Cuadernos de Economía. Vol. 25, 157-184, 2002

# El ajuste de la curva de rendimientos o la estimación de la estructura temporal

**Jorge V. Pérez Rodríguez**
*Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*

**Máximo Borrell Vidal**
*ESADE*

**Salvador Torra Porras**
*Universidad de Barcelona*

## Resumen

El ajuste de la curva de rendimientos es una tradición de análisis extensamente desarrollada fuera de nuestras fronteras, que sin embargo, es relativamente reciente en nuestro país. En la actualidad debemos referirnos a los trabajos de Kröguer y Sanchís (1989), Ezquiaga, Jara y Gómez (1994), Nuñez (1995), entre otros, quienes consiguen estimar la curva de rendimientos a partir de diferentes métodos estadístico-matemáticos. En este artículo presentamos una revisión actualizada de muchos de los modelos utilizados, considerando sus ventajas e inconvenientes, muchos de los cuales han sido sintetizados en Pérez-Rodríguez (1994).

**Palabras Clave:** Ajuste de la curva de rendimientos, cupón cero, tipos spot, tipos forward, mínimos cuadrados ordinarios, generalizados y no lineales.

## 1. Introducción

La relación entre los rendimientos de los activos a corto plazo y a largo plazo ha interesado a menudo a muchos economistas teóricos y a los analistas de inversiones. La estructura temporal de los tipos de interés expresa la relación entre el conjunto de rendimientos de un activo financiero y sus respectivos vencimientos, en un momento determinado. Su análisis no sólo se circunscribe a ser un instrumento de la teoría financiera: valoración de activos, análisis de carteras, arbitraje y cobertura, etc., sino de la política monetaria, dada su estrecha vinculación con la formación de expectativas de los agentes, ya que, la estructura temporal posee información sobre las expectativas de los tipos futuros; y a su vez sobre la inflación esperada.

Técnicamente podemos encontrar dos tipos de denominaciones de la curva que relaciona los tipos de interés y su plazo:

1. Se denomina curva de rendimientos al vencimiento *(yield curve to maturity)* o, simplemente curva de rendimientos *(yield curve)* a la relación que existe entre el conjunto de rendimientos de un activo y sus plazos incluyendo tanto los casos en que se paga un cupón como los de cupón cero. Es, por ejemplo, la relación para un momento determinado entre las rentabilidades de los valores del Tesoro (bonos y obligaciones) de riesgo crediticio nulo y los plazos de vencimiento correspondientes. A partir del gráfico 1, podemos imaginar la esencia de este argumento, donde observamos una nube de puntos formada por los diferentes vencimientos (1, 3, 6 meses hasta 60 meses) de diversos bonos que se caracterizarían por ser homogéneos.
2. Se denomina estructura temporal de tipos de interés a la curva de tipos cupón cero, exclusivamente. Puesto que no existen en el mercado bonos de cupón cero para todos los plazos negociados, la curva de la estructura temporal de los tipos de interés ha de *estimarse* primero y *prever sus cambios en el tiempo* después, y ello a partir de la curva de rendimientos, que es la *observada*. La idea básica del método de los bonos cupón cero consiste en obtener precios para títulos homogéneos de esta clase emitidos a un número suficiente de plazos, los cuales coinciden con su vencimiento al no existir cupones intermedios (véase el Gráfico 2, donde se muestra el ajuste de la curva de rendimientos obtenida de la relación entre los rendimientos y sus plazos).

Sin embargo, encontramos muy frecuentemente que los autores utilizan indistintamente una y otra denominación para referirse a un mismo problema: el análisis de los tipos de interés a corto y largo plazo. Esta afirmación sería cierta si dispusiésemos de un activo, homogeneo para diferentes plazos y tipos de interés de los bonos de cupón cero.

Gráfico 1. Rentabilidades de múltiples bonos con distintos vencimientos en una fecha determinada de tiempo

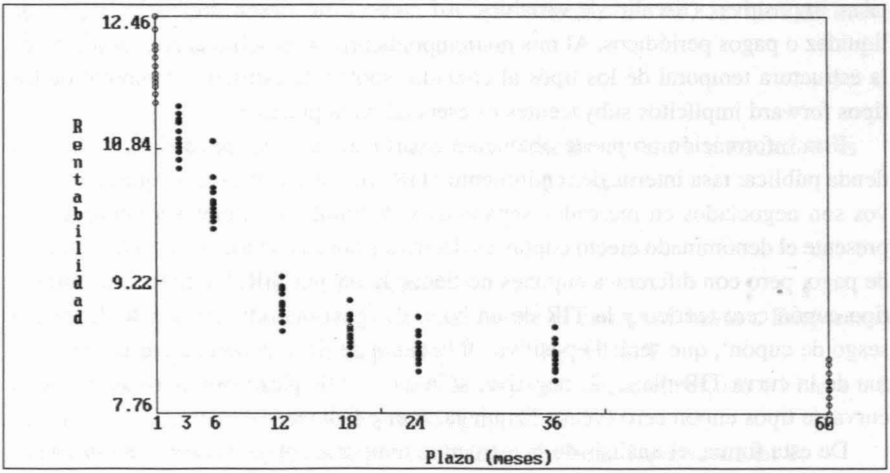
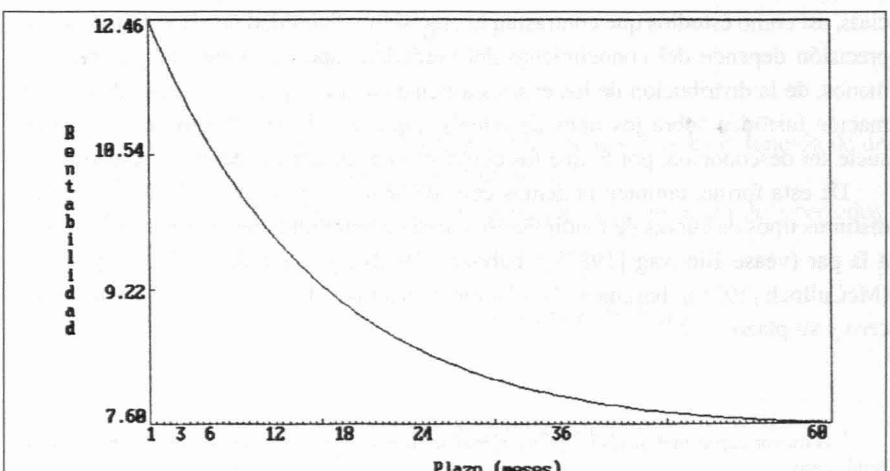



Gráfico 2. Estructura temporal de los tipos de interés ajustada en una fecha determinada de tiempo



Estudiar la estructura temporal no resulta fácil, puesto que sobre los tipos de interés actúan otras variables distintas del plazo. Es conocido que la estructura temporal de los tipos de interés sin riesgo no es directamente observable en un mercado donde existen obligaciones y bonos gubernamentales con varios vencimientos y cupones a diferentes tipos, y donde la renta ordinaria y las ganancias de capital están sujetas a tasas impositivas (fiscalidad) variables, así como a un riesgo crediticio, riesgo de liquidez o pagos periódicos. Al mismo tiempo, la precisión sobre el conocimiento de la estructura temporal de los tipos al contado (spot) y la estructura temporal de los tipos forward implícitos subyacentes es esencial en la práctica.

Esta información no puede obtenerse a partir de la curva de rendimientos de la deuda pública: tasa interna de rendimiento (TIR) frente a su plazo, porque estos activos son negociados en mercados separados y distintos, o simplemente porque está presente el denominado efecto cupón, es decir, dos bonos con idénticas vidas y fechas de pago, pero con diferentes cupones no tienen la misma TIR. La diferencia entre el tipo cupón cero teórico y la TIR de un bono de igual periodo de vida se denomina sesgo de cupón[1], que será: 1) positivo, si la curva de tipos cupón cero está por encima de la curva TIR-plazo; 2) negativa, si la curva TIR-plazo está por encima de la curva de tipos cupón cero (véase Ezquiaga, Jara y Gómez [1994]).

De esta forma, el análisis de la estructura temporal obliga a recurrir a estimaciones de la curva de rendimientos, con el propósito de poder adelantar la forma que puede adoptar en el futuro más inmediato y facilitar la evaluación de las carteras de renta fija, y la valoración de activos contingentes: futuros y opciones (véase Hoo y Lee [1986]). Existen numerosos métodos para la estimación de los tipos de interés implícitos, así como estudios que contrastan la precisión y fiabilidad de estos métodos. Esta precisión depende del conocimiento del verdadero tipo de interés subyacente, o al menos, de la distribución de los errores asociada a tales tipos. En el caso de la información histórica sobre los tipos de interés implícitos, la distribución de los errores suele ser desconocida, por lo que los contrastes estadísticos pueden ser sesgados.

De esta forma, también podemos considerar que dependiendo del activo existen distintos tipos de curvas de rendimiento: curva de rentabilidades internas de los bonos a la par (véase Bierwag [1987] y Fabozzi [1993]), y la curva de tipos cupón cero (McCulloch [1975]), basada en la relación de los tipos de interés de activos de cupón cero y su plazo.

[1] A mayor cupón mayor sesgo, es decir, mayor diferencia existe entre los bonos cupón y bonos cupón cero.

Estas dos curvas sintetizan los diferentes métodos aplicables a la estimación de la curva de rendimientos. Los métodos aplicables son básicamente dos: el análisis de regresión (basado en el método bootstrapping (Fabozzi [1993]) que parte de la TIR de los bonos negociados a la par; el método de regresión TIR-plazo o TIR-duración en el mercado de bonos, el método de los tipos cupón cero, o también denominada estimación de la función de descuento, y que permite derivar los tipos de interés implícitos) y el análisis de programación lineal.

## 2. Definiciones previas. Tipos de interés, precios y relaciones

### 2.1. Notación utilizada

1. T es el vencimiento del bono i.
2. $R_{it}$ es el tipo de interés al contado entre el periodo 0 hasta t. Entonces, su estructura temporal está definida por: $R_{it}$, $R_{it}$, ... , $R_{it}$, t=1,...,T.
3. $r_{it}$ es el tipo de interés forward de un bono i desde el periodo t-1 hasta t. La estructura temporal de tipos forward es: $r_{i1}$, $r_{i2}$, ..., $r_{iT}$.
4. $TIR_{it}$ es el rendimiento al vencimiento del bono i que vence en T.
5. $c_{it}$ es el cupón que paga el bono i en el periodo t.
6. $cc_i$ es el cupón corrido.
7. $P_i$ es el precio del bono i que vence en T excluyendo el cupón,

$$P_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_{it}}{(1+TIR_{iT})^t}$$

8. $\delta_t$ es la función de descuento en el momento t; y $\delta_t(p)$ es la función de descuento en el momento t correspondiente al plazo p.

9.- Tipo forward implícito en tiempo continuo para un plazo de j periodos y horizonte de n periodos:

$$f^t_{j,n} = \frac{n\gamma_{nt} - (n-j)\gamma_{n-j,t}}{j} = \frac{-\log\delta_t(n) + \log\,\delta_t(n-j)}{j}$$

donde, $\gamma_n$ es el tipo de interés al contado en tiempo continuo.

10. Tipo forward instantáneo:

$$f_n^t \equiv \lim_{j \to 0}\left(\frac{-\log \delta_t(n) + \log \delta_t(n-j)}{j}\right) \equiv -\frac{\partial(\log \delta_t(n))}{\partial n}$$

donde,

$$f_n^t = \gamma_{nt} + n \frac{\partial \gamma_{nt}}{\partial n}$$

en la que despejando encontramos que

$$\gamma_{nt} = \frac{1}{n} \int_0^n f_x \, dx$$

que representa cómo el tipo de interés al contado sobre el plazo de n periodos es igual a la media de los tipos de interés forward instantáneos con vencimientos desde 0 hasta n periodos.

11. $V_i$ es el número de cupones pendiente de pago para el bono i.

## 2.2. Algunas relaciones de interés entre las variables

1. Tipos simples ($i_n$) y los tipos de interés compuestos anualmente ($R_n$) para un plazo de n días es

$$i_n = \left[(1 + R_n)^{\frac{n}{360}} - 1\right]\frac{360}{n}$$

siendo *n* el plazo.

2. Los tipos de interés al contado compuestos anualmente ($R_n$) y los tipos de interés al contado compuestos en tiempo continuo ($r_n$), para el plazo de n días, se relacionan a través de

$$r_n = \log(1 + R_n) \quad \text{y} \quad R_n = \exp(r_n) - 1$$

3.- Función de descuento, tipos al contado y tipos forward. Se puede deducir de la expresión anterior que

$$(1 + R_{it})^t = (1 + r_{i1})(1 + r_{i2})\ldots(1 + r_{it}) = \prod_{s=1}^{t}(1 + r_{is}) = \frac{1}{\delta_t}$$

4. Función de descuento y tipos de interés en tiempo continuo ($r_n$) se relacionan por

$$\delta_t(n) = \exp(-nr_{nt}) \quad \text{y} \quad r_{nt} = \frac{\log \delta_t(n)}{n}$$

5. Precio del bono, tipos de interés al contado y tipos forward. Cuando la curva de rendimientos es plana, la $TIR_{iT}=R_{i1}=...=R_{iT}=r_{i1}=...=r_{iT}$, y de esta forma,

$$P_i = \sum_{i=1}^{T}\frac{C_{it}}{(1+R_{it})} = \sum_{i=1}^{T}\frac{C_{it}}{\prod_{s=1}^{t}(1+R_{it})} = \sum_{i=1}^{T} c_{it}\delta_t$$

## 3. Métodos de estimación

Las dos técnicas utilizadas en la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés son básicamente dos: el análisis de regresión y la programación lineal. Cada una de las técnicas tiene algunos defectos. El modelo de regresión está implícitamente basado en condiciones de inexistencia de arbitraje (es decir, la condición de que no existen oportunidades para arbitrar sin riesgo) en un mercado donde una posición corta es una imagen simétrica de su posición a largo. Este supuesto no refleja las condiciones actuales de mercado tales como las asimetrías derivadas de la existencia de impuestos en las posiciones de corto y largo, y los elevados costes financieros de una posición a corto. Consecuentemente, el análisis de regresión obtiene estimadores imprecisos de la estructura temporal.

La aproximación a través del análisis de la programación lineal es consistente con las condiciones de inexistencia de arbitraje en el mercado donde las ventas al descubierto no se permiten. Mientras una prohibición de las ventas al descubierto puede ser más razonable que la simetría, sigue siendo una restricción poco realista. Después de todo, las ventas a corto se practican extensamente. De esta forma, un modelo con fricciones de mercado en la que se imponen suaves obstáculos a las ventas al descubierto, y donde éstos se incrementan con el tamaño de las carteras a corto, parece más correcto. Esto es, la relación entre el tamaño de las carteras a corto y los costes financieros es creciente. Este entorno obtendría mejores estimaciones de la estructura temporal.

### 3.1. Métodos de estimación en el modelo de regresión

El objetivo de la estimación de la estructura temporal a partir del análisis de regresión es la obtención de un conjunto de plazos continuos para los tipos de interés al contado, $R_{it}$, que permita conseguir la función de descuento, $\delta_t$, y los tipos forward implícitos, $r_{it}$.

La estimación de la curva de rendimientos de los bonos es bastante antigua. Desde hace mucho tiempo, se han empleado diversas técnicas para estimar la estructura temporal de los tipos de interés. Las primeras referencias a la estimación empírica de la estructura temporal se encuentran en Guthmann (1929), en su tesis doctoral. Fisher (1930) determina que los rendimientos de los bonos a largo plazo son una media de los tipos forward. Sin embargo, este argumento habría de revisarse cuando los bonos pagan cupón. Durand (1942) estima los tipos forward basándose en métodos gráficos. Este método es el más simple, y consiste es representar la relación entre los rendimientos y el tiempo, y ajustar una curva (véanse, por ejemplo, las series de Durand [1942]).

Otros métodos son denominados de punto-a-punto, donde se supone que cada precio representa el valor de equilibrio y no existen referencias que sean iguales entre los bonos. Entonces se calcula un tipo forward para cada periodo al vencimiento. Sin embargo, los defectos de este método se deben al elevado sesgo, cuestión puesta de manifiesto por Macaulay (1938), pero aún así, se han seguido empleando (Fama y Bliss [1987], Meiselman [1962] y Nelson [1972]). Finalmente, otro método está definido por la estimación de la función de descuento.

Los métodos empíricos de estimación de la estructura temporal pueden clasificarse en continuos, donde destacan McCulloch (1971, 1975) quien realiza un ajuste a través de un polinomio spline de la función de descuento que produce una estructura temporal de tipos al contado, y Shea (1984, 1985); y los métodos discretos (Carleton y Cooper [1976]. Luego, también se puede estudiar la estructura temporal a través de métodos recursivos y mediante la programación lineal (Schaefer [1981] y Ronn [1987]). Los métodos continuos tienen dos defectos. Primero, estos métodos son de una utilidad limitada en la predicción de los tipos referentes a los vencimientos largos. Segundo, los métodos splines también producen estimaciones sensibles a los supuestos arbitrarios sobre el número y la localización de los cortes que separan los splines, o a una elección arbitraria del algoritmo que busca los puntos de corte. Estos defectos se tratan de evitar mediante la modelización discreta.

La inexistencia de bonos cupón cero para plazos superiores al año, obliga a que la estimación de la estructura temporal se ha de realizar a partir de los precios observados de los bonos con cupón. El punto de partida general de los métodos de estimación es la fórmula del precio de un bono:

$$P_i + cc_i = c_i \sum_{i=1}^{T} \frac{1}{(1+R_{it})t} + \frac{A}{(1+R_{iT})^T}$$

$$= c_i \sum_{t=1}^{T} \delta_t + A\delta_T \qquad (1)$$

el precio de un bono i excluido el cupón, simbolizado por $P_i$, i=1,...,m, que paga un cupón periódico ($c_i$) y cupón corrido $cc_i$ (devengado desde la última fecha en que se cobró el último cupón), y el principal (A) al final del periodo k, suponiendo que el factor de descuento se obtiene en base al tipo de rendimiento al vencimiento[2], $R_{it}$.

Es decir, una forma de inferir la estructura temporal de tipos de interés del precio de un bono es aplicar una función spline[3] para transformar el argumento t. En general, si se supone que existe una función para aproximar el rendimiento al vencimiento (TIR), se puede hallar una función $\delta_t$ tal que,

$$P_i + cc_i = c_i \sum_{i=1}^{T} \delta_i + A\delta_T$$

[2] Es decir, la tasa de descuento que iguala el valor actual descontado de todos los pagos futuros al precio del bono. En caso de cupón implícito, o bono con cupón implícito, c=0, y

$$P_i = A\,(1+TIR_{iT})^{-T}$$

[3] Sin describir la teoría, las funciones splines, debidas a McCulloch, son combinaciones lineales de funciones base, cuyo fundamento se encuentra en cómo éstas pueden construirse mediante un pequeño número de polinomios elementales definidos sobre un intervalo de aproximación. Una función de aproximación óptima para una curva de descuento puede encontrarse a través de una combinación lineal de las funciones bases, o elementos de las bases. Así, por ejemplo, una base simple se construye con funciones de potencia truncadas, o sea, funciones que son un polinomio simple de grado j-ésimo en **x** sobre un intervalo de vértices $[v_i, v_{i+1}]$, definido por

$$(x-v_i)^j_+ = [\mathrm{Max}(x-v_i, 0)]^j$$

que es una ecuación de regresión en la que podemos elegir el número de coeficientes que deseamos estimar.

A partir de la expresión (1) se pueden describir múltiples procedimientos estadístico-matemáticos que permiten obtener la curva de rendimientos estimada. Estos métodos son divididos en tres grandes grupos: métodos no estocásticos, análisis de la TIR y su plazo o duración, análisis de las funciones de descuento. En estos modelos no se permiten las ventas al descubierto.

### *3.1.1. Métodos no estocásticos*

Estos modelos representan una versión simple del cálculo de los tipos de interés forward implícitos, sin recurrir a la estimación de parámetros en modelos de regresión.

#### 3.1.1.1. El método recursivo

Este método se caracteriza porque deriva los tipos de interés uno a uno, comenzando con el plazo más pequeño al vencimiento. Entonces, los tipos forward se obtienen resolviendo la función de descuento para incrementos fijados.

La formulación para obtener $r_{it}$ es

$$r_{it} = \frac{c_{it}}{\prod_{s=1}^{t-1}(1+r_{is})\left[ P_i - \sum_{s=1}^{t-1} \frac{c_{is}}{\prod_{q=1}^{s}(1+r_{iq})} \right]} - 1$$

Este método no es factible cuando las fechas de pago de cupones no coincidan. Además, es difícil encontrar en España bonos con vencimientos muy elevados, como por ejemplo catorce y quince años, o vencimientos parecidos a los *consols* británicos o la deuda americana a 30 años.

### *3.1.2. El método TIR-plazo o TIR-duración*

Esta metodología parte de la regresión entre la TIR y el plazo, o la TIR y la duración del bono. Con los coeficientes estimados se calcula la TIR para un continuo de plazos. Los $r_{it}$ se calculan utilizando el método recursivo. Sin embargo, dado que se necesitan conocer los cupones de los bonos, la alternativa más utilizada es suponer que las TIR estimadas correponden a bonos a la par, ya que éstos tienen un cupón igual a la TIR y un precio igual a 100. Estos métodos estiman una curva teórica a la par. Existen diversas aproximaciones:

#### 3.1.2.1. El modelo de Cooper

La aproximación polinomial más simple para explicar los tipos de interés a largo plazo es a través de la inclusión del tiempo como variable independiente a fin de expresar la conducta dinámica de la evolución de los tipos de interés. Cooper (1977) indica varias formas funcionales simples para modelizar la estructura temporal, refiriéndose una de éllas a una función dependiente del tiempo y de tres parámetros:

$$TIR_{iT} = \exp\left[\alpha + \beta t + \gamma \log(t)\right]$$

donde, $TIR_{iT}$ es el rendimiento al vencimiento de un bono i; t es el tiempo; α, β y γ son parámetros a estimar. Es la forma más simple de expresar la relación de los tipos de interés y el tiempo.

En España, algunos modelos que extienden el modelo polinomial simple se encuentran definidos en el trabajo de Kröguer y Sanchís (1989). Es un modelo que se encuentra en la tradición de los modelos de la estructura temporal en base a aproximaciones polinomiales, y sigue una especificación funcional similar a la de Cooper (1975), sólo que en términos lineales.

En su trabajo contrastan un modelo para la curva de rendimientos eligiendo un enfoque lineal con un término corrector en logaritmos, tal que

$$TIR_{iT} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \log(t) + \varepsilon_t$$

donde, $TIR_{iT}$ es el rendimiento al vencimiento; t es el tiempo que hay hasta el vencimiento; y $\varepsilon_t$ se distribuye como $N(\mathbf{0},\sigma_\varepsilon^2)$[4].

Este modelo resulta demasiado elemental para explicar la evolución temporal de los tipos de interés. El problema es que el rendimiento al vencimiento es estimado como una función del tiempo al vencimiento, sin incluir los cupones. Los bonos que pagan cupón expresan una corriente de pagos. De esta forma, si dos series de bonos poseen idénticas fechas de vencimiento pero difieren en los tipos de los cupones, entonces sus rendimientos deben diferir, así como el conjunto de tipos forward, a menos que la curva de rendimientos sea plana. Por este hecho, el método gráfico no facilita resultados útiles (Macaulay [1938]).

### *3.1.3. Estimación de la función de descuento*

El rendimiento al vencimiento de los bonos cupón cero y los tipos de interés forward son importantes para los economistas, puesto que son necesarios para la valoración de los activos contingentes tales como las opciones y los futuros, y también para construir la estructura temporal véase Brown y Dybvig (1986).

El análisis de la estructura temporal se realiza en base al estudio del precio de los activos, bonos que pagan cupón explícito o implícito, libres de riesgo crediticio, cuyos precios se modelizan mediante una combinación lineal de los valores actuales de los pagos prometidos en el futuro.

Este tipo de modelos realiza una aproximación a la estructura temporal de los tipos de interés, cuya ventaja es que son útiles para introducir las hipótesis de equilibrio alternativas y cualquier otra aplicación que ayude a obtener estimaciones de la estructura temporal para vencimientos no observables[5]. El uso de este tipo de método se recomienda cuando:

[4] Las conclusiones de este estudio consideran que la varianza de los tipos de interés crece con el tiempo, y que las diferencias entre los tipos de interés de la curva de rendimientos estimada y la cifra de los rendimientos proporcionados por el Banco de España son elevadas, lo cual indica, según estos autores, que el mercado financiero español posee una eficiencia relativamente reducida. Este hecho se justificaría porque las operaciones de arbitraje serían mayores, permitiendo igualar el rendimiento real con el estimado.

[5] Sin embargo, una crítica que se puede establecer a los splines polinomiales utilizados como modelo de las funciones de descuento, es que estos polinomios no tienen estrictamente las mismas características funcionales que las distribuciones exponenciales (Vasicek y Fong (1982)).

1. La función de rendimientos al vencimiento es desconocida;
2. las aproximaciones de la estructura temporal se usan para contrastar hipótesis alternativas.

El problema de este tipo de métodos basado en el estudio de los bonos cupón, se fundamenta en que en la práctica es difícil encontrar una serie de precios de mercado espaciada, tan regular como se quiera. Este hecho, como veremos, fundamenta la introducción en el tratamiento de estos activos de un método que está relacionado con la duración y que permite la estimación de la curva de rendimientos para las cotizaciones de los bonos cupón que están espaciados irregularmente (véase Chambers, Carleton y McEnally [1981]).

La tradición del ajuste a la curva de rendimientos ha sido investigada a través del estudio de diferentes formas funcionales que permiten obtener los distintos perfiles de la curva de rendimientos. Así, se describen a continuación algunos de los modelos que podemos considerar, son explicativos de este tipo de ajustes para activos libres de riesgo que pagan cupón. Estos modelos pueden resumirse según el método matemático utilizado: por un lado, las aproximaciones polinomiales, como las funciones splines de McCulloch, el modelo de Shea, los B-Splines, el modelo de Carleton y Cooper, el modelo de Chambers, Carleton y McEnally y el modelo de Nelson y Siegel; y por otro lado, funciones exponenciales como el modelo de Chambers, Carleton y Waldman.

### 3.1.3.1. Las funciones splines de McCulloch

La técnica de McCulloch (1975) se basa en la utilización de una aproximación polinomial[6] del término $\delta_t$, desde un punto de vista del análisis numérico, cuyo fundamento se encuentra en el teorema de Weiertrass que especifica que una función continua diferenciable puede aproximarse en un intervalo, con un error arbitrariamente elegido, por algún polinomio definido en ese intervalo.

[6] En general, y de una forma descriptiva, un ajuste polinomial a los datos en los vectores t y $\delta_t$ es una función del tipo

$$\delta_t = c_1 t^n + c_2 t^{n-1} + \ldots + c_d$$

donde el grado del polinomio es n, y el número de coeficientes es d=n+1. Los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_d$ se obtienen resolviendo la ecuación en forma matricial, Ac=Y.

McCulloch definió una función de k-parámetros en (k-2) intervalos limitados por (k-1) puntos de ruptura *(breakpoints),* tal que una aproximación de la función de descuento continua, $\delta_t(p)$, puede modelizarse según la expresión

$$\delta_t(p) = 1 + \sum_{j=1}^{k} a_j f_{jt}(p)$$

donde, $f_{jt}(p)$ son las funciones de polinomios en el argumento temporal de pagos, t, de grado no superior a 3, y elegidas de modo que $\delta_t(p)$ y sus primeras y segundas derivadas son continuas:

$$\left.\frac{d^2\delta_t(p)}{d\,p^2}\right|_{p=v_j} = a_j, \quad j = 1,\ldots, k\text{-}1$$

$$\left.\frac{d\delta_t(p)}{d\,p}\right|_{p=v_1=0} = a_k$$

donde, $v_j$ representa el j-ésimo punto de ruptura[7].

De esta forma, la ecuación del precio está determinada por

$$P_i + cc_i = c_i \sum_{t=1}^{T}\left(1+\sum_{j=1}^{k} a_j f_{jt}(p)\right) + A\left(1+\sum_{j=1}^{k} a_j f_{jT}(p)\right)$$

donde $c_{it}$ representa el flujo correspondiente al bono i que paga cupón c; T es el plazo de vencimiento del flujo $c_{it}$ de cada uno de los bonos cotizados. $\delta_t(p)$ es la función de descuento que puede definirse como una combinación lineal de un número **k** de funciones $f_{jt}(p)$ con un determinado perfil en cada intervalo estudiado. Una vez se han estimado los parámetros $a_j$, se puede obtener el valor de la función de descuento para cada plazo, y los tipos de interés y forward implícitos.

Esta expresión puede simplificarse en la siguiente ecuación:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} a_j X_{ij} + \varepsilon_i$$

[7] Véase el apéndice I, para obtener las expresiones que permiten calcular los puntos de corte, así como los valores de las funciones $f(t_p)$ según la metodología de McCulloch.

donde la variable dependiente está definida por,

$$Y_i = P_i - A - V_i C_i + cc_i$$

y la variable explicativa o independiente es:

$$X_{ij} = Af_{jT}(p) + \sum_{j=1}^{k} f_{jt}(p)$$

siendo $\varepsilon_i$ un término de perturbación. Este modelo puede estimarse por mínimos cuadrados ordinarios siempre y cuando la perturbación sea esférica, característica que se asocia al resto de modelos estimados por dicho método (es decir, homocedasticidad o varianza constante y no autocorrelación o covarianzas nulas).

En España, el modelo representativo es elaborado por Ezquiaga, Jara y Gómez (1994). Este modelo es una aplicación de la metodología desarrollada por McCulloch (1971 y 1975) para la estimación de la función de descuento en los tipos cupón cero, y difiere de aquél en que es un procedimiento discreto.

La ventaja de este método es que no necesita estimar un número elevado de parámetros. Sin embargo, usando las técnicas de las funciones splines como técnicas de aproximación es preciso elegir convenientemente las formas de los componentes, o bases. No todas las funciones son capaces de definir regresores útiles para la estimación. Algunos autores argumentan, sin embargo, que no es adecuado trabajar en la práctica con funciones spline equivalentes a las usadas por McCulloch (1971) cuando aumenta el número de variables, porque se obtienen matrices de regresores que son combinaciones linealmente dependientes, es decir, existe colinealidad[8].

### 3.1.3.2. El modelo de Shea

Una versión alternativa al modelo de McCulloch es el modelo de Shea (1984), que utiliza las técnicas que había empleado McCulloch (1971) y desarrolla un modelo polinomial *piecewise* (por trozos) de la estructura temporal, que es equivalente al modelo de McCulloch. Esta equivalencia se produce porque:

[8] Véase Powell (1981), págs. 227-228.

1. El modelo polinomial piecewise es un modelo general que engloba a los modelos splines, representando estos últimos especificaciones más parsimoniosas, es decir, necesitan estimar un número menor de parámetros.
2. Existen relaciones lineales entre los parámetros en los dos modelos.

Considerando un polinomio cúbico restringido, define (k-1) puntos de ruptura que dividen un intervalo en (k-2) subintervalos. El intervalo está limitado por cero, que se supone es el vencimiento menor. El vencimiento mayor está definido en el límite superior por, $d_{k-1}$. El punto de ruptura más pequeño en el intervalo es $d_1$. Suponiendo que la estructura temporal son pares de descuentos observados y términos al vencimiento. Definimos la matriz de variables independientes $X = \text{diag}(T_1, ..., T_{k-2})$. La matriz X es una (4k-8) x (4k-8) matriz diagonal por bloques, donde $T_j$ es una matriz de variables al vencimiento de orden $n_j$x4. El término $n_j$ es el número de bonos con vencimientos dentro del intervalo $[v_j, v_{j+1}]$. La fila i-ésima de $T_j$ está formada por $(1, t_{ij}, t^2_{ij}, t^3_{ij})$, donde $t_{ij}$ es el término al vencimiento del i-ésimo bono en el intervalo j, $[v_j, v_{j+1}]$. La variable dependiente es $Y_{ij}=\delta(t_{ij})-1$.

El modelo definido es un polinomio cúbico para cada uno de los (k-2) intervalos limitados por los puntos de ruptura,

$$Y_{ij} = b_{1j} + b_{2j}t_{ij} + b_{3j}t^2_{ij} + b_{4j}t^3_{ij} \;;\quad j = 1,..., k\text{-}2$$

donde, los (k-2) intervalos están restringidos, de tal forma que, sus ordenadas, primeras derivadas, y segundas derivadas son iguales a los puntos de ruptura.

Estas tres restricciones son:

1. $$b_{1j} + b_{2j}v_{j+1} + b_{3j}v^2_{j+1} + b_{4j}v^3_{j+1} = b_{1,j+1} + b_{2,j+1}v_{j+1} + b_{3,j+1}v_{3.}{}^2_{j+1} + b_{4,j+1}v^3_{j+1}$$
2. $$b_{2j} + 2b_{3j}v_{j+1} + 3b_{4j}v^2_{j+1} = b_{2,j+1} + 2b_{3,j+1}v_{j+1} + 3b_{4,j+1}v^2_{j+1}$$
3. $$2b_{3j} + 6b_{4j}v_{j+1} = 2b_{3,j+1} + 6b_{4,j+1}v_{j+1}, \quad j = 1,..., k\text{-}3$$

El problema que se debe resolver posee (4k-8) parámetros a estimar y (3k-9) restricciones. Las consideraciones de los modelos de McCulloch y Shea están determinadas por la elección de las bases de los splines:

1. Por un lado, no todos los splines son igualmente capaces de definir regresores útiles para la estimación. Es muy importante valorar la aproximación de las bases de los splines.

2. Por otro lado, la facilidad con la que la función spline puede ser elegida. Por ejemplo, en el modelo de McCulloch es fácil imponer restricciones sobre la pendiente de la curva de rendimientos, pero es más difícil obtener restricciones sobre los niveles de las curvas de rendimientos.

#### 3.1.3.4. B-splines

En Powell (1981) podemos encontrar una aproximación alternativa que recibe el nombre de B-Spline. Este tipo de modelos se desarrolla para resolver el problema inherente a las excesivas restricciones que se introducen sobre el *nivel* de la curva de rendimientos utilizando las aproximaciones de funciones splines. La base B-spline es una transformación lineal de una base truncada. Este modelo tiene un cálculo más simple de las derivadas de la función spline, puesto que las calcula como una suma ponderada de los coeficientes. La utilización de estas bases sobre el espácio de aproximación, o intervalo a través del tiempo desde 0 hasta el vencimiento más alejado de la muestra, previene la pérdida de precisión.

La función B-spline de orden k está definida por:

$$B^k_p(t) = \sum_{l=p}^{p+k+1} \left[ \prod_{h=p}^{p+k+1} \frac{1}{(t_h - t_l)} \right] \max[0,(t_h - t_l)], \quad -\infty < t < \infty$$

donde, *p,* indica que la función es no nula cuando *t* (tiempo hasta la fecha de pago) está dentro del intervalo (sección del espacio de aproximación) $[t_p, t_{p+k+1}]$.

Los límites entre las *n* secciones del espacio de aproximación son conocidas como nudos *(knots).* Cualquier espacio de aproximación será expandido sobre (n+k) funciones base, y existirán partes no nulas en (k+1) funciones de cada sección del espacio de aproximación.

#### 3.1.3.5. Modelo de Carleton y Cooper

Suponen que los bonos que pagan cupón ocurren en un conjunto discreto de fechas especificadas, y que los factores de descuento correspondientes a estas fechas son independientes. Los factores de descuentos son estimados como coeficientes en una regresión lineal, usando los pagos de los bonos como variables independientes y el precio de los bonos como variable dependiente. La estructura temporal resultante de los tipos al contado es discreta, característica que tiene en cuenta el método recursivo (Haugen [1986]).

Según Carleton y Cooper, la función de descuento está definida por

$$\delta_t = \frac{1}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_{is})}$$

que representa el valor presente de una peseta pagada sobre el bono i en el periodo t.

Sustituyendo esta ecuación en la fórmula del precio se obtiene

$$P_i = \sum_{t=1}^{T} c_{it} \mathrm{d}_{\mathrm{it}}$$

De esta forma, Carleton y Cooper (1976) estiman la estructura temporal observando cómo este valor puede relacionarse con el mismo polinomio incluyendo un término de perturbación aleatorio

$$P_i = \sum_{t=1}^{T} c_{it} \mathrm{d}_{\mathrm{it}} + \varepsilon_i$$

La estimación puede resolverse por mínimos cuadrados ordinarios, siempre que se cumplan las hipótesis básicas del modelo.

Finalmente, y a partir de esta expresión, los tipos forward se pueden obtener a partir de la expresión

$$r_n = \frac{\mathrm{d}_{\mathrm{t-1}}}{\mathrm{d}_{\mathrm{t}}} - 1$$

3.1.3.6. Modelos de Chambers, Carleton y McEnally

Chambers, Carleton y McEnally (1981) usan una aproximación polinomial contruyendo un modelo para las rentabilidades de los bonos que pagan cupón, introduciendo el concepto de duración:

$$r_{it} = k + \sum_{w=1}^{\infty} D_{it}(w)q(w)$$

donde

$$r_{it} = \frac{P_{it}}{P_{it-1}}$$

siendo, $P_{i,s}$ el precio del bono i-ésimo libre de riesgo en el periodo s; $D_{i,w}$ es la duración de Fisher-Weil, descrita por

$$D_{iw}(w) = \sum_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{c_{it} B_{it}}{P_{it}} \right] (T - 1)^w$$

donde, T es el tiempo hasta el pago prometido o pago principal; $c_{it}$ es el cupón prometido del bono i durante T periodos; $B_{it}$ es el precio en el periodo t de un dólar de un bono al descuento que vence en el periodo T; k es la rentabilidad de un bono al descuento desde t hasta su vencimiento en t+1; y, q(w) es una variable aleatoria que contiene información de la estructura temporal desde s hasta t+1.

Precisamente, la introducción del concepto de duración pretende resolver un problema implícito en los mercados donde se negocian activos que pagan cupón de forma irregular, pues, el método se basa en la idea de que un bono que reparte cupones puede aproximarse por medio de un bono cupón cero cuyo vencimiento coincide con el vencimiento promedio del bono cupón. Esta medida es la duración.

#### 3.1.3.7. Modelo de Chambers, Carleton y Waldman

La ausencia de bonos al descuento gubernamentales con vencimientos superiores al año y la presencia de perturbaciones que incluyen grados de heterocedasticidad relacionada con los vencimientos han complicado la estimación de la estructura temporal. Chambers, Carleton y Waldman (1984) proponen y estiman una especificación alternativa en la que cada coeficiente del valor actual en la función de precios de un bono es expresado como un polinomio de grado n-ésimo en el periodo de pago, y para el cual una especificación heterocedástica relacionada con el vencimiento es estimada conjuntamente.

La aplicación del método de los mínimos cuadrados ordinarios exige que los bonos maduren en todos y cada uno de los periodos. Si esta condición no se cumple debe estimarse mediante el método del polinomio exponencial.

La estimación de la estructura temporal utilizando activos financieros libres de riesgo, cuyo precio se considera es una combinación lineal de los cash-flows prometidos puede realizarse mediante:

$$P_i = \sum_{t=1}^{T} c_{it}\delta_t + \varepsilon_t$$

donde, $P_i$ es el precio del activo i-ésimo; $c_i(t)$ es el cash-flow prometido en el tiempo t del activo i; $\delta_t$ es la función de descuento o valor actual; y T es el tiempo hasta el vencimiento; con t=1,2,...,T.

Para cada $\delta_t$ se define una TIR, denotada por R(t), y un error aleatorio que refleja la desviación que experimenta el precio de los bonos en relación con el valor obtenido mediante su fórmula teórica. En el análisis empírico se supone que la estructura temporal de los tipos de interés compuestos y continuos puede expresarse como un polinomio simple definido sobre el mismo intervalo[9]:

$$R_{it} = \sum_{j=1}^{J} x_j t^{j-1}$$

donde, $R_{it}$ es el tipo spot al vencimiento T en el periodo t; $x_j$ es el coeficiente del polinomio j-ésimo en el periodo t; t=T-s es el plazo hasta el vencimiento; y J es la longitud del polinomio, j=1,...,J.

Bajo el supuesto de que el tipo de interés sea continuo y compuesto,

$$\delta_t = \exp[R_{it}] = \exp\left[-\sum_{j=1}^{j} x_j t^j\right]$$

[9] De acuerdo al teorema de Weierstrass, una función continua diferenciable puede aproximarse en un intervalo con un error arbitrariamente pequeño mediante algún polinomio definido sobre ese mismo intervalo.

con lo que, la ecuación de regresión queda definida por el siguiente modelo exponencial polinomial es

$$P_i = \sum_{t=1}^{T} c_{it} \exp\left[-\sum_{j=1}^{J} x_j t^j\right] + \varepsilon_i$$

donde **t** es el periodo considerado y $c_{it}$ es el cash-flow prometido[10] en t. Este modelo puede estimarse mediante mínimos cuadrados no lineales.

3.1.3.8. El modelo de Nelson y Siegel

Nelson y Siegel (1987) desarrollan un método en tiempo continuo que estudia los tipos de interés continuos al contado, los tipos forward implícitos y la función de descuento. Su propuesta consiste en suponer que los tipos forward convergen asintóticamente a un cierto nivel. De esta forma, se pretende estimar tanto el momento del tiempo en que éste iguala a su nivel, como el nivel de los tipos. Este supuesto implica que el tipo forward instantáneo es la solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raices reales iguales.

De esta forma,

$$\delta_t = \exp(-tr_t) = \exp\left(-t\beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\tau\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - \beta_2 t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

donde el tipo de interés al contado continuo está definido por

$$r_t = \beta_0 + (\beta_1+\beta_2)\frac{\tau}{t}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - \beta_2 t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

y los tipos forward instantáneos son

[10] Suponiendo que $\{\varepsilon_{i,s}\}$ sean perturbaciones heterocedásticas se puede emplear la transformación en la que $var[\varepsilon_{i,s}]=\sigma_s^2(z_{i,s})^{ds}$, donde $\sigma_s^2$ es el parámetro de la varianza en el periodo s, $z_{i,s}$ es la variable del bono i en **s**, relacionada con la heterocedasticidad, y $d_s$ es el parámetro de la heterocedasticidad en **s**.

$$f_t = \beta_0+\beta_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+\beta_2 \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

En estas ecuaciones los parámetros a estimar son $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ y $\tau$. La interpretación de estos parámetros es: 1) $\beta_0$ es el valor del tipo forward y de contado en en límite, o valor asintótico, luego $\beta_0$ coincide con $f_\infty$ y $\gamma_\infty$; 2) $\beta_0+\beta_1$ es igual al forward instantáneo y al contado para plazo infinitesimalmente pequeños, $\beta_0+\beta_1=f_0=\gamma_0$; $\beta_2$ determina la existencia de un máximo ($\beta_2>0$), mínimo ($\beta_2<0$), y monoticidad ($\beta_2=0$); $\tau$ depende de la tasa a la que el tipo forward se acerca a su nivel asintótico ($\beta_0$). A menor $\tau$ menor t.

El modelo que se estima es

$$P_i = c_i\sum_{t=1}^{T}\delta_t + A\delta_T$$

donde los parámetros de la ecuación se estiman por mínimos cuadrados no lineales o máxima verosimilitud, dada la complejidad de la forma funcional definida en el modelo.

Nelson y Siegel (1987) consideran que los tipos forward implícitos son asintóticos para cualquier plazo, con lo cual los tipos forward para vencimientos elevados son casi iguales. Este método permite cierta flexibilidad a la función de descuento dado que sólo necesita estimar cuatro parámetros. En comparación con McCulloch (que necesita estimar 5 o 6 parámetros) este método es más suave, pues produce estimaciones más alisadas, aunque es menos flexible que aquél[11].

## 3.2. Modelos que utilizan la programación lineal

Los modelos que utilizan la aproximación de la regresión para encontrar la función de descuento, o equivalentemente, la estructura temporal de los tipos de interés al contado que mejor se ajusta o explica los precios observados de los bonos que pagan cupón (McCulloch (1971, 1975), Carleton y Cooper (1976), entre otros) se basa en la minimización de la suma de los cuadrados de los residuos entre los precios de mercado y las estimaciones de la función de descuento. Por el contrario, la meto-

[11] Véase Núñez para una aplicación reciente al caso español de este tipo de procedimientos, así como su comparación con la metodología de McCulloch.

dología de la programación lineal permite estimar la estructura temporal de los tipos de interés igualmente, pero difiere de aquélla en que: 1) el término que se minimiza en la programación lineal se encuentra menos restringido, y de esta forma, los errores de valoración de precios se perciben más fácilmente en los datos; 2) al minimizar la suma del cuadrado de los resíduos entre el precio observado de los bonos y los valores descontados estimados, el supuesto que está implícito es que todos los bonos son poseídos por una determinada clase de inversores. En este sentido, no se consideran las condiciones sobre la forma en que actúan los agentes en el mercado: inexistencia o existencia de arbitraje, fricciones de mercado: fiscalidad, costes de transacción, etc. Así, la estimación de la estructura temporal a través de técnicas de regresión estaría sesgada.

Estos hechos favorecen la utilización alternativa de la programación lineal. Algunos modelos representativos son los de Hodges y Schaefer (1977), Schaefer (1981), Litzemberger y Rolfo (1984), Ronn (1987), Prisman (1990), entre otros.

Por ejemplo, el modelo de Hodges y Schaefer (1977) minimiza el coste de una cartera sujeta a una restricción que encuentra los cash flows en diferentes momentos del tiempo. Schaefer (1981) extiende este procedimiento estimando la estructura de los impuestos específicos sobre la renta y su efecto en la estructura temporal.

Con el afán de sintetizar al máximo los modelos planteados y las diferencias observadas en cada uno de éllos, hemos elegido al azar el modelo de Schaefer (1981) y el modelo de Ronn (1987) para describir la aplicación de la programación lineal a la gestión de las carteras de bonos, y a la estimación y conocimiento de la estructura temporal de los tipos de interés, pues adoptan supuestos bastante simples. Estos modelos son aplicables a la valoración de los bonos que pagan cupón.

### *3.2.1. Modelo de Schaefer*

En mercados sin fricciones y donde no existe arbitraje, la estimación de la estructura temporal se simplifica. Suponiendo que existen n bonos libres de riego, $C_{it}$ es el cash flow del bono i en el periodo t (i=1,...,n), $P_i$ es el precio del bono i-ésimo. Entonces, $C=[C_{1t},...,C_{nt}]$ es un vector columna de flujos de caja, y $P=[P_1,...,P_n]'$ es un vector columna de precios. De esta forma, el problema a optimizar es

$$\text{MAX } -x \bullet P$$
$$s.a. \;\; x\,C \geq 0$$

donde x es un vector fila, $x=[x_1,...,x_n]$, y '•' representa el producto escalar de dos vectores. El objetivo de este problema es maximizar los beneficios por arbitraje, la cantidad máxima por la que el precio de una cartera a corto excede a la de largo.

Las restricciones del problema dual aseguran que para cada periodo en el futuro, la cartera a largo provea un cash flow al menos tan grande como el de corto. En el supuesto de que el mercado se encuentre en equilibrio y existan impuestos (es decir, sea un mercado con fricciones) la estimación de la estructura temporal debe considerar este hecho.

Supongamos que $A^l$ es una matriz de pagos después de impuestos para un tramo específico de los mismos, que denominaremos por **l**. En este caso, el problema dual se convierte en

$$\begin{gathered} \text{MAX } -x \bullet P \\ s.a.\ x\,A^l \geq 0 \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

En este problema, la condición débil del arbitraje se cumple si y sólo si existe una estructura temporal de tipos específica, que denominaremos por **d'**, en la que se debe cumplir que

$$A^l\, d^l \leq P \tag{2}$$

Cada solución de (2) es una estimación factible (Schaefer [1981]). Los inversores poseerán únicamente bonos para los que se satisfaga (2). En el equilibrio, se cumple la igualdad entre el valor presente después de impuestos y el precio del bono.

Schaefer (1981) elige el estimador de la estructura temporal que satisface la expresión (2) y maximiza el valor descontado de una secuencia de cash flow, $s_j$, j=1,...,t. El estimador es la solución al siguiente problema

$$\begin{gathered} \text{MAX} \sum_{j=i}^{t} d_j s_j \\ s.a\ A^l\, d^l \leq P \\ d^l \geq 0 \end{gathered}$$

siendo una estimación factible que maximiza el valor descontado s. Schaefer elige el valor de s, tal que la función objetivo es sensible a todos los tipos al contado estimados.

*3.2.2. Modelo de Ronn*

El problema de programación lineal está definido por

$$\underset{x_i^v, x_i^c}{\mathrm{MAX}} \ Z = \sum_{i=1}^{n} x_i^v P_i^v - \sum_{i=1}^{n} x_i^c P_i^c$$

$$s.a. \quad C_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^c c_{i1} + \sum_{i=1}^{n} x_i^v c_i 1, \quad t = 1$$

$$C_t = (n+\rho)\, C_{t-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i^c c_{it} + \sum_{i=1}^{n} x_i^v c_{it}, \quad \forall t \geq 2$$

$$C_t \geq 0 \ ; \ \forall t \geq 1$$

donde, $P^c_i$ es el precio de compra (c) del bono i; $P^v_i$ es el precio de venta (v) del bono i; $x^c_i$ es la cantidad comprada del bono i; $x^v_i$ es la cantidad vendida al descubierto del bono i; $C_t$ es el cash flow neto del bono en t; $c_{it}$ es el cupón o principal del bono i pagado en t; i=1,...,n es el número de bonos, ρ es la tasa de reinversión mínima sin riesgo para todos los periodos futuros.

Bajo una correción impositiva, debemos replantear la formulación de la siguiente forma:

1. En los bonos con descuento, donde $P^c_i$<100:

1.1. El pago de cupones sería $c_{it}(1-\tau)$, siendo τ el tipo del impuesto sobre la renta aplicable.

1.2. El pago al vencimiento es $100-(100-P^c_i)g$, donde g es la tasa de ganancia de capital.

2. En los bonos sin descuento, donde $P^c_i$>100:

2.1. El pago de cupones es

$$\left[ c_{it} - \frac{P_i^c - 100}{n_i} \right] (1-\tau) + \frac{P_i^c - 100}{n_i}$$

donde, $n_i$ es el número de cupones que quedan por pagar hasta el vencimiento.

2.2. El pago al vencimiento sería de 100.

La diferencia con el modelo de Hodges y Schaefer (1977) puede sintetizarse en:

1) no requiere de restricciones periodo a periodo para los cash flows; 2) la diferencia entre los valores de compra-venta introduce explícitamente los costes de transacción; 3) una percepción de los efectos derivados de la posible existencia de mercados no competitivos; 4) no es necesario realizar un análisis de programación lineal para cada bono que paga cupón disponible y para cada impuesto, ya que se permite introducir ambos efectos conjuntamente. Este hecho facilita que en el cálculo, los cambios en los precios ante cambios en las tasas impositivas se produzcan rápidamente; y 5) se modelizan las ganancias de capital ante la existencia de impuestos.

# APÉNDICE I

## ESPECIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES QUE COMPONEN UN SPLINE CÚBICO

La forma funcional de $f_{jt}(p)$ que componen un spline cúbico con k parámetros se define de la siguiente forma, siquiendo a McCulloch:

1) k es igual a la raiz cuadrada del número de observaciones, redondeando al entero más próximo.

2) Los k-1 vértices $(v_1,...,v_{k-1})$ de los intervalos se definen de forma que el número de observaciones en cada intervalo debe ser el mismo.

3) Ordenando las n observaciones de mayor a menor, de tal forma que:

a) $v_1=0$,
b) $v_j=p_q+\theta(p_{q+1}-p_q)$, j=2,...,k-2, siendo q = parte entera de (j-1)n/(k-2); y $\theta$= resto de (j-1)n/(k-2).
c) $v_{k-1} = T_n$, o plazo del bono con mayor vida.

4) La forma de las funciones $f_{jt}(p)$ es:

a) Para j=1,...,k-1 y
a.1) para $p<v_{j-1}$, entonces $f_{jt}(p)=0$.
a.2) para $v_{j-1}\leq p<v_j$, entonces

$$f_{jt}(p) = \frac{(p-v_{j-1})}{6(v_j-v_{j-1})}$$

a.3) para $v_j \leq p < v_{j+1}$

$$f_{jt}(p) = \frac{(v_j - v_{j-1})^2}{6} + \frac{(v_j - v_{j-1})(p - v_j)}{2} + \frac{(p - v_j)^2}{2} - \frac{(p - v_{j-1})^3}{6(v_{j-1} - v_j)}$$

a.4) para $v_{j+1} \leq p$

$$f_{jt}(p) = (v_{j+1} - v_j)\left[\frac{2v_{j+1} - v_j - v_{j-1}}{6} + \frac{p - v_{j+1}}{2}\right]$$

b) Para j=k, $f_{jt}(p)=p$, $\forall p$.

## Bibliografía

Bierwag, W. (1987): *Análisis de la Duración.* Alianza Editorial. Madrid.

Brown, S.J. and Dybvig, P.M. (1986): «The Empirical Implications of the CIR Theory of the Term Structure of Interest Rates». *Journal of Finance*, Vol.51, págs. 617-630.

Carleton, W.T. and Cooper, J.A. (1976): «Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates'. *Journal of Finance*, Vol.31, págs. 1067-1083.

Chambers, D.R., Carleton, W.T. and Waldman, D.W. (1984): «A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates'. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.19, págs. 233-252.

Chambers, D.R., Carleton, W.T. and McEnally, R.W. (1988): «Inmunizing Default- Free Bond Portfolios with a Duration Vector'. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.27, págs. 89-104.

Cooper, J.A. (1977): «Asset Values, Interest Rates Changes, and Duration'. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.12, págs. 233-252.

Durand, D. (1942): «Basic Yields of Corporate Bonds, 1900-1942'. *Technical Paper 3.* National Bureau of Economic Research.

Ezquiaga, I., Jara, J. y Gómez, I. (1994): «Una Metodología para la Estimación de la Curva de Tipos Cupón-Cero y su Aplicación al Caso Español'. *Moneda y Crédito*, Vol.199, págs. 157-197.

Fabozzi, F.J. (1993): *Bond Markets. Analysis and Strategies.* Prentice-Hall Interntaional.

Fama, E. and Bliss, R.R. (1987): «The Information in Long Maturity Forward Rates'. *American Economic Review*, Vol.77, págs. 680-692.

Fisher, I. (1930): *The Theory of Interest.* New York.

Haugen, R. (1986): *Modern Investment Theory.* Englewood Cliffs, N.J.. Prentice Hall.

HODGES, S.D. y SCHAEFER, S.M. (1977): «A Model for Bond Portfolio Improvement». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.12, págs. 299-335.

HOO, T.S.Y. and LEE, S.B. (1986): «Term Structure Movements and Pricing Interest Contingent Claims». *Journal of Finance*, Vol.41, págs. 1011-1029.

KRÖGUER, J. y SANCHÍS, M. (1989): «Las Curvas de Rendimiento en España: Nuevas Posibilidades de un Instrumento Analítico». *Documento de Trabajo nº.34*, Fundación Fondo para la Investigación Económico y social (FIES):

LITZENBERGER, R.H. and ROLFO, R.H. (1984): «Arbitrage Pricing Transaction Costs and Taxation of Capital Gains». *Journal of Financial Economics*, Vol.13, págs. 337-351.

MACAULAY, F. (1938): «Some Theoretical Problems Siggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856». National Bureau of Economic Research.

MCCULLOCH, J.H. (1971): «Measuring the Term Structure of Interest Rates». *Journal of Business*, Vol.44, págs. 19-31.

MCCULLOCH, J.H. (1975): «An Estimate of the Liquidity Premium». *Journal of Political Economy*, Vol.83, págs. 95-119.

MCCULLOCH, J.H. (1975): «The Tax Adjusted Yield Curve». *Journal of Finance*, Vol.30, págs. 811-829.

MEISELMAN, D. (1962): *The Term Structure of Interes Rates,* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.

NELSON, C.R. (1972): *The Term Structure of Interest Rates.* Basic Books, Inc. Publishers, New York.

NUÑEZ, S. (1995): «Estimación de la Estructura Temporal de Tipos de Interés para el Caso Español». Versión Preliminar. Banco de España.

PÉREZ-RODRÍGUEZ, J. (1994): *Modelización Estocástica de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés en España.* Tesis Doctoral. Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española. Universidad de Barcelona.

POWELL, M.J.D. (1981): *Approximation Theory and Methods.* Cambridge University Press, Cambridge.

PRISMAN, E. (1990): «A Unified Approach to term Structure Estimation: A Methodology for Estimating the Term Structure in a Market with Frictions». *Journal of Financial an Quantitative Analysis*, Vol.25, págs.127-142.

RONN, E.I. (1987): «A new Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.22, págs.439-466.

SCHAEFER, S.M. (1981): «Measuring a Tax-Specific Term Structure ofInterest Rates in the Market for British Government Securities». *Economic Journal*, Vol.91, págs. 415-438.

SHEA, G.S. (1984): «Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.19, págs. 253-269.

SHEA, G.S. (1985): «Interest Rates Term Structure Estimation with Exponential Splines». *Journal of Finance*, Vol.40, págs. 319-325.

VASICEK, O.A. and FONG, H.G. (1982): «Term Structure Modelling using Exponential Splines». *Journal of Finance*, Vol.37, págs. 339-356.