CARMEN HERRERO BLANCO

Análisis de la existencia de soluciones con significado económico para sistemas lineales

0. Una de las cuestiones matemáticas que ha sido discutida con frecuencia en la literatura económica, es el análisis de la resolubilidad (o de la existencia de solución con significado económico) de ciertos sistemas de ecuaciones. Las condiciones bajo las cuales se puede asegurar la existencia, unicidad y positividad de tales soluciones han tenido fundamental interés en el desarrollo de gran parte de cuestiones dentro de la teoría económica (soluciones de modelos de producción multisectoriales, análisis de la existencia de equilibrio en mercados competitivos, problemas de convergencia y estabilidad de las soluciones de modelos dinámicos de producción o de consumo, etc.).

La característica común a casi todos los trabajos en esta línea la constituye el hecho de que las condiciones analizadas se han vinculado, en cada caso, a algún tipo o tipos concretos de modelos o problemas económicos.

En este trabajo se pretende realizar un análisis sistematizado de un amplio grupo de condiciones bajo las cuales se puede asegurar la resolubilidad (entendida como existencia de solución $z \geqslant 0$,[2]) de un tipo especial de sistemas lineales, del mismo número de ecuaciones que de incógnitas, de la forma $Bz = d$, con las características siguientes:

(i) B es una matriz de Metzler (es decir, $B = (b_{ij})$, $b_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$).

(ii) $d \geqslant 0$.

El análisis de las condiciones que garantizan la resolubilidad de un sistema de este tipo conlleva diversos tópicos asociados a la teoría de

1. Agradezco su colaboración y apoyo en las versiones y vicisitudes previas de este trabajo a I.J. Raneda, A. Villar., J.A. Silva, J.E. Peris y G. Torregrosa.

2. Las desigualdades $z \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. $z > 0$ indican, respectivamente, $z \in R^n_+$, $z \in R^n_+ - \{0\}$, y $z \in \mathrm{int}\, R^n_+$.

matrices semipositivas (açotación de raíces de Frobenius, condición Hawkins–Simon, dominancia de diagonales, etc.). Unas u otras de estas condiciones se encuentran recogidas en trabajos clásicos al respecto, como los de Debreu & Herstein (1953), McKenzie (1960), Lancaster 1968), Nikaido (1970), Takayama (1976) y Woods (1978). Por otra parte, los sistemas de estas características se encuentran claramente vinculados a modelos estáticos tipo Leontief.

La versión del problema que se presenta en este artículo consiste en una sistematización que se puede considerar original en cuanto al agrupamiento, simplificación y presentación de los resultados, encaminada básicamente al análisis del problema de la resolubilidad.

Comenzaremos, en esta introducción, planteando el modelo Leontief más simple, y los sistemas asociados a tal modelo, y asimismo enunciaremos el problema de la resolubilidad para tales sistemas. En el punto 1, analizaremos un grupo de condiciones relativas a la matriz de Metzler B, del sistema; en el epígrafe 2 se realiza un estudio específico de propiedades sobre las matrices semipositivas interindustriales que garantizan la resolución de los sistemas estáticos de cantidades y precios tipo Leontief; otras condiciones, relacionadas con la dominancia de diagonales, se recogen en el punto 3; finalmente, algunas consideraciones generales acerca de posibles extensiones y aplicaciones adicionales, junto con un resumen de los resultados obtenidos, se recogen en el punto 4.

* * *

Consideramos una economía que produce n mercancías mediante mercancías y trabajo homogéneo, en base a procesos productivos que verifican los siguientes supuestos:

1. Cada proceso productivo produce una única mercancía (producción simple). Todo el capital empleado es capital circulante.
2. El trabajo (que suponemos homogéneo) constituye el único input primario de la producción.
3. Prevalecen rendimientos constantes a escala.
4. No consideramos la existencia de sector público, ni de sector exterior.

Un proceso productivo constituye una especificación de los diferentes inputs requeridos para producir cierta cantidad de una mercancía determinada; teniendo en cuenta los supuestos establecidos, podemos escribir para la mercancía j-ésima

$$(a_{1j}, \ldots, a_{nj}), \ell_j \longrightarrow 1 \text{ unidad de } j$$

donde a_{ij} es la cantidad de mercancía i-ésima requerida para producir una unidad de mercancía j-ésima, y donde ℓ_j representa la cantidad de trabajo por unidad de j.

Si llamamos x_i al output total de la industria iésima, y si llamamos c_i a la demanda final de la mercancía i-ésima, la economía estará en equilibrio si se satisfacen las ecuaciones

$$(1) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + c_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

o bien, llamando $A = (a_{ij})$ a la matriz interindustrial, x al vector columna de los x_i, c al vector columna de los c_i, la ecuación (1) se escribiría, en notación matricial,

$$(1') \qquad x = Ax + c$$

o bien,

$$(i) \qquad (I-A)x = c$$

Consideraremos ahora el dual del sistema de cantidades, que será el sistema de precios de equilibrio.

Si llamamos p_i al precio del bien i-ésimo, el pago que debe realizar la industria j-ésima por los bienes empleados en producir una unidad de la mercancía j-ésima, viene dado por $\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}$. Además, si ℓ_j es la cantidad de trabajo homogéneo necesario para producir una unidad de la mercancía j-ésima y si $w \geqslant 0$ es el salario unitario, el coste de producción por unidad de output para la industria j-ésima será,

$$k_j = \sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{ij} + w\, \ell_j$$

y el beneficio por unidad de output para dicha industria será, $\pi_j = p_j - k_j$. Por su parte, la tasa de beneficio vendrá dada por $r_j = \pi_j / k_j$. Si prevalecen condiciones competitivas, en equilibrio la tasa de beneficio ha de coincidir en todos los sectores. Así, $r_j = r \geqslant 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$, y ha de satisfacerse

$$(2) \qquad p_j = (1+r) \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\, a_{ij} + w\, \ell_j \right] \quad (j = 1, \ldots, n)$$

o bien, llamando p al vector columna de los p_j, y ℓ al vector columna de los ℓ_j,

$$(2') \qquad p = (1+r)\,(A'p + w\ell)$$

ecuación que puede escribirse en la forma:

$$\text{(ii)} \qquad \left(\frac{1}{1+r} \; I - A'\right) p = w\ell$$

En relación con los sistemas (i) e (ii), el único dato conocido inicialmente es la matriz A y el vector de cantidades de trabajo ℓ, datos que describen los diversos métodos de producción. En el caso en que se pueda predecir, por una parte, la demanda final, c, y por otra, determinar la distribución (w, r) se plantea el problema, para el sistema (i), de determinar los niveles de output (x_i, i = 1, . . ., n) que harán que la economía esté en equilibrio y, para el sistema (ii), determinar el sistema de precios de equilibrio $p = (p_j)$, j = 1, . . ., n.

Una primera cuestión, en relación con el análisis de las soluciones de los sistemas (i) e (ii), es que la solución buscada ha de tener significado económico. No basta, en el sistema (i), que, dado c, exista x que satisfaga el sistema, sino que el vector x (cuyas componentes indican los niveles a que han de operar los procesos productivos), ha de ser tal que $x \geqslant 0$. Del mismo modo, para el sistema (ii), no basta que, dada la tecnología y la distribución, exista un p que satisfaga el sistema: hay que exigir que la solución del sistema (ii) sea $p \geqslant 0$.

Una característica común a los sistemas (i) y (ii) es que ambos tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Por otra parte, la matriz de coeficientes del sistema[3] (puesto que $A \geqslant 0$) verifica la propiedad de que los términos situados fuera de la diagonal principal son no positivos. Por último, los vectores de términos independientes[4] son (por su significado económico) de componentes no negativas. De este modo, si escribimos el sistema:

$$\text{(S)} \qquad Bz = d$$
$$\text{con } B = (b_{ij}), \text{ tal que } b_{ij} \leqslant 0 \text{ si } i \neq j, \; d \geqslant 0$$

los sistemas (i) e (ii) son casos particulares del sistema (S), y podemos plantear, de forma standard el objetivo que se pretende analizar en este trabajo, las condiciones bajo las cuales puede afirmarse la existencia de solución $z \geqslant 0$, para el sistema (S). En relación con este problema, partiremos de las dos definiciones siguientes:

3. Esto es, la matriz (I−A) para el sistema (i), y la matriz $\left(\frac{1}{1+r} I - A\right)$ para el sistema (ii).

4. Es decir, el vector c, para el sistema (i), y el vector $w\ell$ para el (ii).

DEF. 1. Diremos que el sistema (S) es *débilmente resoluble,* cuando, para algún $d > 0$, existe solución $z \geqslant 0$.

DEF. 2. Diremos que el sistema (S) es *fuertemente resoluble,* cuando, para todo $d \geqslant 0$, existe solución $z \geqslant 0$.

1. Este punto está dedicado al estudio de un primer grupo de condiciones que garantizan la resolubilidad (en el sentido especificado por las definiciones 1 y 2), del sistema (S). En este epígrafe, las condiciones que vamos a estudiar se refieren a la verificación de ciertas propiedades específicas por parte de la matriz de coeficientes del sistema, B. Concretamente, vamos a referirnos a tres condiciones sobre esta matriz: la verificación de la condición de Hawkins–Simon, el que B sea una P–matriz, y la existencia y semipositividad de B^{-1}. Comenzaremos recordando brevemente algunos de estos conceptos:

DEF. 3. Llamaremos *matriz de Metzler,* o *M-matriz,* a una matriz cuadrada $B = (b_{ij}) \ / \ b_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$.

DEF. 4. Una M-matriz B, verifica la *condición Hawkins-Simon* (abreviadamente (H–S)),[5] si todos los menores principales superiores izquierdos[6] de B, son positivos.

DEF. 5. Una M-matriz B, diremos que es una *P-matriz,* si todos[7] los menores principales de B son positivos.

De las definiciones se desprende inmediatamente que toda P-matriz verifica la condición (H-S). Además, el recíproco también es cierto, así como la equivalencia por parte de la matriz B de cualquiera de estas propiedades y la resolubilidad del sistema (S). Consideremos, pues, las condiciones siguientes:

(I) El sistema (S) es débilmente resoluble.
(II) El sistema (S) es fuertemente resoluble.
(III) La matriz B verifica la condición (H-S).
(IV) B es una P–matriz.

5. Hawkins–Simon (1949).

6. Esto es los menores que se obtienen suprimiendo las últimas filas y columnas de B:

$$B: \ b_{11} > 0, \ \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \ \begin{vmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} \\ \ldots \\ b_{n1} \ldots b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

7. Esto es, cualquier menor obtenido suprimiendo en B las filas y columnas que se deseen, con la única condición de que, cada vez que se ha suprimido una fila, se suprima también la columna que posee el mismo índice.

El teorema que sigue se refiere a la equivalencia entre las cuatro condiciones anteriores:

Teorema 1.– Dado el sistema (S), las condiciones (I), (II), (III), y (IV), son equivalentes.

Demostración:

Realizaremos la prueba mediante una cadena de implicaciones, resumida en el esquema siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & (I) \arrow[dr] & \\
(II) \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & (III) \\
 & (IV) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

II $\longrightarrow$ I, IV $\longrightarrow$ III son triviales.

I $\longrightarrow$ III: La prueba se realiza por inducción sobre el número de ecuaciones del sistema. Si el sistema $Bz = d$, débilmente resoluble, posee una única ecuación, sería del tipo $b_{11} z_1 = d_1$, y tendrá solución $z_1 \geqslant 0$ para un cierto $d_1 > 0$. Ello sólo es posible si $z_1 > 0$ y $b_{11} > > 0$. En estas condiciones, el único menor principal superior izquierdo de B, en este caso $b_{11} > 0$, por lo que B verifica (H–S).

Supongamos ahora la implicación cierta para sistemas con (k-1) ecuaciones, y veamos que, en estas condiciones, la implicación es cierta para sistemas con k ecuaciones. Sea el sistema $Bz = d$, con k ecuaciones débilmente resoluble. La 1ª ecuación será,

$$b_{11} z_1 + \ldots + b_{1k} z_k = d_1, \text{ de donde}$$

$b_{11} z_1 = d_1 - \sum_{j=z}^{k} b_{1j} z_j > 0$, ya que $d_1 > 0$, $b_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$ y $z_j \geqslant 0$, por la hipótesis de resolubilidad. De aquí se deduce que $b_{11} > 0$, lo que permite dividir por b_{11} y reducir el sistema a otro equivalente, del tipo:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} \ldots & b'_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b'_{k2} \ldots & b'_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d'_2 \\ \ldots \\ d'_k \end{pmatrix}$$

siendo $b'_{ij} = b_{ij} - \dfrac{b_{i1}}{b_{11}} b_{1j} \leqslant 0$ si $i \neq j$; $d'_i = d_i - \dfrac{b_{i1}}{b_{11}} d_1 > 0$ $(i = = 1, \ldots, k)$

En estas condiciones, el sistema de (k−1) ecuaciones $B'\begin{pmatrix} z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix} = $ $= \begin{pmatrix} d'_2 \\ \ldots \\ d'_k \end{pmatrix}$ es débilmente resoluble por serlo el inicial. Se puede aplicar la hipótesis de inducción, y tendríamos que B' verifica (H-S), por lo que todos los menores principales superiores izquierdos de B' serían positivos. Pero los menores principales superiores izquierdos de B se obtienen multiplicando los correspondientes de B' por el número $b_{11} > 0$. Así, son todos ellos positivos, esto es, B verifica (H-S), y está probada la implicación I III.

III II: La prueba se realiza, asímismo, por inducción sobre el número de ecuaciones del sistema (S).

Si sólo hay una ecuación, sería de la forma $b_{11}\ z_1 = d_1$. Si $b_{11} >$ > 0 y $d_1 \geqslant 0$, existe evidentemente una solución $z_1 = \dfrac{d_1}{b_{11}} \geqslant 0$. Por lo que el sistema sería fuertemente resoluble.

Supongamos la implicación cierta para sistemas con (k-1) ecuaciones, y veamos que también es válida para sistemas con k ecuaciones. Del mismo modo que antes, dado el sistema $Bz = d$ con k ecuaciones, se construye el sistema

$B'\begin{pmatrix} z_2 \\ \ldots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_2 \\ \ldots \\ d'_k \end{pmatrix}$ con k-1 ecuaciones. Por la relación existente entre los menores principales de B y B', en particular del hecho

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & \ldots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b'_{22} & \ldots & b'_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_{r2} & \ldots & b'_{rr} \end{vmatrix}$$ junto con ser $b_{11} > 0$ y

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & \ldots & b_{rr} \end{vmatrix} > 0, \text{ se sigue que } \begin{vmatrix} b'_{22} & \ldots & b'_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_{r2} & \ldots & b'_{rr} \end{vmatrix} > 0, \text{ por lo}$$

que B' también verifica (H-S) y se puede aplicar la hipótesis de inducción. En estas condiciones, si $d' \geqslant 0$, entonces $z_2 \geqslant 0, \ldots, z_k \geqslant 0$. Pero si $d \geqslant 0$, se sigue que $d' \geqslant 0$. La prueba de que $z_1 \geqslant 0$ es inmediata, observando que

$$z_1 = \frac{1}{b_{11}} \left[d_1 - \sum_{j=z}^{k} b_{1j} z_j \right] \geqslant 0$$

II $\longrightarrow$ IV: Sea T una matriz permutación.[8] Si $Bz = d$, se tiene que $TBz = TBT^{-1}\ Tz = Td$, ecuación que se puede escribir en la forma $TBT^{-1}\ y = e$, siendo $y = Tz$, $e = Td$. La matriz TBT^{-1} sigue siendo una M-matriz, si B lo es; además, la aplicación de una permutación T conveniente, consigue transformar una submatriz principal cualquiera de B, en una superior izquierda. La verificación II $\longrightarrow$ III significa que estas submatrices principales tienen menor positivo, que no cambia de signo al ser devuelto a su lugar. Por tanto, B es una P-matriz.

c.q.d.[9]

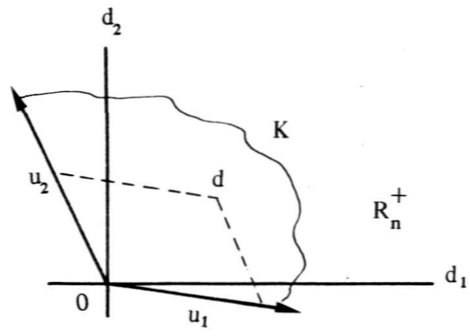
Es interesante destacar la importancia de la equivalencia entre las condiciones I y II implicadas en el teorema 1. El hecho de que la resolubilidad débil sea suficiente para asegurar la resolubilidad fuerte, es un resultado interesante desde el punto de vista económico. Supuesto el sistema de cantidades (i), si para unos ciertos niveles de demanda final $c > 0$, se ha encontrado la solución $x \geqslant 0$ de los niveles de output de equilibrio, la equivalencia de las condiciones I y II asegura la posibilidad de hallar niveles de output de equilibrio, siempre que no cambie la matriz interindustrial A, para cualesquiera otro niveles de demanda final.

Daremos, a continuación una interpretación geométrica de la verificación de la condición II. Si llamamos $u_1, \ldots u_n$ a los vectores columna de la matriz B, la resolubilidad fuerte del sistema (S) indica que, dado cualquier $d \in R^n_+$, existen números $z_1, \ldots, z_n$ todos ellos no negativos, tales que $d = z_1 u_1 + \ldots + z_n u_n$. Esto es, d es combinación lineal no negativa de los vectores $u_1, \ldots, u_n$, o, dicho de otro modo, d está incluido en el cono engendrado por los vectores $u_1, \ldots, u_n$.[10] Una imagen geométrica, para $n = 2$ de esta situación se puede observar en la figura:

8. $T = (t_{ij})$ es una matriz permutación si $t_{\sigma(j)j} = 1$ (resp. $t_{i\sigma(i)} = 1$) y $t_{ij} = 0$ para todo $i \neq \sigma(j)$ (resp. $t_{ij} = 0$ para todo $j \neq \sigma(i)$), siendo σ una permutación de los índices $1, \ldots, n$.

9. Las líneas generales de esta prueba se deben a NIKAIDO (1970). La prueba inicial de este teorema se realizó con las restricciones (i) $b_{ii} > 0\ \forall i$ (ii) $b_{ij} < 0$ si $i \neq j$ (iii) $d > 0$.

10. Se llama cono engendrado por un conjunto de vectores $v_1, \ldots v_p \in R^n$ al conjunto $K(v_1, \ldots, v_p) = \{ x \in R^n \ /\ x = a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p,\ a_1, \ldots, a_p \geqslant 0 \}$.



Observaremos ahora que, aunque no está indicado explícitamente en el enunciado del teorema 1, la verificación de cualquiera de las condiciones equivalentes I, II, III ó IV, asegura no sólo la existencia de solución $z \geqslant 0$ para el sistema (S), sino también la unicidad de tal solución. Ello se debe a que la condición (H-S) asegura que el sistema (S) es un sistema de Cramer, ya que det $B > 0$, y por tanto es no nulo. La matriz B es, en estas circunstancias, una matriz regular, por lo que está definida su inversa, B^{-1}.

Vamos a añadir ahora una nueva condición, relacionada con la resolubilidad de nuestro sistema (S), que se refiere al hecho de la existencia de B^{-1}, y a que B^{-1} sea semipositiva.

(V) Existe B^{-1}, y $B^{-1} \geqslant 0$.

En el teorema que sigue, se afirma la equivalencia entre la condición (V) y el bloque de condiciones equivalentes I-IV.

Teorema 2.– Dado el sistema (S), la condición (V) es equivalente a cada una de las condiciones (I), (II), (III), (IV).

Demostración:

Probaremos que (V) implica una cualquiera de las condiciones equivalentes I-IV, y que es, a su vez, implicada por ella. Utilizaremos la condición II.

V $\longrightarrow$ II: Es trivial, pues si existe B^{-1}, la solución del sistema (S) será, para cada d, $z = B^{-1} d$. Si $B^{-1} \geqslant 0$, es claro que $z \geqslant 0$ para cada $d \geqslant 0$, por lo que (S) es fuertemente resoluble.

II V: Según hemos comentado, la equivalencia entre II y III permite afirmar la existencia de B^{-1}. La solución del sistema se obtiene entonces, para cada d, por $z = B^{-1}d$. La verificación de la condición II asegura que $z \geqslant 0$ para cada $d \geqslant 0$. Sea $d = e_i$, i-ésimo vector de la base canónica.[11] El producto $B^{-1}e_i$ (que es un vector $\geqslant 0$, por la condición II) es, precisamente el i-ésimo vector columna de B^{-1}. Así pues, todos los elementos de B^{-1} son no negativos, y se verifica V.

c.q.d.

2.– En este punto vamos a referirnos, específicamente, a los sistemas (i) e (ii), que son casos particulares del sistema (S), con la peculiaridad de que en ellos, la matriz de Metzler B ha sido construida a partir de una cierta matriz semipositiva A (matriz que, desde el punto de vista económico es la matriz interindustrial, cuyos elementos describen los procesos de producción de la economía).

Comenzaremos el estudio haciendo referencia al sistema (i), encontrando dos condiciones sobre la matriz A que van a garantizar la resolubilidad de tal sistema. Posteriormente, pasaremos al análisis del sistema (ii), y extenderemos a él los resultados obtenidos, interpretando económicamente las cotas y límites que aparecen en el estudio de este sistema.

Consideremos el sistema (i). En él, la M-matriz del sistema, B, es la diferencia $B \equiv I\text{-}A$, $A \geqslant 0$. No hay que olvidar que, para el sistema (i), tenemos 5 condiciones equivalentes que garantizan la resolubilidad de este sistema, las condiciones I-V analizadas en el epígrafe 1 (ya que (i) es un caso particular de (S)).

La igualdad formal

$$(I\text{-}A)\,(I+A+A^2+\ldots+A^p) = I+A+A^2+\ldots+A^p-A-A^2-\ldots-A^{p+1} =$$

$$= I-A^{p+1}$$

indica que, en el supuesto de que la serie de matrices $I+A+A^2+\ldots$ fuera sumable, el paso al límite conduciría a [12]

$$(I-A)\,(I+A+A^2+\ldots) = I$$

11. e_i es el vector de R^n que tiene todas sus componentes nulas, salvo la que ocupa lugar i-ésimo, que es la unidad.

12. Ya que la convergencia de la serie $I+A+A^2+\ldots$ implica que $\lim_{p\to\infty} A^p = 0$.

lo que significaría que, en este caso, la serie de matrices $I + A + A^2 + \ldots$ tendría como suma, precisamente, la inversa de $(I - A)$, esto es, la inversa de B. Así, la convergencia de la serie de matrices, permite escribir:

$$(I-A)^{-1} = B^{-1} = I + A + A^2 + \ldots$$

La fórmula anterior, por otra parte, aseguraría la no negatividad de B^{-1},[13] con lo que aparece claramente el entronque entre la condición (V), para el sistema (i), y la convergencia de la serie de matrices $I + A + A^2 + \ldots$ Las condiciones que vamos a estudiar, en relación a la resolubilidad del sistema (i), sobre la matriz A, son condiciones que van a garantizar, simplemente, la convergencia de la serie de matrices $I + A + A^2 + \ldots$

Una condición necesaria para la convergencia de la serie de matrices es que $\lim A^p = 0$. Por otra parte, al ser $A \geqslant 0$, esta condición va a ser, como veremos, suficiente. Además, la verificación de la condición $\lim A^p = 0$, está ligada a la acotación en módulo por la unidad de todos los autovalores de A. Por otra parte, al ser A semipositiva, posee un autovalor especial, llamdo "raíz de Frobenius de A",[14] que tiene la propiedad de acotar en módulo a todos los restantes autovalores de A, de modo que, la acotación por la unidad de la raíz de Frobenius de A será condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie de matrices. Hechos estos comentarios, consideramos las definiciones siguientes:

DEF. 6. Una matriz cuadrada A, se dice *convergente* si y sólo si $\lim\limits_{p \to \infty} A^p = 0$.

DEF. 7. Una matriz cuadrada semipositiva A, se dice *productiva* si $\lambda^*(A) < 1$, siendo $\lambda^*(A)$ la raíz de Frobenius de A.

Consideremos, entonces, las dos condiciones siguientes sobre la mariz semipositiva A:

$(VI)_i$ La matriz A es convergente.

$(VII)_i$ La matriz A es productiva.

13. Al ser suma de matrices semipositivas. Es de destacar, por otra parte el interés de esta igualdad desde el punto de vista computacional.

14. Véase DEBREU & HERSTEIN (1953), para un análisis de la existencia y propiedades de esta raiz de Frobenius. Véase también el teorema 4 de este epígrafe.

El teorema que sigue afirma la equivalencia entre las condiciones VI_i, VII_i y el grupo I - V, para el sistema (i):

Teorema 3. Dado el sistema (i) $Bx = c$, donde $B = I-A$, A cuadrada semipositiva, las condiciones VI_i y VII_i son equivalentes entre sí, así como equivalentes también a cada una de las condiciones I, II, III, IV y V.

Demostración:

El esquema de razonamiento que seguiremos para probar las equivalencias será el siguiente:

$$V \longrightarrow VII_i \longrightarrow VI_i \longrightarrow V$$

la equivalencia entre las condiciones I–V hace que esta cadena sea suficiente para probar el teorema.

$V \longrightarrow VII_i$: Por hipótesis, existe $B^{-1} \geqslant 0$. La existencia de B^{-1} indica que $\det(I-A) \neq 0$, por lo que 1 no es autovalor de A. Veremos que $\lambda^*(A) < 1$. Asociado a $\lambda^*(A)$ (que es real y no negativo), podemos encontrar un autovector $x^* \geqslant 0$.[15] Por tanto, podemos escribir:

$$Ax^* = \lambda^*(A)x^*$$

de donde se obtiene,

$$(I-A)x^* = (1-\lambda^*(A))\, x^*$$

y, premultiplicando por $(I-A)^{-1}$, que por hipótesis existe y es semipositiva, se tiene,

$$x^* = (1-\lambda^*(A))\ (I-A)^{-1}\, x^*$$

En esta última igualdad, alguna componente de x^* ha de ser estrictamente positiva. La igualdad sólo puede darse si el coeficiente $(1-\lambda^*(A)) > 0$, esto es, si $\lambda^*(A) < 1$, por lo que la matriz A es productiva.

$VII_i \longrightarrow VI_i$: Si $\lambda^*(A) < 1$, entonces $|r_i| < 1$, para todo r_i autovalor de A. En estas condiciones, si llamamos J a la forma canónica de

15. Ver DEBREU & HERSTEIN (1953), o HERRERO & SILVA (1984).

Jordan[16] semejante a A, se tiene que $\lim_{p\to\infty} J^p = 0$, y como $A^p = TJ^p T^{-1}$, siendo T la matriz regular de paso, se tiene que $\lim A^p = 0$, esto es, A es convergente.

$VI_i \longrightarrow V$: Si A es convergente, J es también convergente, y la serie $I+A+A^2+\ldots$ converge si y sólo si lo hace la serie $I+J+J^2+\ldots$ Pero la convergencia de esta última está ligada a la convergencia a cero de todas y cada una de las series numéricas $1+r_i+r_i^2+\ldots$, para cada r_i autovalor de A, convergencia que está asegurada por la acotación en módulo por la unidad de cada uno de los r_i, condición que se verifica por la productividad de A.

c.q.d.

Con el teorema que acabamos de probar, tenemos un grupo de 7 condiciones necesarias y suficientes para la resolubilidad del sistema (i). En lo que sigue vamos a encontrar algunas condiciones específicas que garanticen, asímismo, la resolubilidad del sistema (ii), relativas a la matriz A. El análisis de tales condiciones conlleva la realización de algunas observaciones adicionales que servirán para obtener una nueva caracterización de la raíz de Frobenius de A (teorema 4), como paso previo al análisis del sistema de precios de equilibrio (ii).

Si la matriz semipositiva A es convergente, y si ρ es un número positivo, $\rho > 1$, es evidente que entonces la matriz $\frac{1}{\rho}A$ es también convergente.[17] Pero, por la relación

$$I - \frac{1}{\rho}A = \frac{1}{\rho}(\rho I - A)$$

y debido a la equivalencia de las condiciones "$\frac{1}{\rho}A$ convergente" y "existe la inversa de $(I - \frac{1}{\rho}A)$, y esta inversa es semipositiva", que se deducen trivialmente del teorema 3, se tiene que, en el caso de que A sea convergente, no sólo existe y es semipositiva la inversa de $(I-A)$, sino también existe y es semipositiva la inversa de $(\rho I-A)$, si $\rho > 1$.

Consideremos entonces el conjunto

16. Utilizamos en este razonamiento la forma de Jordan compleja. Ver BELLMANN (1965).

17. Ya que, si $\lim_{p\to\infty} A^p = 0$, con mayor motivo $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{\rho^p} A^p = 0$, al ser $\rho > 1$.

$$H(A) = \left\{ \rho \in R_{+} \ / \text{ existe } (\rho I - A)^{-1} \text{ y } (\rho I - A)^{-1} \geqslant 0 \right\}$$

El teorema que sigue recoge algunas propiedades del conjunto H(A).

Teorema 4. Sea A una matriz cuadrada semipositiva, y sea el conjunto $H(A) = \{ \rho \in R_{+} \ / \text{ existe } (\rho I - A)^{-1} \geqslant 0 \}$. En estas condiciones:

(i) $H(A) \neq \emptyset$

(ii) Si $\rho \in H(A)$ y $\sigma > \rho \implies \sigma \in H(A)$.

(iii) $\lambda^*(A) = \inf H(A)$.

(iv) $\lambda^*(A) \notin H(A)$.

Demostración:

(i) $H(A) \neq \emptyset$ porque siempre existe algún $\rho > 0$ para el cual la matriz $\frac{1}{\rho}A$ sea convergente, por ser los elementos de A no negativos y en cantidad finita (n x n). Por la equivalencia entre las condiciones I-VII para sistemas del tipo (i), para este $\rho > 0$, existe la inversa de $(I - \frac{1}{\rho}A)$, y es semipositiva, por lo que también existe la inversa de $(\rho I - A)$ y es, asímismo, semipositiva. Tal ρ, por tanto, está en el conjunto H(A).

(ii): Trivial.

(iii): Por ser H(A) no vacío y acotado inferiormente (ya que H(A) está contenido en R_{+}), posee ínfimo. Sea $\gamma = \text{ínf } H(A)$. Vamos a ver que $\gamma = \lambda^*(A)$.

Si $\delta \in H(A)$, $(I - \frac{1}{\delta}A)^{-1}$ existe y es semipositiva, por lo que (debido a la equivalencia entre la condición V y la II para el sistema (S)), el sistema $(I - \frac{1}{\delta}A)\,x = c$ es fuertemente resoluble. De aquí se deduce que es posible encontrar un $x \geqslant 0$ tal que $(I - \frac{1}{\delta}A)x \geqslant 0$, o lo que es igual, existe un $x \geqslant 0$ tal que $\delta\, x \geqslant Ax$, de donde se deduce que $\delta > \lambda^*(A)$.[18] $\lambda^*(A)$ es, por tanto, una cota inferior de H(A).

18. La caracterización empleada aquí de la raiz de Frobenius de A, sigue la línea desarrollada en NIKAIDO (1970). Concretamente, la propiedad que se aplica es la siguiente: Si existe un $x \geqslant 0$, tal que $Ax \leqslant \mu x$, entonces se tiene que $\lambda^*(A) < \mu$. Por otra parte, la vinculación entre la semipositividad de $(\rho I - A)^{-1}$ y el que $\rho > \lambda^*(A)$, fue estudiada inicialmente por WIELANDT (1950). La línea de entronque seguida aquí está inspirada en la prueba de WIELANDT, y puede verse en GANTMACHER (1959) o en TAKAYAMA (1976).

Por otra parte, si $\lambda^*(A) < \delta$, entonces $\lambda^*(A)\, x^* = A\, x^* \leqslant \delta x^*$, siendo x^* el autovector $x^* \geqslant 0$ asociado a $\lambda^*(A)$. De aquí se sigue que $\delta \in H(A)$, por lo que inf $H(A) = \lambda^*(A)$.

(iv): Al ser $\lambda^*(A)$ un autovalor de A, el determinante det $(\lambda^*(A)I - A) = 0$, por lo que no existe la inversa de $(\lambda^*(A)\, I - A)$, y $\lambda^*(A) \notin H(A)$.

c.q.d.

El análisis de las condiciones que aseguran la resolubilidad del sistema (ii), exige la obtención previa de los valores del parámetro r compatibles con la obtención de soluciones con significado económico para tal sistema. De acuerdo con el teorema 4, la resolubilidad del sistema (ii) está vinculada al hecho de que $\frac{1}{1+r} \in H(A)$, pues sólo en este caso se tendría asegurada la existencia de $(\frac{1}{1+r}\, I - A)^{-1}$, así como la semipositividad de dicha inversa, condición que, por el teorema 3 es necesaria y suficiente para la resolubilidad de (ii).

Pero, según el teorema 4, la condición $\frac{1}{1+r} \in H(A)$ equivale al hecho de que $\frac{1}{1+r} > \lambda^*(A)$, esto es, formalmente si

$$-1 < r < \frac{1}{\lambda^*(A)} - 1$$

Por otra parte, debido al significado económico del parámetro r (tasa de beneficio uniforme), se verificará $0 \leqslant r$, por lo que los valores de r que permiten la resolubilidad del sistema de precios de equilibrio (ii), con significado económico, serán

$$0 \leqslant r < \frac{1}{\lambda^*(A)} - 1$$

Para cualquier r situado en el intervalo anterior, se tienen los siguientes resultados:

I_{ii}: El sistema (ii) de precios de equilibrio es débilmente resoluble. Esto es, existe un cierto vector de cantidades de trabajo homogéneo, $\ell > 0$, para el cual existe una solución $p \geqslant 0$.

II_{ii}: El sistema (ii) es fuertemente resoluble. Esto es, dado cualquier vector $\ell \geqslant 0$, existe solución $p \geqslant 0$ del sistema.[19]

III_{ii}: La matriz $B(r) = (\frac{1}{1+r} I - A)$, verifica la condición (H–S).

IV_{ii}: La matriz $B(r) = (\frac{1}{1+r} I - A)$, es una P-matriz.

V_{ii}: Existe la inversa de B (r), $(\frac{1}{1+r} I - A)^{-1}$; y es semipositiva.

VI_{ii}: La matriz $(1 + r) A$ es convergente.

VII_{ii}: La matriz $(1+r) A$ es productiva.

3. En este epígrafe volvemos de nuevo sobre el sistema standard (S) para encontrar una condición adicional que garantice la resolubilidad de tal sistema general. La condición adicional que vamos a estudiar aquí se refiere al hecho de que la matriz del sistema, B, posea diagonal dominante en sentido amplio (o en sentido de McKenzie). Comenzamos recordando este concepto:

DEF. 8. Se dice que una matriz cuadrada $C = (c_{ij})$ posee *diagonal dominante en el sentido de McKenzie* (y lo expresaremos abreviadamente C posee d.d.), si existen números positivos $e_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$e_i \left| c_{ii} \right| > \sum_{j \neq i} e_j \left| c_{ij} \right| \qquad i = 1, \ldots, n$$ [20]

19. El concepto de resolubilidad de estos sistemas hace que la constante w resulte irrelevante en cuanto al análisis del problema de la resolubilidad. Sólo actúa como un multiplicador de la escala del vector de precios solución, pero sin alterar la composición relativa del mismo. Los problemas de normalización en sistemas de precios de este tipo, así como la discusión del progreso neutral en el sentido de Harrod que aparecería si tuvieran lugar reducciones en el vector ℓ escapan del objeto de este trabajo.

20. McKENZIE (1960). La definición dada se refiere a "dominancia de diagonal por filas". De modo análogo puede darse la dominancia por columnas. Otros conceptos de dominancia de diagonales, más o menos restrictivos son los de "diagonal dominante en sentido de Hadamard (Véase TAKAYAMA (1976)), o el de "diagonal quasi–dominante (véase WOODS (1978).

El concepto de diagonal dominante permite añadir una nueva condición que va a ser equivalente a la resolubilidad del sistema (S).

(VIII) La matriz B posee d. d., y $b_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

El teorema que sigue enlaza la propiedad VIII para el sistema (S), con las propiedades equivalentes I-V:

Teorema 5. Para el sistema (S), la condición VIII es equivalente a las condiciones I, II, III, IV y V.

Demostración:

Los teoremas 1 y 2 permiten realizar la prueba por medio de las implicaciones VIII $\longrightarrow$ I, y II $\longrightarrow$ VIII.

VIII $\longrightarrow$ I: La verificación de la condición VIII indica que existen números $e_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$e_i \left| b_{ii} \right| > \sum_{i \neq j} e_j \left| b_{ij} \right|$$

pero, al ser los $b_{ii} > 0$, y puesto que $b_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$, podemos escribir:

$$\sum_{j=1}^{n} e_j b_{ij} > 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

si llamamos $z_i = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, la relación anterior indica la resolubilidad débil del sistema (S) (pues, para unos ciertos términos independientes, todos estrictamente positivos, posee solución $z > 0$), con lo que está probada esta implicación.

II $\longrightarrow$ VIII: La verificación, por parte del sistema (S) de la condición II (y por tanto de cualquiera de las equivalentes, en particular de la condición IV) permite afirmar que $b_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.[21] Por otra parte, la resolubilidad fuerte indica que el sistema tiene solución $z \geqslant 0$, para cualquier vector de términos independientes no negativo. La independencia (por III) de los vectores columna de la matriz B, y el hecho de que R^n_+ esté incluido en el cono engendrado por estos vectores (véase el comentario tras el teorema 1), permite afirmar la

21. Cada b_{ii} puede ser mirado como un menor principal de B, el que resulta al suprimir en B todas las filas y columnas, excepto las de lugar i-ésimo.

existencia de un vector $v \in R^n_+$ para el cual las componentes respecto a los vectores que generan el cono (columnas de B) sean todas positivas. Tomando como $e_i, i = 1, \ldots, n$ dichas componentes, obtenemos, para la matriz B, la condición de dominancia de la diagonal.

c.q.d.

Una cuestión interesante, para los sistemas de Leontief (i) e (ii), que puede ser analizada a la luz de la condición VIII, es el *problema de cambio de unidades* en las matrices interindustriales. Los coeficientes a_{ij} de la matriz tecnológica A, en términos físicos, indican la cantidad de mercancía i-ésima que se necesita para producir una unidad de mercancía j-ésima. Así, el término a_{ij}, para cada i, j, depende esencialmente de las unidades en que se midan, tanto la mercancía i-ésima, como la mercancía j-ésima.

Supongamos que realizamos un cambio de unidades de medida para nuestras mercancías, de modo que

$$u_1 = e_1 u_1^* \; ; \; \ldots ; \; u_n = e_n u_n^*$$

siendo u_i, $i = 1, \ldots, n$ las unidades de medida antiguas de la mercancía i-ésima, y u_i^*, $i = 1, \ldots, n$ las nuevas unidades de medida. Naturalmente la constante $e_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En estas condiciones, se tiene la siguiente relación entre los coeficientes técnicos (medidos con las unidades u_i y medidos con las nuevas unidades u_i^*):

$$a_{ij}^* = \frac{e_i}{e_j} a_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

siendo a_{ij} los coeficientes técnicos medidos en las unidades u_i y a_{ij}^* los coeficientes técnicos medidos en las unidades u_i^*. Entre las matrices $A = (a_{ij})$ y $A^* = (a_{ij}^*)$, se verifica la siguiente relación:

$$A^* = E \, A \, E^{-1}$$

donde $E = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_n)$. Las matrices A y A* son, por tanto, semejantes.

Por otra parte, el sistema (i), en las unidades u_i $i = 1, \ldots, n$, se escribe como

$$\text{(i)} \quad x = Ax + c \; , \quad A \geqslant 0, c \geqslant 0$$

mientras que, el mismo sistema en las unidades u_i^*, $i = 1, \ldots, n$, se escribirá:

$$\text{(i*)} \quad x^* = A^*x^* + c^* \qquad A^* \geqslant 0, \; c^* \geqslant 0$$

siendo $x^* = Ex$, $c^* = Ec$, $A^* = EAE^{-1}$. La semipositividad simultánea de las matrices A y A*, junto con su semejanza (que implica que ambas poseen la misma raíz de Frobenius), y por la verificación del teorema 3, permite afirmar que los sistemas (i) e (i*) serán simultáneamente resolubles (o simultáneamente no resolubles). Las observaciones que acabamos de hacer indican la irrelevancia (en el tema de la resolubilidad de un sistema del tipo (i)) de las unidades escogidas para las diversas mercancías.

Por su parte, para el sistema (ii), un cambio de unidades del mismo tipo produciría una modificación del vector de cantidades de trabajo homogéneo ℓ, de modo que

$$\ell_j^* = e_j \, \ell_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

Así, el sistema (ii), que en las unidades u_i se escribe

$$\text{(ii)} \qquad \left(\frac{1}{1+r} \, I - A' \right) p = w\ell$$

en las nuevas unidades u_i^*, se escribiría

$$\text{(ii*)} \quad \left(\frac{1}{1+r} \, I - A^{*\prime} \right) p^* = w \, \ell^*$$

siendo $p^* = Ep$, $\ell^* = E\ell$, $A^* = EAE^{-1}$. Las mismas observaciones realizadas antes permiten afirmar, también en este caso la irrelevancia (en el problema de la resolubilidad para el sistema de precios) de las unidades en que se midan las mercancías.

Es interesante, para el sistema (ii) de precios de equilibrio, observar que no existe ninguna variación en las variables distributivas al realizar el cambio de unidades. La semejanza de las matrices A y A*, junto con el hecho de que el intervalo de variación aceptable para r depende sólo de la raíz de Frobenius de A (que coincide con la de A*), indican claramente esta no alteración en r (que, por otra parte, es una tasa, y por tanto es lógico que sea independiente de las unidades de medida de las mercancías que se hayan elegido).

Otra cuestión a destacar es la posibilidad de realizar un análisis comparativo entre las soluciones de los sistemas (i) e (i*) (y análogamente, entre las soluciones de los sistemas (ii) e (ii*)), interpretando estas variaciones a la luz del cambio de unidades.

Finalmente, destacaremos una última cuestión, que permite interpretar la verificación de la condición VIII para los sistemas (i) e (ii), a la luz del cambio de unidades.

Si la matriz B del sistema (S) verifica la condición VII, sabemos que $b_{ii} > 0$ para todo i = 1, . . ., n y además existen números positivos e_i, i= 1, . . . , n, tales que

$$e_i\, b_{ii} > \sum_{i \neq j} e_j \, |b_{ij}| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Consideremos la verificación de esta condición para el sistema (i), donde $B \equiv I - A$. La relación anterior puede escribirse

$$e_i\,(1 - a_{ii}) > \sum_{i \neq j} e_j \, a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Dividiendo por $e_i > 0$, las desigualdades se conservan, por lo que

$$(1 - a_{ii}) > \sum_{i \neq j} \frac{e_j}{e_i} \, a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n$$

pero, si realizamos un cambio de unidades dado por la matriz $F = \text{diag}\,(e_1^{-1}, \ldots, e_n^{-1})$, y si llamamos a^*_{ij} a los nuevos coeficientes interindustriales, la desigualdad anterior puede escribirse

$$(1 - a^*_{ii}) > \sum_{i \neq j} a^*_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n$$

o, lo que es igual, $1 > \sum_{j=1}^{n} a^*_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n$

Esto es, podemos encontrar un conjunto de unidades conveniente, para el cual la matriz interindustrial tiene la propiedad de que la suma de los términos que ocupan la misma fila, es, para todas ellas, menor que 1.[22]

22. La condición $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad i = 1, \ldots, n$ es la condición conocida como "condición de Brauer–Solow (véase BRAUER (1946), y SOLOW (1952). La verificación de la condición Brauer-Solow sobre la matriz A es condición suficiente para la resolubilidad del sistema (i), pero, en general, no es condición necesaria. El resultado anterior limita la "no necesidad" de la

.../...

Una última observación se puede hacer a partir de la idea de irrelevancia, en el problema de la resolubilidad del sistema (i), de las unidades en que se midan las diversas mercancías. Si consideramos la matriz interindustrial medida en términos monetarios (en lugar de tenerla medida en términos físicos), y si p_i, $i = 1, \ldots, n$ son los precios de las distintas mercancías, la relación existente entre los coeficientes en términos físicos, a_{ij}, y en términos monetarios, a^*_{ij}, sería la siguiente:

$$a^*_{ij} = \frac{p_i}{p_j} a_{ij}$$

relación idéntica a la correspondiente a un cambio de unidades dado por la matriz $E = \text{diag}(p_1, \ldots, p_n)$. Este resultado asegura la irrelevancia (en el problema de la resolubilidad del sistema (i)) del hecho de tener las matrices interindustriales en términos físicos o en términos monetarios.[23]

4. A lo largo de este trabajo hemos analizado diversas condiciones relacionadas con el problema de existencia de solución $z \geqslant 0$, para sistemas lineales del tipo

$$\text{(S)} \qquad Bz = d, \quad B = (b_{ij})/b_{ij} \leqslant 0 \text{ si } i \neq j,\ d \geqslant 0$$

Los resultados obtenidos se resumen en la proposición que sigue:

R1. Para el sistema (S), las condiciones siguientes son equivalentes:
I) (S) es débilmente resoluble
II) (S) es fuertemente resoluble
III) B verifica la condición (H-S)
IV) B es una P–matriz

...\...

condición Brauer–Solow para los sistemas de cantidades de Leontief: si bien la condición no es necesaria, puede encontrarse un sistema de unidades conveniente para el cual la matriz interindustrial verifica la condición Brauer–Solow.

23. El interés de este resultado radica en el hecho de que, en la práctica, las matrices interindustriales se estiman en términos monetarios ante las dificultades de estimarlas en términos físicos.

V) Existe B^{-1} y es semipositiva
VI) $b_{ii} > 0$ para todo i = 1, . . . , n, y B posee d.d.

Por otra parte, y haciendo referencia a los modelos Leontief más simples, modelos que se materializan en los sistemas de cantidades:

$$\text{(i)} \qquad (I-A)x = c, \; A \geqslant 0, \; c \geqslant 0$$

y de precios

$$\text{(ii)} \qquad \left(\frac{1}{1+r} I - A'\right) p = w\ell, \quad A \geqslant 0, \; \ell \geqslant 0$$

y que, como es obvio, son casos particulares de (S), los resultados obtenidos se recogen en la siguiente proposición:

R2. Para el sistema (i), las condiciones siguientes son equivalentes:
I_i) El sistema (i) es débilmente resoluble
II_i) El sistema (i) es fuertemente resoluble
III_i) (I-A) verifica la condición (H-S).
IV_i) (I-A) es una P-matriz
V_i) Existe $(I-A)^{-1}$ y es semipositiva
VI_i) $a_{ii} < 1$ para todo i = 1,. . . ., n, y además (I-A) posee d.d.
VII_i) A es una matriz convergente
$VIII_i$) A es una matriz productiva.

Siempre que $0 \leqslant r < \frac{1}{\lambda^* (A)} - 1$ (en cuyo caso el sistema (i) verifica las condiciones $I_i - VIII_i$), para el sistema (ii), se verifican las siguientes condiciones:

I_{ii}) El sistema (ii) es débilmente resoluble
II_{ii}) El sistema (ii) es fuertemente resoluble
III_{ii}) La matriz $\left(\frac{1}{1+r} I - A\right)$ verifica (H-S).
IV_{ii}) $\left(\frac{1}{1+r} I - A\right)$ es una P-matriz.
V_{ii}) Existe $\left(\frac{1}{1+r} I - A\right)^{-1}$ y es semipositiva
VI_{ii}) $(1+r)\, a_{ii} < 1$ para todo i = 1, . . . , n y $\left(\frac{1}{1+r} I - A'\right)$ posee d.d.

VII_{ii}) La matriz $(1+r)$ A es convergente

$VIII_{ii}$) La matriz $(1+r)$ A es productiva.

Por otra parte, las condiciones de resolubilidad de los sistemas (i) e (ii), son independientes del sistema de unidades en que se midan las mercancías. Asímismo, la resolubilidad del sistema (i) es independiente del hecho de tener la matriz interindustrial en términos físicos o en términos monetarios.

Una cuestión adicional a destacar es que las conclusiones obtenidas son independientes de considerar o no indescomponibilidad en las matrices del sistema (desde el punto de vista económico, la interpretación de este hecho sería que las conclusiones son independientes de suponer o no que todas las mercancías sean básicas). Sin embargo, hay que señalar que, cuando se considera, en los sistemas (i) e (ii) que A es indescomponible, pueden encontrarse resultados algo más ajustados.

La última observación se refiere al hecho de que se pueden aplicar los resultados obtenidos a otros modelos económicos con análoga estructura desde el punto de vista matemático, como los de consumo y crecimiento (SOLOW (1952)), algunos modelos de comercio internacional (METZLER (1942)), al análisis de la estabilidad del equilibrio competitivo (ARROW & HURWICZ (1958), HAHN (1958), NEGISHI (1958)), así como a ciertas cuestiones relacionadas con la sensibilidad de las soluciones de ciertos sistemas de ecuaciones (RADER (1968), FUJIMOTO, HERRERO & VILLAR (1983)).

Es interesante añadir que, en la literatura económica más reciente un tema recurrente está siendo el análisis de la existencia, unicidad y positividad de las soluciones de sistemas menos restrictivos y más generales. En este sentido, son de destacar los trabajos de FUJIMOTO (1980) (1983), IRITANI (1981) y LAHIRI & PYATT (1980).

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

ARROW, K.J. & HURWICZ, L. (1958): "On the Stability of the Competitive Equilibrium I". *Econometrica 26.*

BELLMANN, R. (1960). *Introduction to Matrix Analysis.* New York, McGrw Hill.

BRAUER, A (1946): "Limits for the Characteristic Roots of a Matrix". *Duke Mathematical Journal 13.*

DEBREU, G. & HERSTEIN, I.N. (1953): "Nonnegative Square Matrices". *Econometrica 21.*

FISHER, F.M. (1965): "Choice of Units, Column Sums and Stability in Lynear Dynamic Systems with Nonnegative Square Matrices". *Econometrica 33.*

FUJIMOTO, T. (1980): "Non Substitution Theorems and the Systems of Nonlinear Equations". *Journal of Economic Theory 23.*

FUJIMOTO, T. (1983): "Unicidad y Positividad de Soluciones para Sistemas de Ecuaciones Económicos". *Anales de la U. de Alicante. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, 2.*

FUJIMOTO, T., HERRERO, C. & VILLAR, A. (1983): "A Sensitivity Analysis for Linear Systems Involving M-Matrices and its Application to the Leontief Model". *Linear Algebra and its Applications,* en prensa.

GANTMACHER, F.R. (1959): *Matrix Theory.* New York, Chelsea Pu. Co.

HAHN, F.H. (1958): "Gross Substitutes and the Dynamic Stability of General Equilibrium". *Econometrica 26.*

HAWKINS, D. & SIMON, H.A. (1949): "Note: Some Conditions on Macro-economic Stability". *Econometrica 17.*

HERRERO, C. & SILVA, J.A. (1984). *Matrices Cuadradas Semipositivas.* Departamento de Publicaciones. U. de Alicante, en prensa.

IRITANI, J. (1981): "On the Uniquiness of General Equilibrium". *Review of Economic Studies 48.*

LAHIRI, S. & PYATT, G. (1980): "On the Solution of Scale–Dependent Input–Output Models". *Econometrica 48.*

McKENZIE, L. (1960): "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory". En *Mathematical Methods in the Social Sciences 1959,* ed. por Arrow Karlin & Suppes. Stanford U. Press.

METZLER, L.A. (1942): "Underemployment Equilibrium in International Trade". *Econometrica.*

NEGISHI, T. (1958): "A note on the Stability of an Economy where all Goods are Gross Substitutes". *Econometrica 26.*

NIKAIDO, H. (1970): *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics.* North Holland.

RADER, T. (1968): "Normally Factor Inputs are Never Gross Substitutes". *Journal of Political Economy 76.*

SOLOW, R.M. (1952): "On the Structure of Linear Models", *Econometrica 20.*

TAKAYAMA, A. (1976): *Mathematical Economics.* The Dryden Press.

WIELANDT, H. (1950): "Unzerlegbare, Nicht Negative Matrizen". *Mathematische Zeitschrift, LII.*

WOODS, J.E. (1978): *Mathematical Economics. Topics in Multisectoral Economics.* Longman.