E. LOZANO RODRIGUEZ

Sobre Sraffa y la producción conjunta[1]

La presente nota sobre Sraffa y la producción conjunta se propone una relectura (a la vista del artículo de CF. Manara, Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci, L'industria n.° 1, 1968) de la parte II de su, ahora ya, renombradísimo libro.

Adelanto que no voy a referirme a los capítulos X y XI sobre Capital Fijo y Tierra, respectivamente, por más que, como el mismo Sraffa señala, crea que constituyen las cuestiones más relevantes; sin embargo son, sin duda, casos especiales de producción conjunta, aunque desde un punto de vista más significativamente económico sean los más interesantes.

El estudio de la parte II de "Producción de mercancías...", ha sido, desgraciadamente, tan escaso que conviene proceder paso a paso. El capital fijo y la tierra –y los casos más apasionantes y generales de bienes no producidos y, sin embargo, utilizados en la producción– constituirán, yo bien quisiera, mi próxima dedicación futura.

Mi sentimiento respecto a la llamada revolución Sraffiana no comparte la mayor parte de las valoraciones que se han hecho del librito, escasamente 120 páginas en la versión italiana, que, exagerando quizá un poco, representa el trabajo más importante de Teoría económica de los cuarenta últimos años.

Hoy, me perdonais, repropongo Sraffa, porque no creo que sea ya una vía muerta, aunque, como se verá, este papel no dé razones que apoyen esta creencia. Mencionaré en el I epígrafe las aportaciones de Sraffa al debate sobre la economía. Obviamente las insuficiencias, si las hay, del razonamiento y proposiciones de Sraffa sobre la producción conjunta deben de verse bajo el prisma que el mismo Sraffa señala en su introducción a "Producción de..." "rasgo peculiar de las proposiciones

1) He discutido la parte IV con Eusebio Aparicio, por la economía y con Isabel Agüero y Nacho Casares, por la matemática. Julio Segura dedicó una parte de su precioso tiempo a la lectura de una versión provisional. A todos mi agradecimiento.

(es) que... han sido elaboradas... para servir de base a una crítica de la teoría (marginalista del valor y de la distribución)" (pág. 13 de la versión castellana).

El II epígrafe señala una solución inmediata que consiste en último extremo en reconducir los problemas del modelo de Producción conjunta a los ya conocidos y verificados y resueltos de la producción simple.

Una aproximación diversa es la del trabajo ya citado de Manara, que se expone en el epígrafe III.

El último epígrafe –el IV– se dedica a la discusión de algunas cuestiones, que nos lleva, triste destino, a la teoría trabajo del valor y a las observaciones de Morishima sobre la reconsideración de tal teoría (cfr. el cap. 14 de su Marx's Economics c.u.p. 1973).

I

Las críticas explícitas e implícitas que Sraffa hace a la economía marginalista son: 1) el rechazo del carácter omnicomprensivo de la teoría económica. (Frente a la teoría convencional que hace de las cantidades y de los precios un campo de análisis cerrado, Sraffa, suponiendo cantidades dadas introduce un elemento crítico fundamental que, en mi opinión, modesta como es obligado decir, reconduce a un planteamiento de la distinción económico/no económico, que liga más profundamente de lo que hasta hoy se ha estimado Sraffa con los clásicos, y más especialmente con Marx) ii) críticas contra el concepto neoclásico del capital, como una magnitud medible independientemente de la distribución. La crítica explícita de Sraffa al intento de Böhm-Bawerk de utilizar el período medio de producción como medida de la intensidad capitalista de los métodos de producción. iii) la crítica de la proposición neoclásica –crítica ligada sustancialmente a la anterior, pero que ha sido formulada y discutida de modo independiente– de que no existe retorno de técnicas y su corolario de que existe una relación inversa entre capital e interés, que permite concebir este último como indicador (precio) de escasez de aquél. Es, pues, la extensión de las bases de micro-economía –oferta y demanda– lo que constituye la expresión más acabada de ese carácter onmicomprensivo antes aludido.

Como es notorio, las respuestas a tales críticas han tratado de quitar importancia a los fenómenos del retorno de las técnicas y de inversión del capital y, en todo caso, reproponer como esencia de la teoría económica los modelos desagregados de equilibrio económico general.

Las críticas de Sraffa a la teoría marginalista son, pues, de dos tipos: crítica interna (consistencia lógica de la teoría –versiones agregadas que postulan determinadas relaciones entre capital y tipo de beneficio) y crítica externa, que propone un modelo alternativo que no pretende invalidar lógicamente el modelo desagregado onmicomprensivo, sino que aspira a replantear los problemas económicos y la misma definición de economía de modo que produzca resultados fecundos.

En el primer caso los sraffianos respondemos a las proposiciones marginalistas; eso que Vd. dice no es cierto. En el segundo, lo que Vd. dice se refiere a un mundo no imaginable, o si imaginable, no realizable. De otro modo, los especialistas del marginalismo desagregado –valga la expresión– construyen un mundo a su medida, respecto al que tendría poco sentido tratar de buscarle las vueltas, es decir de encontrarle las incoherencias lógicas. Tarea a la que con un empecinamiento cuasi trágico (triste es constatarlo) dedican grandes esfuerzos algunos sraffianos.

II

Como ya es costumbre alteramos los símbolos utilizados por Sraffa. Indicamos con K el número (obviamente entero) de mercancías y de industrias que existen en el modelo que examinamos. Consideramos un Sistema de K industrias cada una de ellas produce K productos. Indicamos con A y B dos matrices cuadradas que representan las $2K^2$ cantidades de mercancías que constituyen nuestro modelo.

a_{ij} y b_{ij} ($i_{ij} = 1, 2, 3... K$) significan respectivamente la cantidad de la mercancía i-ésima que se utiliza como medio de producción en la industria j y la cantidad de la mercancía i-ésima producida por la industria j-ésima. Por tanto en las matrices A y B las filas se refieren a las mercancías y las columnas a las industrias.

$p = [\ p_1\ p_2\ p_3\ ...\ p_k\ ]$ indica el vector de los precios de las mercancías y $l = [\ l_1\ l_2\ ...\ l_k\ ]$ es el vector de las cantidades de trabajo utilizadas en cada industria. r y w denotan el tipo de beneficio y el de salario por unidad de trabajo respectivamente.

Se utilizan además las notaciones convencionales en cálculo matricial. x indica en general un vector fila, es decir una matriz de dimensiones (1, K), los vectores columnas correspondientes se denotan con el símbolo x^T. $A > O$, $x > O$ representan una matriz y un vector que tienen todos sus componentes positivos. $A \geqslant O$, $x \geqslant O$ son las matrices y vectores semipositivos, es decir todos los componentes son no negativos y al menos uno, positivo. Y en fin, $A \geqq O$, $x \geqq O$ representan matrices (vectores) cuyos elementos son no negativos, sin exclusión de elementos todos nulos.

Con estas convenciones el sistema de producción conjunta (Sraffa p. 58) Se escribe en términos matriciales $pA(1+r) + wl = pB$. [1]
La ecuación i-ésima establece el equilibrio costes-ingresos de la industria i-ésima, $(a_{1i}\, p_i + a_{2i}\, p_2 + ... + a_{ki}\, p_k)(1+r) + wl_i = b_{1i}\, p_1 + b_{2i}\, p_2 + ... + b_{ki}\, p_k$ [1a]
Las condiciones económicas exigen que $A \geqslant O$, $B \geqslant O$, $l \geqslant O$, $p > O$ (Sraffa insiste en varios pasajes y especialmente en la pág. 68 sobre la necesidad de que los precios sean positivos) y $r \geqslant O$, $w \geqslant O$.

Postmultiplicando por B^{-1} la expresión [1] (B es, por tanto, y para que pueda definirse la inversa, una matriz no singular, es decir que no hay proporcionalidad entre filas y columnas lo que por otra parte es condición necesaria para que el sistema de producción conjunta sea posible. cfr. Sraffa pag. 68).

Se obtiene que $(1+r)\,pAB^{-1} + wlB^{-1}, = p$ [2]
y haciendo $AB^{-1} = \bar{A}$ y $lB^{-1} = \bar{l}$ queda que $(1+r)\,p\bar{A} + w\bar{l} = p$ [2a]

Si sobre [2a] se imponen las condiciones que aseguran soluciones, es decir,

$\bar{A} \geqslant O$, $I - A \geqslant O$ y $\bar{L} \geqslant O$ que son condiciones obvias: para producir mercancías se utilizan (en cantidades positivas) o no (cantidades cero) mercancías, por tanto todo valor a_{ij} $i, j = 1, 2 \ldots k$ es necesariamente no negativo. El sistema es capaz de producir para alguna mercancía, por lo menos, una cantidad en exceso a la necesaria para reemplazar los medios de producción consumidos. Finalmente alguna industria, cuando menos, utiliza cantidades positivas de trabajo.

Es obvio, sin embargo, que $\bar{A}$ obtenida a partir de la matriz A que cumple necesariamente $A \geqslant O$ puede presentar valores negativos como consecuencia de la postmultiplicación por B^{-1}, que puede contener valores negativos aunque la B misma, matriz de producción, sea no-negativa. Lo mismo vale para $\bar{l}$. Tenemos, pues, que suponer la no-negatividad.

¿Es un supuesto muy restrictivo? Como veremos no se trata ya de su carácter o no restrictivo, sino del significado mismo de la operación de "reducción" de la producción conjunta a la simple.

Fijémonos en $AB^{-1} = \bar{A}$ ó $A = \bar{A}B$, ¿qué significado se puede dar a los $\bar{a}_{ij}$? El término genérico es $a_{ij} = \bar{a}_{i1}\, b_{1j} + \bar{a}_{i2}\, b_{2j} + \ldots + \bar{a}_{ij}\, b_{ij} + \ldots + \bar{a}_{ik}\, b_{kj}$.

a_{ij} es la cantidad de la mercancía i que la industria j utiliza para producir b_{1j}, b_{2j} ... b_{kj}. Pueden interpretarse, pues, los $\bar{a}_{ij}$ como los coeficientes input-output *puros*, es decir como la cantidad de la mercancía i necesaria para producir una unidad de la mercancía j, dondequiera que se haya producido.

Planteemos el problema de otro modo más familiar para aquellos que se dedican a problemas estadísticos de las tablas input-output. Conociendo la matriz A y la matriz B, que se llaman de absorción y producción, se trata de construir una matriz de coeficientes input-output que expresen las necesidades de mercancía (i) para producir la mercancía (j).

La hipótesis que se adopta es simple, y relativamente ingenioso el camino que ha llevado explicitamente a su formulación.

La hipótesis se formula como sigue: toda mercancía tiene la misma estructura de inputs cualquiera que sea su lugar de producción.

Bajo esta hipótesis es fácil escribir que $a_{ij} = \bar{a}_{i1}\, b_{1j} + \bar{a}_{i2}\, b_{2j} + \ldots + \bar{a}_{ik}\, b_{kj}$, es decir que el total de mercancía i utilizado en la industria j es una media de los coeficientes desconocidos que se utilizan para producir mercancías concretas ponderados por las cantidades de estas mercancías producidas en la industria en cuestión, es decir, la industria j.

Escribiendo la ecuación anterior para todo $i, j = 1, 2 \ldots k$ y, en notación matricial tenemos $A = \bar{A}B$ y, postmultiplicando por B^{-1}, queda $AB^{-1} = \bar{A}$. Dejando de lado el hecho de que pueden aparecer cantidades negativas en $\bar{A}$, siempre que el supuesto arriba mencionado, tecnología de mercancías, no sea adecuado, parece claro que tal supuesto es excesivamente mecánico y simple. En cualquier caso si tal operación pudiera hacerse lo que se pone de manifiesto es que se trataba de un caso *falso* de producción conjunta.

Si puedo calcular AB^{-1} como operación previa, las ecuaciones que formulo corresponden a lo que llama Sraffa producción simple. Este tipo de solución es buen ejemplo de la lectura que se ha hecho de "Producción de mercancías...", y lectura que ha sustituido Sraffa por Gantmacher y su "Teoría de las matrices" y se ha tratado de encajar los problemas exquisitamente económicos en el mundo abstracto y cualitativamente indeterminado de las matemáticas.

Lo propio y específico de la producción conjunta es la imposibilidad de atribuir las cantidades de una mercancía necesaria para producir otra mercancía concreta en una industria determinada.

Los ejemplos que da Sraffa (pág. 93 edición castellana) "de la lana y de la carne de oveja y del trigo y de la paja" niegan toda posibilidad de escindir las mercancías necesarias para producir la carne de las necesarias para producir la lana.), cuando hablando de "la verificación de la regla de que, cuando el tipo de beneficio es cero, el valor relativo de las mercancías es proporcional a la cantidad de trabajo... "dice que" (parece dudoso) tenga sentido hablar de una cantidad de trabajo separado que haya ido a producir una entre una serie de mercancías obtenidas conjuntamente" (Sraffa 83).

III

El análisis matemático de la producción conjunta realizado por Manara en líneas generales y respecto a los problemas aquí (en esta nota) tratados puede resumirse como sigue:

Se examinan las condiciones bajo las que la ecuación fundamental $(1+r)$ $pA + wL = pB$ es aceptable. Se trata de determinar el vector de precios (positivos) conocidos los otros elementos de la ecuación, en términos semejantes al problema planteado en el caso más elemental de la producción simple.

Supondremos, aunque como puede demostrarse no es restrictivo, que todos los bienes son básicos, lo que asegura que la ecuación fundamental que escribimos en la forma $w_q^1 = p\,[\,B - A\,(1+r)\,]$ es suficiente, bajo los supuestos que formularemos, para determinar el vector p.

Los supuestos que formula Manara son:

H1. la cantidad global de cada mercancía que se utiliza como medio de producción es inferior a la cantidad de la misma mercancía que produce globalmente el sistema económico. Es decir que el sistema es capaz de generar excedente de todas y cada una de las mercancías.

Denotando por $S^T = (1,1 \ldots 1)$ el vector columna unitario, la hipótesis anterior se escribe $[\,B - A\,]\,S^T > O$

H2. Existe por lo menos un vector de precios positivos $\hat{p}$ que asegura la existencia de excedente en términos de valor.

En símbolos $\hat{p}\,[\,B - A\,] > O$.

H3. det $[\,B - A\,] \neq O$, hipótesis que garantiza que al menos para un valor de r, y precisamente para $r = O$, los vectores que constituyen las filas de la matriz $[\,B - A\,(1+r)\,]$ son linealmente independientes.

El paso siguiente es la construcción de tres intervalos para r, definidos como sigue.

Sea X el conjunto de todos los vectores columna que tienen componentes no negativos es decir $X = \left\{ x^T \mid x^T \geqslant O \right\}$ y designemos por U(r) el conjunto de los vectores columnas que pertenecen a X y tal que, para cada vector x^T de U(r) vale la relación $[B - A (1 + r)] x^T \geqslant O^T$

De otro modo, $U(r) = \left\{ x^T \mid x^T \in X \cap [B - A (1 + r)] x^T \geqslant O^T \right\}$; fácilmente se verifica que bajo el supuesto H1, U(r) es un conjunto no vacío y que el conjunto de valores de r, definidos por la semirecta $r \geqslant O$, para los que U(r) es no vacío es un intervalo no vacío y cerrado por la izquierda.

Análogamente define un conjunto V(r) como intersección del conjunto de vectores fila que tienen componentes no negativos $P = \left\{ y \mid y \geqslant O \right\}$ con el conjunto $y [B - A (1 + r)] \geqslant O$.

Por el supuesto 2, el conjunto V(r) es un conjunto no vacío, y además comodamente se verifica que el conjunto de valores de $r \geqslant O$ para los que V(r) no es vacío es un intervalo cerrado por la izquierda. El mismo razonamiento permite concluir que el conjunto de valores de $r \geqslant O$ tales que del $[B - A (1 + r)] \neq O$ es también un intervalo cerrado por la izquierda. Denotamos por J el conjunto de todos los r que cumplen $r \geqslant O$ y para los que U(r), V(r) son no vacíos y se cumple det $[B - A (1 + r)] \neq O$.

Estas hipótesis son necesarias para que las soluciones de nuestro modelo tengan sentido económico y en verdad son casi un puro reflejo de los términos en que plantea Sraffa su modelo. Existe un excedente y no existe proporcionalidad ni de productos ni de medios de producción. Pero para garantizar precios positivos no son suficientes y es necesario formular una nueva hipótesis que en principio parece más dificilmente admisible. Se refiere a la necesidad de que el vector de trabajo l sea tal que garantice precios positivos. La hipótesis se formula así:

Consideremos la matriz $[B - A (1 + r)]$ correpondiente a un valor de r que pertenece al intervalo J y definamos el conjunto de vectores Z, dados por la expresión $Z = p [B - A (1 + r)]$, p pertenece al conjunto V(r).

Sea $V^1(r)$ el conjunto de vectores Z. Para estas definiciones si $l \in V^1(r)$ entonces $p = l [B - A (1 + r)]^{-1} > O$. La hipótesis crudamente expresada no puede ser más sorprendente: parece decir que si las cantidades de trabajo expresadas por el vector l son tales que los precios son positivos, entonces los precios son positivos.

IV

Sin embargo este supuesto que evita que los precios puedan hacerse negativos como resultado de una variación del tipo de beneficio dentro de los límites del intervalo J, no es ciertamente sorprendente y es fruto de la producción conjunta. Pues, continúa Sraffa (p. 87), como los precios negativos son inadmisibles los métodos de producción (expresados en el caso de la producción conjunta por el hecho de que toda mercancía es suceptible de ser producida por las K industrias con proporciones distintas de los medios de producción) que ocasionasen precios negativos serían desechados a favor de métodos consistentes con precios positivos.

Sraffa no insistió sobre esta cuestión, sin embargo el corolario que se sigue de esta posibilidad de aparición de precios negativos como consecuencia de alteraciones en el tipo de beneficio, a saber la posibilidad de que las cantidades de trabajo directa e indirectamente incorporadas en las mercancías fuesen negativas fue analizado en el parágrafo 70.

Un simple ejemplo tomado de Steedman ("Positive Profits with negative sorplus value". *Economic Journal* Marzo 1975), ayuda a comprender esta paradoja que para quienes están acostumbrados a pensar en términos valor-trabajo es, digamos, casi inaferrable. Nótese de paso que una lectura más atenta de Sraffa hubiese puesto de manifiesto los límites de los llamados teoremas fundamentales marxianos y análisis asociados del fenómeno de la explotación. Pues, si los valores marxianos pueden ser negativos y por tanto la plusvalía, ¿habría de interpretarse el salario percibido por los trabajadores (siempre no negativo) como un nuevo milagro –uno de tantos– del "capital" e incluso como una antiexplotación?.

Vayamos con nuestro ejemplo:

	MERCANCIA 1	MERCANCIA 2	TRABAJO	MERC. 1	MERC.2
PROCESO 1	25	0	5	30	5
PROCESO 2	0	10	1	3	12
TOTAL	25	10	6	33	17

Se trata de una economía que produce conjuntamente las mercancías 1 y 2 a partir de los medios de producción y de trabajo en la cuantía y proporción reflejadas en el cuadro 1. El excedente producido es de 8 unidades de la mercancía 1 y 7 unidades de la mercancía 2.

Consideremos ahora otra economía con los mismos métodos de producción pero que distribuye su trabajo ya no 5 y 1 sino 3 en el primer proceso y 2 en el segundo. La economía en cuestión estará representada por:

	MERCANCIA 1	MERCANCIA 2	TRABAJO	MERC.1	MERC.2
PROCESO 1	15	0	3	18	3
PROCESO 2	0	20	2	6	24
TOTAL	15	20	5	24	27

Obsérvese que el producto neto ahora es de 9 unidades de la mercancía 1 y de 7 de la mercancía 2. Hemos ganado una unidad de mercancía 1 junto a una reducción de la cantidad de trabajo empleado. La cantidad de trabajo incorporada directa e indirectamente en la mercancía 1 es -1; diríamos, si quisieramos seguir utilizando las expresiones correspondientes al caso de la producción simple.

No es difícil darse cuenta, los valores no son sino los precios que corresponden al tipo de beneficio cero, que el esquema de producción del cuadro 1 sería desechado por los "capitalistas" a favor del esquema productivo del cuadro 2. Y, es obvio que no hay nada anormal en el comportamiento de los capitalistas y que el supuesto

H.4 que garantiza precios positivos para el modelo de producción conjunta de Sraffa no hace sino reflejar, a nivel formal, un comportamiento que forma parte de la realidad económica misma que el modelo trata de reproducir en sus rasgos más relevantes.

Para ver esto más claramente debería de procederse como se indica. Dado un modelo [B A, L] (en todo lo que sigue se toma el tipo de salario como numerario, y por tanto $w = 1$), o su equivalente $[\,\overline{B}\ \overline{A}, \overline{L}\,]\,\overline{x}^T$ en términos de coeficientes unitarios y niveles de actividad, se calcula primeramente el intervalo J y después, para cada valor de $\overline{r} \in J$ se formula el siguiente programa lineal:

$$\min x\overline{L}$$

sometido a

$$[\,\overline{B} - (1+\overline{r})\,A\,]\,x \geqslant \overline{Y}$$
$$x_i \geqslant 0$$

donde $\overline{Y} = [\,\overline{B} - (1+\overline{r})\,\overline{A}\,]\,\overline{x}$

El problema anterior tiene asociado un dual

$$\text{máx. } p\overline{Y}$$

sometido a

$$p\,[\,\overline{B} - (1+\overline{r})\,\overline{A}\,] \leqslant \overline{L}$$
$$p_i \geqslant 0$$

y, por el teorema fundamental de la dualidad, sabemos que $p\overline{Y} = x\overline{L}$ y sustituyendo $\overline{Y}$ por su valor $p\,[\,\overline{B} - (1+\overline{r})\,\overline{A}\,]\,\overline{x} = x\overline{L}$.

Nótese que los precios son no negativos y que precisamente un precio es cero cuando la ecuación correspondiente del primal se satisface con desigualdad. Para conseguir que todos los precios fuesen positivos debería ser posible –y es una cuestión sobre la que no soy competente, pero por eso la aventuro– redifinir los productos netos $\overline{Y}$ de modo que las ecuaciones se satisfagan todas con igualdad, con lo que teniamos asegurado la estricta posibilidad de los precios.

Supongamos ahora que cuanto he dicho sea correcto y que además interprete adecuadamente los párrafos de "Producción de mercancías por medio..." Parece fuera de discusión que implícitamente se ha utilizado el supuesto –explicitamente desechado por Sraffa– de rendimientos constantes ¿Qué puede decirse sobre esto? Téngase en cuenta que para la reabsorción de Sraffa como economista no excesivamente crítico ha jugado un papel fundamental el supuesto de rendimientos constantes, pues con este supuesto Sraffa ha reformulado –se dice– para espíritus de alta exquisitez lógica el teorema de no substitución, y con este supuesto la producción conjunta de Sraffa es reconducible a algo que podríamos llamar el modelo abierto de von Neumann.

Pero es en este caso donde habría que buscar la presunta crítica a la teoría económica. ¿Sobre qué lineas habría de discurrir ésta?. No sería capaz en este momento de conjeturar nada. Sin embargo bien pensado no veo que haya una diferencia fundamental entre los casos de producción simple y conjunta respecto al supuesto (r.c.).

Y es sabido que la defensa de las objecciones sobre la utilización explícita de este supuesto –especialmente en el caso de la construcción de la mercancía patrón– habla de movimientos no "reales".

Pero consideremos modelos de producción simple ($\hat{X}$ A L) y ($\hat{X}$ B L) $\hat{X}$ es una matriz diagonal formada por el vector de producciones–, donde A y B son matrices de medios de producción, representan pues, técnicas alternativas para la obtención del vector X.

En los casos generales, y como el análisis de elección de técnicas no enseña –análisis en el que hay implícito un comportamiento de maximización–, elegimos ya A ya B, de acuerdo con los valores que toma r o, alternativamente, w. No veo que exista una diferencia fundamental entre esa elección y la que se realiza en el caso de producción conjunta, en donde, como aquí, se maximiza el producto neto.

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Complutense Madrid