UN MODELO DE CRECIMIENTO OPTIMO

CON APLICACION A LA ECONOMIA ESPAÑOLA

TESIS QUE PRESENTA

M. DEL PILAR MARTIN–GUZMAN CONEJO

PARA OPTAR AL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS ECONOMICAS

INDICE

PARTE SEGUNDA: EL MODELO NUMERICO

PROLOGO

Esta tesis tiene por objeto la elaboración y análisis de un modelo agregado y determinístico de crecimiento económico óptimo y su aplicación en la obtención de trayectorias óptimas de acumulación de capital para la economía española.

Consta de dos partes, seguidas de un apéndice. La primera de ellas está centrada en la caracterización y estudio de las soluciones óptimas de un modelo expresado en forma contínua. Las hipótesis en que se basa se exponen y comentan en el capítulo segundo, tras un primer capítulo de introducción al problema. Seguidamente, en el capítulo tercero, se construye y analiza el modelo autónomo y se obtienen, mediante la aplicación de las técnicas del control óptimo, condiciones necesarias de optimalidad que, junto con las adecuadas condiciones de contorno, bastan a determinar las trayectorias solución de las mismas. Estas trayectorias resultan ser efectivamente las óptimas, ya que en este modelo las condiciones necesarias de optimalidad obtenidas son también suficientes. En el capítulo cuarto se amplía el estudio realizado a modelos no autónomos en los que se admite mano de obra creciente, descuento temporal de la utilidad y progreso técnico, elaborándose así, mediante sucesivas generalizaciones, el modelo teórico que servirá de base al modelo numérico que se aplica a nuestra economía.

Esta primera parte está fundamentada en buena medida en la literatura existente sobre el tema que se cita en la bibliografía, de la que he tratado de realizar una revisión coherente, completando y formalizando algunas cuestiones escasamente tratadas por los autores reseñados, tales como el estudio del cono de alcanzabilidad, o la justificación de que el modelo conserva su generalidad cuando se elimina la primera componente de la variable auxiliar.

La segunda parte contiene el núcleo de mi aportación personal en este trabajo. En el capítulo quinto se elabora y analiza un modelo de crecimiento basado en las mismas hipótesis que el más general de los estudiados en el capítulo cuarto, pero que, por estar planteado en forma discreta, permite su resolución mediante técnicas de cálculo numérico. En el capítulo sexto se indica de forma concreta cómo se ha efectuado esta resolución, especificando las relaciones funcionales elegidas y los parámetros estimados para la economía española en base a los datos disponibles de la misma, y describiendo el procedimiento iterativo aplicado al cómputo de las soluciones. Por último, en el capítulo septimo se resumen y comentan los resultados obtenidos para modelos con distintas tasas anuales de acumulación de capital y se estudia la incidencia en los mismos de las variaciones en algunos de los parámetros.

El apéndice constituye una somera descripción de las técnicas de control óptimo utilizadas en la resolución de las distintas versiones del modelo y su relación con otras técnicas aplicables a este tipo de problema.

Siendo el crecimiento óptimo un tema de la máxima actualidad en la economía –como lo es el del control óptimo en el campo de la matemática aplicada– una relación exhaustiva de publicaciones resultaría desmesuradamente larga. En consecuencia, me he limitado a citar en la bibliografía aquellos libros y artículos que han sido efectivamente utilizados en la elaboración de este trabajo, y que creo son los fundamentales en lo que concierne al ámbito concreto del mismo: los modelos agregados no aleatorios y las técnicas empleadas en su resolución.

Quiero por último expresar aquí mi agradecimiento al director de esta tesis, D. Gonzalo Arnaiz Vellando, sin cuyo constante apoyo hubiera sido imposi-

ble su realización. Asimismo, deseo agradecer a D. Alfredo Mendizabal Aracama su inestimable ayuda en la elaboración del programa del ordenador; y a los empleados del Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid —en especial a D. Martín Sánchez Marcos— su colaboración en la puesta a punto y ejecución del mismo.

PARTE 1.ª
EL MODELO TEORICO

CAPITULO I

LOS MODELOS DE CRECIMIENTO OPTIMO

Supongamos una economía cerrada cuya producción, elaborada mediante la concurrencia de factores capital y trabajo en proporciones cualesquiera, consiste en un solo bien homogeneo, apto igualmente para el consumo y para la inversión como bien de capital. El producto neto resultante despues de descontar la parte *de la producción necesaria para atender a la conservación y renovación del equipo* capital se destinará al consumo y a la inversión neta de nuevos bienes de capital, los cuales determinarán, a su vez, un nuevo nivel de producción en la etapa siguiente. En consecuencia, el stock de capital existente en cada momento y, por tanto, el *nivel de producción obtenido depende del stock de capital en el periodo anterior* y de la inversión neta incorporada.

Ahora bién, ¿de qué depende la cifra de inversión neta incorporada en cada periodo? . Evidentemente, no podrá ser en ningún caso superior al producto neto de ese periodo. Por lo demás, dentro de esta limitación, la inversión neta viene determinada por las decisiones que el organismo planificador —en el caso de economías centralizadas— o la colectividad —en las descentralizadas— adopte en torno al consumo; ya que si suponemos un comportamiento racional de la sociedad desde el punto de vista económico que excluya la posibilidad de recursos inactivos, la inversión neta será exactamente la porción del producto neto no consumida. Es el nivel de consumo, por tanto, el que controla la trayectoria temporal del capital.

Se trata, por consiguiente, de un modelo aparentemente abierto, que ofrece al organismo decisor un haz de posibilidades, a diferencia de los modelos de crecimiento, en los que la fracción de producto destinada al consumo viene fijada de antemano. Sin embargo, también el modelo de crecimiento óptimo se cierra, en último término, con una decisión respecto al consumo determinada por el criterio de optimalidad, como veremos seguidamente.

La sociedad decidirá su nivel de consumo de acuerdo con los objetivos fijados por ella misma. Así, por ejemplo, en el caso sencillo en que su objetivo primordial fuera la consecución de un elevado stock de capital en el menor tiempo posible, la sociedad consumiría en cada periodo una cantidad igual a su mínimo nivel de subsistencia posible hasta lograr acumular el capital deseado. Pero si su objetivo es —como ocurre en nuestro caso— la maximización de su bienestar, o utilidad derivada del consumo, durante un cierto periodo de tiempo, con la condición de que al final del mismo el stock de capital no sea inferior a un valor fijado previamente, el establecimiento de un sistema de medición de la utilidad colectiva a lo largo del periodo —es decir, la especificación concreta del objetivo fijado— y las técnicas del análisis matemático permiten caracterizar la trayectoria de consumo que optimizará dicho citerio, y que, consiguientemente determinará el ritmo de crecimiento óptimo de la economía. El problema que nos ocupa entra, por tanto, plenamente en el campo de la economía normativa.

El primero en plantear, y resolver alguna versión de este problema fué Ramsey, en su artículo "A Mathematical theory of saving", publicado en el Economic Journal de 1.928. Despues los acuciantes problemas económicos derivados de la gran crisis del 29 absorbieron la atención de sus contemporaneos, con lo que el tema del crecimiento económico óptimo fué aparentemente abandonado. Alrededor de los años sesenta volvió a ser objeto de estudio por parte de economistas de primera fila — Tinbergen, Solow, Samuelson, Koopmans, Phelps, Cass, Mirrless, Weizsäcker, Inagaki, etc.— que han obtenido ya un valioso conjunto de resultados interesantes, y situado esta parcela de la teoría económica a un nivel de elaboración considerablemente elevado.

CAPITULO II

LAS HIPOTESIS DEL MODELO

2.1. Supuestos básicos

El modelo de crecimiento económico óptimo objeto de nuestro estudio es de tipo neoclásico, y sigue, básicamente, las hipótesis del modelo de Solow (*), salvo en lo que concierne a la invariabilidad de la relación ahorro–producto.

Suponemos, en primer lugar, que la producción consiste en un único bien, homogeneo y medible, el "bien compuesto" introducido por Solow —lo que supone un paso muy considerable en la linea de abstracción de la realidad, y comporta los riesgos inherentes al problema de la agregación—. Este bien homogéneo es susceptible de ser utilizado indistintamente como bien de consumo o de producción, de acuerdo con las decisiones de la sociedad. Queda, no obstante, por aclarar si este "bien compuesto" conserva su condición de dualidad aún después de haber sido asignado a una determinada finalidad, o si, por el contrario, una vez destinado a la producción, no puede ya transformarse en bien de consumo. Esta segunda hipótesis — la de la dualidad de utilización "a priori", pero no "a posteriori" de la correspondiente decisión— parece la más próxima a la realidad, y es la que la mayoría de los autores adoptan definitivamente. Esta será también la admitida aquí en lo sucesivo, salvo en los casos en que explícitamente se advierta lo contrario.

Para obtener el producto anteriormente descrito se precisa la concurrencia de dos factores: capital y trabajo. — El factor tierra no aparece como determinante del nivel de producción agregada, lo que presupone un cierto grado de desarrollo económico en la sociedad en cuestión—. Admitimos aquí una maleabilidad perfecta del capital en todo momento, de manera que cualesquiera proporciones entre los factores

---

(*) Solow, R. "A Contribution to the Theory of Economic Growth" Quaterly Journal of Economics, Vol. 70, Febrero de 1.956.

son igualmente admisibles en todo instante, debido a la adaptabilidad de éste a técnicas más o menos intensivas en capital. Como veremos más adelante, esta hipótesis facilita el estudio teorico de la acumulación del capital.

Fijada esta condición de adaptabilidad total entre los factores, y admitiendo, como veremos seguidamente, una producción no decreciente respecto a cada uno de ellos, parece razonable esperar que su ajuste se produzca de forma total, no permaneciendo recursos inactivos ni de capital ni de trabajo. Asimismo, adoptaremos en este modelo las hipótesis de Solow sobre el equilibrio de mercados en cada instante y el cumplimiento de los planes de ahorro e inversión elaborados.

En cuanto a los objetivos de este modelo de crecimiento, vamos a suponer que están centrados exclusivamente en el consumo, y en la utilidad derivada de él. Con esto queremos significar que en nuestro caso el capital carece de utilidad en si mismo, y su acumulación interesa exclusivamente en función del logro de una mayor producción que permita un mayor consumo. Incluso la restricción de que el capital final a la terminación del periodo no sea inferior a un cierto valor, se impone únicamente con el fin de asegurar un nivel de consumo para las generaciones posteriores al periodo de planificación. Por tanto, cuando la sociedad decide no consumir una unidad del bien homogeneo – y, por consiguiente, invertirlo – se sacrifica únicamente en aras de un mayor consumo futuro. Con esta hipótesis hacemos abstracción de todo gasto que no suponga exactamente consumo, como, por ejemplo, los gastos destinados a mantener la seguridad internacional de la colectividad. (*)

No intervienen, por otra parte, en este modelo cuestiones relacionadas con el problema de la distribución del consumo. Como veremos, la utilidad del consumo va a medirse, bien sobre el consumo global de la colectividad, bien sobre el consumo per capita, es decir, en el supuesto de que el consumo es el mismo para todos sus miembros.

(*) Una exposición más detallada de este punto puede verse, por ejemplo en "Objectives, Constraints and Outcomes in Optimal Growth Models" de T. Koopmans, publicado en Econometrica, Vol 35, Enero de 1.967.

La fracción de la renta que ha de ser destinada al consumo en cada momento es fijada por la sociedad misma, y determina de manera única el valor de la relación ahorro–producto en ese instante. Por consiguiente, este modelo es, en principio, abierto en cuanto respecta a dicha variable, que podría tomar diferentes valores en cada instante. Si la sociedad trata de optimizar la utilidad de su consumo de acuerdo con unos criterios dados, seleccionará, de entre todos los valores posibles de la relación ahorro–producto en cada instante, aquel que optimice los criterios fijados, y esta elección cierra definitivamente el modelo. Vemos, por tanto, que el modelo que presentamos aquí es de caracter normativo, y su aplicación en un sistema económico que no sea de tipo centralizado será posible solamente cuando el planificador dispone de instrumentos de política económica que hagan efectivamente posible el control del sistema.

Consideraremos, además, que la sociedad en que nuestro proceso de acumulación de capital se desarrolla, es una sociedad aislada o cerrada en sí misma, sin posibilidad de intercambios económicos internacionales.

Por último, hacemos notar que este es un modelo totalmente real, en el que el dinero no juega, por sí mismo, ningún papel.

2.2. Los elementos del modelo

2.2.1. La función de producción

La función de producción nos determina la relación existente entre las cantidades de los factores empleados en la producción y la cantidad de flujo de producto obtenida. En nuestra función de producción intervienen dos factores: el capital, función contínua y derivable al menos tres veces respecto al tiempo, que se forma a base del producto homogéneo no consumido en cada etapa, y se mide, por tanto, en las mismas unidades que éste, y el trabajo, que se mide en la unidad "trabajador". Es esta una unidad convencional, que no se refiere exactamente al número de hombres empleados en la producción, sino al número de jornadas completas de trabajo invertidas en ella, de manera que una persona física equivale a un trabajador solamente si traba ja a jornada completa durante todo el año. Supondremos, como es costumbre en gran parte de los modelos de crecimiento, que el trabajo, medido en estas unidades, crece a la misma tasa que la población, con lo que la relación población–trabajo se mantiene constante.

Un incremento en uno de los factores, permaneciendo el otro constante, determina un crecimiento en la producción, pero menos que proporcional al aumento del factor, es decir que, para cada uno de los factores rige la habitual hipótesis de los rendimientos decrecientes. En este modelo supondremos además que incrementos proporcionales de los dos factores dan lugar a un aumento del producto en la misma proporción, con lo que la función de producción ofrece rendimientos constantes a escala. Desde el punto de vista de la realidad económica, esta hipótesis equivaldría a suponer que todas las empresas de la colectividad trabajan a su nivel óptimo de producción, y que el aumento de ésta solo se puede lograr a través de la creación de nuevas empresas que actuen también en la dimensión óptima. Desde el punto de vista matemático, el supuesto condiciona a la función de producción agregada a ser positivamente homogénea de primer grado en las variables L y K. — — es decir que, $\forall\ t > 0$ es $F(tK, tL) = t\,F(K, L)$ — La maleabilidad del capital permite la existencia de la función para todo par de valores K y L en el cuadrante positivo del plano O X Y. Y, por ser homogenea de primer grado, su representación geométrica será una superficie reglada, situada en el octante positivo del espacio, formada por rectas generatrices que pasan por el origen, y tales que, para cada una de ellas la relación capital–trabajo se mantiene constante, y, por tanto, las tres variables capital, trabajo y producto crecen a la misma tasa. El crecimiento de la economía a lo largo de una cualquiera de estas generatrices tiene un interés especial, y nos ocuparemos de él en posteriores apartados.

Vamos a admitir por el momento que la variable tiempo no aparece de forma explícita en la función de producción, y solo afecta a la cantidad de producto en cuanto que el nivel empleado de los factores pueda ser distinto en diferentes momentos; con lo que nuestra función de producción se puede escribir de la forma $F(K(t), L(t))$ o simplemente, $F(K, L)$. Más adelante modificaremos esta hipótesis.

Suponemos también que la función es C^2, es decir, es contínua para $K, L \geqslant 0$ y admite derivadas parciales de primer y segundo orden, todas ellas contínuas, para $K, L > 0$.

Por ser homogénea, podemos aplicarle el teorema de Euler, con lo que resulta:

$$F(K, L) = K\ F'_K\ (K, L) + L\ F'_L\ (K, L)$$

lo que nos dice que el producto obtenido iguala a la suma de las remuneraciones a los dos factores, cuando estos son retribuidos de acuerdo con sus productividades marginales.

De su grado de homogeneidad se deduce también que:

$$F(K, L) = L\ \ F\left(\frac{K}{L},\ 1\right) = L\, f(k)$$

siendo $k = \frac{K}{L}$ el capital empleado por trabajador. Es decir, la función de producción se puede descomponer en producto del trabajo por una nueva función, $f(k)$ *que depende de una sola variable: la relación capital–trabajo.*

Impondremos, por último, a nuestra función de producción una serie de condiciones que nos garanticen la posibilidad de que la economía evolucione de manera única y estable a lo largo de unas ciertas trayectorias que van a jugar un importante papel en nuestro modelo. Tales son las llamadas condiciones en los límites y condiciones en las derivadas de Inada (*) dadas sobre la función de una variable f(k) *obtenida anteriormente* — que expresa la cantidad de producto por trabajador— y que son las siguientes:

(*) Ver "On a Two — Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization" de K. Inada, publicado en la Review of Economic Studies, vol 30, Junio de 1.963.

(a) $f(0) = 0$, que nos dice que no es posible producir en ausencia de capital.

(b) $f(\infty) = \infty$, de manera que la producción puede crecer indefinidamente al hacerlo la relación capital-trabajo. No existe, pues, un techo a la producción.

(c) $f'(k) > 0$, es decir que la productividad marginal del capital es siempre positiva y, por tanto, la producción por trabajador aumenta al crecer k.

(d) $f''(k) < 0$, con lo que la productividad marginal decrece al aumentar, k — los rendimientos son decrecientes.—

(e) $f'(0) = \infty$, es decir que la productividad marginal de la primera unidad de capital por trabajador es infinitamente grande.

(f) $f'(\infty) = 0$, con lo que, al aumentar indefinidamente el valor de la relación capital—trabajo, la productividad marginal del capital tiende asintóticamente a cero.

2.2.2. La depreciación

Del producto bruto obtenido hay que reservar una porción de bien homogéneo para destinarlo a la reposición del equipo capital. La hipótesis generalmente admitida en torno a esta cuestión en los modelos de crecimiento es que el desgaste del capital agregado se produce en forma aproximadamente proporcional al stock de capital existente. Si llamamos δ al factor de proporcionalidad correspondiente, la cantidad de producto bruto que deberá ser reservada para atender a la conservación del capital será igual a $\delta K(t)$.

2.2.3. La población

Por el momento vamos a suponer que la población — y, a consecuencia de lo anteriormente establecido, la mano de obra — es constante en el tiempo, $L(t) = L$, para, de esta manera, estudiar primeramente en detalle un modelo de crecimiento óptimo sencillo, y luego ver las modificaciones que experimenta bajo hipótesis más complejas. En posteriores capítulos consideraremos el caso en que la población crece de forma exponencial (con tasa constante de crecimiento) en el transcurso del tiempo.

En cualquiera de los dos casos, la población tendrá el caracter de variable exógena al sistema. El estudio de los modelos de acumulación de capital cuando el tamaño de la población es una variable endogena, que es uno de los actuales focos de atención de los economistas (*) se sale del ámbito proyectado para el presente trabajo.

2.2.4. La relación ahorro-producto

Hemos indicado previamente que la parte del producto bruto que no se consume, constituye la inversión bruta, es decir, la inversión neta más la depreciación. El cociente entre la inversión bruta y el producto bruto, o relación ahorro-producto juega un papel fundamental en los modelos de crecimiento óptimo, puesto que su elección en cada instante es la que determina de manera única la trayectoria futura del sistema, y, por tanto es la variable sobre la que actúa el proceso de optimización.

El nivel de inversión bruta está limitado superiormente por la cantidad de producto obtenido. Por otra parte, si la fracción del producto que ha pasado a in

(*) Véase, por ejemplo "Optimal Savings Policy when Labor grows Endogenously". De Ryuzo Sato y Eric G. Davis, en Econometrica, Vol. 39, Noviembre de 1.971, ó "Population and optimal Growth", de John Pritchford, en Econometrica, vol. 40, Enero de 1.972.

crementar el stock de capital en tiempos anteriores no puede ser reconvertida en bien de consumo, la inversión bruta no puede ser nunca negativa. Por consiguiente, la relación ahorro–producto, s (t), tomará siempre valores no superiores a la unidad, y no inferiores a cero, es decir $s(t) \in [0, 1]$. Y como la variable de control del sistema toma sus valores en un conjunto compacto, podemos ya adelantar que el método de optimización dinámica basado en el principio de máximo de Pontryagin es un instrumento mucho más adecuado para el tratamiento de nuestro problema que los métodos del cálculo de variaciones clásico.

Esta afirmación seguiría siendo válida en el caso en que admitiéramos la posibilidad de una reconversión a posteriori del equipo capital en consumo, pues en este caso, la inversión bruta, nunca superior al producto, podría ser negativa, pero no inferior al stock de capital existente, con signo negativo – ya que, aunque la sociedad decida consumir todas sus existencias, estas consisten exactamente en el stock de capital más el producto obtenido con él – con lo que

$$\frac{-K(t)}{F(K(t))} \leqslant s(t) \leqslant 1$$

y la posibilidad de una igualdad en las cotas nos asegura que el intervalo en que toma sus valores la variable de control en cada instante no es abierto.

Razones de índole exclusivamente matemática – de aplicabilidad del citado principio de máximo tal como se enunciará – nos inducen a imponer a la variable relación ahorro–producto la condición de ser contínua a trozos (contínua en todo su dominio de definición salvo, a lo más, en un conjunto finito y con discontinuidades de primera especie). Considerada desde el punto de vista económico, esta restricción parece muy razonable, pues no es imaginable que la sociedad altere bruscamente sus hábitos de consumo un número no finito de veces durante un intervalo de tiempo finito. Se admite, sin embargo, que tales hábitos puedan variar bruscamente– desapareciendo eventualmente su inercia habitual –un número finito de veces en cada intervalo temporal acotado, lo que da al modelo una mayor generalidad.

En vez de tomar como variable de control la relación ahorro — producto se puede considerar como tal el consumo en cada instante — de hecho la sociedad toma indistintamente su decisión sobre la cantidad a consumir o sobre la cantidad a invertir, y ambas son complementarias.— En alguna ocasión lo haremos en este modelo, con el fin de simplificar algunos cálculos. Esta transformación no altera lo anteriormente expuesto en cuanto a la aplicabilidad del principio de máximo al modelo, pues la características estudiadas y las hipótesis impuestas sobre la relación ahorro—producto se trasladan fácilmente al consumo. En primer lugar, si el consumo queda acotado superiormente por el producto será

$$0 \leqslant C(t) \leqslant F(K(t), L(t))$$

y si admitimos que el capital puede reconvertirse en consumo a posteriori

$$0 \leqslant C(t) \leqslant F(K(t), L(t)) + K(t)$$

y,en ambos casos, el intervalo en que la variable de control toma sus valores en cada instante nó es abierto. Por otra parte, la relación existente entre el consumo y el cociente ahorro—producto:

$$C(t) = [1-s(t)]\; F(K(t), L(t))$$

juntamente con la continuidad de la función de producción nos aseguran la continuidad a trozos de la variable consumo.

2.2.5. El criterio de optimalidad

Nuestro modelo se cierra con la determinación de la trayectoria del consumo o de la relación ahorro—producto que optimiza las preferencias de la socie—

dad, para lo cual estas han de expresarse en forma matemáticamente manejable.

Tratándose de un modelo orientado al *consumo, en el que* solamente se valora la utilidad que esté pueda reportar, el criterio de optimización deberá ser una medida de *la utilidad obtenida durante todo el periodo fijado.*

El primer paso para obtenerla será fijar una relación entre el consumo realizado en cada instante y la utilidad que éste reporta, es decir, una función de la utilidad respecto al consumo que refleje de manera suficientemente realista la evolución de los niveles de satisfacción obtenidos por la colectividad para los diversos niveles de consumo.

Admitiremos en primer lugar que la utilidad lograda crece al aumentar el nivel de consumo, pero menos que proporcionalmente, con *lo que la utilidad* marginal del consumo disminuye al crecer éste — es mayor en las generaciones pobres que en las ricas.— En consecuencia, *supondremos que nuestra función de utilidad* es creciente y estrictamente cóncava. Si convenimos en representar la utilidad por una función *contínua para* $C \geqslant 0$ — y, *por tanto, contínua* y, acotada en un compacto, lo que eliminará problemas de convergencia del funcional en intervalos finitos — y continuamente derivables dos veces en todo punto $C > 0$, esto significa que

$$U'(C) > 0 \quad , \qquad U''(C) < 0.$$

Supondremos además que $\lim_{C \to \infty} U'(C) = 0$

La concavidad estricta de la función de utilidad juega un papel muy importante en cuanto a la unicidad del control óptimo.(*)

Otro aspecto importante de la realidad que la función de utilidad debe reflejar de alguna forma es la inviabilidad de un consumo nulo: por mucho que la sociedad convenga en sacrificarse ahora para incrementar su consumo futuro, no podrá hacerlo hasta el punto de no consumir nada. Algunos autores (**), excluyen del modelo la posibilidad teórica de un consumo nulo imponiendo a la función de utilidad la condición

$$\lim_{C \to 0} U(C) = -\infty$$

con lo que el peso negativo atribuido al consumo próximo a cero lo descarta de toda solución óptima. Dadas la continuidad y concavidad estricta de la función U (C), y suponiendo — como es razonable esparar—, que ésta toma un valor estrictamente positivo para algún *C finito, resultará que la función* U (C) alcanzará el valor cero

(*) Los modelos con función de utilidad lineal, de la forma U (C) = C han sidó estudiados por Karl Shell en "Application of Pontryagin's Maximum Principle to Economics" Mathematical Systems Theory and Economics, I: Col. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Vol. 11. Springer—Verlag, 1.969 y en "Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change" Essays on the Theory of Optimal Economic Growth. Ed. Shell, M.I.T. Press, 1.967, utilizando también las técnicas del control óptimo. Sus resultados difieren parcialmente de los obtenidos para el caso objeto de nuestro estudio, pues cuando la función de utilidad es lineal, la trayectoria óptima de la relación ahorro—producto puede quedar indeterminada en un instante del periodo de planificación.

(**) Véase por ejemplo el artículo de T. G. Koopmans, "On the Concept of Optimal Economic Growth" The Econometric Approach to Development Planning. Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia. North Holland 1.965, ó el de J. A. Mirrlees, "Optimum Groth when Technology is Changing" *Review of Economic Studies*, Vol. 34, Enero de 1.967.

para un —por la continuidad— y solo un —por la concavidad — valor de $C > 0$. Este valor de $\bar{C}$, que separa los niveles de consumo que proporcionan una utilidad menor que cero, de los que producen una satisfacción positiva, se interpretaría como el nivel mínimo de subsistencia, tal que ninguna trayectoria de consumo que tomara en algún instante valores por debajo de él sería realmente admisible.

Sin embargo, esta restricción a la función de utilidad supone aceptar la posibilidad de que la utilidad obtenida de unas ciertas cantidades de consumo sea negativa. Por otra parte, aunque es evidente la inaceptabilidad del consumo nulo en algún instante, el mínimo de subsistencia admisible puede ser bastante elástico y difícil de establecer a priori. Para evitar estos inconvenientes, muchos otros autores (*) prefieren suponer que la utilidad es siempre mayor o igual que cero y que su crecimiento es ilimitadamente grande cuando el consumo está infinitamente próximo a cero, con lo que la condición impuesta es la

$$\lim_{C \to 0} U'(C) = \infty$$

más debil que la anterior (**), y que vamos a adoptar en este modelo pues, como veremos, es suficiente para excluir la posibilidad del consumo nulo en una solución óptima.

(*) Por ejemplo, Arrow, K. J. en "Applications of Control Theory to Economic Growth" Mathematics of the Decision Sciences, 2. American Mathematical Society, ó también — Cass, D. en "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: a Turnpike Theorem", *Econometrica, Vol ,34, Octubre de 1.966.*

(**) En realidad, la condición $\lim_{C \to 0} U(C) = -\infty$ implica la $\lim_{C \to 0} U'(C) = \infty$, como puede verse por ejemplo en el capítulo 10 del libro de Wan, H. Y. "Economic Growth". Harcourt Brace Jovanovich 1.971. El recíproco no es cierto, como lo prueba el hecho de que la función de utilidad elegida para nuestro modelo numérico cumple la segunda condición, pero no la primera.

Determinada ya la utilidad instantánea obtenida a partir de cada nivel de consumo, tendremos que arbitrar un procedimiento de medir la utilidad total obtenida en un intervalo de tiempo cualquiera $[t_0, t_1]$, con el fín de poder establecer comparaciones entre las distintas trayectorias posibles de consumo, y elegir la mejor. Para ello vamos a construir un funcional real, $J(C(t), t_1, t_2)$ ó aplicación del espacio funcional de las posibles funciones de consumo C (t) sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ en el conjunto R, de manera que sea aditivo respecto al intervalo de tiempo:

$$J[C(t), t_1, t_2] + J[C(t), t_2, t_3] = J[C(t), t_1, t_3], \forall t_2, t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$$

es decir, que la utilidad derivada de una cierta trayectoria de consumo en un intervalor dado sea igual a la suma de las utilidades sobre todos los subintervalos de una partición cualquiera del intervalo, de las subtrayectorias determinadas por la partición en la misma trayectoria de consumo.

El funcional elegido es el

$$J[C(t), t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \kappa(t)\, U[C(t)]\, dt$$

que además de ser aditivo respecto al tiempo, satisface las dos importantes condiciones que, según Koopmans, (*) debe reunir un funcional de medida de la utilidad:

1) Independencia, o no complementariedad del consumo entre cualesquiera tres subperiodos de tiempo.

(*) Koopmans, T. C. "Stationary Ordinal Utility and Impatience", Econometrica, Abril de 1.960 y " On the Concept of Optimal Economic Growth" en Pontificiae Academiae — Scientiarum Scripta Varia, op. cit.

2) Estacionariedad, de manera que la ordenación entre dos trayectorias de consumo se conserve cuando desplazamos ambas en un mismo intervalo de tiempo, y asignamos al intervalo desplazado una misma trayectoria de consumo, de manera que cada nueva trayectoria esté formada por la trayectoria comun seguida de la primitiva desplazada.

Las ponderaciones κ (t) de la función de utilidad en cada instante, constituyen una posibilidad de valorar esta de manera diferente según un criterio de ordenación temporal. En general, la función κ (t) suele tomarse decreciente, lo que supone una "miopía" o minusvaloración de las utilidades futuras respecto a las presentes. Si hacemos

$$\gamma (t) = - \frac{\dot{\kappa} (t)}{\kappa (t)} \qquad \kappa(t_1) = 1$$

será

$$\kappa (t) = e^{- \int_{t_1}^{t} \gamma (s)\, ds}$$

Siendo γ (t) la tasa de descuento temporal de la utilidad. Si suponemos que dicha tasa es constante en el tiempo, es decir, que γ (t) no depende de t, será:

$$\kappa (t) = e^{- \gamma(t-t_1)}$$

con lo que

$$J [C (t), \; t_1, \; t_2] = \int_{t_1}^{t_2} e^{- \gamma(t - t_1)} \; U [C (t)] \, dt$$

que, con las restricciones anteriormente impuestas a las funciones del integrando, es una integral de Riemann.

Hemos indicado que, en general, la función de ponderación de la utilidad en el tiempo será decreciente, puesto que en circunstancias normales cada generación tenderá a interesarse fuertemente por su propio nivel de satisfacción, pero mucho menos por la utilidad de las generaciones futuras, tanto menos cuanto más aleja–das sean estas. En este caso será $\gamma > 0$. Sin embargo, y pese a ser éste el punto de vista más generalizado sobre el problema, no todos los autores están de acuerdo con él. Así, por ejemplo, el propio Ramsey (*) en su trabajo básico sobre creci–miento óptimo afirma que "no descontará las satisfacciones futuras respecto a las más próximas, práctica que es éticamente indefendible y procede simplemente de una pobreza de imaginación"; desde el punto de vista de Ramsey, la utilidad es igualmente valorable con independencia del instante en que se produzca, con lo que la función de ponderación deberá ser constante y, por tanto $\gamma = 0$.

Se podría incluso considerar la posibilidad, defendida por algunos autores, (**) de que $\gamma < 0$, es decir, de que la utilidad futura sea más valorable que la presente, en el caso en que, por ejemplo, *una sociedad esté especialmente preocu–pada* por el nivel de bienestar que disfrutará en su vejez.

La hipótesis $\gamma < 0$ tiene una especial significación en el caso que estu–diaremos posteriormente en el que admitimos el crecimiento de la población, y la utilidad se mide sobre el consumo per capita, pues en este caso, a medida que el tiempo transcurra, más personas disfrutarán del nivel de utilidad futura, haciéndo-la por tanto más valorable que la presente. Veremos, sin embargo, que cuando el intervalo en consideración se alarga indefinidamente esta hipótesis habrá de ser re-chazada por razones de indole matemática, –de existencia de trayectorias óptimas en tiempo infinito–, dándose la circunstancia de que, como afirma Koopmans

(*) Ramsey, R. P. "A Mathematical Theory of Saving". Economic Journal, Diciembre de 1.928

(**) Vease por ejemplo, H. Wan, Economic Growth, Cap. X, op. cit.

"la *consideración de un futuro* infinito impone límites matemáticos, a la autonomía del pensamiento ético". (*)

(*) T. Koopmans. "On the Concept. of Optimal Economic Growth" op. cit.

CAPITULO III

PLANTEAMIENTO MATEMATICO Y RESOLUCION DEL MODELO

3.1. El modelo de crecimiento óptimo como problema de control óptimo.

El problema económico descrito en el capítulo anterior — obtener la trayectoria de acumulación de capital que pase, en un periodo de tiempo fijo T, de un stock de capital inicial dado $K(0) = K_0$, a un capital final $K(T)$ no inferior a un valor prefijado, K_T, optimizando un cierto funcional indicativo del bienestar social derivado del consumo—, puede interpretarse y resolverse como un problema de control óptimo.

Para ello, tomaremos como variable de estado el stock de capital $K(t)$ en cada instante, y como variable de control la relación ahorro–producto $s(t)$, que es el instrumento que efectivamente controla la trayectoria de acumulación del capital. La variable de estado estará sometida a la restricción $K(t) \geqslant 0$, pues un stock de capital negativo carecería de sentido desde el punto de vista económico; por otra parte, deberá satisfacer las condiciones: $K(0) = K_0$, $K(T) \geqslant K_T$. En cuanto a la variable de control, hemos visto en el capítulo anterior que la condición de que la porción de producto transformada en capital no pueda ser reconvertida en consumo implica que $s(t) \in [0, 1]$ para todo t; el conjunto de controles admisibles en nuestro problema lo constituyen todas las funciones $s(t)$ contínuas a trozos, definidas sobre el intervalo $[0, T]$ y tales que sus imágenes están contenidas en el compacto $[0, 1]$.

Pasemos ahora a determinar las ecuaciones de transición del sistema, es decir, las que, para cada control admisible, determinan la evolución de la variable de estado en el tiempo. En nuestro problema, el stock de capital evoluciona en el tiempo condicionado por la magnitud de los flujos de la inversión bruta y de la depreciación. Este último, como hemos visto ya, va a tomar valores proporcionales al stock de capital existente en cada momento, con lo que

$$D(t) = \delta K(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

siendo δ el factor de proporcionalidad fijado.

En cuanto a la inversión bruta, dependerá, naturalmente del producto obtenido y, supuesta la inexistencia de recursos inactivos –en realidad, se podría prescindir de esta hipótesis sin que los resultados del problema se vieran afectados por ello (*) – de la cantidad de producto asignada al consumo, es decir, en último término, del valor de la relación ahorro–producto en cada instante. El producto bruto obtenido en cada momento depende del capital $K(t)$ y del trabajo $L(t)$ empleados.

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

Si suponemos, para mayor sencillez en esta primera versión del modelo de crecimiento que la cantidad de trabajo –y, por tanto, la población permanece constante en el tiempo

$$L(t) = L$$

el producto bruto dependerá de la única variable $K(t)$, con lo que podemos escribir

$$Y(t) = F(K(t))$$

(*) A esta conclusión llega K. J. Arrow en "Applications of Control Theory to Economic Crowth" Mathematics of the Decision Sciences, 2. Ed. G. B. Dantzig y A. F. Veinott. American Mathematical Society, 1.968, utilizando el principio de máximo de Pontryagin en su versión generalizada al caso en que existen restricciones que afectan a los valores admisibles de la variable de estado.

designando, por simplificar, con la misma letra F la nueva función de una sola variable que resulta de la anterior cuando L es constante. De nuestra anterior hipótesis de que la función de producción es homogénea de grado uno se deduce fácilmente que

$$F(K(t)) = L\ f(k(t))$$

siendo $k(t)$ la relación capital–trabajo en el instante t, con lo que, al ser L una constante, la función $F(K(t))$ cumple todas las condiciones de buen comportamiento de Inada impuestas a $f(k(t))$ en el capítulo anterior.

El valor de la relación ahorro–producto determina la fracción de éste destinada a la inversión bruta, y su complementaria, la destinada al consumo, de manera que:

$$I_B(t) = s(t)\ F(K(t)) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

es la inversión bruta y

$$C(t) = [1 - s(t)]\ F(K(t)) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

es el consumo en cada instante.

El incremento del stock de capital vendrá dado por la inversión neta, que resulta de restar a la inversión bruta la depreciación, con lo que:

$$I(t) = \dot{K}(t) = s(t)\ F(K(t)) - \delta\ K(t)$$

y tenemos nuestra ecuación de transición o evolución del stock de capital en el tiempo.

Por todo lo cual, nuestro problema queda expresado en términos de la teoría matemática del control en la forma:

Determinar, de entre el conjunto de controles admisibles, la función s(t) que traslada a la variable de estado K (t) del sistema determinado por la ecuación de transición

$$\dot{K} = s\ F(K) - \delta K$$

desde el valor K_0 a un valor mayor o igual que K_T en un intervalo de tiempo T, maximizando el funcional

$$J = \int_0^T U(C)\,dt$$

y satisfaciendo en todo instante la condición

$$K(t) \geqslant 0 \qquad \forall\ t \in [0, T]$$

3.2. El cono alcanzable

Para que el problema anteriormente planteado tenga solución, es preciso que el stock de capital final establecido como mínimo posible sea tal que las condiciones tecnológicas del proceso de acumulación independientes de la decisión acerca de la relación ahorro–producto apuntadas en la ecuación de transición del sistema permitan alcanzar dicho nivel de capital en el intervalo de tiempo T fijado. Desde el punto de vista de las técnicas de control, esto equivale a exigir que el valor final mínimo fijado pertenezca al cono alcanzable

$$\bar{C}\ (K_0, t) \quad \text{para} \quad t = T.$$

Es, por tanto, del mayor interés conocer la amplitud de este cono de alcanzabilidad, o conjunto de pares de valores (K_t, t) que hacen posible la solución del problema.

Considerando la forma de la ecuación de transición:

$$\dot{K}(t) = s(t) \left(F(K(t)) - \delta K(t)\right)$$

observamos que, por ser $F(K(t)) \geqslant 0$ para todo t, la acumulación de capital será tanto más rápida cuanto mayor sea $s(t)$, y al contrario. La mayor velocidad de acumulación posible se obtendrá, por tanto, para $s(t) = 1$, y la menor, para $s(t) = 1$, y la menor, para $s(t) = 0$. Este resultado tiene una interpretación económica evidente: la forma más rápida de alcanzar un cierto nivel de capital— —o el procedimiento para conseguir el máximo stock de capital posible en un intervalo de tiempo dado— consiste en ahorrar todo el producto obtenido. Por el contrario, el consumo de todo el producto determina la más rápida decumulación posible de capital — o el mínimo capital alcanzable en un tiempo dado. Observemos que, en nuestro caso la máxima decumulación de capital viene limitada por el coeficiente de depreciación del mismo, dada la imposibilidad — fijada por las hipótesis del modelo — de consumir la parte del producto que ya ha sido destinada a capital. Esta limitación impone a nuestro modelo — a diferencia de aquellos en que el capital puede ser transformado en consumo en cualquier momento y, por consiguiente, el stock de capital reducido a cero en cualquier intervalo de tiempo (*) — una cota inferior positiva al cono alcanzable.

Según lo visto anteriormente, el crecimiento máximo posible del capital, para $s(t) = 1$, vendrá dado por la ecuación diferencial:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = F(\bar{K}(t)) - \delta \bar{K}(t)$$

(*) Así, por ejemplo, en el modelo de Cass:"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem,"op. cit. Se estudia solo el borde superior del cono de alcanzabilidad, dada la trivialidad del borde inferior con los supuestos adoptados por Cass.

cuya solución particular que pasa por $(0, K_0)$ es

$$\bar{K}(t) = K(0) + \int_0^t [F(\bar{K}(\tau)) - \delta \bar{K}(\tau)]\, d\tau$$

con lo que el máximo capital obtenible en un intervalo T será el

$$\bar{K}(t) = K(0) + \int_0^T [F(\bar{K}(\tau)) - \delta \bar{K}(\tau)]\, d\tau$$

De la misma forma podemos obtener el capital mínimo alcanzable para cualquier instante t sin más que imponer en la ecuación de transición la condición $s(t) = 0$, con lo que se nos transforma en la ecuación diferencial

$$\frac{d\underline{K}(t)}{dt} = -\delta \underline{K}(t)$$

cuya solución particular es

$$\underline{K}(t) = K_0\, e^{-\delta t}$$

y el ínfimo del cono alcanzable para $t = T$ es

$$\underline{K}(T) = K_0\, e^{-\delta t}$$

Al llegar a este punto, parece interesante preguntarse en qué medida las limitaciones tecnológicas del porblema son condicionantes del cono alcanzable con independencia del factor tiempo. Es decir ¿bastaría poder alargar el intervalo de tiempo tanto como quisieramos para tener la seguridad de que cualquier nivel de capital es alcanzable? . Vamos a ver seguidamente que no es este el caso. Lo que ocurre, por el contrario, es que el conjunto de puntos pertenecientes al cono de alcanzabilidad para todo valor de t, tiene un supremo y un ínfimo, de manera que cualquier stock de capital situado por encima del supremo o por debajo del ínfimo es inalcanzable por el sistema, sea cual sea el intervalo de tiempo disponible.

Consideremos primeramente la expresión $F(K) - \delta K$, que determina el crecimiento máximo posible del capital. Existe un valor único $\tilde{K}$ de K que hace

$$F(\tilde{K}) - \delta \tilde{K} = 0$$

La función $F(K)$ que, como hemos visto, cumple las condiciones de Inada, resulta ser una curva creciente, contínua y cóncava, y tal que su crecimiento es tan grande como queramos en las proximidades del origen de coordenadas y tan pequeño como queramos cuando K crece indefinidamente. La función δK es en cambio una recta de pendiente δ, constante. Ambas curvas coinciden en $K = 0$. Dado que $\lim_{K \to 0} F'(K) = \infty$, siempre podremos encontrar un punto, K_1 en el que $F'(K_1) > \delta$, y, en él, será $F(K_1) > \delta K_1$. Pero, por otra parte, como $\lim_{K \to \infty} F'(K) = 0$, existirá siempre un punto, K_2 en el que $F'(K_2) < \delta$. Puede ocurrir que, además $F(K_2) \leqslant \delta K_2$; pero, si no es éste el caso, es decir, si $F(K_2) > \delta K_2$, la tangente a la función $F(K)$ en K_2 tiene una pendiente menor que δ, y está por encima de la recta $y = \delta K$ en K_2, luego la cortará necesariamente en algún punto, K_3. En este punto coinciden la recta $y = \delta K$ y la tangente a $F(K)$ en K_2. Pero $F(K)$ es cóncava en todo punto, y, por tanto, queda siempre por debajo de sus tangentes, luego $F(K_3) < \delta K_3$. Vemos, pues, que la función $F(K) - \delta K$, continua, toma con seguridad valores de distinto signo en puntos K_1 y K_3. Existirá, por consiguiente, algún punto $\tilde{K}$, tal que

$$K_1 < \tilde{K} < K_3$$

y en el que

$$F(\tilde{K}) = \delta \tilde{K}.$$

La concavidad de la función $F(K)$ nos asegura además que este punto es la única solución de la ecuación $F(K) - \delta K = 0$. Pues, encontrándose la primera de las posibles soluciones en un punto en el que $F'(\tilde{K}) < \delta$, para que la curva volviese a cortar a la recta, tendría que ocurrir que, para valores de K mayores que $\tilde{K}$, fuese $F'(K) > \delta$, lo que contradice la hipótesis de que $F''(K) < 0$ (*).

A esta solución única $\tilde{K}$, se le llama valor máximo mantenible del stock de capital, y la razón es la siguiente: si el stock de capital es en un momento dado mayor que $\tilde{K}$, la función $F(K) - \delta K$ sería negativa en ese punto, con lo que el máximo crecimiento posible del capital sería en realidad un decrecimiento, y cualquier otro valor de $s(t)$ distinto de 1 determinaría un decrecimiento más rápido aún. Luego ningún stock de capital mayor que $\tilde{K}$ se puede mantener por más de un instante. Un capital igual a $\tilde{K}$, en cambio, podría mantenerse indefinidamente, una vez alcanzado, con una relación ahorro–producto constantemente igual a 1. También veremos más adelante que los niveles de capital inferiores a $\tilde{K}$ pueden mantenerse indefinidamente con valores admisibles apropiados de la relación ahorro–producto.

El máximo valor mantenible del stock de capital juega un importante papel en nuestro problema de acotación del cono alcanzable. Supongamos, en efecto, que el capital inicial –vértice del cono– K_0 es menor que $\tilde{K}$. En el instante inicial nos encontramos en la zona en que $F(K) > \delta K$, y por tanto el más rápido crecimiento posible del sistema será positivo; y esta situación continua hasta que el stock de capital alcanza el valor $\tilde{K}$. A medida que nos acercamos a este punto, por su izquierda, la diferencia $F(K) - \delta K$ disminuye, y, por ser continua, será:

$$\lim_{K \to \tilde{K}} F(K) - \delta K = 0$$

con lo que el sistema, si alcanza el punto $\tilde{K}$ en un tiempo finito, permanece ya in

(*) Para una demostración más rigurosa de la existencia y unicidad de la solución en un caso similar a éste, puede verse, por ejemplo, "Economic Growth" de Wan, op. cit.

definidamente en el, y, si no lo alcanza en tiempo finito, tenderá asintóticamente a él. En todo caso, hemos visto que si $K_0 < \tilde{K}$, éste punto es un supremo del conjunto de los valores del cono de alcanzabilidad para todo t.

En realidad, el sistema nunca alcanza el valor $\tilde{K}$ en tiempo finito, pues de la ecuación diferencial de crecimiento máximo del capital se deduce

$$dt = \frac{dK}{F(K) - \delta K}$$

con lo que

$$t = \int_{K_0}^{\tilde{K}} \frac{dx}{F(x) - \delta x}$$

nos daría el instante en que el sistema alcanza $\tilde{K}$. Pero el denominador del integrando tiende a cero cuando x tiende a $\tilde{K}$. Aplicando el criterio de comparación de integrales por paso el límite cuando tomamos como término de comparación la expresión $x - \tilde{K}$, tenemos que

$$\lim_{x \to \tilde{K}} \frac{F(x) - \delta x}{x - \tilde{K}} = \lim_{x \to \tilde{K}} F'(x) - \delta \neq 0$$

según las propiedades de $F(x)$ anteriormente estudiadas. Por consiguiente, al ser

$$\int_{K_0}^{\tilde{K}} \frac{dx}{x - \tilde{K}}$$

una integral divergente, también lo será la

$$t = \int_{K_0}^{\tilde{K}} \frac{dx}{F(x) - \delta x}$$

lo que prueba que no existe solución finita para t, y, por consiguiente, el punto $\tilde{K}$ es asintótico al sistema estudiado.

Si el capital inicial, K_0 es mayor que $\tilde{K}$, el proceso comienza en el intervalo en que $F(K) < \delta K$ y por tanto, el extremo superior del cono de alcanzabilidad

$$\bar{K}(t) = K_0 + \int_0^t [F(K(\tau)) - \delta K(\tau)]\, d\tau$$

es una función decreciente de t mientras el sistema se encuentre a la derecha de $\tilde{K}$. Con el razonamiento anteriormente expuesto veríamos que el sistema no alcanza $\tilde{K}$ en ningún intervalo de tiempo finito, sino que tiende a él asintóticamente por la derecha. En resumen, aquí, lo mismo que en el caso anterior, ocurrirá que

$$\lim_{t \to \infty} \bar{K}(t) = \lim_{t \to \infty} K_0 + \int_0^t [F(K(\tau)) - \delta K(\tau)]\, d\tau = \tilde{K}$$

Pero ahora $K_0 > \tilde{K}$, luego el supremo del conjunto de valores del cono de alcanzabilidad para todo t es K_0.

El ínfimo del cono de alcanzabilidad se calculará sobre la trayectoria del capital mínimo alcanzable en cada intervalo de tiempo.

$$\underline{K}(t) = K_0\, e^{-\delta t}$$

Sea cual sea el valor inicial K_0, $e^{-\delta t}$ *es una función positiva y decreciente con* t. Por consiguiente, $\underline{K}(t)$ decrece con t, conservándose siempre positivo. Por otra parte

$$\lim_{t \to \infty} \underline{K}(t) = \lim_{t \to \infty} K_0\, e^{-\delta t} = 0$$

luego tiende asintóticamente al origen, y, por tanto, el ínfimo del cono de alcanzabilidad es cero.

En resumen; podemos asegurar que todo stock de capital K contenido en el cono alcanzable $\bar{C}(K_0, t)$ *para cualquier valor de* t, *verifica*

$$0 < K \leqslant \max\ (K_0\ ,\ \widetilde{K})$$

Para cada valor fijo de t, el cono de alcanzabilidad – que, en nuestro caso podríamos llamar segmento de alcanzabilidad – verifica que si

$$K(t_1) \in \mathcal{C}(K_0\ ,\ t_1)$$

es

$$\underline{K}(t_1) \leqslant K(t_1) \leqslant \bar{K}(t_1)$$

siendo

$$\underline{K}(t_1) = K_0\ e^{-\delta t_1}$$

y

$$\bar{K}(t_1) = K_0 + \int_0^{t_1} [F(K(t)) - \delta K(t)]\, dt$$

y el sistema alcanza efectivamente los valores $\underline{K}(t_1)$ y $\bar{K}(t_1)$ para los controles $s(t) = 0$ y $s(t) = 1$ respectivamente, y por tanto $\mathcal{C}(K_0, t_1)$ contiene sus valores extremos. Por otra parte como

$$K(t_1) \in \mathcal{C}(K_0, t_1) \subset \bigcup_{t \geqslant 0} (K_0, t)$$

será

$$0 < K(t_1) \leqslant \max\ (K_0, \widetilde{K})$$

por lo que el cono de alcanzabilidad para cada valor de t es un conjunto acotado.

Vamos a ver además que los conjuntos

$$\bar{\mathcal{C}}(K_0,\ t_1) \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant T$$

son convexos, es decir que, fijado un t_1, todo $K_*(t_1)$ tal que

$$\underline{K}(t_1) \leqslant K_*(t_1) \leqslant \bar{K}(t_1)$$

pertenece al cono alcanzable.

Esto equivale a afirmar que para todo $K_*(t_1)$ que cumpla ésta condición existirá un control admisible $s_*(t)$ — continuo a trozos y con imágenes en [0,1]—, definido en $[0, t_1]$ y tal que existe una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dK}{dt} = s_*(t) \quad F(K) - \delta K$$

que pasa por los puntos $(0, K_0)$ y $(t_1, K_*(t_1))$, con lo que el control $s_*(t)$ traslada al sistema de su posición inicial K_0 a un stock de capital igual a K_* en un intervalo t_1. Vamos a ver, en efecto, que tal control existe.

Definamos un control de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} s_*(t) = 1 & 0 \leqslant t < t_* \\ s_*(t) = 0 & t_* \leqslant t < t_1 \end{array} \qquad 0 \leqslant t_* \leqslant t_1$$

cuyo único punto de discontinuidad es el t_*: se trata, por tanto, de un control admisible. Para cada valor que demos a t_*, comprendido en el intervalo citado, tendremos un control admisible de este tipo. Si podemos demostrar que, entre éste subconjunto del conjunto de controles admisibles, existe alguno que traslade el sistema de K_0 a $K_*(t_1)$ en un tiempo t_1, habremos resuelto afirmativamente el problema de la convexidad del cono en t_1.

Con el control $s_*(t)$ descrito, el sistema, inicialmente en K_0, pasa, en un intervalo de tiempo t_* a

$$K(t_*) = K_0 + \int_0^{t_*} [F(K) - \delta K] \, dt$$

y, luego, en el intervalo $t_1 - t_*$ a

$$[K(t_1) = \left(K_0 + \int_0^{t_*} [F(K) - \delta K]dt\right]) e^{-\delta(t_1 - t_*)}$$

y vamos a ver que existe un t_*, $0 \leqslant t_* \leqslant t_1$, tal que, para el $s_*(t)$ correspondiente es $K(t_1) = K_*$, el valor final fijado en t_1.

En efecto, para que

$$\left[K_0 + \int_0^{t_*} [F(K) - \delta K]\, dt\right] e^{-\delta(t_1 - t_*)} = K_*$$

deberá ser

$$K_0 = K_* e^{\delta(t_1 - t_*)} - \int_0^{t_*} (F(K) - \delta K)\, dt$$

definamos la función

$$G(t_*) = K_* e^{\delta(t_1 - t_*)} - \int_0^{t_*} (F(K) - \delta K)\, dt$$

Esta función es continua en el intervalo $[0, t_1]$ por serlo $F(K) - \delta K$ (en realidad, bastaría que $F(K) - \delta K \in L^1(R)$ para poder asegurar la continuidad de $G(t_*)$ en el intervalo). Por otra parte, para $t_* = 0$

$$G(0) = K_* e^{\delta t_1} \geqslant \underline{K}(t_1)\, e^{\delta t_1} = K_0$$

y para $t_* = t_1$

$$G(t_1) = K_* - \int_0^{t_1} (F(K) - \delta K)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \overline{K}(t_1) - \int_0^{t_1} (F(K) - \delta K)\, dt = \overline{K}(t_1) -$$

$$- [\overline{K}(t_1) - K_0] = K_0$$

Luego podemos asegurar la existencia de un valor t_*, $0 \leq t_* \leq t_1$ para el cual $G(t_*) = K_0$. El control correspondiente $s_*(t)$ transporta el sistema de K_0 al K_* fijado en un tiempo t_1, y nos asegura la convexidad del segmento alcanzable para cada t.

Por todo lo expuesto anteriormente, podemos también afirmar que el segmento alcanzable para cada valor de t es, además de convexo, compacto.

Su convexidad es particularmente interesante desde el punto de vista del tratamiento económico del problema, pues nos dice que el planificador puede fijar libremente el stock de capital mínimo exigible a la terminación del periodo, dentro de los límites del cono alcanzable para cada intervalo de tiempo, con la seguridad de que el conjunto de los controles que llevan el sistema al capital final exigido dentro del intervalo de tiempo prefijado no es vacío, y por consiguiente, el problema está bien planteado desde el punto de vista de la teoría del control.

Por último, y antes de dar por terminado el estudio del cono alcanzable es preciso señalar que los resultados obtenidos se basan en la hipótesis, admitida aquí, de que $s(t)$ puede tomar cualquier valor del compacto $[0, 1]$. Sin embargo, sabemos que, en la realidad, una economía con $s = 1$, es decir, con un consumo nulo, es insostenible. El supuesto de que s pueda tomar, en principio, un valor igual a 1 es el generalmente adoptado para estudiar nuestro problema central — las trayectorias de crecimiento óptimo — por razones de simplificación teórica y porque, en la práctica, no plantea problemas esenciales — veremos que la hipótesis $\lim_{C \to \infty} U'(C) = 0$ elimina el riesgo de obtención de una trayectoria óptima con valores de s iguales a la unidad—. Pero, en lo que respecta al cono alcanzable, el planificador tendrá que tener muy en cuenta que los stocks de capital finales $\overline{K}(t)$, aunque teóricamente alcanzables, no son en la práctica más que cotas superiores del crecimiento económico, mejor o peor aproximables según el mayor o menor grado de sacrificio que la población esté dispuesta a realizar en pro de un consumo futuro.

3.3. Aplicación del principio de Máximo de Pontryagin

Hemos visto en el apartado anterior que, para un capital mínimo fijado perteneciente al cono alcanzable, existe siempre al menos una función de control que satisface los requerimientos del problema. Ahora se trata de seleccionar, de entre todas las funciones de control que cumplen las condiciones exigidas, aquella que hace máximo el funcional

$$J = \int_0^T U(C(t))\,dt$$

de manera que

$$K(t) \geqslant 0 \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

Vamos primeramente a obtener estos controles, y las subsiguientes trayectorias de acumulación del capital en el caso, más sencillo, en que el capital final alcanzado es exactamente igual al mínimo fijado, $K(T) = K_T$. Despues veremos las consecuencias que origina en el conjunto de las soluciones óptimas la posibilidad $K(T) > K_T$.

Evidentemente, tal y como ha sido planteado nuestro problema económico, constituye desde el punto de vista de las matemáticas un problema de control óptimo de un sistema autonomo, con intervalo de tiempo fijo, extremos fijos — y, por tanto, con las condiciones de contorno suficientes para poder determinar la trayectoria, es decir, sin condiciones de transversalidad — y con una restricción en las coordenadas de fase: la de que $K(t) \geqslant 0$ para todo t. Podemos, sin embargo, prescindir en nuestro planteamiento de esta última restricción, ya que, de las conclusiones obtenidas en el apartado 3.2 referentes al límite inferior del cono alcanzable cuando se admite la hipótesis de no convertibilidad a posteriori del capital se deduce que, cuando el capital inicial es mayor que cero, la hipótesis mencionada impone un límite superior al consumo que impide al sistema alcanzar el estado $\dot{K} = 0$ en tiempo finito, con lo que, necesariamente, $K(t) > 0$ para todo t.

Aplicaremos, por tanto, a nuestro problema el principio de Máximo de Pontryagin en su versión para tiempo y extremos fijos haciendo:

$$x^0(t) = \int_0^t U[C(\tau)]\, d\tau$$

$$x^1(t) = K(t)$$

$$u(t) = s(t)$$

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x, u) = U[C(t)]$$

$$\frac{dx^1}{dt} = f^1(x, u) = s(t)\, F[K(t)] - \delta K(t)$$

El principio de Máximo nos dice que la condición necesaria para que un control $s_*(t)$ admisible determine una trayectoria de $K_*(t)$ óptima tal que $K(0) = K_0$, $K(T) = K_T$ es que exista una función vectorial continua $\psi(t) =$ $= (\psi_0(t), \psi_1(t))$ no nula en cada instante $t \in [0, T]$, tal que verifique la igualdad

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \quad i = 0, 1 \qquad [3, 1]$$

donde:

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = \sum_{i=0}^{1} \psi_i f^i(x, u) =$$

$$= \psi_0(t)\, U[C(t)] + \psi_1(t)\, [s(t)\, F(K(t)) - \delta K(t)]$$

y que además cumpla las dos condiciones siguientes:

a) en cada instante $t \in [0, T]$, la función de control $s_*(t)$ maximiza $\mathcal{H}(\psi(t), K_*(t), s)$ *es decir:*

$$\max_{s \in V} \mathcal{H}(\psi(t), K_*(t), s) = \mathcal{H}(\psi(t), K_*(t), s_*(t))$$

siendo V el conjunto de valores admisibles de los controles que trasladan el sistema de K_0 a K_T en un tiempo T, y

b) $\psi_0(t)$ es no negativa en todo punto $t \in [0, T]$.

Las ecuaciones [3, 1] nos aseguran que $\psi_0(t)$ es constante en el intervalo [0, T]. Como además ha de ser no negativo, puede ocurrir:

a) que sea cero

b) que sea distinto de cero. En este caso, la función vectorial

$$\frac{\psi(t)}{\psi_0(t)} = \left(1, \frac{\psi_1(t)}{\psi_0(t)}\right)$$

existe y cumple también las condiciones del principio de Máximo. Podemos, por tanto suponer de aquí en adelante sin pérdida de generalidad que la primera componente de la función vectorial, ψ_0, toma un valor constante a lo largo del periodo de planificación, y ese valor puede ser solamente 0 ó 1.

Estudiemos primeramente la posibilidad de que exista una función vectorial de la forma $(0, \psi_1(t))$ que cumpla las condiciones del principio de Máximo. Si tal cosa ocurriera, la hamiltoniana del sistema quedaría reducida a

$$\mathcal{H} = \psi_1(t)\,[s(t)\;F(K(t)) - \delta\,K(t)]$$

El principio de Máximo nos dice que la trayectoria óptima se determina de manera que en cada instante de tiempo $t \in [0, T]$ el control óptimo $s_*(t)$ tome, de entre todos sus valores posibles, el que haga máximo $\mathcal{H}$ cuando K (t) y ψ_1 (t) toman los valores correspondientes a dicha trayectoria óptima y que satisfagan las ecuaciones (3,1). Como para cualquier solución admisible son K (t) y F (K (t)) no negativos, el valor de s (t) $\in$ [0,1] que maximiza $\mathcal{H}$ será:

$$s_*(t) = 1 \quad \text{si} \quad \psi_1(t) > 0$$

$$s_*(t) = 0 \quad \text{si} \quad \psi_1(t) < 0$$

$$s_*(t) \in [0,1] \quad \text{si} \quad \psi_1(t) = 0$$

Pero ψ_1 (t) no puede ser nulo en ningún instante t $\in$ [0, T], pues hemos supuesto ψ_0 (t) = 0 $\forall$ t $\in$ [0, T], y la función vectorial no puede anularse para ningún valor de t – sus componentes no pueden anularse simultaneamente en ningún punto–. Luego

$$\psi_1(t) \neq 0 \qquad \forall\, t \in [0, T]$$

Vamos a ver que, además el signo de ψ_1 (t) se mantiene constante en [0,T] Efectivamente, ψ_1 (t) ha de ser una función contínua en [0, T], y, por consiguiente, todo cambio de signo implicaría la existencia de un cero de ψ_1 (t) en el intervalo, lo que, como acabamos de ver, es imposible. Por consiguiente, si ψ_0 (t) = 0, el control óptimo solamente puede adoptar una de estas dos formas:

a) $s_*(t) = 1 \quad \forall\, t \in [0, T]$

b) $s_*(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0, T]$

Pero en el apartado anterior hemos visto que estas dos funciones de control determinan precisamente las trayectorias extremas del cono alcanzable. Luego una función auxiliar ψ (t) de la forma (0, ψ_1 (t)) nos proporciona las trayectorias óptimas del sistema solamente cuando $K_T = \bar{K}(T)$ ó $K_T = \underline{K}(T)$. casós en que el problema de optimización no lo es realmente, pues existe una sola función de control que conduzca al sistema al capital final fijado. Haciendo excepción, por consiguiente, de estos dos casos triviales — de los que, además, veremos más adelante que el $K_T = \bar{K}(T)$ no proporciona una solución económicamente admisible, y el $K_T = \underline{K}(T)$ aparece también como solución óptima posible para el caso $\psi_0(t) = 1$ —, el problema puede abordarse con toda generalidad suponiendo una función auxiliar de la forma $\psi(t) = (1, \psi_1(t))$. En lo sucesivo, y teniendo en cuenta que solamente la segunda componente de la función auxilar es variable suprimiremos, para simplificar, el subíndice, designando a esta función por

$$(1, \psi(t))$$

Esta función auxiliar verifica que, a lo largo de cualquier trayectoria óptima es

$$\psi(t) = \frac{\partial J(t) K_*(t), s_*(t))}{\partial K}$$

siendo.

$$J(t, K, s) = \int_t^T U(C(\tau))\, d\tau = \int_t^T U\,[(1-s(\tau))F(K(\tau))]\, d\tau$$

es decir que $\psi(t)$ representa en cada instante la sensibilidad del funcional objetivo futuro a variaciones del capital en el instante t a lo largo de una trayectoria óptima, o relación marginal entre el incremento de la utilidad total óptima derivado de un incremento del stock de capital en una trayectoria óptima en el instante t y el incremento del capital. Su interpretación económica es, por tanto, evidente: $\psi(t)$ es, en cada t, lo que convencionalmente se viene designando en la literatura económica como el incremento de la utilidad total derivado de la incorporación de una unidad más de capital al sistema en el instante t, cuando el sistema se desplaza a lo largo de una trayectoria óptima, lo que le convierte en la valoración social marginal de la unidad de capital medida en las *unidades de J — unidades de utilidad total—,* es decir, en el precio de demanda, o precio sombra, de la unidad de capital en un instante t de una trayectoria óptima, expresada en términos de utilidad total. Vemos, pues, que en este modelo el precio sombra aparece, una vez más, ligado al sistema dual.

3.4. Las condiciones necesarias de optimalidad

La aplicación del principio de Máximo de Pontryagin — con la simplificación introducida en el anterior apartado — a nuestro problema nos dice que la condición necesaria para que una función de control, s (t), determine una trayectoria K (t) del sistema regido por la ecuación diferencial

$$\dot{K} = s F(K) - \delta K \qquad [3, 2]$$

que satisfaga las condiciones de contorno $K(0) = K_0$, $K(T) = K_T$ y maximice el funcional

$$J = \int_0^T U(C)\, dt = \int_0^T U((1-s) F(K))\, dt$$

es que exista una función continua auxiliar $\psi(t)$ definida en $[0, T]$, que sea solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} \qquad [3, 3]$$

y tal que dicha función de control haga máxima en cada instante la función $\mathcal{H}(\psi(t), K(t), s)$, cuando $\psi(t)$ es la función auxiliar encontrada y K (t) es la trayectoria determinada por s (t).

La función hamiltoniana en nuestro caso es de la forma:

$$\mathcal{H} = U((1-s) F(K)) + \psi [s F(K) - \delta K] .$$

con lo que la ecuación [3, 3] se convierte en:

$$\dot{\psi}\ (t) = -U'\ [(1-s)\ F\ (K)]\ (1-s)\ F'\ (K) + \psi\ [\delta - s\,F'\ (K)] \qquad [3,4]$$

y para que el control s (t) sea óptimo es necesario que haga máximo el valor de $\mathcal{H}$ para cada t, cuando sustituimos en $\mathcal{H}$ los valores de K y ψ por la solución del sistema formado por las ecuaciones [3, 2] y [3, 4] que satisfaga las condiciones de contorno. Si esta solución existe, la función s (t) tal que en cada punto t, maximice la hamiltoniana, nos proporcionará el control óptimo, cerrando de esta forma el modelo.

Para cada valor de t la función s (t) toma sus valores en el compacto [0,1], y este es, por consiguiente, el dominio, de $\hat{\mathcal{H}}$ (s) siendo $\hat{\mathcal{H}}$ (s) = $\mathcal{H}$ (ψ (t), K (t), s) Como, por otra parte, dadas nuestras hipótesis, la función $\hat{\mathcal{H}}$ (s) es continua respecto de s, para valores finitos de ψ y K, la existencia del máximo buscado está asegurada. Por tanto, a la función $\hat{\mathcal{H}}$ (s) le ocurrirá necesariamente una de estas dos cosas:

a) Alcanza el máximo en un punto interior del dominio, es decir, para un valor de $s \in]0, 1[$. Este punto deberá coincidir con un máximo relativo de la función.

b) Alcanza el máximo en la frontera del dominio, es decir, para s = 0 ó para s = 1.

La determinación en cada instante del valor de s que maximice $\hat{\mathcal{H}}$ (s), sujeto a las restricciones $0 \leqslant s \leqslant 1$, en las que los valores extremos son también, en principio, soluciones posibles, queda reducido a un problema de optimización estática con restricciones de desigualdad en las que la igualdad es también admisible, al que sería aplicable el procedimiento de resolución subsiguiente a la aplicación del teorema de Kuhn – Tucker.

De aquí resulta que, para que un valor de s, s_0, haga máxima la función

$$\hat{\mathcal{H}}(s) = U[(1-s)F(K)] + \psi(sF(K) - \delta K)$$

satisfaciendo las restricciones

$$s \leqslant 1 \qquad y \qquad -s \leqslant 0$$

es condición necesaria que existan multiplicadores λ_1 y λ_2 tales que la función $L(s, \lambda_1, \lambda_2)$ definida por

$$L(s, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{\mathcal{H}}(s) + \lambda_1(1-s) + \lambda_2 s$$

verifique

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

y además

$$\lambda_i \geqslant 0 \qquad i = 1, 2$$

siendo

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{si} \quad s < 1$$

y

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{si} \quad s > 0$$

De ello se deduce que, si el máximo absoluto de $\hat{\mathcal{H}}(s)$ en $0 \leqslant s_0 \leqslant 1$, se produce para un valor de s tal que $0 < s < 1$, deberá ocurrir que

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{d\hat{\mathcal{H}}}{ds} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \text{para} \quad s = s_0$$

pero además, como $s < 1$ y $s > 0$, serán $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, de manera que es condición necesaria para la optimalidad de s_0 que

$$\frac{d\hat{\mathcal{H}}}{d\,s} = 0 \qquad [3,\ 5]$$

lo que, efectivamente, nos asegura que se trata de un punto crítico de la función, como debe ocurrirle a un máximo relativo.

Si el máximo $\hat{\mathcal{H}}(s)$ tiene lugar en el punto $s_0 = 0$, el teorema de Kuhn – Tucker nos dice que deberá ocurrir

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{d\hat{\mathcal{H}}}{d\,s} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

pero ahora

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 \geqslant 0$$

con lo que

$$\frac{d\hat{\mathcal{H}}}{d\,s} = -\lambda_2 \leqslant 0 \quad \text{en} \quad s = 0$$

es decir que, en el punto $s = 0$ la función hamiltoniana deberá ser no creciente respecto de s, lo que, siendo

$$\frac{d\hat{\mathcal{H}}}{d\,s} = -\,U'\,[F\,(K)]\,F\,(K) + \psi\,F\,(K) \quad \text{para} \quad s = 0$$

ocurrirá para todos los pares de valores de K y ψ tales que

$$\psi \leqslant U'\,[F\,(K)].$$

Por último, que $\hat{\mathcal{H}}$ (s) tome su valor máximo en $s_0 = 1$ implicará necesariamente que su derivada por la izquierda, en el punto $s = 1$ tiene que ser mayor o igual que cero – se trata de un punto extremo y no interior – aun en el caso de ser esta derivada infinita. Pero la derivada que nos ocupa es:

$$\hat{\mathcal{H}}'(s) = -U'((1-s)F(k))\ F(k) + \psi F(k)$$

si

$$0 \leqslant s < 1$$

y siendo

$$\lim_{C \to 0} U(C) = \infty$$

es

$$\lim_{s \to 1} \hat{\mathcal{H}}'(s) = -\infty$$

y por tanto *existirá un* ϵ, $0 < \epsilon < 1$ *tal que si*

$$\epsilon \leqslant s < 1$$

es

$$\hat{\mathcal{H}}'(s) < 0$$

y por tanto $\hat{\mathcal{H}}$ decreciente en el intervalo $[\epsilon, 1]$ y no puede hacerse máxima en el punto $s = 1$.

No hemos aplicado ahora el teorema de Kuhn–Tucker por no admitir derivada lateral finita *la función* $\hat{\mathcal{H}}$ en $s = 1$. Por tanto, la decisión de ahorrar todo el producto en un instante dado, reduciendo el consumo global a cero no puede formar parte de ninguna trayectoria óptima, –con la excepción del caso trivial $K_T = \widetilde{K}(T)$ en que, como vimos en 3.3, aparece como *solución óptima cuando* $\psi_0(t) \equiv 0$, y que es inadmisible en términos económicos en cuanto que supondría un consumo global nulo de la población durante todo el periodo de planificación — por lo cual queda en lo sucesivo eliminada de nuestro estudio. De aquí en adelante podemos, pues, limitarnos a considerar las posibilidades.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = 0$$

y

$$s = 0$$

como determinantes de la función de control que fija en cada instante la trayectoria que satisface las condiciones necesarias de optimalidad del principio de Máximo.

Observemos que el factor esencial en la eliminación de una posible decisión de consumo nulo en una trayectoria óptima ha sido, como ya anunciamos en 2.2.5 la hipótesis

$$\lim_{C \to 0} U'(C) = \infty$$

que al hacer crecer muy rápidamente la utilidad para valores muy pequeños del consumo reduce consiguientemente la valoración del consumo nulo, descartándolo de -- toda posible trayectoria óptima.

Para los valores de t en los que el máximo de $\mathcal{H}$ se obtiene para un s interior al dominio la solución óptima deberá satisfacer necesariamente al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones diferenciales [3, 2] y [3, 4], y además la ecuación

$$-U'\,[(1-s)F(K)]\,F(K) + \psi F(K) = 0$$

obtenida aplicando a nuestra hamiltoniana la condición [3, 5], y que, para $K \neq 0$, es equivalente a la

$$\psi = U'\,[(1-s)\,F(K)] \qquad [3,\ 6]$$

Para los valores de t en los que el máximo de $\mathcal{H}$ se alcanza en $s = 0$ — instantes en los que la estrategia óptima aconseja consumir todo el producto obtenido— las condiciones necesarias de máximo consisten en el sistema formado — por las ecuaciones diferenciales [3, 2] y [3, 4] y la ecuación

$$s = 0$$

De estas dos posibilidades, la óptima, en cada instante, será aquella que haga mayor el valor de $\mathcal{H}$ juntamente con las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

En ambos casos, las funciones K (t), ψ (t) y s (t), que son las incógnitas de nuestro problema, han de satisfacer tres relaciones independientes — de las cuales dos son ecuaciones diferenciales, — y además, a las dos condiciones de contorno que son las especificaciones de los valores inicial y final de la trayectoria. Contamos, por tanto, con condiciones suficientes para localizar un número finito de trayectorias, posibles soluciones óptimas de nuestro problema. La determinación explícita de las funciones K (t), ψ (t) y s (t) a partir de las condiciones necesarias de óptimo no es viable, salvo en unos cuantos casos particulares especialmente sencillos ni tampoco es posible, en general, obtener la expresión de la variable de control solución del sistema en cada instante en función del valor de la correspondiente variable de estado, lo que daría lugar a un modelo con retroalimentación (feedback). Pero en capítulos posteriores veremos cómo la adaptación de un esquema discreto, y la aplicación de técnicas iterativas de cálculo mediante computadoras nos van a permitir obtener trayectorias númericas de acumulación de capital para formulaciones concretas de las funciones de producción y de utilidad. En este capítulo y en el próximo, nos limitaremos, pues a estudiar sobre el modelo contínuo las características esenciales de las trayectorias solución, dejando su determinación para la segunda parte de este trabajo.

Con el fin de obtener la máxima información posible sobre el comportamiento de las trayectorias óptimas en el modelo contínuo, es conveniente representarlas gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas en cuyo eje de abscisas se representan los valores de K, y en el de ordenadas, los de la variable auxiliar ψ. Este tipo de representación, en que se estudian las relaciones entre las variables K y ψ sin intervención explícita del tiempo da lugar a un diagrama de fase.

Vamos a ver en primer lugar que los dos casos con diferentes condiciones necesarias de máximo que hemos citado anteriormente – control óptimo para $s = 0$ o para $s \in]0, 1[$ – determinan una división del plano fase (plano K, ψ) en dos regiones, en cada una de las cuales las soluciones óptimas han de satisfacer una de las dos condiciones alternativas que maximizan la hamiltoniana. Estas regiones están separadas por una cierta curva que llamaremos curva separatriz.

Una de las dos regiones citadas está caracterizada por la condición

$$\psi = U' \left((1-s)\, F(K)\right)$$

y la otra se caracteriza por

$$s = 0$$

en la región en que

$$\psi \leqslant U' \; [F(K)]$$

El conjunto de los puntos del plano fase que satisfacen ambas condiciones son las soluciones del sistema determinado por ellas, y deberán verificar

$$\psi = U' \; [F(K)]$$

que es la ecuación de la curva separatriz. Esta curva está definida para todo valor positivo de K y es siempre positiva. Es decreciente, pues

$$\frac{d\psi}{dK} = U''\ (F(K))\quad F'(K) < 0$$

ya que, por hipótesis,

$$U''\ (C) < 0 \qquad \forall\ C > 0$$

$$F'\ (K) \geq 0 \qquad \forall\ K > 0$$

Por otra parte, como

$$\lim_{K \to 0^+} F(K) = 0$$

y además

$$\lim_{C \to 0^+} U'(C) = \infty$$

la *curva separatriz es asintótica* al semieje positivo de las ordenadas.

Es evidente que al crecer K, la curva se aproxima al semieje positivo de las abcisas, ya que

$$\lim_{K \to \infty} F(K) = \infty$$

y

$$\lim_{C \to \infty} U'(C) = 0$$

Por otra parte, la condición de concavidad estricta impuesta a la función de utilidad en este modelo nos asegura *que U' (C) es estrictamente creciente* para todo $C \geq 0$, con lo que la curva separatriz tiende asintóticamente al semieje positivo de abscisas. Es interesante observar que la hipótesis de concavidad estricta de U (C) para todo C elimina de este modelo la posibilidad de que exista un *nivel de saturación del consumo*, — el "bliss" del modelo de Ramsey(*) — alcanzado el cual, la cantidad de utilidad derivada del consumo no varía al aumentar éste, en cuyo caso la curva separatriz

(*) Frank. P. Ramsey "A Mathematical Theory of Saving" op. cit.

alcanzaría el eje de abscisas para el valor del capital que determinase una cantidad de producto igual al nivel de saturación del consumo, coincidiendo con el eje para todo capital mayor que el mencionado.

Resumiendo lo anteriormente estudiado, vemos que la curva tiene la forma representada en la figura 3–1. Y esta curva es, efectivamente, una separatriz de las dos regiones, pues la función U' (C) es decreciente, y, por tanto, tomará su valor más pequeño cuando el consumo sea el mayor posible. Pero para un nivel de

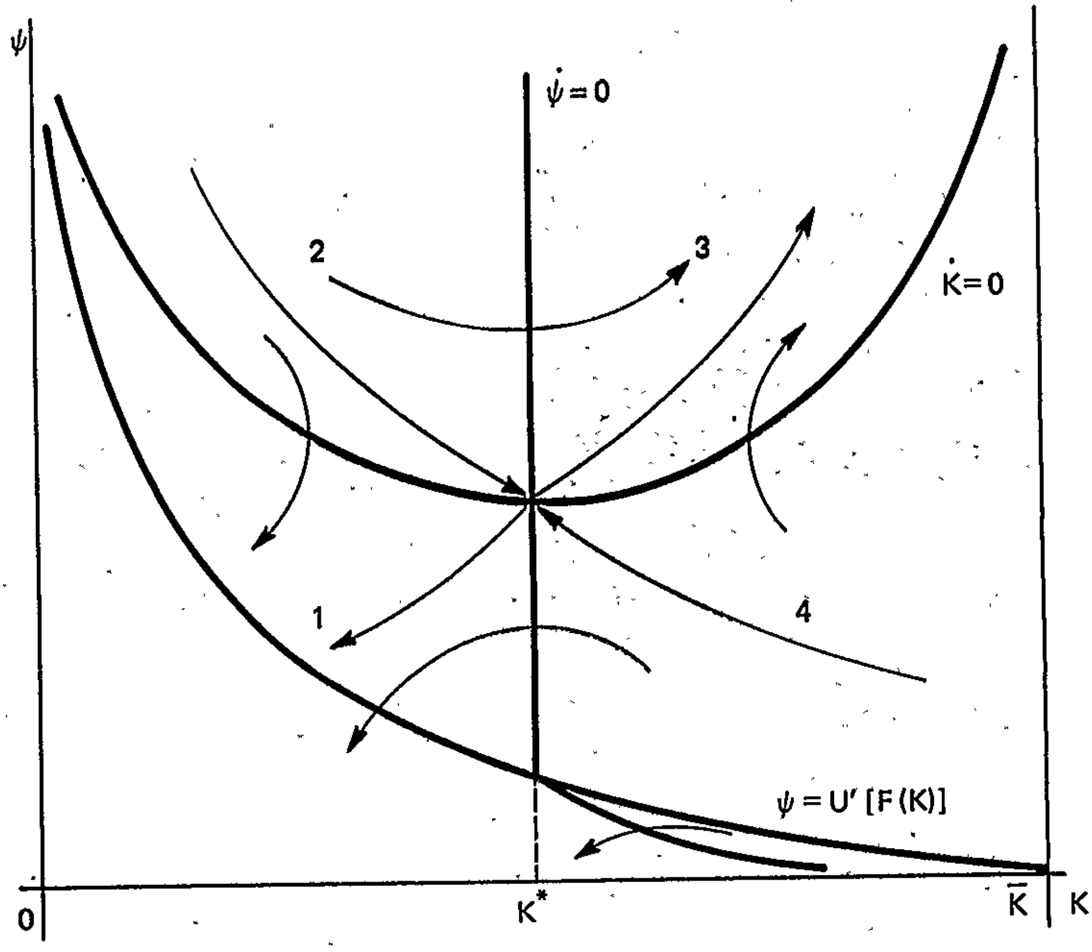

Figura 3–1

do, K, del stock de capital, el máximo consumo posible – dada nuestra hipótesis de irreversibilidad a posteriori del capital es F (K), de donde U' (F (K)) es el menor valor que puede tomar U' (C) para cada K. Por tanto, cualquier punto del plano fase que quede por debajo de la curva separatriz tiene unas coordenadas (K, ψ) tales que

$$\psi < U' \ (F\,(K))$$

con lo que no existe ningún valor admisible de s que verifique la igualdad.

$$\psi = U' \ ((1-s) \ F\,(K))$$

Por el contrario, los puntos del plano fase situados por encima de la curva separatriz tienen coordenadas (K, ψ) tales que

$$\psi > U' \ (F\,(K))$$

Pero U' ((1–s) F (K)) es, para cada valor de K, una función creciente y contínua de s, y tal que

$$\lim_{s \to 1} U' \ ((1-s)\,F\,(K)) = \lim_{C \to 0} U'\,(C) = \infty$$

de manera que fijado K, *para todo valor de* ψ *mayor que* U' (F (K)) podemos siempre encontrar un s tal que verifique la igualdad

$$\psi = U' \ [(1-s) \ F\,(K)]$$

y este valor de s será tanto más próximo a 1 cuanto mayor sea ψ.

El problema de la curva separatriz y de las diferentes condiciones necesarias de optimalidad en cada una de las dos regiones en que ésta divide al plano fase admite una interpretación económica del mayor interés, como vamos a ver seguidamente. Hemos dicho que la inversión en nuestro modelo consiste en la parte del producto que la sociedad decide sacrificar y detraer del consumo presente con vistas a un consumo futuro; éste sacrificio se medirá, naturalmente, en unidades de utilidad perdida al reducir el consumo. Para un nivel de consumo dado C, la derivada de la utilidad respecto al consumo, o utilidad marginal del mismo expresa precisamente lo que en términos económicos se viene interpretando como la pérdida de utilidad derivada de reducir el consumo en una unidad más. Por consiguiente $U'(C)$ representa el sacrificio derivado de aumentar la inversión en una unidad más, es decir, el precio de oferta o coste de oportunidad de la unidad de capital. Hemos visto en el anterior apartado que la función $\psi(t)$ se interpreta, en cambio, como el precio-sombra o valoración social de la unidad de capital medida en unidades de utilidad del consumo, o sea, el precio de demanda de la unidad de capital. Por consiguiente, la condición

$$\psi = U'[(1-s)\,F(K)] = U'[C]$$

expresa sencillamente que, en la región situada por encima de la separatríz, toda trayectoria óptima debe satisfacer la condición de que los precios de oferta y de demanda de la unidad de capital coincidan. Si el precio de oferta fuese inferior al de demanda, la igualdad – y, por tanto, la trayectoria óptima– se restablecerían disminuyendo el consumo. Si, por el contrario, fuese superior, la tendencia a igualar ambos precios implicaría un aumento de consumo.

Pero en nuestro modelo, el consumo tiene un techo, que es el producto. Si el precio de oferta supera al de demanda, el consumo puede aumentar hasta alcanzar su tope $C = F(K)$, correspondiente a $s = 0$. Pero si

$$\psi < U'(F(K))$$

es decir, si el precio de demanda es menor que el mínimo precio de oferta posible, la sociedad consumirá todo el producto, pese a lo cual la desigualdad subsiste. Por consiguiente, la curva separatriz representa la última posibilidad de igualar los precios de oferta y demanda de capital.

Observemos que no existe, en cambio, una frontera superior a esta posibilidad. La razón de esta asimetría es la misma que nos asegura la inexistencia de trayectorias óptimas con $s = 1$: la condición $\lim_{C \to 0^+} U'(C) = \infty$. Pues si el precio de oferta es inferior al de demanda, siempre se puede disminuir el consumo. *Claro que el consumo tiene también un suelo, que es el consumo nulo,* pero la condición anteriormente expresada nos garantiza la imposibilidad de que el precio de demanda supere al de oferta para niveles de consumo muy próximos a cero.

Si la citada hipótesis no existiera, de forma que $\lim_{C \to 0^+} U'(C) = \ell$, finito, el plano fase aparecería dividido en tres regiones distintas, en cada una de las cuales las condiciones necesarias de máximo según el principio de Pontryaqin estarían constituidas por las ecuaciones diferenciales [3, 2], y [3, 4], y además, una de las tres condiciones siguientes:

a) $s = 1$

b) $\psi(t) = U'[(1-s)\,F(K)]$

c) $s = 0$

Además de la curva separatriz $\psi = U'[F(K)]$ ya estudiada, existirá otra, límite entre la región caracterizada por la condición a) y la caracterizada por la b) y que tendría por ecuación

$$\psi = U'(0) = \ell$$

Ésta segunda separatriz es, por tanto, una recta paralela al eje de abscisas. Los pun tos que están por encima de ella tienen coordenadas (K, ψ) tales que $\psi > \ell$. Pero ℓ es el mayor valor posible de la función $U'[(1-s)\ F(K)]$ cuando $s \in [0, 1]$, luego en la región que está por encima de ésta separatriz, correspondiente a la condición $s = 1$, la sociedad destina a la inversión la mayor cantidad posible de bien, todo el producto, a pesar de lo cual el precio de demanda de la unidad de inversión sigue conservándose superior al de oferta. Por el contrario, en la región comprendida entre ambas separatrices –por encima de la $\psi = U'\ (F(K))$ y por debajo de la $\psi = \ell$– cualquier punto tiene coordenadas (K, ψ) tales que

$$U'\ (F(K)) \leqslant \psi \leqslant \ell$$

luego existe un valor de $s \in [0, 1]$ para el que los precios de oferta y demanda del capital se igualan, y éste es precisamente el control óptimo del sistema.

Volvamos ahora a nuestro problema, con hipótesis $\lim U'(C) = \infty$, y estudiemos las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que rigen las trayectorias óptimas. Por encima y en la separatriz, este sistema es el

$$\dot{K} = s\ F(K) - \delta\ K \qquad [3,\ 2]$$

$$\dot{\psi} = -U'[(1-s)\ F(K)](1-s)\ F'(K) + \psi(\delta - sF'(K)) \qquad [3,\ 4]$$

con la condición

$$\psi = U'[(1-s)\ F(K)] \qquad [3,\ 6]$$

con lo que eliminando la variable s, y aplicando la condición [3, 6] el sistema quedará normalizado de la forma

$$\dot{K} = F(K) - U'^{-1}(\psi) - \delta K$$

$$\dot{\psi} = \psi\ [\delta - F'(K)]$$

siendo $U'^{-1}(\psi)$ la función inversa de la U' (C). La continuidad y monotonicidad de la función de utilidad del consumo y sus condiciones en el límite nos aseguran la existencia y la continuidad de su función inversa para todo $\psi > 0$. Son también contínuas las soluciones del sistema, así como la derivada primera de la función de producción, en virtud de las hipótesis establecidas. Es evidente, por tanto, que el segundo miembro de cada una de las ecuaciones diferenciales es una función definida y contínua de las variables K y ψ en el recinto $K > 0$, $\psi > 0$.

Sus derivadas parciales

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} = F'(K) - \delta$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial \psi} = - \frac{1}{U'[U'^{-1}[\psi]]}$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial K} = - \psi F''(K)$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} = \delta - F'(K)$$

están también definidas y son evidentemente continuas en el recinto citado. La continuidad de las derivadas parciales sustituye a la condición de Lipschitz de forma que, juntamente con la existencia y continuidad del segundo miembro de ambas ecuaciones diferenciales normalizadas nos asegura la existencia y unicidad de solución por cada punto del recinto $K > 0$, $\psi > 0$ del plano fase. (*)

De la misma forma, el sistema que rige el comportamiento de las soluciones óptimas en y debajo de la curva separatriz es el mismo

(*) Véase, por ejemplo. Pontryagin "Ordinary Differential Equations" Addison–Wesley 1.962.

$$\dot{K} = s\ F\ (K) - \delta\ K$$

$$\dot{\psi} = -\ U'\ [\,(1-s)\ F\ (K)]\ (1-s)\ F'\ (K) + \psi[\delta - sF'(K)]$$

pero ahora con la condición

$$s\ =\ 0$$

con lo que, eliminando s, obtenemos el sistema normalizado de ecuaciones diferenciales

$$\dot{K} = -\ \delta\ K$$

$$\dot{\psi} = -\ U'\ [F\ (K)]\ \ F'\ (K)\ +\ \psi\ \delta$$

cuyos segundos miembros están también definidos y son contínuos para $K > 0$, $\psi > 0$. En cuanto a sus derivadas parciales

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} = -\ \delta$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial K} = -\ U''\,[F\ (K)]\ [F'\ (K)]^2 - U'\ [F\ (K)]\ \ F''\ (K)$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} = \delta$$

son también contínuas, por hipótesis, en el recinto mencionado. Por consiguiente, también existe una solución única a este sistema que pasa por cada punto del recinto.

Hemos visto, pues, que por los puntos del recinto situados encima de la separatriz pasa una solución única del sistema que determina las soluciones ópti — mas del problema en esos puntos. Por los puntos del recinto que están, debajo de la separatriz pasa también una solución única del sistema tratado en segundo término, que es el que determina sus consiguientes soluciones óptimas. En los puntos de la *curva separatriz* ambos sistemas coinciden —como facilmente se comprueba teniendo en cuenta $\dot{\psi} = U'[F(K)] - \gamma$, por consiguiente, sus soluciones. En resumen, podemos afirmar que por cada punto del recinto $K > 0$, $\psi > 0$ pasa *una* solución óptima y solo una.

Los puntos situados fuera de este recinto carecen de interés para nuestro problema, ya que anteriormente hemos visto que un stock de capital inicial $K_0 > 0$ condiciona $K(t) > 0$ para todo t, y, por otra parte, veremos más adelante que $\psi(t) > 0$ para toda solución óptima.

Al despejar la variable $s(t)$ en la condición [3, 6] obtenemos

$$s(t)=1-\frac{U'^{-1}(\psi)}{F(K)}$$

que, con las hipótesis adoptadas en nuestro modelo, nos garantiza la continuidad de $s(t)$ en todo punto de una *solución óptima situada por encima de la separatriz* y en el recinto $K > 0$ $\psi > 0$. Como, por debajo de la separatriz $s(t) = 0$, y en los puntos de ésta se verifica

$$F(K) = U'^{-1}(\psi)$$

resulta que, en una trayectoria óptima que cruce la separatriz en sentido descendente — el razonamiento sería similar si la cruzara en sentido ascendente— por un punto cualquiera (K_s, ψ_s) de ella en un instante t_s, ocurriría que $\lim\limits_{t \to t_s-} s(t)=0$

$$\lim_{t \to t_s +} s(t) = \lim_{t \to t_s +}\left(1-\frac{U'^{-1}(\psi(t))}{F(K(t))}\right) = 1 - \frac{U'^{-1}(\psi_s)}{F(K_s)} = 0$$

De todo lo cuàl se deduce que, en nuestro problema, la función $s(t)$ es contínua para toda trayectoria óptima contenida en el recinto indicado.

A lo largo de toda trayectoria óptima ocurre también que el valor de la función hamiltoniana permanece constante. Esta es una de las propiedades de las trayectorias solución del principio de máximo de Pontryagin aplicado a un problema de tiempo fijo en el caso particular en que tanto las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del sistema como la función objetivo sean autónomas. A esta conclusión, que será objeto de una interesante interpretación - económica en sucesivos apartados, podría haberse llegado facilmente en nuesto - problema concreto, cuando s (t) es derivable, sin más que estudiar la variación de la hamiltoniana en el tiempo cuando el sistema se mueve a lo largo de una trayectoria óptima, es decir, de una trayectoria tal que satisfaga en todo punto las condiciones necesarias de optimalidad.

Efectivamente, nuestra hamiltoniana es la

$$\mathcal{H}(t) = U\left[(1-s(t))\,F(K(t))\right] + \psi(t)\left[s(t)\,F(K(t)) - \delta K(t)\right]$$

Para estudiar su evolución en el tiempo calcularemos su derivada respecto a esta variable

$$\frac{d\,\mathcal{H}(t)}{dt} = U'((1-s(t))\,F(K(t))\,((1-s(t))\,F'(K(t))\,\dot{K}(t) - \dot{s}(t)\,F(K(t)) +$$

$$+\,\dot{\psi}(t)\,(F(K(t)) - \delta K(t)) + \psi(t)\,(\dot{s}(t)\,F(K(t)) + s(t)\,F'(K(t))\,\dot{K}(t) - \delta\dot{K}(t)$$

Los puntos de una trayectoria óptima situados sobre la curva separatriz o en la región que queda por encima de ella satisfacen, como hemos visto, la igualdad de precios de oferta y de demanda del capital

$$U'((1-s(t))\,F(K(t))) = \psi(t)$$

con lo que la derivada de la hamiltoniana respecto al tiempo toma en ellas la forma

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \psi(t)\,[\,(1-s(t)\,]\,F'(K(t))\,\dot{K}(t) - \dot{s}(t)\,F(K(t)) + \dot{s}(t)\,F(K(t)) +$$

$$+\, s(t)\,F'(K(t))\,\dot{K}(t) - \delta\,\dot{K}(t) + \dot{\psi}(t)\,[s(t)\,F(K(t)) - \delta\,K(t)\,] =$$

$$= \psi(t)\,[F'(K(t))\,\dot{K}(t) - \delta\,\dot{K}(t)] + \dot{\psi}(t)\,[s(t)\,F(K(t)) - \delta\,K(t)]$$

en la que las condiciones [3, 2] y [3, 4], necesarias en toda trayectoria óptima sustituidas convenientemente, nos dan

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \psi\,[F'(K) - \delta]\,\dot{K} + \dot{\psi}\,[\,s\,F(K) - \delta\,K] = 0$$

En los puntos que están estrictamente por debajo de la curva separatriz la condición necesaria de la igualdad de precios de oferta y demanda es sustituida por la de consumo total del producto, $s = 0$. Pero además, cada uno de estos puntos tiene un entorno en el plano fase formado todo él por puntos en los que también $s = 0$. Por tanto, en estos puntos, interiores a la región situada por debajo de la separatriz, la continuidad de la trayectoria óptima nos asegura que también es $\dot{s}(t) = 0$. La expresión de la derivada de la hamiltoniana, modificada por estas dos condiciones, resulta ser

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = U'\,[F(K(t))]\,[F'(K(t))\,\dot{K}(t)] - \dot{\psi}(t)\,\delta\,K(t) - \psi(t)\,\delta\,\dot{K}(t) =$$

$$= [U'[F(K)]\,F'(K) - \psi(t)\,\delta]\,\dot{K} - \dot{\psi}\,\delta\,K$$

Pero en esta región, las condiciones necesarias [3, 2] y [3, 4] son

$$\dot{K} = -\,\delta\,K$$

y

$$\dot{\psi} = -\,U'\,[F(K)]\,F'(K) + \psi\,\delta$$

que, sustituidas adecuadamente nos proporcionan el resultado

$$\dot{\mathcal{H}}\ (t) = 0$$

Con ello hemos visto que, en todo el recinto del plano fase en que $K > 0$ y $\psi > 0$ se verifica que la derivada de la hamiltoniana respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria óptima es nula. Lo que nos confirma que, efectivamente, el valor de la hamiltoniana se mantiene constante sobre cada trayectoria óptima.

3.5. La solución de equilibrio

Consideremos ahora nuevamente la región situada encima de la separatriz, es decir, aquella en que las condiciones necesarias que ha de cumplir una trayectoria óptima, segun el principio de Pontryagin son las [3, 2], [3,4] y [3, 6] anteriormente expresadas.

Vamos a tratar de encontrar un punto de coordenadas (K^*, ψ^*) tales que exista, para todo valor de T, una trayectoria que cumpla las condiciones necesarias de óptimo y verifique

$$K\ (t) = K^* \quad , \qquad \psi\ (t) = \psi^* \qquad t \in [0, T]$$

Si este punto existe, será un punto de equilibrio del sistema en el sentido de que, alcanzados esos valores del stock de capital y del precio sombra de éste, un comportamiento óptimo para cualquier intervalo de tiempo consistiría en mantener continuamente estos mismos valores. Hemos visto que mientras el sistema permanezca en la región situada por encima de la separatriz, podemos introducir una simplificación en las ecuaciones de las condiciones necesarias sustituyendo [3, 6] en [3, 4], con lo que ésta queda en la forma:

$$\dot{\psi} = \psi\ [\delta - F'\ (K)] \qquad [3, 7]$$

Evidentemente, el punto buscado será un punto singular del sistema autónomo formado por las ecuaciones diferenciales [3, 2] y [3, 7], es decir, una solución del sistema

$$s\ F(K) - \delta\ K = 0 \qquad [3,8]$$

$$\psi\ [\delta - F'(K)] = 0 \qquad [3,9]$$

que satisfaga además la condición

$$\psi = U'\ [(1-s)\ F(K)] \qquad [3,6]$$

De [3, 7] deducimos que K^* tiene que ser tal que

$$F'(K^*) = \delta \qquad [3,10]$$

pues la solución $\psi = 0$ no es compatible con la localización del punto por encima de la curva separatriz, donde $\psi = U'(C)$ pues $U'(C)$ es siempre positivo.

Nuestras hipótesis acerca de la función de producción nos aseguran la existencia de este valor K^*, ya que $F'(K)$ es una función contínua para $K \geqslant 0$, y tal que

$$\lim_{K \to 0} F'(K) = \infty \quad , \quad \lim_{K \to \infty} F'(K) = 0$$

y δ un número positivo. Por otra parte, la concavidad estricta de la función de producción para todo K no negativo nos asegura la unicidad de la solución.

Ahora las condiciones [3, 8] y [3, 6] nos determinan ψ^*. De [3, 8] obtenemos

$$s^* = \frac{\delta K^*}{F(K^*)} \qquad [3,11]$$

que es el valor del control que mantiene invariante el stock de capital en el punto fijado.

¿Existe tal control efectivamente? . Es decir, el control s^* que mantiene el stock de capital de equilibrio K^* invariante ¿es un control admisible? . Evidentemente, tanto el numerador como el denominador de la fracción [3, 11] son cantidades positivas, luego $s > 0$. Para que además $s < 1$ tendrá que ocurrir que el valor K^* haga

$$\delta K^* < F(K^*).$$

En el apartado 2 de este capítulo hemos probado la existencia de un valor $\tilde{K}$ único, máximo stock de capital sostenible, solución de la ecuación

$$F(K) - \delta K = 0.$$

Vimos también que si $K < \tilde{K}$ es

$$F(K) > \delta K$$

y si $K > \tilde{K}$ es

$$F(K) < \delta K$$

Por otra parte, en el punto $\tilde{K}$ ocurrirá que

$$F'(\tilde{K}) < \delta$$

como sabemos que para valores suficientemente próximos al origen es

$$F'(K) > \delta$$

y $F'(K)$ es decreciente, podemos asegurar que

$$0 < K^* < \tilde{K}$$

es decir, que el valor de equilibrio del stock de capital está por debajo del máximo sostenible, y por tanto será

$$F(K^*) > \delta K^*$$

lo que nos asegura la existencia de un control admisible que mantenga al sistema en su valor de equilibrio.

Ahora, a partir de las ecuaciones [3, 6] y [3, 8] obtendremos el precio sombra de equilibrio

$$\psi^* = U'[(1-s^*)\ F(K^*)] = U'[F(K^*)-\delta K^*]$$

De todo esto se deduce que una trayectoria que, durante un intervalo de tiempo cualquiera, T, mantenga fijos los valores de K^* y ψ^*, satisface las condiciones necesarias de máximo.

Nos preguntaríamos ahora si es posible la existencia de algún punto de equilibrio por debajo de la curva separatriz. Si existiera, tendría que ser solución del sistema formado por las ecuaciones

$$s\,F(K) - \delta K = 0$$

$$-U'[(1-s)\ F(K)]\ (1-s)\ F'(K) + \psi\ [\delta - s\,F'(K)]=0$$

y

$$s = 0$$

De las ecuaciones, primera y tercera, obtenemos como única solución $K = 0$. Tal solución determinaría un proceso económico estabilizado en un nivel de capital constantemente igual a 0, por lo que carece de interés su consideración.

Vamos a estudiar el caracter del único punto singular del sistema. Hemos obtenido anteriormente que la expresión del sistema óptimo en forma normal, para los puntos situados encima de la separatriz es la

$$\dot{K} = F(K) - U'^{-1}(\psi) - \delta K$$

$$\dot{\psi} = \psi\ [\delta - F'(K)]$$

que, como vemos, no es lineal. Para obtener la caracterización del punto singular tomaremos, como es costumbre, el sistema lineal asociado al dado en un entorno del punto (ψ^*, K^*), que será el

$$\dot{K} = \frac{\partial \dot{K}}{\partial K}(K^*, \psi^*)(K - K^*) + \frac{\partial \dot{K}}{\partial \psi}(K^*, \psi^*)[\psi - \psi^*]$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial K}(K^*, \psi^*)(K - K^*) + \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi}(K^*, \psi^*)[\psi - \psi^*]$$

llamando, por simplificar la notación, $\dot{K}$ y $\dot{\psi}$ a las funciones de K y ψ determinados por los segundos miembros de las ecuaciones diferenciales del sistema en forma normal. Y ahora

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}(K^*, \psi^*) = F'(K^*) - \delta = 0$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial \psi}(K^*, \psi^*) = -\frac{1}{U''[U'^{-1}(\psi^*)]} = -\frac{1}{U''[F(K^*) - \delta K^*]}$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial K}(K^*, \psi^*) = -\psi^* F''(K^*) = -U'[F(K^*) - \delta K^*)F''(K^*)$$

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} = \delta - F'(K^*) = 0$$

Con lo que la ecuación característica asociada al punto singular es la

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{1}{U''[F(K^*)-\delta K^*]} \\ -U'[F(K^*)-\delta K^*]F''(K^*) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir, la

$$\lambda^2 - \frac{U'[F(K^*)-\delta K^*]F''(K^*)}{U''[F(K^*)-\delta K^*]} = 0$$

en la que los signos adjudicados, por hipótesis, a las derivadas sucesivas de las funciones de producción y utilidad nos aseguran que el signo del término independiente es negativo. Lo será también, por tanto, el producto de las dos raices de la ecuación característica, lo que nos indica que éstas tienen signos diferentes y que, en consecuencia, nuestro punto singular es un punto de ensilladura y, por tanto, de equilibrio inestable a excepción de su rama de estabilidad. (*)

El estacionamiento de la economía en el punto singular (K^*, ψ^*) determinaría una trayectoria de crecimiento nulo, en la que las variables fundamentales del sistema — stock de capital, producto, consumo, inversión bruta e inversión neta — permanecerían, al igual que la población, constantes durante todo el periodo de planificación. Y este estacionamiento se consigue sin más que aplicar al sistema económico, que se encuentra ya inicialmente en la situación $K_0 = K^*$, un valor adecuado de la relación ahorro–producto, el

$$s^* = \frac{\delta K^*}{F(K^*)}$$

Si el valor del stock de capital inicial, K_0, es diferente del determinado por el pun-

(*) Véase, por ejemplo W. Hurewicz "Lectures on Ordinary Differential Equations", M.I.T. Press, 1.958.

to singular, e inferior al máximo nivel de capital mantenible, $\tilde{K}$ también es posible determinar para el sistema económico una trayectoria que deje constantes las mencionadas variables fundamentales. Basta para ello encontrar el valor de s que haga

$$\dot{K} = s\,F\,(K_0) - \delta\,K_0 = 0$$

es decir el.

$$s = \frac{\delta\,K_0}{F\,(K_0)}$$

que también es constante a lo largo de todo el periodo. Sin embargo, existe, entre estas dos trayectorias de crecimiento nulo, una diferencia fundamental: la que permanece constantemente en el punto de equilibrio satisface las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin para las condiciones de contorno

$$K\,(0) = K^* \quad , \qquad K\,(T) = K^*$$

en tanto que la que mantiene su stock de capital fijo en un valor diferente del de equilibrio no es solución de las citadas condiciones necesarias para las condiciones de contorno

$$K\,(0) = K_0 \quad , \qquad K\,(T) = K_0$$

y queda, por tanto, descartada como trayectoria óptima.

Esta conclusión parece indicarnos que, en el supuesto de que una economía pudiese elegir libremente su stock de capital inicial —supuesto con escasos visos de realidad, y que convierte todo este razonamiento en una mera disquisición teórica, o sea, lo que en el lenguaje adoptado por los economistas del crecimiento se ha venido llamando un "gedanken Experiment"— y decidiese mantener constante durante todo el periodo el stock de capital y las demás variables fundamentales del sistema anteriormente enunciadas, su elección óptima consistiría en situarse precisamente en el punto singular, con un capital inicial $K(0) = K^*$. Y efectivamente, este es el caso, puesto que, como vamos a ver seguidamente, la trayectoria óptima que permanece en el punto singular durante todo el periodo de planificación es, de entre todas las que mantienen fijo el stock de capital — para lo cual han de mantener constante el valor de la relación ahorro–producto y, por tanto, el consumo y las demás variables fundamentales citadas — aquella que determina en cada instante un mayor volumen de consumo.

Determinemos, en efecto, cuál es el valor del stock de capital que hace máximo el consumo global de la economía

$$C = (1-s)\ F\ (K)$$

cuando ambas variables permanecen constantes en el tiempo, y, por tanto

$$\dot{K} = s\ F\ (K) - \delta\ K = 0$$

En estas particulares circunstancias el consumo global resulta ser

$$C = F\ (K) - s\ F\ (K) = F\ (K) - \delta K$$

cuya primera derivada respecto de K es

$$\frac{dC}{dK} = F'\ (K) - \delta$$

y la segunda

$$\frac{d^2C}{dK^2} = F''\ (K)$$

El valor del stock de capital que anula la primera derivada es el que hace

$$F'(K) = \delta$$

que es precisamente el stock de capital K^* correspondiente al punto singular. Esta solución hace negativa la segunda derivada pues, según nuestras hipótesis de concavidad de la función de producción será

$$F''(K^*) < 0$$

con lo que queda demostrado que el stock de capital determinado por el punto singular del sistema es un máximo relativo de la función consumo. Y es también un máximo absoluto, pues es el único máximo relativo del compacto $[0, \tilde{K}]$ — que es el conjunto de los niveles de stock de capital indefinidamente mantenibles — en cuyos bordes

$$C(0) = 0 < C(K^*)$$

y

$$C(\tilde{K}) = F(\tilde{K}) - \delta \tilde{K} = 0 < C(K^*)$$

Así pues, el stock de capital K^* tiene la propiedad de ser aquel que produce la utilidad total máxima entre todos los posibles cuando la economía decide estabilizarse en valores constantes de capital y consumo, y es, por tanto el que determina el máximo valor del consumo global mantenible indefinidamente.

La trayectoria con valores constantes de las variables económicas fundamentales determinada por el punto singular (K^*, ψ^*) tiene también otra interesante propiedad que pasamos a exponer a continuación. Hemos visto que toda trayectoria con stock de capital constante determinada por cualquier valor inicial de stock de capital inferior al mantenible indefinidamente, viene determinada por un valor constante de la relación ahorro—producto

$$s = \frac{\delta K_0}{F(K_0)},$$

lo que hace que sea también constante la cantidad de producto destinada a la inversión, o inversión bruta $s\,F(K_0) = \delta\,K_0$. En el caso concreto en que el stock de capital inicial resulta ser precisamente el del punto singular, K^*, la cantidad constante *del producto destinada a la inversión bruta será*

$$s\,F\,(K^*) = \delta\,K^*$$

Pero el stock de capital del punto singular es precisamente la solución única de la *ecuación*

$$F'(K^*) = \delta$$

luego, en este caso, la inversión bruta en cada instante resulta ser

$$s\,F\,(K^*) = \delta\,K^* = K^*\,F'(K^*)$$

es decir, el producto del volumen del stock de capital por la productividad marginal del mismo a ese nivel, o sea, la parte del producto que se destinaría a la retribución del *factor capital si ambos factores productivos fueran retribuidos según sus respectivas productividades marginales*. En resumen, la trayectoria constante determinada por un capital inicial igual al del punto de equilibrio tiene la propiedad de que la cantidad de producto destinada a la inversión es precisamente igual a la percibida como remuneración al capital cuando los factores son retribuidos de acuerdo con *sus productividades marginales — y, por tanto, siendo la función de producción ho*mogenea de grado uno, la cantidad de producto destinada al consumo será igual a la correspondiente a la retribución del factor trabajo—. Naturalmente esto no significa en modo alguno que, a lo largo de esta trayectoria los trabajadores consuman toda su renta y los capitalistas inviertan toda la suya, sino simplemente que la suma del ahorro de trabajadores y *empresarios será igual a* la retribución del capital, y el consumo global igualará a la retribución del trabajo.

Es también interesante la consideración, del punto singular no solamente como posible trayectoria óptima para las condiciones de contorno $K(0) = K^*$, $K(T) = K^*$ sino también como punto central de referencia en torno al cual evolucionan las demás trayectorias solución de las condiciones necesarias, como vamos a ver seguidamente.

3.6. Las trayectorias óptimas

El punto de equilibrio viene determinado por la intersección de dos curvas: la formada por el conjunto de los puntos tales que $\dot{\psi} = 0$, de manera que una trayectoria óptima, al pasar por ellos, hace estacionario el valor de la función ψ, y la formada por los puntos que hacen $\dot{K} = 0$ y que, por tanto, hacen la K también estacionaria, ambos resultados obtenidos suponiendo que la igualdad entre los precios de oferta y demanda del capital se cumple. En el punto de equilibrio se cumplen las dos condiciones simultaneamente, de manera que una trayectoria óptima que coincidiera en un instante con el punto de equilibrio permanecería indefinidamente en él.

La curva $\dot{\psi} = 0$ está formada por el conjunto de los puntos que verifican $\dot{\psi} = 0$ que en la región situada por encima de la curva separatriz equivale a $\psi(\delta - F'(K)) = 0$ y como es $\psi > 0$ se tiene finalmente

$$F'(K) = \delta$$

Pero acabamos de ver que esta ecuación tiene una solución única, K^*, luego la curva $\dot{\psi} = 0$ resulta ser una semirecta, de ecuación

$$K = K^*$$

por encima de la curva separatriz.

Los puntos de la curva $\dot{K} = 0$ deberán satisfacer la relación

$$s\,F(K) = \delta\,K$$

que, juntamente con la condición de igualdad entre los precios de oferta y demanda del capital, nos da

$$\psi = U'[F(K) - \delta K]$$

que es la ecuación de la curva $\dot{K} = 0$. Esta curva está situada estrictamente por encima de la separatriz para todo valor positivo de K. Su derivada

$$\frac{d\psi}{dK} = U''\,(F(K) - \delta K)\,(F'(K) - \delta)$$

será negativa para los valores de K que hagan $F'(K) - \delta > 0$, es decir para todo $K < K^*$, y positiva para los $K > K^*$. Por consiguiente la función decrece, alcanza un mínimo en el punto $K = K^*$, precisamente en su punto de intersección con la $\dot{\psi} = 0$, o punto de equilibrio, y luego crece. Su valor se hace muy grande en las proximidades del origen de coordenadas pues

$$\lim_{K \to 0^+} U'[F(K) - \delta K] = \infty$$

Para valores de K mayores que el capital máximo sostenible $\tilde{K}$, no está definida ésta curva, pues la función $U'(C)$ lo está solamente para valores no negativos de C. Al aproximarse a $\tilde{K}$ por la izquierda, crece indefinidamente, ya que

$$\lim_{K \to \tilde{K}^-} F(K) - \delta K = 0$$

de donde

$$\lim_{K \to \tilde{K}^-} U'[F(K) - \delta K] = \infty$$

En el caso en que no se admitiese la condición $\lim_{C \to 0} U'(C) = \infty$, es decir, cuando $\lim_{C \to 0} U'(C) = \ell$, serían válidas todas las conclusiones obtenidas, con la sola diferencia de que la curva $\dot{K} = 0$ cortaría a las rectas $K = 0$ y $K = \tilde{K}$ en puntos $(0, \ell)$ y $(\tilde{K}, \ell)$ de coordenadas finitas.

Hemos visto que la curva $\dot{K} = 0$ está siempre por encima de la separatriz. No así la $\dot{\psi} = 0$, que la corta en el punto $(K^*, U'(F(K^*))$. Por debajo de la separatriz, es decir, en la región en que la igualdad de los precios de oferta y demanda del capital no se cumple, siendo sustituida por la condición $s = 0$, la curva $\dot{\psi} = 0$ continúa, siendo su ecuación

$$-U'[(1-s)F(K)](1-s)F'(K) + \psi[\delta - sF'(K)] = 0$$

con $s = o$, es decir

$$\psi = \frac{U'[F(K)]\,F'(K)}{\delta}$$

Esta curva pasa también por el punto $(K^*, U'(F(K^*)))$, como puede comprobarse, teniendo en cuenta que $F'(K^*) = \delta$, y, por tanto, enlaza con la curva $\dot{\psi} = 0$ situada por encima de la separatriz. Pero ya no es una recta. Es una curva decreciente

$$\frac{d\psi}{dK} = \frac{U''(F(K))\,(F'(K))^2 + U'(F(K))F''(K)}{\delta} < 0$$

y siempre estrictamente positiva, y, por tanto, asintótica al semieje positivo de abcisas.

En resumen, las curvas $\dot{K} = 0$ y $\dot{\psi} = 0$ tienen la forma representada en la figura 3–1. Como se ve, ambas dividen la región del plano fase situada entre las rectas $K = 0$ y $K = \tilde{K}$ y por encima de la $\psi = 0$ – es decir el conjunto de los puntos (K, ψ) del plano fase tales que $K > 0$, $K < \tilde{K}$, $\psi > 0$ – en cuatro regiones, en cada una de las cuales se conservan constantes los signos de $\dot{K}$ y $\dot{\psi}$, circunstancia que vamos a aprovechar para estudiar el comportamiento de las posibles trayectorias óptimas.

Consideremos primeramente la parte de esta región situada por encima de la curva separatriz. La semirrecta $K = K^*$, o curva $\dot{\psi} = 0$ la separa en dos zonas : aquella cuyos puntos hacen $\dot{\psi} > 0$ en la ecuación diferencial [3, 7], y la de los que hacen $\dot{\psi} < 0$. Ahora bien, como la derivada de la función de producción es decreciente respecto a K, la ecuación diferencial [3,7] nos indica claramente que, para cada valor de ψ, los valores de K tales que $K > K^*$ hacen $\dot{\psi} > 0$, y los $K < K^*$ hacen $\dot{\psi} < 0$. Luego la zona $\dot{\psi} > 0$ está a la derecha de la recta $\dot{\psi} = 0$, y la $\dot{\psi} < 0$, a su izquierda.

Por debajo de la separatriz, la correspondiente condición necesaria de máximo pasa a ser la

$$\dot{\psi} = -\,U'[F(K)]\,F'(K) + \psi\,\delta \qquad [3,12]$$

en la que vemos que, para cada valor de K, los valores de ψ que están por encima de la curva $\dot{\psi} = 0$ hacen $\dot{\psi} > 0$ en tanto que los menores a sus correspondientes en la curva $\dot{\psi} = 0$ hacen $\dot{\psi} < 0$. Vemos por tanto que la disposición de los signos de $\dot{\psi}$ a ambos lados de la semirrecta $K = K^*$ se continúa por debajo de la curva separatriz a los dos lados de la curva

$$\psi = \frac{-U'[F(K)]\,F'(K)}{\delta}$$

En cuanto a la curva $\dot{K} = 0$, también separa el recinto dado en dos zonas, en cada una de las cuales el segundo miembro de la ecuación diferencial [3, 2], – y, por tanto, $\dot{K}$–, toman signos opuestos. Un procedimiento para determinar el signo que corresponde a cada zona sería, por ejemplo, expresar $\dot{K}$ en función solamente de las variables K y ψ con la cual como vimos, se obtiene la expresión

$$\dot{K} = F(K) - U'^{-1}(\psi) - \delta K \qquad [3,13]$$

Como la función $U'(C)$ es decreciente, lo será también su inversa. Por consiguiente vemos que, para cada valor de K, los valores de ψ mayores que los correspondientes de la curva $\dot{K} = 0$ hacen $\dot{K} > 0$, en tanto que los inferiores hacen $\dot{K} < 0$. Luego la zona en que $\dot{K} > 0$ es la que está por encima de la curva $\dot{K} = 0$, mientras que la $\dot{K} < 0$ es la que queda por debajo de esta curva.

Con esto tenemos perfectamente caracterizadas las cuatro zonas en que las curvas $\dot{K} = 0$ y $\dot{\psi} = 0$ dividen a la región citada. Por debajo de $\dot{K} = 0$ y a la izquierda de $\dot{\psi} = 0$ – zona señalada en la figura con el número 1 – es $\dot{K} < 0$ y $\dot{\psi} < 0$. La zona señalada con el número 2, que es la situada por encima de $\dot{K} = 0$ y a la izquierda de $\dot{\psi} = 0$ se caracteriza por tener $\dot{K} > 0$ y $\dot{\psi} < 0$. La zona número 3, a la derecha de $\dot{\psi} = 0$ y por encima de $\dot{K} = 0$, tendrá $\dot{K} > 0$ y $\dot{\psi} > 0$. Por último, también a la derecha de $\dot{\psi} = 0$ pero por debajo de $\dot{K} = 0$ está la zona número 4, en la que $\dot{K} < 0$ y $\dot{\psi} > 0$.

Con estos datos podemos reconstruir *aproximadamente* la evolución de las distintas trayectorias óptimas. Así, por ejemplo, supongamos que el sistema se encuentra inicialmente en algún punto de la zona 1; los signos de $\dot{\psi}$ y $\dot{K}$ en esta zona nos indican que una trayectoria óptima evolucionará necesariamente reduciendo los valores del stock de capital y de su precio sombra. Por consiguiente, — una trayectoria óptima que, en un instante dado se encuentre en la zona 1, no puede pasar a la zona 4 — para lo que tendría que incrementar su stock de capital— ni a la zona 2 — para lo cual debería aumentar el precio sombra del stock de capital, ni mucho menos a la zona 3 — lo que supondría "atravesar" el punto singular del sistema—. *Por consiguiente*, y teniendo en cuenta que, como veremos más adelante una trayectoria óptima va necesariamente acompañada de precios sombra no negativos, resulta que en cuanto alguna trayectoria óptima entra en la zona 1, permanece indefinidamente en ella.

Veamos ahora qué le ocurrirá a una trayectoria óptima que se encuentre en un instante dado en la zona número 2. Evidentemente, y dadas las características de la zona, tenderá a aumentar su capital y reducir el *precio sombra del mismo*, *lo que determina* una trayectoria decreciente en el sentido positivo del eje de abscisas, y que, por consigueinte, tiende a salirse de esta zona. Si lo hace cortando a la recta $\dot{\psi} = 0$, pasa a la zona 3, en la que $\dot{K} > 0$ y $\dot{\psi} > 0$; por consiguiente, el stock de capital continuará creciendo y el precio sombra del mismo, después de alcanzar un valor *estacionario — en el punto de* intersección con $\dot{\psi} = 0$ — crecerá con K. Si, en cambio, al salir de la zona 2 corta a la curva $\dot{K} = 0$ pasa a la zona 1, ya estudiada, y, por tanto, la trayectoria continuará reduciendo el precio sombra del capital, pero el stock de capital, tras atravesar un punto en que su crecimiento se detiene, empezará a decrecer. *Vamos a ver a continuación* que estos dos grupos de trayectorias — las que pasan de la zona 2 a la 3 y las que pasan de las zona 2 a la 1 — están separadas por una trayectoria que, en su avance en el sentido — de la zona 2 se desplaza a lo largo de una curva que se aproxima asintóticamente al punto de equilibrio del sistema.

Para cada punto del plano fase, la pendiente de la trayectoria óptima que pasa por él vendrá dada por $\frac{d\psi}{dK}$ que será, por encima de la separatriz

$$\frac{d\psi}{dK} = \frac{\psi\,[\delta - F'(K)]}{F(K) - \delta K - U'^{-1}(\psi)}$$

y por debajo

$$\frac{d\psi}{dK} = \frac{-U'[F(K)]F'(K) + \psi\delta}{-\delta K}$$

Esta pendiente existe y, es finita para todo punto interior al rectángulo infinito limitado por las rectas $K = 0$, $K = \tilde{K}$ y $\psi = 0$ con excepción de los situados en la curva $\dot{K} = 0$ y aun para estos podemos suponer una pendiente "infinita" o mejor de $\frac{dK}{d\psi} = 0$, si exceptuamos el punto singular (K^*, ψ^*). Ninguna de las trayectorias optimas que corten a la semirrecta $\dot{\psi} = 0$ por encima del punto de equilibrio puede tener ningún punto común con la curva $\dot{K} = 0$, pues si lo tuviera, debería atravesar dicha curva con una pendiente superior a la de ella. Pero hemos visto al estudiar la curva $\dot{K} = 0$ que su pendiente es finita en todo punto del recinto indicado, mientras que la pendiente de una trayectoria óptima en un punto de la curva $\dot{K} = 0$ situado a la izquierda de K^* ha de ser infinita y con signo negativo. Por consiguiente, las trayectorias óptimas que cruzan la semirrecta $\dot{\psi} = 0$ por encima de ψ^* no pasan por la $\dot{K} = 0$. Tomando, para cada valor $K < K^*$ el ínfimo de los valores de ψ tales que las trayectorias óptimas que pasen por (K, ψ) corten a $\dot{\psi} = 0$ por encima de ψ^*, obtendríamos una trayectoria que satisface también las condiciones necesarias de optimalidad y que se acerca indefinidamente el punto de equilibrio. (*) Esta trayectoria separa las que pasen de la zona 2 a la 3 de las que van a terminar a la zona 1.

(*) Véase "Applications of Control Theory to Economic Growth", de Kenneth J. Arrow, en Mathematics of the Social Sciences, Vol 2, op — cit.

Las trayectorias que pasan por la zona 3 evolucionan sobre ella en el sentido de un crecimiento del capital y de su precio sombra. Con un razonamiento similar al expuesto en el párrafo anterior se vería que, una vez que la trayectoria se encuentre en la zona 3, no puede cruzar la curva $\dot{K} = 0$ para pasar a la 4. De ésto, y de las condiciones $\dot{K} > 0$ y $\dot{\psi} > 0$ que la caracterizan, vemos que a la zona 3 le ocurre lo mismo que a la 1: una vez que la trayectoria óptima entra en ella, no puede nunca pasar a ninguna de las otras tres zonas.

Más aún: una trayectoria óptima que entre en la zona 3, permanece indefinidamente en ella pues, no pudiendo pasar a ninguna de las otras, su única posibilidad de escape sería atravesar el valor máximo sostenible del capital $\tilde{K}$. Pero ésto es imposible, pues, según lo visto en el apartado 3.2, el valor $\tilde{K}$ es asintótico a la trayectoria de más rápido crecimiento de capital, y, por consiguiente, no podrá ser alcanzado por ninguna trayectoria admisible que pase por algún $K < \tilde{K}$.

Las trayectorias, en la zona 4, se desplazan en el sentido de disminución del stock de capital y aumento de su precio sombra. En su desplazamiento pueden encontrar la curva $\dot{K} = 0$ con lo que, tras un instante en que el stock de capital permanece estacionario, pasan a la zona 3 en la que este crece juntamente con su precio sombra. Pero también puede suceder que encuentren a la curva $\dot{\psi} = 0$, y en este caso, pasan por un instante en que el precio sombra del capital es estacionario, y a partir de este momento comienza a disminuir juntamente con el capital, como corresponde a la evolución característica de las trayectorias óptimas en la zona 1. El mismo razonamiento empleado en el análisis de la zona 2 puede emplearse aquí para comprobar que ninguna trayectoria óptima de la zona 4 que corte la curva $\dot{\psi} = 0$ por debajo del punto de equilibrio puede tener puntos en común con la $\dot{K} = 0$, y que la trayectoria determinada tomando, para cada $K > K^*$ el supremo de los ψ tales que la trayectoria óptima que pase por (K, ψ) corte a $\dot{\psi} = 0$ por debajo de ψ^* es una trayectoria óptima que termina en el punto de equilibrio y que separa las trayectorias que pasan de la zona 4 a la 3 de las que pasan de aquella a la 1.

Con estos datos, se puede reconstruir en el plano fase la marcha general de las trayectorias óptimas. Examinando la figura se observa que las zonas 1 y 3 son focos de atracción de trayectorias, mientras que las 2 y 4 tienden a expulsar-las fuera de sí, con la excepción de las dos trayectorias especiales que tienden al *punto de equilibrio y que van a jugar un papel muy importante en el estudio del* crecimiento óptimo con horizonte de planificación infinito. Estas dos trayectorias óptimas se llaman las "brazos estables" del punto de equilibrio para distinguirlas de las trayectorias solución del sistema de condiciones necesarias que parten de las proximidades inmediatas del punto singular para adentrarse una de ellas en la zona 1; sirviendo de separatriz entre las trayectorias óptimas que entran en la zona 1 procedentes de la 2 y las que proceden de la 4, y, la otra, en la zona 3, donde separa también *las trayectorias que proceden de las zonas* 2 y 4. (*) *Las razones* de esta denominación son evidentes: la tendencia óptima de un sistema que se encuentre en un punto cualquiera de los brazos estables es la de aproximarse al punto de equilibrio en tanto que. si está en algún punto de los brazos inestables tenderá a evolucionar alejándose del él. La existencia de las trayectorias estables e inestables viene garantizada, en nuestro problema, por la ya estudiada estructura en punto de silla de la singularidad del sistema.

Señalada anteriormente la inexistencia de trayectorias óptimas a la izquierda de la recta $K = 0$ y por debajo de la $\psi = 0$, solo nos falta, para completar el estudio de la totalidad del plano fase analizar las posibilidades de existencia de trayectorias óptimas a la derecha de la recta $K = \tilde{K}$. Hemos visto que esta recta constituye una barrera inalcanzable para las trayectorias cuyo stock de capital inicial sea *inferior al máximo sostenible.* Las posibles trayectorias óptimas situadas a la derecha de éste deberán, por tanto, originarse con capitales iniciales superiores a él. Y como en todo el semiplano correspondiente las variaciones del capital y de su precio sombra se producen con los mismos signos que en las zonas números 1 y 4 estudiadas, resultará que toda trayectoria óptima originada en él evolucionará reduciendo el stock

(*) Estas otras dos trayectorias óptimas o "brazos inestables" del punto singular se analizan con más detalle por K. Arrow en "Applications of Control Theory to Economic Growth", op cit.

de capital y aumentando su precio social de demanda mientras se mantenga por encima de la separatriz. Pero en el apartado 3.2 hemos visto que la recta $K = \tilde{K}$ es barrera de trayectorias a ambos lados, de manera que las trayectorias más rápidas en aumentar un capital inicial menor que $\tilde{K}$, o en disminuir un capital inicial mayor que $\tilde{K}$, solo se acercan a ella asintóticamente. Por consiguiente, las trayectorias óptimas que empiezan con valores de K mayores que $\tilde{K}$ permanecen siempre a la derecha de la recta $K = \tilde{K}$ sin penetrar en ninguna de las cuatro zonas anteriormente estudiadas.

Es interesante observar que en el estudio elemental de la evolución de las trayectorias realizado hasta ahora no es preciso establecer distinciones entre las dos regiones en que la separatriz divide al plano fase, puesto que tanto en cada una de las dos zonas inferiores como en *el semiplano* $K > \tilde{K}$ *los signos de* $\dot{K}$ y $\dot{\psi}$ son los mismos a ambos lados de la curva $\psi = U' [F (K)]$.

Pero no solamente los signos de $\dot{K}$ y $\dot{\psi}$ interesan en nuestro estudio. *Sus valores absolutos nos dan una* idea de la mayor o menor velocidad de crecimiento o decrecimiento de K y ψ a lo largo de las distintas trayectorias óptimas que aparecen en el plano fase, lo que nos permite superponer al estudio de estas trayectorias realizado hasta ahora con total independencia de la variable tiempo, un análisis más detallado de caracter temporal.

Por encima de la curva separatriz la velocidad de crecimiento del capital viene dada por la relación [3, 13], de la que facilmente deducimos que, siendo

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial \psi} = - \frac{1}{U''[U'^{-1}(\psi)]} > 0$$

en las zonas 2 y 3 (en las que $\dot{K} > 0$) el crecimiento del stock de capital se acelera con un aumento de su precio sombra, mientras que en las zonas 1 y 4 ($\dot{K}<0$) un incremento del precio sombra del capital reduce la velocidad de decrecmiento del stock. – Como ya vimos al estudiar el significado económico del punto singular, la función $\dot{F}(K) - \delta K$, positiva en el intervalo $0 < K < \tilde{K}$, alcanza su valor máximo precisamente en K^*. Habida cuenta de que

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} = F'(K) - \delta$$

es

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} > 0 \quad \text{para} \quad K < K^*$$

y

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} < 0 \quad \text{para} \quad K > K^*$$

de donde resulta que las *consecuencias de un* incremento del stock de capital *son* las *siguientes:* reduce la velocidad de decrecimiento del mismo en la zona 1, aumenta la velocidad de su crecimiento en la zona 2, disminuye su velocidad de crecimiento en la 3 y aumenta la velocidad de decrecimiento en la 4. Si, en particular, fijamos en el plano fase un valor cualquiera del capital, la ecuación [3, 13] nos dice que, dadas dos trayectorias óptimas que *estando situadas* por encima de *la separatriz alcancen ese nivel* de capital, el crecimiento del stock de capital será más rápido –o el decrecimiento más lento–, en la trayectoria que, para el valor de K fijado, tenga un mayor ψ y, por tanto, una menor proporción relativa destinada al consumo, – ya que de [3, 6] se deduce

$$1 - s = \frac{U'^{-1}(\psi)}{F(K)}$$

Todo esto equivale a decir, en términos económicos, que, para un stock de capital dado, su velocidad de crecimiento según las normas del comportamiento óptimo depende del precio del mismo en unidades de consumo. En párrafos anteriores vimos que, de acuerdo con estas mismas *normas*, el stock de capital decrecerá *si su precio es inferior al* determinado por el valor de K en la curva $\dot{K} = 0$, y crecerá si es superior – el precio ψ tal que

$$\psi = U'[F(K) - \delta K]$$

para el stock de capital existente, es, por consiguiente, la valoración social de la unidad de capital a la cual resulta indiferente convertir la última unidad de producto en consumo o en capital–. Ahora podemos decir, además que el crecimiento del capital será tanto más rápido – o su decrecimiento, más lento– es decir, que la sociedad está tanto más dispuesta a un mayor sacrificio de consumo cuanto mayor sea el precio sombra del capital, o valoración que esta misma sociedad hace de él, medida en términos de consumo.

Ahora bien, si el precio sombra del capital es tal que, con el nivel de stock fijado, *situa la trayectoria óptima por debajo de la curva separatriz* – es decir, en la zona en que aquel no coincide con el precio de oferta del capital– el stock de capital es siempre decreciente, y su velocidad de decrecimiento viene dada por

$$\dot{K} = - \delta K$$

que, como vemos, no depende de ψ. Por tanto, podemos afirmar que el decrecimiento del stock de capital para valoraciones del mismo inferiores a la

$$\psi = U'[F(K)]$$

– el más rápido posible en nuestro modelo– es independiente de estas valoraciones, y tanto más rápido cuanto mayor sea el capital existente. Es fácil comprobar que un razonamiento puramente económico nos llevaría a estas mismas conclusiones, pues la apreciación social del capital está por debajo del nivel al cual la sociedad ha decidido destinar toda su producción a consumo, y en estas condiciones la variación del stock de capital se debe únicamente a su depreciación.

La inclusión del factor tiempo en nuestro análisis nos va a permitir concretar algo más acerca de la trayectoria óptima objeto de nuestro problema, que es aquella que, además de satisfacer las condiciones necesarias de optimalidad verifica las condiciones de contorno. Supongamos primeramente que el capital inicial, K_0 es menor que el de equilibrio, K^*, y consideremos las infinitas trayectorias óptimas de duración T que parten de él. Para las trayectorias que arrancan de valores elevados de ψ (las que empiezan en la parte superior de la zona 2, muy por encima del brazo estable) *el stock de capital final* $K(T)$ *será también grande, aun* que siempre inferior al extremo superior correspondiente del cono alcanzable, $K(T)$ que sería el punto final de una trayectoria *admisible, pero no óptima*. A medida que las trayectorias parten de K_0 con un valor más pequeño de ψ, el crecimiento del capital es más lento, y, por tanto, el capital final alcanzado $K(T)$, es menor. Si continuamos reduciendo el valor inicial de ψ por debajo del brazo de estabilidad de la zona 2, alcanzaremos trayectorias que en el intervalo de tiempo T llegan a cortar a la curva $\dot{K} = 0$, penetrando en la región 1 en la que, como sabemos, la evolución óptima del sistema se dirige hacia la disminución del stock de capital. *Así llegaremos a un valor inicial* ψ para el cual la trayectoria óptima verifique $K(T) = K_0$, y, cuando el precio sombra inicial sea aún menor que éste, ocurrirá que el stock de capital final es menor que el inicial, pues el crecimiento experimentado durante el tiempo en que la trayectoria permanece en la zona 2 es superado por el decrecimiento del stock durante el periodo transcurrido en la zona 1. Esta diferencia negativa se incrementa en valor absoluto y cuando el valor inicial de ψ coincide con el

$$\psi = U'[F(K_0) - \delta K_0]$$

es decir, cuando el punto inicial de la trayectoria está sobre la curva $\dot{K} = 0$, el capital decrece desde el primer momento. En la zona 1, *el decrecimiento es más rápido* a medida que nos alejamos de la curva $\dot{K} = 0$ — $\dot{K}$ aumenta en valor absoluto — con lo que el capital final al cabo de un tiempo T es cada vez menor a medida que el ψ inicial disminuye hasta llegar a la trayectoria cuyo precio sombra inicial es

$$\psi = U'[F(K_0)]$$

es decir, aquella cuyo punto inicial está sobre la curva separatriz, que será la primera trayectoria para la cual el sistema evoluciona desde el primer momento en el régimen de consumo de la totalidad del producto. Con esta trayectoria hemos alcanzado el capital final más pequeño posible para el intervalo T fijado, y, por consiguiente, ulteriores reducciones del precio sombra inicial no afectan al nivel de este stock de capital mínimo alcanzable. Las trayectorias que comiencen con un valor inicial de ψ tan pequeño que alcancen la recta $\psi = 0$ antes de consumir el periodo de tiempo T fijado no pueden ser tomadas en consideración como tales trayectorias óptimas, puesto que la parte final de ellas contradice la condición $\psi \geqslant 0$, que justificaremos en breve.

Las trayectorias óptimas de duración T que parten de K_0 con un precio sombra inicial del capital mayor que el del brazo estable destinan una buena parte del producto a incremento del stock de capital, pese a lo cual aumenta también el consumo global durante una primera etapa. Efectivamente, el consumo global, C, viene dado por

$$C = (1 - s)\ F\ (K)$$

que según [3, 6], será, por encima de la curva separatriz

$$C = U'^{-1}\ (\psi)$$

y, por debajo $\qquad C = F\ (K)$

de manera que, en el primer caso

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{U''(C)} \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

con lo que $\dfrac{dC}{dt}$ y $\dfrac{d\psi}{dt}$ tienen signos opuesto

y en el segundo $\qquad \dfrac{dC}{dt} = F'\ (K)\ \dfrac{dK}{dt}$ ·

con lo que, debajo de la separatriz, el consumo disminuye con el capital. Por tanto, como en la primera etapa de las trayectorias que parten de la zona 2 disminuye el valor del precio sombra, aumentará el consumo. — Pero si el intervalo de tiempo T es lo suficientemente largo para permitir que algunas de estas trayectorias (las situadas inicialmente encima del brazo estable de la región 2) atraviesen la $\dot{\psi} = 0$, a partir de éste instante el incremento del stock de capital es lo suficientemente fuerte para condicionar una reducción progresiva del consumo global. A medida que las trayectorias se van aproximando al brazo estable, el nivel de consumo global para cada nivel de stock de capital es cada vez mayor y, la velocidad de crecimiento del capital, menor, con lo que llegaremos a trayectorias que, en el intervalo T, no llegan a cruzar la curva $\dot{\psi} = 0$ — una de las cuales estará situada sobre el brazo estable — y en las que, por consiguiente, los precios sombra del capital a lo largo de la trayectoria estimulan a su incremento, pero no hasta el punto de limitar el crecimiento continuado del consumo. En cuanto una trayectoria óptima toma valores del precio sombra por debajo de los correspondientes a la curva $\dot{K} = 0$ para su stock de capital, el aliciente a la inversión es tan pequeño que éste no llega siquiera a cubrir la depreciación, y la sociedad se descapitaliza, incrementando en cambio su consumo considerablemente. Y desde el instante en que una trayectoria óptima presenta para algún valor de K niveles del precio sombra menores o iguales que los correspondientes de la curva separatriz, el aliciente a la inversión está por debajo del mínimo requerido para que la sociedad se decida a sacrificar alguna parte de su consumo, con lo que el consumo será total y la descapitalización la más rápida posible, de forma que en último término, el consumo global se reduce progresivamente a partir del instante de cruce del sistema con la separatriz.

El comportamiento de las trayectorias óptimas de duración T con un capital inicial K_0 tal que

$$K^* \leqslant K_0 < \tilde{K}$$

es muy similar al de las estudiadas con $K_0 < K^*$, exceptuando el caso especialísimo en que, con un capital inicial $K_0 = K^*$, el precio sombra del mismo sea precisamente $\psi = \psi^*$, con lo que el punto inicial de la trayectoria óptima coincide con el punto de equilibrio: en este caso ya hemos visto que el único comportamiento óptimo posible consiste en permanecer en la misma situación inicial — nivel constante del stock de capital e idéntico precio sombra del mismo— durante todo el periodo T. En los demás casos, si el precio sombra inicial de la *trayectoria es muy elevado*, el stock de capital crecerá muy rápidamente — tanto más rápidamente cuanto mayor sea ψ — a costa de una reducción del nivel global de consumo. Pero si el ψ *inicial está por debajo de la curva* $\dot{K} = 0$, la tendencia óptima de la sociedad consistirá en consumir casi todo el producto, destinando a la inversión una cantidad del mismo insuficiente a cubrir la depreciación, con lo que, en una primera etapa, el sistema se descapitaliza, si el precio sombra inicial situa la trayectoria por encima del brazo estable y el periodo de tiempo es lo suficientemente largo para que la elevación del precio de demanda del capital subsiguiente a la reducción de su stock coloque al sistema sobre la *curva* $\dot{K} = 0$, a partir de este instante la tendencia a la inversión aumenta, con lo que se incrementa el stock de capital. El capital final alcanzado será el que resulte de sumar el capital *inicial el incremento resultante de estos dos movimientos* opuestos, que irá decreciendo al disminuir el ψ inicial, y llegará a tomar el valor cero, e incluso valores negativos, cada vez mayores en términos absolutos. Y en todo caso, el consumo global disminuye continuamente, por efecto de la reducción del capital en el primer trozo de la curva, y por la presión de la capitalización en el segundo — véase que el precio sombra del capital crece a lo largo de toda la curva —. Las trayectorias que se inicien por debajo del brazo estable de la zona 4 se caracterizan por tener un precio sombra inicial lo suficientemente bajo como para que la sociedad se descapitalice, pero la consiguiente elevación del precio sombra, juntamente con la *reducción del capital determinan simultaneamente una* reducción del volumen de consumo global; si el periodo T es lo suficientemente largo para que la trayectoria atraviese la curva $\dot{\psi} = 0$, a partir de ese momento, el precio sombra del capital empieza a disminuir juntamente con el nivel de stocks, lo que determina una aceleración en la reducción de la parte destinada al capital que hace crecer el consumo global. En las trayectorias más bajas, el sistema tendrá tiempo suficiente de atravesar la separatriz, con lo que alcanzará el más fuerte ritmo posible de descapitalización, y en último término, una reducción del consumo global a partir del instante en que cruce dicha curva.

Resumiendo lo analizado últimamente, vemos que una trayectoria óptima de capital inicial $K(0) = K_0$, $0 < K_0 < K^*$ y de duración T alcanzará diferentes niveles finales de capital $K(T)$ tales que

$$K(T) \in [\underline{K}(T, K_0), \overline{K}(T, K_0)[$$

es decir, comprendidos en el interior y extremo inferior del cono alcanzable correspondiente, para los distintos niveles posibles del precio sombra inicial. Por consiguiente, la trayectoria óptima que buscamos, que es la que satisface las condiciones de contorno $K(0) = K_0$ y $K(T) = K_T$ será precisamente aquella que comience en K_0 con un precio sombra inicial del capital, ψ, tal que al cabo de un periodo de duración T el capital final alcanzado sea precisamente el K_T propuesto.

De todo ello se deduce la importancia del papel que juega el precio sombra del capital en la determinación de trayectorias óptimas en una economía descentralizada. Según hemos visto, la variable de control $s(t)$ de una trayectoria óptima queda en todo instante determinada por los valores de $K(t)$ y $\psi(t)$. En una economía centralizada el organismo decisor actúa directamente sobre la variable $s(t)$, determinando la porción del producto que será destinada a la inversión. Pero en un sistema descentralizado, el planificador tendrá que maniobrar en las preferencias sociales a través del mecanismo de mercado, manejando los instrumentos de política económica a su alcance de forma adecuada para conseguir que la valoración social de la unidad de capital en términos de consumo sea en cada instante precisamente la que conducirá al sistema a lo largo de la trayectoria óptima que satisface las condiciones de contorno deseadas. La determinación de los precios sombra de las trayectorias buscadas es, por tanto un aspecto esencial de nuestro problema.

Creemos interesante, al llegar a este punto, profundizar un poco más en la afirmación, admitida hasta ahora sin mayores justificaciones, de que existe siempre una función auxiliar $\psi(t)$ no negativa a lo largo de toda trayectoria óptima. La certeza de este aserto es muy de desear desde el punto de vista de la interpretación económica de dicha función como precio sombra de la unidad de capital, pues la eventual consideración de precios negativos daría lugar a enojosas inconsistencias en cuanto al significado económico del comportamiento social a lo largo de la trayectoria óptima afectada por ellos.

La idea central que sirve de base a esta justificación es precisamente la misma que da lugar a la interpretación de esta función como precio sombra del capital y a la que hemos hecho detallada referencia en el apartado 3.3: la de que la función auxiliar representa, en cada instante, la derivada del funcional del bienestar total obtenido en la trayectoria óptima que, comenzando en ese instante satisface las condiciones de contorno fijadas, respecto al stock de capital; o, lo que es lo mismo, la variación en la utilidad total disfrutada desde ese momento hasta el final del periodo de planificación quese produciría cuando, conservando invariantes las demás condiciones de contorno, el stock de capital disponible en el instante inicial varía y el sistema se desplaza como consecuencia de esta variación, a otra trayectoria óptima con el mismo capital final. Si ambas variaciones se producen con el mismo signo, es decir, si un incremento del stock de capital inicial da lugar a un aumento de la utilidad total obtenida, y una disminución del capital inicial determina una reducción del valor del funcional objetivo, entonces la derivada citada, y, por tanto la función auxiliar

$$\psi(t) = J'(K(t))$$

donde

$$J(K) = \int_t^T U \quad [(1-s_* (\tau))] \, d\tau$$

siendo $s_*(\tau)$ la trayectoria de control óptima entre las que trasladan al sistema económico desde $K = K(t)$ a un K_T previamente fijado, en un intervalo de tiempo $[t, T]$ es positiva para ese valor de t.

Esto es lo que ocurre realmente para todo valor de t, $0 \leqslant t < T$. Lógicamente, es de esperar que así suceda pues parece razonable suponer que un incremento de capital al comienzo de la trayectoria en nada perjudique al bienestar total percibido posteriormente y si, en cambio, pueda incrementarlo. Bien es verdad que este incremento de capital no se puede transformar en un incremento inmediato del consumo, dadas nuestras hipótesis de no convertibilidad del mismo. Pero en la nueva trayectoria óptima determinada por el nuevo nivel de capital inicial, el incremento sufrido por éste no podrá quedar inactivo: se incorporará a la producción dando lugar a un incremento del flujo de producto en el instante siguiente, del cual podrá destinarse una mayor cantidad al consumo. Puesto que, en todo caso, el nivel del stock de capital final ha de ser el mismo, parece lógico esperar que la nueva trayectoria óptima de acumulación de capital, que comienza con un capital inicial mayor, vaya alcanzando en cada instante niveles de capital mayores que los de la antigua trayectoria óptima, pero cada vez más próximos a ella, hasta coincidir en el valor K_T, en el instante T. Este conjunto de valores mayores del stock de capital en la nueva trayectoria óptima determinará un mayor producto en cada instante. Como, por otra parte, en la nueva trayectoria óptima el ritmo de acumulación de capital es menor, es de suponer que la cantidad destinada al consumo sea, en cada instante, mayor que en la trayectoria óptima anterior, con lo que también lo será la utilidad (función creciente del consumo) en cada instante y, por tanto, su integral en el periodo. Este mismo razonamiento sería válido para porciones de trayectorias o trayectorias enteras situadas por debajo de la curva separatriz, pues, aunque en ellas la fracción del producto destinada al consumo se mantiene constante e igual a uno, el incremento del stock de capital en cada instante daría lugar a un evidente incremento del producto, y, por tanto, del consumo.

La resolución del sistema de ecuaciones diferenciales determinado por las condiciones necesarias de optimalidad de las trayectorias, es decir, la obtención de expresiones explícitamente dependientes de t para las trayectorias óptimas de K (t) y s (t), tanto para el valor primitivo del stock de capital inicial como para el incrementado, nos permitiría comparar el nivel de utilidad total obtenido en ambos casos, y comprobar analíticamente la exactitud de los razonamientos económicos anteriormente expuestos. Desgraciadamente, la resolución del sistema en la forma indicada es posible solamente en unos pocos casos particulares de nuestro problema. En el caso general que es objeto de este trabajo solamente caben las eventuales obtenciones numéricas de trayectorias óptimas discretas, de las que nos ocuparemos en posteriores capítulos, y la representación geométrica aproximada de las trayectorias óptimas en el plano fase, que es el recurso de que nos hemos valido hasta ahora para poder obtener conclusiones en torno al comportamiento óptimo del sistema.

Justamente este segundo método nos va a proporcionar una confirmación geométrica de las conjeturas económicas anteriormente expuestas. Consideremos, en efecto, el plano fase y las infinitas trayectorias óptimas totalmente situadas por encima de la curva separatriz, que pueden dibujarse sobre él de acuerdo con la evolución esperada de las variables K y ψ. Una de estas trayectorias óptimas será la determinada por las primitivas condiciones de contorno, y otra la que, comenzando en el instante t con un capital inicial K (t) + Δ K (t), mayor que el primitivo, termine en el instante T con el capital final K_T igual al de la trayectoria óptima inicial, Estudiemos la situación relativa de ambas trayectorias en el plano fase y concluiremos que la trayectoria primitiva está siempre situada por encima de la nueva trayectoria, de manera que, para cada instante t, el precio sombra correspondiente de la nueva trayectoria óptima es inferior al precio sombra de la inicial.

Supongamos, por ejemplo, que las condiciones de contorno del problema son tales que el stock de capital inicial es menor que el capital final, es decir, que la trayectoria óptima supone una verdadera acumulación de capital. La nueva trayectoria óptima que, partiendo de un capital inicial ligeramente superior, debe conducir el sistema al nivel de capital final estipulado, no podrá comenzar con el nivel de precio sombra correspondiente al nuevo nivel de capital inicial en la trayectoria óptima primitiva, pues, en ese caso, y habida cuenta de que el sistema de ecuaciones que determinan las trayectorias óptimas del sistema es autónomo, la nueva trayectoria recorrería exactamente la porción del trazo de la primitiva que comienza con un capital $K(t) + \Delta K(t)$ y termina en K_T. Pero la nueva trayectoria no terminará en K_T pues, estando planificada para un periodo de tiempo $T - t$, igual al de la primitiva, al llegar a K_T no habrá terminado su recorrido, puesto que aún dispondrá de un tiempo igual al que la primitiva trayectoria invirtió en recorrer la porción de su trazo comprendida entre $K(t)$ y $K(t) + \Delta K(t)$. Luego si la nueva trayectoria comienza en $K(t) + \Delta K(t)$ con un valor del precio de demanda del capital igual al correspondiente de la trayectoria primitiva para este nivel de capital, alcanzará en el tiempo previsto un capital final superior a K_T, y no satisfará, por tanto, las condiciones de contorno fijadas. El significado económico de esta conclusión es evidente y concuerda totalmente con los razonamientos económicos previos al estudio del problema sobre el plano fase: si el sistema pasa a seguir una trayectoria óptima con un ritmo de acumulación de capital, igual al correspondiente de la trayectoria primitiva para ese mismo nivel de capital, pero comenzando con un stock de capital inicial mayor, conducirá al sistema, en el tiempo previsto, a un nivel de capital final mayor que el de la trayectoria primitiva. Para que, comenzando con más capital, se alcance, al cabo del tiempo previsto el nivel de capital final fijado es preciso que el ritmo de acumulación de capital sea más lento, es decir, que el precio sombra inicial de la nueva trayectoria sea inferior al determinado por la trayectoria primitiva para un capital igual a $K(t)+\Delta K(t)$. Ahora, como la demostrada existencia y unicidad de las soluciones implica que dos trayectorias óptimas no pueden cortarse fuera del punto singular del sistema, podemos asegurar que la segunda trayectoria óptima permanece constantemente por debajo de la primera en el plano fase.

Un razonamiento similar nos llevaría a idéntica conclusión en el caso en que el capital final buscado fuese inferior al stock de capital inicial, es decir, cuando lo que se produce realmente es una descapitalización del sistema, pues si ahora la nueva trayectoria óptima comenzase con un capital inicial $K(t)+\Delta K(t)$ y un precio sombra inicial del capital igual al determinado por la prolongación— en sentido contrario a su desplazamiento temporal— de la trayectoria óptima primitiva para un capital igual a $K(t) + \Delta K(t)$, la nueva trayectoria recorrería la prolongación de la antigua hasta incorporarse a ésta — es decir, hasta alcanzar un nivel de capital igual a $K(t)$ — momento a partir del cual seguiría exactamente la trayectoria óptima primitiva. Pero no podría seguirla hasta el final, es decir, hasta alcanzar K_T, pues el tiempo invertido por la nueva trayectoria en recorrer su trazo inicial hasta incorporarse al punto inicial de la trayectoria primitiva, reduce el periodo de tiempo durante el cual puede seguir ésta, lo que no le permite alcanzar niveles de capital tan bajos como los alcanzados por la trayectoria inicial. Todo ello nos dice que, en este caso, si el sistema sigue una nueva trayectoria óptima con un capital inicial mayor que el de la trayectoria óptima primitiva, y con un mismo ritmo de descapitalización, no podrá alcanzar, en un mismo periodo de tiempo, niveles finales de capital tan bajos como los de la primitiva solución, y no satisfará las condiciones de contorno exigidas. Para que, partiendo de un capital inicial mayor conduzca al sistema de manera óptima a un capital final igual en el mismo periodo de tiempo, es necesario que su ritmo de descapitalización sea más rápido, es decir, que el precio sombra inicial de la unidad de capital sea en la nueva trayectoria inferior al determinado sobre la prolongación de la trayectoria óptima primitiva para un capital igual al inicial de la nueva trayectoria. Y como ambas trayectorias no pueden cortarse, es evidente que la nueva trayectoria está totalmente situada por debajo de la primitiva.

El hecho de que, tanto para procesos de acumulación como de decumulación de capital, un incremento del capital inicial, —conservando invariantes las demás condiciones de contorno— determine un desplazamiento de la trayectoria óptima hacia abajo, es decir, hacia valores más pequeños del precio sombra del ca pital, se traduce en conclusiones respecto a la utilidad total obtenida én la trayectoria que confirman nuestros anteriores razonamientos económicos. En efecto, si el precio sombra determinado por la nueva trayectoria óptima es en cada instante inferior al correspondiente de la primitiva, la relación

$$C = U'^{-1} (\psi)$$

anteriormente obtenida para los puntos situados por encima de la curva separatriz nos indica que el consumo global en la nueva trayectoria es, en cada instante, mayor que el de la trayectoria primitiva. Por consiguiente, será también mayor la utilidad obtenida en cada instante, y su integral a lo largo del periodo. En resumen, podemos afirmar que un incremento del capital inicial repercute en una mayor utilidad total en el periodo. Razonamientos similares a los anteriores nos permitirán deducir que una disminución del capital inicial se traduciría en una menor utilidad total. Por tanto, la función auxiliar $\psi(t)$ toma valores no negativos.

Los razonamientos anteriores son válidos en tanto la trayectoria se mantenga por encima de la curva separatriz. Pero si la trayectoira primitiva — y, por tanto, la modificada, ya que suponemos variaciones muy pequeñas del capital inicial — penetra en la zona situada por debajo de la curva separatriz, también es evidente que la utilidad total obtenida por la trayectoria óptima que comienza con mayor capital inicial es mayor que la conseguida con la primitiva trayectoria óptima. Para empezar, señalemos que el precio sombra inicial de la trayectoria modificada deberá ser inferior al de la prolongación de la trayectoria primitiva para el nuevo valor inicial del capital pues, aunque una vez que el sistema entra en la región del consumo total la velocidad de decumulación del capital depende solamente del volumen de éste, en la parte de la trayectoria situada por encima de la separatriz las condiciones de contorno imponen un ritmo más fuerte de decumulación de capital. Luego la trayectoria modificada está siempre por debajo de la primitiva y corta a la curva separatriz en un punto correspondiente a un nivel de capital mayor que el del punto de corte de la primitiva con la separatriz.

De todo ello se deduce que podemos dividir el intervalo [t, T], cuya utilidad nos interesa, en tres intervalos de tiempo en los que se presentan las siguientes características: en el primero de ellos ambas trayectorias están por encima de la curva separatriz; a partir del instante en que la trayectoria modificada entra en la región del consumo total empieza una segunda etapa, durante la cual la trayectoria primitiva está siempre por encima de la curva separatriz, y la modificada, por debajo; por último, cuando la trayectoria primitiva entra en la zona de consumo total, las dos trayectorias están por debajo de la curva separatriz. Que la trayectoria modificada corta a la curva separatriz antes que la primitiva se deduce facilmente teniendo en cuenta que aquella corta a la curva separatriz para un valor del stock de capital mayor que el de la intersección de la curva separatriz con la trayectoria primitiva: si ambas trayectorias han de terminar con el mismo nivel de capital final y la velocidad de decumulación del capital es la misma para cada nivel de capital en la zona del consumo total, el corte a la separatriz con un nivel de capital mayor tiene que producirse necesariamente antes.

Vamos a ver ahora que la trayectoria óptima modificada con un pequeño aumento del capital inicial determina un nivel de utilidad total en el periodo previsto superior al de la trayectoria primitiva. Durante la última etapa del periodo total, es decir, aquella en que ambas trayectorias se encuentran por debajo de la separatriz con el mismo nivel de capital en cada instante, la utilidad obtenida por ambas es la misma, puesto que en cada instante se consume todo el producto, y éste es, en cada instante, el mismo, al serlo el nivel de capital. Por el contrario, en la primera y segunda etapas es mayor la utilidad obtenida con la trayectoria modificada: en la etapa en que ambas están por encima de la separatriz es válido el razonamiento hecho en el estudio de trayectorias que no cruzan la separatriz, de que un menor precio sombra en cada instante implica un mayor nivel de consumo global;

en la etapa intermedia, la conclusión es también evidente dado que para niveles similares del stock de capital – *y, por tanto,* del producto – la trayectoria modificada determina un consumo total *del producto, en tanto* que la primitiva destina aún parte de él a la reposición de capital. La trayectoria *modificada con* un pequeño incremento del capital inicial produce, por consiguiente, un mayor nivel de utilidad total que la primitiva.

Consideremos, por último el caso de una trayectoria óptima contenida toda ella en la región del consumo total. En esta zona, la relación ahorro-producto es siempre cero y no juega, por tanto, ningún papel en el control del ritmo de decumulación de capital de la trayectoria, que pasa a depender exclusivamente del *valor corriente* del stock de capital. Por tanto, si modificamos la trayectoria aumentando *ligeramente* el *stock de capital inicial*, la nueva trayectoria óptima de duración T situada bajo la separatriz – *única en su ritmo de decumulación*, puesto que éste no depende para nada del precio sombra inicial – *no podrá alcanzar* el capital final K_T previsto. Ocurre, sin embargo, que a medida que planificamos trayectorias óptimas de este tipo con un periodo T mayor – y, consiguientemente, un capital final menor – la diferencia entre los capitales finales de la trayectoria óptima primitiva y de la modificada están cada vez más próximos, llegando incluso a coincidir, en el límite, cuando consideramos un periodo infinitamente largo y *un capital final* igual a cero, pues siendo en esta región

$$\dot{K} = -\delta K$$

será

$$K_{1,T} = K_1(t)\, e^{-\delta(T-t)}$$

para la trayectoria primitiva, y

$$K_{2,T} = K_2(t)\, e^{-\delta(T-t)}, \quad K_2(t) > K_1(t)$$

para la modificada, con lo cual

$$K_{2,T} - K_{1,T} = [K_2(t) - K_1(t)]\, e^{-\delta(T-t)}$$

de manera que la diferencia se reduce al aumentar T y además

$$\lim_{T \to \infty} [K_{2,T} - K_{1,T}] = [K_2(t) - K_1(t)] \lim_{T \to \infty} e^{-\delta(T-t)} = 0$$

tiende a cero cuando T crece indefinidamente. Siempre podemos, por consiguiente, determinar para todo $\epsilon > 0$ un T suficientemente grande para que

$$0 < K_{2,T} - K_{1,T} < \epsilon$$

y los capitales finales estén tan próximos como queramos. En este caso, es también evidente que la trayectoria óptima modificada proporciona un mayor nivel de utilidad total que la primitiva, pues los niveles del stock de capital de ambas trayectorias tienden a igualarse, pero conservándose siempre superior el de la trayectoria modificada, lo que supone mayor producto en cada instante y, en régimen de consumo total del producto, mayor consumo y por ende, mas utilidad.

Como resumen de todo lo expuesto últimamente, podemos afirmar que $\psi(t) \geqslant 0$ en todo punto de toda trayectoria óptima, y que, por tanto, no es admisible como tal una trayectoria con valores negativos del precio sombra en algún instante de su recorrido. Anotemos finalmente la posibilidad de llegar a idénticas conclusiones por métodos analíticos y basándonos exclusivamente en las hipótesis impuestas a las funciones que constituyen el modelo, al margen de consideraciones de tipo económico. Pues, para las trayectorias óptimas que se encuentran en un instante dado por encima de la curva separatriz, las condiciones necesarias de máximo nos dicen que

$$\psi(t) = U'[(1-s) F(K)] > 0$$

Pero si una trayectoria óptima se encuentra en un instante dado t, y con un nivel de capital K(t), en la zona del consumo total del producto, permanece indefinidamente en ella, con lo cual su trayectoria de capital es necesariamente la

$$K(\tau) = K(t)\, e^{-\delta(\tau - t)} \qquad t \leqslant \tau \leqslant T$$

con lo que, siendo $s = 0$ el valor del funcional objetivo en el intervalo $[t, T]$ es

$$J(K) = \int_t^T U\,[F(K e^{-\delta(\tau - t)})]\, d\tau$$

que solo depende del capital inicial $K(t)$, y del tiempo, con lo que resulta que

$$\psi(t) = \frac{d\,J(K(t))}{dK} = \frac{d}{dK} \int_t^T U\,(F\,(K e^{-\delta(\tau - t)}))\, d\tau =$$

$$= \int_t^T U'\,(F\,(K e^{-\delta(\tau-t)}))\quad F'\,(K e^{-\delta(\tau-t)}) \cdot e^{-\delta(\tau-t)}\, d\tau$$

y como, en virtud de las hipótesis impuestas a las funciones de utilidad y de producción, los tres factores que forman el integrando son no negativos, la integral, tomada en el sentido de los t crecientes, lo será también, de donde resulta

$$\psi(t) \geqslant 0$$

como queríamos demostrar.

En el estudio realizado hasta ahora hemos tratado muy ligeramente el caso en que $K_0 > \tilde{K}$, máximo stock sostenible de capital. En realidad su interés económico es menor, en modelos cerrados al exterior por su menor frecuencia en sistemas reales. (*) Por otra parte, el estudio de sus trayectorias óptimas es similar al de las trayectorias con capital inicial mayor que el de equilibrio y precio — sombra inferior al correspondiente sobre la curva $\dot{K} = 0$, teniendo en cuenta que

(*) D. Cass "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: a Turnpike Theorem" Op. Cit.

ahora el cono alcanzable tiene como supremo K_0, y como ínfimo alcanzable asintóticamente, $\tilde{K}$.

Es también interesante observar en qué forma se modifican las trayectorias óptimas cuando fijamos los valores inicial y final del capital y variamos el tiempo previsto de realización del programa. En primer lugar, el estudio del cono alcanzable realizado en el apartado 2 de este capítulo nos dice que, para cada par (K_0, K_T) existe una cota inferior no alcanzable de los intervalos posibles, de forma que las condiciones tecnológicas del problema solo permiten pasar del capital inicial K_0 al K_T en intervalos de tiempo superiores a dicha cota. Supongamos, en primer lugar, que el capital inicial, K_0, es inferior al del punto de equilibrio, y el final, K_T, mayor que K^* y que comenzamos con un intervalo T superior a la cota citada. En estas condiciones, existe una trayectoria que satisface los supuestos del problema y las condiciones necesarias de optimalidad, es decir, existe un precio sombra inicial, mayor que el correspondiente del brazo estable para K_0 para el cual las preferencias sociales sucesivas llevan al sistema al capital final deseado en el periodo de tiempo previsto. ¿Qué ocurrirá si, manteniendo los mismo capitales inicial y final, alargamos el intervalo T? . Ahora las condiciones de contorno pasan a ser las

$$K(0) = K_0 \qquad , \qquad K(T') = K_T \qquad T' > T$$

Evidentemente, el precio inicial de la trayectoria con intervalo T no nos sirve para nuestro nuevo problema, pues, al alargarse el periodo de tiempo, la trayectoria alcanzará el stock de capital K_T en el instante T, rebasándolo en T', con lo que $K(T') > K_T$. De las conclusiones obtenidas anteriormente se deduce que, para conseguir un capital final igual a K_T en un periodo de tiempo $T' > T$ será preciso encontrar un nuevo precio sombra inicial, menor que el precedente, que dé lugar a la trayectoria óptima que cumpla las nuevas condiciones de contorno. Y como el único punto de corte posible de trayectorias es el punto singular del sistema, ésta nueva trayectoria permanecerá siempre por debajo de la obtenida con un tiempo T, lo que nos muestra que la forma de pasar de manera óptima de un mismo ca pital inicial K_0 a un mismo capital final K_T empleando más tiempo consiste en buscar otra trayectoria a lo largo de la cual la capitalización sea más lenta — y el consumo global, mayor para un mismo nivel de capital —. A medida que aumentamos aún más el intervalo de tiempo previsto, conservando los valores extremos de K, vamos obteniendo trayectorias cada vez más bajas — más lentas en capitalización y más ricas en consumo — y, por tanto, más próximas al brazo estable en su porción comprendida en la zona 2. Este brazo estable constituye una cota inferior de las trayectorias óptimas que pasan de K_0 a K_T, ya que desemboca en el punto singular del sistema, que es, como hemos visto, un punto de estabilización asintótica de trayectorias óptimas. Por consiguiente, las trayectorias óptimas buscadas estarán siempre estrictamente por encima del brazo de estabilidad, y cada vez más próximas a él. Si fijamos un entorno de radio arbitrario centrado en el punto de equilibrio, observaremos que las trayectorias óptimas de valores extremos K_0 y K_T permanecen una porción absoluta y relativa de tiempo tanto mas larga dentro del entorno fijado cuanto mayor es el periodo de tiempo total planeado.

Supongamos ahora que los capitales inicial y final fijados están situados a la izquierda del punto de equilibrio, de manera que, por ejemplo

$$0 < K_0 < K_T < K^*$$

y que comenzamos con un intervalo de tiempo T que hace factible el problema con un ψ inicial mayor que el correspondiente del brazo estable. A medida que aumentamos el intervalo T, un razonamiento similar al efectuado en el caso anterior nos llevaría a la conclusión de que la trayectoria óptima correspondiente deberá tener un ritmo de capitalización más lento, y, por tanto, un valor inicial más pequeño de ψ; para un cierto valor de T, nuestra trayectoria óptima estará precisamente sobre el brazo estable. El proceso continúa en la misma forma hasta llegar al intervalo de tiempo tal que la trayectoria óptima que satisface las consi-

guientes condiciones iniciales termina precisamente en el punto $(K_T, U'(F(K_T)-\delta K_T))$ situado sobre la curva $\dot{K} = 0$. El valor inicial de ψ correspondiente a esta trayectoria óptima es el ínfimo de los precios sombra iniciales compatibles con una trayectoria óptima que pase de K_0 a K_T, pues cualquier ψ inferior a él inicia en K_0 una trayectoria que, o bien cruza la curva $\dot{K} = 0$ *para algún* stock de capital inferior a K_T, penetrando en la zona 1 (si el ψ inicial está por encima de $\dot{K} = 0$), o está totalmente contenida en la zona 1 (si el ψ inicial es menor que el correspondiente de $\dot{K} = 0$). En ambos casos, el proceso de descapitalización característico de la zona 1 impedirá a la trayectoria óptima alcanzar el stock K_T *deseado*.

Si continuamos, pues, aumentando el periodo de tiempo, lo que ocurrirá es que el precio sombra *inicial volverá a aumentar a* partir de su ínfimo, haciendo coincidir la primera parte de la trayectoria con una de las obtenidas anteriormente para un periodo más pequeño; el intervalo de tiempo restante se invertirá en cruzar la curva $\dot{K} = 0$ en un punto cuyo stock de capital es mayor que K_T, y, – penetrando en la zona 1 – descapitalizar el sistema, terminando en K_T al cabo *del tiempo previsto*. Las ecuaciones [3, 7] y [3, 12] nos indican que la velocidad de decrecimiento de ψ en las zonas 1 y 2, es tanto mayor cuanto mayor sea en valor absoluto la constante C tal que el correspondiente punto satisfaga la relación $\dot{\psi} = C$; luego posteriores aumentos del periodo de tiempo darán lugar a condiciones de *contorno* satisfechas *por trayectorias* óptimas cuya porción situada en la zona 2 estará cada vez más próxima al correspondiente brazo estable, en tanto que su segunda parte, situada en la zona 1, se aproximará cada vez más al brazo inestable correspondiente.

Cualquier otra posición de los capitales inicial y final en el plano fase daría lugar a un estudio de las trayectorias óptimas con periodo de tiempo creciente similar a alguno de los dos efectuados, con idénticas conclusiones.

De todo ello se deduce que para cualesquiera valores del stock de capital inicial, K_0 y del capital final mínimo *requerido* K_T, y *para* cualquier entorno del pun to singular existe siempre una trayectoria óptima en el plano fase $(K(t), \psi(t))$ que satisface las condiciones de contorno $K(0) = K_0$, $K(T) \geqslant K_T$, y tal que el cociente entre el periodo de tiempo que la trayectoria "permanece" en el entorno fijado y el periodo total invertido, T, es tan próximo a 1 como queramos. (*) Para encontrarla bastará determinar un periodo de tiempo T lo suficientemente largo para que la trayectoria se vea obligada a permanecer la proporción del tiempo total deseada dentro del entorno del punto singular. Esta conclusión es conocida con el nombre de teorema de la autopista (turnpike) e implica que toda trayectoria óptima tiende a permanecer el mayor tiempo posible en las proximidades del punto que determinaría un nivel máximo de consumo en una situación de crecimiento nulo.

3.7. El modelo con capital final no determinado

Hemos estudiado hasta ahora el problema del crecimiento económico óptimo en el caso en que el stock de capital disponible a la terminación del periodo de planificación $K(T)$ tenga que coincidir exactamente con el mínimo fijado de antemano en atención a las necesidades de supervivencia de generaciones futuras, K_T. Desde el punto de vista económico, tiene, sin embargo, un mayor interés el problema planteado en términos de limitación por defecto, pero no por exceso, del capital final puesto que, conseguida la maximización perseguida de la utilidad global del consumo, y cubiertos los mínimos exigidos en cuanto al capital final, nada se podría objetar al hecho de que este capital final acumulado fuese mayor que el exigido, circunstancia que en nada afectaría a la generación presente, en cuyo interés se planifica el crecimiento, y beneficiaría, en cambio, a generaciones posteriores.

En cuanto a su planteamiento y resolución matemática, el modelo con capital final limitado inferiormente, responde a la misma ecuación [3, 2] de evolución dinámica del stock de capital existente. Como, por otra parte, el criterio de optimización continua siendo el mismo, resultará que, la hamiltoniana y por consiguiente,

(*) Esta conclusión ha sido expuesta y analizada detalladamente por Samuelson en "A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule" American Economic Review, Junio de 1.965.

las condiciones necesarias de máximo según el principio de Pontryagin serán las mismas ya obtenidas.

La diferencia estriba únicamente en las condiciones de contorno. Hemos visto cómo, en el caso de capital final fijo las relaciones

$$K(0) = K_0 \quad , \quad K(T) = K_T$$

bastaban a determinar la trayectoria óptima buscada en el conjunto de soluciones del sistema diferencial formado por las condiciones necesarias de optimalidad y la de comportamiento dinámico del sistema. Pero en nuestro actual problema, las condicones de contorno son

$$K(0) = K_0 \quad , \quad K(T) \geqslant K_T$$

que solamente fijan uno de los extremos de la trayectoria óptima, y el periodo de planificación. Nos falta por consiguiente, para poder determinar una trayectoria óptima única, una relación de ligadura: la proporcionada por el dato valor del stock de capital a la terminación del periodo.

El principio de máximo, y sus generalizaciones tal como han sido expuestas por Pontryagin y sus colaboradores, preveen esta contingencia y nos dan un procedimiento para resolverla, que consiste en utilizar una nueva relación de ligadura, necesaria para toda trayectoria óptima, que, junto con las demás condiciones necesarias, nos determine la trayectoria buscada. Esta relación es la originada por la condición de transversalidad, que, como queda expuesto, impone necesariamente a una trayectoria óptima cuyo extremo pueda ser cualquier punto de una cierta variedad, V, en un espacio n–dimensional la restricción complementaria de que el vector formado por los valores numéricos de las n últimas componentes de la función auxiliar ψ (t) tomadas en el instante final del periodo de planificación T sea ortogonal a la variedad lineal tangente a V en el punto extremo correspondiente.

En el problema que nos ocupa, nos movemos en un espacio unidimensional, en el que el conjunto de valores finales admisibles para la trayectoria óptima es la semirrecta $K(T) \geqslant K_T$. Sea antonces $K(t)$ una trayectoria óptima y $\psi(t)$ la correspondiente función auxiliar, y consideremos los dos casos que pueden presentarse.

Si $$K(T) > K_T$$

el extremo final de la trayectoria es interior a la semirrecta $K \geqslant K_T$, y, por consiguiente la condición de transversalidad aplicable a este caso es que $\psi(T)$ sea ortogonal a cualquier vector de la recta real, lo que, en un espacio unidimensional, implica

$$\psi(T) = 0$$

En cambio, si $$K(T) = K_T$$

la trayectoria $K(t)$ es óptima en el problema de extremos fijos K_0, K_T, no pudiéndose deducir en este caso ninguna condición de transversalidad en forma de igualdad por hallarse el extremo en cuestión en la frontera de la semirrecta admisible.

Ambas condiciones pueden reunirse en una sola, dando lugar a la condición de transversalidad adecuada a esta nueva versión del problema

$$\psi(T)\,[K(T) - K_T] = 0 \qquad [3, 14]$$

que engloba los resultados de los dos casos anteriormente expuestos: Si $K(T) = K_T$, la condición se satisface sin necesidad de imponer ninguna restricción a $\psi(T)$; si, por el contrario, $K(T) > K_T$, la anulación del producto escalar determina una nueva condición necesaria de optimalidad, que es la $\psi(T) = 0$.

Las conclusiones matemáticas derivadas de la condición [3, 14] tienen una interpretación económica interesante y que viene a apoyar una vez más la idea, ya esbozada en otros puntos de este trabajo, de que el concepto de optimalidad matemática, aplicado a los modelos de crecimiento, comporta un aprovechamiento total o *no inactividad de los recursos*, cuando éstos son valorados socialmente como tales. Pues, efectivamente, lo que la citada condición de transversalidad nos dice es que, cuando una sociedad planifica un periodo de utilidad máxima con la condición de que el capital final que deje a beneficio de las generaciones futuras no sea inferior a una cierta cantidad fijada previamente, su linea de actuación óptima supondrá dejar a la terminación del periodo un stock de capital superior al citado solamente en el caso en que la valoración social o precio de demanda de este capital *sea precisamente cero.* Lo que nos indica que el comportamiento óptimo supone la utilización al máximo posible dentro del límite final establecido del stock de capital, salvo en el caso en que la nulidad de su valoración desestime su condición de recurso socialmente cotizado como tal. En resumen, solamente se dejará a beneficio de las generaciones futuras un capital mayor que el fijado cuando este capital carezca de valor. En todos los demás casos, el capital final previsto en la planificación coincidirá exactamente con el mínimo fijado, y nuestro problema se reduce al *de extremos fijos estudiado en el apartado anterior.*

De todo lo expuesto se deduce que el conjunto de soluciones óptimas del plano fase en el problema de extremo final acotado inferiormente contiene al conjunto de soluciones óptimas del problema con extremos *final fijo* estudiadas en el apartado anterior. Toda solución óptima para el problema con extremo final fijo lo es también para el de extremo final inferiormente acotado, pues satisface las condiciones necesarias de Pontryagin expuestas en anteriores apartados, y, además, al ser $K(T) = K_T$, satisface también a la nueva condición de transversalidad [3, 14], sea cual sea el valor final del precio sombra del capital.

Pero en el problema con capital final inferiormente acotado hay que añadir, además, otras nuevas soluciones óptimas que no lo eran para las correspondientes condiciones de contorno en el problema con extremos fijos: aquellas que, cumpliendo las condiciones necesarias de óptimo de los apartados anteriores, terminen en un punto $(K(T), \psi(T))$ del plano fase tal que $K(T) > K_T$ y $\psi(T) = 0$, situado, por consiguiente, sobre el semieje positivo de abscisas.

La ampliación del conjunto de las soluciones óptimas posibles originada por esta "relajación" de las condiciones de contorno finales permite resolver un caso en el que, como vimos en el apartado 3–6, no existía trayectoria óptima compatible con la condición $K(T) = K_T$: el caso en que, con unas condiciones de contorno fijadas K_0, K_T tales que

$$0 < K_0 < K^* \qquad , \qquad 0 < K_T < K^*$$

el periodo de planificación era demasiado largo para mantener la trayectoria en el primer cuadrante del plano fase. Vimos que las trayectorias óptimas con estas condiciones de contorno se van aproximando cada vez más al punto de equilibrio del sistema a medida que el periodo de planificación aumenta a partir de un cierto valor. Por tanto, las trayectorias óptimas calculadas para una sucesión creciente de valores del periodo se iniciarán con valores del precio sombra del capital, $\psi(0)$ cada vez más altos — más próximos al brazo de estabilidad — y terminarán con valores finales $\psi(T)$ del precio sombra cada vez menores — más próximos a cero — Las propiedades ya estudiadas de existencia y unicidad de las soluciones del sistema diferencial nos aseguran que hay una trayectoria — la determinada por un cierto periodo de planificación T_0 — que pasa de un stock de capital K_0, al K_{T_0} en el tiempo T_0, con un precio sombra final del capital igual a cero — $\psi(T_0) = 0$ — Este periodo de tiempo, T_0, es el mayor de los periodos de planificación posibles para los cuales existe una trayectoria óptima que empiece en K_0 y termine en K_T. Si intentamos determinar la trayectoria óptima que traslada al sistema del nivel de stocks K_0 al K_T en un intervalo de tiempo $T > T_0$, nos encontraremos con que la correspondiente solución al sistema formado por las condiciones necesarias de optimalidad tiene una porción de su trayectoria — la parte final de la misma — por debajo del eje de abscisas. La consideración de precios sombra del capital negativos a lo largo de una trayectoria óptima daría lugar a inconsistencias en la interpretación económica de la solu–

ción (*), riesgo que en nuestro problema no puede presentarse, puesto que, como hemos visto, las trayectorias que incluyan valores negativos del precio sombra del capital no pueden aceptarse entre las óptimas. Luego, si la única trayectoria que satisface las condiciones necesarias de optimalidad y las condiciones de contorno ha de ser rechazada por contener valores negativos del precio sombra, es evidente que en este caso concreto no existe ninguna trayectoria óptima que sea solución al problema.

Pero si, para los mismos valores de K_0, K_T y T, admitimos una posible desigualdad del tipo $K(T) > K_T$, entonces sí existe una trayectoria óptima que satisfaga las condiciones del problema, que será precisamente la que, iniciándose en K_0 con algún valor del precio sombra del capital mayor que el de la trayectoria rechazada en el caso anterior, se desplaza continuamente a la derecha de éste, es decir, más próxima al punto de equilibrio — y por tanto, mas lentamente — para terminar, al cabo de un tiempo T, en un punto del eje de abscisas, con un capital final $K(T) > K_T$ y un precio sombra final $\psi(T)$ igual a cero — con lo cual satisface también la condición de transversalidad—. Vemos, por tanto, que la relajación de las condiciones de contorno finales amplía el conjunto de las posibles trayectorias óptimas, dando solución al problema en casos que no la tendrían con unas condiciones finales rígidas.

Por último, vamos a considerar brevemente el caso en que la relajación de las condiciones finales es total, pudiendo $K(T)$ tomar cualquier valor dentro de los permitidos por la regulación dinámica del sistema. Este caso tiene realmente menos interés desde el punto de vista económico, ya que, por muy discutible que resulte el nivel de capital final que cada generación debe legar a sus sucesores, es evidente que una despreocupación total del planificador en torno a este tema es, como actitud moral, dificilmente justificable. Algunos economistas han interpretado esta nueva versión del problema como el planteamiento correcto de un planificador que supiera que la

(*) Véase, por ejemplo, el tratamiento que da a este problema David Cass en "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem" op.cit.

sociedad objeto de su atención va a desaparecer justamente a la terminación del periodo T y que, en consecuencia, el problema de las generaciones futuras no existe. Claro está que una hipótesis tan improbable como ésta de la "terminación del mundo" convierte prácticamente el caso de optimización con extremo final libre en un "gedanken Experiment" o mera elucubración mental.

Desde el punto de vista teórico, en cambio, tiene algún interés el estudio de este caso en cuanto que completa el cuadro de posibilidades de aplicación de las condiciones de transversalidad y establece semejanzas y diferencias con el modelo de crecimiento óptimo con horizonte infinito que se analizará en el próximo capítulo. Si el extremo final de la trayectoria queda totalmente indeterminado, el conjunto de los valores finales admisibles del stock de capital es una variedad unidimensional que llena todo el espacio de las variables de estado. Por tanto, el vector numérico determinado por, la función auxiliar a la terminación de la trayectoria, ψ (T), deberá ser ortogonal a todo vector del espacio de las variables de estado, y, por consiguiente, nulo.

La interpretación económica de este resultado es totalmente congruente con el planteamiento general del modelo como modelo de consumo: puesto que el capital carece de interés por sí mismo, y su acumulación tiene como finalidad única la producción de consumo futuro, es natural pensar que, en el instante en que el mundo se termina, la sociedad no considere rentable la acumulación de una unidad más de capital y, por tanto, su precio de demanda será cero, con lo que el capital adquiere circunstancialmente la consideración de bien libre.

En esta versión del problema con nivel de capital final libre la condición ψ (T) = 0 forma parte de las condiciones necesarias de optimalidad, y nos proporciona una relación de ligadura sustitutiva de la K (T) = K_T en el caso de extremo final fijo. Ahora, solamente las trayectorias que terminen en algún punto del eje de abscisas serán óptimas. Para cada valor del stock de capital inicial y cada periodo de tiempo fijado T existirá un valor inicial del precio sombra del capital que dé origen a una trayectoria solución del sistema de ecuaciones diferenciales, de duración T y con punto final en el eje de abscisas.

Es interesante observar que, en un crecimiento óptimo con capital final indeterminado, todas las trayectorias tienen al menos una parte —la última— contenida en la región del plano fase situada por debajo de la separatriz, y en la que toda la la producción se destina al consumo. Si el periodo de planificación es lo suficientemente corto, toda la trayectoria estará comprendida en la región $s = 0$. Si, con el mismo capital inicial, alargamos suficientemente el periodo de tiempo, las trayectorias comenzarán en la región $s > 0$, —siempre para un valor inicial del stock de capital inferior al correspondiente del brazo estable— penetrando en un cierto instante en la región $s = 0$ hasta alcanzar el eje de abcisas para algún valor de K. La explicación económica de este tipo de comportamiento social óptimo es evidente: la sociedad solamente destinará parte de su producción a bienes capital cuando la duración del programa le permita recoger los frutos de su ahorro en forma de bienes de consumo, de manera que obtenga, en conjunto, una utilidad mayor que la que hubiera conseguido consumiéndolo todo desde el principio o, lo que es lo mismo: el interés social por los bienes de capital disminuye a medida que el final del periodo se aproxima. Para periodos de planificación muy cortos, el final del periodo está lo suficientemente próximo para que, ya desde el principio, se desestime socialmente la inversión en bienes de capital, y todo el producto se consuma. Para periodos suficientemente largos, la decisión de consumir desde el primer momento todo el producto puede no ser la óptima, pues la disminución del stock de capital repercute, en último término, en una reducción ulterior de bienes de consumo; probablemente proporcione una mayor utilidad global una política de distribución adecuada del producto entre inversión y consumo en una primera etapa, de manera que el stock de capital no se deteriore tan rápidamente —si el capital inicial es inferior al de equilibrio, la trayectoria óptima puede incluso determinar un cierto aumento del mismo al comienzo del periodo — pasando después, a partir de un cierto instante —el momento en el que la trayectoria óptima correspondiente cruza la separatriz — a consumir todo el producto hasta la terminación del periodo.

El capital final determinado por la trayectoria carece de valor, puesto que la terminación del mundo impedirá el disfrute de los bienes de consumo que se pudieran producir con él. Este hecho queda convenientemente reflejado en su valoración social nula. La tendencia natural de la sociedad sería la de consumir en el último instante, todo el capital disponible si éste fuese transformable en consumo. La existencia de un stock de capital no nulo al final del periodo es debida — esencialmente a la hipótesis adoptada de no convertibilidad a posteriori del capital.

3.8. Significado económico de las condiciones necesarias de optimalidad

La asimilación de la variable auxiliar ψ (t) al precio de demanda, o precio sombra de la unidad de capital valorado en términos de consumo da a las condiciones necesarias de optimalidad según el principio de Pontriagin obtenidas en el apartado 3—4 un significado totalmente coherente con la problemática económica que subyace bajo el planteamiento matemático de la cuestión, hasta el punto de que Dorfman ha llegado a conclusiones y condiciones necesarias similares a las obtenidas a partir del principio de máximo a través de razonamientos intuitivos de caracter puramente económico, apoyándose en el principio de optimalidad de Bellman. (*)

Dejando aparte la ecuación de la evolución dinámica del sistema, cuya interpretación económica se estudió conjuntamente con su obtención en el apartado 3—1, pasemos a considerar *el sentido económico de las relaciones representadas* por la ecuación diferencial auxiliar y por las igualdades a que la aplicación del principio de máximo da lugar en las dos regiones en que la separatriz divide al plano fase.

(*) Robert Dorfman: "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory" The American Economic Review, Diciembre 1.969, Vol , 59 núm. 5.

Estudiemos primeramente la función hamiltoniana, que, según lo visto en el apartado 3—3. de este capítulo, tiene para nuestro problema la forma

$$\mathcal{H}(t) = U \quad ((1-s(t))\ F\ (K(t)) \quad + \psi(t)\ (s(t)\ F\ (K(t)) - \delta\ K(t))$$

En cada instante, t, el primer sumando del segundo miembro es precisamente el flujo de utilidad total percibida por el grupo social objeto de estudio, —dado su nivel de stock de capital y fijada su proporción a consumir— en ese instante, medido en unidades de utilidad. En cuanto al segundo sumando, está formado por el producto de dos factores, el primero de los cuales nos representa la valoración social o precio sombra de la unidad de capital en ese instante medido en unidades de utilidad, y el segundo es precisamente la parte del producto destinada a la formación de capital menos la cantidad correspondiente a la depreciación, es decir, el flujo de inversión neta, medido en unidades de producto. La multiplicación del flujo de inversión neta por la valoración de la unidad de capital en términos de utilidad del consumo realiza la función de un cambio de unidades que homogeneizan los dos sumandos de la expresión, dando al segundo de ellos el caracter de inversión neta medida en unidades de utilidad. La función $\mathcal{H}$ (t) representa, por tanto, el valor en cada instante del flujo de producto neto obtenido por la sociedad considerada, cuando éste se mide en unidades de utilidad.

El principio de máximo de Pontryagin nos dice que la decisión óptima a tomar en el problema consumo—ahorro es la de dedicar a formación bruta de capital en cada instante la fracción s (t) del producto tal que, para los valores corrientes del stock de capital y del precio sombra unitario del mismo, maximice el valor de la hamiltoniana en ese instante. A la vista de lo expuesto en el párrafo anterior, ésto nos lleva a la interesante conclusión de que la política óptima a seguir por el grupo social con el fin de maximizar su utilidad total consiste en ahorrar la porción de producto que haga máximo en ese instante su producto total neto instantáneo. Basta, por tanto, que la sociedad maximice su renta momento a momento, al margen de toda consideración de futuro, y sobre la base de los stocks de capital existentes y de precios sombra del mismo que satisfagan la ecuación [3, 4], para que la trayec toria óptima de la relación ahorro–producto se vaya produciendo automáticamente. Pensándolo bien, no resulta demasiado sorprendente esta conclusión, habida cuenta de que una de las características esenciales del principio de máximo de Pontryagin consiste precisamente en que éste transforma básicamente un problema de optimización dinámica en uno de optimización estática. Por otra parte, vimos en el apartado 3–4 que, siendo nuestro problema autónomo, el valor de la hamiltoniana se conserva constante a lo largo de una trayectoria óptima. De aquí se deduce que, cuando la sociedad adopta la política óptima de maximizar en cada instante su producto total neto, éste alcanza constantemente el mismo valor a lo largo de todo el periodo de planificación.

En lo que respecta a la condición necesaria que determina el comportamiento dinámico de los precios sombra a lo largo del periodo, ecuación diferencial [3, 4], podemos también dar una interpretación que incluso permitiría reconstruirla sobre la base de un razonamiento puramente económico. Efectivamente, la ecuación [3, 4] se convierte, para los puntos situados encima de la curva separatriz, es decir, en la región en que se alcanza una igualdad entre los precios de oferta y demanda del capital en la

$$\dot{\psi}\ (t) = -\ \psi\ F'\ (K) + \psi\delta$$

Vamos a ver que ésta es precisamente la ecuación diferencial que refleja la evolución natural del precio del capital de acuerdo con las hipótesis de nuestro problema. Supongamos, en efecto, que deseamos calcular el precio actual, medido en unidades de utilidad de consumo, de una unidad de capital, cuando conocemos su rentabilidad instantánea desde el momento actual hasta la terminación del periodo de planificación T, r (τ), y su valor final a la terminación de éste, ψ_T, ambos medidos en unidades de utilidad. De acuerdo con nuestras hipótesis de que el capital está sujeto a una depreciación de coeficiente δ, y que no se admite, por el momento, ningún tipo de preferencia temporal por el consumo, el valor actual de una unidad de capital futura queda afectado por el factor $e^{-\delta \Delta t}$. El valor, en el instante t, de la unidad de capital, medido en unidades de utilidad, será, por tanto, igual al total de los rendimientos percibidos hasta la terminación del periodo, más el valor residual o final del capital transcurrido éste, todo ello valorado en *términos actuales, es decir*

$$\psi(t) = \int_t^T r(\tau)e^{-\delta(\tau-t)}\, d\tau + \psi_T \, e^{-\delta(T-t)}$$

Pero en una situación de equilibrio los factores productivos serían remunerados de acuerdo con su productividad marginal, que en nuestro caso es $F'(K(t))$. Parece, por tanto, razonable estimar la rentabilidad instantánea de la unidad de capital en términos de utilidad como su productividad marginal multiplicada por el precio, en unidades de utilidad, de dicha unidad de capital, es decir

$$r(t) = \psi(t)\; F'(K(t))$$

con lo que

$$\psi(t) = \int_t^T \psi(\tau)\; F'(K(\tau))e^{-\delta(\tau-t)}\, d\tau + \psi_T\, e^{-\delta(T-t)}$$

Ahora, para estudiar la evolución dinámica del precio, así calculado, de la unidad *de capital, obtendremos su derivada respecto al tiempo,* t, teniendo en cuenta que éste aparece como parámetro en el integrando y como extremo inferior de integración

$$\dot{\psi}(t) = -\,\psi(t)\; F'(K(t)) + \int_t^T \psi(\tau)\; F'(K(\tau))\; \delta e^{-\delta(\tau-t)} d\tau + \psi_T\, \delta e^{-\delta(T-t)} =$$

$$= -\,\psi(t)\, F'(K(t)) + \delta\; \left[\int_t^T \psi(\tau)\, F'(K(\tau))\, e^{-\delta(\tau-t)}\, d\tau + \psi_T\, e^{-\delta(T-t)}\right]$$

de donde

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)F'(K(t)) + \delta\, \psi(t)$$

que es precisamente la ecuación diferencial adjunta obtenida a partir de la aplica—

ción del principio de máximo (*). Esta ecuación nos dice, por tanto, que el precio sombra del capital debe evolucionar a lo largo de una trayectoria óptima de forma que su rendimiento bruto iguale a la depreciación.

3.9. Limitaciones del cálculo de variaciones clásico en el estudio de este modelo

Anteriormente al descubrimiento del principio de máximo de Pontryagin, el problema de la acumulación óptima del capital de acuerdo con un criterio aditivo se abordaba básicamente mediante las técnicas del cálculo de variaciones clásico. Tal es el caso, por ejemplo, del artículo de Ramsey, primero sobre tema. Se observa, sin embargo, en los trabajos publicados sobre esta cuestión a partir de la segunda mitad de la década de los sesenta, una sustitución creciente de éste método de trabajo por el del principio de máximo y sus derivaciones. No es simplemente una atracción por los instrumentos matemáticos más recientes lo que determina éste desplazamiento: lo que ocurre es que el principio de máximo presenta respecto al cálculo de variaciones notables ventajas para el estudio de estos modelos, algunas de las cuales son particularmente decisivas cuando en el modelo de crecimiento óptimo se adopta — y tal es nuestro caso— la razonable hipótesis de que el capital, una vez destinado a tal, no puede reconvertirse en consumo y que, por consiguiente, la máxima velocidad admisible de descapitalización del sistema está acotada. En este apartado vamos a tratar de hacer una breve revisión de estas ventajas, y de su mayor o menor transcendencia, tanto en lo que se refiere a la ampliación de las posibilidades de resolución del problema económico como en cuanto respecta a la mejora de las técnicas de cómputo del modelo numérico de las que haremos uso en posteriores capítulos.

Para ello vamos a comenzar verificando las transformaciones adecuadas en el modelo, a fin de plantearlo en la forma requerida para la aplicación del cálculo de

(*) E. Burmeister y A. Rodney Dobell. "Mathematical Theories of Economic Growth" Cap. 11 *Macmillan Series in Economics* 1.970.

variaciones clásico.

Nuestro primitivo planteamiento, orientado hacia la aplicación de las técnicas del control óptimo suponía una variable de estado K, gobernada por una ecuación dinámica

$$\dot{K} = s\ F\ (K) - \delta K$$

dependiente de una variable de control s cuya evolución en un intervalo de tiempo $t \in [0, T]$ habría que determinar con la condición de que maximizase el funcional objetivo

$$J = \int_0^T U\ [(1-s)\ F\ (K)]\ dt$$

satisfaciendo unas condiciones de contorno dadas. El cálculo de variaciones clásico, en cambio, no considera la existencia de una variable de control ni de una ecuación dinámica, sino que deriva las condiciones necesarias de máximo aplicando las condiciones de Euler –Lagrange a un funcional objetivo que dependa de la variable de estado y de su derivada, y que englobe por consiguiente la ecuación de variación de aquella en el tiempo, y la variable de control. Con el fin de adaptar nuestro problemas de ésta nueva formalización, eliminaremos la variable de control, o relación ahorro–producto, sustituyéndola por la variable consumo global, con lo que el funcional objetivo pasa a ser el

$$J = \int_0^T U\ (C)\ dt$$

y la ecuación dinámica

$$\dot{K} = F\ (K) - C - \delta K$$

de donde, eliminando ahora el consumo entre ambas, obtenemos el funcional.

$$J = \int_0^T U[F(K) - \dot{K} - \delta K]dt$$

que aparece ya en la forma adecuada para la aplicación de la condición de Euler–Lagrange. Ahora el problema se presenta en términos de encontrar la función K (t), definida en el intervalo [0, T] que maximice el valor de $\int_0^T U\,[F(K) - \dot{K} - \delta K]\,dt$ y que satisfaga las condiciones de contorno establecidas.

Ahora bien, dadas las hipótesis de nuestro modelo, y los condicionamientos económicos del problema, hay que tener en cuenta que no toda función K (t) que satisfaga las condiciones de contorno es una solución admisible para nosotros. Tanto K (t) *como* $\dot{K}$ (t) *podrán tomar solamente valores contenidos en un cierto* recinto de admisibilidad. Así, por ejemplo, una condición indispensable de la solución es que la trayectoria del capital se mueva siempre en el campo de los valores no negativos, puesto que un capital negativo carecería de sentido económico. Otro tanto podríamos decir del consumo, que debe ser en cada instante, no solamente no negativo, sino además, no superior al producto total, ya que, no siendo posible, de acuerdo con nuestras hipótesis, la reconversión a posteriori del capital en consumo, el nivel de éste *en cada periodo debe lógicamente estar limitado por el producto obtenido en el período.* En resumen tenemos

$$\dot{K}(t) \geqslant 0$$

y

$$0 \leqslant C(t) \leqslant F(K(t))$$

De ésta última limitación, y teniendo en cuenta la *nueva formulación adoptada por la* ecuación de comportamiento dinámico del sistema, resulta que la inversión neta $\dot{K}$ *deberá moverse en el intervalo*

$$-\delta K \leqslant \dot{K} \leqslant F(K) - \delta K$$

Las restricciones impuestas a las funciones K (t) y $\dot{K}$ (t) nos determinan el recinto de las soluciones admisibles del problema, de las cuales vamos ahora a tratar de seleccionar las posibles soluciones máximas. Como sabemos, la condición de Euler–Lagrange nos proporciona una condición necesaria que debe cumplir toda solución in–

terior al recinto admisible que sea un máximo relativo debil dentro del conjunto de soluciones admisibles. Las hipótesis impuestas a las funciones componentes de nuestro problema nos aseguran que se cumplen las condiciones de aplicabilidad de la ecuación de Euler–Lagrange –K es diferenciable con continuidad y U, considerada como función de K y $\dot{K}$, admite derivadas parciales segundas contínuas. Por tanto, podemos asegurar que toda solución máxima interior al recinto deberá satisfacer la igualdad

$$U'[F(K) - \dot{K} - \delta K][F'(K) - \delta] = \frac{d}{dt}[-U'[F(K) - \dot{K} - \delta K]] =$$

$$= -U''[F(K) - \dot{K} - \delta K][F'(K)\dot{K} - \ddot{K} - \delta \dot{K}]$$

ya que es aplicable el teorema de diferenciabilidad de Hilbert (*) al ser

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{K}^2} U(F(K) - \delta K - \dot{K}) = U''(F(K) - \delta K - \dot{K}) < 0$$

en notación ligeramente incorrecta pues suponemos que U es función de K y $\dot{K}$ en el primer miembro y solo de C en el segundo. Es evidente que las condiciones necesarias de máximo proporcionadas por el cálculo de variaciones clásico son mucho más incómodas de manejo que las obtenidas a partir del principio de máximo. Para empezar, aquí, en lugar del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo que tenemos es una ecuación que con seguridad será de segundo orden, ya que el coeficiente de $\ddot{K}$ es U'' (C) que, por hipótesis es siempre estrictamente negativo. Esta formulación de las condiciones de máximo no nos hubiera permitido aplicar el procedimiento iterativo de cálculo que –junto con un método adecuado para afrontar el hecho de que las condiciones de contorno estén en los dos extremos del periodo, (two–point boundary–value problem)– nos proporcionará la trayectoria numérica de las variables de estado y control a intervalos anuales, como se verá en posteriores capítulos. Por otra parte, el enmascaramiento de las diversas variables que

(*) M. R. Hestenes "Calculus of Variations and optimal Control Theory" Wiley. 1.966.

aparecen en la aplicación del principio de máximo, absorbidas en el cálculo de variaciones por $\dot{K}$ y $\ddot{K}$ nos priva de valiosa información en cuanto se refiere, por ejemplo, a la evolución de los precios sombra del capital y su influencia en el comportamiento de las trayectorias óptimas de acumulación del capital, influencia que, como hemos visto, amplía considerablemente la visión y manejo del problema desde el punto de vista económico.

Las desventajas del cálculo de variaciones clásico respecto al principio de máximo de Pontryagin anteriormente mencionadas no son, con todo, las más importantes, ya que ésta única condición necesaria de óptimalidad se puede expresar en una forma equivalente al sistema de condiciones derivado del principio de máximo, efectuando las transformaciones convenientes entre las váriables que exponemos a continuación.

Sabido es que el procedimiento habitual para transformar una ecuación diferencial de orden n en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden consiste en introducir adecuadamente n–1 nuevas variables cuyas derivadas primeras sustituyan a las derivadas de orden superior al primero en la ecuación primitiva.

En nuestro caso es preferible tomar como nueva función la

$$\psi (t) = U' (F (K) - \delta K - \dot{K})$$

que es, con signo cambiado, la variable canónica P utilizada en la teoría de Hamilton–Jacobi (*) pues

$$P(t) = \frac{\partial}{\partial \dot{K}} U (F (K) - \delta K - \dot{K}) = - U' (F (K) - \dot{K} - \delta K)$$

(*) M. R. Hestenes. op.cit.

con el mismo abuso de notación anteriormente empleado.

Las ecuaciones canónicas del problema variacional son entonces

$$\dot{K} = F(K) - \delta K - U'^{-1}(\psi)$$

$$\dot{\psi} = \psi(\delta - F'(K))$$

que son precisamente las ecuaciones [3, 13] y [3, 7] que describen el comportamiento del stock de capital y del precio sombra en nuestro problema de control cuando la trayectoria óptima correspondiente está por encima de la curva separatriz. La ecuación de definición de la nueva variable, ψ (t), es, por otra parte, precisamente la condición derivada de la maximización estática de la hamiltoniana para soluciones interiores al campo de variación de s (t), es decir, para soluciones interiores al recinto

$$-\delta K \leqslant \dot{K}(t) \leqslant F(K) - \delta K.$$

Vemos, por tanto, que para soluciones óptimas interiores al recinto de admisibilidad, — que son las únicas para las que tenemos la seguridad de que la ecuación de Euler—Lagrange constituye, efectivamente, una condición necesaria —, los métodos del cálculo de variaciones clásico permiten, aunque de forma indirecta, y más incómoda, llegar, mediante transformaciones adecuadas de las variables, a resultados equivalentes a los del principio de máximo. La verdadera limitación del cálculo de variaciones clásico, y, por consiguiente, la razón fundamental por la que la mayoría de los autores prefieren resolver el problema del crecimiento óptimo con las técnicas del control óptimo, reside precisamente en la imposibilidad de obtener, a través de las aplicaciones de Euler—Lagrange, trayectorias óptimas de acumulación de capital que se encuentren situadas parcialmente en la frontera del recinto de admisibilidad, es decir, que en algún momento de su evolución penetren en la región situada por debajo de la curva separatriz.

Consideremos, por ejemplo, el caso de un grupo social que, por razones derivadas de su ya elevado nivel de capital existente, o por cualquier otro tipo de consideraciones de caracter sociológico o político —interés por conseguir, durante un cierto periodo, un nivel mayor de bienestar para la población, aún a costa de reducir el nivel de capital restante — planifica un programa de acumulación óptima de capital para un periodo T, de forma que el nivel mínimo exigido del stock de capital final sea lo suficientemente pequeño para permitir que, en una cierta porción del periodo de planificación el comportamiento óptimo de la sociedad consista en consumir todo el producto, determinando una inversión bruta nula. Para los momentos en que esto ocurra, la solución óptima verifica la igualdad

$$\dot{K} = -\ \delta K$$

es decir, se encuentra en la frontera del recinto de admisibilidad de soluciones. Pero la ecuación de Euler—Lagrange es, como sabemos, una condición necesaria de optimalidad solamente para las soluciones que sean interiores al recinto admisible para todo $t \in [0, T]$. En el caso que acabamos de mencionar, en el que la solución óptima tiene una parte que no es interior al recinto, ocurrirá, por tanto, que la trayectoria óptima no tiene por qué satisfacer necesariamente la condición de Euler—Lagrange, —no aparecerá entre el conjunto de sus soluciones— y, por consiguiente la aplicación de los métodos del cálculo de variaciones clásico no nos proporcionan en este caso la solución óptima buscada.

Sin embargo, ésta solución existe. Ni la aplicación directa de la ecuación de Euler—Lagrange ni de la estudiada transformación de variables que la expresa en forma similar a la resultante de la aplicación de las técnicas del control óptimo nos pueden proporcionar la solución deseada — observemos que dicha transformación, aplicada a una ecuación válida solamente para soluciones interiores, no nos proporciona todas las condiciones necesarias del principio de máximo, sino solamente las correspondientes a trayectorias situadas en la región estrictamente por encima de la separatriz, que es precisamente la región de las soluciones interiores—. El principio de máximo, aplicado directamente, sí nos proporciona, en cambio, la trayectoria óptima como solución, en cuanto que es condición necesaria de óptimalidad para trayectorias que discurran total o parcialmente en la zona de la inversión bruta nula, es decir, en la frontera del conjunto admisible.

Podemos concluir, por tanto, que la gran ventaja de los métodos del control óptimo sobre los del cálculo de variaciones clásico en nuestro problema económico estriba en que aquellos permiten obtener la solución óptima buscada en casos en que el cálculo de variaciones clásico se muestra ineficaz. Cuando, en los próximos capítulos, obtengamos soluciones numéricas concretas para los diversos casos que estudiaremos del problema del crecimiento óptimo, quedará de manifiesto la existencia de condiciones de contorno para las cuales el cálculo de variaciones clásico no nos hubiera permitido calcular la trayectoria óptima, y que en cambio, no plantean ninguna dificultad especial cuando el método de resolución aplicado es el del principio de máximo, *lo que corroborará la mayor generalidad — y, por tanto, la mayor utilidad—* de las técnicas del control óptimo.

Observemos, por último que, como el problema económico planteado hasta ahora da lugar a un sistema de ecuaciones autónomo, el funcional objetivo, modificado de forma que permita aplicar la ecuación de Euler—Lagrange, es la integral de una función que depende explícitamente de K y de $\dot{K}$, pero no del tiempo t. Esta circunstancia nos permite aplicar como condición necesaria de optimalidad para soluciones interiores una variante simplificada de dicha condición, que en nuestro caso da lugar a la relación

$$U(K, \dot{K}) - \dot{K}\,\frac{\partial U(K, \dot{K})}{\partial \dot{K}} = \text{constante}$$

que es la

$$U(C) + \dot{K}\, U'(C) = \text{constante}$$

y que nos dice que en una trayectoria que satisfaga las condiciones necesarias de optimalidad la suma de la utilidad derivada del consumo más el producto de la inversión multiplicada por el precio sombra unitario de la unidad de capital —no olvidemos que, en los resultados que procedan del cálculo de variaciones nos movemos exclusivamente entre trayectorias interiores al recinto admisible–es constante. Esta conclusión es equivalente, para soluciones interiores, a la obtenida para toda solución óptima en la aplicación del principio de máximo a problemas autónomos, en el apartado 3.4, en el que vimos que a lo largo de una trayectoria óptima la hamiltoniana —es decir, el producto neto— se mantiene constante en el tiempo.

3.10. Las condiciones suficientes de optimalidad

Hasta ahora hemos identificado las trayectorias solución del sistema diferencial determinado por la aplicación del principio de máximo de Pontryagin con las soluciones óptimas de nuestro problema. En realidad, esta identificación no está justificada a priori, pues el principio de máximo impone las condiciones que necesariamente deberá cumplir la trayectoria óptima buscada, pero no nos garantiza que la trayectoria única que satisface al sistema correspondiente de condiciones necesarias sea precisamente la que maximiza el funcional de la utilidad total entre todas las que, evolucionando de acuerdo con la ecuación dinámica de la variable de estado, satisfacen las condiciones de contorno establecidas, pues tal trayectoria óptima buscada podría no existir.

El establecimiento de condiciones suficientes que nos determinen si una trayectoria que satisface las condiciones necesarias del principio de máximo es efectivamente óptima entre todas las admisibles no es fácil en el caso general. Pero en el problema concreto que nos ocupa, las hipótesis establecidas acerca de la concavidad estricta de las funciones de producción y de utilidad del consumo permiten demostrar fácilmente que la trayectoria única que en nuestro caso satisface las condiciones necesarias de optimalidad del principio de máximo para unas condiciones de contorno dadas es precisamente la óptima, es decir, la que produce un mayor nivel de utilidad total entre todas las trayectorias admisibles que satisfacen esas condiciones de contorno. Las numerosas versiones de esta demostración existentes en la lite ratura económica son, en esencia, la misma (*), y se basan sustancialmente en la propiedad característica de una función estrictamente cóncava, $f(x)$, cuya segunda derivada es necesariamente negativa y que, por tanto, verifica

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)\, f'(x_1)$$

es decir

$$f(x_1) - f(x_2) \geqslant (x_1 - x_2)\, f'(x_1)$$

produciéndose la relación de igualdad solamente cuando $x_1 = x_2$.

Sea $K_1(t)$ la trayectoria de acumulación de capital que satisface la ecuación de comportamiento dinámico del sistema y el principio de máximo de Pontryagin con unos precios sombra $\psi_1(t)$ del capital y una relación ahorro—producto $s_1(t)$, y que verifica además las condiciones de contorno $K_1(0) = K_0, K_1(T) \geqslant K_T$. Sea $K_2(t)$ otra trayectoria cualquiera admisible, es decir, tal que satisfaga la ecuación dinámica del sistema, y las condiciones de contorno $K_2(0) = K_0$, $K_2(T) \geqslant K_T$, y sea $s_2(t)$ su correspondiente función de relación ahorro—producto. Supongamos además que las trayectorias $K_1(t)$ y $K_2(t)$ no coinciden total—mente en el intervalo $[0, T]$, sino que se diferencian al menos en algún punto t_1 de su trayectoria tal que $K_1(t_1) \neq K_2(t_1)$ —y, dada la continuidad de las trayectorias del capital, si ambas se diferencian en un punto t_1, existirá un entorno $U_{t_1, \epsilon}$ de centro t_1 en el que no coinciden— y vamos a ver que la utilidad total del consumo obtenido con la trayectoria de acumulación $K_1(t)$ en el intervalo $[0, T]$ es mayor que la conseguida con $K_2(t)$, es decir, que

$$\int_0^T U(C_1)\, dt > \int_0^T U(C_2)\, dt$$

con lo que $$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)]\, dt > 0$$

(*) Seguimos aquí la indicada por David Cass en "Optimum growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: a Turnpike Theorem", op. cit.

siendo

$$C_i = (1-S_i)\, F(K_i) \qquad i = 1, 2$$

Para demostrarlo efectuaremos en el integrando las siguientes transformaciones, que lo dejan invariante:

a) Sumaremos y restaremos la expresión

$$U'(C_1)\,(C_1 - C_2)$$

b) Sumaremos y restaremos también la expresión

$$U'(C_1)\, F'(K_1)\,(K_1 - K_2)$$

c) Sumaremos las expresiones

$$\psi_1\,(s_1\, F(K_1) - \delta\, K_1 - \dot{K}_1)$$

y

$$-\psi_1\,(s_2\, F(K_2) - \delta\, K_2 - \dot{K}_2)$$

que son iguales a cero en todo punto, ya que ambas trayectorias son admisibles y satisfacen la ecuación de comportamiento dinámico del sistema

$$\dot{K}_i = s_i\, F(K_i) - \delta\, K_i \qquad i = 1, 2$$

con todo ello tenemos que

$$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)]\,dt = \int_0^T [U(C_1) - U(C_2) - U'(C_1)\,(C_1 - C_2) +$$

$$+ U'(C_1)\,(C_1 - C_2) + \psi_1\,[s_1\, F(K_1) - \delta\, K_1 - \dot{K}_1] - \psi_1\,[s_2\, F(K_2) - \delta K_2 - \dot{K}_2] +$$

$$+ U'(C_1)\, F'(K_1)\,(K_1 - K_2) - U'(C_1)\, F'(K_1)\,(K_1 - K_2)]\; dt$$

Pero sabemos que

$$C_i = F(K_i) - s_i\, F(K_i) \qquad i = 1, 2$$

lo que, sustituido adecuadamente en la anterior expresión, nos da

$$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)]\,dt = \int_0^T [U(C_1) - U(C_2) - U'(C_1)(C_1 - C_2) +$$

$$+ U'(C_1)[F(K_1) - F(K_2) - s_1 F(K_1) + s_2 F(K_2)] + \psi_1 [s_1 F(K_1) - \delta K_1 - \dot{K}_1] -$$

$$- \psi_1 [s_2 F(K_2) - \delta K_2 - \dot{K}_2] + U'(C_1) F'(K_1)(K_1 - K_2) - U'(C_1) F'(K_1)(K_1 - K_2)]\,dt$$

Y agrupando convenientemente los términos de esta última expresión, obtenemos

$$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)]\,dt = \int_0^T [[U(C_1) - U(C_2) - U'(C_1)(C_1 - C_2)] +$$

$$+ [\psi_1 - U'(C_1)][s_1 F(K_1) - s_2 F(K_2)] + [U'(C_1) F'(K_1) - \delta \psi_1][K_1 - K_2] +$$

$$+ U'(C_1)[F(K_1) - F(K_2) - F'(K_1)(K_1 - K_2)] - \psi_1 [\dot{K}_1 - \dot{K}_2]]\quad dt$$

Ahora bien, de la concavidad de la función de utilidad del consumo deducimos que

$$U(C_1) - U(C_2) \geqslant U'(C_1)(C_1 - C_2)$$

Por otra parte, la concavidad estricta de la función de producción nos dice que

$$F(K_1) - F(K_2) \geqslant F'(K_1)(K_1 - K_2)$$

en todo punto del intervalo [0, T]. Además, para los puntos del entorno $U_{t_1,\varepsilon}$ (de medida evidentemente no nula) en los que $K_1(t) \neq K_2(t)$, la desigualdad anterior se cumple en sentido estricto. Como la función de utilidad es siempre positiva, podemos concluir que

$$\int_0^T [[U(C_1) - U(C_2) - U'(C_1)(C_1 - C_2)] + U'(C_1)[F(K_1) - F(K_2) -$$

$$- F'(K_1)(K_1 - K_2)]]\,dt > 0$$

y que, por tanto

$$\int_0^T U(C_1) - U(C_2) > \int_0^T [[\psi_1 - U'(C_1)][s_1 F(K_1) - s_2 F(K_2)] +$$

$$+ [U'(C_1) F'(K_1) - \delta \psi_1][K_1 - K_2] - \psi_1 [\dot{K}_1 - \dot{K}_2]] \quad dt$$

Integrando por partes el último sumando obtenemos

$$\int_0^T \psi_1 [\dot{K}_1 - \dot{K}_2] dt = \psi(T)[K_1(T) - K_2(T)] - \psi_1(0)[K_1(0) - K_2(0)] -$$

$$- \int_0^T \dot{\psi}_1 [K_1 - K_2] dt$$

con lo que, sustituyendo en la expresión precedente resulta

$$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)] dt > \int_0^T [[\psi_1 - U'(C_1)][s_1 F(K_1) - s_2 F(K_2)] +$$

$$+ [\dot{\psi}_1 + U'(C_1) F'(K_1) - \delta \psi_1][K_1 - K_2]] \quad dt - \psi_1(T)[K_1(T) - K_2(T)] +$$

$$+ \psi_1(0) [K_1(0) - K_2(0)]$$

Ahora bien, el precio sombra ψ_1 de la trayectoria K_1 satisface las condiciones necesarias de optimalidad, con lo cual ha de verificar las ecuaciones [3, 4] y [3, 5]. Como vimos en el apartado 3.4, ambas condiciones se pueden escribir, para los valores de t correspondientes a puntos de la trayectoria situada por encima de la curva separatríz en la forma [3, 6] y [3, 7], mientras que para los puntos que están por debajo de la separatriz, las condiciones de máximo se transforman en la [3, 12] y la $s = 0$. En ambos casos es evidente que la trayectoria solución de las condiciones necesarias verifica

$$\dot{\psi}_1 + U'(C_1) F'(K_1) - \delta \psi_1 = 0$$

en todo punto $t \in [0, T]$, con lo que podemos suprimir el segundo sumando de la integral, obteniendo

$$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)]\,dt > \int_0^T [\psi_1 - U'(C_1)]\,[s_1 F(K_1) - s_2 F(K_2)]\,dt -$$

$$-\psi_1(T)\,[K_1(T) - K_2(T)] + \psi_1(0)[K_1(0) - K_2(0)]$$

Examinemos ahora la expresión que aparece bajo el signo integral en el segundo miembro. *Está formada por el producto de dos factores, el primero de los cua –* les es precisamente la diferencia entre los precios de demanda y de oferta de la unidad de capital medidos en términos de utilidad a lo largo de la trayectoria $K_1(t)$. *Pero ésta trayectoria es precisamente la que satisface las condiciones necesarias de* optimalidad, luego en cada instante $t \in [0, T]$ ocurrirá necesariamente una de estas dos cosas

a) La trayectoria se encuentra en ese instante por encima de la curva separatriz, es decir, en la región en que los precios de oferta y demanda del capital coinciden. *El integrando es cero para ese valor de* t.

b) La trayectoria $K_1(t)$ está en ese instante por debajo de la curva separatriz, *es decir, en la región donde el precio de demanda del capital es menor que el* precio de oferta del mismo y, por consiguiente, toda la producción se destina al consumo. En ese instante será

$$\psi_1 < U'(C_1)$$

y

$$s_1 = 0$$

con lo que el integrando tomará un valor mayor o igual que cero. En resumen, es

$$\int_0^T [\psi_1 - U'(C_1)]\,[s_1\ F(K_1) - s_2\ F\ (K_2)]\ dt \geqslant 0$$

de manera que

$$\int_0^T [U(C_1) - U(C_2)] > \psi_1(0)[K_1(0) - K_2(0)] - \psi_1(T)[K_1(T) - K_2(T)]$$

Hemos llegado a esta desigualdad utilizando las propiedades de concavidad de la función de utilidad y de concavidad estricta de la función de producción y la caracterización de la trayectoria $K_1(t)$ como solución del sistema de condiciones necesarias de optimalidad. Pero además, ambas trayectorias han de cumplir las condiciones de contorno anteriormente especificadas, y de las que vamos a hacer uso seguidamente.

Para comenzar, ambas trayectorias verifican en el instante inicial $K_1(0)=K_0$ con lo que

$$\psi_1(0)\,[K_1(0) - K_2(0)] = 0$$

Por otra parte, las condiciones de transversalidad requieren que la trayectoria $K_1(t)$ satisfaga en el punto T la igualdad

$$\psi_1(T)\,[K_1(T) - K_T] = 0$$

de manera que si $K_1(T) > K_T$

será $\psi_1(T) = 0$

con lo que $\psi_1(T)\,[K_1(T) - K_2(T)] = 0$

Pero si $K_1(T) = K_T$

ocurrirá que, como la trayectoria admisible $K_2(t)$ ha de ser

$$K_2(T) \geqslant K_T$$

será $K_2(T) \geqslant K_1(T)$

Por otra parte, hemos visto que la trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad verifica en todo $t \in [0, T]$ que

$$\psi_1 (t) \geqslant 0$$

Luego de todo ello podemos concluir que

$$\psi_1 (T) [K_1 (T)-K_2 (T)]<0$$

y por tanto

$$\int_0^T [U_1 (C) - U_2 (C)] \ dt > 0$$

Con todo lo cual quda demostrado que la trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin produce una utilidad total mayor que la obtenida a partir de cualquier otra trayectoria admisible, y, por tanto, es efectivamente la trayectoria óptima buscada. Así pues, en nuestro modelo de crecimiento económico óptimo, las condiciones necesarias de optimalidad resultan ser también suficientes.

4. EXTENSIONES DEL MODELO

4.1. La introducción de versiones no autónomas

El capítulo anterior de este trabajo ha estado dedicado al análisis detallado de un modelo de crecimiento económico óptimo en un caso especialmente simple, construido *a base de unas hipótesis simplificadoras tales que determinan un modelo* matemático de optimización autónomo. La no aparición en forma explícita de la variable tiempo en las relaciones determinantes de la trayectoria óptima simplifica considerablemente el estudio del modelo y hace más asequible su comprensión y manejo. Pero, por otra parte, las citadas hipótesis simplificadoras constituyen otras tantas restricciones en cuanto el acercamiento de nuestro modelo a la realidad económica. Lo que vamos a hacer en lo sucesivo y hasta la terminación de este capítulo, va a consistir precisamente en admitir sucesivas modificaciones del modelo estudiado, de forma que lo conviertan en un modelo de crecimiento más próximo a la realidad económica, y, por ende más complejo. Cada una de estas modificaciones va a introducir el factor tiempo como variable explícita del modelo, convirtiéndolo así en un sistema no autónomo.

Las modificaciones que vamos a efectuar han sido seleccionadas entre todas las posibles porque creemos que son aquéllas cuya eliminación aleja más notoriamente el modelo de la realidad económica, desfigurando considerablemente las trayectorias óptimas de acumulación deseadas. Afectan a las hipótesis de crecimiento de la población, preferencia temporal al consumo y dependencia explícita de la función de producción respecto al tiempo.

Aunque en último término el modelo de crecimiento económico que hemos elegido para la obtención numérica de trayectorias óptimas lleva incorporadas las tres modificaciones apuntadas, y es, por consiguiente, un modelo no autónomo, no por ello disminuye el interés del estudio detallado del modelo de crecimiento autónomo efectuado en el capítulo anterior ya que, como veremos seguidamente, la técnica a seguir en el análisis de los modelos de crecimiento óptimo no autónomos consiste precisamente en transformarlos, mediante adecuados cambios de variable, en modelos autónomos o, al menos, que mediante adecuadas transformaciones den lugar a un sistema autónomo de condiciones necesarias del tipo del estudiado o similar, y a los que son aplicables las conclusiones obtenidas a partir de aquél. Podemos, pues, concluir que el capítulo anterior es parte fundamental en nuestro análisis, puesto que describe el modelo de crecimiento óptimo en el que acabarán revertiendo sus diversas variantes. El objeto del presente capítulo es precisamente la descripción de estas variantes y el estudio de los métodos que nos permitirán adaptarlas el esquema autónomo estudiado, con alguna ligera modificación de éste.

4.2. El modelo con población creciente

4.2.1. Planteamiento del modelo

La hipótesis de población constante impuesta al modelo del capítulo anterior es considerablemente restrictiva en cuanto a acercamiento a la realidad se refiere, pues no parece fácil encontrar una comunidad cuya población permanezca inalterable durante un período de tiempo largo. Las poblaciones de cada país o sistema económico varían en el tiempo, en general, creciendo, y el caso considerado anteriormente de crecimiento nulo de la población no pasa de ser un caso particular infrecuente. Ahora bien, el crecimiento de la población —y, por tanto, de la mano de obra, pues no olvidemos que las hemos supuesto proporcionales— infiere considerablemente en el volumen de producto obtenido haciendo, en general, más deseable la acumulación de capital con que proveer de equipo adecuado a la creciente mano de obra. Por otra parte, una mayor población disfrutando de un elevado nivel de consumo acrecienta la valoración de éste, lo que podría reflejarse en el funcional a utilizar. Por todo lo cual, es muy de esperar que el crecimiento de la población afecte de forma importante a las trayectorias óptimas buscadas, lo que hace aconsejable su consideración.

Pero la inclusión de una población creciente presenta la desventaja de incluir el tiempo como variable explícita en el modelo. Ahora, para distintos instantes de tiempo, una variable exógena al modelo toma valores diferentes, con lo que el encuadre económico en que las variables endógenas se mueven no permanece constante en el tiempo, y el significado que adquieren sus valores depende del instante en que los toman. En suma, tal situación dará lugar a un problema de optimización no autónoma.

La nueva hipótesis que vamos a imponer acerca de la población para sustituir a la de población constante es la de que ésta —y, por tanto, el trabajo— crece proporcionalmente a su valor corriente, es decir, a tasa constante. Por consiguiente, la evolución de la mano de obra en el tiempo vendrá dada por la función exponencial

$$L\ (t) = L_0\ e^{\rho t}$$

siendo ρ su tasa de crecimiento y L_0 el volumen de trabajo existente en el instante $t=0$— la hipótesis de crecimiento exponencial nos permite fijar cualquier instante como inicial, sin más que tomar como L_0 la mano de obra en ese instante— con lo que $L\ (t) \in C^\infty$.

Ahora la función de producción depende de las dos variables, capital y trabajo, que en general toman valores distintos en instantes distintos, pero de las que una es endógena y la otra, exógena. En el modelo con población constante era muy sencillo eliminar esta última variable del modelo, convirtiendo la función de producción en función de una sola variable, K. Ahora la variación en el tiempo del trabajo nos impide llevar a cabo tal simplificación. Podemos, no obstante, llegar a unas ecuaciones y a unas configuraciones de las trayectorias óptimas semejantes a las obtenidas en la sección anterior sin más que redefinir adecuadamente las variables y parámetros del modelo de manera que éste presente una estructura formal en todo semejante a la del modelo con población constante estudiado.

Vamos a tomar ahora como variable de estado la relación capital-trabajo

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$$

o cantidad de capital empleada en la producción por trabajador –entendiéndose por trabajador no la unidad persona física empleada en la producción, sino la unidad jornada laboral completa de trabajo anual– como ya especificamos en las hipótesis establecidas al comienzo de este estudio. Esta nueva variable absorbe las variaciones del stock de capital y del trabajo. Ahora, nuestra función de producción dependiente del stock de capital y del trabajo y homogénea de grado 1 puede escribirse de la forma

$$F(K, L) = L\,F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = L\,F(k, 1) = L\,f(k)$$

de donde

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L}$$

es decir, que f (k) *nos determina, para cada valor de* k, *el flujo de producto obtenido* por trabajador correspondiente a una relación capital-trabajo igual a k. De esta función producto por unidad de trabajo y de las hipótesis respecto a su comportamiento hemos tratado ya en el apartado 2.2.1. de este trabajo. Definiremos ahora las variables de este nuevo modelo en términos relativos, o unidades por trabajador: el producto por trabajador, f (k) se distribuye, de acuerdo con el valor de la relación ahorro-producto en inversión bruta por trabajador

$$s(t)\,f(k(t))$$

y consumo por trabajador

$$[1-s(t)]\,f(k(t))$$

Puesto que las variables fundamentales vienen ahora expresadas en términos de capital por unidad de trabajo, la ecuación del comportamiento dinámico del sistema tendrá que reflejar la variación en el tiempo de la nueva variable relativa ca–

pital por trabajador

$$\dot{k}(t) = \frac{d\,k(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)$$

en cada instante. Pero

$$\dot{k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)\,L(t) - \dot{L}(t)\,K(t)}{L^2(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \times \frac{K(t)}{L(t)}$$

que, puesto que

$$\dot{K}(t) = s(t)\,F(K(t), L(t)) - \delta\,K(t) = s(t)\,L(t)\,f(k(t)) - \delta\,L(t)\,k(t)$$

con lo que

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = s(t)\,f(k(t)) - \delta\,k(t)$$

y teniendo en cuenta que, en virtud de nuestras nuevas hipótesis respecto a la evolución de la población, es

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \rho$$

y que

$$\frac{K(t)}{L(t)} = k(t)$$

la ecuación que regula el comportamiento dinámico de la variable de estado resulta ser la

$$\dot{k}(t) = s\,f(k) - \delta\,k - \rho\,k = s\,f(k) - (\delta + \rho)\,k$$

Esta ecuacion tiene una forma similar a la (3,2) del modelo con población fija. Pero se diferencia de ella en dos puntos esenciales. En primer lugar, la ecuación (3,2) representaba valores absolutos de las variables, mientras que en esta solamente se manejan valores relativos de las variables, o valores por unidad de trabajo. En segundo lugar el papel realizado por el coeficiente de depreciación en la ecuación (3,2) es cubierto aquí por el nuevo coeficiente $\delta + \rho$, que es la suma del factor de depreciación, más la tasa de crecimiento de la población.

El significado de esta segunda diferencia es evidente desde el punto de vista económico, y está ligado profundamente a la primera de las diferencias mencionadas –expresión de la ecuación dinámica del sistema en términos absolutos o relativos– En efecto, la ecuación (3,2) nos indicaba que, para incrementar el stock de capital existente, era necesario determinar un flujo de inversión bruta tal que bastara a cubrir la depreciación correspondiente al nuevo nivel de capital, y aún sobrase la cantidad suficiente para incrementar el stock de capital. La *equivalente* ecuación en términos relativos nos indica que el crecimiento dinámico del stock de capital por trabajador se *realiza a base de la inversión bruta por trabajador* que queda sobrante después de que con esta inversión bruta se ha atendido a reponer el *desgaste del capital por trabajador disponible* y a proveer de un volumen de capital por trabajador igual al existente a los nuevos trabajadores que, en virtud del crecimiento *exponencial* de la población, acceden continuamente al proceso productivo a una tasa igual a ρ. En resumen, un incremento del stock de capital por trabajador en un instante dado requeriría un flujo de inversión bruta por trabajador que bastara a cubrir la depreciación de este nuevo volumen de capital y además, a proporcionar este nuevo nivel de capital por trabajador no sólo a los trabajadores ya existentes sino también al flujo de nuevos trabajadores que se han incorporado durante el instante transcurrido.

Solamente falta ahora, para determinar totalmente el modelo fijar el criterio de acuerdo con el cual se puede establecer una ordenación de las trayectorias que dé sentido al problema de la optimización, es decir, construir el funcional objetivo. Este deberá estar basado en la utilidad obtenida del consumo, puesto que, en último término, la finalidad del modelo resiste en la consecución del mayor nivel posible de bienestar colectivo compatible con la conservación de un stock de capital previamente fijado a beneficio de generaciones futuras. Puesto que las variables fundamentales aparecen ahora en términos relativos, por trabajador, parece natural determinar también la utilidad basándonos en el consumo por trabajador, con lo que el modelo aparecerá expresado de forma más homogénea, y las ecuaciones a que dé lugar resultarán más manejables. Por consiguiente, pasaremos a definir una *nueva función de utilidad del consumo por trabajador* que tenga características similares a la de utilidad global empleada en el capítulo anterior, es decir, que esté definida para todo $c \geqslant 0$ y sea C^2, positiva, creciente y estrictamente cóncava.

$$u(c) \geqslant 0 \qquad u'(c) > 0 \qquad u''(c) < 0$$

y que ademas satisfaga las condiciones en el límire

$$\lim_{c \to \infty} u'(c) = 0 \qquad \lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$$

y sea $u(0) = 0$.

Si el consumo global se reparte entre los participantes en la economía de forma aproximadamente equitativa, la utilidad derivada del consumo por trabajador o promedio de los consumos efectuados por los componentes del sistema económico será un valor representativo del bienestar social conseguido, y el funcional objetivo

$$J = \int_0^T u(c)\, dt$$

formado integrando la utilidad del consumo medio a lo largo del período de planificación será un criterio de optimalidad adecuado.

Observemos, con todo, que este criterio no refleja un hecho fundamental de nuestro nuevo modelo económico: el del aumento de la población. Pues, si la población crece, el número de personas que disfrutan de un determinado nivel de utilidad aumenta con el tiempo, lo que, en cierto modo, nos sugiere que el nivel de utilidad de un instante próximo a la terminación del período de planificación debe pesar más en el criterio de optimización que el de un instante próximo al comienzo del período, puesto que aquél es disfrutado por un mayor numero de personas. Un criterio de optimalidad que tiene en cuenta este factor es el que resulta de ponderar cada nivel de utilidad instantánea con el volumen de población en ese instante. Por razones de sencillez y orden en la exposición vamos a adoptar momentáneamente el criterio de optimización que integra las utilidades instantáneas del consumo por trabajador sin ponderarlas con el volumen de población, dejando para apartados próximos el análisis de las consecuencias de la inclusión de estos factores de ponderación en nuestro modelo.

Con las hipótesis establecidas el modelo resulta ser, formalmente, el mismo que el estudiado en el capítulo anterior. Realmente, las diferencias radican únicamente en que en éste los valores de las variables principales son absolutos mientras que en aquél son relativos, y, por otra parte, la posición que en el de población constante ocupaba δ ahora la ocupa el factor $\delta + \rho$. Las conclusiones y resultados de nuestro actual modelo serán, por tanto, los que resulten de sustituir en los del modelo con población fija el stock de capital medido en valores absolutos por el capital por trabajador, el consumo global por el consumo por trabajador y el factor de depreciación por el número que resulta de sumar al factor de depreciación la tasa de crecimiento de la población. La variable de control o relación ahorro-producto ahora pasa a interpretarse como la relación ahorro por trabajador-producto por trabajador, con lo que, en último término tiene en ambos modelos el mismo significado.

Ahora el máximo valor mantenible de la relación capital-trabajo será un $\tilde{k}$ tal que, cuando $s = 1$

$$\dot{\tilde{k}} = f(\tilde{k}) - (\delta + \rho)\,\tilde{k} = 0$$

con lo que

$$f(\tilde{k}) = (\delta + \rho)\,\tilde{k}$$

y el cono alcanzable, será, por cada relación capital-trabajo inicial y cada valor de t,

$$\underline{C}(k_0,t)=\left\{k(t)\mid k_0\,e^{-(\delta+1)t}\leqslant k(t)\leqslant k_0+\int_0^T[f(k(\tau))-(\delta+\rho)\,k(\tau)]\,d\tau\right\}$$

con lo que

$$C(k_0,t)\,C\,[0,\tilde{k}\,]$$

si $k_0 \leqslant \tilde{k}$, y

$$C(k_0,t)\subset[\tilde{k},k_0]$$

si $k_0 > \tilde{k}$.

y además, cumplirá las condiciones de convexidad y compacticidad estudiadas en 3.2. Por consiguiente, tiene perfecto sentido el problema de la determinación de la función $s(t)$ que, sustituida en la ecuación dinámica del sistema, da lugar a una trayectoria de la relación capital-trabajo que comienza en k_0 y termina, al cabo de un período T en $k(T) \geqslant k_T$ siendo

$$k_T \in C\;(k_0,T)$$

y tal que hace máximo el valor del funcional

$$J=\int_0^T u\,(\,(1-s(t))\,f\,(k(t))\,)\,dt$$

Para aplicar a nuestro problema el principio de Máximo de Pontryagin comenzaríamos por construir la hamiltoniana, $\mathcal{H}(k,s,p)=u\,[(1-s)\,f\,(k)]+$ $+\,p\,[s\,f\,(k)-(\delta+\rho)\,k]$ en la que ahora la función auxiliar $p\,(t)$ se interpreta como precio sombra o precio de demanda de la unidad de capital por trabajador medida en unidades de utilidad del consumo por trabajador, pues es igual en cada instante t a la derivada de la utilidad total del consumo por trabajador a lo largo del período [t, T] respecto al capital por trabajador en t, es decir, a la sensibilidad del bienestar total obtenido en el período [t, T] respecto a variaciones de $k\,(t)$. Por tanto, el valor de *la hamiltoniana en cada instante representa ahora la renta* por trabajador del sistema económico medida en unidades de utilidad que, en virtud de nuestras hipótesis, es la renta per cápita salvo un factor de proporcionalidad.

La renta total obtenida por la comunidad medida en unidades de utilidad, será ahora en cada instante

$$R(t) = L(t)\,\mathcal{H}(t)$$

siendo L (t) el correspondiente volumen de la mano de obra.

Las condiciones necesarias de optimalidad nos dicen que la función auxiliar, p (t), ha de satisfacer la ecuación

$$\dot{p} = -u'[(1-s)f(k)](1-s)f'(k) - p[sf'(k) - (\delta + \rho)]$$

y que, además, la función de control s (t) ha de ser tal que, en cada instante maximice la renta por trabajador obtenida, es decir, maximice la hamiltoniana para los valores corrientes del stock de capital por trabajador y del precio sombra del capital por trabajador. Si ahora representamos un diagrama de fase en el que tomemos como abscisa *la relación capital-trabajo y como ordenada el precio sombra de la unidad* de capital por trabajador, nos encontraremos con un cuadrante positivo del plano fase dividido en dos regiones por una curva separatriz. La region superior consiste en el conjunto de pares de valores (k, p) para los que la hamiltoniana toma su máximo para un valor de s (t) interior al intervalo [0, 1], que es el conjunto de todas sus valores admisibles. En esta región se verifica, por tanto, para toda trayectoria óptima

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = 0$$

con lo que

$$p = u'[(1-s)f(k)]$$

y como la derivada de la función de utilidad del consumo por trabajador nos representa el coste de oportunidad o sacrificio medido en unidades de utilidad, derivado de un incremento de la inversión por trabajador a costa del consumo por trabajador resulta que en esta región los precios de demanda y de oferta de la unidad de capital por trabajador coinciden. La ecuación diferencial que regula el comportamiento dinámico de los precios sombra toma en esta región la forma

$$\dot{p} = p\,[(\delta + \rho) - f'(k)]\,.$$

La región situada por debajo de la separatriz corresponde al conjunto de pares de valores (k, p) tales que, en ellos la hamiltoniana alcanza su máximo valor cuando todo el producto se consume, es decir, $s(t) = 0$. En esta región, el precio de demanda del capital es inferior al de oferta, y la ecuación dinámica de los precios sombra resulta ser la

$$\dot{p}\,(t) = -\,u'\,(f\,(k))\,f'\,(k) + p\,(\delta + \rho)$$

con lo que obtenemos unas condiciones necesarias de optimalidad de las trayectorias en todo similares a las deducidas en 3.4 para el modelo con población constante, salvo las dos diferencias anteriormente enunciadas.

4.2.2. El punto de equilibrio y las trayectorias óptimas

Al igual que ocurre en el modelo con población constante, las ecuaciones diferenciales que expresan las condiciones necesarias de optimalidad determinan también en nuestro caso un punto singular, situado por encima de la curva separatriz y de coordenadas (k^*, p^*) tales que

$$f'\,(k^*) = \delta + \rho$$

y

$$p^* = u'\,[(1 - s^*)\,f\,(k^*)]$$

siendo

$$s^* = \frac{(\delta + \rho)\, k^*}{f\,(k^*)}$$

con lo que, en último término:

$$p^* = u'\,[f\,(k^*) - (\delta + \rho)\, k^*]$$

Este punto es como vimos la intersección de las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{p} = 0$, es decir, del conjunto de los puntos al atravesar los cuales una trayectoria óptima mantiene constante por un instante su stock de capital por trabajador o el precio sombra del mismo. Es el único punto singular del sistema y tiene carácter de ensilladura. Corresponde a una trayectoria que satisface las condiciones necesarias de optimalidad con las condiciones de contorno:

$$k\,(0) = k^*, \quad k\,(T) = k^*$$

y que presenta características que la hacen especialmente interesante, razón por la cual vamos a analizarla con algún detalle.

En el apartado 3.5 vimos que en el modelo en población constante, la trayectoria óptima fijada en el punto de equilibrio se caracterizaba por conservar constantes el stock de capital, el producto, la relación ahorro-producto, el consumo y la inversión durante todo el periodo de planificación. En nuestro actual modelo, la permanencia de la trayectoria en el punto singular nos asegura que el stock de capital por trabajador permanece constante en el intervalo de tiempo [0, T]. Pero el stock de capital total $K\,(t)$ es:

$$K\,(t) = L\,(t)\,k\,(t)$$

y, en nuestro caso:

$$L\,(t) = L_0\, e^{\rho t}$$

luego

$$K\,(t) = L_0\, e^{\rho t}\, k\,(t)$$

lo que nos dice que si $k(t) = k^*$, el capital crece, durante el periodo de planificación al mismo ritmo que la mano de obra. También lo hará el producto total

$$F(K, L) = L\, f(k) = L_0\, e^{\rho t}\, f(k)$$

y como la relación ahorro-producto adecuada para mantener el sistema en el punto singular

$$s^*(t) = \frac{(\delta + \rho)\, k^*}{f(k^*)}$$

es constante, resultará que también el crecimiento del consumo total y de la inversión en el tiempo serán exponenciales, y con una tasa igual a la de crecimiento de la población o tasa natural de crecimiento. Este tipo de crecimiento en el que todas las variables fundamentales del sistema mano de obra, capital, producto, consumo, inversión, crecen a una misma tasa constante es el llamado crecimiento armónico (balanced growth).

La trayectoria determinada por el punto singular no es la única posibilidad de crecimiento armónico del sistema. En realidad, cualquier trayectoria que, partiendo de un stock de capital por trabajador cualquiera, k_0, lo mantuviera constante durante todo el periodo de planificación, sería también una trayectoria de crecimiento armónico, ya que

$$K(t) = L_0\, e^{\rho t}\, k_0$$

$$F(K, L) = L_0\, e^{\rho t}\, f(k_0)$$

y como

$$s(t) = \frac{(\delta + \rho)\, k_0}{f(k_0)}$$

es constante, será

$$\bar{C}(t) = (1 - s)\, L_0\, e^{\rho t}\, f(k)$$

$$I(t) = s\, L_0\, e^{\rho t}\, f(k)$$

con lo que, en resumen, las variables económicas citadas toman valores constantes por trabajador y sus valores absolutos crecen a la misma tasa que la población. Se trata, por consiguiente, de un crecimiento armónico.

Observemos que la condición impuesta a la función de producción de ser homogénea de grado uno en K y L —rendimientos constantes a escala— juega un papel esencial en la posibilidad de determinar trayectorias de crecimiento armónico en nuestro modelo, pues la fijación de un ritmo de crecimiento del stock de capital igual al del trabajo da lugar necesariamente a un ritmo de crecimiento idéntico del producto y, por tanto —manteniendo constante la relación ahorro-producto— del consumo y de la inversión. Cuando, en el apartado 2.2.1 de este trabajo, describimos la función de producción, hacíamos notar que la propiedad de ser homogénea de grado uno implica que la superficie determinada por ella en el espacio cuando se toman en los ejes cartesianos los valores de K, L y F (K, L) es una superficie reglada, en nuestro caso solo válida en el octante positivo, cada una de cuyas rectas pasa por el origen. A lo largo de cada una de estas generatrices de la superficie se mantienen constante las relaciones capital-trabajo, producto-capital y producto-trabajo, de manera que el avance sobre la generatriz supone un crecimiento al mismo ritmo de todas ellas. Cada una de estas generatrices determina, por consiguiente, una trayectoria de crecimiento armónico para su correspondiente valor constante de la relación capital-trabajo.

Estas trayectorias de crecimiento armónico se designan también en la actual literatura económica por el nombre de *edades de oro* (golden age), y tal denominación es explicable, pues un crecimiento armónico de la economía presenta la considerable ventaja de eliminar del sistema las fricciones que naturalmente se derivarían de un exceso relativo de mano de obra respecto al capital disponible, o los inconvenientes de su escasez relativa.

El crecimiento en edad de oro es compatible con cualquier valor inicial existente de la relación capital-trabajo mantenible y se conseguirá sin más que destinar a la inversión bruta en cada instante una fracción constante del producto:

la determinada por el valor de la relación ahorro-producto que conserva invariante la relación capital-trabajo inicial, dando lugar así a un crecimiento armónico del sistema, es decir, un crecimiento cuyo ritmo viene marcado por el de la evolución de la población. Todas las edades de oro implican, por tanto, una misma tasa de crecimiento de la economía.

Sin embargo, el valor de la relación ahorro-producto que determina un crecimiento en edad de oro depende en cada caso, del valor de la relación capital-trabajo, por lo cual es de esperar que el consumo por trabajador, y, por consiguiente, su utilidad no coincidan para las distintas edades de oro. Y efectivamente, así sucede. De entre todas las edades de oro posibles, correspondientes a cada uno de los posibles valores de la relación capital-trabajo inferiores a la máxima mantenible indefinidamente, $\bar{k}$, hay una que determina el máximo consumo por trabajador, y es precisamente aquella cuya trayectoria satisface las condiciones necesarias de máximo de Potryagin, es decir, la que comienza, y permanece durante todo el periodo T en el punto singular del sistema determinando una tasa de rentabilidad del capital por trabajador en equilibrio igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población mas el coeficiente de depreciación. En efecto, pues sabemos que el consumo por trabajador, constante a lo largo de cada trayectoria en edad de oro, es

$$c = (1 - s)\, f(k) = f(k) - (\delta + \rho)\, k$$

ya que en ella

$$\dot{k} = s\, f(k) - (\delta + \rho)\, k = 0$$

El valor de la relación capital-trabajo que haga máximo el consumo per cápita, deberá ser solución de la ecuación

$$f'(k) - (\delta + \rho) = 0$$

cuya única raíz es precisamente k^*, el valor de la relación capital-trabajo en el punto singular que, por otra parte, satisface también las condiciones suficientes de máximo

$$f''(k^*) < 0$$

y es, *además, el máximo absoluto en el intervalo* $[0, \tilde{k}]$, *pues, al igual que vimos en* 3.5, es, el único máximo relativo en él, y además

$$c(0) = 0 < c(k^*)$$

y

$$c(\tilde{k}) = s f(\tilde{k}) - (\delta + \rho)\tilde{k} = 0 < c(k^*)$$

Aquí, por consiguiente, ocurre que de todas las posibilidades de crecimiento económico armónico, la que determina una mayor utilidad y, por consiguiente, la preferible, es la que se desplaza sobre la generatriz cuya relación capital-trabajo es k^*. Es *decir que, de forma semejante a como ocurría en el modelo* con población constante, si la población pudiera elegir libremente su stock de capital por trabajador inicial, optaría por el k^*. Una vez situado el aparato productivo en algún punto de la generatriz correspondiente a k^*, su comportamiento óptimo consistirá en ahorrar la porción constante de su producto que mantenga el sistema sobre ésta generatriz. Este comportamiento es lo que se llama la regla de oro (golden rule) de la acumulación de capital (*).

El valor de la relación ahorro-producto determinante de la regla de oro es el

$$s^* = \frac{(\delta + \rho)\, k^*}{f(k^*)}$$

con lo que la correspondiente cantidad total de producto destinada a la inversión bruta es

(*) Un estudio detallado de las propiedades y características de esta trayectoria óptima de crecimiento armónico puede verse en: Phelps, "The Golden Rule of Accumulation: A Fable *for Growthmen*", *American Economic Review*, Sep. 1961 y en "A second Essay on the Golden Rule of Accumulation" del mismo autor, publicada en American Economic Review, Sep. 1965.

$$s^* f(k^*) L = (\delta + \rho) k^* L$$

y por ser

$$f'(k^*) = \delta + \rho$$

será

$$s^* f(k^*) L = f'(k^*) k^* L = K^* \frac{\partial F(K^*, L)}{\partial K}$$

donde

$$K^*(t) = k^* L(t)$$

o trayectoria del stock de capital total del sistema correspondiente a la regla de oro. La relación obtenida nos indica que en un modelo de crecimiento óptimo de este tipo la regla de oro de la acumulación de capital consiste en destinar al ahorro precisamente aquella parte del producto que correspondería a la retribución del factor capital si los precios de ambos factores vinieran dados por sus productividades marginales respectivas, resultado similar al obtenido en 3.5 para el modelo con población constante.

En el plano de fase de coordenadas k, capital por trabajador y p, precio, sombra de la unidad de capital por trabajador valorado en unidades de utilidad del consumo por trabajador, las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{p} = 0$ cuya intersección se produce en el punto singular estudiado tienen la misma forma que los correspondientes $\dot{K} = 0$, y $\dot{\psi} = 0$ en el modelo con población constante. Aquí también la intersección de ambas tiene lugar precisamente en el punto mínimo de la curva $\dot{k} = 0$, lo que nos confirma la propiedad del punto singular analíticamente comprobada en párrafos anteriores: este punto proporciona el valor de la relación capital-trabajo con el mínimo precio sombra posible —y por tanto, con el máximo consumo posible per cápita— compatible con un crecimiento cero de la relación capital-trabajo, o lo que es lo mismo, con un crecimiento del capital al ritmo de la población o crecimiento armónico.

Las curvas citadas dividen al plano fase en cuatro zonas, en cada una de las cuales las trayectorias óptimas se ajustan exactamente al diseño indicado en la figura 1. No es necesario, por tanto, volver a efectuar un estudio detallado del comportamiento de las soluciones óptimas, puesto que el realizado en el capítulo anterior para el modelo con población constante sigue siendo válido en el caso de población creciente a tasa constante con referencia a las nuevas variables relativas, por unidad de trabajo, y todas las propiedades de las trayectorias óptimas allí obtenidas siguen verificándose en nuestro caso, aunque modificadas por la nueva definición de las variables en términos relativos. Así, por ejemplo, para el modelo con población constante, vimos en 3.8 que, a lo largo de cada trayectoria óptima, la hamiltoniana, o producto neto total, valorado en términos de utilidad, se mantiene constante. En el modelo con población creciente exponencialmente también se conserva constante la hamiltoniana a lo largo de una trayectoria óptima cualquiera, pero ahora la hamiltoniana ya no es la renta total, sino la renta por trabajador; y como el número de trabajadores crece a la tasa constante ρ, resultará que en el modelo con población creciente el producto neto total crece al mismo ritmo que la población a lo largo de una trayectoria óptima. Igualmente se traducirían en propiedades o características de las trayectorias óptimas en un modelo con población creciente todas las obtenidas en el modelo con población constante, razón por la cual estimamos innecesario un análisis más detallado del modelo con población creciente, ya que sería una simple repetición del estudio efectuado en el capítulo 3, al cual nos remitimos.

4.3. Los problemas del horizonte infinito y la tasa de descuento temporal de la utilidad.

4.3.1. El horizonte infinito.

En las versiones del problema estudiadas hasta ahora hemos supuesto conocidos de antemano los valores inicial y final mínimo exigible de la relación capital-trabajo (o del capital, en el caso particular en que la población se mantenga constante) simplificación que nos ha permitido concentrarnos en el problema de la obtención de la trayectoria óptima que los une. Pero, si bien el valor del capital, o de la relación capital-trabajo, inicial es efectivamente un dato proporcionado históricamente y de manera unívoca por el sistema económico, objeto de nuestro estudio, el valor del capital, o de *la relación capital-trabajo, final mínimo exigible es* en cambio un producto de la decisión del planificador, quien ha de tener en cuenta la prolongación de la existencia de la economía considerada más alla de los límites fijados por su programa. Esta decisión tiene una gran importancia en cuanto que condiciona el bienestar económico de las generaciones posteriores al instante T, ya que, al fijar el capital final mínimo, o capital inicial de programas ulteriores, se imponen limitaciones al conjunto de trayectorias óptimas posibles de dichos programas, restringiendo las opciones de las generaciones *futuras. Pero, por otra parte,* también condiciona el bienestar de las generaciones actuales, puesto que la acumulación de capital necesaria para alcanzar el nivel previsto del capital final, se realiza a costa de su consumo. La fijación de un nivel final mínimo de capital, o de relación capital-trabajo, demasiado elevado supondría, por tanto, una discriminación del planificador a favor de las generaciones futuras, y en contra de las actuales, así como un nivel del mismo demasiado bajo equivaldría a una discriminación en sentido contrario, con lo cual resulta que la elección del nivel mínimo de capital final constituye para el planificador un nuevo y complejo problema.

Una posible solución al mismo consiste, en evitar la eventual discriminación entre generaciones incluyéndolas a todas ellas en la planificación, es decir, elaborando un programa de acumulación óptima de capital para un periodo de tiempo infinitos, y sin restricciones concretas en torno al comportamiento asintótico del capital final. Esta planificación con horizonte temporal infinito resuelve satisfactoriamente desde el punto de vista teórico, el problema de la adecuada consideración de la importancia a conceder a futuras generaciones, aunque ofrece, en cambio, algunas dificultades de índole matemática de las que vamos a ocuparnos en el próximo apartado.

De lo anteriormente expuesto se deduce la considerable importancia que el estudio de las trayectorias óptimas con horizonte infinito tiene a nivel de un análisis teórico. Sus resultados, sin embargo, no se revelan como especialmente útiles cuando se trata de elaborar un plan de crecimiento concreto en una situación determinada, ya que, se bien un planteamiento teórico del problema con horizonte infinito daría lugar a la caracterización de soluciones que constituyeran una buena aproximación a programas con un periodo de planificación muy largo, en la realidad se *puede difícilmente garantizar la permanencia* de los parámetros estimados para las relaciones funcionales básicas del modelo-función de producción, de utilidad, factor de depreciación y tasa de crecimientos de la mano de obra- durante periodos de tiempo lo suficientemente largos para que las conclusiones de un modelo con horizonte infinito les sean aplicables dentro de unos límites razonables de aproximación. El planificador obrará más realistamente elaborando programas de duración más reducida, para periodos de tiempo a lo largo de los cuales sea prudente suponer que se conserven invariantes los valores de los parámetros y las preferencias de la población.

De acuerdo con todo esto, el modelo numérico concreto aplicado a nuestro país, cuyas técnicas de elaboración y resultados se exponen en la segunda parte de este trabajo, solo considerará marginalmente cuestiones relacionadas con programas con horizonte infinito. Sin embargo, la importancia teórica del problema y las implicaciones que presenta el hecho de la existencia de trayectorias infinitas en cuanto al estudio del comportamiento de las trayectorias óptimas finitas aconsejan dedicar algún espacio a la optimización con horizonte infinito.

4.3.2. La convergencia del funcional objetivo

Un modelo de acumulación de capital con horizonte de tiempo infinito, sin restricciones respecto al comportamiento en el límite del capital final, con una población creciente a tasa constante y que verifique todas las demás hipótesis especificadas en 2.2 –para la función de utilidad del consumo por trabajador, las similares mencionadas en 4.2.1– se plantearía de la forma siguiente: determinar la trayectoria de acumulación de la relación capital-trabajo que, partiendo de un valor inicial k_0 en el instante $t = 0$, y satisfaciendo en todo momento la ecuación diferencial de comportamiento *dinámico*

$$\dot{k} = s\,f\,(k) - (\rho + \delta)\,k$$

hace máximo el valor del funcional objetivo.

$$J\,(k\,(t)) = \int_0^{\infty} u\,(c\,(t))\,dt$$

Antes de entrar en consideraciones sobre la aplicabilidad de los métodos habituales de resolución de modelos de optimización dinámica, nos encontramos con un problema previo: el de la convergencia de la integral impropia que constituye nuestro funcional objetivo.

Cuando el periodo de planificación es finito, no existe ninguna dificultad respecto a la existencia y comparabilidad del funcional objetivo para las diferentes trayectorias de acumulación admisibles, pues en cada una de ellas nos encontramos con una integral de extremos finitos y cuyo integrando, u(c) es una función continua y, por tanto, acotada en un compacto. Cada trayectoria determina, por tanto un valor finito del funcional objetivo, y el bienestar total obtenido con ella es comparable al logrado con cualquier otra trayectoria admisible, con lo que el problema de la localización de una trayectoria óptima adquiere su pleno sentido.

No es este el caso para un modelo planificado con un horizonte de tiempo infinito, pues, extendida la integral a un intervalo no compacto, basta con que el integrando verifique

$$\lim_{t \to \infty} u\,(c\,(t)) \neq 0$$

para que la integral no converja, con lo que la utilidad total obtenida resulta ser infinitamente grande. Tal ocurre, por ejemplo, en el caso en que la trayectoria considerada es la del crecimiento armónico determinado por la relación capital-trabajo inicial del sistema, o converge asintóticamente a otra trayectoria de crecimiento armónico correspondiente a un valor de la relación capital-trabajo distinto de cero. Nos encontramos, pues, en el caso en que dos trayectorias de acumulación de capital diferentes, que parten de un mismo valor inicial de la relación capital-trabajo no son comparables, puesto que no podemos decidir, dada la divergencia del funcional objetivo para ambas trayectorias, cual de las dos es mejor. En éstas circunstancias, la búsqueda de la trayectoria que haga máximo el valor del funcional objetivo carece de sentido.

El problema de la convergencia del funcional objetivo para programas con horizonte infinito ofrece nuevas posibilidades cuando se plantea en el caso más general, que ya mencionamos en 2.2.5, en el que la utilidad derivada del consumo no tiene el mismo valor en todos los instantes del periodo [0, T], a juicio del planificador y de la sociedad, sino que su peso en la medida de la utilidad total aportada por una cierta trayectoria depende de su mayor o menor proximidad al instante en que el programa óptimo se elabora. Si suponemos que la variación, en la importancia a conceder a la utilidad derivada del consumo en función del momento del programa en que este se disfruta ocurre a tasa constante, el funcional objetivo de un programa con horizonte infinito pasa a ser

$$J\,(k\,(t)) = \int_0^\infty u\,(c\,(t)).\; e^{-\gamma t}\,dt$$

en el que γ representa la tasa de reducción en el valor atribuido a la utilidad del consumo originada por el alejamiento del instante de consumo respecto al $t = 0$, y recibe el nombre de tasa de descuento temporal del consumo, o tasa natural de interés.

Una tasa de variación $\gamma > 0$ supondría ponderar las utilidades con pesos más pequeños a medida que su consumo se produce en instantes más alejados del inicial, lo que equivale a una minusvaloración del bienestar de las generaciones futuras respecto al de las presentes, o, utilizando expresión ya acuñada en la literatura sobre crecimiento económico, una *miopía* en la apreciación del bienestar más lejano en el tiempo. Por el contrario, si $\gamma < 0$, el bienestar de las futuras generaciones cuenta más que el de las actuales, tanto más cuanto más alejadas estén del momento en que el programa comienza lo que determina una minusvaloración del consumo presente respecto al futuro, y el descuento temporal se produce en sentido inverso al del paso del tiempo.

En el caso particular en que $\gamma = 0$, la importancia atribuida a las utilidades derivadas del consumo es la misma con total independencia del instante en que éste tiene lugar, y la planificación es realizada, por tanto, dentro de un criterio de total neutralidad respecto al paso del tiempo, y de las generaciones. Ahora el factor exponencial desaparece del funcional objetivo, con lo que el problema se reduce al anteriormente estudiado.

La elección de una tasa de descuento temporal del consumo adecuada a la situación real del sistema económico implica una decisión del planificador dentro de un considerable margen de libertad —en la segunda parte de este trabajo, expondremos un procedimiento de determinarla conjuntamente con los parámetros de la función de consumo, utilizando series de datos de producto, consumo y capital, y veremos que, en último término existe un conjunto de soluciones admisibles en el espacio paramétrico correspondiente, entre las cuales es preciso elegir—. La elección de la tasa de descuento temporal del consumo tiene bastante trascendencia, en cuanto que, como veremos más adelante, al desarrollar el correspondiente modelo de crecimiento óptimo, condiciona la forma de las trayectorias óptimas. Es de esperar que así ocurra, puesto que una tasa de descuento positiva, al sobrevalorar el consumo actual frente al futuro supone un acicate al consumo, tanto más fuerte cuanto mayor es su valor absoluto, en los primeros años del programa, aún a costa de reducir el correspondiente, al periodo final de la planificación, en tanto que una tasa negativa de descuento, al minusvalorar el consumo inmediato supone un mayor acicate al ahorro —es decir, a la inversión— en los primeros años del periodo. La tendencia a la mayor acumulación de capital cara al futuro propia de los programas óptimos con tasa de descuento negativa explica la inexistencia de programas de crecimiento óptimo en el caso límite de horizonte temporal infinito, como vamos a ver seguidamente.

En lo que respecta a la convergencia de la integral del funcional objetivo, y de la consiguiente comparabilidad para todo par de trayectorias la tasa de descuento temporal del consumo elegida juega un papel esencial, por cuanto que, si es positiva, ocurrirá que

$$\int_0^\infty u(c(t))\, e^{-\gamma t}\, dt < \int_0^\infty u(c(t))\, dt$$

y podría darse el caso de que el funcional objetivo correspondiente a $\gamma > 0$ fuera convergente para trayectorias que hicieran divergente el asociado a $\gamma = 0$, mientras que si $\gamma < 0$ será

$$\int_0^\infty u(c(t))\, e^{-\gamma t}\, dt > \int_0^\infty u(c(t))\, dt$$

y la divergencia del funcional objetivo calculado con $\gamma = 0$ nos asegura la del correspondiente a $\gamma < 0$ para la misma trayectoria de acumulación. Efectivamente, Koopmans demuestra que el funcional objetivo correspondiente a un programa con tasa de descuento estrictamente positiva converge para toda trayectoria de acumulación de capital tal que

$$c(t) \geqslant c > 0 \quad \forall t$$

es decir, para toda trayectoria cuyo consumo no se aproxime indefinidamente a cero. Esta condición, que en el modelo de Koopmans, en el que la función de utilidad verifica

$$\lim_{c \to 0} u(c) = -\infty$$

es suficiente para que se cumpla el anterior aserto, da validez también al mismo para un modelo como el nuestro, en el que la condición impuesta a la función de utilidad con el fin de eliminar soluciones óptimas con trayectorias de consumo nulo en algún instante es la

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty \text{ (*)}$$

El funcional objetivo es, por tanto, finito para todas las trayectorias que no se acerquen indefinidamente a un consumo nulo.

No es este el caso, en cambio, cuando la tasa de descuento temporal de la utilidad del consumo es negativa, y como el bienestar definido por el funcional objetivo para las distintas trayectorias posibles no está acotado superiormente, no tiene sentido la búsqueda de una trayectoria óptima. Anteriormente hemos indicado *que una tasa de descuento negativa* determinaría en un programa óptimo de horizonte finito, respecto del equivalente con $\gamma = 0$, una mayor tendencia al ahorro en la primera parte del periodo de planificación con vistas a un mayor consumo en los años finales, en los que su utilidad se halla favorablemente ponderada. Pero cuando alargamos indefinidamente nuestro horizonte temporal, se alarga también *indefinidamente la primera parte de él —aquella en que* el acicate a la inversión es mayor que en un modelo equivalente pero con neutralidad temporal— y la segunda parte, en la que se recogen los frutos del ahorro realizado en la primera, no llega nunca. Ocurre, por tanto, que en un programa con descuento temporal negativo del consumo, cualquier trayectoria cuyo consumo no sea nulo en cada instante podría mejorarse destinando a la inversión *una unidad más de consumo, inversión* cuyo producto será más rentable destinar a la inversión que al consumo, y así sucesivamente, de manera que la utilidad ulterior que estas inversiones debieran reportar en forma de consumo no llega nunca. En suma: no podemos encontrar ninguna trayectoria que sea mejor que las demás porque no existe trayectoria óptima.

Hemos analizado el problema de la existencia de trayectoria óptima cuando la tasa de descuento temporal de la utilidad del consumo es positiva, y probado su inexistencia cuando dicha tasa es negativa. Ahora bien, ¿qué ocurre en el caso particular $\gamma = 0$? Hemos visto que, para algunas trayectorias, el funcional objetivo se hace infinito, imposibilitándonos la comparación entre el nivel de bienestar obteni-

---

(*) Tjalling C. Koopmans. "On the concept of Optimal Economic Growth". The Econometric *Approach to Development Planning, op cit.*

do de ambas trayectorias. Sin embargo, existe un procedimiento de establecer comparaciones entre trayectorias, que vamos a exponer a continuación y que nos permitirá determinar la trayectoria óptima en este caso.

Este procedimiento consiste, en esencia en una traslación de los ejes coordenados en los que se representa la función de utilidad respecto al consumo, y es una adaptación a nuestro modelo del método de comparación de trayectorias que ya empleó Ramsey en su famoso artículo ya citado, germen de la teoría de la acumulación de capital. En el modelo de Ramsey, con población estacionaria, se define un estado de utilidad máxima, llamado *bienestar supremo* (bliss), y originado bien por una saturación de la utilidad a partir de un determinado nivel de consumo, de manera que un incremento ulterior del consumo no altera el nivel de utilidad derivada de él, bien por una saturación de la producción a partir de un cierto nivel de capital, de manera que la producción de saturación no puede ser sobrepasada aunque aumente el stock de capital. En cualquiera de los dos casos, existe un nivel máximo de utilidad —$u(\bar{c})$, siendo $\bar{c}$ el consumo de saturación en el primero, y $u(f(\bar{k}))$ siendo $\bar{k}$ el capital de saturación de la producción en el segundo— no superable. Llamemos $\bar{u}$ a este valor de la utilidad en estado de *bienestar supremo* y definamos ahora para cada trayectoria de acumulación de capital el siguiente funcional objetivo:

$$J[k(t)] = \int_0^\infty [u(c) - \bar{u}]\, dt$$

Un estudio más detallado de este modelo nos llevaría a la conclusión de que $J[k(t)]$ puede tomar solamente valores finitos o valores infinitos con signos negativo, y que por otra parte el conjunto de las trayectorias de acumulación posibles para las cuales $J[k(t)]$ toma un valor finito no es vacío. Como el funcional objetivo ha de ser maximizado, las trayectorias que den lugar a valores infinitos con signo negativo de la integral pueden ser desechadas. De entre las trayectorias que hacen finito el funcional objetivo, aquella que lo haga mayor es precisamente la solución óptima buscada. En resumen, el método de Ramsey resuelve el problema eliminando los valores infinitos con signo positivo del funcional objetivo en las trayectorias muy buenas, a cambio de asignar valores infinitos con signo negativo a las trayectorias muy malas— lo que, tratándose de un problema de maximización, no origina ninguna dificultad— por el procedimiento de compararlas con la trayectoria de saturación, —cerca de la cual estarán las trayectorias interesantes, y lejos, las de escasa utilidad global— lo que equivale sencillamente a un desplazamiento de los ejes en que se representa la utilidad en función del consumo, de forma que la utilidad de saturación pase a valer cero.

Pero este estado de *bienestar supremo* o de saturación de la utilidad definido por Ramsey no puede producirse en el modelo objeto de nuestro estudio, pues las hipótesis impuestos a la función de utilidad respecto al consumo, y a la de producción respecto al capital nos aseguran la imposibilidad de saturación de cualquiera de estas funciones para valores finitos del consumo o del capital. El procedimiento ideado por Ramsey no es aplicable directamente a nuestro modelo, pero lo es, en cambio, ligeramente modificado. Recordemos, en efecto, que nuestras hipótesis nos aseguran la existencia y unicidad de una trayectoria especial, k^*, la *determinada por la regla de oro de la acumulación de capital*, que como vimos, proporciona el máximo nivel de consumo —y, por tanto, de utilidad— mantenible indefinidamente. Para trayectorias con horizonte infinito, *la correspondiente a la regla de oro* nos sirve como término de comparación en lugar de la inexistente en estado de *bienestar supremo*, ya que ninguna otra trayectoria podrá proporcionar una utilidad infinitamente mayor que la de ella, en cuanto que no puede mantener un consumo superior a c^* durante un periodo de tiempo infinitamente largo. Por consiguiente

$$\mathcal{J}\,[k(t)] = \int_0^\infty [u(c) - u(c^*)]\,dt < \infty$$

y el valor de este nuevo funcional objetivo podrá ser finito o infinito con signo negativo.

Por otra parte, el conjunto de las trayectorias que, con un valor inicial de la relación capital-trabajo inferior al indefinidamente mantenible $\widetilde{k}$, determinan un valor finito del funcional objetivo $\mathcal{J}\,[k(t)]$ no es vacío. Si $k^* < k_0 < \widetilde{k}$, la decisión de consumir todo el producto reduciría progresivamente el stock de capital del sistema, permitiendo alcanzar un relación capital-trabajo igual a la de la regla de oro, k^*, en tiempo finito, pues si

$$c = f(k)$$

será

$$\dot{k} = f(k) - (\lambda + \rho)\, k - c = -(\lambda + \rho)\, k$$

con lo que

$$k(t) = k_0\, e^{-(\lambda + \rho)t}$$

y para que

$$k(t_1) = k^*$$

bastará con que

$$t_1 = \frac{\log k_0 - \log k^*}{\lambda + \rho}$$

que es finito. Ahora bien, la trayectoria determinada por la función de control continua a trozos

$$\begin{aligned} s(t) &= 0 \qquad && t \in [0, t_1[\\ s(t) &= s^* && t \in [t_1, \infty[\end{aligned}$$

determina un nivel de consumo por trabajador

$$\begin{aligned} \bar{c}(t) &= f(k(t)) > f[k^*(t)] > c^* \qquad && t \in [0, t_1[\\ \bar{c}(t) &= c^* && t \in [t_1, \infty[\end{aligned}$$

mayor que el de la edad de oro, pero que solo se diferencia de él en un intervalo finito $[0, t_1[$. Por consiguiente, siendo la función de utilidad acotada en el compacto $[0, t_1]$ para todo consumo finito, ocurrirá que

$$J[k(t)] = \int_0^{\infty} [u(c(t)) - u(c^*)]\, dt =$$

$$= \int_0^{t_1} u[c(t)] - u(c^*)]\, dt + \int_{t_1}^{\infty} [u(c(t)] - u(c^*)]\, dt =$$

$$= \int_0^{t_1} [u[f(k)] - u(c^*)]\, dt < \infty$$

y la trayectoria así determinada forma parte del conjunto de las que hacen $J[k(t)]$ finito, el cual, por consiguiente, no es vacío.

De la misma forma, si el valor inicial de la relación capital-trabajo es $0 < k_0 < k^*$, podemos establecer una trayectoria de consumo por trabajador $c(t)$ tal que determine una inversión neta por trabajador constante y estrictamente positiva $\epsilon > 0$. Esta decisión es posible en todo intervalo $[0 + h, \widetilde{k} - h]$ tal que, para el valor elegido de ϵ, sea:

$$\min [f(h) - (\lambda + \rho) h, f(\widetilde{k} - h) - (\lambda + \rho)(\widetilde{k} - h)] > \epsilon$$

con lo cual siempre se puede tomar ϵ lo suficientemente pequeño para que el valor inicial de la relación capital-trabajo dada $0 < k(0) < \widetilde{k}$ esté contenida en el intervalo válido. La función de consumo resultante es continua, y el programa así planeado hará aumentar progresivamente el valor de la relación capital-trabajo, hasta alcanzar el de la regla de oro, k^*, en un instante, t_1, finito. Puesto que:

$$\dot{k} = f(k) - (\lambda + \rho) k - c = \epsilon > 0$$

será

$$k^* - k_0 = \int_0^{t_1} \epsilon\, dt = \epsilon\, t_1$$

con lo que

$$t_1 = \frac{k^* - k_0}{\epsilon}$$

es un número finito. La trayectoria de acumulación, de capital correspondiente a la función de control

$$s(t) = \frac{\epsilon + (\lambda + \rho)\, k(t)}{f(k(t))} \qquad t \in [0, t_1[$$

$$s(t) = s^* \qquad t \in [t_1, \infty[$$

da lugar a una trayectoria de consumo por trabajador en el intervalo $[0, t_1[$

$$c(t) = f(k) - (\lambda + \rho)\, k - \epsilon < f(k) - (\lambda + \rho)\, k < f(k^*) - (\lambda + \rho)\, k^* = c^*$$

ya que la función del producto neto por trabajador

$$g(k) = f(k) - (\lambda + \rho)\, k$$

es creciente para $0 < k < k^*$ y decreciente para $k^* < k < \widetilde{k}$ —mientras que en el intervalo $[t_1, \infty[$ es

$$c(t) = c^*$$

De todo ello se deduce que nuestra trayectoria de acumulación de capital y la correspondiente a la edad de oro coinciden en todo punto con la excepción del intervalo $[0, t_1[$ y como la función de utilidad es acotada en $[0, t_1]$ será

$$J[k(t)] = \int_0^{\infty} [u(c) - u(c^*)]\, dt = \int_0^{t_1} [u(c) - u(c^*)]\, dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{\infty} [u(c) - u(c^*)]\, dt = \int_0^{t_1} [u(f(k) - (\lambda + \rho)\, k - \epsilon) - u(c^*)]\, dt > -\infty$$

Ahora el funcional objetivo será negativo, pero finito, lo que nos prueba que tampoco es vacío el conjunto de las trayectorias que, comenzando con un valor inicial de la relación capital-trabajo $k_0 < k^*$ dan a $J[k(t)]$ un valor finito.

Por último, si la relación capital-trabajo inicial del sistema, k_0, coincide con la correspondiente a la regla de oro, k^*, es evidente que la trayectoria definida por la función de control

$$s(t) = s^*$$

estabiliza al sistema en su punto singular, con lo que ahora

$$\int_0^{\infty} [u(c) - u(c^*)] \, dt = 0 < \infty$$

con lo que, en resumen, podemos afirmar que, para todo valor inicial de la relación capital-trabajo inferior a la mantenible indefinidamente existen trayectorias *cuyo funcional objetivo, trasladado a los nuevos ejes coordenados en los que* $u(c^*) = 0$, es finito. Estas trayectorias son mejores que aquellos en que el funcional objetivo transformado toma un valor infinito con signo negativo, y de la comparación entre ellas *—ahora posible— se podría determinar la trayectoria óptima.*

De manera que, como síntesis de todo este apartado, diremos que el problema de *determinación de una trayectoria óptima de acumulación con horizonte* temporal infinito y valor inicial de la relación capital-trabajo inferior a la máxima indefinidamente mantenible es inabordable cuando se atribuye a la utilidad un descuento temporal a *tasa constante y negativa,* $\gamma < 0$. Cuando *la tasa de descuento* temporal atribuido a la utilidad es nula, el problema es perfectamente abordable, aunque indirectamente, aplicando el procedimiento de Ramsey, modificado y además la solución óptima existe, como vamos a ver seguidamente.

4.3.3. La trayectoria óptima con horizonte infinito y sin descuento temporal de la utilidad.

Vamos a buscar ahora la trayectoria de acumulación de capital que, partiendo de un nivel inicial de la relación capital-trabajo, k_0, dada, y evolucionando durante un periodo de tiempo ilimitado de acuerdo con la ecuación dinámica

$$\dot{k} = s\,f(k) - (\delta + \rho)\,k$$

maximiza el valor del funcional objetivo

$$J[k(t)] = \int_0^\infty [u(c) - u(c^*)]\, dt = \int_0^\infty [u[(1-s) f(k)] - u[(1-s^*) f(k^*)]\, dt$$

Observemos que este problema corresponde al caso particular en que la tasa de descuento temporal de la utilidad es cero, con lo que el sistema, expresado en función de las variables relativas por trabajador, es autónomo; le es aplicable, por tanto, la generalización del principio de máximo de Pontryagin para sistemas autónomos al caso en que el funcional objetivo es una integral impropia.

La hamiltoniana será ahora:

$$\mathcal{H}(k, s, p) = u[(1-s) f(k)] - u(c^*) + p[s f(k) - (\delta + \rho) k]$$

con lo que las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo, respecto a la función auxiliar

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k}$$

y respecto a la función de control de una trayectoria óptima, que ha de maximizar el valor de la hamiltoniana en cada instante para los correspondientes valores de k y ψ, lo cual se traduce en que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = 0$$

ó

$$s = 0$$

añaden a la ecuación del comportamiento dinámico del sistema la

$$\dot{p} = -u'[(1-s) f(k)](1-s) f'(k) + p[(\delta + \rho) - s f'(k)]$$

y una de las

$$p = u'((1-s)\,f(k))$$

ó

$$s = 0$$

en las que no aparece la utilidad del consumo de la regla de oro, lo que es de esperar, dado que las condiciones necesarias de Pontryagin implican la derivación de la hamiltoniana respecto a k y s, y u (c*) es independiente de los valores de las relaciones capital-trabajo y ahorro-producto. El sistema diferencial a que han de satisfacer necesariamente las trayectorias óptimas según el principio de máximo es, por tanto, el mismo sistema de condiciones necesarias de optimalidad obtenido para el modelo con población constante y horizonte temporal finitos, de donde deducimos que la trayectoria que, partiendo de una relación capital-trabajo inicial, k_0, dada, hace máximo el funcional $J\,[k\,(t)]$ con un horizonte de tiempo infinitos ha de ser necesariamente una de las soluciones del sistema diferencial de Pontryagin que aparecen en el plano fase de coordenadas k y p.

El problema que queda por resolver ahora es el de determinar de entre todas las trayectorias solución del sistema diferencial de condiciones necesarias, cuales son aquellas que, para cada conjunto de condiciones de contorno, maximizan el funcional objetivo. En el modelo con horizonte temporal finito, vimos que las condiciones de contorno dadas fijando los instantes inicial y final del programa y los valores inicial y final de la relación capital-trabajo (o del capital, cuando la población es constante), nos determinan de manera única la trayectoria solución de las condiciones necesarias de máximo que satisface tales requerimientos y que es la solución buscada. En el caso más general en que la relación capital-trabajo (o el capital) final no se fije de manera estricta, sino que pueda tomar según las conveniencias de la optimización cualquier valor, bien en una semirrecta —por encima de una cota mínima— o en toda la recta real, vimos también en 3.7. que la condición de contorno ausente, que determina el valor final de la relación capital-trabajo, es sustituida por una condición de transversalidad en el extremo final de la trayectoria, la cual nos proporciona la relación que necesitamos para determinar de manera única la solución óptima buscada.

Desgraciadamente, no todos estos resultados son generalizables al caso de horizonte temporal infinito. Cuando el problema se plantea en términos de determinar la trayectoria que, partiendo de una relación capital-trabajo inicial dada y evolucionando indefinidamente según la ecuación dinámica citada de forma que

$$\lim_{t \to \infty} \underline{k}(t) = k_1$$

optimice el funcional objetivo, Pontryagin demuestra que ésta condición de convergencia en el límite sustituye adecuadamente a la correspondiente condición de contorno en el problema con horizonte temporal finito y extremos fijos, determinando de manera única la trayectoria buscada. Pero cuando el modelo —y tal es el caso del que ahora nos ocupa— no impone ninguna condición al comportamiento asintótico de la relación capital-trabajo, constituyendo una generalización del problema en tiempo finito con extremo final libre las condiciones de transversalidad correspondientes, que, como vimos en 3.7, implican la nulidad del precio sombra final del capital por unidad de trabajo, no son aplicables cuando el horizonte temporal es infinito, de manera que no es necesariamente cierto que, en la trayectoria óptima

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 0$$

y, de hecho, veremos que, en el problema objeto de nuestro estudio en este apartado, sin descuento temporal de la utilidad, la solución óptima al modelo con horizonte infinito y sin restricciones de convergencia en el límite de la relación final capital-trabajo verifica,

$$\lim_{t \to \infty} p(t) \neq 0$$

con lo cual resulta que, en este caso, las condiciones necesarias deducidas del principio de máximo de Pontryagin, juntamente con las de contorno disponibles, no bastan a determinar de manera única la trayectoria óptima buscada(*).

Es fácil ver, no obstante, procediendo por eliminación sobre el conjunto de trayectorias solución del sistema de condiciones necesarios de Pontryagin, representadas en el plano fase que, para cada valor inicial de la relación capital-trabajo, la trayectoria óptima correspondiente para un periodo de planificación no acotado es precisamente la que, con un precio sombra inicial igual al determinado por la curva que forman los dos brazos de estabilidad del sistema para su correspondiente valor inicial de la relación capital-trabajo, continua la trayectoria del brazo estable para converger asintóticamente al punto de equilibrio, acercándose cada vez más a la situación determinada por la regla de oro.

Examinemos de nuevo la figura 3.1, que, como hemos visto, es igualmente válida para nuestro modelo con población creciente sin más que tomar en los ejes coordenados los valores k y p, por trabajador en lugar de los k y ψ, capital y precio sombra del mismo en términos absolutos. Observemos que, de las cuatro zonas en que las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{p} = 0$ dividen el cuadrante positivo, dos de ellos, la 1 y la 3, son focos de atracción de trayectorias procedentes de las otras dos zonas. Una trayectoria solución del sistema de condiciones necesarios de optimalidad, puede permanecer en 2 ó 4 durante un periodo de tiempo finitos, pero cuando el horizonte temporal es infinito, todas las trayectorias de este tipo que, en un instante dado, se encuentren en las zonas 2 y 4 tendrán tiempo suficiente para pasar a la 1, o a la 3, con la excepción de las que comiencen y, claro está, continuen, en alguno de los dos brazos de estabilidad, las cuales se aproximan asintóticamente al punto de equilibrio del sistema. En cambio, las trayectorias que en un instante dado se encuentren en las zonas 1 ó 3, permanecen indefinidamente en ellas. No quedan por tanto, para las trayectorias solución de las condiciones necesarias de máximo, con horizonte infinito, mas que tres alternativas: o convergen a la situación determinada por la regla de oro a lo largo de alguno de los brazos estables, o permanecen inde-

(*) Esta dificultad ha sido estudiada con bastante detalle por Karl Shell. Vease "Applications of Pontryagin's *Maximum Principle to Economics, lecture III*" en Mathematical Systems Theory and Economics I, editado por H. W. Kuhn y G.P. Szego en Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Springer–Verlag 1.969.

finidamente en la zona 3, o permanecen indefinidamente en la zona 1. Si demostramos que toda trayectoria que permanezca indefinidamente en las zonas 1 ó 3 no puede ser óptima, pues existe siempre otra trayectoria admisible que produce una utilidad total mayor, habremos visto, por exclusión, que la trayectoria óptima en tiempo infinito es la que, satisfaciendo las condiciones de contorno en cuanto al valor de la relación capital-trabajo inicial, está sobre el brazo estable.

Y así es, en efecto, pues consideremos una trayectoria solución del sistema de condiciones necesarias de optimalidad y que, independientemente de cual fuera el valor inicial de su relación capital-trabajo se encuentra en un instante dado, t_1, en la zona 3, en la que permanece indefinidamente. Sea $k(t_1) = k_1$, $p(t_1) = p_1$ en dicha trayectoria. Como el punto (k_1, p_1) está en la zona 3, será $k_1 > k^*$. Por otra parte, sabemos que la intersección de las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{p} = 0$ tiene lugar en el mínimo de aquella, con lo que en toda la zona 3 ocurrirá también que $p > p^*$. Y como $\dot{k} > 0$, $\dot{p} > 0$ será

$$k(t) > k_1 > k^* \qquad t > t_1$$

y

$$p(t) > p_1 > p^* \qquad t > t_1$$

Supongamos ahora que construimos una mera trayectoria por el procedimiento siguiente: a partir del instante t_1, la sociedad decide consumir todo su producto, lo que reducirá su nivel de capital y más aún, su nivel de capital por trabajador, puesto que la población continua creciendo a tasa constante. De esta forma, llegará un momento, t_2, finito, en el que el valor de su relación capital-trabajo coincida con el de equilibrio, es decir

$$k(t_2) = k^*$$

ya que si $s = 0$ será

$$\dot{k} = -(\delta + \rho)\, k$$

y

$$k(t_2) = k(t_1)\, e^{-(\delta+\rho)(t_2 - t_1)} = k^*$$

con lo que

$$t_2 = \frac{\log k_1 - \log k^*}{\delta + \rho} + t_1$$

y t_2 es finito. Ahora, a partir de t_2, la sociedad decide adoptar la regla de oro como norma de conducta, con lo que permanece indefinidamente en el punto singular del sistema.

Esta segunda trayectoria así formada no satisface las condiciones necesarias de optimalidad de Pontryagin, aunque resulta de ensamblar tres trayectorias parciales, cada una de las cuales, por separado, si las satisface para unas ciertas condiciones de contorno: la primera de ellas, definida en el intervalo $[0, t_1]$, coincide con la trayectoria inicialmente considerada, solución del sistema de condiciones necesarias; la segunda será también solución de dicho sistema con las condiciones de contorno $k(t_1) = k_1$, $k(t_2) = k^*$, $T = t_2 - t_1$, y estará, evidentemente, situada en la zona 4, y la tercera coincide con la de la edad de oro para $t > t_2$. Comparemos ahora esta segunda trayectoria con la primera considerada, que permanece en la zona 3 para $t > t_1$. En el intervalo $t \in [0, t_1]$ coinciden ambas. En el $t \in]t_1, t_2]$ no coinciden, pero siendo $u(c)$ una función acotada, la diferencia entre las utilidades totales obtenidas por ambas trayectorias en el compacto $[t_1, t_2]$ será necesariamente un número finito. En el intervalo $]t_2, \infty]$, no acotado, ocurre que, como hemos visto

$$p(t) > p_1(t) \geqslant p^* \quad t \geqslant t_2$$

con lo que existirá un $\epsilon > 0$ tal que

$$p(t) > p^* + \epsilon, \quad t \geqslant t_2$$

y como, por encima de la separatriz, ocurre que

$$c(t) = u'^{-1}[p(t)]$$

y u'^{-1} es una función decreciente, será:

$$c(t) < u'^{-1}[p^* + \epsilon] < u'^{-1}(p^*) = c^*, \quad t \geq t_2$$

es decir que, existirá un $\epsilon' > 0$ tal que

$$c(t) < c^* - \epsilon' < c^* \quad t \geq t_2$$

y, por ser la función de utilidad estrictamente creciente, será

$$u(c(t)) < u(c^* - \epsilon') < u(c^*) \quad t \geq t_2$$

de manera que existirá un $\epsilon'' > 0$ tal que

$$u(c^*) - u(c(t)) > \epsilon'' \quad t \geq t_2$$

con lo que resultará

$$\int_{t_2}^{\infty} (u(c^*) - u(c(t)))\, dt > \int_{t_2}^{\infty} \epsilon''\, dt = \infty$$

Vemos, pues, que existe una diferencia infinitamente grande entre las utilidades totales a favor de la segunda trayectoria en $]t_2, \infty[$, y por tanto, en $[0, \infty[$, de lo que concluimos que la trayectoria inicial que, pasando por (k_1, p_1) en t_1 satisface las condiciones necesarias de optimalidad en el intervalo $[0, \infty]$ no puede ser óptima ya que existen otra trayectoria que comenzando con un mismo valor de la relación capital-trabajo, proporciona una mayor cantidad de utilidad total. Tal resultado viene, por otra parte, corroborado por la intuición pues a la vista de la figura 3.1 es evidente que las trayectorias que alcanzan la zona 3 se caracterizan por un crecimiento no acotado del precio sombra del capital, lo que supone una aproximación asintótica del consumo al valor cero; es de esperar, por *consiguiente, que tales trayectorias no sean óptimas,* puesto que mantienen un consumo per capita muy próximo a cero *durante la mayor parte del tiempo.*

Observemos, además, que una trayectoria óptima que permaneciese indefinidamente en la zona 3 del plano fase no sería eficiente en la acepción de Phelps-Koopmans, ya que, desde un instante dado (t_1) en adelante el valor de la relación capital-trabajo se mantiene indefinidamente superior al correspondiente a la regla de oro, lo que, dada la concavidad estricta de la función producto por trabajador respecto a la relación capital-trabajo, implica una relación capital-producto mantenida indefinidamente por encima de la correspondiente a la regla de oro a partir del instante t_1, *y, por tanto, la ineficiencia de la trayectoria* (*).

Veamos ahora que para toda trayectoria que penetra en la zona 1 del plano permaneciendo, por tanto, en ella, existe otra trayectoria que, comenzando con un mismo valor de la relación capital-trabajo, produce un volumen de utilidad mayor en el dominio $[0, \infty[$ del tiempo, con lo que habremos demostrado que ninguna trayectoria que tenga puntos en la zona 1 del espacio fase puede ser óptima cuando el horizonte de planificación es infinito.

Supongamos, en efecto, que una trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad se encuentra en un cierto instante, t_1, en la zona 1 del plano fase, siendo $k(t_1) = k_1$, $p(t_1) = p_1$. Comparémosla con la trayectoria que, coincidiendo con la dada para $t \leqslant t_1$, se separa de ella en este instante para, a partir de él, reducir el consumo por trabajador a

$$c(t) = f(k(t)) - (\delta + \rho)\, k(t) - \epsilon$$

donde ϵ es un valor constante y positivo determinado con la condición de que el consumo resultante sea también positivo, lo que, como vimos en 4.3.2, es posible para todo valor $k(t)$ tal que

$$0 < k(t) < \tilde{k}$$

En esta nueva trayectoria, el stock de capital evoluciona de forma creciente, ya que

$$\dot{k} = f(k) - (\delta + \rho)\, k - c = \epsilon > 0$$

(*) "A Second Essay on the Golden Rule of Accumulation, por E.S. Phelps, op. cit.

con lo que en algún instante finito, t_2 alcanzará el valor de equilibrio k^*, siendo

$$t_2 = \frac{k^* - k_1}{\epsilon} + t_1$$

Ahora, para todo $t > t_2$ definimos la trayectoria de manera que se estabilice indefinidamente en el punto singular, imponiendo un valor de la relación ahorro-producto igual al de la regla de oro s^*. Esta nueva trayectoria coincide con la que, satisfaciendo las condiciones necesarias de optimalidad, se encuentra en el instante t_1 en el punto $(k\,(t_1),\ p\,(t_1))$ para $0 \leqslant t \leqslant t_1$, y viene definida, para $t > t_1$, por los siguientes valores de *la relación ahorro-producto*

$$s\,(t) = \frac{(\delta + \rho)\ k\,(t) + \epsilon}{f\,(k\,(t))} \qquad t_1 \leqslant t < t_2$$

$$s\,(t) = s^*\,(t) = \frac{(\delta + \rho)\ k^*}{f\,(k^*)} \qquad t \geqslant t_2$$

con lo que, desde t_2 en adelante, resulta ser la trayectoria determinada por la regla de oro, siendo su consumo por trabajador c^* el correspondiente a tal situación para $t > t_2$.

Vamos a ver ahora que la trayectoria solución de las condiciones necesa*rias de optimalidad* arriba mencionada da lugar a un flujo de consumo por trabajador inferior al de la regla de oro desde un cierto instante, finito, en adelante. Observemos, en primer lugar, que esta trayectoria, alcanza necesariamente *la región* del ahorro bruto nulo situada por debajo de la curva separatriz en algún instante finito: si $(k\,(t_1),\ p\,(t_1))$ es un punto situado por debajo de la separatriz, la conclusión es evidente; si, por el contrario, $(k\,(t_1),\ p\,(t_1))$ está por encima de la separatriz, la trayectoria evolucionará reduciendo su stock de capital y su precio sombra, como corresponde a la zona 1 donde se encuentra, de acuerdo con el sistema dinámico

$$\dot{p} = p\,[(\delta + \rho) - f'\,(k)]$$

$$\dot{k} = f\,(k) - (\delta + \rho)\ k - u'^{-1}\,(p)$$

Al ser

$$p(t) < p(t_1) \qquad \forall t > t_1$$

$$k(t) < k(t_1) < k^* \ \forall t > t_1$$

será

$$f(k(t)) - (\delta + \rho)\, k(t) < f(k(t_1) - (\delta + \rho)\, k(t_1) \ \ \forall t > t_1$$

y

$$u'^{-1}(p(t)) > u'^{-1}(p(t_1)) \ \ \forall t > t_1$$

con lo que

$$\dot{k}(t) < \dot{k}(t_1) = \epsilon' < 0 \quad \forall t > t_1$$

Sea k_s el valor de la relación capital-trabajo que satisface la relación

$$p(t_1) = u'(f(k))$$

es decir, el nivel de stock de capital por trabajador determinado por la intersección de la curva separatriz con la recta

$$p = p(t_1)$$

Las desigualdades anteriormente obtenidas nos indican que

$$k(t) < k(t_1) + \epsilon'(t - t_1) \quad \forall t > t_1$$

Si ahora tomamos

$$t_3 = \frac{k_s - k(t_1)}{\epsilon'} + t_1 < \infty$$

resultará

$$k(t_3) < k_s$$

lo que nos indica que la trayectoria alcanza en un instante finito inferior a t_3, el nivel de la relación capital-trabajo correspondiente al precio sombra de t_1 sobre la curva separatriz. Pero como

$$p(t) < p(t_1) \quad t > t_1$$

el encuentro de la trayectoria en cuestión con la curva separatriz se producirá para un valor del precio sombra inferior al del instante t_1, lo que, dada la forma decreciente de la curva, nos indica que la trayectoria la cruzaría para un valor de la relación capital-trabajo superior a k_s. Y si como acabamos de ver, la trayectoria puede alcanzar valores inferiores a k_s en tiempo finito, es evidente que corta a la separatriz para algún valor finito de t, penetrando, por tanto en la región del consumo total.

Una vez situada la trayectoria en esta región, su régimen de acumulación de capital se rige por la ecuación dinámica

$$\dot{k} = -(\delta + \rho)\, k$$

que determina una progresiva reducción del stock de capital

$$k(t) = k(t_3)\, e^{-(\delta+\rho)(t-t_3)}$$

de manera que el valor de la relación capital-trabajo tiende asintóticamente a cero. El consumo por trabajador es ahora

$$c(t) = f(k(t))$$

y decrece también con el capital, acercándose asintóticamente a cero, en virtud de las condiciones especificadas para la función de producción. Pero el nivel de consumo por trabajador característico de la regla de oro es

$$c^* = f(k^*) - (\delta + \rho)\, k^* > 0$$

Puesto que, como hemos visto, en nuestra trayectoria de la zona 1 que satisface las condiciones necesarias de optimalidad el consumo puede alcanzar valores tan próximos a cero como queramos, podremos encontrar un valor de la relación capital-trabajo $k\ell$, $0 < k\ell < k_s$ tal que

$$c(k\ell) = f(k\ell) < c^*$$

Y este valor, $k\ell$, es alcanzado por la trayectoria en un instante, t_4 finito

$$t_4 = \frac{\log k(t_3) - \log k\ell}{\delta + \rho} + t_3 < \infty$$

a partir de t_4, la evolución de la trayectoria en la zona 1 nos asegura que

$$k(t) < k\ell \quad t > t_4$$

y por tanto

$$c(t) = f(k(t)) < f(k\ell) < c^* \quad t > t_4$$

con lo que

$$c^* - c(t) > \epsilon'' > 0 \quad t > t_4$$

Comparemos seguidamente los niveles de utilidad obtenidos por ambas trayectorias: la considerada recientemente que satisface las condiciones necesarias de optimalidad y la anteriormente definida, que no es solución del sistema de condiciones necesarias de optimalidad, pero que conduce al sistema a la situación de equilibrio característica de la regla de oro en un intervalo de tiempo finito, t_2. Hemos visto que la trayectoria que satisface las condiciones necesarias de optimalidad alcanza en un intervalo de tiempo finito, t_4, un nivel de consumo por trabajador inferior al de la regla de oro. Por consiguiente ocurrirá que, en el intervalo $[\max(t_2, t_4), \infty[$, el consumo de la trayectoria modificada supera al de la que satisface las condiciones necesarias de óptimo en una cantidad positiva, y mayor que ϵ''

$$c_2(t) - c_1(t) = c^* - c_1(t) > \epsilon'' > 0 \quad t > \max(t_2, t_4)$$

con lo que, siendo la función de utilidad estrictamente creciente, resultará que

$$u(c_2) - u(c_1) = \epsilon''' > 0$$

Dividamos el intervalo de planificación $[0, \infty[$ en tres subintervalos, separados entre sí por los instantes t_1 y $\max(t_2, t_4)$. En el primero de ellos $[0, t_1]$, ambas trayectorias coinciden, proporcionando un mismo nivel de utilidad total. Durante el periodo $]t_1, \max(t_2, t_4)]$ ambas trayectorias divergen, proporcionando, por tanto, niveles de utilidad del consumo diferentes a lo largo de él. Pero, sea cual sea el signo de la diferencia entre las utilidades totales de ambas trayectorias, es evidente que esta diferencia ha de ser finita, puesto que resulta de restar cantidades finitas: las integrales, en un compacto, de funciones acotadas. En el intervalo $]\max(t_2, t_4), \infty[$ ocurre en cambio que la diferencia entre las utilidades totales conseguidas por ambas trayectorias

$$\int_{\max(t_2, t_4)}^{\infty} [u_2(c) - u_1(c)]\, dt = \int_{\max(t_2, t_4)}^{\infty} [u(c^*) - u_1(c)]\, dt = \int_{\max(t_2, t_4)}^{\infty} \epsilon'''\, dt$$

resulta ser infinita y con signo positivo. Esta ventaja infinitamente grande a favor de la trayectoria modificada en el intervalo $]\max(t_2, t_4), \infty[$, supera, en todo caso, a la diferencia finita, entre las utilidades de las dos trayectorias sobre el intervalo $]t_1, \max(t_2, t_4)]$ con lo que, sea cual sea el signo de ésta, queda demostrado que la trayectoria modificada proporciona infinitamente más utilidad total que la que, comenzando con un mismo valor de la relación capital-trabajo y penetrando en la zona 1, satisface las condiciones necesarias de optimalidad de Pontryagin. Por consiguiente, ninguna trayectoria solución de dichas condiciones que alcance la zona 1 puede ser óptima.

Con todo ello hemos llegado, por exclusión, a la conclusión de que la trayectoria de acumulación de capital óptima con horizonte temporal infinito para un valor dado inicial de la relación capital-trabajo es la que, satisfaciendo las condiciones necesarias de optimalidad de Pontryagin y la de contorno en el instante inicial, se aproxima asintóticamente al punto de equilibrio del sistema, y esta es precisamente la que partiendo del valor inicial dado de k, k_0, y de un precio sombra inicial de la unidad de capital por trabajador igual al determinado por la intersección del brazo de estabilidad con la recta $k = k_0$, continua siguiendo indefinidamente la línea del brazo estable. Para cada valor inicial de la relación capital-trabajo existe *un solo valor del precio sombra que situe al sistema sobre su trayectoria de esta*bilidad y éste valor será precisamente la medida de la apreciación social de la unidad de capital por trabajador en términos de utilidad del consumo que deberá adoptar la economía si quiere maximizar su funcional objetivo a lo largo de un programa que se prolonga indefinidamente.

Intuitivamente, era muy de esperar este resultado, habida cuenta de que las trayectorias que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad, se aproximan asintóticamente, ora a situaciones en que el precio sombra del capital crece indefinidamente, ora a situaciones en que el stock de capital se aproxima a cero. En ámbos casos, el resultado del comportamiento óptimo en tales circunstancias determina también un consumo próximo a cero, durante un periodo infinitamente largo. La única excepción la constituyen los brazos estables, trayectorias que, sobre satisfacer las condiciones necesarias de optimalidad y las de contorno, proporcionan un nivel de consumo *infinitamente próximo al de la regla de oro duran*te la mayor parte del periodo de planificación, siendo, por tanto, de entre todas las trayectorias que satisfacen las mencionadas condiciones, las únicas que determinarían un valor finito del funcional objetivo modificado, $J\,[k\,(t)]$.

Observemos, por otra parte que la única trayectoria óptima en horizonte infinito para cada valor inicial de la relación capital-trabajo satisface la condición

$$\lim_{t \to \infty} p\,(t) = p^* \neq 0$$

lo que nos prueba que la condición de transversalidad para extremo final libre en una trayectoria finita no es generalizable al caso de horizonte infinito, puesto que, en nuestro modelo, la trayectoria óptima no la cumple.

4.4. El modelo con descuento temporal de la utilidad a tasa constante

4.4.1. El modelo con horizonte finito

Estudiemos ahora el comportamiento de las trayectorias óptimas de acumulación de capital en un modelo con población creciente a tasa constante, cuando la utilidad del consumo por trabajador en cada instante viene ponderada por una función exponencial del tiempo, $e^{-\gamma t}$, siendo γ la tasa de descuento temporal de la utilidad. Consideremos primeramente el caso en que el periodo de planificación es finito. El modelo se plantearía ahora de la forma siguiente: Determinar, de entre todas las posibles trayectorias de acumulación de capital que evolucionan de acuerdo con la ecuación

$$\dot{k} = s\,f(k) - (\delta + \rho)\,k$$

y que, comenzando en el instante $t = t_0$ con un valor inicial de la relación capital-trabajo igual a k_0 y terminando en el instante $t = t_f$ con un valor de la relación capital-trabajo $k(t_f) \geqslant k_f$, siendo k_f un valor fijado de antemano, la que hace máximo el funcional objetivo

$$J[k(t)] = \int_{t_0}^{t_f} u(c(t))\, e^{-\gamma(t-t_0)}\, dt$$

Este nuevo funcional es una integral de las utilidades obtenidas en el intervalo de planificación, pero afectadas por un factor que modifica la estimación inicial de las utilidades futuras, devaluándolas en el caso $\gamma > 0$, o sobrevaluándolas cuando $\gamma < 0$. La utilidad reportada por un nivel de consumo por trabajador $c(t)$ en el instante t, recibe, en el instante inicial $t = t_0$ una valoración igual a $u(c(t)) \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}$. El funcional representa, pues, la totalidad de la utilidad derivada del consumo por trabajador a lo largo del periodo de planificación, tal como es valorada al comienzo del programa.

El problema se plantea ahora en forma no autónoma, puesto que la variable tiempo aparece en forma explícita en el funcional objetivo. El valor que este toma para una trayectoria de consumo dada depende ahora del instante fijado como origen de tiempos. Pero como lo que cuenta para detectar la trayectoria óptima buscada no es tanto el valor de los funcionales, sino la ordenación de estos para las diferentes trayectorias de consumo, y esta se conserva respecto a traslaciones de la variable tiempo, el problema será equivalente al formulado haciendo coincidir el origen de tiempos con el instante inicial del periodo de planificación, con lo que manteniéndose la ecuación dinámica del sistema, el funcional objetivo pasa a ser el

$$J\,[k\,(t)] = \int_0^T u\,(c\,(t))\,e^{-\gamma t}\,dt$$

y las condiciones de contorno, las $k\,(0) = k_0$, $k\,(T) \geqslant k_T$.

Para obtener ahora la trayectoria óptima buscada comenzaremos por aplicar las condiciones necesarias de optimalidad del principio de máximo de Pontryagin en su versión adaptada a sistemas no autónomos.. Ahora la hamiltoniana será

$$\mathcal{H}\,(k, s, q) = u\,[(1-s)\,f\,(k)]\,e^{-\gamma t} + q\,[s\,f\,(k) - (\rho + \delta)\,k]$$

y la evolución dinámica de la variable auxiliar q viene ahora dada por la ecuación

$$\dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -u'\,[(1-s)\,f(k)]\,(1-s)\,f'\,(k)\,e^{-\gamma t} - q\,[s\,f'\,(k) - (\rho + \delta)]\,.$$

El principio de máximo nos dice que una trayectoria óptima estará determinada por una relación ahorro-producto tal que en cada instante maximice el valor de la hamiltoniana para los correspondientes valores de k y q, con lo que un razonamiento similar al efectuado en 3.4 nos lleva a la conclusión de que la trayectoria óptima deberá verificar

$$\overline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}} = 0$$

-6

$$s = 0$$

de manera que, en los instantes en que el máximo de la hamiltoniana se produzca para soluciones interiores $0 < s < 1$ será

$$u' [(1 - s) f(k)] e^{-\gamma t} = q$$

y, en caso contrario

$$s = 0$$

La condición de máximo obtenida para soluciones interiores de s puede interpretarse, una vez más, como la igualdad entre los precios de oferta y de demanda de la unidad de capital por trabajador que ha de satisfacerse en toda trayectoria óptima cuando el producto no es enteramente absorbido por el consumo. En cada instante, $u' [(1 - s) f(k)]$ representa la utilidad marginal del consumo, es decir, el precio al cual destinar una unidad más de producto por trabajador a incrementar el stock de capital compensa exactamente de la pérdida de utilidad derivada de reducir una unidad de consumo por trabajador, de manera que $u' [(1 - s) f(k)]$ representa el precio de oferta de la unidad de capital por trabajador valorado en términos de utilidad del consumo. Por otra parte, la variable auxiliar, $q(t)$, representa, según lo visto en 3.3, la sensibilidad del funcional objetivo, respecto a variaciones en el nivel de capital por trabajador en el instante t, es decir, el precio, valorado en unidades del funcional objetivo al cual el coste de la unidad de capital por trabajador se compensa con el incremento de utilidad que reporta, o precio sombra o de demanda de la unidad de capital por trabajador. Pero ahora este precio está medido en las unidades de utilidad del funcional objetivo, que son unidades de utilidad valoradas en el instante inicial del periodo de planificación, por lo que $q(t)$ representa la utilidad total aportada por la adición de una unidad de capital por trabajador en el instante t, tal y como se valora en el instante $t = 0$. Ahora bien, como $u' [(1 - s) f(k)]$ es el precio de oferta del capital en el instante t, su valoración en el instante $t = 0$ será la que resulte de aplicarle el factor de *miopía* temporal $e^{-\gamma t}$, es decir, que será

$$u' [(1 - s) f(k(t))] e^{-\gamma t}$$

de manera que la ecuación derivada del principio de máximo para soluciones interiores de la relación ahorro-renta representa la igualdad entre los precios de oferta y demanda de la unidad de capital por trabajador, ambos contabilizados en unidades de utilidad del consumo valorada en el instante inicial del periodo de planificación.

De la misma manera, $\dot{q}$ representará la evolución del precio sombra de la unidad de capital por trabajador cuando se mide en unidades de utilidad del consumo valoradas en el instante $t = 0$. En cuanto a la hamiltoniana, que, por tratarse de un sistema no autónomo, ya no tiene por qué ser constante en el tiempo a lo largo de una trayectoria óptima como ocurría con los modelos previamente estudiados en este trabajo, representa ahora para cada valor de t la suma de la utilidad obtenida del flujo de consumo por trabajador en ese instante, valorada en el instante $t = 0$ más la inversión neta por trabajador en t valorada en unidades de utilidad del consumo en $t = 0$. Por consiguiente, en este caso $\mathcal{H}$ representa el producto neto por trabajador del instante t medido en unidades de utilidad del consumo por trabajador, cuando este se valora en el instante, inicial del periodo de planificación.

Si ahora multiplicamos los dos miembros de la ecuación derivada de la aplicación del principio de máximo por $e^{-\gamma t}$ obtendremos

$$u' [(1 - s) f (k (t))] = q e^{\gamma t}$$

que nos expresa la igualdad entre los precios de oferta y demanda de la unidad de capital por trabajador cuando ambos se expresan en unidades de utilidad del consumo por trabajador valorada en el instante en que este consumo se produce.

Un cambio de variables que nos permita eliminar la función auxiliar q para sustituirla por la

$$p = q e^{\gamma t}$$

o precio sombra de la unidad de capital por trabajador, medida en unidades de utilidad por trabajador, en cada instante t, nos transforma las condiciones necesarias de optimalidad en otras equivalentes y que son esencialmente similares a las obtenidas en los modelos anteriormente estudiados, lo que nos permitirá aplicar a nuestro modelo con desigual valoración temporal del consumo buena parte de los resultados obtenidos en aquellos.

La ecuación dinámica del capital no se altera con el cambio de variables. No así, en cambio, la ecuación dinámica de los precios sombra valorados en el instante $t = 0$, que ha de transformarse en la de la evolución de los precios sombra actualizados a su momento correspondiente. Ahora

$$\dot{p} = \dot{q}\, e^{\gamma t} + \gamma q\, e^{\gamma t} = [-u'[(1-s) f(k)](1-s) f'(k) e^{-\gamma t} +$$

$$+ q[(\rho + \delta) - s f'(k)] e^{\gamma t} + \gamma q\, e^{\gamma t} =$$

$$= -u'[(1-s) f(k)](1-s) f'(k) + p[(\rho + \delta + \gamma) - s f'(k)]$$

Y la ecuación derivada del principio de máximo para soluciones interiores es

$$u'[(1-s) f(k)] = p$$

En la expresión de la hamiltoniana podemos también hacer aparecer la nueva variable p multiplicando ambos miembros por el factor actualizador al instante t, $e^{\gamma t}$, con lo que

$$\mathcal{H}\, e^{\gamma t} = u[(1-s) f(k)] + p[s f(k) - (\rho + \delta) k]$$

y ahora $\mathcal{H}(t)\, e^{\gamma t}$ es igual al producto neto por trabajador valorado en unidades de utilidad del consumo por trabajador en el instante t.

Las condiciones necesarias de optimalidad de Pontryagin se presentan ahora en la forma

$$\dot{k} = s f(k) - (\delta + \rho) k$$

$$\dot{p} = p[(\delta + \rho + \gamma) - f'(k)]$$

$$p = u'[(1-s) f(k)]$$

para los puntos (k, p) en que el máximo de $\mathcal{H}$ se produce para soluciones interiores de s, $0 < s < 1$, y

$$\dot{k} = s\,f(k) - (\delta + \rho)\,k$$

$$\dot{p} = -u'[f(k)]\,f'(k) + p\,[\delta + \rho + \gamma]$$

$$s = 0$$

para los puntos en que $\mathcal{H}$ es maximizado por el valor $s = 0$. Esta nueva representación del modelo tiene sobre la anterior dos ventajas: en primer lugar, nos proporciona los precios sombra de la unidad de capital por trabajador actualizados al instante en que se producen; en segundo lugar, el sistema de condiciones necesarias de optimalidad es semejante al del modelo sin descuento temporal, con la sola diferencia de la aparición de un nuevo sumando en el segundo factor de la ecuación dinámica de los precios; la tasa de descuento, γ, que, en cambio, no forma parte de ninguna de las otras dos ecuaciones.

Dada la semejanza entre éste sistema de condiciones necesarias de optimalidad y el planteado en 4.2, las conclusiones generales referentes al comportamiento de las trayectorias óptimas, mencionadas en 4.2, como generalización de las obtenidas en el capítulo 3 para el modelo con población constante —generalización que realizamos sin más que reinterpretar las variables en términos relativos por trabajador— *siguen siendo válidas para nuestro actual modelo, también en términos relativos*. Pero aunque las trayectorias óptimas se comporten de la misma forma, y las normas a que obedece su evolución sean las mismas, no coinciden exactamente con las correspondientes a los mismos valores de los parámetros en el modelo sin descuento temporal del consumo, pues el nuevo sumando, γ, que aparece en la ecuación dinámica de los precios les afecta en la forma que exponemos seguidamente.

Una curva separatriz divide el plano fase de variables k y p en dos regiones: la correspondiente a soluciones interiores del principio de máximo y la del consumo total del producto en trayectorias óptimas. Esta curva, de ecuación

$$p = u'(f(k))$$

similar a la de los modelos anteriores, tiene la forma representada en la figura 3.1. Determinemos ahora las curvas de equilibrio para cada una de las variables k y p. El conjunto de los puntos en los cuales k permanece invariante para cada trayectoria óptima son los que satisfacen

$$s f(k) - (\delta + \rho) k = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$f(k) - c - (\delta + \rho) k = 0$$

que, evidentemente, se encuentra por encima de la curva separatriz, con lo que, despejando c en la ecuación resultante de la aplicación del principio de máximo tendremos

$$p = u' [f(k) - (\delta + \rho) k]$$

Esta curva tiene una ecuación similar a la obtenida para $\dot{K} = 0$ en 3.5, aunque sus variables están expresadas en términos relativos y el parámetro δ se ha transformado en el $\delta + \rho$. La curva será, por tanto, asintótica a la recta $k = 0$ para $k \to 0$, y a la $k = \widetilde{k}$ para $k \to \widetilde{k}$, y tendrá un mínimo, para el valor de k tal que

$$f'(k) = \delta + \rho$$

que era justamente el valor de la relación capital-trabajo correspondiente al punto de equilibrio en el modelo sin descuento temporal de la utilidad.

La curva formada por los puntos (k, p), en los que p permanece invariante en toda trayectoria óptima será por encima de la curva separatriz la

$$f'(k) = \delta + \rho + \gamma$$

que es la recta $k = k^*$, siendo k^* la solución de esta ecuación, y por debajo de la curva separatriz, la

$$p = \frac{u'[f(k)]\, f'(k)}{\delta + \rho + \gamma}$$

que es una curva decreciente que coincide con la recta $k = k^*$ en el punto de coordenadas k^* y

$$p = u'[f(k^*)]$$

situado sobre la separatriz.

En resumen, las curvas de equilibrio tienen la misma forma que las representadas en la figura 3.1, pero ahora su intersección se produce en un punto de coordenadas k^* y p^* tales que

$$f'(k^*) = \delta + \rho + \gamma$$

y

$$p^* = u'[f(k^*) - (\delta + \rho)\, k^*]$$

de manera que en este modelo el punto singular del sistema no coincide con el mínimo de la curva $\dot{k} = 0$. Como la derivada de la función de producción por trabajador respecto a la relación capital-trabajo *es decreciente, el punto de intersección* de las curvas de equilibrio se producirá para un valor de k inferior al correspondiente al mínimo de $\dot{k} = 0$ *cuando* $\gamma > 0$, *y superior a él si* $\gamma < 0$. Ambos casos aparecen representados, respectivamente en las figuras 4.1 y 4.2.

Ahora las curvas de equilibrio dividen el plano fase en cuatro regiones, *en cada una de las cuales* (tanto en el caso $\gamma > 0$ como cuando $\gamma < 0$) los signos de $\dot{k}$ y $\dot{p}$ son los mismos que los especificados en 3.6, con lo que la evolución de las trayectorias en cada una de las zonas es la indicada en la figura 3.1. Sin embargo, la diferente posición relativa de las curvas de equilibrio determina algunas modificaciones en las trayectorias óptimas, cuya interpretación económica concuerda con los resultados que pueden esperarse de la diferente valoración temporal de la utilidad del consumo.

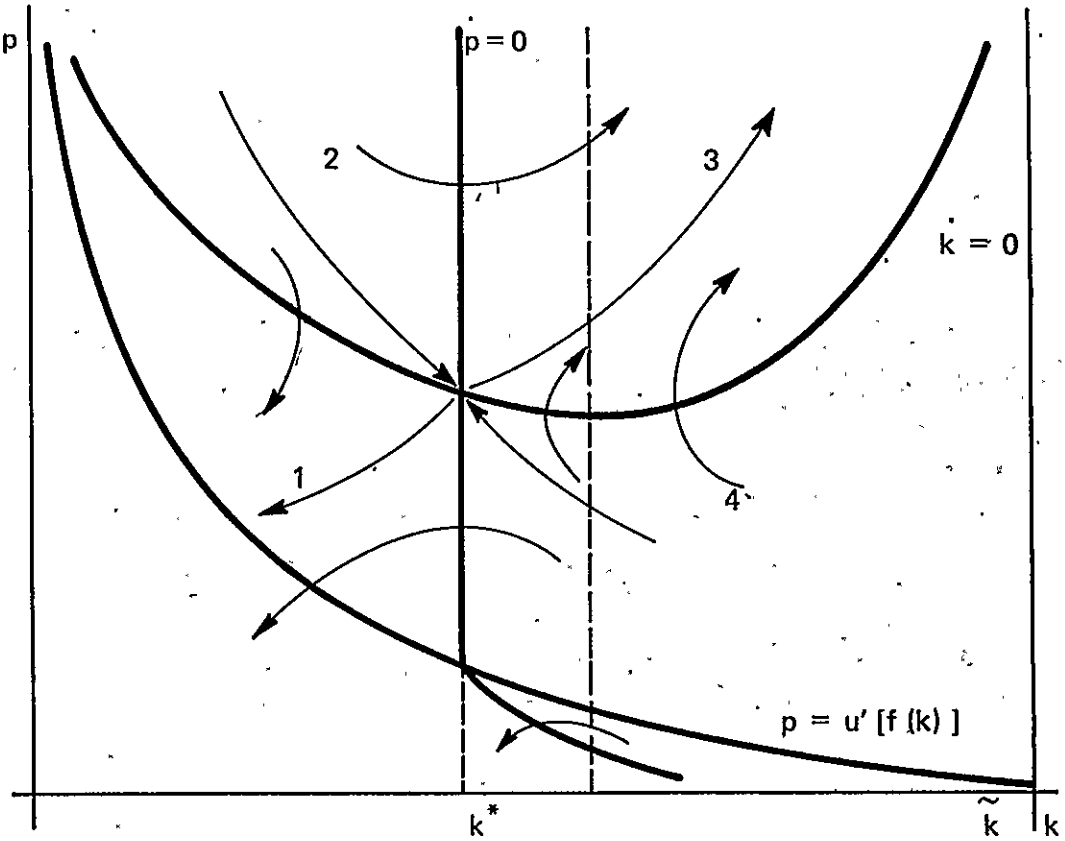

Figura 4—1

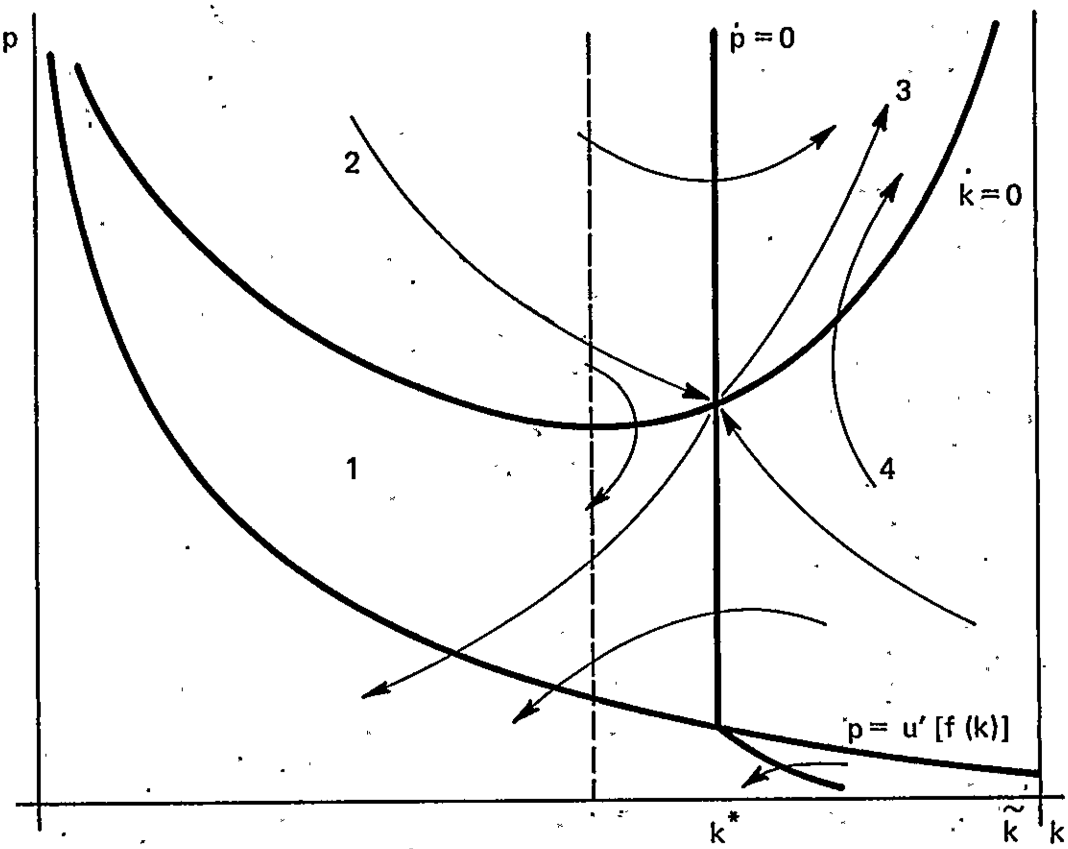

Figura 4—2

El supuesto en el que quizá se aprecia más claramente la influencia de la tasa de descuento de la utilidad en la trayectoria óptima y su concordancia con la interpretación económica esperada es el de la determinación de una trayectoria óptima que traslade el sistema del valor inicial de la relación capital-trabajo k_0 tal que

$$f'(k_0) = \rho + \delta$$

al valor final $k_T = k_0$ en un tiempo T. Si el modelo no admite tasa de descuento de la utilidad los valores inicial y final de la trayectoria coinciden con el del mínimo de la curva $\dot{k} = 0$, que en este caso es el del punto de equilibrio o regla de oro del sistema. El comportamiento óptimo consistirá, por consiguiente, en adoptar un precio sombra de la unidad de capital por trabajador igual al de equilibrio y permanecer durante todo el periodo T en el punto de equilibrio, con valores de la relación capital-trabajo y del consumo constantes e iguales a los de la regla de oro. Pero si el mismo problema se plantea en un modelo con descuento temporal positivo de la utilidad, los valores inicial y final de la trayectoria ya no coinciden con el del punto de equilibrio, sino que son mayores que él, con lo que la trayectoria óptima ha de comenzar en las zonas 3 ó 4 del plano fase. Dada la evolución de las trayectorias solución de las condiciones necesarias de optimalidad, es evidente que la trayectoria óptima pedida comenzará en la zona 4 con un precio sombra del capital inferior al correspondiente de la curva $\dot{k} = 0$ — y, por consiguiente, con un mayor consumo por trabajador—. Su precio sombra irá aumentando —y su consumo por trabajador disminuyendo— durante toda la trayectoria, mientras que su relación capital-trabajo decrece primeramente mientras la trayectoria se mantiene en la zona 4, creciendo luego hasta alcanzar el valor deseado durante el periodo en que la trayectoria está en la zona 3 (figura 4.1). En resumen, frente a una trayectoria óptima de consumo constante cuando $\gamma = 0$, la tasa de descuento positiva determina una trayectoria óptima en la que el consumo comienza siendo mayor, y se reduce paulatinamente hasta ser menor que el de la trayectoria con $\gamma = 0$ al final del periodo. Este resultado es totalmente coherente con la idea expresada en 4.3.2 de que una tasa de descuento de la utilidad positiva determina una minusvaloración del consumo futuro frente al presente, tanto mayor cuanto más alejado sea ese futuro, con lo que el comportamiento óptimo se modificará en el sentido de incrementar el consumo de las generaciones más próximas al presente, a costa de reducir el de las más alejadas. Y esta modificación es tanto más fuerte cuanto mayor es el valor absoluto de la tasa de descuento, ya que, al aumentar λ, el punto de equilibrio del nuevo sistema se aleja más aún del valor de k que hace mínimo p en $\dot{k} = 0$, con lo que la nueva trayectoria, al ser mayor la velocidad de desplazamiento de la variable p en cada punto, empezará en k_0 con valores más pequeños del precio sombra –mayor consumo por trabajador– y terminará en k_0 con valores mayores de p –y menores de c– acentuando el desnivel entre el consumo por trabajador de las generaciones más próximas respecto a las más alejadas del instante inicial.

Un razonamiento similar, aunque simétrico, nos llevaría a opuestas conclusiones en el caso en que la tasa de descuento fuese negativa –se concediera mayor peso al consumo de las generaciones futuras que al de las presentes–, pues ahora, al ser $\gamma < 0$ será

$$\rho + \delta + \gamma < \rho + \gamma$$

y la intersección de las curvas de equilibrio se producirá para un valor de la relación capital-trabajo superior al que determina el mínimo de la curva $\dot{k} = 0$, con lo que la trayectoria óptima que pasa del valor k_0 tal que

$$f'(k_0) = \rho + \delta$$

al $k_T = k_0$ en un periodo T tiene que comenzar en las zonas 1 ó 2. Dada la forma de las trayectorias en esta zona, la trayectoria óptima buscada se iniciará en la zona 2 con un valor del precio sombra superior al de la regla de oro –que es el que adoptaría en el caso $\gamma = 0$– el cual se irá reduciendo hasta llegar a valores inferiores al de la regla de oro al final de la trayectoria (figura 4.2). De todo lo cual se deduce que, una tasa de descuento negativa modifica la trayectoria óptima en el sentido de reducir el consumo por trabajador en la primera parte del periodo de planificación, aumentándolo en cambio en su parte final. Este resultado es también coherente con la intuición económica de que, así como una tasa de descuento positiva supone un incentivo al consumo inmediato, una tasa de descuento negativo produce, en cambio, un acicate al ahorro inmediato con vistas a un incremento del consumo lejano, cuya utilidad está más fuertemente valorada.

El significado económico del punto de equilibrio en un modelo con tasa de descuento no nulo tampoco coincide exactamente con el del punto singular del modelo $\gamma = 0$. En el caso en que $\gamma \neq 0$, la trayectoria que se inicia, y permanece, en el punto de equilibrio durante todo el periodo de planificación mantendrá durante todo él un valor constante de la relación capital-trabajo, k^*, tal que

$$f'(k^*) = \delta + \rho + \gamma$$

y además un valor constante de la relación ahorro-producto, s^*

$$s^* = \frac{(\delta + \rho)\, k^*}{f(k^*)}$$

con lo que todas las variables económicas fundamentales —capital, producto, consumo e inversión— expresadas en términos relativos por trabajador, permanecerán también constantes y sus valores absolutos crecerán, por consiguiente, al mismo ritmo que la población. La solución de equilibrio, determina por tanto, un crecimiento armónico, o en edad de oro. Pero ya no es el crecimiento propio de la regla de oro, o, lo que es lo mismo, ya no es el crecimiento armónico que da lugar al mayor consumo por trabajador mantenible indefinidamente. En realidad, el crecimiento armónico con un máximo de consumo mantenible, sigue estando en el punto (k, p), mínimo de la curva $\dot{k} = 0$, pero ahora, una trayectoria que se estabilizase en este punto durante todo el periodo no satisfaría el sistema de condiciones necesarias, pues en cualquier instante de ella sería

$$\dot{p} \neq 0$$

y sin embargo, el precio sombra ha de permanecer constante en una trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad y que mantenga constante el valor de su relación capital-trabajo. Luego la trayectoria de crecimiento armónico con el máximo nivel de consumo mantenible no es una trayectoria óptima en el modelo con $\gamma \neq 0$, *lo que, naturalmente, se explica teniendo en cuenta que la introducción del factor de descuento temporal de la utilidad del consumo supone un cambio de unidades en la medida de aquella de manera que en un sistema inicialmente situado a un nivel de la relación capital-trabajo igual al del mínimo*, resulta más útil, según hemos visto, desplazar el consumo hacia el comienzo o el final de la trayectoria de acuerdo con el signo de γ.

La trayectoria en edad de oro que está situada en el punto de equilibrio del modelo con $\gamma \neq 0$ recibe en la literatura económica el nombre de *regla de oro modificada* (modified golden rule). Este punto está tanto más próximo al mínimo de la curva $\dot{k} = 0$ cuanto menor es el valor absoluto de γ, de manera que cuando $\gamma \to 0$ ambos puntos tienden a coincidir dando lugar a la existencia de la regla de oro no modificada.

Tampoco se cumple en la regla de oro modificada la igualdad entre la cantidad de producto por trabajador destinado a *la inversión bruta* y la remuneración al capital por trabajador en equilibrio, pues ahora el ahorro total por trabajador será

$$s^* f(k^*) = (\delta + \rho) k^*$$

y el capital por trabajador, remunerado al precio de su productividad marginal

$$k^* f'(k^*) = (\delta + \rho + \gamma) k^*$$

lo que nos dice que el mantenimiento del sistema en la regla de oro modificada supone un ahorro inferior a la remuneración al capital en equilibrio –un consumo superior a la fracción de producción atribuible al trabajo– cuando $\gamma > 0$ y una inversión bruta superior a la remuneración al capital a precios de equilibrio si $\gamma < 0$.

Exceptuando las diferencias anteriormente mencionadas, las trayectorias del modelo finito con descuento temporal de la utilidad se comportan básicamente lo mismo que en el modelo con $\gamma = 0$, con lo que las conclusiones obtenidas en 4.2 —consecuencia de las obtenidas en el capítulo 3, tras la adecuada transformación de las variables absolutas en variables relativas por trabajador— siguen siendo válidas cuando $\gamma \neq 0$.

4.4.2. El modelo con horizonte infinito

Analicemos ahora brevemente el modelo de crecimiento óptimo con tasa de descuento de la utilidad no nula cuando el periodo de planificación es infinitamente largo. Ahora el problema consistirá en determinar, de entre todas las posibles trayectorias de acumulación de capital en las que la relación capital-trabajo evoluciona de acuerdo con la ecuación

$$\dot{k} = s\,f(k) - (\delta + \rho)\,k$$

partiendo de un valor inicial dado, k_0, en el instante $t = 0$, aquella que hace máximo el valor del funcional objetivo

$$J[k(t)] = \int_0^{\infty} u(c(t))\, e^{-\gamma t}\, dt$$

En el apartado 4.3.2 expusimos las razones de índole matemática, corroboradas por la correspondiente interpretación económica, según las cuales este problema solamente puede tener sentido cuando $\gamma > 0$, ó, para $\gamma = 0$, recurriendo a la transformación del funcional objetivo señalada en 4.3.3.; para $\gamma < 0$, existe más de un trayectoria que determine un valor infinitamente grande del funcional objetivo, lo que impide su comparabilidad y, consiguientemente, la determinación de la trayectoria óptima; por otra parte, como una tasa natural de interés negativa estimula al ahorro con vistas a un consumo futuro, la existencia de trayectoria óptima es imposible, ya que cualquier trayectoria es mejorada por otra que en cualquier instante trasvase una unidad más de producto del consumo a la inversión, con el fin de incrementar un consumo futuro que dada la infinitud del periodo de planificación, no llega nunca. Para $\gamma > 0$, en cambio, no se presentan situaciones paradójicas de este tipo, y el problema tiene solución, como vamos a ver seguidamente.

Para determinarla, comenzaremos por aplicar el principio de máximo de Pontryagin, y obtener unas condiciones necesarias de optimalidad para las trayectorias. El principio de máximo, válido para programas con horizonte infinito, en sistemas autónomos, se generaliza fácilmente al caso de un sistema no autónomo, y su aplicación a nuestro modelo proporciona unas condiciones necesarias de optimalidad idénticas a las del modelo con horizonte de planificación finito, lo que nos dice que, al igual que ocurría en 4.3.3, la trayectoria óptima de nuestro problema deberá ser una de las soluciones posibles esbozadas en la figura 4.1., que comience con el valor k_0 de la relación capital-trabajo para $t = 0$ y se prolongue indefinidamente en el tiempo. Y, como también ocurría en el modelo sin descuento temporal de la utilidad, carecemos de la condición de transversalidad que, sustituyendo a la inexistente condición de contorno a la terminación de la trayectoria óptima, nos determine esta de manera óptima, por lo que, una vez más hemos de proceder por eleminación viendo que toda trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad con $k_0 < \widetilde{k}$ que se prolongue indefinidamente en el tiempo y que no coincida con alguno de los brazos estables del punto singular penetra inevitablemente en las regiones 1 ó 3 del plano fase, y que una trayectoria que transcurra total o parcialmente en las regiones 1 ó 3 *no puede ser óptima con horizonte infinito*. Solamente la trayectoria que, partiendo del k_0 dado, sigue el brazo de estabilidad correspondiente del sistema aproximándose asintóticamente al punto singular es óptima con horizonte infinito.

Los argumentos empleados en la demostración de este aserto en 4.3.3 para el modelo con $\gamma = 0$ no son aplicables directamente al caso $\gamma > 0$, puesto que, como ya indicamos en 4.3.2, el factor $e^{-\gamma t}$ de nuestro actual funcional objetivo afecta a la consiguiente trayectoria de utilidad del consumo por trabajador reduciéndola progresivamente con el paso del tiempo, lo que podría convertir en convergentes a algunas de las integrales de extremo superior infinito utilizadas en aquella demostración, y cuya divergencia era evidente para $\gamma = 0$. Sin embargo, también en el modelo que ahora nos ocupa es posible encontrar razones suficientes para desechar, como no óptima, a cualquier trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo que en un instante dado se encuentra en las zonas 1 ó 3 del plano de fase y, por consiguiente, permanece en ellas indefinidamente.

Vamos a ver primeramente que ninguna trayectoria que siendo solución de las condiciones necesarias de optimalidad penetre en la zona 1 puede ser óptima *con horizonte temporal infinito.* Cuando una de estas trayectorias alcanza el valor $p = 0$ para un $k > 0$, es decir, tiene un punto en común con el eje de abscisas, no se detiene en él, sino que *continúa evolucionando en ese instante con valores decrecientes* de su precio sombra, penetrando en el cuadrante de las p negativas, pues, por debajo de la curva separatriz es

$$\dot{p} = -u'(f(k))\, f'(k) + p\,(\rho + \delta + \gamma)$$

lo que, para $p = 0$ se convierte en

$$\dot{p} = -u'(f(k))\, f'(k) < -u'(f(k^*))\, f'(k^*) < 0$$

Pero todas las trayectorias solución de las condiciones necesarias de optimalidad que penetran en la zona 1 acaban tomando un valor $p = 0$ para un $k > 0$ cuando el horizonte de planificación es infinito. En efecto, hemos visto en 4.3.3 —y el razonamiento sigue siendo válido para los modelos con $\gamma > 0$— que tales trayectorias alcanzan necesariamente puntos situados por debajo de la curva separatriz, es decir, en la zona del consumo total del producto. Consideremos una cualquiera de estas trayectorias que en un instante t_1 alcanza valores $k(t_1) = k_1$, $p(t_1) = p_1$ tales que

$$p_1 < u'[f(k_1)]$$

En estas circunstancias el crecimiento del stock de capital por trabajador para $t > t_1$ vendrá dado por la ecuación dinámica

$$\dot{k} = -(\delta + \rho)\, k$$

de manera que

$$k(t) = k_1\, e^{-(\delta+\rho)(t-t_1)} \quad t \geq t_1$$

con lo que resulta que el capital se mantiene siempre positivo, y tiende asintóticamente a cero, es decir, puede tomar valores tan pequeños como queramos sin más que considerar un intervalo de tiempo suficientemente largo. Por otra parte, la evolución de los precios sombra viene dada por la ecuación

$$\dot{p} = -u'(f(k))\, f'(k) + p(\rho + \delta + \gamma)$$

donde

$$p < p^* \quad t \geq t_1$$

Pero las hipótesis establecidas respecto a la función de utilidad del consumo por trabajador, juntamente con las condiciones de buen comportamiento de Inada impuestas a la de producción nos aseguran que

$$\lim_{k \to 0} u'(f(k))\, f'(k) = \infty$$

de donde resulta que el primer sumando del segundo miembro de la ecuación dinámica de los precios sombra por debajo de la separatriz, puede tomar valores absolutos tan grandes como queramos sin más que considerar un valor de k lo suficientemente pequeño, lo que supone, por lo anteriormente expuesto, admitir un intervalo temporal suficientemente grande. Sea k_2 un valor de k tal que

$$u'(f(k_2))\, f'(k_2) > p^*(\rho + \delta + \gamma) > p_2(\rho + \delta + \gamma)$$

Este valor, k_2, y su correspondiente p_2, son alcanzados por la trayectoria en cuestión en un instante t_2 tal que

$$k_2 = k_1\, e^{-(\delta+\rho)(t_2-t_1)}$$

es decir

$$t_2 = \frac{\log k_1 - \log k_2}{\delta + \rho} + t_1$$

y como en la zona 1 los precios sombra decrecen y $f'(k)$ y $u'(f(k))$ son funciones decrecientes de k, para todo $t \geqslant t_2$ se verifica

$$\dot{p} = -u'(f(k))\, f'(k) + p\,(\delta + \rho + \gamma) <$$

$$< -u'(f(k))\, f'(k) + p^*\,(\delta + \rho + \gamma) < 0$$

con lo que existirá un $\epsilon > 0$ tal que

$$\dot{p} < -\epsilon \quad t \geqslant t_2$$

es decir que

$$p(t) < p_2 - \epsilon\,(t - t_2) \quad t \geqslant t_2$$

y por tanto, para algún t_3 tal que

$$t_3 < \frac{p_2}{\epsilon} + t_2$$

será $p(t_3) = 0$, y

$$k(t_3) = k_1\, e^{-(\delta+\rho)(t_3 - t_1)} > 0$$

con lo que queda demostrado que toda trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad en un modelo con horizonte temporal infinito que tenga algún punto de su trayectoria en la zona 1 del plano de fase, alcanza en algún instante finito un valor de $p = 0$ para un correspondiente valor de $k > 0$, lo que significa que, para todo tiempo posterior a este instante, los precios sombra de la citada trayectoria son negativos, lo cual la excluye de toda posible consideración como trayectoria óptima.

Para completar la demostración de que la única trayectoria óptima en el modelo con horizonte temporal infinito es la que tiende asintóticamente al punto singular del sistema a lo largo de sus brazos de estabilidad, es preciso ver que ninguna trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad y que penetre, y se establezca, en la zona 3 del plano de fase puede ser óptima.

Para ello, vamos a ver primeramente que una trayectoria que, satisfaciendo las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin y comenzando con un valor inicial $k(0) = k_0$ dado de la relación capital-trabajo verifica además la condición

$$\lim_{t \to \infty} p(t)\, e^{-\gamma t} = 0$$

produce una mayor utilidad total descontada al instante $t = 0$ que cualquier otra trayectoria que, comenzando con un $k(t) = k_0$, evolucione de acuerdo con la misma ecuación dinámica de la relación capital-trabajo. El razonamiento que nos llevará a esta conclusión está basado, una vez más, en la concavidad estricta de las funciones de utilidad y de producción, y sigue la misma línea que la demostración efectuada en 3.10 de la suficiencia de las condiciones necesarias de optimalidad en nuestro modelo de crecimiento óptimo con horizonte temporal finito.

Sea $k_1(t)$ una trayectoria de la relación capital-trabajo tal que, con un valor inicial $k(0) = k_0$, satisface, junto con sus correspondientes trayectorias del precio sombra $p_1(t)$ y de la relación ahorro-producto $s_1(t)$, las condiciones necesarias de optimalidad en todo t perteneciente al intervalo $[0, \infty[$, y que además verifica

$$\lim_{t \to \infty} p(t)\, e^{-\gamma t} = 0$$

y sea

$$c_1(t) = (1 - s_1(t))\, k_1(t)$$

su correspondiente trayectoria de consumo por trabajador. Sea

$$c_2(t) = (1 - s_2(t))\, k_2(t)$$

la trayectoria de consumo por trabajador correspondiente a una trayectoria de acumulación de la relación capital-trabajo, $k_2(t)$, tal que $k_2(0) = k_0$, y que también satisfaga la ecuación de evolución dinámica del sistema

$$\dot{k} = s f(k) - (\delta + \rho) k$$

La utilidad total derivada de la primera trayectoria, y valorada en $t = 0$ es

$$\int_0^\infty u(c_1) e^{-\gamma t} dt$$

y el valor del funcional objetivo asociado a la segunda trayectoria es

$$\int_0^\infty u(c_2) e^{-\gamma t} dt.$$

Vamos a ver que

$$\int_0^\infty u(c_1) e^{-\gamma t} dt > \int_0^\infty u(c_2) e^{-\gamma t} dt$$

es decir, que

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} (u(c_1) - u(c_2)) dt > 0$$

Para ello, siguiendo el método utilizado en 3.10, sumaremos y restaremos al integrando los términos

$$e^{-\gamma t} u'(c_1)(c_1 - c_2)$$

y

$$e^{-\gamma t} u'(c_1) f'(k_1)(k_1 - k_2)$$

y además sumaremos los

$$e^{-\gamma t} p_1 (s_1 f(k_1) - (\delta + \rho) k_1 - \dot{k}_1)$$

y

$$- e^{-\gamma t} p_1 (s_2 f(k_2) - (\delta + \rho) k_2 - \dot{k}_2)$$

que son nulos, puesto que ambas trayectorias evolucionan conforme a la ecuación dinámica indicada. En la integral resultante agruparemos adecuadamente los términos de manera que

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} (u(c_1) - u(c_2))\, dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t} [u(c_1) - u(c_2) -$$

$$- u'(c_1)(c_1 - c_2) + u'(c_1)(c_1 - c_2) + p_1 (s_1 f(k_1) - (\delta + \rho) k_1 - \dot{k}_1) -$$

$$- p_1 (s_2 f(k_2) - (\delta + \rho) k_2 - \dot{k}_2) - u'(c_1) f'(k_1)(k_1 - k_2) +$$

$$+ u'(c_1) f'(k_1)(k_1 - k_2)]\, dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t} [(u(c_1) - u(c_2) - u'(c_1)(c_1 - c_2)) +$$

$$+ (p_1 - u'(c_1)) [s_1 f(k_1) - s_2 f(k_2)] + [u'(c_1) f'(k_1) - p_1 (\delta + \rho)] (k_1 - k_2) +$$

$$+ u'(c_1) [f(k_1) - f(k_2) - f'(k_1)(k_1 - k_2)] - p_1 (\dot{k}_1 - \dot{k}_2)]\, dt >$$

$$> \int_0^\infty e^{-\gamma t} [(p_1 - u'(c_1)) [s_1 f(k_1) - s_2 f(k_2)] + [u'(c_1) f'(k_1) -$$

$$- p_1 (\delta + \rho)] (k_1 - k_2) - p_1 (\dot{k}_1 - \dot{k}_2)]\, dt$$

por ser u (c) y f (k) estrictamente cóncavas y u' (c) positiva. La integración por partes del último término nos da

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} p_1 (\dot{k}_1 - \dot{k}_2)\, dt = \lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t} p_1(t) (k_1(t) - k_2(t)) -$$

$$- p_1(0)(k_1(0) - k_2(0)) - \int_0^\infty (-\gamma e^{-\gamma t} p_1 + e^{-\gamma t} \dot{p}_1)(k_1 - k_2)\, dt$$

con lo que, habida cuenta que $k_1(0) = k_2(0)$ resulta

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} ((u(c_1)) - u(c_2))\, dt > \int_0^\infty e^{-\gamma t} [(p_1 - u'(c_1)) [s_1 f(k_1) - s_2 f(k_2)] +$$

$$+ (u'(c_1) \cdot f'(k_1) - p_1 (\delta + \rho + \gamma) + \dot{p}_1)(k_1 - k_2)]\, dt -$$

$$- \lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t} p_1(t) (k_1(t) - k_2(t))$$

pero como la primera trayectoria satisface las condiciones necesarias de optimalidad, y está por encima de la separatriz, será

$$p_1 = u'(c_1)$$

y

$$\dot{p}_1 = -u'(c_1)\, f'(k_1) + p_1 (\delta + \rho + \gamma)$$

de donde

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (u(c_1) - u(c_2))\, dt > - \lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t}\, p_1(t)\, (k_1(t) - k_2(t))$$

pero la relación capital-trabajo está siempre acotada en nuestro caso por su valor máximo mantenible indefinidamente, $\widetilde{k}$; y como además, la primera trayectoria verifica

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t}\, p_1(t) = 0$$

será

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} (u(c_1) - u(c_2))\, dt > 0$$

de manera que la trayectoria que satisface las condiciones necesarias de optimalidad del principio de máximo y además la

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t}\, p(t) = 0$$

es mejor que cualquier otra trayectoria que, comenzando con un mismo valor inicial de la relación capital-trabajo, k_0, evoluciona de acuerdo con la misma ecuación dinámica.

La trayectoria que, comenzando en k_0 y satisfaciendo las condiciones necesarias de máximo, sigue el brazo estable correspondiente, tendiendo asintóticamente el punto singular del sistema, satisface ésta condición, pues en ella

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = p^*$$

con lo que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t} p(t) = \lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t} p^* = 0$$

Las trayectorias que, satisfaciendo las condiciones necesarias de optimalidad y la condición de contorno inicial $k(0) = k_0$, penetran en la zona 3 del plano de fase, no verifican, en cambio, esta condición. Tomemos, en efecto, una cualquiera de ellas: desde el instante en que la trayectoria entra en la zona 3, su capital por trabajador y su precio sombra crecen continuamente, tendiendo aquel asintóticamente al máximo valor indefinidamente mantenible $\widetilde{k}$, con lo que alcanzará cualquier valor $k < \widetilde{k}$ con un intervalo de tiempo suficientemente largo. Pero en $\widetilde{k}$ ocurre que

$$f'(\widetilde{k}) < \delta + \rho$$

Como, por otra parte, en k^* es

$$f'(k^*) = \delta + \rho + \gamma > \delta + \rho$$

la continuidad de $f'(k)$ nos asegura la existencia de un valor de la relación capital trabajo, k_1, $k^* < k_1 < \widetilde{k}$, tal que

$$f'(k_1) = \delta + \rho$$

Sea t_1 el instante tal que, para la trayectoria elegida, es $k(t_1) = k_1$, y sea $p_1 = p(t_1)$ el valor correspondiente del precio sombra. Como

$$\dot{p} = p\,[(\delta + \rho + \gamma) - f'(k)]$$

será para $t > t_1$

$$\dot{p} > p\,[(\delta + \rho + \gamma) - (\delta + \rho)] = p.\gamma$$

es decir que

$$\frac{\dot{p}}{p} > \gamma, \quad t > t_1$$

lo que supone

$$p(t) > p(t_1)\, e^{\gamma(t-t_1)}, \quad t > t_1$$

de manera que

$$e^{-\gamma t} p(t) > p_1 e^{-\gamma t_1}, \quad t > t_1$$

es decir que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t} p(t) \geqslant p_1 e^{-\gamma t_1} > 0$$

Y como hemos visto que la trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad que verifique

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\gamma t} p(t) = 0$$

es mejor que cualquier otra que tenga el mismo valor inicial k_0 y satisfaga a la misma ecuación dinámica, queda demostrado que ninguna trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad que entre en la zona 3 del plano de fase puede ser óptima con un horizonte temporal infinito pues el valor de su funcional objetivo es superado por el de la trayectoria que, comenzando también en k_0, se desplaza sobre el brazo de estabilidad correspondiente, tendiendo al punto singular.

Con todo lo cual queda demostrado también en este modelo, por exclusión, que la trayectoria óptima buscada es la que, comenzando en el valor k_0 de su relación capital-trabajo con un precio sombra, p_0, igual al de la intersección del brazo de estabilidad del sistema con la recta $k = k_0$, continúa desplazándose a lo largo de dicho brazo estable, acercándose indefinidamente al punto singular del sistema. Observemos que, siendo el consumo propio del punto singular el

$$c^* = f(k^*) - (\rho + \delta)\, k^* > 0$$

las propiedades de continuidad de las trayectorias solución de las condiciones necesarias de optimalidad nos aseguran que, a lo largo de esta trayectoria óptima, el consumo por trabajador se mantiene siempre superior a un cierto número positivo

$$\underline{c} = \min\left(u'^{-1}(p_0), c^*\right) > 0$$

con lo que, de lo visto en 4.3.2 se deduce que para la trayectoria óptima el funcional objetivo es convergente.

Observemos que, eventualmente, el modelo con horizonte temporal infinito y tasa natural de interés positiva satisface una condición de transversalidad en la variable auxiliar semejante a la de los modelos finitos con extremo final libre. Como ya vimos en 4.3.3, *este hecho no es generalizable a cualquier modelo* con horizonte temporal infinito.

Las diferentes reglas de oro modificadas para valores negativos de γ no son puntos de atracción asintótica de trayectorias óptimas, pues hemos visto que no existe trayectoria óptima con horizonte infinito cuando $\gamma < 0$. Puesto que la relación capital-trabajo de la regla de oro modificada satisface la relación

$$f'(k^*) = \rho + \delta + \gamma$$

resulta que todas las correspondientes a tasas de descuento de la utilidad positivas están a la izquierda de la regla de oro, en tanto que las de modelos de crecimiento con $\gamma < 0$ están a la derecha de ella. En lo que concierne a estas últimas, esto implica el mantenimiento de una relación capital-producto superior a la correspondiente a la regla de oro durante un periodo de tiempo infinito —véase 4.3.3— lo que, según Phelps, supone la ineficiencia de la trayectoria. Un razonamiento intuitivo efectuado sobre la figura 4.2 nos llevaría a idéntica conclusión, pues una trayectoria que se mantenga durante un periodo de tiempo infinitamente largo en las proximidades de un punto cualquiera de la curva $\dot{k} = 0$ situado a la derecha de la regla de oro supone el disfrute de un consumo por trabajador menor que el de la regla de oro cuando se dispone de un stock de capital por trabajador superior y durante un periodo infinitamente largo, lo que confirma la ineficiencia de la trayectoria e, indirectamente, su no optimalidad. Cuando $\gamma > 0$ ocurre, por el contrario, que la trayectoria que se acerca a la regla de oro modificada mantiene durante la mayor parte del tiempo un valor de la relación capital-producto inferior a la de la regla de oro, y, por otra parte, si bien determina durante el intervalo de tiempo en que la trayectoria se encuentra en un entorno suficientemente pequeño del punto singular un consumo por trabajador menor que el de la regla de oro, también es cierto que durante ese tiempo dispone de un stock de capital por trabajador más pequeño que el correspondiente a ésta. Todo lo cual se expresa en la literatura económica habitual diciendo que la regla de oro actúa como separatriz entre programas eficientes y programas no eficientes.

El modelo numérico cuya realización expondremos en los próximos capítulos va a ser planteado con una tasa de descuento temporal de la utilidad mayor que cero. Además de los razonamientos de caracter económico a favor de la desigual valoración de la utilidad del consumo a lo largo del tiempo —lo que parece más próximo al comportamiento real del grupo social en una economía desarrollada— nuestra elección viene corroborada por el deseo de ponderar en último término las utilidades obtenidas por trabajador con un índice representativo del crecimiento de la población —es decir, del número creciente de personas que van a disfrutar de ellas— lo que, respecto al funcional objetivo, resulta equivalente a una valoración creciente en el tiempo de las utilidades, que ha de ser compensada por una tasa de descuento temporal de la utilidad positiva y mayor o igual en valor absoluto, si queremos que el modelo admita trayectorias óptimas con horizonte infinito y posea, además, otras características de las que se tratará en el capítulo próximo. De ahora en adelante, pues, supondremos nuestro modelo afectado por una tasa de descuento temporal de la utilidad, $\gamma > 0$.

4.5. Crecimiento óptimo con progreso técnico

4.5.1. El progreso técnico

En los modelos de crecimiento estudiados hasta ahora hemos partido de la hipótesis de que solamente dos factores afectaban al volumen del flujo de producto obtenido: el capital y el trabajo. La función de producción dependía, por tanto, explícitamente solo de estas dos variables, y no del tiempo, por lo que tenía un carácter netamente autónomo. Sin embargo, estudios empíricos efectuados en torno a esta cuestión han mostrado que en la realidad, el producto aumenta con el paso del tiempo aunque las cantidades empleadas de los factores permanezcan constantes, de lo que se deduce que aquel interviene de alguna manera en el nivel de producción, y que su inclusión como variable explícita en la función de producción aproxima el modelo a la realidad observada, hasta el punto de que, en opinión de Mirrless, *los modelos que olvidan el progreso técnico son útiles para el desarrollo de técnicas de análisis, pero no proporcionan una pauta para las aplicaciones*(*).

El incremento del producto con el paso del tiempo es atribuible a varias causas de diversa índole, tales como la mayor adecuación del equipo capital al proceso productivo originada por los avances tecnológicos, o la mejor preparación técnica de la mano de obra, tanto a nivel de obreros como de dirigentes empresariales, o una organización más eficaz de la producción, o incluso una mejora en las condiciones de vida, higiene y asistencia sanitaria de los trabajadores. Estos factores, junto con todos los demás que colaboren a explicar el incremento del flujo de producto debido exclusivamente al transcurso del tiempo se agrupan bajo la denominación de progreso técnico. El progreso técnico, aparece, por tanto, como una función del tiempo.

Un primer problema que se presenta al incluir el progreso en un modelo de crecimiento es el de su clasificación como variable exógena o endógena al modelo. En rigor, los factores anteriormente enumerados como componentes esenciales del llamado progreso técnico están fuertemente relacionados con el proceso de acumulación de capital y el nivel de consumo per capita, con lo que parece que dicho progreso técnico debería adquirir la consideración de variable endógena. Pero la dificultad de medir, explicar e interpretar todos estos factores en función del

(*) J.A. Mirrless, "Optimum Growth when Technology is Changing", Review of Economic Studies, núm. 34, Enero de 1967.

modelo de forma adecuada a la realidad ha inducido a la inmensa mayoría de los economistas a aceptar —aunque con profundas reservas— la inclusión del progreso técnico como variable exógena al modelo de acumulación de capital. Así pues, en el presente trabajo, el progreso técnico será un dato; expresado en función del tiempo, y obtenido a partir de fuentes externas al modelo mismo.

Admitiremos también la hipótesis aceptada por la mayor parte de los economistas en sus modelos de crecimiento, de que el progreso técnico afecta de forma homogénea a todas las unidades empleadas de cada factor productivo, o, lo que es lo mismo, que no aparece *incorporado* (embodied) a cada una de las nuevas remesas de factores que se van añadiendo al proceso productivo, sino que es detentado igualmente por las cantidades de factor añadidas y por las ya existentes lo que significa, en esencia, que el progreso técnico debido a la mejora del equipo capital se extende inmediatamente, de forma que el nuevo equipo se adopta totalmente, sin coexistencia con el antiguo, o bien este es reformado o utilizado de manera que su productividad sea igual a la del nuevo equipo incorporado y que por otra parte, la mayor preparación técnica de las nuevas generaciones de mano de obra se comunica también de forma inmediata a toda la población trabajadora. Se trata, por tanto, de una hipótesis simplificadora. Los modelos de crecimiento que no la aceptan, y consideran el progreso técnico incorporado o identificado con cada generación o remesa de factor son los llamados *generacionales* (vintage), y requieren un desglose de la función de producción de acuerdo con las sucesivas generaciones incorporadas con diversos niveles de progreso técnico, lo que los complica considerablemente. Admitiremos también que el progreso técnico tiene lugar en el tiempo de forma continua.

La nueva función de producción será ahora la

$$F(K, L, t)$$

a la que supondremos del tipo C^2 respecto a las variables K, L y t para $K > 0$, $L > 0$ —con lo que satisface las condiciones necesarias para la aplicación del principio de máximo de Pontryagin en su versión para sistemas no autónomos— positivamente homogénea de grado uno en las variables K y L para todo valor de t, y satisfaciendo respecto a aquellas, las condiciones en el límite establecidas para el modelo autónomo primitivo en 2.2.1. La homogeneidad de la función en el sentido expresado nos asegura que

$$F(\lambda K, \lambda L, t) = \lambda F(K, L, t) \quad \forall t > 0$$

y, por tanto, para $L > 0$ será

$$F(K, L, t) = L F\left(\frac{K}{L}, 1, t\right) = L f(k, t)$$

De entre todas las definiciones posibles del progreso técnico en función del tiempo que satisfagan, las condiciones anteriormente reseñadas, queremos seleccionar para nuestro modelo una que permita la evolución de la economía a lo largo de una trayectoria de crecimiento armónico. Para ello, vamos a considerar de manera especial las funciones de progreso técnico que de alguna manera conservan relaciones entre las variables fundamentales del modelo, es decir, que tienen algún tipo de *neutralidad.*

Un progreso técnico es neutral en el sentido de Hicks, cuando para cada valor de la relación capital-trabajo ocurre que la productividad marginal del capital y la del trabajo crecen proporcionalmente en el tiempo, de manera que el cociente entre ambas productividades se mantiene constante mientras la economía conserve el mismo valor de la relación capital-trabajo. Luego en un sistema económico con progreso técnico neutral en el sentido de Hicks la relación entre ambas productividades marginales solo variará a lo largo del tiempo si varía el valor de la relación capital-trabajo de un instante a otro. Un progreso técnico que no sea neutral en el sentido de Hicks ocasionará un crecimiento mayor de la productividad marginal de uno de los factores que de la del otro, para valores constantes de la relación capital-trabajo. Cuando la productividad marginal del capital crece más rápidamente que la del trabajo como consecuencia del progreso técnico no neutral, la tendencia inicial del sistema será la de incrementar el nivel de capital en el proceso productivo en mayor proporción que el de la mano de obra, haciendo crecer el valor de la relación capital-trabajo, por lo que a este progreso técnico se le llama consumidor de capital (capital-using) o ahorrador de trabajo (labor-saving). Si, por el contrario, es la productividad marginal del trabajo la que crece más rápidamente que la del capital, el empresario tenderá en principio a añadir proporcionalmente más mano de obra que capital, reduciendo el valor de la relación capital-trabajo, con lo que el progreso técnico será consumidor de trabajo (labor-using) o ahorrador de capital (capital-saving). La neutralidad en el sentido de Hicks supone, por tanto, en el progreso técnico, una tendencia en el sentido de que el paso del tiempo en sí no altere el valor existente de la relación capital-trabajo, en tanto que el producto crece, en general, a una tasa diferente de la de los factores por efecto del transcurso del tiempo. Se demuestra que este efecto multiplicativo sobre el producto que afecta por igual a ambas productividades marginales, característico del progreso técnico en el sentido de Hicks permite escribir la función de producción en la forma

$$Y = A\,(t)\;F\,(K, L) \quad (*)$$

lo que, en nuestro caso, supondría

$$Y = A\,(t)\;L\;f\,(k)$$

El progreso técnico es neutral en el sentido de Harrod cuando, para cada valor de la relación capital-producto, su mantenimiento constante a través del tiempo determina también un valor constante de la productividad marginal del capital. En general, dado un valor inicial de la relación capital-producto, el progreso técnico ejerce una acción multiplicativa sobre el proceso productivo, de manera que, si el nivel de capital no varía, la relación capital-producto disminuye con el tiempo, en tanto que la productividad marginal del capital crece. Un incremento del nivel de capital se traducirá en una reducción instantánea de la productividad

(*) Véase, por ejemplo, "The Theory of Economic Growth: a survey," por F. H. Hahn y R.C.O. Matthews, publicada en Economic Journal Diciembre de 1964, versión española de F. Martín Bourgon, publicada en Panoramas contemporáneos de la teoría económica: crecimiento y desarrollo, col. Alianza Universidad, Madrid 1970.

marginal del mismo y un crecimiento de la relación capital-producto, en virtud de nuestra hipótesis de rendimientos decrecientes para cada variable. Si el nuevo valor de K para el cual la productividad marginal del capital coincide con la inicial resulta ser precisamente el que conserva el valor de la relación capital-producto, y esto ocurre *para todo intervalo de tiempo y toda relación capital-producto inicial*, el progreso técnico será neutral en el sentido de Harrod. Si, por el contrario, para un mismo valor de la relación capital-producto la productividad marginal del capital aumenta o disminuye con el paso del tiempo, el progreso técnico será consumidor de capital o ahorrador de capital respectivamente. Un progreso técnico neutral según Harrod es, *por tanto, aquel en que la reducción de trabajo real que sería preciso* realizar para conservar el valor de la relación capital-producto a lo largo del tiempo no afecte a la productividad marginal de capital.

El progreso técnico neutral en el sentido de Harrod se caracteriza por ser el *único tipo de progreso técnico en el que la función* de producción puede siempre escribirse de la forma

$$F(K, L, t) = F(K, Q(t) \times L) \quad (*)$$

en la que el efecto multiplicativo que el progreso ejerce sobre el proceso productivo se efectúa a través de una potenciación de la mano de obra que adquiere con el transcurso del tiempo una eficacia equivalente a la de un número de trabajadores mayor al realmente existente, razón por la cual este tipo de progreso técnico se conoce también con el *nombre de potenciador del trabajo (labour-augmenting).* Sus efectos en el proceso productivo son muy similares a los del crecimiento de la mano de obra, puesto que si esta significa un incremento de la fuerza de trabajo producido a lo largo del tiempo, aquel determina, en una misma cantidad de mano de obra, una potencialidad que aumenta con el transcurso del tiempo y que la hace equivalente, a efectos de la producción, a una fuerza de trabajo creciente a la misma tasa temporal que la de la potenciación ocasionada por el progreso téc-

---

(*) Este resultado ha sido demostrado por H. Uzawa en "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, Review" of Economic Studies, *Vol XXVIII, Febrero de 1.961.*

nico. Si suponemos que éste potencia a la mano de obra a tasa constante será

$$Q(t) = e^{mt}$$

siendo *m* su tasa de crecimiento o potenciación, con lo que ahora el producto será

$$Y = F\ (K,\ e^{mt}\ L)$$

relación que, como vemos, depende *explícitamente* del tiempo, pero que puede transformarse en autónoma mediante un adecuado cambio de unidades en las variables, como vamos a ver seguidamente.

Definamos una nueva variable, $\hat{L}$, de la forma

$$\hat{L} = e^{mt}\ L$$

de donde resulta que $\hat{L}$ es igual al flujo de trabajo real (en unidades trabajador, ya definidas en 2.2.1) multiplicado por el factor de potenciación del trabajo en *cada* instante originado por el progreso técnico que se produce con el transcurso del tiempo. En consecuencia, $\hat{L}$ representa el trabajo potenciado por el progreso técnico, o trabajo efectivo aplicado a la producción, de manera que si el número real de *trabajadores* que intervienen en la producción es L, la potenciación de los mismos por un progreso técnico a tasa constante, m, tiene como consecuencia que el trabajo *producido en cada instante t por los* L trabajadores sea equivalente al que efectuaría un número de trabajadores igual a $\hat{L} = e^{mt}$ L en ausencia de progreso técnico. Si convenimos en tranasformar la unidad de medida del trabajo en la producción midiéndolo en unidades de la nueva variable trabajo efectivo, tendremos que

$$Y = F\ (K,\ \hat{L})$$

función no dependiente explícitamente del tiempo, homógenea de grado uno en las nuevas variables K y $\hat{L}$ y que —como se demostraría fácilmente— satisface todas *las demás* condiciones de regularidad y en el límite impuestas a la función de producción en 2.2.1, con lo que

$$Y = \hat{L}\, F\left(\frac{K}{\hat{L}}, 1\right) = \hat{L}\, f(\hat{k})$$

y

$$\hat{y} = f(\hat{k})$$

donde $\hat{y}$ es el producto obtenido por trabajador efectivo, y $\hat{k}$ el valor de la relación capital-trabajo efectivo, cuya expresión en función del de la relación capital-trabajo real es

$$\hat{k} = \frac{K}{\hat{L}} = \frac{K}{L\, e^{mt}} = \frac{1}{e^{mt}}\, k$$

es decir, que una unidad de capital por trabajador efectivo es equivalente a e^{mt} unidades de capital por trabajador real. Igualmente será

$$\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}} = \frac{Y}{L\, e^{mt}} = \frac{y}{e^{mt}}$$

y una unidad de producto por trabajador efectivo es igual a e^{mt} unidades de producto por trabajador real.

Dada la semejanza existente entre el progreso técnico potenciador del trabajo y el crecimiento de la población, ambos problemas pueden identificarse en lo que concierne a la función de producción, pues habida cuenta de que

$$Y = F(K, \hat{L}) = F(K, L\, e^{mt}) = F(K, L_0\, e^{(\rho + m)\, t})$$

resulta que la función de producción de una economía cuya población crece a tasa constante, ρ, y cuyo progreso técnico potencia la mano de obra a tasa constante, m, es la misma que la de una economía sin progreso técnico y cuya población crece a tasa constante $\rho + m$. Esta identificación no será, en cambio, generalizable al integrando del funcional objetivo, razón por la cual el problema del crecimiento *óptimo de una economía con progreso técnico potenciador del trabajo y población* creciente no es exactamente igual al de la economía con población decreciente y sin progreso técnico estudiado en 4.2 y en 4.4, y será preciso analizarlo separadamente.

La importancia del progreso técnico neutral en el sentido de Harrod en los modelos de crecimiento económico estriba fundamentalmente en que este tipo de progreso técnico es el único compatible siempre con un crecimiento armónico del sistema económico. No es este el caso en una economía con un progreso técnico neutral en el sentido de Hicks (*) a no ser que dicho progreso sea también neutral en el sentido de Harrod, pues la neutralidad según Hicks del progreso técnico no garantiza al sistema la posibilidad de seguir una trayectoria en edad de oro durante un cierto intervalo de tiempo. Se ha demostrado que, para que una función de producción con progreso técnico sea neutral tanto en el sentido de Harrod como en el de Hicks ha de tener una elasticidad de sustitución entre capital y trabajo igual a la unidad(*). De entre todas las funciones de producción con elasticidad de sustitución constante (CES), la función Cobb-Douglas es precisamente la que se caracteriza por tenerla igual a 1, y es, por tanto, la única función neutral en ambos sentidos. Por esta, entre otras razones, la función de producción que vamos a emplear, para la obtención de soluciones numéricas al problema del crecimiento óptimo en los próximos capítulos, es una función Cobb-Douglas estimada sobre series de datos de la economía española.

Para el estudio del modelo teórico de crecimiento óptimo con progreso técnico que en su versión discreta va a servir de base para la obtención de las soluciones numéricas, podremos, pues, adoptar cualquiera de las dos hipótesis de neutralidad, puesto que ambas van a ser ser satisfechas por la función de producción elegida. Adoptamos la de neutralidad en el sentido de Harrod porque es la que da lugar a un modelo más sencillo, susceptible de ser reducido, mediante los cambios de variable que veremos, a alguno de los ya estudiados y en el que las situaciones de crecimiento armónico y regla de oro (o regla de oro modificada) adquieren pleno sentido y posibilidad de realizarse. El modelo agregado de crecimiento con capital homogéneo y progreso técnico neutral en el sentido de Hicks, pero no nece-

(*) Véase H. Wan, Cap. II, op cit.

(*) H. Uzawa, op cit.

sariamente en el de Harrod, ha sido estudiado por Shell en el caso $u'(c) = c$ (*).

4.5.2. El modelo con progreso técnico neutral en el sentido de Harrod

Veamos en primer lugar cómo evoluciona dinámicamente la acumulación del capital en un sistema económico con población creciente exponencialmente y progreso técnico potenciador del trabajo, también con tasa constante de crecimiento, y cuya función de producción satisface las hipótesis indicadas en el anterior apartado.

Ahora la función de producción se puede escribir en la forma

$$Y = F(K, e^{mt} L) = F(K, \hat{L})$$

y como es homogénea de grado uno en K y $\hat{L}$, podremos dividir por $\hat{L}$, obteniendo

$$\frac{Y}{\hat{L}} = F\left(\frac{K}{\hat{L}}, 1\right)$$

es decir

$$\hat{y} = f(\hat{k})$$

donde, como vimos, $\hat{y}$ y $\hat{k}$ representan los valores de las relaciones producto bruto-trabajo efectivo y capital-trabajo efectivo respectivamente, verificándose entre el producto o el capital por trabajador efectivo y sus respectivos niveles por trabajador real las relaciones

$$\hat{k} = \frac{k}{e^{mt}}$$

y

(*) K. Shell, "Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economiy in which there is Exogenons Technical Change", en Essays on the Theory of Optimal Economic Growth, ed. Karl Shell, op. cit.

$$\hat{y} = \frac{y}{e^{mt}}$$

La función de producción relativa por trabajador efectivo tiene la misma forma que la del producto por trabajador en el modelo con crecimiento de la población y sin progreso técnico. Aplicando el mismo procedimiento empleado en 4.2.1 vamos a obtener para $\hat{k}$ una ecuación del comportamiento dinámico semejante a aquella. Ahora

$$\dot{\hat{k}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{\hat{L}}\right) = \frac{\dot{K}\hat{L} - \dot{\hat{L}}K}{\hat{L}^2} = \frac{\dot{K}}{\hat{L}} - \frac{\dot{\hat{L}}}{\hat{L}}\frac{K}{\hat{L}} = \frac{\dot{K}}{\hat{L}} - \frac{\dot{\hat{L}}}{\hat{L}}\hat{k}$$

Pero

$$\frac{\dot{K}}{\hat{L}} = \frac{s\,F(K,\hat{L}) - \delta K}{\hat{L}} = s\,f(\hat{k}) - \delta\,\hat{k}$$

y, por otra parte

$$\frac{\dot{\hat{L}}}{\hat{L}} = \frac{1}{\hat{L}}\frac{d}{dt}(e^{mt}L) = \frac{m\,e^{mt}L + e^{mt}.\dot{L}}{e^{mt}L} = m + \frac{\dot{L}}{L} = m + \rho$$

con lo que resulta

$$\dot{\hat{k}} = s\,f(\hat{k}) - (\delta + m + \rho)\,\hat{k}$$

expresión muy similar a la de la evolución dinámica del modelo con crecimiento de la población y sin progreso técnico salvo en dos puntos: en primer lugar, que la variable de la ecuación dinámica ya no es la relación capital-trabajo real sino el capital por unidad de trabajo efectivo; por otra parte, entre los sumandos del término que frena la acumulación de capital aparece ahora, junto con la tasa de depreciación y la de crecimiento de la población, la de potenciación o crecimiento del progreso técnico, m. La interpretación económica de esta ecuación nos dice que la conservación de un valor dado de la relación capital-trabajo efectivo solo puede lograrse cuando la inversión bruta es lo suficientemente grande para cubrir la depreciación a este nivel y mantener además a este nivel de capital los nuevos contingentes de trabajo efectivo (el incremento de la mano de obra más su incremento de potenciación originado por el progreso técnico) que se van incorporando en cada instante al proceso productivo. Un incremento en el nivel de la relación capital-trabajo efectivo requerirá una inversión bruta que permita su consecución después de atender a la depreciación producida por el nuevo capital y a proveer con el nuevo nivel de capital a la totalidad de trabajadores efectivos existentes, lo que concuerda con el resultado anteriormente obtenido en el que la tasa de potenciación del trabajo aparece como freno a la acumulación de capital por trabajo efectivo.

Para obtener la ecuación dinámica del sistema en función de la relación capital-trabajo real, derivemos respecto al tiempo en

$$\hat{k} = \frac{k}{e^{mt}}$$

obteniendo:

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{k}\, e^{mt} - m\, k\, e^{mt}}{e^{2mt}} = \frac{\dot{k} - m\, k}{e^{mt}}$$

con lo que

$$\dot{k} = \dot{\hat{k}}\, e^{mt} + m\, k$$

Ahora, como

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k} = s\, f\left(\frac{k}{e^{mt}}\right) - (\delta + \rho + m)\, \frac{k}{e^{mt}}$$

será

$$\dot{k} = s\, e^{mt}\, f\left(\frac{k}{e^{mt}}\right) - (\delta + \rho)\, k$$

que, como vemos depende explícitamente del tiempo, a diferencia de la expresada en función del capital por trabajo efectivo.

Ahora el problema se nos plantearía en la siguiente forma: dado un sistema económico con población creciente y tecnología potenciadora de la mano de obra cuyas ecuaciones de comportamiento dinámico en función de la relación capital-trabajo efectivo y capital-trabajo real son las anteriormente obtenidas, determinar la trayectoria de la variable de control s (t) tal que, conduciendo al sistema desde un valor inicial en el instante t_0, $\hat{k}(t_0)$ ó $k(t_0)$ a un valor final fijado de la variable de estado en $t_0 + T$ mayor ó igual que $\hat{k}(t_0 + T)$ ó $k(t_0 + T)$, respectivamente, dé lugar a una trayectoria de este que haga máximo el valor del funcional objetivo

$$J = \int_{t_0}^{t_0+T} u(c)\, e^{-\gamma t}\, dt$$

donde c es el nivel de consumo por trabajador real determinado por cada trayectoria, cuyo valor en función de la variable de estado será

$$c = \frac{C}{L} = \frac{(1-s)\,F(K,\hat{L})}{L} = (1-s)\,\frac{F(K,\hat{L})}{\hat{L}}\cdot\frac{\hat{L}}{L} = (1-s)\,e^{mt} f(\hat{k})$$

si tomamos como tal la relación capital-trabajo efectivo y

$$c = (1-s)\,e^{mt} f\left(\frac{k}{e^{mt}}\right)$$

respecto a la relación capital-trabajo real. La función de utilidad del consumo por trabajador u (c) satisface las hipótesis especificadas en 4.2.1.

Nos encontramos, por tanto, en la precisión de elegir entre dos opciones, que son las de tomar como variable de estado el valor de la relación capital-trabajo real o el de la relación capital-trabajo efectivo. El hecho de que el funcional objetivo venga dado en función del consumo por trabajador real, proporcional, según nuestras hipótesis al consumo per capita, nos induciría en principio a tomar como variable de estado la relación capital-trabajo real, con el fin de homogeneizar las variables fundamentales del modelo. Sin embargo, esta elección complica considerablemente las ecuaciones derivadas de las condiciones necesarias de optimalidad, dificultando tanto el estudio como la resolución numérica del modelo, mientras que la elección que $\hat{k}$ como variable de estado da lugar a un sistema de condiciones necesarias muy similar al estudiado en la sección 4.4. Bien es verdad que, al aparecer simultáneamente en el modelo variables medidas en unidades por trabajador efectivo ($\hat{k}$) y otras medidas en unidades por trabajador real (c) desaparece la homogeneidad de medida, inconveniente grave que se traducirá analíticamente en la obtención de un sistema de condiciones necesarias no autónomo, pero que, como veremos puede ser obviado en la mayor parte de los casos introduciendo un adecuado cambio de variables que permita homogeneizar todas las del modelo.

Aquí, como en el modelo con población creciente y tasa de descuento temporal del consumo no nula, estudiado en 4.4, el funcional objetivo depende del tiempo y toma un valor distinto para los distintos orígenes de medida de este. Puesto que la variable de estado del modelo toma valores relativos, referidos a unidades por trabajador efectivo fijaremos la unidad de tiempos en un instante en el cual conozcamos la población existente, L_0, y a partir del cual suponemos que actua el crecimiento exponencial de la población real y el efecto multiplicativo, también exponencial, de su mayor efectividad derivada del progreso técnico, de manera que $\forall t > 0$ se verifique

$$\hat{L}(t) = L_0 \, e^{(\rho + m) t}$$

En el modelo estudiado en 4.4 era factible cualquier alteración del origen de tiempos, dado que

$$L(t_2) = L(t_1) \, e^{\rho (t_2 - t_1)}$$

siempre que la cantidad de mano de obra se conozca en cualquier instante. Ahora ocurre que

$$\hat{L}(t_2) = \hat{L}(t_1) \, e^{(\rho + m)(t_2 - t_1)},$$

con lo que, si el valor del trabajo efectivo puede medirse o calcularse en cada instante —y veremos en capítulos próximos que esto es lo que ocurre en nuestro modelo numérico— cualquier origen de tiempos es igualmente válido para nuestro problema. Aquí, lo mismo que en 4.4, el valor del funcional objetivo se modifica al cambiar el origen de tiempos, quedando multiplicado por la constante $e^{-\gamma(t_1 - t_2)}$, lo que, como vimos, no altera la valoración relativa de las diversas trayectorias, conservando, por tanto, a la trayectoria óptima su caracter de tal.

Podemos, por consiguiente, simplificar el problema tomando como origen de tiempos el instante inicial del periodo de planificación, con lo que el modelo queda definitivamente planteado en la forma siguiente: determinar, de entre todas las trayectorias de acumulación de la relación capital-trabajo efectivo que evolucionan de acuerdo con la ecuación dinámica anteriormente obtenida, aquella que, partiendo de un valor inicial $\hat{k}_0$ de dicha relación en el instante $t = 0$, y terminando con un valor de ella $\hat{k}$ (T) mayor o igual que un $\hat{k}_T$ fijado de antemano al cabo de un tiempo T, hace máximo el valor del funcional objetivo

$$J[\hat{k}(t)] = \int_0^T u(c)\, e^{-\gamma t}\, dt = \int_0^T u\,[(1-s)\, e^{mt} f(\hat{k})]\, e^{-\gamma t}\, dt$$

Para determinar las condiciones necesarias que ha de satisfacer la trayectoria óptima construyamos la hamiltoniana

$$\mathcal{H} = u(c)\, e^{-\gamma t} + \overline{q}\,[s f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}]$$

a la que aplicaremos el principio de máximo de Pontryagin en su versión generalizada para sistemas no autónomos y tiempo fijo, con lo que obtenemos la ecuación de comportamiento dinámico de la variable auxiliar

$$\dot{\overline{q}} = -u'(c)\, e^{mt}\,(1-s)\, f'(\hat{k})\, e^{-\gamma t} - \overline{q}\,[s f'(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)]$$

y la condición de maximización en cada instante de la hamiltoniana que ha de cumplir necesariamente la trayectoria óptima, que será

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = 0$$

o lo que es lo mismo

$$u'(c)\, e^{mt}\, e^{-\gamma t} = \overline{q}$$

en los instantes en que el máximo valor de la hamiltoniana se produce para una solución interior de la relación ahorro-producto, y

$$s = 0$$

cuando la hamiltoniana toma su máximo valor en la frontera del recinto de valores admisibles de s.

Las ecuaciones así obtenidas se completan, como de costumbre, con la condición de transversalidad

$$\overline{q}\,(T)\,(\hat{k}\,(t) - \hat{k}_T) = 0$$

innecesaria cuando el problema se plantea con extremo final fijo

$$\hat{k}\,(T) = \hat{k}_T$$

Ahora, y al igual que ocurría en los modelos anteriormente estudiados, la variable auxiliar $\overline{q}$ (t) tiene una interpretación económica muy interesante, relacionada con el precio de demanda del capital en cada instante. Como vimos en el anterior capítulo, $\overline{q}$ (t) representa, para cada t, la derivada del funcional objetivo integrado entre t y T respecto a la variable de estado o sensibilidad de aquel a pequeñas variaciones en esta en el instante t, cuando el sistema sigue trayectorias óptimas. En el modelo que ahora estamos exponiendo, el valor del funcional objetivo representa la utilidad total derivada del consumo por trabajador a lo largo del período de planificación, descontada temporalmente, de forma que su valoración sea la que recibe en el instante en que el programa comienza. Por otra parte, la variable de estado es ahora el nivel de capital empleado en la producción por cada unidad de trabajo efectivo. La variable auxiliar $\overline{q}$ (t) representa, por consiguiente, para cada t la valoración social o precio sombra de una unidad de capital por cada trabajador efectivo, en ese instante medida en unidades de utilidad del consumo por trabajador y descontada al instante inicial del periodo de planificación.

Para actualizar los precios sombra realizaremos la transformación estudiada en 4.4.1, que corrige su descuento temporal, con lo que

$$\overline{p} = \overline{q}\, e^{\gamma t}$$

es el precio sombra en cada instante de la unidad de capital por trabajo efectivo, valorada en unidades de consumo por trabajo real, y su ecuación dinámica pasa a ser la

$$\dot{\overline{p}} = \dot{\overline{q}}\, e^{\gamma t} + \gamma\, \overline{q}\, e^{\gamma t} = -\, u'(c)\, e^{mt}\, (1 - s)\, f'(\hat{k}) + $$
$$+\, \overline{p}\, [(\rho + \delta + m + \gamma) - s\, f'(\hat{k})]$$

transformándose ahora la condición de maximización estática de la hamiltoniana en

$$u'(c)\, e^{mt} = \overline{p}$$

para máximos interiores de s y

$$s = 0$$

para máximos en la frontera.

Estas dos alternativas de maximización de la hamiltoniana dependientes en cada instante de los valores de $\hat{k}$ y $\overline{p}$, siguen distinguiendo dos situaciones posibles en cada instante de una trayectoria óptima: que el estado del sistema en ese instante de la trayectoria sea tal que el comportamiento óptimo consista en consumir la totalidad del producto ($s = 0$), o que, por el contrario, la opción óptima admita la capitalización de una parte del producto ($0 < s < 1$). Y este segundo caso se caracteriza una vez más por la igualdad entre los precios de oferta y de demanda del capital por trabajador. Consideremos, en efecto, la ecuación anteriormente obtenida para la maximización de la hamiltoniana: $u'(c)$ es la utilidad marginal obtenida del consumo por trabajador real o precio de oferta de la unidad de capital por trabajador real; $\bar{p}$, en cambio, es la valoración social de la unidad de capital por trabajador efectivo en términos de la utilidad del consumo por trabajador real. Pero hemos visto que una unidad de capital por trabajador efectivo es equivalente en cada instante t a e^{mt} unidades por trabajador real, luego el precio de la unidad de capital por trabajador efectivo será igual al de la unidad de capital por trabajador real multiplicada por e^{mt}. Si llamamos p al precio sombra de la unidad de capital por trabajador real, sera

$$\bar{p} = p\, e^{mt}$$

con lo que la ecuación dz máximo, expresada en función de la nueva variable p sería

$$u'(c) = e^{-mt}\, \bar{p} = p$$

donde vemos que la igualdad entre el precio de oferta y el de demanda de la unidad de capital por trabajador real, valorados en términos de utilidad del consumo por trabajador real se satisface también en este caso cuando el máximo de la hamiltoniana tiene lugar para valores de s interiores a su recinto admisible.

El sistema determinado por las condiciones necesarias de optimalidad de Pontryagin resulta ser ahora el formado por las ecuaciones

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\bar{p}} = \bar{p}\, [(\delta + \rho + m + \gamma) - f'(\hat{k})]$$

$$\bar{p} = e^{mt}\, u'\, [e^{mt}\, (1 - s)\, f(\hat{k})]$$

para los puntos en que el máximo corresponde a s, $0 < s < 1$, y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\bar{p}} = -u'(c)\, e^{mt}\, f'(\hat{k}) + \bar{p}\, (\delta + \rho + m + \gamma)$$

$$s = 0$$

para las soluciones en la frontera de s. Cualquiera de los dos posibles sistemas de condiciones necesarias presentan, respecto a los sistemas obtenidos en los modelos anteriormente estudiados, una diferencia esencial: no son autónomos, pues en cada uno de ellos aparece una ecuación que depende explícitamente de t.

La sustitución de la variable auxiliar $\overline{p}$ por la $p = \overline{p}\, e^{-mt}$ no cambia esencialmente la situación pues entonces los sistemas pasan a ser los:

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{p} = p\, [(\delta + \rho + \gamma) - f'(k)]$$

$$p = u'\, [e^{mt}\, (1 - s)\, f(\hat{k})]$$

y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{p} = - u'\, [e^{mt}\, (1 - s)\, f(\hat{k})]\, f'(\hat{k}) + p\, (\delta + \rho + \gamma)$$

$$s = 0$$

en los que también aparece explícitamente el tiempo. Este resultado era muy de esperar, por cuanto que manejamos en el modelo variables —$\hat{k}$ y $\overline{p}$, ó p— que aparecen referidas a unidades de medida diferentes, de manera que el factor e^{mt} de estos sistemas sirve, por decirlo así, de enlace transformador entre ambos sistemas de unidades: las unidades por trabajador real y las por trabajador efectivo.

La falta de autonomía del sistema de condiciones necesarias de optimalidad presenta en nuestro estudio dos inconvenientes graves: en primer lugar, dificulta la determinación y estudio del punto singular del sistema, que es en este tipo de modelos un punto central con referencia al cual se sitúa la evolución de las distintas trayectorias óptimas posibles; en segundo lugar, proporciona un modelo esencialmente diferente de los estudiados hasta ahora, al que no podrían aplicarse en principio buena parte de los resultados obtenidos en aquellos, obligándonos, por tanto, a efectuar de nuevo un análisis completo del mismo.

Tales inconvenientes se evitarían si, mediante una transformación o redefinición adecuada de las variables, pudieramos convertir nuestros sistemas de condiciones necesarias en otros equivalentes en los que la variable tiempo no aparezca explícitamente. Esta transformación no es en general posible, pero, afortunadamente, una condición suplementaria impuesta a la función de utilidad del consumo por trabajador —la de que su derivada primera sea una función positivamente homogénea de c— nos garantiza la existencia de un cambio de variables apropiado para la transformación del sistema en autónomo. La función de utilidad del consumo por trabajador seleccionada para la elaboración del modelo numérico en el próximo capítulo va a cumplir también esta nueva condición, por lo cual vamos a limitar nuestro estudio del crecimiento óptimo del capital con progreso técnico potenciador del trabajo al caso en que la función de utilidad satisface esta hipótesis suplementaria. De hecho, prácticamente todas las funciones de utilidad del consumo que habitualmente se utilizan en los modelos de crecimiento tienen derivada positivamente homogénea, por lo que nuestra limitación al estudio de este caso no supone, en la práctica, una reducción esencial a la generalidad del problema.

Veamos ahora en qué consiste el cambio de variables anunciado. Como, según nuestras hipótesis es

$$u'(c) > 0 \quad u''(c) < 0$$

si es $u'(c)$ positivamente homogénea, su grado de homogeneidad deberá ser negativo, con lo que si llamamos $-\eta$ al grado de homogeneidad de $u'(c)$, será $\eta > 0$. La transformación que vamos a efectuar consiste en sustituir la variable auxiliar $\overline{p}$ por la $\hat{p}$ definida de la forma

$$\hat{p} = \overline{p}\, e^{mt(\eta-1)}$$

con lo que los sistemas de condiciones necesarias pasan a ser los

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = \dot{\bar{p}}\, e^{mt(\eta-1)} + m(\eta-1)\,\bar{p}\, e^{mt(\eta-1)} = \hat{p}\,[(\delta+\rho+m+\gamma) - f'(\hat{k})] +$$

$$+ (m\eta - m)\,\hat{p} = \hat{p}\,[(\delta+\rho+m\eta+\gamma) - f'(\hat{k})]$$

$$\hat{p} = e^{mt(\eta-1)}\, e^{mt}\, u'\,[e^{mt}(1-s)\, f(\hat{k})] = e^{mt\eta}\, u'\,[e^{mt}(1-s)\, f(\hat{k})]$$

y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\,\hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = -u'(c)\, e^{mt}\, e^{mt(\eta-1)}\, f'(\hat{k}) + \hat{p}\,[\delta+\rho+m+\gamma] +$$

$$+ \hat{p}\, m(\eta-1) = -u'(c)\, e^{mt\eta}\, f'(\hat{k}) + \hat{p}\,(\delta+\rho+m\eta+\gamma)$$

$$s = 0$$

y como la función $u'(c)$ es homógenea de grado $-\eta$, resultará que

$$u'(c) = u'\,[e^{mt}(1-s)\, f(\hat{k})] = e^{-mt\eta}\, u'\,[(1-s)\, f(\hat{k})]$$

donde $f(\hat{k})$ es el producto por trabajador efectivo, y $(1-s)\, f(\hat{k})$ es la porción de este producto destinada al consumo, o consumo por trabajador efectivo, por lo cual haremos

$$\hat{c} = (1-s)\, f(\hat{k})$$

donde

$$\hat{c} = \frac{c}{e^{mt}}$$

y la función $u(\hat{c})$ cumple por tanto las hipótesis impuestas a la $u(c)$ en 4.2.1: Con esta transformación, las condiciones necesarias de optimalidad según Pontryagin se convierten en las

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\,\hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = \hat{p}\,[(\delta+\rho+m\eta+\gamma) - f'(\hat{k})]$$

$$\hat{p} = u'(\hat{c})$$

para los puntos asociados a soluciones interiores y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = - u' [f(\hat{k})]\, f'(\hat{k}) + \hat{p}\, [\delta + \rho + m\eta + \gamma]$$

$$s = 0$$

para las soluciones proporcionadas por valores de s en la frontera de su recinto admisible.

En el caso de que fueran necesarias condiciones de transversalidad, la transformación de la primitivamente obtenida

$$\overline{q}\,(T)\,(\hat{k}\,(T) - \hat{k}_T) = 0$$

juntamente con

$$\overline{q}\,(T) = \overline{p}\,(T)\, e^{-\gamma T} = \hat{p}\,(T)\, e^{mT\,(1-\eta)}\, e^{-\gamma T}$$

nos da la

$$\hat{p}\,(T)\, e^{(m\,(1-\eta)-\gamma)\,T}\, (\hat{k}\,(T) - \hat{k}_T) = 0$$

es decir, la

$$\hat{p}\,(T)\,(\hat{k}\,(T) - \hat{k}_T) = 0$$

con lo que, si es

$$\hat{k}\,(T) > \hat{k}_T$$

la trayectoria óptima buscada deberá satisfacer necesariamente la condición

$$\hat{p}\,(T) = 0$$

De esta manera hemos conseguido expresar las condiciones necesarias de optimalidad mediante sistemas autónomos, en los que las dos variables económicas significativas ($\hat{k}$ y $\hat{c}$) aparecen dadas en unidades homogéneas, ambas en relación con el nivel de trabajo efectivo. Vamos a ver que también la nueva variable auxiliar $\hat{p}$, viene expresada en las mismas unidades, y representa precisamente el precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo valorado en términos de utilidad del consumo por trabajador efectivo. En primer lugar, veamos que, con las condiciones impuestas a u (c) en 4.2.1, y la nueva hipótesis de la homogeneidad *positiva de su derivada, con grado $-\eta$, nuestra función de utilidad resulta* ser positivamente homogénea de grado $1-\eta$: en efecto, sabemos que

$$u'(\lambda c) = \lambda^{-\eta} u'(c) \quad \forall \lambda > 0$$

Ambos miembros de la igualdad son integrables entre dos extremos cualesquiera, ϵ y c, tales que $c > \epsilon > 0$ de manera que

$$\int_\epsilon^c u'(\lambda x)\, dx = \lambda^{-\eta} \int_\epsilon^c u'(x)\, dx$$

es decir, que

$$\left[\frac{1}{\lambda} u(\lambda x)\right]_\epsilon^c = \lambda^{-\eta} [u(x)]_\epsilon^c$$

con lo que

$$u(\lambda c) - u(\lambda \epsilon) = \lambda^{1-\eta} [u(c) - u(\epsilon)]$$

Pero la función u (c) sí está definida y es continua por la derecha en $c = 0$, con lo que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} u(\lambda \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} u(\epsilon) = u(0) = 0$$

de donde

$$u(\lambda c) = \lambda^{1-\eta} u(c) \quad \forall \lambda > 0$$

con lo que nuestra función de utilidad resulta ser, en efecto, positivamente homogénea de grado $1 - \eta$.

La aplicación del teorema de Euler a esta función da lugar a la expresión

$$c\frac{du}{dc} = (1 - \eta)\, u\,(c)$$

de donde

$$\frac{\frac{du}{dc}}{\frac{u}{c}} = 1 - \eta$$

con lo que resulta que $1 - \eta$ es precisamente la elasticidad de la utilidad respecto al consumo, que en nuestro caso es, por tanto, constante. Observemos que, siendo u (c) una función creciente, si es homogénea de grado $1 - \eta$ deberá ser

$$1 - \eta > 0$$

es decir

$$\eta < 1$$

La homogeneidad de u (c) nos va a permitir una interesante interpretación de la transformación efectuada en la variable auxiliar $\overline{p}$, y de la nueva variable $\hat{p}$ a que esta transformación ha dado lugar. Hemos visto que $\overline{p}$ resultaba ser el precio de demanda de la unidad de capital por trabajo efectivo valorado en unidades de utilidad del consumo por trabajador real. Ahora bien, la relación entre la utilidad del consumo por trabajador efectivo y la del consumo por trabajador real es

$$u\,(c) = u\,(e^{mt}.\hat{c})$$

y como la función de utilidad es homogénea de grado $1 - \eta$, será

$$u\,(c) = e^{m\,(1-\eta)\,t}\, u\,(\hat{c})$$

Por consiguiente, una unidad de utilidad del consumo por trabajador efectivo es igual a $e^{m(1-\eta)t}$ unidades de utilidad del consumo por trabajador real. Si $\bar{p}$ es el precio de la unidad de capital por trabajador efectivo, medida en unidades de utilidad del consumo por trabajador real, es decir, el número de unidades de utilidad de consumo por trabajador real socialmente equivalentes a una unidad de capital por trabajador efectivo, el número de unidades de utilidad del consumo por trabajador efectivo en que la sociedad está dispuesta a valorar una unidad de capital por trabajador efectivo será $e^{m(\eta-1)t}$ veces mayor, con lo que resulta que

$$\hat{p} = \bar{p}\, e^{m(\eta-1)t}$$

es precisamente este número, es decir, el precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo medido en unidades de utilidad del consumo por trabajador efectivo. La transformación efectuada en la variable auxiliar, es, por tanto, justamente el cambio de variable que reduce todos los elementos del problema a una misma unidad de medida, homogeneizando sus tres variables ($\hat{k}$, $\hat{c}$ y $\hat{p}$), y dando lugar a dos sistemas de ecuaciones autónomas.

Estos sistemas tienen una estructura semejante a la de los estudiados en el apartado 4.4 para modelos con población creciente y descuento temporal del consumo, con la única diferencia de que algunos nuevos parámetros aparecen en las ecuaciones diferenciales —m en la de evolución del capital por trabajo efectivo, y $m\eta$ en la de la nueva variable auxiliar— con lo que el análisis realizado en aquellos modelos será aplicable en su mayor parte al caso que ahora estamos estudiando.

Ahora el plano fase en el que se representan las trayectorias óptimas tendrá como abscisas los valores de la relación capital-trabajo efectivo, mientras que en el eje de ordenadas se representarán los valores correspondientes de su precio sombra, $\hat{p}$. La representación gráfica de las trayectorias solución del sistema de condiciones necesarias en función de estas nuevas variables será muy semejante a una de las dibujadas en las figuras 4.1 y 4.2, correspondientes al modelo estudiado en 4.4.

El conjunto de los puntos del plano fase tales que $\hat{p} = u' [f(\hat{k})]$ separa la zona en la que la evolución de las trayectorias óptimas viene dada por el primero de los dos sistemas de condiciones necesarias de optimalidad de aquella en que el comportamiento de dichas trayectorias viene caracterizado por el segundo de los sistemas, con un valor de la relación ahorro-producto constantemente igual a 0. Este conjunto constituye, por tanto, la curva separatriz, cuya forma coincide con la representada en las figuras 4.1 y 4.2, lo que no podía menos de esperarse, supuesto que su ecuación en función de las variables $\hat{k}$ y $\hat{p}$, coincide exactamente con la de la correspondiente al modelo analizado en 4.4, en función de k y p. En los puntos $(\hat{k}, \hat{p})$ situados por encima de la separatriz se verifica para toda trayectoria óptima la igualdad

$$\hat{p} = u' [(1 - s) f(\hat{k})]$$

de manera que la curva separatriz efectivamente separa la región en que los precios de oferta y demanda de la unidad de capital por trabajador efectivo son iguales, a lo largo de cada trayectoria óptima, de la situada por debajo de ella, en que el precio de demanda es inferior al precio de oferta más bajo posible y por tanto, todo el producto se destina al consumo.

El máximo valor mantenible de la relación capital-trabajo efectivo será una vez más el máximo valor alcanzable por trayectorias en régimen de acumulación positiva de dicha relación, cuya ecuación dinámica nos dice que su valor puede seguir creciendo en tanto que

$$f(\hat{k}) > (\delta + \rho + m)\,\hat{k}$$

con lo que su máximo valor mantenible es en nuestro caso el $\tilde{\hat{k}}$ tal que

$$f(\tilde{\hat{k}}) = (\delta + \rho + m)\,\tilde{\hat{k}}$$

Analicemos ahora la posición de las curvas de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales derivado de las condiciones necesarias de optimalidad. El conjunto de los puntos en los que toda trayectoria óptima mantiene invariante por un instante el valor de $\hat{p}$ será, por encima de la separatriz el

$$\delta + \rho + m\eta + \gamma = f'(\hat{k})$$

que es la semirrecta $\hat{k} = \hat{k}^*$, siendo $\hat{k}^*$ la solución de la anterior ecuación, y, por debajo de la separatriz

$$\hat{p} = \frac{u'[f(\hat{k})]\, f'(\hat{k})}{\delta + \rho + m\eta + \gamma}$$

que es una curva decreciente y convexa que pasa por el punto de intersección de la separatriz con $\hat{k} = \hat{k}^*$. La curva de los $\dot{\hat{k}} = 0$ en trayectorias óptimas es la

$$\hat{p} = u'[f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}]$$

que crece indefinidamente cuando $\hat{k} \to 0$ y $\hat{k} \to \tilde{\hat{k}}$, y presenta un mínimo para el valor de $\hat{k}$ tal que

$$f'(\hat{k}) = \delta + \rho + m$$

La intersección de ambas curvas nos proporciona el punto singular del sistema, de coordenadas $(\hat{k}^*, \hat{p}^*)$ tales que $f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + m\eta + \gamma$, y

$$\hat{p}^* = u'[f(\hat{k}^*) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}^*]$$

que solamente coincidirá con el mínimo de la curva $\dot{\hat{k}} = 0$ cuando la tasa de descuento temporal de la utilidad sea precisamente

$$\gamma = m(1 - \eta)$$

En caso contrario, la curva $\dot{\hat{p}} = 0$ cortará a la $\dot{\hat{k}} = 0$ a la izquierda de su valor mínimo si

$$m\eta + \gamma > m$$

mientras que el punto singular estará situado a la derecha del mínimo de $\dot{\hat{k}} = 0$ si

$$m\eta + \gamma < m$$

Cada una de estas posibilidades determina en el plano fase situaciones similares a las producidas por las posibilidades $\gamma = 0, \gamma > 0$ ó $\gamma < 0$ respectivamente en el modelo estudiado en 4.4, lo que nos induce a pensar que la expresión

$$m\eta + \gamma - m$$

juega aquí en alguna medida un papel parecido al que allí representaba γ. Vamos a ver que, efectivamente, así es. Puesto que el sistema de condiciones necesarias de optimalidad se ha modificado de manera que las variables esenciales del modelo vengan expresadas en unidades por trabajo efectivo, expresemos también el funcional objetivo en función de estas nuevas variables. Será ahora

$$J = \int_0^T u\,(c)\, e^{-\gamma t}\, dt = \int_0^T u\,(\hat{c}\, e^{mt})\, e^{-\gamma t}\, dt =$$

$$= \int_0^T u\,(\hat{c})\, e^{(1-\eta)\, mt}\, e^{-\gamma t}\, dt = \int_0^T u\,(\hat{c})\, e^{-[m\eta + \gamma - m]}\, dt$$

y vemos que, cuando todo el problema se homogeiniza tomando variables medidas en unidades por trabajo efectivo, la expresión

$$m\eta + \gamma - m$$

toma el lugar ocupado por γ en 4.4, con lo cual puede interpretarse como una especie de tasa natural de interés cuando el problema se expresa en términos por unidad de trabajo efectivo

El problema planteado como la determinación de la trayectoria que, satisfaciendo las condiciones de contorno $\hat{k}\,(0) = \hat{k}_0$, $\hat{k}\,(T) \geq \hat{k}_T$ y evolucionando de acuerdo con la ecuación

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}$$

hace máximo el valor del funcional

$$J\,[\hat{k}\,(t)] = \int_0^T u\,(\hat{c})\, e^{-(m\eta + \gamma - m)\,t}\, dt$$

da lugar a un sistema de condiciones necesarias de optimalidad idéntico al nuestro. Construyamos, en efecto, la hamiltoniana

$$\mathcal{H} = u\,(\hat{c})\, e^{-(m\eta + \gamma - m)\,t} + \hat{q}\,[s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)]\,\hat{k}$$

de la que, aplicando el principio de máximo de Pontryagin, obtenemos los sistemas de condiciones necesarias de optimalidad

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}$$

$$\dot{\hat{q}} = - u'\,(\hat{c})\,(1 - s)\, f'\,(\hat{k})\, e^{-(m\eta + \gamma - m)\,t} - \hat{q}\,[s\, f'\,(\hat{k}) - - (\delta + \rho + m)]$$

$$\hat{q} = u'\,(\hat{c})\, e^{-(m\eta + \gamma - m)\,t}$$

para máximos con $0 < s\,(t) < 1$, y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}$$

$$\dot{\hat{q}} = - u'\,(\hat{c})\, f'\,(\hat{k})\, e^{-(m\eta + \gamma - m)\,t} + \hat{q}\,(\delta + \rho + m)$$

$$s = 0$$

para los máximos obtenidos en la frontera del recinto admisible de $s\,(t)$. Ahora $\hat{q}\,(t)$ se interpretaría como el precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo valorada en términos de utilidad del consumo por trabajador efectivo, pero descontada al instante $t = 0$ a la tasa $m\eta + \gamma - m$. Si realizamos la habitual transformación de actualización de los precios sombra, haremos

$$\hat{p} = \hat{q}\, e^{(m\eta + \gamma - m)\,t}$$

con lo que los sistemas anteriores se convierten precisamente en los

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = \hat{p}\, [(\delta + \rho + m) - f'(\hat{k})] + (m\eta + \gamma - m)\, \hat{p} =$$
$$= \hat{p}\, [(\delta + \rho + m\eta + \gamma) - f'(\hat{k})]$$

$$\hat{p} = u'(\hat{c})$$

y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = -u'(\hat{c})\, f'(\hat{k}) + \hat{p}\, (\delta + \rho + m) + \hat{p}\, (m\eta + \gamma - m) =$$
$$= -u'(\hat{c})\, f'(\hat{k}) + \hat{p}\, (\delta + \rho + m\eta + \gamma)$$

$$s = 0$$

respectivamente, que son precisamente los sistemas autónomos obtenidos en nuestro problema tras el cambio de variable.

Ahora, una vez más, la hamiltoniana *actualizada* será igual a la utilidad del consumo por trabajador efectivo más la inversión neta de capital por trabajador efectivo multiplicada por su valoración social en términos de utilidad del consumo por trabajador efectivo, de manera que

$$e^{(m\eta + \gamma - m)t}\, \mathcal{H}(t)$$

es precisamente la renta por trabajador efectivo en cada instante.

La curva separatriz, la recta $\hat{k} = \hat{\tilde{k}}$ y las dos curvas de equilibrio de las ecuaciones diferenciales tienen en el plano de fase de variables $\hat{k}$ y $\hat{p}$ una representación semejante a la de la figura 3.1 cuando $m\eta + \gamma = m$, o a la de la figura 4.1 si $m\eta + \gamma > m$. Cuando $m\eta + \gamma < m$, su representación será parecida a esta, con la única diferencia de que el mínimo de $\dot{\hat{k}} = 0$ estará a la izquierda del punto singular correspondiendo, por tanto, su representación a la de la figura 4.2. En cualquiera de estos casos, el plano de fase queda fraccionado en zonas, caracterizándose cada una de ellas por los signos que tomen en ella $\dot{\hat{k}}$ y $\dot{\hat{p}}$, y en cada una de las cuales, las trayectorias que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad evolucionan de acuerdo con el análisis efectuado en el capítulo 3. Por consiguiente, los análisis acerca del comportamiento de las trayectorias óptimas y su interpretación económica efectuados en el capítulo 3 o en los apartados 4.4.1 y 4.4.2 son válidas en nuestro modelo reinterpretadas en función de las nuevas variables $\hat{k}$ y $\hat{p}$.

La trayectoria que, comenzando en el punto singular $(\hat{k}^*, \hat{p}^*)$ del plano-fase, tal que

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + m\eta + \gamma$$

y

$$\hat{p}^* = u'[f(\hat{k}^*) - (\delta + \rho + m)\hat{k}^*]$$

permanece en él durante todo el período de planificación T satisface las condiciones necesarias de optimalidad, y es, por tanto, la trayectoria óptima buscada para las condiciones de contorno $\hat{k}(0) = \hat{k}^*$, $\hat{k}(T) = \hat{k}^*$. El valor de la relación ahorro-producto que mantiene en el punto singular a una trayectoria inicialmente situada en él es constante e igual a

$$s^* = \frac{\delta + \rho + m}{f(\hat{k}^*)}\hat{k}^*$$

que, como $0 < \hat{k}^* < \hat{\hat{k}}$, verificará

$$0 < s^* < 1$$

El crecimiento de la economía según esta trayectoria es una autopista (turnpike) para todas las demás trayectorias óptimas, que pasan un período de tiempo proporcionalmente mayor en un entorno del punto singular a medida que aumenta el periodo de planificación, conservándose las condiciones de contorno. Constituye, además, una regla de oro modificada (eventualmente, una regla de oro si $m\eta + \gamma = m$) del crecimiento económico en la que las variables relativas por trabajador efectivo, $\hat{k}^*$, $\hat{y}^*$, $\hat{c}^*$ e $\hat{i}^*$ se mantienen constantes. Esto equivale a decir que el capital, el producto, el consumo y la inversión bruta medidos en términos absolutos crecerán todos a una misma tasa: la del crecimiento de la mano de obra efectiva, $\rho + m$ igual a la tasa de crecimiento de la población más la del progreso técnico. Esta tasa de crecimiento armónico de la economía siguiendo su regla de oro modificada es la llamada tasa natural de crecimiento de la misma.

La regla de oro modificada es, además, trayectoria asintótica a todas las trayectorias óptimas del modelo de crecimiento con horizonte infinito, las cuales determinan, por tanto, una tasa de acumulación del capital cada vez más próxima a la tasa natural de crecimiento de la economía. Estas trayectorias óptimas con periodo de planificación infinito existen y son únicas para cada valor inicial de la relación capital-trabajo efectivo, y discurren por los brazos estables del punto singular, siempre que se verifique

$$m\eta + \gamma \geqslant m$$

de manera que la tasa natural de interés sea no negativa. Si, por el contrario

$$m\eta + \gamma < m$$

no existe solución al problema de la determinación de una trayectoria óptima con horizonte infinito.

4.5.3. Ponderación de la utilidad por el tamaño de la población

El funcional objetivo utilizado en los modelos de crecimiento anteriormente expuestos

$$J = \int_0^T u(c)\, e^{-\gamma t}\, dt$$

constituye una medida de la utilidad individual obtenida del consumo medio por trabajador y valorada en el instanteinicial. En el supuesto de que el producto destinado al consumo se reparte equitativamente entre todos los miembros de la colectividad, y que la función de utilidad del consumo es la misma para todos ellos, este funcional constituye efectivamente una medida del bienestar social obtenido por el que podríamos llamar *trabajador representativo* de la colectividad, y es un buen objetivo a optimizar. Sin embargo, hay un factor importante de la realidad que este funcional no refleja: el crecimiento de la población determina que, a medida que el tiempo transcurre, un mayor número de consumidores disfruten del nivel de utilidad existente, lo que dará mayor importancia proporcional al nivel de utilidad conseguido en los últimos tiempos del periodo de planificación si en la mente del planificador cuenta más el bienestar global colectivo que el individual. Esta es, naturalmente, una opción discutible desde el punto de vista ético(*), ya que, considerada desde la perspectiva del consumidor individual, la repercusión de esta mayor importancia concedida a las generaciones más numerosas (las futuras), se traducirá de hecho en la nueva trayectoria óptima solución del problema en una discriminación temporal semejante a la que establecería una tasa de descuento temporal del consumo negativa. Desde el punto de vista colectivo, en cambio, parece más deseable un mayor nivel de utilidad cuando una mayor población puede disfrutar de él. Y este segundo punto de vista es el que predomina en la mayor parte de la literatura económica en torno al tema, y es el que se va a adoptar en el modelo numérico realizado para la economía española cuya elaboración y resultados son descritos en los próximos capítulos. Por esta razón vamos seguidamente a exponer las ligeras modificaciones que en el modelo con progreso técnico potenciador del trabajo, expuesto en el anterior apartado, determina la inclusión en el funcional objetivo del factor de ponderación representativo del volumen de la colectividad, dando lugar al modelo teórico de crecimiento óptimo cuyos supuestos vamos a adoptar en el modelo numérico objeto de la segunda parte de este trabajo.

(*) Tjalling C. Koopmans "Objectives, constraints and outcomes in optimal growth models", op. cit.

El problema se plantea ahora como ladeterminación de la trayectoria de acumulación de capital por trabajador efectivo $\hat{k}$ tal que evolucionando de acuerdo con la ecuación dinámica

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\, (\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

y satisfaciendo las condiciones de contorno $\hat{k}\,(0) = \hat{k}_0$, $\hat{k}\,(T) \geqslant \hat{k}_T$, maximiza el valor del funcional

$$\bar{J}\,[\hat{k}\,(t)] = \int_0^T L\,(t)\, u\,(c)\, e^{-\gamma t}\, dt =$$

$$= L_0 \int_0^T e^{\rho t}\, u\,(c)\, e^{-\gamma t}\, dt$$

Es evidente que la solución buscada maximizará también el funcional

$$J\,[\hat{k}\,(t)] = \int_0^T u\,(c)\, e^{-(\gamma - \rho)\, t}\, dt$$

y que, recíprocamente, la trayectoria que optimiza $J\,[\hat{k}\,(t)]$ optimizará también $\bar{J}\,[\hat{k}\,(t)]$, con lo que ambos funcionales son equivalentes a efectos de nuestro problema. Elegiremos el segundo por su mayor sencillez.

Observemos que la ponderación de la utilidad por el factor de crecimiento de la población modifica el funcional objetivo del problema anterior reduciendo el valor absoluto de la tasa de descuento temporal de la utilidad del consumo cuando es positiva, e incrementándolo cuando es negativa, con lo que las trayectorias solución del problema se verán afectadas en este mismo sentido. Todo lo cual era de esperar, pues es la natural consecuencia de la sobrevaloración proporcional de utilidades futuras en razón de la mayor población accedente a ellas.

El tratamiento analítico del problema es semejante al del modelo descrito en 4.5.2, cuando se considera una tasa de descuento de la utilidad igual a $\gamma - \rho$.

Construyamos primeramente la hamiltoniana

$$\mathcal{H} = u\,[e^{mt}\,(1-s)\,f\,(\hat{k})]\,e^{-(\gamma-\rho)\,t} + \bar{q}\,[s\,f\,(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\,\hat{k}]$$

de donde el sistema de condiciones necesarios de optimalidad resulta ser ahora

$$\dot{\hat{k}} = s\,f\,(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\,\hat{k}$$

$$\dot{\bar{q}} = -\,u'\,[e^{mt}\,(1-s)\,f\,(\hat{k})]\,e^{mt}\,(1-s)\,f'\,(\hat{k})\,e^{-(\gamma-\rho)\,t} + $$
$$+\,q\,[(\delta+\rho+m) - s\,f'\,(\hat{k})]$$

juntamente con

$$-\,u'\,[e^{mt}\,\hat{c}]\,e^{mt}\,f\,(\hat{k})\,e^{-(\gamma-\rho)\,t} + \bar{q}\,f\,(\hat{k}) = 0$$

ó

$$s = 0$$

según que el máximo estático de $\mathcal{H}$ se obtenga para valores interiores o fronteros del intervalo $[0 \leqslant s < 1]$, y la condición de transversalidad que, como no viene afectada por la nueva ponderación de la utilidad del consumo, será la misma que en 4.5.2

$$\bar{q}\,(T)\,(\hat{k}\,(T) - \hat{k}_T) = 0$$

Ahora $\bar{q}$ (t) representa la variación experimentada por el actual funcional objetivo debida a un incremento del capital por trabajador efectivo en el instante t, medida en unidades de utilidad del consumo por trabajador real cuando ésta se valora en el momento inicial del periodo de planificación. En este modelo la valoración de la utilidad en el momento $t = 0$ diverge de su valoración en el instante en que realmente se produce de dos formas contradictorias: por una parte, devaluándola en razón de su lejanía al presente, según la tasa $\gamma > 0$, y, por otra, sobrevaluándola en vista de la mayor cantidad de población que va a beneficiarse de ella. La actualización de esta valoración supondría la corrección de esta *miopía-hipermetropía* multiplicándola por $e^{(\gamma-\rho)\,\bar{t}}$. El precio de la unidad de capital por trabajador efectivo medido en unidades de utilidad del consumo por trabajador real actualizada será, por tanto

$$\overline{p} = \overline{q}\, e^{(\gamma - \rho)\, t}$$

con lo que, el sistema de condiciones necesarias de optimalidad en función de las variables $\hat{k}$ y $\overline{p}$ pasará a estar formado por las ecuaciones

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\overline{p}} = -\, u'\,[e^{mt}\,(1 - s)\, f\,(\hat{k})]\, e^{mt}\,(1 - s)\, f'\,(\hat{k}) + \overline{p}\,[(\delta + \rho + m) - s\, f'\,(\hat{k}) +$$

$$+\, \overline{p}\,(\gamma - \rho) = -\, u'\,[e^{mt}\,(1 - s)\, f\,(\hat{k})]\, e^{mt}\,(1 - s)\, f'\,(\hat{k}) + \overline{p}\,[(\delta + m + \gamma) - s\, f'\,(\hat{k})]$$

y

$$-\, u'\,[e^{mt}\,(1 - s)\, f\,(\hat{k})]\, e^{mt} + \overline{p} = 0$$

o

$$s = 0$$

Este sistema no es autónomo. El cambio de variable que homogeiniza todas sus variables, expresándolas en unidades por trabajador efectivo, y transformando el sistema en autónomo es el mismo que en el anterior modelo

$$\hat{p} = e^{m\,(\eta - 1)\, t}\, \overline{p}$$

Y en el supuesto de que la función de utilidad sea tal que

$$u'\,(\lambda\, c) = \lambda^{-\eta}\, u'\,(c) \quad \forall \lambda > 0$$

los sistemas de condiciones necesarias de optimalidad pasan a ser los

$$\dot{\hat{k}} = s\, f\,(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = -\, u'\,(\hat{c})\,(1 - s)\, f'\,(\hat{k}) + \hat{p}\,[(\delta + m + \gamma) - s\, f'\,(\hat{k})] +$$

$$+\, \hat{p}\,(m\eta - m) = \hat{p}\,[(\delta + m\eta + \gamma) - f'\,(\hat{k})]$$

$$\hat{p} = u'\,(\hat{c})$$

para máximos en valores de s interiores a [0, 1], y

$$\dot{\hat{k}} = s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

$$\dot{\hat{p}} = - u' [f(\hat{k})]\, f'(\hat{k}) + \hat{p}\, (\delta + m\eta + \gamma)$$

$$s = 0$$

para máximos en la frontera del recinto admisible de s. La condición de transversalidad será

$$\hat{p}(T)\, (\hat{k}(T) - \hat{k}_T) = 0$$

Estos sistemas son similares a los obtenidos para el modelo estudiado en 4.5.2, con la única diferencia de que ahora la tasa de crecimiento de la población no aparece como parámetro impulsor del crecimiento del precio sombra del capital. La curva separatriz entre las regiones de consumo total y de consumo parcial del producto será la

$$\hat{p} = u' [f(\hat{k})]$$

que, representada en el plano fase de las variables $\hat{k}$ y $\hat{p}$ es la misma que la del modelo analizado en el apartado anterior, así como también lo es la barrera de trayectorias óptimas determinada por el máximo nivel mantenible de la relación capital-trabajo efectivo, $\hat{\hat{k}}$, tal que

$$f(\hat{\hat{k}}) = (\delta + \rho + m)\, \hat{\hat{k}}$$

En cuanto a las curvas de equilibrio del sistema, serán ahora: la $\dot{\hat{p}} = 0$, que es la

$$\hat{k} = \hat{k}^*$$

donde $\hat{k}^*$ es tal que

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + m\eta + \gamma$$

por encima de la curva separatriz, y

$$\hat{p} = \frac{u' [f(\hat{k})] f'(\hat{k})}{\delta + m\eta + \gamma}$$

en la región de la inversión bruta nula; y la $\dot{\hat{k}} = 0$, de ecuación

$$\hat{p} = u' [f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m) \hat{k}]$$

ambas curvas tienen las mismas características —y, por tanto, la misma forma que las representadas en las figuras 3.1, 4.1 y 4.2, y el mínimo de la $\dot{\hat{k}} = 0$ se produce ahora para el valor de $\hat{k}$ tal que

$$f'(\hat{k}) = \delta + \rho + m$$

La intersección de ambas curvas da lugar al punto de equilibrio del sistema, de coordenadas $\hat{k}^*$ y $\hat{p}^*$ tales que

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + m\eta + \gamma$$

y

$$\hat{p}^* = u' [f(\hat{k}^*) - (\delta + \rho + m) \hat{k}^*]$$

Observemos que como

$$\delta + m\eta + \gamma < \delta + m\eta + \rho + \gamma$$

y además

$$f''(\hat{k}) < 0$$

el punto singular del modelo con utilidad ponderada por la población se produce para un valor de la relación capital-trabajo efectivo mayor que el del punto singular del modelo analizado en 4.5.2, lo que una vez más, confirma el punto de vista inicial de que la ponderación de la utilidad por la población se contrapone al efecto de una tasa de descuento temporal de la utilidad positiva, y refuerza sus consecuencias cuando es negativa.

Ahora el punto singular estará situado a la izquierda del mínimo de la curva $\dot{\hat{k}} = 0$, con un valor menor de la relación capital-trabajo efectivo si

$$\delta + m\eta + \gamma > \delta + \rho + m$$

es decir, si

$$m(\eta - 1) + \gamma - \rho > 0$$

coincidirá con él si

$$m(\eta - 1) + \gamma - \rho = 0$$

y estará a su derecha si

$$m(\eta - 1) + \gamma - \rho < 0$$

resultados idénticos a los de 4.5.2 si consideramos $\gamma - \rho$ como nuestra nueva tasa de descuento temporal del consumo.

El funcional objetivo, expresado en función del consumo por trabajador efectivo será ahora

$$J = \int_0^T e^{\rho t}\, u(c)\, e^{-\gamma t}\, dt = \int_0^T u(e^{mt}\hat{c})\, e^{-(\gamma-\rho)t}\, dt =$$

$$= \int_0^T u(\hat{c})\, e^{(1-\eta)mt}\, e^{-(\gamma-\rho)t}\, dt = \int_0^T u(\hat{c})\, e^{-[m(\eta-1)+\gamma-\rho]t}\, dt$$

y la renta por trabajador efectivo valorada en unidades actuales de utilidad del consumo por trabajador efectivo obtenida en cada instante será

$$e^{m\eta+\gamma-\rho-m}\, \mathcal{H}(t)$$

donde ,

$$\mathcal{H}(t) = u(\hat{c})\, e^{-(m\eta+\gamma-\rho-m)} + \hat{q}\, [s\, f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}]$$

que, actualizado, da lugar a un sistema de condiciones necesarias de optimalidad idénticas a los ya obtenidas mediante el cambio de variable que homogeiniza el modelo.

La trayectoria óptima que, comenzando en el punto singular, continúa en él durante todo el periodo de planificación es, nuevamente, una regla de oro modificada (regla de oro simplemente si $m\eta + \gamma - \rho - m = 0$), que se mantiene para un valor de la relación ahorro-producto

$$s^* = \frac{(\delta + \rho + m)\,\hat{k}^*}{f(\hat{k}^*)}$$

constante. Para que esta regla de oro modificada exista realmente, es preciso que

$$0 \leqslant s^* < 1$$

es decir, que

$$0 \leqslant (\delta + \rho + m)\,\hat{k}^* < f(\hat{k}^*)$$

lo que equivale a que

$$\hat{k}^* < \bar{\hat{k}}$$

Pero teniendo en cuenta que

$$f'(\bar{\hat{k}}) < \delta + \rho + m$$

y que

$$f''(\hat{k}) < 0$$

la existencia de la trayectoria óptima según la regla de oro modificada está garantizada siempre que

$$\delta + \rho + m \leqslant \delta + m\eta + \gamma$$

es decir, cuando

$$m\eta + \gamma \geqslant \rho + m$$

que es lo que ocurre cuando el punto singular del sistema coincide con el mínimo de la curva $\dot{\hat{k}} = 0$, o está a su izquierda. En la regla de oro modificada el trabajo efectivo (potenciado por el progreso técnico), el capital, el producto, el consumo y la inversión crecen a la misma tasa constante $\rho + m$, que es ahora la tasa natural de crecimiento de la economía. Las demás trayectorias óptimas, centradas en el plano fase por la curva separatriz, las $\dot{\hat{k}} = 0$ y $\dot{\hat{p}} = 0$ y la $k = \hat{k}$, evolucionan en la forma indicada en la figura 4.1, y les son aplicables todos los resultados y conclusiones válidos en 4.5.2.

Cuando el modelo se plantea con un horizonte temporal infinito, existirá una trayectoria óptima para todo valor inicial de la relación capital-trabajo efectivo si

$$m\eta + \gamma \geqslant \rho + m$$

y se aproximará asintóticamente al punto singular desplazándose sobre el correspondiente brazo estable del sistema. Pero si

$$m\eta + \gamma < \rho + m$$

el problema de la determinación de la trayectoria óptima con horizonte infinito carece de sentido.

PARTE 2.ª

EL MODELO NUMERICO

CAPITULO V

EL MODELO DISCRETO

5.1. Planteamiento del modelo

En los cuatro primeros capítulos de este trabajo hemos formulado y expuesto modelos de crecimiento económico óptimo en términos continuos, es decir, en el supuesto de que sus variables evolucionan de forma continua a lo largo del tiempo y sus valores están definidos en cualquier instante de la variable t, perteneciente al periodo de planificación. Tales hipótesis dan lugar a la obtención, mediante la aplicación del principio de máximo de Pontryagin, de un sistema de condiciones necesarias de optimalidad en forma de ecuaciones, algunas de ellas diferenciales, cuya resolución elemental solamente es posible en algunos casos particulares especialmente sencillos, en los que la caracterización analítica efectiva de las funciones s y k solución única de las condiciones necesarias de optimalidad resuelve satisfactoriamente el problema (*). En el estudio del caso general hemos tenido que limitarnos a un análisis geométrico del comportamiento de las trayectorias óptimas, que no nos permite obtener —con la excepción de la trayectoria estable en el punto singular— valores concretos de las mismas para los distintos instantes del periodo.

Un procedimiento de obtener las trayectorias óptimas buscadas cuando las funciones y parámetros que determinan el modelo no permiten su resolución

(*) Tal es, por ejemplo, el caso de las trayectorias solución obtenidas por Chakravarty para una función de utilidad de elasticidad marginal constante, y una función de producción Cobb-Douglas, del tipo $y = b\,k^{1/2}$, en "Optimal Savings with Finite Planning Horizon", International Economic Review, Vol 3, nº 3, Septiembre de 1962. Pero la integrabilidad del sistema está condicionada a que la elasticidad parcial respecto al capital sea precisamente 0,5.

elemental, consiste en plantear el modelo en términos discretos de manera que la variable tiempo –y, consiguientemente, todas las demás que dependen de esta– tomen solamente valores en un conjunto de instantes aislados, tomados generalmente a intervalos regulares, y en número finito cuando el horizonte de planificación es finito. La aplicación de las condiciones de optimalidad al modelo estructurado en forma discreta da lugar como veremos seguidamente a un sistema de ecuaciones, algunas de ellas en diferencias finitas, resoluble para los valores de t en los que están definidas las variables del modelo, mediante técnicas de cálculo de tipo iterativo, lo que nos proporciona una sucesión finita de valores de la variable de estado y otra de la de control, que constituyen las trayectorias discretas óptimas de estas variables.

Este es el camino que vamos a seguir para obtener soluciones de un modelo de crecimiento óptimo. Para ello comenzaremos fijando el periodo de definición de la variable tiempo y sus funciones que, a semejanza de la mayor parte de los modelos económicos habituales –en los cuales el periodo de elaboración de series de datos estadísticos es factor determinante– será el año. Supuesto que el instante inicial del periodo de planificación es $t = 0$, la variable tiempo toma, por tanto, en nuestro modelo, los valores

$$t = 0, 1, \dots, T$$

siendo T la duración, en años, del programa de crecimiento. Las variables económicas del modelo –stock de capital, producto, inversión, consumo, relación ahorro-producto, etc.– estarán definidas para esos valores de t, y sus trayectorias en el tiempo consistirán en sucesiones finitas de puntos.

Estudiemos, en primer lugar, la evolución de la trayectoria del capital,

$$K_i, \; i = 0, 1, \dots, T$$

Supondremos que el producto obtenido en cada periodo es función del capital y de la mano de obra disponibles en el periodo, y que esta última se ve afectada por el paso del tiempo a través del crecimiento de la población, y de su potenciación por efecto de un progreso técnico neutral en el sentido de Harrod, de forma que

$$Y_i = F_i (K_i, L_i) = F (K_i, \hat{L}_i), i = 0, 1, ..., T$$

siendo $\hat{L}_i$ la mano de obra efectiva en cada periodo. Tal y como lo hemos venido haciendo hasta ahora en los modelos continuos, supondremos que la función de producción es C^2 en K y L, y homogenea de grado uno en ambas variables y que además, satisface las condiciones de buen comportamiento de Inada expuestas en 2.2.1. Admitiendo que la población crece a tasa anual constante ρ, y que la tasa anual de potenciación de la mano de obra es m, será

$$\hat{L}_i = \hat{L}_0 (1 + \rho + m)^i$$

donde $\hat{L}_0$ es la mano de obra efectiva en el comienzo del programa.

Del producto obtenido en cada periodo, se destina a la inversión bruta la proporción señalada por el correspondiente valor de la relación ahorro-producto, s_i, lo que, una vez descontada la amortización, pasa a engrosar el stock de capital disponible en el periodo siguiente. La relación ahorro-producto ha de ser tal que

$$0 \leqslant s_i \leqslant 1 \quad i = 0, 1, ..., T - 1$$

y la amortización será en cada periodo δ veces el stock de capital, K_i, en dicho periodo, es decir, será

$$\delta K_i , \; i = 0, 1, ..., T - 1$$

de manera que la evolución dinámica del stock de capital vendrá dada por la relación

$$K_{i+1} - K_i = s_i F (K_i, \hat{L}_i) - \delta K_i , \quad i = 0, 1, ..., T - 1$$

en la que, conocido el capital inicial, K_0, cada sucesión de valores de la relación ahorro-producto determina de manera única una sucesión de valores del capital.

Procediendo como en el modelo continuo estudiado en 4.5.2, podemos obtener una ecuación de transición en la que no aparezca la variable $\hat{L}_i$ planteándola en términos relativos de capital por trabajador efectivo

$$\hat{k}_i = \frac{K_i}{\hat{L}_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, T$$

con lo que, dada la homogeneidad de la función de producción y habida cuenta de que

$$\frac{K_{i+1}}{\hat{L}_i} = \frac{K_{i+1}}{\hat{L}_{i+1}} \frac{\hat{L}_{i+1}}{\hat{L}_i} = \hat{k}_{i+1}\ (1 + \rho + m)$$

tendremos

$$\hat{k}_{i+1}\ (1 + \rho + m) - \hat{k}_i = s_i\, f\, (\hat{k}_i) - \delta \hat{k}_i$$

de donde

$$\hat{k}_{i+1} = [s_i\, f\, (\hat{k}_i) - (\delta - 1)\, \hat{k}_i]\ (1 + \rho + m)^{-1}$$

o, lo que es lo mismo

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [s_i\, f\, (\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m)\, \hat{k}_i]\ (1 + \rho + m)^{-1}$$

que son las ecuaciones dinámicas del sistema expresado en términos relativos por trabajador efectivo, de manera que cualquiera de ellas, con

$$\hat{k}_0 = \frac{K_0}{\hat{L}_0}$$

determina para cada sucesión s una trayectoria del stock de capital por trabajador efectivo.

Tales ecuaciones dinámicas son equivalentes, y pueden ser utilizadas indistintamente en el problema. La primera de ellas, que puede escribirse también en la forma

$$\hat{k}_{i+1} = [s_i f(\hat{k}_i) - \delta \hat{k}_i + \hat{k}_i] (1 + \rho + m)^{-1}$$

responde a la lógica de los hechos económicos, y como tal admite una interpretación evidente: la expresión contenida en el primer factor del segundo miembro, es igual al capital por trabajador efectivo existente en el periodo i más la inversión neta por trabajador efectivo en dicho periodo, de manera que sería precisamente el stock de capital existente en el periodo i + 1 por trabajador efectivo si el número de éstos no hubiera variado, dando lugar a un cambio en la unidad de medida del capital por trabajador efectivo al pasar del periodo i al i + 1. El segundo factor del segundo miembro es precisamente el coeficiente que realiza el ajuste al nuevo sistema de medidas, habida cuenta de que una unidad de capital por trabajador efectivo en el periodo i es equivalente a $(1 + \rho + m)^{-1}$ unidades de capital por trabajador efectivo en el i + 1. La segunda versión de la ecuación dinámica se deduce de la primera y responde, por tanto, a la misma interpretación. Es, como la otra, una ecuación en diferencias finitas de primer orden y tiene la ventaja, en nuestro caso, de aparecer ya en la forma a la que es directamente aplicable el principio de máximo de Pontryagin, como veremos seguidamente.

Estas ecuaciones de transición nos permiten obtener el máximo valor indefinidamente mantenible del stock de capital por trabajador efectivo, que es, para todo periodo i, un $\hat{\hat{k}}$ tal que aunque la sociedad, encontrándose con un stock de capital por trabajador efectivo, $\hat{k} < \hat{\hat{k}}$, decidiera ahorrar todo el producto obtenido, no podría rebasarlo, pues, dado el carácter decreciente impuesto a los rendimientos de la función de producción respecto al incremento del capital, el producto conseguido con $\hat{k} = \hat{\hat{k}}$ coincirá exactamente con el nivel de depreciación requerido para su conservación. Tal capital por trabajador efectivo, $\hat{\hat{k}}$, es, por tanto, la solución a la ecuación

$$f(\hat{k}) = (\delta + \rho + m)\, \hat{k}$$

Para un nivel de capital por trabajador efectivo mayor que este $\tilde{\hat{k}}$ en algún periodo i, resultaría que, incluso para $s_i = 1$ sería

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i < 0$$

con lo que tal stock de capital por trabajador efectivo sería insostenible.

También podemos, a partir de las ecuaciones de transición, determinar el cono de alcanzabilidad de la variable de estado. En efecto, supuesto que $k_0 < \tilde{\hat{k}}$ el extremo superior del mismo se produciría para valores de la variable de control

$$s_i = 1 \quad i = 0, 1, ..., T - 1$$

con lo que

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [f(\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i]\,(1 + \rho + m)^{-1}$$

de donde resulta

$$\bar{\hat{k}}_T = \hat{k}_0 + (1 + \rho + m)^{-1} \sum_{i=0}^{T-1} (f(\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i)$$

En cuanto al extremo inferior del mismo, se obtendría en un programa tal que el consumo fuese igual al producto en todo periodo, lo que supondría

$$s_i = 0 \quad i = 0, 1, ..., T - 1$$

de manera que

$$\hat{k}_{i+1} = \frac{1 - \delta}{1 + \rho + m}\,\hat{k}_i$$

con lo que

$$\underline{\hat{k}}_T = \left(\frac{1 - \delta}{1 + \rho + m}\right)^T \hat{k}_0$$

y el cono de alcanzabilidad queda determinado, para cada T, por sus valores extremos.

El problema consiste ahora en determinar, de entre todas las sucesiones de valores de la relación ahorro-producto

$$0 \leqslant s_i \leqslant 1 \quad i = 0, 1, ..., T-1$$

que trasladan al sistema desde un valor inicial de la relación capital-trabajo efectivo $\hat{k}_0$, a un valor final de la misma previamente establecido $\hat{k}_T$ y perteneciente a su cono alcanzable aquella que maximiza un cierto criterio de optimalidad.

Vamos a elegir un criterio de optimalidad semejante al del modelo continuo estudiado en 4.5.3, basado en una medición de la utilidad derivada del consumo. El nivel de consumo de cada periodo viene determinado —dadas las condiciones iniciales y la función de producción— por la sucesión de valores de la relación ahorro-producto, de manera que

$$C_i = (1 - s_i)\, F_i\, (K_i, L_i) \quad i = 0, 1, ..., T-1$$

con lo que el consumo por trabajador será

$$c_i = \frac{C_i}{L_i} = (1 - s_i)\, F_i\, \left(\frac{K_i}{L_i}, 1\right) = (1 - s_i)\, f_i\, (k_i)$$

siendo k_i el capital por trabajador. Si suponemos que la distribución del consumo no dista excesivamente de ser equitativa, la utilidad derivada del consumo por trabajador constituirá un buen índice del bienestar colectivo obtenido en cada periodo. Definiremos para ello una función de utilidad u (c) del consumo por trabajador, que exista para todo $c \geqslant 0$ y sea C^2 para $c > 0$ y verifique

$$u(0) = 0$$

$$u(c) \geqslant 0$$

$$u'(c) > 0$$

y

$$u''(c) < 0$$

es decir, u (c) no negativa, creciente y estrictamente cóncava y tal que

$$\lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$$

y

$$\lim_{c \to 0^+} u'(c) = \infty$$

y que, además, satisfaga la relación

$$u'(\lambda c) = \lambda^{-\eta} u'(c)$$

para algún $\eta > 0$ y todo $\lambda > 0$, es decir, que sea positivamente homogenea lo que, siendo $u'(c)$ decreciente y $u(c)$ creciente, supone que su grado de homogeneidad ha de ser negativo y menor que uno en valor absoluto, según las razones expuestas en 4.5.2. Se trata, pues, en suma, de una función de utilidad con elasticidad constante, $1 - \eta$, respecto al consumo.

Un índice de la utilidad total obtenida podría ser la suma de la utilidad del consumo por trabajador a lo largo de los T periodos.

$$\sum_{i=0}^{T-1} u(c_i)$$

Pero si convenimos en establecer una subvaloración del consumo en función de su lejanía respecto al periodo inicial, es decir, una tasa anual de descuento de la utilidad, $\gamma > 0$ será

$$\sum_{i=0}^{T-1} \frac{1}{(1+\gamma)^i} u(c_i)$$

y si, además, decidimos ponderar la utilidad del consumo proporcionalmente al número de personas que disfrutan de él, que como sabemos crece a tasa anual constante, ρ, obtendremos finalmente el criterio de optimalidad

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u(c_i) = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u\left[(1-s_i)\frac{\hat{L}_i}{L_i} f(\hat{k}_i)\right]$$

que siendo a nuestro nivel de aproximación

$$\frac{\hat{L}_i}{L_i} = \left(\frac{1+\rho+m}{1+\rho}\right)^i = \left(1+\frac{m}{1+\rho}\right)^i \cong (1+m)^i$$

puede escribirse también como

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u\left[(1-s_i)(1+m)^i f(\hat{k}_i)\right]$$

con lo que el modelo aparece referido a las variables $\hat{k}_i$, s_i

5.2. Las condiciones necesarias de optimalidad

Con el fin de obtener condiciones necesarias de optimalidad para este modelo, vamos a ver primeramente que el principio de máximo de Pontryagin en su versión adaptada a sistemas discretos(*) es aplicable a nuestro problema de crecimiento óptimo. En primer lugar, tanto la función de dos variables reales $\hat{k}$, s

$$f^1(\hat{k}, s) = (s\, f(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\,\hat{k})\,(1+\rho+m)^{-1}$$

como la de dos variables reales, $\hat{k}$, s, y una natural, i

$$f^0(\hat{k}, s, i) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u\left((1-s)(1+m)^i f(\hat{k})\right)$$

son continuamente derivables dos veces respecto a $\hat{k}$ y a s, en virtud de las hipótesis impuestas a las funciones de producción y utilidad. Si definimos la función $\mathcal{H}$

(*) Versión dada por A. Benavie en "Mathematical Techniques for Economic Analysis", Capítulo 5, Pretince-Hall 1972.

de la forma

$$\mathcal{H}(\psi, \hat{k}, s, i) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u\left((1-s)(1+m)^i f(\hat{k})\right) +$$

$$+ \psi \left(s f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\hat{k}\right)(1+\rho+m)^{-1}$$

existirán sucesiones, ψ_i, $i = 0, 1, T$, que cumplen la ecuación en diferencias

$$\psi_{i+1} - \psi_i = - \frac{\partial \mathcal{H}(\psi_{i+1}, \hat{k}_i, s_i, i)}{\partial \hat{k}}$$

supuestos conocidos los s_i y los correspondiente $\hat{k}_i$.

Estas variables auxiliares representan, al igual que en el modelo contínuo, las derivadas del funcional objetivo computado sobre la correspondiente trayectoria óptima a partir de este período respecto a los valores de la variable de estado en ese período cuando el valor final de ésta ha sido fijado previamente, lo que, en lenguaje económico se acostumbra a designar como sensibilidad de la utilidad obtenida respecto a las variaciones del stock de capital por trabajador efectivo en ese período. Por tanto, ψ_i se interpreta como el precio de demanda, o precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo, medido en las unidades de valoración del funcional objetivo.

Por otra parte, el conjunto de los valores que puede tomar la variable de control en cada período i es precisamente el intervalo [0, 1], que es convexo, y, además la función de s definida en [0, 1] por

$$\hat{\mathcal{H}}(s) = \mathcal{H}(\psi, \hat{k}, s, i) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u\left((1-s)(1+m)^i f(\hat{k})\right) +$$

$$+ \psi \left(s f(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\hat{k}\right)(1+\rho+m)^{-1}$$

tiene como segunda derivada

$$\hat{\mathcal{H}}''(s) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1+m)^{2i} f(\hat{k})^{2} u''((1-s)(1+m)^{i} f(\hat{k}))$$

que, en virtud de nuestras hipótesis acerca de la concavidad estricta de u (c), es, para todo s tal que $0 \leqslant s \leqslant 1$, y para cualesquiera $\hat{k} > 0$ y ψ

$$\hat{\mathcal{H}}''(s) < 0$$

de donde resulta la concavidad de $\hat{\mathcal{H}}$ respecto de la variable de control.

De todo ello, podemos deducir que la condición necesaria para que la sucesión s_* de la variable de control y la correspondiente sucesión de stocks de capital por trabajador efectivo, $\hat{k}_*$ haga máximo el funcional objetivo entre todas las que transportan el sistema del valor inicial $\hat{k}_0$ al $\hat{k}_T$ es que se verifique

$$\mathcal{H}(\psi_{*i+1}, \hat{k}_{*i}, s_{*i}, i) = \max_{s \in [0,1]} \mathcal{H}(\psi_{*i+1}, \hat{k}_{*i}, s, i)$$

$$s \in [0,1]$$

para i = 0, 1, T—1, siendo $\hat{k}_*$, ψ_*, las sucesiones correspondientes a la s_*.

Una vez más, el principio de máximo de Pontryagin transforma un problema de optimización dinámica en un problema estático, puesto que el valor de la variable de control óptimo en cada período ha de ser el que maximice el valor de la hamiltoniana en ese período entre todos los admisibles cuando la variable de estado toma el valor correspondiente a la trayectoria óptima en el período, y la variable auxiliar es solución del sistema de ecuaciones en diferencias anteriormente indicado. Si el valor máximo de la hamiltoniana en estas circunstancias se produjera para un valor de la relación ahorro-producto interior al intervalo admisible [0, 1], tal valor coincidiría con un máximo relativo de la función

$$\hat{\mathcal{H}}(s) = \mathcal{H}(\psi_{*i+1}, \hat{k}_{*i}, s, i)$$

y, por tanto, sería

$$\hat{\mathcal{H}}'(s_{*,i}) = 0$$

pero también puede ocurrir que el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ se produzca para $s = 0$ ó $s = 1$. Lo que sí podemos asegurar es que tal máximo existe, puesto que $\hat{\mathcal{H}}$ es continua para valores finitos de ψ_{*i+1}, $\hat{k}_{*i}$ y i, y además toma sus valores en el compacto [0, 1]. Aplicando a este problema el teorema de Kuhn-Tucker como hicimos en 3-4, resultará que para que un valor s_{*i} maximice la función $\hat{\mathcal{H}}$ con las restricciones

$$s \leqslant 1$$

y

$$-s \leqslant 0$$

es condición necesaria que existan multiplicadores λ_1 y λ_2, tales que la función

$$L(s, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{\mathcal{H}}(s) + \lambda_1 (1-s) + \lambda_2 s$$

verifique en $s = s_{*,i}$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

y que, además

$$\lambda_1 \geqslant 0, \qquad \lambda_2 \geqslant 0$$

siendo $\lambda_1 = 0$ cuando $s_{*i} < 1$, y $\lambda_2 = 0$ cuando $s_{*i} > 0$. De ello se deduce, al igual que en 3-4, que si el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ tiene lugar para un s_{*i} tal que

$$0 < s_{*l} < 1$$

será en él

$$\frac{\partial L^{\gamma}}{\partial s} = \hat{\mathcal{H}}'(s_{*l}) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$, de donde resultará

$$\hat{\mathcal{H}}'(s_{*l}) = -\left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^l (1+m)^l f(\hat{k}_{*,l})\, u'((1-s_{*l})(1+m)^l f(\hat{k}_{*l})) +$$

$$+ \psi_{*l+1} f(\hat{k}_{*l})(1+\rho+m)^{-l} = 0$$

Si, en cambio el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ tiene lugar en $s = 0$, será

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \hat{\mathcal{H}}' - \lambda_1 + \lambda_2 = \hat{\mathcal{H}}' + \lambda_2 \leqslant 0$$

de donde resulta

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\psi_{*l+1}, \hat{k}_{*l}, 0, 1)}{\partial s} \leqslant -\lambda_2 \leqslant 0$$

es decir, que

$$\psi_{*l+1} f(\hat{k}_{*l})(1+\rho+m)^{-l} \leqslant \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^l (1+m)^l f(\hat{k}_{*l})\, u'((1+m)^l f(\hat{k}_{*l}))$$

desigualdad que, en el plano de fase de coordenadas $\hat{k}$ y ψ, determinaría una región del mismo, tal que cuando el punto (k_l, ψ_{l+1}) se encuentra en ella, el comportamiento óptimo consistirá en consumir en el período l todo lo que se produzca, descapitalizando el sistema al ritmo marcado por su depreciación. Por último, es imposible que el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ se produzca en $s = 1$, puesto que siendo

$$\hat{\mathcal{H}}'(s) = -\left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1+m)^{i} f(\hat{k}_{*i})\, u'((1-s)(1+m)^{i} f(\hat{k}_{*i})) +$$

$$+ \psi_{*i+1} f(\hat{k}_{*i}) (1+\rho+m)^{-1}$$

para $0 \leqslant s \leqslant 1$, y

$$\lim_{c \to 0^+} u'(c) = \infty$$

es

$$\lim_{s \to 1^-} \hat{\mathcal{H}}'(s) = -\infty$$

y, por consiguiente, existirá un $\epsilon > 0$ tal que, para todo s, $1-\epsilon < s < 1$, es $\hat{\mathcal{H}}'(s) < 0$, siendo, por tanto, $\hat{\mathcal{H}}$ estrictamente decreciente en $[1-\epsilon, 1]$, con lo que queda clara la imposibilidad de que $s = 1$ sea un máximo de $\hat{\mathcal{H}}$. En este caso hemos procedido directamente, sin utilizar el teorema de Kuhn-Tucker por no admitir la función $\hat{\mathcal{H}}$ derivada finita por la izquierda en el punto $s = 1$.

La interpretación económica de este resultado es inmediata: la opción $s = 1$ de ahorro total del producto en un cierto año, no puede formar parte de ninguna sucesión de control s_* óptima, al no cumplir la condición necesaria formulada por el principio de máximo.

De estos resultados se deducen las condiciones que necesariamente han de satisfacer las sucesiones óptimas del control, es decir, de la relación ahorro-producto. En primer lugar, la ecuación dinámica del sistema:

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [s_i f(\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m)\hat{k}_i] (1+\rho+m)^{-1}$$

y la ecuación dinámica de las variables auxiliares

$$\psi_{i+1} - \psi_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(\psi_{i+1}, \hat{k}_i, \hat{s}_i, i)}{\partial \hat{k}} =$$

$$= - \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1-s_i)(1+m)^i f'(\hat{k}_i)\, u'((1-s_i)(1+m)^i f(\hat{k}_i)) +$$

$$+ \psi_{i+1} ((s_i f'(\hat{k}_i) - (\delta+\rho+m))(1+\rho+m)^{-1}$$

y, por último, las ecuaciones derivadas de la maximización de la hamiltoniana, que son

$$\psi_{i+1} f(\hat{k}_i)(1+\rho+m)^{-1} - \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i}(1+m)^i f(\hat{k}_i)\, u'((1-s_i)(1+m)^i f(\hat{k}_i)) = 0$$

para los períodos en que el control óptimo es interior a su intervalo admisible y

$$s_i = 0$$

en los demás períodos.

Estas son las condiciones necesarias de optimalidad para el modelo discreto obtenidas a partir de un planteamiento del mismo idéntico al realizado para el modelo continuo. Observemos, sin embargo, que las relaciones que constituyen las condiciones necesarias de optimalidad, obtenidas con vistas a la aplicación de métodos numéricos para la resolución del sistema que forman, resultan bastante largas e incómodas para la realización de cálculos iterativos con ellas. Por esta razón, vamos a separarnos aquí ligeramente del planteamiento de capítulos anteriores, tomando como sucesión de control del problema la del consumo por trabajador efectivo, $\hat{c}_i$, en lugar de la de la relación ahorro-producto s_i, lo que simplifica considerablemente los cálculos como vamos a ver seguidamente.

Como

$$\hat{c}_i = (1 - s_i) f(\hat{k}_i)$$

la ecuación dinámica de la variable de estado se convierte en la

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [f(\hat{k}_i) - \hat{c}_i - (\delta+\rho+m)\hat{k}_i](1+\rho+m)^{-1}$$

en la que la sucesión de los stocks de capital por trabajador efectivo queda determinada por su nivel inicial, $\hat{k}_0$, y la sucesión de los niveles de consumo por trabajador efectivo $\hat{c}_i$, los cuales pueden tomar valores

$$0 \leqslant \hat{c}_i \leqslant f(\hat{k}_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, T-1$$

El funcional objetivo aparece en función del consumo por trabajador real

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u(c_i)$$

pero, al igual que hicimos en páginas anteriores expresándolo en función de $\hat{k}_i$, podemos ahora transformar la expresión en otra equivalente en función de $\hat{c}_i$. Si suponemos, como venimos haciendo hasta ahora a lo largo de este capítulo, que el comienzo del programa de optimización coincide con el origen de tiempos en lo que respecta a la medida del progreso técnico, de manera que, para $i = 0$, es $L_0 = \hat{L}_0$ —más adelante veremos que esta condición no se cumple exactamente en nuestro modelo numérico, con lo que será preciso introducir una pequeña modificación— será, con suficiente aproximación

$$c_i = \frac{C_i}{L_i} = \frac{C_i}{\hat{L}_i} \cdot \frac{\hat{L}_i}{L_i} = \hat{c}_i \left(\frac{1+\rho+m}{1+\rho}\right)^i \cong \hat{c}_i (1+m)^i$$

de manera que el funcional objetivo pasa a ser

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u((1+m)^i \hat{c}_i)$$

Las funciones

$$f^\circ(\hat{k}, \hat{c}, i) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u((1+m)^i \hat{c})$$

y

$$f^1(\hat{k}, \hat{c}) = (f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + \rho + m)\hat{k})(1 + \rho + m)^{-1}$$

también admiten derivadas segundas continuas respecto a $\hat{k}$ y $\hat{c}$, como fácilmente puede probarse aplicando las hipótesis enunciadas para las funciones de producción y utilidad. La hamiltoniana será

$$\mathcal{H}(\psi, \hat{k}, \hat{c}, i) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u((1+m)^i \hat{c}) + \psi(f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta+\rho+m)\hat{k})(1+\rho+m)^{-1}$$

en la que, sustituyendo ψ, $\hat{k}$ y $\hat{c}$ por ψ_{i+1}, $\hat{k}_i$ y $\hat{c}_i$ respectivamente, obtenemos una expresión cuyo primer sumando es la utilidad derivada del consumo por trabajador real en cada período i, ponderada por un índice del crecimiento de la población respecto a la existente en el período inicial y valorada en el instante inicial del programa, y cuyo segundo sumando es la inversión neta del período i, medida en unidades de capital por trabajador efectivo y multiplicada por el precio de la unidad de capital por trabajador efectivo en el período i + 1, medido en unidades de utilidad con valoración en el instante inicial, es decir, es la valoración que en el instante t = 0 se hace, en términos de utilidad, de la inversión neta realizada por trabajador efectivo durante el período i, y que, como se incorpora a la corriente productiva precisamente en el instante inicial del año i + 1 es valorada al precio del capital por trabajador efectivo en este año. Observemos que subsiste en este modelo una falta de homogeneidad de las variables, puesto que la utilidad del primer término es la del consumo por trabajador real, en tanto que la inversión del segundo está medida en unidades por trabajador efectivo. Esta falta de homogeneidad se traducirá, a efectos de cálculo, en un sistema de condiciones necesarias no autónomo, que será preciso modificar mediante transformaciones de las variables similares a las realizadas en el apartado 5 del capítulo anterior para el modelo continuo.

La variable auxiliar, ψ_i, que, como sabemos, representa el precio sombra del capital por trabajador efectivo en el período i, valorado en unidades del funcional objetivo, ha de ser ahora solución de la ecuación en diferencias finitas

$$\psi_{i+1} - \psi_i = - \frac{\partial \mathcal{H} \ (\psi_{i+1}, \hat{k}_i \ \hat{c}_i, i)}{\partial \hat{k}} =$$

$$= \psi_{i+1} \left[f' (\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m) \right] (1 + \rho + m)^{-1}$$

que, como vemos, es más manejable que la correspondiente obtenida al tomar como variable de control la relación ahorro-producto, y además, no depende de $\hat{c}_i$, de forma que, conocidos los parámetros del modelo, y el nivel de capital por trabajador efectivo y su precio sombra en un período i, queda determinado el valor del precio sombra en el período i + 1.

También con esta nueva definición de la variable de control es aplicable a nuestro problema el principio de máximo de Pontryagin, ya que, como vamos a probar, la función $\hat{\mathcal{H}}$ definida por

$$\hat{\mathcal{H}} \ (\hat{c}) = \mathcal{H} \ (\psi, \hat{k}, \hat{c}, i)$$

es estrictamente cóncava, y su dominio de definición es convexo, cualesquiera que sean ψ, $\hat{k}$, e i.

La variable ahorro-producto puede tomar cualquier valor del intervalo [0, 1], y al ser

$$\hat{c}_i = (1 - s_i) \ f (\hat{k}_i)$$

el dominio de $\hat{\mathcal{H}}$ será el intervalo compacto [0, f $(\hat{k})$], que, como todo intervalo, es convexo.

Además, siendo, por definición

$$\hat{\mathcal{H}} \ (\hat{c}) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} u \left((1+m)^{i} \ \hat{c}\right) + \psi \ (f (\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + \rho + m) \ \hat{k}) \ (1 + \rho + m)^{-1}$$

resultará

$$\hat{\mathcal{H}}''(\hat{c}) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1+m)^{2i}\, u''\left((1+m)^{i}\,\hat{c}\right)$$

para todo $\hat{c}$, $0 < \hat{c} \leqslant f(\hat{k})$, cualesquiera que sean $\hat{k}$, ψ e i. Esto implica que $\hat{\mathcal{H}}''(\hat{c}) < 0$ por ser u (c) estrictamente cóncava (la no derivabilidad de $\hat{\mathcal{H}}$ en el punto 0 por la derecha no es obstáculo, pues $\hat{\mathcal{H}}$ es continua en 0 por la derecha), y por tanto, queda probado que $\hat{\mathcal{H}}$ es una función cóncava en sentido estricto.

De todo ello podemos deducir que, si la sucesión $\hat{c}_*$ de la variable de control es la que hace máximo el funcional objetivo entre todas las posibles sucesiones que trasladan el sistema de su estado inicial, $\hat{k}_0$ al final $\hat{k}_T$ previamente fijado, deberá verificar en cada período

$$\mathcal{H}(\psi_{*i+1}, \hat{k}_{*i}, \hat{c}_{*i}, i) \geqslant \mathcal{H}(\psi_{*i+1}, \hat{k}_{*i}, \hat{c}, i)$$

para todo $\hat{c}$, $0 \leqslant \hat{c} \leqslant f(\hat{k}_{*i})$, donde $\hat{k}_{*i}$ es la sucesión de capitales por trabajador efectivo determinada por la sucesión óptima de controles, y ψ_{*i+1} la variable auxiliar correspondiente.

El problema se ha transformado, por tanto, en el de la determinación, para cada período i, del valor $\hat{c}_{*i}$ de la variable de control $\hat{c}$ que verifica las inecuaciones

$$-\hat{c} \leqslant 0$$

y

$$\hat{c} \leqslant f(\hat{k}_i)$$

y tal que hace máximo el valor de la función de $\hat{\mathcal{H}}(\hat{c}) = \mathcal{H}(\psi_{*i+1}, \hat{k}_{*i}, \hat{c}, i)$.

Evidentemente, tal máximo existe, por ser $\hat{\mathcal{H}}$ una función continua de la variable $\hat{c}$ definida en el compacto $[0, f(\hat{k}_i)]$. La aplicación del teorema de Kuhn-Tucker nos proporciona ahora la función

$$L(\hat{c}, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{\mathcal{H}}(\hat{c}) + \lambda_1 \hat{c} + \lambda_2 (f(\hat{k}_l) - \hat{c})$$

y las condiciones necesarias de optimalidad buscadas consisten en que existan λ_1 y λ_2 tales que, para el control óptimo $\hat{c}_{*l}$ se verifique:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{c}} = 0$$

y que además

$$\lambda_1 \geqslant 0, \qquad \lambda_2 \geqslant 0$$

siendo $\lambda_1 = 0$ cuando $\hat{c}_{*l} > 0$ y $\lambda_2 = 0$ cuando

$$\hat{c}_{*l} < f(\hat{k}_{*l})$$

Si el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ tiene lugar para un valor $\hat{c}_{*l}$ interior el intervalo $[0, f(\hat{k}_l)]$, será en él

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{c}} = \hat{\mathcal{H}}'(\hat{c}_{*l}) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

siendo además

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

de donde resulta

$$\hat{\mathcal{H}}'(\hat{c}_{*l}) = 0$$

que es la condición necesaria de máximo para puntos interiores. Pero si el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ se produce en $\hat{c}_{*l} = f(\hat{k}_{*l})$ será necesariamente

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{c}} = \mathcal{H}'(\hat{c}_{*l}) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

con

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 \geqslant 0$$

de donde

$$\hat{\mathcal{H}}'(\hat{c}_{*i}) = \lambda_2 \geqslant 0$$

es decir, que ψ_{*i+1}, $\hat{k}_{*i}$ han de verificar

$$\left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i (1+m)^i\, u'((1+m)^i f(\hat{k}_i)) - \psi_{i+1}(1+\rho+m)^{-1} \geqslant 0$$

o, lo que es lo mismo

$$\psi_{i+1} \leqslant \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i (1+m)^i (1+\rho+m)\, u'((1+m)^i f(\hat{k}_i))$$

Por último es imposible que el máximo de $\hat{\mathcal{H}}$ se produzca en $\hat{c} = 0$ puesto que, siendo

$$\hat{\mathcal{H}}'(\hat{c}) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i (1+m)^i\, u'((1+m)^i \hat{c}) - \psi_{i+1}(1+\rho+m)^{-1}$$

cuando $0 < \hat{c}$ y

$$\lim_{c \to 0^+} u'(c) = \infty$$

es, evidentemente

$$\lim_{c \to 0^+} \hat{\mathcal{H}}'(\hat{c}) = \infty$$

y, consecuentemente, la derivada será estrictamente positiva en un intervalo abierto $]0, \epsilon[$ con $0 < \epsilon < f(\hat{k}_{*i})$ y la función $\hat{\mathcal{H}}$ será estrictamente creciente en $[0, \epsilon]$, con lo que queda patente la imposibilidad de que $\hat{c} = 0$, sea un punto de máximo de la función $\hat{\mathcal{H}}$. Aquí tampoco hemos utilizado el teorema de Kuhn-Tucker por ño admitir la función $\hat{\mathcal{H}}$ derivada lateral finita en $\hat{c} = 0$.

Como en casos anteriores, la interpretación económica asociada a la posibilidad que acabamos de descartar consiste en excluir de toda política óptima la decisión de consumo nulo durante un periodo.

La sucesión de controles óptima deberá satisfacer, por tanto, en cada etapa la condición

$$\hat{\mathcal{H}}' (\hat{c}_l) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^l (1+m)^l u' ((1+m)^l \hat{c}_l) - \psi_{l+1} (1+\rho+m)^{-1} = 0$$

o la

$$\hat{c}_l = f (\hat{k}_l).$$

Con esto ya tenemos las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin que ha de satisfacer la trayectoria óptima. En primer lugar, la ecuación dinámica del sistema, ya estudiada. Además, las variables auxiliares ψ_l, han de satisfacer a la ecuación adjunta en diferencias finitas

$$\psi_{l+1} - \psi_l = - \psi_{l+1} (f' (\hat{k}_l) - (\delta + \rho + m)) (1 + \rho + m)^{-1}$$

de la que se deduce, multiplicando ambos miembros por $(1 + \rho + m)$, y agrupando en el primer miembro los términos que contienen ψ_{l+1} y en el segundo los que contienen ψ_l, la ecuación

$$\psi_{l+1} (f' (\hat{k}_l) + 1 - \delta) = \psi_l (1 + \rho + m)$$

o su equivalente

$$\psi_{l+1} = \psi_l (1 + \rho + m) (f' (\hat{k}_l) + (1 - \delta))^{-1}$$

y sustituyendo este valor de ψ_{l+1} en el segundo miembro de la ecuación en diferencias finitas inicialmente escrita, obtenemos

$$\psi_{l+1} - \psi_l = \psi_l (\delta + \rho + m - f' (\hat{k}_l)) (1 - \delta + f' (\hat{k}_l))^{-1}$$

y, finalmente, las ecuaciones resultantes de la maximización de la hamiltoniana, que son la

$$\left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1+m)^{i}\, u'\,[(1+m)^{i}\,\hat{c}_i] - \psi_{i+1}\,(1+\rho+m)^{-1} = 0$$

en la que, habida cuenta de que la función u' (c) es homogénea de grado $-\eta$ será

$$u'\,[(1+m)^{i}\,\hat{c}_i] = (1+m)^{-\eta i}\, u'\,(\hat{c}_i)$$

con lo que la ecuación resulta ser

$$\left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1+m)^{(1-\eta)i}\, u'\,(\hat{c}_i) = \psi_{i+1}\,(1+\rho+m)^{-1}$$

de la que, tomando una aproximación suficientemente buena para nuestro modelo numérico de la potencia del binomio, obtenemos finalmente la

$$\psi_{i+1} = (1+\rho+m)\,\left(\frac{(1+\rho)\,(1+m-m\eta)}{1+\gamma}\right)^{i} u'\,(\hat{c}_i)$$

para los periodos en que la hamiltoniana se maximiza para algún valor de $\hat{c}_i$ interior a su intervalo admisible y

$$\hat{c}_i = f\,(\hat{k}_i)$$

para los periodos en que el valor máximo de la hamiltoniana se produce para $\hat{c}_i = f\,(\hat{k}_i)$.

Aquí, como en el modelo continuo analizado en 4.5, el inconveniente de este planteamiento es que, como consecuencia de la no homogeneidad de las variables que aparecen en las ecuaciones fundamentales del modelo —consumo por trabajador real en la función de utilidad, y capital por trabajador efectivo en la función de producción— el sistema de condiciones necesarias de optimalidad derivado para el caso en que la hamiltoniana alcanza su óptimo para valores interiores de $\hat{c}_i$

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [f(\hat{k}_i) - \hat{c}_i - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i]\,(1 + \rho + m)^{-1}$$

$$\psi_{i+1} - \psi_i = \psi_i\,[(1 - \delta) + f'(\hat{k}_i)]^{-1}\,(\rho + m + \delta - f'(\hat{k}_i))$$

$$\psi_{i+1} = (1 + \rho + m)\,\left(\frac{(1 + \rho)\,(1 + m - m\eta)}{1 + \gamma}\right)^i\,u'(\hat{c}_i)$$

depende explícitamente del periodo i, en su tercera ecuación. Este hecho complica la realización numérica del modelo, y, sobre todo, dificulta la localización del punto singular del mismo, que es aquel en que

$$\hat{k}_{i+1} = \hat{k}_i \qquad i = 0, 1, \ldots, T$$

y

$$\psi_{i+1} = \psi_i \quad i = 0, 1, \ldots, T - 1$$

razón por la cual vamos a intentar transformar nuestro sistema de condiciones necesarias de optimalidad en otro equivalente a él y que sea autónomo, es decir, que no dependa explícitamente de i.

Empezaremos, para ello, como en los modelos continuos analizados en 4.5, *actualizando los precios sombra representados por las variables auxiliares* ψ_i. Hemos dicho, en efecto, que ψ_i representa el precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo medida en unidades del funcional objetivo, pero éste nos mide la utilidad del consumo por trabajador real valorada en el instante $t = 0$, lo que en nuestro caso significa que, si bien por una parte ha sido descontada en razón de la subvaloración de la utilidad futura respecto a la presente, a tasa anual γ, por otra parte ha sido sobrevaluada a tasa anual ρ, en razón del crecimiento de la población que ha de disfrutar de ella. La actualización del precio sombra, o determinación de su valor corriente en cada periodo i, consiste en deshacer tales correcciones mediante la transformación

$$p_i = \psi_i\,\left(\frac{1 + \gamma}{1 + \rho}\right)^i$$

con lo que las ecuaciones derivadas de las condiciones necesarias de optimalidad toman una nueva forma que pasamos a deducir.

A partir de la ecuación

$$\psi_{i+1} = \psi_i \,(1 + \rho + m)\,(1 - \delta + f'(\hat{k}_i))^{-1}$$

obtenida en la deducción de la ecuación en diferencias finitas adjunta, se obtiene, multiplicando ambos miembros por

$$\left(\frac{1+\gamma}{1+\rho}\right)^{i+1}$$

la expresión

$$p_{i+1} = p_i \,\frac{(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}{1+\rho}\,(1 - \delta + f'(\hat{k}_i))^{-1}$$

y restando p_i a ambos miembros

$$p_{i+1} - p_i = p_i \left(\frac{(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}{1+\rho} - 1 + \delta - f'(\hat{k}_i)\right)\,(1 - \delta + f'(\hat{k}_i))^{-1}$$

que es la transformada de la ecuación adjunta.

Multiplicando ahora los dos miembros de la ecuación de optimalidad, en el caso de que el máximo sea interior, por el factor anteriormente indicado, obtenemos

$$p_{i+1} = \frac{(1+\rho+m)\,(1+\gamma)}{1+\rho}\,(1 + m - m\eta)^i\, u'(\hat{c}_i)$$

En resumen, el sistema de condiciones necesarios de optimalidad, expresado en función de los precios actualizados del capital por trabajador efectivo medidos en unidades de utilidad del consumo por trabajador real está formado por las ecuaciones

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [f(\hat{k}_i) - \hat{c}_i - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i]\,(1 + \rho + m)^{-1}$$

$$p_{i+1} - p_i = p_i\left(\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{1+\rho} - (1-\delta) - f'(\hat{k}_i)\right)[1 - \delta + f'(\hat{k}_i)]^{-1}$$

y las

$$p_{i+1} = \frac{(1+\rho+m)(1+\gamma)}{1+\rho}\,(1 + m - m\eta)^i\,u'(\hat{c}_i)$$

ó

$$\hat{c}_i = f(\hat{k}_i)$$

para los periodos en que la hamiltoniana se hace máxima para soluciones en el interior del intervalo admisible de $\hat{c}_i$ o en su frontera, respectivamente.

Al igual que en los modelos continuos analizados en 4.5, la actualización de los precios sombra nos transforma el sistema de condiciones necesarias de optimalidad en otro equivalente que tampoco es autónomo, puesto que su tercera ecuación depende de i. Este resultado era muy de esperar en cuanto que la mera actualización de los precios no elimina la falta de homogeneidad básica de las variables que aparecen en las ecuaciones, a saber: que $\hat{k}_i$ es el capital por trabajador efectivo, mientras que p_i es el precio sombra, actualizado, del capital por trabajador efectivo, pero medido en unidades de utilidad del consumo por trabajador real.

Procederemos, por tanto, en una segunda etapa, a expresar las variables p_i del sistema en función de los precios de la unidad de capital por trabajador efectivo medidos en unidades de utilidad del consumo por trabajador efectivo, $\hat{p}_i$. En virtud de la homogeneidad, de grado $1 - \eta$, de la función u (c) sabemos que, con suficiente aproximación, es

$$c_i = (1 + m)^i\,\hat{c}_i$$

y, por tanto

$$u\,(c_i) = (1 + m - m\eta)^i\, u\,(\hat{c}_i)$$

de donde resulta que una unidad de utilidad del consumo por trabajador efectivo equivale a $(1 + m - m\eta)^i$ unidades de utilidad del consumo por trabajador real, de manera que, si la sociedad está dispuesta a intercambiar en el periodo i una unidad de capital por trabajador efectivo por p_i unidades de utilidad del consumo por trabajador real, equivalente a $p_i\,(1 + m - m\eta)^{-i}$ unidades de utilidad del consumo por trabajador efectivo, valorará la unidad de capital por trabajador efectivo en

$$\hat{p}_i = \frac{p_i}{(1 + m - m\eta)^i}$$

unidades de utilidad del consumo por trabajador efectivo.

Veamos ahora la forma que adoptan las ecuaciones auxiliar y de optimalidad cuando sustituimos la variable p_i por la $\hat{p}_i$.

Multiplicando los dos miembros de la ecuación, anteriormente obtenida

$$p_{i+1} = p_i\,\frac{(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}{1+\rho}\,(1 - \delta + f'\,(\hat{k}_i))^{-1}$$

por

$$(1 + m - m\eta)^{-(i+1)}$$

obtenemos

$$\hat{p}_{i+1} = \hat{p}_i\,\frac{(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}{(1+\rho)\,(1+m-m\eta)}\,(1 - \delta + f'\,(\hat{k}_i))^{-1}$$

y, restando $\hat{p}_i$ a los dos miembros, queda

$$\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = \hat{p}_i\,\left(\frac{(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}{(1+\rho)\,(1+m-m\eta)} - 1 + \delta - f'\,(\hat{k}_i)\right)\,(1 - \delta + f'\,(\hat{k}_i))^{-1}$$

que es la nueva ecuación auxiliar en diferencias finitas.

Análogamente, multiplicando por

$$(1 + m - m\eta)^{-(i+1)}$$

los dos miembros de la ecuación de optimalidad —en el caso de máximo interior— obtenemos

$$\hat{p}_{i+1} = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)}\, u'(\hat{c}_i)$$

que es la nueva ecuación de optimalidad para los periodos en los que la hamiltoniana alcanza su máximo en valores de $\hat{c}_i$ interiores a su intervalo admisible. Esta ecuación representa, una vez más, la igualdad entre el precio de oferta de la unidad de capital por trabajador efectivo en el periodo i + 1 —a la que los oferentes estarán dispuestos a renunciar al precio que, al menos, les remunere de la pérdida de utilidad correspondiente, calculada sobre el periodo i, último del que tienen referencia directa— con el de demanda, o precio sombra de dicha unidad de capital. El factor

$$\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)}$$

que aparece en la expresión tiene por origen el hecho de que, estando referidos ambos miembros de la igualdad a periodos de tiempo diferentes, con la consiguiente alteración en las unidades de medida, es preciso introducir una corrección, que es la realizada por el citado factor. En efecto, deshaciendo la doble transformación efectuada para actualizar y homogeneizar las variables, es decir, haciendo

$$\hat{p}_i = \frac{\psi_i (1+\gamma)^i}{(1+\rho)^i (1+m-m\eta)^i}$$

obtendríamos la ecuación primitiva

$$\psi_{i+1} = \left(\frac{(1+\rho)(1+m-m\eta)}{1+\gamma}\right)^i (1+\rho+m)\, u'(\hat{c}_i)$$

que, con la aproximación habitual es

$$\psi_{i+1} = (1 + \rho + m) \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} (1 + m)^{i} u' (c_i)$$

que nos expresa la igualdad entre el precio de demanda de la unidad de capital por trabajador efectivo en el periodo i + 1 medida en unidades de utilidad del consumo por trabajador real valorada en t = 0 y el precio de oferta de la unidad de capital por trabajador efectivo, descontada al instante t = 0, habida cuenta de que una unidad de capital por trabajador efectivo en el periodo i es equivalente a $(1 + m)^i$ unidades de capital por trabajador real en el mismo periodo, y que, por otra parte, la corrección a efectuar dado el cambio de unidades de medida al pasar de un periodo al siguiente viene adecuadamente realizada por el factor $(1 + \rho + m)$.

Expresadas, pues, las variables $\hat{k}_i$, $\hat{c}_i$ y $\hat{p}_i$ en las mismas unidades por trabajador efectivo, las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin resultan ser las

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [f(\hat{k}_i) - \hat{c}_i - (\delta + \rho + m) \hat{k}_i] (1 + \rho + m)^{-1}$$

$$\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = \hat{p}_i \left(\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta) - f'(\hat{k}_i)\right) (1 - \delta + f'(\hat{k}_i))^{-1}$$

y

$$\hat{p}_{i+1} = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} u'(\hat{c}_i)$$

ó

$$\hat{c}_i = f(\hat{k}_i)$$

según que, *en el periodo en cuestión*, el máximo de la hamiltoniana se verifique para un $\hat{c}_i$ interior al intervalo $[0, f(\hat{k}_i)]$ ó para $\hat{c}_i = f(\hat{k}_i)$. Finalmente hemos obtenido un sistema de condiciones necesarias que no depende explícitamente de i.

Este sistema puede escribirse también en la forma

$$\hat{k}_{i+1} = [f(\hat{k}_i) - \hat{c}_i + (1 - \delta)\hat{k}_i](1 + \rho + m)^{-1}$$

$$\hat{p}_{i+1} = \hat{p}_i \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} [(1-\delta) + f'(\hat{k}_i)]^{-1}$$

$$\hat{c}_i = u'^{-1} \frac{(1+\rho)(1+m-m\eta)}{(1+\gamma)(1+\rho+m)} \hat{p}_{i+1}$$

ó

$$\hat{c}_i = f(\hat{k}_i)$$

donde u'^{-1} es la función inversa de u', cuya existencia y continuidad están garantizadas por la continuidad y decrecimiento monótono de u' (c). Las dos primeras ecuaciones fueron obtenidas en párrafos anteriores, y la tercera se deduce de forma inmediata de su equivalente anteriormente expresada.

La ventaja de escribir las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin en este nuevo formato estriba en que permiten la aplicación directa de un método de recurrencia con el que, para cada valor inicial $(\hat{k}_0, \hat{p}_0)$ en el plano de fase y para cada T el sistema determina una y solo una solución de las condiciones necesarias de optimalidad. Efectivamente, $\hat{k}_0$ y $\hat{p}_0$ determinan de manera única el valor de $\hat{p}_1$ en la segunda ecuación, y como *la hamiltoniana en el periodo cero es función de* $\hat{c}$, $\hat{k}_0$ y ψ_1, es decir, de $\hat{c}$, $\hat{k}_0$ y $\hat{p}_1$, el conocimiento de estos dos últimos valores nos permitirá determinar el único valor $\hat{c}_0$ que hace máxima a la función $\hat{\mathcal{H}}$ definida en $[0, f(\hat{k}_0)]$ por

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{c}) = \mathcal{H}(\psi_1, \hat{k}_0, \hat{c}, 0)$$

valor que existe por ser $\hat{\mathcal{H}}$ continua en un compacto y que es único por ser $\hat{\mathcal{H}}$ estrictamente cóncava, y que vendrá definido por una de las dos alternativas de la tercera ecuación. Conocido el valor de $\hat{c}_0$ solución de las condiciones necesarias de optimalidad, es decir, la política óptima a seguir durante el periodo cero —que, como vemos, viene afectado por el *precio sombra del capital por trabajador efectivo* en el periodo uno— este dato, juntamente con el stock de capital por trabajador efectivo inicial, nos determina, a través de la primera ecuación, el valor de $\hat{k}_1$

de manera única. Conocidos $\hat{k}_1$ *y* $\hat{p}_1$*, repetiremos el mismo* proceso para determinar $\hat{p}_2$, $\hat{c}_1$ y $\hat{k}_2$, y así continuaremos hasta haber recorrido las T etapas del programa, al cabo de las cuales tendremos determinadas de manera única las sucesiones

$$\hat{k}_0, \hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_T$$

$$\hat{p}_0, \hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_T$$

y

$$\hat{c}_0, \hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_{T-1}$$

solución de las condiciones necesarias de optimalidad para las condiciones iniciales $\hat{k}_0$, $\hat{p}_0$ dadas.

Con cualquiera de estos dos sistemas equivalentes en que se traducen, *de forma autónoma*, las condiciones necesarias de optimalidad, podemos esbozar un primer análisis del comportamiento de las sucesiones solución. Por ejemplo, a partir del primero de ellos obtendremos con facilidad los valores $\hat{k}^*$ y $\hat{p}^*$ del punto singular del sistema que, aparte de su interés *en sí mismo y de constituir un* punto de referencia en cuanto a la evolución de las distintas sucesiones óptimas buscadas, constituirá como veremos en posteriores apartados una valiosa ayuda en la determinación de las sucesiones numéricas óptimas.

Pero antes de analizar la localización del citado punto singular, es decir, del punto $(\hat{k}^*, \hat{p}^*)$ del plano de fase tal que las sucesiones de valores $\hat{k}_i$, $\hat{p}_i$, que verifican

$$\hat{k}_i = \hat{k}^* \quad i = 0, 1, \ldots, T$$

y

$$\hat{p}_i = \hat{p}^* \quad i = 0, 1, \ldots, T$$

satisface las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin anteriormente establecidas, vamos a ver, en primer lugar, cuales son, de acuerdo con las ecuaciones *en diferencias finitas* en que se traducen estas condiciones, las curvas del plano de fase constituidas por el conjunto de los puntos del mismo tales que cuando una sucesión de valores $\hat{k}_i$, $\hat{c}_i$, $\hat{p}_i$, que sea solución de las condiciones necesarias de optimalidad, tome en algún periodo valores $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ coincidentes con alguno de ellos, verifique

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = 0$$

ó

$$\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = 0$$

para ese periodo *i*.

La ecuación de la curva que deja invariantes durante un periodo i los precios sombra de toda trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad que tenga el punto $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ sobre ella de manera que $\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = 0$, se deduce de forma similar a la empleada en 3.5, haciendo $\hat{p}_{i+1} = \hat{p}_i$ en la ecuación dinámica de los precios sombra, y resulta ser la

$$f'(\hat{k}) = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta)$$

que no depende de los precios sombra y que, siendo $f'(\hat{k})$ estrictamente decreciente, posee una solución y solamente una, $\hat{k}^*$, siempre que

$$\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta) > 0$$

lo que, acotando el numerador del primer miembro de la anterior desigualdad por

$$(1+\gamma)(1+\rho+m) - (1-\delta)(1+\rho)(1+m-m\eta) \geqslant 1+\rho+m -$$

$$-(1+\rho)(1+m-m\eta) = m(\eta-\rho+\rho\eta) > m(\eta-\rho) > 0$$

ocurre siempre que

$$\eta > \rho$$

—condición que, por otra parte, satisfacen todos los casos considerados en nuestro modelo numérico—. Tenemos así que la curva que mantiene constantes durante un periodo los precios sombra de toda trayectoria solución de las condiciones necesarias de optimalidad que incide en ella, es la recta de ecuación

$$\hat{k} = \hat{k}^*$$

Escribiendo la ecuación dinámica de la evolución de los precios sombra en la forma

$$\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = \hat{p}_i \, (f'(\hat{k}^*) - f'(\hat{k}_i)) \, (1 - \delta + f'(\hat{k}_i))^{-1}$$

o, equivalentemente

$$\frac{\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i}{\hat{p}_i} = \frac{f'(\hat{k}^*) - f'(\hat{k}_i)}{1 - \delta + f'(\hat{k}_i)} = -1 + \frac{f'(\hat{k}^*) + 1 - \delta}{f'(\hat{k}_i) + 1 - \delta}$$

podemos determinar fácilmente la variación de los precios sombra en cada uno de los semiplanos definidos por la recta

$$\hat{k} = \hat{k}^*$$

A la derecha de esta recta, es decir, para los valores de $\hat{k}$ tales que

$$\hat{k} > \hat{k}^*$$

será

$$f'(\hat{k}) < f'(\hat{k}^*)$$

y, por consiguiente

$$\hat{p}_{i+1} > \hat{p}_i$$

y además el aumento relativo de los precios sombra es tanto mayor cuanto más alejado esté $\hat{k}_i$ de $\hat{k}^*$, creciendo precisamente en el intervalo

$$\left] 0, \frac{f'(\hat{k}^*)}{1-\delta} \right[$$

Tenemos así que, cuando una sucesión óptima toma, en alguna etapa, un valor $\hat{k}_i$ mayor que $\hat{k}^*$, el precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo aumentará, y el aumento relativo será tanto mayor cuanto más alejado esté $\hat{k}_i$ de $\hat{k}^*$. Si, por el contrario, ocurre que

$$\hat{k} < \hat{k}^*$$

es decir, que el valor en un instante de un término de una sucesión óptima se encuentra a la izquierda de la recta citada, será

$$\hat{p}_{i+1} < \hat{p}_i$$

y el aumento relativo de los precios sombra decrece tomando todos los valores del intervalo $]-1, 0[$.

La curva formada por los puntos $(\hat{k}, \hat{p})$ tales que toda terna $\hat{k}_i$, $\hat{c}_i$, $\hat{p}_i$ de sucesiones óptimas que en alguna etapa cumpla $\hat{k}_i = \hat{k}$, $\hat{p}_i = \hat{p}$ verifique

$$\hat{k}_{i+1} = \hat{k}_i$$

deberá cumplir la ecuación

$$f(\hat{k}) - \hat{c} - (\delta + \rho + m)\hat{k} = 0$$

siendo $\hat{c} = \hat{c}_i$ el consumo por trabajador efectivo óptimo en la etapa i en la que, $\hat{k}_i = \hat{k}$, $\hat{p}_i = \hat{p}$. De la anterior ecuación obtenemos

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (\delta + \rho + m)\hat{k} \leqslant f(\hat{k})$$

verificándose la igualdad cuando y solamente cuando $\hat{k} = 0$, caso trivial desde el punto de vista matemático y carente de interés desde el económico, por lo que podemos suponer

$$\hat{c} < f(\hat{k})$$

siendo entonces el valor del control óptimo un punto interior y verificándose

$$\hat{p}_{I+1} = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} u'(\hat{c})$$

de manera que la eliminación de $\hat{c}$ y $\hat{p}_{I+1}$ entre las dos últimas ecuaciones escritas y la

$$\hat{p}_{I+1} = \hat{p}\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)}(1-\delta+f'(\hat{k}))^{-1}$$

da lugar a

$$\hat{p}(1-\delta+f'(\hat{k}))^{-1} = u'(f(\hat{k})-(\delta+\rho+m)\hat{k})$$

o equivalentemente

$$\hat{p} = (1-\delta+f'(\hat{k}))\, u'(f(\hat{k})-(\delta+\rho+m)\hat{k}))$$

que es la ecuación de la curva buscada. El dominio de la variable $\hat{k}$ en la curva anterior vendrá definido por la inecuación

$$\hat{k} > 0$$

y la

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (\delta+\rho+m)\hat{k} \geqslant 0$$

que equivale a

$$f(\hat{k}) \geqslant (\delta+\rho+m)\hat{k}$$

o, lo que es lo mismo

$$\hat{k} \leqslant \hat{\bar{k}}$$

es decir, es el intervalo $]0, \hat{k}]$. La mencionada curva está situada, además, como hemos visto en la región del ahorro no nulo.

Las trayectorias óptimas que, en una etapa dada tengan su $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ situado por encima de esta curva en el plano fase verificarán que

$$\hat{p}_i = (1 - \delta + f'(\hat{k}_i))\, u'(\hat{c}_i) > (1 - \delta + f'(\hat{k}_i))\, u'(f(\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i)$$

con lo que, siendo u' una función estrictamente decreciente, y el número

$$1 - \delta + f'(\hat{k}_i) > 0$$

tenemos que

$$\hat{c}_i < f(\hat{k}_i) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i$$

valor que *sustituido en la ecuación de transición nos da*

$$\hat{k}_{i+1} > \hat{k}_i$$

de manera que el stock de capital por trabajador efectivo aumentará durante el periodo. Si, por el contrario, una trayectoria óptima tiene en una etapa dada su $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ por debajo de la curva señalada en el plano fase, un razonamiento similar nos indica que

$$\hat{k}_{i+1} < \hat{k}_i$$

y su capital por trabajador efectivo disminuye en ese periodo. Para cada valor de la relación capital-trabajo efectivo, $\hat{k}_i$, el volumen de su variación en el periodo a lo largo de una sucesión óptima depende del correspondiente valor de p_i, siempre que las circunstancias sean tales que el máximo de la hamiltoniana se produzca en valores interiores del intervalo admisible de $\hat{c}_i$. Pues en este caso es

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = (1 + \rho + m)^{-1}\,(f(\hat{k}_i) \;-(\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i - u'^{-1}\,((1 - \delta + f'(\hat{k}_i))^{-1}\,\hat{p}_i)$$

y un incremento del precio sombra se traduce en un aumento de la diferencia $\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i$ si es positiva, y en una reducción en su valor absoluto si es negativa, mientras que una disminución del precio sombra determina en el incremento del capital por trabajador efectivo consecuencias opuestas, de manera que la velocidad de variación del nivel de capital por trabajador efectivo —variación en sentido positivo cuando $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ está por encima de la curva de los $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+1}$ y en sentido negativo si está por debajo— aumenta a medida que $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ está más lejos del punto intersección de la curva de los $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+1}$ con la recta $k = \hat{k}_i$; éste resultado, similar al obtenido en los modelos continuos analizados en anteriores capítulos, era muy de esperar, puesto que también en este modelo, mientras el estado del sistema sea tal que la hamiltoniana se maximice para valores interiores de $\hat{c}_i$, un incremento del precio sombre del capital en un periodo i, se traduce en una reducción del consumo óptimo por trabajador efectivo del sistema en el mismo periodo como se deduce de la ecuación que relaciona ambas variables.

Si, por el contrario, el sistema se encuentra en un estado tal que la decisión óptima, es decir, la que maximiza el valor de la hamiltoniana en ese instante, es la de consumir la totalidad del producto

$$\hat{c}_i = f(\hat{k}_i)$$

la velocidad de disminución del stock de capital por trabajador efectivo depende exclusivamente de su nivel corriente, ya que

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = -(\delta + \rho + m)\, \hat{k}_i\, (1 + \rho + m)^{-1}$$

y su correspondiente precio sombra no juega, por tanto, ningún papel en la evolución del stock de capital.

Como el consumo por trabajador efectivo $\hat{c}_i$ cumple

$$\hat{c}_i \leqslant f(\hat{k}_i)$$

y la igualdad entre los precios de oferta y demanda del capital supone que

$$\hat{p}_i = (1 - \delta + f'(\hat{k}_i))\, u'(\hat{c}_i)$$

esta igualdad solo puede verificarse si

$$p_i \geqslant (1 - \delta + f'(\hat{k}_i))\, u'(f(\hat{k}_i))$$

donde, una vez más, hemos utilizado el hecho de ser u′ (c) decreciente y $1 - \delta + f'(\hat{k}_i)$ positivo.

La curva de ecuación

$$\hat{p} = (1 - \delta + f'(\hat{k}))\, u'(f(\hat{k}))$$

tiene, pues, la propiedad de que la igualdad entre los precios de oferta y demanda del capital, solo puede producirse por encima de ella y hace por tanto el papel de curva separatriz entre la región del plano de fase para cuyos puntos $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ la decisión óptima consiste en ahorrar parte del producto, que es la

$$\hat{p} > (1 - \delta + f'(\hat{k}))\, u'[f(\hat{k})]$$

y aquella en la cual la decisión óptima es la del consumo total, que es la

$$\hat{p} < (1 - \delta + f'(\hat{k}))\, u'[f(\hat{k})]$$

Al igual que en el modelo continuo, la curva separatriz es monótonamente decreciente, pues

$$\hat{p}'(\hat{k}) = f''(\hat{k})\, u'(f(\hat{k})) + (1 - \delta + f'(\hat{k}))\ f'(\hat{k})\ u''(f(\hat{k}) < 0$$

en virtud de nuestras hipótesis, las cuales nos aseguran además que

$$\lim_{\hat{k} \to 0^+} \hat{p}(\hat{k}) = \infty$$

y

$$\lim_{\hat{k} \to \infty} \hat{p}(\hat{k}) = 0$$

De lo anteriormente expuesto se deduce que, de forma parecida a como ocurría en los modelos de crecimiento óptimo expresados en forma continua, las dos curvas que mantienen $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+1}$ o $\hat{p}_i = \hat{p}_{i+1}$ en una sucesión óptima, y que, evidentemente, se cortan en un sólo punto, ya que una de ellas es una recta paralela al eje de ordenadas en tanto que la otra es una función $\hat{p} = \varphi(\hat{k})$ nos dividen el plano fase en cuatro regiones, de manera que la evolución de cualquier sucesión óptima en un periodo dado i viene indicada por la situación de sus variables fundamentales respecto a dichas curvas. Así, por ejemplo, si $\hat{k}_i > \hat{k}^*$, será $\hat{p}_{i+1} > \hat{p}_i$, en tanto que si $\hat{k}_i < \hat{k}^*$ es $\hat{p}_{i+1} < \hat{p}_i$. Y el mismo valor $\hat{k}_i$, juntamente con el $\hat{p}_i$ correspondiente, determinan la evolución del capital por trabajador efectivo en el periodo, pues si el punto $(\hat{k}_i, \hat{p}_i)$ está por encima de la curva de las $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+1}$ será $\hat{k}_{i+1} > \hat{k}_i$, mientras que si está por debajo, será $\hat{k}_{i+1} < \hat{k}_i$.

De esta forma, podríamos intentar obtener también para el modelo discreto una visión geométrica aproximada de la evolución de las sucesiones óptimas. Pero tal resultado no alcanzaría en este caso la importancia que tenía en los modelos continuos —en los que constituía prácticamente toda la información obtenible acerca del problema— pues la posibilidad en el modelo discreto de determinar los valores numéricos de las variables fundamentales para cada sucesión óptima nos proporciona unos resultados que sustituyen con ventaja al análisis geométrico.

5.3. El punto singular

El punto intersección de las curvas que dejan por un periodo $\hat{k}_i = \hat{k}_{i+1}$ y $\hat{p}_i = \hat{p}_{i+1}$ en las trayectorias óptimas es el $(\hat{k}^*, \hat{p}^*)$ tal que

$$f'(\hat{k}^*) = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - 1 + \delta$$

y

$$\hat{p}^* = (1 - \delta + f'(\hat{k}^*))\, u'(f(\hat{k}^*) - (\delta + \rho + m)\hat{k}^*)$$

y es el punto de equilibrio del sistema de ecuaciones en diferencias finitas dado por las condiciones necesarias de optimalidad, en el sentido de que toda sucesión que, tomando en algún periodo i los valores $\hat{k}_i = \hat{k}^*$ y $\hat{p}_i = \hat{p}^*$ satisfaga dichas condiciones, permanecerá en ese punto durante todo el intervalo de planificación.

El mantenimiento del sistema en el punto singular requiere una decisión respecto al consumo que será la que verifique las condiciones necesarias de optimalidad para $\hat{k}_i = \hat{k}^*$, y $\hat{p}_i = \hat{p}^*$, es decir, la

$$\hat{c}_i^* = f(\hat{k}^*) - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}^* = \hat{c}^*$$

que, como vemos, es también constante durante todo el intervalo de planificación. Tal decisión deberá ser admisible, verificando

$$0 \leqslant \hat{c}^* \leqslant f(\hat{k}^*)$$

La relación $\hat{c}^* \leqslant f(\hat{k}^*)$ es evidentemente satisfecha en cualquier caso. La $c^* \geqslant 0$ se cumple si y solo si

$$\hat{k}^* \leqslant \bar{\hat{k}}$$

lo que, siendo

$$f'(\bar{\hat{k}}) < \delta + \rho + m$$

está asegurado siempre que

$$\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta) \geqslant \delta + \rho + m$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{1+\gamma}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} \geqslant 1$$

Observemos que, en el modelo discreto objeto de nuestro estudio, al igual que en los continuos estudiados en el capítulo anterior, el funcional objetivo puede expresarse en función del consumo por trabajador efectivo de la forma

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u\left((1+m)^i\,\hat{c}_i\right) = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{(1+\rho)(1+m-m\eta)}{1+\gamma}\right)^i u(\hat{c}_i)$$

con lo que la expresión

$$\frac{1+\gamma}{(1+\rho)(1+m-m\eta)}$$

factor de descuento temporal cuando el funcional objetivo y la variable de estado se expresan en unidades de medida homogeneas, puede ser considerado como la unidad más la "tasa natural de interés anual". La condición de que dicho factor sea mayor que 1, de manera que determine efectivamente un descuento temporal de la utilidad, o al menos su neutralidad, pero no una sobrevaloración temporal de ella es precisamente la

$$\frac{1+\gamma}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} \geqslant 1$$

que es la que nos garantiza la existencia de una solución óptima en el punto singular del sistema.

La sucesión cuyos valores de $\hat{k}$ y $\hat{p}$ coinciden en cada etapa con los del punto singular, satisface las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del *principio de máximo* de Pontryagin, y se caracteriza además porque mantiene constantes durante todo el periodo de planificación las variables económicas del modelo expresadas en unidades por trabajador efectivo, lo que equivale a decir que sus variables económicas, expresadas en *términos absolutos, crecen a la misma tasa* anual que el trabajo efectivo, es decir, a la tasa ρ + m, que será, por tanto la "tasa natural de crecimiento anual". Esta sucesión es, por tanto, de entre todas las que constituyen un crecimiento armónico, o en edad de oro, del sistema, aquella que sigue precisamente la regla de oro modificada.

CAPITULO VI

ELEMENTOS Y COMPUTO DEL MODELO

6.1. Las funciones

6. 1. 1. Relaciones a determinar.

Planteado el modelo de crecimiento óptimo discreto en el anterior capítulo queremos ahora utilizarlo para obtener sucesiones numéricas óptimas de acumulación de capital relativas a la actual situación de la economía española. Para ello tenemos que concretar, sobre el modelo analizado de forma general en 5. 1, la estructura de las relaciones funcionales que ligan entre sí a las variables fundamentales de la economía, y el valor de los parámetros que aparecen en estas relaciones, de manera que el modelo represente con la mayor aproximación posible — dentro de las limitaciones impuestas por sus hipótesis simplificadoras — la realidad económica actual de nuestro país.

En lo que respecta a las relaciones funcionales entre las variables del modelo, comenzaremos recordando que la estructura de la mayor parte de ellas ha sido fijada ya de manera única al especificar los supuestos del mismo— tal es, por ejemplo, el caso de la función de crecimiento de la población, o de la depreciación —, y las dos únicas cuya forma no ha sido totalmente determinada en el modelo— que son la función de producción y la de utilidad del consumo— han de elegirse de manera que satisfagan las restricciones impuestas por las hipótesis de éste con lo que el conjunto de opciones queda considerablemente reducido.

6. 1. 2. La función de producción.

Determinemos en primer lugar una función de producción, con progreso técnico potenciador del trabajo, rendimientos constantes a escala respecto a las variables capital y trabajo, y que además satisfaga las condiciones de buen comportamiento de Inada expuestas en 2. 2. 1. Se acepta universalmente en la literatura económica que, de entre todas las posibles funciones de producción seleccionables, para representar el proceso real de la producción, las más adecuadas son las del tipo C.E.S., es decir, las que tienen una elasticidad de sustitución entre los factores constante (*). Pero para que una función de producción con elasticidad de sustitución constante satisfaga las condiciones de Inada es necesario que dicha elasticidad de sustitución sea precisamente igual a 1, (**) con lo que resulta que la función de producción más apropiada a nuestro modelo será una de tipo Cobb–Douglas, con progreso técnico.

Como vimos en el capítulo anterior, las funciones Cobb–Douglas tienen, además, la propiedad de incluir el progreso técnico de forma tal que éste resulta a la vez neutral en el sentido de Hicks y de Harrod –condición esta última esencial en nuestro modelo, pues hace compatible el progreso técnico con el crecimiento armónico de la economía – de manera que puede expresarse como potenciador de la mano de obra.

Por último, solamente nos falta imponer a nuestra función de producción la condición de rendimientos constantes a escala en K y L, lo que en una función Cobb–Douglas supone que la suma de las elasticidades parciales del producto respecto a cada una de los factores L y K sea precisamente igual a 1.

(*) Véase "Capital–labour Substitution and Economic Efficiency" de K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas y R. M. Solow, en Review of Economics and Statistics, Vol. 43, Agosto, 1.961.

(**) J. Segura "Función de producción, macro–distribución y desarrollo", Tecnos 1.969

De todo ello se deduce que la función de producción más apropiada para nuestro modelo será de la forma

$$y = e^{\mu t} K^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

que, escrita de manera que el progreso técnico aparezca como potenciador del trabajo, será

$$y = \Gamma K^{\alpha} \left(L e^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} = \Gamma K^{\alpha} (L e^{m})^{1-\alpha} = \Gamma K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

donde $m = \frac{\mu}{1-\alpha}$ es la tasa de potenciación del trabajo por efecto del citado progreso técnico.

6. 1. 3. La función de utilidad.

La segunda relación funcional a especificar es la de la utilidad derivada del consumo. Es esta una elección algo arriesgada, en la que de manera evidente incide toda la problemática en torno a la medida del bienestar. Pero en nuestro modelo, tal elección viene ya fuertemente condicionada, no solamente por las hipótesis de no negatividad, crecimiento y concavidad habitualmente impuestas a esta relación, sino además, por la condición en el límite

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$$

que descarta la posibilidad de consumo nulo en una trayectoria óptima y la homogeneidad de grado $-\eta$, de la función $u'(c)$ que, como vimos en el capítulo anterior, se traduce en una elasticidad constante, $1-\eta$, tal que

$$0 < 1-\eta \leq 1$$

respecto al consumo, y permite realizar el cambio de variables que transforma al sistema de condiciones necesarias de optimalidad inicial, no autónomo, en otro equivalente, autónomo.

Una función de utilidad frecuentemente utilizada en los análisis económicos que requieren precisamente estas hipótesis (*) es la

$$u\ (c) = \frac{1}{1-\eta}\ c^{1-\eta}$$

que, efectivamente, satisface las condiciones pedidas, pues está definida para todo $c \geqslant 0$, y es, para estos valores

$$u\ (c) \geqslant 0$$

y

$$u'\ (c) = c^{-\eta} > 0$$

$$u''(c) = -\eta\, c^{-(\eta+1)} < 0$$

además, verifica

$$u\ (0) = 0$$

y

$$\lim_{c \to 0} u'\ (c) = \lim_{c \to 0} c^{-\eta} = \infty$$

$$\lim_{c \to \infty} u'\ (c) = \lim_{c \to \infty} c^{-\eta} = \infty$$

siendo, por otra parte, u' (c) una función homogenea de grado $-\eta$; y su elasticidad respecto al consumo es, naturalmente

$$u'\ (c)\ .\ \frac{c}{u} = c^{-\eta}\ .(1-\eta)\frac{c}{c^{1-\eta}} = 1-\eta$$

(*) Así, por ejemplo, en D. Kendrick y L. Taylor "Numerical Methods and Nonlinear Optimizing Models for Economic Planning" en Studies in Development Planning, ed H. B. Chenery, Harward University Press 1.971, o en S. Chakravarty, "Optimal savings with finite planning horizon" op. cit. .

de manera que esta es la función de utilidad del consumo por trabajador real que vamos a adoptar para nuestro modelo.

6.1.4. Las condiciones de optimalidad.

Seleccionadas las funciones de producción y de utilidad del consumo anteriormente indicadas, la función de producción respecto al capital por trabajador efectivo es, para cada periodo i, la

$$f(\hat{k}_i) = \frac{\Gamma K_i^{\alpha} \hat{L}_i^{1-\alpha}}{\hat{L}_i} = \Gamma \hat{k}_i^{\alpha}$$

y la ecuación dinámica de evolución del capital por trabajador efectivo será, por tanto, la

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = [\Gamma \hat{k}_i^{\alpha} - \hat{c}_i - (\delta + \rho + m) \hat{k}_i] (1 + \rho + m)^{-1}$$

o su equivalente, la

$$\hat{k}_{i+1} = [\Gamma \hat{k}_i^{\alpha} - \hat{c}_i - (\delta - 1)\hat{k}_i] (1 + \rho + m)^{-1}$$

La hamiltoniana del sistema será la

$$\mathcal{H} = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i \cdot \frac{1}{1-\eta} \cdot c_i^{1-\eta} + \psi_{i+1} (\Gamma \hat{k}_i^{\alpha} - \hat{c}_i - (\delta + \rho + m) \hat{k}_i) (1 + \rho + m)^{-1}$$

y la aplicación del principio de máximo de Pontryagin proporciona unas condiciones necesarias de optimalidad que, particularizadas para las funciones de producción y utilidad elegidas, y, transformadas adecuadamente las variables ψ_i en las $\hat{p}_i$, que representan precios sombra medidos en unidades por trabajador efectivo, resultan ser las

$$\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i = \hat{p}_i \quad \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - 1 + \delta - \alpha\Gamma \hat{k}^{\alpha-1}$$

o su equivalente

$$\hat{p}_{i+1} = \hat{p}_i \frac{(1+\rho+m)(1+\gamma)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} \quad (1-\delta+\alpha\Gamma\hat{k}_i^{\alpha-1})^{-1}$$

y la resultante de la maximización de la hamiltoniana, que es una de las

$$\hat{c}_i^{-\eta} = \hat{p}_{i+1} \quad \frac{(1+\rho)(1+m-m\eta)}{(1+\gamma)(1+\rho+m)}$$

ó

$$\hat{c}_i = \Gamma \hat{k}_i^{\alpha}$$

La curva separatriz entre ambas regiones es ahora la

$$\hat{p} = (1-\delta+\alpha\Gamma\hat{k}^{\alpha-1}) \quad (\Gamma\hat{k}^{\alpha})^{-\eta}$$

y el punto singular del sistema tendrá en el plano de fase coordenadas $\hat{k}_*$ y $\hat{p}_*$ tales que

$$\hat{k}^* = \left(\frac{1}{\alpha\Gamma} \left(\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - 1 + \delta\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y

$$\hat{p}^* = \frac{(1+\rho+m)(1+\gamma)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} \quad [\Gamma\hat{k}^{*\alpha} - (\delta+\rho+m)\hat{k}^*]^{-\eta}$$

con un valor constante del consumo por trabajador efectivo igual a

$$\hat{c}^* = \Gamma\hat{k}^{*\alpha} - (\delta+\rho+m)\hat{k}^*$$

6.2. Los parámetros

6. 2. 1. Su determinación.

Para la elaboración numérica del modelo de crecimiento óptimo de la economía española, es preciso determinar unos valores concretos para los parámetros del mismo de manera que nos proporcionen una visión lo más ajustada posible a la realidad económica española actual. Paso seguidamente a exponer los métodos de estimación que he utilizado en cada caso y las fuentes estadísticas de donde he obtenido las series de datos empleados, así como las hipótesis adoptadas con el fin de completar o adaptar la información existente a los fines de este trabajo.

La selección de métodos y criterios se ha realizado teniendo siempre en cuenta la estructura del modelo en que los datos van a ser utilizados, y éstos se han obtenido, en la medida de lo posible, de fuentes fidedignas, avaladas por los organismos más cualificados del país en lo que respecta a estadísticas. No obstante, soy bien consciente del riesgo que toda selección de un criterio implica. Por otra parte, las series de datos disponibles son, en general, cortas, y su fiabilidad se reduce notablemente para los datos anteriores a 1.954, fecha en que el Instituto Nacional de Estadística comenzó a elaborar la Contabilidad Nacional. Todo lo cual impone algunas inevitables limitaciones en la fiabilidad de los resultados de este modelo.

6. 2. 2. La función de producción.

La función de producción seleccionada para este modelo es como hemos visto una de tipo Cobb–Douglas, con progreso técnico, y homogénea de grado uno en las variables K y L, es decir, una función de la forma,

$$Y = \Gamma e^{\mu t} K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

que escrita en la forma alternativa

$$Y = \Gamma\ K^{\alpha}\ (L\ e^{\frac{\mu}{1-\alpha}})^{1-\alpha} = \Gamma\ K^{\alpha}\ (L\ e^{m})^{1-\alpha}$$

nos proporcionará α y $m = \frac{\mu}{1-\alpha}$ como elasticidad del producto respecto al capital, y tasa de progreso técnico potenciador del trabajo respectivamente.

No he conseguido encontrar estimaciones actuales de una función Cobb—Douglas para la economía española que reunan las condiciones indicadas, pues las estimaciones publicadas recientemente, y que den opción a la existencia de progreso técnico, no están sometidas a la restricción de que la suma de las elasticidades parciales del trabajo y del capital sea precisamente uno, con lo que la función estimada no cumple el requisito, indispensable para este trabajo, de ser homogénea de grado uno en las variables K y L; tal es el caso, por ejemplo, de la función empleada en el modelo conométrico a - largo plazo elaborado por la Comisaría del plan de desarrollo para el tercer plan (*). Por esta razón me he decidido a obtener yo misma una estimación del tipo deseado.

El método que he empleado para ello ha sido, naturalmente, el de regresión lineal aplicado a la expresión lineal obtenida tomando logaritmos en la función Cobb—Douglas inicialmente reseñada:

$$\log Y = \log\ \Gamma + \ \mu\ t \log\ e + \alpha \log K + (1-\alpha) \log L$$

de donde

$$\log Y - \log L = \log \Gamma + \mu\ t \log e + \alpha\ [\log K - \log L\ ]$$

de parámetros $\log \Gamma$, μ y α.

(*) Publicado en la monografía: "El modelo econométrico del III Plan" Madrid. Imprenta del B. O. E, 1.972.

La estimación se ha realizado con series de datos de una longitud de 17 años: los comprendidos entre 1.954, fecha en que se comenzaron a publicar las series de la Contabilidad Nacional y 1.970, última fecha de la que existían datos publicados en el momento en que esta estimación se realizó. Hubiera sido preferible, sin duda, disponer de una serie más larga de datos con un nivel de fiabilidad equivalente al de los de la Contabilidad Nacional; pero las series de valores existentes de las variables que nos conciernen, referentes a fechas anteriores a 1.954 presentan considerables problemas, no solo en cuanto a su fiabilidad, sino también en lo que respecta a su coherencia con la serie 1.954–70 (*).

Entraña, evidentemente, algún riesgo, el supuesto, implícitamente admitido al tomar esta serie, de que las condiciones básicas de producción no son muy heterogéneas en el país durante estos años. Pero reducir aún más la longitud de la serie a cambio de una mayor homogeneidad me pareció demasiado arriesgado desde el punto de vista estadístico.

Las series de datos referentes al producto bruto se han tomado de la publicación Contabilidad Nacional de España. (**) Cada elemento de la serie se ha formado tomando los valores correspondientes, para cada año, de la serie Producto Nacional Bruto de dicha publicación, y deflactándolo convenientemente, –reduciéndolo a pesetas constantes de 1.958–.

(*) Tales problemas se exponen detalladamente en el artículo de A. Pulido Sanromán "Un ensayo de aplicación de la función Cobb–Douglas para España", publicado en el Vol. 1 de la serie "Riqueza Nacional de España: Estudio conmemorativo del cincuentenario de la Universidad Comercial de Deusto". Bilbao, 1.968.

(**) "Contabilidad Nacional de España". Instituto Nacional de Estadística.

En cuanto a la población activa, L, la serie utilizada se ha construido de la siguiente forma. Desde 1.964 hasta 1.970 se han tomado las cifras de población activa proporcionadas por la Encuesta de Población Activa (*) disminuidas en el número medio de parados de cada año, ya que estos, incluidos, como se sabe, en el cómputo de la población activa del país, no contribuyen, sin embargo, a la actividad productiva. Para los años 1.954 a 1.963, anteriores a la publicación de la Encuesta de Población Activa, he adoptado los datos estimados por la Ponencia de Productividad del Plan de Desarrollo y los elaborados por la Dirección General de Empleo del Ministerio del Trabajo, tal y como aparecen en la estimación de la función Cobb–Douglas de A. Pulido (**), empalmando la serie, en el año 1.964, con la del I. N. E. para los años posteriores. Ambas series son congruentes entre si, y el criterio de eliminación de los parados en las cifras de población activa es común en las dos.

La obtención de las series de capital es, indudablemente, el aspecto más problemático de la estimación de una función de producción. Si se conocen — y este es el caso en España — los datos correspondientes a la inversión neta en cada uno de los años que van a formar parte de la estimación, el conocimiento del stock de capital existente en el país en el primero de ellos, K_0, nos permite formar la correspondiente serie sucesiva de stocks de capital mediante la relación

$$K_n = K_0 + \sum_{t=0}^{t=n-1} I_t$$

Con esto el problema se reduce, en nuestro caso, a determinar una cifra para el capital total existente en 1.954. Pero las estimaciones encaminadas a la obtención de este dato son dificiles y arriesgadas. El profesor Pulido, en su estimación de la función

(*) "Encuesta de Población Activa", Instituto Nacional de Estadística.

(**) Véase A. Pulido op. cit.

Cobb–Douglas para un estudio sobre la riqueza nacional de España (*), calcula, a partir de una estimación de la riqueza privada realizada por Vandellos en el año 1.923, y de hipótesis personales concernientes al stock de capital público existente en ese año, y a la evolución sufrida por la cifra de capital nacional durante el periodo 1.935–42, – del que se desconocen datos de inversión – una serie de cifras de capital que, prolongadas hasta 1.970 en pesetas constantes han sido las empleadas en este trabajo. La serie de Pulido – sobre cuya fiabilidad expresa él mismo en su trabajo las naturales reservas – la he prolongado sumando a la última cifra de capital en pesetas constantes que aparece en su trabajo – la correspondiente a 1.964 – la cifra anual de inversión neta de la Contabilidad Nacional de España (**), calculada restando de la serie de Formación Bruta de Capital la de Amortización y otras Previsiones de Explotación, y deflactando convenientemente la diferencia a pesetas constantes de 1.958.

Aplicando el método de regresión a estas series de datos, hemos obtenido la siguiente estimación de la función de producción:

$$Y = 281{,}08 \; e^{0{,}043405\,t} \; K^{0{,}389084} \; L^{0{,}610916}$$

de donde

$$\Gamma = 281{,}08$$

$$\alpha = 0{,}389084$$

$$m = \frac{\mu}{1-\alpha} = 0{,}07104$$

que, siendo un valor bastante pequeño, utilizaremos, a nuestro nivel de aproximación como tasa anual de potenciación del trabajo.

(*) A. Pulido. op. cit.

(**) Contabilidad Nacional de España, op. cit.

Las reservas anteriormente expuestas acerca de la exactitud de los datos estadísticos manejados, así como la fuerte colinealidad existente entre las series limitan inevitablemente la fiabilidad de la estimación obtenida.

6. 2. 3. La población y su crecimiento.

Dos poblaciones distintas aparecen formando parte de nuestro modelo de crecimiento óptimo: la población que consume, o población propiamente dicha, y la población que produce, o población activa. La hipótesis admitida a lo largo de este trabajo de que ambas se mantienen proporcionales en el tiempo — es decir, crecen a la misma tasa— ha conducido a una cierta simplificación en las ecuaciones del modelo. Por consiguiente, este modelo, tal y como ha sido expuesto y desarrollado anteriormente, solamente será válido para la realidad española actual si la mencionada hipótesis de proporcionalidad se satisface en nuestro país.

Este parece ser el caso, efectivamente, pues en el estudio sobre la población española realizado por el Gabinete de Estudios de la Comisaría del Plan de Desarrollo para el tercer plan (*), se afirma respecto al incremento de población activa en España de 1.950 a 1.960 que "el 99,61 por 100 de este incremento total lo justifica el crecimiento demográfico, explicándose, tan solo, el 0,39 por 100 por medio de los cambios experimentados en las tasas" (refiriéndose a las tasas Activos/Total por edades de población española). Vemos, por consiguiente, que los datos conocidos de la realidad española sobre este punto abonan en un porcentaje elevadísimo la hipótesis de crecimiento proporcional de ambas poblaciones que, por tanto, parece razonable aceptar.

El paso de los resultados que se obtengan en el modelo, referidos a variables por unidad de población, a los correspondientes valores absolutos de dichas variables,

(*) Véase "Tercer plan de Desarrollo Económico y Social. Estudio sobre la población española 1.972—1.975". Presidencia del Gobierno.

requiere el conocimiento o estimación de la cifra de población en España en cada uno de los años que son objeto de estudio. Por otra parte, en las ecuaciones del modelo aparece como parámetro la tasa de crecimiento de la población. La estimación de esta tasa ρ, y el conocimiento de la cifra de población en algún instante N_{t_0} nos proporcionarán todos estos datos, ya que *la población existente en un año cualquiera, t,* se podrá estimar mediante la relación

$$N_t = N_{t_0} (1+\rho)^{t-t_0}$$

La población inicial, N_{t_0}, o la población activa inicial L_{t_0}, se conocen a través de los Censos de población que cada diez años realiza el Instituto Nacional de Estadística, y de la Encuesta de población activa que este mismo organismo viene elaborando trimestralmente desde 1.964.

Las perspectivas de la población española para los años 1.975 y 1.980, estimadas por la Comisaría del Plan de Desarrollo (*), nos permiten calcular la tasa de crecimiento prevista para los intervalos 1.970–75 y 1.970–80, mediante la relación

$$\rho = \left(\frac{P_{1.975}}{P_{1.970}}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

o bien la

$$\rho = \left(\frac{P_{1.980}}{P_{1.970}}\right)^{\frac{1}{10}} - 1$$

En el citado trabajo se realizan para 1.980 tres previsiones de población distintas, de acuerdo con tres hipótesis diferentes respecto a las expectativas migratorias del país, a saber: mantenimiento de los índices migratorios al nivel del periodo anterior, ausen

(*) "Estudio sobre la población española" op. cit.

cia de movimientos migratorios y, por último, índices migratorios al nivel de 1.961–65. Los autores consideran las tres hipótesis aceptables, y no parecen dar preferencia a ninguna de ellas. En vista de lo cual, he elegido para realizar mis cálculos, las previsiones obtenidas de acuerdo con la primera de estas hipótesis, no porque la considere más plausibles que las otras, sino, sencillamente, porque es la que proporciona cifras de población intermedias entre las otras dos, y es el valor más próximo a la media artmética de las tres estimaciones.

Para el intervalo 1.970–75 he obtenido

$$\rho = 0{,}0098$$

Para el 1.970–80, y de acuerdo con los criterios expuestos, el resultado ha sido

$$\rho = 0{,}0100$$

Con el fin de contrastar estos datos, he realizado una estimación lineal de la tasa de crecimiento de la población activa española desde 1.951 hasta 1.970, empleando para ello los datos de población activa obtenidos por los procedimientos que ya expliqué al tratar de la estimación de la función de producción, pero incrementados en el número medio anual de parados, es decir, considerando la población activa en su totalidad, habida cuenta de que la relación que interesa estimar ahora es una función de oferta de trabajo. El valor estimado de ρ por este procedimiento ha sido

$$\rho = 0{,}0086.$$

Las estimaciones de ρ obtenidas por ambos procedimientos no discrepan excesivamente. Para la realización del modelo he decidido adoptar el valor de $\rho = 0{,}009$, intermedio y suficientemente aproximado a ambos, que, por otra parte, resulta coincidir con el valor estimado por las Naciones Unidas para el crecimiento de la población en Europa meridional en el periodo 1.960–69 (*).

(*) "Statistical Yearbook. United Nations 1.970"

6. 2. 4. La tasa de amortización del capital.

Se admite en el presente modelo que una parte del producto bruto obtenido cada año se destina a la amortización del stock de capital existente, cuyo desgaste se supone proporcional a la magnitud de este stock.

Para calcular el factor de proporcionalidad de la amortización, he adoptado unas ciertas hipótesis acerca de la duración media de los bienes de capital, que son las aceptadas generalmente por los expertos en Contabilidad Nacional: consiste en suponer una vida media de 40 años para los terrenos, viviendas y construcciones en general, y una duración media de 15 años para la maquinaria y material de transporte. Estas mismas hipótesis, juntamente con la relación existente entre las cifras de formación de capital de la Contabilidad Nacional empleadas en cada uno de los dos sectores en los últimos años, nos autorizan a suponer que, aproximadamente el 75 % de las existencias actuales de capital fijo en España pertenecen al primer sector, correspondiendo a material de transporte y utillaje en general el 25 % restante. La tasa media de amortización calculada con estas hipótesis resulta ser igual, aproximadamente, al 3,5 %.

6. 2. 5. Los parámetros del criterio de optimalidad.

Como criterio de optimización del modelo se ha elegido el funcional que resulta de sumar las utilidades del consumo individual obtenidas en cada periodo valoradas en el instante inicial según la tasa de descuento temporal de la utilidad del consumo y ponderadas por el aumento relativo de población esperado en cada periodo futuro.

Necesitamos, por tanto, estimar dos nuevos parámetros para determinar el funcional objetivo de la economía española actual: la tasa de descuento temporal de la utilidad del consumo, γ y la elasticidad de la función de utilidad respecto al consumo, $1 - \eta$ que hemos supuesto constante y comprendida en el intervalo semiabierto $]0, 1]$, – con lo que $\eta \in [0, 1[$ –.

Existe entre estos dos parámetros una relación indudable, pues el descuento temporal que la tasa determina se efectua sobre las unidades de utilidad, que dependen del valor de la elasticidad de la función de utilidad. Esta relación habrá de ser necesariamente tenida en cuenta en la determinación de sus valores.

No hay actualmente – que yo sepa – estimaciones de estos parámetros para la economía española. Por esta razón me he decidido a realizar yo misma una estimación conjunta de ambos, basada en el método que expone Mera en su modelo de crecimiento óptimo (*).

El procedimiento de estimación de Mera se basa, en esencia, en la hipótesis de que, si la distribución de la renta es a grandes rasgos equitativa y la función de utilidad, aproximadamente igual para todos los individuos de la comunidad, la optimización a corto plazo de los recursos globales de ésta no difiere básicamente del resultado que se obtendría optimizando, a corto plazo, las posibilidades de cada individuo; por todo lo cual, y dado que cada individuo tratará naturalmente de optimizar sus recursos propios, es de esperar que la trayectoria óptima a corto plazo de la comunidad sea una aproximación bastante aceptable de su comportamiento real.

(*) Koichi Mera: "A generalized Aggregative Model for Optimal Growth with some Empirical Tests" International Economic Review, Vol 10, núm. 2, Junio *.969.

En vista de ello, lo que hace el citado autor es construir un modelo de crecimiento discreto, del que selecciona las soluciones óptimas interiores al conjunto de soluciones posibles reduciendo el problema de optimización dinámica en una variable, mediante una implícita transformación de la variable stock de capital en una variable vectorial, a un problema de optimización estática en N variables, que resuelve por los métodos tradicionales. Este procedimiento no le proporciona trayectorias efectivas de crecimiento óptimo en cada caso, pero sí una condición necesaria de óptimo de la que se deduce la deseada relación entre los parámetros γ y η.

Los supuestos del modelo de Mera no coinciden exactamente con los de este trabajo; por ejemplo, no considera la existencia de depreciación del capital, ni pondera la utilidad descontada por el crecimiento relativo de la población que disfruta de esta utilidad, y su función de utilidad del consumo es ligeramente diferente de la anteriormente seleccionada. Por tanto, la relación final que obtiene no es directamente utilizable en este modelo. Pero sí lo es la que voy a encontrar a partir de un modelo semejante al suyo, aunque basado en las hipótesis de este trabajo, y que paso a exponer en síntesis:

Se trata de obtener una condición que han de cumplir necesariamente todas las trayectorias del stock de capital que maximicen el funcional

$$J = \sum_{t=0}^{N} \frac{U(c(t))}{(1+\gamma-\rho)^t} = \sum_{0}^{N} \frac{U\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)}{(1+\gamma-\rho)^t}$$

cuando el producto bruto de cada periodo F(t) se distribuye entre consumo, inversión neta y amortización del capital

$$F(t) = C(t) + I(t) + \delta\ K(t)$$

siendo

$$I(t) = K(t+1) - K(t)$$

De todo ello resulta

$$J = \sum_{t=0}^{N} \frac{U\left(\dfrac{F(t) - [K(t+1) - K(t)] - \delta K(t)}{L(t)}\right)}{(1+\gamma-\rho)^t}$$

expresión cuyas variables son K (0), K (1) .... K (N + 1). *Una condición necesaria* de máximo interior es la anulación de las derivadas de J respecto a cada una de las variables — que evidentemente, existen, dadas las condiciones de regularidad impuestas a las funciones de producción y utilidad en nuestro modelo — con lo que:

$$\frac{\partial J}{\partial K(t)} = \frac{\dfrac{d\,U(t)}{d\,c(t)}\left[\dfrac{d\,F(t)}{d\,K(t)} + 1 - \delta\right] \cdot \dfrac{1}{L(t)}}{(1+\gamma-\rho)^{t-1}} + \frac{\dfrac{\partial\,U(t-1)}{\partial\,c(t-1)}\left(\dfrac{-1}{L(t-1)}\right)}{(1+\gamma-\rho)^{t-1}} = 0$$

de donde

$$\frac{\dfrac{dF(t)}{dK(t)} + 1 - \delta}{1+\gamma-\rho} \cdot \frac{L(t-1)}{L(t)} = \frac{\dfrac{\partial U(t-1)}{\partial c(t-1)}}{\dfrac{\partial\,U(t)}{\partial c(t)}}$$

En nuestro caso la función de producción es de la forma

$$F(t) = \Gamma\, e^{\mu t}\, K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

y su derivada respecto al capital

$$\frac{d\,F(t)}{d\,K(t)} = \alpha\,\frac{F(t)}{K(t)}$$

La función de utilidad adoptada en este modelo es la

$$U(c(t)) = \frac{1}{1-\eta}\, c(t)^{1-\eta}$$

y su derivada respecto al consumo per capita es:

$$\frac{d\,U(c(t))}{d\,c(t)} = c(t)^{-\eta} = \left[\frac{C(t)}{L(t)}\right]^{-\eta}$$

Luego la expresión anterior resulta ser en nuestro caso la

$$\frac{\alpha \dfrac{F(t)}{K(t)} + 1 - \delta}{1 + \gamma - \rho} = \left(\frac{C(t)}{C(t-1)}\right)^{\eta} \left(\frac{L(t)}{L(t-1)}\right)^{1-\eta} =$$

$$= (1+g_c)^{\eta}\,(1+\rho)^{1-\eta}$$

siendo g_c la tasa anual de crecimiento del consumo global.

Para valores de g_c y ρ pequeños respecto a la unidad, esta última ex– presión se aproxima suficientemente por la

$$\frac{\alpha \dfrac{F}{K} + 1-\delta}{1 + \gamma - \rho} = (1 + \eta\, g_c)\;(1 + \rho\;(1-\eta))$$

que se transforma en la

$$\alpha \frac{F}{K} - \delta = \gamma + \eta\,(g_c - \rho)$$

que es justamente una aproximación analítica de la relación existente entre los dos parámetros buscados.

Sustituyendo los parámetros ya conocidos por sus valores y calculando para g_c y $\frac{\dot{F}}{K}$ un valor medio con los datos de consumo de los últimos cinco años suministrados por la Contabilidad Nacional, y las series de producto y capital empleadas en la estimación de la función de producción, la relación linealentre ambos parámetros correspondiente a la economía española actual resulta ser la

$$0{,}0584 = \gamma + 0{,}036\,\eta$$

El conjunto de pares ordenados de valores aceptables para estos parámetros es, por consiguiente:

$$C = \left\{ (\eta, \gamma) \mid 0{,}0584 = \gamma + 0{,}036\,\eta,\ \eta \in [0, 1[\right\}$$

es decir, cualquier punto del segmento semiabierto de extremos

$$(0,\ 0{,}0584), \qquad (1,\ 0{,}0224)$$

Ahora es preciso determinar el punto de este segmento, — es decir, el par de valores numéricos para la elasticidad de la utilidad y la tasa de descuento temporal de la misma – más adecuado a la realidad económica de nuestro país. Ante la carencia de datos reales de la economía española adecuados para orientarme en esta cuestión, he adoptado el criterio que sigue Mera en la determinación que realiza de ambos pares de valores para las economías de Estados Unidos y Japón (*), y que consiste en suponer "por falta de información en contrario" que los valores de η y γ no diferirán significativamente en los dos paises, por lo que la solución del sistema formado por las dos ecuaciones lineales correspondientes nos da los valores adecuados a ambos. De acuerdo con este mismo criterio, adoptaremos para la economía española los valores $\eta = 0{,}65$ y $\gamma = 0{,}035$.

(*) Véase Mera, op. cit, pág. 160.

La combinación de valores elegida, juntamente con los obtenidos para los parámetros anteriormente estudiados, nos asegura la existencia de una trayectoria óptima en el punto singular del sistema, pues se cumple la condición:

$$\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta) > \delta+\rho+m$$

que determina en última instancia ponderaciones de la utilidad decrecientes en el tiempo para la versión autónoma del problema.

Por otra parte, la imposición de una tasa de descuento temporal del consumo muy superior a ésta no sería aconsejable – incluso en el caso en que fuera compatible con la existencia de una Edad de Oro– pues supondría una desestimación del consumo de la generación que nos suceda con un intervalo de 50 años en más de las tres cuartas partes de su utilidad actual (*).

6.3. Cómputo de las soluciones

Determinadas ya las ecuaciones obtenidas a partir de las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin que ha de satisfacer una sucesión óptima de acumulación de capital, seleccionadas las relaciones funcionales entre las variables y calculados los valores de los parámetros del modelo de la forma que creemos aproximan éste en mayor medida al comportamiento real de la actual economía española, pasamos seguidamente a exponer las técnicas de cálculo numérico de que nos hemos servido para obtener efectivamente las sucesiones óptimas buscadas en cada circunstancia y para cada conjunto de condiciones de contorno fijadas.

(*) Ver J. A. Mirrless *"Optimum Growth when Technology is Changing"*, Review of Economic Studies, Enero de 1.967, pág. 120, nota a pie de página.

Antes de seguir adelante en esta cuestión, conviene hacer notar que el modelo de crecimiento óptimo desarrollado en el capítulo 5 y particularizado en 6. 1. 3 para las relaciones funcionales seleccionadas incluye una característica que limita considerablemente las posibilidades de su manejo como instrumento de determinación de sucesiones óptimas: a semejanza de lo efectuado en el capítulo 4, y por razones de sencillez en la exposición, hemos supuesto que el programa de crecimiento comenzaba en el instante origen de tiempos, es decir, en aquel en el que se conoce el volumen de la mano de obra

$$L_0 = \hat{L}_0$$

y a partir del cual se supone que comienza a actuar la potenciación de la misma determinada por el progreso técnico, de forma que

$$\hat{L}_i = L_0 \ (1+\rho+m)^i$$

De ello resulta que, como en la estimación de la función de producción Cobb–Douglas realizada para nuestro país, hemos tomado como origen de tiempos para el progreso técnico el año 1.953, las condiciones necesarias de optimalidad anteriormente especificadas estan elaboradas para obtener sucesiones de crecimiento óptimo en programas que comiencen precisamente en ese año, lo que constituye una limitación en nuestro trabajo. Este inconveniente puede evitarse transformando, mediante una pequeña modificación, que a continuación exponemos, el sistema de condiciones necesarias de optimalidad en otro que permita, dado el origen de tiempos, determinar sucesiones óptimas para cualquier programa admisible, independientemente de cual sea el año en que éste comience.

Sea 0 el origen de tiempos y t_0 el instante de comienzo del nuevo programa, medido en este sistema de referencia cuya unidad es el año, y busquemos la sucesión que, de entre todas las que transportan al sistema de un $\hat{k}_{t_0}$ *inicial a un* $\hat{k}_{t_0+T}$ final dado en un tiempo igual a T periodos, hace máximo el criterio de optimalidad

$$J = \sum_{j=t_0}^{t_0+T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^j \quad u(c_j)$$

y sea

$$i = j - t_0 \quad , \quad j = t_0, \ldots\ldots\ldots, t_0 + T$$

La ecuación dinámica del capital por trabajador efectivo resulta ser ahora

$$\hat{k}_{j+1} - \hat{k}_j = (f(\hat{k}_j) - \hat{c}_j \ - \ (\delta + \rho + m) \ \hat{k}_j) \ \ (1 + \rho + m)^{-1}$$

que, como vemos, es invariante respecto a traslaciones en el origen de tiempos. En cuanto al criterio de optimalidad, puede también escribirse de la forma

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i+t_0} u(c_{i+t_0}) = \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{t_0} \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} u(c_{i+t_0})$$

que, como la constante no afecta a la ordenación de las utilidades totales proporcionadas por las diferentes sucesiones de consumo, nos proporcionará, para cada conjunto de condiciones de contorno dadas, la misma sucesión óptima que el

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^{i} u(c_{i+t_0})$$

donde

$$c_{i+t_0} = c_j = \frac{C_j}{L_j} = \frac{C_j}{\hat{L}_j} \cdot \frac{\hat{L}_j}{L_j} = \hat{c}_j \ \frac{\hat{L}_j}{L_j}$$

pero, al nivel de aproximación tomado es

$$\hat{L}_j = L_j (1+m)^j = L_j \ (1+m)^{t_0+i}$$

con lo que

$$c_j = \hat{c}_j \ (1+m)^{t_0+i}$$

Si ahora efectuamos una simple traslación en los subíndices de las variables, –aunque conservando los valores de estas, con lo que los resultados del modelo serán los mismos–, obtenemos una ecuación de transición

$$\hat{k}_{i+1} - \hat{k}_i = (f(\hat{k}_i) - \hat{c}_i - (\delta + \rho + m)\,\hat{k}_i)\,(1 + \rho + m)^{-1}$$

y un criterio de optimalidad

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} \left(\frac{1+\rho}{1+\gamma}\right)^i u(c_i)$$

de forma que, en suma, obtenemos un modelo similar al analizado en el capítulo 5, con la única diferencia de que ahora tendremos

$$c_i = \hat{c}_i \; (1 + m)^{t_0 + i}$$

de manera que

$$u(c_i) = (1+m-m\eta)^{t_0+i} \; u(\hat{c}_i)$$

Esta modificación deja invariantes las condiciones de optimalidad referentes a la evolución del capital por trabajador efectivo y de los precios sombra, así como la de maximización de la hamiltoniana en los periodos en que ésto ocurra para el consumo total del producto –resultado evidente, pues ninguna de estas tres ecuaciones depende de c_i – alterando en cambio la de maximización de la hamiltoniana para valores de $\hat{c}_i$ interiores a su intervalo admisible, que pasa a ser la

$$\hat{p}_{i+1} = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} \; (1 + m - m\eta)^{t_0} \; u'(\hat{c}_i)$$

Como resultado de esta transformación, obtenemos un sistema de condiciones necesarias de optimalidad, válido aunque el comienzo del programa no coincida con el origen de medida del progreso técnico, que ha de satisfacer necesariamente la trayectoria óptima buscada y que, particularizado ya para el tipo de funciones de producción y utilidad seleccionadas en 6.1, es el formado por las ecuaciones

$$\hat{k}_{i+1} = (\Gamma\,\hat{k}_i^{\alpha} - \hat{c}_i - (\delta - 1)\,\hat{k}_i)(1+\rho+m)^{-1}$$

$$\hat{p}_{i+1} = \hat{p}_i \quad \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)\,(1+m-m\,\eta)} \qquad (1 - \delta + \alpha\,\Gamma\,\hat{k}_i^{\alpha-1})^{-1}$$

y

$$\hat{c}_i = \left(\hat{p}_{i+1} \cdot \frac{(1+\rho)}{(1+m-m\,\eta)^{t_0-1}\;(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$$

ó

$$\hat{c}_i = \Gamma\,\hat{k}_i^{\alpha}$$

con lo que el punto singular del sistema tendrá ahora las coordenadas $(\hat{k}^*, \hat{p}^*)$ tales que

$$\hat{k}^* = \left(\frac{1}{\alpha\,\Gamma}\left(\frac{(1+\gamma)\,(1+\rho+m)}{(1+\rho)\,(1+m-m\,\eta)} - (1-\delta)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y

$$\hat{p}^* = \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)(1+m-m\eta)^{t_0-1}}{1+\rho}\;(\Gamma\,\hat{k}^{*\alpha} - (\delta+\rho+m)\,\hat{k}^*)^{-\eta}$$

y como la permanencia del sistema en él requiere un valor de la variable de control igual a

$$\hat{c}^* = \Gamma\,\hat{k}^{*\,\alpha} - (\delta+\rho+m)\,\hat{k}^*$$

la existencia de la sucesión propia de la regla de oro modificada está garantizada siempre que se satisfaga la relación obtenida en 5.3. Por otra parte, la curva separatriz del modelo es ahora la

$$\hat{p} = (1 + m - m\eta)^{t_0} (1 - \delta + \alpha \Gamma \hat{k}^{\alpha-1}) (\Gamma k_0^{\alpha})^{-\eta}$$

Tengamos en cuenta no obstante que en este nuevo modelo las variables auxiliares $\hat{p}_i$ no coinciden exactamente con los precios sombra de la *unidad de capital por trabajador efectivo* valorada en unidades de utilidad corriente del consumo por trabajador efectivo, sino que aparecen corregidas por el factor $(1 + m - m\eta)^{t_0}$, siendo, por tanto, proporcionales a los verdaderos precios sombra, y siguiendo sus evoluciones en el tiempo. Podríamos considerar, por tanto, que los $\hat{p}_i$ del modelo recientemente modificado representan *el precio sombra en el periodo* i *de* $(1 + m - m\eta)^{t_0}$ unidades de capital por trabajador efectivo, medidas en unidades corrientes de utilidad del consumo por trabajador efectivo.

Conocidos los valores $\hat{k}_0$ y $\hat{p}_0$, este sistema puede resolverse iterativamente en la forma habitual empleada para la resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias finitas cuyas condiciones *de contorno están dadas para el instante inicial* del programa, pues, como ya indicábamos en 5. 2, la estructura de las ecuaciones nos permite la determinación progresiva de los elementos de la sucesión óptima buscada; la ecuación dinámica de los precios sombra nos proporciona el valor de $\hat{p}_1$ a partir de $\hat{p}_0$ y $\hat{k}_0$; este valor, $\hat{p}_0$, sustituido, juntamente con $\hat{k}_0$ en la hamiltoniana, nos expresa ésta como *función exclusivamente de* $\hat{c}$; *obtenido* el valor de $\hat{c}_0$ que la maximiza lo sustituiremos en la ecuación dinámica del capital por trabajador efectivo, juntamente con $\hat{k}_0$, para obtener $\hat{k}_1$. Conocidos $\hat{k}_1$ y $\hat{p}_1$ se continúa el mismo proceso para obtener $\hat{p}_2$, $\hat{c}_1$ y $\hat{k}_2$, y así se prosigue durante T—1 etapas más, para obtener finalmente $\hat{p}_T$, $\hat{c}_{T-1}$ y $\hat{k}_T$.

Este proceso queda suficientemente determinado y preparado para su programación en ordenador en cuanto especifiquemos un procedimiento adecuado para la localización del valor de $\hat{c}_i$, que hace máxima a $\hat{\mathcal{H}}(\hat{c})$. Este valor es, evidentemente, uno de los

$$\hat{c}_i = \left(\hat{p}_{i+1} \frac{1+\rho}{(1+m-m\eta)^{t_0-1}(1+\gamma)(1+\rho+m)} \right)^{-\frac{1}{\eta}}$$

ó

$$\hat{c}_i = \Gamma \; \hat{k}_i^{\alpha}$$

de manera que un primer método consistiría en calcular ambos valores, y ver si el primero de ellos verifica la condición

$$\hat{c}_i \leqslant \Gamma \hat{k}_i^{\alpha}$$

En caso afirmativo sustituir ambos valores en la expresión

$$\mathcal{H} (\hat{p}_{i+1}, \; \hat{k}_i, \; \hat{c}_i, \; i)$$

en la que $\hat{k}_i$ y $\hat{p}_{i+1}$ son conocidos, y seleccionar para nuestro programa en el período i el valor de $\hat{c}_i$ que haga máxima la hamiltoniana. Si, por el contrario, el primero de los valores obtenidos para $\hat{c}_i$ es

$$\hat{c}_i > \Gamma \; \hat{k}_i^{\alpha}$$

no constituye una solución admisible a nuestro problema, de manera que el valor buscado para $\hat{c}_i$ tendrá que ser el

$$\hat{c}_i = \Gamma \hat{k}_i^{\alpha}$$

Este procedimiento, aunque válido para localizar el valor de $\hat{c}_i$ buscado, puede ser simplificado notablemente reduciéndose a otro más sencillo, en el que no es preciso calcular los valores de $\mathcal{H}$ en ningún caso. Efectivamente, el procedimiento anterior es válido para cualquier función derivable de $\hat{c}_i$. Pero la función $\hat{\mathcal{H}}(\hat{c})$ reune además otras características que facilitan la determinación de su máximo absoluto en el intervalo $[0, \Gamma \hat{k}^{\alpha}]$, entre las que destaca su concavidad estricta para todo $\hat{c} > 0$, demostrada en 5. 2.

Consideremos, por un momento, la función $\hat{\mathcal{H}}$ definida para todo $c \geq 0$. Por ser estrictamente cóncava en todo punto de esta semirrecta, podrá tener en $c > 0$ a lo más un extremo relativo, y será necesariamente un máximo. Este máximo, si existe, vendrá dado por la solución a la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \hat{c}_i} = 0$$

que es en nuestro caso la

$$\hat{c}_i = \left(\hat{p}_{i+1} \frac{1+\rho}{(1+m-m\eta)^{t_0-1}\,(1+\gamma)(1+\rho+m)} \right)^{-\frac{1}{\eta}}$$

que, como vemos, existe siempre y es positiva. Habiendo descartado en 5.2 la posibilidad de *que la función tenga su máximo* absoluto en $\hat{c}_i = 0$, tendremos que si el máximo relativo de la función $\hat{\mathcal{H}}(\hat{c})$ en $\hat{c}_i \geq 0$ es un $\hat{c}_{*i}$ tal que

$$\hat{c}_{*i} \leq \Gamma\ \hat{k}_i^{\ \alpha}$$

coincidirá con el máximo absoluto de la misma en el intervalo $[0, \Gamma\, \hat{k}_i^{\alpha}]$, y será, por consiguiente, el *valor óptimo buscado* para la variable de control en el periodo i. Si en cambio, el máximo relativo $\hat{c}_{*i}$ verifica

$$\hat{c}_{*i} > \Gamma\ \hat{k}_i^{\ \alpha}$$

es decir, es superior a los valores admisibles de $\hat{c}_i$, la función $\hat{\mathcal{H}}\ (\hat{c}_i)$ será estrictamente creciente en el *intervalo* $[0, \Gamma\, \hat{k}_i^{\alpha}]$, y, por consiguiente, su máximo absoluto en él coincidirá precisamente con el máximo valor admisible de $\hat{c}_i$, es decir, será igual a $\Gamma\, \hat{k}_i^{\alpha}$. *Como resumen de todo este razonamiento* podemos deducir que el valor admisible de la variable de control, $\hat{c}_i$, que maximiza la hamiltoniana en un periodo i, es *decir, el que determina* la sucesión óptima de crecimiento económico es el

$$\min\ (\hat{c}_{*1},\ \Gamma\,\hat{k}_1^{\alpha})$$

siendo

$$\hat{c}_{*1} = \hat{p}_{1+1}\left(\frac{1+\rho}{(1+m-m\eta)^{t_0-1}(1+\gamma)(1+\rho+m)}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$$

Así pues, ya tenemos finalmente elaborada la técnica de cómputo a seguir para determinar la sucesión óptima de acumulación de capital que parte de la situación inicial dada, $\hat{k}_0$, $\hat{p}_0$. Se realizará en los pasos siguientes

a) Calcular $\hat{p}_1$ a partir de $\hat{k}_0$ y $\hat{p}_0$ de la forma

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_0 \quad \frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\,\eta)} \qquad (1-\delta+\alpha\,\Gamma\,\hat{k}_0^{\alpha-1})^{-1}$$

b) Calcular, a partir de $\hat{p}_1$, $\hat{c}_{*0}$ de la forma

$$\hat{c}_{*0} = \hat{p}_1 \left(\frac{1+\rho}{(1+m-m\eta)^{t_0-1}(1+\gamma)(1+\rho+m)}\right)^{-\frac{1}{\eta}}$$

c) Seleccionar el valor de $\hat{c}_0$ tal que

$$\hat{c}_0 = \min\ (\hat{c}_{*0},\ \Gamma\,\hat{k}_0^{\alpha})$$

d) Con $\hat{k}_0$ y $\hat{c}_0$, determinar

$$\hat{k}_1 = (\Gamma\,\hat{k}_0^{\alpha} - \hat{c}_0 - (\delta-1)\ \hat{k}_0)\ (1+\rho+m)^{-1}$$

e) Recomenzar el ciclo, incrementando en una unidad todos los subíndices.

Este proceso se repite T veces, al cabo de las cuales nos habrá proporcionado los valores que constituyen las sucesiones óptimas

$$\hat{k}_i \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots T$$

$$\hat{p}_i \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots T$$

$$\hat{c}_i \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots T-1$$

del modelo de crecimiento óptimo que satisface las condiciones iniciales $\hat{k}_0$ y $\hat{p}_0$. Observemos que, con excepción de los periodos en que la hamiltoniana se maximiza para valores del consumo iguales al producto, el valor de la variable de control en un periodo i, $\hat{c}_i$, se obtiene a partir del valor de la variable auxiliar en el periodo $i + 1$, el cual depende a su vez de toda la sucesión de valores $\hat{p}_j$, $j \leqslant i$, y, por tanto, de la condición inicial $\hat{p}_0$, de manera que, en general, la variable de control no queda determinada en cada periodo por el valor de la variable de estado en ese periodo. Se trata, por consiguiente, de un modelo en bucle abierto.

El proceso de cálculo anteriormente expuesto se basa en el conocimiento de los valores $\hat{k}_0$ y $\hat{p}_0$ iniciales y, resuelve, por consiguiente un sistema de ecuaciones en diferencias finitas de este tipo cuando las condiciones de contorno se dan en el instante inicial. Desgraciadamente, no es este el caso en los modelos de crecimiento económico analizados en este trabajo, en los que las condiciones de contorno que son el valor inicial y el final de la relación capital–trabajo efectivo, $\hat{k}_0$ y $\hat{k}_T$, vienen dadas cada una en instantes distintos, –una en el inicial y otra en el final del programa– constituyendo un ejemplo de los llamados problemas de contorno, o de valores en los extremos (two–point boundary value problems).

Estos problemas constituyen un nucleo importante del cálculo numérico actual, que proporciona, de acuerdo con diversas técnicas, varios algoritmos de resolución de los mismos, de entre los cuales los más utilizados son: el de aproximaciones sucesivas en el contorno (neighboring extremals), los del gradiente en sus diversos grados y los de cuasilinealización. La idea que subyace bajo los distintos procedimientos de resolución empleados en estas tres técnicas es la misma: una primera *localización aproximada* o "adivinación" de parte de los elementos que componen la solución buscada, a partir de los cuales se puedan obtener los demás. Si el conjunto así determinado satisfaciese las condiciones de optimalidad y de contorno establecidas *con el nivel de aproximación* deseado constituiría la solución que buscamos. Pero, en general, ésto no ocurrirá. Entonces, cada uno de los métodos proporciona los elementos para la construcción de un algoritmo que permita, tomando como base la primera "solución", *obtenida de la forma anteriormente* indicada, una nueva "solución" más aproximada que la anterior, procediendo así sucesivamente basta que el algoritmo —supuesta su convergencia hacia la verdadera solución—, nos proporciona sucesiones de las variables de control, de estado, *y de la variable adjunta* suficientemente próximas a las verdaderas de acuerdo con criterios de aproximación previamente estipulados. En la primera de las técnicas indicadas, los elementos que comienzan por localizarse aproximadamente son las condiciones de contorno *que serían precisas* en uno de los extremos para determinar totalmente la solución; en el método del gradiente, los elementos "adivinados" son la sucesión de los valores de la variable de control y alguna de las condiciones de contorno; por último, en el de cuasilinearización se fijan inicialmente valores aproximados para las variables de estado y las auxiliares y, eventualmente, alguna condición de contorno. Los nombres de cada una de estas técnicas responden a los procedimientos de optimización en que se basan sus correspondientes *algoritmos de mejora* de las soluciones sucesivas. (*)

(*) Una revisión de las diferentes técnicas empleadas para la resolución de este problema, así como una descripción más detallada de las tres citadas, pueden verse en "Applied Optimal Control" de A. E. Bryson y Y Ho, Ginn and Co. 1.969, cap. 7, o en "Optimal Control Theory," de D. E. Kirk, *Prentice Hall*, 1.970, cap. 6. Varias recientes aportaciones al tema están publicadas en "Computing Methods in Optimization Problems", Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, núm. 14, Springer—Velag. 1.969.

De entre todas estas técnicas, hemos elegido para llevar a cabo nuestro modelo numérico la de aproximaciones sucesivas en los valores de contorno. Tiene la ventaja de ser más sencilla que cualquiera de las otras dos en cuanto a progrma–ción y cálculo se refiere, cuando se aplica – y tal es nuestro caso– a modelos en los que las *variables de estado, de control* y auxiliar son unidimensionales; como contrapartida, su inconveniente fundamental reside en que, en general, una buena "adivinación" de las condiciones de contorno suele resultar considerablemente difícil, inconveniente éste bastante grave si se tiene en cuenta además la gran sensibilidad que frecuentemente ofrecen las soluciiones respecto a pequeñas variaciones en las condiciones de contorno adivinadas, lo que tiende a dificultar su convergencia. Pero en el modelo que nos ocupa, la localización aproximada de la condición de contorno que necesitamos para obtener una primera aproximación del modelo, que es $\hat{p}_0$, viene simplificada por la existencia de un punto de referencia: el valor de la variable auxiliar propio de la regla de oro modificada, que mantiene al sistema indefinidamente en su punto singular. Para algunas sucesiones óptimas —aquellas cuyas condiciones de contorno implican una reducción del nivel de capital por trabajador efectivo— también la curva separatriz nos proporciona otro punto de referencia para cada valor del capital por trabajador efectivo. En resumen, pues, los inconvenientes del método de aproximaciones sucesivas en el contorno quedan bastante paliados en este modelo, manteniéndose, en cambio, sus ventajas habituales.

Seleccionado un $\hat{p}_0$ inicial adecuado con ayuda de los puntos de referencia indicados, se obtienen, a partir de él y del $\hat{k}_0$ inicial dado por las condiciones de contorno, los valores de las sucesiones óptimas de consumo por trabajador efectivo, capital por trabajador efectivo y precio sombra corregido de este último correspondiente a la solución que empieza en $(\hat{p}_0, \hat{k}_0)$, por el procedimiento iterativo anteriormente expuesto. Sea $\hat{k}_{T,1}$ el valor de la relación capital-trabajo en el periodo T en esta solu–ción, y sea $\hat{k}_T$ el valor final de dicha relación requerido por las condiciones de contorno fijadas. Si es

$$|\hat{k}_{T,1} - \hat{k}_T| < \epsilon$$

siendo ϵ la cota máxima del error admisible previamente fijada, habremos obtenido una solución suficientemente aproximada a la buscada, y el problema estará terminado, pero si

$$|\hat{k}_{T,1} - \hat{k}_T| > \epsilon$$

será preciso recurrir a un algoritmo que nos permita ir obteniendo, con base a esta primera solución, otras cada vez más cercanas a la que satisface las condiciones necesarias de optimalidad y las de contorno, hasta llegar a una que, satisfaciendo las primeras, nos proporcione respecto a estas últimas un nivel de aproximación mayor o igual que el mínimo requerido.

El algoritmo construido para este modelo es bastante sencillo, y se ha programado sobre la base de utilizar, en la mayor medida posible, la información previa proporcionada por el análisis geométrico del modelo. Su aplicación requiere la determinación, para cada conjunto de condiciones de contorno, de dos valores de la variable auxiliar $\hat{p}_s$ y $\hat{p}_I$, cotas superior e inferior, respectivamente, de los valores de $\hat{p}_0$ que se estima pueden dar lugar a la solución óptima que satisfaga dichas condiciones. Así, por ejemplo, si los valores dados de las relaciones capital–trabajador efectivo son tales que

$$\hat{k}_T < \hat{k}_0$$

podemos, casi siempre, emplear como cota superior el valor de esta variable en el punto singular

$$\hat{p}_s = \hat{p}^*$$

y como cota inferior el valor correspondiente de la curva separatriz si se trata de una solución estrictamente interior al cono de alcanzabilidad del sistema que se inicia en $\hat{k}_0$, ó, en el caso más general

$$\hat{p}_I = 0$$

que siempre es válida. Si, en cambio, es

$$\hat{k}_0 < \hat{k}_T$$

será frecuentemente $\hat{p}^*$ una cota inferior, –o, en su defecto, lo será $\hat{p} = 0$ – pero, no disponiendo de punto de referencia alguno para determinar la superior, nos veremos forzados a buscarla por tanteos. Claro está que la validez de las cotas así fijadas no es absoluta, sino que nos proporciona simplemente una idea aproximada de la situación de estas. Con todo, este procedimiento de acotar los valores de $\hat{p}$ *se ha revelado eficaz en una gran mayoría de los modelos calculados*. Y, en cualquier caso, la situación de los valores de $\hat{k}_0$ y $\hat{k}_T$, con referencia al del punto singular, la mayor o menor separación entre ellos y el número de periodos del programa son los datos que nos van a orientar en el adecuado manejo de los valores de referencia de $\hat{p}$ como cotas de los $\hat{p}_{0,1}$.

Fijados $\hat{p}_s$ y $\hat{p}_I$, tomamos un $\hat{p}_0 = \hat{p}_{0,1}$ inicial tal que

$$\hat{p}_I < \hat{p}_{0,1} < \hat{p}_s$$

y, a partir de $\hat{p}_{0,1}$ y $\hat{k}_0$, determinamos la correspondiente solución óptima por el método anteriormente especificado. Si el $\hat{k}_{T,1}$ resultante es

$$\hat{k}_{T,1} > \hat{k}_T$$

significa, cuando las condiciones de contorno dadas son del tipo $\hat{k}_T > \hat{k}_0$, que el crecimiento de la sucesión de los valores del capital por trabajador efectivo que se inicia en $\hat{k}_0$ con un precio sombra igual a $\hat{p}_{0,1}$, ha *sido excesivamente rápido*, sobrepasando, en el número de periodos fijado, el valor del capital por trabajador efectivo previsto; cuando es $\hat{k}_T < \hat{k}_0$, el resultado

$$\hat{k}_{T,1} > \hat{k}_T$$

quiere decir, en cambio, que el decrecimiento de ésta sucesión ha sido demasiado lento, no permitiendo a la relación capital–trabajo efectivo alcanzar en los T periodos proyectados un nivel tan bajo como el deseado. La conclusión, en lo que respecta al precio sombra inicial es la misma en ambos casos: cuando $\hat{k}_{T,1} > \hat{k}_T$, el precio sombra inicial aceptado es mayor que el que conduce al sistema de $\hat{k}_0$ a $\hat{k}_T$ en T periodos, y deberá ser reducido. *Es evidente que un razonamiento* exactamente simétrico nos lleva a la conclusión de que si $\hat{k}_{T,1} < \hat{k}_T$, el precio sombra *inicial se ha tomado excesivamente pequeño*, y, consiguientemente, habrá de ser aumentado.

Actuando en consecuencia, vamos a fijar un nuevo valor inicial de la variable auxiliar $\hat{p}_{0,2}$ tal que, cuando $\hat{k}_{T,1} > \hat{k}_T$ sea

$$\hat{p}_{0,2} = \frac{\hat{p}_{0,1} + \hat{p}_I}{2} < \hat{p}_{0,1}$$

y, cuando $\hat{k}_{T,1} < \hat{k}_T$,

$$\hat{p}_{0,2} = \frac{\hat{p}_{0,1} + p_s}{2} > \hat{p}_{0,1}$$

Con este nuevo valor inicial de $\hat{p}$, $\hat{p}_{02}$, y $\hat{k}_0$ calcularemos un nuevo conjunto de sucesiones óptimas del consumo y del capital por trabajador efectivo inicial y de su precio sombra corregido, modificando, a la vista del $\hat{k}_{T,2}$ resultante, del valor de $\hat{p}_{0,2}$ conforme al procedimiento anteriormente descrito, lo que nos proporcionará un valor $\hat{p}_{0,3}$ con el que calcular una nueva solución óptima. Continuaremos así el proceso hasta llegar a un $\hat{k}_{T,j}$ tal que

$$|\hat{k}_{T,j} - \hat{k}_T| < \epsilon$$

lo que nos indica *que hemos encontrado* una solución que, verificando las condiciones necesarias de optimalidad, satisface también las de contorno al nivel de aproximación deseado, y, por consiguiente, podemos dar por resuelto el problema. El algoritmo descrito reune a su simplicidad la ventaja de converger con bastante rapidez para modelos cuyo error máximo relativo admisible en el valor del capital por trabajador efectivo es del orden de 0,005, lo que, dada la índole y las características del problema, estimamos un nivel de aproximación francamente bueno.

A partir de las sucesiones obtenidas de capital y consumo por trabajador efectivo se han obtenido, para cada modelo elaborado, series anuales de las siguientes variables económicas, correspondientes al comportamiento óptimo del sistema para cada conjunto de condiciones de contorno establecidas:

a) relación consumo—producto, $1-s_i$

b) relación ahorro—producto, s_i

c) consumo por trabajador real, c_i, en pesetas constantes de 1.958

d) capital por trabajador real, k_i, en pesetas constantes de 1.958

e) volumen de población activa, L_i

f) capital total, K_i en pesetas constantes de 1.958

g) capital total en pesetas constantes de 1.970 —obtenido del anterior multiplicando por la relación entre los índices del coste de vida publicados por el Instituto Nacional de Estadística que es igual a 1,98

h) consumo total, C_i, en pesetas constantes de 1.958

i) consumo total en pesetas constantes de 1.970

j) producto bruto total, Y_i, en pesetas constantes de 1.958

k) producto bruto total en pesetas constantes de 1.970

l) producto bruto per càpita en pesetas de 1.970 –tomando, para su cálculo, un valor constante de la relación población– población activa igual a 2,67, coeficiente obtenido a partir de datos facilitados también por el Instituto Nacional de Estadística.

Todas estas series de datos, en el orden en que se citan, pueden verse, agrupadas por periodos, en los resultados numéricos proporcionados por el computador para cada modelo estudiado, los cuales quedarán depositados en la Secretaría de esta Facultad durante el tiempo que transcurra entre la presentación y la lectura de esta tesis. Las dos cifras que aparecen al final de cada modelo corresponden a los valores del criterio de optimalidad, J, es decir, a la utilidad total por trabajador que se conseguiría aplicando al sistema económico representado por el modelo la política de acumulación óptima indicada por los resultados del mismo para las condiciones de contorno dadas, y a la utilidad total para el conjunto de la población. Proporcionan, por tanto, la medida del bienestar por trabajador y del bienestar global percibidos durante la totalidad del programa, de acuerdo con nuestros criterios de medida.

Los cálculos se han realizado en un computador tipo IBM–7090 perteneciente al Centro de Cálculo de la Universidad de Madrid, conforme a los programas insertados a continuación. La diferencia entre ambos estriba, simplemente, en que el primero de ellos solamente imprime la última iteración del algoritmo, es decir, la sucesión de valores de $\hat{p}_{i+1}$, $\hat{c}_{i*}$, $\Gamma\,\hat{k}_i$, $\hat{c}_i$ y $\hat{k}_{i+1}$ –citados en el orden en que aparecen impresos en las hojas de cálculo– correspondiente al resultado cuya aproximación al óptimo estimamos suficiente, seguida de las series y de las medidas de utilidad anteriormente indicadas, en tanto que el segundo programa comienza imprimiendo todas las iteraciones que la máquina realiza, a partir del $\hat{p}_{0,1}$ inicialmente impuesto, hasta encontrar la solución suficientemente aproximada. Este segundo programa se ha utilizado exclusivamente para comprobar sobre las soluciones numéricas las conclusiones obtenidas a partir del análisis geométrico del modelo efectuado en 5.2 –y que, en efecto, se verifican– y para determinar una aproximación suficientemente buena del valor del precio sombra inicial o valoración social de la unidad de capital por trabajador efectivo medida en unidades corrientes de utilidad del consumo por trabajador efectivo que, adoptada, conduciría asintóticamente a la economía española, desplazándola sobre su brazo de estabilidad, hacia la regla de oro modificada.

PROGRAMA Nº 1

```
      DIMENSION XKC(500),CC(500),P(500),CO(500) , GKA(500)
    4 READ(5,100) N,XKC(1),XKF,D,T,XL
      IF ( N.EQ.-1 ) GO TO 1000
      READ(5,101) P(1),PI,PS,GA,AL,DEL
      READ(5,102) B,XM,ET,GAP
      WRITE(6,200)
      WRITE(6,120) N,XKC(1),XKF,D
      WRITE(6,121) T,XL,P(1),PI
      WRITE(6,122) PS,GA,AL,DEL
      WRITE(6,123) B,XM,ET,GAP
      CALL BUF
       ETI = 1./ET
       COEF = ((1.+GAP)*(1.+B+XM))/((1.+B)*(1.+XM-XM*ET))
      J=0
      M = N+1
   47 J=J+1
       DO 17 I = 2,M,1
      GKA(I)=GA*XKC(I-1)**AL
       P(I) =(P(I-1)*COEF)/(1.-DEL+AL*GKA(I)/XKC(I-1))
       CO(I)= ((COEF*(1.+XM-XM*ET)**T)/P(I))**ETI
       CC(I-1) = CO (I)
       DIF = CO(I)-GKA(I)
       IF (DIF) 7,7,6
    6 CC(I-1)=GKA(I)
    7 XKC(I) = (GKA(I)-CC(I-1)-(DEL-1.)*XKC(I-1))/(1.+B+XM)
   17 CONTINUE
       DIF = XKF-XKC(M)
    9 IF (DIF) 10,10,11
   11 DIFP = D-DIF
      IF (DIFP) 13,13,14
   13 PI = P(1)
      P(1) = (P(1)+PS)/2.
      GO TO 47
   10 DIFP=DIF+D
      IF (DIFP) 15,15,14
   15 PS=P(1)
      P(1)=(P(1)+PI)/2.
      GO TO 47
   14 S = 0
      WRITE(6,200)
      WRITE (6,300)  J
      WRITE(6,103) P(1)
       DO 22 I = 2,M,1
       II = I-1
   22 WRITE(6,110) P(I),CO(I) ,GKA(I) ,CC(II) ,XKC(I)
      WRITE(6,200)
      DO 12 I=1,M,1
      XI = I-1
      GKA(I)=GA*XKC(I)**AL
      DIF = M-I
      IF (DIF) 25,25,26
   26 XIB=CC(I)/GKA(I)
      SI=1.-XIB
      CI=CC(I)*EXP(XM*(T+XI))
      WRITE(6,50) XIB,SI,CI
```

```
   S=S+((1.+B)/((1.+GAP))**XI)*(CI**(1.-ET))/(1.-ET)
25 XKP = XKC(I)*EXP(XM*(T+XI))
   WRITE(6,103)XKP
   XLL = XL*EXP(B*XI)
   XKI=XKC(I)*XL*EXP(T*XM)*EXP((B+XM)*XI)
   XKIA =XKI*1.981
   WRITE(6,50)XLL,XKI,XKIA
   IF (DIF) 27,27,28
28 CI =CI*XLL
   CIA = CI*1.981
   WRITE(6,52) CI,CIA
27 PPI=GA*(XKI**AL)*(XLL**(1.-AL))*EXP(XM*(1.-AL)*(T+XI))
   PPC=PPI*1.981
   RI=PPC/(2.67*XLL)
   WRITE(6,50)PPI,PPC,RI
   PC=P(I)*EXP(XM*(1.-ET))**XI
   PI=PC/EXP(XM*(XI+T))
   WRITE(6,52)PC,PI
12 CONTINUE
   WRITE(6,103) S
   S=S*XL
   WRITE(6,103)S
   GO TO 4
00 WRITE(6,200)
   STOP
00 FORMAT(I3,F9.0,F9.0,F3.0,F3.0,F9.0)
01 FORMAT(3F11.0,F6.0,2F5.0)
02 FORMAT(2F5.0,F4.0,F5.0)
03 FORMAT(1H0,  //,10X,E14.8)
00 FORMAT(1H1)
23 FORMAT(1H ,6X,4H B= ,E14.8,2X,4H XM=,E14.8,2X,4H ET=,E14.8,2X,4HGA
  1P=,E14.8)
22 FORMAT(1H ,6X,4H PS=,E14.8,2X,4H GA=,E14.8,2X,4H AL=,E14.8,2X,4HDE
  1L=,E14.8)
21 FORMAT(1H ,6X,4H T= ,E14.8,2X,4H XL=,E14.8,2X,4H PO=,E14.8,2X,4H P
  1I=,E14.8)
20 FORMAT(1H ,6X,4H N= ,I14,2X,4HXKC=,E14.8,2X,4HXKF=,E14.8,2X,4H D=
  1,E14.8)
 0 FORMAT(1H ,     E14.8,2X,E14.8,2X,E14.8,2X,E14.8,2X,E14.8)
50 FORMAT(1H ,    /, 3(E14.8,6X))
52 FORMAT(1H ,    /,2(E14.8,6X))
 0 FORMAT(1H0,     //,10X,I5)
   END
```

PROGRAMA Nº 2

```
      DIMENSION XKC(500),CC(500),P(500)
    4 READ(5,100) N,XKC(1),XKF,D,T,XL
      IF ( N.EQ.-1 ) GO TO 1000
      READ(5,101) P(1),PI,PS,GA,AL,DEL
      READ(5,102) B,XM,ET,GAP
      WRITE(6,200)
      WRITE(6,120) N,XKC(1),XKF,D
      WRITE(6,121) T,XL,P(1),PI
      WRITE(6,122) PS,GA,AL,DEL
      WRITE(6,123) B,XM,ET,GAP
       ETI = 1./ET
      J=1
       COEF = ((1.+GAP)*(1.+B+XM))/((1.+B)*(1.+XM-XM*ET))
      M = N+1
  501 IF (N-50 ) 5,51,500
    5 K=MOD(J,2)
      IF(K.EQ.0) GO TO 35
      WRITE(6,200)
   35 WRITE(6,103) P(1)
      GO TO 47
   51 WRITE(6,200)
      WRITE(6,103) P(1)
      GO TO 47
  500 WRITE(6,103) P(1)
   47 CONTINUE
       DO 17 I = 2,M,1
       GKA = GA*XKC(I-1)**AL
       P(I) =(P(I-1)*COEF)/(1.-DEL+AL*GKA/XKC(I-1))
       CO = ((COEF*(1.+XM-XM*ET)**T)/P(I))**ETI
       CC(I-1) = CO
       DIF = CO-GKA
       IF (DIF) 7,7,6
    6 CC(I-1)=GKA
    7 XKC(I) = (GKA-CC(I-1)-(DEL-1.)*XKC(I-1))/(1.+B+XM)
       II = I-1
   22 WRITE(6,110) P(I),CO,GKA,CC(II),XKC(I)
   17 CONTINUE
      J=J+1
      IF(J.EQ.50) GO TO 4
       DIF = XKF-XKC(M)
    9 IF (DIF) 10,10,11
   11 DIFP = D-DIF
      IF (DIFP) 13,13,14
   13 PI = P(1)
      P(1) = (P(1)+PS)/2.
      GO TO 501
   10 DIFP=DIF+D
      IF (DIFP) 15,15,14
   15 PS=P(1)
      P(1)=(P(1)+PI)/2.
      GO TO 501
   14 S = 0
      WRITE(6,200)
      DO 12 I=1,M,1
      XI = I-1
```

```
      GKA=GA*XKC(I)**AL
      DIF = M-I
      IF (DIF) 25,25,26
   26 XIB=CC(I)/GKA
      SI=1.-XIB
      CI=CC(I)*EXP(XM*(T+XI))
      WRITE(6,50) XIB,SI,CI
      S=S+((1.+B)/((1.+GAP))**XI)*(CI**(1.-ET))/(1.-ET)
   25 XKP = XKC(I)*EXP(XM*(T+XI))
      WRITE(6,103)XKP
      XLL = XL*EXP(B*XI)
      XKI=XKC(I)*XL*EXP(T*XM)*EXP((B+XM)*XI)
      XKIA =XKI*1.981
      WRITE(6,50)XLL,XKI,XKIA
      IF (DIF) 27,27,28
   28 CI =CI*XLL
      CIA = CI*1.981
      WRITE(6,52) CI,CIA
   27 PPI=GA*(XKI**AL)*(XLL**(1.-AL))*EXP(XM*(1.-AL)*(T+XI))
      PPC=PPI*1.981
      RI=PPC/(2.67*XLL)
      WRITE(6,50)PPI,PPC,RI
      PC=P(I)*EXP(XM*(1.-ET))**XI
      PI=PC/EXP(XM*(XI+T))
      WRITE(6,52)PC,PI
   12 CONTINUE
      WRITE(6,103) S
      S=S*XL
      WRITE(6,103)S
      WRITE(6,200)
      GO TO 4
 1000 STOP
  100 FORMAT(I3,F9.0,F9.0,F3.0,F3.0,F9.0)
  101 FORMAT(3F11.0,F6.0,2F5.0)
  102 FORMAT(2F5.0,F4.0,F5.0)
  103 FORMAT(1H0,////,10X,E14.8)
  200 FORMAT(1H1)
  123 FORMAT(1H ,6X,4H B= ,E14.8,2X,4H XM=,E14.8,2X,4H ET=,E14.8,2X,4HGA
     1P=,E14.8)
  122 FORMAT(1H ,6X,4H PS=,E14.8,2X,4H GA=,E14.8,2X,4H AL=,E14.8,2X,4HDE
     1L=,E14.8)
  121 FORMAT(1H ,6X,4H T= ,E14.8,2X,4H XL=,E14.8,2X,4H PO=,E14.8,2X,4H P
     1I=,E14.8)
  120 FORMAT(1H ,6X,4H N= ,I14,2X,4HXKC=,E14.8,2X,4HXKF=,E14.8,2X,4H D=
     1,E14.8)
  110 FORMAT(1H ,     E14.8,2X,E14.8,2X,E14.8,2X,E14.8,2X,E14.8)
   50 FORMAT(1H ,    /, 3(E14.8,6X))
   52 FORMAT(1H ,    /,2(E14.8,6X))
  300 FORMAT(1H0,//////,10X,I5)
      END
```

CAPITULO VII – RESULTADOS

7.1. Obtención de sucesiones óptimas para distintas tasas de crecimiento anual del capital

7.1.1. Determinación de los valores de referencia

Sobre la base del sistema de condiciones necesarias de optimalidad obtenidas a partir del principio de máximo de Pontryagin cuando éste se aplica al modelo de crecimiento en forma discreta analizado en el capítulo 5, se han calculado, mediante el programa de cómputo expuesto en 6.3, sucesiones de crecimiento óptimo a un nivel de aproximación mínimo dado de las variables fundamentales para distintas tasas de crecimiento anual del capital, tomando como valores de los parámetros los estimados para la economía española actual en 6.2, que son los

$$\Gamma = 281{,}08$$
$$\alpha = 0{,}389$$
$$m = 0{,}071$$
$$\delta = 0{,}035$$
$$\rho = 0{,}009$$
$$\eta = 0{,}65$$
$$\gamma = 0{,}035$$

Antes de indicar las tasas de crecimiento adoptadas para los diferentes modelos y exponer los resultados obtenidos, vamos a determinar los valores que tomarán los puntos de referencia del modelo en el plano de fase para los parámetros establecidos.

Veamos, en primer lugar, cual sería la situación inicial en que debiera encontrarse la economía española para que un crecimiento armónico al ritmo de su tasa natural de crecimiento diera lugar a unas sucesiones constantes del consumo y del capital por trabajador efectivo y del precio sombra de éste que satisfagan las condiciones necesarias de optimalidad. La posibilidad de un crecimiento armónico compatible con el sistema de ecuaciones que constituyen dichas condiciones de optimalidad está garantizada para el conjunto de parámetros dados, pues es

$$\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta) = 0{,}11602$$

y

$$\delta + \rho + m = 0{,}115$$

de manera que

$$\frac{(1+\gamma)(1+\rho+m)}{(1+\rho)(1+m-m\eta)} - (1-\delta) > \delta + \rho + m$$

de donde resulta que la tasa natural de interés del sistema es estrictamente positiva.

El valor de la relación capital-trabajo efectivo requerida por el sistema para establecerse en la sucesión de crecimiento óptimo característica de la regla de oro modificada es la $\hat{k}^*$ que, calculada según su expresión determinada en los capítulos anteriores, con los parámetros estimados resulta ser igual a 73.762 pesetas constantes de 1958 por trabajador efectivo. De lo cual resulta que, por ejemplo la economía española hubiera podido seguir, a partir de 1970, una trayectoria de crecimiento según su regla de oro modificada, con un stock de capital en ese año igual a 2,554.450 millones de pesetas constantes de 1958, lo que equivale a 5,057.811 millones de pesetas corrientes de 1970.

El mantenimiento del sistema en su punto singular requiere una decisión óptima consistente en consumir en cada periodo una cantidad del producto por trabajador efectivo igual a

$$\hat{c}^* = 13.517$$

pesetas constantes de 1958, lo que equivale a un valor de la relación ahorro-producto constantemente igual a

$$s^* = 0{,}38558$$

de manera que la política óptima característica de la regla de oro modificada de nuestra economía consiste en destinar a la inversión bruta un poco más de un tercio del producto obtenido, dedicando al consumo los casis dos tercios restantes.

Para que la colectividad se decida a mantener el correspondiente volumen de ahorro, su nivel de apreciación del capital, medido en unidades de utilidad derivada del consumo, deberá reflejarse en un valor de $\hat{p}^*$ igual a

$$\hat{p}^* = 0{,}00338338$$

en el año 1970 (en que $t_0 = 17$), lo que supone la aceptación general de un precio sombra de la unidad de capital por trabajador efectivo igual a 0,002232343 unidades corrientes de utilidad derivada de una unidad de consumo por trabajador efectivo.

La evolución de la economía española según su regla de oro modificada supondría un crecimiento a la misma tasa del capital, el producto, la inversión y el consumo en términos absolutos: la tasa de crecimiento de la mano de obra efectiva, que será igual a

$$\rho + m = 0{,}08$$

es decir, de un 8 por cien,

El valor de la relación capital-trabajo efectivo indefinidamente mantenible es

$$\bar{\hat{k}} = 330.000$$

pesetas constantes de 1958 por trabajador efectivo, nivel que la depreciación impide al sistema sobrepasar. Esto significaría que si, por ejemplo, en el año 1970, la economía española tuviese un volumen de capital igual a $\hat{L}_{70}\ \bar{\hat{k}}$ = 11,530.340 millones de pesetas constantes de 1958, equivalentes a 22,830.073,2 millones de pesetas corrientes, el nivel de depreciación de este capital con el coeficiente de depreciación adoptado frenaría el crecimiento del sistema hasta el punto de no permitirle una tasa de acumulación del capital superior al 8 por cien, es decir, de su tasa natural de crecimiento.

Para el año 1970, a partir del cual se van a plantear los modelos de acumulación estudiados en este apartado, la estimación del nivel del stock de capital, llevada a cabo en la forma que se detalla en 6.2.2, nos ha dado la cantidad de 8,560.521 millones de pesetas corrientes, lo que, reducido a nuestra unidad habitual de pesetas constantes de 1958 se convierte en 4,321.313 millones. Con una población activa, L = 12,732.200, y sabiendo que, para 1970 es

$$\hat{L} = L\ (1 + m)^{17}$$

obtenemos un nivel de capital por trabajador efectivo en 1970, $\hat{k}_0$, igual a 101.441,8 pesetas constantes de 1958.

La curva separatriz en el plano de fase nos proporciona, para el valor de $\hat{k}_0$ citado un precio sombra corregido igual a 0,002232605, lo que supone un precio sombra igual a 0,001472133. Así, pues, si en el año 1970 la valoración social de una unidad de capital por trabajador efectivo es menor o igual a 0,001472133 unidades de utilidad corriente del consumo por trabajador efectivo, el comportamiento óptimo consistirá en ahorrar todo el producto, reduciendo el stock de capital al ritmo de su depreciación.

Con esto tenemos determinados sobre el plano de fase los puntos de referencia del sistema que mejor pueden ayudarnos a una primera localización aproximada de las soluciones óptimas buscadas para diferentes tasas anuales de acumulación de capital. Pero antes de seguir adelante, es preciso recordar que el problema de crecimiento óptimo no tiene necesariamente solución para todas las tasas anuales de acumulación de capital posibles, sino solamente para aquellas que den lugar a valores finales del stock de capital que sean interiores, a coincidan con el extremo inferior del cono de alcanzabilidad definido por el stock de capital inicial y el *número de periodos del programa*. *En nuestro problema*, las hipótesis de no convertibilidad a posteriori del capital determinan, sin lugar a dudas, la tasa anual mínima de crecimiento, que coincide en valor absoluto con la de la depreciación —pues es del —3,5 por cien— y cuya sucesión óptima resultante, conseguida a base del consumo total de producto en cada periodo es la

$$s_i = 0 \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, T-1$$

$$\hat{k}_i = \left(\frac{1-\delta}{1+\rho+m}\right)^i \hat{k}_0 \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, T$$

de la que se deduce

$$\hat{K}_i = (1-\delta)^i \hat{K}_0$$

y en la que, por transcurrir totalmente por debajo de la curva separatriz, los precios sombra carecen de significado a efectos económicos.

En cuanto a la máxima tasa anual posible de crecimiento de capital, obtenida a base de un consumo nulo, y, por tanto, no admisible en ningún periodo de una sucesión óptima, depende del valor del stock de capital por trabajador efectivo, pues siendo

$$\frac{K_{i+1}-K_i}{K_i} = \frac{s_i \Gamma K_i^{\alpha} \hat{L}_i^{1-\alpha} - \delta K_i}{K_i}$$

cuando $s_i = 0$, será

$$\frac{K_{i+1}-K_i}{K_i} = \Gamma \hat{k}_i^{\alpha-1} - \delta$$

lo que, para el valor de $\hat{k}_0$ anteriormente obtenido proporciona un supremo de la tasa de acumulación del capital, económicamente inalcanzable, igual al 21,05 por cien. Esta mínima cota superior es decreciente respecto al valor de la relación capital-trabajo efectivo, de manera que aumentará en los modelos en que ésta decrezca, y viceversa. El valor obtenido de ella para 1970 nos servirá de orientación para determinar tasas admisibles de crecimiento del capital.

7.2.2. Cálculo y análisis de las sucesiones óptimas

Vamos, en este apartado, a exponer y analizar los resultados de los modelos numéricos de crecimiento óptimo calculados para distintos valores de las tasas anuales de acumulación del capital.

Los modelos de crecimiento económico óptimo alcanzan su pleno sentido e interés en planificaciones a medio y largo plazo, es decir, para horizontes temporales lo suficientemente amplios como para que una aproximación lineal de la sucesión óptima resulte inadecuada; pero, al mismo tiempo, horizontes demasiado prolongados reducen la fiabilidad de un programa calculado sobre la base de permanencia de las relaciones funcionales y de los valores de los parámetros durante todo el periodo de planificación. Teniendo en cuenta todos estos factores, hemos tomado para nuestros modelos un horizonte de 20 años de duración. Una buena parte de ellos se ha calculado también con una duración de 50 años, y así, los resultados obtenidos para dos periodos de planificación de tan diferente longitud nos permiten establecer comparaciones y completar nuestro análisis.

El máximo error tolerable de $\hat{k}_T$ en cada sucesión óptima aproximada se ha determinado de forma que su correspondiente error relativo sea siempre inferior al 0,005.

Las sucesiones óptimas de crecimiento económico que hemos calculado son todas las correspondientes a tasas anuales de acumulación del capital comprendidas entre el 4 por cien y el 10 por cien, tomadas a intervalos del 0,5 por cien.

El volumen final de capital por trabajador efectivo correspondiente a cada una de las tasas de crecimiento anual del capital fijadas, es menor que el nivel inicial fijado para el año 1970 en los modelos cuyas tasas de acumulación anuales están comprendidas entre el 4 por cien y el 7,5 por cien, sensiblemente igual, en el de acumulación del 8 por cien, y mayor para los modelos en que el capital crece a tasas anuales comprendidas entre el 8,5 por cien y el 10 por cien, todo lo cual era de esperar, dada la relación existente entre los valores absolutos del capital y los del capital por trabajador efectivo.

Para los modelos correspondientes a tasas de crecimiento del capital comprendidas entre el 4 por cien y el 8 por cien, los valores seleccionados como cotas inferior y superior de los precios sombra corregidos han sido el correspondiente de la curva separatriz para $\hat{k}_0$ y el $\hat{p}^*$ del punto singular respectivamente, elección que ha resultado totalmente satisfactoria. Tomando un $\hat{p}_0$ inicial igual al valor medio entre ambas cotas, se han obtenido las sucesiones de crecimiento con el nivel de aproximación deseado al cabo de un número relativamente pequeño de iteraciones (entre 9 y 12).

Para los modelos con tasas de acumulación del capital superiores al 8 por cien el valor $\hat{p}^*$ del punto singular no ha resultado una adecuada cota inferior de los precios sombra corregidos, sin duda porque, siendo la diferencia entre los capitales inicial y final por trabajador efectivo, $\hat{k}_0$ y $\hat{k}_T$ no muy grande en comparación con la longitud del horizonte de planificación el correspondiente ritmo de crecimiento de $\hat{k}$ en las sucesiones óptimas no es suficiente para situar a éstas, desde el primer momento, en la región que está por encima de la curva que mantiene constantes por un periodo los valores de la relación capital-trabajo efectivo de toda sucesión óptima que incida en ellas. El proceso de convergencia hasta determinar una solución suficientemente aproximada ha resultado algo más largo, aunque sin sobrepasar los 15 iteraciones.

Los valores de la variable de control, es decir, las fracciones del producto que, de acuerdo con los resultados del programa, han de destinarse a la inversión en cada uno de los años que lo constituyen, cuando se desea seguir una política óptima, pueden verse, para las distintas tasas anuales de acumulación de capital, en las tablas insertas a continuación.

De su examen pueden obtenerse algunos resultados en cuanto al grado de sacrificio –representado por la relación ahorro-producto, o porción del producto que la sociedad sacrifica respecto de sus posibilidades de consumo, con el fin de conseguir un determinado nivel de capital final– impuesto por cada una de las tasas de acumulación de capital a lo largo de una solución óptima. En primer lugar, y, como era de esperar, el valor de la relación ahorro-producto para cada uno de los años que forman parte del programa es mayor a medida que la tasa de acumulación del capital aumenta. Para una tasa del 4 por cien, el valor de esta relación aumenta durante los seis primeros años, reduciéndose después progresivamente hasta alcanzar valores próximos a cero, lo que nos indica que la sucesión se acerca a la curva separatriz. A medida que la tasa de acumulación del capital aumenta, se dilata también el periodo de tiempo en que el valor de la relación ahorro-producto crece, alejándose por tanto el año del máximo sacrificio, y acortándose el periodo de decrecimiento, hasta que, para tasas mayores o iguales que el 7 por cien, el valor de la relación ahorro-producto crece durante los 20 años del plan, llegándose, en el último periodo de este, a sacrificar, con destino al ahorro, cantidades superiores a la mitad del producto para una tasa de acumulación del capital del 8 por cien, e incluso próximas a un 75 por cien del mismo cuando se desea un crecimiento anual del capital del 10 por cien.

Observemos, por último, que para estas tasas de acumulación de capital, los valores de la relación ahorro-producto son siempre estrictamente positivos, de donde se deduce que la política de consumo total del producto no será óptima en ninguno de los periodos del plan y, por consiguiente, las sucesiones óptimas se mantienen siempre en el plano de fase por encima de la curva separatriz.

A la vista de las series de datos obtenidos en los cálculos de los distintos modelos –que, como ya indiqué, quedan depositados en la Secretaría de esta Fa-

Tabla núm. 1

Valores óptimos obtenidos para la relación ahorro-producto

Tasas de acumulación del capital

Años	4 por cien	4,5 por cien	5 por cien	5,5 por cien	6 por cien
1970	0,2881	0,2912	0,2949	0,2994	0,3046
1971	0,2949	0,2982	0,3022	0,3069	0,3125
1972	0,3001	0,3037	0,3080	0,3132	0,3192
1973	0,3040	0,3079	0,3126	0,3182	0,3248
1974	0,3065	0,3108	0,3160	0,3222	0,3295
1975	0,3075	0,3123	0,3182	0,3251	0,3332
1976	0,3072	0,3127	0,3192	0,3270	0,3360
1977	0,3054	0,3116	0,3190	0,3278	0,3379
1978	0,3020	0,3091	0,3176	0,3276	0,3391
1979	0,2969	0,3052	0,3149	0,3263	0,3394
1980	0,2899	0,2995	0,3108	0,3240	0,3390
1981	0,2806	0,2919	0,3052	0,3204	0,3376
1982	0,2687	0,2822	0,2977	0,3154	0,3354
1983	0,2537	0,2698	0,2882	0,3090	0,3322
1984	0,2348	0,2542	0,2762	0,3009	0,3279
1985	0,2108	0,2346	0,2613	0,2907	0,3224
1986	0,1804	0,2100	0,2427	0,2781	0,3156
1987	0,1410	0,1787	0,2194	0,2625	0,3071
1988	0,0890	0,1382	0,1899	0,2431	0,2967
1989	0,0180	0,0846	0,1521	0,2190	0,2840

Tabla núm. 2

Valores óptimos obtenidos para la relación ahorro-producto

Tasas de acumulación del capital

Años	6,5 por cien	7 por cien	7,5 por cien	8 por cien
1970	0,3108	0,3183	0,3275	0,3384
1971	0,3191	0,3271	0,3368	0,3484
1972	0,3264	0,3349	0,3453	0,3577
1973	0,3226	0,3419	0,3532	0,3665
1974	0,3380	0,3482	0,3605	0,3750
1975	0,3426	0,3538	0,3673	0,3831
1976	0,3465	0,3590	0,3739	0,3912
1977	0,3498	0,3636	0,3801	0,3992
1978	0,3524	0,3679	0,3863	0,4073
1979	0,3545	0,3719	0,3924	0,4155
1980	0,3560	0,3757	0,3985	0,4241
1981	0,3571	0,3793	0,4048	0,4330
1982	0,3577	0,3828	0,4112	0,4423
1983	0,3578	0,3862	0,4180	0,4521
1984	0,3574	0,3896	0,4250	0,4625
1985	0,3565	0,3930	0,4326	0,4736
1986	0,3550	0,3966	0,4406	0,4853
1987	0,3530	0,4003	0,4492	0,4978
1988	0,3504	0,4042	0,4584	0,5010
1989	0,3471	0,4083	0,4683	0,5249

Tabla núm. 3

Valores óptimos obtenidos para la relación ahorro-producto

Tasas de acumulación del capital

Años	8,5 por cien	9 por cien	9,5 por cien	10 por cien
1970	0,3519	0,3684	0,3888	0,4140
1971	0,3626	0,3799	0,4013	0,4276
1972	0,3728	0,3912	0,4138	0,4413
1973	0,3828	0,4024	0,4263	0,4553
1974	0,3925	0,4136	0,4390	0,4696
1975	0,4022	0,4248	0,4519	0,4842
1976	0,4119	0,4363	0,4653	0,4994
1977	0,4217	0,4482	0,4791	0,5150
1978	0,4319	0,4604	0,4934	0,5311
1979	0,4424	0,4731	0,5082	0,5477
1980	0,4534	0,4864	0,5236	0,5648
1981	0,4649	0,5003	0,5395	0,5824
1982	0,4769	0,5148	0,5560	0,6003
1983	0,4896	0,5293	0,5730	0,6185
1984	0,5030	0,5456	0,5905	0,6368
1985	0,5170	0,5619	0,6083	0,6553
1986	0,5317	0,5788	0,6264	0,6738
1987	0,5471	0,5961	0,6447	0,6921
1988	0,5631	0,6138	0,6630	0,7103
1989	0,5797	0,6318	0,6814	0,7281

cultad— podemos sacar algunas conclusiones interesantes en lo que concierne al comportamiento de las sucesiones óptimas para cada condiciones de contorno fijadas, determinadas en este caso por el volumen de capital por trabajador efectivo en el año 1.970, ya fijado, y la tasa anual de acumulación del capital.

En primer lugar, el examen de las sucesiones obtenidas para los valores de $\hat{p}_{i+1}$, $\hat{c}_{i*}$, $\Gamma\hat{k}_i$, $\hat{c}_i$ y $\hat{k}_{i+1}$, y *que aparecen, a continuación de la impresión* de los datos, en la segunda hoja de cada modelo nos indica que las sucesiones óptimas se desplazan sobre el plano de fase según líneas de puntos que siguen reglas de evolución similares a las de las trayectorias analizadas en el correspondiente modelo continuo, lo que nos confirma en los resultados obtenidos a partir del estudio geométrico del modelo discreto en el capítulo 5. Así, por ejemplo, podemos observar que, a medida que la tasa de acumulación del capital es mayor, el precio sombra *inicial de la sucesión*, y todos los posteriores, lo son también, lo que prueba que, efectivamente, una sucesión se mantiene por encima de otra en el plano fase cuando su ritmo de acumulación de capital por trabajador efectivo es mayor. Para las tasas de acumulación de capital más bajas (entre 4 y 6,5 por cien), el nivel de capital por trabajador efectivo decrece constantemente durante los 20 años de duración del plan, mientras que el precio sombra comienza creciendo hasta alcanzar su nivel máximo en el valor más próximo a $\hat{p}^*$, periodo a partir del cual decrece constantemente; el periodo en el cual el precio sombra es máximo es precisamente aquel en que el consumo por trabajador efectivo es mínimo, como no podía menos de esperarse, estando ambas variables ligadas por una relación decreciente en todo periodo en el que el sistema se encuentra por encima de la separatriz. Para las tasas de acumulación de capital superiores al 7 por cien, el capital final por trabajador efectivo fijado es mayor que el del punto singular, *con lo que el nivel de esta va*riable comienza decreciendo y toma su valor más bajo para un nivel próximo al del punto singular, periodo a partir del cual crece hasta alcanzar su valor final fijado en la aproximación requerida. No así el precio sombra, en cambio, que en estos modelos crece —y, consiguientemente, el consumo por trabajador efectivo decrece— durante todo el horizonte de planificación.

En lo que respecta a las series de datos impresos por periodos en las hojas sucesivas de cálculos, nos indican claramente que, para todas las tasas de acumulación consideradas hasta ahora, el consumo por trabajador real —y, por tanto, en virtud de nuestras hipótesis, el consumo per capita— es una sucesión creciente en el tiempo, pero este crecimiento es cada vez más lento a medida que la tasa de acumulación del capital es mayor. El consumo total crece también a lo largo del horizonte de planificación. El capital por trabajador real crece también constantemente en el tiempo para cada modelo —salvo en los periodos muy últimos de los modelos con tasas de acumulación de capital del 4 por cien y del 4,5 por cien—. En cuanto al producto bruto, *aumenta, como era de esperar, con el transcurso* del tiempo en todos estos modelos, tanto más rápidamente cuanto mayor sea la tasa de acumulación del capital, con tasas que van desde el 2,75 por cien, para una tasa de crecimiento del capital igual a 4 por cien, hasta el 5,1 por cien, para el modelo con crecimiento del capital igual al 10 por cien. Y siendo estas tasas superiores a la del crecimiento de la población, también el producto bruto per capita crece a lo largo del tiempo en todos los modelos. Por último, hagamos notar que la medida *del bienestar total obtenido por la* colectividad a lo largo de los 20 años, valorado al comienzo del plan, disminuye a medida que crece la tasa de acumulación del capital, siendo, por tanto, el mayor de los considerados el correspondiente a una tasa del 4 por cien.

Se han calculado también modelos de crecimiento óptimo para valores del capital total final iguales o menores que los del stock de capital inicial —con*cretamente, para tasas* de crecimiento del mismo del 0 por cien, —1 por cien, —2 por cien y —3 por cien—, todos ellos pertenecientes al cono alcanzable. El cálculo de estos modelos nos permite comprobar numéricamente la existencia de decisiones óptimas consistentes en el consumo total, y poner así de manifiesto la ventaja esencial del principio de máximo de Pontryagin sobre el cálculo de variaciones clásico, resolviendo efectivamente mediante el primer método un modelo que no podría haberse resuelto con las técnicas del segundo, al tomar la sucesión de control óptima valores en la frontera de su recinto de admisibilidad.

Los valores de la relación ahorro-producto óptima para cada año y cada tasa de acumulación del capital son los que aparecen en la tabla correspondiente inserta a continuación. Observemos que son, para cada año, tanto más pequeños cuanto menor es la tasa de acumulación de capital, creciendo ligeramente en los primeros años para las tasas del 0 por cien y del –1 por cien, para decrecer después constantemente hasta el valor o y decreciendo continuamente desde el primer año para las tasas del –2 por cien y –3 por cien. El encuentro de la sucesión con la curva separatriz, periodo a partir del cual lapolítica óptima consiste en el consumo total del producto, tiene lugar tanto más pronto cuanto menor es la tasa de acumulación del capital, de manera que cuando ésta sea del –3 por cien la colectividad dejará de ahorrar a partir de 1973.

La evolución en el plano de fase de las sucesiones óptimas correspondientes a estas tasas de crecimiento del capital responde también al esquema geométrico esbozado en anteriores capítulos, como puede comprobarse a la vista de los resultados numéricos.

El consumo por trabajador efectivo decrece en un principio para cada una de las soluciones con tasas de acumulación del capital iguales a 0 por cien, –1 por cien y –2 por cien, pasando después a crecer –mientras decrecen los precios sombra– hasta el periodo de encuentro de la sucesión con la curva separatriz, a partir del cual $\hat{c}$ decrece. Para la solución, correspondiente a la tasa de variación del capital del –3 por cien el consumo por trabajador efectivo decrece continuamente, lo que, como puede verse en los resultados, se debe a que el precio sombra inicial de la sucesión es lo suficientemente pequeño para que esta encuentre a la curva separatriz para un valor de $\hat{k}$ no inferior al del punto singular del sistema.

El consumo por trabajador real crece continuamente en el tiempo para cada una de estas sucesiones óptimas, siendo su crecimiento tanto más lento cuanto menor es la tasa de acumulación de capital, de manera que, siendo mayor el consumo per capita de 1970 cuanto menor es esta tasa –lo cual es lógico, pues, obteniéndose un mismo producto, se destina al ahorro una proporción menor del

Tabla núm. 4

Valores óptimos obtenidos para la relación ahorro-producto

Tasas de acumulación del capital

Años	0 por cien	–1 por cien	–2 por cien	–3 por cien
1970	0,2391	0,2119	0,1682	0,0783
1971	0,2421	0,2126	0,1647	0,0562
1972	0,2425	0,2098	0,1562	0,0316
1973	0,2401	0,2033	0,1419	0,0000
1974	0,2347	0,1925	0,1205	0,0000
1975	0,2258	0,1765	0,0900	0,0000
1976	0,2130	0,1542	0,0471	0,0000
1977	0,1954	0,1238	0,0000	0,0000
1978	0,1717	0,0823	0,0000	0,0000
1979	0,1403	0,0250	0,0000	0,0000
1980	0,0982	0,0000	0,0000	0,0000
1981	0,0408	0,0000	0,0000	0,0000
1982	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1983	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1984	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1985	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1986	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1987	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1988	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1989	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

mismo– el consumo per capita de 1989 es mayor cuanto mayor es la tasa de acumulación de capital.

El capital por trabajador real crece en los primeros periodos para decrecer después –con la excepción del modelo con tasa de variación del capital del –3 por cien en que decrece desde el principio– y el decrecimiento es tanto más rápido cuanto menor es la tasa de acumulación del capital. En cuanto al producto bruto, también crece continuamente en los cuatro modelos, aunque más lentamente a medida que la tasa de acumulación del capital es más pequeña, oscilando su tasa anual de crecimiento entre un 1,2 por cien para el modelo de capital total final igual al inicial, y aproximadamente un 0 por cien para el de acumulación de capital igual a –3 por cien. El bienestar total obtenido decrece ahora al disminuir la tasa de acumulación del capital, siendo el mejor de los cuatro el correspondiente a la del 0 por cien, lo que nos confirma en la idea de que, incluso al margen de la decisión que tomemos en torno al nivel de capital final que ha de dejarse a generaciones futuras, a niveles muy bajos de la relación ahorro-producto, una reducción del nivel del capital en los primeros periodos puede traducirse en un aumento del bienestar total obtenido y, por tanto, ser rentable.

El análisis, de los modelos de crecimiento económico óptimo con un horizonte temporal de 50 años y tasas anuales de acumulación de capital iguales a las ya mencionadas, nos lleva a conclusiones semejantes a las de los correspondientes programas de 20 años de duración, salvo las naturales consecuencias del alargamiento del periodo de planificación –así, por ejemplo, los crecimientos anuales del capital comprendidos entre el 4 por cien y el 5,5 por cien, ambos inclusive, siendo considerablemente inferiores a la tasa natural de crecimiento, determinan, en un programa de 50 años de duración una reducción del capital por trabajador efectivo lo suficientemente grande como para que las últimas etapas de la sucesión óptima transcurran por debajo de la curva separatriz, dando lugar a un ahorro bruto nulo, cosa que no ocurría en los modelos, con idénticas tasas de acumulación de capital y una duración de 20 años–. Salvo algunas pequeñas diferencias de este tipo, pues, las observaciones anteriormente anotadas acerca de los modelos con horizonte de planificación de 20 años, siguen siendo válidas para los de 50 años.

La comparación entre modelos con horizontes de planificación tan diferentes amplía las posibilidades de nuestro análisis, permitiéndonos por ejemplo, comprobar, a la vista de los resultados numéricos obtenidos para modelos con niveles sensiblemente iguales de capitales inicial y final por trabajador efectivo y duración muy distinta, la propiedad "autopista" de las sucesiones óptimas. Así, por ejemplo, la comparación entre las sucesiones de $\hat{p}$ y $\hat{k}$ obtenidas para el modelo de 20 años y tasa de acumulación del capital del 5 por cien, y el de 50 años y crecimiento del 6,5 por cien anual de capital nos muestra claramente que, fijado un entorno de los valores $\hat{p}^*$ y $\hat{k}^*$ las sucesiones óptimas correspondientes al segundo de éstos modelos permanecen en él durante mucho más tiempo que las del primer modelo, y los valores de los precios sombra corregidos se acercan mucho más a $\hat{p}^*$. Otro tanto podríamos deducir de la comparación de las sucesiones óptimas correspondientes a tasas de acumulación del capital del 10 por cien y del 9 por cien y horizontes de 20 y 50 años respectivamente, siendo notorio, en este caso, el mayor acercamiento de los valores de $\hat{k}$ al $\hat{k}^*$ en el programa más largo; todo lo cual nos confirma en las conclusiones obtenidas en el capítulo 3 para el modelo teórico, como consecuencia del análisis geométrico del comportamiento de las trayectorias óptimas.

Los modelos de crecimiento óptimo de larga duración —en nuestro caso, 50 años— pueden también resultar de interés en relación con su aplicación parcial cuando el ritmo de acumulación de capital deseable en la economía no es fácil de determinar. En efecto, en el capítulo 4 de este trabajo, al estudiar los modelos con horizonte infinito, indicábamos ya que uno de los aspectos más problemáticos en la elaboración de un modelo de crecimiento económico óptimo estriba en la fijación del nivel de capital final que ha de dejarse a beneficio de las generaciones futuras, a costa, en general, de un sacrificio en las presentes. Ahora bien, del examen de las sucesiones óptimas de la relación ahorro-producto para las distintas tasas de acumulación de capital se deduce que tanto en los modelos de 20 años de duración como en los de 50 sus valores son considerablemente sensibles a variaciones en el nivel de capital final exigido para los últimos años del horizonte de planificación y relativamente poco sensibles en los primeros años del mismo, de manera que la política óptima de ahorro a seguir comienza siendo bastante parecida para tasas de acumulación no muy diferentes. De ello se deduce que un posible procedimiento de determinación de una sucesión óptima con horizonte de 20 años, cuando no es factible una precisión adecuada en cuanto a la tasa de acumulación del capital consistiría en elaborar programas con 50 años de duración, tomando como política de actuación la correspondiente a los 20 primeros años del programa –que, efectivamente, es óptima para el nivel de capital final por trabajador efectivo dado por el programa en $i = 20$– y que, en vista de lo anteriormente observado, será sensiblemente igual para tasas de acumulación del capital no muy diferentes de la inicialmente fijada.

7.1.3. El brazo de estabilidad

La evolución, en el plano de fase, de las sucesiones de crecimiento óptimo obtenidas –que responde al esquema geométrico construido para las trayectorias óptimas del modelo continuo– nos induce a pensar que, puesto que de entre las sucesiones que comienzan con un $\hat{k}_0 > k^*$ y un $\hat{p}_0 < \hat{p}^*$, algunas evolucionan de forma que su capital por trabajador efectivo decrece continuamente, y otras, en cambio, se mantienen siempre en la zona en que los precios sombra crecen, existirá para cada $\hat{k}_0$ un $\hat{p}_0$ tal que la solución óptima que se inicie en $(\hat{k}_0, \hat{p}_0)$ se desplazará en el tiempo aproximándose asintóticamente al punto singular del sistema y siguiendo la línea marcada por uno de los brazos de estabilidad del mismo. Este $\hat{p}_0$ deberá ser menor que todos los precios sombra corregidos iniciales que den lugar a sucesiones óptimas de las que se mantienen siempre en la zona de los $\hat{p}$ crecientes, y mayor que los correspondientes a sucesiones de las que permanecen siempre en la zona de los $\hat{k}$ decrecientes.

Para localizarlo hemos comenzado obteniendo los resultados de uno de los modelos ya resueltos –concretamente, el de acumulación del capital al 7 por cien y 50 años de duración– con el programa núm. 2, es decir, elque imprime todas las iteraciones previas a la localización de la solución suficientemente aproximada. A la vista de estas iteraciones, y aplicando los criterios anteriormente expuestos, hemos hallado que el $\hat{p}_0$ inicial del brazo de estabilidad correspondiente al $\hat{k}_0$ determinado para 1970 deberá estar contenido en el intervalo

$$]0{,}0028563516,\ 0{,}0028586034[$$

Con el fin de precisar más este valor, hemos obtenido resultados de un nuevo modelo de crecimiento óptimo, también con el programa núm. 2, tomando como cotas inferior y superior de $\hat{p}_0$ los extremos del citado intervalo y como capital final por trabajador efectivo, el valor medio de los obtenidos para las iteraciones correspondientes a nuestras nuevas cotas en el modelo anterior. De esta forma hemos determinado un intervalo más pequeño en el que necesariamente ha de estar contenido el $\hat{p}_0$ de la solución de estabilidad, que es el

$$]0{,}0028563516,\ 0{,}0028569140[$$

Repitiendo el mismo procedimiento con éste segundo modelo, hemos construido un tercer modelo de crecimiento óptimo, del que se deduce que el precio sombra inicial corregido de la solución buscada ha de estar contenido en el intervalo

$$]0{,}0028563516,\ 0{,}0028564920[$$

al que corresponde un intervalo del valor del verdadero precio sombra igual a

$$]0{,}00188342,\ \ 0{,}00188351[$$

que queda así determinado con un error menor que 0,0000001. Así pues, si en el año 1970 se hubiese logrado una valoración social de la unidad de capital por trabajador efectivo igual a este valor, la política óptima subsiguiente hubiera conducido asintóticamente a la economía española hacia el estado característico de su regla de oro modificada.

7.2. Incidencia de las variaciones de los parámetros en las soluciones óptimas

En lo que sigue, vamos a analizar brevemente en qué sentido y a qué nivel se ven afectadas las soluciones óptimas de un modelo de crecimiento económico por variaciones en algunos de sus parámetros. El interés de este análisis radica en dos aspectos esenciales del mismo: en primer lugar, nos permite saber algo acerca de las repercusiones en la economía de una alteración en sus condicionamientos cuando el comportamiento colectivo es el óptimo o se encuentra próximo a él; en segundo lugar, la sensibilidad de los resultados del modelo respecto a ciertos parámetros, cuya determinación se ha realizado aceptando hipótesis a cuya semejanza con la realidad habría algunos reparos que oponer, afecta a su nivel de fiabilidad, por lo que conviene conocerla.

Este es el caso con los parámetros que forman parte del funcional objetivo, especialmente la tasa de descuento temporal de la utilidad, γ, y la elasticidad de ésta respecto al consumo, $1 - \eta$; pues las estimaciones realizadas siguiendo la pauta del trabajo de Mera nos han llevado a la conclusión de que, en un comportamiento próximo al óptimo, ambos parámetros están sujetos a la relación

$$0{,}0584 = \gamma + 0{,}036\,\eta \qquad \eta \in [0, 1[$$

pero la elección de valores realizada de entre todos los que satisfacen la condición arriba expresada es discutible. Interesa ver, por tanto, hasta que punto se alterarían los resultados del modelo si hubiésemos elegido otros valores de estos parámetros, que también verificasen la condición anterior.

Con este fin hemos calculado modelos de crecimiento óptimo de 20 y 50 años de duración, con tasas de acumulación del capital del 6 por cien y 5,5 por cien respectivamente, para los pares de valores de los parámetros citados:

a) $\eta = 0{,}79$, $\gamma = 0{,}03$

y

b) $\eta = 0{,}92$, $\gamma = 0{,}025$

ambos satisfaciendo la condición anteriormente expuesta que garantiza la existencia de trayectoria óptima en el punto singular del sistema —cuyas coordenadas hemos también calculado en cada caso como puntos de referencia.

Del examen de los resultados podemos deducir que la elección de valores diferentes de η y γ, pero tales que conserven entre ellos la relación indicada altera considerablemente los valores de los precios sombra y de la medida del bienestar total obtenido, reduciéndose ambos a medida que η aumenta —lo que era muy de esperar, dada la diferente valoración de consumo—. Los valores óptimos de la relación ahorro-producto se ven afectados por la variación de estos parámetros a un nivel máximo de un 8 por cien para el modelo a), y de un 15 por cien para el b). Las series del consumo per capita y del producto bruto, en cambio, se mantienen sensiblemente iguales para los diferentes valores elegidos de estos parámetros.

Para analizar ahora las implicaciones de *una variación* en la elasticidad de la utilidad respecto al consumo cuando todos los demás parámetros, incluida la tasa de descuento temporal de la utilidad, permanecen constantes, se han calculado modelos con las tasas de acumulación de capital ya especificadas, para los valores

a) $\eta = 0{,}75$

y

b) $\eta = 0{,}95$

para los cuales se han calculado las coordenadas del correspondiente punto de equilibrio del sistema, resultando que el valor de la relación capital trabajo de la regla de oro modificada disminuye al aumentar η, así como el valor de la relación ahorro-producto necesario para mantener al sistema en su punto singular.

A la vista de las series numéricas obtenidas resulta que, a medida que η aumenta —es decir, la elasticidad de la utilidad respecto al consumo disminuye— los precios sombra y la medida total de la utilidad se reducen también aunque los primeros, para los programas suficientemente largos, pueden crecer con η en los últimos años del programa. Las series de consumo por trabajador efectivo y de consumo per capita crecen con η en una primera parte del periodo total de planificación, para decrecer, en cambio, en la segunda. Consecuentemente con este resultado, los valores de la relación ahorro-producto son menores para valores mayores de η en los primeros años del plan y mayores, en cambio, en los últimos, extendiéndose, al aumentar η, el periodo de crecimiento de s y reduciéndose, en cambio, el de decrecimiento. Las series de producto bruto no parecen oscilar de acuerdo con una tendencia determinada al variar η.

De todo ello podemos deducir que la reducción de la elasticidad de la utilidad respecto al consumo parece producir el efecto de desplazar una parte del sacrificio dirigido al mantenimiento del nivel de capital final exigido hacia los últimos años del plan, aligerandolo en cambio en los primeros, con un resultado parecido al que lógicamente se podría esperar de un incremento de la tasa de descuento temporal de la utilidad.

En esta idea nos confirman los resultados obtenidos en los modelos calculados con el fin de estudiar las incidencias en las series económicas fundamentales de variaciones en la tasa de descuento temporal de la utilidad del consumo. Para realizarlos hemos tomado

a) $\gamma = 0{,}03$

y

b) $\gamma = 0{,}025$

Como éstos valores, juntamente con $\eta = 0{,}65$ y los demás parámetros especificados no satisfacen la condición que nos garantiza la existencia de una sucesión óptima en el punto singular —lo que complicaría bastante la puesta a punto del modelo— hemos tomado $\eta = 0{,}95$, y comparado los resultados de estos modelos con el de parámetros 0,035 y $\eta = 0{,}95$ ya mencionado. Y hemos comprobado que, efectivamente, las modificaciones producidas por una reducción de la tasa de descuento temporal de la utilidad son justamente opuestas a las originadas por una disminución de la elasticidad de la utilidad respecto al consumo: incremento de los valores de $\hat{k}^*$ y s^*, aumento de la utilidad total obtenida, y de los precios sombra, al menos en una primera etapa, y desplazamiento hacia los primeros añosdel plan del sacrificio de consumo destinado al mantenimiento del capital final, indicado por la disminución de $\hat{c}$ y c, y el aumento de s en los primeros años, y efectos contrarios en los últimos del horizonte de planificación.

Estos resultados tienden a confirmar una vez más el supuesto de la relación existente entre ambos parámetros, y coinciden con los que podrían deducirse de las conclusiones obtenidas en el capítulo 4 en torno a los efectos de la tasa de descuento temporal de la utilidad.

En lo que respecta a la tasa de crecimiento de la población, es este un parámetro que, aunque aparece como ponderador de la utilidad del consumo por trabajador en el criterio de optimalidad, merece consideración aparte por afectar también directamente al producto.

Con el fin de estudiar sus repercusiones, hemos obtenido resultados para las siguientes tasas de crecimiento de la población

$$\rho = 0{,}006$$

$$\rho = 0{,}008$$

y

$$\rho = 0{,}01$$

para un mismo nivel final del stock de capital, comprobando primeramente que con estos valores de ρ y los demás parámetros del modelo, el punto singular correspondiente constituye una trayectoria óptima. La comparación entre estos modelos y el de $\rho = 0{,}009$ ya reseñado nos ha llevado a las conclusiones que exponemos a continuación.

Observemos en primer lugar que al aumentar la tasa de crecimiento de la población los precios sombra de las soluciones óptimas crecen en los primeros años del programa, y disminuyen en los últimos. Los valores de la relación ahorro-producto comienzan igualmente aumentando con la tasa de crecimiento de la población, para disminuir en cambio en los últimos años del programa cuando ésta aumenta, reduciéndose el número de periodos de crecimiento y aumentando el de decrecimiento de s a medida que ρ es mayor. Este resultado parece indicar un desplazamiento del sacrificio inherente a la conservación del nivel de capital final exigido hacia los primeros años del programa, equivalente al que se obtendría a partir de una reducción de la tasa de descuento de la utilidad del consumo, como hemos visto en el apartado anterior, lo que era muy de esperar supuesto que el crecimiento de la población pondera positivamente —es decir, con signo opuesto al de la tasa de descuento— la utilidad del consumo. Pero ahora, en cambio, la velocidad de crecimiento del producto bruto es netamente mayor para valores mayores de ρ, lo que también es lógico, considerando la forma en que el crecimiento de la población se inserta en la función de producción.

Por último, a fin de ver hasta qué punto un modelo de crecimiento económico optimo podría ser aproximado por otro más sencillo en la actual circunstancia española, hemos calculado las sucesiones óptimas y series económicas subsiguientes en los supuestos de ausencia de progreso técnico aunque con una tasa de crecimiento de la población igual a la estimada, y de carencia absoluta de progreso técnico y de crecimiento de la población. En su realización hemos utilizado la estimación de la función Cobb-Douglas homogénea de grado 1 y sin progreso técnico dada por la publicación "Riqueza Nacional de España" citada en el capítulo 6 de este trabajo, que es la

$$Y = 88{,}506\ K^{0{,}503}\ L^{0{,}497}$$

manteniendo los demás parámetros los valores reseñados al comienzo de este capítulo.

A la vista de los resultados de estos modelos se observa que las series que se obtienen de ellos como soluciones óptimas difieren radicalmente de las proporcionadas para el modelo con progreso técnico y población creciente para una misma tasa anual de acumulación de capital del 6 por cien, con lo que la aproximación obtenida eliminando de nuestro modelo el progreso técnico hubiera sido francamente deficiente. Una vez suprimido éste, sin embargo, los resultados de los modelos con y sin crecimiento de la población difieren relativamente poco, constituyendo cada uno de ellos una aproximación aceptable del otro.

La comparación entre estos tres modelos nos indica que el sacrificio a realizar para conservar, al cabo de los 20 años, un mismo nivel de capital final —reflejado en el valor de la relación ahorro-producto— es mucho mayor cuando no existe progreso técnico, y mayor aún cuando además la población no crece. Tanto las series de consumo per capita como las de producto bruto total toman, para cada año, valores mucho menores cuando no hay progreso técnico, y algo menores aún cuando tampoco la población crece. En cuanto al nivel de utilidad total obtenido también disminuye al eliminar el progreso técnico, y más aún cuando además la población es estable. De manera que en lo que concierne al nivel de consumo alcanzable en una sucesión óptima con un valor final del capital que suponga un crecimiento anual del 6 por cien sobre el inicial, parece que el progreso técnico y un crecimiento de la población al ritmo del estimado para nuestro país, resultan beneficiosos.

APENDICE

APENDICE. LAS TECNICAS DE CONTROL OPTIMO

A.1. Introducción

En esta sección vamos a exponer y comentar someramente las técnicas de optimización dinámica utilizadas en el estudio teórico y resolución numérica de nuestro modelo, indicando el uso que de ellas se ha hecho.

Desde el punto de vista matemático, el problema objeto de este trabajo se centra en la determinación de la trayectoria, o función —en nuestro caso, función del tiempo — que, satisfaciendo unas condiciones previamente fijadas, optimice un cierto funcional dado en forma integral, y que depende de la trayectoria en cuestión. Este esquema aparece desde muy antiguo en la historia de las matemáticas, en el problema de la determinación de la forma de la curva cerrada que, con un perímetro fijado, abarque en su interior la mayor cantidad de superficie posible, y es parcialmente resuelto por los griegos. Varios siglos después, Newton resuelve el problema de la determinación de la forma del sólido de revolución que se desplaza en un medio fluido ofreciendo resistencia mínima, y Bernouilli el de la braquistocrona, o curva que une dos puntos dados, de manera que el tiempo de desplazamiento sobre ella de un punto sometido exclusivamente a la fuerza gravitatoria sea mínimo, problemas ambos que responden al esquema matemático citado.

La primera técnica general de resolución de este tipo de problemas fué dada por Euler en el año 1.744, y completada y perfeccionada en años sucesivos por Lagrange en varios aspectos, entre los cuales aparece la incorporación al problema de ecuaciones de restricción en la trayectoria. Los avances de Lagrange fueron a su vez reconsiderados y completados por Euler, dando lugar a los fundamentos del cálculo de variaciones clásico. Posteriormente, las aporta ciones de varios matemáticos, entre los que cabe destacar a Legendre, Jacobi y Weierstrass –los tres muy interesados en el problema de las condiciones suficientes de optimalidad – desarrollaron considerablemente esta rama del análisis. Por último, en la segunda mitad de nuestro siglo, dos técnicas nuevas han venido a enfrentarse con este problema desde ángulos distintos, ampliando el alcance y las posibilidades del cálculo de variaciones clásico: la programación dinámica y el control óptimo.

La programación dinámica es una técnica elaborada básicamente por Bellman, con objeto de resolver problemas de optimización dinámica en procesos de decisión polietápicos y cuyo fundamento reside en el llamado principio de optimalidad de Bellman; se trata, por consiguiente, de un acercamiento al problema a partir de un modelo de caracter discreto, aunque sus resultados son generalizables a modelos contínuos que satisfagan unas determinadas condiciones de regularidad. (*) El control óptimo, cuyo instrumento esencial de trabajo es el principio de máximo de Pontryagin, se planteó inicialmente con vistas a la obtención de trayectorias óptimas continuas –al igual que ocurre con el cálculo de variaciones clásico – pero es también formulable en términos discretos. Esta ha sido la técnica utilizada en la resolución de nuestro modelo, y constituye, por tanto, el centro de interés de los subsiguientes apartados de esta sección.

A.2. El problema del control óptimo

Un problema de control queda planteado mediante la especificación de los siguientes elementos.

(*) Como no ha sido ésta la técnica utilizada en nuestro modelo, nos ocuparemos de ella solo tangencialmente. Las primeras publicaciones en torno al tema aparecen reseñadas en el artículo de R. Bellman "The Theory of Dynamic Programming" publicado en el Boletin de la American Mathematical Society, vol 60, 1.954. El libro de R. Bellman "Dynamic Programming", publicado por la Princeton University Press en 1.957 constituye una detallada exposición de las características básicas de esta técnica y sus aplicaciones.

a) Un subconjunto $B \subset R^n$ de valores admisibles de la variable de estado n–dimensional $x = (x^1, x^2, \ldots\ldots\ldots, x^n)$. En su versión inicial, que es la que hemos utilizado en este trabajo, el subconjunto B coincide con R^n. En el caso en que B esté estrictamente contenido en R^n, el problema de control se convierte en otro más complejo, llamado control con restricciones en las coordenadas del espacio fase.

b) Una región $V \subset R^m$ de valores admisibles de la variable de control m–dimensional $u = (u^1, u^2, \ldots\ldots\ldots, u^m)$. No existen restricciones en cuanto al carácter de esta región, pero las técnicas del control óptimo adquieren una especial relevancia cuando V contiene la totalidad –o, al menos, una parte– de sus puntos frontera.

c) Una clase de funciones de control admisibles, U, tal que

$$U \subset U_M$$

siendo
$$U_M = \cup \left\{ U_M (t_0, t_1) \quad t_0 \leqslant t_1 \right\}$$

donde
$$U_M (t_0, t_1) = \left\{ u \mid [t_0, t_1] \rightarrow V, \; u \text{ medible y acotada} \right\}$$

La clase de funciones utilizada en el problema del control óptimo tal como ha sido planteado por Pontryagin (*) es la de las funciones contínuas a trozos –contínuas en todo su intervalo de definición salvo a lo más en un número finito de puntos, o piecewise continuous– De manera que, para nosotros, la clase de funciones de control admisibles están formada por todas las aplicaciones, continuas a trozos, del intervalo $[t_0, t_1]$ en la región de valores admisibles de la variable de control, V, para todo $t_1 \geqslant t_0$.

(*) Pontryagin, Bol'tanskii, Gamkrelidze y Mischenko "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Moscú 1.961, edición inglesa de Pergamon Press 1.964, Cap. I.

d) Un instante inicial t_0 de comienzo del proceso de control y un vector n–dimensional $x_0 = (x_0^1, \ldots\ldots, x_0^n) \in B$ determinante del valor inicial de la variable de estado.

e) Una aplicación vectorial $f = (f^1, \ldots\ldots f^n): R^n \times R^m \times R \rightarrow R^n$, continua, que hace corresponder a cada terna de valores de la variable de estado, la variable de control y el tiempo, un valor de la derivada de la variable de estado, dando lugar al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamadas ecuaciones de transición

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots\ldots x^n, u^1, \ldots\ldots u^m, t) = f^i(x,u,t) \qquad i = 1, \ldots\ldots n$$

en las que supondremos además que

$$\frac{\partial f^i}{\partial x j} \qquad i,\ j = 1, \ \ldots\ldots\ldots\ n$$

existen y son continuas en $B \times V \times R^1$.

f) Un objetivo, o conjunto de valores finales admisibles de la variable de estado, $G \subset B$. Este conjunto puede consistir en un solo punto de R^n, o en un conjunto finito o infinito de ellos. En el caso más general, el conjunto G puede variar con el tiempo –objetivo móvil– con lo que vendría dado por una función

$$G(t) \qquad t > t_0$$

Para los valores iniciales fijados del tiempo y de la variable de estado, el sistema de ecuaciones diferenciales con las condiciones impuestas determina para cada función de control admisible, $u(t)$ una función $x(t)$, absolutamente contínua tal que

$$x(t_0) = x_0$$

y además que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

en casi todo punto de algún intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Si tal solución existe para todo punto de un intervalo $[t_0, t_1]$, y toma en todo instante valores pertenecientes al conjunto B, nos dará la evolución en el tiempo o trayectoria de la variable de estado correspondiente a la función de control $u(t)$.

El conjunto de los valores de la variable de estado en un instante t_1, determinados a partir de un instante inicial t_0 y de un valor inicial x_0 por cada una de las funciones de control admisibles forma el conjunto alcanzable en t_1.

$$C(x_0, t_0, t_1) = \{ x(t_1; t_0, x_0, u),\ u \in U \}$$

La unión de todos los conjuntos alcanzables para todo $t \geqslant t_0$, o conjunto de valores de la variable de estado determinados a partir de t_0 y x_0 dados para toda función de control admisible determina el cono de alcanzabilidad

$$C(x_0, t_0) = \bigcup_{t \geqslant t_0} C(x_0, t_0, t)$$

o conjunto de valores que pueden ser alcanzados por la variable de estado en algún instante, cuando sus posibilidades de evolución dinámica vienen determinadas por el conjunto U de funciones de control admisibles.

Dado un conjunto objetivo, el problema del control consiste en determinar, de entre el conjunto de las funciones de control admisibles aquellas que, con el sistema de ecuaciones diferenciales determinante de la dinámica del problema, trasladan la variable de estado del valor inicial x_0 en t_0 a algún valor final perteneciente al conjunto objetivo, a través de una trayectoria contenida totalmente en B.

Como las posibilidades de evolución en el tiempo de la variable de estado, dado su valor inicial, se limitan al cono alcanzable, es evidente que, para que el problema de control tenga solución, es preciso que dicho cono alcanzable tenga algún punto en común con el conjunto objetivo, es decir que

$$C(x_0, t_0) \cap G \neq \phi$$

Cuando existe más de una función de control admisible que traslada la variable de estado desde su valor inicial x_0 en t_0 a algún valor final perteneciente a G, através de una trayectoria contenida toda ella en B, cabe preguntarse cual será la más conveniente de todas ellas de acuerdo con un cierto criterio derivado de las condiciones físicas o económicas del problema, llamado criterio de optimalidad. Tal criterio ha de ser función del control, J (u), y suele tener la forma de un funcional — el llamado funcional objetivo — definido por una integral que depende de u, es decir que

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0 \, (x(t), u(t), t) \, dt$$

donde t_1 es el instante final, en que la trayectoria determinada por x_0, t_0 y u (t) alcanza el conjunto objetivo G —de manera que el valor de t_1 depende de la fun*ción de control* u (t) *elegida*— y cuyo integrando supondremos definido y contínuo y con derivadas parciales

$$\frac{\partial f^0}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots n$$

contínuas en B X V X R. Para cada función de control que determine una trayectoria admisible de x (t) que alcance el objetivo, el criterio de optimalidad J (u) tomará un cierto valor. Llamaremos control *óptimo* a *todo control admisible* que optimice en algún sentido prefijado de antemano —maximice o minimice según los casos -- al funcional objetivo, y trayectoria óptima correspondiente a la determinada unívocamente por el control óptimo. El óptimo de J (u) deberá ser absoluto entre todos los controles cuyas trayectorias satisfagan las *condiciones enunciadas,* de manera que, si existen varios controles óptimos, el funcional objetivo deberá tomar el mismo valor en todos ellos.

Vemos, por tanto, que la especificación de un problema de control óptimo requiere, además de los seis elementos determinantès del problema de control ya citados, uno más: *el criterio de optimalidad*. En el *problema económico* objeto de este trabajo, tales elementos han sido introducidos en los capitulos 2 y 3. La variable de estado, o nivel de capital en cada instante, K (t), es una variable unidimensional que solamente puede tomar valores en el conjunto B, que es, en nuestro caso, el conjunto de los números *reales no negativos*. La *variable* de control, también unidimensional, es la relación ahorro–producto, función contínua a trozos del tiempo y que toma valores en el compacto V = [0, 1]. El instante inicial se toma como el origen de la variable tiempo, $t_0 = 0$, en el cual el stock de capital existente $K_0 = x_0$ es conocido. El sistema de *ecuaciones diferenciales determinante* de la evolución de la trayectoria en función de cada control elegido se reduce, en nuestro caso, a una sola ecuación, la llamada ecuación dinámica del sistema. En cuanto al conjunto objetivo, o conjunto de valores finales admisibles de la variable de estado, G, es, en nuestro problema, independiente *del tiempo, pudiendo consistir* en un punto –caso del capital final determinado, que se estudia en 3–3 a 3–6 – o en una semirrecta, $K(T) \geqslant K_T$, o incluso en la totalidad del conjunto admisible B de la variable de estado –casos considerados en 3–7 –. Por último, el criterio de optimalidad es aquí, efectivamente, un funcional, *constituido por la integral* de la utilidad del consumo instantaneo adecuadamente ponderada respecto al tiempo según las hipótesis impuestas a cada modelo.

En el caso particular en que el conjunto de las funciones de control que trasladan la variable de estado, a través de un conjunto de valores admisibles, desde su estado inicial a algún estado final del conjunto objetivo esté *constituido por un único control admisible* $u(t) \in U$, el problema es trivial, puesto que el único control que satisface las condiciones exigidas deberá ser necesariamente el óptimo. Pero cuando este conjunto contiene más de un elemento, es preciso disponer de un instrumento que ayude a seleccionar de entre las varias funciones de control que satisfacen las *condiciones exigidas* aquella que, juntamente con su correspondiente trayectoria, optimiza el funcional objetivo fijado. Tal instrumento es precisamente el principio de máximo de Pontryagin, que pasamos a considerar seguidamente.

A.3. El principio de máximo

El principio de máximo nos proporciona un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad que ha de satisfacer el control (o controles), – juntamente con su correspondiente trayectoria–, que proporcione un óptimo absoluto del criterio de optimalidad. Siguiendo a Pontryagin (*) vamos a exponer brevemente esta técnica en el caso mas sencillo posible, generalizándola después a los supuestos más complejos en que ha sido preciso utilizarla a lo largo de este trabajo.

Consideremos, pues, en primer lugar, el problema de la determinación de una función de control admisible tal que hace mínimo el valor del funcional objetivo J (u), entre todas las funciones de control admisibles que satisfacen las condiciones especificadas en la sección anterior, en las circunstancias simplificadoras siguientes:

a) El problema de optimización no depende de manera explícita del tiempo, de manera que el sistema de ecuaciones diferenciales determinante de su evolución dinámica se presenta en forma autónoma

$$\frac{d\,x^i}{dt} = f^i\,(x^1, \ldots\ldots x^n u^1, \ldots\ldots u^m) \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots n$$

lo mismo que el integrando del funcional objetivo

$$f^0\,(x^1, \ldots\ldots x^n, u^1, \ldots\ldots u^m\,)$$

Esta independencia de la variable tiempo determina la invarianza del proceso respecto a una traslación en el tiempo de todas sus variables, con lo que podemos suponer que el instante inicial del mismo coincide con el origen de tiempos $t_0 = 0$.

(*) Pontryagin, Bol'tanskii, Gamkrelidze y Mischenko, op. cit.

b) La región admisible de los valores de la variable de estado, B coincide con el espacio R^n, con lo que sus componentes *pueden tomar cualquier* valor en el conjunto de los números reales (no existen restricciones del espacio de fase).

c) El conjunto objetivo, G, se reduce a un solo punto $x_1 \in R^n$.

Así pues, el problema consiste ahora en determinar de entre todas las funciones de control admisibles que trasladan el sistema desde un estado inicial x_0 a un estado final x_1, de acuerdo con el sistema autónomo anteriormente indicado aquella que minimice al funcional.

$$J = \int_0^{t_1} f^0 \; (x^1(t), \ldots\ldots x^n(t), u^1(t), \ldots\ldots\ldots n^m(t))\, dt$$

Con el fin de simplificar la exposición del principio se suele hacer

$$x^0(t) = \int_0^t f^0(x^1(\tau), \ldots\ldots, x^n(\tau), u^1(\tau), \ldots\ldots, u^m(\tau))\; d\tau$$

siendo por tanto

$$x^0(0) = \int_0^0 f^0(x(t), u(t))\, dt = 0$$

y

$$x^0(t_1) = \int_0^{t_1} f^0(x(t),\; u(t))\; dt = J(u)$$

con lo que el integrando del funcional objetivo verifica

$$\frac{d\,x^0}{dt} = f^0 \; (x^1, \ldots\ldots x^n, u^1, \ldots\ldots\ldots\ldots\; u^m)$$

que es una ecuación diferencial semejante a las de transición del sistema. Y *ahora el* problema *consistirá en determinar* de entre todos los controles admisibles que trasladen al sistema de su posición inicial

$$x_0 = (0,\ x_0^{\,1},\ x_0^{\,2},\ \ldots\ x_0^{\,n})$$

a alguna posición final

$$x_1 = (J\,(t_1),\ x_1^{\,1},\ x_1^{\,2},\ \ldots\ldots\ x_1^{\,n})$$

de la recta determinada en R^{n+1} por las ecuaciones

$$x^i = x_1^{\,i} \qquad i = 1, \ldots\ldots, n$$

de acuerdo con la ley de evolución dinámica dada por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\,x^i}{dt} = f^i\,(x^1, \ldots\, x^n, u^1, \ldots\, u^m) \qquad i = 0, 1 \ldots\, n \qquad \text{(A–1)}$$

aquel u (t) que proporcione un mínimo absoluto de $J\,(t_1)$, es decir, aquella función de control cuya trayectoria resultante en el espacio R^{n+1} corte a la recta

$$x^i = x_1^{\,i} \qquad i = 1, \ldots\ldots\, n$$

en el punto con coordenada $x_1^{\,0}\,(t_1)$ más pequeña posible. Observemos que el instante de encuentro de la trayectoria con el objetivo, t_1, no es un dato del problema, sino un resultado determinado por los datos del problema —entre los cuales está x_1, punto final de la trayectoria— y la función de control admisible elegida en cada caso; de manera que, en el enunciado inicial del principio de máximo, se fija el estado final del sistema, pero no la duración de la trayectoria. La versión del citado principio para el caso en que la duración del programa viene fijada a priori, con lo que la función de control ha de trasladar al sistema de su posición inicial al objetivo en un intervalo de tiempo dado, T, —que es precisamente el esquema característico de los modelos de crecimiento económico óptimo objeto de este trabajo— se verá más adelante como una derivación de la versión actual.

Con las hipótesis especificadas, el principio de máximo de Pontryagin dice que la condición necesaria para que una función de control admisible, u_*, sea la que hace mínimo al funcional objetivo J entre todas las u que trasladan *el sistema desde el valor inicial* x_0 *hasta el valor final* x_1, *mediante una trayec*toria que satisface al sistema (A.1) es que exista una aplicación contínua ψ_* : $R \rightarrow R^{n+1}$, $\psi_* = (\psi_{*0}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \psi_{*n})$ no idénticamente nula, solución del sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^j(x, u)}{\partial x^i} \psi_j \qquad i = 0, 1 \ldots\ldots n \qquad \text{(A–2)}$$

tal que en cada instante t

$$\sum_{j=0}^{n} \psi_{*j}(t)\, f^j(x_*(t), u_*(t)) = \max_{u \in V} \sum_{j=0}^{n} \psi_{*j}(t)\, f^j(x_*(t), u)$$

— cuando x_* es la trayectoria determinada por u_*, el sistema A—1 y las condiciones de contorno y ψ_* es solución de A—2 cuando u y x son el control u_* y su trayectoria correspondiente x_*—, y que además, en el instante final de la trayectoria, t_1, verifique

$$\sum_{j=0}^{n} \psi_{*j}(t_1)\, f^j(x_*(t_1), u_*(t_1)) = 0$$

y $$\psi_{*0}(t_1) \leqslant 0$$

La expresión

$$\sum_{j=0}^{n} \psi_j\, f^j(x, u)$$

en la que como vemos las componentes de la función auxiliar ψ, solución del sistema adjunto de ecuaciones (A—2) hacen el papel de multiplicadores respecto de las ecuaciones del sistema primitivo, (A—1), es función explícita de las $2(n+1) + m$ variables componentes de las variables vectoriales ψ, x y u, y recibe el nombre de hamiltoniana

$$\mathcal{H}\ (\psi, x, u) = \sum_{j=0}^{n} \psi_j f^j\ (x, u) \tag{A–3}$$

De acuerdo con esta nueva notación, el sistema de transición de la variable x pasa a ser el

$$\frac{d x^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \quad i = 0,1....n \tag{A–4}$$

y el sistema adjunto, que rige la evolución de la variable auxiliar ψ (t), el

$$\frac{d \psi_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \tag{A–5}$$

y las condiciones que ha de satisfacer necesariamente en cada instante $t \in [t_0, t_1]$ la función de control que da lugar a la trayectoria óptima se convierte en

$$\mathcal{H}\ (\psi_*(t), x_*(t), u_*(t)) = \max_{u \in V} \mathcal{H}\ (\psi_*(t), x_*(t), u) = M\ (\psi_*\ (t), x_*(t)) \tag{A–6}$$

$$M\ (\psi_*\ (t_1), x_*\ (t_1)) = 0 \tag{A–7}$$

y

$$\psi_{*0}\ (t_1) \leqslant 0 \tag{A–8}$$

donde la función M está definida por

$$M\ (\psi, x) = \sup_{u \in V} \mathcal{H}(\psi, x, u)$$

Además, toda trayectoria de la función de control que, junto con la correspondiente de la variable de estado y de la variable auxiliar satisfagan las ecuaciones (A–4) y (A–5) y la condición (A–6), verifican que las funciones

$$\psi_{*0}\ (t)$$

y

$$M\ (\psi_*\ (t), x_*\ (t))$$

son constantes en el intervalor $[t_0, t_1]$ con lo que las relàciones (A–7) y (A–8) no solamente se satisfacen en t_1, sino también en cualquier otro punto del intervalo $[t_0, t_1]$.

La aplicación del principio de máximo de Pontryagin nos reduce un problema de optimización dinámica –la determinación de *una función de control* u_* definida en $[0, t_1]$ que maximice un funcional– en un problema de optimización estática para cada punto $t \in [0, t_1]$; determinación del valor de $u_*(t) \in V$ tal que

$$\mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t)) = \max_{u \in V} \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u)$$

abordable mediante las técnicas habituales de optimización estática. Así, en el caso particular en que V sea un conjunto abierto, el punto $u_*(t) \in R^m$ será en cada instante $t \in [0, t_1]$ un punto máximo absoluto de la función de u, $\mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u)$ y como $u_*(t)$ es interior a V es también un máximo relativo, traduciéndose el principio de máximo en el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t))}{\partial u^j} = 0 \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

suponiendo que las f^i y por tanto la $\mathcal{H}$, son funciones derivables de las $u^1, \ldots\ldots u^m$. Pero, si V no es abierto, podría ocurrir que para algun $t \in [0, t_1]$, $u_*(t)$ coincidiera con alguno de sus puntos frontera, con lo que no es necesariamente cierto que el *máximo absoluto de la función de u* $\mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u)$ en V sea también un máximo relativo. En este caso, y suponiendo unas ciertas condiciones de regularidad, podemos encontrar de nuevo m ecuaciones para determinar las m componentes de u_* aunque de forma mas indirecta. De un modo más concreto supongamos que V queda definido en R^m por las inecuaciones

$$g_j(u) \leqslant b_j \qquad j = 1, \ldots\ldots, r$$

donde las g_j son funciones con derivadas parciales primeras contínuas y que el punto u_* maximiza en el conjunto V a la función de u, $F(u) = \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u)$. Entonces $u_* \in V$ cumplirá las anteriores inecuaciones y podemos suponer por ejemplo que:

$$g_j(u_*) = b_j \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots, s$$

$$g_j(u_*) < b_j \qquad j = s+1, \ldots\ldots\ldots, r$$

sin restricción real, pues siempre podríamos reordenar las componentes de u. Si llamamos S a la variedad definida en R^m por las ecuaciones

$$g_j(u) = b_j$$

que es de dimensión $m - s$ sí la matriz jacobiana de las g_j es de rango s en todo punto, vemos que u_* es un máximo local condicionado de F en S y por consiguiente u_* debe verificar las s ecuaciones

$$g_j(u) = 0 \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots, s$$

y las $m - s$ que se obtienen calculando las derivadas direccionales de F en u_* segun los $m - s$ vectores de una base de la variedad lineal tangente a S en u_*. Claro está que la selección de las j tales que $g_j(u_*) = 0$ no es conocida a priori y que habría pues que ensayar las 2^m partes del conjunto $\{1, 2, \ldots\ldots, m\}$, comprobando además que se cumplen las restantes inecuaciones.

Es precisamente la posibilidad de admitir funciones de control que tomen valores en la frontera de V la característica del principio de máximo de Pontryagin que determina su diferencia y superioridad sobre las técnicas del cálculo de variaciones clásico.

Las funciones auxiliares ψ_i, $i = 0, 1, \ldots\ldots n$ introducidas en la hamiltoniana son soluciones de un sistema de $n + 1$ ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas, lo que da lugar a interesantes consecuencias. En primer lugar, para cada $n+1$— upla de condiciones iniciales existe una única solución en $[0, t_1]$, contínua y con derivadas contínuas a trozos — sus eventuales puntos de discontinuidad vienen determinados por los de la función de control correspondiente, u . Por otra parte, la estructura del sistema diferencial nos indica que, si una solución del mismo pasa por el origen de coordenadas de R^{n+1} para algún valor de t, permanece en él indefinidamente, dando lugar a una función vectorial nula; de donde se deduce que la condición impuesta por el principio de máximo de que la función vectorial $\psi(t)$ no sea idénticamente nula en $[0, t_1]$ implica necesariamente que sus componentes no pueden anularse simultaneamente en ningún $t \in [0, t_1]$. Por último, observemos que si es

$$(\psi_{*0}(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, \psi_{*m}(t))$$

una solución del sistema (A—2) que satisface las condiciones del principio de máximo — cuya hamiltoniana es homogenea de grado 1 en $\psi(t)$ — será para todo $\lambda > 0$

$$(\lambda\, \psi_{1*}(t), \lambda\, \psi_{1*}(t), \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda\, \psi_{n*}(t))$$

otra solución del sistema (A—2) que también satisfará las relaciones (A—6), (A—7) y (A—8) de este principio; así pues, teniendo en cuenta que $\psi_0(t)$ es constante para $t \in [0, t_1]$, para toda función auxiliar $\psi(t)$, que satisfaga las condiciones del principio de máximo y que tenga $\psi_0 \neq 0$, se puede obtener otra función vectorial auxiliar

$$\frac{\psi(t)}{|\psi_0(t)|} = \left(-1, \frac{\psi_1(t)}{|\psi_0(t)|}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\psi_n(t)}{|\psi_0(t)|}\right)$$

que también satisfaga (A,2), (A—6), (A—7) y (A—8), y que tiene una componente menos a determinar.

Con todo ello, el sistema de ecuaciones que se deduce de la aplicación del principio de máximo da lugar a $2n+1$ ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \quad i = 0, 1, \ldots\ldots n \qquad \text{y} \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \quad i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots n$$

más m relaciones de igualdad no diferenciales derivadas de (A—6), — bien imponiendo las condiciones necesarias de optimalidad estática para un punto interior, o bien aplicando el teorema de Kuhn—Tucker —para determinar 2 n + m + 1 funciones

$$x^i\ (t) \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots n$$

$$\psi^i\ (t) \qquad i = 1, \ldots\ldots n$$

y

$$u^j\ (t) \qquad j = 1, \ldots\ldots m$$

Las 2 n + 1 ecuaciones diferenciales, todas ellas de primer orden, van acompañadas de las condiciones impuestas en los extremos de la trayectoria

$$x\ (0) = x_0 = (0, x_0{}^1, x_0{}^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \ x_0{}^n)$$

y

$$x\ (t_1) \in \left\{ (x^0, x^1, \ldots\ldots\ x^n) \mid x^1 = x_1^1, \ldots\ldots\ldots\ x^n = x_1{}^n \right\}$$

que son en total 2 n + 1, las cuales, junto con la

$$M\ (\psi(0), x(0)) = 0$$

nos proporcionan las condiciones de contorno requeridas por las ecuaciones diferenciales, y una más, para determinar el valor de t_1.

El conjunto de funciones de control — con sus consiguientes trayectorias — que son soluciones del sistema anteriormente descrito de 2 n + m + 1 ecuaciones con 2 n + 2 condiciones de contorno, contiene a las posibles soluciones del problema de optimalidad planteado de manera que, si existe una solución óptima del tipo buscado, deberá satisfacer necesariamente a dicho sistema. El estudio de cada una de estas soluciones para ver si efectivamente son o no las óptimas deseadas requerirá la aplicación de condiciones suficientes de optimalidad, obtenidas mediante consideraciones al margen del principio de máximo de Pontryagin, queda solamente condiciones necesarias.

Solamente en el caso en que pudiera probarse a priori la existencia de una *solución óptima, al problema* y el sistema de condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo porporcionara una sola solución $u(t)$, con su correspondiente trayectoria, $x(t)$, podríamos asegurar, sin necesidad de recurrir a la aplicación de condiciones suficientes, que esta solución era la óptima deseada. Desgraciadamente, pocas veces se presenta esta circunstancia, pues la demostración de la existencia de un control óptimo es – con la excepción de los sistemas lineales, y de algunos otros que satisfacen condiciones muy especiales, *como por ejemplo la linealidad en* $u(t)$, *u otras equivalentes*,– problema sumamente complicado, no resuelto satisfactoriamente de manera general.(*)

Si el sistema de ecuaciones derivado de las condiciones necesarias de optimalidad permite obtener efectivamente expresiones para $u(t)$, $x(t)$ y $\psi(t)$ *que* lo satisfagan, los eventuales controles óptimos, y *sus correspondientes* trayectorias, quedan totalmente *determinados con ellas.* Un caso especialmente interesante es aquel en que fijado el estado final del sistema el conjunto de condiciones necesarias permite atribuir a cada estado x un valor bien determinado de la variable de control $u = v(x)$ llamándose entonces a la función v de síntesis, y que nos permitiría –supuesto que este control fuese efectivamente el óptimo buscado– determinar la norma o política de actuación óptima sobre el sistema en cada instante sin más datos que el estado del sistema en ese instante, dando lugar *así a un modelo con* retroalimentación (feedback) en el que *la propia evolución* de la variable de estado va determinando el *control óptimo a aplicar*, el cual a su vez modela la evolución futura de la trayectoria de aquella de acuerdo con la relación

$$\frac{d x^i}{dt} = f^i(x, u(x)) \qquad i = 0, 1, \ldots n$$

(*) Un conjunto de resultados para los casos particulares citados puede verse en "Foundations of Optimal Control Theory" de E. B. Lee y L. Markus, S.I.A.M. Series in Applied Mathematics, Wiley 1.968, capítulo 2 y 4, o en "An Introduction to Optimal Control Theory", de A. Strauss, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Springer–Verlag. 1.968, capítulo 6. y 7.

El conocimiento de la función de síntesis para un proceso dado nos permitiría diseñar una unidad de control que no actúe rígidamente en función de los datos iniciales, sino que proceda consecuentemente a un flujo constante de información —el estado del sistema— lo que se traduciría en una corrección automática de la función de control en el caso en que la evolución real de la variable de estado no coincidiera exactamente con la planeada— punto éste del mayor interés en los modelos de crecimiento económico, en los que las medidas de política económica aplicadas al sistema con vistas a obtener una determinada trayectoria de crecimiento óptimo actúan de forma aproximada, con lo cual es muy probable la existencia de discrepancias entre los valores del stock de capital proyectados para un instante dado y los realmente obtenidos—. Un problema de control óptimo del que se conoce la función de síntesis para cada valor final de la variable de estado se puede analizar y tratar como si cada instante fuese el inicial, y el correspondiente valor de la variable de estado, $x(t)$, la condición inicial de contorno.

Este caso no es por desgracia el más frecuente. La posibilidad de determinación de una función de síntesis es muy dudosa en sistemas no lineales. Incluso la obtención efectiva de expresiones para $u(t)$, $x(t)$ y $\psi(t)$ resulta no ser viable en buena parte de los modelos de crecimiento óptimo. Cuando esto ocurre, la única posibilidad de determinación de trayectorias óptimas estriba en la discretización del modelo y la aplicación de métodos numéricos de cómputo de tipo iterativo, expuestos y llevados a cabo en la segunda parte de este trabajo.

El principio de máximo fue enunciado inicialmente para problemas en los que el control deseado es el que minimiza el criterio de optimalidad. Este es el casoen la mayoría de los problemas técnicos a los que es aplicable este método, en los que el criterio de optimalidad suele estar relacionado con el coste del proceso de transformación. Pero en los modelos de crecimiento económico, el criterio de optimalidad es una medida de la utilidad derivada del consumo efectuado durante el proceso de acumulación de capital, con lo que resulta que la función de cc ntrol óptima buscada es la que maximiza el funcional objetivo. Vamos a ver, no obstante, que el principio de máximo anteriormente enunciado sigue siendo válido para nuestro problema, con alguna ligera modificación.

Supongamos, efectivamente, que tratamos de determinar, de entre todos los controles admisibles $u(t) \in U$ que trasladan el sistema desde una posición inicial x_0 a otra final x_1 aquel que hace máximo el funcional objetivo

$$J = \int_0^{t_1} f^0 (x(t), u(t))\, dt$$

siendo t_1, como siempre, el instante de *llegada de la trayectoria* a x_1 para cada función de control. El control $u(t)$, que, junto con *su correspondiente* trayectoria, haga máximo el valor de J, será precisamente aquel que minimice

$$-J = \int_0^{t_1} - f^0 (x(t), u(t))\, dt$$

con lo que el problema queda reducido al caso anteriormente estudiado. Si ahora hacemos

$$x^0 = -J = \int_0^{t_1} -f^0 (x(t), u(t)) \quad dt$$

tendremos que determinar el control $u(t) \in U$ que traslada al sistema del estado inicial $(0, x_0^{\,1}, \ldots\ldots, x_0^{\,n})$ a algún punto de la recta

$$\left\{ (x^0, x^1, \ldots\ldots x^n) \mid \quad x^1 = x_1^{\,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots x^n = x_1^{\,n} \right\}$$

de manera que el x^0 del punto de intersección de esta recta con la trayectoria, $-J$, sea el más pequeño posible. El principio de máximo nos dice que, si u_* es un control óptimo, y x_* su correspondiente *trayectoria*, existe en $[0, t_1]$ una función vectorial contínua no nula $\psi_* = (\psi_{*0}, \psi_{*1}, \ldots\ldots, \psi_{*n})$ tal que si hacemos

$$\mathcal{H} (\psi, x, u) = \psi_0 (- f^0 (x, u)) + \psi_1 f^1(x, u) + \ldots\ldots + \psi_n f^n (x,u)$$

satisface las relaciones

$$\frac{d x^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots n \qquad \text{(A–4)}$$

y

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots n \qquad \text{(A–5)}$$

lo que, en nuestro caso significa,

$$\frac{d \psi_0}{dt} = - \frac{\partial(-f^0)}{\partial x^0} \psi_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^0} \psi_j = 0$$

y

$$\frac{d \psi_i}{dt} = - \frac{\partial (-f^0)}{\partial x^i} \psi_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \psi_j = \frac{\partial f^0}{\partial x^i} \psi_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \psi_j \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots n$$

y que además verifica

$$\mathcal{H} (\psi_*(t), x_*(t), u_*(t)) = \max_{u \in V} \mathcal{H} (\psi_*(t), x_*(t), u) = M \ (\psi_* (t), \quad u_* (t) \ )$$

siendo

$$M (\psi_*(t), \ x_*(t)) = 0 \qquad t \in [0, t_1]$$

y

$$\psi_{0*}(t) \leqslant 0 \qquad t \in [0, t_1]$$

Definamos la función $\hat{\psi}_0(t) = - \psi_0(t)$

cuya existencia y continuidad son evidentes a partir de la definición, y $\hat{x}_0 = -x_0 = J$

Ahora resulta que la hamiltoniana anterior verifica

$$\mathcal{H} (\psi, x, u) = \hat{\psi}_0 f^0 + \psi_1 f^1 + \ldots\ldots\ldots + \psi_n f^n = \mathcal{H} (\hat{\psi}, \hat{x}, u)$$

siendo $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_0, \psi_1, \ldots\ldots\ldots \psi_n)$

que, evidentemente, satisface la condición de no nulidad de ψ y

$$\hat{x} = (\hat{x}^0, x^1, ... x^n)$$

y las relaciones (A—4) y (A—5) se convierten en las

$$\frac{d\hat{x}^0}{dt} = -\frac{dx^0}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{\psi}_0} = f^0$$

$$\frac{d\hat{x}^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{\psi}_i} \qquad i = 1,..........n$$

y

$$\frac{d\hat{\psi}_0}{dt} = -\frac{d\psi_0}{dt} = 0$$

$$\frac{d\hat{\psi}_i}{dt} = \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^0}{\partial x^i}\hat{\psi}_0 - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\psi_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{x}^i} \qquad i = 1,.......n$$

y como además es, para cualesquiera ψ y x dados

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \mathcal{H}(\hat{\psi}, \hat{x}, u)$$

ambas hamiltonianas alcanzarán su máximo para una misma función de control u_*, la cual verificará

$$\mathcal{H}(\hat{\psi}_*, \hat{x}_*, u_*) = \mathcal{H}(\psi_*, x_*, u_*) = M(\psi_*, x_*) = M(\hat{\psi}_*, \hat{x}_*)$$

siendo además

$$M(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t)) = M(\psi_*(t), x_*(t)) = 0 \qquad t \in [0, t_1]$$

y

$$\hat{\psi}_{0*}(t) = -\psi_{0*}(t)$$

con lo que

$$\hat{\psi}_{*0}(t) \geqslant 0 \qquad t \in [0, t_1]$$

Vemos, en resumen, que el principio de máximo enunciado para un problema de minimización del criterio de optimalidad es igualmente válido cuando la optimización del proceso supone la maximización del funcional objetivo, manteniéndose las mismas condiciones necesarias de optimalidad de la trayectoria, (A–4), (A–5), (A–6) y (A–7) y transformándose la (A–8) en

$$\hat{\psi}_{*0}(t_1) = \hat{\psi}_{*0}(t) \geqslant 0 \qquad \text{(A–9)}$$

con lo que, en este caso, la eliminación de la primera componente de la función auxiliar basada en la linealidad y homogeneidad del sistema adjunto, cuando $\hat{\psi}_0(t) \neq 0$ dará por resultado una nueva función auxiliar de la forma

$$\left(1, \frac{\psi_1(t)}{\hat{\psi}_0(t)}, \frac{\psi_2(t)}{\hat{\psi}_0(t)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\psi_n(t)}{\hat{\psi}_0(t)}\right)$$

El nombre de principio de máximo se mantiene tanto en el caso de maximización como de minimización de la función objetivo, pues tiene su origen en el hecho de que el proceso de determinación de las condiciones necesarias de optimalidad desemboca en ambos casos en la búsqueda de un máximo: el de la función hamiltoniana.

Como el problema económico al que se ha aplicado el principio de máximo en este trabajo requiere siempre la maximización del funcional objetivo, supondremos que tal es el caso en las sucesivas ampliaciones del ámbito de aplicación de este principio que seguidamente analizamos verificándose, por tanto, (A–9) en lugar de (A–8). Por sencillez, llamaremos de ahora en adelante ψ a $\hat{\psi}$, y x a $\hat{x}$.

Las hipótesis con las que ha sido enunciado el principio de máximo no se satisfacen exactamente en los modelos de crecimiento analizados en la primera parte de este trabajo. En primer lugar, la duración del periodo de planificación no es un número que pueda tomar valores diferentes en función de los distintos controles, sino que es un dato netamente especificado del problema,pudiendo incluso no ser finito. Por otra parte, el conjunto objetivo o estado final admisible del stock de capital puede no ser un solo punto, sino un conjunto de ellos, o incluso todo el espacio de las variables de estado. En cuanto al supuesto de autonomía del sistema, deja de cumplirse en los modelos de crecimiento en cuanto admitimos una desigual valoración del consumo en el tiempo, como vimos en el capítulo 4.

Todos estas variantes y algunas otras han sido consideradas por Pontryagin y sus colaboradores quienes mediante adecuadas transformaciones de las variables – en general, bastante simples – han demostrado la validez del resultado esencial del principio – la maximización de la hamiltoniana por el control óptimo – y obtenido las variantes de los resultados A–7 y A–8 y las condiciones de contorno indispensables para la localización de un número finito de trayectorias para todos los casos considerados. (*) Seguidamente reseñaremos brevemente estas transformaciones y resultados solamente para los casos de los que se haya hecho uso en alguno de los modelos de crecimiento estudiados en los capítulos 3 y 4.

Consideremos en primer lugar el problema de la búsqueda de un control óptimo cuando los extremos inicial y (ó) final de la trayectoria no están determinados de manera única, sino que pueden ser puntos cualesquiera de una variedad diferenciable dada, es decir, la determinación de la función de control admisible u (t) tal que, entre todas las funciones de control admisibles que trasladan al sistema desde algún punto de la variedad diferenciable r_0–dimensional, S_0, a algún punto de la variedad diferenciable r_1–dimensional, S_1, – siendo $r_0 \leqslant n$, $r_1 \leqslant n$, con lo que $S_0 \subset R^n$, $S_1 \subset R^n$ – es la que hace máximo el funcional objetivo.

(*) Vease Pontryagin, Bol'tanskii, Gamkrelidze y Mischenko, op. cit.

Evidentemente, las restricciones fijadas a priori sobre el control óptimo son menos estrictas que en el caso de extremos fijos, pues ahora puede ser óptimo en principio cualquier control que transporte el sistema desde cualquier punto de S_0 a cualquier punto de S_1. Pero esta ambigüedad desaparecerá en cuanto podamos efectivamente determinar el control óptimo, el cual será un $u(t)$ admisible que trasladará al sistema desde un punto $x_0 \in S_0$ a otro $x_1 \in S_1$. Lo que ocurre es que ahora tenemos una mayor posibilidad de trayectorias entre las que buscar la óptima pero, una vez obtenida ésta, sus puntos inicial y final, x_0 y x_1, están perfectamente determinados.

Ahora bien, si la función de control admisible u_*, que determina una trayectoria x_* que se inicia en $x_0 \in S_0$ y termina en $x_1 \in S_1$, es la óptima entre el *conjunto de las que trasladan el sistema* desde algún punto de S_0 a algún punto de S_1, será también óptima entre el conjunto de las que lo trasladan del punto incial x_0 al x_1 *—que es un subconjunto de aquel—*. Por consiguiente, la solución óptima al problema con extremos variables constituye también un óptimo para el problema con extremos fijos, *y deberá, por tanto,* satisfacer las condiciones necesarias de optimalidad del principio de máximo, tal como se han expuesto en anteriores párrafos

La aplicación de tal principio al problema de extremos variables no basta a determinar un conjunto finito de posibles trayectorias óptimas aisladas como ocurriría en general en el caso de extremos fijos, pues ahora, las condiciones de contorno derivadas de la pertenencia del punto inicial de la trayectoria a S_0 y del final a S_1 no proporcionan constantes suficientes para determinar soluciones a las $2n + 1$ — ecuaciones diferenciales. Necesitamos relaciones complementarias que nos permitan suplir la carencia de condiciones de contorno derivada de la indeterminación a priori de los puntos extremos de la trayectoria. Estas relaciones son precisamente las obtenidas por Pontryagin y sus colaboradores y denominadas condiciones de transversalidad.

Tales condiciones dicen que si la función de control admisible, u_* y su correspondiente trayectoria, x_* que traslada al sistema del punto $x_0 \in S_0$ al $x_1 \in S_1$ son óptimas entre todas las que determinan una evolución de la variable de estado desde cualquier punto de la variedad S_0 a cualquier punto de la S_1, los puntos extremos $x_0(0)$ y $x_1(t_1)$ de la trayectoria serán tales que los vectores u–dimensionales constituidos por las n últimas componentes de la función auxiliar $\psi_*(t)$ determinada por el principio de máximo, cuando ésta toma sus valores en $t = 0$ y $t = t_1$, han de ser ortogonales a las variedades lineales T_0 y T_1 tangentes a S_0 en x_0 y a S_1 en x_1 y de dimensiones r_0 y r_1 respectivamente. Son, por tanto, condiciones necesarias de optimalidad.

Su aplicación nos proporciona relaciones suficientes para la determinación de un conjunto aislado de funciones de control —y consiguientes trayectorias — posibles óptimas. Efectivamente, para cada variedad diferenciable de dimensión r, podemos determinar un conjunto de r vectores n–dimensionales tangentes a ella linealmente independientes, $v_1, \ldots\ldots, v_r$ siendo

$$v_i = (v_i^1, \ldots\ldots\ v_i^n) \qquad i = 1, \ldots\ldots r$$

que darán lugar a r condiciones de transversalidad, también independientes. Así, si la dimensión de la variedad de los puntos iniciales, S_0, es r_0, buscaremos r_0 vectores paralelos a la variedad tangente T_0, y linealmente independientes $v_1, \ldots\ldots\ldots\ v_{r_0}$ que darán lugar a las r_0 relaciones independientes

$$\sum_{j=1}^{n} v_i^j \ \psi_{*j}(0) = 0 \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots r_0$$

que, junto con las $n - r_0$ relaciones que deberá satisfacer x_0 por pertenecer a la variedad S_0, y la condición

$$x^0(0) = 0$$

nos proporcionará precisamente $n + 1$ condiciones de contorno, es decir, el mismo número de ellas que las que obtendríamos a partir del conocimiento exacto a priori del punto inicial de la trayectoria. E igualmente, el extremo final de la trayectoria óptima estará sujeto a n condiciones: las $n-r_1$ derivadas de la relación

$$x_1 \in S_1$$

y las r_1 condiciones de transversalidad independientes, determinadas por un conjunto cualquiera de r_1 vectores de la variedad lineal T_1 tangente a S_1 en x_1, linealmente independientes, $w_1, \ldots\ldots\ldots\ldots w_{r_1}$, que serán

$$\sum_{j=1}^{n} w_i^j \, \psi_{*j}(t_1) = 0 \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots r_1$$

Vemos, pues, que las condiciones de transversalidad, juntamente con el principio de máximo de Pontryagin forman un conjunto de condiciones necesarias de optimalidad, suficiente, en general, a determinar un conjunto finito de trayectorias entre las cuales ha de, en caso de existir, la óptima del problema de extremos no fijos. Esto nos permite considerar el problema con extremos fijos como un caso particular de éste, en el que las variedades a las que han de pertenecer los extremos de la trayectoria son de dimensión cero, con lo que las condiciones de transversalidad desaparecen, quedando las condiciones de contorno adecuadamente precisadas por el conocimiento a priori de los puntos x_0 y x_1.

Otra ampliación del ámbito de aplicación del principio de máximo, esencial en los modelos de crecimiento óptimo, es la de su generalización a sistemas no autónomos, tanto porque estos aparecen realmente en el contexto de este trabajo —en el apartado 4—4 y siguientes— como en cuanto que dicha generalización permite a su vez enunciar una versión de este principio aplicable al caso en que el periodo de duración del programa viene fijado de antemano, que es lo propio de los problemas de crecimiento económico óptimo, en los que la duración del periodo de planificación es un dato a priori.

Supongamos, pues, que se quiere ahora determinar, de entre todas las funciones de control admisibles $u \in U$ tales que trasladan, desde su estado inicial en el instante t_0, x_0, al estado final, x_1, en algún instante, $t_1 > t_0$, a un sistema cuya evolución dinámica viene dada por las relaciones

$$\frac{d x^i}{dt} = f^i(x, u, t) \qquad t = 1,\dots\dots\dots n$$

aquella que maximiza el criterio de optimalidad dado por el funcional objetivo

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0 \; (x(t), \;\; u(t), \;\;\; t) \;\; dt$$

Y en este caso, el instante inicial de la trayectoria, t_0, juega un papel importante, ya que, dada la influencia explícita del tiempo tanto en la ley de evolución de la trayectoria como en su valoración el proceso carece del caracter estacionario típico del problema autónomo, por lo que, en general, no es viable la identificación de t_0 con el origen de tiempos —aunque, concretamente, en los modelos analizados en este trabajo, se ha conseguido esta identificación mediante transformaciones adecuadas en algunas de las variables implicadas en ellos—.

Veamos como también para este problema podemos encontrar condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo. Para ello, consideremos la variable t como un componente más de la variable de estado — lo que significa simplemente incorporar el tiempo a los elementos definidores del estado del sistema, de manera que este se mueva en R^{n+1} — haciendo $t = x^{n+1}$, con lo que

$$\frac{d x^{n+1}}{dt} = 1$$

y

$$x^{n+1} \;\; (t_0) \; = \; t_0$$

y con esto hemos transformado el problema no autónomo en uno autónomo, cuya, evolución viene dada por el sistema diferencial

$$\frac{d\,x^i}{dt} = f^i\,(x^1,\ldots x^n,\, x^{n+1},\, u^1,\ldots\ldots u^m) \qquad i = 0,\, 1,\ldots\ldots n+1$$

donde

$$f^{\,n+1}\,(x^1,\ldots\ldots x^n,\, x^{n+1},\, u^1,\ldots\ldots u^m) = 1$$

cuyo funcional objetivo es

$$x^0 = J = \int_{t_0}^{t_1} f^0\,(x^1,\ldots\ldots x^n,\; x^{n+1},\; u^1,\ldots\ldots u^m)\quad dt$$

y en el que el punto incial de la trayectoria es

$$(x_0{}^1,\,\ldots\ldots\, x_0{}^n,\; t_0) \;\in\; R^{n+1}$$

y el final ha de petenecer a la recta

$$\left\{ (x^1,\ldots\ldots x^n,\, x^{n+1}) \mid\; x^1 = x_1{}^1,\ldots\ldots x^n = x_1{}^n \right\}$$

y al que se le puede aplicar el principio de máximo para sistemas autónomos en los que los extremos no están totalmente determinados, y a los que, por tanto, se hace preciso imponer condiciones de transversalidad.

La función hamiltoniana es ahora la

$$\hat{\mathcal{H}}\,(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) = \sum_{i=0}^{n+1} \hat{\psi}_i\; f^{\,i}\,(\hat{x},\, u) \;=\; \hat{\psi}_0\, f^0 \;+\; \hat{\psi}_1\, f^1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \hat{\psi}_n\, f^n + \hat{\psi}_{n+1}$$

donde

$$\hat{x}\;(t) = (x^0\;(t),\, x^1\,(t),\ldots\ldots\ldots\, x^n\,(t),\, x^{n+1}\;(t))$$

y en la que la función auxiliar $\hat{\psi}_*\,(t)$ es solución del sistema

$$\frac{d\hat{\psi}_i}{dt} = - \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \hat{x}_i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots n+1$$

y es *contínua* y *no* nula en $[t_0, t_1]$.

La función de control óptima, $u_*(t)$, y su correspondiente trayectoria $\hat{x}_*(t)$ deberán satisfacer las relaciones

$$\max_{u \in V} \hat{\mathcal{H}}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t), u) = \hat{\mathcal{H}}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t), u_*(t)) = \hat{M}(\hat{\psi}_*(t), x_*(t))$$

siendo además

$$\hat{M}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t)) = 0$$

y

$$\psi_{*0}(t) = \psi_{*0}(t_1) \geqslant 0 \qquad t \in [t_0, t_1]$$

y el punto final de su trayectoria, x_1 será tal que el vector formado por las n + 1 últimas componentes de $\hat{\psi}(t_1)$ *sea ortogonal* a cualquiera de los vectores de la variedad lineal unidimensional que constituye en este caso el conjunto objetivo, dando así lugar a la única condición de transversalidad posible en nuestro problema. Uno de tales vectores es el (0,.......0, 1), y la condición de transversalidad resultante de él será, por tanto, la

$$\hat{\psi}_{*n+1}(t_1) = 0$$

Expresemos ahora los resultados obtenidos en función de las variables $x(t) = (x^1(t), \ldots\ldots\ldots x^n(t))$, $u(t)$ y t del problema primitivo. Si llamamos

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^{n} \psi_i \, f^i \, (x, u, t)$$

resultará que la función n + 1 dimensional $\psi_*(t) = (\psi_{*0}(t), \ldots\ldots\ldots \psi_{*n}(t))$ constituida por las $n + 1$ primeras componentes de $\hat{\psi}_*(t)$, satisfará las relaciones

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots n$$

y será contínua y no nula en $[t_0, t_1]$. Su continuidad procede directamente del teorema. En cuanto a su no nulidad, observemos que si $\psi_*(t)$ fuese nula, como $\psi_{*n+1}(t_1) = 0$, sería $\hat{\psi}_*(t_1)$ el vector cero, lo que, tratándose de un sistema lineal y homogéneo, implicaría la nulidad de $\hat{\psi}_*(t)$, en contradicción con los resultados del teorema obtenido para la versión autónoma.

Por otra parte, si $u_*(t)$ es el control que maximiza $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t), u)$ en cada instante, como $\psi_{*n+1}(t)$ es, para cada t, un valor independiente de u el control $u_*(t)$ verificará también

$$\max_{u \in V} \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), t, u) = \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), t, u_*(t)) = M(\psi_*(t), x_*(t), t)$$

donde naturalmente es

$$M(\psi_*, x_* t) = \hat{M}(\hat{\psi}_*, \hat{x}_*) - \psi_{*n+1}$$

La relación

$$\psi_{*0}(t) \geqslant 0 \qquad t \in [t_0, t_1]$$

se mantiene, y la

$$\hat{M}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t)) = 0$$

se convierte en la

$$M(\psi_*(t), x_*(t), t) = -\psi_{*n+1}(t)$$

y como es
$$\frac{d\psi_{n+1}(t)}{dt} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial x^{n+1}} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial t} \psi_i$$

y

$$\psi_{*n+1}(t_1) = 0$$

resultará que

$$M\ (\psi_*(t), x_*(t), t) = \int_{t_1}^{t} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f^i(x_*(s), u_*(s), s)}{\partial t}\ \psi_{*i}(s) \right) ds$$

De todo lo cual podemos concluir que las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin lo son también en sistemas *no autónomos con extremos* fijos, con excepción de la (A–7) que resulta transformada en la anteriormente indicada.

La técnica es igualmente válida para modelos no autónomos en los que los puntos inicial y (ó) final de la trayectoria no sean fijos, sino que puedan ser cuales – quiera dentro de variedades diferenciables dadas. Condiciones de transversalidad complementarias – una por cada dimensión de *cada una de las variedades*–*suplirán* la carencia de condiciones de contorno planteada por el grado de indeterminación de cada extremo.

El enunciado del principio de máximo para problemas no autónomos permite abordar muy sencillamente el caso en que el programa de control óptimo se desarrolla con un periodo de duración prefijado de antemano, que es el que interesa en los *modelos de desarrollo económico* óptimo. Habiendo, efectivamente, considerado el tiempo como la componente $n + 1$ - ésima de la variable de estado, el problema de tiempo fijo se reduce, simplemente, a modificar el caso anterior en el sentido de que los puntos inicial y final de la trayectoria son conocidos de antemano en sus $n + 1$ coordenadas, *debiendo trasladarse* ésta del punto

$$x_0 = (x_0^{\,1}, \dots\dots\dots\dots\dots, x_0^{\,n}, t_0)$$

al

$$x_1 = (x_1^{\,1}, \dots\dots\dots\dots\dots, x_1^{\,n}, t_1)$$

siendo $t_1 = t_0 + T$ un dato especificado a priori. La diferencia de este caso respecto al del modelo no autónomo estriba, por tanto, en que ahora, la condición de transver salidad derivada del hecho de que la coordenada $n + 1$ – ésima del punto final de la trayectoria podía variar a lo largo de una recta, y que se traducía en la relación

$$\psi_{*n+1}(t_1) = 0$$

desaparece, siendo sustituida por la

$$x_1^{n+1} = t_1$$

Por lo demás, la *función de control,* $u_*(t)$ *óptima entre* las que trasladan el sistema de x_0 a x_1 – condiciones de contorno que ahora incluyen también la determinación precisa de la duración del proceso – y su correspondiente trayectoria $\hat{x}_*(t)$ satisfarán las condiciones necesarias de optimalidad deducidas del principio de máximo, de manera que existirá una función vectorial definida en $[t_0, t_1]$, y tomando sus valores en R^{n+2}

$$\hat{\psi}_*(t) = (\psi_{*0}(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, \psi_{*n+1}(t))$$

continua y no nula en $[t_0, t_1]$ y tal que la función hamiltoniana

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\psi}, \hat{x}, u) = \sum_{i=0}^{n+1} \psi_i \, f^i(\hat{x}, u)$$

verifique

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t), u_*(t)) = \max_{u \in V} \hat{\mathcal{H}}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t), u) = \hat{M}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t))$$

donde

$$\hat{M}(\hat{\psi}_*(t), \hat{x}_*(t)) = 0$$

y

$$\psi_{*0}(t) = \psi_{*0}(t_1) \geqslant 0 \qquad t \in [t_0, t_1]$$

siendo, además, $\psi_*(t)$ solución del sistema dado por

$$\frac{d\,\hat{\psi}^i}{dt} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial \hat{x}_i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots n, n+1$$

La función vectorial n + 1– dimensional

$$\psi_*(t) = (\psi_{*0}(t), \ldots\ldots\ldots\ldots, \psi_{*n}\ (t))$$

es también contínua y no nula. Pues si en algún punto $t \in [t_0, t_1]$ fuese

$$\psi_*(t) = 0$$

al ser

$$\hat{\mathcal{H}}\,(\hat{\psi}, \hat{x}, u) = \sum_{i=0}^{n+1} \psi_i\ f^i\ (\hat{x},\ u)$$

sería

$$\psi_{n+1\,*}\,(t) = -\sum_{i=0}^{n} \psi_{*i}\,(t)\quad f^i\quad (\hat{x}_*(t),\ u_*\ (t)) = 0$$

lo que contradiría la no nulidad de $\hat{\psi}_*(t)$.

Así, pues, existe una función $\psi_*(t)$ n + 1 – dimensional, contínua y no nula, que satisface el *sistema diferencial*

$$\frac{d\,\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots n$$

y tal que, si es $u_*(t)$ el control óptimo, será

$$\mathcal{H}\,(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t), t) = \max_{u \in V}\ \mathcal{H}\,(\psi_*(t), x_*(t), u, t) = M\,(\psi_*(t),\ x_*\ (t),\ t\,)$$

y además

$$M\,(\psi_*(t), x_*(t), t) = -\,\psi_{n+1\,*}(t)$$

y

$$\psi_{*0}\,(t) = \psi_{*0}\,(t_1) \geqslant 0$$

de lo que concluimos que, en el problema no autónomo con extremos y tiempo fijos es también aplicable el principio de máximo de Pontryagin, siendo sus conclusiones idénticas a las de la versión autónoma y con tiempo indeterminado, con excepción de la (A–7). .Las condiciones necesarias de optimalidad de este problema son, por tanto, las mismas obtenidas para el modelo no autónomo con tiempo *indeterminado*, salvo la

$$M(\psi_*(t), x_*(t), t) = \int_{t_1}^{t} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f^i(x_*(s), u_*(s), s)}{\partial t} \psi_{*i}(s) \right) ds$$

que ahora no tendrá por que verificarse, al no ser necesariamente cierto

$$\psi_{*n+1}(t_1) = 0$$

Los resultados obtenidos últimamente constituyen el principio de máximo *para modelos no autónomos* con tiempo y extremos fijos, tales como los estudiados en este trabajo desde el apartado 4–4 en adelante. En el caso en que el modelo con tiempo y extremos fijos sea además autónomo –situación en la que se encuentran el modelo *analizado en el capítulo* 3, y parte de los expuestos en el capítulo 4– se verificarán también las conclusiones obtenidas para el no autónomo, puesto que el procedimiento por el que se han obtenido sigue siendo válido. Pero ahora además ocurre que las funciones

$$f^i(\hat{x}, u) \qquad i = 0, \ldots\ldots., n, n+1$$

no dependen de x^{n+1}, con lo que $\psi_{*\,n+1}(t)$ deberá satisfacer la relación

$$\frac{d\,\psi_{n+1}(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^{n+1}} = -\frac{\sum_{i=0}^{n+1} \psi_i(t)\, f^i(\hat{x}, u)}{\partial x^{n+1}} = 0$$

con lo que, siendo

$$\mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t)) = -\psi_{*n+1}(t) \qquad t \in [t_0\ t_1]$$

resulta que, en el problema autónomo con extremos y tiempo fijos, el valor de la hamiltoniana es constante a lo largo de la trayectoria óptima, conclusión ya utilizada en los capítulos 3 y 4 de este trabajo.

Los modelos con tiempo fijo pero extremos variables dentro de una variedad diferenciable, tanto si son autónomos como si no lo son, satisfacen también las condiciones del principio de máximo expuestas *anteriormente para* cada una de las dos posibilidades, y su diferencia respecto a ellas estriba en la sustitución por las adecuadas condiciones de transversalidad de las condiciones de contorno de que la parcial indeterminación de los puntos extremos nos priva. En el caso extremo en que la indeterminación sea total en alguno de estos puntos — tal sería, por ejemplo la búsqueda de un control óptimo *entre todos los admisibles* que actúan sobre la variable de estado, inicialmente en x_0, durante un periodo dado T, pudiendo el extremo final de la trayectoria ser cualquier punto de R^n — la variedad diferenciable correspondiente es n–dimensional, y cualquier vector, e_i, de la base canónica de R^n pertenece a ella, con lo que las condiciones de transversalidad serían *las*

$$\psi_{*i}(t_1) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

con lo que, de la no nulidad de la función ψ (t) se deduce

$$\psi_{*0}(t) = \psi_{*0}(t_1) > 0$$

Con lo anteriormente visto quedan caracterizadas todas las versiones del principio de Pontryagin aplicadas a modelos contínuos de duración finita aparecidos en el transcurso de este trabajo, ya que, si bien la variable de estado de estos modelos, K(t), solo puede tomar sus *valores en un subconjunto* de la recta real, — la *semirrecta* de los valores positivos del stock de capital— lo que, en principio, requeriría la aplicación del principio de máximo de Pontryagin en la versión, más compleja, válida para problemas con restricciones en las coordenadas de fase (*), dichas restricciones son de hecho inoperantes para todos los modelos de crecimiento que se *inicien* conun stock de capital mayor *que cero* — *que* son los únicos dignos de considera–

(*) Pontryagin et al., op. cit., capítulo 6.

ción desde un punto de vista económico –, tal y como hemos visto en 3–2 al estudiar el cono de alcanzabilidad del problema. Con lo que si el conjunto de controles admisibles no puede determinar ninguna trayectoria que no esté totalmente contenida en el conjunto B de valores admisibles de la variable de estado – y tal es nuestro caso– se puede eludir la consideración de este conjunto, y tratar el problema como si no existieran tales restricciones en las coordenadas de fase, aplicando las versiones del principio de máximo para problemas con tiempo fijo, autónomos o no autónomos, enunciados en párrafos anteriores.

Consideremos ahora brevemente la aplicación del principio de máximo a *modelos planteados con una duración infinita*, es decir, aquellos que, comenzando en un instante t_0, tienen como intervalo de duración $[t_0, \infty[$. Modelos de *crecimiento económico* de este tipo han sido analizados en 4–4–2, mediante la aplicación de una versión del principio de máximo, restringida por algunas limitaciones.

Si el modelo es de tipo autónomo, la posibilidad de aplicación del principio de máximo se deduce directamente de la validez de la demostración del mismo en el caso de horizontes infinitos. Efectivamente, con las mismas técnicas utilizadas para la versión más elemental, se demuestra (*) que si $u_*(t)$ es, de entre todos los controles admisibles en $[t_0, \infty[$ que, aplicados a un sistema que se encuentra inicialmente en el estado $x(t_0) = x_0$, lo trasladan según una trayectoria que satisface al sistema diferencial (A–1) y además, a la condición de convergencia

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_1$$

el control que hace convergente y da un valor máximo al funcional objetivo

(*) Pontryagin et al., op. cit. capítulo 4

$$J(u) = \int_{t_0}^{\infty} f^0 \; (x\,(t),\, u\,(t))\; dt$$

existe una función vectorial contínua y no nula $\psi_*(t)$ tal que, junto con el citado control óptimo y su correspondiente trayectoria, satisface las relaciones (A–4), – (A–5), (A–6), (A–7) y (A–9).

Si el modelo es no autónomo, también le es aplicable el principio de máximo para sistemas no autónomos y con tiempo fijo. En efecto, sea u_* el control óptimo buscado, x_* su trayectoria correspondiente, que satisface

$$\frac{d\,x^i}{dt} = f^i \; (x, u, t) \qquad i = 1, \ldots\ldots, n$$

siendo su funcional objetivo

$$J\,(u) = \int_{t_1}^{t_2} f^0 \; (x(t),u(t),t)dt$$

y t_1 y t_2 instantes cualesquiera tales que

$$t_0 < t_1 < t_2 < \infty$$

La función de control admisible

$$u_*\,(t) \qquad\qquad t \in [t_1,\; t_2]$$

será también la óptima entre todas las que trasladan al sistema del punto $x_*(t_1)$ al $x_*\,(t_2)$ durante el intervalo de tiempo fijo $T = t_2 - t_1$. Pues si hubiese otra fun – ción de control admisible

$$v\,(t) \qquad\qquad t \in [t_1, t_2]$$

que, con el sistema diferencial citado, determinase una trayectoria $y(t)$ tal que, satisfaciendo las condiciones de contorno

$$y(t_1) = x_*(t_1)$$

y

$$y(t_2) = x_*(t_2)$$

hiciera
$$\int_1^2 f^0(y(t), v(t), t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} f^0(x_*(t), u_*(t), t)\,dt$$

es decir, que

$$J(v, t_1, t_2) > J(u_*, t_1, t_2)$$

resultaría que la función de control $w(t)$ definida por

$$\begin{array}{ll} w(t) = u_*(t) & t \in [t_0, t_1[\\ w(t) = v(t) & t \in [t_1, t_2] \\ w(t) = u_*(t) & t \in]t_2, \infty[\end{array}$$

sería también admisible – puesto que la yuxtaposición de un número finito de funciones contínuas a trozos, acotadas, y con imágenes en V es también otra función contínua a trozos, acotada y con imágenes en V – y daría lugar a una trayectoria $Z(t)$ tal que

$$\begin{array}{ll} z(t) = x_*(t) & t \in [t_0, t_1[\\ z(t) = y(t) & t \in [t_1, t_2] \\ z(t) = x_*(t) & t \in]t_2, \infty[\end{array}$$

de manera que satisface las condiciones de contorno especificadas, y además en virtud de las definiciones anteriores y de la aditividad de la integral respecto del intervalo, se deduciría que:

$$J(w) = \int_{t_0}^{\infty} f^0(z(t), w(t), t)dt > \int_{t_0}^{\infty} f^0(x_*(t), u_*(t), t)dt = J(u_*)$$

contradiciendo así *la optimalidad de la función de* control $u_*(t)$ en el intervalo inicial $[t_0, \infty[$. Así pues, $u_*(t)$ sigue siendo el control óptimo para todo intervalo $[t_1, t_2]$ tal que $t_0 < t_1 < t_2 < \infty$, entre todos los que trasladan al sistema de $x_*(t_1)$ a $x_*(t_2)$ en el periodo de tiempo fijo $t_2 - t_1$, y por consiguiente, deberá satisfacer, para todo $t \in [t_1, t_2]$, las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del *principio de máximo de Pontryagin en su versión para modelos no* autónomos con tiempo y extremos fijos, con lo que resultará que existe una función vectorial continua y no nula, $\psi_*(t)$ tal que satisface

$$\frac{d\psi_{*i}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots n$$

y que además

$$\mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t), t) = \max_{u \in V} \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u, t) = M(\psi_*(t), x_*(t), t)$$

y

$$\psi_{*0}(t) = \psi_{*0}(t_2) \geqslant 0$$

para todo $t \in [t_1, t_2]$. Pero t_1 y t_2 son instantes cualesquiera del periodo de planificación, con la única restricción de que $t_0 < t_1 < t_2 < \infty$; es decir, que t_1 pueda tomarse tan próximo a t_0 como queramos, y t_2 arbitrariamente grande. *Con lo* que resulta que, para *cualquier valor finito de* $t > t_0$ se puede definir un intervalo $[t_1, t_2]$ tal que $t \in [t_1, t_2]$, y, por tanto, para todo $t > t_0$ deberán necesariamente satisfacer el control y trayectoria óptimas las condiciones anteriormente especificadas. Tales condiciones necesarias de optimalidad, junto con las condiciones de contorno no especificadas para el punto inicial de la trayectoria y las n condiciones *de convergencia* en el límite cuando $t \to \infty$ —*que vienen a sustituir* a *otras* tantas condiciones de contorno que se derivarían del conocimiento del punto final de la trayectoria en un modelo de duración finita — determinarán un conjunto de posibles trayectorias óptimas.

Ahora bien, esta generalización del principio de máximo al caso de intervalo temporal infinito no abarca, en cambio, a las condiciones de transversalidad; con lo cual resulta que si algunas, o todas las condiciones de convergencia en el límite de la trayectoria desaparecen, no hay ninguna garantía de que la trayectoria óptima satisfaga las condiciones de transversalidad que pudieran hacer sus veces como condiciones de contorno, con lo que el conjunto de posibles trayectorias óptimas derivado del principio de máximo no queda totalmente determinado (*). Tal es el caso en el modelo de crecimiento óptimo analizado en 4–4–2, en el que la carencia de condiciones de contorno resultante de la inexistencia de las condiciones de convergencia en el límite hubo de ser suplida por razonamientos económicos no derivados del principio de máximo.

A.4. El principio de máximo en modelos discretos

En la primera parte de este trabajo se ha analizado detalladamente un modelo agregado de crecimiento económico óptimo expresado en forma contínua, y se han expuesto también las dificulatades de resolución elemental –obtención efectiva de las trayectorias de $s(t)$ y de $K(t)$– que tal modelo presenta. Esta es la razón fundamental que nos ha movido a discretizar el proceso, aproximándolo mediante un sistema de ecuaciones en diferencias finitas, en el que la aplicación de una versión adecuada del principio de máximo de Pontryagin da lugar a un sistema de condiciones necesarias de optimalidad, a partir de las cuales se obtienen, por procedimientos iterativos de cómputo, las trayectorias discretas óptimas de $s(t)$ y $K(t)$.

Se han demostrado diversas versiones del principio de máximo de Pontryagin en sistemas discretos, algunas de las cuales no se adaptan exactamente a las hipó–

(*). K. Shell "Application of Pontryagin's Maximum Principle to Economics", Lecture III, en Mathematical Systems Theory and Economics, I, Kuhn & Szegö, ed, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Vol 11, Springer–Verlag, 1.969.

tesis de nuestro problema (*). Seguiremos aquí la versión dada por Benavie, (**) basada en la de Holmes (***) y cuyos supuestos corresponden precisamente a los de nuestro modelo de crecimiento económico discreto. Esta versión del teorema dice lo siguiente:

Sea un sistema definido en R^n, en el que la variable tiempo toma los valores discretos 0, 1, 2,............ T, cuya evolución dinámica, dada por la sucesión de valores de la variable de estado n—dimensional

$$x_i = (x_i^1, \ldots\ldots x_i^n) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots\ldots T$$

viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias finitas

$$x_{i+1}^j - x_i^j = f_i^j \; (x_i, u_i)$$

para

$$i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots T-1$$

$$j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$$

y en el que la sucesión temporal de las variables de control

$$u_i \in R^m \qquad i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots T-1$$

toma sus valores en un subconjunto dado $V_i \in R^m$, *determinado por* las rela—

(*) Tal es el caso de la interesante demostración dada por H. Halkin en "A Maximum Principle of the Pontryagin type for Systems described by Nonlinear Difference Equations", S.I.A.M Journal on Control, Vol 4, núm. 1, 1.966, para el caso en que el criterio de optimalidad de*pende solamente del* estado final del sistema.

(**) Benavie, A. "Mathematical Techniques for Economic Analysis", Prentice Hall 1.972.

(***) Holmes, W. L. "Derivation and Application of a Discrete Maximum Principle". Western Eco*nomic* Journal, Diciembre, 1.968.

ciones

$$g^j(u) \leqslant b^j$$

siendo

$$j = 1, 2, \ldots\ldots k$$

$$i = 0, 1, \ldots\ldots T-1$$

Dada la situación inicial del sistema, x_0, *la variable* de control, u, controla efectivamente su evolución, en el sentido de que determina iterativamente, de manera única, las sucesivas posiciones de la variable de estado. El problema consiste ahora *en encontrar, de entre todas* las sucesiones temporales admisibles de la variable de control, la que determina una sucesión temporal de la variable de estado tal que satisfaciendo las condiciones de contorno prefijadas en el instante T, que pueden determinar *total* o *parcialmente* el valor final de la variable de estado x_T, o, simple – mente, no existir – en nuestro modelo de crecimiento óptimo discreto, el valor fi– nal de la variable de estado está siempre determinado totalmente– hace el valor del *criterio objetivo*

$$J = \sum_{i=0}^{T-1} f_i^0 \quad (x_i, u_i)$$

mayor que el obtenido a partir de cualquier otra sucesión x_i, determinada por una sucesión admisible del control, y que también satisfaga las condiciones de contorno. Sean u_{*i} y x_{*i} las sucesiones finitas óptimas. Si las funciones f_i^0, f_i^j son C^2, existe una única sucesión finita de variables auxiliares ψ_{*i}^j para

$$i = 0, 1, 2, \ldots\ldots T-1$$

$$j = 1, 2, \ldots\ldots n$$

que son solución del sistema en diferencias finitas

$$\psi_{i+1}^{j} - \psi_i^{j} = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x_i^{j}}$$

siendo

$$\mathcal{H}_i = f_i^{0}(x_i, u_i) + \sum_{j=1}^{n} \psi_{i+1}^{j} \; f_i^{j}(x_i, u_i)$$

Si además ocurre que todo $\mathcal{H}_i$ es cóncavo en u_i para todo valor de x_i, y el conjunto de los valores admisibles de la variable de control, V_i es convexo, entonces u_{*i} y x_{*i}, junto con ψ_{*i} han de satisfacer necesariamente la condi – ción

$$\mathcal{H}_i(x_{*i}, \psi_{*i+1}) \geqslant \mathcal{H}_i(x_{*i}, \psi_{*i+1}\, u_i), \quad u_i \in V_i$$

para todo $i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots T-1$

El teorema presenta, por tanto, una estructura similar al demostrado por Pontryagin para modelos contínuos. Las condiciones necesarias de optimalidad a que da lugar, consisten en los sistemas de ecuaciones en diferencias finitas que rigen la evolución en el tiempo de la variable de estado y de la variable n–dimensional auxiliar ψ_i, y la condición de maximización de la hamiltoniana, núcleo del principio de máximo, que, mediante la aplicación del teorema de Kuhn–Tucker se traducirá en m relaciones para cada valor de i. Las condiciones de contorno consisten en los valores inicial o final de la variable de estado, o, en su defecto, las condiciones de transversalidad previstas por Benavie, consistentes en la anulación de las variables auxiliares ψ_{T-1}^{j} para toda coordenada j, en la que el correspondiente valor de x_T^{j} no haya sido fijado de antemano, y que, en nuestro modelo discreto, son innecesarias.

A.5. Relación del principio de máximo con el cálculo de variaciones clásico y la programación dinámica

El problema que ha dado origen al principio de máximo responde a un esquema similar al resuelto mediante el cálculo de variaciones clásico: ambos suponen básicamente, *la determinación de un óptimo en un espacio funcional* con posibles restricciones, algunas de caracter diferencial , y como tales, pueden englobarse en los problemas, de caracter más amplio, de Mayer o de Bolza. Pero, en realidad, el principio de máximo supone una generalización de las condiciones necesarias de Euler—Lagrange para extremales, *cuyo ámbito de aplicación amplía, dando así posibilidad de* solución a problemas no abordables mediante las técnicas del cálculo de variaciones clásico.

Pontryagin demuestra (*) que las ecuaciones de Euler se deducen como una consecuencia del principio de máximo cuando éste se aplica a un problema en el que el conjunto admisible de las variables de estado, B, es igual a R^n, y las funciones admisibles de control toman sus valores en todo R^m, o en un subconjunto abierto de él. Para ello considera una curva en R^n, $x(t)$, expresada paramétricamente en función del tiempo, con derivada acotada y contínua a trozos, que maximiza o minimiza un funcional cuyo integrando $f(t, x, \dot{x})$ es continuo y con derivadas contínuas respecto a todas sus variables, y con las condiciones de contorno de extremos y tiempos especificados $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$. Claro que una extremal no es lo mismo que una solución óptima en el sentido de Pontryagin —en realidad, cada una de ellas representa en espacios funcionales un papel semejante al de los máximos relativos y los máximos absolutos, respectivamente, en espacios puntuales—; pero la demostración del principio de máximo sigue siendo válida cuando solo se compara cada trayectoria con las admisibles de un entorno de ella. Haciendo, pues

$$\frac{d x^i}{dt} = u^i$$

(*) Pontryagin et al, op. cit, capítulo 5.

y aplicando a la extremal el principio de máximo para extremos y tiempo fijos, habida cuenta de que, siendo ahora V un conjunto abierto, el máximo absoluto de la hamiltoniana para el control óptimo deberá ser también un máximo relativo, con lo que (A–6) se traduce en que

$$\frac{\partial \mathcal{H}\,(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t), t)}{\partial u} = 0$$

se obtienen las ecuaciones de Euler como condiciones necesarias de optimalidad. Del hecho de que el control óptimo determina siempre un máximo estático en la hamiltoniana se pueden deducir condiciones de segundo orden que dan lugar a la condición de Legendre. Igualmente se deducen, a partir del principio de máximo aplicado en el caso en que el conjunto de valores admisibles de la función de control, V, es abierto, la regla de los multiplicadores de Lagrange y la condición necesaria de Weierstrass.

Por otra parte, si el problema del control óptimo se plantea de manera que tanto el conjunto admisible de las variables de estado, B, como el de los valores de la función de control, V, sean R^n y R^m respectivamente, o al menos, dos subconjuntos abiertos de ellos –con lo que cada función de control *admisible, u(t) y su trayectoria* correspondiente x (t) admiten entornos contenidos totalmente en el recinto de admisibilidad– la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange a la optimización del funcional objetivo con las restricciones determinadas por las ecuaciones diferenciales del sistema (A–1) o sus equivalentes en un problema no autónomo, da lugar a las condiciones de optimalidad (A–4) y (A–5), y además a la

$$\frac{\partial \mathcal{H}\,(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t), t)}{\partial u} = 0$$

que para soluciones de u interiores a V –y si V es abierto, lo son todas– es equivalente *a la (A–6) o a su equivalente en versión no* autónoma del principio de máximo. Si el problema no fija totalmente los extremos inicial o final de la trayectoria, también la aplicación de este método proporciona condiciones necesarias de transversalidad similares a las obtenidas mediante el principio de máximo (*).

Vemos, en resumen, que cuando B y V son abiertos, el principio de máximo puede deducirse a partir de los métodos clásicos de optimización, y estos, a su vez, pueden obtenerse a partir de aquel. Pero esta dualidad desaparece en cuanto alguno de los conjuntos citados contiene a alguno de sus puntos frontera. Centrándonos en el caso en que $B = R^n$ que es el que, por razones anteriormente apuntadas, interesa en el presente trabajo, la relación mencionada entre el principio de máximo y los métodos clásicos de optimización desaparecen en cuanto el conjunto imagen de las funciones de control V, no es abierto, pues ni éstos han de ser necesariamente satisfechos por una trayectoria óptima derivada de una función de control que transcurra total o parcialmente por la frontera de V, *ni para una trayecto*ria de este tipo serían equivalentes las afirmaciones

$$\mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t), t) = \max_{u \in V} \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u, t)$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\psi_*(t), x_*(t), u_*(t), t)}{\partial u} = 0 \qquad t \in [t_0, t_1]$$

con lo que los razonamientos anteriormente esbozados dejan de ser válidos en este caso.

Esta es, precisamente, la gran aportación del principio de máximo respecto *a las técnicas clásicas* del cálculo de variaciones. Pues supongamos que la función de control que determina la trayectoria óptima buscada del problema transcurre total o parcialmente en la frontera de V. No existe, para esta trayectoria, un entorno en el espacio $2n + 1$–dimensional de puntos $(t, x, \dot{x})$ contenido totalmente en

(*) Vease, por ejemplo "Optimal Control Theory: an Introduction", de D. E. Kirk, Prentice Hall, 1.970.

V, con lo que tal trayectoria, a pesar de ser la óptima, no satisfará necesariamente las ecuaciones de Euler. Para este problema, por tanto, los métodos del cálculo de variaciones clásico son inoperantes, puesto que entre las soluciones a las ecuaciones de Euler, precisamente la óptima no aparece. Pero tal trayectoria, en cambio, si aparecerá como solución entre las que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio de máximo de Pontryagin, puesto que su enunciado es válido para cualquier posición de u en V que maximice la hamiltoniana tanto si la función de control toma valores en el interior de V como si los toma en la frontera. Por tanto, el principio de máximo tiene un ámbito de aplicación más amplio que el cálculo de variaciones clásico, pues permite localizar, no solo los controes y trayectorias óptimas interiores sino también aquellos que toman valores en la frontera de su recinto de admisibilidad. Se prodría considerar, por tanto, que el principio de máximo de Pontryagin es una generalización del cálculo de variaciones clásico en el mismo sentido en que el teorema de Kuhn—Tucker lo es respecto de las técnicas clásicas de optimización en espacios puntuales.

También las técnicas de la programación dinámica, aplicadas a un problema de este tipo, pueden desembocar en las relaciones derivadas del principio de máximo de Pontryagin, siempre que el problema satisfaga unas ciertas condiciones que a continuación especificamos.

Consideremos, para mayor sencillez, un problema autónomo de maximización del funcional y tomemos, para cada punto x_1 dado de R^n, el conjunto Ω de los puntos de R^n, tales que existe una trayectoria optima que traslada al sistema desde ellos hasta x_1. Supongamos que este conjunto, Ω, es abierto. Fijado x_1, podemos definir, para cada $x_0 \in \Omega$ la función

$$T(x_0) = \int_{t_0}^{t_1} f^0 \; (x_*(t), u_*(t))\, dt$$

siendo $u_*(t)$ el control óptimo entre todos los que trasladan al sistema desde x_0 a x_1 y $x_*(t)$ la correspondiente trayectoria. La aplicación a $T(x_0)$ del instrumento básico de la programación dinámica o principio de optimalidad de Bellman da lugar a la ecuación en derivadas parciales de Bellman. Transformando adecuadamente esta ecuación cuando la función $T(x)$ admite todas sus derivadas segundas respecto a las componentes de $x = (x^1, \ldots\ldots, x^n)$ se obtienen las condiciones necesarias de optimalidad del principio de máximo (*).

Un punto especialmente importante en el proceso de relación entre estas dos técnicas es la igualdad

$$\psi_i(t) = \frac{\partial T(x(t))}{\partial x^i} \qquad i = 1, \ldots\ldots n$$

a que da lugar la identificación de sus resultados, y que se traduce en una interesante interpretación de las funciones auxiliares $\psi_i(t)$. En efecto, cada una de ellas es igual en cada instante a la derivada del funcional objetivo a lo largo de una trayectoria óptima respecto a la correspondiente coordenada del punto inicial de la trayectoria, o, dicho en términos habituales en la literatura económica, las componentes de la función auxiliar representan en cada instante la sensibilidad del funcional objetivo subsiguiente respecto a pequeñas variaciones en la correspondiente variable de estado *en ese instante, cuando suponemos que el proceso se desplaza siempre siguiendo* una trayectoria óptima. Y este resultado es igualmente válido para los sistemas discretos (**). Al igual que, en los problemas de optimización estática, los multiplicadores de Lagrange se interpretan como la sensibilidad del valor óptimo de la función a pequeños desplazamientos en la correspondiente restricción, las variables auxiliares representan la sensibilidad del valor óptimo del funcional a pequeñas variaciones de la

(*) Pontryagin et al, op. cit, capítulo 1, exponen con detalle el método en el caso particular en que $f^0(x, u) = 1$. Su generalización, para cualquier función $f^0(x, u)$ es sencilla, y puede verse por ejemplo en D. E. Kirk, op. cit. capítulos 3 y 7.

(**) Véase A. Benavie, op. cit., apartado 5—3.

variable de estado, cuyo valor en cada instante representa en cierta manera una restricción respecto a sus posibilidades de evolución futura.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

ARROW, K. J. CHENERY, H. B. MINHAS, B. S. y SOLOW, R. M.
"Capital Substitution and Economic Efficiency"
Review of Economics and Statistics, Vol 43, Agosto 1.961.

ARROW, K. J.
"Applications of Control Theory to Economic Growth"
Mathematics of the Decision Sciences, Vol 2, Dantzig and Veinott, ed, American Mathematical Society 1.968.

ARROW, K. J. y KURZ, M.
"Optimal Growth With irreversible Investment in a Ramsey Model"
Econométrica, Vol 38, *núm.* 2, Marzo de 1.970.

BECKMANN, M. y KÜNZI, H. P. eds
"Computing Methods in *Optimization Problems*"
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, núm. 14, Springer–Verlag 1.969.

BELLMAN, R.
"Dynamic Programming"
Princeton University Press 1.957.

BELLMAN, R. y DREYFUS, S.
"Applied Dynamic Programming"
Princeton University Press 1.962.

BELLMAN, R. y KALABA, R.
"Dynamic Programming and Modern Control Theory"
Academic Press 1.965

BENAVIE, A.
"Mathematical Techniques for Economic Analysis"
Prentice – Hall 1.972

BLISS, G. A.
"Lectures on the Calculus of Variations"
Chicago Press 1.946.

BLUM, E. K.
"The Calculus of Variations, Functional Analysis and Optimal Control Problems"
en Topics in Optimization, Leitmann, ed, Academic Press 1.967.

BOL'TANSKII, V. G.
"Mathematical Methods of Optimal Control"
Holt, Rinehart and Winston, 1.971.

BRYSON, A. E. y HO, Y.
"Applied Optimal Control"
Ginn and Co, 1.969.

BURMEISTER, E. y DOBELL, A. R.
"Mathematical Theories of Economic Growth"
Macmillan Series in Economics 1.970.

CASS, D.
"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation"
Review of Economic Studies, Vol 32, 1.965.

CASS, D.
"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: a Turnpike Theorem"
Econometrica, Vol 34, Octubre de 1.966.

BENAVIE, A.
"Mathematical Techniques for Economic Analysis"
Prentice – Hall 1.972

BLISS, G. A.
"Lectures on the Calculus of Variations"
Chicago Press 1.946.

BLUM, E. K.
"The Calculus of Variations, Functional Analysis and Optimal Control Problems"
en Topics in Optimization, Leitmann, ed, Academic Press 1.967.

BOL'TANSKII, V. G.
"Mathematical Methods of Optimal Control"
Holt, Rinehart and Winston, 1.971.

BRYSON, A. E. y HO, Y.
"Applied Optimal Control"
Ginn and Co, 1.969.

BURMEISTER, E. y DOBELL, A. R.
"Mathematical Theories of Economic Growth"
Macmillan Series in Economics 1.970.

CASS, D.
"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation"
Review of Economic Studies, Vol 32, 1.965.

CASS, D.
"Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: a Turnpike Theorem"
Econometrica, Vol 34, Octubre de 1.966.

CHAKRAVARTY, S.
"Optimal Savings with finite Planning Horizon"
International Economic Review, Vol 3, núm. 3 Septiembre de 1.962

DENN, M.
"Optimization by Variational Methods."
Mc. Graw—Hill 1.969

DOBELL, A. R. y HO, Y.
"Optimal Investment Policy: An Example of a Control Problem in Economic Theory"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Vol. 12, núm. 1, Febrero de 1.967.

DOBELL, A. R.
"Some Characteristic Features of Optimal Control Problems in Economic Theory"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Vol 14, núm. 1, Febrero de 1.969.

DORFMAN, R., SAMUELSON, P. y SOLOW, R.
"Linear Programming and Economic Analysis"
Mc Graw—Hill 1.958.

DORFMAN, R.
"An Economic Interpretation of Optimal Control Theory"
American Economic Review, Vol, 59, núm. 5, Diciembre de 1.969.

EL—HODIRI, M. A.
"Constrained Extrema Introduction to the Differentiable Case with Economic Applications"
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, núm. 56,
Springer—Verlag 1.971.

FREY, B. S.
"Eine einfache Einführung zu Pontryagin Maximum–Prinzip im Wirtschaftswachstum"
Weltwirtschaftliches Archiv, Band 103, Heft,2 1.969.

GALE, D. y SUTHERLAND, W. R.
"Analysis of a one-Good Model of Economic Development"
Mathematics of the Decision Sciences, part 2, Dantzig y Veinott, eds, American Mathematical Society, 1.968.

GESSNER, P. y SPREMANN, K.
"Optimierung in Funktionenräumen"
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems., núm. 64, Springer–Verlag 1.972.

GIRSANOV, I. V.
"Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems."
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. núm. 67, Springer–Verlag 1.972

GUMOWSKI, I. y MIRA, C.
"L'optimisation: la theorie et ses problèmes"
Dunod 1.970.

HADLEY, G. y KEMP, M. C.
"Variational Methods in Economics"
North–Holland 1.971.

HAHN, F. H. y MATTHEWS, R. C. D.
"The Theory of Economic Growth: a survey"
Economic Journal, Diciembre de 1.964. (Versión española de F. Martin Bourgon, Publicada en Panoramas contemporaneos de la teoría económica: crecimiento y desarrollo,col. Alianza Editorial, Madrid, 1.970.

HALKIN, H.
"A Maximum Principle of the Pontryagin type for Systems described by Nonlinear Difference Equations"
S.I.A.M. Journal on Control, Vol 4, núm. 1, 1.966.

HESTENES, M. R.
"Calculus of Variations and Optimal Control Theory"
John Wiley, 1.966.

HUREWICZ, W.
"Lectures on Ordinary Differential Equations"
M.I.T. Press 1.958.

INADA, K.
"On a two–sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization"
Review of Economic Studies, Vol 30, Junio, 1.963.

INAGAKI, M.
"Optimal Economic Growth shifting Finite Versus Infinite Time Horizon"
North–Holland 1.970.

KALMAN, R. E.
"Elementary Control Theory from the Modern Point of View"
en Topics in Mathematical System Theory, Mc Graw–Hill 1.969.

KENDRICK, D. y TAYLOR, L. J.
"A Dynamic Nonlinear Planning Model for Korea"
Practical Approaches to Development Planning
ed. Irma Adelman,John Hopkins University Press 1.969.

KENDRICK, D. y TAYLOR, L. J.
"Numerical Solution of Nonlinear Planning Models"
Econometrica, Vol 38, núm. 3, Mayo 1.970.

KENDRICK, D. y TAYLOR, L. J.
"Numerical Methods and Nonlinear Optimizing Models for Economic Planning"
ed Chenery, Harward University Press 1.971.

KIRK, D. E.
"Optimal Control Theory"
Prentice–Hall 1.970.

KOOPMANS, T. C.
"Stationary Ordinal Utility and Impatience"
Econometrica, Abril de 1.960.

KOOPMANS, T. C.
"On the concept of Optimal Economic Growth"
The Econometric Approach to Development Planning,Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia North–Holland 1.965.

KOOPMANS, T. C.
"Objectives, Constraints and Outcomes in Optimal Growth Models"
Econometrica, Vol 35, Enero de 1.967.

KRISHNA KUMAR, T.
"The Existence of an Optimal Economic Policy"
Econometrica, Vol 37, núm. 4 Octubre de 1.969.

LEE, E. B. y MARCUS, L.
"Foundations of Optimal Control Theory"
S.I.A.M. Series in Applied Mathematics, Wiley 1.968.

MALINVAUD, E.
"Groisances Optimales dans un modèle macroeconomique"
The Econometric Approach to Development Planning. Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, North–Holland 1.965.

MANGASARIAN, O. L.
"Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems"
S.I.A.M. Journal on Control, Vol 4, núm. 1, 1.966.

MERA, K.
"A Generalized Aggregative Model for Optimal Growth with some Empirical Tests"
International Economic Review, vol 10, núm. 2, Junio 1.969.

MIRRLESS, J. A.
"Optimum Growth when Technology is Changing"
Review of Economic Studies, Vol 34, Enero 1.967.

MORISHIMA, M.
"Theory of Economic Growth"
Clarendon Press, Oxford 1.969.

NEHER, P. A.
"Economic Growth and Development: A. Mathematical Introduction"
John Wiley 1.971.

PELEG, B.
"Efficiency Prices for Optimal Consumption Plans"
S.I.A.M. Journal on Control, Vol 10, núm. 3 Agosto de 1.972.

PHELPS, E. S.
"The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen"
American Economic Review, Septiembre de 1.961.

PHELPS E. S.
"A Second Essay on the Golden Rule of Accumulation"
American Economic Review, Septiembre de 1.965.

PIERRE, D. A.
"Optimization Theory with Applications"
John—Wiley 1.969.

PONTRYAGIN, L. S.
"Ordinary Differential Equations"
Addison–Wesley 1.962.

PONTRYAGIN, L. S, BOL'TANSKII, V. G., GAMKRELIDZE, R.S.
y MISCHENKO, E.F.
"The Mathematical Theory of Optimal Processes"
Moscú, 1.961, Ed. Inglesa de Pergamon Press, 1.964.

PRITCHFORD , J.
"Population and Optimal Growth"
Econometrica, Vol 40, Enero de 1.972.

PULIDO SANROMAN A.
"Un ensayo de Aplicación de la función Cobb–Douglas para España"
en Riqueza Nacional de España: Estudio conmemorativo del cincuentenario de la
Universidad Comercial de Deusto, Vol 1, Bilbao 1.968.

RAMSEY, R. P.
"A Mathematical Theory of Saving"
Economic Journal, Diciembre, 1.928.

SAMUELSON
"A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule"
American Economic Review, Junio de 1.965.

SATO, R. y DAVIS, E. G.
"Optimal Savings Policy When Labour grows Endogenously"
Econometrica, Vol 39, Noviembre de 1.971.

SEGURA SANCHEZ, J.
"Función de producción, macrodistribución y desarrollo"
Tecnos 1.969.

SHELL, K.
"Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change"
Essays on the Theory of Optimal Economic Growth Ed Shell, M. I. T. Press, 1.967.

SHELL, K.
"Application of Pontryagin's Maximum Principle to Economics"
Mathematical Systems Theory and Economics Vol 11, Springer—Verlag, 1.969.

SOLOW, R.
"A Contrbution to the Theory of Economic Growth"
Quaterly Journal of Economics, Vol 70, Febrero de 1.956.

STOLERU, L. G.
"An optimal policy for Economic Growth"
Econometrica, Vol 33, núm. 2, Abril de 1.965.

STRAUSS, A.
"An Introduction to Optimal Control Theory"
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Springer—
—Verlag 1.968.

TAYLOR, L. J.
"Calculation of Shadow Prices from Optimal Growth Models: The Case of Chile"
Comunicación presentada al Congreso Internacional de Econometría, Julio de 1.970.

TINBERGEN, J.
"The Optimal Rate of Saving"
Economic Journal, Vol 66, Diciembre de 1.956.

TINBERGEN, J.
"Optimum Savings and Utility Maximization over Time"
Econometrica, Vol 28, Abril de 1.960.

UZAWA, H.
"Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium"
Review of Economic Studies Vol 28, Febrero de 1.961.

WAN, H. Y.
"Economic Growth"
Harcourt Brace Jovanovich, 1.971.

von WEIZSÄCKER, C. C.
"Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon"
Review of Economic Studies, Vol 32, núm. 2, Abril de 1.965.

YOUNG. L. C.
"Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory"
W. B. *Saunders*, 1.969.

"Contabilidad Nacional de España"
Instituto Nacional de Estadística.

"El modelo econométrico del III Plan"
Madrid Imprenta del B.O.E. 1.972.

"Encuesta de Población Activa"
Instituto Nacional de Estadística

"Statistical Yearbook".
United Nations 1.970.

"Tercer Plan de Desarrollo Económico y Social: Estudio sobre la población española 1.972–1.975".
Presidencia del Gobierno.