J. URRUTIA

Crecimiento, dinero y la configuración óptima de la economía

I. Introducción

La finalidad de este trabajo es la de especificar y analizar modelos de equilibrio de crecimiento y dinero alternativos a los existentes. Su justificación está en que los modelos existentes no captan la naturaleza de una economía monetaria. La prueba de esta afirmación es parte del contenido de este trabajo.

El interés de estos modelos consiste en que constituyen una posible forma adecuada de analizar la influencia del dinero en un sistema económico. Ciertamente es interesante el conocer si la introducción del dinero modifica el equilibrio alcanzable en las mal llamadas condiciones de trueque y si la existencia de una política monetaria nos proporciona o no la posibilidad de influir sobre las condiciones reales del sistema. Pero para analizar con propiedad estos problemas es necesario que poseamos un modelo de dinero y crecimiento en el que una trayectoria de equilibrio a largo plazo exista y pueda ser estable. Éstos son los problemas discutidos en la sección segunda, en el contexto de un modelo general de equilibrio del que los existentes se siguen como casos particulares.

Dicho modelo general podría denominarse modelo en la tradición de Chicago porque, como veremos, incorpora ciertas ideas surgidas de la «ciudad del viento». Es, por tanto, interesante destacar que en la sección tercera mostraremos que la recomendación friedmaniana de anular el coste de oportunidad del dinero no puede ser llevada a cabo porque el resultante estado óptimo de la economía, aunque alcanzable, no corresponde a un equilibrio estable.

La sección cuarta presenta un resumen de conclusiones.

II. Modelos positivos de equilibrio con pleno empleo

1. *Una matriz generadora de modelos*

La característica esencial de una economía monetaria es que, en ella, existe un *único* medio de cambio que llamamos dinero. Los modelos neoclásicos de crecimiento monetario no captan la especificidad de una economía monetaria, pues en ellos cualquier bien puede servir como medio de cambio. La introducción del dinero en un marco neoclásico es esencialmente artificial, pero si se introduce hay que justificar su papel de alguna forma.

Una posible manera de entender el papel del dinero en un sistema económico representado por un modelo neoclásico es considerarlo como un argumento en la función de utilidad (bien de consumo) y como argumento en la función de producción (factor de producción). Podemos decir que esta forma de considerar el papel del dinero tiene en cuenta la naturaleza esencial de una economía monetaria en el sentido de que es solamente la consideración del dinero como único medio de cambio la que puede justificar la consideración descrita.

En efecto, si no existiera un único medio de cambio, el nivel potencial de producción de las empresas disminuiría debido a que tendrían que dedicar parte del capital y del trabajo a la distribución del producto. De la misma forma, el nivel potencial de utilidad de cada individuo disminuirá en ausencia de un único medio de cambio debido a que parte de los recursos del individuo tendrían que dedicarse a la búsqueda y obtención de la combinación de consumo deseada.

Aunque es el mismo tipo de argumento el que justifica la introducción de la liquidez real en la función de producción y en la función de utilidad, nunca se han estudiado los dos casos simultáneamente. Aunque esta forma de conceptualizar el papel del dinero es, en el mejor de los casos, únicamente metafórica,[1] es mejor que la ausencia total de papel analítico atribuido al dinero en los modelos existentes de corte neoclásico.

En lugar de construir, desarrollar y analizar un único modelo del funcionamiento de una economía monetaria, este trabajo presenta una especie de matriz generadora de modelos. Supondremos que en general el gobierno posee en propiedad una fración constante, α, del capital existente. El gobierno alquila los servicios de su capital y recibe en cada momento un rendimiento sobre su capital igual a la productividad marginal del capital. Además, el gobierno paga, en cada momento, un subsidio por cabeza que, medido en términos reales, denotamos por b. Esta especificación del papel del gobierno, junto con la consideración metafórica del papel del dinero y otras especificaciones pos-

1. Cf. la cita de Niehans presentada por Stein, J. L.: «Monetary Growth Theory in Perspective», *American Economic Review*, 60, marzo 1970, p. 90.

teriores, constituye un modelo general del que los demás se siguen como casos particulares.

Si el gobierno devuelve a los individuos, en forma de subsidios, el total de los rendimientos de su capital nos encontramos con un modelo ligeramente diferente del anterior que, como veremos, tiene una significación normativa especial. Un tercer modelo se genera haciendo $\alpha = b = 0$, es decir, eliminando la incipiente política fiscal y los subsidios. A estos tres modelos los llamaremos, para entendernos, *modelos de Chicago,* debido a que la forma metafórica de entender el papel del dinero como un bien de consumo y un factor de producción surge de la tradición de Chicago.[2]

La naturaleza del dinero como único medio de cambio permite, pero no impone, la consideración metafórica del dinero. Si eliminamos la liquidez real de las funciones de utilidad y de producción, los tres modelos de Chicago se convierten en tres *modelos tobinescos.* Si la eliminamos de una u otra función nos encontramos con *modelos mixtos.*

La ventaja de considerar, no un único modelo, sino una matriz generadora de modelos, consiste en que esto nos permite ofrecer, como un subproducto del análisis, una panorámica compacta de los modelos neoclásicos de crecimiento con dinero.

2. *Especificación de los modelos*

Consideremos una economía en la que existen dos depósitos de valor alternativos, la liquidez real y el capital físico. El primero puede funcionar como tal depósito de valor porque produce una renta imputada en su papel de medio de cambio. El capital físico es un depósito de valor porque genera una renta física.

El sistema económico se compone de tres mercados, el de trabajo, el de dinero y el de bienes. La interacción de los agentes de la economía, en cada momento de tiempo, se produce a través de un proceso de *tâtonnement* walrasiano. Ningún intercambio es obligatorio hasta que el subastador da con el vector de precios de equilibrio. El tiempo que puede transcurrir entre la apertura del proceso y su clausura (suponiendo que un vector de precios de equilibrio exista) con contratos que obligan, es, hablando analíticamente, irrelevante. En consecuencia, podemos decir que todos los mercados se encuentran siempre en equilibrio o, lo que es lo mismo, que la velocidad de ajuste del precio es infinita en cada mercado.

Este paradigma walrasiano explicatorio del comportamiento momentáneo de la economía, subyace en todos los modelos neoclásicos. En este marco de análisis cada bien se utiliza como un medio de cambio y la inclusión del dinero ha de ser artificial puesto que no puede ser el *único* medio de cam-

2. Vide JOHNSON, H. G.: «Is there an Opptimal Money Supply?», *Journal of Finance,* 25, mayo 1970, p. 436.

bio. Es, por tanto, evidente, que los modelos neoclásicos tienen que introducir el papel jugado por el dinero de alguna forma metafórica.

Cuando todos los mercados se encuentran en equilibrio instantáneo, la ley de Walras es relevante y, por tanto, suponiendo que el mercado de trabajo se encuentra siempre en equilibrio, el exceso de demanda de bienes es idéntico al exceso de oferta de dinero en términos reales. En consecuencia, la tasa de inflación, π, es proporcional al exceso de oferta de dinero. Esto es

$$\pi = \varepsilon\,[m - L(.)], \quad \varepsilon = \infty, \tag{1}$$

en donde m es la liquidez real por cabeza existente y $L(.)$ es la demanda por cabeza de liquidez real que todavía no hemos especificado. El coeficiente ε hay que interpretarlo como la velocidad de ajuste. Un valor de $\varepsilon = \infty$ indica que el ajuste es instantáneo. Esto no quiere decir que π es nula, sino que quiere decir que la tasa de inflación es siempre la que se necesita para que el mercado de dinero esté en equilibrio en cada momento de tiempo.

La mayoría de los modelos neoclásicos pertenecen a una clase de modelos conocida como de inflación perfectamente anticipada. En este trabajo supondremos también que la tasa de inflación esperada, π^e, es siempre igual a π. Esto puede expresarse como,

$$\dot{\pi}^e = \beta(\pi - \pi^e), \quad \beta = \infty \tag{2}$$

en donde β es la velocidad de ajuste de las expectativas. Cuando $\beta = \infty$ las expectativas siempre se cumplen. En este caso es justificable el considerar que el mercado de trabajo se encuentra en equilibrio a pleno empleo; pero cuando $\beta < \infty$ (expectativas adaptables) este supuesto no está tan justificado.

Bajo el supuesto de pleno empleo en el mercado de trabajo, podemos desentendernos de este mercado y trabajar con los mercados de dinero y bienes. Si prefiriéramos hacer una distinción clara entre mercados de activos (stocks) y mercado de bienes (flujo), tendríamos que considerar dos mercados de activos (dinero y capital) y un mercado de flujo (bienes). Sin embargo, en un modelo unisectorial, los tres mercados pueden representarse por solamente dos ecuaciones, una que indique la igualdad ahorro inversión en cada momento de tiempo y otra que describa cómo la sociedad decide, en cada momento de tiempo, la estructura interna de su cartera de valores.

Comencemos por el mercado de flujo (bienes). La producción tiene lugar a lo largo de una función de producción neoclásica $Y = Y(K, N, M/P)$, en donde los símbolos tienen el significado habitual. Al ser Y neoclásica tenemos que,

$$\begin{aligned} y = y(k, m) \quad ; \quad & y_k\,(k, m) > 0 \quad , \quad y_m\,(k, m) > 0\,, \\ & y_{kk}(k, m) < 0 \quad , \quad y_{mm}(k, m) < 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

en donde y denota productividad media del trabajo. Además, suponemos que la liquidez real aumenta la productividad marginal del capital.

$$y_{km}(k, m) > 0 \qquad [4]$$

El output total Y no constituye en su totalidad renta real disponible privada $Y_d(\alpha)$ porque, en nuestro modelo general el gobierno compra $\alpha \dot{K}$ del producto, paga subsidios reales, existen ganancias (o pérdidas) de capital y el valor imputado de los servicios de la liquidez real ha de tenerse en cuenta. Un elemento de $Y_d(\alpha)$ es $Y - \alpha \dot{K} - \alpha Y_k K + b N$. A esto hay que añadir las ganancias o pérdidas de capital $(\mu - \pi) M/p$ en donde $\mu \equiv \dot{M}/M$. Si finalmente suponemos qe los servicios generados por la liquidez real son proporcionales (con factor de proporcionalidad unitario) a su stock y que podemos evaluarlos por su coste de oportunidad, tenemos que, a los elementos anteriores les hemos de añadir Mi/p, en donde i denota el coste de oportunidad de la liquidez real.

La renta real disponible privada viene dada, en nuestro modelo general, por:

$$Y_d(\alpha) = Y - \alpha Y_k K + b N + (\mu - \pi) M/p + Mi/p - \alpha K \qquad [5a]$$

en donde la notación expresa claramente que este concepto depende de α. Si los rendimientos del capital que posee el gobierno son revertidos enteramente al sector privado en forma de subsidios reales tenemos que $b N = \alpha Y_k$ y, por tanto,

$$Y_d(\alpha) = Y + (\mu - \pi) M/p + Mi/p - \alpha \dot{K} \qquad [5b]$$

Si, además suponemos que el gobierno no posee capital, $\alpha = 0$ y tenemos que

$$Y_d = Y + (\mu - \pi) M/p + Mi/p \qquad [5c]$$

Estas tres formulaciones alternativas de la ecuación [5] pueden transformarse en las correspondientes nociones tobinescas eliminando el último argumento de la función de producción y eliminando también el valor imputado a los servicios de liquidez real. En este caso [5c] es precisamente la formulación original de Tobin.[3]

3. TOBIN, J.: «Money and Economic Growth», *Econometrica*, 33, octubre 1965, páginas 671-684.

Tanto el consumo como la acumulación de riqueza real privada han de salir de la renta real disponible privada. La riqueza real privada es,

$$W(\alpha) = (1 - \alpha) K + M/p \qquad [6]$$

Suponemos que los agentes decisorios de la economía deciden, en cada momento, incrementar $W(\alpha)$ en una proporción constante de $Y_d(\alpha)$:

$$\dot{W}(\alpha) = sY_d(\alpha) \qquad [7]$$

La ecuación [7] es la condición de equilibrio en el mercado de bienes.

A continuación pasamos a especificar el mercado de activos. En cada momento la oferta nominal de dinero está formada por i) regalos hechos por la autoridad monetaria al público, M_1, y ii) la cantidad de dinero creada para financiar la compra de una proporción α del capital existente, M_2. Es decir, $M = M_1 + M_2 = M_1 + \alpha pk$. En consecuencia,

$$\mu = \frac{\dot{M}_1 + \dot{M}_2}{M} = \mu_1 + \mu_2 \quad , \quad \text{cuando } \alpha > 0 ,$$
$$= \mu_1 \quad , \quad \text{cuando } \alpha = 0$$

en donde μ_1, es un parámetro de política económica independiente mientras que μ_2 está relacionado con α a través del requisito de que el gobierno compre el capital a la tasa necesaria para poseer continuamente una proporción constante del capital existente:

$$\frac{\dot{M}_2}{M} \frac{M}{pN} = \mu_2 m = \alpha \frac{\dot{K}}{N} = \alpha(\dot{k} + nk) \quad , \quad \alpha \in (0,\ 1) \qquad [8]$$

La especificación de la demanda de liquidez real es algo más complicada. Cuando el dinero es también un factor de producción hemos de distinguir entre la demanda del sector familiar y la demanda del sector empresarial. Aunque los determinantes de una y otra no tienen por qué ser comunes, especificaremos por simplicidad una única función de liquidez real.[4] Como, además, resultados específicos exigen supuestos específicos, supondremos que la demanda de liquidez real por cabeza, $m^d(\alpha)$, está dada por la siguiente función;

$$m^d(\alpha) \equiv Z(k, i; \alpha) \equiv (1 - \alpha) k L(i) \quad , \quad L'(i) < 0 \qquad [9]$$

4. Quizá sirva como justificación el precedente de FRIEDMAN, M. en «The Quantity Theory of Money: A Restatement», en *Studies in the Quantity Theory of Money*, Chicago, 1956.

que indica que se desea una cantidad de liquidez real consistente en una proporción del capital existente, proporción que depende inversamente del coste de oportunidad del dinero i. Este coste de oportunidad es,

$$i\,(k, m) = y_k\,(k, m) + \pi\,(k, m) \qquad [10]$$

en donde la dependencia de π respecto de k y m será evidente dentro de un momento.

El supuesto de equilibrio en el mercado de dinero se expresa por,

$$m = Z\,(k, i;\, \alpha) \quad , \quad Z_k > 0 \quad , \quad Z_i < 0 \qquad [11]$$

que puede considerarse como una ecuación de equilibrio de cartera que indica la cantidad de liquidez real, en relación a la cantidad de capital, que la sociedad desea mantener para diversos valores del coste de oportunidad. Es claro que,

$$\frac{\partial\, i}{\partial\, k} = -\frac{L(i)}{k\, L'(i)} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial\, i}{\partial\, m} = \frac{1}{(1 - \alpha)\, k\, L'(i)} < 0 \qquad [12]$$

lo que indica que, a medida que crece la intensidad de capital (m), el coste de oportunidad del dinero ha de aumentar (disminuir) para mantener el equilibrio en el mercado de dinero.

Añadimos algunos supuestos técnicos. El coste de oportunidad del dinero tiene un límite superior positivo, $\bar{i}$, por encima del cual el único nivel de m consistente con el equilibrio [11] es $m = 0$. Este i está definido como $Z[k, \bar{i}\,(k);\, \alpha] = 0$, en donde $\bar{i}$ es una función creciente de k tal como indica [12]. Suponemos que

$$\lim\ \bar{i}(k) \equiv \bar{R} > \mu - \pi$$

También suponemos que i *no* tiene un límite inferior positivo por debajo del cual nadie querría mantener más que dinero en su cartera. Es decir, suponemos que $Z\,(k, 0;\, \alpha) =$ una constante para cada k, es la cantidad de liquidez real necesaria para sostener la matriz de pagos asociada con k. En otras palabras, cuando el coste de oportunidad es nulo, la demanda de dinero es únicamente por motivo transacción.

Dadas las ecuaciones [10] y [12] podemos encontrar inmediatamente la tasa de inflación requerida para que el equilibrio monetario se dé en todo momento. Bajo el supuesto de inflación perfectamente anticipada tenemos que

$$\pi_k = -\frac{L(i) + k\,L'(i)\,y_{kk}}{k\,L'(i)} > 0\,,$$
$$\pi_m = \frac{1 - (1-\alpha)\,k\,L'(i)\,y_{km}}{(1-\alpha)\,k\,L'(i)} < 0\,, \qquad [13]$$

lo que justifica que en la ecuación [10] hayamos considerado a la tasa de inflación como dependiente de k y m, $\pi(k, m)$. En consecuencia,

$$\frac{d\,m}{d\,k} = -\frac{\pi_k}{\pi_m} \qquad [14]$$

Ahora que conocemos el funcionamiento en cada momento del sistema económico podemos establecer algunas proposiciones generales. En primer lugar, trataremos de explicar cómo es cierto que los modelos tobinescos no asignan ningún papel analítico relevante al dinero. Para ello reexaminemos la ecuación [11]. Cantidades positivas de los dos activos forman parte de la cartera aun cuando sus tasas de beneficios reales no sean iguales, esto es, aun cuando i no sea igual a cero. Este hecho es lógico cuando caracterizamos el dinero tal como lo hemos hecho nosotros porque si el dinero gana una tasa de beneficio real igual a la tasa de deflación y, además, rinde una tasa de beneficio imputada, la igualdad de las tasas de beneficio *totales* exige un i positivo. Cuando la demanda de dinero tiene esta característica la llamamos keynesiana (en contraste con la neoclásica que exige, para el equilibrio de cartera, que i sea nulo).

Como acabamos de ver, los modelos de Chicago implican una demanda de dinero keynesiana. Esto no es cierto en los modelos tobinescos que pueden incorporar una demanda de dinero keynesiana o neoclásica. Si utilizan una neoclásica no captan para nada la característica de único medio de cambio que tiene el dinero. Si utilizan una demanda de dinero keynesiana podríamos pensar que de alguna forma captan el papel del dinero como único medio de cambio. Pero en este caso, es difícil de aceptar que luego no utilicen en el modelo la tasa de beneficio imputada que justifica el carácter keynesiano de la demanda de dinero. Es más lógico pensar que, en este caso, el dinero forma parte de la cartera por las razones usuales relacionadas con la minimización del riesgo que no están relacionados con la naturaleza del único medio de cambio que tiene el dinero. En conclusión:

PROPOSICIÓN 1. *Los modelos tobinescos no captan el papel de único medio de cambio que define al dinero. Los modelos de Chicago captan ese papel aunque de forma metafórica.*

En segundo lugar nos preguntamos por la naturaleza de la inflación en el contexto de estos modelos, sean tobinescos o de Chicago. La tasa de inflación existente en cada momento es aquella que, dados los niveles de k y m, produce un coste de oportunidad del dinero de valor tal que la sociedad mantiene voluntariamente en su cartera las cantidades existentes de capital y liquidez real. Esta naturaleza de la inflación es la consecuencia lógica de utilizar modelos en que todos los mercados se encuentran en equilibrio.

Hay que preguntarse, en consecuencia, si el mecanismo de mercado que subyace en estos modelos es capaz de generar la tasa de inflación que se requiere por la misma naturaleza del modelo. En concreto hay que preguntarse si cuando k o m varían el mecanismo de mercado [1], cuando la demanda de dinero es [9], genera un cambio en π igual al exigido por [13]. Introduciendo [9] en [1] y diferenciando con respecto a k y n obtenemos:

$$\pi_k = -\frac{\varepsilon\,[L(i) + k\,L'(i)\,y_{kk}]}{[1/(1-\alpha)] + \varepsilon\,k\,L'(i)} > 0\,,$$

$$\pi_m = \frac{\varepsilon\,[1-(1-\alpha)\,k\,L'(i)\,y_{km}]}{1+\varepsilon\,(1-\alpha)\,k\,L'(i)} < 0$$

en donde los signos son ciertos para $\varepsilon = \infty$. Si dividimos estas expresiones por ε nos encontramos con [13]. Es decir,

PROPOSICIÓN 2. *El mecanismo de mercado subyacente en los modelos neoclásicos de crecimiento monetario, sean tobinescos o de Chicago, implica que la tasa de inflación es en todo momento la requerida para el equilibrio instantáneo en todos los mercados.*

En consecuencia, podemos afirmar que la causa de la inflación es la existencia de un exceso de demanda de bienes reflejado en [1]. Esto parece contradecir el supuesto de equilibrio instantáneo en cada mercado; pero entendámonos: el equilibrio se produce instantáneamente en cada mercado porque la tasa de inflación se mueve instantáneamente hasta el valor requerido para el equilibrio en todos los mercados. Éste es el contenido de la proposición 2.

Para obtener un modelo de crecimiento a largo plazo no tenemos si no especificar cómo se acumulan los stocks. Por definición tenemos que,

$$\dot{k}/k = \dot{K}/K - n$$

$$\dot{m}/m = \mu - \pi - n$$

Si ahora diferenciamos [6] con respecto al tiempo, igualamos esto a [7] y sustituimos de la ecuación [5*a*], podemos despejar $\dot{K}$. Sustituyendo $\dot{K}$ en $\dot{k}/k$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{k} = \frac{n}{\S}\,[s\,y(k, m) - \S\,k - (1 - s)(\mu - \pi)\,m + s(b - \alpha\,y_k\,k) + s\,m\,i] \qquad [15a]$$

en donde,

$$\S = (1 - \alpha)\,n + s\,\alpha\,n < n \quad \text{para} \quad \alpha > 0$$

Cuando $b\,N = \alpha\,Y_k\,K$, tenemos que

$$\dot{k} = \frac{n}{\S}\,[s\,y(k, m) - \S\,n - (1 - s)(\mu - \pi)\,m + s\,m\,i] \qquad [15b]$$

y cuando además $\alpha = b = 0$ tenemos,

$$\dot{k} = s\,y(k, m) - (1 - s)(\mu - \pi)\,m - n\,k + s\,m\,i \qquad [15c]$$

La ecuación $\dot{m}/m$ puede expresarse como

$$\dot{m} = m\,[\mu - \pi\,(k, m) - n] \qquad [16]$$

Completan el modelo las ecuaciones [1] y [2]. Las ecuaciones [1], [2] y [16] son comunes a todos los modelos. En consecuencia, podemos identificar los diferentes modelos por la ecuación de acumulación [$\dot{k}$] utilizada. Además de los tres modelos de Chicago que surgen al utilizar [15] podemos considerar los siguientes:

$$\dot{k} = \frac{n}{\S}\,\{s\,y(k) - \S\,k - (1 - s)(\mu - \pi)\,m + s\,[b - \alpha\,y_k(k)\,k]\} \qquad [d]$$

$$\dot{k} = \frac{n}{\S}\,[s\,y(k) - \S\,k - (1 - s)(\mu - \pi)\,m] \qquad [e]$$

$$\dot{k} = s\,y(k) - (1 - s)(\mu - \pi)\,m - n\,k \qquad [f]$$

Los modelos [*d*]-[*f*] son modelos tobinescos porque el dinero no es ni un factor de producción, ni un bien de consumo. El modelo [*d*] es el modelo de Hahn,[5] el [*e*] es el modelo de Burmeister,[6] y el [*f*] es el modelo de Tobin-

5. HAHN, F. H.: «On Money and Growth», *Journal of Money, Credit and Banking*, I, mayo 1969, pp. 172-187.

6. BURMEISTER, E., y DOBELL, R. A.: *Mathematic Theories of Economic Growth*, Londres, 1970, capítulo 6, pp. 189-195. BURMEISTER, E., y PHELPS, E. S.: «Money, Public Debt, Inflation and Real Interest», *Journal of Money, Credit and Banking*, 3, mayo 1971, pp. 153-182.

Johnson.[7] Podemos también considerar modelos mixtos que consideren el dinero como un bien de consumo o como un bien de producción. En este sentido del modelo [c] surgirían:

$$\dot{k} = s\, y(k, m) - (1 - s)(\mu - \pi)\, m - n\, k \qquad [g]$$

$$\dot{k} = s\, y(k) - (1 - s)(\mu - \pi)\, m - n\, k + s\, m\, i \qquad [h]$$

El modelo [g] es el de Harkness[8] y el [h] es el de Johnson[9] también utilizado por Ramanathan.[10] Los modelos de Levhari y Patinkin[11] son modelos mixtos pero con una especificación dinámica distinta a la contemplada aquí. Si consideramos que $\beta < \infty$ en la ecuación [2], el modelo [f] sería el de Sidrauski.[12] Es claro que el modelo [a] es una matriz generadora de modelos.

3. *Análisis a corto plazo*

Podemos considerar una situación de corto plazo de dos formas alternativas: i) $\hat{K} = \hat{N} = \hat{M} = 0$, y ii) $\hat{K} = \hat{N} = 0$, $\hat{M} \neq 0$. La segunda tendría una duración temporal más larga que la primera; pero la distinción es relevante porque ambas consideraciones son adecuadas para problemas distintos. En el primer caso, las ecuaciones [1], [2] y [16] implican que no hay inflación y nuestro modelo se convierte, a corto plazo, en un modelo de determinación del nivel de precios, p. En el segundo caso nuestro modelo se convierte en un modelo de determinación de la tasa de inflación, π, a corto plazo.

i) Comencemos considerando a [1], [2] y [16] como un modelo de determinación de p. La economía en equilibrio a corto plazo está totalmente caracterizada por,

$$M/p = (1 - \alpha)\, K\, L(i)$$

Es claro que dados M y K, el valor de p está determinado. Si por alguna razón

7. Tobin, *op. cit.*, 1965. Johnson, H.: «The Neoclassical One-Sector Growth Model: A Geometrical Exposition and Extension to a Monetary Economy», *Economica*, 33, agosto 1966, pp. 265-287.

8. Harkness, J.: «The Role of Money in a Simple Growth Model: Comment», *American Economic Review*, 62, marzo 1972, pp. 177-179.

9. Johnson, H. G.: *Essays in Monetary Economics*, cap. VI, Cambridge, Mass., 1967.

10. Ramanathan, R.: «The Role of Money in a Simple Growth Model: Comment», *American Economic Review*, 62, marzo 1972, pp. 180-184.

11. Levhari, D., y Patinkin, D.: «The Role of Money in a Simple Growth Model», *American Economic Review*, 58, septiembre 1968, pp. 713-753.

12. Sidrauski, M.: «Inflation and Economic Growth», *Journal of Political Economy*, 75, diciembre 1967, pp. 796-810.

el equilibrio se rompe y p se desvía de su valor de equilibrio, entra en juego el mecanismo de *tâtonnement* walrasiano según el cual,

$$\dot{p}/p = \varepsilon \left[\frac{M}{p} - (1 - \alpha) K\, L(i) \right] \quad , \quad \varepsilon = \infty .$$

Como

$$\frac{\partial\, \dot{p}/p}{\partial\, p} = \varepsilon \frac{-M}{p^2} < 0$$

el nivel de precios vuelve instantáneamente a su valor de equilibrio. El nivel de precios está determinado y un aumento de M genera un aumento equiproporcional instantáneo del nivel de precios. Hemos establecido la siguiente proposición,

PROPOSICIÓN 3. *Los modelos neoclásicos de crecimiento y dinero, sean tobinescos o de Chicago, constituyen a corto plazo modelos de determinación del nivel de precios. Si la cantidad de dinero en existencia se dobla, el nivel de precios se dobla instantáneamente.*

Sin embargo, como tal modelo de determinación del nivel de precios es trivial porque el ajuste se realiza instantáneamente y abstrayendo del mecanismo estabilizador de p llamado «efecto de liquidez real». Es más, podemos establecer la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 4. *En los modelos tobinescos el efecto de liquidez real no existe a corto plazo. En los modelos de Chicago es negativo.*

En efecto, en el contexto del modelo [c] en el que la renta disponible viene dada por [5c] tenemos que el consumo físico, C, está dado por,

$$\begin{aligned} C = Y - s\,Y_d &= (1 - s)\,Y - s(\mu - \pi + i)\frac{M}{p} \\ &= (1 - s)\,Y - s\,i\,\frac{M}{p} \end{aligned}$$

en una situación a corto plazo en el sentido i).

ii) Consideremos ahora el corto plazo en el segundo sentido. Lo primero que podemos decir es que el efecto de liquidez real no es necesariamente positivo. Para esto basta con volver a mirar a la expresión del consumo físico. Las ecuaciones [1], [2] y [16] parecen formar ahora un modelo de determinación de π a corto plazo. Nuestras tres ecuaciones se reducen al siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{m} = m \ \{\mu - \varepsilon [m - (1 - \alpha) k L(i)]\}$$
$$\dot{\pi} = \beta \ \{\varepsilon [m - (1 - \alpha) k L(i) - \pi]\}$$

que gobiernan el comportamiento de m y de π. El equilibrio a corto plazo (cuando $\dot{k} = n = 0$) viene dado por valores $\bar{m}$, $\bar{\pi}$, para los cuales $\dot{m} = \dot{\pi} = 0$. El modelo determina una tasa de inflación $\bar{\pi} = \mu$ compatible con el equilibrio del sistema para una cantidad de capital dada. Sin embargo, los valores de equilibrio no son estables. En efecto, linearizando el sistema alrededor del punto de equilibrio obtenemos un nuevo sistema cuya matriz tiene los siguientes elementos:

$$\left.\frac{\partial \dot{m}}{\partial m}\right|_{\bar{m},\,\bar{\pi}} = -\bar{m}\,\varepsilon \left[1 - (1 - \alpha) k L'(i) \frac{\partial i}{\partial m}\right] = 0 \qquad \text{por [12]}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{m}}{\partial \pi}\right|_{\bar{m},\,\bar{\pi}} = \bar{m}\,\varepsilon (1 - \alpha) k L'(i)$$

$$\left.\frac{\partial \dot{\pi}}{\partial m}\right|_{\bar{m},\,\bar{\pi}} = \beta\,\varepsilon \left[1 - (1 - \alpha) k L'(i) \frac{\partial i}{\partial m}\right] = 0 \qquad \text{por [12]}$$

$$\left.\frac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi}\right|_{\bar{m},\,\bar{\pi}} = -\beta\,[1 + \varepsilon (1 - \alpha) k L'(i)]$$

La traza de la matriz es $-\beta\,[1 + \varepsilon (1 - \alpha) k L'(i)] > 0$ para $\varepsilon = \infty$. En consecuencia, es claro que $\bar{\pi}$ no es estable y podemos establecer la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5. *Los modelos neoclásicos de dinero y crecimiento, sean tobinescos o de Chicago, no constituyen modelos de determinación de la tasa de inflación a corto plazo.*

Esta proposición negativa no tiene demasiada importancia puesto que los modelos de crecimiento y dinero constituyen modelos de determinación de la tasa de inflación *a largo plazo*. Sin embargo, se ha querido interpretar como introductora de una inconsistencia lógica en la estructura de los modelos, en el sentido de que los modelos tienen supuestos incompatibles.[13] El razonamiento es como sigue. Mientras por un lado suponemos explícitamente que todos los

13. HADJIMICHALAKIS, M.: «Equilibrium and Disequilibrium Growth with money — The Tobinesque Models», *Review of Economic Studies*, 38, octubre 1971, pp. 457-479.

mercados se encuentran en equilibrio instantáneo, tenemos, por otro lado, que la tasa de inflación que se requiere para el equilibrio instantáneo no es estable y, por tanto, no se alcanzará.

La conclusión general de este análisis del comportamiento de los modelos a corto plazo es que los modelos neoclásicos no son adecuados a corto plazo, lo que sin duda alguna es utilizar como piedra de toque finalidades extrañas al propio modelo. De cualquier forma, sería de desear que modelos de crecimiento y dinero tuvieran a corto plazo un comportamiento adecuado.[14]

4. *Análisis a largo plazo* [15]

Puesto que todos los modelos que hemos considerado pueden derivarse del modelo [*a*], podemos limitarnos a analizar este último, haciendo referencia a otros modelos cuando lo consideremos oportuno. El modelo [*a*] puede reducirse al siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{k} = \frac{n}{\S} \Big\{ s\, y(k, m) - \S\, k - (1 - s)\,[\mu - \pi(k, m)]\, m + s\,[b - \alpha\, y_k(k, m)\, k] + s\,[y_k(k, m) + \pi(k, m)]\, m \Big\} \equiv \dot{k}(k, m) \qquad [17]$$

$$\dot{m} = m\,[\mu - \pi(k, m) - n] \equiv \dot{m}(k, m) \qquad [18]$$

en donde hemos tenido en cuenta que la inflación es perfectamente anticipada y que el mecanismo de mercado hace depender la tasa de inflación de *k* y *m* con derivadas parciales dadas por [13].

DEFINICIÓN 1. *Una trayectoria de crecimiento es de equilibrio cuando los valores de k y m son tales que* $\dot{k}(k^*, m^*) = \dot{m}(k^*, m^*) = 0$

A lo largo de una trayectoria de equilibrio así definida, el capital, el trabajo y el output crecen a una tasa n y la tasa de inflación de equilibrio es $\pi^* = \mu - n$. Nos referimos a k^* como la intensidad de capital de equilibrio y a m^* como la liquidez real por cabeza de equilibrio. Nos referiremos a (k^*, m^*) como el equilibrio a largo plazo. Para que el modelo sea adecuado para reflejar el comportamiento a largo plazo del sistema económico necesitamos en primer lugar que el equilibrio exista.

14. URRUTIA, J.: *Formas de Crecimiento en una Economía Monetaria*, tesis doctoral, Bilbao, 1973.

15. La influencia, en esta sección, de la técnica de análisis empleada por BURMEISTER y DOBELL, *op. cit.*, 1970, es obvia.

TEOREMA 1. *En el modelo de Chicago [b] existe un equilibrio a largo plazo* (k^*, m^*) *para un valor* $0 < k^* > \underline{k} < k_B$ *en donde* $\underline{k}$ *y* k_B *están implícitamente definidas por*

$$\bar{i}(\underline{k}) = y_k(\underline{k}, 0) + \mu - n$$
$$s\, y(k_B) = n\, k_B$$

Prueba. Consideremos la ecuación [18]. Si $i = \bar{i}$, $m = 0$ y, por tanto, $\dot{m} = 0$ solamente si la expresión entre corchetes cuadrados es finita. Ciertamente, μ y n son constantes finitas dadas, y en cuanto a $\pi = \bar{i} - y_k(k, 0)$ también lo es para $k > 0$, dado que $\bar{i} < \bar{R} < \infty$ por hipótesis y que la productividad marginal del capital es finita para $k > 0$. Si $i < \bar{i}$, $m > 0$ y $\dot{m} = 0$ si y solamente si $\pi(k, m) = \mu - n$. En este caso el coste de oportunidad viene dado por $i = y_k(k, m) + \mu - n$ y el equilibrio de la cartera puede escribirse como

$$m = (1 - \alpha)\, k\, L\, [y_k(k, m) + \mu - n]$$

Diferenciando esta expresión con respecto a k obtenemos que

$$\frac{\partial_m}{\partial_k} = \frac{(1 - \alpha\, [L(i) + k\, L'(i)\, y_{kk}(k, m)]}{1 - (1 - \alpha)\, k\, L'(i)\, y_{km}} > 0$$

Consideremos ahora la siguiente función:

$$\varphi(k, m) = \dot{k}(k, m)\Big|_{\dot{m}=0,\ m>0} = \frac{n}{\S}\Big\{(sy - k\S) + + s(b - \alpha\, y_k\, k) - [n - s\,(y_k + \mu)]\, m\Big\} \qquad [19]$$

Esta función φ describe el comportamiento de la intensidad de capital cuando $m > 0$ y $\dot{m} = 0$. Puesto que

$$sy(\underline{k}, 0) - \S\underline{k} > 0 \text{ para } \underline{k} < k_B$$
$$m = (1 - \alpha)\, \underline{k}\, L\, [y_k(\underline{k}, 0) + \mu - n] = 0$$

tenemos que $\varphi(\underline{k}, 0) > 0$ si los subsidios son suficientemente grandes. Ciertamente, $\varphi(\underline{k}, 0) > 0$ en los modelos [b] y [c]. Para probar el teorema sólo tenemos que probar que

$$\lim_{k \to k^*} \varphi(k, m) \leq 0$$

Tomando límites de la función $\varphi(k, m)$ nos queda la siguiente expresión,

$$\frac{n}{\S}\{[s\, y(k^*, m^*) - \S\, k^*] + s\,[b - \alpha\, y_k(k^*, m^*)\, k^*] - \\ - [n - s\, y_k(k^*, m^*) - s\,\mu]\, m^*\}$$

Es fácil verificar que siempre podemos encontrar un k^* suficientemente grande que haga negativa a toda esta expresión, con lo que probamos el teorema.

Corolario 1. *El dinero en los modelos de Chicago puede tener «neutralidad del primer tipo».*

Llamamos «neutralidad del primer tipo» al hecho de que $k^* = k_B$. Es claro que existe una cierta configuración de μ, α y b que hacen $k^* = k_B$. Esto no ocurre en el modelo de Tobin (modelo [f]) en el que, como es bien sabido, $k^* < k_B$.[16]

Para que el modelo nos sirva como descripción del comportamiento de la economía a largo plazo, no sólo ha de tener un equilibrio, sino que además sería conveniente que ese equilibrio fuera único. Por desgracia esto no ocurre necesariamente en los modelos de Chicago.

Teorema 2. *En los modelos de Chicago, siempre que se puedan satisfacer las condiciones de estabilidad, hay una secuencia de puntos de equilibrio alternativamente estables e inestables.*

Prueba. El equilibrio a largo plazo (k^*, m^*) es único si

$$\left.\frac{d\,\varphi}{d\,k}\right|_{\varphi(k,m)=0} < 0$$

Diferenciando [19] totalmente con respecto a k obtenemos que

$$\left.\frac{d\,\varphi}{d\,k}\right|_{\varphi=0} = \frac{n}{\S}\left\{\left[s\,y_k - \S - s\,\alpha(y_k + y_{kk}\,k) + s\,m\,\frac{\partial i}{\partial k}\right] + \\ + [s\,y_m - (1 - s)\,n + s\left(i + m\,\frac{\partial i}{\partial m}\right) - s\,\alpha\,y_{km}\,k]\,\frac{d\,m}{d\,k}\right\} \qquad [20a]$$

Esta expresión puede tener cualquier signo y puede cambiar de signo, por lo que el teorema es cierto en general. Es decir, en los modelos [b] y [c] el

16. Cf. Burmeister y Dobell, *op. cit.*, 1970. Más adelante, Teorema 6, probamos que en los modelos [d] y [e] existe una trayectoria de equilibrio para $k^* = k_B$, para cierto valor de α.

equilibrio puede no ser único. En el modelo [a] si el valor de b es tal que el equilibrio existe, este equilibrio puede no ser único.

Es muy fácil ver que en los modelos tobinescos [e] y [f] el equilibrio es único. En el modelo [d] la expresión [19] puede escribirse como,

$$\frac{\S}{n}\,\varphi(k) = \frac{s\,y(k) - \S\,k + s(b - \alpha\,y_{kk})}{(1-s)\,n} - m \equiv \gamma(k) - m(k)$$

Por tanto, en estos modelos

$$\frac{\S}{n}\,\varphi'(k)\Big|_{\varphi=0} = \gamma'(k)\Big|_{\varphi=0} - m'(k)\Big|_{\varphi=0}$$

La elasticidad de la función $\gamma(k)$ está dada por

$$\frac{s\,y_k\,k - \S\,k - s\,\alpha\,y_k\,k - s\,\alpha\,y_{kk}\,k^2}{s\,y(k) - \S\,k - s\,\alpha\,y_k\,k + s\,b}$$

en el modelo [d] y por

$$\frac{s\,y_k\,k - \S\,k}{s\,y(k) - \S\,k}\,, \qquad \frac{s\,y_k\,k - n}{s\,y(k) - n}$$

en los modelos [e] y [f], respectivamente. En estos dos últimos casos esta elasticidad es menor que la unidad y en el primer caso lo será para b suficientemente grande. Como $m'(k)\,k/m > 1$ cuando la demanda de dinero es [19], tenemos que para $\varphi = 0$

$$\gamma'(k) < \gamma(k)/k = m(k)/k < m'(k)$$

En consecuencia, dado que $\S/n > 0$, $\varphi'(k) < 0$ para $\varphi = 0$ y el equilibrio es único. Es decir:

$$\frac{n}{\S}\left[s\,y_k - \S - (1-s)\,n\,\frac{d\,m}{d\,k}\right] < 0 \qquad [20b]$$

en el modelo [e] y

$$s\,y_k - n - (1-s)\,\frac{d\,m}{d\,k} < 0 \qquad [20c]$$

en el modelo [f]. La cuestión es ambigua en el modelo de Hahn.

La estabilidad del equilibrio es importante, pues sólo si se da tiene sentido la descripción del comportamiento de la economía a largo plazo. Estudiaremos la estabilidad local del equilibrio a largo plazo (k^*, m^*). La matriz del sistema [17]-[18] convenientemente linearizado la denotamos por $A^1 = [A^1_{ij}]$, $i, j = 1, 2$ cuyos elementos son como sigue:

$$A^1_{11} = \frac{n}{\S} [s\, y_k + (1 - s)\, m \frac{\partial \pi}{\partial k} + s\, m \frac{\partial i}{\partial k} - \S - s\, \alpha (y_k + y_{kk}\, k)],$$

$$A^1_{12} = \frac{n}{\S} [s\, y_m - (1 - s)\, n + (1 - s)\, m \frac{\partial \pi}{\partial m} + s\left(i + m \frac{\partial i}{\partial m}\right) - s\, \alpha\, y_{km}\, k], \qquad [21a]$$

$$A^1_{21} = -\, m \frac{\partial \pi}{\partial k}$$

$$A^1_{22} = -\, m \frac{\partial \pi}{\partial m}$$

en donde todos los elementos están evaluados en el punto de equilibrio (k^*, m^*). Podemos establecer dos teoremas referentes a modelos tobinescos y modelos de Chicago, respectivamente.

Teorema 3. *El equilibrio de los modelos tobinescos no es estable. En concreto los modelos [e] y [f] tienen estabilidad de punto de silla y el modelo [d] puede tener estabilidad de punto de silla o completa inestabilidad.*[17]

Prueba. En el modelo [d] la matriz del sistema linearizado alrededor de (k^*, m^*), tiene los siguientes elementos:

$$H_{11} = \frac{n}{\S} [s\, y_k(k^*) + (1 - s)\, m^* \frac{\partial \pi}{\partial k} - \S - s\, \alpha (y_k + y_{kk}\, k^*)] \gtrless 0\ ?$$

$$H_{12} = \frac{n}{\S} \left[-(1 - s) \left(n - m^* \frac{\partial \pi}{\partial m} \right) \right] < 0$$

$$H_{21} = A^1_{21} < 0 \quad ; \quad H_{22} = A^1_{22} > 0\,,$$

que pueden ser obtenidos con toda facilidad eliminando en [21*a*] los términos que se deben a la consideración del dinero como un bien de consumo o un factor de producción. Si $H_{11} < 0$, el det $H < 0$ y el equilibrio es un punto de silla. Si $H_{11} > 0$, la $T_r H > 0$ y tendremos, o bien inestabilidad completa (cuando det $H > 0$) o bien estabilidad de punto de silla (cuando det $H < 0$).

17. Esta falta de estabilidad del equilibrio a largo plazo en los modelos tobinescos es muy conocida; pero pasaron aproximadamente cinco años desde la publicación del artículo de Tobin, *op. cit.*, 1965, hasta la prueba formal de falta de estabilidad del modelo de Tobin, dada por Nagatani, K.: «A Note on Professor Tobin's Money and Economic Growth», *Econometrica*, 38, enero 1970, pp. 171-175.

En el modelo [e] los elementos de la correspondiente matriz, B, son como los de H, con la única diferencia de que hemos de eliminar el último término de H_{11}. Teniendo en cuenta [14] tenemos que:

$$\det B = -\frac{n}{\S}\left[s\, y_k - \S - (1-s)\, n \frac{d\,m}{d\,k}\right] m \frac{\partial \pi}{\partial m} < 0$$

por la ecuación [20b].

En el modelo [f] los elementos de la correspondiente matriz, T, pueden obtenerse haciendo $\alpha = 0$ (y, por tanto, $\S = n$) en los elementos de B. Teniendo en cuenta [14] tenemos que,

$$\det T = -\left[s\, y_k - n - (1-s)\, n \frac{d\,m}{d\,k}\right] m \frac{\partial \pi}{\partial m} < 0$$

por la ecuación [20c]. Así queda probado el teorema.

Esta falta de estabilidad de los modelos tobinescos es uno de sus principales problemas. Se ha intentado paliar introduciendo viscosidad con las expectativas. Es, por tanto, interesante que la mera incorporación (metafórica) del papel del dinero como único medio de cambio, suministra la posibilidad de que el equilibrio sea estable.

TEOREMA 4. *El equilibrio a largo plazo (k^*, m^*) de los modelos de Chicago [b] y [c] puede ser estable sólo si:*

$$i + y_m > \frac{1-s}{1} m\, y_{km} > 0 \qquad [22]$$

$$n > \frac{s\, y_k - (1-s)\, m\, y_{kk} + m\, \partial i/\partial k}{(1-\alpha) + s\,\alpha} \qquad [23]$$

con $\alpha = 0$ para el modelo [c] y $\alpha \in (0, 1)$ para el modelo [b].

Prueba. Si linearizamos el modelo [b] la matriz $A^2 = [A^2_{ij}]$, i, $j = 1, 2$, tiene los siguientes elementos, evaluados en el equilibrio,

$$A^2_{11} = \frac{n}{\S}\left[s\, y_k + (1-s)\, m \frac{\partial \pi}{\partial k} + s\, m \frac{\partial i}{\partial k} - \S\right] \gtreqless 0\ ?$$
$$A^2_{12} = \frac{n}{\S}\left[s\, y_m - (1-s)\, n + (1-s)\, m \frac{\partial \pi}{\partial m} + s\left(i + m \frac{\partial i}{\partial m}\right)\right] \gtreqless 0\ ?$$
$$A^2_{21} = A^1_{21} < 0 \quad ; \quad A^2_{22} = A^1_{22} > 0\,,$$

Similarmente

$$A^3_{11} = s\, y_k + s\, m\, y_{kk} + m \frac{\partial \pi}{\partial k} - n \gtrless 0\ ?$$

$$A^3_{12} = s(y_m + i) + s\, m\, y_{km} - (1 - s)\, n + m \frac{\partial \pi}{\partial m} \gtrless 0\ ? \qquad [21c]$$

$$A^3_{21} = A^1_{21} < 0 \quad ; \quad A^3_{22} = A^1_{22} > 0\,,$$

son los elementos, evaluados en (k^*, m^*) de $A^3 = [A^3_{ij}]$, $i, j = 1, 2$, que es la matriz del modelo [c] linearizado.

Para que la traza sea negativa y el determinante positivo es necesario en primer lugar que A^3_{12} y A^2_{12} sean positivos. Si en las correspondientes expresiones sustituimos π_m por su valor en [13] obtenemos que la positividad requiere que [22] se satisfaga. En segundo lugar, es necesario que A^3_{11} y A^2_{11} sean negativos. Esta negatividad exige que [23] se satisfaga.

Una vez analizada la estabilidad del equilibrio podemos pasar a analizar cuestiones de dinámica comparada. Es muy conocido que en los modelos tobinescos un aumento de la tasa de crecimiento de la oferta monetaria trae consigo un aumento de la relación capital trabajo de equilibrio, k^*, es decir, una disminución en el tipo de interés real. A esta propiedad del dinero le llamamos falta de «neutralidad en el segundo sentido» [18] y es un resultado sumamente llamativo, pues implica la influencia no desdeñable de la política monetaria sobre las variables reales del sistema. También es conocido que el aumento de μ tiene una influencia ambigua sobre m^*.[19]

Sin embargo, la falta de estabilidad de los modelos tobinescos resta importancia a estos resultados de dinámica comparada porque los parámetros del sistema no pueden ser considerados como instrumentos operacionales de política económica. Esto no ocurre en los modelos de Chicago y, por tanto, podemos legítimamente interesarnos en las cuestiones de dinámica comparada. Podemos establecer el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Sea Ω la matriz del sistema linearizado en cualquier modelo de Chicago. Supongamos que las condiciones necesarias de estabilidad local* [22] *y* [23] *se dan. Entonces, si el modelo es estable,*

$$\frac{\partial k^*}{\partial \mu} = \frac{1}{|\Omega|} [(1 - s)\, m^*\, \Omega_{22} + m^*\, \Omega_{12}] > 0\,, \qquad [24a]$$

$$\frac{\partial m^*}{\partial \mu} = \frac{1}{|\Omega|} [-m^*\, \Omega_{11} - (1 - s)\, m^*\, \Omega_{21}] > 0\,, \qquad [24b]$$

18. HADJIMICHALAKIS, *op. cit.*, 1971.
19. BURMEISTER y DOBELL, *op. cit.*, 1970.

en donde Ω_{ij} representa A^h_{ij} $h = 1, 2, 3$. Además,

$$\frac{\partial k^*}{\partial \alpha} = \frac{-1}{\S\,|\Omega|}\,[(1-s)\,n\,k^*\,\Omega_{22}] < 0\,, \qquad [25a]$$

$$\frac{\partial m^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{\S\,|\Omega|}\,[(1-s)\,n\,k^*\,\Omega_{21}] < 0, \qquad [25b]$$

en donde Ω_{ij} representa A^k_{ij}, $h_2 = 1, 2$.

Prueba. El lector puede verificar que si diferenciamos las condiciones de equilibrio ($\dot{k} = \dot{m} = 0$), en cada modelo de Chicago, con respecto a un parámetro (μ, α) nos quedan dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, $\partial k/\partial\mu$ y $\partial m/\partial\mu$ o $\partial k/\partial\alpha$ y $\partial m/\partial\alpha$.

Este sistema se puede solucionar y obtendremos [24] y [25].

Hemos probado que el dinero *no* es «neutral en el segundo sentido» y cuál es la dirección de la influencia de los diversos parámetros. Como, en general, existe una secuencia de equilibrios alternativamente estables y no estables es muy posible que estas cuestiones de estática comparativa sólo tengan sentido para desplazamientos de los parámetros suficientemente grandes.

El resultado [24*b*] puede resultar algo paradójico porque un aumento de μ produce un aumento equiproporcional de π^* ($= \mu - n$) y, por tanto, un aumento del coste de oportunidad del dinero que parece tendría que hacer disminuir m^*. Sin embargo, el aumento de μ también aumenta la intensidad de capital y disminuye la productividad marginal del capital tendiendo a disminuir el coste de oportunidad del dinero. Bajo las condiciones de estabilidad esta segunda fuerza es más importante que la primera.

Hay que hacer notar también que, mientras en el modelo [*c*] la implementación de los valores k^0 y m^0 es consistente con un único valor de μ solamente por casualidad, en los modelos [*a*] y [*b*] hay suficientes parámetros de política económica como para implementar los valores deseados k^0 y m^0.

III. Configuración óptima de la economía

1. *Identificación de la configuración óptima de la economía* [20]

Consideremos una economía *estacionaria* sin crecimiento de la población y

20. Esta sección no es sino una transposición a términos continuos de la exposición de las ideas friedmanianas dada por Stein, J. L.: «The Optimun Quantity of Money», *Journal of Money Credit and Banking*, 2, noviembre 1970, pp. 397-410. Ver también Friedman, M.: *The Optimun Quantity of Money and other Essays*, Chicago, 1969.

con individuos idénticos que viven eternamente. La función de utilidad instantánea viene dada por

$$u = u(c, m) \quad , \quad u_c > 0 \quad , \quad u_m \geqslant 0 \qquad [26]$$

en donde la liquidez real es considerada como un bien de consumo. La producción por cabeza viene dada por,

$$y = y(k, m) \quad , \quad y_k \equiv r > 0 \quad , \quad y_m \geqslant 0 \qquad [27]$$

que muestra que la liquidez real es también un factor de producción.

En su decisión de ahorro los individuos dividirán su ahorro entre los dos activos, liquidez real y capital físico, de forma que se maximice

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, u[c(t), m(t)]\, d\, t \quad , \quad \delta \geqslant 0 \qquad [28]$$

Cualquiera que sea la condición de riqueza sujeto a la cual los individuos tratan de maximizar [28], el óptimo debe ser tal que se den simultáneamente i) el equilibrio de la unidad familiar decisoria, y ii) el equilibrio de la empresa.

Si el equilibrio de la unidad familiar decisoria ha de darse para niveles positivos de ambos activos la utilidad marginal del consumo presente, u_c, ha de ser igual a la utilidad que podríamos obtener en el siguiente período añadiendo ahora una peseta a cada uno de los activos. Esto quiere decir que, en el estado estacionario, tiene que darse que,

$$u_c = u_c\, e^{r-\delta} \quad , \quad u_c = u_m + u_c\, e^{-(\pi+\delta)} \qquad [29]$$

en donde e^r y $e^{-\pi}$ son el consumo que podríamos obtener en el período siguiente si ahora eliminásemos una peseta de consumo y la pusiéramos en capital físico y liquidez real respectivamente.

El equilibrio de la empresa requiere que la productividad marginal de los factores de producción sea igual en todas las direcciones. Por tanto, en el estado estacionario, ha de darse que,

$$y_m = y_k + \pi = r + \pi \qquad [30]$$

La primera igualdad de [29] exige que la intensidad de capital y la liquidez real por cabeza sean tales que la productividad marginal del capital sea igual a la tasa social de descuento temporal, δ. Esta situación no es, sin embargo, una situación óptima debido a que los individuos actúan teniendo en cuenta que la liquidez real tiene un coste de oportunidad dado por [30], mientras que socialmente hablando la liquidez real tiene un coste de producción nulo. Para que se dé la configuración óptima es necesario que $u_m = y_m = 0$ lo que, junto con [29] y [30], implica que

$$r^0 = \delta \quad , \quad \pi = -\delta \quad , \quad \mu^0 = -\delta \qquad [31]$$

La configuración óptima de la economía que llamaremos, por brevedad, *paraíso,* es una situación en la cual el stock de capital y la liquidez real son tales que la ecuación [31] se da. En estas condiciones, la demanda de dinero (igual a la oferta) es únicamente demanda para transacciones.

$$m^0 = (1 - \alpha)\, k^0\, L(0) \qquad [32]$$

y nadie trata de economizar la liquidez real, pues su coste de oportunidad es nulo.

A la demanda de dinero cuando $i = 0$, le llamamos liquidez plena. En consecuencia, el paraíso es un vector compuesto de k^0 y m^0. A μ^0 le podríamos llamar la *óptima política monetaria* consistente en crear una tasa de deflación igual a la productividad marginal del capital.

Las ecuaciones [31] y [32] caracterizan el paraíso tal como lo hace Friedman, basando su análisis en un estado estacionario sin crecimiento de la población. Cuando nos referimos a un estado cuasi-estacionario con crecimiento de la población, el paraíso está caracterizado por [32] y por

$$r^0 = \delta + n \quad , \quad \pi = -(\delta + n) \quad , \quad \mu^0 = -\delta \qquad [31']$$

En consecuencia, podemos establecer la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN FRIEDMANIANA. *La configuración óptima de la economía o paraíso está constituida por una intensidad de capital,* k^0, *correspondiente a la regla de oro de la acumulación extendida y por la liquidez plena para* k^0. *La política monetaria (óptima) asociada con el paraíso es una tasa de decrecimiento en la oferta monetaria que produzca una tasa de deflación igual a la productividad marginal del capital.*

El problema es saber si la configuración óptima de la economía puede alcanzarse en el contexto de un modelo neoclásico de crecimiento y dinero. No sólo queremos saber si estos modelos pueden tener un equilibrio a largo plazo para $k = k^0$ y $m = m^0$, sino también si para dichos valores la trayectoria de equilibrio a largo plazo es estable.

2. *Alcanzabilidad del paraíso*

Hemos visto cómo el paraíso es un vector de dos componentes reales. La relación capital-trabajo, k^0, es tal que la productividad marginal del capital es igual a la tasa de descuento temporal $+ n$, ecuación [31′]. La liquidez real, m^0, es plena liquidez para una intensidad de capital k^0, ecuación [32].

La cuestión de la alcanzabilidad del paraíso es, por tanto, la de si el modelo positivo subyacente es consistente con un equilibrio a largo plazo (k^0, m^0), cuando el coste de oportunidad de la liquidez real es cero. Esto último ocurre cuando la oferta monetaria crece a una tasa dada por la ecuación [31′]. El paraíso será alcanzable si dados s y μ^0, el modelo subyacente posee un equilibrio a largo plazo para $k = k^0$.

LEMA 1.[21] *En el contexto del modelo de Burmeister* [e] *el paraíso es alcanzable por medio de la implementación de las siguientes políticas:*

$$\begin{aligned} \mu^0 &= n - (\delta + n) \\ \alpha^0 &= m^0/k^0 \end{aligned}$$

Prueba. Supongamos que s es la tasa de ahorro correspondiente en el modelo de Solow, a la relación capital-trabajo k^0. Es decir, $s\,f(k^0) = n\,k^0$. Dados s y μ^0, el equilibrio a largo plazo puede existir, en el modelo [*e*] para un valor $k = k^*$ dado por

$$s\,y\,(k^*) = \S\,k^* + (1 - s)\,n\,m^0$$

en donde m^0 viene dada, a su vez, por

$$m^0 = (1 - \alpha)\,k^0\,L(0)$$

Para que $k^* = k^0$, es sólo necesario que

$$n\,k^0 = \S\,k^0 + (1 - s)\,n\,m^0$$

lo que exige únicamente que

$$\alpha^0 = m^0/k^0$$

como se ve recordando lo que significa $\S$.

Ahora estamos en disposición de probar el siguiente teorema,

TEOREMA 6.[22] *En el contexto de los modelos tobinescos el paraíso es alcanzable por medio de la implementación del siguiente conjunto óptimo de políticas económicas.*

$$\begin{aligned} \mu^0 &= n - (\delta + n) \\ \alpha^0 &= m^0/k^0 \\ b^0 &= \alpha^0\,y_k\,k^0 \end{aligned} \qquad [33]$$

21. BURMEISTER y PHELPS, *op. cit.*, 1971.
22. HAHN, *op. cit.*, 1969.

Prueba. Supongamos que s es la tasa de ahorro correspondiente, en un modelo de Solow, a la relación capital trabajo k^0. Es decir, $s\,f(k^0) = n\,k^0$. Dados s y μ^0, el equilibrio a largo plazo existe para un valor de $k = k^*$ dado por

$$s\,y(k^*) = \S\,k^* + (1 - s)\,n\,m^0 - s(b - \alpha\,y_k\,k^*)$$

como se ve del modelo [d]. Si m^0 viene dada por

$$m^0 = (1 - \alpha)\,k^0\,L(0)$$

el equilibrio a largo plazo ocurrirá para $k^* = k^0$ si

$$n\,k^0 = \S\,k^* + (1 - s)\,n\,m^0 - s(b - \alpha^0\,y_k\,k^0)$$

lo que, a su vez, exige que

$$\alpha^0 = \frac{m^0}{k^0} - \frac{s(b - \alpha^0\,y_k\,k^0)}{(1 - s)\,n\,m^0}$$

Si ahora implementamos la última política, nos encontramos en el modelo de Burmeister y el lema 1 es aplicable.

Es evidente que en el modelo de Tobin [f] no tenemos parámetros suficientes para alcanzar el paraíso. Ahora podemos establecer varios corolarios inmediatos.

COROLARIO 2: $\alpha^0 < 1$

La prueba es inmediata. Sustituyendo $\alpha^0 = m^0/k^0$ en la definición de m^0, obtenemos que

$$m^0 = k^0\,L(0)/[1 + L(0)]$$

lo que, dado el supuesto de que $L(0)$ es una constante finita, implica que $\alpha^0 < 1$.

COROLARIO 3: [23] *La deuda pública neta por cabeza en términos reales es igual a cero en el paraíso.*

Como, la deuda pública neta *per capita* en términos reales es $m - \alpha\,k$, el corolario es evidente.

23. BURMEISTER y PHELPS, *op. cit.*, 1971.

Una forma alternativa intuitiva de ver cómo el conjunto óptimo de políticas (α^0, b^0) transforman la estructura de una economía monetaria dinámica en la estructura de una economía de trueque. Dado s, alcanzamos k^0 y luego, por medio de μ^0, alcanzamos la liquidez plena m^0.

Veamos cómo (α^0, b^0) transforman una estructura monetaria en una estructura de trueque: La diferencia entre ambas estructuras está en que la renta disponible excede al output en una economía monetaria. En efecto

$$y_d(\alpha) = y(k) - \alpha\, y_k\, k + b + (\mu_1 - \pi)\, m \qquad [34]$$

es la renta disponible *per capita* en el modelo [*d*], como se desprende de la ecuación [5*a*]. Si ponemos $b^0 = \alpha\, y_k\, k$, la renta disponible *per capita* excede al output *per capita* por una magnitud equivalente a las ganancias de capital *per capita* $(\mu_1 - \pi)\, m$. Ahora bien, a lo largo de la trayectoria de equilibrio a largo plazo $\mu - \pi = n$ y, puesto que $\mu = \mu_1 + \mu_2$, tenemos que $\mu_1 - n = n - \mu_2$. Puesto que $\mu_2 = \alpha\, n\, k/m$ a lo largo de la trayectoria de equilibrio (véase ecuación [8]), si hacemos $\alpha = \alpha^0 = m^0/k^0$, tenemos que $\mu_2 = n$ y que $\mu_1 - \pi = 0$ con lo que la renta disponible es igual al output.

Esta manera alternativa de entender la cuestión de la alcanzabilidad es directamente aplicable a nuestros modelos positivos de Chicago. En el modelo [*a*] la renta disponible *per capita* viene dada por

$$y_d(\alpha) = y(k, m) - \alpha\, y_k\, k + b + (\mu_1 - \pi)\, m + m\, i \qquad [35]$$

Si ahora ponemos $\mu^0 - n = -(\delta + n)$ la productividad marginal del dinero se anula, $y_m = 0$, y el coste de oportunidad del dinero se anula también. En estas condiciones [34] se identifica con [35] y, por tanto, nos encontramos en el modelo [*d*] y podemos aplicar directamente el teorema 6. Es decir, hemos probado el siguiente teorema:

TEOREMA 7. *En los modelos de Chicago, el paraíso es alcanzable a través del conjunto óptimo de políticas económicas* [33].

Hay que hacer varios comentarios. En primer lugar, hemos identificado [37] y [38] cuando en [38] tenemos $y(k, m)$ y no $y(k)$. Sin embargo, la identificación es correcta, pues entendemos que una economía de trueque es una monetaria en la que el dinero funciona perfectamente bien, es decir, $y_m = 0$.[24] En segundo lugar, hay que distinguir entre el contenido del teorema 6 y el del 7. Mientras en los modelos tobinescos $\mu = \mu^0$ se requiere solamente para

24. En lo que se suele llamar un modelo de «trueque» la forma en que se llevan a cabo las transacciones es un misterio. Lo normal es que se lleven a cabo por medio del dinero con lo que un modelo de trueque es únicamente un modelo en el que el dinero se ha neutralizado en el sentido de que se ha eliminado el coste de oportunidad de la liquidez real haciéndolo coincidir con su coste social nulo. Ver HAHN, *op. cit.*, 1969.

alcanzar m^0, en los modelos de Chicago $\mu = \mu^0$ es necesario para alcanzar k^0. En tercer lugar, es evidente que los corolarios 1 y 2 son aplicables a los modelos de Chicago. Finalmente, es obvio, también, que en el modelo [c] no hay suficientes parámetros para alcanzar el paraíso.

3. *Viabilidad del paraíso*

Lo único que hemos probado hasta ahora es la compatibilidad de los modelos de Chicago y tobinescos con el paraíso. Es decir, en estos modelos de equilibrio existe un equilibrio a largo plazo con un valor de k y de m que corresponden precisamente al paraíso. Pero esto no es suficiente, pues de nada nos serviría si la trayectoria de equilibrio a largo plazo caracterizada por k^0 y m^0 no fuera estable.

Es evidente que, dado el teorema 3, el paraíso, aunque alcanzable, no es viable en los modelos tobinescos. Este resultado no tiene demasiado interés porque los modelos tobinescos no pueden ser tomados como modelos adecuados debido, precisamente, a su falta de estabilidad. Es, por tanto, de interés el saber si el paraíso es viable en el contexto de los modelos de Chicago que, como hemos visto en el teorema 4, pueden ser estables a largo plazo.

Recordemos que las condiciones necesarias de estabilidad, según el teorema 4, venían dadas por las ecuaciones [22] y [23]. Estas condiciones en el paraíso pueden escribirse de la siguiente forma:

$$i > \frac{1-s}{s} m^0 y_{km} \geq 0 \qquad [22']$$

$$n > \frac{s(\delta + n) - (1-s) m^0 y_{kk} + m^0 \, \partial i / \partial k}{(1-\alpha) + s\alpha} > 0 \qquad [23']$$

Mientras la primera condición puede darse en el paraíso, la segunda no puede darse, pues, por definición, el paraíso es una situación en la que $i = 0$. Como estas condiciones son necesarias, podemos afirmar que el paraíso no es viable. Es decir, hemos probado el siguiente teorema:

TEOREMA 8. *En los modelos neoclásicos, de dinero y crecimiento, el paraíso, aunque alcanzable, no es viable.*

Pudiera pensarse que haciendo $M = 0$ el paraíso podría ser viable para i infinitesimalmente mayor que cero. Además, se podría seguir arguyendo, esto garantizaría la alcanzabilidad del paraíso puesto que obtendríamos automáticamente una estructura de economía de trueque. La falacia de este tipo de razonamiento consiste en que, como ya hemos indicado, lo que llamamos una economía de trueque no es un sistema en el que no hay dinero; sino un sistema en el que el dinero se ha neutralizado en el sentido de la nota 24. Esta eliminación del coste de oportunidad del dinero es lo que se trata de alcanzar con la implementación de la liquidez plena.

El contenido del teorema 8 nos afirma que no tiene ningún sentido el recomendar la implementación del conjunto óptimo de políticas $\{\mu^0, \alpha^0, b^0\}$ porque aunque estos valores de los instrumentos de política económica son consistentes con el paraíso (k^0, m^0), este último no es una situación estable.[25]

IV. Conclusiones

Resumiendo, los modelos tobinescos tienen las siguientes características inadecuadas.

1. No consiguen captar la naturaleza esencial de una economía monetaria consistente en que existe un único medio de cambio (proposición 1).
2. La naturaleza de la inflación no está bien definida. La tasa de inflación es simplemente aquella que equilibra los mercados de activos (proposición 2).
3. A corto plazo, el nivel de precios está determinado (proposición 3); pero de manera trivial, pues no hay ningún mecanismo económico que explique su determinación.
4. De hecho, el efecto de liquidez real no tiene el signo que cabría esperar a partir de ideas generales de teoría monetaria (proposición 4).
5. A corto plazo no constituyen modelos de determinación de la tasa de inflación (proposición 5).
6. La trayectoria de equilibrio a largo plazo en el modelo de Tobin ocurre para un nivel de la intensidad de capital por debajo del valor de equilibrio en una economía de trueque (véase el comentario sobre el corolario 1), con lo que el dinero no es «neutral en el primer sentido».
7. La trayectoria de equilibrio a largo plazo no es estable (teorema 3), con lo que las cuestiones de dinámica comparada (no «neutralidad en el segundo sentido») no tienen carácter operativo.

Con la finalidad de evitar la primera característica inadecuada hemos construido los modelos de Chicago en los que el dinero es un bien de consumo y un factor de producción. En este tipo de modelos las características inadecuadas a largo plazo desaparecen (teoremas 1 y 4 y corolario 1) a expensas de introducir falta de unicidad (teorema 2). Sin embargo, las características inadecuadas a corto plazo, así como la inadecuada definición de la inflación permanecen (véase las proposiciones correspondientes).

A pesar de que algunas características inadecuadas persisten, la construc-

25. Esta conclusión antifriedmaniana se suma por diferentes razones a las de Stein y Tsiang. STEIN, *op. cit.*, noviembre 1970. TSIANG, S. C.: «A Critical Note on the Optimum Supply of Money», *Journal of Money, Credit and Banking*, 1, mayo 1969, pp. 266-280.

ción de estos modelos de Chicago no es arbitraria. En primer lugar, nos proporcionan un modelo general que nos ha permitido pasar revista a los principales modelos neoclásicos existentes de una manera rápida y compacta. En segundo lugar, una razón más importante para justificar la construcción de estos modelos es que, al incorporar ciertas ideas dentro de la tradición de Chicago, pueden ser utilizadas para confrontar consigo mismo ciertas ideas surgidas en la «ciudad del viento». Aunque tanto en los modelos tobinescos como en los de Chicago, el paraíso pueda alcanzarse por medio del conjunto óptimo de políticas económicas (teoremas 6 y 7) dicha situación es inestable (teorema 8). De ahí que la recomendación friedmaniana de reducir a cero el coste de oportunidad del dinero no puede ser aceptada.

Parece estar claro que la consideración de modelos de crecimiento y dinero de equilibrio precluye la consideración adecuada del dinero, permitiendo únicamente una consideración metafórica del mismo. El paso a modelos de desequilibrio se impone; pero esto es ya otra historia.[26]

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Autónoma de Bilbao

26. En URRUTIA, *op. cit.*, 1973, se ofrece un modelo de desequilibrio libre de todas las características inadecuadas y poseyendo todas las adecuadas.