Cuadernos de Economía Vol. 14. 1-30. 1986.

Extensiones del "Teorema sobre bienes autorreproducibles": Bienes que funcionan como capital fijo.

Alfons Barceló

Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, s/n – 08034 Barcelona

Julio Sánchez

Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragoza.
C/Doctor Cerrada, 1 – 50005 Zaragoza.

Extensiones del "Teorema sobre bienes autorreproducibles": Bienes que funcionan como capital fijo

RESUMEN

Este trabajo prosigue la investigación iniciada con el "Teorema sobre bienes autorreproducibles" (*Cuadernos de economía*, vol. 13, págs. 205-213), abordando el caso de los bienes con capacidad reproductiva multiperiódica. El objetivo consiste en hallar una relación valorativa entré bienes de edades prefijadas, conocidos los perfiles reproductivos de las especies y las cantidades de input distinguido común requeridas en las sendas fases vitales.

Con vistas a superar las dificultades que entraña el tratamiento vía producción conjunta, se introduce el concepto de "matriz específica" y se comprueba que T es el valor propio dominante de dicha matriz. Después se halla la expresión completa de la "matriz inversa específica". Se analizan también las relaciones entre vectores de excedente deseado y vectores de intensidad de los procesos.

Finalmente se obtiene una fórmula generalizada del teorema para los bienes autorreproducibles con ciclo multiperiódico. La relación valorativa hallada es igual al cociente de los respectivos productos del vector de excedente deseado por la inversa específica y por el vector de cantidades de input distinguido correspondiente a cada fase vital. Por último se proponen expresiones equivalentes en función del rendimiento reproductivo medio y del consumo medio de input.

Some Extensions on "A Theorem on Self-reproducing Goods": Commodities Acting as Fixed Capital

ABSTRACT

This paper pursues the research initiated in our "Theorem on Self-reproducing Goods" (*Cuadernos de Economía,* vol. 13, pp. 205-213). Now we tackle the case of goods endowed with multiperiod reproductive capacity. Our purpose is to find a ratio of value between goods of a given vintage if are known the reproductive features of species and the required amounts of common distinguished input for respective vital stages.

In order to overcome the short of problems involved in a joint production analysis the concept of "specific matrix" is introduced. It is proved that the parameter T is the maximal eigenvalue of such a matrix. Later on we proceed to calculate a full expresion for the "inverse specific matrix". Relations between desired surplus vectors and process intensity vectors are also explored.

In a further step we obtain a generalized formula of the theorem for self-reproducing goods with a multiperiod cycle. The ratio of value is found to be equal to a quotient whose numeratior is the product between desired surplus vector, inverse specific matrix and the vector fo distinguished input amounts required for good A, and whose denominator contents the same magnitudes referred to good B. Finally we suggest equivalent expressions as functions of average reproductive return and average input consumption.

Extensiones del "Teorema sobre bienes autorreproducibles": Bienes que funcionan como capital fijo.

0. Introducción

El teorema sobre bienes autorreproducibles, $\frac{P_A}{P_B} = \frac{\tau_B}{\tau_A} \cdot \frac{b}{a}$ (Barceló, 1985), establece una ley económica válida para pares de bienes utilizadores del mismo imput distinguido que operan como capital circulante y tienen el mismo lapso de maduración. Son ejemplos típicos de esta clase de bienes aquellos cultivos a base de semillas que tienen un período reproductivo de una sola fase y luego perecen: cereales y leguminosas satisfacen por lo común estas condiciones. Si se cumplen los supuestos estipulados, el "enunciado de ley" que hemos inventado permite calcular muy fácilmente una relación valorativa teórica que puede ser cotejada con cocientes de precios efectivos.

El objetivo de la presente investigación es estudiar desde la misma perspectiva general el caso de los bienes autorreproducibles que operan como capital fijo. Puesto que casi todos los cultivos arbóreos y animales domesticados tienen capacidad reproductiva multiperiódica, un tratamiento riguroso obliga a tener en cuenta la secuencia global de reproducción y envejecimiento de las sucesivas cohortes. Por consiguiente los procesos que ahora vamos a estudiar han de ser descritos mediante una serie de líneas de producción específicas del siguiente tenor:

* Una versión anterior de este trabajo fue presentada por J. Sánchez (con autorización de A. Barceló) al *X Simposio de Análisis Económico* (Barcelona, 25 de septiembre de 1985). Los autores quieren agradecer y hacer constar la colaboración de Cristina Carrasco.

$$
\begin{array}{lcl}
V_0 & \longrightarrow & o_1 V_0 \oplus V_1 \\
V_1 & \longrightarrow & o_2 V_0 \oplus V_2 \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
V_{n-2} & \longrightarrow & o_{n-1} V_0 \oplus V_{n-1} \\
V_{n-1} & \longrightarrow & o_n V_0
\end{array}
$$

donde $V_0, V_1, ..., V_{n-1}$ representan al bien autorreproducible de sucesivas edades y $o_1, ..., o_n$, las cantidades promedio (en tantos por uno) de bien de edad 0 generadas en cada uno de los sucesivos partos, posturas, desoves o cosechas. Supondremos que se producen de forma discreta en períodos de igual duración; esto no implica mengua de generalidad, porque los intervalos pueden establecerse de forma ajustada a las conveniencias teóricas o prácticas, lo que tiene simplemente como consecuencia que muchos o_t serían iguales a cero. Asimismo, para evitar algunas complicaciones, supondremos a lo largo de todo el trabajo que en su fase terminal (V_n) el bien (o su cadáver) tiene un valor económico nulo, lo que nos autoriza a prescindir de él por completo.

Al conjunto de estos procesos se les puede asociar una τ definida por medio de la relación:

$$1 = \sum_{t=1}^{n} \frac{o_t}{(1+\tau)^t}$$

Conocido el valor de τ , es fácil construir una *pirámide de población* ideal cuya estructura se mantenga intacta a lo largo del tiempo y genere "anualmente" un excedente homotético, esto es, cuyos componentes sean elementos de las distintas cohortes en proporciones balanceadas idénticas a las proporciones de partida y en cantidades iguales a τ veces la cantidad originaria hipotética. Dicha pirámide de población se comporta entonces (como un todo) del mismo modo que los bienes que operan como capital circulante. En consecuencia la ley conserva su validez cuando se aplica a un par de pirámides balanceadas correspondientes a bienes utilizadores del mismo input distinguido.

Sin embargo, esa extensión entraña una considerable mengua de capacidad operativa, dado que la relación de precios no se refiere ya a dos bienes claramente tipificados, sino a dos poblaciones estructuradas idealmente. Esto significa perder uno de los rasgos más atrayentes de la presunta "ley económica", a saber, el fácil cotejo de los resultados teóricos con los fenómenos reales a los que pretende dar explicación. En efecto, tales "bienes compuestos" de los que la ley predica una relación valorativa no constituyen, en general, objeto de intercambios, por lo que carecemos de las contrapartidas reales directamente observables. Conviene señalar, no obstante, que habría contrapartidas indirectas en caso de que las empresas llevaran un registro detallado con precios contables de todos los bienes intermedios o en vías de fabricación, o hubiera un amplio consenso sobre la fijación del justiprecio para los "bienes larvados" (vía primas de seguros y reglas para las indemnizaciones, por ejemplo).

En otras palabras, la versión "dura" del teorema nos permite calcular la relación de precios entre agrupamientos balanceados de gallinas y pavos o de almendros y avellanos, pero no entre el kilo de almendras y el kilo de avellanas, ni entre una gallina de seis meses y un pavo de doce meses. Nuestro objetivo es precisamente hallar alguna vía que nos permita obtener una relación de precios teóricos para casos de este tipo, sin abandonar la concepción y enfoque de partida.

En cualquier caso vale la pena buscar alguna vía de solución para abordar y superar los mencionados inconvenientes y limitaciones. Dentro del enfoque asumido, un camino que ofrece buenas perspectivas de alcanzar resultados es la utilización del artilugio de los "subsistemas" ideado por Sraffa, ajustado a nuestro problema mediante la noción de *pirámide generatriz*. Dicho en plan intuitivo, la idea que pretendemos exactificar es la siguiente: Hallar una "pirámide generatriz" (P^G) es equivalente a construir un rebaño, plantación o agrupamiento que se mantenga idéntico en tanto que totalidad y genere periódicamente un *excedente deseado* (E^D) específico. Desde luego, el agrupamiento ideal hipotético se conservará aun cuando los componentes individuales vayan envejeciendo y desapareciendo inexorablemente. No hace falta contorsionar gravemente nuestra imagen del mundo para concebir un bosque o rebaño con vida ilimitada sin necesidad de que los árboles o animales tengan una irreal eternidad.

En términos de transformaciones específicas este proceso global puede ser simbolizado así:

$$P^G \longrightarrow P^G \oplus E^D$$

Y en términos de valor, suponiendo un input distinguido (I), vamos a parar a una ecuación del siguiente género:

$$V(P^G) + I + R = V(P^G) + V(E^D)$$

donde R representa la suma de los demás inputs y la participación en el valor del excedente del sistema económico imputable a este proceso hipotético.

Nótese, de pasada, que si nuestro problema tiene solución, el tipo y cantidad de excedente deseado determinará la estructura y tamaño de la pirámide generatriz y que este tamaño y estructura determinarán la cantidad de input distinguido requerido.

Señalado el hilo conductor, nuestro plan expositivo será el siguiente. En primer lugar examinaremos un objeto modelo a través del cual se revelan algunas de las dificultades que pretendemos resolver. Luego procederemos a exponer un tratamiento formal y sistemático, en el cual aparecerá el concepto de *inversa específica* (que pertenece a la misma familia que la "inversa de Leontief"). Hallaremos la representación exacta y completa de esta inversa. A continuación sortearemos ciertos obstáculos que tienen que ver con el laberinto de la producción conjunta. Finalmente estableceremos una generalización del teorema sobre bienes autorreproducibles.

I. EXCEDENTES DESEADOS Y PIRÁMIDE GENERATRIZ

Vamos a mostrar sobre un ejemplo concreto la posibilidad y las dificultades de obtener ciertos tipos de "excedente deseado", utilizando la noción de "pirámide generatriz". Partiremos del ejemplo numérico expuesto en el *Apéndice* del "Teorema sobre bienes autorreproducibles". Se trata de unos seres vivos cuyas pautas de transformación pueden representarse mediante las siguientes líneas de producción restringidas que modelizan la vida tecnoeconómica de la especie:

$$V_0 \longrightarrow V_1$$
$$V_1 \longrightarrow 3V_0 \oplus V_2$$
$$V_2 \longrightarrow 2V_0$$

Mediante la fórmula de actualización se asocia a este conjunto de procesos una τ igual a 1. Por otra parte, aplicando el vector de intesidades $((1+\tau)^2, (1+\tau), 1)$ se obtiene la "pirámide balanceada", esto es:

$$\begin{aligned} 4V_0 &\longrightarrow 4V_1 \\ 2V_1 &\longrightarrow 6V_0 \oplus 2V_2 \\ 1V_2 &\longrightarrow 2V_0 \end{aligned}$$

de modo que inputs y outputs balanceados (I^B y O^B) son:

$$I^B = (4V_0, 2V_1, 1V_2)$$
$$O^B = (8V_0, 4V_1, 2V_2)$$

así que el correspondiente excedente específico (E^B) es

$$E^B = O^B - I^B = (4V_0, 2V_1, 1V_2)$$

lo que muestra que el proceso global hipotético tiene una tasa específica de excedente igual a 1. Cabe preguntarse –y más adelante responderemos afirmativamente a la cuestión– si la tau obtenida por la vía de actualización coincide siempre con la tasa específica de excedente de la pirámide balanceada.

Aunque estos resultados son atractivos, se hallan aquejados de una extrema rigidez. Nuestro problema, en consecuencia, es determinar la estructura del agrupamiento (la pirámide generatriz) de modo que el excedente periódico esté formado exclusivamente por V_0, o por V_1, o por V_2, o por cualquier combinación de ellos prefijada.

Por lo menos en algunos casos el problema tiene solución. Así, por ejemplo, para que el excedente deseado (E^D) esté compuesto exclusivamente por V_0, el vector de intensidades a aplicar a las líneas de producción específicas ha de ser colineal a (1, 1, 1). Con éste la pirámide generatriz sería del tipo $(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$ y $E^D = 4V_0$.

Si quisiéramos que E^D estuviera compuesto exclusivamente por V_1, el vector apropiado sería (5, 1, 1), con lo que $E^D = 4V_1$.

Pero si deseamos un excedente formado exclusivamente por V_2, topamos con que no es posible encontrar un vector de actividades adecuado, ya que el multiplicador (1, 1, 0) produce V_2, pero con la incongruencia de un exceso de reposición (sobrarían $2V_0$ por período). Desde el punto de vista matemático, esta incongruencia se manifiesta por una solución formal (1, 1, −1) que propone un proceso negativo, lo que carece de sentido económico.

Las complicaciones que este último caso acaba de revelar serán discutidas de forma general en las secciones 5 y 7.

II. La matriz específica

Una vez apuntado el género de problemas que vamos a afrontar conviene orientarse hacia un planteamiento formalizado. El álgebra matricial será el instrumento matemático idóneo para representar de modo compacto y preciso tanto la estructura de datos de que partimos como los objetivos perseguidos.

Cada conglomerado de procesos está formado por una secuencia de n líneas de producción específicas del siguiente tenor:

$$\begin{aligned} V_t &\longrightarrow V_{t+1} \oplus o_{t+1} V_0 \ ; \quad t = 0,1,\dots, n-2 \\ V_{n-1} &\longrightarrow o_n V_0 \end{aligned}$$

Supondremos que

$$o_1 + o_2 + \dots + o_n > 1$$

lo cual responde a la realidad usual y nos asegura que hay producción neta de V_0. Asimismo supondremos que

$$o_n > 0$$

pues nos interesa analizar la "vida reproductiva económica" y no la vida biológica.

Este conglomerado de procesos puede ser representado mediante matrices de inputs y outputs específicos (A y B respectivamente). Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,1\,0 \ldots 0 \\ 0\,0\,1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix} = I \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} o_1 & 1\,0 \ldots 0 \\ o_2 & 0\,1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ o_{n-1} & 0\,0 \ldots 1 \\ o_n & 0\,0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando un vector de intensidades Q obtenemos la siguiente representación compacta del conjunto de transformaciones:

$$QA \longrightarrow QB$$

con lo que las ecuaciones cuantitativas del output serán entonces:

$$QB = QA + E = QI + E$$

siendo E el vector de excedentes.

Nótese que como $B \geqslant 0$, existe un vector $Q^* \geqslant 0$ tal que $Q^* B = Q^* R_B$, donde R_B es la raíz de Frobenius de B y vale precisamente $1 + \tau$. Además, al ser $o_n \neq 0$, es fácil verificar que B es indescomponible, con lo cual el vector Q^* será mayor que 0; por otro lado, como $o_1 + \ldots + o_n > 1$, la raíz de Frobenius será mayor que 1. En definitiva, $\tau > 0$ y el proceso autorreproductivo en cuestión tiene capacidad expansiva. De forma compacta:

$$Q^* B = (1 + \tau)\, Q^* I > Q^*$$

Hechas estas consideraciones, definiremos como *matriz específica del bien autorreproducible V* (o *matriz específica*, a secas) a

$$M = B - A$$

El máximo valor propio real de la matriz específica es justamente τ, la *tasa específica de excedente*, y el vector propio normalizado de esta matriz asociado con dicha tasa es:

$$Q^* = ((1+\tau)^{n-1}, (1+\tau)^{n-2}, \ldots, (1+\tau), 1)$$

Comprobemos ahora que el valor de τ, como número que verifica la igualdad

$$1 = \sum_{1}^{n} \frac{o_t}{(1+\tau)^t}$$

encaja con la caracterización de τ como valor propio de M:

$$Q^* M = ((1+\tau)^{n-1}, \ldots, 1) \begin{pmatrix} o_1 & -1 & 1 & 0 \ldots 0 \\ o_2 & & -1 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ o_{n-1} & & 0 & 0 \ldots 1 \\ o_n & & 0 & 0 \ldots -1 \end{pmatrix} =$$

$$= ((1+\tau)^n \sum_{t=1}^{n} o_t (1+\tau)^{-t} - (1+\tau)^{n-1}, \tau(1+\tau)^{n-2}, \ldots, \tau) =$$

$$= \tau((1+\tau)^{n-1}, (1+\tau)^{n-2}, \ldots, 1) = \tau Q^*$$

La detección de esta propiedad constituye una confirmación del significado profundo del parámetro τ como *medida* de la capacidad reproductiva de los bienes autorreproducibles. Este último resultado demuestra, además, que para la familia de casos que estamos examinando existe siempre la "pirámide balanceada", como construcción hipotética.

III. MATRIZ DE SUPERVIVENCIA Y MATRICES ESPECÍFICAS

En la sección precedente hemos supuesto de forma implícita que las tasas de mortalidad eran nulas a lo largo de la vida económica ideal del bien autorreproductivo. Una mínima dosis de realismo aconseja relajar este supuesto. Expresaremos pues en forma compacta los procesos diacrónicos estándar para un ambiente tecnoeconómico dado, normalizando la cohorte inicial. Dichas transformaciones pueden ser expresadas mediante la siguiente tabla de líneas de producción específicas.

$$
\begin{array}{lcl}
V_0 & \longrightarrow & o_1 V_0 \oplus s_1 V_1 \\
s_1 V_1 & \longrightarrow & o_2 V_0 \oplus s_2 V_2 \\
\dots\dots & & \dots\dots \\
s_{n-1} V_{n-1} & \longrightarrow & o_n V_0
\end{array}
$$

donde $0 < s_t \leq 1, \qquad \forall\ t = 1, \dots, n-1$

Las correspondientes matrices autorreproductivas son:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & s_1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & s_{n-1} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} o_1 & s_1 & 0 \dots 0 \\ o_2 & 0 & s_2 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ o_{n-1} & 0 & 0 \dots s_{n-1} \\ o_n & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}
$$

Conviene resaltar que los coeficientes s_i tienen el carácter de índices de supervivencia respecto de la situación inicial (no deben confundirse con las tasas de supervivencia de la línea i) y que para grandes números y épocas determinadas es razonable considerarlos como datos. En consecuencia a la matriz A la denominaremos *matriz de supervivencia* y la representaremos por S.

Si efectivamente tales coeficientes pueden ser considerados como constantes durante ciertos períodos de tiempo, ha de ser factible representar la misma información por medio de procesos sincrónicos normalizados, a saber

$$\begin{array}{lcl} V_0 & \longrightarrow & o'_1\ V_0 \oplus s'_1\ V_1 \\ V_1 & \longrightarrow & o'_2\ V_0 \oplus s'_2\ V_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ V_{n-1} & \longrightarrow & o'_n\ V_0 \end{array}$$

cuyas matrices representativas serían

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B' = \begin{pmatrix} o'_1 & s'_1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & & & \\ o'_{n-1} & 0 & 0 \dots & s'_{n-1} \\ o'_n & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$$

siendo $o'_1 = o_1$, $s'_1 = s_1$, $o'_t = o_t/s_{t-1}$, $s'_t = s_t/s_{t-1}$ (para $t = 2, \dots, n-1$). En este caso los s'_t representan los índices de supervivencia de cada línea o proceso.

También los procesos anteriores pueden representarse de la manera que sigue:

$$\begin{array}{lcl} V_0 & \longrightarrow & o_1\ V_0 \oplus V'_1 \\ V'_1 & \longrightarrow & o_2\ V_0 \oplus V'_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ V'_{n-1} & \longrightarrow & o_n\ V_0 \end{array}$$

llamando V'_t a $s_t.V_t$, $t = 1, \dots, n-1$; para esta representación las matrices correspondientes son

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B'' = \begin{pmatrix} o_1 & 1\ 0 \dots 0 \\ o_2 & 0\ 1 \dots 0 \\ \dots & \\ o_{n-1} & 0\ 0 \dots 1 \\ o_n & 0\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

en las cuales han desaparecido formalmente los índices de supervivencia. Esto permite equiparar una situación con índices de supervivencia a otra en la cual no hay problemas de supervivencia.

A las matrices específicas $M = B-S$, $M' = B'-I$, $M'' = B''-I$ las llamaremos respectivamente *matriz específica diacrónica, matriz específica sincrónica y matriz específica estándar*[1] .

Las relaciones entre estas matrices son simples:

$$A' = S^{-1}\ A = I \ ;\ B' = S^{-1}\ B \ ;\ M' = B' \ - A' = S^{-1}\ M$$

$$A'' = S\,A'\ S^{-1} = AS^{-1} = I \ ;\ B'' = SB'\ S^{-1} = B\,S^{-1} \ ;$$

$$M'' = B'' - A'' = M\,S^{-1}$$

Los correspondientes vectores y valores propios dominantes también están fuertemente relacionados. Partiendo de $Q^*B' = (1+\tau)\,Q^*$, si definimos Y como $Y = Q^*\ S^{-1}$, $(Y\ S = Q^*)$, tenemos $Y\,B = (1+\tau)\,Y\,S$; si ahora multiplicamos por la derecha por S^{-1} se llega a $Y\,B'' = (1+\tau)\,Y$. En resumen:

$$Q^*\ B' = (1+\tau)\,Q^* \ ;\ Y\,B = (1+\tau)\,Y\,S \ ;\ Y\,B'' = (1+\tau)\,Y$$

son las relaciones buscadas.

Por último, vale la pena señalar que las relaciones formales entre esas diversas representaciones nos permiten afirmar que: a) B'' es indescomponible (y por lo tanto también lo son B y B'), dado que $o_n \neq 0$

1. Constructos equivalentes se conocen en demografía matemática con el nombre de "Matrices de Leslie" (Cf. Keyfitz, 1985, 136-38).

(por la caracterización del número de procesos aquí tomados en consideración); b) la τ es mayor que 0 (puesto que los bienes autorreproducibles cumplen la condición $o_1 + \dots + o_n > 1$), es la misma para las tres representaciones que modelizan el mismo fenómeno y esa τ verifica la ecuación $1 = \sum_{t=1}^{n} \frac{o_t}{(1+\tau)^t}$; c) los vectores de actividad asociados con τ son estrictamente positivos en los tres modelos, si bien difieren en sus componentes.

IV. La inversa específica

Tras estos dilatados prolegómenos ya estamos pertrechados para encarar nuestro problema central, a saber, la construcción de una pirámide generatriz que se reproduzca y de paso produzca un excedente deseado. Como base de partida utilizaremos la matriz específica diacrónica. Ya hemos demostrado que el cálculo de τ puede hacerse fácilmente a partir de los flujos de output (primera columna de la matriz B) actualizados con dicho parámetro.

También ha llegado el momento de tomar en cuenta expresamente al input distinguido. Los candidatos con más merecimientos para representar este papel en el género de casos que pretendemos modelizar son el trabajo directo y el alimento (que a veces puede ser sustituido por superficies de pastizales). Gracias a la flexibilidad formal de la representación matricial podemos tener en cuenta (sin incrementar en exceso la complejidad del problema) la utilización o consumo de diversas cantidades de input distinguido según la fase del ciclo vital del bien autorreproductivo. En definitiva, partimos de las siguientes líneas de producción restringidas:

$$1\, V_0 \oplus I_0 \longrightarrow o_1\, V_0 \oplus s_1\, V_1$$

$$s_1\, V_1 \oplus I_1 \longrightarrow o_2\, V_0 \oplus s_2\, V_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s_{n-1}\, V_{n-1} \oplus I_{n-1} \longrightarrow o_n\, V_0$$

Encontrar una pirámide generatriz, para un vector de excedente deseado E^D, es equivalente a hallar un vector fila de intensidades, Q, tal que

$$Q\,B = Q\,S + E^D$$

Evidentemente,

$$Q\,(B-S) = E^D \quad \text{y} \quad Q = E^D\,(B-S)^{-1}$$

o bien

$$Q\,M = E^D \quad \text{y} \quad Q = E^D\,M^{-1}$$

La *matriz inversa específica de autorreproducción* (o, más brevemente, la *inversa específica*) que acabamos de presentar aparece como una atractiva pieza analítica, forma parte de la misma familia que la inversa de Leontief y ciñe con datos precisos y objetivables a los bienes autorreproducibles que operan como capital fijo.

Pero antes de proseguir conviene asegurarse de la *existencia* de dicha matriz inversa. Puesto que se trata de una matriz cuadrada, basta comprobar que el determinante de **M** no es idénticamente nulo.

Cerciorémonos de ello. Sea $D_n = \text{Det}\,\mathbf{M}$ y D_j el menor principal de dicho determinante formado por las j primeras filas y las j primeras columnas. Desarrollando por filas obtendremos

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+1}\, o_n\, s_1\, s_2 \,..\, s_{n-1} - s_{n-1}\, D_{n-1} = \\ &= (-1)^{n+1}\, s_1 \,..\, s_{n-1}\, (o_n + o_{n-1}) + (-1)^2\, s_{n-2}\, s_{n-1}\, D_{n-2} = \\ &= (-1)^{n+1}\, s_1\, s_2 \,..\, s_{n-1}\, (o_n + ... + o_1 - 1) \neq 0 \end{aligned}$$

puesto que, por la caracterización de los bienes autorreproductivos,

$$o_1 + o_2 + \ldots + o_n > 1$$

y por la caracterización de los s_t

$$s_t > 0, \ \forall\, t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Pero además de demostrar la existencia podemos alcanzar un resultado mucho más sustancioso, a saber, la *expresión completa y concreta de* M^{-1}, $(M = B - S)$. Por el método de los adjuntos se obtiene:

$$M^{-1} = \frac{1}{o_1 + \ldots + o_n - 1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \frac{o_2 + .. + o_n}{s_1} & -\frac{o_1 - 1}{s_1} & -\frac{o_1 - 1}{s_1} & \cdots & -\frac{o_1 - 1}{s_1} & -\frac{o_1 - 1}{s_1} \\ \frac{o_3 + .. + o_n}{s_2} & \frac{o_3 + .. + o_n}{s_2} & -\frac{o_1 + o_2 - 1}{s_2} & \cdots & -\frac{o_1 + o_2 - 1}{s_2} & -\frac{o_1 + o_2 - 1}{s_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{o_{n-1} + o_n}{s_{n-2}} & \frac{o_{n-1} + o_n}{s_{n-2}} & \frac{o_{n-1} + o_n}{s_{n-2}} & \cdots & -\frac{o_1 + .. + o_{n-2} - 1}{s_{n-2}} & -\frac{o_1 + .. + o_{n-2} - 1}{s_{n-2}} \\ \frac{o_n}{s_{n-1}} & \frac{o_n}{s_{n-1}} & \frac{o_n}{s_{n-1}} & \cdots & \frac{o_n}{s_{n-1}} & -\frac{o_1 + .. + o_{n-1} - 1}{s_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Al existir la inversa, para cualquier E^D prefijado es posible calcular un vector de actividades Q, merced al cual obtenemos la pirámide generatriz buscada. Es preciso señalar, no obstante, que M^{-1} contendrá por lo común elementos negativos, lo que implica que Q pueda tener componentes menores que cero. Ello plantea una anomalía que debe de ser examinada de cerca.

V. LOS VECTORES DE INTENSIDADES

Mientras que un vector de intensidades compuesto por elementos positivos tiene un significado económico intuitivamente claro, ocurre precisamente lo contrario en caso de que aparezcan componentes negativos. Ante todo conviene, pues, identificar la raíz de esta eventualidad anómala. Es sabido que la condición necesaria estriba en la existencia de *producción conjunta*. Y quizá sea oportuno recordar que el único modo riguroso de tratar los bienes que operan como capital fijo es mediante esquemas de producción conjunta asumiendo la regla de Torrens-Von Neumann.

Centrémonos ya en nuestro asunto. De aquellos E^D del tipo $e_t = (0, ..., 0, \underset{(t)}{1}, 0, ..., 0)$ que se pueden obtener con un vector de intensidades $Q > 0$, diremos que se encuentran en situación de *producción conjunta débil*. Representan un caso en que mediante cierta combinación de procesos se logra aislar el bien de edad t como producto neto específico. Cuando ello no sea posible hablaremos de *producción conjunta fuerte*.

Ahora bien, si un elemento pertenece al género producción conjunta fuerte, pero se puede obtener en combinación con un elemento (o varios) del género producción conjunta débil, diremos que pertenece a la clase *producción conjunta fuerte indirectamente separable*, puesto que entonces será posible calcular por vía indirecta una valoración de aquel elemento del género producción conjunta fuerte. Esto es:

$$V(a V_0 \oplus V_t) = h$$

$$V(V_0) = p_0$$

$$\therefore V(V_t) = h - a.p_0$$

Que esta valoración indirecta sea o no pertinente desde un punto de vista económico, dependerá de la estructura de la demanda social relativa a las diversas cohortes del bien autorreproductivo.

En este sentido conviene resaltar que será siempre posible satisfacer alguna combinación de bienes de todas las edades (pues siempre existe un excedente balanceado asociado a $Q^* > 0$); por otro lado, V_0 es siempre un bien de producción conjunta débil (con $Q = (1, ..., 1)$ obtenemos un excedente de $(\sum^{n} o_t - 1)V_0)$. Pero, como se ha demostrado en la sección 1, hay casos en los que la solución formal conduce a vectores con elementos negativos. Puesto que no puede atribuirse sentido económico alguno a los "procesos negativos" implicados por un vector de intensidades con algún componente menor que cero, tal eventualidad formal ha de ser interpretada como reveladora de una situación cuya lógica es incongruente con las pautas del funcionamiento económico. La causa real de la antinomia radica en el conflicto potencial entre producción económica y capacidad reproductiva. El eventual conflicto está relacionado con la demanda de bienes "viejos" que no son producibles aisladamente.

Ahora bien, tal conflicto con frecuencia será solo subyacente o accesorio, porque puede quedar disuelto de muchas maneras (desde las faldas de castidad de los machos cabríos hasta el castramiento de los cerdos) o no ser un "conflicto económico" si las proporciones de consumo se mueven dentro de ciertos márgenes. Desde luego no es impensable una situación en la que el conflicto pudiera aparecer: imaginemos, por ejemplo, una economía en la que socialmente resulta asqueroso comer huevos a la vez que las gallinas son tan apreciadas como el caviar. En una trayectoria de estado estacionario el valor de los huevos sería 0, o ligeramente negativo si hubiera que deshacerse de ellos con algún coste, o con un precio de utilización positivo si fuesen aptos para fabricar pienso para las vacas lecheras.

Hechas estas consideraciones, cambiemos de perspectiva y establezcamos a partir del análisis de M^{-1} las condiciones para que se dé producción conjunta débil o para que exista la posibilidad de valoración indirecta. Por simple observación de las características de M^{-1} podemos asegurar (dado que $o_t \geqslant 0 \;\forall\; t$, y que $o_1 + ... + o_n > 1$) que:

i) M^{-1} será > 0, sólo si $o_1 + ... + o_{n-1} < 1$, lo que es posible aunque sea $o_1 + ... + o_n > 1$. Este es sin embargo un caso raro en los fenómenos que estudiamos, porque presupone que la tasa de reproducibilidad del bien es muy baja o que depende crucialmente del output del último período. En tales casos siempre existe un $Q > 0$ que permite obtener un excedente cualquiera E^D.

ii) Cada fila de M^{-1} representa las actividades Q_t necesarias para obtener $e_t = (0, ..., 0, \underset{(t)}{1}, 0, ..., 0)$; luego

a) siempre es posible obtener e_1. Basta usar $Q = (1, ..., 1)/$

$(o_1 + ... + o_n - 1)$; también puede comprobarse por simple observación de los procesos.

b) si $o_1 < 1$, hay también un $Q_2 > 0$ que produce $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$; si $o_1 = 1$, hay un $Q_2 \geqslant 0$.

c) si $o_1 + o_2 < 1$, hay un $Q_3 > 0$ que produce $e_3 = (0, 0, 1, 0, ...,0)$; si $o_1 + o_2 = 1$, hay un $Q_3 \geqslant 0$.

d) lo mismo sucesivamente hasta que sea $o_1 + ... + o_{r+1} > 1$.

iii) Cuando no haya un $Q_t > 0$ capaz de generar el e_t correspondiente, siempre habrá un Q'_t que generará un $E^D = (x_{1t}, 0, ..., 0, \underset{(t)}{1}, 0, ... 0)$ lo que permite por tanto la valoración indirecta del V_{t-1}. Los Q'_t en cuestión serán del tipo

$$\Big(\frac{1}{s_{t-1}} + \delta\ ,\ \frac{1}{s_{t-1}} + \delta\ , ...,\ \underset{(t-1)}{\frac{1}{s_{t-1}}} + \delta\ , \delta\ , ..., \delta\Big),$$

con $\delta \geqslant 0$

Queda así establecido que en nuestros procesos todo bien V_i se halla en situación de producción conjunta débil o bien de producción conjunta fuerte indirectamente separable.

VI. Ejemplo práctico

Para ilustrar algunos de los resultados que han ido apareciendo será bueno detenerse en un caso concreto. Adoptaremos como base de partida los datos del ejemplo de la sección 1.

Las matrices de inputs y outputs específicos son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La correspondiente matriz específica (M) es, pues:

$$M = B - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo valor propio (τ) es igual a 1 y cuyo vector propio es:

$$Q^* = ((1+\tau)^2, (1+\tau), 1) = (4, 2, 1)$$

La inversa específica (M^{-1}) es:

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

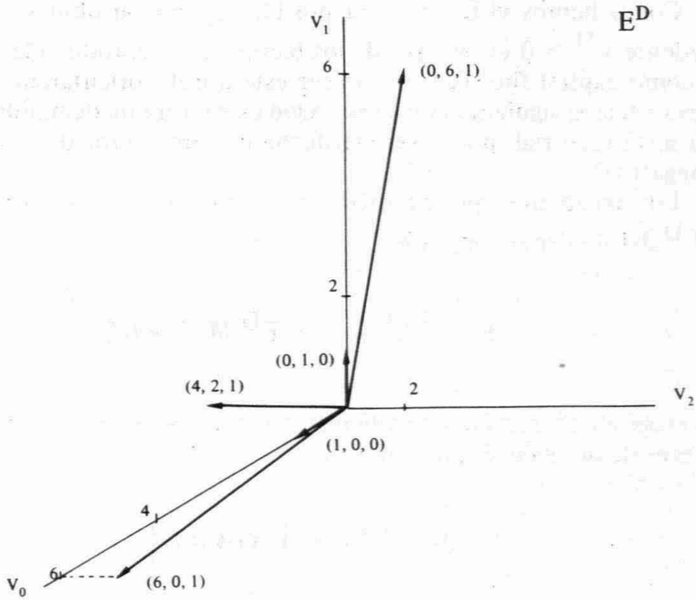
En este caso V_o y V_1 son bienes del tipo producción conjunta débil. Para obtener $e_1 = (1, 0, 0)$ hace falta un vector de intensidades $Q_1 = 1/4\ (1, 1, 1)$. Para $e_2 = (0, 1, 0)$, el vector apropiado es $Q_2 = 1/4\ (5, 1, 1)$.

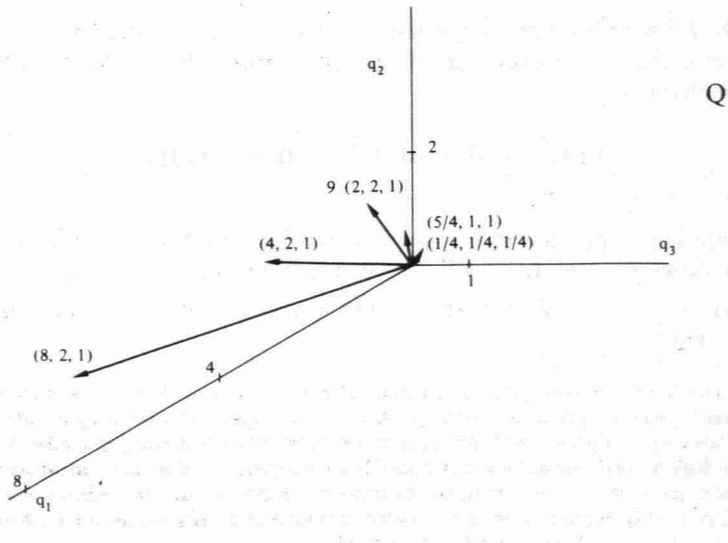
Al ser V_2 del tipo de producción conjunta fuerte, buscaremos un Q'_3 tal que genere un $E^D = (x_{13}, 0, 1)$, de modo que sea posible la valoración indirecta. El vector de intensidades (2, 2, 1) cumple los requisitos produciendo un excedente (6, 0, 1). Pero también cabe la producción conjunta de V_2 y V_1: llamemos Q_{23} al vector de intensidades que produce $e_{23} = (0, x_{23}, 1)$. Mediante operaciones elementales se obtiene: $Q_{23} = (8, 2, 1)$ y $e_{23} = (0, 6, 1)$.

Adviértase, por último, que el vector de intensidades $Q^* = (4, 2, 1)$ genera un vector de excedentes $E^D = (4, 2, 1)$.

Representemos gráficamente estos resultados:

Representemos gráficamente estos resultados:





VII. EXCEDENTES FACTIBLES CON VECTORES DE INTENSIDAD NO NEGATIVOS[2]

Como hemos visto, no será posible en general obtener cualquier excedente $E^D \geqslant 0$ en el caso de los bienes autorreproducibles que operan como capital fijo. Para esclarecer este asunto orientaremos nuestro interés hacia la siguiente cuestión: ¿Qué estructura de demanda del bien V, a nivel sectorial, podrá ser satisfecha con un vector de intensidades no negativo?.

Los excedentes que cumplan esta condición (E^S) son obviamente los E^D del siguiente conjunto:

$$E^S = \{ E^D \geqslant 0 \mid E^D M^{-1} \geqslant 0 \}$$

que están en correspondencia biunívoca con el subconjunto (Q^S) de los vectores de intensidad que cumplen

$$Q^S = \{ Q \geqslant 0 \mid QM \geqslant 0 \}$$

De E^S y Q^S puede asegurarse que son conos poliédricos con vértice en el origen de coordenadas respectivo. Son, además, transformado uno de otro por f:

$$f : Q^S \longrightarrow E^S \qquad (f(Q) = Q\,M)$$

Vale la pena llamar la atención sobre el hecho de que esta transformación posee un "vector fijo", que es precisamente el vector propio de la matriz específica M. En efecto, $Q^* = ((1 + \tau)^{n-1}, \ldots, 1)$ cumple $f(Q^*) = \tau Q^*$.

2. Los autores no hemos logrado ponernos plenamente de acuerdo acerca de si era mejor caracterizar los vectores adecuados como "positivos" o "no negativos". Ciertos argumentos económicos favorecen la opción "positivos"; por motivos formales y de mayor generalidad parecía preferible elegir la condición de "no negatividad". La discrepancia ha dado pie a un satisfactorio compromiso que engloba las dos posturas. La argumentación se acopla a la condición de no negatividad, pero en las fórmulas finales se introduce una variable de desplazamiento, δ, de forma que si $\delta > 0$ estemos en el caso general de positividad.

Para comprender mejor qué vectores hay en Q^S conviene observar que si $Q = (q_1, ..., q_n)$, como debe cumplirse $QM \geqslant 0$, deberá verificarse:

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant ... \geqslant q_{n-1} \geqslant q_n$$

$$q_1 (o_1 - 1) + q_2 o_2 + ... q_n o_n \geqslant 0$$

Luego las coordenadas de cualquier Q de Q^S son no crecientes en los índices, además de tener que cumplir la última inecuación. Esto asegura que los Q no negativos han de ser de los tipos $Q = 0$, $Q = (+ , + , ..., + , 0, ..., 0)$ y $Q > 0$.

El significado del caso $Q = 0$ es obviamente trivial y carece de interés económico, pues de la nada, nada sale. El caso $Q > 0$ no plantea tampoco ninguna dificultad de comprensión: todos los procesos del conglomerado coexisten y son perfectamente compatibles para determinadas proporciones del excedente deseado. Las complicaciones interpretativas aparecen con el caso $Q = (+ , ..., + , 0, ..., 0)$. A nivel sectorial esta eventualidad implica el truncamiento de la sucesión de procesos tomada como dato biotecnoeconómico, lo que siempre irá acompañado de una modificación de τ. De todos modos, puesto que $Q = (1, ..., 1)$ es admisible, para todo $Q \geqslant 0$ hay un $\tilde{Q} = Q + \delta\ (1, ..., 1) > 0$ tan próximo y parecido a él como queramos, por lo que podemos suponer que el grado de distorsión será generalmente despreciable.

Por otro lado la transformación f, que es lineal, también nos permite afirmar que los rayos extremos de Q^S se transforman en rayos extremos de E^S y viceversa. Apoyándonos en esto, bastará conocer los extremos de E^S para tener una caracterización completa tanto de E^S como de Q^S.

Habiendo examinado la matriz inversa sabemos que, si $o_1 + ... + o_{s-1} \leqslant 1$, el vector e_s es obtenible como excedente neto y que las actividades necesarias están representadas por la fila s de M^{-1}. Sea r el máximo índice que cumple tal propiedad. Indudablemente $e_1, ..., e_r$ son rayos extremos de E^S(y, como consecuencia, las r primeras filas de M^{-1} coinciden con vectores extremos de Q^S. Si $r = n$, ya tendríamos todos los extremos posibles, pero por lo común será $r < n$.

Si $r < n$, los vectores $e_{r+1}, ..., e_n$ no pertenecerán a E^S; pero puesto que

$$E^S = \{E^D \geqslant 0\} \cap \{E^D \mid E^D M^{-1} \geqslant 0\}$$

podemos asegurar que existen vectores

$$e_{ij} \begin{cases} \forall j = r+1, ..., n \\ \forall i = 1, ..., r \text{ que cumpla } o_1 + ... + o_{i-1} < 1 \end{cases}$$

tales que

$$e_{ij} = t_i e_i + t_j e_j \ , \ t_i, t_j > 0$$

y que pertenecen a la frontera de E^S.

Los e_{1j}, salvo factor de proporcionalidad, son los vectores anteriormente vistos $(x_{1j}, 0, ..., 0, \underset{(j)}{1}, 0 ... 0)$ que eran generados por los Q'_j (ahora Q_{1j}):

$$Q_{1j} = \left(\frac{1}{s_{j-1}}, \frac{1}{s_{j-1}}, ..., \underset{(j-1)}{\frac{1}{s_{j-1}}}, 0, ..., 0\right)$$

una combinación de la fila 1 y de la fila j de M^{-1}.

Los e_{ij}, salvo factor de proporcionalidad, son los vectores $(0, ..., 0, \underset{(i)}{x_{ij}}, 0, ..., \underset{(j)}{1}, 0, ..., 0)$ que son generados por $Q_{ij} = x_{ij} M_i^{-1} + M_j^{-1}$, donde M_t^{-1} es la fila t de la inversa y x_{ij} el más pequeño escalar positivo que hace que todas las componentes de Q_{ij} sean no negativas.

Es claro que entre los e_{ij} que acabamos de definir están todas las aristas del poliedro que no son del tipo $e_1, ..., e_r$. Aún podemos decir más: todos ellos son extremos porque ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de coeficientes positivos a partir de los restantes. Por consiguiente el número total de aristas del cono será

$$r + r\,(n-r), \text{ si } o_1 + o_2 + \ldots + o_{r-1} < 1$$

$$r + s\,(n-r), \text{ donde } s = \text{card } \{ j \mid o_1 + o_2 + \ldots + o_{j-1} < 1 \}$$

$$\text{si } o_1 + \ldots + o_{r-1} = 1$$

En resumen, hemos demostrado que los extremos de E^S son $e_1, \ldots, e_r$ y los e_{ij}, y que los excedentes factibles con vectores de intensidad no negativos son o bien combinaciones de bienes en situación de producción conjunta débil, o bien son combinaciones de éstos con bienes conjuntos del tipo $Q = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{x_{ij}}, 0, \ldots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0) + \delta\ (1, \ldots, 1)$ con $i \leqslant r$. El desplazamiento $\delta\ (1, \ldots, 1)$ con $\delta > 0$ asegura la positividad de Q. Todo ello confirma la proposición referente a que el eventual conflicto entre producción y reproducción tiene su base en los "bienes viejos" que se demandan y que no son producibles aisladamente.

VIII. Generalización del teorema sobre bienes autorreproducibles

Removidos todos los obstáculos que hemos encontrado en nuestro camino, podemos por fin abordar nuestro objetivo principal.

Sean dos bienes autorreproducibles (A y B) que operan como capital fijo y que requieren en sus procesos el mismo input distinguido I, expresado como vector columna y en función de los diferentes grupos de edad de las sendas matrices específicas (M_A y M_B). Sean E_A y E_B vectores de excedentes factibles cuya relación valorativa se pretende establecer. Sean Q_A y Q_B ($Q_A = E_A M_A^{-1}$; $Q_B = E_B M_B^{-1}$) los vectores de intensidad correspondientes. En tal caso las ecuaciones de producción expresadas de forma compacta y en términos de valor serán:

$$V(Q_A A_A) + Q_A I_A + R_A = V(Q_A B_A) = V(Q_A A_A) + V(E_A)$$

$$V(Q_B A_B) + Q_B I_B + R_B = V(Q_B A_B) = V(Q_B A_B) + V(E_B)$$

Si se multiplica la primera ecuación por $Q_B I_B$ y la segunda por $Q_A I_A$, a fin de igualar las cantidades de input distinguido en ambas, obtendremos –tras suponer que $Q_B I_B R_A$ es aproximadamente igual a $Q_A I_A R_B$, o que ambas representan cantidades de valor despreciables frente al input distinguido implicado– la expresión:

$$Q_B I_B V(E_A) = Q_A I_A V(E_B)$$

que también puede ser escrita como

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\frac{V(E_A)}{V(E_B)} \equiv \frac{E_A P_A}{E_B P_B} = \frac{E_A M_A^{-1} I_A}{E_B M_B^{-1} I_B}}$$

que es la buscada generalización del teorema sobre bienes autorreproducibles.

Inmediatamente podemos advertir que la demostración anterior abarca un dominio de validez más amplio que el de los excedentes factibles con vectores de intensidad no negativos. En efecto, la demostración es válida para todo par E_A, E_B con tal que se cumpla $E_A M_A^{-1} I_A \neq 0 \neq E_B M_B^{-1} I_B$. En particular, si A_i y B_j son bienes del tipo de producción conjunta fuerte indirectamente separable, también será válido escribir:

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\frac{P_{A_i}}{P_{B_j}} = \frac{(0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots 0) M_A^{-1} I_A}{(0, \ldots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \ldots 0) M_B^{-1} I_B}}$$

lo que viene a expresar que las valoraciones de dichos bienes no dependen de la forma conjunta en que se producen, sino del input distinguido que "contienen". En otras palabras, no es necesario que E_A y E_B sean producibles en forma conjunta débil o que tengan asociados Q no negativos. No obstante hemos juzgado que el precedente rodeo argumentativo tenía interés desde el punto de vista económico y merecía ser conservado.

Es claro el significado económico de estos resultados. Las fórmulas en cuestión sincronizan las capas de input distinguido requeridas para la producción neta de un bien específico y establecen una razonable relación valorativa. Nótese que si el trabajo es el input distinguido, estas expresiones nos conducen a los conocidos valores trabajo; pero su potencia teórica les permite afrontar también otros casos o encontrar atajos para llegar a un resultado preciso. Y uno de sus méritos principales continúa siendo la particularidad de que con poca información (e información objetiva e independiente) resulta posible comparar una razón teórica con la relación de precios efectivos.

IX. Un caso singular

Un caso especialmente destacado desde el punto de vista económico es el referido a excedentes del género $E^S = (\Sigma o_t - 1, 0, 0, ..., 0)$, con los que se hallan asociados vectores de intensidad del tipo (1, ..., 1). Para ilustrarlo con un ejemplo determinado podemos imaginar que nuestro objetivo es estimar la relación valorativa entre almendras y avellanas, conociendo los perfiles vitales, rendimientos medios y utilización de input distinguido por período de los correspondientes almendros y avellanos.

Llamemos *tasa de rendimiento medio específico* a μ, y definimos este nuevo parámetro de la siguiente forma:

$$\mu_A = \frac{\sum^{n} o_t^A - 1}{n}$$

$$\mu_B = \frac{\sum^{m} o_t^B - 1}{m}$$

Sea también $I'_A = \dfrac{\vec{1}\, I_A}{n}$ e $I'_B = \dfrac{\vec{1}\, I_B}{m}$

es decir, la media de input en el conjunto de procesos. Entonces, sustituyendo y operando en la fórmula generalizada del teorema, llegamos a

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\frac{P_{A_O}}{P_{B_O}} = \frac{I'_A}{I'_B}\,\frac{\mu_B}{\mu_A}}$$

Obtendremos resultados análogos si en vez de enfocar la atención sobre los "árboles representativos" examinamos el "bosque unitario". Designemos por $\tilde{\mu}_A$ y $\tilde{\mu}_B$ los rendimientos netos específicos por "pirámide unitaria" de A y de B. Por consiguiente:

$$\tilde{\mu}_A = \Sigma o_t^A - 1$$

$$\tilde{\mu}_B = \Sigma o_t^B - 1$$

Designemos por $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ la cantidad de "pirámides unitarias" de bien A y de bien B que se usan para una magnitud dada de input distinguido I. La relación entre $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ vendrá dada por

$$I = (\vec{1}.I_A).\tilde{a} = (\vec{1}.I_B).\tilde{b}$$

Con estos nuevos símbolos la fórmula generalizada (I) se convierte en

$$\frac{V(E_A)}{V(E_B)} = \frac{\tilde{\mu}_A P_A}{\tilde{\mu}_B P_B} = \frac{Q_A.I_A}{Q_B.I_B} = \frac{\vec{1}\, I_A}{\vec{1}\, I_B} = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}$$

Luego:

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{\frac{P_A}{P_B} = \frac{\tilde{\mu}_B}{\tilde{\mu}_A} \cdot \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}}$$

expresión que es formalmente similar a la ecuación del teorema para procesos de ciclos uniperiódicos de igual longitud.

La analogía de (IV) con la expresión originaria

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\tau_B}{\tau_A} \cdot \frac{b}{a}$$

es debida a que el caso que estamos considerando puede considerarse como un ciclo uniperiódico, de una sola entrada y una sola salida neta idéntica a la obtenida a lo largo del proceso multiperiódico, esto es, $\Sigma o_t - 1$.

Para acabar observemos que (IV) también admite otra representación. Sean i_A e i_B las magnitudes de input distinguido por unidad neta obtenida, es decir:

$$i_A = \frac{\vec{1}.I_A}{\tilde{\mu}_A}$$

$$i_B = \frac{\vec{1}.I_B}{\tilde{\mu}_B}$$

Sustituyendo en la expresión (IV) vamos a parar a

$$\text{(V)} \qquad \boxed{\frac{P_A}{P_B} = \frac{i_A}{i_B}}$$

que es otra forma de expresar el teorema y que realza la clara relación entre precios e input distinguido.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BARCELÓ, A. (1985), *Teorema sobre bienes autorreproducibles*, Cuadernos de economía, Vol. 13, págs. 205-213.

KEYFITZ, N. (1985[2]), *Applied Mathematical Demography*, Springer Verlag. New York.