Cuadernos de Economía. Vol. 15 183-204 1987.

Medidas de reproducibilidad.

Alfons Barceló

Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, 690 – 08034 Barcelona

Julio Sánchez

Departamento de Teoría Económica y Métodos Cuantitativos
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragoza.
C/ Doctor Cerrada, 1 – 50005 Zaragoza.

Medidas de reproducibilidad

RESUMEN

Siguiendo la línea de investigación iniciada con el *Teorema sobre bienes autorreproducibles*, este artículo se propone analizar los perfiles reproductivos de los procesos multiperiódicos y describir los factores básicos que los modelan.

Para alcanzar tal objetivo se caracterizan algunas magnitudes sintéticas ("tasa específica de excedente", "tasa de rendimiento medio específico") que permiten cuantificar el grado de capacidad reproductiva; se estudian las relaciones que existen entre esas magnitudes; se examinan también las complicaciones derivadas de eventuales "truncamientos" destinados a fijar la vida económica ideal. El artículo termina con unas escuetas consideraciones sobre el dominio de valores de la "tasa específica de excedente" y sobre su posible utilización como indicador tecnoeconómico incluso para recursos naturales no reproducibles, pero reciclables (metales, por ejemplo).

Measures of Reproducibility

ABSTRACT

Following the line of research started with the theorem on *self-reproducing goods*, this paper aims to analyze the reproductive profiles of the multiperiodic processes, and to describe the basic factors that intervene in their modelization.

In order to reach such an objective some synthetic measures that allow to quantify the degree of reproductive capacity are characterised: "specific rate of surplus", and "rate of specific average return"; the relationships that exist between these magnitudes are studied, as well as the complications resulting from eventual "truncations" made with the purpose of to fix the ideal economic life. The paper finishes with a few bare considerations on the dominion of values of the "specific rate of surplus" and its feasible use as a tecnoeconomic indicator even for natural resources not-reproducibles, but recyclables (for instance, metals).

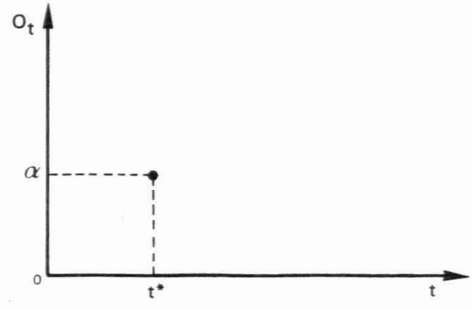
Medidas de reproducibilidad.

1.– En una serie de entregas publicadas en esta misma revista hemos presentado el *Teorema sobre bienes autorreproducibles* junto con ulteriores *Variantes* y *Extensiones* (Cf. Barceló, 1985a; Barceló, 1985b; Barceló-Sánchez, 1986). Estas investigaciones sobre la relación valorativa entre bienes autorreproducibles utilizadores de un input distinguido común nos han conducido a examinar los perfiles reproductivos y a proponer diversas medidas de la reproducibilidad. De este modo, partiendo de un problema económico, hemos dado con el campo de la biología de poblaciones, lo que entraña gozar de algunas economías externas y anudar deseables lazos entre disciplinas poco conectadas. Una de las novedades de las exploraciones llevadas a cabo estriba en haber puesto de manifiesto que a todos los bienes autorreproducibles se les pueden asociar índices sintéticos específicos, determinados por factores biológicos, técnicos e históricos, y que tales indicadores pueden ser relacionados con las valoraciones económicas.

Hasta ahora hemos considerado que los perfiles reproductivos que asumíamos eran datos históricos o tecnológicos depurados o promedio que podían ser representados mediante diversas "matrices específicas" (M, M', M"; Cf. Barceló-Sánchez, 1986, sección 3). Nuestro objetivo en el presente artículo es estudiar algunos de los condicionantes de dicho perfil, así como las relaciones entre las magnitudes sintéticas presentadas (τ, μ, $\tilde{\mu}$).

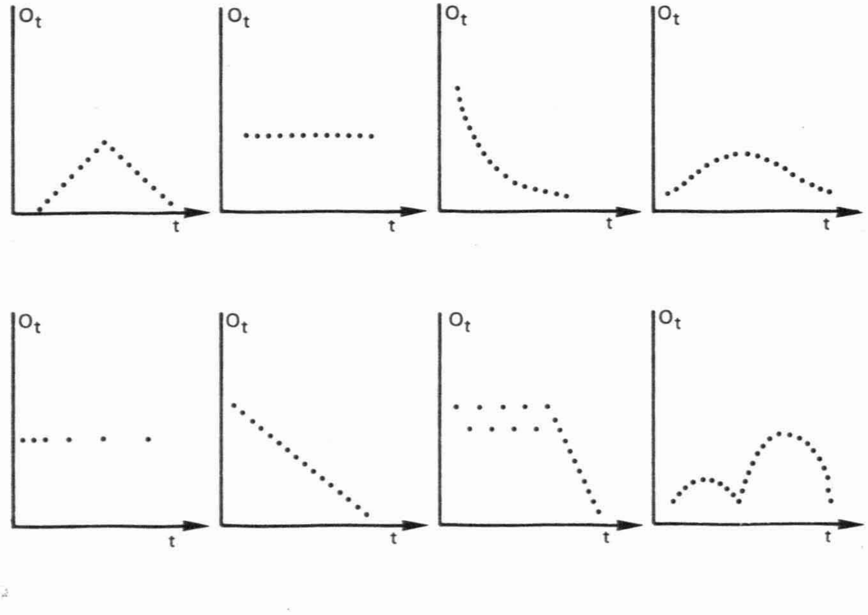
2.– Los perfiles reproductivos, o *funciones de autorreproducción* (FAR), de que nos ocupamos pueden ser representados de diversos modos. Ya hemos mostrado cómo hacerlo mediante una sucesión finita $\{o_t\}$ o mediante "líneas de producción" que podían ser traducidas a términos matriciales. Otra modelización útil consiste en la representación bidimensional de los pares (tiempo, output).

Con este último formato el comportamiento de los bienes que operan como capital circulante se reflejaría en una gráfica del tipo



Para dichos bienes el par (t*, α) ó (t*, τ + 1) suministra toda la información requerida (suponiendo siempre la entrada normalizada = 1).

El caso de los bienes que operan como capital fijo se representaría mediante funciones discretas que pueden tener configuraciones variadas, si bien serán siempre acotadas, finitas y en el primer cuadrante. Por ejemplo:



Dado que a veces nos vemos obligados a ajustar los períodos temporales, conviene hacer hincapié en que el tiempo es un rasgo objetivo que no es lícito escamotear, aunque con ciertas astucias podamos rehuir algunos obstáculos que se derivan de esa dimensión. Puesto que muchos procesos autorreproductivos siguen ciclos objetivos, conviene clarificar el concepto de intervalo de esos ciclos.

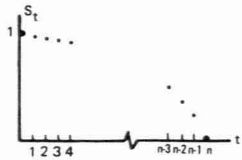
Diremos que "d" es un *intervalo propio* de un proceso (multiperiódico) si existe un j tal que: 1) $o_j \neq 0$ y $o_{j+1} \neq 0$; 2) "d" es el intervalo temporal entre o_j y o_{j+1}. Obviamente en una misma función de autorreproducción puede haber distintos tipos de intervalos propios, aunque es frecuente que coincidan.

Llamaremos *intervalo básico* de una FAR al máximo común divisor de sus intervalos propios. En cada ciclo completo el intervalo básico es único y no mayor que cualquiera de los intervalos propios, que son todos ellos múltiplos enteros del básico.

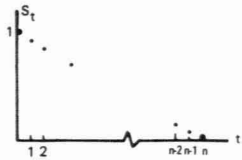
Como datos de partida utilizamos habitualmente intervalos básicos, pero cuando es conveniente alteramos los intervalos de referencia, lo que modifica la representación funcional, mas no el fenómeno modelizado.

3.– Los perfiles reproductivos son el resultado de tres factores: la *pauta de supervivencia*, la *pauta de fertilidad*, las decisiones sobre el momento de *truncamiento del proceso vital*. Ninguno de estos tres componentes puede ser considerado como intrínsecamente fijo a largo plazo, sino que se hallan afectados por el marco biotecnoeconómico en el que existen.

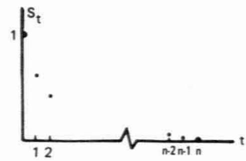
Las pautas de supervivencia en un momento dado pueden ser representadas por funciones de supervivencia análogas a las FAR. Una tabla de supervivencia normalizada nos informa de la proporción de individuos supervivientes en cada edad t ($t \in \{0, ..., n\}$) en tantos por uno. Por consiguiente s_t representa la frecuencia con que sobreviven los organismos en cuestión en el momento t. Si no se computa la mortalidad prenatal, $s_0 = 1$; puesto que acotamos el perfil vital o las fases reproductivas, supondremos que $s_n = 0$ y que $s_{n-1} > 0$. Evidentemente la función FS(t) es monótona decreciente y adopta en general tres configuraciones básicas: ligera mortalidad hasta la fase final de la existencia, mortalidad constante a lo largo de toda la existencia, mortalidad muy elevada en las fases inmaduras. A estos tres tipos corresponden las representaciones gráficas siguientes:



Primer tipo



Segundo tipo



Tercer tipo

La pauta de fertilidad nos indicará las tasas de natalidad específicas de cada edad. También la podemos representar por una función discreta, $FF(t) = o'_{t+1}$ ($t \in \{ 0, ..., n-1 \}$). La combinación de supervivencia y fertilidad nos suministra el perfil reproductivo simbolizado por la secuencia (o_1, ..., o_n), siendo –según se vió en Barceló-Sánchez, 1986– la relación: $FAR(t) = FS(t-1). FF(t-1)$.

Discutiremos la cuestión del truncamiento en los parágrafos 12-15.

4.– Además de estas representaciones multinuméricas disponemos de medidas sintéticas de la reproducibilidad, derivables de los perfiles complejos que acabamos de ver.

La *tasa específica de excedente*, τ , cuyo valor numérico venía definido por la siguiente ecuación:

$$1 = \sum_{t=1}^{n} \frac{o_t}{(1 + \tau)^t}$$

había resultado ser también el valor propio de la matriz específica; el vector propio asociado a él suministraba las intensidades requeridas para tener una pirámide balanceada.

Por otra parte habíamos definido μ como *tasa de rendimiento medio específico*:

$$\mu = \frac{\sum^{n} o_t - 1}{n}$$

Finalmente, para ciertos casos particulares, habíamos propuesto el parámetro $\tilde{\mu}$, como medida del rendimiento neto específico por pirámide unitaria, definido simplemente como:

$$\tilde{\mu} = \sum^{n} o_t - 1$$

En general estas medidas sintéticas sólo coinciden cuando se trata de bienes que funcionan como capital circulante, esto es, con ciclo uniperiódico. Aunque τ y μ condensan ambas unidimensionalmente los perfiles reproductivos, la relación entre ellas es compleja, dado que ponderan de distinto modo los componentes del vector o sucesión de que proceden.

5.– La *tasa específica de excedente* es una medida de la capacidad reproductiva de un bien en un marco sociotécnico dado. No se trata de una constante transhistórica, sino de un parámetro cambiante en función de innovaciones de diversa índole (equiparables a modalidades de cambio técnico). Pero cabe presumir que su estabilidad será notable, en comparación con la de muchos otros indicadores económicos. En todo caso ha de resultar factible –al menos en principio– estudiar su trayectoria temporal y detectar las sigularidades de dicha trayectoria, sean saltos bruscos o transiciones suaves a otros niveles, así como los influjos mutuos entre el marco socioeconómico y la capacidad autorreproductiva de un bien. Por otro lado los procesos reproductivos tienen lugar a intervalos determinados que no es lícito pasar por alto, de forma que las τ no son nunca en rigor números puros, sino que llevan asociada una dimensión temporal.

En resumidas cuentas, las tasas específicas de excedente pueden ser concebidas como imágenes de la función tasa específica de excedente. Simbólicamente:

$$\tau : \nu \times S \times R \times R^{+} \longrightarrow R^{+}$$
$$(V, s, t, T) \rightsquigarrow \tau\,(V, s, t, T)$$

donde ν es la familia de los bienes autorreproducibles que estamos estudiando (uniperiódicos o multiperiódicos), S son los sistemas económicos en consideración, t es el momento temporal concreto (o tiempo de calendario) que toma valores en R, y por último T es el intervalo adoptado para caracterizar las secuencias reproductivas, y τ será un número real positivo.

Asimismo hemos mostrado en anteriores entregas que τ podía ser contemplada desde dos ángulos distintos: como propiedad elemental de una construcción hipotética (la pirámida balanceada), o bien como una variable intermedia (esto es, que media entre conceptos observacionales característicos de reproducibilidad específica y tiempo) formalmente análoga a la tasa de rendimiento interno de una inversión o al tipo de interés. El hecho de que las dos vías condujeran siempre al mismo valor numérico nos permitió sostener que tau reflejaba una propiedad objetiva profunda, a saber, la capacidad expansiva máxima.

6.– Veamos esto en detalle. Nuestro objetivo puntual es ahora mostrar que $1 + \tau$ aparece como la cota máxima de la reproducibilidad de un conjunto de procesos autorreproductivos.

Sea un bien autorreproducible cuyo perfil reproductivo es descrito por las matrices específicas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad y \; B = \begin{pmatrix} o_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ o_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ o_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ \\ o_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ o_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $1 + \tau$ aparece asociado a un vector de intensidades $Q^* = ((1 + \tau)^{n-1}, (1 + \tau)^{n-2}, \dots, 1)$ que da lugar a una pirámide balanceada. Para Q^* se verifica

$$Q^*B = (1 + \tau) Q^*$$

por lo que puede asegurarse que $1 + \tau$ es un valor alcanzable de la reproducibilidad.

Por otra parte sabemos que $1 + \tau$ puede definirse con

$$1 + \tau = \sup_{\substack{Q \geqslant 0 \\ QQ'=1}} \min_j \frac{\sum_i q_i b_{ij}}{q_j}$$

luego

$$\begin{aligned} 1 + \tau &= \sup_{\substack{Q \geqslant 0 \\ QQ'=1}} \min_{j} \text{(reproducibilidad con Q del bien j)} = \\ &= \sup_{\substack{Q \geqslant 0 \\ QQ'=1}} \text{(reproducibilidad de Q–1) (*)} = \\ &= \text{supremo de la reproducibilidad} = \\ &= \text{máximo de la reproducibilidad} \end{aligned}$$

(*) Quizá fuera mejor hablar de ***reproducibilidad garantizada de Q***, si se sospecha que puede haber componentes de Q que crezcan en mayor proporción.

En consecuencia $1 + \tau$ es la cota máxima de reproducibilidad obtenible en el conjunto de procesos descrito por A y B.

La reproducibilidad de un input pudiera ser menor que la de uno de sus bienes componentes; por ello es pensable que la reproducibilidad de $Q = (q_j)$ sea k y que se verifique, al repetirse el proceso,

$$k \text{ x (input de j)} < \text{(output de j)}$$

Para dilucidar la cuestión vamos a demostrar que si el proceso descrito por A y B se repite m veces encadenadamente, también $(1 + \tau)^m$ es la cota superior de reproducibilidad. Ello permitirá hablar del coeficiente de expansión del conjunto de procesos y encarar el problema de la reproducibilidad dinámica.

Cuando el proceso se repite m veces sabemos que ello equivale a transformaciones secuenciales del siguiente tenor:

$$Q \longrightarrow QB \longrightarrow QB^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow QB^m$$

luego todo se reduce a estudiar los extremos del proceso representados por la matriz A (= I) y la matriz B^m.

Como la raíz de Frobenius de B^m es $(1 + \tau)^m$ y $(1 + \tau)^m$ es también el coeficiente de reproducibilidad de B^m, podemos aseverar que la repetición encadenada de los procesos no altera el carácter de $(1 + \tau)$ como cota máxima de reproducibilidad.

7.– Otra medida sintética de la capacidad reproductiva es la *tasa de rendimiento medio específico*, que hemos definido por

$$\mu = \frac{\sum^{n} o_t - 1}{n}$$

donde n representa el número de períodos que tiene el ciclo vital completo que consideramos.

La estructura funcional subyacente de este parámetro es pues análoga a la de τ. Esto es,

$$\begin{array}{lcl} \mu : \nu \times S \times R \times R^{+} & \longrightarrow & R^{+} \\ (V, s, t, T) & \rightsquigarrow & \mu\,(V, s, t, T) \end{array}$$

Se trata también de un indicador predicable tanto de los bienes autorreproducibles uniperiódicos como multiperiódicos. En el primer caso τ y μ tienen el mismo valor numérico, pero en el caso general estos valores diferirán e incluso pueden variar en sentidos opuestos, al alterarse los perfiles reproductivos, como probaremos más adelante.

Por último, la *tasa de rendimiento medio por pirámida unitaria* ($\tilde{\mu} = \sum^{n} o_t - 1$) se obtiene inmediatamente a partir de los mismos datos sin que suministre información adicional, por lo que no reclama atención singularizada.

8.– Las diversas medidas de reproducibilidad apuntadas se refieren a un perfil reproductivo dado. Pero ya hemos subrayado que las funciones de autorreproducción de que nos ocupamos son el resultado de una combinación compleja de elementos biológicos, técnicos y económicos que van experimentando cambios a lo largo del tiempo. Tales cambios afectarán pues al grado de capacidad reproductiva.

Antes de estudiar estas modificaciones conviene, sin embargo, exponer algunas acotaciones preliminares referidas a estos componentes. Con respecto al componente "biológico" no es preciso aducir muchas consideraciones: se trata del substrato más estable, aunque tampoco es un dato absolutamente constante ni totalmente independiente. Tampoco el elemento "técnico" resulta nada misterioso: tanto la selección artificial como el control, vigilancia y protección de los procesos de producción y reproducción son hechos suficientemente patentes, así que resulta innecesario hacer hincapié en el asunto, aunque no resulte nada fácil establecer las intrincadas secuencias que dan lugar a un determinado nivel técnico. Por último, el componente "económico" –además de su incidencia sobre el nivel técnico– juega un papel propio y peculiar a la hora de determinar el perfil de los procesos reproductivos: para modelizar satisfactoriamente los procesos reproductivos reales no vale escamotear el hecho de que es posible arrancar el árbol frutal o sacrificar la oveja antes de que agoten todas sus potencialidades reproductivas; y no sólo es posible, sino que se practica comúnmente.

Hechas estas puntualizaciones pasamos a examinar cómo afectan a τ y μ los cambios en los perfiles reproductivos.

9.– Veamos en primer lugar cómo incide sobre la magnitud τ un alargamiento de las fases reproductivas.

Sea τ_j el indicador correspondiente a un conglomerado de procesos con j períodos. Esta magnitud, como sabemos, puede ser cuantificada a través de la fórmula de actualización o como valor propio de la correspondiente matriz específica.

Para responder a la cuestión planteada compararemos dos variantes opcionales de un proceso reproductivo. Estas variantes pueden ser caracterizadas por las siguientes secuencias:

$$o_1, o_2, \ldots, o_j \tag{1}$$

$$o_1, o_2, \ldots, o_j, o_{j+1} \tag{2}$$

que corresponden a individuos de la misma especie. El proceso (2) se diferencia del (1) en que el bien de partida tiene un año o período más de vida reproductiva, al final del cual genera o_{j+1} seres de edad cero, cifra que supondremos positiva.

Dado que ambos procesos tienen los mismos outputs en los j primeros períodos vale suponer que la prolongación de la vida fértil acrecerá el valor numérico de τ como magnitud que refleja la capacidad autorreproductiva. Esta conjetura puede ser fácilmente demostrada, según se ve a continuación.

Por definición, τ_j verifica

$$1 = \sum_{i=1}^{j} \frac{o_i}{(1 + \tau_j)^i} \tag{3}$$

También τ_{j+1} debe de cumplir

$$1 = \sum_{i=1}^{j+1} \frac{o_i}{(1 + \tau_{j+1})^i} \tag{4}$$

Luego:

$$0 = \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{o_i}{(1 + \tau_{j+1})^i} - \frac{o_i}{(1 + \tau_j)^i} \right) + \frac{o_{j+1}}{(1 + \tau_{j+1})^{j+1}} \qquad (5)$$

Así que para que ambas expresiones sean posibles debe de ocurrir que

$$\tau_{j+1} > \tau_j$$

lo que demuestra la proposición enunciada.

Otra forma de expresar la propiedad examinada consiste en decir que el proceso (2) lleva asociado un factor de actualización menor

$$\frac{1}{1 + \tau_{j+1}} < \frac{1}{1 + \tau_j}$$

o –lo que es lo mismo– una tasa de rendimiento mayor.

En definitiva, lo que acaba de probarse es que la capacidad autorreproductiva aumenta (disminuye) cuando se alarga (acorta) la vida reproductiva o, más propiamente, el período en que se generan nuevos seres. Como cabía esperar, la capacidad autorreproductiva máxima no cambia si se trunca la vida en la fase estéril. La ampliación de las etapas reproductivas constituye, pues, una vía de optimización parcial desde el punto de vista biológico.

Ahora bien, este criterio puede entrar en conflicto con los criterios de optimización económica, con lo que vamos a parar a una cuestión de elección técnica.

10.– Mientras que el alargamiento del perfil reproductivo siempre implica un crecimiento de τ, no ocurre lo mismo con respecto a μ.

Comprobémoslo. Sea un perfil base (1, 3, 3), con un μ_3 asociado igual a 2. Ampliando las etapas con un perfil (1, 3, 3, 1), resultará que $\mu'_4 < \mu_3$; si pasamos a (1, 3, 3, 2), tendremos que $\mu''_4 = \mu_3$; si el perfil de salidas fuera (1, 3, 3, 3), $\mu'''_4 > \mu_3$. En cambio, por lo demostrado en la sección anterior, las tres nuevas τ serían siempre superiores a la inicial τ_3.

Esto revela que μ presenta diferencias cualitativas con respecto a τ, aunque ambas puedan ser consideradas como medidas de autorreproducibilidad.

También vale señalar que si el consumo de inputs fuera constante en cada fase vital, lograr un μ lo más elevado posible sería un criterio apropiado de elección técnica.

11.– Si se comparan conglomerados de procesos con el mismo número de períodos, también pueden obtenerse algunas relaciones sencillas entre los τ y μ correspondientes.

Sean dos perfiles $\vec{O}^A$, $\vec{O}^B$. Suponiendo que $\vec{O}^A \leqslant \vec{O}^B$, es inmediato que $\mu_A < \mu_B$ y, por la indescomponibilidad de la matriz específica, $\tau_A < \tau_B$. Por tanto:

$$(\vec{O}^A \leqslant \vec{O}^B) \quad \Longrightarrow \quad (\mu_A < \mu_B) \text{ y } (\tau_A < \tau_B)$$

También puede verse fácilmente que si

$$\begin{array}{ll} O_i^A \leqslant O_i^B & i = 1, 2, ..., s \\ O_j^A \geqslant O_j^B & j = s + 1, ..., n \\ \mu^A = \mu^B & \end{array}$$

entonces se verifica siempre que $\tau_a \leqslant \tau_B$ ($\tau_A < \tau_B$, si alguna de las desigualdades es estricta).

Similarmente, si

$$\left.\begin{array}{l} O_i^A \leqslant O_i^B \\ O_j^A \geqslant O_j^B \\ \tau_A = \tau_B \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, ..., 1 \\ j = s + 1, ..., n \end{array}$$

entonces $\mu_A \geqslant \mu_B$ ($\mu_A > \mu_B$, si alguna de las anteriores desigualdades es estricta).

También puede demostrarse que

$$\left.\begin{array}{l} O_i^A \geqslant O_i^B \ , \ i = 1, ..., s \\ O_j^A \leqslant O_j^B \ , \ j = s + 1, ..., n \\ \mu_A = \mu_B \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau_A \geqslant \tau_B \ (\tau_A > \tau_B, \text{ si existe alguna desigualdad estricta})$$

y que

$$\left.\begin{array}{l} O_i^A \geqslant O_i^B \ , \ i = 1, ..., s \\ O_j^A \leqslant O_j^B \ , \ j = s + 1, ..., n \\ \tau_A \ = \ \tau_B \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu_A \leqslant \mu_B \ (\mu_A < \mu_B, \text{ si existe alguna desigualdad estricta})$$

Los anteriores resultados pueden ser expresados del siguiente modo: Cualquier elevación del perfil reproductivo da lugar a incrementos tanto de τ como de μ . Los incrementos (decrementos) de output asociados a las primeras fases vitales repercuten msás sobre la magnitud de τ que sobre μ . Y, recíprocamente, los incrementos (decrementos) en las últimas fases repercuten más sobre μ que sobre τ.

12.– Abordaremos ahora la cuestión del truncamiento de una secuencia de procesos autorreproductivos. Ya hemos visto que la capacidad potencial de autorreproducción crecía si se alargaba el estadio reproductivo. Ahora bien, en la esfera económica el criterio usual no es, por lo común, el de permitir una larga vida, sino el de conseguir bienes al menor coste posible. La aplicación de este criterio entraña, pues, problemas de dos órdenes: ¿cómo valorar?, ¿cómo se aplica el criterio y a quién beneficia?.

Como criterio de valoración utilizaremos el principio del input distinguido "contenido" o "embutido", pues ya hemos demostrado que dentro de ciertos límites y contextos el valor de un bien es proporcional a dicha magnitud.

Comenzaremos con un caso muy sencillo y ulteriormente iremos complicando el análisis. Supongamos, para empezar, que el conglomerado de procesos sobre el que ha de decidirse el momento del truncamiento en cada período usa la misma cantidad ID de input distinguido y que el valor de uso directo del bien V_i $(i \neq 0)$ es nulo, esto es que su valor económico depende exclusivamente de su valor de uso indirecto como generador de V_0.

Bajo estas hipótesis buscamos la longitud del proceso que nos da la mayor producción media, con lo que obtendremos el bien con un menor coste o gasto (g). Por tanto se truncará el proceso para el j tal que

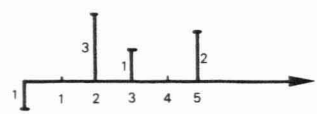
$$\mu_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{j} o_i - 1}{j} = \max_r \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} o_i - 1}{r} = \max_r \mu_r \ ; \qquad (6)$$

$$r = 1, 2, ..., n$$

o bien el j tal que

$$g_j = \frac{j.ID}{\sum_{i=1}^{j} o_i - 1} = \min_r \frac{r.ID}{\sum_{i=1}^{r} o_i - 1} = \min_r g_r \; ; \qquad r = 1, 2, ..., n \tag{7}$$

Conviene señalar que la solución puede no ser única. Por ejemplo, el caso de este género representado por



tiene solución óptima $(\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} o_i - 1}{j} = 1)$ para j = 2, 3 y 5.

13.– Eliminemos ahora el fuerte supuesto de que el gasto de input distinguido es constante por período y permitamos que sean cantidades diversas para casa fase vital. Representemos por el vector ID = $(ID_0, ID_1, ..., ID_{n-1})$ dichas cantidades. Con esta nueva condición ya no podemos usar el criterio que daba una mayor producción media (expresión (6)), pues hay que tener presente el gasto; el criterio idóneo es ahora del tipo "emplear el menor input posible por unidad neta obtenida". Este criterio nos lleva a una expresión similar a (7), esto es, a elegir el j tal que

$$g_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} ID_{i-1}}{\sum_{i=1}^{j} o_i - 1} = \min_r \frac{\sum_{i=1}^{r} ID_{i-1}}{\sum_{i=1}^{r} o_i - 1} = \min_r g_r \; ; r = 1, ..., n \tag{8}$$

Obsérvese que este criterio no es característico de un modo de producción determinado. Como regla general vale para cualquier sistema no despilfarrador. Se trata, pues, de un principio transistémico predicable como primera aproximación, y sobre el cual se injertarán eventualmente condicionantes de segundo rango.

Podemos alcanzar este mismo resultado por otra vía. Continuamos suponiendo que el valor de uso directo de V_i ($i \neq 0$) es nulo, por lo que si el truncamiento se hace en j, $p(V_j) = 0$. Las ecuaciones de producción del conglomerado de procesos valorando en input distinguido son entonces:

$$\left.\begin{array}{l} p(V_o) + k.ID_o = o_1.p(V_o) + p(V_1) \\ \quad\quad \cdots \\ p(V_{j-2}) + k.ID_{j-2} = o_{j-1}.p(V_o) + p(V_{j-1}) \\ p(V_{j-1}) + k.\,ID_{j-1} = o_j.p(V_o) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Sumando y simplificando determinamos el valor de V_0 como

$$p(V_o) = \frac{k \sum_{i=1}^{j} ID_{i-1}}{\sum_{i=1}^{j} o_i - 1}$$

Luego si el criterio de elección es "emplear el menor input posible por unidad neta obtenida", que aquí es equivalente a "producir V_0 lo más barato posible", tendremos que el truncamiento se hará por aquellos j tales que

$$g_j = \frac{\sum_{i=1}^{j} ID_{i-1}}{\sum_{i=1}^{j} o_i - 1} = \min_r \frac{\sum_{i=1}^{r} ID_{i-1}}{\sum_{i=1}^{r} o_i - 1} = \min_r g_r \; ; r = 1, \ldots, n$$

que es la misma condición señalada en (8).

14.– Examinemos ahora si se modificará la condición al considerar tasas de supervivencia no todas iguales a 1. Es claro que $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_{n-1} \geqslant s_n$ y supondremos que $s_n = 0$. La representación del conjunto de procesos en forma de líneas de producción diacrónicas es entonces:

$$\left.\begin{array}{lcl} V_0 & \longrightarrow & o_1 V_0 + s_1 V_1 \\ s_1 V_1 & \longrightarrow & o_2 V_0 + s_2 V_2 \\ \ldots & & \\ s_{n-2} V_{n-2} & \longrightarrow & o_{n-1} V_0 + s_{n-1} V_{n-1} \\ s_{n-1} V_{n-1} & \longrightarrow & o_n V_0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

En (10) se puede proceder como se ha hecho en (9) y se llega a una condición idéntica.

Quizá sea más clarificador sin embargo adoptar la visión de cohortes sincrónicas del tipo:

$$V_{i-1} \longrightarrow o_i + \frac{s_i}{s_{i-1}} V_i$$

donde

$$\widetilde{o}_i = \frac{o_i}{s_{i-1}}$$

Si empleamos estas nuevas variables, $\widetilde{o}_i$, la condición (8) será

$$g_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{j} ID_{i-1}}{\sum\limits_{i=1}^{j} s_{i-1}\, \widetilde{o}_i - 1} = \min_r \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} ID_{i-1}}{\sum\limits_{i=1}^{r} s_{i-1}\, \widetilde{o}_i - 1} = \min_r g_r$$

Estos resultados pueden tener alguna pertinencia para explicar comportamientos relacionados con seres reproductivos de larga vida, lo que puede ilustrarse con el caso de los olivos. Su lento crecimiento y una larga fase de madurez hacen que los correspondientes μ vayan creciendo durante mucho tiempo. Tierra y trabajo son los inputs cuasidistinguidos y tendían a disminuir por unidad de producto durante largos años. De ahí que se arrancaran raramente y se prefiriera proceder a podas y rejuvenecimientos.

15.– Hemos supuesto hasta el momento que la elección técnico-económica se reducía a truncar antes o después la vida del bien autorreproducible de referencia. Pero podría sospecharse que acaso fuera más económico producir con otra combinación de cohortes, diferente a la que hemos llamado "pirámide unitaria". En otras palabras, quizás con unos niveles de actividad $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ se produjera un output $Q\,B$ de forma tal que el coste, en input distinguido, de V_0 fuera menor.

Tal conjetura es inválida en un contexto de trayectoria no expansiva. En este caso, para cualquier proceso descrito por I y B de n períodos y que sea resultado de un correcto truncamiento, el $Q = (1, ..., 1)$ es el que da el mínimo coste en input distinguido, como vamos a ver.

Para todo Q factible ($QB \geqslant Q$) sabemos que (véase Barceló-Sánchez, 1986, sección 7)

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant ... \geqslant q_n$$

Por ser n el índice de trucamiento, por hipótesis de partida,

$$\frac{ID_0 + ... + ID_{j-1}}{o_1 - 1 + o_2 + ... + o_j} \geqslant \frac{ID_0 + ... + ID_{n-1}}{o_1 - 1 + o_2 + ... + o_n}, \forall j \leqslant n$$

Luego:

$$\frac{q_1\, ID_o + ... + q_n\, ID_{n-1}}{q_1 (o_1 - 1) + ... + q_n\, o_n} =$$

$$= \frac{q_n (ID_0 + ... + ID_{n-1}) + (q_{n-1} - q_n)(ID_0 + ... + ID_{n-2}) + ... + (q_1 - q_2) ID_0}{q_n (o_1 - 1 + ... + o_n) + (q_{n-1} - q_n)(o_1 - 1 + ... + o_{n-1}) + ... + (q_1 - q_2)(o_1 - 1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{ID_o + \ldots + ID_{n-1}}{o_1 - 1 + o_2 + \ldots + o_n}$$

como queríamos demostrar. Una cuestión distinta, y que queda pendiente de estudio, sería el caso de las trayectorias expansivas.

16.– Estudiadas algunas de las complicaciones derivadas de la posibilidad de truncamientos, podemos volver a las medidas sintéticas de reproducibilidad. Procede subrayar, en efecto, que tales medidas han sido referidas a conjuntos hipotéticos, pero también son predicables de los elementos del correspondiente conjunto referencial. Miden pues "propiedades hereditarias", predicables de los individuos y del conjunto. Recuérdese que, por el contrario, la temperatura no se predica de una molécula individual.

De ello se siguen al menos dos rasgos interesantes que conviene mencionar, la existencia de una media y una función de distribución de los valores individuales. Así, a posteriori, a cada bien autorreproductivo i de la especie económica J puede hacérsele corresponder un valor individual de la función τ ó μ , por ejemplo, $\tau_{J,i}$. El conocimiento de la "distribución" (histórica o probabilística) de estas funciones (o de las leyes biológicas, ecológicas o económicas a las que los individuos de dicha especie están sometidos) permite determinar una función de conjunto (histórica, hipotética o estimada) τ_J, para un lapso temporal T y un contexto C.

Así pues, al interpretar nuestros parámetros como valores medios, cabe estudiar sus funciones de distribución y sus medidas de dispersión, con lo que podemos introducir de forma sencilla y natural rasgos probabilísticos, a la vez que pasan a legitimarse en algunos casos los tratamientos en términos de matemática continua. En efecto, en los procesos que estamos estudiando no hay nunca continuidad propia en el plano individual; pero para algunas especies con poblaciones elevadas en las que los individuos no tengan funciones reproductivas simultáneas (en tiempo de calendario) puede darse una "densidad" suficiente para que sea lícito el uso de funciones agregadas continuas. Con frecuencia, sin embargo, las discontinuidades estarán implicadas por los ritmos estacionales biológicos. En definitiva, el caso discreto es el caso general genuino y la representación continua sólo es una simplificación legítima en casos particulares. Conviene puntualizar que en el fenómeno considerado se combinan dos elementos distintos, el tiempo de calendario y los intervalos propios, siendo el primero el decisivo para que no se dé continuidad aproximada en la función de reproducción agregada para poblaciones grandes.

17.– Por lo que hace al *dominio de valores* de τ y a la repercusión que según el orden de magnitud tiene sobre el sistema económico, puede señalarse indicativamente lo siguiente (con dimensión temporal ajustada a un año.

Aquellos bienes autorreproducibles cuya τ tuviera un valor numérico

$0 < \tau_V \leqslant 1$:	vendrían a ser poco compatibles con el sistema económico; dado que bloquean fuertemente la expansión tienden a ser eliminados ("destruidos" o "liberados") del catálogo de bienes económicos;
$1 < \tau_V \leqslant 10$:	son bienes cuyo valor económico está fuertemente afectado por las condiciones reproductivas;
$10 < \tau_V \leqslant 50$:	las condiciones reproductivas tienen incidencia valorativa no despreciable, pero limitada;
$50 < \tau_V \leqslant 200$:	las condiciones reproductivas tendrán muy poca incidencia económica;
$\tau_V > 200$:	las condiciones reproductivas carecen de influencia cuantitativa sobre el valor económico.

De todos modos conviene recalcar que en todos los casos los procesos autorreproductivos continuarán siendo *cualitativamente* fundamentales, aun cuando su incidencia cuantitativa sobre las valoraciones económicas fuera despreciable, al menos hasta que la ingeniería genética diera pasos gigantescos y llegara a ser capaz de recrear especies de seres vivos.

18.– Una manera sencilla de ilustrar y probar las anteriores afirmaciones consiste en analizar una ecuación de producción sintética del tipo que venimos utilizando:

$$\frac{1}{1+\tau_A}\, p_A + \frac{ID}{1+\tau_A} + \frac{S_A}{1+\tau_A} + \frac{e_A}{1+\tau_A} = p_A \qquad (12)$$

Dividiendo por p_A tenemos:

$$\frac{1}{1 + \tau_A} + \frac{ID/p_A}{1 + \tau_A} + \frac{S_A/p_A}{1 + \tau_A} + \frac{e_A/p_A}{1 + \tau_A} = 1 \qquad (13)$$

La idea básica surge de leer esta expresión como suma de imputaciones. Champernowne (1945, 14) y Sraffa (1960, 90) advirtieron que si τ_A es muy pequeño (0-1, por ejemplo) el bien en cuestión actúa como estrangulador del sistema, puesto que el primer sumando es dominante y todas las variables económicas deben ajustarse a esta restricción fuerte. Si τ_A se halla entre 1 y 9, ello significa que entre el 10 y el 50% del valor de p_A ha de atribuirse a reposición. Si uno cae en la cuenta de que durante muchos siglos bienes de primera necesidad tenían valores de τ situados en dicho entorno, resulta que con sólo el primer sumando –que depende de un parámetro primordialmente biotécnico– ya se podía "explicar" una porción destacada del valor del bien. El artificio del input distinguido permite reforzar la primera agarradera de forma que con los dos primeros sumandos se logra "explicar" en muchos casos del orden del 50-80% del valor final. Evidentemente para valores elevados de τ el primer sumando es cuantitativamente despreciable, por lo que afectará de forma minúscula al precio.

19.– Hemos mostrado que a los bienes autorreproducibles se les puede asociar una medida sintética de reproducibilidad (propia o específica), τ , magnitud que tiene como dominio de valores números algebraicos positivos. Intentemos, como colofón final, concebir ahora si pueden darse casos en los que tau sea igual o inferior a cero.

A primera vista un proceso productivo del que se obtenga como resultado lo mismo o menos de lo que ha entrado semejará sin duda una estrambótica actividad. Pero cuando se advierte que estamos fijando la mirada sobre bienes singulares que pueden estar ubicados en procesos encadenados y complejos, aquella eventualidad deja de ser tan chocante. En efecto, la tierra agrícola cultivada con las restituciones oportunas se convierte desde la óptica ahora asumida en un "catalizador" de los procesos productivos, al que puede asignarse una tau igual a cero, puesto que entra y sale sin mengua ni expansión.

Algo parecido ocurrirá con aquellos elementos perfectamente reciclables que bajo diferentes formas o combinaciones transitan por los procesos productivos y consuntivos y que, una vez convertidos en chatarra o basuras, son convertibles de nuevo en materia prima. El cobre o la plata acaso cumplan en buena medida esta condición. En tal caso a ellos también se les podría asignar una tau igual a cero.

Sin embargo, como advirtió atinadamente Georgescu-Roegen (1976, XVII-XVIII), siempre hay "pérdida de materia" por disipación de forma inevitable en todos los procesos transformadores. La observación es correcta y merece ser atendida. La dificultad no es irresoluble analíticamente. Si un camión contiene una tonelada de acero y, luego, de él convertido en chatarra, se pueden extraer 900 k de acero, al acero de este complejo de actividades se le podrá asociar una tau de -1/10, medida que ha de acompañarse con el lapso temporal correspondiente al conjunto de fases de existencia de dicho camión.

Finalmente, aquellos bienes que entran en los procesos productivos, pero que no son producidos y son destruídos irreversiblemente (carbón, petróleo) constituyen un caso especial e importante. A éstos se les puede asociar también un valor de τ, la cota inferior -1, indicativa de esa destrucción irreversible.

En definitiva, las tau constituyen indicadores tecnoeconómicos robustos, aceptablemente precisos y esclarecedores, que permiten agrupar ciertas actividades económicas (o subactividades) en bloques con significación teórica y práctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BARCELÓ, A. (1985a): "Teorema sobre bienes autorreproducibles". *Cuadernos de Economía,* vol. 13, n. 37, págs. 205-213.

BARCELÓ, A. (1985b): "Variantes del Teorema sobre bienes autorreproducibles". *Cuadernos de Economía,* vol. 13, n. 38, págs. 401-412.

BARCELÓ, A.; SÁNCHEZ, J. (1986a): "Extensiones del Teorema sobre bienes autorreproducibles". *Cuadernos de Economía,* vol. 14, n. 39, págs. 1-30.

CHAMPERNOWNE, D.G. (1945-46): "A note on J.v. Neumann's Article on 'A Model of Economic Equilibrium' ", *The Review of Economic Studies*, vol. 13, 10-18.

GEORGESCU-ROEGEN, N. (1976): *Energy and Economic Myths*. New York, Pergamon Press.

SRAFFA, P. (1960): *Production of Commodities by Means of Commodities.* Cambridge, Cambridge University Press.