R. ALONSO, D. PAZOS, J. E. RODRIGUEZ y C. ROMERO

Dimensión óptima de una planta industrial cuando los coeficientes de la fución de costes no están especificados. Aplicación al caso de una fábrica de azúcar en Valladolid *

1. INTRODUCCION

La experiencia proporciona frecuentes ejemplos de decisiones desafortunadas al fijar el tamaño de una planta industrial. Los errores no sólo se cometen en los estudios económicos que preceden a la construcción de una planta, sino también en los acuerdos más generales sobre ampliación de empresas y sobre los límites que conviene imponer a la propia actividad empresarial. No es raro que una planificación equivocada en este sentido o una falta de planificación, aumente considerablemente el coste de producción y conduzca a situaciones de inferioridad frente a los competidores actuales y potenciales en un mercado de oligopolio. Como la empresa ha invertido fuertes sumas en inmovilizados, resulta prácticamente imposible corregir los errores, ya que sería demasiado gravoso cambiar los equipos sin esperar a amortizarlos. Así pues, si nos apartamos del tamaño óptimo, por defecto o por exceso, nos colocamos en una posición desventajosa de la que es difícil salir a medio plazo y que afectará quizás a la empresa hasta llegar a colapsarla.

Se entiende por radio de acción comercial de una planta industrial la extensión de zona geográfica en la que la planta compra una materia prima o vende un producto. Como recordaremos en el párrafo siguiente,

* Este artículo forma parte de un trabajo más amplio realizado por los mismos autores, con el título «Análisis de los Costes de Comercialización de la Remolacha en España y Programación de las Campañas», que fue dirigido por el Profesor Enrique Ballestero, y financiado por una ayuda concedida por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica de la Presidencia del Gobierno. Los párrafos 1 y 2 de este artículo se han tomado, con ligeras modificaciones, del trabajo de uno de los autores (capítulo 3 (3). Los autores agradecen al Profesor Luis Torres, el trabajo de revisión y realización de cálculos.

la dimensión óptima y el radio óptimo de acción comercial dan lugar a problemas correlativos. Es decir, conocida la dimensión óptima de la planta conoceremos su radio óptimo de acción comercial, y vicerversa.

La variable que elegimos para caracterizar la dimensión de la planta es su capacidad de producción, pues reúne las siguientes ventajas:

a) Es una variable fácil de cuantificar.

b) Influye claramente en los costes. Pues por efecto de las economías de escala cuanto mayor sea la capacidad de producción menores serán, hasta un cierto punto, los costes unitarios de fabricación y viceversa.

En este trabajo entenderemos por dimensión óptima, aquella que minimiza los costes totales unitarios de la planta (costes de fabricación y de transporte). Este concepto de dimensión óptima presenta algunas ventajas frente a conceptos alternativos tales como: dimensión que maximiza el beneficio, que maximiza el volumen de ventas, etc. En efecto, al definir la dimensión óptima como aquella que minimiza los costes totales unitarios, conseguimos independizar la dimensión de la empresa del precio del producto, que es una de las variables económicas sujetas a mayor incertidumbre.

El objeto de este artículo es el de estudiar la aplicación de los modelos de dimensión óptima de plantas industriales al caso de que los coeficientes de la función de costes de fabricación no estén especificados. En el párrafo siguiente, presentaremos un modelo de dimensión óptima según el criterio de minimización de costes totales unitarios de la empresa, en la línea de los modelos de Willianson (4) y Ballestero (1) (Apéndice V.) Posteriormente, utilizaremos una adaptación de este modelo para analizar la dimensión óptima de una fábrica de azúcar en la provincia de Valladolid, suponiendo que los coeficientes de la función de costes no están especificados.

2. EL MODELO TEORICO [1]

a) La localización de la planta ha sido decidida de antemano.

b) El espacio de los proveedores de materia prima es un espacio continuo; es decir, se considera que los proveedores se encuentran extendidos de modo contínuo sobre la superficie del plano.

c) No existe discriminación espacial de precios para la materia prima.

d) La planta industrial actúa como monopsonista en su zona de

1. Este modelo, tal como lo recordamos aquí, se refiere al radio óptimo de compras de materia prima de una planta industrial, aunque es obvio que puede utilizarse también en la determinación de un radio de ventas. Una aplicación al radio de ventas de una central lechera en la provincia de Zaragoza puede verse en (2).

influencia; o bien, como oligopsonista, pero en este último caso su porcentaje de participación en el volumen de ventas de cada localidad proveedora es conocido y se mantiene constante.

En el desarrollo del modelo se utilizará la siguiente notación:

R = radio de compras de la planta industrial.
$\gamma(\rho)$ = oferta de materia prima en un círculo de radio ρ cuyo centro coincide con el punto de ubicación de la planta industrial.
t = coste unitario de transporte.

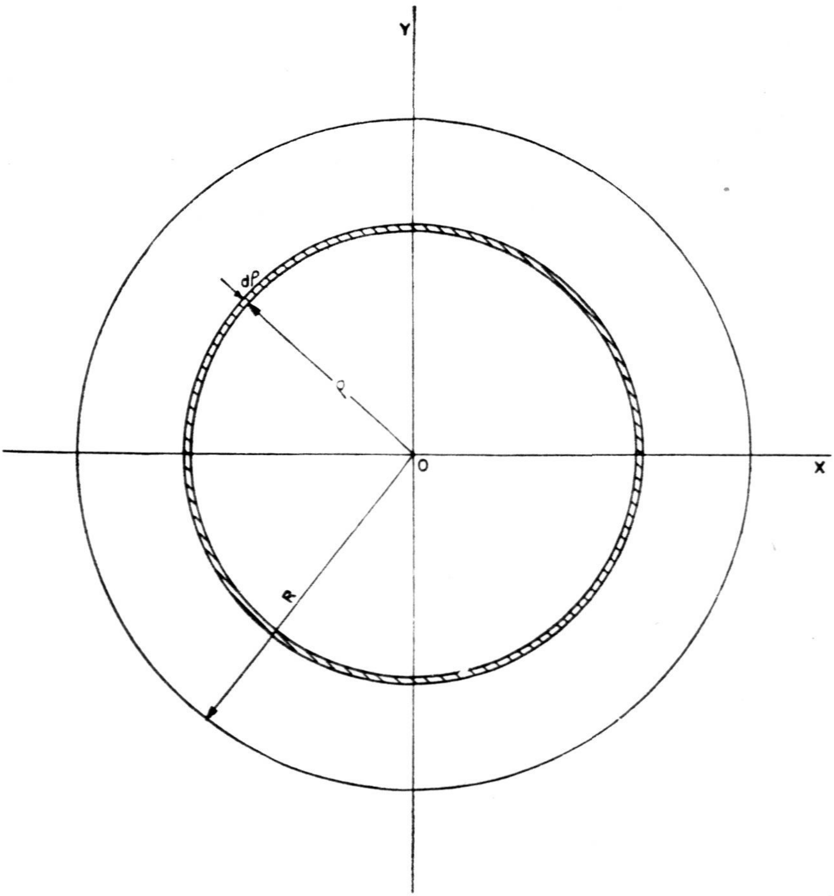

Fig. 1

$\bar{r}$ = distancia media a que se transporta la materia prima desde las localidades proveedoras.

q = capacidad de producción de la planta industrial, expresada en unidades de materia prima.

C (q)= *costes totales de fabricación,* que dependen de la capacidad de la planta.

Se desea que la planta trabaje a plena capacidad, por tanto, la cantidad de materia prima adquirida en el radio de acción comercial ha de ser igual a la capacidad q de la planta, es decir:

$$q = \gamma(R) \tag{1}$$

La cantidad de materia prima adquirida en una corona circular de espesor infinitesimal $d\rho$ (véase figura 1) es:

$$\gamma(\rho + d\rho) - \gamma(\rho) = \gamma'(\rho)\, d\rho \tag{2}$$

ya que $\gamma(\rho + d\rho)$ representa la oferta de materia prima en un círculo de radio $O\,M_2$ y $\gamma(\rho)$ la oferta en un círculo de radio $O\,M_1$, siendo $d\rho$ la diferencia entre estos radios.

La distancia desde la planta industiral a un punto medio de la corona circular, es, como muestra la figura 1:

$$O\,M = \rho + d\rho/2$$

y como, según (2), la cantidad que adquiere la planta dentro de la corona viene dada por:

$$\gamma'(\rho)\, d\rho$$

resulta, despreciando infinitésimos de orden superior, que la media de las distancias ponderadas con las cantidades adquiridas por la planta, es el cociente:

$$\bar{r} = \frac{\int_0^R \rho\, \gamma'(\rho)\, d\rho}{\gamma(R)} = f(R) \tag{3}$$

Este cociente (radio medio o distancia media de transporte) depende únicamente de *R*, ya que en los límites de la integral figura sólo esta variable pudiéndose escribir, pues, $\bar{r} = f(R)$, como se hace en (3).

La función de costes totales, suma de costes de producción y de transporte, es pues:

$$C(q) + T \cdot f(R) \cdot q \tag{4}$$

La función de costes totales unitarios se obtiene dividiendo la expresión (4) por q:

$$\frac{C(q)}{q} + t \cdot f(R) \tag{5}$$

Sustituyendo *q* en (5) por su valor (1) se obtiene, como función de costes totales unitarios, la expresión:

$$\frac{C[\gamma(R)]}{\gamma(R)} + t \cdot r(R) \tag{6}$$

Ahora bien, como los costes unitairos de fabricación son una función de *R*, puede escribirse:

$$\frac{C[\gamma(R)]}{\gamma(R)} = g(R) \tag{7}$$

Por lo que la función de costes totales unitarios de fabricación y transporte queda:

$$\phi(R) = g(R) + t \cdot f(R) \tag{8}$$

El valor de *R* que hace mínimo (8) es el radio óptimo de compras. La dimensión óptima se obtiene sustituyendo en (1) el valor de *R* correspondiente al radio óptimo de compras.

El modelo anterior puede generalizarse fácilmente al objeto de determinar simultáneamente los radios óptimos de compras y ventas. El lector interesado en el modelo generalmente puede consultar (3) capítulo 3, párrafos 9 y 10.

En lo que sigue vamos a adaptar el modelo anterior a la estimación del radio óptimo de compras y dimensión óptima para una planta industrial cuando no contamos con información completa sobre la función de costes. Por último, aplicaremos el procedimiento al caso de una fábrica de azúcar en la provincia de Valladolid.

3. DETERMINACION DE LA FUNCION DE PRODUCCION $\gamma(\rho)$

Vamos a determinar en este párrafo la función $\gamma(\rho)$ que nos da la producción de remolacha en un círculo de radio ρ cuyo centro coincide con el punto de ubicación de la fábrica. Supondremos que la fábrica está ubicada en las proximidades del casco urbano de Valladolid.

Se ha dividido Valladolid, así como sus provincias limítrofes, en una serie de círculos de producción cuyo centro es la capital. Se ha tomado como intervalo de variación del radio entre dos círculos la longitud de 10 kilómetros. En el cuadro I figuran las producciones de remolacha en cada uno de los círculos anteriores para la media de las campañas 1972-75.

Para $\gamma(\rho)$ elegimos en principio como función que mejor se ajusta al fenómeno estudiado una curva potencial del tipo:

$$\gamma(\rho) = a\, b_1{}^{b2} \tag{9}$$

Ajustando por mínimos cuadrados ordinarios la función (9) para lo cual se utilizan las columnas (1) y (2) del cuadro I, se encuentra:

$$\gamma(\rho) = 823{,}39\, \rho^{1{\cdot}70} \tag{10}$$

curva que aparece representada en la figura 2.

CUADRO I

Producción (Tm.) $\gamma(\rho)$ (1)	Radio (Km.) ρ (2)	Incrementos de producción (3)
30.375,5	10	0
122.505,8	20	92.130,3
289.362,5	30	166.856,7
473.357,2	40	183.994,7
723.695,2	50	250.338
1.063.509	60	339.813,8
1.339.893,2	70	276.384,2
1.647.819,1	80	307.925,9
1.911.356,4	90	263.537,3
2.125.349,8	100	213.993,3
2.421.141,1	110	295.791,3
2.627.318,5	120	206.177,4
2.769.760,2	130	142.441,7
2.846.157,9	140	76.397,7
2.861.620,2	150	15.462,3

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos suministrados por el Sindicato Nacional Remolachero.

El coeficiente de correlación al cuadrado (coeficiente de determinación) que mide la bondad del ajuste anterior resulta ser:

$$r^2 = 0{,}99 \tag{11}$$

por lo que el ajuste es altamente satisfactorio.

4. ANALISIS DEL RADIO DE COMPRAS

Para poder aplicar la función económica (8) es necesario conocer la función de producción $\gamma(\rho)$, así como la función de costes $C(q)$. La

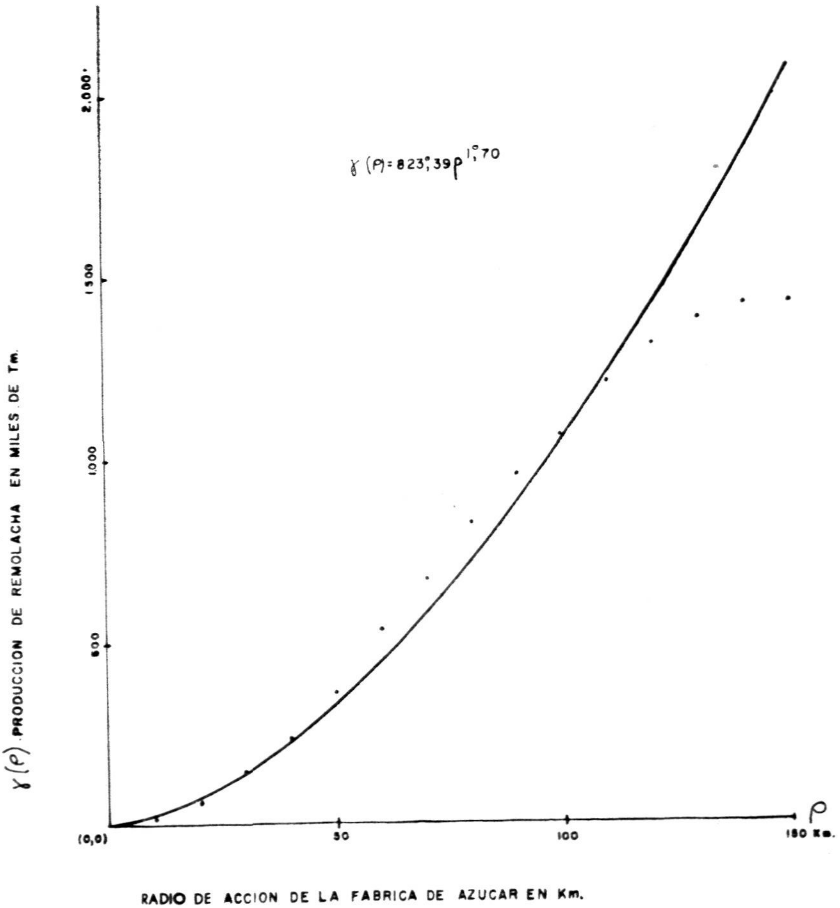

FIG. 2

función de producción $\gamma(\rho)$ se ha determinado en el párrafo anterior (10). Para poder determinar, por medio de un ajuste estadístico, la función C(q) sería necesario disponer de datos referentes a costes totales para diferentes capacidades de molturación de varias fábricas de azúcar. Al no poder disponer de este tipo de datos vamos a utilizar el modelo teórico para obtener de él una información sobre el radio óptimo de compras, por medio de un camino indirecto. Para ello utilizaremos dos funciones de costes distintas. La primera será una función lineal del tipo:

$$C(q) = a_1 + a_2 q \tag{12}$$

donde, a_1 representa el coste fijo y a_2 el coste variable unitario.

La segunda función de costes que vamos a ensayar, será una función potencial del tipo:

$$C(q) = \alpha q \beta \tag{13}$$

donde, β representa la elasticidad ε del coste C(q) respecto a la capacidad *q*. *

* En efecto, se tiene. $\varepsilon = \frac{dC}{dq}\frac{q}{C} = \frac{\alpha\ \beta\ q^{B-1}q}{\alpha\ q^3} = \beta$

a) *Función de costes lineal*

Sustituyendo el valor de $\gamma(\rho)$ dado por (9) en la expresión (3) obtenemos:

$$f(R) = \frac{b_1 b_2 \int_o^R \rho^{b_e}\, {}^e d\rho}{b_1 R^{b2}} = \frac{b_2}{b_2 + 1} R \tag{14}$$

Particularizando (9) para $\rho = R$ y sustituyendo en (1) nos queda:

$$q = b_1 R^{b2} \tag{15}$$

Sustituyendo en (12) q por el valor dado por (15) tenemos:

$$C(R) = a_1 + a_2 b_1 R^{b_2} \tag{16}$$

Si ahora sustituímos (14), (15) y (16) en (8) obtenemos la siguiente expresión para la función objetivo $\Phi(R)$:

$$\Phi(R) = \frac{a_1}{b_1 R^{b_2}} + t \frac{b_2}{b_2 + 1} R \tag{17}$$

Para hallar el valor de R que hace mínimo (17), derivamos dicha expresión con respecto a R e igualamos a cero, de esta manera tenemosll

$$\Phi'(R) = \frac{a_1 b_1 b_2 R^{b_2-1}}{b_1^2 R^{2 b_2}} + t \frac{b_2}{b_2 + 1} = 0 \tag{18}$$

Despejando R de (18) tenemos:

$$R = \left[\frac{(b_2 + 1) a_1}{t b_1} \right]^{\overline{b_2+1}} \tag{19}$$

Sustituyendo en (19) b_1 y b_2 por los valores de estos parámetros dados por (10) y t por 3,69 [2] tenemos:

$$R = (0{,}0008897 \cdot a_1)^{0{,}37} \tag{20}$$

La ecuación (20) nos proporciona una información muy útil, pues relaciona el coste fijo de las instalaciones a_1 con el radio de compras R. Dando diferentes valores al radio de compras R hemos construido el cuadro II. La interpretación de los elementos que constituyen este cuadro es sencilla. Así por ejemplo, los elementos de la tercera columna de dicho cuadro nos indican que si el coste fijo de las instalaciones asciende a unos 11 millones de pesetas, el radio de compras de la fábrica de azúcar en la zona que estamos estudiando deberá extenderse a unos 30 Km., lo que equivale a molturar unas 289.000 Tm. de remolacha por campaña. Los demás elementos que constituyen este cuadro tienen una interpretación similar.

b) *Función de costes de tipo potencial*

Sustituyendo en (13) q por el valor dado por (15) tenemos:

$$C(R) = \alpha_1 (b_1 R^{b_2})^{\beta} \tag{21}$$

Sustituyendo (14), (15) y (21) en (8) obtenemos la siguiente expresión para la función objetivo $\Phi(R)$:

$$\Phi(R) = \alpha_1 (b_1 R^{b_2})^{\beta-1} + t \frac{b_2}{b_2 + 1} R \tag{22}$$

2. Dato proporcionado por el Sindicato Nacional Remolachero.

CUADRO II

R (Km.)	10	20	30	40	50	60	70	80
(R) (Tm.)	30.376	122.506	289.363	473.357	43.447.000	71.080.000	107.772.000	154.555.000
a_1 (ptas.)	563.000	3.660.000	10.939.000	23.875.000	723.695	1.063.509	1.339.893	1.647.819

CUADRO III

Rβ	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
10	216.161	84.028	33.182	13.377	5.547	2.396	1.104	572	396
20	1.248.487	431.374	151.413	54.253	19.995	7.676	3.143	1.448	890
30	3.482.531	1.123.128	367.962	123.064	42.334	15.170	5.798	2.493	1.430
40	7.210.909	2.214.545	690.905	220.043	72.083	24.597	8.953	3.666	2.002
50	12.681.550	3.749.662	1.126.293	345.355	105.922	35.784	12.540	4.944	2.592
60	20.114.113	5.765.805	1.679.030	499.128	152.616	48.609	16.514	6.312	3.217
70	29.708.195	8.295.725	2.353.270	681.466	202.979	62.978	20.843	7.760	3.852
80	41.648.167	11.368.819	3.152.638	892.458	259.857	78.815	25.499	9.281	4.504
90	56.106.319	15.011.888	4.080.358	1.132.181	323.123	96.061	30.462	10.867	5.169
100	73.245.041	19.249.655	5.139.337	1.400.703	392.663	114.663	35.715	12.515	5.847

Igual que hicimos en el caso de función de costes lineales, derivamos (22) con respecto a R e igualamos dicha derivada a cero, con objeto de obtener el valor de R que hace mínimo (22); de esta manera tenemos:

$$\Phi'(R) = \alpha\, b_1^{\beta-1}\, b_2 (\beta - 1)\, R^{b_2(\beta-1)-1} + \frac{t\, b_2}{b_2 + 1} = 0 \qquad (23)$$

Despejando R de (23) tenemos:

$$R = \left[\frac{t}{\alpha (1 - \beta)(b_2 + 1)\, b_1^{\beta-1}}\right]^{\overline{b_2(\beta-1)-1}} \qquad (24)$$

Sustituyendo en (24) b_1 y b_2 por los valores de estos parámetros dados por (10) y t por 3,69 tenemos:

$$R = \left[\frac{1.366}{\alpha\ (1 - \beta)\ (822{,}39)^{\beta-1}}\right]^{\overline{1{,}70\ (\beta-1)\ -1}} \qquad (25)$$

Igual que ocurría con la ecuación (20), la ecuación (25) nos proporciona una información muy útil, pues relaciona el radio de compras con la elasticidad β del coste total respecto a la capacidad y con el parámetro α. Para diferentes valores de la elasticidad β y del radio de compras R hemos construido el cuadro III. La interpretación de los elementos que constituyen el cuadro III es asimismo muy sencilla. Así, por ejemplo, el elemento correspondiente a la quinta fila y a la segunda columna de dicho cuadro nos indica que si la función de costes de funcionamiento de la fábrica es de tipo potencial, siendo el valor de β de dicha función aproximadamente igual a 3.750.000 ptas. y la elasticidad β del coste total respecto a la capacidad igual a 0,20, el radio óptimo de compras de remolacha en la zona que estamos estudiando se deberá extender a unos 50 Km. Los demás elementos que constituyen este cuadro tienen una interpretación similar.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos
Universidades Politécnicas de Madrid y Córdoba.

BIBLIOGRAFIA

1. BALLESTEROS, E.: *Principios de Economía de la Empresa.* Alianza Universidad, 1975.
2. DUEÑAS, J. y ROMERO, C.: «Un Modelo para Determinar la Dimensión Optima de una Central Lechera en la Provincia de Zaragoza.» *Revista de Estudios Agrosociales,* enero 1973, págs. 55-68.
3. ROMERO, C.: *Modelos Económicos en la Empresa.* Ediciones Deusto, 1977.
4. WILLIANSON, J. C.: «The Equilibrium Size of Marketing Plants in a Spatial Market.» *Journal of Farm Economics,* noviembre 1962, págs. 953-67.