JACINTO VEREDA

Análisis espectral con funciones de transferencia simple

INTRODUCCION

Como parte de un proyecto más amplio sobre la aplicación de técnicas de análisis espectral a la economía, exponemos a continuación las etapas de estimación y predicción de una serie temporal usando modelos con funciones de transferencia.[1]

Se puede obtener una idea intuitiva del concepto básico en que se fundamenta el análisis espectral considerando la naturaleza de una serie temporal (X_t). Lo más probable es que en dicha serie se puedan detectar tedencia y variaciones estacionales, junto con ciclos coyunturales.

En cuanto a la tendencia, podemos distinguir tendencia creciente (o decreciente) de la media y tendencia creciente (o decreciente) de la varianza de la serie. Habrá tendencia creciente de la media cuando las observaciones X_t oscilan alrededor de una trayectoria ascendente. Ahora bien, lo que por convención se quiera llamar tendencia de la media no es independiente de la longitud del periodo escogido para el análisis. Por ejemplo, si estudiamos el consumo de cerveza en Madrid, durante mayo-julio, observaremos una «tendencia» ascendente, pero dicha «tendencia» no es nada más que la oscilación de un ciclo cuya longitud es mayor que el periodo mayo-julio; dicha tendencia forma parte de un ciclo estacional. Se recalca, pues, lo dicho anteriormente: la tendencia no es independiente del periodo de análisis.

Cuando el componente estacional no cambia en el tiempo, es fácil separar ese efecto de la serie. Cuando cambia en el tiempo, habrá que observar si lo hace con cierta regularidad o erráticamente. El análisis espectral proporciona un método natural para estudiar esta mezcla de regularidad y de irregularidad. Consiste en detectar la periodicidad o recurrencia de determinadas características de una serie. Por ejemplo,

1. En otro artículo, «Análisis Espectral del Nivel de Reservas Exteriores de España», I.C.E., febrero 1978, se explica el proceso de identificación, estimación y predicción con modelos univariantes.

en comunicaciones telefónicas intercontinentales se descompone la voz humana (estudiando la periodicidad y longitud de las modulaciones de la voz) y se intercala, en el mismo hilo, la voz de otra u otras personas. (Para reconocer y entender el sonido «a», por ejemplo, de quien nos habla no hace falta ocupar la línea todo el tiempo que normalmente se tarda en emitir dicho sonido). En el otro extremo, a donde llegan las voces «mezcladas», se segregan y se reconstruye y oye la voz «normal» de quien llama. Este desglose en periodicidades, mezcla subsiguiente para la transmisión y reagrupamiento posterior para la audición se puede hacer porque se conoce bien la estructura en frecuencias, amplitud, etc. de la voz y gracias a ello por el hilo intercontinental transcurren, «simultáneamente», varias conversaciones.[2]

El mismo proceso de segregación y reagrupamiento se puede aplicar a una serie económica (X_t); pero veamos antes sus premisas más básicas para reconocer más fácilmente la filosofía del análisis espectral.

El método tradicional de analizar la serie X_t consiste en desglosar sus componentes (tendencia, componente estacional, componente cíclico y residuo) suponiendo que los datos que tenemos son una muestra insesgada de una población que puede caracterizarse por una función de densidad cuyos parámetros son desconocidos, pero fijos. Partiendo de la información que se obtiene de la muestra, se infieren las características de la población.

Sin embargo, en el análisis espectral suponemos que cada observación de la serie X_t no es nada más que uno de los posibles valores que la variable X puede haber tomado en aquel momento. Es decir, la cifra que tenemos recogida a intervalos iguales a lo largo del tiempo es la *única* observación de una población o distribución de valores de X en aquel momento y, por lo tanto, tenemos una sola observación de *distintas* distribuciones o variables aleatorias. Obsérvese esta diferencia fundamental entre el análisis espectral y el convencional.

En el análisis espectral, la serie X_t se dice que constituye un proceso aleatorio que puede descomponerse en una suma de sinusoides de frecuencia diferente, pero no estocástica, y de amplitud variable, estocástica. El examen de estos aspectos de la serie X_t (a través, básicamente, de funciones de autocorrelación y covarianza) constituye el núcleo de lo que se llama análisis espectral, técnicas cuya aplicación a la economía se está popularizando ahora, sobre todo a raíz de la publicación del libro de Box y Jenkins.[3]

2. Los Laboratorios de la Bell Telephone Company, fueron pioneros en el estudio y aplicación de estas técnicas en el campo de las comunicaciones y J. W. Tuckey, de los Laboratorios Bell, fue pionero en su aplicación a la economía.

3. Box, G. E. P. y Jenkins, G. M., *Times Series Analysis. Forecasting and Control* Holden-Day, Londres y N. Y., 1970. (2.ª Edición revisada, 1976).

Con las técnicas de Box-Jenkins pueden analizarse cuatro tipos diferentes de modelos:

1. *Modelos univariantes,* basados en *una sola serie* temporal. Intentan describir el valor actual de una serie temporal (Y_t) en función de sus *valores anteriores* y de un componente aleatorio. A esta modalidad corresponden los modelos ya expuestos para predecir el nivel de reservas, el índice del coste de vida, índice de producción industrial y que constituyen el primer eslabón de una serie de trabajos sobr el tema de análisis espectral aplicado a la economía.
   La justificación lógica de estos modelos se hizo en el artículo mencionado, indicando a la vez las limitaciones conceptuales y sus posibles aplicaciones. La reacción más natural ante este esquema, en el que sólo se predice una variable (Y_t) en función de sus valores anteriores (Y_{t-j}), es preguntarse si no sería posible mejorar las predicciones tomando en cuenta la información que pueda venirnos de otra u otras series temporales (X_{it}) asociadas o relacionadas con la anterior. Este es un concepto muy allegado al de regresión simple o múltiple. Pues bien, las técnicas de Box-Kenkins también permiten dar una respuesta adecuada a esta pregunta usando funciones de transferencia.
2. *Modelos con funciones de transferencia;* éstos incluyen dos o más series temporales. Con estos modelos, se intenta explicar el valor actual de una variable dependiente (Y_t) en función de los valores pasados Y_{t-j} de la variable dependiente, en función de los valores pasados de otras variables independientes (X_{it}) y en función de un error (N_t) que puede tener una estructura probabilística descrita adecuadamente por un modelo univariante para reducirle a «ruido blanco».
   Los modelos con funciones de transferencia son semejantes a regresiones dinámicas con un planteamiento y métodos semejantes a los de regresiones estáticas. Como siempre, es crucial tener claro el planteamiento del problema ya que el proceso es distinto según que usemos el enfoque a) o b) enunciados a continuación:

   a) Si examinamos una variable independiente X_t (con la que no interferimos para nada), ¿qué podemos inferir acerca de los valores presentes y futuros de la variable dependiente (Y_t) bajo condiciones habituales del proceso examinado, X_t?
   b) Si interferimos con la variable independiente (X_t) y la alteramos de una forma específica ¿qué impacto o cambio podemos esperar en la variable Y_t?

En el primer caso sólo necesitamos «observar» y recoger datos de la serie; en el segundo, necesitamos interferir deliberadamente induciendo cambios, en cuyo caso, los datos tienen que provenir de un experimento diseñado y controlado. El segundo planteamiento puede identificarse con la situación en que cambiamos una variable por decisión gubernamental (una devaluación, un cambio en el arancel) y buscamos su impacto sobre variables a las que presumiblemente afecta (nivel de exportaciones). El primer planteamiento es el más común. En él se relacionan varias series temporales «observadas» intentando descubrir la estructura que las une. En los modelos con funciones de transferencia se hace el supuesto, también presente en la regresión, de que las X_{it} son independientes entre sí e independientes del error N_t. Si estos supuestos no se cumplen, obtendremos coeficientes sesgados e ineficientes.

3. *Modelos de intervención,* basados aparentemente en una sola serie temporal, en estos modelos α el valor actual de la variable Y_t se explica en función

— de valores pasados de Y_t.
— de acontecimientos aislados ocurridos en momentos concretos, conocidos, que se anticipa hayan podido afectar a la serie Y_t (sea, por ejemplo, una huelga).
— de errores cuya estructura puede aproximarse adecuadamente con un modelo univariante y reducirles a error aleatorio «ruido blanco».

Aunque en este planteamiento sólo entra una variable «auténtica», técnicamente implica el uso de una o varias variables «dummy» más, que representan el hecho de que determinado acontecimiento —que afecta a Y_t— ocurriera o no ocurriera. Típicamente, las otras variables dummy son secuencias de ceros y de unos.

4. *Modelos de intervención con funciones de transferencia,* que combinan als características de ambos modelos (2 y 3) descritos anteriormente.

Pues bien, de esta cuádruple clasificación (modelos univariantes, modelos con funciones de transferencia, modelos de intervención y modelos de intervención con funciones de transferencia) ya expusimos los modelos univariantes en el artículo de *ICE*, Febrero 1978. Ahora vamos a ver los modelos con funciones de transferencia simple.

COMO IDENTIFICAR UN MODELO CON FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

1. *La función de transferencia. — Planteamiento teórico*

Siendo Y_t la variable que se desea explicar en función de sus valores y en función de los valores pasados de otra variable (X_t) con la que se cree estar relacionada y en función de un error aleatorio (N_t), podemos escribir

$$(1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) Y_t = (w_o - w_1 B - \dots w_s B^s) X_{t-b} + N_t \qquad (1)$$

El retardo «b» con el que la influencia de X_r se deja sentir sobre Y_t puede ser 0, 1, 2, ... períodos.

La ecuación (1) puede expresarse más concisamente como

$$Y_t = \delta^{-1}(B)\ w(B)\ X_{t-b} + N_t \qquad (2)$$

o bien como

$$Y_t = v(B) X_t + N_t \qquad (3)$$

donde

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$$
$$w(B) = (w_o - w_1 B - w_2 B^2 - \dots - w_s B^s)$$

son operadores de grado «r» y «s».

«Identificar» un modelo con funciones de transferencia quiere decir obtener valores preliminares para «r», «s», «b» y para los coeficientes δ_m, m = 1, 2, ... r y w_m, m = 1, 2, ... s, en la ecuación (1).

La identidad que une a los coeficientes de $\delta(B)$, de $v(B)$ y de $w(B)$ es la siguiente:

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 - \dots - \delta_r B^r)\ (v_o + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) =$$
$$= (w_o - w_1 B - w_2 B^2 - \dots - w_s B^s) B^b \qquad (4)$$

Igualando sus coeficientes en B se obtiene[4]

$$v_j = 0$$
$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-1} + \dots + \delta_r v_{j-r} + w_o$$

4. Ver Box y Jenkins, op. cit., p. 347.

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - wj_{-b}$$
$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}$$

para $j < b$
para $j = b$
para $j = b + 1, b + 2 \dots$ (5)
$\dots b + s$
para $j > b + s$

Además, se cumplirán los siguientes hechos:

i) Habrá un conjunto «b» de valores de «v» que serán cero; es decir,

$$v_o = v_1 = v_2 = v_{b-1} = 0$$

ii) Habrá $(s - r + 1)$ valores de «v», es decir, $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r}$, que no se comportarán de una forma determinable.

iii) Habrá v_j valores, siendo $j \geqq b + s + 1$, cuyo comportamiento viene determinado por la *ecuación diferencial* de grado «r» cuyos valores iniciales son $v_{b+s}, v_{b+s1} \dots, v_{b+s-r+1}$.
Para $j < b$ los valores iniciales de v_j serán cero.

Queda por definir la estructura del error aleatorio (N_t) que se supone[5] obedece a un modelo univariante ARIMA (p, d, q) esto quiere decir

5. El modelo ARIMA (p. d, q) para el error N_t puede resumirse así:
Con a_t vamos a representar los errores que cumplen los supuestos $E(a_t) = 0$; $E(a_t a_s)$, $t \neq s = 0$; $V(a_t)\sigma_a^2$.
Si $a_t = \Phi_1 a_{t-1} + e_t$, se dice que a_t obfiedece a un proceso autorregresivo de 1.^{er} grado AR(1). Si $a_t = \Phi_1 a_{t-1} + \Phi_2 a_{t-2} + e_t$, se dice que a_t obedece a un proceso autorregresivo de 2.º grado AR(2). En general un proceso autorregresivo de grado «p» es

$$AR(p) = a_t = \Phi_t a_{t-1} + \Phi a_{t-2} + \dots + \Phi_p a_{t-p} + e_t$$

Si $a_t = e_t + \theta_1 e_{t-1}$, se dice que a_t obedece a un proceso de medias móviles de primer grado MA(1).
En general, un proceso de medias móviles de grado «q» se escribe

$$MA(q) = a_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} \theta_2 e_{t-2} + \dots + \theta_q e_{t-q}$$

Un proceso de tipo

$$a_t = \Phi_t a_{t-1} + \Phi_2 a_{t-2} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2}$$

es un proceso mixto ARIMA (2,2).
Se supone que $E(a_t^2)$ y $E(a_t a_{t+s})$ son independientes de «t». Es decir, la varianza de a_t es la misma para todo valor de «t», y la covarianza entre distancia «s» entre los dos períodos y *no* es función del valor del período inicial «t». Este supuesto se conoce como el supuesto de *estacionariedad*. Si las series no son estacionarias, se las diferencia «d» veces hasta llegar a un proceso estacionario. $\Delta_{ta} = a_t - a_{a-t} = (1 - B)a_t$; la operación inversa se puede llevar a cabo con el operador sumatorio;

$$\Delta^{-1}a_t = (S)a_t = \sum_{J=0}^{\infty} a_{t-}{}^{j}$$
$$= a_t + a_{t+1}2 + a_{t+2} + \dots$$
$$= (1 + B + B^2 + \dots)a_t$$
$$= (1 - B)^{-1} a_t$$

De aquí proviene la letra «I» de la sigla ARIMA, donde «I» significaría «integrado» o sumado que dentro del objetivo inicial de identificar el modelo con función de transferencia también entra el obtener valores preliminares de los coeficientes Φ y Θ de la ecuación que describe los errores.

El proceso de identificación del modelo puede desglosarse en las siguientes etapas:

1.ª Obtener estimadores preliminares de (v_j) del impacto relativo que X_t tiene sobre Y_t.

2.ª En base a los estimadores v_j obtenidos, estimar el grado de «r» y de «s» y el valor de «b» en la expresión (1).

3.ª Haciendo uso de las igualdades enunciadas en (4), estimar los valores de los coeficientes «δ» y «w» en (1), a partir de los valores estimados de «r», «s» y «b» en la etapa 2.ª.

Conociendo los valores estimados de v_j y los hechos enunciados en i) — iii) se puede estimar «b», «r» y «s» y en base a éstos, los valores de «δ» y de «w».

En todas estas operaciones subyace el supuesto de que las series Y_t, X_t son estacionarias. Si no lo fuesen, se las transforma tomando repetidas diferencias hasta que lo sean. Un indicio de que las series no son estacionarias lo constituiría el hecho de que lafu nción de correlación cruzada entre Y_t y X_t no tienda a cero rápidamente o el que sus propias funciones de autocorrelación no tiendan a cero rápidamente. Por lo tanto, antes de calcular las funciones de autocorrelación $\gamma_{xx}{}^{(k)}$ y $\gamma_{yy}{}^{(k)}$ y de correlación cruzada $y_{xy}{}^{(k)}$ que son las herramientas básicas en el proceso de identificación del modelo a aplicar, las series originales Y_t y X_t habrán sido diferenciadas en número adecuado de veces «d» que en la práctica suele ser 0, 1, 2 y en modelo estacionales 6 ó 12.

«Preblanqueo» de las series

La serie original X_t puede expresarse como

$$\Phi_x(B)\,\Theta_x^{-1}(B)\,X_t = a_t \tag{6}$$

Donde $a_t \sim N(0,1)$; la misma transformación obtenida para X_t se le aplicará a Y_t obteniendo

$$\Phi_x(B)\,\Theta_x^{-1}(B)\,Y_t = b_t \tag{7}$$

La aplicación a X_t y a Y_t de dicha transformación generará una distribución de a_t y de b_t para distintos retardos con sus respectivas S_a y S_b (desviaciones típicas). La función $\gamma_{ab}(k)$ de correlación cruzada entre a_t y b_t para distintos retardos sirve para obtener los valores preliminares de v_j en le ecuación (3) usando la igualdad [6]

$$v_k = \frac{S_b}{S_a} \cdot \gamma_{ab}\ k)$$

2. *La función de transferencia: Ejemplo empírico*

Los datos para este ejemplo son: gastos en publicidad y volumen de ventas, ambos mensuales. Se refieren a una crema cosmética principalmente usada como bronceador. Ambas series aparecen en la Gráfica I. Ambas reflejan una clara estacionalidad y un modesto ascenso. Durante el período 1965-1977 hubo varios aumentos en los precios que conceptualmente pueden identificarse con acontecimientos aislados (y aislables temporalmente) porque las fechas en que ocurrieron se conocen con exactitud. Son aislados, además, porque ocurren irregularmente y, por lo tanto, cualquier efecto que hayan tenido sobre las ventas hay que describirlo por separado del comportamiento normal de la serie. Es decir, podemos usar un modelo de transferencia y de intervención. La pregunta básica a la que hay que responder es la siguiente: ¿Qué efectos tienen sobre las ventas los gastos en publicidad y la subida de precios? Intentaremos responder a la primera parte de la pregunta e intentaremos decidir si merece o no la pena incluir la variable publicidad para predecir las ventas (que es una cuestión totalmente distinta de si la publicidad favorece las ventas). Para ello, primeramente vamos a predecir el volumen de ventas con un modelo univariante (sin incluir la publicidad). Después predecimos las ventas incluyendo la publicidad con un modelo de funciones de transferencia.

El Modelo Univariante

El modelo que mejor[7] se ajusta al volumen de ventas es el siguiente:

$$(1 - B^{12})Y_t = \Theta_o + (1 + \Theta_{12}B^{12})a_t \tag{8}$$

Se diferencian las series originales Y_t con un retardo de 12 meses ($Z_t = Y_t - Y_{12}$) que, concretamente, da un valor de $\Theta_o = +4.8$ y de $\Theta_{12} = 0.59$. Con lo cual el volumen de ventas se puede expresar así:

$$Y_t = Y_{t-12} + 4.8 + a_t - 0.59\, a_{t-12} \tag{8_a}$$

6. Vide Box-Jenkins, op. cit., p. 380, ecuación (11.2.12.).
7. Otro modelo alternativo sería $(1\text{-}B^{12})Y_t = (1\text{-}\theta_{12}\ B^{12})a_t$ sin tendencia. Sin embargo, la media de los residuos que se obtienen con este modelo es significativa, lo cual sugiere la conveniencia de incluir una tendencia. El modelo con tendencia da un error típico medio cuadrático que es 70 % más pequeño que el del otro modelo.

GRAFICO 1

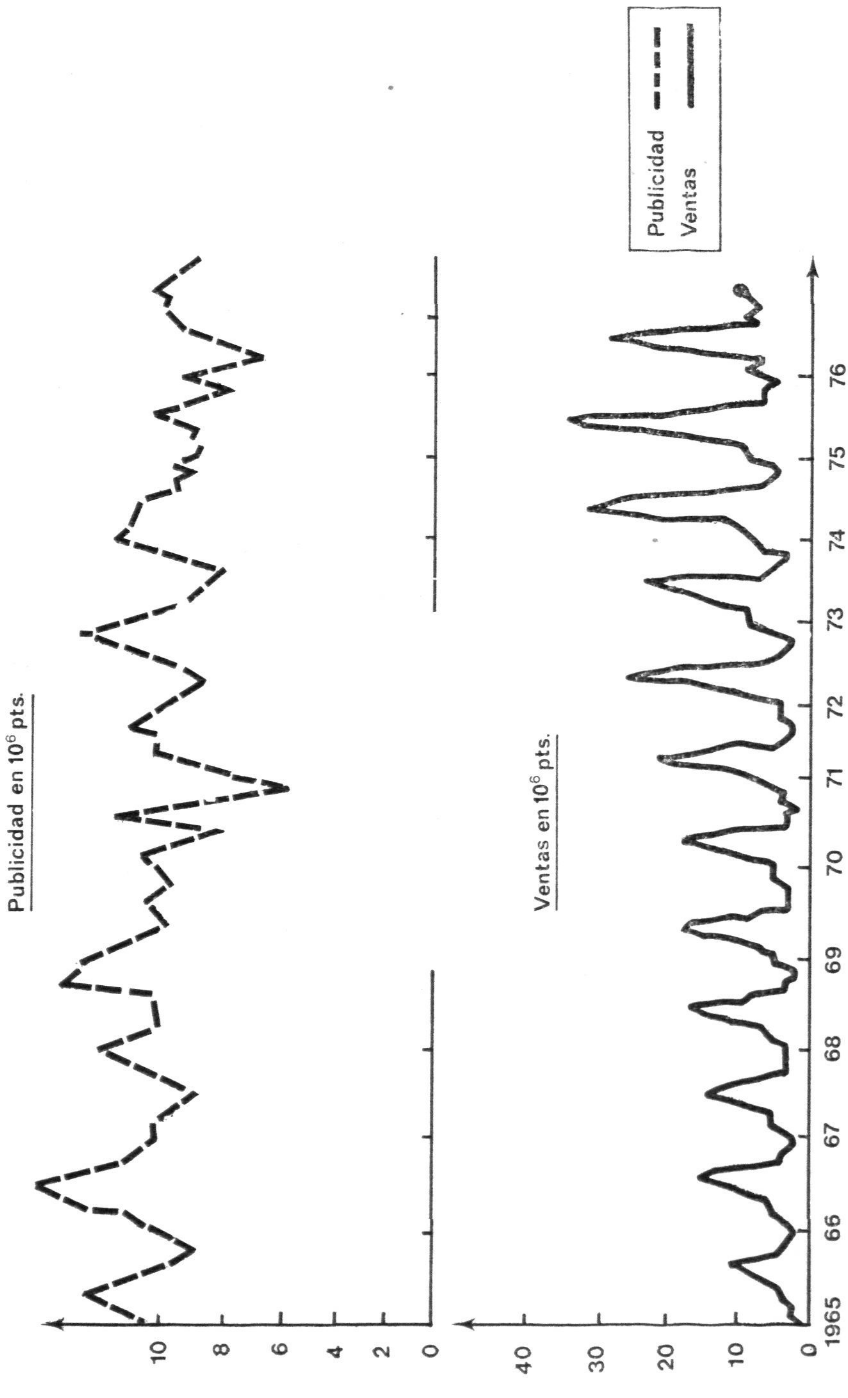

Gráfico 1

que es un mero reordenamiento de la ecuación anterior insertando los valores estimados. El gráfico 2 da una idea del ajuste entre ventas realizadas y previstas con dicho modelo. Se dan las predicciones para un horizonte de 36 meses desde el origen arbitrario de 1975.a. Vemos que el modelo, con sólo dos parámetros, reproduce bien la estacionalidad de la serie y predice con exactitud. Recuérdese que la función es autoajustable en el sentido de que cuando se producen cambios en el comportamiento estacional de la serie éstos se adoptan y proyectan automáticamente hacia el futuro. Recuérdese también que cuando una predicción es demasiado alta para un mes, las predicciones desde este punto tienden a seguir siendo altas porque, como demuestra Box-Jenkins [8] los errores de predicción a partir del mismo punto, pero para distintos horizontes, están correlacionados.

Modelo con Función de Transferencia entre Ventas y Publicidad

Hemos llamado a las ventas Y_t. Llamemos a la publicidad X_t. El objetivo de introducir una nueva variable es ver si las predicciones de ventas se pueden mejorar con la introducción de los gastos en publicidad: para ello hay que descubrir la relación que une a ambas series (la función de transferencia). El primer paso en este empeño es identificar bien un modelo univariante para la serie X_t. Un proceso análogo al seguido para identificar el modelo para las ventas nos lleva a elegir el siguiente modelo para el volumen de gastos publicitarios:

$$(1 - B^{12})X_t - (1 - \Theta_{12}B^{12})b_t \tag{9}$$

donde b_t es un error aleatorio. La estimación de esta ecuación dio como resultado $\Theta_{12} = 0.49$.

El segundo paso a dar es hallar la función de correlación cruzada entre la serie «b_t»

$$b_t = X_t - X_{t-12} + 0.49\, b_{t-12} \qquad 10)$$

y la serie «a_t»

$$a_t = Y_t - Y_{t-12} + 0.49\, b_{t-12} \tag{11}$$

aplicando el *mismo* modelo para ambas. Con este proceso se elimina, primero, la interrelación que exista *dentro* de la serie X_t antes de intentar descubrir la relación que exista entre Y_t y X_t. La presencia de interre-

8. Apéndice A5.1, «Autocorrelations between forecast errors», *op cit.* Págs. 158-160.

laciones internas a la serie X_t mezclaría o embrollaría cualquier esfuerzo por descubrir la relación que exista entre las dos series haciendo que la función de correlación cruzada entre Y_t y X_t en su forma original sea de muy escasa utilidad.

El Cuadro I da la función de correlación cruzada entre «b_t» y «a_t». Los cálculos en esta etapa están basados en 144-12 observaciones (ya que 12 observaciones se pierden al diferenciar las series con retardos de 12).

En el Cuadro I nos interesa en particular la columna de la izquierda. Son las correlaciones cruzadas para el caso en que «b_t» está retardada con relación a «a_t». Las correlaciones cruzadas serían distintas de cero si existe relación entre publicidad en el período «t» y ventas en el mismo período o en períodos anteriores (que es justamente lo que se trata de corroborar para que la introducción de X_t sea de utilidad adicional). Aquí son significativos los retardos 0, 1 y 2.

Si en la columna de la derecha hubiera correlaciones cruzadas distintas de cero querría dar a entender que las ventas afectan a la publicidad —hecho contrario al supuesto básico del problema. En la derecha no hay cifras significativamente distintas de cero.

Multiplicando las correlaciones cruzadas de la izquierda por la ratio (157.520)/(210.061) se obtienen los valores iniciales de v(B) para la expresión (3), valores que aparecen en el Cuadro II.

La expresión (3) puede desarrollarse de esta forma:

$$y_t = w_o x_t + w_1 x_{t-1} + w_2 x_{t-2} + \cdots + n_t \tag{12}$$

donde $y_t = (1 - B^{12})Y_t$, $x_t = 1 - B^{12})X_t$ (Y_t = ventas y X_t = Publicidad).

Las w_j de la expresión (12) cuantifican la reacción o respuesta de Y_t a cambios o impulsos en X_t.

En la expresión (12), n_t es un error NO necesariamente alteatorio. Además, como sólo eran significativas las autocorrelaciones cruzadas con retardos 0, 1 y 2, sólo serán significativas las w_o, w_1 y w_2.

Nos queda identificar la estructura a la que obedecen los errores «n_t» de (12). Para ello se genera una serie de n_t usando los valores estimados en «w» en (12) y a esta serie univariante se le acopla el modelo ARIMA más idóneo. En nuestro caso resultó ser

$$n_t = (1 - \Theta_{12}B^{12})e_t \tag{13}$$

Por lo tanto, nuestro modelo provisional con función de transferencia expresado en la forma típica de Box-Jenkins es

$$(1 - B^{12})Y_t = (w_o - w_1B - w_2B^2)\ (1 - B^{12})X_t + (1 - \Theta_{12}B^{12})e_t \tag{14}$$

CUADRO I

Correlaciones cruzadas entre ventas y publicidad

N.° de retardos en la serie a_t	Correlaciones cruzadas	N.° de retardos en la serie b_t	Correlaciones cruzadas
1	0.305	1	0.130
2	0.337	2	— 0.075
3	0.284	3	0.137
4	— 0.065	4	0.211
5	— 0.202	5	0.088
6	— 0.140	6	— 0.150
7	— 0.046	7	0.051
8	0.230	8	0.100
9	— 0.100	9	— 0.068
10	— 0.044	10	— 0.025
11	0.050	11	— 0.093
12	0.089	12	0.027
13	— 0.095	13	0.207
14	0.084	14	— 0.044
15	0.120	15	— 0.243
16	— 0.109	16	— 0.109
17	— 0.155	17	— 0.081
18	— 0.044	18	0.120
19	— 0.093	19	— 0.127

CUADRO II

Función de reacción de y_t a cambios en x_t

Retardo	Valor de W_k
1	0.229
2	0.253
3	0.213
4	— 0.049
5	— 0.152
6	— 0.166
7	— 0.106
8	— 0.034
9	0.172
10	— 0.075
11	— 0.033
12	0.037
13	0.067
14	— 0.071
15	— 0.063
16	0.090
17	— 0.082
18	— 0.116
19	— 0.033
20	— 0.070

CUADRO III

Errores de ajuste del modelo 14a. Funciones de autocorrelación (A) y correlación parcial (B)

A)

1-12	.02	—.01	—.01	—.06	—.01	.02	—.00	.01	.12	—.03	.02	—.16
Desviación típica	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.10
13-14	—.04	.14	—.03	.08	.09	.01	—.04	—.17	.15	.02	.15	—.04
Desviación típica	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.11	.11	.11
25-26	.19	.09	—.04	.01	—.11	—.03	.10	.13	—.19	—.03	.07	—.12
Desviación típica	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.12	.12	.12	.12

Para determinar si esta serie $\sim$ N (0,1) comparar 24.799 con $X^2_{27,\,\alpha}$

B)

1-12	.02	—.01	—.01	—.06	—.01	.02	—.00	.01	.12	—.03	.02	—.16
13-24	—.02	.14	—.05	.07	.08	.02	—.04	—.19	.24	.00	.13	—.08
25-26	.21	.14	—.09	.04	—.02	—.06	.09	—.00	—.11	—.05	.07	—.11

En base a estos datos se pueden concluir que los errores de 14a no son susceptibles de modelización ulterior bajo ningún esquema ARIMA.

y que expresado con los valores estimados resulta ser:

$$(1 - B^{12})Y_t = 26.21 + (0.25 + 0.21B + 0.19B^2)(1 - B^{12})X_t + \\ + (1 - 0.66B^{12})e_t \qquad (14a)$$

El proceso de ajuste es iterativo y no se postula un modelo de antemano, sino que se deja que sean los datos quienes dicten el modelo que mejor se ajusta a ellos. Después de diversos intentos, el modelo (14) demostró ser el más eficaz en las predicciones. Obsérvese que se le añadió una constante (o tendencia) no prevista en el planteamiento de (14). Los resíduos de este modelo son aleatorios con media cero y varianza 119.7.

Este modelo relaciona el cambio en el volumen de ventas del mes «t» del año anterior con cambios en publicidad en el mes «t» del año anterior y con cambios en publicidad de los dos meses anteriores del período «t».

¿Hemos mejorado las predicciones incluyendo la publicidad? Para ello hay que comparar los resultados del modelo univariante (8a) con los del modelo con función de transferencia (14a). Su estructura es idéntica si se excluye la variable Publicidad. Sus errores típicos son 175.1 y 136.7, respectivamente. Por lo tanto, incluyendo la variable Publicidad, se logra una reducción de 21.93 % en los errores de ajuste. En términos de poder de predicción el modelo (14a) con función de transferencia también es superior al modelo (8a) univariante, ya que sus errores medios cuadráticos son 9.5 % menores que los del modelo univariante.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos ilustrado cómo las técnicas de análisis espectral pueden usarse para predecir relacionando dos series temporales. Las primeras críticas a los modelos univariantes ARIMA era que no incluían teoría alguna y que no nos daban los «parámetros estructurales». Sin embargo, en este modelo uniecuacional con función de transferencia volvemos a obtener parámetros estructurales sui generis (si por tales se entiende una cuantificación del impacto que tendrían sobre la variable dependiente (ventas) cambios en la variable independiente o explicativa (publicidad). Como existe la posibilidad de relacionar con funciones de transferencia múltiples varias (más de dos) series temporales —trabajo que dejamos para otra publicación— podemos llegar con el análisis espectral a conceptos muy semejantes a los de regresión múltiples a la que estamos más acostumbrados.

Ahora bien, el hecho de que en nuestro ejemplo resultase más eficiente el modelo con función de transferencia que el modelo univariante no debe servir de regocijo a los que se oponen a los modelos ARIMA, porque en otros casos que hemos estudiado (turismo) un simple esquema autorregresivo o de medias móviles nos ha dado mejores perdicciones que modelos con dos y tres variables explicativas (es decir, con dos y tres funciones de transferencia).

En lugar de un rechazo recalcitrante de las técnicas de Box-Jenkins, siempre será más productivo incorporar el análisis espectral a las técnicas econométricas tradicionales como hace Dhyrmes o ser más pragmático y en lugar de entrar en debates aceptar el método que mejores resultados dé con tal de que técnicamente y conceptualmente sea defendible.

Facultad de Económicas
Universidad Autónoma de Madrid