

LLUÍS BARBÉ *

La correspondencia entre las funciones de beneficio y crecimiento de la empresa **

El objeto de este artículo es examinar cómo la función de beneficio de la empresa, esto es, la función que relaciona beneficios con tamaños, afecta a la trayectoria óptima de crecimiento. El análisis se conduce bajo la hipótesis de existencia de costes de ajuste que dan lugar a una función de costes de ajuste estrictamente convexa. Y se centra en una función de beneficio con características neoclásicas (es decir, una función que exhibe, sucesivamente, un mínimo, un punto de inflexión y un máximo).

Este tópico presenta cierta relevancia real dado que existen métodos empíricos diseñados para encontrar “economías de escala” basados en la conexión —que califican como “evidente”— entre expansión creciente y “economías de escala” de la empresa¹. Hasta ahora no se ha

* Departamento de Teoría Económica. Universitat Autònoma de Barcelona.

** Este trabajo es una aplicación específica de los modelos que hacen uso de la hipótesis sobre costes de ajuste expuestos por Arthur Treadway en un Seminario en la Complutense de Madrid allá por el año 1970. Agradezco a J. Andreu, J. Aubareda, X. Calsamiglia, J.M. Esteban, A. Mas Colell y J. Silvestre sus valiosas sugerencias y a F. Cuesta, cuya magnífica tesis doctoral fue para mí un estímulo para trabajar en este campo. La presente versión se ajusta a la comunicación presentada en el Congreso Europeo de *Econometría* de Septiembre de 1979 celebrado en Atenas.

1. Ejemplos de ello nos los suministran Stigler [10] con su “método de supervivencia” y ciertos autores que examinan la concentración industrial utilizando la versión amplia de la ley de Gibrat (Véanse Maravall [5] y Scott & Shatto [9]).

bía intentado obtener soporte teórico que sustentara dicha "evidencia": A pesar de la amplia gama de tópicos que abarca la literatura sobre costes de ajuste,² esta cuestión de cómo una función de producción específica configura la trayectoria óptima de crecimiento de la empresa no se había abordado todavía.

El problema de derivar una trayectoria óptima de crecimiento a partir de la función de beneficio estriba en el hecho de que no existe solución general para la ecuación de Euler que resulta del modelo, según se desarrolla en la Sección I. Solamente en el caso particular en que la tasa de descuento r es igual a cero puede encontrarse solución. En la Sección II se trata dicho caso, llegándose a una relación entre beneficios, costes de ajuste y crecimiento de la que puede derivarse la trayectoria óptima de crecimiento. Esta relación, que se aplica a un caso sencillo ilustrativo, se ha bautizado como Condición Ramsey, dada su analogía con el resultado obtenido por Ramsey en términos macroeconómicos.

En la Sección III se estudia el caso general en el que la tasa de descuento r difiere de cero, conduciendo el análisis con la ayuda de dos dispositivos específicos: La línea de "Puntos de Simas y Cimas" (línea PSC) donde se sitúan todos los máximos y mínimos de las trayectorias que satisfacen la condición de Euler, y la línea "Entre Ramblas y Colinas" (línea ERC) que contiene los puntos de inflexión de dichas trayectorias. Con estos instrumentos en mano demostramos: *a)* Que el máximo de la trayectoria óptima de crecimiento corresponde a un tamaño X^* que se sitúa entre el tamaño de mínimo beneficio, X_m , y el tamaño al que se produce la inflexión de la función de beneficio, X_i . El tamaño X^* es una función creciente de la tasa de descuento r , con una cota inferior X_m (cuando $r = 0$), y una cota superior X_i (cuando $r \rightarrow \infty$), mientras que el máximo $\varphi(X^*)$ de la trayectoria óptima de crecimiento es una función decreciente de la tasa de descuento r , tendiendo a cero cuando r tiende a infinito. Y *b)* La existencia de puntos de inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento no puede mantenerse en general para cualquier tipo de función de beneficio con características neoclásicas. A este respecto exhibimos un ejemplo con una específica función "neoclásica" de beneficio que da lugar a una trayectoria óptima de crecimiento sin puntos de inflexión. Demostramos, además, que añadiendo una hipótesis de convexidad "bien comportada" a la función de costes de ajuste, esto es, suponiendo una convexidad estricta uniforme o cre-

2. Véanse Jorgenson [3], Eisner & Strotz [1], Lucas [4], Gould [2], Treadway [11] a [14], Rothschild [8] and Norstrøm [6].

ciente para dicha función, los puntos de inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento, si existen, tienen que estar situados entre el tamaño X_1 y el tamaño de beneficio máximo X^* .

Estos resultados se utilizan en la Sección IV para presentar conclusiones sobre la conexión entre "expansión creciente" y "economías de escala" de la empresa.

I. EL MODELO

Vamos a suponer que el empresario maximiza el valor actual del flujo de beneficios corrientes menos costes de ajuste, dependiendo éstos solamente de la magnitud del crecimiento (o reducción) que experimenta el tamaño de la empresa, $\dot{X} (= X'(t))$:

$$\text{Max } V = \int_0^{\infty} [\Pi(X) - C(\dot{X})] e^{-rt} dt$$

donde $\Pi(X)$ es la función de beneficio, siendo X el tamaño de la producción de la empresa; $C(\dot{X})$ es la función de costes de ajuste, en la que $C(0) = 0$, $C'(0) = 0$ y $C''(\dot{X}) > 0$ (véase la figura 1 (a)); r es la tasa de descuento (preferencia temporal) que aplicamos a un horizonte temporal infinito ($0 \leq t < \infty$).

Obsérvese que trabajamos con una función de costes de ajuste $C(\dot{X})$ que es independiente del tamaño X y, por lo tanto, separable de la función de beneficio $\Pi(X)$. Supondremos que dicha función de beneficio cumple los requisitos neoclásicos, esto es, presenta un mínimo, un punto de inflexión y un máximo, tal como se esboza en la figura 1 (b). Supondremos además que la forma de la función $\Pi(X)$ es tal que el empresario elige el tamaño X^* de beneficio máximo como meta a la que debe dirigirse. Esto significa que el valor actual de la trayectoria óptima de crecimiento que parte de X_0 —el tamaño inicial— y va al tamaño de beneficio máximo X^* es superior al valor actual de las trayectorias óptimas que van desde X_0 hacia cualquier otro tamaño³. Por ello las condiciones terminales del problema que vamos a estudiar son:

3. Con la forma "neoclásica" es posible que la trayectoria óptima sea la que conduce al tamaño 0. Este caso fue tratado por Eisner y Strotz [1]. No nos detendremos en este caso y nos concentraremos en la trayectoria óptima que va a X^* , ya que este es el caso más relevante a efectos empíricos. Para una discusión acerca de soluciones estacionarias y trayectorias óptimas, véase Treadway [11]

$$X(0) = X_0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$$

Esto es, imponemos una condición de estabilidad que operará como mecanismo de elección entre trayectorias potencialmente óptimas.

La trayectoria óptima de crecimiento cumplirá la condición de Euler:

$$C''(\dot{X}) \ddot{X} - rC'(\dot{X}) + \Pi'(X) = 0$$

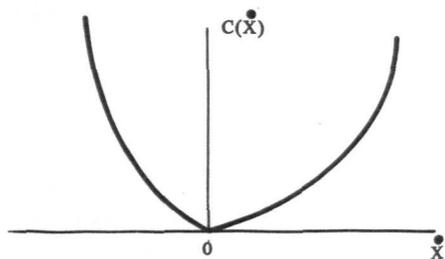


Figura 1 (a)

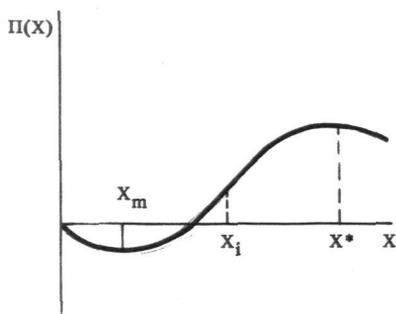


Figura 1 (b)

y la condición de Legendre para máximos regulares implicará:

$$C''(\dot{X}) > 0 \quad \text{para todo } \dot{X},$$

esto es, la función de costes de ajuste $C(\dot{X})$ tiene que ser una función estrictamente convexa en \dot{X} tal como hemos especificado al exponer el modelo⁴.

Intentemos resolver la ecuación diferencial que resulta de la condición de Euler. Vamos a empezar con el caso más sencillo, en el que $r = 0$.

4. Véase Rothschild [8].

II. EL CASO EN EL QUE LA TASA DE DESCUENTO ES CERO

Si $r = 0$, la condición de Euler se reduce a:

$$C''(\dot{X}) \ddot{X} + \Pi'(X) = 0$$

esto es,

$$C''(\dot{X}) \frac{d\dot{X}}{dX} \frac{dX}{dt} = -\Pi'(X)$$

y, por lo tanto,

$$C''(\dot{X}) \dot{X} d\dot{X} = -\Pi'(X) dX.$$

Integrando entre el momento presente t y el horizonte temporal ∞ , tenemos:

$$\int_{\dot{X}(t)}^{\dot{X}^*} C''(\dot{X}) \dot{X} d\dot{X} = - \int_{X(t)}^{X^*} \Pi'(X) dX$$

siendo $X^* = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$ y $\dot{X}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X}(t)$.

Y dado que

$$\int_{\dot{X}(t)}^{\dot{X}^*} C''(\dot{X}) \dot{X} d\dot{X} = [C'(\dot{X}) \dot{X} - C(\dot{X})]_{\dot{X}(t)}^{\dot{X}^*}$$

tenemos

$$[C'(\dot{X}) \dot{X} - C(\dot{X})]_{\dot{X}(t)}^{\dot{X}^*} = -[\Pi(X)]_{X(t)}^{X^*}$$

Aplicando los límites de integración obtenemos

$$[C'(\dot{X}^*) \dot{X} - C(\dot{X}^*) - C'(\dot{X}(t)) \dot{X}(t) - C(\dot{X}(t))] = -[\Pi(X^*) - \Pi(X(t))]$$

Dada la condición de estabilidad $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$, tenemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{X}(t) = \dot{X}^* = 0$, y, de aquí:

$$C'(\dot{X}) \dot{X} - C(\dot{X}) = \Pi(X^*) - \Pi(X)$$

donde \dot{X} es abreviatura de $\dot{X}(t)$ y X de $X(t)$.

Es decir, el producto del importe del crecimiento por los costes marginales de ajuste menos los costes totales de ajuste es igual a la diferencia entre el beneficio máximo y el beneficio corriente⁵.

A partir de esta condición —a la que nos referiremos como condición de Ramsey— podemos encontrar una función $\dot{X} = \varphi(X)$ que nos dé los importes óptimos de crecimiento en función de los tamaños. Esta trayectoria $\varphi(X)$ indica pues los sucesivos importes de crecimiento que el empresario debe adoptar.

Una ilustración

El análisis de las implicaciones de la condición de Ramsey para formas particulares de la función de costes de ajuste es, dentro de lo que cabe, bastante interesante dado que permite alcanzar conclusiones específicas. Adoptemos, por ejemplo, la forma parabólica

$$C(\dot{X}) = \frac{\delta}{2} \dot{X}^2 \quad (\text{con } \delta > 0),$$

5. Este resultado es formalmente análogo al obtenido por Ramsey [6], que dice: “la tasa de ahorro multiplicada por la utilidad marginal del consumo debe ser igual siempre al nivel de extrema felicidad (*bliss*) menos la tasa real de utilidad gozada”. En la notación de Ramsey: $(dc/dt) \cdot u(x) = B - (U(x) - V(a))$, donde (dc/dt) es la tasa de ahorro, $u(x)$ es la utilidad marginal del consumo a una tasa x , B es el nivel de “felicidad extrema”; $U(x)$ la tasa total del consumo a una tasa x y $V(a)$ la tasa total de desutilidad de una tasa de trabajo a . Este resultado lo obtiene Ramsey de la minimización de la expresión

$$\int_0^{\infty} \{B - [U(x) - V(a)]\} dt.$$

En nuestro caso, la maximización de

$$\int_0^{\infty} \{\Pi(X) - C(\dot{X})\} dt,$$

cuando existe un máximo absoluto Π^* para $\Pi(X)$, es equivalente a la minimización de

$$\int_0^{\infty} [\Pi^* - [\Pi(X) - C(\dot{X})]] dt$$

El resultado al que hemos llegado puede también escribirse de la forma: $C'(\dot{X})\dot{X} = \Pi^* - [\Pi(X) - C(\dot{X})]$, que es una expresión formalmente análoga al resultado de Ramsey, a pesar de haber sido derivado de valores absolutos X en vez de tasas x . El máximo absoluto Π^* puede ser interpretado como valor de la “felicidad extrema del empresario”. Estoy en deuda con A. Mas Colell por sugerirme la presente analogía.

que es el prototipo más sencillo bien comportado⁶ de la función de costes de ajuste que depende solamente del importe del crecimiento. Para esta forma sencilla, la condición de Ramsey deviene:

$$(\delta \dot{X} - \frac{\delta}{2} \ddot{X}) \dot{X} = \Pi(X^*) - \Pi(X)$$

esto es,

$$\frac{\delta}{2} \dot{X}^2 = \Pi(X^*) - \Pi(X)$$

y, de ahí,

$$\dot{X} = \pm \left\{ \frac{2}{\delta} [\Pi(X^*) - \Pi(X)] \right\}^{1/2}$$

Por lo tanto, obtenemos una trayectoria óptima que tiene dos ramas. Una es positiva antes del tamaño X^* y conduce a dicho tamaño de equilibrio estable. La otra es negativa antes de X^* y no es compatible con la condición de estabilidad. La rama "estable" tiene valores negativos después de X^* , tendiendo también hacia X^* como punto de equilibrio, mientras la "inestable" es positiva después de X^* . Ambas ramas son simétricas con respecto al eje de las X . La trayectoria óptima de crecimiento es la rama "estable" ya que cumple a la vez los requisitos de optimalidad y estabilidad.

Un análisis detallado de esta función —véase el Apéndice A— da lugar a las siguientes conclusiones (Figura 2):

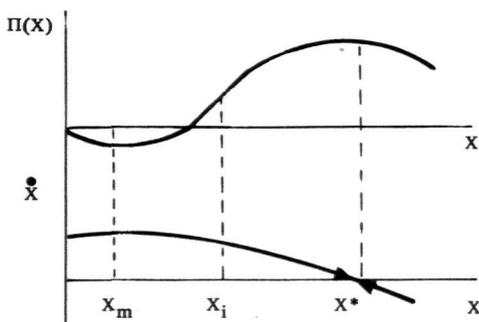


Figura 2

6. Obsérvese que tanto la condición inicial como la de Legendre se cumplen: $C(0) = 0$, $C''(\dot{X}) > 0$

1) Al tamaño X_m que minimiza la función de beneficio corresponde un máximo de la trayectoria óptima de crecimiento $\varphi(X)$.

2) Al tamaño X^* que maximiza la función de beneficio corresponde un crecimiento nulo, existiendo en este punto una inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento sólo en el caso de que $\Pi'''(X^*) = 0$.

3) La existencia de puntos de inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento en puntos aparte de X^* debe estudiarse para cada función de beneficio específica $\Pi(X)$. Estos puntos de inflexión potenciales se sitúan necesariamente entre X_1 y X^* . No hay puntos de inflexión cuando $\Pi(X)$ es un polinomio de tercer grado en X .

4) Al tamaño X_1 en el que se da un punto de inflexión de la función de beneficio, no corresponde ningún punto con propiedades específicas en la trayectoria óptima de crecimiento. Esta conclusión negativa es importante, ya que en el caso neoclásico, este punto de inflexión revela —bajo el supuesto de competencia perfecta— el mínimo de los costes marginales y, por lo tanto, indica el paso de economías de escala marginales a diseconomías de escala (también marginales).

III. EL CASO GENERAL CON TASA DE DESCUENTO DISTINTA DE CERO

En el caso general la condición de Euler se expresa:

$$C''(\dot{X}) \ddot{X} - r C'(\dot{X}) + \Pi'(X) = 0$$

Al resolver esta ecuación diferencial, tenemos:

$$C''(\dot{X}) \frac{d\dot{X}}{dX} \frac{dX}{dt} = r C'(\dot{X}) - \Pi'(X)$$

y, de ahí:

$$C''(\dot{X}) \dot{X} d\dot{X} = [-\Pi'(X) + r C'(\dot{X})] dX$$

esto es,

$$[C'(\dot{X}) \dot{X} - C(\dot{X})]_{X(t)}^{X^*} = [-\Pi(X)]_{X(t)}^{X^*} + r \int_{X(t)}^{X^*} C'(\dot{X}) dX$$

Para resolver la integral necesitamos especificaciones sobre las formas particulares que adoptan $C(\dot{X})$ y $\dot{X} = \varphi(X)$. Esta última especificación

corresponde, sin embargo, a la trayectoria óptima que estamos intentando encontrar a partir de la condición de Euler. Por lo tanto, abandonaremos la búsqueda de una solución general para dicha ecuación y procederemos del modo siguiente: Nos limitaremos a estudiar la localización de los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento en relación con los tamaños en los que la función de beneficio presenta sus valores mínimos, de inflexión o máximos.

Localización de los máximos y mínimos de la trayectoria óptima de crecimiento

Tal como hemos visto, la trayectoria óptima de expansión tiene que cumplir:

1) La condición de Euler que puede escribirse de la forma

$$C''(\dot{X}) \frac{d\dot{X}}{dX} \dot{X} = r C'(\dot{X}) - \Pi'(X)$$

y, por lo tanto, define una pendiente en cada punto de la trayectoria óptima de crecimiento:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'(\dot{X}) - \Pi'(X)}{C''(\dot{X}) X}$$

2) La condición de estabilidad. De entre todas las trayectorias que cumplen la condición de Euler (trayectorias de Euler), la trayectoria óptima de crecimiento será aquella que pase por el punto $(X^*, 0)$, ya que $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$ implica crecimiento nulo en el tamaño X^* .

Para el estudio de la localización de los máximos y mínimos de la trayectoria óptima de crecimiento utilizaremos, como instrumento analítico, la línea de "Puntos de Simas y Cimas" (línea PSC). Definiremos la línea PSC como el lugar geométrico de todos los puntos de trayectorias de Euler que tengan pendiente nula. Por ello, la línea PSC se define analíticamente de la forma:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'(\dot{X}) - \Pi'(X)}{C''(\dot{X}) X} = 0$$

De ahí que, salvo los puntos en que $\dot{X} = 0$, tal como sucede en X^* , te-

nemos que $r C'(\dot{X}) - \Pi'(X) = 0$, implica que la pendiente $d\dot{X}/dX$ sea nula. Esto significa que la función

$$H(X, \dot{X}) = r C'(\dot{X}) - \Pi'(X) = 0$$

define implícitamente otra función $\dot{X} = h(X)$ que es también la forma analítica de la línea PSC, excepto para el tamaño X^* .

Esta función $h(X)$ tiene las siguientes propiedades:

1) Pasa por los puntos $(X^*, 0)$ y $(X_m, 0)$, dado que $r C'(\dot{X}) - \Pi'(X) = 0$, se cumple en ambos puntos.

2) Las pendientes de $h(X)$ son:

$$\frac{dh}{dX} = - \frac{\partial H / \partial X}{\partial H / \partial \dot{X}} = \frac{-\Pi''(X)}{r C''(\dot{X})} = \frac{\Pi''(X)}{r C''(\dot{X})}$$

Al ser $r C''(\dot{X}) > 0$ para todo \dot{X} , tenemos:

a) $h(X)$ crece cuando $\Pi''(X) > 0$, esto es, para tamaños $X < X_i$.

b) $h(X)$ presenta un máximo cuando $\Pi''(X) = 0$, esto es, para $X = X_i$, y

c) $h(X)$ disminuye cuando $\Pi''(X) < 0$, esto es, para tamaños $X > X_i$.

3) $h(X)$ es una función estrictamente cóncava en el intervalo $X_m \leq X \leq X^*$, puesto que su segunda derivada es:

$$\frac{d^2 h(X)}{dX^2} = \frac{d(\Pi''(X)/r C''(\dot{X}))}{dX} = \frac{\Pi''' r C'' - \Pi'' r C'''}{(r C'')^2} \frac{d\dot{X}}{dX}$$

pero al ser $\frac{d\dot{X}}{dX} = 0$, tenemos:

$$\frac{d^2 h(X)}{dX^2} = \frac{\Pi'''(X)}{r C''(\dot{X})}$$

Dado que $r C''(\dot{X}) > 0$ para todo \dot{X} , y siendo $\Pi'''(X) < 0$ para X tal que $X_m \leq X \leq X^*$, tenemos $\frac{d^2 h(X)}{dX^2} < 0$, es decir, concavidad estricta para dichos valores de X .

Por lo tanto, $h(X)$ puede representarse tal como viene en la figura 3. Puesto que $h(X)$ es la línea PSC (salvo en $X = X^*$), da lugar a una partición del plano de coordenadas en dos semiplanos definidos: en uno de ellos $\varphi(X)$ siempre crece (al ser su derivada $\varphi'(X)$ positiva) y en el otro siempre decrece.

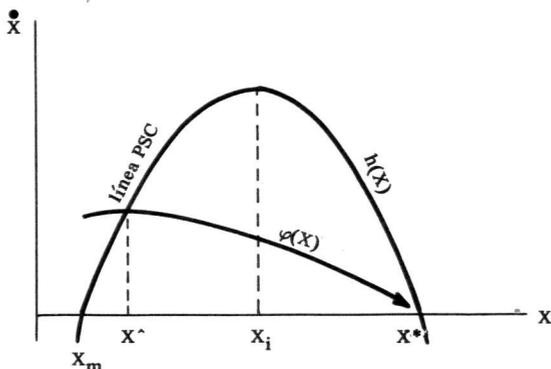


Figura 3

Como consecuencia de dichas propiedades tenemos:

1) *El máximo de la trayectoria óptima de crecimiento se alcanza en un tamaño X^* tal que $X_m < X^* < X_i$.*

Demostración:

a) Hemos visto que, si $r = 0$, este máximo se sitúa en X_m , dado que en este punto $\Pi'(X) = 0$ implica $d\dot{X}/dX = 0$. Si $r > 0$, la pendiente de $\dot{X} = \varphi(X)$ en el punto X_m será $\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'}{C'' X} > 0$ (véase la condición de pendientes expuesta más arriba) y, por lo tanto, seguirá creciendo hasta que $\varphi(X)$ encuentre la línea PSC en la que se producirá el máximo crecimiento \dot{X} (véase la figura 3), lo que implica que $X_m < X^*$.

b) Para demostrar que $X^* < X_i$ basta con razonar que, si la trayectoria óptima de crecimiento tiene que pasar por el punto $(X^*, 0)$, debe cruzar necesariamente a la línea PSC en su tramo creciente, ya que, de lo contrario la trayectoria sería siempre creciente y el punto de estabilidad no se alcanzaría (Véase la figura 4). Y dado que este tramo cre-

ciente de la línea PSC termina en X_i , de ello resulta⁷ que $X^* < X_i$.

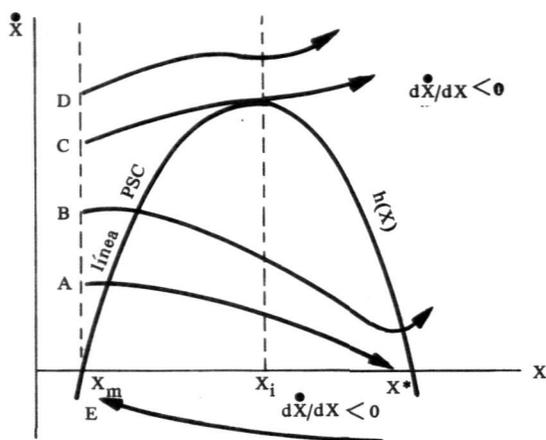


Figura 4

Este resultado ($X_m < X^* < X_i$) es interesante desde el punto de vista económico, puesto que, según hemos indicado anteriormente, en el caso de competencia perfecta el punto de inflexión de la curva de beneficio señala el final del tramo de economías de escala marginales. Esto significa que el tramo creciente de la trayectoria óptima de expansión se localiza necesariamente —en el caso de competencia perfecta— en la zona de costes marginales decrecientes (o, en otras palabras, en la zona de economías de escala marginales). Tal como se desprende de la representación gráfica la proposición recíproca no se cumple. De hecho, cuando el crecimiento empieza a menguar, podemos hallarnos todavía a la izquierda del tamaño de inflexión X_i y, por lo tanto, en la zona de costes marginales decrecientes.

7. Para dibujar las trayectorias A, B, C, D, E deben tenerse en cuenta en cada punto del diagrama la intensidad y el signo de $d\bar{X}/dX$, que dependen de la proximidad de la línea PSC en la que $d\bar{X}/dX = 0$. Por ejemplo, si la trayectoria iguala la línea PSC en su punto máximo (tal como la trayectoria C) significa que en este punto X_i la trayectoria no puede subir ni bajar. Esto supone que el próximo punto a la derecha de la trayectoria C deberá estar en el exterior de la línea PSC, ya que si sigue dicha línea descenderá —puesto que la línea PSC descende una vez que su máximo ha sido alcanzado— en contradicción con las exigencias de horizontalidad que implica la línea PSC. Si la trayectoria no puede seguir la línea PSC, es evidente que tampoco puede cruzarla, y, por lo tanto pasará nuevamente al exterior de dicha línea, en la zona de pendientes positivas, subiendo otra vez, ahora en forma acelerada, puesto que la distancia a la línea PSC está aumentando progresivamente.

c) Para demostrar que $\varphi(X^{\wedge})$ es realmente un máximo, buscaremos el signo de la segunda derivada. Habida cuenta de que,

$$\frac{d\varphi(X)}{dX} = \frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'(\dot{X}) - \Pi'(X)}{C''(\dot{X}) \dot{X}}$$

tenemos,

$$\frac{d^2 \dot{X}}{dX^2} = \frac{(r C'' \frac{d\dot{X}}{dX} - \Pi'') C'' \dot{X} - \frac{d\dot{X}}{dX} C'' \dot{X} (C''' \dot{X} + C''') \frac{d\dot{X}}{dX}}{(C'' \dot{X})^2}$$

Al ser $d\dot{X}/dX = 0$ en el tamaño X^{\wedge} , obtenemos

$$\frac{d^2 \varphi(X^{\wedge})}{dX^2} = - \frac{\Pi''(X)}{C''(\dot{X}) \dot{X}}$$

Para $X < X_p$, entonces $\Pi''(X) > 0$, y de ahí que $\frac{d^2 \varphi(X^{\wedge})}{dX^2} < 0$, demostrando que X^{\wedge} es un máximo.

2) El tamaño X^{\wedge} es una función creciente de la tasa de descuento r , mientras que el máximo de la trayectoria óptima de expansión $\varphi(X^{\wedge})$ es una función decreciente de r .

Demostración: Si dibujamos la familia de líneas $\dot{X} = h(X, r)$ para diferentes valores positivos de r podemos estudiar el efecto de los cambios de r sobre la trayectoria óptima de crecimiento. Habida cuenta de que $h(X, r)$ es del tipo⁸ $\dot{X} = \Psi(X)/r$ su punto máximo descenderá cuando r suba y toda la línea se inclinará hacia el eje de las X . Para $r = 0$, la línea se degenera en dos rectas paralelas que pasan por X_m y X^* .

En la figura 5 hemos dibujado las líneas PSC que corresponden a varias tasas de descuento, siendo $r_0 = 0$ y $r_0 < r_1 < r_2 < r_3$. Cuando r crece, el máximo de cada trayectoria óptima de expansión $\varphi(X)$ se mueve a la derecha debido a que la pendiente $d\dot{X}/dX$ es creciente⁹. Pe-

8. $\dot{X} = h(X)$ proviene de la forma implícita $H(\dot{X}, X) = r C'(\dot{X}) - \Pi'(X) = 0$. Por lo tanto, $\dot{X} = \text{Función}(X)/r$.

9. $\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C''(\dot{X}) - \Pi''(X)}{C''(\dot{X}) \dot{X}}$ crece, evidentemente, con r .

ro, al mismo tiempo, el crecimiento de r implica el declinar del punto máximo de cada trayectoria $\varphi(X)$ porque este máximo es siempre inferior al máximo de la línea PSC y este último máximo desciende cuando r aumenta.

El aumento de la tasa de descuento implicará, por tanto, que la trayectoria óptima de crecimiento se incline hacia el eje de las X y el tamaño de su punto máximo X^* se desplace a la derecha hacia X_i . Esto es, una mayor tasa r supone una magnitud de crecimiento máximo más pequeña $\varphi(X^*)$ que corresponde a un tamaño mayor X^* . El tramo creciente de la trayectoria de expansión se amplía tendiendo al tamaño X_i de inflexión del beneficio, cuando r crece¹⁰. Lo que significa que, bajo competencia perfecta, la zona final de economías de escala se acercará al punto máximo de la trayectoria de expansión a medida que la tasa de descuento vaya aumentando.

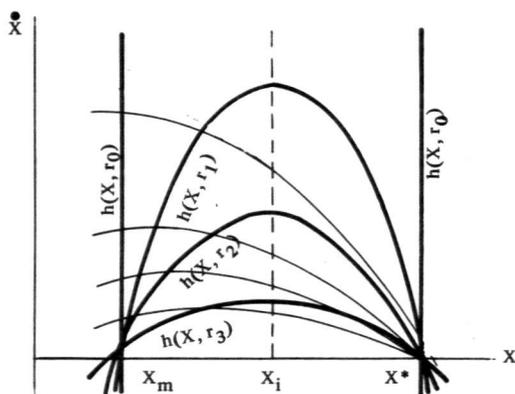


Figura 5

Localización de los puntos de inflexión de la trayectoria óptima de expansión.

Para el estudio de la localización de posibles puntos de inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento utilizaremos como instrumento analítico la línea "Entre Ramblas y Colinas" (Línea ERC). Esta se define como el lugar geométrico de todos los puntos de inflexión de las trayectorias de Euler, por lo que deberá cumplir $d^2 \hat{X} / dX^2 = 0$.

10. Cuando $r \rightarrow \infty$, entonces $\hat{X} \rightarrow 0$ y $X^* \rightarrow X_i$.

De ahí que la forma analítica de la línea ERC sea:

$$\frac{d^2 \dot{X}}{dX^2} = r C'' \frac{d\dot{X}}{dX} - \Pi'' - \left(\frac{d\dot{X}}{dX} \right)^2 (C''''\dot{X} + C''') \frac{1}{C''\dot{X}} = 0$$

Tenemos pues que, salvo para los puntos en que $\dot{X} = 0$ (tal como sucede en X^*), si

$$r C'' \frac{d\dot{X}}{dX} - \Pi'' - \left(\frac{d\dot{X}}{dX} \right)^2 (C''''\dot{X} + C''') = 0$$

entonces, $d^2 \dot{X}/dX^2 = 0$. Por tanto, la función

$$I(X, \dot{X}) = r C'' \frac{d\dot{X}}{dX} - \Pi'' - \left(\frac{d\dot{X}}{dX} \right)^2 (C''''\dot{X} + C''') = 0$$

define implícitamente una función $\dot{X} = i(X)$ que es también la forma analítica de la línea ERC, salvo para el tamaño X^* .

La línea ERC al representarse en diagrama de fases por medio de la función $\dot{X} = i(X)$ cruza las trayectorias de Euler en sus posibles puntos de inflexión con pendientes diversas $d\dot{X}/dX$. Estas pendientes pueden determinarse fácilmente, dado que $I(X, \dot{X}) = 0$ implica:

$$C''''\dot{X} + C''' \left(\frac{d\dot{X}}{dX} \right)^2 - r C'' \frac{d\dot{X}}{dX} + \Pi'' = 0$$

Y, resolviendo para $d\dot{X}/dX$, tenemos

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'' \pm \sqrt{r^2 C''^2 - 4\Pi''(C''''\dot{X} + C''')}}{2(C''''\dot{X} + C''')}$$

A través del análisis de los valores de estas pendientes podemos descubrir las siguientes propiedades de la línea ERC ($\dot{X} = i(X)$):

1) La línea ERC tiene dos ramas que corresponden a los dos signos del discriminante que afecta a la pendiente $d\dot{X}/dX$ de las trayectorias de Euler.

2) La rama correspondiente al signo positivo del discriminante es irrelevante cuando $C''''\dot{X} + C''' > 0$, puesto que en este caso los valores de las pendientes son positivos, no existiendo intersección o punto de

contacto con la línea PSC ($\dot{X} = h(X)$). Cuando $C''' \dot{X} + C'' = 0$, los valores de las pendientes tienden a infinito y la rama positiva es también irrelevante. Si $C''' \dot{X} + C'' < 0$, esta rama positiva se halla en el interior de la línea PSC dado que todas las pendientes de las trayectorias que cruzan son negativas, excepto para ciertos tamaños a la derecha de X_i con valores negativos tales para Π'' que convierten en imaginarios los valores de las pendientes.

3) Cuando $C''' \dot{X} + C'' \geq 0$, la rama del discriminante negativo corta en X_i la línea PSC. Es una línea descendente que viene de la parte exterior de esta línea PSC (en la que las pendientes son positivas) y va hacia el punto estable $(X^*, 0)$ a través de la parte interior de dicha línea PSC (en la que las pendientes son negativas). Este caso se representa en la figura 6. Cuando $C''' \dot{X} + C'' < 0$, la rama del discriminante negativo baja también cruzando la línea PSC en X_i , entra en la parte interior de dicha línea y desaparece para tamaños a la derecha de X_i para los que el valor negativo de Π'' convierte los valores de las pendientes en imaginarios.

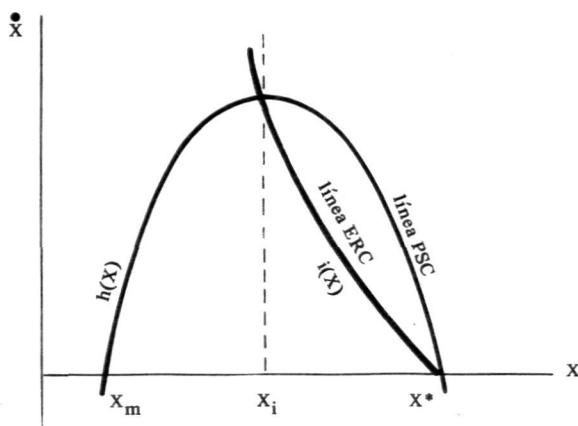


Figura 6

La demostración se ofrece en el Apéndice B. Como ilustración, en el Apéndice C se deduce la línea ERC que corresponde al caso particular en que $C(\dot{X}) = \frac{\delta}{2} \dot{X}^2$, (con $\delta > 0$).

Del análisis de estas propiedades de la línea ERC se desprenden los siguientes resultados:

1) Cuando $C''' \dot{X} + C'' \geq 0$, si existe un punto de inflexión X_i^f de

la trayectoria óptima de crecimiento $\varphi(X)$, este X^J estará situado entre X_1 y X^* .

De ahí que pueda ser útil introducir una hipótesis adicional para la función de costes de ajuste del siguiente tipo: La convexidad estricta de $C(\dot{X})$ es uniforme o creciente con \dot{X} . Esto es, $C''(\dot{X})$ es una función constante o creciente, o, en otras palabras, $C''(\dot{X}) \geq 0$ ¹¹. Este supuesto de convexidad "bien comportada" garantiza que $C''(\dot{X}) + C'' > 0$, siendo suficiente para que los posibles puntos de inflexión de la trayectoria óptima de crecimiento se sitúen entre X_1 y X^{*12} .

2) La existencia real de la línea ERC no es suficiente para asegurar la existencia de puntos de inflexión de la trayectoria óptima de expansión, que dependerá de la forma específica de la función de beneficio $\Pi(X)$;

Este resultado apareció ya demostrado en la Sección II al recurrir a una función de beneficio específica que daba lugar a una trayectoria óptima de expansión sin puntos de inflexión.¹³

IV. CONCLUSIONES

Con respecto a la posible justificación teórica del nexo "evidente" entre "expansión creciente" y "economías de escala", los resultados obtenidos de nuestro modelo, aplicados bajo el supuesto de competencia perfecta, dan lugar, según hemos visto, a las siguientes consecuencias:

1) En el tramo de tamaños en los que la expansión es creciente hay siempre economías de escala marginales (dado que $X^{\wedge} < X_1$).

2) El tramo de tamaños con economías de escala marginales tiene valores de expansión crecientes al principio (para tamaños a la derecha

11. De hecho, basta con introducir una hipótesis más débil: $C''(\dot{X}) \geq k/\dot{X}$. La formulación de ambas hipótesis se hace para $\dot{X} > 0$. Cuando contemplemos $\dot{X} < 0$ deben alterarse los signos de desigualdad.

12. La conclusión 3 que se obtiene en la Sección II es un caso particular del presente, correspondiendo al caso específico en que $r = 0$ y $C(\dot{X}) = (\delta/2)\dot{X}^2$ (que cumple la hipótesis adicional, ya que $C''(\dot{X}) = \delta$).

13. Véanse los párrafos 4) y 5) del Apéndice A, para $r = 0$. Evidentemente el resultado 2) es válido para cualquier r , dado que su influencia no producirá puntos de inflexión con completa independencia de la forma específica de $\Pi(X)$.

próxima de X_m), y decrecientes al final (para tamaños a la izquierda próxima de X_i).

3) No hay punto relevante (esto es, con propiedades específicas propias) en la trayectoria óptima de crecimiento que corresponda al tamaño X_i en el que desaparecen las economías de escala marginales. La única concreción que puede darse con respecto al tamaño en el que acaban las economías de escala (marginales) es que queda situado en algún lugar a la derecha del tamaño X^* que maximiza la función de crecimiento óptimo.

Estos resultados se dan en un mundo en el que se cumplen las hipótesis sobre costes de ajuste de nuestro modelo. Obsérvese a este respecto que hemos conducido nuestro análisis bajo el supuesto de que la función de costes de ajuste depende únicamente de la magnitud del crecimiento \dot{X} y no del tamaño de la empresa X . Podría estudiarse un modelo más realista en el que se emplearan funciones de costes de ajuste del tipo $C(\dot{X}, X)$ que fueran estrictamente convexas en \dot{X} y estrictamente cóncavas en X . La investigación en esta dirección podría ser de interés, pero a ojo de buen cubero da la impresión de que el aumento en complejidad formal dificultará enormemente la obtención de resultados generales.

APENDICE A

$$\text{LA FUNCION } \dot{X} = \pm \left\{ \frac{2}{\delta} [\Pi(X^*) - \Pi(X)] \right\}^{1/2}$$

1) Esta función pasa, evidentemente, por $(X^*, 0)$, ya que $X = X^*$ da lugar a $\Pi(X^*) - \Pi(X^*) = 0$. Busquemos ahora los máximos y mínimos.

La primera derivada es:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \pm \frac{1}{\delta} \frac{2}{\delta} [\Pi(X^*) - \Pi(X)]^{-1/2} \Pi'(X)$$

La primera derivada es 0 cuando $\Pi'(X) = 0$ y, al mismo tiempo, $\Pi(X^*) - \Pi(X) \neq 0$. Esta condición se cumple para el tamaño X_m , que minimiza $\Pi(X)$ y no por el tamaño que maximiza $\Pi(X)$, esto es, X^* . Veamos qué sucede en este punto $(X^*, 0)$.

Dado que la primera derivada puede escribirse de la forma:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = - \frac{1}{\delta} \frac{\Pi'(X)}{\dot{X}}$$

se ve fácilmente que al tender X hacia X^* obtenemos una expresión con límite del tipo 0/0. Aplicando la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{d\dot{X}}{dX} = \lim_{x \rightarrow x^*} - \frac{1}{\delta} \frac{\Pi''(X)}{(-1/\delta)\Pi'(X)/\dot{X}} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\Pi''(X)}{\Pi'(X)/\dot{X}}$$

Supondremos que $\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\Pi'(X)}{\dot{X}}$ existe y es un número finito A . Con ello, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{d\dot{X}}{dX} = - \frac{1}{\delta} A = \frac{\Pi''(X^*)}{A}$$

y de ahí que

$$A = -\delta\Pi''(X^*), \quad \text{y} \quad A = \pm[-\delta\Pi''(X^*)]^{1/2}$$

Debido al hecho de que $\Pi(X^*)$ es un máximo, tenemos que $\Pi''(X^*) < 0$, y, por lo tanto, A será un número real distinto de cero (y

tendrá doble signo correspondiendo a las dos ramas de la función \dot{X} . Cambiando A en la expresión inicial, obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{d\dot{X}}{dX} = \pm \frac{1}{\delta} [-\delta \Pi''(X^*)]^{1/2} = \pm \left[-\frac{\Pi''(X^*)}{\delta} \right]^{1/2} \neq 0$$

donde el signo $-$ corresponde a la derivada de la rama positiva de \dot{X} .

Tenemos, pues, que en X^* no hay ni máximo ni mínimo de la función particular que analizamos. De otra parte, podemos demostrar que hay un punto de inflexión en X^* sólo en el caso de que $\Pi'''(X) = 0$.

2) Para ello consideremos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \dot{X}}{dX^2} &= \left(-\frac{1}{\delta} \right) \frac{1}{\dot{X}^2} \left[\Pi''(X) \dot{X} - \Pi'(X) \frac{d\dot{X}}{dX} \right] = \\ &= \left(-\frac{1}{\delta} \right) \frac{1}{\dot{X}^2} \left[\Pi''(X) \dot{X} + \frac{1}{\delta} \frac{\Pi'(X)}{\dot{X}} \right] = -\frac{1}{\delta} \frac{1}{\dot{X}} \left\{ \Pi''(X) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\Pi'(X)}{\dot{X}} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Cuando $X = X^*$ y dado que

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \left[\frac{\Pi'(X)}{\dot{X}} \right]^2 = A^2 = -\delta \Pi''(X^*)$$

tenemos de nuevo una expresión con límite del tipo $0/0$. Y aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{d^2 \dot{X}}{dX^2} &= \lim_{x \rightarrow x^*} -\frac{1}{\delta} \frac{1}{\dot{X}} [\Pi''(X) - \Pi''(X^*)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{-\Pi'''(X)}{\delta \cdot d\dot{X}/dX} = \frac{-\Pi'''(X)}{\pm \delta \left[-\frac{\Pi''(X^*)}{\delta} \right]^{1/2}} = \frac{\Pi'''(X)}{\pm [-\delta \Pi''(X^*)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Siendo $\Pi''(X^*) < 0$, es evidente que esta expresión será cero solamente en el caso de que $\Pi'''(X^*) = 0$. Por lo tanto, habrá un punto de inflexión en X^* sólo si esta condición se cumple.

3) Para el tamaño X_m , la segunda derivada de $\varphi(X)$ tendrá el signo opuesto al de la segunda derivada de $\Pi(X)$, ya que, si $\Pi'(X) = 0$

y para $\dot{X} > 0$ (rama positiva), obtenemos:

$$\frac{d^2 \dot{X}}{dX^2} = \frac{1}{\delta} [-\Pi''(X)] \frac{1}{\dot{X}}$$

Lo que implica que al mínimo de $\Pi(X)$ corresponderá un máximo de la función de crecimiento $\varphi(X)$.

4) Veamos si existen otros posibles puntos de inflexión.

Si $\dot{X} \neq 0$, precisamos que

$$\Pi''(X) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\Pi'(X)}{\dot{X}} \right)^2 = 0$$

con objeto de que $d^2 \dot{X}/dX^2 = 0$. A partir de aquí se tiene:

$$X = \pm \left(-\frac{1}{\delta} \frac{\Pi'^2}{\Pi''} \right)^{1/2}$$

Esta función es la expresión analítica del lugar geométrico de los puntos de inflexión de las trayectorias que cumplen la condición de Euler o trayectorias de Euler. Es, pues, la expresión analítica de la línea ERC y nos referimos nuevamente a ella en el último párrafo de la Sección III cuando tratemos el caso general. En la ilustración particular que estamos analizando vemos que la función tiene valores reales para tamaños $X > X_i$. Para $X = X_i$, \dot{X} tiende a infinito. Para $X_i < X < X^*$, \dot{X} tiene dos ramas, una positiva (posiblemente relevante) y otra negativa (irrelevante). Para $X = X^*$, $\dot{X} = 0$, por lo que pasa por el punto señalado por la condición de estabilidad ($X^*, 0$). Véase la figura 7.

Siendo $\dot{X} = \pm 2/\delta (\Pi^* - \Pi)^{1/2}$ los puntos de inflexión cumplirán:

$$\pm \left\{ \frac{2}{\delta} [\Pi^* - \Pi(X)] \right\}^{1/2} = \pm \left[-\frac{(\Pi'(X))^2}{\delta \Pi''(X)} \right]^{1/2}$$

Y, teniendo solamente en cuenta las ramas relevantes (la positiva en cada miembro):

$$\frac{2}{\delta} [\Pi^* - \Pi(X)] = -[\Pi'(X)]^2 / \delta \Pi''(X)$$

esto es,

$$\Pi(X^*) - \Pi(X) = -[\Pi'(X)]^2 / 2\Pi''(X).$$

Los puntos de inflexión se dan, pues, en el caso de que existan, en el tramo $X_i < X \leq X^*$. Su existencia depende, sin embargo, de la forma específica de la función de beneficio $\Pi(X)$ de tipo neoclásico que se considere.

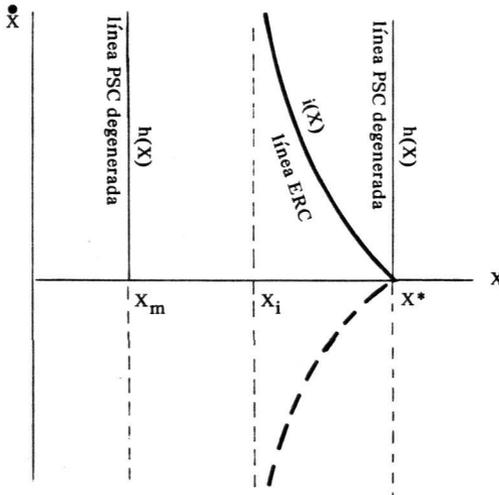


Figura 7

5) Así, cuando $\Pi(X)$ es un polinomio de tercer grado en X , no existe solución relevante para la condición de inflexión.

Demostración: Sea

$$\Pi'(X) = -(X - X_m)(X - X^*).$$

Por tanto

$$\Pi(X) = -(1/3)X^3 + (X_m + X^*)X^2/2 - X_m X^* X + X_0$$

y

$$\Pi''(X) = -2X + (X^* + X_m)$$

siendo X_m una constante.

La condición de inflexión supone:

$$\begin{aligned} \frac{X^3}{3} - \frac{X_m + X^*}{2} X^2 + X_m X^* X + \left[-\frac{X^{*3}}{3} + \frac{X_m + X^*}{2} X^{*2} - X_m X^{*2} \right] &= \\ &= -\frac{[-(X - X_m)(X - X^*)]^2}{2[-2X + (X_m + X^*)]} \end{aligned}$$

Operando con estas expresiones obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [2X^3 - 3(X_m + X^*) X^2 + 6 X_m X^* X + (X^{*3} - 3 X_m X^{*2})] &= \\ &= \frac{(X - X_m)^2 (X - X^*)^2}{2 [2X - (X_m + X^*)]} \end{aligned}$$

El primer miembro de la ecuación puede escribirse de la forma:

$$\frac{1}{6} [2X - (3 X_m - X^*)] (X - X^*)^2$$

y, simplificando $(X - X^*)^2$ en ambos lados:

$$[2X - (3X_m - X^*)] [2X - (X_m + X^*)] = 3 (X - X_m)^2$$

que conduce a

$$X^2 - 2X_m X + (2 X_m X^* - X^{*2}) = 0$$

Resolviendo esta ecuación tenemos como valores de X:

$$X = X_m \pm \sqrt{X_m^2 - 2 X_m X^* + X^{*2}} = X_m \pm (X^* - X_m)$$

y de ahí que

$$X_1 = X^* \quad X_2 = -X^* + 2 X_m.$$

Puesto que $(-X^* + 2 X_m) < (X_m + X^*)/2 = X_i$, esta solución es irrelevante, ya que conduciría a puntos de inflexión imaginarios.

Hemos demostrado, por tanto, que, fuera de la (triple) solución $X = X^*$, no existe solución relevante para la condición de inflexión. Y, además, en el tamaño X^* no habrá tampoco punto de inflexión, dado que $\Pi'''(X^*) = -2$, y no puede cumplirse la condición $\Pi'''(X) = 0$.

APENDICE B

PROPIEDADES DE LA LINEA ERC ($X = i(X)$)

Rama correspondiente al discriminante negativo.

1) En una cierta proximidad a la izquierda de X_i , (en la que $\Pi'' > 0$), se tiene que $d\dot{X}/dX > 0$.

Demostración:

a) Si $C'''X + C'' > 0$, tenemos que $d\dot{X}/dX = \text{Positivo/Positivo}$, con un máximo

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{rC''}{2(C'''X + C'')} \quad \text{en } \Pi'' = \frac{r^2 C''^2}{4(C'''X + C'')}$$

y valores imaginarios de $d\dot{X}/dX$ para

$$\Pi'' > \frac{r^2 C''^2}{4(C'''X + C'')}$$

b) Cuando $C'''X + C'' = 0$, hemos de encontrar $d\dot{X}/dX$ aplicando la Regla de l'Hôpital. El resultado es $d\dot{X}/dX = \Pi''(rC'')$, que es, evidentemente mayor de cero.

c) Si $C'''X + C'' < 0$, entonces $d\dot{X}/dX = \text{Negativo/Negativo}$, sin acotación para valores reales de $d\dot{X}/dX$.

2) En X_i las líneas ERC y PSC [esto es, las funciones $h(X)$ y $i(X)$] se cortan.

Demostración: En X_i tenemos que $\Pi'' = 0$, y, por tanto, $d\dot{X}/dX = 0$.

3) En una cierta proximidad a la derecha de X_i , (en la que $\Pi'' < 0$) se tiene que $d\dot{X}/dX < 0$.

Demostración:

a) Si $C'''X + C'' > 0$, tenemos que $d\dot{X}/dX = \text{Negativo/Negativo}$, sin acotación para valores reales de $d\dot{X}/dX$.

b) Cuando $C''' \dot{X} + C'' = 0$, entonces $d\dot{X}/dX = \Pi''/rC'' < 0$.

c) Si $C''' \dot{X} + C'' < 0$, tenemos que $d\dot{X}/dX = \text{Positivo/Negativo}$, con un mínimo

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C''}{2(C''' \dot{X} + C'')} \quad \text{en} \quad \Pi'' = \frac{r^2 C''^2}{4(C''' \dot{X} + C'')}$$

y valores imaginarios de $d\dot{X}/dX$ para

$$\Pi'' < \frac{r^2 C''^2}{4(C''' \dot{X} + C'')}$$

4) La trayectoria óptima de crecimiento $\varphi(X)$ se une a la línea ERC en el punto de estabilidad $(X^*, 0)$.

Demostración: La pendiente de la trayectoria de Euler que corta la línea ERC en el eje X es:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'' \pm \sqrt{r^2 C''^2 - 4\Pi'' C''}}{2 C''} < 0,$$

dado que en este caso tenemos que $\dot{X} = 0$.

Pero la trayectoria de Euler que pasa por $(X^*, 0)$, esto es, la trayectoria óptima de expansión, presenta en dicho punto la siguiente pendiente:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \lim_{\dot{X} \rightarrow 0} \frac{r C'' - \Pi''}{C''' \dot{X}} = \lim_{\dot{X} \rightarrow 0} \frac{r C'' - \Pi'' (dX/d\dot{X})}{C''' \dot{X} + C''} = \frac{r C'' - \Pi'' (dX/d\dot{X})}{C''}$$

Si $d\dot{X}/dX = A$, tenemos: $AC'' = r C'' - \Pi''(1/A)$, y, de ahí que

$$C'' A^2 - r C'' A + \Pi'' = 0$$

Por ello se tiene:

$$A = \frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r C'' \pm \sqrt{r^2 C''^2 - 4\Pi'' C''}}{2 C''}$$

que es, precisamente, la pendiente que habíamos hallado para la trayectoria de Euler que corta la línea ERC en el eje X. Y dado que la trayectoria óptima de expansión se aproxima al eje X en el punto de estabili-

dad $(X^*, 0)$ ello significa que la línea ERC se aproxima al eje X en dicho punto, uniéndose allí a la trayectoria óptima.

Obsérvese que esta convergencia y unión no significa que la trayectoria óptima $\varphi(X)$ presenta necesariamente un punto de inflexión en $(X^*, 0)$, ya que, según hemos indicado ya anteriormente, $i(X)$ no describe la línea ERC en el punto en que $\dot{X} = 0$; en otras palabras, aunque $i(X)$ pase por $(X^*, 0)$ ello no garantiza que en dicho punto exista inflexión de la trayectoria óptima de expansión. Un ejemplo de ello lo vimos en el último párrafo de la Sección II, para el caso particular en que $r = 0$ y $C(\dot{X}) = (\delta/d) \dot{X}^2$.

APENDICE C

LA LINEA ERC ($\dot{X} = i(X)$). CASO PARTICULAR EN QUE $C(\dot{X}) = \frac{\delta}{2} \dot{X}^2$

En este caso específico tenemos:

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{r(\delta\dot{X}) - \Pi'(X)}{\delta\dot{X}}$$

y,

$$\frac{d^2\dot{X}}{dX^2} = \left[r\delta \left(r - \frac{\Pi'(X)}{\delta\dot{X}} \right) - \Pi'' - \left(r - \frac{\Pi'(X)}{\delta\dot{X}} \right)^2 \delta \right] \frac{1}{\delta\dot{X}} = 0$$

Por lo tanto,

$$I(X, \dot{X}) = \Pi''(X) - \frac{r\Pi'(X)}{\dot{X}} + \frac{[\Pi'(X)]^2}{\delta\dot{X}^2} = 0$$

y la línea ERC ($\dot{X} = i(X)$) será la solución de la ecuación de segundo grado:

$$\Pi''(X) \dot{X}^2 - r\Pi'(X) \dot{X} + \frac{1}{\delta} [\Pi'(X)]^2 = 0$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} \dot{X} = i(X) &= \frac{r\Pi'(X) \pm \sqrt{r^2 [\Pi'(X)]^2 - 4\Pi''(X) \frac{1}{\delta} [\Pi'(X)]^2}}{2\Pi''(X)} = \\ &= \frac{r \pm \sqrt{r^2 - (4/\delta) \Pi''(X)}}{2} \frac{\Pi'(X)}{\Pi''(X)} \end{aligned}$$

Estas soluciones tienen valores reales cuando $r^2 - (4/\delta) \Pi''(X) \geq 0$, es-
to es, cuando $\Pi''(X) \leq r^2 \delta/4$. Para $\Pi''(X) = r^2 \delta/4$, tenemos $\dot{X} =$
 $= 2 \Pi'(X)/r\delta$. Este es el punto inicial de la línea ERC. Los valores de la
misma se exponen en la tabla siguiente para valores de X que correspon-
den a ciertos valores de $\Pi''(X)$:

	$\Pi''(X)$	$\frac{r^2\delta}{4}$	0	$-\frac{3r^2\delta}{4}$	$-2r^2\delta$	$-\frac{15r^2\delta}{4}$	$-30r^2\delta$
Rama del discriminante negativo	$i(X)$	$\frac{2\Pi'(X)}{r\delta}$	$\frac{\Pi'(X)}{r\delta}$	$\frac{2\Pi'(X)}{3r\delta}$	$\frac{\Pi'(X)}{2r\delta}$	$\frac{2\Pi'(X)}{5r\delta}$	$\frac{\Pi'(X)}{6r\delta}$
Rama del discriminante positivo	$i(X)$	$\frac{2\Pi'(X)}{r\delta}$	$\pm\infty$	$-\frac{2\Pi'(X)}{r\delta}$	$-\frac{\Pi'(X)}{r\delta}$	$-\frac{2\Pi'(X)}{3r\delta}$	$-\frac{\Pi'(X)}{5r\delta}$

Tal como puede verse fácilmente, la rama que corresponde al discriminante positivo carece de interés real ya que no corta la línea PSC.

Para la otra rama puede observarse que a) empieza en un tamaño ligeramente inferior a X_1 (ya que empieza al tamaño X en que $\Pi''(X) = r^2\delta/4$ que es muy próximo al tamaño X_1 en que $\Pi''(X) = 0$, b) corta a la línea PSC en su máximo $\Pi'(X_1)/r\delta$, y c) tiende a $(X^*, 0)$ siguiendo una trayectoria convexa hacia este punto (Véase la figura 6).

REFERENCIAS

1. EISNER, R. & SPROTZ, R.H.: "Determinants of Business Investment", in *Impacts of Monetary Policy*, Prentice Hall (1963).
2. GOULD, J.P.: "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm", *Rev. of Ec. Studies* (1968), pp. 47-55.
3. JORGENSON, D.W.: "Capital Theory and Investment Behavior", *AER* (1963) pp. 247-59.
4. LUCAS, R.E.: "Adjustment Costs and the Theory of Supply", *JPE* (1967), pp. 321-334.
5. MARAVALL, F.: *Crecimiento, dimensión y concentración de las empresas industriales españolas, 1964-1973*, Fundación INI (1976).
6. NORSTRØM, C.J.: "Optimal Capital Adjustment under Uncertainty", *JET*, (1974), pp. 139-148.
7. RAMSEY, F.P.: "A Mathematical Theory of Saving", *EJ* (1928), pp. 543-559.
8. ROTHSCHILD, M.: "On the Cost of Adjustment", *QJE* (1971), pp. 605-622.
9. SCOTT, W.A. & SHATTO, G.: "Social Efficiency in Banking: A Stochastic Model of Bank Growth", *Q. Rev. of Ec. & Bus.* (1974), Fall.
10. STIGLER, G.J.: "The Economies of Scale", *J. of Law & Ec.* (1958), Oct.

11. TREADWAY, A.B.: "On Rational Entrepreneurial Behaviour and the Demand for Investment", *Rev. of Ec. Studies* (1969), pp. 227-239.
12. TREADWAY, A.B.: "Adjustment Costs and Variable Inputs in the Theory of the Competitive Firm", *JET* (1970), pp. 329-347.
13. TREADWAY, A.B.: "The Rational Multivariate Flexible Accelerator", *Econometrica* (1971), pp. 845-855.
14. TREADWAY, A.B.: "The Globally Optimal Flexible Accelerator", *JET* (1974) pp. 17-39.