JOSE M.ª PEREZ DE VILLARREAL

Una síntesis de los modelos tradicionales de demanda de dinero

Académicamente es muy conocida la dicotomía existente en la teoría de la demanda de dinero, entre los *modelos de cartera* (Tobin, (5)), que enfatizan el riesgo de rendimiento de los activos alternativos al dinero (bonos) ignorando los costes de transacciones, y los *modelos inventariales* (Baumol (2)), que priman los costes transaccionales desconsiderando los riesgos de inversión. A los primeros se les suele asociar con el análisis media–desviación típica y a los segundos con la "regla de la raíz cuadrada".[1]

Buiter y Armstrong (3), (en breve, B–A), en un afan de salvar esta dicotomía reconsideraron el modelo de Baumol introduciendo riesgo en el rendimiento de los bonos. En su modelo se hace uso del análisis media–desviación típica y se reproduce la "regla de la raiz cuadrada" como un caso particular. En general, la introducción de riesgo en el modelo de Baumol propicia la existencia de ambigüedad en las relaciones de la demanda de dinero con los fondos transaccionales, los costes de liquidación de los bonos y el tipo de interés. En particular B–A no llegan a clarificar la presencia o no de las economías de escala que tanto se subrayan en el modelo de Baumol.[2] Además, la justificación de B–A del análisis media–desviación típica mediante el supuesto de una función de utilidad cuadrática en un contexto de utilidad esperada está expuesta a las mismas críticas que las formuladas a la aportación original de Tobin (5).

1. Por la regla de la raíz cuadrada se entiende comúnmente la expresión concreta que adopta la demanda de saldos líquidos y que se presentará más adelante mediante la ecuación (1.c').

2. Se trata como veremos de economías de escala en el manejo de los saldos líquidos debido a que la elasticidad de la demanda de dinero respecto a los fondos transaccionales es inferior a la unidad.

En el presente trabajo, previa presentación del modelo de Baumol en versión útil a nuestros propósitos, se completa y generaliza el modelo de B–A a partir de la posibilidad de que, en este caso, la función de utilidad esperada sea representable en el espacio de la media y de la desviación típica sin exigir una función cuadrática de utilidad.

I. EL MODELO DETERMINISTA DE BAUMOL

La naturaleza de los modelos inventariales de demanda de dinero es, a grandes rasgos, la siguiente. Se trata de gestionar a lo largo de un periodo unos fondos destinados a transacciones cuya cuantía se supone dada. Suponiendo que el dinero y los bonos son los dos activos alternativos, el interés estriba en la evolución a lo largo del periodo del rendimiento neto de los fondos transaccionales invertidos en bonos o equivalentemente en la evolución del coste de oportunidad de mantenerlos en saldos líquidos. El agotamiento obligado de los fondos transaccionales al final del período exige la liquidación (conversión en dinero) de los bonos que pudieran haber sido adquiridos. Los costes de esta operación componen la trama del modelo. Si la liquidación pudiera realizarse sin costes no habría motivo para mantener saldos en dinero. Y, al contrario, la conversión costosa de bonos en dinero y viceversa justifica cierta demanda de dinero, el activo líquido por excelencia. Pero, además, unos costes suficientemente altos pueden llegar incluso a desanimar la compra–venta de bonos de tal manera que la totalidad de los fondos transaccionales se mantengan en dinero.

En principio, estos costes de conversión de un activo en otro pueden entenderse como funciones más o menos complicadas de las cantidades liquidadas o invertidas incluyendo componentes fijos y variables. Sin embargo, en el modelo de Baumol, se supone que los costes son exclusivamente fijos: "c" pesetas por operación de compra–venta de bonos, independientemente de su volumen. Además, los fondos transaccionales, fijados inicialmente por valor de "Y", se gastan a ritmo constante y uniforme dentro del periodo de manera que su evolución temporal es de la forma reproducida en la Figura 1, que indica claramente que, a lo largo del periodo transaccional y en promedio los fondos transaccionales se mantienen por valor de Y/2.

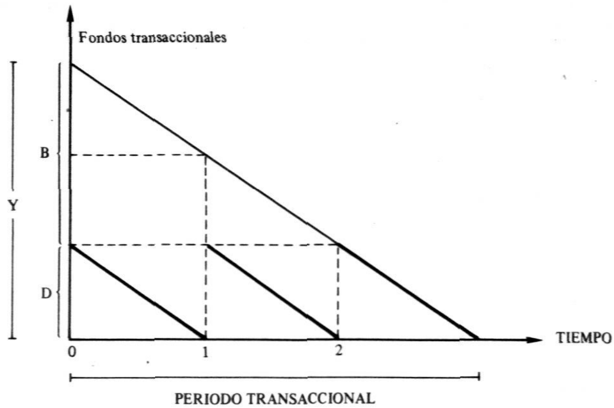


FIGURA 1

En caso de que convenga, se compran bonos al principio del periodo por valor de "B" para posteriormente realizar "m" liquidaciones de forma regular por valor igual al saldo inicial de caja "D" y que se gastan como éste a ritmo constante y uniforme como antes se ha dicho. Obviamente, entonces $B/D = m$, y $D + B = Y$. Dado que la compra de bonos cuesta lo mismo que su venta, independientemente de su valor y número, el número de las operaciones de compra–venta en las que incurre el transaccionista al coste fijo de "c" pesetas es de $m + 1$ veces. Puede comprobarse cómo precisamente $Y/D = m + 1$. La figura 1, con la forma familiar de Dientes de Sierra ilustra el caso de $m = 2$.

En este contexto, el problema consiste en determinar el valor de "D", la cantidad a mantener inicialmente o a procurar posteriormente en cada liquidación de bonos. De esta forma el saldo de dinero medio a lo largo del periodo transaccional será $D/2$, que denotado por "L", representa nuestra noción de demanda de dinero.

Un transaccionista optimizador tratará de elegir un valor para "D" que minimice los costes transaccionales o alternativamente que maximice "Rn", el rendimiento neto de los activos transaccionales.

Dadas las definiciones anteriores y denotando por "i" el tipo de rendimiento de los bonos es claro que,

(1.a)

$$Rn = \left(\frac{Y-D}{2}\right) i - \frac{c.Y}{D} = \left(\frac{Y-2L}{2}\right) . \; i - \frac{c.Y}{2L} \equiv Rn(L)$$

En versión equivalente, versión utilizada en el presente trabajo, el transaccionista ha de elegir "d", la proporción de los fondos transaccionales mantenidos en dinero (L), que maximice "r", el tipo de rendimiento neto de los activos transaccionales. Dividiendo (1.a) por $\frac{Y}{2}$ tenemos:

$$(1.b) \quad r = \left(\frac{Y-D}{Y}\right) . \; i - \frac{c.2.Y}{D.Y} = \quad (1-d) . \; i \quad \frac{2 . c}{Y.d} \quad \equiv \quad r(d)$$

en donde $0 \leqslant d{:}D/Y \leqslant 1$[3]

Bajo los supuestos razonables de que $i . Y/2 > c > 0$ existe una solución interior (d^*) al problema de maximización de r(d). En concreto[4]

$$(1.c) \qquad d^* = \sqrt{\frac{2c}{Y . i}}$$

La formulación más conocida de la "regla de la raíz cuadrada" se obtiene multiplicando d^* por Y/2; de este modo,

$$(1.c') \qquad L = d^* . \frac{Y}{2} = \sqrt{\frac{c . Y}{2i}}$$

Teniendo presente (1.c) claramente se deduce que

$$\frac{\partial d^*}{\partial i} < 0, \quad \frac{\partial d^*}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial d^*}{\partial Y} < 0$$

3. Admitimos la posibilidad de que $d = 1$. No obstante el intervalo relevante para cuando $d < 1$ es, en rigor, $0 \leqslant d \leqslant 1/2$, si suponemos que "m" no puede ser inferior a la unidad.

4. La solución d^* viene dada por las condiciones de primer orden de maximización de r:

$$r_d = -i + 2c/Y.d^2 = 0$$

como

$$r_{dd} = -2c/Y.d^3 < 0 \qquad \forall \; 0 < d \leqslant 1$$

las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes. Con $c > 0$ tenemos que, $r_d = \infty$ para $d = 0$; luego $d^* > 0$. Como $Y . i > c.2$, tenemos que $r_d < 0$ para $d = 1$; luego $d^* < 1$.

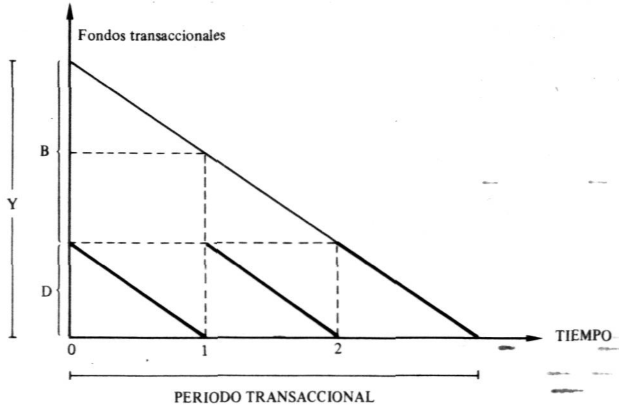


FIGURA 1

En caso de que convenga, se compran bonos al principio del periodo por valor de "B" para posteriormente realizar "m" liquidaciones de forma regular por valor igual al saldo inicial de caja "D" y que se gastan como éste a ritmo constante y uniforme como antes se ha dicho. Obviamente, entonces $B/D = m$, y $D + B = Y$. Dado que la compra de bonos cuesta lo mismo que su venta, independientemente de su valor y número, el número de las operaciones de compra–venta en las que incurre el transaccionista al coste fijo de "c" pesetas es de m + 1 veces. Puede comprobarse cómo precisamente $Y/D = m + 1$. La figura 1, con la forma familiar de Dientes de Sierra ilustra el caso de $m = 2$.

En este contexto, el problema consiste en determinar el valor de "D", la cantidad a mantener inicialmente o a procurar posteriormente en cada liquidación de bonos. De esta forma el saldo de dinero medio a lo largo del periodo transaccional será $D/2$, que denotado por "L", representa nuestra noción de demanda de dinero.

Un transaccionista optimizador tratará de elegir un valor para "D" que minimice los costes transaccionales o alternativamente que maximice "Rn", el rendimiento neto de los activos transaccionales.

Dadas las definiciones anteriores y denotando por "i" el tipo de rendimiento de los bonos es claro que,

(1.a)
$$Rn = \left(\frac{Y-D}{2}\right) i - \frac{c.Y}{D} = \left(\frac{Y-2L}{2}\right) . i - \frac{c.Y}{2L} \equiv Rn(L)$$

En versión equivalente, versión utilizada en el presente trabajo, el transaccionista ha de elegir "d", la proporción de los fondos transaccionales mantenidos en dinero (L), que maximice "r", el tipo de rendimiento neto de los activos transaccionales. Dividiendo (1.a) por $\frac{Y}{2}$ tenemos:

$$(1.b) \quad r = \left(\frac{Y-D}{Y}\right) . i - \frac{c.2.Y}{D.Y} = (1-d) . i \quad \frac{2 . c}{Y.d} \equiv r(d)$$

en donde $0 \leqslant d{:}D/Y \leqslant 1$[3]

Bajo los supuestos razonables de que $i . Y/2 > c > 0$ existe una solución interior (d^*) al problema de maximización de r(d). En concreto[4]

$$(1.c) \qquad d^* = \sqrt{\frac{2c}{Y . i}}$$

La formulación más conocida de la "regla de la raíz cuadrada" se obtiene multiplicando d^* por $Y/2$; de este modo,

$$(1.c') \qquad L = d^* . \frac{Y}{2} = \sqrt{\frac{c . Y}{2i}}$$

Teniendo presente (1.c) claramente se deduce que

$$\frac{\partial d^*}{\partial i} < 0, \quad \frac{\partial d^*}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial d^*}{\partial Y} < 0$$

3. Admitimos la posibilidad de que $d = 1$. No obstante el intervalo relevante para cuando $d < 1$ es, en rigor, $0 \leqslant d \leqslant 1/2$, si suponemos que "m" no puede ser inferior a la unidad.

4. La solución d^* viene dada por las condiciones de primer orden de maximización de r:

$$r_d = -i + 2c/Y.d^2 = 0$$

como

$$r_{dd} = -2c/Y.d^3 < 0 \qquad \forall \ 0 < d \leqslant 1$$

las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes. Con $c > 0$ tenemos que, $r_d = \infty$ para $d = 0$; luego $d^* > 0$. Como $Y . i > c.2$, tenemos que $r_d < 0$ para $d = 1$; luego $d^* < 1$.

Es decir, la proporción de fondos transaccionales mantenidos en forma de saldos líquidos disminuye (aumenta) conforme mayor (menor) sea el volumen inicial de tales fondos, mayor (menor) sea el tipo de rendimiento de los bonos, y menor (mayor) sea el coste de las operaciones de compra–venta de bonos.

El signo negativo de $\dfrac{\partial d^*}{\partial Y}$ entraña una elasticidad de la demanda de dinero con respecto al volumen de fondos transaccionales inferior a la unidad, lo cual suele interpretarse en términos de existencia de "economías de escala en el manejo del efectivo". En definitiva, conforme aumentan los fondos transaccionales la gente puede arreglárselas con saldos líquidos proporcionalmente menores.

Indudablemente, el que los costes de las compras–ventas de bonos sean independientes de su valor y número fundamentan estas economías de escala. De suponer algún tipo de costes variables no surgirían tales economías, ni en general se mantendría la regla de la raíz cuadrada. En este sentido, cabe también preguntarse si la introducción de riesgo en el rendimiento de los bonos podría producir efectos similares. Ciertamente, se puede sospechar que la aversión al riesgo haga más elástica la demanda de saldos líquidos de modo que, incluso, desaparezcan las economías de escala. Los apartado siguientes dan respuesta a esta cuestión.

2. El modelo de utilidad esperada

En adelante la esperanza matemática y desviación típica de una variable aleatoria serán denotadas por E(.) y S(.) respectivamente. Supongamos al igual que Tobin (5) que el tipo de rendimiento de los bonos es una variable aleatoria del tipo $X = i + g$, donde "g" es una variable aleatoria, de valor medio $E(g) = 0$, que puede interpretarse como las ganancias o pérdidas de capital. En consecuencia, el tipo de rendimiento neto de los activos transaccionales es, asimismo, una variable aleatoria, $\hat{r}$, dada por

$$\hat{r} = (1-d) \,.\, X - 2 \,.\, c/Y \,.\, d \tag{2.a}$$

Admitimos también que el transaccionista es un maximizador de utilidad esperada y averso al riesgo en el sentido de Pratt–Arrow.[5] Su

5. La maximización de la utilidad esperada de los resultados monetarios es aceptada por J. Tobin (5), como hipótesis de comportamiento frente al riesgo. Un individuo se dice que es "averso al riesgo" en el sentido de Pratt–Arrow si ante dos alternativas, una de las cuales, la ...\...

función de utilidad será u (r), $u'(.) > 0$, $u''(.) < 0$, y su función objetivo:

(2.b) $$E[u((1-d) . X - 2 . c/Y . d)] = E(u(d))$$

Bajo los mismos supuestos utilizados en la sección anterior de que $i . Y/2 > c > 0$, existe una solución interior ($\hat{d}^*$) al problema de maximización de E (u (d)). En conreto $\hat{d}^*$ viene definida por

(2.c) $$Eu_d = E(u'(.)(2c/Y . d^2 - X)) = 0$$ [6]

A partir de (2.c) podemos probar varios resultados. Comencemos mostrando que $\hat{d}^* > d^*$. En efecto, expresemos (2.c) como (2.c').

(2.c') $$E(u'(.) . (2 . c/Y . d^2 - i)) - E(u'(.) . g) = 0$$

Observemos que en (2.c'), $E(u'(.) . (2.c/Y . d^2 - i)) < 0$, ya que $E(u'(.) . g) =$ covarianza $(u'(.), g) < 0$, si $u''(.) < 0$. Dado que $E(u'(.)) > 0$, debe cumplirse que $(2 . c / Y . d^2 - i) < 0$. Luego,

$$\hat{d}^* > \sqrt{\frac{2 . c}{Y . i}}$$

Así mismo, es fácil de probar, como un corolario, que una actitud de indiferencia frente al riesgo, ($u''(.) = 0$), implica que $\hat{d}^* = d^*$. En efecto, si $u''(.) = 0$, entonces la utilidad marginal es constante, y en consecuencia (2.c) se convierte en (2.c''),

arriesgada garantiza tan sólo en promedio lo que la otra en seguridad, elige esta segunda. La neutralidad o indiferencia frente al riesgo se dará en el caso en el que el individuo no manifieste preferencia por una alternativa u otra. Es fácil de comprobar que para un maximizador de utilidad esperada "averso al riesgo" la utilidad marginal ha de ser decreciente ($u''(.) < 0$). Asimismo, en el caso de indiferencia frente al riesgo, la utilidad marginal ha de ser constante ($u''(.) = 0$).

6. La ecuación (2.c) es la condición de primer orden. Como
$Eu_{dd} = E(u''(.) . (-x+2c/Yd^2)^2) + E(u'(.)(-4c/Y.d^3)) < 0$, cuando $u''(.) < 0$, la ecuación (2.c) es también suficiente. (Obsérvese sin embargo que la aversión al riesgo no es condición necesaria para garantizar $Eu_{dd} < 0$). Con $c > 0$ tenemos que $Eu_d = \infty$ para $d = 0$; luego $\hat{d}^* > 0$. Para $d = 1$, tenemos que $Eu_d = u'(2c/Y) . (2c/Y - i) < 0$ bajo el supuesto de que $i.' Y/2 > c$; luego $\hat{d}^* < 1$.

(2.c'') $$u'(.) \,.\, (2 \,.\, c / Y \,.\, d^2 - i) = 0$$

que lo que $\hat{d}^* = \sqrt{2 \,.\, c / Y \,.\, i}$. La indiferencia frente al riesgo reproduce la regla de la raíz cuadrada.

Realizando los ejercicios de estática comparada a partir de (2.c) obtenemos las siguientes expresiones:

(2.d)
$$\frac{\partial \hat{d}}{\partial Y} = -\frac{E(u''(.) \,.\, (2.c/Y \,.\, d^2 - X) \,.\, 2.c/Y \,.\, d) - E(u'(.) \,.\, 2.c/Y^2 \,.\, d^2)}{E\, u_{dd}}$$

(2.e) $$\frac{\partial \hat{d}}{\partial i} = -\frac{E(u''(.) \,.\, (2.c/Y \,.\, d^2 - X) \,.\, (1-d)) - E(u'(.))}{E\, u_{dd}}$$

(2.f)
$$\frac{\partial \hat{d}}{\partial c} = -\frac{E(u''(.) \,.\, (2.c / Y.d^2 - X) \,.\, (-2 / Y.d)) + E(u'(.) \,.\, 2/Y.d^2)}{E\, u_{dd}}$$

Puesto que $u'(.) > 0$, $u''(.) < 0$, $E\, u_{dd} < 0$, los signos de (2.d), (2.e) y (2.f) son en principio ambíguos, lo cual pone en entredicho los comportamientos pautados por la regla de la raíz cuadrada.

Una condición suficiente para eliminar la ambigüedad en la dirección de la regla de la raíz cuadrada es el cumplimiento de

(2.g) $$E(u'(.) \,.\, (2.c / Y.d^2 - x)) \leqslant 0$$

Sin embargo (2.g), en este contexto, no parece ser directamente interpretable.

Una forma alternativa de eliminar la ambigüedad de los signos de (2.d), (2.e) y (2.f) es postular una función de utilidad cuadrática. En efectó, si

$$u(r) = b.\,(r - r^*)^2, \qquad b < 0$$

es la función de utilidad como punto de saturación en r*, las expresiones (2.d), (2.f) y (2.g) se convierten en las siguientes:

$$(2.d)' \quad \frac{\partial \hat{d}^*}{\partial Y} = \frac{(2.c./Y^2.d^2).(E(r)-(2.c/Y.d^2-i).d-r^*)}{E((2.c/Y.d^2-X)^2)-(4.c/Y.d^3).(E(r)-r^*)}$$

$$(2.e)' \quad \frac{\partial \hat{d}^*}{\partial i} = \frac{E(r)-(2.c/Y.d^2-i).(1-d^*)-r^*}{E((2.c./Y.d^2-X)^2)-(4.c/Y.d^3).(E(r)-r^*)}$$

$$(2.f)' \quad \frac{\partial \hat{d}^*}{\partial c} = \frac{2/Y.d^2.(r^*-E(r)+(2.c/Y.d^2-i).d)}{E((2.c/Y.d^2-X)^2)-4.c./Y.d^3.(E(r)-r^*)}$$

Una vez más los signos de (2.d)' (2.e)' y (2.f)' son en principio ambiguos, pero suponiendo un valor suficientemente grande de r*, tales signos se adecúan a la regla de la raíz cuadrada.

No obstante, este servicio de la función de utilidad cuadrática puede cuestionarse su uso por incorporar preferencias frente al riesgo contraintuitivas. Véase (1), (pág. 96 y 97).[7] Por lo tanto, merece la pena preguntarse si es posible disipar alguna ambigüedad de las cuestiones de estática comparadas sin apelar a la función de utilidad cuadrática.

3. EL MODELO MEDIA–DESVIACION TIPICA

Buiter y Armstrong (3), como Tobin (5), han hecho uso del análisis media–desviación típica a partir del supuesto de que la función de utilidad del rendimiento es cuadrática. Formulan el problema a partir de la definición (1.a), y su análisis también tropieza con el problema de la ambigüedad de las ecuaciones de estática comparada, que en parte se

7. Con el caso de la función de utilidad cuadrática la medida de la aversión al riesgo de Arrow–Pratt viene dada por $A = 1/(r^*-r)$. Por lo tanto la aversión al riesgo crece con r, siendo $A = \infty$ para $r = r^*$. ¿No es contraintuitivo suponer que la aversión al riesgo de un individuo vaya creciendo, hasta hacerse infinita conforme los resultados monetarios que obtiene se acercan al nivel r* de saturación?. Una aversión al riesgo extremadamente grande (infinita) implica el rechazo de toda alternativa incierta que no garantice resultados monetarios extremadamente (absolutamente) favorables. Si en el margen el individuo apenas (en nada) los aprecia ¿es razonable atribuirle tal grado de aversión al riesgo?.

resuelve mediante la condición de que Rn*, el nivel de rendimiento cuya utilidad marginal es nula, sea suficientemente grande. Sin embargo, el hecho de que formulen el problema de acuerdo a (1.a) les impide clarificar la presencia o no de las economías de escala llevándoles a afirmar que "la demanda transaccional de los saldos líquidos puede tener, en consecuencia, una elasticidad–renta mayor que la unidad" (pág. 537).

En el apartado anterior se ha patentizado que dentro de una versión del problema acorde a la definición (1.b) la condición de que r* sea suficientemente grande garantiza también la presencia de las economías de escala de las tenencias de saldos líquidos.

Teniendo presente la crítica antes mencionada sobre el uso de la función de utilidad cuadrática parece interesante reproducir el ensayo de Buiter y Armstrong en el espacio media–desviación típica, sin exigir que la función de utilidad sea cuadrática y mostrar que, procediendo de esta forma, es posible interpretar la condición (2.g) en términos intuitivamente aceptables y por lo tanto disipar la ambigüedad de las cuestiones de estática comparada.

3.1. *Representaciones en el espacio media–desviación típica*

Teniendo presente (2.a) las ecuaciones para la esperanza matemática y desviación típica de la variable aleatoria son las siguientes:

(3.a) $$E(\hat{r}) = (1-d) \, . \, i - 2.c\,/Y.d$$

(3.b) $$S(\hat{r}) = (1-d) \, . \, S(g)$$

Es fácil de comprobar cómo de hecho las expresiones (2.a) y (2.b) del apartado anterior pueden redescribirse sin más en los términos siguientes:

(3.c) $$\hat{r} = E(\hat{r}) + S(\hat{r}) \, . \, g/S(g)$$

(3.d) $$E(u(r)) = E(u(E(\hat{r}) + S(\hat{r})\, g/S(g))) = V(E(\hat{r}), S(\hat{r}))$$ [8]

donde, bajo los supuestos establecidos de utilidad marginal positiva y decreciente la función V(E(r), S(r)) es creciente en E(r), decreciente en S(r) y estrictamente cuasi–cóncava (véase Apéndice Técnico I); es decir, el mapa de curvas de indiferencia es como se ilustra en la figura 2.

8. En (4) previa crítica de los procedimientos conocidos para analizar los modelos de utilidad esperada en el espacio de los momentos se presenta una nueva vía bajo el título de "vía de las especificaciones" que abre nuevas posibilidades, uno de cuyos logros es el análisis media–desviación típica que aquí se utiliza.

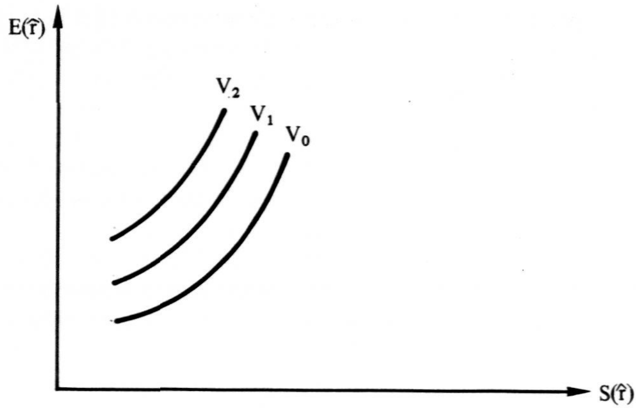


FIGURA 2

El campo de oportunidades se define a partir de (3.a) y (3.b) por la siguiente ecuación:

(3.e)
$$E(\hat{r}) = \frac{S(\hat{r})}{S(g)} \, . \, i - \frac{2c}{Y \, . \, (1 - S(\hat{r})/(S(g))}$$

Su representación gráfica está dada en la Figura 3. La justificación para esta representación es similar a la aportada por Buiter–Armstrong. Derivando E(r̂) respecto de S(r̂) en (3.e) tenemos

(3.f)
$$\frac{d\,E\,(r)}{d\,S\,(r)} = \frac{1}{s(g)} \, . \, \left(i - \frac{2c}{Y \, . \, (1 - S(\hat{r})/S(g))^2} \right)$$

(3.g)
$$\frac{d^2\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})^2} = - \frac{2.c \,/\, S\,(g)^2}{Y\,(1 - S(\hat{r}) \,/\, S(g))^3} < 0$$

El signo inambigüamente negativo de (3.g) justifica la concavidad estricta del campo de oportunidades.

Respecto del signo de (3.f) se puede distinguir los siguientes casos:

1. Todos los fondos transaccionales se mantienen en Caja

Entonces d = 1, $S(\hat{r}) = 0$, y en consecuencia,

$$\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} = \frac{1}{S(g)} \cdot \left(i - \frac{2c}{Y}\right) > 0, \text{ si } \left(i - \frac{2c}{Y}\right) > 0$$

Recordemos que precisamente esta condición, (i.Y/2 > c), evitaba una de las soluciones de esquina ($\hat{d}^* = 1$) en el modelo del apartado anterior.

2. Todos los fondos transaccionales se mantienen en bonos.

Entonces d = 0, $S(\hat{r}) = S(g)$, y en consecuencia,

$$\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} = -\infty$$

3. Los fondos transaccionales se distribuyen de tal manera que $E(\hat{r})$ es Máximo

En este caso, representado en la figura 4 por el punto ϵ, tenemos que,

$$\text{(3.f)'} \qquad \frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} = \frac{1}{S(g)} \cdot \left(i - \frac{2c}{Y \cdot (1 - S(\hat{r})/S(g))^2}\right) = 0$$

(3.f)' implica que $S(\hat{r}) = (1 - \sqrt{2c\,.\,/Y.i)})\,.\,S(g)$, y que $d = d^* =$

$$\sqrt{2c\,/\,Y.i}$$

Puede observarse como existe una correspondencia entre este caso y la regla de la raíz cuadrada.

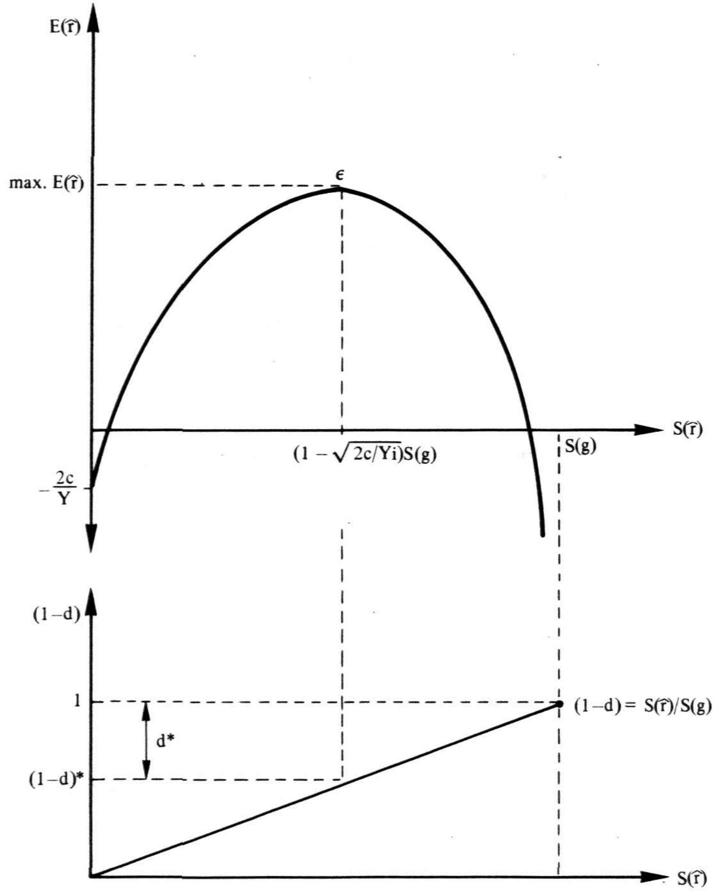


FIGURA 3

El análisis de los casos anteriores nos hace ver que la explicación de la curvatura de este campo de oportunidades radica en la existencia de costes en la compra–venta de bonos. Si estos fuesen nulos se obtendría el "locus" de Tobin, una línea recta de pendiente positiva e igual a (i/S(g)). La existencia de tales costes hace que E(r) en un primer momento aumente con (1–d) aunque a tasa decreciente, alcance un máximo para luego disminuir, incluso, hasta valores negativos conforme aumenta el número de liquidaciones a que obligan unas tendencias de bonos cada vez mayores.

3.2. *Optimización*

Dada la naturaleza del campo de oportunidades y de las curvas de indiferencia presentadas anteriormente es obvio que el máximo de utilidad es interior. Además la combinación óptima (S(r)*, E(r)*) queda a la izquierda del punto ϵ , indicando que la proporción de los saldos transaccionales mantenidos en dinero es superior a la mantenida en ausencia de riesgo, conclusión a la que se llegaba en el apartado anterior, a través de la ecuación (2.c.). Véase la Figura 4.

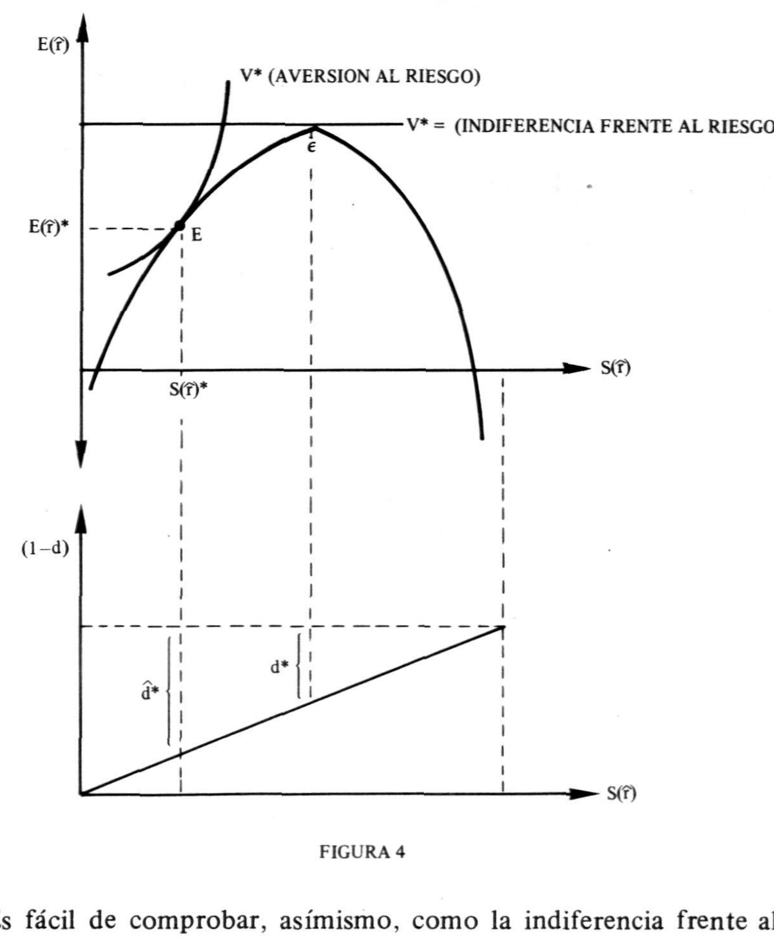


FIGURA 4

Es fácil de comprobar, asímismo, como la indiferencia frente al riesgo configura unas curvas de indiferencia de pendiente nula de modo que la tangencia con el campo de oportunidades se da precisamente en

ϵ , reproduciendo la regla de la raíz cuadrada. En efecto, si hay indiferencia ante el riesgo, la utilidad marginal es constante, y entonces,

$$\left.\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})}\right|_{\bar{V}} = -\frac{E(u'(.)\,.\,g/S(g))}{E(u'(.))} = -\frac{1}{S(g)}\,.\,\frac{u'(.)\,.\,E(g)}{u'(.)} = -\frac{E(g)}{S(g)} = 0$$

3.3. *Análisis de estática comparada*

Si en este contexto se investiga de nuevo las relaciones de $\hat{d}^*$, con "Y", "c" e "i", vuelve a aparecer la ambigüedad anteriormente reseñada. Para verlo comencemos por estudiar los efectos sobre el campo de oportunidades (3.e) de variaciones en "Y", "c" e "i". Aumentos de "Y" e "i", y disminuciones de "c" desplazan la curva frontera de oportunidades de modo que la nueva se sitúa en todo su recorrido por encima de la anterior y alcanza su máximo ϵ' a la derecha del máximo inicial ϵ . Las figuras 5 y 6 recogen estos desplazamientos. El tipo de desplazamientos se invierte obviamente ante disminuciones de "Y" e "i", y aumentos de "c". Veámoslo con detalle.

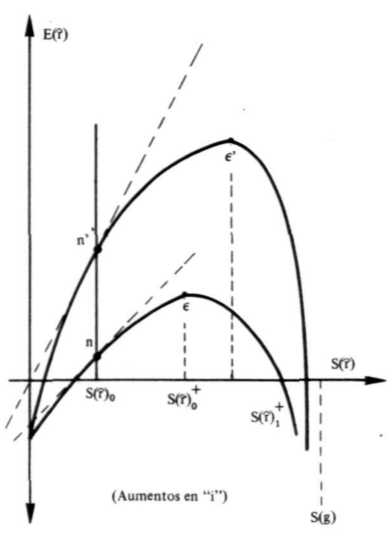


FIGURA 5

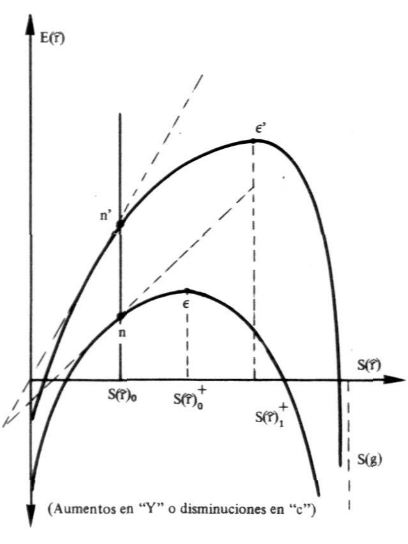


FIGURA 6

a. *Variaciones en los fondos transaccionales*

Derivando (3.e) respecto de "Y" tenemos,

$$\frac{\partial\, E(\hat{r})}{\partial\, Y} = \frac{2c}{Y^2\, .\, (1 - S(\hat{r})/S(g))} \geqslant 0, \quad S(\hat{r}) \geqslant 0$$

Es decir, ante aumentos de "Y" la nueva curva va siempre por encima de la inicial. Además en el cambio de Y_0 a Y_1, ($Y_1 > Y_0$), se puede observar que

a.1) $E(\hat{r})$ aumenta de valor en $S(\hat{r}) = 0$.

a.2) $E(\hat{r})$ permanece igual en $S(\hat{r}) = S(g)$.

a.3) $E(\hat{r})$ alcanza su máximo para $S(\hat{r})_1^+$, donde

$$S(\hat{r})_1^+ = (1 - \sqrt{2c/Y_1\, .\, i})\, .\, S(g) >$$

$$> (1 - \sqrt{2c/Y_0\, .\, i})\, .\, S(g) = S(\hat{r})_0^+$$

Las observaciones a.1), a.2) y a.3) indican que ϵ' está por encima y a la derecha de ϵ. Véase la figura 6.

b. *Variaciones en los costes de compra–venta de bonos*

Derivando (3.e) respecto de "c", tenemos que

$$\frac{\partial\, E(\hat{r})}{\partial\, c} = -\frac{2}{Y\, .\, (1 - S(\hat{r})/S(g))} < 0, \quad S(\hat{r}) \geqslant 0$$

con lo que este caso es idéntico al anterior. Véase la figura 6.

c. *Variaciones en el tipo de interés*

Derivando (3.e) respecto de "i" tenemos que

$$\frac{\partial\, E(\hat{r})}{\partial\, i} = \frac{S(\hat{r})}{S(g)} \geqslant 0$$

Es decir, ante cambios de i_0 a i_1 tales que $i_1 > i_0$ la nueva curva va por encima de la inicial. Y además

b.1) $E(\hat{r})$ permanece igual en $S(\hat{r}) = 0$

b.2) $E(\hat{r})$ permanece igual en $S(\hat{r}) = S(g)$

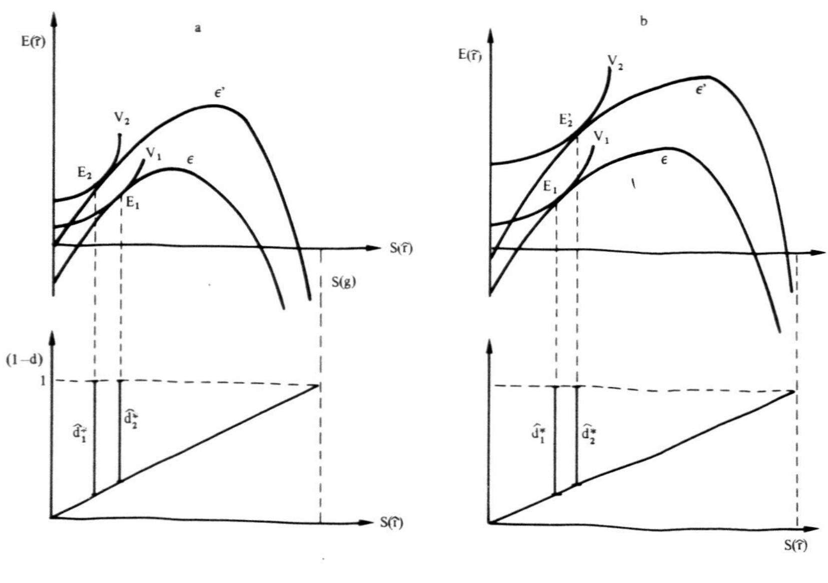
b.3) $E(\hat{r})$ alcanza su máximo en $S(\hat{r})_1^+$

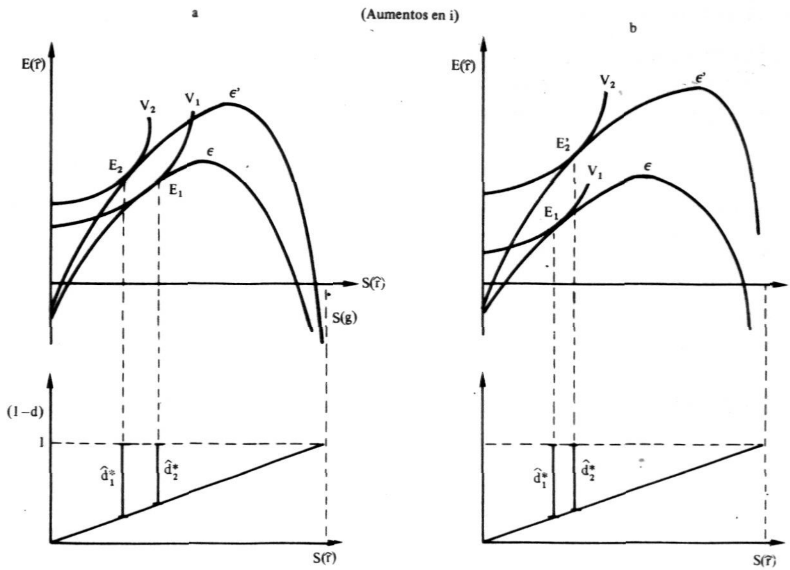
donde $S(\hat{r})_1^+ = (1 - \sqrt{2c/Y.i_1}) \,.\, S(g) > (1 - \sqrt{2c\,/\,Y.i_0}) \,.\, S(g) =$
$= S(\hat{r})_0^+$

De nuevo b.1) b.2) y b.3) significan que ϵ' está por encima y a la derecha de ϵ . Véase la figura 5.

Finalmente, conviene destacar en los desplazamientos analizados en las figuras 5 y 6 que *la curva frontera de oportunidades aumenta de pendiente para valores iguales de S(r).* Atendiendo, a continuación, a las cuestiones de estática comparada podemos advertir que, en principio, ante los tipos de desplazamiento analizados pueden originarse a partir de E_1 situaciones de equilibrio como E_2 o E_2' en los paneles a y b de las figuras 7 y 8, lo cual evidencia la ambigüedad reseñada en líneas anteriores.

(Aumentos en Y o disminución en c)





Lo que nos interesa es que se den las situaciones indicadas por E_2' en los paneles b de las figuras 7 y 8; pues de ser así las expresiones (2.d), (2.e) y (2.f) tendrían los signos acordes con la regla de la raiz cuadrada. Para ello basta que en el entorno del punto de equilibrio se cumpla la siguiente condición sobre la curvatura de las curvas de indiferencia

$$\partial \; \frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} \Big/ \partial\, E(\hat{r}) \leqslant 0$$

Esta condición admite una interpretación aceptable. La pendiente de las curvas de indiferencia o relación marginal de sustitución de S(r̂) por E(r̂), (RMS_S^E), puede definirse como el precio o compensación marginal por la dispersión de los resultados monetarios y en este sentido, cuando toma valores positivos puede considerarse como un índice de *"aversión marginal a la dispersión"*. De medir el riesgo por la dispersión o desviación típica la RMS_S^E nos indicaría correspondientemente el grado de la "aversión al riesgo". Desde esta noción, la condición anterior implica que la aversión marginal al riesgo (y en un sentido más estricto, la aversión marginal a la dispersión) no sea creciente con la esperanza matemática del tipo de rendimiento.[9]

Ahora estamos finalmente en disposición de dar una interpretación a la condición (2.g), que en el apartado anterior eliminaba la ambigüedad en la dirección pautada por la regla de la raíz cuadrada:

> "La condición $E(u''(.) \, . \, (2c/Y.d^2 - X)) \leqslant 0$ implica que en el entorno del equilibrio las curvas de indiferencia han de ser tales que $\partial \left(\frac{d\,E(r)}{d\,S(r)} \right) / \partial\, E(r) \leqslant 0$, lo cual es interpretable en términos de existencia de una *aversión al riesgo* (más estrictamente, a la dispersión) *constante o decreciente*".

La prueba de esta aseveración está en el apéndice técnico II.

IV. Conclusiones

La introducción de riesgo en el modelo de Baumol siguiendo a Buiter y Armstrong da pie a su reformulación como un modelo de utilidad esperada que incorpora aspectos centrales del trabajo de Tobin. La especificación de este modelo permite un análisis media–desviación típica sin recurrir al supuesto de una función de utilidad cuadrática.

La aversión al riesgo si bien no es necesaria para justificar la existencia de Demanda de Dinero, sí influye en la determinación de su nivel. En este sentido cabe afirmar que la Demanda de Dinero de un transaccionista averso al riesgo es inferior a la determinada por la regla de la raíz cuadrada. Esta se reproduce solamente en el caso de indiferencia frente al riesgo.

En general, la introducción de riesgo en el modelo de Baumol junto con el supuesto de aversión propicia la existencia de ambigüedad en las relaciones entre la Demanda de Dinero y los Fondos transaccionales, los costes de liquidación y el tipo de interés. Una forma de eliminar la ambigüedad en la dirección pautada por la regla de la raíz cuadrada es

9. En un próximo artículo con el título de "Caracterizaciones alternativas de la aversión al riesgo" presentaré las relaciones entre esta medida de la aversión al riesgo y la de Pratt–Arrow. Baste aquí la referencia al caso de la función cuadrática donde la $RMS_S^E = S(\hat{r}).\ A(E(\hat{r}))$ y, (recuérdese la nota 7), $A(E(\hat{r})) = \left(\frac{1}{r^* - E(\hat{r})}.\right)$ Claramente el signo de $\partial \left(\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} \right) / \ \partial\, E(\hat{r})$ es positivo en correspondencia al de $\frac{d\,A}{d\,E(\hat{r})}$ que como antes se dijo se presenta como objeción al uso de la función cuadrática.

suponer que en el entorno del equilibrio la $RMS^{E(\hat{r})}_{S(\hat{r})}$ sea constante o decreciente con la esperanza matemática del tipo de rendimiento. Esta condición es susceptible de interpretarse en términos de constancia o decrecimiento de una medida de la aversión al riesgo que hemos llamado "aversión marginal a la dispersión".

APENDICE TECNICO

I. Vayamos por partes.

I.a) Dado $\hat{r} = (1-d) \,.\, X - 2.c \,/\, Y.d$

$E(\hat{r}) = (1-d)\, i - 2.c \,/\, Y.d$

$S(\hat{r}) = (1-d) \,.\, S(g)$

nada nos impide expresar $(1-d)$ y $(-2.c \,/\, Y.d)$ en los términos siguientes:

$$(1-d) = \frac{S(\hat{r})}{S(g)}$$

$$(-2.c \,/\, Y.d) = E(\hat{r}) - \frac{S(\hat{r})}{S(g)} \,.\, i$$

En consecuencia, sustituyendo debidamente,

$$r = \frac{S(\hat{r})}{S(g)} \,.\, x + E(\hat{r}) - \frac{S(\hat{r})}{S(g)} \,.\, i = E(\hat{r}) + \frac{S(\hat{r})}{S(g)} \,.\, g$$

y, $E(u(\hat{r})) = E(u(E(\hat{r}) + S(\hat{r}) \,.\, g/S(g))) = V(E(\hat{r}), S(\hat{r}))$

I.b) Derivando parcialmente, $V(E(\hat{r}), S(\hat{r}))$ tenemos

$V_E = E(u'(.)) > 0$, puesto que $u'(.) > 0$, y

$V_S = E(u'(.) \,.\, g/S(g)) < 0$, puesto que la covarianza entre las variables aleatorias $u\,(.)$ y "g" es negativa cuando $u\,'(.) < 0$.

Es claro que

$$\mathrm{RMS}_{S(\hat{r})}^{E(\hat{r})} = -\frac{V_S}{V_E} \geqslant 0 \qquad \text{si } u''(.) \leqslant 0$$

((.) es abreviación de $(E(\hat{r}) + S(\hat{r}) \,.\, g/S(g))$.

Así mismo, teniendo presente que

$$V_{EE} = E(u''(.))$$
$$V_{SS} = E(u''(.) \,.\, (g/S(g))^2)$$
$$V_{SE} = E(u''(.) \,.\, g/S(g))$$

es fácil de comprobar que

$$V_{EE} \,.\, V_S^2 + V_{SS} \,.\, V_E^2 - 2V_{ES} \,.\, V_E . V_S =$$

$$E(u''(.) \,.\, (V_S - V_E \,.\, g/S(g))^2)$$

Es decir, $V(E(\hat{r}), S(\hat{r}))$ es estrictamente cuasicóncava si $u''(.) < 0$

II. Basta comprobar la correspondencia de signos en el entorno del equilibrio de las expresiones

$$\partial \left(\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})}\right) / \;\partial\, E(r) \qquad \text{y} \qquad E(u''(.) \,.\, (2c\,/\,Y.d^2 - X))$$

Es claro que

$$\frac{\partial \left(\dfrac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})}\right)}{\partial\, E(r)} = -\frac{V_{ES} + \dfrac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} \,.\, V_{EE}}{V_E},$$

En equilibrio, donde la pendiente de la curva de indiferencia es igual a la de la curva de oportunidades, tenemos que,

$$\left.\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})}\right|_{\overline{V}} = \frac{1}{S(g)} \cdot \left(i - \frac{2c}{Y\,.\,(1-S(r)/S(g))^2}\right)$$

Recordando que,

$$\hat{r} = E(\hat{r}) + S(\hat{r})\,.\,g/S(g)$$

$$d = 1 - S(\hat{r})/S(g)$$

podemos expresar $V_{ES} + \frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} \,.\, V_{EE}$ de la siguiente manera:

$$V_{ES} + \frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})} \,.\, V_{EE} =$$

$$= \frac{1}{S(g)} \,.\, (E(u''(.)\,.\,g) + E(u''(.)\,.\,(i-2.c/Y.d^2))) =$$

$$= \frac{1}{S(g)} \,.\, E(u''(.)\,.\,(X-2.c\,/\,Y.d^2))$$

De donde se deduce fácilmente que,

$$\text{SIGNO de } \frac{\partial\left[\frac{d\,E(\hat{r})}{d\,S(\hat{r})}\right]}{\partial\,E(r)} = \text{SIGNO de } E(u''\,(.)\,.\,(2\,.\,c/Y.d^2-X)).$$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) ARROW, K.J. (1970). "Essays in the theory of risk–bearing", Nort–Holland, Amsterdam – London.
(2) BAUMOL, W.J. (1952). "The transactions demand for each: an inventory theoretic approach", Q.J. Econ. Vol. 66, pp. 545–556.
(3) BIUTER, W. y ARMSTRONG, C. (1978), "A didactic note on transactions demand for money as behaviour towards Risk". Jour. of Money, Credit and Banking, Vol. 10, núm. 4. pp. 529–537.
(4) PEREZ DE VILLARREAL, J.Mª (1983), "Análisis en el espacio de los momentos del modelo de maximización de la utilidad esperada": una rehabilitación. (En trámites de publicación).
(5) TOBIN, J., (1957–58), "Liquidity Preference as behaviour towards Risk", Rev. of Econ. Stud. Vol. 25, pp. 65–86.