Cuadernos de Economía. Vol. 21 67-107 1993

Aplicaciones de funciones de producción al campo de la economía de la empresa

José M.ª Castán Farrero
Departamento de Economía y Organización de Empresas
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Barcelona
Avda. Diagonal, 690
08034 Barcelona

INTRODUCCIÓN

En este trabajo pretendemos desarrollar una serie de funciones de producción que reflejan las relaciones existentes entre el rendimiento y el empleo de factores, por tanto, representativas de la producción industrial, obteniendo a partir de ellas aplicaciones en el campo de la Economía de la Empresa y en concreto en el ámbito de la planificación de operaciones.

Se comienza por desarrollar el concepto de función de consumo de GUTENBERG dentro del contexto de la producción, para poner de manifiesto la relación de interdependencia que existe entre el rendimiento técnico de los equipos productivos (máquinas) y el consumo de factores que esos equipos efectúan para dar unas prestaciones determinadas.

En base a estas funciones de consumo y a la contemplación de la empresa en unidades parciales de organización (lugares de aprovisionamiento, producción y venta) y junto al planteamiento de LEONTIEF, queremos desarrollar un modelo que orientado en sistemas deduce una serie de funciones de producción (tipo B, C y D) de las cuales se pueden obtener aplicaciones para la empresa.

En especial queremos resaltar la función de producción tipo D cuya importancia en el aspecto teórico se manifiesta en que abarca todas las relaciones de producción relevantes desde el punto de vista económico de la empresa y de la que se derivan aplicaciones para ésta, como es el caso del modelo GOZINTO, que desarrolla un procedimiento sistemático basado en el álgebra matricial mediante el cual es posible definir una serie de conceptos interesantes que nos dan un buen marco para ejecutar la función de planificación cuando entran muchos productos y componentes.

LAS FUNCIONES DE CONSUMO EN EL ÁMBITO DE LA PRODUCCIÓN

La concepción de función de consumo, dentro del contexto de la producción es debida a GUTENBERG[1], quien ha querido con ello poner de manifiesto la relación de interdependencia que existe entre el rendimiento técnico de un equipo y el consumo de factores que ese equipo necesita para dar un rendimiento determinado.

Al establecer este tipo de funciones, GUTENBERG contempla, fundamentalmente, las características técnicas de los bienes de equipo. Para él, todo agregado puede concebirse como haz[2] de rendimientos que puede utilizar mientras no agote su capacidad. En otros términos: todo equipo posee una cierta capacidad (de contribución al proceso productivo) o reserva de capacidad; a medida que el equipo hace su aportación al proceso, esa reserva va disminuyendo hasta agotarse. O sea, que el equipo se desgasta, consume su propia substancia, grava la estructura molecular hasta quedar inservible.

El momento de este agotamiento puede presentarse más pronto o más tarde según se emplee el equipo más o menos intensamente. Es decir, que si se le exige una elevada intensidad de rendimiento, el equipo aportará mayor contribución al proceso productivo por unidad de tiempo que en caso de exigirle menor intensidad (en contrapartida, también se dará un desgaste menos acusado).

1. Guntenberg, E. (1961). *fundamentos de la Economía de la Empresa*. 3.ª edic. Buenos Aires, pág. 211 y ss.

2. Por haz debemos entender cantidad o suma de rendimiento, es decir, toda máquina o unidad técnica está compuesta por la unión de varios subconjuntos, cada uno de ellos ha sido diseñado para aportar un determinado rendimiento, pues la suma de todos estos rendimientos, da como resultado el rendimiento global de la máquina. Ej. En un «bulldozer», el subconjunto motor da un rendimiento, el subconjunto circuito hidráulico de un rendimiento, pues bien, todos estos rendimientos forman o intervienen en el rendimiento total de la unidad técnica.

En el caso concreto de bienes de equipo, tipo máquinas herramientas[3], tornos, fresadoras, limadoras, cepilladoras (planeadoras), taladradoras, etc., el rendimiento está directamente relacionado con la producción que en ellas se obtiene y aquélla depende del ciclo de trabajo y éste en su mayoría, del tiempo de máquina. Por otra parte el tiempo de máquina se halla vinculado al número de revoluciones por minuto, o número de carreras por minuto y al avance por revolución o carrera respectivamente.

Centrándonos en el tiempo máquina (tm), su disminución se consigue mediante el aumento del número de revoluciones por minuto, o el número de carreras por minuto, según sea el tipo de máquina y el avance por revolución o carrera, todo ello hace que desarrolle una mayor velocidad de trabajo, con lo cual estamos aumentando el rendimiento. Ahora bien, esta mayor velocidad de trabajo *obliga a la máquina a una utilización más intensiva y en consecuencia a un mayor desgaste de sí misma y además a un mayor consumo de todos los elementos necesarios para su utilización y buen funcionamiento.*

Con lo dicho, podemos constatar que a todo rendimiento aportado se enfrenta, consiguientemente, un determinado «consumo de substancia». El funcionamiento de un bien de equipo (el aporte de rendimiento) da lugar a un cierto «consumo» de sí mismo (de su propia substancia, gravando su estructura molecular). Pero al mismo tiempo, junto a este consumo, para que este bien de equipo funcione (aporte un rendimiento) es necesario el que vaya asociado el consumo de otros factores, *tales como energía, herramientas, lubricantes, refrigerante, mano de obra por revisiones y reparaciones* (o sea, de mantenimiento y conservación).

Hemos significado que para que un bien de equipo o medio de empresa aporte un rendimiento, es preciso que junto al consumo de su propia substancia, vaya asociado el de otros factores. El consumo de estos factores —a los que podemos llamar *adicionales* o *aditivos*— depende también de la intensidad en el empleo del equipo y además de las características técnicas del mismo. Por

3. La función principal de estas máquinas-herramientas, consiste en la realización de una serie de operaciones elementales (taladrar, tornear, contornear, tallar engranajes entre otras) bajo la supervisión directa de un operario, quien, de acuerdo con las especificaciones de una hoja de proceso, controla las variables de mecanizado (tiempo, velocidad, longitud, profundidad y otras más). Cabe resaltar que en las organizaciones donde se han introducido las Nuevas Teconologías de la Producción, estas máquinas han sido sustituidas por otras denominadas máquinas-herramientas de Control Numérico que incorporan grandes ventajas a los sistemas productivos. (Véase Fernández, E. y Fernández, Z. (1988) «Manual de dirección estratégica de la tecnología. La producción como ventaja competitiva», Ariel, Barcelona, Cap. 11.

ejemplo, se conoce el desgaste de las herramientas en tornos, fresadoras y cepilladoras a diferentes velocidades de corte o número de carreras. Existen tablas y ábacos que permiten calcular estos desgastes en función de las velocidades de trabajo a las que operan las máquinas herramientas[4].

Podemos decir que los equipos técnicos (medios de empresa) poseen una reserva de capacidad productiva. Mientras no se les utiliza, su capacidad es potencial, en el momento que se las combina con otros factores adicionales, aquéllos hacen su aportación al proceso productivo —dan rendimiento.

De forma que entre el rendimiento técnico de un equipo y el consumo de esos factores adicionales existe una relación de interdependencia que GUTEMBERG llama «funciones de consumo».

FORMALIZACIÓN DE LAS FUNCIONES DE CONSUMO PARA UNA EMPRESA

El intento de definir el complejo proceso de fabricación en su totalidad mediante una función está condenado al fracaso[5]. Ya que las cantidades consumidas se encuentran en una dependencia mediata, y no inmediata de las cantidades producidas, o en otras palabras dependen medianamente del rendimiento de los bienes de equipo que se hallan ubicados en los distintos lugares de producción (secciones) o talleres, o bien, en relación de cómo está distribuida la planta industrial.

Toda planta de una empresa de tipo industrial se compone de una serie de unidades técnicas parciales (lugares de trabajo, talleres de producción o centros de producción), en estas unidades técnicas se hallan instalados los bienes de equipo. Cada bien de equipo (cada máquina) se caracteriza por una serie de propiedades técnicas exactamente determinadas.

Designaremos estas propiedades por: (z_1, z_2, z_3, ... z_v). Así: Una prensa utilizada en la industria del automóvil, para la conformación de la chapa se caracterizará, según la fuerza (z_1) además según el trabajo (z_2) según el recorrido (z_3), entre otros.

Un torno de los que se utilizan en cualquier taller mecánico o incluso el utilizado en la industria del automóvil para mecanizar una pieza como es el ci-

4. Véase Castán Farrero, José M.ª (1992).

5. Véase Kloock, J. (1975): «Situación actual de la Teoría de la Producción y de Costes en la Economía de la Empresa», en la obra colectiva *Introducción a la Economía de la Empresa.* Lecturas seleccionadas por el Dr. Santiago García Echevarría, Confederación Española de Cajas de Ahorros, Madrid, Tomo II, pág. 20.

güeñal, u otro tipo de pieza, tendrá como características técnicas: Potencia capaz de suministrar (z_1), distancia entre puntos o longitud que pueda mecanizar (z_2), mecanismo de avance (z_3), husillo de roscar (z_4), etc.

Una máquina de las utilizadas en la industria de la confección, como «La Autoplantilla Clarbro», representa la total mecanización del reconocido sistema Clarbro de plantilla para cosido manual. Sus características técnicas serán: Sistema eléctrico-tipo de motor (z_1), tamaño de la máquina (longitud, anchura, altura mesa, peso) (z_2), cabezal de coser (velocidad de cosido máximo y mínimo, margen de ribetear) (z_3), etc.

Por tanto todo bien de equipo, ya se trate de una máquina para tejidos de punto, una cepilladora, un torno, prensa, etc., tiene en cada caso propiedades o características técnicas específicas. Precisamente son las características técnicas de cada uno de los bienes de equipo y de los lugares de trabajo los que determinan los consumos de los factores utilizados por dichos bienes de equipo y en aquellos lugares de trabajo.

Si se definen las relaciones de producción para cada uno de los talleres de producción[6], que también denominaremos en algunas ocasiones centros de producción, *entonces la función de producción de una empresa se compone de un sistema de funciones*[7].

Los elementos de un *tal sistema de funciones son las funciones de consumo*. Estas señalan la dependencia entre los consumos de las cantidades de empleo de los factores y las exigencias de cada uno de los medios de producción.

Ahora bien, las cantidades de consumo de factores no quedan solamente determinadas por las propiedades técnicas de las instalaciones, sino que además influye la intensidad con que se utilizan las mismas, o sea, en otras palabras, *del rendimiento exigido de ellas, que designaremos por la letra d*.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de decir, llegamos a una función que permite ver claramente de qué dependen las cantidades de consumo de los factores productivos y servicios que se requieren para obtener el rendimiento deseado de la máquina[8].

Tal función de consumo se puede escribir como sigue:

$$r_i = f_i\ (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_v, d)$$

6. El hecho de llamar talleres de producción o centros de producción, depende de la dimensión de la empresa y de la complejidad y número de productos que fabrique. En caso sencillo o simple, pueden denominarse secciones o puestos de trabajo.

7. Kloock, J. *op. cit.*, pág. 20.

8. Gutenberg, E., *op. cit.*, págs. 215 y ss.

donde:

r_i = es la cantidad consumida del factor o recurso «i».

$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_v$ = son las características técnicas del equipo.

d = es el rendimiento exigido al equipo, expresado en cantidad por unidad de tiempo (toneladas, metros cúbicos, número de piezas).

Supongamos que las propiedades técnicas del equipo no varían, (*supuesto válido sólo a corto plazo)* cabe entonces considerar las funciones de consumo como funciones, única y exclusivamente, del rendimiento o intensidad del empleo, *d* de las máquinas o equipos.

Bajo este supuesto podemos escribir la función de consumo como: $r_i = f_i$ (d) o sea, que el consumo de un factor adicional (por un determinado equipo o unidad productiva), depende del rendimiento exigido a dicha unidad. Pero el rendimiento exigido, a su vez, depende de la producción que se desea obtener[8]. Así el *rendimiento* de la unidad productiva número 1 será : $d_1 = H_1$ (x);

y de la número 2, $d_2 = H_2$ (x);

y en general, $d_j = H_2$ (x) siendo —x— la producción a obtener.

Por lo tanto, la producción prevista —x— determina el rendimiento exigido a las unidades técnicas.

$$d_j = H_j (x)$$

y éste determina el consumo de los factores adicionales, através de las funciones de consumo del tipo

$$r_i = f_i (d_j)$$

para cada unidad técnica, o sea, para cada máquina.

De modo que, mediante las funciones de consumo propias de cada unidad técnica (que se suponen conocidas) puede determinarse la cantidad que se precisará de un factor aditivo concreto para obtener —con aquel equipo— un volumen de producción dado:

$$r_i = f_i [H_j (x)]$$

Pero —en el caso más general— habrá una función de consumo de cada factor adicional y para cada unidad técnica de producción.

En consecuencia, el consumo global de cada factor (por ejemplo lubricante), resultará de sumar su consumo «parcial» en cada unidad técnica, dado por su función de consumo.

De manera que podríamos ilustrar esto mediante una matriz de consumos parciales —en la que las filas correspondieran a los diferentes factores adicio-

9. El rendimiento, d, lo medimos en unidades producidas por unidad de tiempo.

nales o aditivos y las columnas a las unidades técnicas de producción (talleres, secciones, puesto de trabajo, etc.) Tal matriz podría adoptar la forma que presenta el cuadro n.º 1.[10]

Cuadro n.º 1

Unidad Técnica Factor	U.T.$_1$	U.T.$_2$	U.T.$_3$	.... U.T$_J$	....	U.T.$_M$
r_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	... r_{1j}	...	r_{21m}
r_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	... r_{2j}	...	r_{2m}
. .	...	...	...	... ...	...	...
. .	...	...	...	... ...	...	...
r_i	r_{il}	r_{i2}	r_{i3}	... r_{ij}	...	r_{im}
. .	...	...	...	... ...	...	...
. .	...	...	...	... ...	...	...
r_n	r_{n1}	r_{n2}	r_{n3}	... r_{nj}	...	r_{nm}

De forma que, en los coeficientes r_{ij}, el primer subíndice indica el factor adicional (aditivo) y el segundo la unidad productiva, puesto de trabajo, lugar de fabricación o equipo de que se trate, resultando que:

$$r_1 = r_{11} + r_{12} + \ldots\ldots + r_{1m} = \sum_{j=1}^{m} r_{1j}$$

$$r_2 = r_{21} + r_{22} + \ldots\ldots + r_{2m} = \sum_{j=1}^{m} r_{2j}$$

....

$$r_i = r_{i1} + r_{i2} + \ldots\ldots + r_{im} = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$$

Pero —según hemos indicado— $r_{ij} = f_{ij}(d_j)$ donde $d_j = H_j(x)$; por tanto, sustituyendo, resulta que:

10. Véase Tarrago, F., (1989), *Fundamentos de Economía de la Empresa*, Ed. del autor, Barcelona, 2.ª ed., pág. 494.

$$r_{ij} = f_{ij}\,[H_j\,(x)] \text{ y también}$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}\,[H_j\,(x)]$$

Con lo cual se tienen las cantidades totales consumidas de factores aditivos para una producción dada.

Para una empresa que tenga en conjunto —m— lugares de fabricación P_j (j = 1, 2, ...m) y que en todos ellos se disponga de un sistema de unidades técnicas rígidamente acopladas[11] y que solamente se produzca un tipo de producto, la función de consumo del lugar de fabricación P_j tiene la siguiente representación:

$$r_{ij} = g_{ij}\,(z_{ij}, \ldots, z_{vj}\; e_{ij}\; d_j)\; r_j$$

En la que:

r_{ij} = Cantidades mínimas técnicamente exigidas a los factores de producción del tipo i que el lugar de producción P_i suministra al lugar P_j por período.

z_{ij} ... z_{vj} = Características técnicas de las instalaciones del centro de producción j.

e_{ij} = Indica como influyen las características técnicas de los equipos e instalaciones en el consumo de factores en un lugar de producción en magnitudes independientes del producto final[12].

d_j = Intensidad de utilización de los equipos e instalaciones.

r_j = Producto total obtenido por período en el lugar de producción P_j.

En consecuencia, las cantidades mínimas técnicamente exigidas r_{ij} a los factores de producción del tipo i, que el lugar de producción P_i suministra al lugar

11. Significa que los equipos intervienen todos en la obtención del producto final, en el sentido de que cada equipo participa en una fase, según la secuencia de operaciones indicada para su obtención.

12. Un caso ilustrativo de esta situación, sería el de una planta metalúrgica de Tratamientos Térmicos, en la cual entre otros procesos se lleva a cabo el de «nitruración gaseosa», para el que se precisa la instalación de un tanque de 20 m^3 que almacene gas en forma líquida a –196 °C y de 8 a 12 kg/cm^2 de presión.

Para el mantenimiento del gas en forma líquida a la presión y temperatura indicadas, se precisa del consumo de energía. Aunque la factoría desarrolla su actividad a capacidad sostenida durante las veinticuatro horas del día (existen tres turnos), durante el fin de semana (dos días) no se ejerce actividad productiva alguna; sin embargo en estos dos días se precisa consumo de energías para mantener el gas en las condiciones deseadas.

P_j por el período, son una función que: Depende de los datos técnicos $z_{ij}, \ldots z_{vj}$ de las instalaciones del centro de producción j, que influye en los consumos de un lugar de producción en magnitudes independientes del producto final y que en la función se simboliza por e_{ij}, así como la intensidad d_j de utilización de la instalación y del producto total r_j por período obtenido en el lugar P_j. A este respecto debe considerarse que las magnitudes r_{ij} del lugar P_i se han de considerar como cantidades de ouputs y, como cantidades de inputs, al considerarlas desde P_j. Cuando se dispone de n distintos tipos de factores de producción y de m lugares de fabricación y para una intensidad de empleo de los equipos $d_j = H_j(r_j)$, se tiene la siguiente estructura.

$$\begin{aligned} r_{ij} &= g_{ij}(z_{ij}, \ldots\ldots\ldots, z_{vj}, e_{ij}, d_j)\, r_j = \\ &= g_{ij}[z_{ij}, \ldots\ldots\ldots, z_{vj}, e_{ij}, H_j(r_j)]\, r_j = \\ &= f_{ij}[(z_{ij}, \ldots\ldots\ldots, z_{vj}, e_{ij}, H_j(r_j)] \end{aligned}$$

para i = 1, 2, ..., n y j = 1, 2, ..., m.

Las funciones de consumo se basan, por consiguiente, en dos hechos importantes de todo proceso de fabricación:

a) Del lugar de producción P_i se suministran factores de producción al lugar de producción P_j.

b) Se consumen factores del P_i en el lugar de producción receptor P_j.

El concepto de las funciones de consumo se ha de ampliar aquí, para considerar las siguientes posibilidades a_1) . b_1) o a_2) . b_2) como casos especiales.

a_1) Se considera que se suministrarán factores de producción de un lugar de producción P_i a otro lugar P_j.

b_1) Los factores de producción de P_i que se reciben en el lugar de producción P_j no se consumen o sólo se consumirán en parte.

a_2) No se suministra ningún factor de producción del lugar de producción P_i a otro de producción P_j.

b_2) En consecuencia, no se consumirán factores de producción de los lugares P_i en P_j.

Una tal ampliación de la función de consumo facilita la consideración en un sistema de producción además de los centros de fabricación, de los almacenes de aprovisionamiento, almacenes intermedios y almacenes de productos terminados, esto es, la totalidad de los centros de producción de una empresa con sus relaciones inputs-outputs[13].

13. Para una consideración más detallada sobre esta cuestión, véase Castán Farrero, Jose M., *op. cit.*

LA INTRODUCCIÓN DE LAS FUNCIONES DE CONSUMO EN LOS MODELOS ORIENTADOS EN SISTEMAS DE UNA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

Contemplamos la empresa en unidades parciales de organización y concretamente en este caso en lugares de aprovisionamiento, de producción y de venta. Desde esta perspectiva vamos a considerar las siguientes relaciones a cuya comprensión nos ayudará la figura 1.

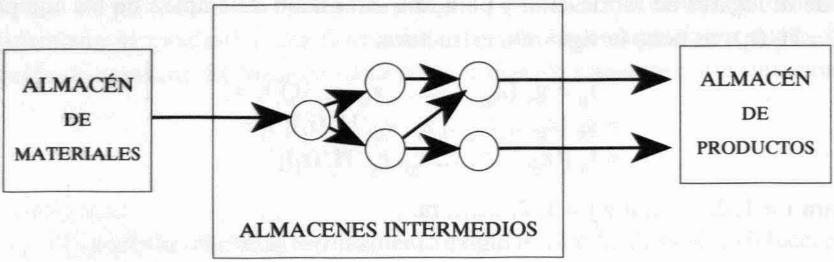

Fig. 1 Contemplando a la Empresa como unidades parciales de organización

Los lugares de producción reciben los factores de producción o bien directamente del mercado, *—factores de producción originarios—* o bien lugares de fabricación de la empresa, *—factores de producción derivados—*[14]. Para distintos tipos de factores de producción originarios deben existir n lugares de almacenamiento[15]. Los outputs de estos almacenes dan los inputs de los factores de producción de la empresa.

Cuando existen m lugares de fabricación pueden existir como máximo n + m tipos de factores[16].

Cada lugar de producción, almacén de aprovisionamiento o lugar de transformación deben dar en cada uno de los casos un solo producto.

Las variables r_i definen o representan las cantidades de carga de los factores totales (inputs) de los i tipos de factores de producción originarios por pe-

14. Éste es el caso, en el que una sección o lugar de fabricación produce unidades para otra u otro.

15. Aunque exista un único edificio en una empresa que esté dedicado al almacenamiento, dentro del mismo hay divisiones para cada uno de los productos, pues estas divisiones las podemos considerar como n lugares de almacenamiento.

16. Significa: los n que han sido adquiridos en el mercado, más los que se han producido en los centros de fabricación que se incorporan para la obtención del producto final.

ríodo, que será el output de los n almacenes de aprovisionamiento P_i por lo tanto; i = 1……n.

Las variables $r_n = j$ representan las cantidades de output totales de los m lugares de fabricación $P_n = j$ por período j = 1…m.

Con esas variables $r_n = j$ para j = 1…m se cubren las cantidades de carga de los factores de producción derivados que se aplican al proceso de producción y las cantidades de outputs destinadas a la venta de los m lugares de fabricación.[17].

Con r_{ij} se representan las cantidades de carga de los tipos i de factores originarios o derivados en los j lugares de producción por período, para i = 1……m + n y j = 1……m + n.

x_i, representa las cantidades de outputs destinados a la venta, las cuales se hallan en los n lugares de los almacenes de aprovisionamiento[18], para i = 1……n.

$x_n + j$, representa las cantidades de productos destinados a la venta de los m lugares de fabricación para j = 1…m[19].

Con lo expuesto anteriormente se tiene un sistema de producción que en total dispone de m + n lugares de producción[20] y de forma análoga al modelo orientado en sistemas de LEONTIEF[21], se tiene la siguiente expresión.

$$r_1 = r_{11} + \ldots + r_{1n} + r_{1,\,n+1} + \ldots + r_{1,\,n+m} + x_n{}^{22}$$

$$\vdots$$

$$r_n = r_{n1} + \ldots + r_{nn} + r_{n,\,n+1} + \ldots + r_{n,\,n+m} + x_n$$

17. Significa que los —m— centros de fabricación, una parte de la producción la hacen para otra sección por ejemplo ensamble final, y otra parte de la producción la venderá directamente (recambios).

18. Representaría la parte de los factores originarios que se venden directamente, sin incorporarse al proceso productivo, semejante a una empresa comercial.

19. Tomado a modo de ejemplo ilustrativo la industria del automóvil, serían las piezas que se fabrican para recambios.

20. En el planteamiento cabe entender que los n lugares de almacenamiento, se consideran lugares de producción. Por otra parte en las industrias de transformación los factores de producción originarios, por lo general, no son destinados a las ventas, entonces $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$.

21. Leontief, W., *La Estructura de la Economía Americana. 1919-1939*, Barcelona, 1958, págs. 48 y ss.

22. r_{11} indica la cantidad de factor de producción del tipo 1, exigida por el centrode producción (taller de producción) 1; r_{1n} = indica la cantidad de factor de producción del tipo 1, exigida en el centro de producción n; $r_{1,\,n+m}$ = indica la cantidad de factor de producción del tipo 1 exigida en el centro de producción n+m.

$$r_{n+1} = r_{n+1,1} + \cdots + r_{n+1,n} + r_{n+1,n+1} + \cdots + r_{n+1,n+m} + x_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$r_{n+m} = r_{n+m,1} + \cdots + r_{n+m,n} + r_{n+m,n+1} + \cdots + r_{n+m,n+m} + x_{n+m}$$

En base a las funciones de consumo que en páginas anteriores hemos visto: $r_{ij} = g_{ij}(z_{ij}, \ldots z_{vj}, e_{ij}, d_j)\, r_j$. Si suponemos constantes las propiedades técnicas de las instalaciones —supuesto sólo válido a corto plazo— la anterior función de consumo tiene la siguiente estructura $r_{ij} = g_{ij} \cdot r_j$.

Con la estructura anterior de las funciones de consumo el sistema de ecuaciones adopta la siguiente forma:

$$r_1 = g_{11 \cdot r1} + \cdots + g_{1,n+m} \cdot r_{n+m} + X_n$$
$$\vdots$$
$$r_n = g_{n1.r1} + \cdots + g_{n,n+m.rn+m} + x_n$$
$$r_{n+1} = g_{n+1,1.r1} + \cdot + g_{n+1+m.rn+m} + x_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$r_{n+m} = g_{n+m,1.r1} + \cdot + g_{n+m,n+m.rn+m} + x_{n+m}$$

Esta expresión la escribimos en forma matricial y tenemos que:

$$\vec{r} = G \cdot \vec{r} + \vec{x} \quad \text{donde:}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ r_n \\ r_{n+1} \\ \cdot \\ r_{n+m} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n+m} \\ \cdot & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{n,n+m} \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n+1,n+m} \\ \cdot & & \\ g_{n+m,1} & \cdots & g_{n+m,n+m} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \cdot \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Siendo $G = \| g_{ij} \|$ una matriz que admite una reordenación por filas y columnas simultáneamente, de modo que la nueva matriz es una matriz triangular con ceros en la diagonal, y en particular se tiene $[\det(E - G) \neq 0]$.

Para obtener la solución de este sistema de ecuaciones en el que nos interesa despejar r, consideramos la matriz identidad E:

$E = \| \alpha_{ij} \|$ es una matriz m + n por m + n y obtenemos

$E\vec{r} = G\vec{r} + E\vec{x}$ de donde deducimos que $(E - G)\ \vec{r} = \vec{x}$, y puesto que det $(E - G) \neq 0$ existe una matriz inversa $(E - G)^{-1}$ de E - G y multiplicada por la izquierda la identidad anterior, resulta: $\vec{r} = [E - G]^{-1}\ \vec{x}$

Los elementos r_i del vector $\vec{r}$ dan para i = 1, .., n el output de los almacenes de aprovisionamiento, así como el input de la empresa. En consecuencia las n primeras ecuaciones de este sistema representan una relación entre cantidades de carga de los factores r_i de los n tipos de factores de producción originarios y las cantidades de outputs destinadas a las ventas x_{n+j} de los m lugares de fabricación P_{n+j}, para j = 1 .. m[23].

La función de producción que abarca la relación entre las cantidades mínimas exigibles técnicamente de los factores de producción y las combinaciones posibles de outputs de los productos para la venta, tiene la forma siguiente:

$$\vec{r}_n = [E - G]^{-1}_n \cdot \vec{x}$$

donde n indica que sólo las n primeras ecuaciones del sistema $\vec{r} = [E - G]^{-1} \cdot \vec{x}$ deben ser consideradas.[24] Puesto que el output x que constitiye la variable independiente representa una función de producción orientada al output.

La matriz G representa todas las interrelaciones entre los lugares de producción a excepción de los almacenes de venta que se han omitido a efectos de simplificación, por tanto,

$$G = \begin{bmatrix} G_{n,\,n} & G_{n,\,m} \\ G_{m,\,n} & G_{m,\,m} \end{bmatrix}$$

23. Si consideramos los almacenes como centros de producción P_i, i = 1 . . n, pues facilitan cantidades de outputs que entran como inputs en los centros de fabricación P_j, j = 1 .. m. Los outputs de estos centros de fabricaicón o sea el $x_{n+1} \ldots x_{n+j} \ldots x_{n+m}$, están directamente relacionados con aquellos inputs, pues para la obtención de éstos ha sido necesario consumir los factores r_1, de ahí que exista la relación indicada.

24.
$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & [E - G]^{-1} & \vec{x} \\ \begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \\ \cdot \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \end{array}$$

Las cuatro submatrices que componen la G representan las siguientes relaciones:

— $G_{n,\,n}$ abarca las relaciones entre los n lugares de aprovisionamiento.

— $G_{n,\,m}$ las que existen entre los n lugares de aprovisionamiento con especto a los m lugares de fabricación.

— $G_{n,\,m}$ las de los m lugares de fabricación con respecto a los n lugares de aprovisionamiento

— $G_{m,\,m}$ la de los m lugares de fabricación.

$$G_{n,\,n} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \qquad G_{n,\,m} = \begin{bmatrix} g_{1n+1} & \cdots & g_{1n+m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ g_{n+1} & \cdots & g_{n+m} \end{bmatrix}$$

$$G_{m,\,n} = \begin{bmatrix} g_{n+1} & \cdots & g_{n+1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ g_{n+m1} & \cdots & g_{n+n} \end{bmatrix} \qquad G_{m,\,m} = \begin{bmatrix} g_{n+1\,n+1} & \cdots & g_{1n+m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ g_{n+m\,n+1} & \cdots & g_{n+m\,n+m} \end{bmatrix}$$

Funciones de producción del tipo B

Partiendo de un proceso de producción de una sola fase[25], se trata de demostrar las relaciones entre almacenes de aprovisionamiento con los lugares de fabricación, mientras que entre dichos almacenes y entre los mismos lugares de fabricación no se refleja ninguna dependencia. La matriz G posee enton-

$$G = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & g_{1\,n+1} & g_{1\,n+m} \\ 0 & 0 & g_{n\,n+1} & g_{n\,n+m} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0_{n\,n} & G_{n\,m} \\ 0_{m\,n} & 0_{m\,m} \end{bmatrix}$$

25. Fase es el conjunto de operaciones que se realizan secuencialmente en una sección o puesto de trabajo, sin almacenamiento ni transporte intermedio.

ces la siguiente configuración, como consecuencia de ser $G_{n,n}$ matriz cero (n por n), $G_{m,n}$ matriz cero (m por n) y $G_{m,m}$ matriz cero (m por m).

Las cantidades de empleo de los factores del tipo r_i, vendrán representadas por:

$$\vec{r} = G\vec{r} \cdot \vec{x}$$

De donde se deduce con $E_{n,n}$ como matriz unidad (n,n) que:

$$\vec{r} = (E - G)^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} E_{n\,n} & G_{n\,m} \\ 0_{m\,n} & E_{m\,m} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Es obvio, pues, en este caso

$$(E - G)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & G_{n,m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ como se comprueba haciendo}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & G_{n,m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -G_{n\,m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -G_{n,m} + G_{n,m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto la expresión $\vec{r} = (E - G)^{-1} \cdot \vec{x}$ la podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \\ r_n \\ r_{n+1} \\ \\ r_{n+m} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} E_{n,n} & G_{n,m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & E_{m,m} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Partiendo de que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, (planteamiento correspondiente a las funciones de producción del tipo B), pues estamos considerando que no se vende directamente ningún tipo de factor de producción originario. La cantidad de este tipo de factores r_i que serán consumidos en los m centros de fabricación será:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} g_{1\,n+j} \cdot x_{n+j} \qquad \text{para } i = 1 \ldots n.$$

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{bmatrix} r_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+m} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

con lo cual podemos escribir que:

$$r_{n+j} = x_{n+j} \text{ para } j = 1 \; \ldots \; m.$$

Las últimas m relaciones, $r_{n+j} = x_{n+j}$ señalan que en los lugares de fabricación m solamente se producen cantidades de outputs destinados a las ventas[26]. En el caso de que los m lugares de fabricación (o los m agregados) no se definan como hasta ahora con $P_{n+1} \ldots P_{n+m}$, sino como $P_1 \ldots P_m$, se tiene entonces la siguiente función de producción del tipo B[27].

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} = \sum_{j=1}^{m} g_{ijxj} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\,(d_j)\,x_j = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\,[\phi_j\,(x_j)] \cdot x_j =$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_{ij}\,[\phi_j\,(x_j)] \qquad \text{para } i = 1 \ldots n$$

Para una empresa de un solo producto, en la que cada lugar de fabricación produce la misma cantidad de output x, se tiene, al ser $x_j = x$ para todos los centros de fabricación j:

26. Estamos en un proceso de producción en una fase.

27. En esta nueva denominación de los centros de producción se ha de tener en cuenta que el índice i en r_{ij} y g_{ij} solamente se refiere a los i tipos de producción originarios y no a los que facilitan este tipo de producto, o sea a la obra en curso de fabricación.

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \, [\phi_j \, (x)] \qquad \text{para } i = 1 \dots n$$

Expresión que corresponde a la función de producción del tipo B señalada en páginas anteriores[28].

FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN DEL TIPO C

La función de producción el tipo C, ha sido desarrollada por Heinen. Se basa en un sistema de funciones de consumo para procesos de fabricación con varias fases sin considerar relaciones cíclicas[29]. Estas funciones de consumo son de la clase de las funciones de producción de Gutenberg.

Para su análisis nos vamos a referir a la matriz G, en ella:

$$G = \begin{bmatrix} G_{n,n} & G_{n,m} \\ G_{m,n} & G_{m,m} \end{bmatrix}$$

1.ª Hipótesis

$G_{n,n}$ y $G_{m,n}$ deben ser iguales a las matrices $0_{n,n}$ y $0_{m,n}$. Por consiguiente no se recogen las relaciones entre los n lugares de aprovisionamiento y tampoco las relaciones de los m lugares de fabricación con respecto a los n lugares (almacenes) de aprovisionamiento.

La matriz $G_{n,m}$ representa relaciones entre los lugares de aprovisionamiento y centros de fabricación, tal como ha quedado definido anteriormente, en el desarrollo de la función de producción tipo B.

La matriz $G_{m,m}$ que abarca las relaciones entre los m lugares de fabricación, incluyendo almacenes intermedios, no puede ser una matriz cero ($G_{m,m} \neq 0$), ya que estamos considerando procesos en varias fases.

28. Concretamente en el apartado «Formalización de funciones de consumo para una empresa», bajo la expresión $r_i = f_{ij}[H_j(x)]$.

29. Las relaciones se definen como cíclicas cuando para cualquier posible ordenación de los lugares de producción, un lugar de fabricación posterior suministra productos a un lugar precedente. Esto suele suceder con frecuencia en la producción por talleres, en la que una sección posterior vuelve a enviar producción (parte o toda) a una sección anterior en la que ya se había sometido al producto a una fase de su elaboración y ahora vuelve a ella para fectuarle otra fase, ya que según la gama de operaciones, requiere de nuevo las máquinas de esta sección.

2.ª *Hipótesis*

Para procesos de fabricación sin relaciones cíclicas, la matriz $G_{m, m}$, se puede transformar mediante una ordenación conveniente de los centros de fabricación, en una matriz *triangular superior con ceros en la diagonal*. Por lo tanto,

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & g_{1, n+1} & g_{1, n+m} \\ 0 & 0 & g_{n, n+1} & g_{n, n+m} \\ \hline 0 & 0 & g_{n+1, n+1} & g_{n+1, n+m} \\ 0 & 0 & g_{n+m, n+1} & g_{n+m, n+m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0_{n,n} & G_{n,m} \\ \hline 0_{m,n} & 0_{m,m} \end{array}\right]$$

$$\text{donde} \quad G_{m, m} = \begin{bmatrix} 0 & g_{n+1, n+2} & g_{n+1, n+3} & g_{n+1, n+m} \\ & 0 & g_{n+2,n+3} & \\ & & 0 & g_{n+m, n+m} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

con: $g_{n+1, nj} = 0$ si $i = j$, $1 = i$, $j = m$

Nosotros vamos en busca de cuáles son las cantidades de empleo de los factores del tipo r_i, y éstas nos vendrán dadas por la expresión, $\vec{r} = (E - G)^{-1} \cdot \vec{x}$, teniendo presente que el significado de la matriz G ahora es distinto que el que tenía en el desarrollo utilizado para la función de producción tipo B.

$$(E - G) = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -g_{1, n+1} & -g_{1, n+2} & -g_{1, n+m} \\ 0 & 1 & -g_{n, n+1} & -g_{n, n+2} & -g_{n, n+m} \\ \hline 0 & 0 & 1 & g_{n+1, n+2} & -g_{n+1, nm} \\ & & & & -g_{n+2, n+3} \\ 0 & 0 & & & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} E_{n, n} & -G_{n, m} \\ 0_{m, n} & P_{m, m} \end{array}\right] \quad \boxed{P_{m, m} = E_{m, m} - G_{m, m}}$$

Además, $P_{m, m}$ como matriz unipotente; o sea matriz triangular superior con unos en la diagonal

$$P = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que:

$$(E - G)^{-1} = \begin{bmatrix} E_{n,n} & \cdots & G_{n,m}\,(P_{m,m})^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{m,n} & \cdots & (P_{m,m})^{-1} \end{bmatrix}$$

En efecto el producto de: $(E - G)\,(E - G)^{-1} = E$ matriz unidad (Identidad).

$$\begin{bmatrix} E_{n,n} & -G_{n,m} \\ 0_{n,n} & P_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n,n} & G_{n\,m}\,(P_{m,m})^{-1} \\ 0_{m.\,n} & E_{m,m} \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \text{a} & \text{b} \\ \underline{n \cdot n} & \underline{n \cdot m} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}} \\ \overline{m \cdot n} & \overline{m \cdot m} \\ \text{c} & \text{d} \end{array}$$

a- $= (E_{n,n})\,(E_{n,n}) + (-G_{n,m})(0_{m,m}) = E_{n,n}$
b- $= (E_{n,n})\,[(G_{n,m})(P_{m,m})^{-1}] + (-G_{n,m})\,(P_{m,m})^{-1} = 0$
c- $= (0_{m,n})\,(E_{n,m}) + (P_{m,m})\,(0_{m,n}) = 0$
d- $= (0_{m,n})\,[G_{n,m})\,(P_{m,m})^{-1}] + (P_{m,m})\,(P_{m,m})^{-1} = E_{m,m}$

Por tanto las cantidades de empleo de factores del tipo r_i serán:

$$\vec{r} = (E - G)^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} E_{n,n} & G_{n,m}\,(P_{m,m})_{-1} \\ \cdots & \cdots \\ 0_{n,n} & (P_{m\,m})^{1} \end{bmatrix} x$$

Al ser $x_1 = \ldots = x_n = 0$, por las razones expuestas anteriormente[30]. La ecuación anterior tendrá la siguiente representación.

30. Recordamos que el planteamiento del modelo sobre «La introducción de las funciones de consumo en los modelos orientados en sistemas de una función de producción» se tiene un sistema de producción que en total dispone de m + n lugares de producción, ello significa que en este planteamiento los n lugares de almacenamiento se consideran lugares de producción. Es la situación que por lo general se da en las industrias de transformación, en la que los factores originarios no son destinados a la venta, entonces $x_1 = x_2 =.\ .= x_n = 0$.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ \\ r_n \\ r_{n+1} \\ \\ r_{n+m} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} E_{n,n} & G_{n,m}\,(P_{m,m})^{-1} \\ \hdashline 0 & (P_{m,m})^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Por tanto queda:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} G_{n,m}\,(P_{m,m})^{-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ (P_{m\,m})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \cdot \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_i \\ r_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{1\,n+1} & g_{1\,n+} \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{\qquad i \qquad}} \\ g_{n,\,n+1} & g_{n,\,n+m} \end{bmatrix}}_{n\cdot m} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{n+1,\,n+1} & & q_{n+1,\,n+m} \\ & \boxed{j} & \\ q_{n+m,\,n+1} & & q_{n+m,\,n+m} \end{bmatrix}}_{m\cdot m} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

(Siendo q la notación de la matriz $P_{m,\,m-1} = Q_{m,\,m}$)

Y sumando:

$$\begin{bmatrix} r_{n+1} \\ r_{n+i} \\ r_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{n+1,\,n+1} & q_{n+1,\,n+m} \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{\qquad\qquad\qquad}} \\ q_{n+m,\,n+1} & q_{n+m,\,n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices del sistema de ecuacioens anterior, lo hacemos en dos fases, primero, multiplicamos $G_{n,\,m}$ por $Q_{m,\,m}$ tomando la fila i y la columna j.

$$\underset{G_{n,m}}{\begin{bmatrix} \boxed{\qquad i \qquad} \end{bmatrix}} \quad \underset{Q_{m,m}}{\begin{bmatrix} \boxed{j} \end{bmatrix}} = \overset{n,\,m}{\overline{\begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} & l_{ij} & l_{in} \end{bmatrix}}}$$

Ahora hacemos:

$$\begin{bmatrix} \boxed{l_{i1} \quad l_{ij} \quad l_{in}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \quad \text{nos queda:}$$

$$l_{ij} = g_{i,\,n+1}\, q_{n+1,\,n+j} + g_{1,\,n+2\;qn+2,\,n+j} + \ldots + g_{i,\,n+m\;qn+m,\,n+j}$$

$$l_{ij} = \sum_{k=n+1}^{n+m} g_{ik\;qk,\,n+j},$$

luego: $r_i = l_{i1\;xn+1} + l_{12\;xn+2} + \ldots + l_{in\;xn+m}$

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} l_{ij\;xn+j}$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} g_{ik\;qk,\,n+j} \Big)\, xn + j$$

haciendo $k = n+1$

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} g_{in+1}\, q_{n+1,\,n+j} \right) xn + j \text{ para } i = 1 \ldots n$$

Por lo que respecta a los términos r_{n+j} tenemos:

$$r_{n+j} = q_{n+j,\,n+1}\, x_{n+1} + q_{n+j,\,n+2}\, x_{n+2} + \ldots + q_{n+j,\,n+m}\, x_{n+m}$$

luego $r_{n+j} = \sum_{k=1}^{m} q_{n+j,\,n+k}\, x_{n+k}$ para $j = 1 \ldots n$

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN DE TIPO D

Esta función representa una continuación del desarrollo de la función de producción tipo C que abarca también procesos de producción en varias fases y con interrelaciones cíclicas. Se basa en un sistema de funciones de consumo, por lo que se ha de ordenar dentro de la agrupación de las funciones de producción de Gutenberg.

Dadas las relaciones entre los almacenes de aprovisionamiento, entre los lugares de fabricación, incluyendo los almacenes, entre almacenes de aprovisionamiento y centros de producción y entre centros de producción y almacenes de aprovisionamiento, nos encontramos que cada una de las cuatros submatrices de G son distitnas de la matriz 0 (cero) y en base de las interrelaciones cíclicas G no puede ser ninguna matriz triangular[31].

$$G = \left[\begin{array}{cc:cc} g_{11} & g_{1n} & g_{1,\,n+1} & g_{1,\,n+m} \\ g_{n1} & g_{nn} & g_{n,\,n+1} & g_{n,\,n+m} \\ \hdashline g_{n+1,\,n} & g_{n+1,\,n} & g_{n+1,\,n+1} & g_{n+1,\,n+m} \\ g_{n,\,m+1} & g_{n+m,\,n} & g_{n+m,\,n+1} & g_{n+m,\,n+m} \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc} G_{n,\,n} & G_{n,\,m} \\ \hdashline G_{m,\,n} & G_{m,\,m} \end{array}\right]$$

Igual que en expresiones anteriores, las cantidades de empleo de los factores del tipo r_i, vendrán representadas por: $\vec{r} = G\vec{r} + \vec{x}$; operando con $E_{n,n}$ como matriz unidad (n,n) tenemos $\vec{r} = (E - G)^{-1}\,\vec{x}$ partiendo de la hipótesis [det E–G ≠ 0] y haciendo $(E - G)^{-1} = V$, siendo V una matriz (m+n por m+n) tenemos que: $\vec{r} = V\vec{x}$; si consideramos $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, o sea que los productos originarios no son destinados directamente a las ventas, pues estamos considerando una industria de transformación.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_i \\ r_n \\ \cdots \\ r_{n+1} \\ r_{n+j} \\ r_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{1,\,n+m} \\ \boxed{v_{i1} \quad v_{i,\,n+1}} & \\ v_{n1} & v_{n,\,n+m} \\ \cdots & \cdots \\ v_{n+1,\,1} & v_{n+1,\,n+m} \\ \boxed{v_{n+j,\,1} \quad v_{n+j,\,n+m}} & \\ v_{n+m,\,1} & v_{n+m,\,n+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \cdots \\ x_{n+1} \\ \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Del sistema anterior podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$r_i = v_{i,\,n+1}\; x_{n+1} + \ldots + v_{i,\,n+m}\; x_{n+m} = \sum_{j=1}^{m} v_{i,\,n+j}\, x_{n+j}$$

para i = 1 … n.

31. Kloock, *op. cit.*, pág. 35.

$$r_{n+j} = v_{n+j,\,n+1}\; x_{n+1} + \dots + v_{n+j,\,n+m}\; x_{n+m} = \sum_{k=1}^{m} v_{n+j,\,n+k}\; x_{n+k}$$

para j = 1 … m.

Por lo que las relaciones de producción de la función de producción del tipo D, para una nueva definición con $P_1 . . P_m$ a los *m* lugares de fabricación[32].

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} V_{ij}\; x_j = \sum_{k=1}^{m} V_{ik}\; x_k \qquad \text{para } i = 1 \dots n.$$

DERIVACIONES DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN TIPO D

La importancia de esta función de producción en su aspecto teórico se debe apreciar en el hecho de que abarca todas las relaciones de producción relevantes desde el punto de vista económico de la empresa[33]. De esta función de producción pueden derivarse las funciones de producción relevantes desde el punto de vista económico de la empresa. De esta función de producción pueden derivarse las funciones de producción del tipo B así como las del tipo C, en el caso que[34]

$$V_{ij} = g_{ij} \qquad \text{para } i = 1 \dots n \;\; y \;\; j = 1 \dots m.$$

$$V_{ik} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\;\; q_{jk} \qquad \text{para } i = 1 \dots n \;\; y \;\; k = 1 \dots m.$$

y todas aquellas funciones de producción clásicas tales como las funciones de producción tipo A o Ley de rendimientos decreciente. También los modelos de producción de Leontief y Pichel, y el modelo Gozinto de Vazsonyi son casos especiales de la función de producción del tipo D. Con lo cual se deduce[35], que:

$r_{ij} = g_{ij}\,(d_j)\, r_j = a_{ij}\, r_j$ con i=1 … n + m y j = 1 … n + m y $G = g_{ij} = a_{ij} = A$ siendo A una matriz (n + m por n + m) con a_{ij} como coeficientes de producción constantes para todos los i, j: $\vec{r} = (E - G)^{-1}\, \vec{x} = (E - A)^{-1}\, \vec{x}$, del planteamiento

32. El índice *i* en v_{ij} se refiere fundamentalmente a los tipos de producto originarios *i*, ya que en los centros de fabricación se han denominado nuevamente con $P_1 . . . P_m$. Véase Klook, *op. cit.*, pág. 35.

33. *Op. cit.*, pág. 36.

34. *Ibid.*, pág. 36.

35. *Ibid.*, pág. 36.

del modelo de producción del tipo LEONTIEF[36]. Este planteamiento del modelo (afirma KLOOCK[37]) abarca el modelo de GOZINTO en el caso en que no existan las interrelaciones cíclicas[38].

La importancia de la función de producción del tipo D en un sentido práctico se debe apreciar en la concepción desarrollada por Gutenberg de las funciones de consumo[39].

Para numerosas empresas industriales es posible, sin duda, señalar o determinar las relaciones de producción en base a las funciones de consumo.

A modo ilustrativo diremos que en un tipo de industria como la Química, las funciones de consumo y, consiguientemente, las funciones de producción en las que se basa Gutenberg constituyen un instrumento muy importante y practicable para determinar las relaciones de producción.

En su gran parte los procesos químicos se encuentran, rígidamente establecidos y, por tanto, se pueden reflejar en funciones de consumo de forma muy exacta. A modo ilustrativo tomaremos la producción de acetaldeído (fórmula química CH_3CHO) que se obtiene mediante la combinación de acetileno o etino (fórmula química $CH \equiv CH$) con agua, mediante la siguiente reacción: $CH \equiv CH + H_2O \rightarrow CH_3CHO$.

Según esta reacción, para obtener una molécula de acetaldeído (peso molecular 44,05) ha hecho falta una molécula de acetileno (peso molecular 26,04) y una molécula de agua (peso molecular 18,01).

Las necesidades de r_{ij} de acetileno, primer tipo de materia prima y las de r_{2j} de agua, segundo tipo de materia prima, que se precisan en un lugar de fabricación, P_j, para la fabricación de acetaldeído en cantidad (output) x_j, se establece en base a la relación entre masas moleculares:

$$r_{ij} = g_{ij} \;\; x_j = \frac{26,04}{44,05} \; x_j = 0,591 \; x_j$$

$$r_{2j} = g_{2j} \;\; x_j = \frac{18,01}{44,05} \; x_j = 0,409 \; x_j$$

36. *Op. cit.*, págs. 163 y ss..
37. *Op. cit.*, pág. 37.
38. Vazsonyi, A.: *Scientific Programming in Business and Industry*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1961, págs. 429 y ss.
39. Kloock, *op. cit.*, pág. 37.

r_{ij} = Consumo de acetileno en el lugar de producción P_j.
r_{2j} = Consumo de agua en el lugar de producción P_j.

Las pérdidas provenientes del proceso productivo, de las propias instalaciones en la producción de acetaldeído, condicionan en la práctica, muchas veces, una mayor necesidad de acetileno y de agua. Para configurar de una manera real las funciones e consumo se deben incluir valores 0,591 y 0,409 y compensar las pérdidas de transformación. Los datos estadísticos facilitan sin dificultad una fijación exacta de los coeficientes de producción: r_{ij} / x_j y r_{2j} / x_j.

Otros factores de producción necesarios para la fabriación de acetaldeído, tales como, energía eléctrica, agregados y mano de obra, se pueden representar sin dificultad mediante funciones de consumo.

EL MODELO GOZINTO DE VAZSONYI, UNA APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN TIPO D

Como se ha indicado en líneas anteriores una —entre otras— de las derivaciones de la función de producción tipo D, es el método Gozinto que fue incluido por Andrew Wazsonyi, en Scientific Programming in Business and Industry (después de haberlo presentado en el primer número de Management Science) atribuyéndolo al conocido matemático italiano Xeparzat Gozinto. A. Vazonyi, desarrolló un procedimiento sistemático basado en el álgebra matricial, que nos da un buen marco para ejecutar la función de planificación cuando entran muchos productos y componentes[40].

Durante mucho tiempo se han considerado por separado los problemas de conjuntar los requerimientos de producción con el aprovisionamiento de materiales. Actualmente la mayoría de las empresas dedicadas a la fabricación de productos se enfrentan con ambos problemas.

A continuación exponemos unos desarrollos matemáticos que incluyen ambos problemas.

Consideramos los datos relativos a una empresa hipotética que entre otros fabrica tres productos que denominamos A1, A2 y A3, los cuales se obtienen a partir de subconjuntos, elementos y partes simples. Imaginemos que aquéllos se consiguen mediante ensambles respectivos como se muestra en la fig. 2

40. Véase Mize, White y Brooks, (1982). *Planificación y Control de operaciones*, Prentie/hall, Dossat, Madrid, págs. 117 a 149.

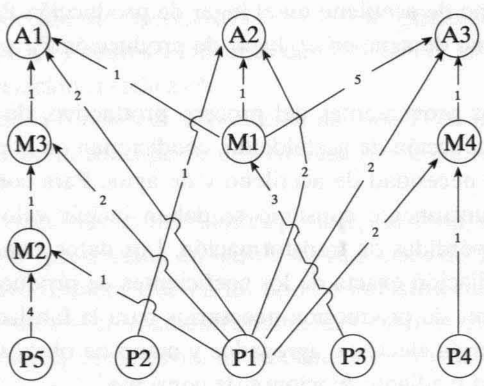

Fig. 2 Diagrama Gozinto

El producto A1 está compuesto por dos subconjuntos distintos y un elemento simple. Esto significa que A1 requiere de un conjunto M1, otro M3 y dos elementos simples P1.

Obsérvese en el diagrama que M1 y M3 son conjuntos, dado que están compuestos por otros elementos que los forman. Por el contrario P1 es un elemento simple dado que no existe ninguna indicación que vaya hacia P1.

El diagrama muestra cómo están formados cada uno de los conjuntos, por ejemplo M3 toma un elemento de M2 y dos de P1, pero a su vez M2 toma cuatro elementos de P5 y un elemento de P1; M1 toma tres elementos de P3; M4 toma dos elementos de P1 y un elemento de P4. (El diagrama Gozinto puede ser muy complicado para una cadena de montaje que tenga muchos conjuntos y elementos simples).

El primer problema es definir qué cantidad de artículos de cada tipo se necesitan para el funcionamiento del Esquema de flujos.

Supongamos que debemos obtener 110 de A1, 150 de A2 y 300 de A3, para abastecer la demanda D durante los meses de septiembre, octubre y noviembre y además mantener un stock final SF, de cada uno de los productos A1, A2 y A3, al final del mes de noviembre, en cantidad igual a la demanda de cada producto. ¿Cuántos M1, M2, M3 y del resto son necesarios para completar el diagrama de flujos? Usando el diagrama de la figura 2 podríamos calcular las necesidades o requerimientos, pero cuando este diagrama se vuelve más complejo la determinación de los requerimientos se complica.

Vamos a desarrollar un modelo matemático para responder a la pregunta formulada. Para ello, debemos introducir una notación apropiada. La información gráfica de la fig. 2 puede ser expresada en la forma de *«árbol de producto o gráfica de explosión»* tal como se indica en la figura 3. Este árbol de producto, lo mismo que el diagrama de la fig. 2 se obtiene a partir de la *lista de materiales* que toda organización fabril debe tener. Esta lista de materiales es una enumeración de todos los componentes de un producto o de un subensamble. Cada componente se distingue por su código y su descripción. Se indica la cantidad requerida, en unidades físicas, para cada componente o submontaje. También expresa la fuente de suministro (compras o manufacturas).

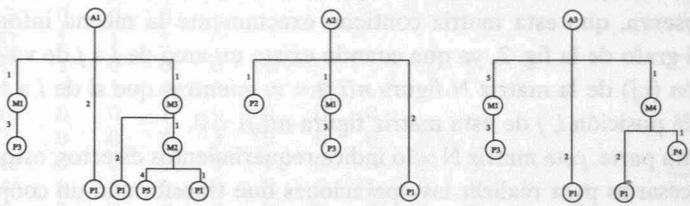

Fig. 3. Gráfica de estructura del producto o árbol del producto

Una característica de la estructura de productos es la *organización por niveles*. Los niveles se asignan en base al número máximo de pasos (elaboraciones) de fabricación, necesarios para que una componente y/o un subconjunto llegue a un producto final. Los productos A1, A2, y A3 tendrán nivel cero ya que no se precisa ningún paso para llegar a ser cero ya que no se precisa ningún paso para llegar a ser productos finales, puesto que ya lo son. En cambio, M1, M2, M3, P2 y M4 intervienen directamente en la fabricación de sus respectivos productos finales, por tanto, sólo tienen que dar un paso, de ahí que se asigne nivel uno. En cuanto P3, M2 y P4 requieren dos pasos para llegar a su producto final (tendrán nivel dos), uno para fabricar los subconjuntos respectivos M1, M3 y M4 y otro para fabricar A1, A2 y A3, a partir de los subconjuntos mencionados. Por lo que respecta a P5, vemos que necesita tres pasos para llegar a su producto final (tendrá nivel tres). El caso singular (aunque es muy frecuente en cualquier organización fabril) es el de P1, que adopta todo tipo de niveles, en este caso el uno, el dos y el tres; cuando una componente o subconjunto está en esta situación, se ha convenido (puesto que es el mismo producto y en consecuencia tiene el mismo código) que todos adopten el nivel de aquella situación que tenga que dar más pasos para convertirse en producto final, por tanto P1 adoptará en estos diagramas el nivel tres. En resumen:

Nivel	*Productos*
0	A1, A2, A3
1	M1, M3, P2, M4
2	P3, M2, P4
3	P1, P5

Otra forma de presentar dicha información, puede ser la matricial. En la matriz N o matriz *Gozinto* se indica en cada fila, asociada a un artículo *i*, el número de unidades de *i* que entran directamente en la producción de una unidad del artículo *j*, asociado a la correspondiente columna.

Se observa, que esta matriz contiene exactamente la misma información que en el grafo de la fig. 2, ya que cuando existe un arco de *i* a *j* de valor *v*, en la posición (i,j) de la matriz *N* figura $n(i,j) = v$, mientras que si de *i* a *j* no hay arco, en la posición *i, j* de esta matriz figura $n(i,j) = 0$.

Por otra parte, esta matriz N sólo indica requerimientos directos, esto es, unidades necesarias para realizar las operaciones que transforman un conjunto de componentes (piezas) en otro de nivel inmediatamente superior al grafo, así para obtener una unidad de producto final *A1* (columna 1) necesitaremos una unidad del subconjunto *M1* (fila 4), una unidad del subconjunto *M3* (fila 5) y dos unidades de la componente P1 (fila 11). Esta información que expresamos aquí, no nos debe llevar al error de interpretar que para la obtención del producto final *A1*, no se precise el subconjunto *M2*, situado en el segundo nivel, y la componente *P5* del tercer nivel, ya que eso no es así; lo que ocurre es que esta información no la contiene la matriz *N* y sí la contiene la matriz *T* que vamos a construir a partir de *N*.

La matriz *T*, como acabamos de indicar, se puede obtener, a partir de la matriz *N* y en consecuencia será también una matriz cuadrada (como la *N*) que expresa las unidades de cada código que se necesitan en total para hacer una del conjunto superior, es decir, los valores $t(_{ij})$ indican el número de unidades de *i* que entran directa o indirectamente (a través de elaboraciones intermedias) en la producción de una unidad *j*.

Antes de pasar a la determinación de la matriz *T*, en casos más complejos conviene hacer la siguiente observación[41]: Tanto el grafo como la matriz son conceptos que ayudan al manejo (sobre todo teórico) de la lista de materiales, pero son las fichas las que más se aproximan a la realidad. Las matrices *N* y *T* contienen muchos ceros. Como quiera que los artículos se clasifican en niveles[42] y sólo pueden existir valores no nulos en casillas *(i, j)* tales que *i* sea de ni-

41. Companys y Fonollosa, *op. cit.*, pág. 42.

42. Los niveles, como hemos comentado se asignan en base al número máximo de pasos precisos para que los artículos se transformen en otros, hasta llegar al producto final.

vel superior y distinto que *j*, los ceros entre artículos del mismo nivel incrementan el número total de ceros. Si de una lista de materiales determinada, reordenamos los artículos por niveles la matriz *N* que de ella podemos obtener, toma la forma de una matriz triangular inferior que, como es fácil observar, la obtenemos directamente de la lista de materiales o árbol del producto (previamente ordenado por niveles) que se ha expuesto anteriormente.

|N| =

	A1	A2	A3	M1	M3	P2	M4	P3	M2	P4	P5	P1	
A1	0												
A2	0	0											Producto
A3	0	0	0										terminado
M1	1	1	5	0									
M3	1	0	0	0	0								
P2	0	1	0	0	0	0							Nivel 1
M4	0	0	1	0	0	0	0						
P3	0	0	0	3	0	0	0	0					Nivel 2
M2	0	0	0	0	1	0	0	0	0				
P4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0			
P1	2	2	2	0	2	0	2	0	1	0	0		Nivel 3
P5	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	

|T| =

	A1	A2	A3	M1	M3	P2	M4	P3	M2	P4	P1	P5
A1	1											
A2	0	1										
A3	0	0	1									
M1	1	1	5	1								
M3	1	0	0	0	1							
P2	0	1	0	0	0	1						
M4	0	0	1	0	0	0	1					
P3	3	3	15	3	0	0	0	1				
M2	1	0	0	0	1	0	0	0	1			
P4	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1		
P1	5	2	4	0	3	0	2	0	1	0	1	
P5	4	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	1

Trabajar con matrices en formato extenso es un procedimiento muy poco eficiente (en cuanto a espacio de memoria y tiempo de cálculo), mientras que trabajar con una representación compacta de las matrices equivale a trabajar con las fichas.

El grafo (árbol o red) es una representación muy cómoda[43] pero válida sólo para un número de artículos reducido con pocos niveles. Sin embargo, trabajar con un grafo extenso llegará rápidamente a ser incómodo. Además existe aun

43. Companys y Fonollosa, *op. cit.*, pág. 42.

otra razón más importante contra el grafo: Las modificaciones. Normalmente los productos se modifican continuamente sustituyéndose algunos componentes por otros. En el supuesto que utilicemos fichas, supone sustituir unas por otras, pero en el grafo comporta una continua corrección del dibujo, hecho que es más dificultoso.

Cálculo de las necesidades totales para cada producto. Determinación de la matriz T o de Requerimientos totales.

Como venimos indicando, la matriz *N* es una matriz de requerimientos directos; sin embargo lo que nos interesa realmente es la *matriz de requerimientos totales* o *matriz de necesidades totales* a la que denominaremos T.

La matriz T de necesidades totales: Es una matriz cuadrada como la *N* que expresa las unidades de cada código que se necesitan en total, para hacer una unidad del conjunto superior. Al ser *T* una matriz tanto de requerimientos directos como indirectos, o sea una matriz de requerimientos totales, su forma de cálculo[44] es:

$$T = I + N + N^2 + N^3 + \dots + N^s \qquad [1]$$

donde: I = matriz unidad.
s = número de niveles del sistema.
(Nótese que N^{s+1} es la matriz nula.)

La fórmula de cálculo indicada requerirá multiplicaciones de matrices repetidas y consumirá mucho tiempo (sobre todo en sistema mayores).

Vamos a buscar otro camino para el cálculo de la matriz T; para ello los dos miembros de la expresión [1] los premultiplicaremos por [I - N] de la siguiente manera:

$$[I - N]\,T = [I - N]\,[I + N + N^2 + N^3 + \dots + N^s]$$
$$[I - N]\,T = I$$

y finalmente $$T = \frac{I}{[I - N]} = [I - N]_{-1}$$

De todos modos, la matriz inversa no nos es de mucha utilidad dado que requiere una gran cantidad de operaciones numéricas, y si tratásemos con miles de conjuntos tendríamos matrices con miles de filas y columnas. La inversión de dichas matrices provoca una cantidad prohibitiva de operaciones matemáti-

44. Mize, White y Brooks, *op. cit.*, págs. 122 y 123.

cas. *Afortunadamente*, en nuestro problema estamos tratando con tipos especiales de matrices conocidas como *«matrices triangulares»*. Dichas matrices pueden ser invertidas con relativa facilidad. Como hemos apuntado anteriormente el hecho de tener matrices triangulares no es una casualidad, sino una consecuencia de la ordenación por niveles de la lista de materiales expresada en la gráfica de explosión (fig. 3) comentada anteriormente.

Recordemos que t(ij) indica el número de unidades de *i* que entran directa o indirectamente en la fabricación de una unidad del artículo *j*, en otras palabras, es la cantidad de *i* necesaria para fabricar una unidad de *j*. Es consecuencia, el cómputo de la matriz *T* lo haremos columna a columna, teniendo presente que el cálculo de la columna *j* será: t(i,i)=1

$$t\,(i, j) = \sum_{k=j+1}^{n} n\,(i, k) \quad t\,(k, j) \text{ para } i \neq j$$

puesto que el sumatorio tiene en cuenta las unidades de i que entran en j directamente cuando k = j) o indirectamente a través de otro subconjunto cuando k = k). También se hubiese podido escribir el sumatorio siguiente que desempeña la misma función.

$$t\,(i, j) = \sum_{k=j+1}^{n} n\,(i, k) \quad n\,(k, j) \text{ para } i \neq j$$

El orden en que se realizan los cálculos tiene importancia[45]: Si ordenamos previamente los artículos podremos determinar t(i,j) de una sola pasada. El orden adecuado es el que se corresponde con la función ordinal del grafo (ver fig. 3), es decir, de acuerdo con los niveles establecidos. Después de haber ordenado así los artículos —producto final, subensambles y componentes— la matriz Gozinto N será triangular inferior (con todos los elementos de la diagonal principal nulos) es decir n(i,j) = 0 si $i \leq j$, y en consecuencia la matriz de necesidades por tipo de artículos, esto es matriz T, será también triangular inferior, con todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y todos los elementos por encima de dicha diagonal serán cero, t(i,j) = 0 si $i < j$. En estas condiciones podemos efectuar los cálculos directamente, ya que nunca necesitamos ningún valor de t (k,j) que no haya sido calculado previamente.

En resumen:

$$t\,(i, j) = \sum_{k=j+1}^{n} n\,(i, j) \quad t\,(k, j) \text{ para } i \neq j \quad \text{si } j < i \text{ para elementos debajo de la diagonal}$$

45. Companys y Fonollosa, *op. cit.*, pág. 43.

$T(i,j) = 1$ si $j = i$ para elementos de la diagonal.
$t(i,j) = 0$ si $j > i$ para elementos encima de la diagonal.
$t(i,j)$ = vector j de la matriz T para las celdas desde la diagonal principal hacia abajo.
$t(k,j)$ = vector columna k de la matriz T para $k > j$.
n = número total de elementos del sistema (materias primas y partes compradas o componentes, submontajes o subconjuntos y montajes o productos finales).

Los cálculos empiezan con la columna más a la derecha de T[46], (teniendo como base la matriz N) y se procede columna a columna hacia la izquierda. En consecuencia el alogaritmo básico para el cálculo de $T = [I - N]^{-1}$ será:

1.º – Formar la matriz N a partir del árbol del producto o de las fichas. Como hemos visto esta matriz debe ser estrictamente triangular inferior.

2.º – Preparar un formato para la matriz T, con las mismas designaciones de fila y columna, y en el mismo orden que en la matriz N.

3.º – Colocar unos en la diagonal de la matriz T.

4.º – Comenzar los cómputos por la celda de la esquina inferior derecha. Los cálculos procederán columna a columna, de derecha a izquierda hasta que se haya completado la última columna de la izquierda. Consiguientemente la primera columna a cuantificar en una matriz como la que nos ocupa, que es de (12 x 12) será la t_{12}, que por la propia estructura de la matriz T es ya conocida e igual 1, por tanto $t_{12} = 1$. Destaquemos que este dato siempre es conocido, sea cual fuere el orden de la matriz T, es por ello que la columna siguiente yendo hacia la izquierda no presente ningún problema su cálculo, pues como se ha indicado en líneas precedentes, nunca se necesita ningún valor $t(k,j)$ que no haya sido calculado previamente.

Aplicación del Método Gozinto para los cálculos del MRP

Las técnicas MRP (Materials, Requerimen, Planing), o de Planificación de Necesidades de Materiales son una solución relativamente nueva[47] a un problema clásico de producción: El de controlar y coordinar los materiales para que se hallen a punto cuando son precisos y al propio tiempo sin necesidad de tener un inventario excesivo.

Podemos decir que los sistemas MRP constituyen el equivalente a la conta-

46. Mize, White y Brooks, *op. cit.*, págs. 123 a 127.

47. Tras una serie de apuntes de sociedades profesionales, artículos en revistas y algún software comercial disponible en parte, el primer texto completamente dedicado al tema aparece en: Orliky, J, (1975). *Materials Requeriment Planing*, McGraw Inc.

bilidad de la producción. Cabe señalar que los sistemas MRP no constituyen un cuerpo de conocimientos cerrado sino que están evolucionando continuamente. En los primeros tiempos el sistema MRP se usaba para coordinar tan sólo los materiales en la planta de producción. Más adelante se han ampliado a otros conceptos, como son: participar en la planificación estratégica de la empresa, programar la producción, planificar los pedidos de los diferentes productos y componentes, programar las prioridades y actividades a desarrollar por los diferentes talleres, planificar y controlar la capacidad disponible y necesaria, gestionar los inventarios y partiendo de los outputs obtenidos, realizar cálculos de costes y desarrollar estados financieros en unidades monetarias, etc., todo ello manteniendo las siglas MRP, pero ahora para significar (Planificación de Recursos para la Gestión. MRPII).

Hecha esta introducción, vamos a definir una serie de conceptos que nos van a ser de utilidad para ver la operatividad de este método.

Matriz N (Ya definida). Es una matriz cuadrada (tantas filas y columnas como códigos) que representa la lista de materiales, donde cada n(i,j) indica el número de unidades de i que intervienen en una unidad de j. (Esta matriz se denomina de requerimientos directos y se obtiene directamente del árbol del producto – lista de materiales).

Matriz T (Ya definida). Es cuadrada —como la N— que expresa las unidades de cada código que se necesitan en total para hacer una unidad del conjunto superior, es decir, del producto final. (Se denomina las Necesidades totales o requerimientos totales. Su obtención ya ha sido expuesta en el epígrafe anterior).

Madrid D (De demanda a servir). Tiene tantas filas como códigos o artículos de la lista de materiales y tantas columnas como meses, días, semanas, etc., que expresa las cantidades de cada artículo a servir en cada período de tiempo.

Matriz Q Nos indica la tasa de producción de cada centro de trabajo en términos de minutos u horas por unidad correspondiente a cada artículo que se procesa en dicho centro. En consecuencia será una matriz de tantas filas como departamentos o secciones intervengan en la fabricación de los productos y subconjuntos y tantas columnas como códigos o artículos.

Al objeto de hacer más intuitiva la utilización de estos conceptos, acompañaremos las explicaciones formales con el desarrollo numérico del ejemplo citado en el epígrafe anterior y utilizado para la confección del diagrama Gozinto (fig. 2) y completando aquella información con los datos siguientes:

— Se dispone de un stock inicial SI tanto de productos terminados como de subconjuntos y componentes (estado actual del inventario, o sea en este caso el 1.º de septiembre).

— Existen unas órdenes de producción y compra OC ya cursadas y cuyas entregas están previstas para la 1.ª semana de septiembre.

— Conocemos la tasa de producción Q de cada departamento o centro de trabajo, dada en horas por unidad de producto.

Recopilando información tenemos:

D =

	Sep.	Oct.	Nov.
A1	110	110	110
A2	150	150	150
A3	300	300	300
M1	0	0	0
M3	0	0	0
P2	0	0	0
M4	0	0	0
P3	0	0	0
M2	0	0	0
P4	0	0	0
P1	0	0	0
P5	0	0	0

SF =

A1	110
A2	150
A3	300
M1	0
M3	0
P2	0
M4	0
P3	0
M2	0
P4	0
P1	0
P5	0

SI =

A1	50
A2	30
A3	20
M1	110
M3	0
P2	300
M4	40
P3	6000
M2	20
P4	800
P1	2000
P5	1000

OC =

	Sep.	Oct.	Nov.
A1	0	0	0
A2	0	0	0
A3	0	0	0
M1	2000	0	0
M3	0	0	0
P2	200	0	0
M4	200	0	0
P3	200	0	0
M2	100	0	0
P4	400	0	0
P1	300	0	0
P5	0	0	0

Q =

Dpto.	A1	A2	A3	M1	M3	P2	M4	P3	M2	P4	P1	P5
1	0	0	0	1	0	5	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1,5	4	0	4	0	4	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	20	0	0	0
4	5	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dpto. = Departamento, sección o taller.

La información que nos facilita la matriz Q es obvia: El Dpto. 4 efectúa el montaje de los productos finales A1, A2 y A3, empleando en cada unidad de cada uno de ellos 5, 4 y 5 horas respectivamente.

En cuanto a la fabricación de los subconjuntos M, intervienen 2 departamentos efectuándose en los mismos las operaciones necesarias según el proceso operatorio que cada subconjunto requiera para su elaboración, así como el tiempo preciso para la ejecución de las mismas. En este sentido, si tomo por ejemplo el subconjunto M1, vemos que se produce entre el Dpto. 1 y el Dpto. 2, consumiendo 1 hora en el Dpto. 1 y 1,5 horas en el 2, por tanto el tiempo total de fabricación del subconjunto M1 será de 2,5 horas (1+1,5). Un criterio semejante se sigue para los subconjuntos M2, M3 y M4.

En lo referente al resto de las columnas, que son cero, la deducción es lógica ya que P1, P2, P3, P4 y P5 son componentes (productos estándares) que la empesa adquiere en el mercado y que incorpora directamente a los productos y/o subconjuntos, y por tanto no se les practica transformación alguna.

Cálculo de necesidades brutas y netas

Denominaremos X a las necesidades brutas y partiremos del supuesto que deseamos conocer por separado lo que requiere la demanda D y lo que requiere el stock mediante una producción que se desarrollará en alguno de los meses, octubre, noviembre o diciembre aprovechando huecos de exceso de capacidad que casi siempre suele haber, por tanto acabaremos acumulando las necesidades correspondientes al stock final en uno o varios de los meses y así presentarlos a final de noviembre que es como lo presentamos aquí. En consecuencia la determinación de X se efectuará mediante el producto de las matrices T por [D, SF]

$$X = T \cdot [D, SF]$$

		A1	A2	A3	M1	M3	P2	M4	P3	M2	P4	P1	P5	SEP.	OCT.	NOV.	SF
	A1	1												110	110	110	110
	A2	0	1											150	150	150	150
	A3	0	0	1										300	300	300	300
	M1	1	1	5	1									0	0	0	0
	M3	1	0	0	0	1								0	0	0	0
X =	P2	0	1	0	0	0	1							0	0	0	0
	M4	0	0	1	0	0	0	1						0	0	0	0
	P3	3	3	15	3	0	0	0	1					0	0	0	0
	M2	1	0	0	0	1	0	0	0	1				0	0	0	0
	P4	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1			0	0	0	0
	P1	5	2	4	0	3	0	2	0	1	0	1		0	0	0	0
	P5	4	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	1	0	0	0	0

1er. Paso

La matriz X o de necesidades brutas tiene un alto grado de redundancia (de las mismas características que la matriz T). Tomemos como ejemplo la situación de P5 y observemos las fig. 2 (diagrama Gozinto) y fig. 3 (árbol del producto), vemos que esta componente se necesita varias veces, una como tal en la última fila, otra vez transformada en subconjunto M2, una tercera en la obtención del subconjunto M3 y una cuarta montada como producto final A1. En septiembre necesitamos 440 unidades de P1, pero para contabilizar el número de unidades que necesitamos de esta componente durante dicho mes deberemos estudiar la contenida en los 4 artículos indicados.

	SEP.	OCT.	NOV.	SF.	TOTAL X_T
	110	110	110	110	440
	150	150	150	150	600
	300	300	300	300	1200
	1760	1760	1760	1760	7040
	110	110	110	110	440
=	150	150	150	150	600
	300	300	300	300	1200
	5280	5280	5280	5280	21120
	110	110	110	110	440
	300	300	300	300	1200
	2050	2050	2050	2050	8200
	440	440	440	440	1760

Estas necesidades brutas X no corresponden, en general, a lo que realmente vamos a fabricar, puesto que tenemos existencias iniciales y órdenes de producción y compra (aprovisionamiento) en firme y que, como es lógico, ambos conceptos reducirán las necesidades de producción y compra.

Agruparemos todos aquellos que no necesitamos producir, ni aprovisionar, o sea las disponibilidades que denominamos E. En consecuencia: E = SI + OC (Ver tabla pág. siguiente)

Ahora para reducir X a lo que realmente necesitamos debemos restar lo que significan las disponibilidades E, pero debemos tener presente que X y E no son homogéneas, puesto que X ha sido explosionada a partir de [D, SF], mientras que E todavía no lo ha sido, por tanto deberíamos de calcular X' = T · E. No obstante, en vez de seguir ese camino y en aras a simplificar cálculos buscamos otro que se nos antoja más corto y que conduce al mismo

$$E = \begin{vmatrix} \text{SEP.} & \text{OCT.} & \text{NOV.} \\ 50 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 6000 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 800 & 0 & 0 \\ 2000 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{SEP.} & \text{OCT.} & \text{NOV.} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 1200 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{SEP.} & \text{OCT.} & \text{NOV.} \\ 150 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 500 & 0 & 0 \\ 240 & 0 & 0 \\ 7200 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 0 \\ 1200 & 0 & 0 \\ 2300 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

resultado, para ello restaremos la matriz de disponibilidades E a la matriz de demanda D y al resultado adicionaremos el vector SF de inventario final deseado, y todo ello lo multiplicaremos por la matriz T (en el orden que venimos haciendo), con lo que obtendremos la matriz W, W = T [(D – E), SF]

$$W = \begin{array}{c|cccc|} & \text{SEP.} & \text{OCT.} & \text{NOV.} & \text{SF} \\ A1 & 60 & 110 & 110 & 110 \\ A2 & 120 & 150 & 150 & 150 \\ A3 & 260 & 300 & 300 & 300 \\ M1 & 1470 & 1760 & 1760 & 1760 \\ M3 & 60 & 110 & 110 & 0110 \\ P2 & -380 & 150 & 150 & 150 \\ M4 & 40 & 300 & 300 & 300 \\ P3 & -2790 & 5280 & 5280 & 5280 \\ M2 & -60 & 110 & 110 & 110 \\ P4 & -1160 & 300 & 300 & 300 \\ P1 & -1240 & 2050 & 2050 & 2050 \\ P5 & -1240 & 440 & 440 & 440 \end{array}$$

La matriz W no refleja todavía las necesidades netas a causa de los valores negativos que indican el exceso de inventario requerido para ese mes, o dicho de otra forma, que lo disponible supera a las necesidades. Como los sobrantes de un mes pueden utilizarse el mes siguiente, obteniendo así la matriz final de «requerimientos o necesidades netas» que denominaremos por X_N, que adopará los valores siguientes:

		SEP.	OCT.	NOV.	SF	TOTAL
	A1	60	110	110	110	390
	A2	120	150	150	150	570
	A3	280	300	300	300	1180
	M1	1470	1760	1760	1760	6750
	M3	60	110	110	110	390
	P2	0	0	0	70	70
$X_N =$	M4	40	300	300	300	940
	P3	0	2490	5280	5280	13050
	M2	0	50	110	110	270
	P4	0	0	0	0	0
	P1	0	810	2050	2050	4910
	P5	0	0	0	80	80

la interpretación de esta matriz de requerimientos o necesidades netas, *determina cuál debe ser el plan de producción y compras* para esta empresa durante el período indicado, con objeto de abastecer la demanda D y constituir el stock final SF que se desea mantener una vez finalizado el mes de noviembre.

Siguiendo con la interpretación de la matriz X_N, vemos que de ella se desprende una información interesante para la empresa con el fin de planificar; en este sentido, tomando como ejemplo la columna relativa al mes de septiembre, nos dice que debemos fabricar 60 unidades del producto terminado A1, 120 del A2 y 280 del A3 para abastecer la demanda de dicho mes (contando que una parte de ella se abastece con cargo a las disponibilidades —matriz E). Seguimos con la columna que nos ocupa, debemos fabricar para abastecer la demanda de productos terminados (A1, A2, A3) 1.470 subconjuntos M1, 60 M3, 40 M4 y ningún M2 (pues con las disponibilidades hay suficiente para los requerimientos de este mes y sobran para cubrir una parte del mes siguiente —ver matriz W. En cuanto a las correspondientes P1, P2, P3, P4 y P5 que son productos estándar que la empresa compra en el mercado, aparecen con valor cero porque durante este mes no se debe aprovisionar cantidad alguna de los mismos, pues con las disponibilidades hay suficiente para cubrir los requerimientos de este mes y todavía quedan sobrantes que se reparten en meses sucesivos. Por último cabe hacer mención especial de la componente P4 de la que no se hace aprovisionamiento en ninguno de los meses del período de planificación (septiembre, octubre, noviembre y stock final), si observamos la matriz W en la fila relativa a esta componente, la suma de los segmentos de los meses de octubre, noviembre y stock final —en total 900 unidades— son inferiores a las disponibilidades que tenemos en el mes de septiembre (1160) y aún había un sobrante de 260 (–1160+900) que reaparecerá cuando se planifiquen nuevos períodos. En cuanto al resto de las columnas, siguen los mismos criterios de interpretación que los expuestos en la utilizada a modo de ejemplo.

Por último significar, que todo lo que hemos realizado mediante el cálculo matricial, podemos efectuarlo también en forma compacta mediante procedimientos iterativos o directos, tras la determinación de los niveles, lo cual tiene cierta ventajas de orden práctico[48]. En primer lugar nos libera de la necesidad de calcular previamente los valores t(i,j). En segundo lugar admite cómodamente la introducción de procesos de lotificación de subconjuntos y piezas elaboradas. En tercer lugar elimina la posibilidad de un error que pueda producirse en el cálculo compacto.

En resumen, lo que la evidencia empírica nos enseña es que el cálculo directo tiene ciertos inconvenientes y según nuestra opinión, cierto reparo a utilizar el cálculo matricial por parte de los usuarios de este método, y resulta más práctico hacer el cálculo nivel a nivel, de manera que se puedan introducir cómodamente restricciones observadas de capacidad, lotificación entre otras.

Cálculo de Necesidades de capacidad

Es para estos menesteres cuando necesitamos la matriz Q (ya definida) de coeficientes técnicos que nos indican el consumo en horas que cada departamento o sección necesita para fabricar una unidad de cada producto. Como se observa, esta matriz es también muy vacía debido a que cada artículo pasa por pocos departamentos (y los que son producto estándar por ninguno, pues su origen es del exterior —compras—) por lo que muchas parejas (artículo/departamento) son *incongruentes* y en la matriz figura un cero.

Las cantidades de trabajo que se generan para cada departamento, o de otra manera, las necesidades de capacidad productiva para cada centro de trabajo, vendrán determinadas por la matriz C, donde:

$$C = Q \cdot X_N$$

No terminan aquí las posibilidades del método Gozinto para el cálculo del MRP, sino que podríamos seguir con programas de aprovisionamiento, con cálculos de coste estándar y otros tal como se ha indicado al comienzo de este epígrafe. Las dimensiones de este trabajo no nos permiten extendernos más, no

48. Companys y Fonollosa, *op. cit.*, pág. 48.

obstante el lector interesado en estos temas puede dirigirse a las referencias bibliográficas indicadas.

CONCLUSIONES

El introducir el concepto de función de consumo dentro del contexto de la producción, se hace para poner de manifiesto la relación de interdependencia que existe entre el rendimiento técnico de un equipo y el consumo de factores que ese equipo necesita para dar un rendimiento determinado.

Todo bien de equipo, ya se trate de una máquina para tejidos de punto, una cepilladora, un torno, una prensa, etc., tiene en cada caso propiedades o características técnicas específicas. Son estas características técnicas de cada uno de los bienes de equipo y de los lugares de trabajo las que determinan los consumos de los factores requeridos por dichos equipos y en los lugares de trabajo respectivos.

Si se definen las relaciones de producción para cada uno de los talleres o centros de producción, la función de producción de una empresa se compone de un sistema de funciones, este sistema son las funciones de consumo.

Pueden ser representadas las condiciones de los procesos de producción empresariales en forma de un sistema de funciones de consumo, al poderse establecer relaciones de producción entre: materiales y producto final; equipos, energía, mano de obra, lubricantes, refrigerantes, herramientas, utillajes y producto final y también entre magnitudes (de estos factores) que no dependen directamente del producto final.

Al considerar la empresa en unidades parciales de organización tales como, centros de aprovisionamiento de producción y de venta, en la que los centros de aprovisionamiento reciben factores, bien directamente del mercado —factores originarios— o bien de los lugares de fabricación de la empresa —factores de producción derivados— permite obtener mediante los diferentes lugares de producción, un modelo de producción orientado en sistemas análogo al de Leontief.

Al introducir las funciones de consumo en el modelo orientado en sistemas hace posible obtener entre otras una función de producción denominada de «tipo D» quea barca todas las relaciones de producción relevantes desde el punto de vista económico de la empresa, derivándose de aquella entre otros el modelo de Gozinto de Vazsonyi de interesante aplicabilidad en el campo de la Economía de la Empresa para la planificación de necesidades de material, cálculo de coste estándar, en definitiva el MRP en sus distintas versiones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CASTÁN FARRERO, J. M. (1992). «Las funciones de producción representativas de la producción industrial, que reflejan las leyes existentes entre el rendimiento y el empleo de factores, *Revista de Economía Industrial*, Ministerio de Industria y Energía, n.º 287, septiembre-octubre, Madrid. En prensa.

COMPANYS, R. y FONOLLOSA, J.B. (1988). *Nuevas técnicas de gestión de stocks: MRP y JIT*, Col. Prodúctica, Marcombo, Barcelona.

DOMÍNGUEZ MACHUCA, J. A. (1984) «MRP: Planificación de las Necesidades de Materiales I, II.», *Alta Dirección*, números 118, 119 y 120.

DOMÍNGUEZ MACHUCA, J. A. (1985) «MRP: Planificación de las Necesidades de Materiales III», *Alta Dirección*, núm. 121.

GUNTEBERG, E. (1961). *Fundamentos de la Economía de la Empresa*. 3.ª Edic., Buenos Aires.

GARCÍA GONZÁLEZ, S. (1991). «El sistema MRP II: Ventajas e inconvenientes.» *Alta Dirección*, núm. 155. En este mismo número se presenta una monografía sobre métodos avanzados de planificación de producción.

LARRAÑETA, ONIEVA y LOZANO. (1988). *Métodos modernos de gestión de la producción*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

KLOOCK, J. (1975). «Situación actual de la Teoría de la Producción y de Costes en la Economía de la Empresa», en la obra colectiva *Introducción a la Economía de la Empresa. Lecturas seleccionadas por el Dr. Santiago García Echevarría*, Confederación Española de Cajas de Ahorros, Madrid, Tomo II.

LEONTIEF, W. (1958). *La Estructura de la Economía Americana. 1919-1939*, Barcelona.

MIZE, WHITE y BROOKS. (1982). *Planificación y Control de Operaciones*. Prentice/Hall, Dossat, Madrid.

PLOSSL GEORGE, W. (1980) «MRP, yesterday, today and tomorrow.», *Production and Inventary Management*, Vol. 21, núm. 3.

TARRAGO, F. (1989). *Fundamentos de la Economía de la Empesa*. Ed. del autor, Barcelona.

VAZSONYI, A. (1961). *Scientific Program in Business and Industry*, New York: John Wiley & Sons, Inc.