MIQUEL PUIG

# Sobre la existencia de equilibrio con expectativas racionales en mercados de capital

## I. INTRODUCCION

Una corriente de la literatura económica de las Expectativas Racionales ha desarrollado la idea apuntada por Lucas (1972) de que si los precios reflejan las diferentes expectativas de los agentes que concurren en el mercado (à la Arrow) un agente ha de ser capaz, observando el precio formado, de deducir perfecta o imperfectamente el estado de las expectativas de sus colegas, y corregir en consecuencia la propia. La principal conclusión de esta literatura es que en ausencia de "ruido" (cuando las expectativas pueden deducirse perfectamente) toda la información en manos de los agentes es observable a todo el mundo, de manera que el precio realmente formado coincide con el que resultaría del intercambio entre agentes que poseyesen todos y cada uno la totalidad de la información entre todos poseída y de manera que se anula el incentivo privado a la captación de información costosa[1]. Esta última consecuencia implica la inexistencia del equilibrio del mercado: si la información llega al mercado su valor privado es nulo, si no lo hace es positivo y existen incentivos para captarla.

El objetivo de este artículo es poner de manifiesto una limitación a este resultado. Para hacerlo se estudiará uno de los modelos más clásicos de la literatura en cuestión, que es reproducido en el apartado II y analizado más a fondo en III.

1. Sobre los supuestos en que descansan estos resultados puede consultarse M. Puig, "Transmisión de Información y precios en mercados especulativos". La exigencia clave es la inexistencia de transacciones fuera del precio de equilibrio.

## II. El modelo Grossman-Stiglitz (1976)

Estudiaremos el mercado de un activo cuyo rendimiento futuro (r) consta de una parte observable ($\eta$) a un coste y una parte inobservable ($\xi$):

$$r = \eta + \xi \qquad E(\xi) = E(\xi\eta) = 0$$

Suponemos la existencia de dos tipos de agentes. Los primeros (I) han observado la realización de $\eta$ y están por tanto en posición de predecir $r$ con mayor exactitud que el segundo grupo (N). La demanda del primer grupo será lógicamente función, entre otras cosas, tanto de $\eta$ como del precio del activo (p):

$$R^I = R^I(\eta, p) \qquad (1)$$

El segundo grupo no ha observado $\eta$ pero puede deducir de $p$ el comportamiento de los I, y por tanto $\eta$. Su demanda será tan sólo función de $\rho$, pero utilizará el hecho de que a su vez $\eta$ es función de este precio.

$$R^N = R^N(p) \qquad (2)$$

$$p = p(\eta) \qquad (3)$$

Tal como están las cosas no puede predecirse el signo de la derivada parcial de $R^d_N$ respecto de $p$.

La relación entre $\eta$ y $p$ proviene de la condición de equilibrio en el mercado del activo:

$$n^I R^I(\eta, p) + n^N R^N(p) = \bar{R}\, p \qquad (4)$$

donde $n^I$ expresa el número de agentes informados (I); $\bar{R}$ el número total de títulos del activo en el mercado, y $\bar{R}p$ su valor.

De (4) se deduce la función (3), que es la que utilizan los agentes N para construir la (2). Se define un Equilibrio con Expectativas Racionales (EER) como una función $p^0(\eta)$ tal que si $R^N(p)$ y $R^I(p, \eta)$ maximizan las funciones de utilidad esperada de los agentes, entonces $p^0(\eta)$ es la solución de (4) para todo $\eta$.

El resultado fundamental radica en que la observación del precio revela a través de (3) el valor de $\eta$ a los N, los cuales están, por tanto, en la misma posición que los I pero sin haber pagado el coste de la observación directa. El mercado no puede encontrar un equilibrio porque ningún agente estará dispuesto a pagar por la observación de $\eta$, puesto que ésta no tiene ningún valor privado. Pero si ningún agente lo hace entonces el precio no transmite información en absoluto sobre $\eta$, y su observación directa vuelve a tener valor privado.

## III. Examen del modelo

Nos detendremos aquí a examinar el funcionamiento del modelo desde una perspectiva más económica. En primer lugar supongamos que la demanda del activo por parte del agente $i$ sigue la forma generada por el modelo Sharpe-Lintner:

$$\hat{w}^i = -\frac{V_1^i}{V_2^i} [\Omega]^{-1} (\hat{\eta} - R) \tag{5}$$

donde $\hat{w}$ es el vector de porciones de cartera dedicados a cada activo; $\hat{\mu}$ el vector de rendimientos esperados; R el rendimiento del activo "seguro"; $\Omega$ la matriz de covarianzas de los rendimientos de todos los activos; y $V_1$ y $V_2$ las derivadas parciales de la esperanza de la función de utilidad:

$$E[U^i(\cdot)] = V^i(\mu \cdot \frac{G^2}{2}) \tag{6}$$

Recordemos que precisamente el modelo sólo tiene validez cuando la función de utilidad puede ser expresada en función de sólo rendimientos y varianzas. Las justificaciones son diversas (aproximación cuadrática a la función de utilidad, postulando la función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern, etc.).

De (5) se deduce que la cantidad de riqueza mantenida en forma de cada activo será:

$$\hat{R}^i = -\frac{V_1^i}{V_2^i} [\Omega]^{-1} (\hat{\mu} - R) \cdot W^i \tag{7}$$

donde $W^i$ representa la cartera total del individuo $i$.

Podemos reescribir (7) para cada activo $j$ como:

$$R_j^i = a_i \mu_j + b_i \tag{8}$$

donde los coeficientes *a* y *b* dependerán de la actitud frente al riesgo del individuo *i*, de su riqueza y del rendimiento esperado en todos los demás activos. Esta es la función que utilizaremos[2].

Volviendo al modelo anterior, expresemos el rendimiento esperado del activo en cuestión ($\mu$) como el cociente entre $\eta$ y el precio observado

$$\mu_j = \frac{\eta_j}{p_j} \tag{9}$$

de manera que (8) se reescribe

$$R_j^i = a_i \frac{\eta_j}{p_j} + b_i \tag{10}$$

Pasemos a agregar las funciones (10) de cada agente del grupo I obteniendo

$$R^I = a\frac{\mu}{p} + b \qquad \left.\begin{array}{l} a = \Sigma\, a_i \\ b = \Sigma\, b_i \end{array}\right\} \quad \forall\, i \in I \tag{11}$$

donde se han eliminado los subíndices j, pero donde se ha de entender que todavía nos referimos al mercado de un activo de los *n* que componen la cartera.

Podemos sustituir (11) en la ecuación (4) de equilibrio del mercado

$$\lambda \left(a\frac{\eta}{p} + b\right) + (1-\lambda)\, R^N(p) = \overline{R}p \tag{12}$$

donde $\lambda$ representará la proporción de cartera total en manos de los I.

Si las conclusiones del modelo Grossman-Stiglitz son válidas, el precio formado coincide con el que se formaría si toda la información estuviese en manos de todos los agentes:

$$\lambda \left(a\frac{\eta}{p} + b\right) + (1-\lambda)\left(a\frac{\eta}{p} + b\right) = \overline{R}p \tag{13}$$

2. En lo que sigue los efectos riqueza producidos por cambios en la cotización del activo en estudio son negligidos. Su consideración complicaría la exposición sin alterar el contenido.

donde suponemos, para simplificar la exposición, que las actitudes frente al riesgo medias son iguales en los dos grupos (I y N).

De (13) se deduce $p(\eta)$:

$$\bar{R}p^2 - bp - \eta a = 0 \tag{14}$$

ecuación que presuntamente utilizan los N para deducir $\eta$:

$$\eta = \frac{\bar{R}p - b}{a} p \tag{15}$$

y por tanto su demanda queda:

$$R^N(p) = a\frac{\bar{R}p - b}{a} + b = \bar{R}p \tag{16}$$

que como se observa depende positivamente del precio del activo. En equilibrio los N mantendrán $(1-\lambda)\bar{R}$ títulos y los I lo harán con el resto, $\lambda\bar{R}$. Puede comprobarse fácilmente que si los N se comportan según la función (16) el precio seguirá la (14) y que es por consiguiente un EER.

¿Cuál es el significado económico de (16)? Es la consecuencia de la idea de que el mercado se encargará de que todos los activos tengan el mismo rendimiento neto (corregido de su riesgo) y que por tanto los precios serán irrelevantes para decidir en qué activo invertir. Las actitudes frente al riesgo son el único determinante: una vez esto decidido el número de títulos se mantendrá sea cual sea su precio.

¿Puede funcionar, sin embargo, un mercado donde gran parte de los agentes se comportan de esta forma, interpretando movimientos en los precios como movimientos proporcionales del rendimiento esperado? La respuesta es negativa.

En efecto, supongamos que cae un x % respecto del periodo corriente. El precio actual de equilibrio tendría que ser tal que indujera a los I a mantener su parte del total:

$$\lambda \left[ a \frac{\eta(1-x)}{\rho(1-y)} + b \right] = \lambda \bar{R} p \tag{17}$$

de donde se puede deducir que la caída porcentual del precio (y) tendrá que ser:

$$(1-y) = \frac{b \pm [b^2 + 4\,\overline{R}\,a\,\eta\,(1-x)]^{1/2}}{2\,\overline{R}\,p} \tag{18}$$

¿Cómo tendrá lugar esta caída? El grupo I, habiendo observado $\mu$, se da cuenta de que el activo está sobrevalorado y decide deshacerse de él. Nadie compra, puesto que la política de los N consiste precisamente en no comprar ni vender. El precio cae sin que tenga lugar ninguna transacción hasta el nivel $(1-y)$, en el cual los I están dispuestos a continuar manteniendo el activo en cartera. Ambos grupos han experimentado idéntica pérdida de capital.

En definitiva, las hipótesis de partida nos conducen a un mercado sin transacciones, donde un grupo, seguramente marginal, de agentes informados trata infructuosamente de comprar o vender títulos con el único resultado de revelar al mercado el valor del título: su información. Ciertamente un mercado como éste tiene un equilibrio en el punto en que ningún agente está informado, puesto que ni tan solo en este caso la información tiene ningún valor privado. Pero este resultado es espúreo, porque un mercado sin transacciones ha perdido una parte fundamental de su razón de ser como tal.

Apresurémonos a notar que no podemos introducir un componente estocástico de transacciones independiente del mecanismo en estudio, puesto que representaría precisamente "ruido", y imposibilitaría por sí mismo la transmisión de información a través del precio.

¿Se debe este resultado a la hipótesis de idéntica actitud frente al riesgo de los dos grupos, implícita en (13)? Para averiguarlo supongamos que los dos grupos presentan coeficientes distintos:

$$\lambda\,(a\frac{\eta}{\rho} + b) + (1-\lambda)\,(a'\frac{\eta}{p} + b') = \overline{R}\,p \tag{13'}$$

cuya solución es

$$p = \frac{\lambda\,a + (1-\lambda)\,a'}{\overline{R} - \lambda\,b - (1-\lambda)\,b'}\,\eta \tag{14'}$$

$$\eta = \frac{\overline{R}\,p - \lambda\,b - (1-\lambda)\,b'}{\lambda\,a + (1-\lambda)\,a'}\,p \tag{15'}$$

y finalmente

$$R^N(p) = a' \frac{\bar{R}p - \lambda b - (1-\lambda) b'}{\lambda a + (1-\lambda) a'} - b' \qquad (16')$$

que es también función creciente de *p*, pero que no implica el mantenimiento de un número constante de títulos:

$$\frac{R^N(p)}{p} = f(p) \qquad (19)$$

siendo ambiguo el signo de la derivada parcial respecto de *p*.

La ecuación (19) implica que a cada $\eta$ –y al precio correspondiente– se asocia una diferente distribución de títulos, lo que significa que cada nueva observación de $\eta$ comportará transacciones entre los dos grupos.

Supongamos que (19) es una función decreciente del precio: menor precio, mayor el número de títulos en manos de los N y menor en las de los I. Esto implica que la división de los agentes entre I y N viene determinada por sus respectivas aversiones al riesgo, y no por ninguna otra variable.

Existirá un límite inferior al precio a partir del cual la totalidad de los títulos de los I pasaría a los N; llamémosle $p_{min}$. A él le corresponde un $\eta_{min}$.

Cuando $\eta \leqslant \eta_{min}$ los I reaccionarán poniendo a la venta sus títulos. Si el precio se estabilizase en $p_{min}$ los I se ahorrarían una pérdida de capital equivalente a

$$\left[a\left(\frac{\eta}{p}\right)_{-1} + b\right]\left[p^0(\eta) - p_{min}\right]$$

Simétricamente, existirá un límite superior ($p_{max}$) a partir del cual todos los títulos pasarían a manos de los I, los cuales se beneficiarían de una ganancia de capital similar a la anterior.

Ahora bien, cuando los N observan $p = p_{min}$ deducen correctamente que $\eta \leqslant \eta_{min}$ y por tanto no estarán dispuestos a comprar todo el paquete a este precio. Pero rehusarse completamente a comprar porque no se dispone de información exacta no es la conducta óptima por parte de los N. Estos han de deducir de la observación de $p_{min}$ una distribución condicional de $\eta$ a la que corresponderá un nuevo precio, $p_{smin}$, al cual los N estarán dispuestos a hacerse con todo el paquete, y que dependerá de su aversión al riesgo (incluyendo la posible pérdida de capital en la compra). Sin embargo ahora está en la mano de los I el vender o no a este $p_{smin}$, y lo harán en general si $\eta \leqslant \eta_{smin}$, es decir, si se realizan ganancias de capital. A su vez los N no pueden deducir de estas ventas que la operación les sea necesariamente desventajosa por dos motivos: porque $\eta$ puede valer precisamente $\eta_{smin}$ y porque la venta por parte de un I no implica necesariamente la existencia de una ganancia de capital, puesto que puede tratarse de la respuesta a la necesidad de ajustar la cartera aunque $\eta$ sea ligeramente superior a $\eta_{smin}$.

La situación anterior es crucial para determinar el valor de la información privada, y elimina por este motivo la posibilidad de que parte de los agentes presuntamente incluidos en I (debido al carácter de su aversión al riesgo) decidan no estarlo en base a que ellos también pueden deducir $\eta$ a partir de $p$, cosa que precisamente no puede hacerse cuando $p = p_{smin}$.

Idéntico tratamiento puede recibir el límite superior del precio, que quedará fijado en un $p_{smax}$.

Observamos pues que aunque no haya "ruido" en el mercado, la posesión de información tiene un valor privado equivalente a la utilidad de estas ganancias de capital, que en equilibrio tendrá que igualar la utilidad del coste de la información. El equilibrio en el mercado existirá y puede ser doble: o un pequeño I que juega a salir del mercado cuando $\eta \leqslant \eta_{smin}$ ahorrándose ciertas pérdidas de capital (y en este caso el coste de la información es el precio del seguro) o bien un gran I que juega a quedarse el paquete de unos pocos –los N– a un precio subvalorado en circunstancias excepcionalmente buenas.

Por el contrario, si (19) es una función creciente del precio y los I observan un descenso de $\eta$ pondrán a la venta sus títulos, el precio bajará y los N interpretarán correctamente que $\eta$ ha bajado y que por tanto el número de títulos en su cartera ha de disminuir: todos venden y el precio de cae hasta el nuevo punto de equilibrio $p^0$ $(\eta)$. Pero ahora no hay un límite inferior, puesto que hasta $p^0$ $(\eta)$ el grupo N está en posición oferente. De igual manera, no habrá un límite superior, puesto que hasta $p^0$ $(\eta)$ los N estarán en posición demandante.

En este caso el mercado no puede determinar una proporción de equilibrio de agentes informados, puesto que éstos no están en posición de realizar ganancias de capital. Pero esta situación no excluye la anterior: existe un incentivo para que la parte del grupo N con mayor elasticidad-precio (en valor absoluto) se constituya en grupo I, y la situación revierte a la anterior. El mercado puede encontrar un equilibrio con una cierta cantidad de información.

## IV. Consideraciones sobre la externalidad de la informacion

En el modelo anterior los N ajustan su cartera a los cambios de $\eta$, observables a través del precio. Estos reajustes incrementan la utilidad de estos agentes en la medida en que prefieren mantener la cartera óptima de acuerdo con su aversión al riesgo a una que no lo sea (y que corresponde a un $\eta$ pretérito). La información captada por unos agentes tiene, por tanto, una externalidad.

Pero cuando $\eta$ sobrepasa la banda antes señalada, el precio deja de transmitir información exacta. Los agentes N son incapaces de ajustar su cartera perfectamente. Y a la inversa, los I se ven obligados a veces a mantener una cartera incorrecta sencillamente porque los N sólo están dispuestos a comprar a un precio ($p_{smin}$) inferior al que corresponde al rendimiento esperado.

Observamos, pues, que en este tipo de mercados, en los que a lo que se juega es a engañar al contrario, existe una contradicción entre la externalidad de la información y el valor privado de ésta. Más de la primera implica menos de la segunda, y viceversa. En este sentido el espíritu del modelo Grossman-Stiglitz queda inalterado.

## V. Conclusiones

La posibilidad de invertir la función del precio y determinar a partir de la observación de éste la información en manos de los agentes comporta la posibilidad de que parcial o totalmente desaparezcan los beneficios privados de poseerla. Si esta desaparición fuese total el mercado no podría encontrar un equilibrio cuando la captación de información es costosa.

Este resultado no es, sin embargo, robusto. Con un sencillo ejemplo se ha demostrado que en determinados casos las hipótesis o implican la desaparición del mercado como tal o que hay lugar, si el coste de la información lo permite, a que un grupo de especuladores, suficientemente pequeño, pueda salir del mercado sin provocar la caída del precio correspondiente a la del valor del activo.

El modelo también demuestra que el grupo de agentes informados que realice este juego ha de tener una determinada aversión al riesgo con relación a la del mercado: si se trata de un activo poco correlacionado con el resto, el grupo tendrá que ser relativamente poco averso al riesgo; si, por el contrario, se trata de un activo de comportamiento similar al medio (muy correlacionado), el grupo tendrá que ser relativamente muy averso al riesgo.

## REFERENCIAS

GROSSMAN, S. y STIGLITZ, J.: "Information and Competitive Price Systems", *American Economic Review*, 1976.

LUCAS, R.: "Expectations and the Neutrality of Money", *Journal of Economic Theory*, 1972.