Cuadernos de Economía. Vol. 17 253-266 1989.

La indescomponibilidad en algunos modelos multisectoriales de producción conjunta.

Julio Sánchez
Departamento de Teoría Económica y
Métodos Cuantitativos
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Zaragoza
c/. Doctor Cerrada, 1 - 50005 Zaragoza

La indescomponibilidad en algunos modelos multisectoriales de producción conjunta

RESUMEN

La indescomponibilidad es muy util para analizar ciertos conceptos económicos (procesos y mercancías básicas), por este motivo he buscado una definición de esta mejor que la de Roemer (1980). La nueva definición permite descubrir la asociación incorrecta de este autor entre irreducibilidad e indescomponibilidad y distinguir entre indescomponibilidad e indescomponibilidad fuerte.

Indecomposability in Some Joint Production Multisectorial Models

ABSTRACT

Indecomposability is veri useful to analyse some economic concepts (basic processes and basic commodities). For this reason I have sought a new definition of indecomposability better than that explained in Roemer (1980). The new definition allows us to discover the wrong reationship betwen irreducibility and indecomposability, defended by this author, and to see the differences between indecomposability and strong indecomposability.

La indescomponibilidad en algunos modelos multisectoriales de producción conjunta.

I. Presentación

Estas lineas han sido sugeridas por el estudio de un excelente artículo de Roemer (1980) sobre innovaciones y tasas de beneficio. En él este autor busca las condiciones que deben de cumplir algunos modelos, tipo von Neumann, para verificar el teorema de Okishio, encontrando que van asociadas a la indescomponibilidad. Cierto error hallado en una de sus demostraciones fundamentales, así como la posibilidad de generalizar su concepto de indescomponibilidad y de dar, para esta, mejores caracterizaciones han sido los motores de este trabajo.

Roemer caracteriza la economía por dos matrices A y B de orden nxm. La columna j de A representa los inputs unitarios del proceso j, y la columna j de B los outputs correspondientes a ese proceso para el nivel uno de actividad.

Supone este autor que el número de bienes, n, es no mayor que el de procesos, que es m. Esto es usual en los modelos von Neumann, cuando se supone que hay elección de técnicas, ya que entonces el interés se centra en la elección entre todos los procesos posibles. A lo largo del trabajo mantendremos por comodidad esta condición.

Supone además Roemer que su modelo (A,B) verifica las dos primeras condiciones de Gale (1960), a saber:

1) que todo bien es producido por algún proceso, lo que equivale a imponer la condición de que toda fila de B es no nula.

2) que todo proceso utiliza algún bien para la producción, luego todas las columnas de A son no nulas.

Es bien conocido que estas dos condiciones aseguran la existencia de solución en los problemas siguientes:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \rho \\ &p\,B \leq \rho\, p\, A \\ &p \geq 0 \\ &\rho > 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

y

$$\begin{aligned} &\text{Max } \rho \\ &B\,X \geq \rho\, A\, X \\ &X \geq 0 \\ &\rho > 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

El valor óptimo de ρ en (1) es ρ_{min} y, si es mayor que la unidad, es igual a $1+\tau_{min}$. Esta tasa τ_{min} es la tasa de beneficio garantizada. Los p asociados con ρ_{min} son los precios de equilibrio que permiten valorar cualquier innovación. En adelante p serán estos precios.

Si una innovación está caracterizada por dos vectores columna (a',b'), diremos que es viable si y solo si

$$p\, b' > \rho_{min}\, p\, a'$$

y Roemer demuestra (teorema 3.1, página 455) que toda innovación viable produce una tasa de beneficio garantizada no menor que la inicial y a veces mayor. Más aún, prueba que la nueva tasa, ρ'_{min}, es mayor que ρ_{min} si y solo si el p asociado con ρ_{min} en (1) es único, salvo constantes. En consecuencia los cambios reductores de coste o viables elevan la tasa de beneficio si y solo si el vector de precios es único[1].

Esta conclusión es la que fuerza a buscar las condiciones que garanticen la unicidad de p. Roemer demuestra que la propiedad que él llama *indecomposability*, y que denominaré de aquí en adelante indescomponibilidad, es condición suficiente para esa unicidad. En este autor la indescomponibilidad se caracteriza por:

1. No debemos olvidar que todo lo afirmado es sobre un tipo concreto de modelo, el definidio por (A,B).

"Definition 3.3. A model is indecomposable iff all intesity vectors X at ρ_{min} use at least n processes. That is: $X \in X(\rho_{min})$, $X \neq 0$, implies $x_j > 0$ for at least n components j." (página 457).

La condición anterior no está definida a partir de la estructura de las matrices (como hace Gale al definir en estos modelos irreducibilidad o como se hace usualmente en producción simple), sino de la solución del sistema (1) y del sistema de inecuaciones de las actividades para ρ_{min}. Ello hace que la condición sea poco manejable y de difícil comprobación. Por este motivo voy a buscar otra caracterización estructural de la indescomponibilidad, que sea más intuitiva y más chequeable.

Además Roemer dice probar, en mi opinión incorrectamente, que esta condición es más fuerte que la de irreducibilidad impuesta por Gale (1960), la tercera condición exigida usualmente a los modelos von Neumann, a saber:

3) no existe ningún subconjunto propio de bienes capaces de reproducirse por si mismos.

La conveniencia de refutar esta última afirmación es otro motivo más para estudiar la indescomponibilidad. No debemos olvidar que si la indescomponibilidad fuera más potente que la irreducibilidad tendriamos dos criterios sucesivos para llevar a cabo la fragmentación estructural de (A,B), primero aplicariamos la irreducibilidad y sobre los resultados la indescomponibilidad. Por desgracia esto no sucede.

La clarificación de las diferencias entre irreducibilidad e indescomponibilidad permite además abrir una nueva linea de investigación: *aplicaciones de la indescomponibilidad*, que promete ser fructífera al menos para definir proceso básico y mercancía básica en producción conjunta.

II. Caracterización de la indescomponibilidad

La definición dada de indescomponibilidad puede hacerse algo más explicativa, simplemente utilizando en la definición más valores de la tasa de beneficio que el ρmin. Así tenemos

Teorema 1 (Roemer (1980), página 457).- El modelo (A,B) es indescomponible si y solo si

$$\forall X \geq 0, X \neq 0 \text{ tal que } B X \geq \rho A X, \text{ con } \rho \geq \rho_{min} > 0 \qquad (3)$$

tiene, al menos, n componentes positivas.

Demostración:

Si el ρ de (3) es $\rho \geq \rho_{min}$, trivialmente el X de (3) verifica

$$BX \geq \rho_{min} A\,X$$

luego si (A,B) fuera indescomponible también el X de (3) debería tener n componentes positivas al menos. Recíprocamente, si se verifica (3), el caso $\rho = \rho_{min}$ nos da la caracterización de indescomponibilidad.

La limitación en (3) de los valores de ρ tiene una justificación económica. Para $\rho < \rho_{min}$ no existen soluciones de (1), luego a los X que verifiquen $B\,X \geq \rho\,A\,X$ no se les puede asociar precios de equilibrio de tasa ρ. Las X asociadas con $\rho < \rho_{min}$ no corresponden por tanto a equilibrios económicos von Neumann, que son en los que estamos interesados.

La caracterización que da el teorema 1 sigue siendo difícil de comprobar, pero sirve para indagar otras caracterizaciones estructurales, que sí son fácilmente comprobables. Una condición estructural de indescomponibilidad nos la da el teorema siguiente:

Teorema 2.- Es condición suficiente de indescomponibilidad de (A,B) que todo subconjunto de menos de n procesos utilice como input algún bien que no produce

Demostración:

Supongamos que el modelo es descomponible y que cumple la condición del enunciado. Ello supone que existe un $X \geq 0$ con r componentes positivas, $r < n$, que verifica:

$$B\,X \geq \rho_{min} A\,X, X \geq 0$$

y que podemos obtener las submatrices A* y B* asociadas con las componentes positivas de X. Para ellas, si X* es el vector de X sin sus ceros, tendremos

$$B^*\,X^* \geq \rho_{min} A^*\,X^*, X^* > 0$$

Vamos a ver que esta relación es imposible por la condición del enunciado. Las matrices A* y B* tienen menos de n procesos, luego utilizan algún bien que no producen, en consecuencia hay componentes de A*X* que son positivas y que son nulas en B*X*, lo que es incompatible con la relación de desigualdad obtenida. En consecuencia, el modelo será indescomponible como dice el teorema, siempre que todo subconjunto de n procesos utilice como input algún bien que no produce.

Este teorema nos dá una condición estructural muy asequible y de fácil chequeo, ya que basta comprobar si hay o no en cada A* una fila no nula que lo es en B*. Sin embargo es excesivamente rígida, por lo que conviene buscar otras condiciones estructurales de indescomponibilidad más flexibles. Conviene además que sean condiciones necesarias y suficientes. Una de ellas es expuesta en el

Teorema 3.- (A,B) es indescomponible si y sólo si todo subconjunto de menos de n procesos o utiliza como input un bien que no produce o posee asociado un ρ^*_{max}, que es menor que el ρ_{min} de (A,B).

Demostración:

Supongamos que (A,B) es indescomponible. Sean A* y B* las submatrices asociadas con el subconjunto de procesos en estudio. Por hipótesis son de orden nxr, con $r < n$.

Por ser (A,B) indescomponible, las X asociadas con $\rho \geq \rho_{min}$ tienen n componentes positivas como mínimo. En consecuencia

$$\nexists\, X^* \geq 0 \;\;]\; B^* X^* \geq \rho A^* X^*, \text{ con } \rho \geq \rho_{min}$$

porque, si existiera una X* de este tipo, ampliándola con ceros tendriamos una X asociada con un $\rho \geq \rho_{min}$ de menos de n componentes positivas.

Suprimamos en (B*,A*) las filas que son nulas a la vez en A* y B*. Sean A** y B** las submatrices resultantes. Para ellas igualmente

$$\nexists\, X^{**} \geq 0 \;]\; B^{**} X^{**} \geq \rho A^{**}X^{**}, \text{ con } \rho \geq \rho_{min}$$

Como A verifica la condición 2 de Gale, también la verifica A**. Por el contrario B** puede no verificar la 1 de Gale. Si no verifica la 1 de Gale, hay alguna fila nula en B**, que no lo es en A**, luego los procesos en cuestión utilizan un bien como input que no producen.

Si B** verifica la condición 1 de Gale, como (A**,B**) verifica las dos condiciones de Gale, existe solución del problema

$$\begin{aligned} &\text{Max } \rho \\ &B^{**} X^{**} \geq \rho A^{**} X^{**} \\ &X^{**} \geq 0 \\ &\rho > 0 \end{aligned}$$

La solución dará un ρ^{**}_{max} y una $X^{**} \geq 0$ asociada. Estas ρ^{**}_{max} y X** verifican

$$B^{**} X^{**} \geq \rho^{**}_{max} A^{**} X^{**}, \text{ con } \rho^{**}_{max} > 0$$

luego, para no caer en contradicción, se debe verificar

$$\rho^{**}_{max} < \rho_{min}$$

como queríamos demostrar.

Los teoremas 2 y 3 tienen relaciones mutuas. La observación de sus enunciados me lleva a definir un nuevo concepto de indescomponibilidad, más fuerte que el de Roemer, el reflejado en:

Definición 4.- Diremos que (A,B) tiene indescomponibilidad fuerte si todo conjunto de menos de n procesos utiliza como input un bien que no produce.

Corolario 5.- La indescomponibilidad fuerte implica la indescomponibilidad y la no existencia de conjuntos de menos de n procesos que tengan el ρ_{max} asociado menor que el ρ_{min} de (A,B). Recíprocamente si la economía no puede reproducirse con menos de n procesos, también la indescomponibilidad implica la indescomponibilidad fuerte.

Demostración: basta aplicar los teoremas 2 y 3 anteriores.

El teorema 3 nos pide, para probar su no vacuidad, la comprobación de la posibilidad de que es posible que ρ^*_{max} sea menor que ρ_{min}. Esto vamos a verlo en un ejemplo, que además nos servirá para refutar la relación, afirmada por Roemer (1980), entre irreducibilidad e indescomponibilidad.

Ejemplo 6.- Sea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Calculemos ρ_{min} con $p = (p_1, p_2)$ tal que $p_1 + p_2 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$. Deberá verificarse

$$\begin{aligned} p_1 &\leq \rho\, p_1\, 0{,}5 \\ p_1 &\leq \rho\, (p_1 + p_2)\, 0{,}1 \\ p_2 &\leq \rho\, (p_1 + p_2)\, 0{,}1 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} p_1 &\leq \rho\, p_1\, 0{,}5 \\ p_1 &\leq \rho\, 0{,}1 \\ p_2 &\leq \rho\, 0{,}1 \end{aligned}$$

de donde se deduce $1 \leq \rho\, 0{,}2$. Por tanto $\rho_{min} = 5$ y $p_1 = p_2 = 0{,}5$.

Si en (A,B) nos quedamos unicamente con el primer proceso tendremos

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

al cual hay asociado un $\rho^*_{max} = 2$. Queda así visto que puede ocurrir

$$\rho^*_{max} < \rho_{min}$$

III. Irreducibilidad versus indescomponibilidad

El concepto más conocido de descomponibilidad en producción conjunta es el definido por Gale (1960), que ya hemos expuesto anteriormente y que he llamado irreducibilidad. El concepto de *indecomposability* es un competidor solo admisible si completa el de irreducibilidad, bien porque abarque nuevos casos, bien porque cualifique la irreducibilidad de ciertas economías.

Para Roemer es la segunda opción la que ocurre e intenta demostrar (teorema 3.4) que la indescomponibilidad implica la irreducibilidad, aunque no se cumple la implicación recíproca.

En mi opinión la demostración de Roemer es incorrecta y el interés de la indescomponibilidad radica en que cubre casos nuevos, que son reducibles según el criterio de Gale. Aparece así la indescomponibilidad como un nuevo tipo de ligadura estructural. En lo que sigue probaremos esta afirmación.

Teorema 7.- No es cierto que la indescomponibilidad implique la irreducibilidad.

Demostración:

Nos vamos a apoyar en el ejemplo 6 anterior, que es claramente reducible. Veamos por el contrario que es indescomponible, ya que toda $X \geq 0$ asociada con una $\rho \geq \rho_{min}$ tiene, al menos, dos componentes positivas. Sea en ese ejemplo X el vector que verifica

$$B\,X \geq \rho\,A\,X, \text{ con } X \geq 0 \text{ y } \rho > 0,$$

Si X tiene una sola componente positiva, solo puede ser $X = (x_1,0,0)$, pero entonces el ρ máximo alcanzable es 2 y no se verifica $\rho \geq \rho_{min} = 5$. Por tanto (A,B) es indescomponible aunque no sea irreducible.

La demostración de la falsedad del teorema 3.4 de Roemer (1980) obliga a profundizar en el error cometido por dicho autor. Mi opinión, surgida del

V. Referencias bibliográficas

GALE, D. (1960): *The theory of Linear Economic Models*. Mc Graw-Hill, New York.

ROEMER, JOHN E. (1980): "Innovation, Rates of Profit and Uniqueness of von Neumann Prices". *Journal of Economic Theory* 22, 451-464.

SÁNCHEZ, J. (1989): "Irreducibility on multisectorial models". Working paper, Departamento de Análisis Económico, Universidad de Zaragoza.