ALFONS BARCELÓ

Modelos demográfico-económicos de la "comunidad doméstica"

"En el establecimiento del conocimiento empírico la matemática (igual que la lógica) tiene, por así decirlo, la función de exprimefrutos teorético: las técnicas de la teoría matemática y lógica no pueden producir más zumo de información fáctica que el contenido ya en las suposiciones a que se aplica; pero pueden obtener mucho más zumo del que podía suponerse por una primera inspección intuitiva de los supuestos que constituyen la materia prima del exprimidor".

Carl G. Hempel

1. Coordenadas de localizacion

En 1975, Claude Meillassoux publicó un libro destacado y renovador, *Femmes, greniers et capitaux,* en el que se afrontaba una revisión de los enfoques usuales de la antropología económica y se proponía como clave explicativa básica la visión reproductiva, merced a la cual se anudaban y emparejaban ciclos económicos y biológicos en secuencias determinadas. El marco social, o sistema tipo, cuyos mecanismos dinámicos se pretendían analizar fue bautizado por él con la denominación de "comunidad doméstica". La argumentación de Meillassoux se desplegaba de forma literaria y en términos descriptivos. Presentaba, no obstante, un mdelo pedestre destinado a explicar algunos rasgos estructurales y utilizado para descubrir algunas propiedades dinámicas de un sistema estilizado de la estirpe mencionada. Este protomodelo, sin embargo, resultaba formalmente muy insatisfactorio.

El primer objetivo de nuestra investigación consiste precisamente en llevar a cabo un ejercicio de modelización rigurosa de las proposiciones y supuestos presentados por Meillassoux. El segundo objetivo perseguido será vertebrar variables demográficas y económicas en una serie de modelos cada vez más complejos. La finalidad de este trabajo, en fin, estriba en mostrar la potencia de los métodos formales y la precisión con que permiten tratar temas importantes una vez identificados los factores fundamentales y las interdepencias efectivas.

Evidentemente las pretensiones científicas de este artículo son modestas, pero hay algunas facetas que merecen ser explicitadas. Por un lado, pretende ser una exhibición de utillaje formal que estimule a los estudiosos de la antropología económica a usar técnicas rigurosas en la medida de lo posible, puesto que se obtienen así resultados exactos que pueden ser contrastados luego con la realidad, lo que les sitúa en vías de autocorrección potencial. Por otro lado, constituye una aplicación puntual del amplio programa de investigación propuesto en mi tesis doctoral *(fundamentos y aplicaciones del enfoque reproductivo,* Valencia, 1978) y en el libro subsiguiente (Barceló, 1981). Por último, el trabajo aspira a dotar a los planteamientos de Meillassoux de un rigor del que adolecen, mostrando que ello es factible sin necesidad de violentar su orientación analítica.

2. EL MODELO BASE

El modelo base con el que vamos a operar se compone de variables demográficas y de variables económicas simplificadas, cuya interdependencia genera (dejando a un lado consideraciones de otro cariz) diversas sendas dinámicas. El objetivo es establecer un conjunto formal de relaciones que permita computar con exactitud la secuencia temporal de estados del sistema idealizado.

Sería necio pretender que con el establecimiento de un modelo se agota la problemática; pero uno cree asimismo que los modelos pueden representar de alguna forma la radiografía selectiva de partes constitutivas del sistema y revelar algunas tendencias depuradas. La trama completa de relaciones es inalcanzable, pero disponer de visiones específicas sólidamente trabadas ha de facilitar esta comprensión global que sólo es factible mediante aproximaciones sucesivas y desde diversos ángulos.

El programa de investigación se orienta pues a descubrir las relaciones entre las variables seleccionadas. Para llevar a cabo esta tarea, una vez planteado el esquema genérico, utilizaremos supuestos adicionales y provisionales que nos permitan estudiar configuraciones singulares destacadas, en especial los dos casos paradigmáticos de estado estacionario y de expansión uniforme.

Empecemos ya con los típicos supuestos. Supongamos una comunidad primitiva aislada capaz de autorreproducirse económica y biológicamente. Por ley de vida el tiempo de existencia de un individuo longevo consta de tres lapsos (**a**, **b**, **c**) que denominaremos *período preproductivo, productivo y postproductivo.* Naturalmente para que la comunidad pueda perpetuarse ha de estar formada por personas que van pasando de uno a otro estadio a lo largo de su existencia y que, a lo sumo, tienen al nacer un horizonte vital de **h** años (**h** = **a** + **b** + **c**). En términos agregados, la población total en un momento dado está formada por personas preproductivas, productivas y postproductivas. Esto puede simbolizarse con la seguiente identidad:

$$P_t = A_t + B_t + C_t \tag{2.1}$$

La producción corre a cargo, obviamente, de las personas productivas, que son también las reproductivas. Supondremos, además, que se dan rendimientos constantes a escala y que el producto está formado por una cesta de bienes en proporciones fijas o, lo que formalmente es similar, por un solo bien. Llamaremos β a la cantidad de producto obtenida por un individuo productivo al final del periodo estándar. Para simplificar supondremos también que el consumo por período y por individuo es constante, con independencia del estadio vital en que éste se encuentre. Llamaremos α a la cantidad de producto consumida por un individuo en un período. Puesto que, por hipótesis, α y β son vectores proporcionales o números concretos de la misma especie, no se plantea ningún problema de valoración; por consiguiente podemos utilizar como unidad de producto, α ($\alpha = 1$), lo que sólo representa un cambio de escala que no acarrea ninguna distorsión.

A fin de evitar algunas complicaciones temporales supondremos que todos los períodos, tanto demográficos como económicos, son de igual duración. Dicho supuesto sólo se puede justificar por la enorme simplificación resultante. En realidad, los períodos estándar económicos, aceptables desde consideraciones realistas, son el "día", la "semana", el "mes" o el "año", mientras que los períodos estándar demográfios son el "año", el "quinquenio" o el "decenio". Operar con sólo tres grupos de edad de igual duración, equivale a utilizar como período estándar un lapso de unos 15 ó 20 años. De todos modos, hay que subrayar que el supuesto indicado entraña una caricatura, pero no una falsificación por cuanto la multiplicación de los grupos de edad complicaría mucho el modelo, mas no quebraría su estructura esencial.

Suponiendo cierto grado de estabilidad en la comunidad considerada, cabe representar la evolución del sistema mediante una espiral de transformaciones del siguiente tenor:

$$
\begin{aligned}
A_t \oplus \alpha A_t &\longrightarrow B_{t+1} \\
B_t \oplus \alpha B_t &\longrightarrow \beta B_t \oplus A_{t+1} \oplus C_{t+11} \\
C_t \oplus \alpha C_t &\longrightarrow \emptyset
\end{aligned}
$$

lo cual en términos compactos puede expresarse como

$$P_t \oplus \alpha P_t \longrightarrow P_{t+1} \oplus \beta B_t$$

con lo que se significa que el producto de un período se hace disponible, y por tanto se consume, a lo largo del siguiente período.

Evidentemente, en condiciones normales,

$$\beta B_t \geqslant \alpha P_{t+1} \tag{2.2}$$

Conviene, sin embargo, introducir una distinción entre el producto efectivo y el potencial o máximo, siendo este último una cota superior tecnológicamente determinada. Asimismo podemos considerar que α es una cota inferior. Entre estos márgenes el valor de β será determinado por las condiciones que en cada caso se consideren decisivas. En definitiva

$$\alpha \leqslant \beta \leqslant \hat{\beta} \tag{2.3}$$

A diferencia de Meillassoux, incluiremos la posibilidad de que parte de la población no logre alcanzar la longevidad estándar. Esto es, sólo una proporción de los preproductivos alcanzarán la madurez y sólo una fracción de los productivos llegarán a la ancianidad. Por consiguiente:

$$B_{t+1} = k_1 \, . \, A_t \qquad O < k_1 \leqslant 1 \tag{2.4}$$

$$C_{t+1} = k_2 \, . \, B_t \qquad O \leqslant k_2 \leqslant 1 \tag{2.5}$$

Parece razonable considerar constantes estos coeficientes, para sociedades y lapsos temporales definidos. De todos modos, las anteriores expresiones continuarían siendo válidas, aún sin suponer cierto grado de estabilidad, con tal de escribir k_1^t y k_2^t.

Por último, con respecto a las nuevas generaciones siempre podemos escribir

$$A_{t+1} = k_3^t \,.\, B_t \tag{2.6}$$

Pero si bien esta expresión es formalmente satisfactoria, no nos informa de restricciones reales destacadas, en especial las dos siguientes

$$A_{t+1} \leqslant g \,.\, B_t \tag{2.7}$$

donde g indica la capacidad genésica de la población adulta a lo largo del periodo adoptado como base. Consideraremos que g es una constante demográfica.

$$A_{t+1} \leqslant \frac{\beta\, B_t - \alpha\,(B_{t+1} + C_{t+1})}{\alpha} = \frac{S_t^b}{\alpha} \tag{2.8}$$

donde S^b representa el sobreproducto bruto, o sea las disponibilidades alimenticias de que podrán disponer los preproductivos durante su período de maduración.

Por lo tanto a menudo será conveniente escribir

$$A_{t+1} = \text{mín}\,(g \,.\, B_t \,,\, \frac{S_t^b}{\alpha}) \tag{2.9}$$

En consecuencia, k_3^t será igual a g si vale el primer término. En caso contrario,

$$k_3^t \,.\, B_t = \frac{\beta\, B_t - \alpha(B_{t+1} + C_{t+1})}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} B_t - (K_1\, A_t + K_2\, B_t) =$$

$$(\frac{\beta}{\alpha} - K_2)\, B_t - K_1\, A_t$$

$$k_3^t = \frac{\beta}{\alpha} - K_2 - K_1\, \frac{A_t}{B_\rho} = \frac{\beta}{\alpha} - K_2 - \frac{B_{t+1}}{B_t}$$

Si combinamos las dos restricciones concluimos que

$$k_3^t = \text{mín}\left(g, \frac{\beta}{\alpha} - k_2 - \frac{B_{t+1}}{B_t}\right) \qquad (2.10)$$

Perfilado ya el marco abordamos ahora las condiciones de reproducción del sistema bajo algunos supuestos restrictivos pertinentes.

3. LAS CONDICIONES DE ESTADO ESTACIONARIO O REPRODUCCION SIMPLE

Los dos casos simples que enmarcan cualquier proceso dinámico son el *estado estacionario* y el *crecimiento exponencial*. Se trata, claro está, de casos ideales; pero son abstracciones que suministran una primera radiografía de algunas relaciones fundamentales. Presentan, por añdidura, una propiedad nada desdeñable, a saber, su tratamiento formal resulta harto sencillo.

En la presente sección utilizaremos como punto de referencia el modelo básico recién expuesto, pero ajustaremos las relaciones allí presentadas a las condiciones de estado estacionario. Esto es, supondremos que el sistema, período tras período, conserva intactas sus propiedades, con lo cual el tiempo se convierte en un telón de fondo pasivo.

Bajo las hipótesis de estado estacionario el modelo se reduce a su mínima expresión; podemos reescribir las ecuaciones eliminando los subíndices de fecha. La estructura poblacional se expresa entonces

(2.4): $B = k_1 \,.\, A$

(2.5): $C = k_2 \,.\, B$

(2.6): $A = k_3 \,.\, B$

(2.1): $P = A + B + C$

Consideraremos como datos o variables independientes k_1, k_2 y P_1, y como incógnitas o variables dependientes A, B, C y k_3. Efectuando las sustituciones apropiadas se obtiene

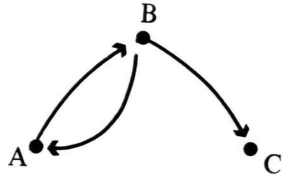
$$A = \frac{P}{1 + k_1 + k_1 k_2} \qquad (3.I)$$

$$B = \frac{P}{1 + k_2 + k_3} \qquad (3.II)$$

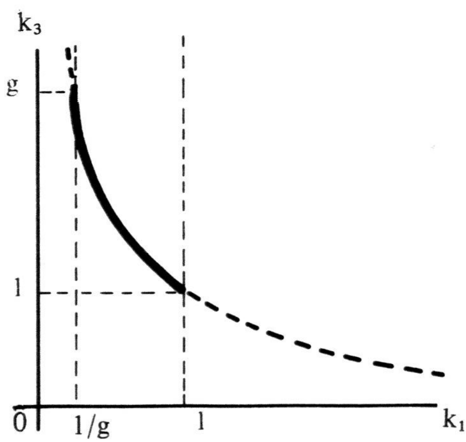
$$C = \frac{k_1\ k_2\ P}{1 + k_1 + k_1\ k_2} \qquad (3.III)$$

$$k_3 = \frac{1}{k_1} \qquad (3.IV)$$

Aunque resulte sabido conviene llamar la atención sobre el papel pasivo que juega la etapa postreproductiva por el cual se configura como "no básica" (por analogía con la terminología de Sraffa). Esto queda también de manifiesto si se representan las dependencias por medio de grafos orientados:



Conviene asimismo señalar las cotas entre las que vale la relación entre k_1 y k_3 :



Desde el ángulo de la producción se trata de determinar β, suponiendo α conocida y nula la producción excedentaria, en tal caso,

(2.2): $$\beta B = \alpha P = \alpha (k_3 B + B + k_2 B)$$

$$\beta = \alpha (k_3 + k_2 + 1) = \alpha (\frac{1}{k_1} + k_2 + 1) \qquad (3.V)$$

La anterior expresión aún puede formularse de modo más estilizado si se adopta una escala de medida apropiada tal que $\alpha = 1$.

4. Las condiciones de expansion uniforme o crecimiento exponencial

Los resultados precedentes iluminan un caso especial de notable relieve, pero son evidentemente muy modestos. Nos proponemos a continuación dar un paso más y explorar algunas propiedades dinámicas. Ante todo nos ocuparemos del caso de expansión uniforme, esto es, que exista un coeficiente de crecimiento, γ, tal que

$$\forall t \qquad \frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{B_{t+1}}{B_t} = \frac{C_{t+1}}{C_t} = \gamma \qquad (4.1)$$

Tomaremos como datos k_1, k_2, α (= 1), P_t y como variables, k_3, β, γ y la distribución de la población. De (4.1), (2.4), (2.5) y (2.6) se sigue:

$$\gamma A_t = k_3 \cdot B_t \qquad (4.2)$$

$$\gamma B_t = k_1 \cdot A_t \qquad (4.3)$$

$$\gamma C_t = k_2 \cdot B_t \qquad (4.4)$$

Además:

(2.1): $$P_t = A_t + B_t + C_t \qquad (4.5)$$

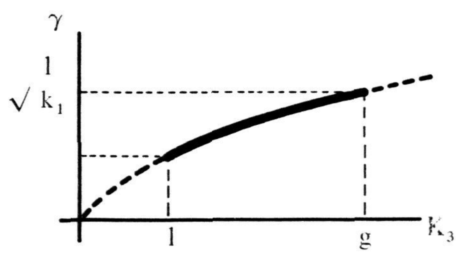
(2.2); (4.1): $$\beta B_t = \alpha P_{t+1} = \alpha \gamma P_t \qquad (4.6)$$

El sistema formado por las ecuaciones (4.2) a (4.6) tiene un grado de libertad. Tomando como variable independiente una de las incógnitas podremos determinar las funciones que nos interesa descubrir. Elegimos k_3 y hacemos $k_3 = k_3^u$, para indicar su condición de parámetro en la situación de expansión uniforme que nos ocupa. Ahora obtenemos las siguientes relaciones:

(4.2); (4.3):
$$\frac{k_3^u}{\gamma} = \frac{\gamma}{k_1}$$

$$\gamma = +\sqrt{k_3^u \, . \, k_1} \qquad (4.1)$$

La gráfica de esta función es la siguiente:



De otro lado,

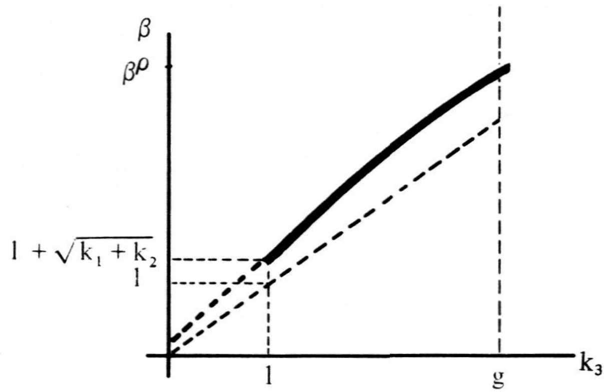
(4.6):
$$\beta B_t = \alpha \gamma (A_t + B_t + C_t) = \alpha k_3^u B_t + \alpha \gamma B_t + \alpha k_2 B_t$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = k_3^u + \gamma + k_2$$

Haciendo $\alpha = 1$ y sustituyendo γ por el valor obtenido más arriba queda

$$\beta = k_3^u + \sqrt{k_3^u k_1} + k_2 \qquad (4.II)$$

La gráfica correspondiente es:



Nótese que

$$\forall\, k_3^u \in [1, g] : \beta > k_3^u \tag{4.III}$$

$$\frac{d\beta}{d k_3^u} = 1 + \frac{\sqrt{k_1}}{2} \frac{1}{\sqrt{k_3^u}} > 0 \tag{4.IV}$$

$$\frac{d^2 \beta}{(d k_3^u)^2} = -\frac{\sqrt{k_1}}{4} \frac{1}{\sqrt{(k_3^u)^3}} < 0 \tag{4.V}$$

Por último, los grupos de edad vendrán determinados, en el estado de expansión uniforme, por las siguientes expresiones:

$$A_t = \frac{k_3^u}{k_2 + k_3 + \sqrt{k_1 k_3^u}} P_t = \frac{\gamma^2}{k_1 k_2 + \gamma^2 + \gamma k_1} P_t = \frac{k_3^u}{\beta} P_t$$

(4.VI)

$$B_t = \frac{\sqrt{k_1\,k_3^u}}{k_2 + k_3 + \sqrt{k_1\,k_3^u}}\,P_t = \frac{\gamma\,k_1}{k_1\,k_2 + \gamma^2 + \gamma k_1}\,P_t = \frac{\sqrt{k_1\,k_3^u}}{\beta}\,P_t \tag{4.VII}$$

$$C_t = \frac{k_2}{k_2 + k_3 + \sqrt{k_1\,k_3^u}}\,P_t = \frac{k_1\,k_2}{k_1\,k_2 + \gamma^2 + \gamma k_1}\,P_t = \frac{k_2}{\beta}\,P_t \tag{4.VIII}$$

5. Dinamica determinada por factores demograficos

Tanto la situación de estado estacionario como el caso de expansión uniforme constituyen configuraciones singulares muy restrictivas, aunque acoten adecuadamente el tipo de fenómenos que estamos analizando. Daremos un paso más y exploraremos las propiedades del sistema en movimiento. Retomando las ecuaciones estructurales (2.4), (2.5), (2.6) y asignando a B_t el papel crucial tanto en la producción como en la reproducción, podemos escribir:

$$B_{t+1} = k_1 \;.\; k_3^{t-1} \;.\; B_{t-1} \tag{5.1}$$

ecuación en diferencias finitas por medio de la cual estableceremos la trayectoria temporal del sistema. Ante todo debemos determinar k_3^{t-1}. En la presente sección consideraremos que k_3 es constante y responde a factores demográficos. Formalmente esto equivale a decir que la capacidad genésica es el factor que opera como determinante, lo que nos conduce al sencillo caso:

$$B_{t+1} = k_1 \;.\; g \;.\; B_{t-1} \tag{5.2}$$

ecuación en diferencias homogénea de segundo grado, cuya ecuación característica es

$$m^2 - k_1 \;.\; g = 0$$

que tiene dos raíces reales y distintas, $m_1 = \sqrt{k_1 \cdot g}$, $m_2 = -\sqrt{k_1 \cdot g}$

Por consiguiente la solución general de (5.2) viene dada por

$$B_t = M_1 (\sqrt{k_1 \cdot g})^t + M_2 (-\sqrt{k_1 g})^t = \begin{cases} (M_1 + M_2)(\sqrt{k_1 g})^t & \text{si t es par} \\ (M_1 - M_2)(\sqrt{k_1 \cdot g})^t & \text{si t es impar} \end{cases} \tag{5.I}$$

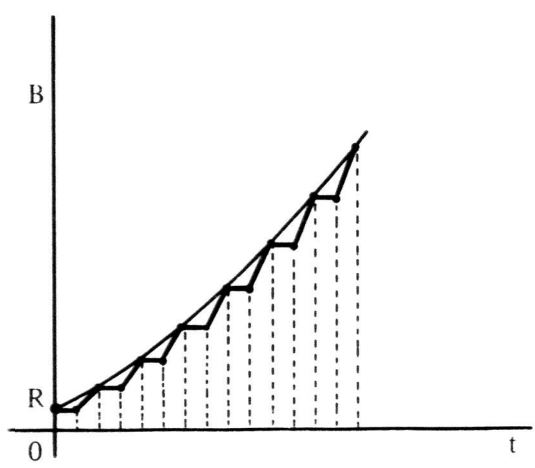
siendo M_1 y M_2 constantes arbitrarias, determinables a partir de unas condiciones iniciales dadas. Supongamos, a modo de ilustración, que $B_o = B_1 = h$, y que $g \cdot k_1 = l^2$; sustituyendo en (5.I) obtenemos:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= h \\ lM_1 - lM_2 &= h \end{aligned} \qquad M_1 = \frac{(l+1)h}{2l} \quad ; \quad M_2 = \frac{(l-1)h}{2l}$$

$$\therefore\ M_1 + M_2 = h; \ M_1 - M_2 = \frac{1}{l} h$$

$$\therefore\ B_t = \begin{cases} hl^t & \text{si t es par} \\ hl^{t-1} & \text{si t es impar} \end{cases}$$

La gráfica de esta solución es



Por otra parte, por lo que hemos visto en (2.IV) y hemos sobreentendido en la gráfica anterior, $g > \frac{1}{k_1}$ por lo cual $|m_1| = |m_2| > 1$ y la sucesión definida por (5.I) será divergente. A menudo, además, será oscilante, como sugiere la solución general y muestra el ejemplo recién propuesto.

6. Dinamica determinada por el sobreproducto bruto

Desde luego es más interesante, formal y fácticamente, la eventualidad apuntada en (2.8) (a saber, que la expansión demográfica dependa de la magnitud del sobreproducto bruto) que el supuesto utilizado en la sección anterior. Vamos pues a ocuparnos ahora del caso en que

$$k_3^t = \frac{\beta}{\alpha} - k_2 - \frac{B_{t+1}}{B_t}$$

Supondremos también un aprovechamiento total del producto en el siguiente período ($\beta B_t = \alpha P_{t+1}$)', y haremos de nuevo $\alpha = 1$, puesto que no entraña pérdida de generalidad. La expresión general expuesta en (5.1) se convierte ahora en

$$B_{t+1} = k_1 (\beta - k_2 - \frac{B_t}{B_{t-1}}) B_{t-1} = k_1 (\beta - k_2) B_{t-1} - k_1 B_t \qquad (6.1)$$

Reordenando y desplazando un período los subíndices obtenidos:

$$B_{t+2} + k_1 B_{t+1} + k_1 (k_2 - \beta) B_t = 0$$

cuya ecuación característica es

$$m^2 + k_1 m + k_1 (k_2 - \beta) = 0$$

$$\therefore \; m = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4 k_1 (k_2 - \beta)}}{2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 4 k_1 (\beta - k_2)}}{2} \qquad (6.I)$$

El discriminante (Δ) de (6.I) es positivo, puesto que $k_1 > 0$ (2.4), $\beta > \alpha$ (2.3) y, por elección de unidad en la escala, $\alpha = 1$; en fin, $k_2 \leqslant 1$ (2.5). Por consiguiente la ecuación posee dos raíces reales y distintas, m_1 y m_2. Luego,

$$B_t = L_1\, m_1^t + L_2\, m_2^t \tag{6.II}$$

o sea,

$$B_t = L_1 \left(\frac{(-k_1 + \sqrt{k_1^2 + 4\, k_1\, (\beta - k_2)}}{2} \right)^t +$$

$$+ L_2 \left(\frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 + 4\, k_1\, (\beta - k_2)}}{2} \right)^t \tag{6.III}$$

siendo L_1 y L_2 constantes arbitrarias determinables a partir de condiciones iniciales dadas.

En la fórmula (6.II) $|m_2| > |m_1|$, por lo que (si $L_2 \neq 0$) se podrá escribir como

$$B_t = m_2^t \left(L_2 + L_1 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^t \right)$$

o sea,

$$B_t = \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{k_1}\, (\beta - k_2)} \right)^t \cdot$$

$$\cdot \left[L_2 + L_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k_1}\, (\beta - k_2)}}{-1 - \sqrt{1 + \frac{4}{k_1}\, (\beta - k_2)}} \right)^t \right] \tag{6.IV}$$

Ahora bien, el segundo factor de la expresión precedente tiende a L_2 cuando t tiende a infinito, puesto que $-1 < \frac{m_1}{m_2} < 1$. Por tanto basta examinar la sucesión $\{m_2^t\}$ para averiguar el comportamiento de (6.IV) en el límite, supuesto $L_2 \neq 0$.

Puesto que $k_1 > 0$ y $\Delta > 0$, m_2 es siempre negativo. Hay, pues, dos casos a considerar. Si $-1 \leqslant m_2 < 0$, la sucesión es oscilante amortiguada y convergente; si $m_2 < -1$, la sucesión es oscilante infinita.

Por último, si $L_2 = 0$, la expresión (6.II) se convierte en

$$B_t = L_1 m_1^t$$

En tal caso, puesto que m_1 siempre es positivo, la sucesión será convergente si $m_1 \leqslant 1$ y divergente si $m_1 > 1$.

En definitiva, la expresión (6.IV) caracteriza en general unas oscilaciones explosivas que desembocan en la catástrofe, dado que valores negativos de B_t son incompatibles con lo que esta variable pretende representar, a saber, número de personas en edad productiva y reproductiva.

Desde luego este resultado no es atractivo, pero tampoco ha de ser rechazado de plano. En primer lugar, porque es dado esperar "catástrofes" a largo plazo para variables biológicas o sociales. En segundo lugar, porque desde una óptica más acorde con la escala temporal que generalmente preocupa, la trayectoria obtenida no refleja sino parcialmente (en el mejor de los casos) los determinantes de las trayectorias efectivas. En tercer lugar, en fin, porque variables biológicas y sociales suelen estar protegidas por complejos mecanismos de emergencia que entran en acción precisamente para bloquear o corregir las oscilaciones brutales que pondrían en peligro la perdurabilidad del sistema; y en tal caso la estabilidad de los parámetros pasa a ser una ficción insostenible.

Como ejemplo de un efecto amortiguador, vamos a estudiar a continuación el juego combinado de las restricciones demográficas y alimenticias, que han operado en solitario en los dos modelos recién expuestos. Volveremos así al modelo de partida y completaremos la presente investigación.

7. Dinamica combinada

A partir del modelo básico expuesto al comienzo de este trabajo, hemos analizado en las secciones precedentes cuatro casos sencillos caracterizados bien por la trayectoria temporal (estado estacionario y expansión uniforme), bien por un condicionante dinámico único (coeficiente demográfico y sobreproducto bruto). Pero uno de los rasgos peculiares del modelo básico consistía precisamente en que la secuencia de estados del sistema considerado podía venir determinada por uno u otro de los factores dinámicos seleccionados, en función de la restricción dominante en un momento dado. Ahora bien, bajo tales supuestos, ya no es posible disponer de una fórmula compacta que permita obtener mediante funciones elementales el valor de la variable dependiente estándar. En otras palabras, ya no somos capaces de hallar una expresión específica del género

$$B_t = f(k_1, k_3, \beta, P_o, t)$$

como las presentadas en (3.II), (4.VII), (5.I) ó (6.III).

Sin embargo, dadas unas condiciones iniciales y unos coeficientes estructurales, mediante la aplicación de procedimientos iterativos que sólo requieren cálculos elementales, es posible determinar las secuencias de cualquier ejemplo numérico. A modo de ilustración, y como primera modalidad de tratamiento del modelo básico, empezaremos con el aludido método artesanal.

7.1. *Ejemplo numérico*

El siguiente ejemplo numérico no tiene más objeto que mostrar cómo, mediante técnicas aritméticas sencillas, se logra determinar la trayectoria de un sistema del género aquí estudiado, una vez se conocen las condiciones de partida y los coeficientes estructurales. Pretendemos, de paso, negar pertinencia a una pauta implícitamente adoptada en no raras ocasiones y que podría resumirse en la frase: "Si se puede hacer complicado, ¿por qué hacerlo sencillo?"

Los datos iniciales son los siguientes. Suponemos una comunidad dividida en tres grupos de edad, la numerosidad de los cuales es: $A_o = 840$, $B_o = 400$, $C_o = 200$. Supondremos también que $k_1 = 0{,}5$ y $k_2 = 0{,}5$. Como en el modelo básico, k_3 es variable, dependiendo ya de la capacidad genésica (supondremos que $g = 2{,}5$), ya del sobreproducto bruto disponible para los preproductivos. Desde el punto de vista de la producción y consumo también los datos se consideran conocidos: haremos $\alpha = 1$ cesta de consumo por persona y período y supondremos que $\beta = 3{,}5 \quad \alpha = 3{,}5$. Por tanto,

(2.9): $$A_{t+1} = \text{mín}\left(g \,.\, B_t\,,\ \frac{S_t^b}{\alpha}\right)$$

expresión que, con los datos hipotéticos apuntados, se convierte en

$$A_{t+1} = \text{mín}\,(2{,}5\,B_t,\ 3{,}5\,B_t - (B_{t+1} + C_{t+1})) \qquad (7.1)$$

Para facilitar la construcción de la tabla de datos, conviene asimismo anotar de forma expresa la producción (0) y el consumo (D). Según lo argumentado previamente,

$$0_t = \beta B_t = 3{,}5\ B_t \qquad (7{,}2)$$

$$D_t = \alpha P_t = A_t + B_t + C_t \qquad (7.3)$$

Nótese que hemos supuesto a lo largo de todo el trabajo que el producto sólo estaba disponible en el período siguiente y que podía aparecer producto sobrante si jugaba la restricción genésica. Por consiguente:

$$0_t \geqslant D_{t+1}$$

o sea,

$$\beta\, B_t \geqslant \alpha\, P_{t+1} \qquad \therefore\ 3{,}5\ B_t \geqslant A_{t+1} + B_{t+1} + C_{t+1} \qquad (7.4)$$

Con los datos que acabamos de presentar la construcción de una tabla de períodos sucesivos es una tarea sumamente fácil. Ante todo expondremos de manera detallada cómo se obtienen los valores de la columna (t+1), conocidos los valores de la columna (t). Por ejemplo, para la columna (1):

t	**0**	**1**
A_t	840	$\text{mín}\begin{bmatrix} g\,B_o = 2{,}5\ .\ 400 = 1000 \\ \dfrac{S_o^b}{\alpha} = 3{,}5\ .\ 400 - (B_1 + C_1) = 780 \end{bmatrix}$
B_t	400	$k_1\ A_o = \dfrac{1}{2} \cdot 840 = 420$
C_t	200	$k_2\ B_o = \dfrac{1}{2} \cdot 400 = 200$
0_t	$\beta B_o = 3{,}5\ .\ 400 = 1400$	$\beta B_1 = 3{,}5\ .\ 420 = 1470$
D_t	$\alpha\, P_o = A_o + B_o + C_o = 1440$	$\alpha\, P_1 = A_1 + B_1 + C_1 = 1400$

Expuesta ya la mecánica de cálculo, podemos desarrollar la tabla completa. El juego concluye en el momento en que A_t se hace inferior a cero, lo que en este ejemplo se produce en el período noveno.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_t	840	1.000	1.050	975	1.087	917	1.173	790	1.362	502
		780	870	735	938	632	1.091	403	1.434	<0
B_t	400	420	390	435	367	469	316	545	201	681
C_t	200	200	210	195	217	183	234	158	272	100
O_t	1.400	1.470	1.365	1.522	1.284	1.641	1.106	1.907	703	
D_t	1.440	1.400	1.470	1.365	1.522	1.284	1.641	1.106	1.835	

7.2. *Solución general mediante ordenador*

Es fácil percatarse de que las características iterativas de la problemática que nos ocupa se adecúan bien al tratamiento mediante ordenador. La mejor forma de comprobarlo es exhibir un programa de cálculo capaz de realizar sistemáticamente las operaciones requeridas para casos análogos al ejemplo numérico recién presentado.

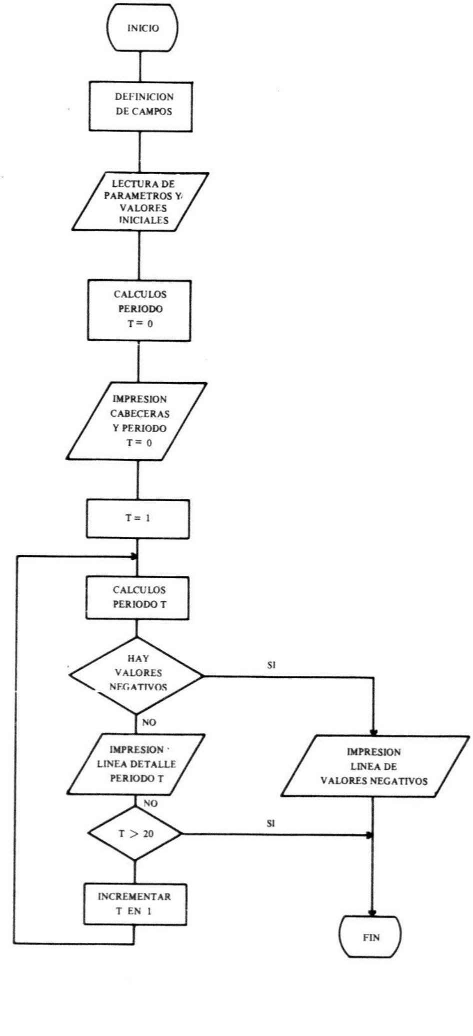
Para confirmar esos extremos presentamos a continuación un programa realizado en lenguaje FORTRAN, que tabula en pocos momentos la secuencia de valores de las variables demográficas y económicas para cada conjunto de parámetros y datos iniciales.

```
C
C          ***********  MODELO DEMOGRAFICO ***********
C
C                       ABRIL 1982
C
C DEFINICION DE CAMPOS
C
      INTEGER  T,Z,AT,BT,CT,CONST,PRODT
      REAL A0,B0,C0,K1,K2,K3G,ALFA,BETA,S1,S2,A,B,C,CONSUM,PRODUC
      DIMENSION A(21),B(21),C(21),CONSUM(21),PRODUC(21)
C
C LECTURA DE VALORES INICIALES Y PARAMETROS
C
      READ(1,3003) A(1), B(1), C(1)
      READ(1,3003) K1,K2,K3G
      READ(1,3003) ALFA,BETA
C
C CALCULOS DEL PRIMER PERIODO
C
      CONSUM(1) = ALFA * (A(1) + B(1) + C(1))
      PRODUC(1) = BETA * B(1)
      AT = A(1)
      BT = B(1)
      CT = C(1)
      CONST = CONSUM(1)
      PRODT = PRODUC(1)
```

```
C
C      IMPRIMIR CABECERAS
C
       WRITE(3,8001)
       WRITE(3,8002) AT, BT, CT
       WRITE(3,8003) K1, K2, K3G
       WRITE(3,8004) ALFA, BETA
       WRITE(3,8005) CONST, PRODT
       WRITE(3,8006)
       WRITE(3,8007)

C
C RUTINA DE CALCULO
C
2003   DO 1000 Z = 2,21,1
       B (Z) = K1 * A (Z-1)
       C (Z) = K2 * B (Z-1)
       S1 = K3G * B (Z-1)
       S2 = (BETA * B (Z-1) - ALFA * (B (Z) + C (Z))) / ALFA
       A(Z) = AMIN1 (S1,S2)
       CONSUM (Z) = ALFA * (A (Z) + B (Z) + C (Z))
       PRODUC (Z) = BETA * B (Z)
       AT = A(Z)
       BT = B(Z)
       CT = C(Z)
       CONST = CONSUM(Z)
       PRODT = PRODUC(Z)
       T = Z - 1
C
C SI HAY VALORES NEGATIVOS O NULOS, ACABAR
C
       IF (AT - 0) 2000,2000,1001
1001   IF (BT - 0) 2000,2000,1002
1002   IF (CT - 0) 2000,2000,1003
C
C      IMPRIMIR LINEA DETALLE
C
1003   IF (PRODUC(Z-1) - CONSUM(Z)) 6001,6001,6002
6001   WRITE(3,8009) T, AT, BT, CT, CONST, PRODT
       GO TO 6003
6002   WRITE(3,8008) T, AT, BT, CT, CONST, PRODT
C
C    ASIGNACION DE VALORES ENTEROS A LAS VARIABLES
C
6003   A(Z) = AT
       B(Z) = BT
       C(Z) = CT
C
C      FIN DE LA RUTINA DE CALCULO
C
1000   CONTINUE
       GO TO 2005
C
C      IMPRIMIR LINEA DETALLE FINAL
C
2000   WRITE(3,8007)
       WRITE(3,8010) T, AT, BT, CT
C
C FINAL
C
2005   STOP
C
C DEFINICION DE FORMATOS
C
3003   FORMAT(3F10.0)
8001   FORMAT(1H1,19X,'M O D E L O   D E M O G R A F I C O',78X)
8002   FORMAT(1H-,3X,'VALORES INICIALES   A(0)= ',I5,'         B(0)= ',I5,
     C '         C(0)= ',I5,62X)
8003   FORMAT(1H0,3X,'PARAMETROS   K1= ',F5.2,'          K2= ',F5.2,
     C '          K3(G)= ',F5.2,68X)
8004   FORMAT(1H0,16X,'ALFA= ',F5.2,'        BETA= ',F5.2,87X)
8005   FORMAT(1H-,3X,'PERIODO INICIAL   CONSUMO= ',I5,
     C '         PRODUCCION= ',I5,73X)
8006   FORMAT(1H-,3X,'PERIODO (T)  A(T)   B(T)   C(T)',8X,
     C 'CONS(T)  PROD(T)  PROD. NO CONSUMIDO',54X)
8007   FORMAT(1H ,132X)
8008   FORMAT(1H0,11X,I2,3(2X,I5),9X,2(I5,4X),'  SI',67X)
8009   FORMAT(1H0,11X,I2,3(2X,I5),9X,2(I5,4X),'  NO',67X)
8010   FORMAT(1H0,11X,I2,3(2X,I5),4X,'FINAL POR VALOR NEGATIVO O NULO',
     C ,62X)
       END
```

El programa expuesto se ajusta al siguiente ordinograma, que puede orientar al lector no avezado sobre la sucesión de operaciones llevadas a cabo por el ordenador. Conviene puntualizar que el programa elaborado termina o bien cuando aparecen valores negativos (resultado incongruente) o bien en el período vigésimo (a fin de evitar el desperdicio de tiempo de máquina cuando aparecen sucesiones estables). Evidentemente, la elección del período vigésimo es parcialmente arbitraria: el programa puede ajustarse mediante leves modificaciones de modo que opere hasta el período **n**, siendo **n** cualquier número natural prefijado.

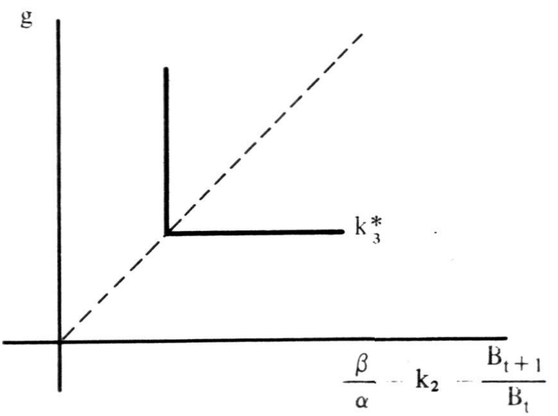


7.3. *Estudio de un caso especial*

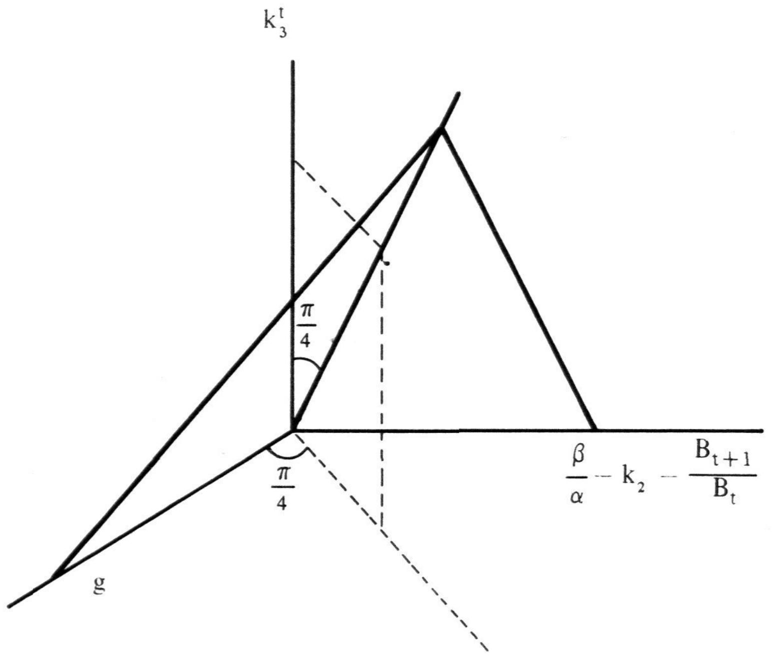
Las complicaciones con que hemos tropezado desde el principio de la presente sección tienen como origen la condición (2.10), a saber:

$$k_3^t = \text{mín}\,(g,\ \frac{\beta}{\alpha} - k_2 - \frac{B_{t+1}}{B_t})$$

Esta relación funcional poco habitual puede ser representada del siguiente modo, tomando como variables independientes los dos factores operativos (y suponiendo, por tanto, que g puede variar). Para un k_3 dado el conjunto de pares de valores correspondientes a g y a $\frac{\beta}{\alpha} - k_2 - \frac{B_{t+1}}{B_t}$, *cuya imagen es el* k_3 *en cuestión, dibujan en el pla*no una línea angulada del siguiente aspecto:



Generalizando, el conjunto de todos los casos posibles se puede representar en el espacio tridimensional como dos semiplanos que se cortan en una cresta, como intenta mostrar la siguiente figura.



Como cierre de esta investigación, vamos a analizar ahora el caso especial consistente en suponer que k_3 se halla siempre sobre la cresta del dibujo anterior. Esto equivale a decir que

$$g = \frac{\beta}{\alpha} - k_2 - \frac{B_{t+1}}{B_t} \tag{7.5}$$

de donde se sigue la ecuación en diferencias finitas,

$$B_{t+1} + (g - \frac{\beta}{\alpha} + k_2)\ B_t = 0$$

cuya ecuación característica es

$$m + g - \frac{\beta}{\alpha} + k_2 = 0$$

Por consiguiente,

$$B_t = L\left(\frac{\beta}{\alpha} - k_2 - g\right)^t \qquad (7.1)$$

siendo L una constante indeterminada.

Nótese que de la expresión (7.I) se desprende que

$$\frac{\beta}{\alpha} > k_2 + g \qquad (7.II)$$

En fin, la sucesión obtenida será divergente si la expresión entre paréntesis es mayor que 1, y convergente si es igual o menor que 1.

8. Regreso a tierra

Como ya se ha advertido en el preámbulo, los ejemplos de modelación aquí presentados constituyen ante todo un ejercicio escolar, pues no pretenden decir gran cosa del mundo real. Conviene recalcar también que la construcción de modelos de sistemas sociales mediante la generalización depurada de ejemplos concretos o aplicando el fórceps de la lógica a conjeturas interesantes, han de ser utilizados frente a los datos empíricos no como maquetas, sino más bien como diseños esquemáticos y orientadores. No imponen una regla precisa, sino que facilitan la interpretación de ciertos datos. Los acontecimientos reales son regidos por múltiples relaciones y factores contingentes. El análisis preciso de estas relaciones facilita la comprensión de procesos que no siguen pautas únicas, pero que tampoco pueden ser inteligibles sin la presunta existencia de leyes subyacentes. Naturalmente, una generalización será vacía si no admite un amplia elasticidad y múltiples singularidades que las investigaciones específicas deberán poner de manifiesto. Pero rehusar las leyes generales porque operan conjuntamente con reglas particulares y acontecimientos contingentes, es cerrar el camino a los proyectos (aún verdes) de explicación científica de los procesos sociales.

A pesar de todo, es legítimo preguntar si la serie de modelos formales aquí presentados son algo más que elucubraciones matemáticas. Hay una sospecha difusa de que la proliferación de este tipo de constructos no corre pareja con un aumento del conocimiento, sino que su principal función es la de engrosar el "curriculum" de los autores. Esta sospecha es fácilmente verificable, pero no se descalifican con ella los esfuerzos para abordar en términos rigurosos la explicación científica en las ciencias humanas. Otro argumento frecuentemente aducido asevera que las ciencias sociales no son ciencias exactas, lo cual, si bien se mira, no es más que una proposición retórica y, por añadidura, bastante estéril. No es éste el momento de entrar en una discusión sobre tales cuestiones. Pero creo apropiado terminar con un ejemplo hipotético que ponga de manifiesto la posible utilidad práctica de los modelos ofrecidos.

Imaginemos un etnólogo dedicado a trabajos de campo que acude a estudiar una pequeña comunidad parecida a las que hemos descrito en este artículo. Sus indagaciones sobre tasas de mortalidad y natalidad, así como de los procesos de recolección y consumo le inducen a pensar que, efectivamente, se las tiene que ver con un grupo social que se encuentra en estado estacionario desde hace varias generaciones. Si nuestro etnólogo imaginario sólo domina las técnicas de observación-participante, logrará sin duda publicar un detallado informe sobre división del trabajo, relaciones entre sexos, formas culturales, hábitos alimenticios, etc., etc. Supongamos ahora que nuestro etnólogo sabe también que la situación de estado estacionario con coeficientes demográficos y económicos constantes ha de presentar forzosamente las relaciones halladas en la sección 3 de esta investigación. En tal caso puede comparar los datos efectivos con los datos teóricos. Si coinciden, toda va bien. Supongamos que no coincidan: existe una anomalía que debe ser esclarecida. Quizás no fueron constantes los coeficientes demográficos y económicos, y entonces habrá que indagar en esta dirección. Pero tal vez la explicación es socio-cultural: por ventura la comunidad en cuestión tuvo un conflicto con alguno de sus vecinos, perdió la guerra y el recuerdo de la derrota es un tema tabú, al cual no habría podido acceder nuestro etnólogo sin el auxilio de un punto de referencia deducido formalmente y cuantitativamente preciso.

Agradecimientos

El programa de ordenador presentado en la sección 7.2 fue realizado por Xavier Navarro, licenciado en Físicas y ex-profesor de la Universidad de Valencia, como gracioso favor personal. Las ideas, gráficos y fórmulas de la sección 7.3 fueron amablemente cedidos por César Molinas, profesor del Departamento de Estadística y Econometría de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Barcelona. A ambos quiero expresar públicamente mi reconocimiento y gratitud por su pronta y eficaz ayuda.

BIBLIOGRAFIA

BARCELO, A.: (1981), *Reproducción económica y modos de producción.* Barcelona, Serbal.

GANDOLFO, G.: (1976), *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica.* Madrid, Tecnos.

GOLDBERG, S.: (1964), *Ecuaciones en diferencias finitas.* Barcelona, Marcombo.

MEILLASSOUX, C.: (1975), *Femmes, greniers et capitaux.* Paris, Maspero.

SRAFFA, P.: (1960), *Production of commodities by means of commodities.* London, Cambridge U.P.