iwaniec, who has shown to me ideas and "tricks" underlying to many methods in number theory. I am highly indebted with him for putting his interest on me and revealing some of his ideas; his influence is truly predominant in the first chapter.

Some advices, oppinions and encouragement given by some other persons persons have been very valuable. I want to express my gratitude to people who is beside me: my family or my companions María Jesús, Jorge and Yolanda, as well as some other who are abroad, specially Luis Angel who kindly offered me hospitality and made easier a part of my mathematical formation.

I also owe my gratitude to "Fundación Caja de Madrid" for finantial support of my research, expressing confidence on it allowing several renewals of my fellowship. I hope that they consider my work satisfactory and they continue with their laudable politics supporting scientific research of other persons.

Madrid March 1994 F. Chamizo Lorente

æ

Index

æ

CHAPTER I

The Sphere Problem

This chapter contains an exposition of the joint work with H. Iwaniec [**Ch-Iw**]. We have prefered here to extend the comments about the general ideas enclosed in that paper, minimizing but not omitting, the technical details.

The sphere problem is an old problem in lattice point theory related with the work of Gauss (see Art. 289 and Art. 302 of [**Ga**]), it consists of counting the number of points with integral coordinates inside a large spheres. Namely, the problem is to find an asymptotic formula with small error term for

$$S(R) = \#\{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3 \,/\, \|\vec{x}\| < R\}.$$

It is very easy to claim

$$S(R) \sim \frac{4\pi}{3} R^3 \qquad R \to \infty \tag{1.1}$$

but the order of the error term in this approximation is harder to study.

From an arithmetical point of view we can consider $S(R)$ as an average of the number of representations as a sum of three squares, i.e. if we define

$$r_3(n) = \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \,/\; n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}$$

then we have

$$S(R) = \sum_{n < R^2} r_3(n).$$

But the arithmetical richness of the problem goes beyond this tautological formula thanks to the relation proved by Gauss between $r_3(n)$ and the class number for negative discriminants (see Art. 289 of [**Ga**]), which via Dirichlet's formula (see Ch.6 of [**Da**]) can be expressed in terms of the value at $s = 1$ of a certain L-function.

These relations become clearer if we define, $R_3(n)$, the number of primitive representations

$$R_3(n)=\#\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}^3\ /\ \gcd(n_1,n_2,n_3)=1,\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=n\},$$

which is related to $r_3(n)$ by

$$r_3(n)=\sum_{d^2|n}R_3\left(\frac{n}{d^2}\right). \tag{1.2}$$

Following modern expositors (namely [**Gr**]) we can summarize a part of the classic work on binary and ternary quadratic forms as

$$R_3(n)=\frac{1}{2}c_nh(-4n), \qquad R_3(n)=\frac{1}{\pi}c_n\sqrt{n}L(1,\chi_n) \tag{1.3}$$

where $n>1$, $h(-4n)$ is the class number for the negative discriminant $-4n$, $L(s,\chi_n)$ is the L-function associated with the character χ_n,

$$\chi_n(m)=\left(\frac{-4n}{m}\right) \qquad \text{and} \qquad c_n=\begin{cases}0 & \text{if } n\equiv 0,4,7 \quad (8)\\ 16 & \text{if } n\equiv 3 \quad (8)\\ 24 & \text{if } n\equiv 1,2,5,6 \quad (8).\end{cases}$$

The sphere problem can be also interpreted from other points of view, a curious ones is that $S(R)$ can be considered as the eigenvalue counting function for a suitable manifold (the three-dimensional torus) and then (1.1) is the Weyl's law (see [**Ka**] for its statement) for that manifold. Although this interpretation does not seem useful studying the problem, it shows that Weyl's law could be very difficult to improve even in particular cases, wich is a question of a certain interest in mathematical physics.

§1. Statement of the main result and scheme of the proof

Our main result is the following

Theorem 1.1: *For every $R > 1$ we have*

$$S(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 + O_\epsilon\big(R^{29/22+\epsilon}\big) \qquad \forall \epsilon > 0$$

This theorem improves a previous result of Chen (see [**Ch**]) and Vinogradov (see [**Vi**]), although the improvement in the exponent of the error term is quantitatively small, the method is rather different and it produces a more direct proof of the previous result and shows the relation with some classic topics in number theory.

The standard idea to count lattice points in a relatively compact domain, $D \in \mathbb{R}^d$, of volume $|D|$, is to apply Poisson summation to the characteristic function of this domain, χ, to get

$$\#\text{lattice points in } D = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \chi(\vec{n}) = |D| + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{0}\}} \widehat{\chi}(\vec{n}).$$

Commonly, this identity is only formal, because of the lack of regularity of χ and the corresponding slow decaying of the Fourier transform. A method to overcome this difficulty is to approximte χ by a regular function χ_r, then if we define

$$\mathcal{T} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{0}\}} \widehat{\chi}_r(\vec{n}) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{A} = \widehat{\chi}_r(\mathbf{0}) - |D| + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d - \{\mathbf{0}\}} \big(\widehat{\chi}(\vec{n}) - \widehat{\chi}_r(\vec{n})\big),$$

we have

$$\#\text{lattice points in } D = |D| + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \chi_r(\vec{n}) - \widehat{\chi}_r(\mathbf{0}) + \mathcal{A} = |D| + \mathcal{T} + \mathcal{A}.$$

After calculating or approximating the Fourier transform of χ_r, $\mathcal{T}$ becomes an oscillatory (trigonometric) sum. Estimating this kind of sums, a large theory has been developed from the beginning of this century (see [**Gr-Ko**]).

On the other hand, the meaning of $\mathcal{A}$ is more arithmetic because it contains information about the diophantine approximation of the boundary of D. Usually we can only give trivial estimates for $\mathcal{A}$, because is very difficult to count lattice points in "thin" domains.

After these preliminary considerations, we can present the structure of the proof:

In §2 we shall calculate $\mathcal{T}$ and $\mathcal{A}$ (see Theorem 1.2), we could get similar expansion for smoothed sums of $r_3(n)$ (see Lemma 2.1 of [**Ch-Iw**]), this is the three-dimensional analogous of the weighted Hardy-Voronoï formulas (see [**Iv**]).

In §3 we shall estimate $\mathcal{T}$. The particular trigonometric sum that appears allows us to carry on some arithmetical manipulations in such a way that the exponential sum theory is only applied to estimate some "error terms", so the final result does not depend significatively on small improvements in the general theory. We note that from our estimate for $\mathcal{T}$ and the trivial bound for $\mathcal{A}$, the previous best result of Chen and Vinogradov can be deduced (see Corollary 1.3.2), this means that the only needed to improve it , is a non-trivial bound for $\mathcal{A}$.

This latter objective is afforded in §4 where we give a bound for short sums of real characters with immediate application to the estimation of sums of the corresponding L-functions. By Gauss reciprocity law we can consider the Legendre symbol associated with two different characters, it allows some freedom taking control of the relative size of the lenght of summation and the modulus. Again, small improvements in the estimation of character sums do not affect the final result.

Finally in §5 we shall use the deep formulas (1.3) to write $\mathcal{A}$ in terms of the value at $s = 1$ of some L-function which, after the results of §4, gives a non-trivial bound for $\mathcal{A}$ that combined with the bound for $\mathcal{T}$ proves the Theorem 1.1.

§2. Poisson summation in $\mathbb{R}^3$

In this section we shall prove the following

Theorem 1.2: *For every* $R > 1$ *and* $0 < \Delta < 1$

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 = \mathcal{T} + \mathcal{A} + O(R)$$

where

$$\mathcal{T} = \frac{-R}{\pi^2\Delta}\sum_n \frac{r_3(n)}{n^{3/2}}\sin(\pi\Delta\sqrt{n})\cos(\pi(2R+\Delta)\sqrt{n})$$

and

$$\mathcal{A} = 2\pi\Delta R^2 - \frac{R}{\Delta}\sum_{R<\sqrt{n}\le R+\Delta}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}(R+\Delta-\sqrt{n}).$$

Following the ideas sketched in the introduction, proving this theorem we shall approximate the characteristic function of the sphere of radius R by a more regular function f. In this setting $\mathcal{A}$ measures the error in the approximation and $\mathcal{T}$ is the result of applying Poisson summation to f. For a sake of simplicity computing the Fourier transform, we shall take f to be only piecewise differentiable in the radial coordinate, this low regularity causes the lack of absolute convergence in the series defining $\mathcal{T}$.

The parameter Δ represents the width of the region where f does not coincide with the characteristic function of the sphere. The rough idea of the uncertainty principle (see Sec. 2.7 of [**Da-Ch**]) asserts that the significant part of $\mathcal{T}$ is given more or less by the Δ^{-2} first terms, then we can manipulate the value of Δ to give more importance to $\mathcal{T}$ or $\mathcal{A}$.

<u>Proof of Theorem 1.2:</u> Let f be the function

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\vec{x}| \le R \\ R\Delta^{-1}(R+\Delta-|\vec{x}|) & \text{if } R \le |\vec{x}| \le R+\Delta \\ 0 & \text{if } |\vec{x}| \ge R+\Delta. \end{cases}$$

By the definition of $\mathcal{A}$ and Poisson summation

$$S(R) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} f(\vec{n}) - 2\pi\Delta R^2 + \mathcal{A} = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^3} \widehat{f}(\vec{n}) - 2\pi\Delta R^2 + \mathcal{A}. \tag{1.4}$$

After some computations we get

$$\widehat{f}(\vec{n}) = \frac{1}{2\pi^2|\vec{n}|^3}\big(\sin(2\pi R|\vec{n}|) - \frac{2R}{\Delta}\sin(\pi\Delta|\vec{n}|)\cos(\pi(2R+\Delta)|\vec{n}|)\big)$$

and substituting in (1.4), we have

$$S(R) - \frac{4\pi}{3}R^3 = \mathcal{T} + \mathcal{A} + \frac{2\pi}{3}\Delta^2 R + \frac{1}{2\pi^2}\sum_n \frac{r_3(n)}{n^{3/2}}\sin(2\pi R\sqrt{n}). \tag{1.5}$$

Note that the application of Poisson summation formula can be justified although the low regularity of f because the theorem of the following section (see Theorem 1.3 below) assures the uniform convergence of the involved series, moreover with that result we can complete the proof showing that the last term in (1.5) is less than a constant times R. ∎

§3. The exponential sum estimate

Now, we shall bound an exponential sum related to $\mathcal{T}$.

Theorem 1.3: *If* $R>1$ *then* $\forall\epsilon>0$

$$\sum_{n\asymp N} r_3(n)e(R\sqrt{n}) \ll N^{5/4+\epsilon}+N^{\epsilon}\min\big(R^{3/8}N^{15/16}+R^{1/8}N^{17/16}, R^{7/24}N^{49/48}+R^{5/24}N^{53/48}\big).$$

If we divide the series defining $\mathcal{T}$ into dyadic intervals and consider separately the cases $n\le\Delta^{-2}$ and $n\ge\Delta^{-2}$, we deduce easily from the previous theorem:

Corollary 1.3.1: *If* $0<\Delta<R^{-1/2}$ *then*

$$\mathcal{T}\ll\big(R\Delta^{-1/2}+R^{9/8}\Delta^{-1/8}+R^{21/16}\big)\Delta^{-\epsilon}.$$

Observe that substituting this bound in Theorem 1.2, choosing $\Delta=R^{-2/3}$ and estimating trivially $r_3(n)\ll n^{1/2}$, we obtain immediately

Corollary 1.3.1: *For* $R>1$ *we have*

$$S(R)=\frac{4\pi}{3}R^3+O_\epsilon\big(R^{4/3+\epsilon}\big)\qquad\forall\epsilon>0.$$

The basis of the van der Corput's method of exponential sums is to divide the range of summation aplying Cauchy's inequality to reduce the oscillations (A-Process) and to transform the new sum by Poisson summation combined with stationary phase (B-process).

By the arithmetical properties of the phase in our case, we can reduce the oscillation joining two variables in one and then no significative subdivision is needed on each variable. It allows us to separate a diagonal term and a less important oscillatory sum to which we apply the standard van der Corput's method.

<u>Proof of Theorem 1.3:</u> Let $S_N(R)$ be the exponential sum in the theorem, we have

$$S_N(R) \ll \big|\sum_{a,b,c} e\big(R\sqrt{a^2+b^2+c^2}\big)\big| \ll N^\epsilon \sum_{x\asymp N} \big|\sum_{c<\sqrt{N_1}} e\big(R\sqrt{x+c^2}\big)\big|$$

for some $N_1 \le N$. Splitting the innermost summation into several sums of lenght $N^{1/2-\epsilon}$ and applying Cauchy's inequality, we get

$$S_N^2(R) \ll N^{1+\epsilon} \sum_{c_1,c_2} \Big| \sum_{x\asymp N} e\big(R\big(\sqrt{x+c_1^2}-\sqrt{x+c_2^2}\big)\big)\Big| \qquad \text{with } c_1,c_2<N^{1/2},\ |c_1-c_2|<N^{1/2-\epsilon}.$$

Hence there exist $D<N^{1-\epsilon}$ such that

$$S_N^2(R) \ll N^{5/2+\epsilon} + N^{1+\epsilon} \sum_{y\asymp D} \big|\sum_{x\asymp N} e\big(R\big(\sqrt{x}-\sqrt{x+y}\big)\big)\big|.$$

Now all the work is to estimate this latter exponential sum. Easy standard arguments (see Theorem 2.1 of [**Gr-Ko**]) allow to suppose that the derivative of the phase is greater than a constant, equivalently $D \gg N^{3/2}R^{-1}$. Under this asumption we apply Lemma 3.6 of [**Gr-Ko**] (esentially Poisson summation and stationary phase) to get

$$S_N^2(R) \ll N^{5/2+\epsilon} + R^{-1/2}D^{1/2}N^{9/4+\epsilon} + R^{-1/2}D^{-1/2}N^{9/4+\epsilon} \sum_{y\asymp D} \big|\sum_{x\asymp U} e\big(g(x,y)\big)\big| \tag{1.6}$$

where $U = RDN^{-3/2}$ and g is implicitly defined as the solution of the system

$$\begin{cases} f(\alpha(x,y),y) = g(x,y) + x\alpha(x,y) \\ \\ f_x(\alpha(x,y),y) = x \end{cases} \qquad \text{with } f(x,y) = R\big(\sqrt{x}-\sqrt{x+y}\big). \tag{1.7}$$

By (1.6), after Cauchy's inequality we find a value of T, $1\le T<U$ such that

$$S_N^4(R) \ll N^{5+\epsilon} + R^{-1}DN^{9/2+\epsilon} + R^{-1}N^{9/2+\epsilon} \sum_{x\asymp U}\sum_{z\asymp T} \Big| \sum_{y\asymp D} e\big(g(x+z,y)-g(x,y)\big)\Big|.$$

The proof is complete if we remember the ranges $U = RDN^{-3/2}$, $T < RDN^{-3/2}$ and $N^{3/2}R^{-1} \ll D < N$ and we apply simple van der Corput's estimates, precisely Theorem 2.2 of [**Gr-Ko**] and Theorem 5.11 of [**Ti**]. Unfortunately, some parameters in these theorems (namely λ and λ_3) are not very easy to calculate because we do not know explicitly g. In [**Ch-Iw**] there are full detailed computations, perhaps the only fundamental points to observe about them, are that using the mean value theorem and implicit differentiation in (1.7) we can get

$$\frac{\partial^i}{\partial y^i}\big(g(x+z,y)-g(x,y)\big) \asymp T\frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} \qquad \text{and} \qquad \frac{\alpha_{yyy}}{\alpha_{yy}^2\alpha_y} = \frac{h^2(2-h)(3-3h+h^2)^2(5h^2-6h+6)}{3(1-h)^6}$$

where $i = 2,3$ and $h = 2x\alpha^{1/2}R^{-1} \asymp DN^{-1}$. From these formulas and some other easier calculations we can conclude that the i-th derivative $(i = 2,3)$ of $g(x+z,y)-g(x,y)$ behaves like TND^{-i}. ∎

§4. The character sum estimate

In this section we shall give an asymptotic formula for short sums of L-functions which will be applied in the following section to get a non trivial bound for $\mathcal{A}$.

Theorem 1.4: *If* $1 \le K < N^{1/2}$

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} L(1,\chi_n) = \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K + O\big(K^{7/8}N^{\epsilon} + K^{2/3}N^{1/32+\epsilon}\big).$$

The proof is completely based on the following character sum estimate:

Lemma 1.4.1: *For* $1 \le K < N^{1/2}$ *and* $\alpha = (\alpha_n)$, $\beta = (\beta_n)$ *arbitrary complex vectors*

$$\sum_{N<n\le N+K} \sum_{m\asymp M} \alpha_n\beta_m \left(\frac{n}{m}\right) \ll \|\alpha\|\,\|\beta\|(K^{3/8}M^{1/2} + K^{1/2}M^{1/4}N^{3/64})(MN)^{\epsilon}.$$

<u>Proof of Theorem 1.4:</u> By Polya-Vinogradov inequality (see [**Da**]) we can truncate the series defining $L(1,\chi_n)$ to get

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} L(1,\chi_n) = \sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} \sum_{m<N} \frac{1}{m}\left(\frac{-4n}{m}\right) + O\big(N^{\epsilon}\big). \tag{1.8}$$

By quadratic reciprocity we can consider $\chi_n(m)$ as a character modulus m, and it is principal when m is a square. By standard elementary arguments it is not difficult to prove that the contribution of these terms is

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} \sum_{(k,4n)=1} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) \sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} \sum_{k|4n} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K + O(1).$$

Substituting in (1.8), after dyadic subdivision in m, we can find $M < N$ such that

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} L(1,\chi_n) - \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K \ll N^\epsilon + N^\epsilon \sum_{\substack{m\asymp M \\ m\ne k^2}} \sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} \frac{1}{m}\left(\frac{-4n}{m}\right).$$

Applying Polya-Vinogradov inequality to the innermost sum and Lemma 1.4.1 to the double sum, we have

$$\sum_{\substack{N<n\le N+K \\ n\equiv\nu\ (8)}} L(1,\chi_n) = \frac{3\zeta(2)}{28\zeta(3)}K + O\big(N^\epsilon \min(M^{1/2}, K^{7/8} + KM^{-1/4}N^{3/64})\big)$$

and finally, choosing $M = K^{4/3}M^{1/16}$ the theorem follows. ∎

Now we shall give the proof of Lemma 1.4.1. It is interesting to compare it with the one of Lemma 3 in [**Ju**]. Note that in both proofs Cauchy's inequality is used to separate the coefficients and to take control of the size of the modulus. In [**Ju**] the two arguments of the Legendre symbol play the same role and the auxiliary character sum estimate is Polya-Vinogradov inequality, but in our application of Lemma 1.4.1 the ranges of summation will have a quite different size and several applications of Cauchy's inequality are needed, moreover instead of Polya-Vinogradov inequality, we use a deeper bound due to Burgess.

<u>Proof of Lemma 1.4.1:</u>

It is enough to consider sums of the form

$$S_{KM} = \sum_{k\asymp K}\sum_{m\asymp M} \alpha_{N+k}\beta_m \left(\frac{N+k}{m}\right)$$

where (α_{N+k}) and (β_m) are unitary vectors.

By Cauchy's inequality twice and interchanging the order of summation

$$S_{KM}^4 \ll K \sum_{k\asymp K} \Big| \sum_{m\asymp M} \beta_m \left(\frac{N+k}{m}\right) \Big|^4 = K \sum_{\substack{m_1,m_2\\ m_3,m_4}} \beta_{m_1}\beta_{m_2}\overline{\beta}_{m_3}\overline{\beta}_{m_4} \sum_{k\asymp K} \left(\frac{N+k}{m_1m_2m_3m_4}\right).$$

Applying Cauchy's inequality once more and defining $h = m_1m_2m_3m_4$

$$S_{KM}^8 \ll K^2M^\epsilon \sum_{h\asymp M^4} \Big| \sum_{k\asymp K} \left(\frac{N+k}{h}\right) \Big|^2 \ll K^2M^\epsilon \Big(KM^4 + \sum_{\substack{k_1,k_2\asymp K\\ k_1\ne k_2}} \sum_{h\asymp M^4} \left(\frac{(N+k_1)(N+k_2)}{h}\right)\Big).$$

The condition $k_1, k_2 < N^{1/2}$ implies that $(N+k_1)(N+k_2)$ is not a square if $k_1 \ne k_2$, then the innermost sum is a sum of non principal characters and Burgess' inequality with exponents $(1/2, 3/16)$ can be used (see [**Bu**]) and the lemma follows. ∎

§5. Conclusion of the proof

Finally, we shall use the formulas (1.2), (1.3) and the results of the latter section to deduce

Theorem 1.5: *With the notation of Theorem 1.2, if* $R^{-1} < \delta < 1/4$

$$\mathcal{A} \ll \big(R^{15/8}\Delta^{7/8} + R^{83/48}\Delta^{2/3}\big)R^{\epsilon}.$$

PROOF OF THEOREM 1.5: By (1.2) and (1.3)

$$\sum_{R^2<n\le x}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{R^2<n\le x}\sum_{d^2|n}\frac{c_{n/d^2}}{\pi d}L(1,\chi_{n/d^2}) = \sum_{d\le\sqrt{x}}\frac{1}{\pi d}\sum_{\frac{R^2}{d^2}<k\le\frac{x}{d^2}} c_k L(1,\chi_k).$$

Dividing into arithmetic progresions modulus 8, if $R^2 < x < R^2+R$ by Theorem 1.4 we have

$$\sum_{R^2<n\le x}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} = 2\pi(x-R^2) + O\big((x-R^2)^{7/8}R^{\epsilon} + (x-R^2)^{2/3}R^{1/16+\epsilon}\big). \tag{1.9}$$

Finally by Abel's lemma and the definition of $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = 2\pi\Delta R^2 - \frac{R}{2\Delta}\int_{R^2}^{(R+\Delta)^2} t^{-1/2}\sum_{R^2<n\le x}\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}}dt$$

and substituting (1.9) the proof is complete. ∎

PROOF OF THEOREM 1.1: By Theorem 1.2, Corollary 1.3.1 and Theorem 1.5, we have

$$S(R) - \frac{4\pi}{3}R^3 \ll \big(R\Delta^{-1/2} + R^{9/8}\Delta^{-1/8} + R^{21/16}\big)\Delta^{-\epsilon} + \big(R^{15/8}\Delta^{7/8} + R^{83/48}\Delta^{2/3}\big)R^{\epsilon}$$

and choosing $\Delta = R^{-7/11}$, Theorem 1.1 is proved. ∎

CHAPTER II

The Large Sieve in Riemann Surfaces

The purpose of this chapter is to give large sieve type inequalities in which exponential sums are replaced by sums of functions involved in the harmonic analysis on some Riemann surfaces. As a consequence we shall deduce average results over well spaced centers and radii for the "hyperbolic circle problem".

A part of our calculations can be done in a more general geometric situation, in order to emphasize this point we shall also give a large sieve inequality for compact Riemannian manifolds.

The spectral resolution of Laplacian on Riemann surfaces is technically difficult, by this reason we prefer do not extend more this introduction devoting the first part of this chapter to present some known results and at the same time to introduce some notation. In this exposition we have followed mainly [**Iw 1**] and [**Iw 2**], other references will be explicitly indicated.

§1. Harmonic analysis in Riemann surfaces

Let us consider the upper half plane

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \,/\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+\}$$

endowed with the hyperbolic metric

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

which induces the element of volume, $d\mu$, and the distance function, ρ, given by

$$d\mu(x+iy) = \frac{dxdy}{y^2} \qquad \rho(z,w) = \operatorname{arc}\cosh(1 + 2u(z,w))$$

where

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

It is important to observe that some authors omit the factor $1/4$ in the definition of $u(z,w)$, in this case the definition of the Selberg–Harish-Chandra transform (see below) and the relation between $u(z,w)$ and $\rho(z,w)$ should be suitably changed.

Now we consider the Möbius transformations (non-constant linear fractional meromorphic functions) letting $\mathbb{H}$ invariant. We can assign bijectively to each of these non-constant transformations a matrix of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ by the rule

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \longrightarrow \qquad (ad-bc)^{-1/2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ \sim$$

where $\sim$ identifies a matrix with its negative. In this way, we shall consider $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ acting on $\mathbb{H}$.

Giving definition of the distance function in term of a certain cross-ratio (see [**Hu**]) it is possible to prove geometrically that the Möbius transformations associated with $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ are exactly all the isometries (rigid motions) of $\mathbb{H}$.

Let Γ be a Fuchsian group (a discrete subgroup of $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ acting proper and discontinuosly on $\mathbb{H}$), then the set of orbits, $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, defines a Riemann surface, moreover in the compact case by the uniformization theorem this is the general type of Riemann surfaces of genus $g \geq 2$ (see [**Go**]).

We shall not assume that $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ is compact, but it has finite volume or equivalently Γ is a Fuchsian group of the first kind.

The Laplace-Beltrami operator on $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, Δ, associated with the hyperbolic induced metric is given by

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -(z-\overline{z})^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}.$$

Let λ_j, u_j the solutions of the eigenvalue problem

$$-\Delta u_j(z) = \lambda_j u_j(z) \qquad u_j \in L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big) \cap C^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big),$$

if $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ is compact, the functions u_j conveniently normalized are enough to perform a "harmonic analysis" on $\mathbb{H}$, but in the general case some other functions that do not belong to $L^2\big(\Gamma\backslash\mathbb{H}\big)$ but in some sense are eigenfunctions of Laplacian should be considered. They are said to belong to the "continuous spectrum" (see [**Co-Hi**]).

A. Selberg studied the harmonic analysis in Riemann surfaces and other manifolds (see [**Se 1**]), he built an extense theory with immediate applications to the theory of modular forms (see [**Se 2**]) and more recently to other parts of number theory. Among his results are to give a geometric meaning to the Poisson summation formula (the celebrated Selberg trace formula) and to characterize the spectral resolution of Laplacian in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Unfortunately, in Selberg's work the most of the times the proofs are omitted or only sketched. As far as we know, even nowadays there is an almost complete absence of introductory bibliography with rigorous proofs (an exception is the forthcoming work [**Iw 2**]).

Before establishing the spectral theorem we shall introduce some definitions:

Considering the elements of Γ as Möbius transformations they can be classified into parabolic, hyperbolic and elliptic elements according to they have one fixed point on $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, two fixed points on $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ or two non-real fixed points in $\mathbb{C}$, respectively.

The fixed points of parabolic elements are called cusps. Under our hypothesis on Γ (it is Fuchsian of the first kind) it can be proved that there are only a finite number of non-equivalent (not related by elements of Γ) cusps.

A function on $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, or equivalently, a complex function on $\mathbb{H}$ which is invariant under the action of Γ, is said to be an automorphic function. We say that an automorphic function, f, belonging to $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})\cap C^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ is a (Maass) cusp form if it is eigenfunction of Δ and it has an exponential decaying to zero at every cusp, alternatively this latter property can be replaced by

$$\int_0^1 f(\sigma_{\mathbf{a}}z)dx = 0 \qquad \forall \text{ cusp } \mathbf{a}$$

where $\sigma_{\mathbf{a}}$ is a Möbius transformation (in general not in Γ) such that

$$\sigma_{\mathbf{a}}\infty = \mathbf{a} \qquad \sigma_{\mathbf{a}}^{-1}\Gamma_{\mathbf{a}}\sigma_{\mathbf{a}} = \{\gamma\in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\,/\,\gamma(z)=z+n\} \qquad \text{with } \Gamma_{\mathbf{a}} = \{\gamma\in\Gamma\,/\,\gamma(\mathbf{a})=\mathbf{a}\}.$$

From a geometric point of view, the cusps are "the points at infinity" of $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, so when $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ is compact there are no cusps. On the other hand the cusp forms are, roughly speaking, eigenfunctions behaving like test functions (decaying quickly to zero at infinity) then, in some sense, they represent the compact part of $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

Other important automorphic functions are the Eisenstein series associated with cusps, they are defined by

$$E_{\mathbf{a}}(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{a}}\backslash\Gamma} \left(\operatorname{Im}\sigma_{\mathbf{a}}^{-1}\gamma z\right)^s \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Formally, they are invariant by Γ and verify $\Delta E_{\mathbf{a}}(\cdot, s) = s(1-s)E_{\mathbf{a}}(\cdot, s)$ but the Eisenstein series are not counted among the eigenfunctions because they do not belong to $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

As functions of s, the Eisenstein series have a meromorphic continuation to the whole complex plane (this fact is rather difficult to prove), they also satisfy a functional equation relating $E_{\mathbf{a}}(z,s)$ to $E_{\mathbf{a}}(z,1-s)$ and a kind of "generalized Riemann hypothesis" because the only zeros of $1/E_{\mathbf{a}}(z,\cdot)$ in $\operatorname{Re} s > 1/2$ are simple, real and belonging to $(1/2, 1]$. Moreover in this region the residues of $E_{\mathbf{a}}(z,\cdot)$, as functions of z, are eigenfunctions of Δ.

Now we are ready to state the spectral decomposition of $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Let $L^2_c(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ and $L^2_r(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ be the clausure in $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ of the space generated by cusp forms and by residues of Eisenstein functions respectively, and let $L^2_E(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ the continuous direct sum of $E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)$, then

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{C}$$

where

$$\mathcal{D} = L^2_c(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \oplus L^2_r(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{C} = L^2_E(\Gamma\backslash\mathbb{H}).$$

Moreover, with the natural scalar product

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z)$$

the discrete part, $\mathcal{D}$, is the orthogonal complement of the continuous part, $\mathcal{C}$, and the two direct sumands of $\mathcal{D}$ are orthogonal each other.

Therefore, we infer the following spectral theorem: If $\{u_j(z)\}$ is a complete orthonormal system of eigenfunctions in $\mathcal{D}$, then for every $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$

$$f(z) = \sum_j \langle f, u_j\rangle u_j(z) + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, E_{\mathbf{a}}(\cdot, 1/2+it)\rangle E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)dt$$

where the equality and the convergence are understood in $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ sense. This is the hyperbolic analoge of the Fourier expansion.

Finally we shall introduce a transform, similar to the Fourier transform in the Euclidean case:

Given a function k with enough regularity, its Selberg–Harish-Chandra transform, h, is defined by

$$h(t) = \int_{\mathbb{H}} k(u(z,i))(\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(z) = 2\int_0^\infty \int_0^\infty k\Big(\frac{x^2+(y-1)^2}{4y}\Big) y^{-3/2+it} dx dy.$$

This can be done in three steps

$$Q(v) = \int_v^\infty \frac{k(u)}{\sqrt{u-v}} du \qquad g(r) = 2Q\big(\sinh^2\frac{r}{2}\big) \qquad h(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{irt} g(r) dr$$

and given an even function, h, the transform can be inverted by (see [**Ku**])

$$g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{irt} h(t) dt \qquad Q(v) = \frac{1}{2} g(2\operatorname{arc}\sinh\sqrt{v}) \qquad k(u) = \frac{-1}{\pi}\int_u^\infty \frac{dQ(v)}{\sqrt{v-u}}.$$

If we suppose that k is such that h can be extended to a holomorphic function in the strip $|\operatorname{Im} t| < 1/2+\epsilon$ with $|h(t)||t|^{2+\epsilon}$ bounded, then we have the following important consequence of the spectral theorem that allows to expand automorphic kernels in terms of eigenfunctions and Eisenstein series

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} k(u(\gamma z, w)) = \sum_j h(t_j) u_j(z)\overline{u_j(w)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-\infty}^\infty h(t) E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(w, 1/2+it)} dt$$

where $t_j = (\lambda_j - 1/4)^{1/2}$ and λ_j is the eigenvalue of u_j. Note that the choice of the sign of t_j is irrelevant because h is even.

If $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ is compact the term containing the Eisenstein series does not appear and putting $z = w$ and integrating on $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ we get a formula relating sums over $\gamma\in\Gamma$ to sums over the eigenvalues, this is the Poisson summation formula for the hyperbolic plane. Selberg also considered the non-compact case, and gave a geometric meaning to the summation over Γ: the Selberg trace formula (see chapter 10 of [**Iw 2**]).

§2. Statement of the main results

We start giving a large sieve inequality for $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ and its applications to the average over the centers in the hyperbolic circle problem. As in the Euclidean case, a spacing condition is needed. We define the distance, d, in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ as the lenght of the shortest geodesic, then given two representatives z, w in $\mathbb{H}$ of the orbits corresponding to two points of $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, we have

$$d(z,w) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \rho(\gamma z, w).$$

Consequently, we say that $z_1, z_2, \ldots, z_R$ are δ-spaced in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ if

$$d(z_\nu, z_\mu) > \delta \qquad \forall \nu \neq \mu$$

and there are no geodesics joinning z_ν with itself whith lenght less than δ.

If there are cusps (i.e. $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ is not compact) then we can imagine $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ as a closed surface with non-limitated thin "necks" going to the cusps where the metric degenerates, the cusp forms approach to zero and the Eisenstein series have a potential growing; therefore near the cusps not too much cancellation is expected and the large sieve inequality becomes trivial. In order to quantify this situation it is useful to introduce the following function (see section 3.1 of [**Iw 2**])

$$y_{\Gamma}(z) = \max_{\mathbf{a}} \max_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{Im} \sigma_{\mathbf{a}}^{-1} \gamma z.$$

Roughly speaking, $y_{\Gamma}(z)$ is the height of z in the neck to which belongs, and the width of this neck at z is proportional to $1/y_{\Gamma}(z)$. Namely, there exist two constants c_1, c_2, depending only on Γ, such that

$$\operatorname{Im} \sigma_{\mathbf{a}}^{-1} z > c_1 \qquad \Rightarrow \qquad y_{\Gamma}(z) = \operatorname{Im} \sigma_{\mathbf{a}}^{-1} z$$

and

$$\#\big\{\gamma \,/\, \rho(\gamma z, w) < c_2/y_{\Gamma}(z)\big\} \le 1.$$

After this comments we can consider the following theorem as an hyperbolic analoge of the classical large sieve inequality

Theorem 2.1: *Let* $\{u_j\}$ *be an orthonormal system of eigenfunctions of* Δ *in* $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *with eigenvalues* $\{1/4+t_j^2\}$*. Given real numbers* $T, M \gg 1$ *and* δ*-spaced points* $z_1, z_2, \dots, z_R$ *in* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *with* $y_{\Gamma}(z_\nu) < M$*, for every sequence* $\{a_j\}$ *and functions* $a_{\mathbf{a}} \in L^2(\mathbb{R})$ *where* $\mathbf{a}$ *runs over the cusps of* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$*, if we define*

$$S = \sum_{\nu=1}^{R} \Big| \sum_{|t_j|\le T} a_j u_j(z_\nu) + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} a_{\mathbf{a}}(t) E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2+it)dt\Big|^{2l} \qquad l \in \mathbb{Z}^+$$

and

$$||a||_* = \Big(\sum_{|t_j|\le T} |a_j|^2 + \frac{1}{(4\pi)^2}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} |a_{\mathbf{a}}(t)|^2 dt\Big)^{1/2},$$

then we have

$$S \ll (T^2+TM)^l (1+\delta^{-2}T^{-2})||a||_*^{2l}$$

where the "$\ll$" constant only depend on Γ *and* l*.*

<u>Remark:</u> *If* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *is compact, in the previous theorem the summations over the cusp does not appear and we can suppose* $M \ll 1$*.*

Our next results deal with the hyperbolic circle problem. The classical circle problem consists of counting points of integer coordinates in large circles, these points can be considered as elements of the orbits of the origin under integral translations. Similarly, in the hyperbolic version we count elements of the orbit of a point under the action of Γ belonging to a large circle. Namely the problem is to find an asymptotic formula with a good error term for

$$\#\big\{\gamma \in \Gamma \,/\, \rho(\gamma z, w) \le s\big\}$$

when s is large.

After a change of variable $x = e^s + e^{-s}$, the previous quantity is equal to

$$H(x; z, w) = \#\big\{\gamma \in \Gamma \,/\, u(\gamma z, w) + 1/2 \le x/4\big\}.$$

The spectral expansion of $H(x; z, w)$ suggest to write it as

$$H(x; z, w) = M(x; z, w) + E(x; z, w)$$

where

$$M(x; z, w) = \sqrt{\pi} \sum_{\operatorname{Im} t_j \neq 0} \frac{\Gamma(|t_j|)}{\Gamma(|t_j| + 3/2)} u_j(z)\overline{u_j(w)} x^{1/2+|t_j|} + 2\sqrt{2} \sum_{t_j = 0} u_j(z)\overline{u_j(w)} x^{1/2} \log x.$$

Note that the first summation is the contribution of the eigenfunctions corresponding to the, so called, exceptional eigenvalues $\lambda_j = 1/4 + t_j^2 < 1/4$ and the second summation depends on the eigenspace of the eigenvalue $\lambda = 1/4$. The dominating term in $M(x; z, w)$ corresponds to $\lambda = 0$ and it is $\pi x / |\Gamma \backslash \mathbb{H}|$. The conjecture is that $E(x; z, w)$ has order less than any summand in the "main term" $M(x; z, w)$, namely

$$E(x; z, w) \ll x^{1/2+\epsilon} \qquad \forall \epsilon > 0 \quad \text{and} \quad x \ge 3.$$

The best known upper bound is $E(x; z, w) \ll x^{2/3}$ due to Selberg (see a proof in [**Iw 2**], see also [**La-Ph**] where a more general problem is discussed and [**Pa**] for a weaker bound). On the other hand, there are some Ω-results (see [**Ph-Ru**]) which imply that the conjecture is in general the best possible.

Now we shall deduce that the conjecture is true in average over well spaced points. The next results and the corollaries of Theorem 2.2 are, in some sense, closer to the statistical idea of average than integral results and they are a good substitute for them when non-compactness does not allow to integrate.

We should like to point out that the following corollaries could be written in an arithmetical fashion as average results for the number of representations of integers by some families of quadratic forms but the so obtained results are too technical to be stated in a simple way and we prefer to omit them.

Corollary 2.1.1: *Given a positive integer l and a point $w \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$, for every $x \gg 1$ and $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_R$ a set of δ-spaced points in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ with $y_{\Gamma}(z_\nu) < M$, we have*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll \big(M^l + x^{(l-2)/3} R^{(l-2)/3l}\big) x^{l+\epsilon}\delta^{-2} + x^{4l/3+\epsilon} R^{1/3}$$

where the "$\ll$" constant only depend on Γ, w and l.

<u>Definition:</u> *We say that a set of δ-spaced points $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_R$ satisfies the uniformity property in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ if $R\delta^2 \gg |\Gamma\backslash\mathbb{H}|$ i.e. the (disjoint) union of the disks centered in z_ν and with radius $\delta/2$ has volume comparable to that of $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.*

Corollary 2.1.2: *For $l = 1, 2$, given more than $x^{l/2}$ δ-spaced points $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_R$ which satisfy the uniformity property in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ and $y_{\Gamma}(z_\nu) \ll 1$, we have*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll R x^{l+\epsilon}.$$

In particular, letting R go to infinity, if $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ is compact we have for $l = 1, 2$

$$\left(\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} d\mu(z) \right)^{1/2l} \ll x^{1/2+\epsilon}.$$

<u>Remark:</u> *The integral result when $l = 1$ can be also deduced from the spectral theorem and the Plancherel identity (see* [**Wo**] *for a related result and* [**Ke**] *for the Euclidean analoge).*

In the following we shall deal with averages over the radius, we shall need a large sieve type inequality for oscillatory sums depending on t_j. This is the content of the following theorem in which we shall use implicitly the notation of Theorem 2.1. The ambiguity in the sign of the t_j's has not relevance if we index them with integer numbers, j, in such a way that $t_{-j} = -t_j$ and $u_{-j}(z) = \overline{u_j(z)}$.

Theorem 2.2: *Given $T \gg 1$ and real numbers $x_1, x_2, \dots, x_R \in [X, 2X]$ which are δ-spaced with the usual distance in $\mathbb{R}$ (i.e. $\nu \neq \mu \Rightarrow |x_\nu - x_\mu| > \delta$), for every sequence $\{a_j\}$ and functions $a_{\mathbf{a}} \in L^2(\mathbb{R})$ where $\mathbf{a}$ runs over the cusps of $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, if we define*

$$S = \sum_{\nu=1}^{R} \left| \sum_{|t_j| \leq T} a_j x_\nu^{it_j} u_j(z) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} a_{\mathbf{a}}(t) x_\nu^{it} E_{\mathbf{a}}(z, 1/2 + it) dt \right|^{2l} \qquad l \in \mathbb{Z}^+, \ z \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$$

then we have

$$S \ll T^{2l}(1 + X\delta^{-1}T^{-1})||a||_*^{2l}$$

where the "$\ll$" constant depend on Γ, z and l.

<u>Remark:</u> *In comparison with the classical large sieve iequality, the introduction of the factors depending on z seems artificial. Actually, we could use the Selberg trace formula instead of the (technically easier) spectral expansion of automorphic kernels to avoid this factors, and our considerations about the sign of t_j are better understood if we think about sums over the zeros of the Selberg zeta function, nevertheless for a sake of simplicity we prefer to state the theorem in this way, which is the only needed for our applications.*

Thanks to the previous theorem we can state results similar to Corollary 2.1.1 and Corollary 2.1.2 but now averaging over the radius:

Corollary 2.2.1: *Given a positive integer l and $z, w \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$, if $x_1, x_2, \dots, x_R$ is a set of real numbers as in the theorem, we have*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll R^{(l-1)/3l} x^{(4l+2)/3+\epsilon} \delta^{-1} + R^{1/3} x^{4l/3+\epsilon}$$

where the "$\ll$" constant depend on Γ, z, w and l.

Corollary 2.2.2: *If $R\delta \gg X$ and $R > X^{1/2}$ then*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x_\nu; z, w)|^2 \ll R x^{1+\epsilon}$$

and letting R go to infinity

$$\left(\frac{1}{X}\int_X^{2X} |E(x; z, w)|^2 dx\right)^{1/2} \ll x^{1/2+\epsilon}.$$

Remark: *The second power moment can be also calculated by direct integration in the spectral expansion of $E(x; z, w)$, this is done in* [**Ph-Ru**]*, where a sharper result is used to prove some Ω-results.*

The previous corollaries can be also formulated in an arithmetic way because with a suitable choice of z, w and Γ, $E(x; z, w)$ equals (up a change of variable)

$$\mathcal{C}(x) = -4\pi + \sum_{n \le x} r(n) r(n+1)$$

where $r(n)$ is the number of representations as a sum of two squares (see Chapter 12 of [**Iw 2**]).

The correlation between $d(n)$ and $d(n+a)$ appears naturally studying the Riemann zeta function (see pp. 165-171 in [**Ji**]) and the correlation between $r(n)$ and $r(n+a)$ corresponds to the same problem for a certain modified L-function. In $\mathcal{C}(x)$, $r(n+1)$ can be substituted by $r(n+a)$ using Hecke operators, we also could average over a using the techniques introduced in [**De-Iw**], but we prefer to give an easy result only illustrating the relation with arithmetic.

Corollary 2.2.3: *For every* q, a *with* $|a| < q < X^\alpha$ *and* $1/2 < \alpha < 2/3$, *the set of* $x \le X$ *in the arithmetic progression* $x \equiv a\ (q)$ *such that* $|\mathcal{C}(x)| > x^\alpha$ *has vanishing asymptotic density when* $X \to \infty$, *more precisely*

$$\max_{|a|<q<X^\alpha} \frac{\#\{x \equiv a\ (q)\ x \le X \,/\, |\mathcal{C}(x)| > x^\alpha\}}{X/q} \ll X^{1-2\alpha+\epsilon}$$

where, fixed ϵ *the "*$\ll$*" constant is absolute.*

Now we shall study the large sieve inequality for a generic compact Riemannian manifold, M, of dimension n.

Again a spacing condition is needed. The distance function in M, d, is the minimal lenght of the path joining two points. We shall say that the points x_1, x_2, $\dots$ are δ-spaced in M if

$$d(x_\nu, x_\mu) > \delta \qquad \forall \nu \neq \mu$$

and we say that they verify the uniformity property if

$$\mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{\nu=1}^{R} B_{\delta/2}(x_\nu)\Big) \gg \mathrm{Vol}(M).$$

where Vol is the volume corresponding to the Riemannian metric.

In M, the Laplace-Beltrami operator, Δ is defined locally by

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g} \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}\Big),$$

the general theory assures that the eigenfunctions of $-\Delta$ can be chosen to be a complete orthonormal system in $L^2(M)$ with the natural scalar product and the eignevalues are non negative (see [**Co-Hi**]).

After this definitions we have the following result:

Theorem 2.3: *Let M be a compact Riemannian manifold of dimension n and let $\{\phi_j\}$ be a complete orthonormal system of eigenfunctions of $-\Delta$, corresponding to the eigenvalues $\{\lambda_j\}$. Given $\Lambda \gg 1$, l a positive integer and $x_1, x_2, \ldots, x_R$ a set of δ-spaced points in M, for every sequence $\{a_j\}$*

$$\sum_{\nu}^{R} \Big| \sum_{\lambda_j \le \Lambda} a_j \phi_j(x_\nu) \Big|^{2l} \ll \Lambda^{nl/2} \big(1 + \delta^{-n} \Lambda^{-n/2}\big) \Big(\sum_{\lambda_j \le \Lambda} |a_j|^2 \Big)^{l}$$

where the "$\ll$" constant only depend on M and l.

Remark: *Note that we could deduce the Theorem 2.1 from the previous result if $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ is compact, but we cannot deal with the non-compact case because the harmonic analysis in non-compact Riemannian manifolds is only well-known in very special cases (see* [**Dy-Mc**]*). Note also that the classical large sieve inequality (see Th. 4 in* [**Bo**]*) can be deduced as a corollary taking $M = S^1$ and $l = 1$.*

The solution of some important partial differential equations on M (wave equation, time dependent Schrödinger equation, etc.) after separation of variables can be written as

$$u(x,t) = \sum_j f_j(t) \phi_j(x).$$

The previous theorem allows to obtain estimates in average for $u(x,t)$. In order to illustrate this point we shall state in physical terms one of the possible consequences.

We consider the wave equation

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad u \in C^2(M \times \mathbb{R}) \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

where f and g have harmonics with frequencies less than Λ. This is a common situation in Physics: the highest tones cannot detected and the Fourier expansions of f and g are cut off.

Corollary 2.3.1: *For an arbitrary set $x_1, x_2, \ldots, x_R$ of δ-spaced points in M verifying the uniformity property , we consider "test" particles p_ν of mass one oscillating on each x_ν with amplitude $u(x_\nu, t)$. Let E the energy of u and let E_ν be the kinetic energy of the particle p_ν, then if $\delta < \Lambda^{-1/2}$ we have*

$$\frac{E_1 + E_2 + \cdots + E_R}{R} \ll E.$$

§3. Some auxiliary lemmas

Before proving the main results we shall give some technical lemmas containing some computations related to the Selberg–Harish-Chandra transform. For their proofs we shall appeal to several known results about special functions.

Lemma 1: *Let k be the characteristic function of the interval $[0,(\cosh R-1)/2]$ with $R\ge 1$, then for every $t\in\mathbb{C}$*

$$h(t)\ll R\,e^{R(1/2+|\operatorname{Im} t|)}$$

moreover:

$a)$ *If t is real*

$$h(t)=2|t|^{-3/2}\sqrt{2\pi\sinh R}\,\cos\big(tR-\frac{3\pi}{4}\mathit{sign}\,t\big)\big(1+O(t^{-1})\big).$$

$b)$ *If Re $t=0$ and $|t|>\epsilon$*

$$h(t)=\sqrt{2\pi\sinh R}\,\frac{\Gamma(|t|)}{\Gamma(3/2+|t|)}e^{|t|R}+O_\epsilon\big(e^{(1/2-|t|)R}\big).$$

$c)$ *For the special values $t=0$ and $t=i/2$ we have*

$$h(0)=2\sqrt{2}Re^{R/2}+O\big(e^{R/2}\big)\qquad h\big(\frac{i}{2}\big)=2\pi(\cosh R-1).$$

The following result completes the previous lemma dealing with small values of R. Note that in this case the Selberg–Harish-Chandra transform is (up to error terms) a Bessel type function like the Fourier transform of the disk, this reveals that the hyperbolic plane is almost Euclidean in small neighbourhoods.

Lemma 2: *Let k be as in Lemma 1 but with $R\le 1$, then*

$$h(t)=2\pi Rt^{-1}\sqrt{\frac{\sinh R}{R}}J_1(Rt)+O\big(R^2e^{R|\operatorname{Im} t|}\min(R^2,|t|^{-2})\big)$$

where J_1 is the Bessel function of order one.

Lemma 3: *Given $T \gg 1$ and $r > 0$, let k_1 and k_2 be the Selberg–Harish-Chandra inverse transform of*

$$h_1(t) = e^{-t^2/4T^2} \qquad \text{and} \qquad h_2(t) = e^{-t^2/4T^2}\cos(rt)$$

respectively, then

a) $k_1(t)$ is decreasing in $t > 0$ and verifies

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) \ll T^2 e^{-T^2u^2} \qquad \forall u \geq 0.$$

b) There exists an absolute positive constant, c, such that

$$k_2\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) \ll T^2 e^{-cT^2(u-r)^2} \qquad \forall u \geq r \quad \text{and} \quad k_2(0) \ll \min\left(T^2, r^{-2}\right).$$

Given two automorphic kernels $k_1(u(z,w))$ and $k_2(u(z,w))$, we define their convolution as

$$k_1 * k_2(u(z,w)) = \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,v))k_2(u(v,w))d\mu(v).$$

As in the Euclidean case, the convolution change into multiplication in the spectral side, namely we have:

Lemma 4: *Let h_1, h_2 and h the Selberg–Harish-Chandra transforms of k_1, k_2 and $k_1 * k_2$ respectively, then*

$$h(t) = h_1(t) \cdot h_2(t).$$

Finally, we shall use the previous lemmas to do some computations related to the hyperbolic circle problem.

Lemma 5: *Let $E(x;z,w)$ be the error term in the hyperbolic circle problem with $x>2$ and suppose $y_{\Gamma}(z)\cdot y_{\Gamma}(w)<M$, then we have*

$$E(x;z,w)\le \sum_{T=2^n} E_T(x;z,w)+O\big(x^{1/2}M^{1/2}+xH\big)$$

where H is an arbitrary real number belonging to $(0,1]$, n runs over the integers bigger than a constant depending on Γ and

$$E_T(x;z,w)=\sum_{\pm t_j\in(T,2T]} g(t_j)u_j(z)\overline{u_j(w)}+\frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}}\int_{T<|t|\le 2T} g(t)E_{\mathbf{a}}(z,1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(w,1/2+it)}dt.$$

with g an even function which, defining $s=\operatorname{arc}\cosh(x/2)$, is given by

$$g(t)=\frac{\sqrt{2\pi H\sinh H\sinh(s+H)}}{t^{5/2}\sinh^2(H/2)}J_1(Ht)\cos\big(t(s+H)-\frac{3\pi}{4}\big)\qquad \forall s,t>0.$$

Proof of Lemma 1: Using the definition of the Selberg–Harish-Chandra transform, after some computations we have

$$h(t)=2\sqrt{2}\int_{-R}^{R}(\cosh R-\cosh r)^{1/2}e^{irt}dr=4\sqrt{2}\int_0^R(\cosh R-\cosh r)^{1/2}\cos(rt)dr. \tag{2.1}$$

We can identify this formula with the integral representation of an associated Legendre function (see 8.715.1 of [**Gr-Ry**])

$$h(t)=2\pi\,\mathrm{P}^{-1}_{-1/2+it}(\cosh R)\sinh R. \tag{2.2}$$

We can express this Legendre function in terms of the Gauss hypergeometric function (see 8.723.1 and 9.100 of [**Gr-Ry**]) obtaining

$$h(t)=\sqrt{2\pi\sinh R}\,\big(f(t)+f(-t)\big)\qquad\text{with}\quad f(t)=\frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)}F\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1-it,\frac{1}{1-e^{2R}}\right).$$

If $R > \log\sqrt{2}$ and $1 \pm it$ is not close to the non-positive integers we have trivially from the definition of F

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1 \pm it, \frac{1}{1-e^{2R}}\right) = 1 + O\big(|t|^{-1}e^{-2R}\big)$$

hence if t is real

$$h(t) = 2\sqrt{2\pi \sinh R}\, \operatorname{Re}\left(\frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)}\right)\big(1 + O\big(|t|^{-1}e^{-2R}\big)\big)$$

and using the Stirling's asymptotic expansion for the Γ function, $a)$ is proved.

If t is not real, let us assume for instance $\operatorname{Im} t < 0$ and $-it$ is not close to a non-positive integer, the we have similarly

$$h(t) = \sqrt{2\pi \sinh R}\, \frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)} + O\big(e^{(1/2-it)R}\big).$$

By the simmetry of h, an analogous bound holds when $\operatorname{Im} t < 0$. Dealing with the case in which $-it$ is close to the negative integers, we can obtain the same result using that h is analytic and applying the maximum modulus principle to the function

$$e^{(1/2-it)R}\left(h(t) - \sqrt{2\pi \sinh R}\frac{e^{itR}\Gamma(it)}{\Gamma(it+3/2)}\right)$$

and this concludes the proof of $b)$.

Calculating $h(0)$ with (2.1), we use the approximation

$$h(0) = 4\sqrt{2}\int_0^R \sqrt{e^R - e^r}\big(1 + O\big(e^{-R}\big)\big)dr = 4\sqrt{2}\int_0^R \sqrt{e^R - e^r}\,dr + O\big(Re^{-R/2}\big)$$

and with the change of variable

$$r = \log\left(e^R - u^2\right)$$

the integral becomes an elementary rational integral, after some computations we get

$$h(0) = 2\sqrt{2}Re^{R/2} + 8\sqrt{2}(\log 2 - 1)e^{R/2} + O\big(Re^{-R/2}\big).$$

Finally, the value of $h(i/2)$ can be exactly computed using (2.2)

$$h\big(\frac{i}{2}\big) = 2\pi \, \mathrm{P}_{-1}^{-1}(\cosh R) \sinh R$$

and the relation between associated Legendre functions with integral parameters and Legendre polynomials, namely in our case we have (see 8.752.3 and 8.820.7 of [**Gr-Ry**])

$$\mathrm{P}_{-1}^{-1}(z) = (z^2 - 1)^{-1/2} \int_1^z \mathrm{P}_0(s) ds.$$

The first Legendre polynomial, P_0, is identically equal to one, hence substituting in the formula for $h(i/2)$ the proof is finished. ■

<u>Proof of Lemma 2:</u> If f is the function defined by

$$f(r) = \sqrt{\cosh R - \cosh r} - \sqrt{\frac{\sinh R}{2R}} \sqrt{R^2 - r^2},$$

then we can write h as (see (2.1) in the proof of Lemma 1)

$$h(t) = 2\sqrt{\frac{\sinh R}{R}} \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - r^2} e^{irt} dr + 2\sqrt{2} \int_{-R}^{R} f(r) e^{irt} dr.$$

After a change of variable $r = Ru$, the first integral is a Bessel function of order one (see 3.752.2 of [**Gr-Ry**]), then

$$h(t) = 2\pi R t^{-1} J_1(Rt) \sqrt{\frac{\sinh R}{R}} + 2\sqrt{2} \int_{-R}^{R} f(r) e^{irt} dr.$$

Note that if $|f'| \ll R^2$ then the lemma follows because

$$\int_{-R}^{R} f(r) e^{irt} dr = \int_{-R}^{R} \int_0^r f'(u) e^{irt} du dr \ll R^4 e^{R|\mathrm{Im}\, t|}$$

and

$$\int_{-R}^{R} f(r)e^{irt}dr \ll t^{-1}\int_{-R}^{R} f'(r)e^{irt}dr \ll R^2t^{-2}e^{R|\mathrm{Im}\,t|},$$

where the last inequality is justified by the second mean value theorem (the variation of f' is bounded).

In order to prove $|f'| \ll R^2$ we distinguish two cases:

1) If $-R/2 \le r \le R/2$, we write f' as

$$f'(r) = \frac{2r\dfrac{\sinh R}{R}(\cosh R - \cosh r) - \dfrac{\sinh^2 r}{r}(R^2 - r^2)}{2\sqrt{\cosh R - \cosh r}\,\sqrt{R^2 - r^2}\left(\sqrt{2\dfrac{\sinh R}{R}}\,\sqrt{\cosh R - \cosh r} + \dfrac{\sinh r}{r}\,\sqrt{R^2 - r^2}\right)}.$$

After some easy estimates we obtain

$$f'(r) \ll rR^{-3}\left(2r\frac{\sinh R}{R}(\cosh R - \cosh r) - \frac{\sinh^2 r}{r^2}(R^2 - r^2)\right)$$

and writing the second order Taylor expansion of $\cosh r$ and $r^{-2}\sinh^2 r$ at $r = 0$, and expanding the result at $R = 0$, we have

$$f'(r) \ll rR \ll R^2.$$

2) If $0 < R - r \le R/2$ then a similar argument leads to

$$R^{7/2}(R-r)^{3/2}f'(r) \ll 2r^2(\cosh R - \cosh r)\sinh R - R(R^2 - r^2)\sinh^2 r,$$

again after elementary calculations computing the Taylor expansion of the right side at $r = R$ and expanding the result at $R = 0$, we have

$$f'(r) \ll R^{3/2}(R-r)^{1/2} \ll R^2.$$

Note that f' is odd, then from 1) and 2) we conclude that $f'(r) \ll R^2$ for every $r \in [-R, R]$ and as we mention before, this is enough to prove the lemma. ■

<u>Proof of Lemma 3:</u> If h is the Selberg–Harish-Chandra transform of a generic kernel k, using the formula connecting k with h and Parseval identity in a suitable way, one shows (see Appendix in [**Ku**])

$$k(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \tanh(\pi t) h(t) dt, \tag{2.3}$$

this equality can be found in [**Se 1**] in relation to the main term of the Selberg trace formula.

a) Computing the Selberg–Harish-Chandra inverse transform, after a change of variable we have

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) = \sqrt{2}\,\pi^{-3/2} T^3 \int_u^{\infty} \frac{w e^{-w^2T^2}}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw. \tag{2.4}$$

If we define

$$f(w) = \frac{w\, e^{-w^2T^2}}{\sinh w},$$

then f is decreasing for $w > 0$ and integrating by parts in (2.4) we have

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,\pi^{-3/2} T^3 \int_u^{\infty} f'(w) \sqrt{\cosh w - \cosh u}\, dw.$$

Differenciating with respect to u, we deduce that $k_1(t)$ is decreasing for positive values of t, then by (2.3) after a trivial estimate we conclude

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) \ll T^2. \tag{2.5}$$

This bound is essentially the best possible when $uT \ll 1$. If $uT \gg 1$ we proceed in the following way:

$$k_1\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) = \sqrt{2}\,\pi^{-3/2}T^3\int_u^{u+1/uT^2} + \sqrt{2}\,\pi^{-3/2}T^3\int_{u+1/uT^2}^{\infty} = I_1 + I_2.$$

Using that f is decreasing and our hypothesis $uT \gg 1$

$$I_1 \ll T^3 f(u)\int_u^{u+1/uT^2}\frac{\sinh w}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}}dw \ll T^2 e^{-T^2u^2},$$

similarly

$$I_2 \ll \frac{T^3}{\sqrt{\cosh(u+1/uT^2) - \cosh u}}\int_{u+1/uT^2}^{\infty} we^{-w^2T^2}dw \ll T^2e^{-T^2u^2}.$$

Hence the result is true if $uT \gg 1$, and by (2.5) it holds in the rest of the cases.

b) In this case the formula inverting the Selberg–Harish-Chandra transform gives

$$k_2\left(\frac{\cosh u - 1}{2}\right) = 2^{-1/2}\,\pi^{-3/2}T^3\int_u^{\infty}\frac{g(w)}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}}dw \tag{2.6}$$

where

$$g(w) = (w+r)e^{-(w+r)^2T^2} + (w-r)e^{-(w-r)^2T^2}.$$

We can suppose $rT > 1$ (and hence $uT > 1$ if $u \neq 0$), because otherwise after some computations we have

$$g(w) \ll w\,e^{-(w-r)^2T^2} \ll w\,e^{-cw^2T^2}$$

and by a) we get the result.

We divide the range of integration in (2.6) as follows

$$\int_u^{\infty}\frac{g(w)}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}}dw = \int_u^{u+T^{-1}} + \int_{u+T^{-1}}^{\infty} = I_1 + I_2.$$

For the first integral we use the bound

$$I_1 \ll T^{-1} e^{-c(u-r)^2T^2} \int_u^{u+T^{-1}} \frac{1}{\sqrt{\cosh w - \cosh u}} dw \ll u^{-1/2} T^{-3/2} e^{-c(u-r)^2T^2}$$

and in the same way

$$I_2 \ll \frac{1}{\sqrt{\cosh(u+T^{-1}) - \cosh u}} \int_{u+T^{-1}}^{\infty} g(w)dw \ll u^{-1/2} T^{-3/2} e^{-c(u-r)^2T^2}$$

remembering that under our hypothesis $u > T^{-1}$, we obtain $b)$ for $u \geq r$.

On the other hand if $u = 0$, by (2.3)

$$k_2(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \tanh(\pi t)\, e^{-t^2/4T^2} \cos(rt)dt \ll T^2$$

and integrating by parts

$$k_2(0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(rt)dt$$

where $f(t)$ is a function with not depending on T bounded variation. By the second mean value theorem we have

$$k_2(0) \ll r^{-1} \int_a^b \sin(rt)dt \ll r^{-2}$$

and this concludes the proof. ∎

<u>Proof of Lemma 4</u>: By definition, we have that the Selberg–Harish-Chandra transform of $k_1 * k_2$ is

$$\int_{\mathbb{H}} \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,v)) k_2(u(v,i)) (\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(v) d\mu(z)$$

and it can be written as

$$h(t) = \int_{\mathbb{H}} k_2(u(v,i)) (\operatorname{Im} v)^{1/2+it} \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,v)) \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im} v} \right)^{1/2+it} d\mu(z) d\mu(v). \tag{2.7}$$

The innermost integral does not depend on v, a proof of this non-trivial fact is given in [**Iw 2**] (see also [**Ku**]), we shall not repeat here the proof, but we should like mention that it is based on the commutativity of the Laplace-Beltrami operator, Δ, and the invariant integral operators on $\mathbb{H}$, from which it can be deduced that the eigenspaces of Δ (acting on $\Gamma\backslash\mathbb{H}$) are preserved, in particular

$$\int_{\mathbb{H}} k(u(z,v))(\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(z) = \alpha\,(\operatorname{Im} v)^{1/2+it}$$

where α only depend on the eigenvalue $1/4+t^2$.

Once we know that the integral does not depend on v, the proof can be finished easily, because choosing $v=i$ in the innermost integral of (2.7)

$$h(t) = \int_{\mathbb{H}} k_1(u(z,i))(\operatorname{Im} z)^{1/2+it} d\mu(z) \int_{\mathbb{H}} k_2(u(v,i))(\operatorname{Im} v)^{1/2+it} d\mu(v)$$

and these are the definitions of the k_1 and k_2. ∎

<u>Proof of Lemma 5:</u> Consider the invariant kernels

$$k_1(u(z,w)) = \chi\big((s+H)^{-1}\rho(z,w)\big) \qquad k_2(u(z,w)) = \frac{\chi\big(H^{-1}\rho(z,w)\big)}{4\pi\sinh^2(H/2)} \qquad k = k_1 * k_2$$

where $s=\operatorname{arc\,cosh}(x/2)$ and χ is the characteristic function of the interval [0,1].

The integral of $k_2(u(z,w))$ with respect to z or w equals 1, then by the definition of convolution and the triangle inequality for the distance ρ, we deduce that $k(u)$ takes the value 1 if $u+1/2\le x/4$. Hence

$$H(x;z,w) \le \sum_{\gamma\in\Gamma} k(u(\gamma z,w)). \tag{2.8}$$

Let h be the Selberg–Harish-Chandra transform of k, by Lemma 1, Lemma 2 and Lemma 4, we have

$$h(t) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(|t|)}{\Gamma(|t|+3/2)}x^{1/2+|t|} + O\big(x^{1/2}+xH\big) \qquad \text{if } \operatorname{Re} t = 0 \text{ and } 0<\epsilon<|\operatorname{Im} t|\le 1/2 \tag{2.9}$$

and (recall that $s = \operatorname{arc}\cosh(x/2) > 0$)

$$h(t) = g(|t|) + O\big(e^{s/2}|t|^{-5/2}\big) \qquad \text{if } t \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{2.10}$$

Now the lemma follows from the spectral expansion of k in (2.8) and the asymptotic formulas (2.9) and (2.10). The only point to be checked is that the contribution of the error term in (2.10) is absorbed by the error term in the statement of the lemma, but this is an easy consequence of Bessel inequality (see Prop. 2.7 of [**Iw 2**] or the proof of Theorem 2.1 below). ∎

§4. Proof of the main results

PROOF OF THEOREM 2.1:

By duality, there exists an unitary complex vector $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_R)$ such that

$$S = \Big(\sum_{\nu=1}^{R} b_\nu \Big(\sum_{|t_j| \le T} a_j u_j(z_\nu) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} a_{\mathbf{a}}(t) E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2 + it) dt \Big)^l \Big)^2$$

and expanding the l-power

$$S = \Big(\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{(4\pi)^k} \binom{l}{k} \sum_{|t_{j_1}|, \ldots |t_{j_{l-k}}| \le T} \sum_{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k} \int_{[-T,T]^k} a_{j_1} \ldots a_{j_{l-k}} a_{\mathbf{a}_1}(r_1) \ldots a_{\mathbf{a}_k}(r_k) \widetilde{S} d\vec{r} \Big)^2$$

where

$$\widetilde{S} = \sum_{\nu=1}^{R} b_\nu u_{j_1}(z_\nu) \ldots u_{j_{l-k}}(z_\nu) E_{\mathbf{a}_1}(z_\nu, 1/2 + ir_1) \ldots E_{\mathbf{a}_k}(z_\nu, 1/2 + ir_k).$$

By Cauchy's inequality for the scalar product of $\mathbb{C}^{l-k} \times \left(L^2(\mathbb{R}) \right)^k$

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{k=0}^{l} \sum_{|t_{j_1}|, \ldots |t_{j_{l-k}}| \le T} \sum_{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k} \int_{[-T,T]^k} \big| \widetilde{S} \big|^2 d\vec{r}$$

$$\ll ||a||_*^{2l} \sum_{k=0}^{l} \sum_{|t_{j_1}|, \ldots |t_{j_{l-k}}| \le T} \sum_{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k} \int_{\mathbb{R}^k} \phi(t_{j_1}, \ldots, t_{j_{l-k}}, r_1, \ldots, r_k) \big| \widetilde{S} \big|^2 d\vec{r}$$

where

$$\phi(t_{j_1}, \ldots, t_{j_{l-k}}, r_1, \ldots, r_k) = e^{-(t_{j_1}^2 + \cdots + t_{j_{l-k}}^2 + r_1^2 + \cdots + r_k^2)/4T^2}.$$

By the definition of $\widetilde{S}$ we have

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{\nu,\mu=1}^{R} b_\nu \overline{b_\mu} \left(S_{\nu\mu}\right)^l \tag{2.11}$$

where

(2.12)

$$S_{\nu\mu} = \sum_j e^{-t_j^2/4T^2} u_j(z_\nu)\overline{u_j(z_\mu)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/4T^2} E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(z_\mu, 1/2+it)}dt.$$

Now we can consider this expression as the spectral expansion of an automorphic kernel. Using the results of §1

$$S_{\nu\mu} = \sum_{\gamma\in\Gamma} k_1(u(\gamma z_\nu, z_\mu))$$

where k_1 is given by Lemma 3, hence

$$S_{\nu\mu} \ll T^2 \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-T^2\rho(\gamma z_\nu, z_\mu)}. \tag{2.13}$$

We can assume, perhaps choosing a suitable representative of the orbit of z_ν, that $d(z_\nu, z_\mu) = \rho(z_\nu, z_\mu)$, i.e. the bigger term in the summation occurs when $\gamma = Id$. In some special "antipodal positions" of z_ν and z_μ several γ's with $d(z_\nu, z_\mu) = \rho(z_\nu, z_\mu)$ could exist, but this case can easily be studied directly or avoided with an infinitesimal displacement of z_ν or z_μ.

We define

$$d_*(z_\nu, z_\mu) = \inf_{\gamma\neq Id} \rho(\gamma z_\nu, z_\mu).$$

By our hypothesis $y_{\Gamma}(z_\nu) < M$ we have $d_*(z_\nu, z_\mu) \gg M^{-1}$, we shall also assume for a moment that $d(z_\nu, z_\mu) \gg T^{-1}$, hence

$$d_*(z_\nu, z_\mu) \gg M^{-1} + T^{-1}. \tag{2.14}$$

Now we define

$$c(r) = \#\{\gamma \neq Id \,/\, r < \rho(\gamma z_\nu, z_\mu) \leq 2r\},$$

by estimates for the hyperbolic circle problem only based in matrix counting arguments (see Lemma 2.11 of [**Iw 2**]) we have

$$c(r) \ll Mr + 1 \quad \text{if } 0 < r \leq 1 \qquad \text{and} \qquad c(r) \ll Me^r \quad \text{if } r > 1,$$

then by (2.13)

$$S_{\nu\mu} \ll T^2 e^{-T^2 d^2(z_\nu, z_\mu)} + \sum_{k=0}^{\infty} c\big(2^k d_*(z_\nu, z_\mu)\big) e^{-\frac{T^2}{2} 2^{2k} d_*^2(z_\nu, z_\mu)},$$

and by the bounds for $c(r)$ and (2.14)

$$S_{\nu\mu} \ll (T^2 + TM) e^{-\frac{T^2}{2} d^2(z_\nu, z_\mu)}. \tag{2.15}$$

We have proved this bound under the asumption $d(z_\nu, z_\mu) \gg T^{-1}$, but in other case we can apply to (2.12) Cauchy's inequality and the following consequence of Bessel inequality in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ (see Proposition 2.7 of [**Iw 2**]):

$$\sum_{|t_j|<T} |u_j(z)|^2 + \sum_{\mathbf{a}} \int_{-T}^{T} |E_{\mathbf{a}}(z, 1/2 + it)|^2 dt \ll T^2 + T y_{\Gamma}(z) \tag{2.16}$$

and (2.15) follows easily if $d(z_\nu, z_\mu) \ll T^{-1}$.

Substituting (2.15) in (2.11) we obtain

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{\nu,\mu=1}^{R} \big(|b_\nu|^2 + |b_\mu|^2\big) |S_{\nu\mu}|^l \ll ||a||_*^{2l} (T^2 + TM)^l \sum_{\nu} |b_\nu|^2 \sum_{\mu} e^{-\frac{T^2 l}{2} d^2(z_\nu, z_\mu)}. \tag{2.17}$$

A hyperbolic circle of radius r has area $4\pi\sinh^2(r/2)$, then by the spacing condition the number of z_ν's included in it, is bounded by

$$\frac{\sinh^2(r+\delta)/2}{\sinh^2\delta/2} \ll \cosh^2 r/2 + \frac{\sinh^2 r/2}{\tanh^2\delta/2}$$

and this is also a bound for the z_μ's with $r/2 < d(z_\nu, z_\mu) \le r$, whence

$$\sum_\mu e^{-\frac{T^2 l}{2}d^2(z_\nu,z_\mu)} \ll 1 + T^{-2}\delta^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\cosh^2 2^k/T + \frac{\sinh^2 2^k/T}{\tanh^2\delta/2}\right)e^{-l2^{2k-1}} \ll 1 + T^{-2}\delta^{-2},$$

substituting this inequality in (2.17) the result follows. ■

PROOF OF COROLLARY 2.1.1:

Note that in Lemma 5 $E_T(x;z,w)$ goes to zero quickly when T is much bigger than H^{-1}. Eliminating the last part of the series which contributes less than the error term and applying Hölder inequality to the $O(H^{-\epsilon})$ remaining terms, we have that there exists a value of T such that

$$\sum_\nu |E(x;z_\nu,w)|^{2l} \ll H^{-\epsilon}\sum_\nu |E_T(x;z_\nu,w)|^{2l} + R(x^l M^l + x^{2l}H^{2l}) \tag{2.18}$$

and

$$\sum_\nu |E_T(x;z_\nu,w)|^{2l} \ll x^l \sup_{T\le H^{-1}} T^{-3l}S + x^l H^{-3l}\sup_{T\ge H^{-1}} T^{-6l}S \tag{2.19}$$

where S is defined as in the Theorem 2.1 with certain coefficients

$$a_j \ll u_j(w) \qquad a_{\mathbf{a}}(t) \ll E_{\mathbf{a}}(w, 1/2+it) \qquad \text{with } T < |t_j|, |t| \le 2T \quad t_j, t \in \mathbb{R}.$$

By (2.19) and Theorem 2.1 using (2.16), we obtain

$$\sum_\nu |E(x;z_\nu,w)|^{2l} \ll \left(H^{2-l-\epsilon} + M^l\right)x^l\delta^{-2} + x^l H^{-l-\epsilon} + x^l H^{-\epsilon}M^l + Rx^l + Rx^{2l}H^{2l}$$

choosing $H = R^{-1/3l}x^{-1/3}$ (if R is bigger than a certain power of x, $H = x^{-1/2}$ gives a better result) and using that $R\delta^2 \ll 1$ the result follows. ■

<u>PROOF OF COROLLARY 2.1.2:</u>

The proof is a direct consequence of Corollary 2.1.1, because if $l = 1, 2$

$$\sum_{\nu=1}^{R} |E(x; z_\nu, w)|^{2l} \ll M^l x^{l+\epsilon}\delta^{-2} + x^{4l/3+\epsilon}R^{1/3} + x^{l+\epsilon}M^l$$

and by our hypothesis we have $\delta^{-2} \asymp R$, $R > x^{l/2}$ and $M \asymp 1$. ■

<u>PROOF OF THEOREM 2.2:</u>

We start following the same argument as in the Theorem 2.1, the only difference is that $u_j(z_\nu)$ and $E_{\mathbf{a}}(z_\nu, 1/2+it)$ are replaced by $x_\nu^{it_j}u_j(z)$ and $x_\nu^{it}E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)$ respectively, so we get the same inequality

$$S \ll ||a||_*^{2l} \sum_{\nu,\mu=1}^{R} b_\nu \overline{b_\mu} \left(S_{\nu\mu}\right)^l \tag{2.20}$$

but in this case

$$S_{\nu\mu} = \sum_j e^{-t_j^2/4T^2} x_\nu^{it_j} x_\mu^{-it_j} u_j(z)\overline{u_j(z)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4T^2} x_\nu^{it} x_\mu^{-it} E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)}dt.$$

Note that with our considerations about the sign of t_j we can write $S_{\nu\mu}$ as

$$\sum_j e^{-t_j^2/4T^2}\cos(r_{\nu\mu}t_j)u_j(z)\overline{u_j(z)} + \frac{1}{4\pi}\sum_{\mathbf{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4T^2}\cos(r_{\nu\mu}t)E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)\overline{E_{\mathbf{a}}(z, 1/2+it)}dt$$

where

$$r_{\nu\mu} = |\log(x_\nu/x_\mu)| \ll X^{-1}|x_\nu - x_\mu|.$$

We can suppose (perhaps dividing firstly the interval $[X, 2X]$ into a certain number of subintervals) $\rho(\gamma z, z) > r_{\nu\mu}/2$ if γ is not the identity, therefore by the spectral expansion of automorphic kernels given in §1 and by Lemma 3 *b*), we have

$$S_{\nu\mu} \ll \min\left(T^2, r_{\nu\mu}^{-2}\right) + T^2 \sum_{\gamma \neq Id} e^{-cT^2(\rho(\gamma z, z) - r_{\nu\mu})^2} \ll \min\left(T^2, X^2 |x_\nu - x_\mu|^2\right).$$

Substituting in (2.20)

$$S \ll ||a||_*^{2l} \left(T^{2l} S_1 + X^{2l} S_2\right) \tag{2.21}$$

where

$$S_1 = \sum_{|x_\nu - x_\mu| \leq XT^{-1}} |b_\nu||b_\mu| \qquad S_2 = \sum_{|x_\nu - x_\mu| > XT^{-1}} |b_\nu||b_\mu||x_\nu - x_\mu|^{-2l}.$$

Now we use the standard inequalities (see Sec. 2 of [**Bo**] or Ch. 1 of [**Mo**])

$$S_1 \ll \sum_{|x_\nu - x_\mu| \leq XT^{-1}} (|b_\nu|^2 + |b_\mu|^2) \ll \sum_\nu |b_\nu|^2 \#\{x_\nu \,/\, |x_\nu - x_\mu| \leq XT^{-1}\} \ll 1 + X\delta^{-1}T^{-1}$$

and similarly we have

$$S_2 \ll \sum_{|x_\nu - x_\mu| > XT^{-1}} |b_\nu|^2 |x_\nu - x_\mu|^{-2l} \ll \sum_\nu |b_\nu|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(XT^{-1} + k\delta\right)^{-2l} \ll X^{-2l+1}\delta^{-1}T^{2l-1}.$$

Putting this estimates in (2.21) the theorem is proved. ∎

<u>Proof of Corollary 2.2.1:</u>

With the same reasoning as in the proof of Corollary 2.1.1, we have that for a suitable value of T

$$\sum_\nu |E(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll H^{-\epsilon} \sum_\nu |E_T(x; z_\nu, w)|^{2l} + Rx^l + Rx^{2l}H^{2l} \tag{2.22}$$

where E_T is defined as in Lemma 5. Following the notation of this lemma, we can write the $g(t)$ corresponding to x_ν as

$$g(t) = a(H,t)\, e^{its_\nu} + b(H,t)\, e^{-its_\nu}$$

where $s_\nu = \operatorname{arc\,cosh}(x_\nu/2)$ and

$$a(H,t), b(H,t) \ll X^{1/2}|t|^{-3/2} \min\bigl(1, (H|t|)^{-3/2}\bigr).$$

Hence as in the proof of Corollary 2.1.1, we have

$$\sum_\nu |E_T(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll X^l \sup_{T\le H^{-1}} T^{-3l} S + X^l H^{-3l} \sup_{T\ge H^{-1}} T^{-6l} S$$

where S is a sum similar to that of Theorem 2.2 but changing x_ν by e^{s_ν}, and with coefficients

$$a_j \ll u_j(w) \qquad a_{\mathbf{a}}(t) \ll E_{\mathbf{a}}(w, 1/2 + it) \qquad \text{with } T < |t_j|, |t| \le 2T \quad t_j, t \in \mathbb{R}.$$

By (2.22) and Theorem 2.2 (note that $x_1, x_2, \dots$ are δ-spaced implies that $e^{s_1}, e^{s_2}, \dots$ are η-spaced with $\eta \asymp \delta$) and using (2.16) to bound $||a||_*$, we have

$$\sum_\nu |E(x_\nu; z, w)|^{2l} \ll H^{-\epsilon}\bigl(1 + H^{1-l}\bigr) X^{l+1}\delta^{-1} + X^l H^{-l-\epsilon} + RX^l + RX^{2l}H^{2l} \tag{2.23}$$

choosing $H = \max\bigl(X^{-1/2}, R^{-1/3l}X^{-1/3}\bigr)$ the proof is complete. ■

<u>PROOF OF COROLLARY 2.2.2:</u>

If $l = 1$ the Corollary 2.2.1 is reduced to

$$\sum_\nu^R |E(x_\nu; z, w)|^2 \ll X^{2+\epsilon}\delta^{-1} + R^{1/3}X^{4/3+\epsilon}$$

and replacing δ^{-1} by RX^{-1}, when $R > X^{1/2}$ the first term dominates. ■

PROOF OF COROLLARY 2.2.3:

In the Chapter 12 of [**Iw 2**] is proved

$$\mathcal{C}(x) = E(4x+2; i, i) + 2 \quad \text{if} \quad \Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mod 2 \right\},$$

then by (2.23), choosing $l = 1$, $\delta = q$ and $H = cX^{\alpha-1}$ with a small enough positive constant, c, we have

$$X^{2\alpha} \# \{ x \equiv a \ (q) \ \ x \asymp X \, / \, |\mathcal{C}(x)| > x^\alpha \} \ll X^{2+\epsilon} q^{-1} + X^{2-\alpha},$$

note that if $q = 1$ this is only Chebychev inequality.

Summing over the dyadic intervals whose union is $[1, 2X]$, we have

$$\# \{ x \equiv a \ (q) \ \ x \le X \, / \, |\mathcal{C}(x)| > x^\alpha \} \ll X^{2-2\alpha+\epsilon} q^{-1} + X^{2-3\alpha}$$

and this proves the corollary. ■

PROOF OF THEOREM 2.3:

The beginning of the proof is essentially the same that in the hyperbolic case forgetting the contribution of the continous part (see the proof of Theorem 2.1). So, in a similar way by duality, we can find an unitary vector $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_R)$ such that if we call S to the left side of the inequality of the theorem

$$S = \Big(\sum_{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_l} \le \Lambda} a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_l} \sum_{\nu=1}^{R} b_\nu \phi_{j_1}(x_\nu) \cdot \ldots \cdot \phi_{j_l}(x_\nu) \Big)^2$$

and by Cauchy's inequality and introducing a smoothing factor of the form $e^{-\lambda_j/\Lambda}$, we have

$$S \ll \Big(\sum_{\lambda_j \le \Lambda} |a_j|^2 \Big)^l \sum_{\nu, \mu} b_\nu \overline{b_\mu} \big(S_{\nu\mu} \big)^l \tag{2.24}$$

where

$$S_{\nu\mu} = \sum_{\lambda_j} e^{-\lambda_j/\Lambda} \phi_j(x_\nu)\overline{\phi_j(x_\mu)}.$$

Note that $S_{\nu\mu}$ can be considered as the fundamental solution for the heat equation. Namely, if we define $u(x,y,t)$ with $x, y \in M$ and $t \in \mathbb{R}^+$ as the solution of

$$\text{(2.25)} \qquad \begin{cases} Lu = 0 \\ \\ u(x,y,0) = \delta_y(x) \end{cases} \qquad L = -\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x \qquad \delta_y = \text{ Dirac's delta on } y$$

then we have

$$\text{(2.26)} \qquad S_{\nu\mu} = u(x_\nu, x_\mu, \Lambda^{-1}).$$

We only need an upper bound for $S_{\nu\mu}$, but we should like to point out that a more careful analysis allows to get an asymptotic expansion for $S_{\nu\mu}$ called the Minakshisundaram-Pleijel expansion (see [**Mi-Pl**] and[**Be-Ga-Ma**]), which after integration over $x_\nu = x_\mu$ can be interpreted in terms of geometrical invariants, obtaining a formula relating a sum involving eigenvalues and a sum with geometrical meaning. This is the basis of the analytic proof of the celebrated Atiyah-Singer index theorem (see [**Bo-Bl**] and [**Gi**]) from which several classic index theorems, like Gauss-Bonnet or Riemann-Roch can be deduced.

Studying the solution of (2.25) we shall follow [**Be-Ga-Ma**] quoting the main results from it (see also pag. 804 of [**Ko**] for a short sketch of the proof). We highly suggest the interesting work [**Ka**] for an intuitive physical point of view.

First of all, a parametrix, H_k, of L is constructed, this is in some sense an approximate solution of (2.25). The precise result is the following (see Définition E.III.2 and Lemme E.III.3 of [**Be-Ga-Ma**]):

There exist functions $u_1, u_2 \dots \in C^\infty(M \times M)$ only depending on the metric of M, and $\rho \in \mathbb{R}$ such that given $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ with $\eta(r) = 1$ if $|r| \le \rho$ and $\eta(r) = 0$ if $|r| > 2\rho$, the function defined by

$$H_k(x,y,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} (u_0 + tu_1 + \dots + t^k u_k)\eta\big(d(x,y)\big)$$

verifies

$$H_k \in C^\infty(M\times M\times\mathbb{R}^+) \qquad \lim_{t\to 0^+} H_k(x,y,t) = \delta_y(x) \qquad k > \frac{n}{2}+l \Rightarrow LH_k \in C^l(M\times M\times\mathbb{R}^+).$$

Moreover, if $d(x,y) < \rho$

$$LH_k(x,y,t) = (4\pi)^{-n/2} t^{-n/2+k} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}} \Delta_x u_k.$$

Starting with H_k, $k > n/2+2$, it is possible to construct the solution, u, of (2.25) iterating a certain integral operator whose fixed point is u (see [**Ko**]), namely the result is (see Proposition E.III.8 of [**Be-Ga-Ma**]):

$$u = H_k - Q_k * H_k \qquad \forall k > \frac{n}{2} + 2 \tag{2.27}$$

where the "convolution" $A * B$ is defined by

$$A * B(x,y,t) = \int_0^t \int_M A(x,z,\tau) B(z,y,t-\tau)\, dV d\tau$$

and

$$Q_k = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} (LH_k)^{*j} \qquad \text{with } (LH_k)^{*j} = LH_k * \overset{l \text{ times}}{\cdots} * LH_k.$$

It can be proved (see Lemme E.III.6 of [**Be-Ga-Ma**]) that Q_k is less than a positive power of t, therefore by (2.27) and the definition of H_k we get, for small values of t

$$u(x,y,t) \ll t^{-n/2} e^{-c\frac{d^2(x,y)}{4t}}.$$

By (2.26) and substituting in (2.24) we have

$$S \ll \Lambda^{nl/2}\Big(\sum_{\lambda_j\le\Lambda}|a_j|^2\Big)^l\sum_{\nu,\mu}|b_\nu||b_\mu|e^{-c\Lambda d^2(x_\nu,x_\mu)}$$

hence

$$S \ll \Lambda^{nl/2}\Big(\sum_{\lambda_j\le\Lambda}|a_j|^2\Big)^l\sum_{\nu}|b_\nu|^2\sum_{\mu}e^{-c\Lambda d^2(x_\nu,x_\mu)}. \tag{2.28}$$

By the spacing condition

$$\#\{\mu \,/\, d^2(x_\nu,x_\mu)<r\} \ll 1+\delta^{-n}\min\big(r,\mathrm{d}(M)\big)$$

where $\mathrm{d}(M)$ is the diameter of M. Hence

$$\sum_\mu e^{-c\Lambda d^2(x_\nu,x_\mu)} \ll 1+\Lambda^{-n/2}\delta^{-n}$$

and substituting in (2.28) the theorem is proved. ∎

<u>Proof of Corollary 2.3.1:</u>

Solving the wave equation (see [**Co-Hi**]), with the notation of Theorem 2.3 we have

$$u(x,t)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}\big(c_j\cos(\sqrt{\lambda_j}t)+\frac{d_j}{\sqrt{\lambda_j}}\sin(\sqrt{\lambda_j}t)\big)\phi_j(x)$$

with

$$f(x)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}c_j\phi_j(x)\qquad g(x)=\sum_{\lambda_j\le\Lambda}d_j\phi_j(x).$$

By Theorem 2.3 with $l=1$,

$$\sum_\nu\frac{1}{2}|u_t(x_\nu,t)|^2 \ll \big(\Lambda^{n/2}+\delta^{-n}\big)\sum_{\lambda_j\le\Lambda}\big(\lambda_j|c_j|^2+|d_j|^2\big). \tag{2.29}$$

By definition, the right side is the sum of the kinetic energies of p_ν, and the left side is E, the energy of u (see [**Co-Hi**] and [**Fe**]).

Finally, by our hypothesis on the spacing and the size of δ, we have

$$\Lambda^{n/2}+\delta^{-n}\ll\delta^{-n}\ll R$$

and the result follows from (2.29). ∎

CHAPTER III

Euclidean Lattice Point Problems

Given a convex domain $D \subset \mathbb{R}^2$ such that its boundary, ∂D, is a closed simple curve with a non vanishing and twice differentiable curvature radius. We consider the lattice point problem corresponding to D, i.e. we want to estimate

$$P_D(x) = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \cap \sqrt{x}D\} - |D|x \qquad \text{with } x > 1$$

where $\sqrt{x}D$ is D under a dilation $\sqrt{x}$ and $|D|$ is the area of D.

The conjecture is $P_D(x) \ll x^{1/4+\epsilon}$ and it is motivated by some probabilistic ideas about the behaviour of exponential sums, which are in same sense similar to Lindelöf hypothesis. The best know result is due to Huxley (see [**Hu 2**]) who replaces $1/4$ by $23/73$.

Time before, Kendall proved that the conjecture is true in average over all the translations of D (see [**Ke**]), namely defining

$$P_D(x;a,b) = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, (m-a, n-b) \in \sqrt{x}D\} - |D|x$$

it holds

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |P_D(x;a,b)|^2 dadb\right)^{1/2} \ll x^{1/4}.$$

In this chapter we shall study average results over radii and centers with a spacing condition. As we mention in the previous chapter this kind of results are closer to statistical idea of averaging than integral results, because a finite random sample is fixed which is in some sense representative (because of the spacing condition) of the set in which we average.

In the first section, following the lines of Chapter II, we shall give the corresponding results for well spaced centers and we shall deduce that the conjecture is also true in the sense of the fourth power moment.

In the second section we shall consider the circle problem and the divisor problem. In these cases, by the special arithmetical properties of some Fourier transforms, it is possible to put together several oscillatory terms after Poisson summation to get the so called Hardy-Voronoï formulas. In this way one dimensional sums over the integers appear instead of sums over eigenfunctions and eigenvalues, and averaging over radii better results are proved than in other problems (compare the results of §2 with the corollaries 2.2.1 and 2.2.2 of Chapter II).

æ

§1. Averaging over centers in general domains

We start giving a definition of spacing over centers:

<u>Definition:</u> *We say that* $(a_\nu, b_\nu) \in (0,1] \times (0,1]$ *with* $\nu = 1, 2 \ldots, R$ *are* δ*-spaced centers if*

$$\langle a_\nu - a_\mu \rangle^2 + \langle b_\nu - b_\mu \rangle^2 \geq \delta^2 \quad \forall \nu \neq \mu$$

where $\langle \cdot \rangle$ *is the distance to the nearest integer.*

<u>Remark:</u> *Note that this definition coincides with the one given in the second section of Chapter* II *for* δ*-spaced points in* M*, if* M *is the two-dimensional flat torus* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$*.*

With this notation the results of this section are the following:

Theorem 3.1: *Given* (a_ν, b_ν) $\nu = 1, 2, \ldots, R$ δ*-spaced centers, then if* l *is a fixed positive integer*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |P_D(x; a_\nu, b_\nu)|^{2l} \ll \big(1 + R^{(l-2)/3l} x^{(l-2)/6}\big) x^{l/2+\epsilon} \delta^{-2} + R^{1/3} x^{2l/3+\epsilon}$$

where the "$\ll$*" constant depend on* D *and* l*.*

Corollary 3.1.1: *For each* $\epsilon > 0$

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |P_D(x; a, b)|^4 \, da\, db \right)^{1/4} \ll x^{1/4+\epsilon}.$$

æ

§2. Averaging over radii in the circle and divisor problems

The truncated Hardy-Voronoï formulas (see 3.17 and 13.75 in [**Iv**] and [**Ha 2**]) assert the following:

If $\Delta(x)$ is the error term in the divior problem

$$\Delta(x) = \frac{x^{1/4}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n\le N} \frac{d(n)}{n^{3/4}} \cos(4\pi\sqrt{nx} - \pi/4) + O\big(x^{\epsilon}\big) + O\big(x^{1/2+\epsilon}N^{-1/2}\big)$$

and similarly if $P(x)$ is the error term in the circle problem

$$P(x) = -\frac{x^{1/4}}{\pi} \sum_{n\le N} \frac{r(n)}{n^{3/4}} \cos(2\pi\sqrt{nx} + \pi/4) + O\big(x^{\epsilon}\big) + O\big(x^{1/2+\epsilon}N^{-1/2}\big).$$

In both cases they appear sums of the form

$$S_N(x) = \sum_{n\asymp N} a_n e(\sqrt{nx}) \quad \text{with} \quad a_n \ll x^{1/4}N^{-3/4+\epsilon}.$$

Our results of this section are deduced from large sieve inequalities for this kind of sums. The first result is essentially a consequence of the classic large sieve inequality approximating the phase $\sqrt{nx}$ by linear polynomials in n.

Theorem 3.2: *Let $x_1, x_2, \dots, x_R \in [X, 2X]$ be δ-spaced points with respect the standard distance in $\mathbb{R}$ (i.e. $\nu \ne \mu \Rightarrow |x_\nu - x_\mu| > \delta$) and let $\mathcal{E}(x)$ be the error term in the circle or divisor problems, then fixed a positive integer l, it holds*

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{(l+2)/2+\epsilon}\delta^{-1}\big(1 + R^{(l-2)/(3l-1)}X^{(l-1)(l-2)/(6l-2)}\big) + R^{(l-1)/(3l-1)}X^{2l^2/(3l-1)+\epsilon}$$

where the "$\ll$" constant only depend on l.

Now the analogous of Corollary 3.1.1 is (compare with [**Ha 2**])

Corollary 3.2.1: *For* $l = 1, 2$

$$\left(\int_X^{2X} |\mathcal{E}(x)|^{2l} \right)^{1/2l} \ll X^{1/4+\epsilon}.$$

<u>Remark:</u> *This result is much weaker than the one recently obtained by Tsang (see* [**Ts**]*) who computes the "≪" constant using more direct methods. But note that Erdös Turán inequality used in* [**Ts**] *to study the convergence of certain series, is other formulation of the large sieve and certain error terms can be reduced using results similar to the ones of this section.*

When the spacing, δ, is large the Theorem 3.2 becomes trivial, in this case it is worthy to use the pair exponent theory (see [**Gr-Ko**]) in order to estimate some trigonometric sums optimizing in other ranges, the so obtained result is the following:

Theorem 3.3: *With the notation of Theorem 3.2, if* (p, q) *is and exponent pair with* $2q - p - 1 > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{l+\epsilon}\delta^{-l} + RX^{ql+\epsilon}\delta^{(p-2q+1)l} + R\delta^{2l}.$$

<u>Remark:</u> *For* $l = 1$ *a similar result was proved by Ivić (see Sec. 13.7 of* [**Iv**]*) to obtain upper bounds for the meausure of*

$$\{x \in [X, 2X] \,/\, |\mathcal{E}(x)| > \lambda\}$$

and in this way compute power moments of $\mathcal{E}(x)$ *of order greater than four. His work is closely related with the Heath Brown's method to estimate the twelveth power moment of the Riemann zeta-function in the critical line (see Chapter 8 of* [**Iv**]*).*

æ

§3. Proof of the main results

PROOF OF THEOREM 3.1:

Let χ_D be the characteristic function of D and χ_H the characteristic function of the ball of radius $H^{1/2}$ where $1 > H > x^{-1/2}$ is a number to be chosen later. Let f be the function defined by

$$f = f_D * f_H \qquad \text{where } f_D(\vec{r}) = \chi_D\left(\frac{\vec{r}}{\sqrt{x}+\sqrt{H}}\right) \quad \text{and} \quad f_H(\vec{r}) = \frac{\chi_H\big(H^{-1/2}\vec{r}\big)}{\pi H}$$

where $*$ means the standard convolution in $L^1(\mathbb{R})$ (see [**Bo-Bl**]).

Note that f is bigger than χ_D everywhere, hence

$$P_D(x;a,b) \le -|D|x + \sum_{m,n} f(m-a, n-b)$$

and by Poisson summation formula we get

$$P_D(x;a,b) \le -|D|x + \sum_{m,n} \widehat{f}_D(m,n)\widehat{f}_H(m,n)e(ma+nb). \tag{3.1}$$

In [**Ke**] is given an asymptotic expansion for $\widehat{f}_D(m,n)$ (see also Lemma 2.1 in [**Bl**] for a concise and clearer statement), in particular it can be deduced

$$\widehat{f}_D(m,n) \ll x^{1/4}(m^2+n^2)^{-3/4},$$

on the other hand $\widehat{f}_H(m,n)$ is a Bessel type function and it verifies (see [**Ci**])

$$\widehat{f}_H(m,n) \ll 1 \ \text{ if } (m^2+n^2)H < 1 \quad \text{and} \quad \widehat{f}_H(m,n) \ll (m^2+n^2)^{-3/4}H^{-3/4} \ \text{ if } (m^2+n^2)H > 1.$$

Therefore, separating the main term in (3.1) ($m = n = 0$) and estimating trivially the last terms in the series, we have

$$P_D(x;a,b) \ll x^{1/2}H^{1/2} + \sum_{L=2^j \le H^{-3/2}} \Big| \sum_{m^2+n^2 \asymp L} a_{mn} e(na+mb) \Big| \tag{3.2}$$

for certain a_{mn}'s such that when $m^2+n^2 \asymp L$

$$(3.3) \qquad a_{mn} \ll \begin{cases} x^{1/4}L^{-3/4} & \text{if } LH \ll 1 \\ x^{1/4}L^{-3/2}H^{-3/4} & \text{if } LH \gg 1. \end{cases}$$

If we sum in (3.2) over the centers (a_ν, b_ν) and raise to the $2l$-power, by Hölder inequality

$$(3.4) \qquad \sum_{\nu=1}^{R} |P_D(x; a_\nu, b_\nu)|^{2l} \ll x^\epsilon \sup_{1\le L\le H^{-3/2}} \sum_{\nu=1}^{R} \Big| \sum_{m^2+n^2\asymp L} a_{mn} e(na_\nu + mb_\nu) \Big|^{2l} + Rx^l H^l.$$

Now we could apply a two-dimensional version of large sieve inequality (this is a particular case of Lemma 2.4 in [**Bo-Iw**]) but we prefer to use Theorem 2.3 of Chapter II to remark its generality.

Recalling that the eigenfunctions of Laplace-Beltrami operator in the flat torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ are $e(nx+my)$ and the corresponding eigenvalues are $-4\pi(m^2+n^2)$, form Theorem 2.3 we conclude

$$\sum_{\nu=1}^{R} \Big| \sum_{m^2+n^2\asymp L} a_{mn} e(na_\nu + mb_\nu) \Big|^{2l} \ll L^l \big(1+\delta^{-2}L^{-1}\big) \Big(\sum_{m^2+n^2\asymp L} |a_{mn}|^2 \Big)^l.$$

Substituting in (3.4) and recalling (3.3) we have

$$\sum_{\nu=1}^{R} |P_D(x; a_\nu, b_\nu)|^{2l} \ll x^{l/2+\epsilon}(1+\delta^{-2}) + x^{l/2+\epsilon}H^{-l/2}(1+\delta^{-2}H) + Rx^l H^l$$

and it is enough to choose $H = \min\big(R^{-2l/3}x^{-1/3}, x^{-1/2}\big)$ to finish the proof. ■

<u>PROOF OF COROLLARY 3.1.1:</u>

The corollary can be directly deduced from Theorem 3.1 choosing $l=2$ and taking uniformly distributes centers (a_ν, b_ν) with spacing, δ, approaching to zero. ■

Proof of Theorem 3.2:

We start applying partial summation and Hölder inequality to the truncated Hardy-Voronoï formulas to prove that given $N_0 < X^{1/2}$ there exists $N < N_0$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{\epsilon} \sum_{\nu=1}^{R} \left|S_N(x_\nu)\right|^{2l} + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l}$$

where $S_N(x)$ was defined in §2.

Dividing the interval $[X, 2X]$ into dyadic subintervals of lenght $H < X$, then for one of then, I_H, we have

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{1+\epsilon} H^{-1} \sum_{x_\nu \in I_H} \left|S_N(x_\nu)\right|^{2l} + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l},$$

by duality there exists an unitary vector $\vec{b}$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{1+\epsilon} H^{-1} \Big(\sum_{x_\nu \in I_H} b_\nu \big(S_N(x_\nu)\big)^l \Big)^2 + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l}.$$

Expanding the l-power, changing the order of sumation and applying Cauchy inequality, we have

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{(l+2)/2+\epsilon} N^{-l/2} H^{-1} \sum_{x_\nu, x_\mu \in I_H} b_\nu \bar{b}_\mu \big(S_{\nu\mu}\big)^l + RX^{l+\epsilon} N_0^{-l} \tag{3.5}$$

where

$$S_{\nu\mu} = \sum_{n \asymp N} e\big(\sqrt{n}(\sqrt{x_\nu} - \sqrt{x_\mu})\big).$$

Note that for a suitable "$\ll$" constant

$$H \ll \sqrt{NX} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{x_\nu} - \sqrt{x_\mu}}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}$$

and by the trivial estimate and Theorem 2.1 in [**Gr-Ko**] we get

$$S_{\nu\mu} \ll \min\big(N, (NX)^{1/2}|x_\nu - x_\mu|^{-1}\big). \tag{3.6}$$

Using the spacing condition

$$\sum_{x_\nu, x_\mu \in I_H} b_\nu \bar{b}_\mu \big(S_{\nu\mu}\big)^l \ll \sum_{x_\nu \in I_H} |b_\nu|^2 \sum_{x_\mu \in I_H} \min\big(N^l, (NX)^{l/2}|x_\nu - x_\mu|^{-l}\big) \ll N^l\big(1 + X^{1/2+\epsilon}N^{-1/2}\delta^{-1}\big).$$

Substituting in (3.5) with $H \asymp \sqrt{NX}$

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{(l+2)/2+\epsilon}N^{(l-2)/2}\delta^{-1} + X^{(l+1)/2+\epsilon}N^{(l-1)/2} + RX^l N_0^{-l}$$

if we choose $N_0 = R^{2/(3l-1)}X^{(l-1)/(3l-1)}$, depending on l the maximum is reached at $N \asymp 1$ or $N \asymp N_0$. If $N_0 > X^{1/2}$, against our hypothesis, choosing $N = X^{1/2}$ we get a better result. ■

PROOF OF COROLLARY 3.2.1:

This a direct consequence of the Theorem 3.2 choosing $\delta = XR^{-1}$ and letting R go to infinity. ■

PROOF OF THEOREM 3.3:

We start from (3.5) with $H = X$ in the proof of the Theorem 3.2

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{l/2+\epsilon}N^{-l/2} \sum_{\nu,\mu} b_\nu \bar{b}_\mu \big(S_{\nu\mu}\big)^l + RX^{l+\epsilon}N_0^{-l}.$$

If $|x_\nu - x_\mu| \gg \sqrt{NX}$, by the exponent pair theory (see [**Gr-Ko**])

$$S_{\nu\mu} \ll |x_\nu - x_\mu|^p X^{-p/2}N^{q-p/2} \ll X^{p/2}N^{q-p/2},$$

on the other hand, in the proof of Theorem 3.2 we had computed the contribution of the terms with $|x_\nu - x_\mu| < \sqrt{NX}$, then

$$\sum_{\nu=1}^{R} |\mathcal{E}(x_\nu)|^{2l} \ll X^{l/2+\epsilon}N^{-l/2}\big(N^l(1 + X^{1/2}N^{-1/2}\delta^{-1}) + RX^{pl/2}N^{(2q-p)l/2}\big) + RX^{l+\epsilon}N_0^{-l},$$

now choosing $N_0 = X\delta^{-2}$ we get the result (note that the choice of N_0 is optimal only if δ is large enough). ■

æ

CHAPTER IV

Some Trigonometric Series

Since Dirichlet and Riemann's works, number theory is using several results from analysis. Rademacher thought that in this relation analysis is not subordinated to number theory as a tool. Recent developements in both disciplines ratify this opinion, for instance, the harmonic analysis in Riemann surfaces probably would not have been so deeply studied without the closer and closer relation with number theory. Another more classic and simple example is the connection between prime number theorem and some Tauberians theorems (see Ch. 9 of [**Ru**]).

It is a remarkable fact that Hardy and Littlewood built a big part of the bases of modern harmonic analysis and also of analytic number theory. So, the paper [**Ha-Li**] deals with an approximate functional equation for a certain truncated θ-function, but a part of the results involving arithmetic are used to construct Fourier series with special properties.

The fascination for Fourier series with gaps goes back to Riemann and Weierstrass. For lacunary series, i.e. functions of the form

$$\sum_k a_k e(n_k x) \qquad \text{with} \qquad n_{k+1}/n_k > \rho > 1,$$

the theory is complete (see V.6 and XIII.1.17 in [**Zy**]). Among the sequences of frequencies which are more slowly increasing, an important role is played by the squares $n_k = k^2$ and by the powers in general.

In the first section of this chapter we shall study the global behaviour of certain series with frequencies in the squares. Namely we shall use one of Hardy and Littlewood's techniques to check the fractal behaviour of some graphs.

The second section is completely based on the final part of [**Co**]. Its characteristics are quite different to the rest of our work, because our main aim is to state same results of A. Córdoba to emphasize once more the deep relation beteween anlysis and arithmetic.

æ

§1. The fractal dimension of a family of Riemann's graphs

In this section we shall compute, using a classic method in number theory, the fractal dimension ("box-counting dimension") of the graphs, Γ_α, corresponding to the functions

$$F_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n^2 x)}{n^\alpha} \qquad 1 < \alpha \leq 2 \qquad x \in [0,1].$$

The same method allows to obtain in many cases similar results for the imaginary and real parts of

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(n^2 x)$$

where a_n is a decreasing sequence such that the previous series converges absolutely.

The functions F_α have a certain historical interest, because according to Weierstrass (see [**Du**] and [**Ha 1**]), Riemann thought that $F_2(x)$ could be an example of a continous function but not differentiable anywhere. Hardy (see [**Ha 1**]) considered the functions F_α in general and proved that $F_2(x)$ has not derivative for irrational values of x and rational values of the form $x = (2a+1)/4b$ or $x = a/(4b+1)$ with $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Fifty years later, Gerver proved in an elementary (but not easy) way that F_2 is differentiable in the rest of the rational values of x. Nowadays there are several proofs of this facts (see references of [**Du**]).

The results of this section were announced in [**Ch-Co**], where the functions $F_\alpha(x)$ are also modificated by a logarithmic factor that we shall omit here for a sake of simplicity.

If we denote the fractal (box) dimension of Γ_α by $\dim_B(\Gamma_\alpha)$, when the upper dimension, $\overline{\dim}_B(\Gamma_\alpha)$, and lower dimension, $\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha)$, coincide (see [**Fa**]), then our main result is

Theorem 4.1: *If* $1 < \alpha \leq 2$, *the fractal dimension of* Γ_α *exists and*

$$\dim_B(\Gamma_\alpha) = \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Note that in particular one deduces that Γ_2 is a fractal, i.e. it has fraccionary dimension. So, although the function considered by Riemann is differentiable in a dense set, it has a globally chaotic behaviour.

In spite of the dimension of Γ_2 is not explicitly computed in the literature, it could be obtained combining the results of [**Du**] and [**Tr**] (we are grateful to prof. Y. Meyer by this remark). Our proof has the advantage of being more direct and easily applicable to other functions with frequencies in the squares.

The Theorem 4.1 follows from the next lemmas:

Lemma 4.1.1: *If* $1 < \alpha \leq 2$

$$\overline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \leq \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Lemma 4.1.2: *If* $1 < \alpha \leq 2$

$$\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \geq \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Proving Lemma 4.1.1 we shall consider Farey dissection of (0,1] and we shall study the oscillation of F_α on each of the resulting arcs. Our main tool depends on the approximate functional equation given by Hardy y Littlewood (see the Theorem 2.128 of [**Ha-Li**]) for the Gausian kernels

$$s_n(x,\theta) = \sum_{0 \leq k \leq n} e(k^2 x + k\theta),$$

from it they deduced estimates for $s_n(x)$ depending on the convergents of the continous fraction of x (see 2.13 and specially (2.138) in [**Ha-Li**]), in particular one concludes (see also Theorem 6 in [**Fi-Ju-Kö**])

$$\left|x - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2} \qquad \Rightarrow \qquad s_n(x) \ll \frac{n}{\sqrt{q}} + \sqrt{q} \tag{4.1}$$

where $s_n(x) = s_n(x, 0)$.

<u>Proof of Lemma 4.1.1:</u>

Given $N > 1$ we consider Farey dissection

$$(0,1] = \bigcup_{\substack{(a,q)=1 \\ 0 \leq a < q \leq N}} \mathcal{I}_{a/q}$$

with

$$\mathcal{I}_{0/1} = \left(0, \frac{1}{N+1}\right], \quad \mathcal{I}_{1/1} = \left(\frac{N}{N+1}, 1\right] \qquad \text{and} \qquad \mathcal{I}_{a/q} = \left(\frac{a'+a}{q'+q}, \frac{a+a''}{q+q''}\right] \text{ if } a/q \neq 0, 1$$

where a'/q' and a''/q'' are respectively the biggest and the smallest irreducuble fractions such that

$$0 < \frac{a'}{q'} < \frac{a}{q} < \frac{a''}{q''} < 1 \qquad 1 < q', q'' \leq N.$$

By elementary properties of Farey fractions (see [**Ci-Co**])

$$\mathcal{I}_{a/q} \subset \{x \,/\, |x - \frac{a}{q}| < \frac{1}{qN}\}. \tag{4.2}$$

If we define for $0 \leq k < N^2$

$$\mathcal{N}^k_{a/q} = \#\{0 \leq l < N^2 \,/\, \big(I_k \times I_l\big) \cap \big(\mathcal{I}_{a/q} \times \mathbb{R}\big) \cap \Gamma_\alpha \neq \emptyset\} \text{ where } I_m = \left(\frac{m}{N^2}, \frac{m+1}{N^2}\right],$$

then $\mathcal{N}^k_{a/q}$ measures the oscillation of F_α in an interval of lenght N^{-2}. By (4.2) and the definition of fractal dimension

$$\overline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \leq \lim\sup_{N\to\infty} \frac{\log\Big(\sum_{q<N}\sum_{(a,q)=1} Nq^{-1} \sup_{I_k\cap\mathcal{I}_{a/q}\neq\emptyset} \mathcal{N}^k_{a/q}\Big)}{\log(N^2)}. \tag{4.3}$$

Trivially

$$\mathcal{N}^k_{a/q} \leq 2 + N^2 \sup_{x,y\in I_k\cap\mathcal{I}_{a/q}} |F_\alpha(x) - F_\alpha(y)|$$

and by the mean value theorem

$$\mathcal{N}^k_{a/q} \leq 2 + 2\pi\Big|\sum_{n\leq N} n^{2-\alpha} e(n^2\xi)\Big| + N^2\Big|\sum_{n>N} n^{-\alpha}\big(e(n^2x_0) - e(n^2y_0)\big)\Big|$$

for certain ξ, x_0, y_0 belonging to $\mathcal{I}_{a/q}$.

By partial summation and applying (4.1) (recall (4.2) and $1<\alpha\leq 2$)

$$\mathcal{N}^k_{a/q} \ll N^{2-\alpha}\Big(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\Big) + N^2N^{-\alpha}\Big(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\Big) = N^{3-\alpha}q^{-1/2} + N^{2-\alpha}q^{1/2}$$

and substituting in (4.3) the lemma is proved. ∎

<u>Proof of Lemma 4.1.1:</u>

Fixed N let $\mathcal{P}$ be the set of prime numbers $q \equiv 3\ (4)$, such that $q \asymp N$. By the definition of fractal dimension

$$\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \geq \lim\inf_{N\to\infty} \frac{\log\Big(N^2\sum_{q\in\mathcal{P}}\sum_{0<a<q} \big|F_\alpha(a/q) - F_\alpha(a/q + 1/q^2)\big|\Big)}{\log(N^2)}. \tag{4.4}$$

If we restrict a to the quadratic residues modulus q, $\mathcal{R}(q)$, then the contribution of the summation over a is trivially bigger than the absolute value of

$$\sum_{a\in\mathcal{R}(q)} \big(F_\alpha(a/q) - F_\alpha(a/q+1/q^2)\big) = \operatorname{Im} \sum_n \sum_{r=1}^{(q-1)/2} \frac{e(n^2r^2/q)\big(1-e(n^2/q^2)\big)}{n^\alpha},$$

thanks to the explicit evaluation of the Gauss sums (see Ch. 2 of [**Da**]) it follows that the previous summation equals

$$\operatorname{Im} \sum_n \frac{(-1+i\sqrt{q})\big(1-e(n^2/q^2)\big)}{2n^\alpha} = \sqrt{q}\sum_n \frac{\cos^2(\pi n^2/q^2)}{n^\alpha} - \sum_n \frac{\sin(2\pi n^2/q^2)}{2n^\alpha} \gg q^{3/2-\alpha}.$$

Therefore substituting in (4.4) and using the prime number theorem in arithmetic progressions (actually a quite elementary result is enough)

$$\underline{\dim}_B(\Gamma_\alpha) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{\log\big(N^2N^{3/2-\alpha}N/\log N\big)}{\log N^2} = \frac{9}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

and this proves the lemma. ∎

æ

§2. Trigonometric series and functional spaces

If n_k is a B_2 sequence, i.e, an increasing sequence such that $\forall m \in \mathbb{Z}$ $m = n_k + n_{k'}$ has at most a solution with $n_k \le n_{k'}$, then it is not dificult to prove (see Th. 5.3 of [**Ru**])

$$f(x) = \sum a_k e(n_k x) \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p \ll \|f\|_2 \quad \forall p \le 4.$$

The squares are not a B_2 sequence, but the number of representations of an integer as sum of two squares is small and it is bounded in average, this support the following conjecture

$$f(x) = \sum a_n e(n^2 x) \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p \ll \|f\|_2 \quad \forall p < 4. \tag{4.5}$$

This means that the Gaussian kernel leads to a bounded multiplier from L^2 to $L^{4-\epsilon}$ $\forall \epsilon > 0$, although this formulation, the problem seems very difficult to afford with methods of harmonic analysis and it rather seems to depend on the arithmetic of squares.

Note that if the conjecture (4.5) is true, the operator choosing frequencies in the squares is also bounded from $L^{4/3+\epsilon}$ to L^2 by duality. If we apply this operator to the Dirichlet kernel $f(x) = \sum_{n \le N} e((qn+a)x)$ we have

$$\|f\|_2^2 = \#\{n \le N \,/\, qn + a = k^2\} = O(N^{1/2+\epsilon})$$

uniformly in q and a, this means

$$Q(N) = \max_{q,a} \#\{n \le N \,/\, qn + a = k^2\} = O(N^{1/2+\epsilon}),$$

and this is a famous conjecture of Rudin. Even the result $Q(N) = o(N)$ is highly non trivial and requires an important theorem of Szemerédi. Recently Bombieri, Granville and Pintz have proved $Q(N) = O(N^{2/3+\epsilon})$ using deep methods of algebraic geometry.

It is possible to prove the conjecture (4.5) under some asumptions over the coefficients (see [**Co**]), namely

Theorem 4.2: *If there exists* α *such that* $a_n e(n\alpha)$ *is monotonic, then the conjecture* (4.5) *is true.*

In particular we deduce that $\forall\epsilon > 0$

$$\sum \frac{e(n^2x)}{n^{1/2}(\log n)^{1/2+\epsilon}} \in L^p \qquad \forall p < 4.$$

Using the properties of the kernel $K(x) = \sum n^{-\beta} e(nx)$ (see V.2.1 in [**Zy**]) or equivalently fraccionary differentiation (see XII.9.22 in [**Zy**]) it also follows

$$\frac{1}{2} \le \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{e(n^2x)}{n^{1/2}(\log n)^{1/2+\epsilon}} \in L^p \qquad \forall p < \frac{2}{1-\alpha}, \tag{4.6}$$

similarly, with the notation of §1

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad F_\alpha \in L^p \qquad \forall p < \frac{2}{1-\alpha}. \tag{4.7}$$

By Parseval identity it is plain that $F_{1/2} \notin L^2$, in fact it is possible to prove (4.7) in an easier way because it does not include the case $\alpha = 1/2$. On the other hand Hardy and Littlewood proved (see [**Ha-Li**]) that if $\alpha < 1/2$ the series $F_\alpha(x)$ is not summable in irrational x's by any kind of Cesàro means. For the other extreme value, $\alpha = 1$, they found infinitely many irrational values of x in which $F_1(x)$ does not converge. Note that $F_\alpha \in L^\infty$ if $\alpha > 1$ is trivial.

In analogy with other situations in harmonic analysis, in the limit case $\alpha = 1$ we should have $F_1 \in$ B.M.O., where B.M.O. is the space of functions with bounded mean oscillation, i.e. the subspace of L^2 such that the following seminorm is bounded

$$\|f\|_* = \sup_{I=[a,b]} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| \quad \text{where} \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f.$$

B.M.O. has several interesting properties, two remarkable ones are the duality with Hardy space H^1 in which classical singular integrals are bounded and John-Niremberg's inequality implying that B.M.O. is, in some sense, very close to L^∞.

It can be proved that $F_1 \in$ B.M.O. using the methods of [**Ha-Li**]. A. Córdoba also gave an elementary proof of a stronger result, namely

Theorem 4.3: *If $a_n \ll n^{-1}$ then*

$$\sum a_n e(n^2 x) \in \text{B.M.O.}$$

If $a_n \geq 0$, this theorem can be also deduced using deep techniques of harmonics analysis, namely atomic decomposition of H^1 and its duality with B.M.O., it leads to a condition on the Fourier coefficients (Fefferman's condition) for a function to belong to B.M.O. (see Cor. 2 in [**Sl-St**] and note the similarity of the proof of Th. 3 with Gallagher inequality in [**Mo**]).

<u>Proof of Theorem 4.2:</u>

By hypothesis $b_n = a_n e(n\alpha)$ is monotonic, then it is enough to prove

$$\sum_{N=2^j} |b_N|^2 N < \infty \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \sum b_n e(n^2 x - n\alpha) \in L^p \qquad \forall\ 2 \leq p < 4.$$

Littlewood-Paley theory asserts, roughly speaking, that dividing a Fourier series into dyadic intervals they behave like independent random variables, namely (see Ch. XV of [**Zy**])

$$\|f\|_p \asymp \left\| \Big(\sum_{N=2^j} \big|\Delta_N(x)\big|^2 \Big)^{1/2} \right\|_p \qquad \text{with} \qquad \Delta_N(x) = \sum_{N \leq n < 2N} b_n e(n^2 x - n\alpha),$$

therefore, by Jensen inequality and partial summation

$$\|f\|_p^2 \ll \sum_{N=2^j} \|\Delta_N\|_p^2 \ll \sum_{N=2^j} |b_N|^2 N \|S_N\|_p^2 \tag{4.8}$$

where

$$S_N(x) = N^{-1/2} \sum_{N \le n < N_0} e(n^2 x - n\alpha) \qquad \text{for some } N_0 = N_0(N) < 2N.$$

By (4.8), it is enough to prove $\|S_N\|_p \ll 1$ for every $p < 4$. In fact, we shall prove a slighty stronger result: S_N has bounded norm in weak-L^4 (see def 1.19 of [**Da-Ch**]), i.e.

$$\mu\big(\{x \,/\, |S_N(x)| > \lambda\}\big) \ll \lambda^{-4} \qquad \forall \lambda > 1. \tag{4.9}$$

If x is irrational, let p_k/q_k the convergents of the continous fraction. By Hardy and Littlewood's inequality quoted in §1 (see [**Ha-Li**]), it follows

$$S_N(x) \ll N^{1/2} q_k^{-1/2} + N^{-1/2} q_k^{1/2}.$$

Then for each λ, if $q_1 \ll N\lambda^2$

$$|S_N(x)| > \lambda \quad \Rightarrow \quad \exists n \,/\, N^{1/2} q_n^{-1/2} \gg \lambda \quad \text{and} \quad N^{-1/2} q_{n+1}^{-1/2} \gg \lambda$$

hence

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \ll \frac{1}{q_n N \lambda^2}.$$

Therefore

$$\{x \,/\, |S_N(x)| > \lambda\} \subset \{x \,/\, q_1 \ll N\lambda^2\} \cup \bigcup_{p \le q \ll N\lambda^{-2}} \{x \,/\, |x - p/q| \ll q^{-1} N^{-1} \lambda^{-2}\} \cup \mathbb{Q}.$$

With the trivial inequality $|S_N(x)| \le N^{1/2}$ we conclude $\lambda < N^{1/2}$, then

$$\mu\big(\{x \,/\, |S_N(x)| > \lambda\}\big) \ll N^{-1}\lambda^{-2} + \sum_{q \ll N\lambda^{-2}} N^{-1} \lambda^{-2} \ll \lambda^{-4}$$

and this proves (4.9). ■

PROOF DEL THEOREM 4.3:

Fixed an interval $I \subset [0,1]$, let q the integral part of $|I|^{-1/2}$, then

$$f(x) = \sum a_n e(n^2 x) = F(x) + \sum_{a=0}^{q-1} F_a(x)$$

where

$$F(x) = \sum_{n<q} a_n e(n^2 x) \qquad \text{and} \qquad F_a(x) = \sum_{\substack{n \equiv a \ (q) \\ n \geq q}} a_n e(n^2 x).$$

It is clear

$$\|F\|_* \leq \frac{1}{|I|} \int_I \Big| \sum_{n<q} a_n \big(e(n^2 x) - e(n^2 x_0) \big) \Big| dx \ll \frac{1}{|I|} \int_I \sum |a_n| n^2 |I| dx \ll 1,$$

on the other hand by Jensen inequality

$$\|F_a\|_*^2 \leq \frac{1}{|I|} \int_I |F_a|^2 \leq \frac{1}{|I|} \sum_{\substack{n \equiv a \ (q) \\ n \geq q}} \sum_{\substack{m \equiv a \ (q) \\ m \geq q}} |a_n||a_m| \min\big(|I|, (n^2 - m^2)^{-1} \big) \ll q^{-2}.$$

Finally we conclude

$$\|f\|_* \leq \|F\|_* + \sum_{a=0}^{q-1} \|F_a\|_* \ll 1,$$

and then f belongs to B.M.O. ■

æ

Notation

In the following we shall give a list of some symbols and notations that have been used in this work without defining them. All of them are quite standard.

$f \sim g \coloneqq \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1.$

$f = O(g) \coloneqq |f| < C|g|$, if the constant C depend on any parameter, for instance ϵ, some times is written $f = O_\epsilon(g)$.

$f \ll g \coloneqq$ it is other notation for $f = O(g)$.

$f \gg g \coloneqq$ it is other notation for $g = O(f)$.

$f \asymp g \coloneqq f \ll g$ and $g \gg f$.

$a \equiv b\ (q) \coloneqq q$ divides to $b - a$.

$\widehat{f}(\xi) \coloneqq \int f(x)e^{-ix\xi}dx.$

$\left(\frac{a}{n}\right) \coloneqq$ Legendre symbol.

$d(n) \coloneqq$ number of divisors of n.

$\Delta(x) \coloneqq \sum_{n\le x} d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1).$

$e(x) \coloneqq e^{2\pi i x}.$

$L(s,\chi) \coloneqq \sum \chi(n)n^{-s}$ where χ is a multiplicative character.

$P(x) \coloneqq \sum_{n\le x} r(n) - \pi x.$

$r(n) \coloneqq \#\big\{(a,b)\in \mathbb{Z}^2 \,/\, a^2+b^2=n\big\}.$

$\zeta(s) \coloneqq \sum n^{-s}$ or its meromorphic extension to $\mathbb{C}$.

æ

References

[Be-Ga-Ma] M. Berger - P. Gauduchon - E. Mazet. "Le Spectre d'une Variété Riemannienne". *Lecture Note in Mathematics* **194** Springer-Verlag.

[Bl] P. Bleher. "On the distribution of the number of lattice points inside a family of convex ovals". *Duke Math. J.* **67** 3, (1992) pp 461-481

[Bo] E. Bombieri. "Le Grand Crible dans la Théorie Analytique des Nombres". *Astérisque* **18** Société Mathématique de France 1974.

[Bo-Bl] B. Boss - D.D. Bleecker. "Topology and Analysis". *Universitext.* Springer-Verlag New York Inc. 1985.

[Bo-Iw] E. Bombieri - H. Iwaniec. "On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$". *Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (4)* **13** 3, (1986) pp 449-472

[Bu] D. Burgess. "On character sums and L-series II" *Proc. London Math. Soc. (3)* **13** (1963), pp 524-536. (see also **[Bu]** D. Burgess. "The character sum estimate with $r=3$" *J. London Math. Soc. (2)* **33** (1986), pp 219-226.)

[Ch] Chen, Jing-Run. "Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions (II)" *Sci. Sinica* **12** N.6 (1963), pp 751-764.

[Ch-Co] F. Chamizo - A. Córdoba. "The fractal dimension of a family of Riemann's graphs" *C. R. Acad. Sci. Paris* **317** Série I, (1993), pp 455-460 (Corrigendum to appear).

[Ch-Iw] F. Chamizo - H. Iwaniec. "On the sphere problem". (Preprint)

[Ci] J. Cilleruelo. "Sobre la distribución de puntos del retículo en círculos" (Spanish). *Tesina.* Universidad Autónoma de Madrid (1984)

[Ci-Co] J. Cilleruelo - A. Córdoba. "La Teoría de los Números" (Spanish). Ed. Mondadori. Madrid (1992)

[Co] A. Córdoba. "Translation invariant operators". *Proceedings of the Seminar held at El Escorial, June 1979.* Asociación Matemática Española, Madrid 1980, pp 117-176.

[Co-Hi] R. Courant - D. Hilbert. "Methods of Mathematical Physics". *Vol I,II.* Interscience Publishers, New York 1953.

[Da] H. Davenport. "Multiplicative number theory". *Second edition. Graduate texts in Mathematics 74* Springer Verlag.

[Da-Ch] K.M. Davis - Chang Y.-C. "Lectures on Bochner-Riesz Means". *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **114** Cambridge University Press 1987.

[De-Iw] J.M. Deshouillers - H. Iwaniec. "Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms" *Invent. Math.* **70** (1982), pp 219-288.

[Du] J.J. Duistermaat. "Selfsimilarity of Riemann's non differentiable function" *Nieuw Arch. Wisk. (4)* **9** N.3, (1991), pp 303-337.

[Dy-Mc] H. Dym - H.P. McKean. "Fourier Series and Integrals". Academic Press Inc. 1972.

[Fa] K. Falconer. "Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications" John Wiley & sons 1990.

[Fe] R.P. Feynman. "Física". *Vol I.* Fondo educativo interamericano (Bilingual edition) 1971.

[Fi-Ju-Kö] H. Fiedler - W. Jurkat - O. Körner. "Asymptotic expansions of finite theta series" *Acta Arith.* **XXXII** (1977), pp 129-146.

[Ga] C.F. Gauss. "Disquisitiones Arithmeticae". Leipzig (1801). (English Translation by A.A. Clarke. *Yale University Press*, New Haven 1966).

[Ge] J. Gerver "The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π". *Amer. J. of Math.* **92** (1970), pp 33-55 (see also *Amer. J. of Math.* **93** (1971), pp 33-41).

[Gi] P.B. Gilkey. "The Index Theorem and the Heat Equation". *Mathematical Lecture Series* **4** Publish or Perish Inc. Boston 1974.

[Go] G. González. Notes of the course "Curvas y sus Jacobianas". *Universidad Autónoma de Madrid* 1992-1993 (unpublished).

[Gr] E. Grosswald. "Representation of Integers as sums of squares". Springer Verlag 1985.

[Gr-Ko] S.W. Graham - G. Kolesnik. "Van der Corput's Method of Exponential Sums". *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **126** Cambridge University Press 1991.

[Gr-Ry] I.S. Gradshteyn - I.M. Ryzhik. "Table of integrals, series and products". *Fifth edition. (Ed. A. Jeffrey)* Academic Press 1994.

[Ha 1] G.H. Hardy. "Weierstrass' non differentiable function" *Trans. Amer. Math. Soc.* **70** (1916), pp 199-213

[Ha 2] G.H. Hardy. "The lattice points of a circle". *Proc. Roy. Soc. London (A)* **107** (1925), pp 623-635

[Ha-Li] G.H. Hardy - J.E. Littlewood. "The trigonometric series associated with elliptic θ-functions" *Acta Math.* **37** (1914), pp 193-239

[Hu 1] M.N. Huxley. "Introduction to Kloostermania". *Banach Center Publications V.17* PWN-Polish Scientific Publishers. Warszawa 1985 pp 217-306.

[Hu 2] M.N. Huxley. "Exponential sums and lattice points II" *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), pp 279-301

[Iv] A. Ivić. "The Riemann Zeta-function". John Wiley & sons 1985.

[Iw 1] H. Iwaniec "Non-Holomorphic Modular forms and their applications" *Chapter 8 of R.A. Rankin (Ed.) "Modular forms". Symposium on Modular forms of one and several variables. Durham 1983.* Halsted Press. New York 1984 pp 157-196.

[Iw 2] H. Iwaniec. Notes of the course "Lectures on the spectral theory of automorphic forms". *Universidad Autónoma de Madrid,* June 1993 (to appear in *Rev. Mat. Hisp. Amer.*).

[Ji] J.I. Jiménez "La función zeta de Riemann; conjeturas" (Spanish). *Tesina.* Universidad Autónoma de Madrid (1992)

[Ju] M. Jutila. "On mean values of Dirichlet polynomials with real characters". *Acta Arith.* **XXVII** (1975), pp 191-198.

[Ka] M. Kac. "Can one hear the shape of a drum?". *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), pp 1-23. (Included in "The Chauvenet papers" V.II (Ed. J.C. Abbott) M.A.A. 1978 pp 433-455).

[Ke] D. Kendall. "On the number of lattice points inside a random oval". *Quart. J. Math (Oxford Ser.)* **19** (1948), pp 1-26.

[Ko] T. Kotake. "The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators". *Comm. Pure Appl. Math.* **XXII** (1969), pp 789-806.

[Ku] T. Kubota. "Elementary Theory of Eisenstein Series". Kodansha Ltd. Tokyo 1973.

[La-Ph] P. Lax - R. Phillips. "The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non Euclidean spaces". *J. Functional Anal.* **46** (1982), pp 280-350.

[Mi-Pl] S. Minakshisundaram - Å. Pleijel. "Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds". *Canad. J. Math.* **1** (1949), pp 242-256.

[Mo] H.L. Montgomery. "Topics in multiplicative number theory". *Lecture Notes in Mathematics* **227** Springer-Verlag (1971)

[Pa] S.J. Patterson. "A lattice point problem in hyperbolic space". *Mathematika* **22** (1975), pp 81-88 (see Corrigendum in *Mathematika* **23** (1976), p 27).

[Ph-Ru] R. Phillips - Z. Rudnick. "The circle problem in the hyperbolic plane". (Preprint).

[Ra] B. Randol. "A Dirichlet series of eigenvalue type with applications to asymptotic estimates". *Bull. London Math. Soc.* **13** (1981), pp 304-315.

[Ru] W. Rudin. "Functional Analysis". Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. New Delhi 1990.

[Se 1] A. Selberg. "Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly simmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet's series". *J. Indian Math. Soc.* **20** (1956), pp 47-87.

[Se 2] A. Selberg. "On the estimation of Fourier coefficients of modular forms". *Proc. Symp. Pure Math.* **VIII** American Math. Soc., Providence 1965, pp 1-5.

[Sl-St] W.T. Sledd - D.A. Stegenga. "An H^1 multiplier theorem". *Ark. Mat.* **2** (1981), pp 265-270

[Ti] E.C. Titchmarsh. "The Theory of the Riemann Zeta-function". Oxford Clarendon Press 1951.

[Tr] C. Tricot. "Dimensiones de graphes". *C. R. Acad. Sci. Paris* **303** Série 1, (1986), pp 609-612.

[Ts] Tsang K.-M. "Higher-power moments of $\Delta(x)$, $E(t)$ and $P(x)$". *Proc. London Math. Soc.* **65** (1992), pp 65-84.

[Vi] I.M. Vinogradov. "On the number of integer points in a sphere" (Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **27** (1963), pp 957-968.

[Wo] W. Wolfe. "The asymptotic distribution of lattice points in hyperbolic space". *J. Functional Anal.* **31** (1979), pp 333-340.

[Zy] A. Zygmund. "Trigonometric series". Second edition. Vol I, II. Cambridge University Press. New York (1968)