J. M.ª VEGARA

Sobre «El Capital» y el problema de la transformación *

La finalidad del presente artículo consiste en analizar el problema de la transformación y en términos generales, establecer su importancia teórica y sus implicaciones.

El análisis se refiere exclusivamente al caso más sencillo: trabajo homogéneo, período de rotación unidad, coeficientes constantes, ausencia de producción conjunta, ausencia de elección de técnicas y consideración del trabajo como único input primario.

I. Los valores trabajo

Es conocida la definición de Marx de los valores-trabajo como «tiempo de trabajo socialmente necesario para producir una mercancía». En primer lugar analizaremos brevemente la determinación cuantitativa de los valores trabajo en el caso más simple; la discusión más reciente y completa de este punto la constituye el libro de Morishima.[1]

Consideremos un sistema productivo con m mercancías; el primer grupo $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son mercancías capital y el segundo $(i = n + 1, n + 2, \ldots, m)$ son mercancías-salario o bien de lujo. Supondremos: *a*) una técnica por sector, *b*) ausencia de producción conjunta, *c*) el trabajo es el único producto primario, *d*) el trabajo homogéneo, *e*) todas las mercancías capital poseen período de rotación unidad. Sea:

a_{ij}: la cantidad del producto i necesaria para obtener una unidad del producto j;

l_j: la cantidad directa de trabajo necesaria para producir una unidad de j.

* La versión alemana de este artículo se publica en *Jahrbuch der Wirtschaft Osteuropas*, Osteuropa Institut, Munich.

El presente artículo no se hubiera escrito sin el fuerte estímulo que significó para su autor el seminario que el profesor M. Morishima dio en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Autónoma de Barcelona en septiembre de 1972. Me hallo asimismo en deuda, por sus comentarios y críticas, con J. Barceló Bugeda, J. M. Esteban, J. García Durán, P. Maragall y A. Mas.

1. Morishima, M., *Marx's economics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

La matriz de inputs materiales es, pues:

$$
A = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} & \dots & a_{2m} \\
\vdots & & \vdots & & & \\
a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{nm} \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & \dots & \dots & & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right]
$$

y sector trabajo directo es:

$$l^T = \{l_1 \; l_2, \; \dots, \; l_n \quad l_{n+1} \; \dots, \; l_m\}$$

o bien, en forma particionada:

$$A = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad l^T = \{l_{\mathrm{I}}^T \; l_{\mathrm{II}}^T\}$$

Puede demostrarse fácilmente —se trata de un conocido resultado del análisis input-output—, que $\lambda_1 \; \lambda_2, \; \dots, \; \lambda_n, \; \lambda_{n+1}, \; \dots, \; \lambda_m$ cantidades totales de trabajo incorporadas en una unidad de cada mercancía puede calcularse resolviendo:

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_n a_{n1} + l_1 \\
\lambda_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{n2} + l_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_m = \lambda_1 a_{1m} + \lambda_2 a_{2m} + \dots + \lambda_n a_{nm} + l_m
\end{cases}
$$

o bien en forma matricial:

$$
\begin{cases}
\Lambda_{\mathrm{I}}^T = \Lambda_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{I}}^T & [1] \\
\Lambda_{II}^T = \Lambda_{\mathrm{II}}^T A_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{II}}^T & [2]
\end{cases}
$$

en donde Λ_{I} y Λ_{II} son los vectores de los valores trabajo: $\Lambda_{\mathrm{I}}^T = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ $\Lambda_{\mathrm{II}}^T = \{\lambda_{n+1}, \; \lambda_{n+2}, \; \dots, \; \lambda_m\}$.

De [1] y [2] resulta:

$$
\begin{cases}
\Lambda_{\mathrm{I}}^T = l_{\mathrm{I}}[l - A_{\mathrm{I}}]^{-1} \\
\Lambda_{\mathrm{II}}^T = l_{\mathrm{I}}[l - A_{\mathrm{I}}]^{-1} \, \mathrm{A}_{\mathrm{II}} + l_{\mathrm{II}}^T
\end{cases}
$$

Se demuestra [2] que si se cumple un cierto número de hipótesis [3] poco restrictivas, los valores trabajo se hallan determinados y son positivos, siendo precios de equilibrio en un modo de producción mercantil simple. En consecuencia, los valores trabajo no son algo metafísico, sino un concepto dotado de una expresión cuantitativa rigurosa; veamos seguidamente su importancia teórica.

II. Explotación, valores y precios

Como es conocido, Marx define la tasa de plusvalía o de explotación como el cociente del trabajo excedente por el trabajo necesario; si $B(B > 0)$ es el vector del consumo diario de un trabajador y T es la duración de la jornada de trabajo, la tasa de explotación tiene como expresión:

$$e = \frac{T - \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i b_i}{\sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i b_i}$$

o bien:

$$e = \frac{1 - \omega \Lambda_{\text{II}}^T B}{\omega \Lambda_{\text{II}}^T B} \qquad [3]$$

en donde

$$\omega = 1/T$$

De [3] se obtiene

$$1 = (1 + e)\omega \Lambda_{\text{II}}^T B$$

por lo que [1] y [2] pueden, en consecuencia, escribirse:

$$\begin{cases} \Lambda_{\text{I}}^T = \Lambda_{\text{I}} A_{\text{I}}^T + (1 + e)\omega \Lambda_{\text{II}}^T B l_{\text{I}}^T & [4] \\ \Lambda_{\text{II}}^T = \Lambda_{\text{I}} A_{\text{II}}^T + (1 + e)\omega \Lambda_{\text{II}}^T B l_{\text{II}}^T & [5] \end{cases}$$

2. Véase la discusión detallada en Morishima, M., *op. cit.*, caps. 1, 2, 3 y 4.
3. Estas hipótesis son:
a) A_{I} es negativa, productiva ($Ax < x$, para alguna $x > 0$) e indescomponible;
b) l_{I} es semipositiva ($l_{\text{I}} \geqq 0$ y $l_{\text{II}} \neq 0$);
c) $\begin{bmatrix} A_{\text{II}} \\ l^T_{\text{II}} \end{bmatrix}$ es negativa y todas las columnas son semipositivas.
Véase en el Anexo I, los principales teoremas utilizados.

o sea:

$$\{\Lambda_{\mathrm{I}}^{T}\,\Lambda_{\mathrm{II}}^{T}\} = \{\Lambda_{\mathrm{I}}^{T}\,\Lambda_{\mathrm{II}}^{T}\}\begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ (1+e)\omega Bl_{\mathrm{I}}^{T} & (1+e)\omega Bl_{\mathrm{II}}^{T} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \Lambda^{T} = \Lambda^{T}N$$

en donde: [4]

$$N = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ (1+e)\omega Bl_{\mathrm{I}}^{T} & (1+e)\omega Bl_{\mathrm{I}}^{T} \end{bmatrix} \qquad \Lambda^{T} = \{\Lambda_{\mathrm{I}}^{T},\ \Lambda_{\mathrm{II}}^{T}\} \qquad [6]$$

Sea:

$c_{ij} = a_{ij}\lambda_i$ = o valor trabajo del input material a_{ij};
$v_{ij} = \omega b_i l_j \lambda_i$ = o valor trabajo de la cantidad de i necesaria para «producir» l_j;
$s_{ij} = ev_{ij}$ = plusvalía asociada con v_{ij}.

Con lo que resulta:

$$\begin{cases} \lambda_1 = c_{11} + c_{21} + \ldots + c_{n1} + (1+e)(v_{n+1,1} + v_{n+2,1} + \ldots + v_{m1}) \\ \lambda_2 = c_{12} + c_{22} + \ldots + c_{n2} + (1+e)(v_{n+1,2} + v_{n+2,2} + \ldots + v_{m2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_m = c_{1m} + c_{2m} + \ldots + c_{nm} + (1+e)(v_{n+1,m} + v_{n+2,m} + \ldots + v_{mm}) \end{cases} \qquad [7]$$

El sistema [7] muestra la descomposición de los valores trabajo de cada producto en sus elementos componentes.[5]

Definamos:

$c_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}$ = capital constante gastado por unidad de producto.
$v_j = \sum_{i=n+1}^{m} v_{ij}$ = capital variable por unidad de producto.
$s_j = ev_j$ = plusvalía por unidad de producto.

Con lo que:

$$\lambda_j = c_j + v_j + s_j \qquad [8]$$

4. Las hipótesis *a*), *b*) y *c*), conjuntamente con $b_i > 0$ ($i = n+1, \ldots, m$) implican la indescomponibilidad de la matriz no-negativa N; [6] expresa los valores-trabajo como vector propio (normalizado por medio de [4]), asociado al valor propio unidad de la matriz N.

5. SETON, F., «The transformation problem», *Review of economic studies*, junio 1957, 25, pp. 149-160. No distingue entre mercancías capital y las otras; así pues, sus k_{ij} son iguales a $c_{ij} + v_{ij}$.

y la composición orgánica del capital en j será:

$$k_j = c_j / v_j \tag{9}$$

* * *

Veamos seguidamente el sistema que determina los precios de producción. Si se considera que los capitalistas adelantan los salarios, se obtiene:

$$\begin{cases} p_1 = (1+r)(p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_n a_{n1} + wl_1) \\ p_2 = (1+r)(p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_n a_{n2} + wl_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m = (1+r)(p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + \ldots + p_n a_{nm} + wl_m) \end{cases}$$

En donde r es la tasa de beneficio, p_j es el precio de producción de la mercancía j y w es la tasa de salario.

En forma matricial resulta:

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}}^T = (1+r)\,[p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{I}} + wl_{\mathrm{I}}^T\,] & [10] \\ p_{\mathrm{II}}^T = (1+r)\,[p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{II}} + wl_{\mathrm{II}}^T] & [11] \end{cases}$$

en donde p_{I} y p_{II} son los vectores de los precios de producción:

$$p_{\mathrm{I}}^T = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \quad , \quad p_{\mathrm{II}}^T = \{p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots, p_m\}$$

Ahora bien, en el supuesto de que los trabajadores consumen todos sus ingresos se cumple:

$$w^T = p_{\mathrm{II}}^T B \qquad \text{o} \qquad w = \omega p^T B$$

con lo que:

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}}^T = (1+r)\,[p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{I}} + \omega p_{\mathrm{II}}^T B l_{\mathrm{I}}^T\,] & [12] \\ p_{\mathrm{II}}^T = (1+r)\,[p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{II}} + \omega p_{\mathrm{II}}^T B l_{\mathrm{II}}^T] & [13] \end{cases}$$

es decir:

$$\frac{1}{1+r}\, p^T = p^T \mathscr{A} \tag{14}$$

siendo:

$$p^T = \{p_{\mathrm{I}}^T, p_{\mathrm{II}}^T\} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{A} = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega B l_{\mathrm{I}}^T & \omega B l_{\mathrm{II}}^T \end{bmatrix}$$

Puede demostrarse que si $e > 0$, entonces $r < 0$ y los precios de producción son positivos.[6] Por otra parte, si se toma w como numerario, el sistema [10] y [11] puede escribirse:

$$\begin{cases} p^T_{\mathrm{I},w} = (1 + r)\,[p^T_{\mathrm{I}w} A_{\mathrm{I}} + l^T_{\mathrm{I}}] \\ p^T_{\mathrm{II},w} = (1 + r)\,[p^T_{\mathrm{I}w} A_{\mathrm{II}} + l^T_{\mathrm{II}}] \end{cases}$$

en donde $p_{i,w} = p_i/w$; $p_{i,w}$ posee, pues, las mismas dimensiones que los valores trabajo. Puede demostrarse, asimismo, que si $e > 0$ se cumple $p_{i,w} > \lambda_i$,[7] lo cual puede interpretarse en el sentido de que «los trabajadores, para obtener en el mercado una unidad de la mercancía i deben ofrecer más trabajo que el necesario para producirla».

III. El problema de la transformación

El problema de la transformación consiste en obtener los precios de producción a partir de la *descomposición* del valor de cada producto en sus elementos componentes, es decir, p_{I} y p_{II}, soluciones de [10] y [11] a partir de [7], por ejemplo.

Sea α_j el coeficiente por el que es preciso multiplicar toda expresión en términos de valor-trabajo relativa a la mercancía j para obtener la expresión correspondiente en términos de precios de producción. Así, pues:

$\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\alpha_i = C^P_j$ Será igual a la evaluación del capital constante en términos de precios de producción.

$\sum_{i=n+1}^{m} V_{ij}\alpha_i = V^P_j$ Será igual a la evaluación del capital variable en términos de precios de producción.[8 y 9]

6. Las hipótesis *a*), *b*) y *c*), juntamente con $b_i > 0$ $(i = n + 1, \ldots, m)$ implican la indescomponibilidad de la matriz no-negativa indescomponible $\mathscr{A}$; en consecuencia, el valor propio dominante es real y positivo, siendo el vector propio correspondiente asimismo dominante. Además, $\mathscr{A}$ difiere tan sólo por el hecho de que algunos coeficientes de $\mathscr{A}$ no se hallan multiplicados por $(1 + e)$. Así, pues, si $e > 0$, se cumple $A \leq N$; en consecuencia, el valor dominante de $\mathscr{A}$ es inferior al de N, con lo que resulta $1/_{1+r} < 1$, es decir, $r > 0$. Así pues, si existe explotación en el sentido marxista, existe una tasa de beneficios positiva.

7. Véase la nota 12.

8. Las α_i pueden también interpretarse como el precio de producción de j cuando la unidad de medida es la cantidad de producto que corresponde a una unidad de valor-trabajo.

9. Para los artículos fundamentales y originales sobre el problema de la transformación véase: Borkiewicz, L. von, «On the correction of Marx's fundamental Theoretical Construction on the third volume of capital», *Jahrbuch Nationalökonomie Statistik*, 1907, 34, 3, pp. 370-385; Seton, F., *loc. cit.*; Morishima, M., y Seton, F., «Aggregation in Leontief matrices and the labour theory of value», *Econometrica*, abril 1961, 29, pp. 203-220, y Morishima, M., *op. cit.* Pueden verse, asimismo, Dobb, M., *Economía política y capitalismo*, FCE, México, 1966, y Johansen, L., «Labour theory of value and marginal utilities», *Economics of planning*, vol. 3, 1963, pp. 89-103.

Y si llamamos π a la tasa de beneficio:

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} C_{i1}\alpha_i + \sum_{i=n+1}^{m} V_{i1}\alpha_i\right](1+\pi) \\ \lambda_2\alpha_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} C_{i2}\alpha_i + \sum_{i=n+1}^{m} V_{i2}\alpha_i\right](1+\pi) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_m\alpha_m = \left[\sum_{i=1}^{n} C_{im}\alpha_i + \sum_{i=n+1}^{m} V_{im}\alpha_i\right](1+\pi) \end{cases} \qquad [15]$$

o bien:

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=n+1}^{m} \omega\alpha_i\lambda_i b_i l_1\right](1+\pi) \\ \lambda_2\alpha_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{i2}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=n+1}^{m} \omega\alpha_i\lambda_i b_i l_2\right](1+\pi) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_m\alpha_m = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{im}\lambda_i\alpha_i + \sum_{i=n+1}^{m} \omega\alpha_i\lambda_i b_i l_m\right](1+\pi) \end{cases} \qquad [16]$$

O bien, en forma matricial:

$$\frac{1}{1+\pi}\,\alpha^T = \alpha^T K \qquad [17]$$

siendo:

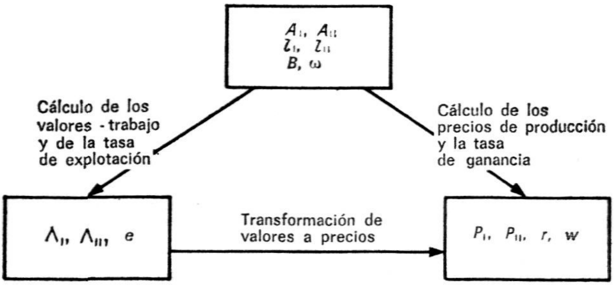
$$K = \begin{bmatrix} C_{n/\lambda_1} & \dots & C_{1j/\lambda_j} & \dots & C_{1m/\lambda m} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ C_{n1/\lambda_1} & & C_{nj/\lambda_j} & & C_{nm/\lambda m} \\ V_{n+1,1/\lambda 1} & & V_{n+1,j/\lambda_j} & & V_{n+1,m/\lambda m} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ V_{m1/\lambda_1} & \dots & V_{mj/\lambda_j} & \dots & V_{mm/\lambda m} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha^T = \{\alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_m\}$$

Con lo que el vector α es el vector propio de la izquierda de la matriz K. Ahora bien, como puede observarse:

$$K = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega B l_{\mathrm{I}}^T & \omega B l_{\mathrm{II}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & & 0 \\ & 1/\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\lambda_n \end{bmatrix} \qquad [18]$$

K y $\mathscr{A}$ son, pues, matrices semejantes, por lo que poseen iguales valores propios, o sea $r = \pi$.

Así pues, los precios de producción y la tasa de beneficio pueden determinarse por medio de la matriz K. En consecuencia, el problema de la transformación posee solución si se conoce la descomposición de los valores. En definitiva, el esquema de cálculo puede expresarse del modo siguiente:



Es lógico, pues, preguntarse si el problema de la transformación no surge precisamente porque se da un rodeo; este punto será discutido más adelante, en la sección V.

Puede demostrarse asimismo que la condición necesaria y suficiente para que los precios de producción sean *proporcionales* a los valores-trabajo es que todos los sectores posean igual composición orgánica del capital; [10] ésta es la hipótesis implícita en los dos primeros volúmenes de *El Capital* y que justifica prescindir del problema de la transformación; dicha simplificación, no obstante, permite centrar la atención sobre ciertos aspectos del modo de producción capitalista, de un modo particularmente sencillo; es tan absurdo negar legitimidad a dicha hipótesis como quedarse en ella.

En estas condiciones se cumple: $r = \dfrac{s_j}{s_j + v_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$

es decir, el cálculo de la tasa de beneficio puede efectuarse siguiendo el procedimiento utilizado por Marx. En general, por el contrario —como se verá—, se cumple:

$$r = \frac{p_j - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + w l_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + w l_j\right)} \neq \frac{s_j}{c_j + v_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

10. Véase el Anexo III.

Otro modo de resolver el problema de la transformación —con idénticos resultados finales, por supuesto— consiste en utilizar el procedimiento de reducción a trabajo fechado de Sraffa.[11]

Nos limitaremos a estudiar la transformación de $p_{\mathrm{I},w}$; la correspondiente a $p_{\mathrm{II},w}$ se deduce de modo inmediato:

Sea:

$$p^T_{\mathrm{I},w} = (1+r)\,[p^T_{\mathrm{I},w} A_{\mathrm{I}} + l^T_{\mathrm{I}}]$$

es decir:

$$p^T_{\mathrm{I},w} = (1+r)\,l^T_{\mathrm{I}}\,[I - (1+r)A_{\mathrm{I}}]^{-1}$$

Ahora bien $[I - (1+r)A_{\mathrm{I}}]^{-1}$ puede expresarse como serie infinita de matrices:

$$[I - (1+r)A_{\mathrm{I}}]^{-1} = I + (1+r)A_{\mathrm{I}} + (1+r)^2 A^2_{\mathrm{I}} + \ldots + (1+r)^n A^n_{\mathrm{I}} + \ldots$$

con lo que:

$$p^T_{\mathrm{I},w} = (1+r) l^T_{\mathrm{I}} + (1+r)^2 l^T_{\mathrm{I}} A_I + \ldots + (1+r)^{n+1} l^T_{\mathrm{I}} A^n_{\mathrm{I}} + \ldots \qquad [19]$$

El sistema de ecuaciones [19] debe ser comparado con el desarrollo en serie de los valores trabajo,

$$\Lambda^T_{\mathrm{I}} = l^T_{\mathrm{I}}[I - A_I]^{-1}$$

donde:

$$[I - A_{\mathrm{I}}]^{-1} = I + A_{\mathrm{I}} + A^2_{\mathrm{I}} + \ldots + A^n_{\mathrm{I}} + \ldots$$

y finalmente:

$$\Lambda^T_{\mathrm{I}} = l^T_{\mathrm{I}} + l^T_{\mathrm{I}} A_{\mathrm{I}} + l^T_{\mathrm{I}} A^2_{\mathrm{I}} + \ldots + l^T_{\mathrm{I}} A^n_{\mathrm{I}} + \ldots \qquad [20]$$

En donde

l_{I} es el vector de las cantidades de trabajo directamente necesarias para producir una unidad de cada producto;

$l^T_{\mathrm{I}} A_{\mathrm{I}}$ es el vector de las cantidades de trabajo directamente necesarias para producir los inputs materiales precisos para producir una unidad de cada producto;

11. Véase SRAFFA, P., *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Oikos, Vilasar, 1965.

$l_I^T A_I^2$ es el vector de las cantidades de trabajo directamente necesarias para producir los inputs materiales precisos para producir A;

En consecuencia [19] expresa la sucesión (no cronológica) ponderada por $(1+r)^{t+1}$ de los gastos de trabajo. Así, pues, una vez calculado r, [19] permite determinar $p_{I,w}$,[12] es decir, resolver el problema de la transformación.[13]

IV. El problema de la normalización

Seguidamente analizaremos, brevemente, el problema de la normalización, es decir, las consecuencias de la existencia de un grado de libertad en el sistema que determina α.

Desde un punto de vista matemático —como se ha visto— el problema de la transformación es un problema de valores y vectores propios; debido a ello existe un grado de libertad y resulta posible utilizar distintos procedimientos de normalización.[14]

Veamos qué procedimientos son correctos y cuáles son incorrectos; para ello necesitamos definir una serie de agregados:

— capital constante total: $C = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_j$

— capital variable total: $V = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} v_{ij}x_j$

— plusvalía total: $S = eV$

— valor total: $VT = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j$

Simétricamente, las expresiones correspondientes en términos de precios de producción serán:

— capital constante total: $C_p = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i x_j$

— capital variable total: $V_p = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} v_{ij}\alpha_i x_j$

— beneficios totales: $S_p = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j\alpha_j - \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i - \sum_{i=n+1}^{m} v_{ij}\alpha_i)x_j$

— producto total: $PT_p = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\alpha_j x_j$

12. Como se ha visto en la nota 6, $e > 0$ implica $r < 0$ y comparando [19] y [20] resulta evidente que $p_{I,w} > \Lambda_I$.

13. Véase la prueba de la convergencia en el Anexo III.

14. Este punto se halla correctamente analizado en SETON, F., *op. cit.*

En términos generales puede normalizarse imponiendo cualquier condición que equivalga a agregar un hiperplano que *no* pase por el origen, por cuanto, en caso contrario, se estaría restringiendo la posición de las direcciones propias al forzar a éstas a pertenecer arbitrariamente al citado hiperplano; en este caso, las direcciones propias sólo se hallarán sobre el hiperplano para valores particulares de la matriz.

Examinemos algunas de las variantes de normalización corrientes o posibles:

a) Marx supone en diversas ocasiones [15] que «el valor total es igual al precio total», o sea:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j x_j \qquad [21]$$

lo cual da lugar a una ecuación lineal en α_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) que determina un hiperplano que no pasa por el origen, pues $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j > 0$; se trata, pues, de un procedimiento correcto de normalización.

b) Marx indica en otras ocasiones [16] que el beneficio total es igual a la plusvalía total, es decir:

$$eV = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j x_j - \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i x_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij}\alpha_i x_j \right) \qquad [22]$$

obteniéndose una ecuación similar a la anterior; se trata pues, también, de un procedimiento correcto de normalización.

c) Puede asimismo hacerse igual a la unidad una cualquiera de las α_j.

d) Veamos, por el contrario, qué ocurre si lo que se pretende es mantener la tasa de explotación, o sea:

$$e = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j x_j - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i x_j - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij}\alpha_i x_j}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij}\alpha_i x_j} \qquad [23]$$

Se obtiene, pues, una ecuación que corresponde a un hiperplano que pasa por el origen; el procedimiento no es, pues, correcto: *tan sólo en casos particulares se conservará la tasa de explotación medida en valores-trabajo y en precios de producción;* el hecho de que un elemento tan fundamental como la tasa de explotación no resulte invariante muestra que la transformación no es fenómeno trivial ni irrelevante.

e) El mismo razonamiento permite demostrar que sólo en casos parti-

15. MARX, K., *El Capital,* tomo III, sec. 1, cap. 9.
16. *Ibid.*

culares se obtiene una tasa de beneficio igual a $s/c + v$, razón por la que la fórmula utilizada por Marx no resulta correcta en el caso general.

Marx subrayaba que «la verdadera diferencia de magnitud entre la ganancia y la plusvalía —y no sólo entre la cuota de ganancia y la cuota de plusvalía— en las distintas ramas de la producción, oculta enteramente la verdadera naturaleza y origen de la ganancia»... pero consideraba que la igualdad plusvalía = ganancia, demuestra «hasta qué punto esta ganancia se deba a la explotación del trabajo en su conjunto por el capital total, es decir, por todos sus colegas capitalistas; esta trabazón, constituye para él un misterio completo, tanto más cuanto ni los teóricos burgueses, los economistas políticos, han sabido descubrirlo hasta ahora».[17]

Si dicha conclusión dependiera de un modo arbitrario de fijar un grado de libertad, se trataría de un resultado irrelevante; luego veremos qué sentido preciso tiene dicha tesis.

Marx señala asimismo [18] «según esto, la suma de las ganancias obtenidas en todas las esferas de la producción deberá ser igual a la suma de plusvalías y la suma de los precios de producción del producto total de la sociedad igual a la suma de valores».[19] Esto no es correcto pues si bien podemos fijar un grado de libertad *no podemos imponer dos condiciones* (en el caso general); por otra parte, es necesario tener en cuenta que a pesar de que podemos elegir el procedimiento de normalización, sus consecuencias son únicamente implicaciones *necesarias de una elección arbitraria.*

Una posición particular sobre el problema de la normalización es la sostenida por A. Medio [20] quien propone utilizar para ello una condición que resulta de redimensionar el sistema productivo de modo que el vector producción pueda interpretarse como una mercancía compuesta que utiliza inputs en igual proporción; se trata del mismo procedimiento seguido por Sraffa para construir su mercancía patrón; por construcción, dicha mercancía es insensible al problema de la transformación. En estas condiciones resulta:

$$r = \frac{e}{k^* + 1} \qquad [24]$$

siendo k^* la composición orgánica del «sector» productor de la mercancía estándar; así, pues, en estas condiciones la tasa de beneficio es calculable según la fórmula de Marx.[21]

17. *Ibid.*
18. *Ibid.*
19. Puede observarse el mismo error en CARANDINI, G., *Lavoro e capitale nella teoria di Marx,* Marsilio ed., Padua, 1971, p. 245.
20. Véase MEDIO, A., «Profits and surplus valus: Appearance and Reality in capitalist production», *A critique of economic theory,* editores E. K. HUNT y J. SCHWARTZ, Penguin Books, 1972.
21. Incluso si se trata de un procedimiento de normalización significativo, no es correcto afirmar —como hace Medio— que ello permite eliminar «el último elemento de indeterminación en el problema de la transformación» ya que, no por significativo deja de ser un procedimiento opcional.

Esta construcción debe relacionarse con la de M. Morishima,[22] el cual se pregunta cuál debe ser el vector producción —$\bar{x}$— para que la fórmula [24] sea correcta; la $\bar{x}$ adecuada es precisamente la que corresponde a la senda de crecimiento equilibrado:

$$\bar{x} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_{\mathrm{I}} \\ \bar{x}_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix} = (1+r) \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega Bl_{\mathrm{I}}^{T} & \omega Bl_{\mathrm{II}}^{T} \end{bmatrix}, \begin{Bmatrix} \bar{x}_{\mathrm{I}} \\ \bar{x}_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}$$

Los dos resultados son, formalmente, el mismo; A. Medio se inspira en Sraffa, Morishima en Von Neumann.[23]

V. La transformación, ¿un rodeo necesario?

Marx era consciente del problema de la transformación, aunque lo resolviera incorrectamente; el hecho de que no repensara sistemáticamente los resultados obtenidos en los tomos I y II a partir de las consecuencias de la transformación en precios de producción, indica —como subraya Dobb que consideraba no se producían cambios eseciales en su formulación teórica; no obstante, las indicaciones formuladas en el apartado anterior muestran que es preciso ser más prudente.

M. Morishima ha insistido justamente en que en Marx hay, de hecho, *dos sistemas de contabilidad social,* dos sistemas de medición: «en la economía capitalista (a diferencia de la sociedad de producción mercantil simple), valores y precios, en general, no coinciden; deben diferenciarse; por este motivo, la economía de Marx, a diferencia de la economía ortodoxa, posee sistemas contables duales: un sistema en términos de valor y otro en términos de precios. Pero muchas personas de ambos campos (como Sweezy, Joan Robinson y Samuelson) los han confundido, ya que el propio Marx a veces los confundió».[24]

Medio subraya el paralelismo entre la fórmula marxiana y la ecuación de Sraffa: $r = R(1 - w)$ en la que w es la proporción del producto neto distribuido en forma de salarios (cuando éstos se expresan en términos de producto estándar) y R es la tasa máxima de beneficio. Ambas fórmulas expresan la tasa de beneficio como función de una condición técnica (R o bien k^*) y de una condición social (w o bien e).

22. Morishima, M., *op. cit.*, cap. 7.

23. Véase el Anexo IV.
Morishima ha formulado y resuelto asimismo el «problema de la transformación dinámica», que surge en relación con la reproducción ampliada y que consiste en transformar las tasas de acumulación y de ahorro medidas en términos de valor-trabajo en las correspondientes medidas en precios de producción; véase Morishima, M., *op. cit.*, cap. 12.

24. *Ibid.*, cap. 5, p. 46; cf. también Sweezy, P., *Teoría del desarrollo capitalista,* FCE, 1963; Robinson, J., *Introducción a la economía marxista,* Siglo XXI, México, 1968; Samuelson, P. A., «Wages and Interest: A modern dissection of marxian economic models», *American economic review,* vol. XLVII, diciembre 1957.

Un cierto número de errores surgen, efectivamente, de no percibir claramente que los valores-trabajo y los precios de producción dan lugar a dos sistemas contables distintos; en particular, no puede hablarse de «transferencias de plusvalía» entre sectores de composición orgánica distinta como si la transformación de los valores trabajo a precios de producción provocara una nueva distribución de la plusvalía *original*.[25] Otro ejemplo: en términos de valores-trabajo constituye una hipótesis razonable considerar uniformidad en las tasas de explotación de los distintos sectores, mientras que no ocurre lo mismo en términos de precios. Este problema debe ser analizado en un marco teórico dotado de dos sistemas contables; los precios de producción dan lugar a una *distribución* distinta de la obtenida en términos de valores-trabajo.[26]

Ahora bien, ¿qué necesidad existe de dos sistemas de contabilidad social? Los valores-trabajo pueden calcularse a partir de la misma información que los precios de producción; en consecuencia, es lógico preguntarse por qué plantear el problema de la transformación; si se suprime el sistema de valores-trabajo se elimina el problema; por este motivo la transformación es para Samuelson «un rodeo innecesario».

«Cualquier método de resolver el famoso problema de la transformación implica dar marcha atrás del innecesario rodeo del análisis de los valores del libro I. Como he indicado en mi artículo matemático, dicha "transformación" es exactamente igual a la operación consistente en utilizar un borrador para eliminar un resultado previo, para, seguidamente, empezar de nuevo y conseguir el resultado correctamente calculado.»[27]

Marx inicia *El Capital* con el análisis de la producción simple de mercancías; en la sección 2 introduce el capital («la transformación de moneda en capital»); la legitimidad metodológica de dicho enfoque radica en el hecho de que la riqueza en una sociedad capitalista toma la forma de un stock de mercancías y éstas son el punto de partida del capital. Como es conocido, los valores-trabajo son útiles para analizar la producción simple de mercancías.

Por otra parte, uno de los objetivos teóricos centrales de Marx consiste en poner de relieve que bajo la apariencia del beneficio capitalista, la renta, etcétera, existe la plusvalía; para ello en los tomos I y II, razona en el marco

25. El enfoque basado en las «transferencias de plusvalía» se halla a menudo relacionado con el problema del intercambio no equivalente; véase EMMANUEL, *L'echange inégal*, Maspéro, París, 1969.

El intercambio no equivalente puede recibir una formulación precisa: «En el mercado, cada mercancía es intercambiada por otra. La relación de intercambio entre la *i*-ésima y la *j*-ésima mercancía, es p_i/p_j que no es necesariamente igual a λ_i/λ_j. Si $p_i/\lambda_j = \lambda_i/\lambda_j$ el intercambio se denomina equivalente. Si por alguna razón $p_i/p_j > k_i/\lambda_j$, el intercambio no es equivalente y una cantidad mayor de trabajo incorporado en la *j*-ésima mercancía es intercambiada por una cantidad menor de trabajo incorporado en la *i*-ésima mercancía»; véase OKISHIO, N. A., «Mathematical Note on Marxian Theorems», *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1963, pp. 287-299.

26. Véase ROBINSON, J., *op. cit.*

27. SAMUELSON, P. A., *loc. cit.*, p. 421.

de un modo de producción capitalista en el que «los productos se intercambian por sus valores»; caso particular que, no obstante, permite analizar de modo simplificado ciertas características fundamentales relacionadas con el crecimiento y la distribución; no obstante, dicha hipótesis implica —como se ha indicado ya— que las composiciones orgánicas del capital de los diversos sectores son iguales.[28]

Marx considera que los resultados básicos obtenidos no sufren modificación relevante cuando se introducen composiciones orgánicas distintas, por considerar que, simplemente, la tasa de ganancia surge de distribuir de otro modo la masa de plusvalía generada de acuerdo con el enfoque del volumen I. Como hemos visto, esto no es correcto; no obstante, se mantiene un resultado básico que puede sintetizarse del modo siguiente: *la condición necesaria y suficiente para que existan beneficios en el sistema de precios de producción es que exista explotación en el sistema de valores-trabajo.*

Como señala M. Morishima «cuando cada industria gana beneficios positivos, se cumplen las desigualdades:

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}}^T > p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{I}} + w l_{\mathrm{I}}^T & [25] \\ p_{\mathrm{II}}^T > p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{II}} + w l_{\mathrm{II}}^T & [26] \end{cases}$$

En estas condiciones podemos preguntarnos qué condiciones son necesarias y suficientes para que exista un conjunto de precios no negativos y una tasa de salario que proporcionan beneficios positivos en cada industria. Este problema fue discutido en primer lugar por Okishio, de modo satisfactorio, evitando toda confusión entre valores y precios. Se demuestra que existe un conjunto de precios y una tasa de salario que cumplen [25] y [26] si y sólo si la tasa de salario real es tal que la tasa de explotación es positiva. Este resultado, cuyo carácter necesario se debe a Okishio, mientras que su suficiencia —si bien no discutida por él— puede ser probada fácilmente, puede ser proclamada como el teorema fundamental marxista, por cuanto afirma que la explotación de los trabajadores por los capitalistas es necesario y suficiente para la existencia de un conjunto precios-salario que proporciona beneficios positivos o, en otras palabras, para que resulte posible conservar la economía capitalista».[29]

Se trata de un importante resultado que relaciona los dos sistemas; *puesto que el modo de producción capitalista es un modo de producción mercantil* en el que el intercambio se produce a través del sistema de precios, *es funda-*

28. «Lo importante es si los corolarios deducidos de la aproximación quedan o no invalidados por las salvedades que requiere una aproximación más cercana, esto es, si las alteraciones introducidas en el volumen III implican una diferencia sustancial respecto de las conclusiones derivadas de los supuestos de que se parte en el volumen I.» DOBB, M., *op. cit.*, p. 13.

29. MORISHIMA, M., *op. cit.*, p. 53.

mental poder explicar cómo se produce ésta a través de dicho mecanismo; [30] se trata de un resultado que da respuesta coherente a un punto básico de la problemática de Marx: el origen de los beneficios capitalistas.

Como se observará, lo decisivo no es que los precios de producción puedan derivarse (calcularse) a partir de los valores-trabajo —o con mayor precisión— de la descomposición de los valores-trabajo en sus elementos componentes, sino que la existencia de beneficios tenga como condición necesaria y suficiente la explotación.

El punto esencial, por consiguiente, no es realmente el problema de la transformación en el sentido «computacional», sino la posibilidad de efectuar análisis relevantes utilizando los dos sistemas de medición, los dos sistemas de contabilidad.

Ahora bien, parece necesario efectuar una precisión.

Es evidente que si $T = \Lambda_{II}^{T} B$, es decir, si el tiempo de trabajo socialmente necesario para producir los medios de consumo diario, es igual a la duración de la jornada de trabajo, no es posible ni explotación ni crecimiento; así pues, una condición necesaria para que exista crecimiento y, por tanto, explotación, es que $T > \Lambda_{II}^{T} B$, lo cual implica $e > 0$, incluso en una sociedad en la que la propiedad efectiva de los medios de producción (como distinta de la simple propiedad jurídica) sea colectiva y los trabajadores sean realmente dueños de sus condiciones de vida y de trabajo; en este último caso sería, sin duda, falsear el concepto de Marx, continuar denominando e tasa de explotación, como si se tratara de una sociedad de clases; ello muestra que para poder denominar una tasa e como tasa de explotación es preciso pronunciarse sobre la *legitimidad social* de los títulos de acuerdo con los que una determinada clase social se apropia de parte del producto social por motivos distintos de su participación como trabajadores en el proceso productivo,[31] e no es simplemente un ratio cuantitativo: es también una *relación social.*

VI. Otras implicaciones de la transformación

Anteriormente hemos subrayado la existencia de dos sistemas de contabilidad social en *El Capital*; de dicha dualidad se desprende que la traducción directa al otro sistema de afirmaciones formuladas en uno de ellos tenga que

30. Medio, A., *loc. cit.*, p. 321, subraya: «Bajo el capitalismo, por consiguiente, las relaciones sociales toman la apariencia de relaciones de mercado y los beneficios son apropiados por los capitalistas como resultado del mecanismo general de intercambio de los productos. De ello se desprende que una teoría de los beneficios correcta debe ser consistente con una teoría de los precios relativos, que sea una aproximación razonable a la realidad.

»Pero, mientras que toda teoría de los beneficios que no cumpla este requisito debe ser rechazada como incapaz de explicar una economía capitalista, una teoría correcta de los precios puede ser elaborada sin ninguna proposición específica sobre el origen y la naturaleza del beneficio...»

31. Marx discutió este punto criticando la argumentación común en su tiempo; véase Marx, K., *op. cit.*, vol. I, sec. VII, cap. 24.

efectuarse con mucha precaución, especialmente si se tiene en cuenta que ciertas invariancias sólo se cumplen en casos particulares.

En particular, es preciso tener en cuenta un punto importante: capitalistas y trabajadores toman decisiones en función de uno de los dos sistemas, el de precios de producción (como primera aproximación); [32] *si los conceptos y los análisis en términos de valores-trabajo son relevantes y significativos no es porque los agentes económicos tomen decisiones en base a ellos, sino por su capacidad explicativa, por su capacidad de poner de manifiesto ciertos hechos significativos.*

Atribuir a los agentes económicos un comportamiento como si consideraran las magnitudes del sistema en valores-trabajo, como magnitudes operacionales, en base a las que toman decisiones, da lugar a errores teóricos. Veamos seguidamente un par de ejemplos relacionados con la selección de técnicas; ambos han sido elaborados por Okishio.[33]

Para simplificar el análisis nos referiremos a un sistema productivo en el que no hay distinción entre tipos de mercancías. Sea una tecnología productiva caracterizada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{y} \qquad l^T = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$$

y supongamos que existe un procedimiento alternativo para producir i caracterizado por:

$$\begin{Bmatrix} a^*_{1k} \\ a^*_{2k} \\ \dots \\ a^*_{mk} \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones que determinan los valores trabajo y los precios de producción son, respectivamente,

$$\Lambda^T = \Lambda^T A + l^T$$

$$p^T_w = (1 + r)\,[p^T_w A + l^T]$$

32. Morishima, M., *op. cit.*, p. 240, en relación con el problema de la transformación dinámica, destaca: «Deseo llamar la atención del lector sobre el hecho de que la tasa a a la que los capitalistas reservan la plusvalía para la acumulación, hasta el momento, ha sido considerada determinada exógenamente. Se trata, sin embargo, de una hipótesis muy irreal porque en ninguna economía en la que las mercancías se intercambiasen por medio de moneda, ningún capitalista toma decisiones relativas a la acumulación en términos de plusvalía medida en tiempo de trabajo».

33. Véase Okishio, N. A., «Technical Changes and the Rate of Profit», *Kobe University Review,* 1961.

En estas condiciones λ_k es la cantidad de trabajo socialmente necesaria para producir una unidad del producto k; en consecuencia, $1/\lambda_k$ mide la productividad del trabajo, es decir, es igual a la cantidad de k que puede producirse con una unidad de trabajo.

Se demuestra que la condición para que la nueva técnica tenga una productividad mayor (o sea $1/\lambda^*_k > 1/\lambda_k$), es:

$$\sum_{i=1}^{m} a^*_{ij}\lambda_i + l^*_k < \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\lambda_i + l_k \qquad [27]$$

o sea, que los valores-trabajo constituyen un sistema de precios adecuado para seleccionar la técnica de producción que maximiza la productividad del trabajo.

Ahora bien, resulta patente que los capitalistas no evalúan las distintas técnicas con criterios de productividad, sino de rentabilidad; elegirán aquella técnica que permita aumentar el beneficio, o sea, seleccionarán la nueva técnica si:

$$\sum_{i=1}^{m} a^*_{ik}\, p_{i,w} + l^*_k < \sum_{i=1}^{m} a_{ik} p_{i,w} + l_k \qquad [28]$$

Los criterios [27] y [28] sólo coinciden cuando $r = 0$, lo cual corresponde a un caso trivial por cuanto no es compatible con la producción capitalista.

Así pues, si se prescinde de los precios de producción y se pretende razonar únicamente en términos de valores-trabajo, se llega a conclusiones erróneas por lo que se refiere a la selección de técnicas.

Esta observación tiene implicaciones sobre la denominada ley de la tendencia decreciente de la tasa de ganancia. El razonamiento de Marx es conocido: puesto que considera que la tasa de ganancia puede escribirse:

$$r = \frac{s}{c+v} = \frac{e}{k+1} \qquad [29]$$

si la tendencia histórica de k es creciente y e es tendencialmente constante, la tendencia de r es decreciente. Marx discute la influencia de las diversas causas que pueden contrastar la citada tendencia decreciente de r; de todos modos, y sea cual sea la interpretación correcta de la posición final de Marx, resulta patente que es preciso investigar qué ocurre con la discusión teórica de este punto cuando se tiene en cuenta la incidencia de la transformación.

En primer lugar, debe tenerse en cuenta —como se ha indicado ya— que la expresión de la tasa de ganancia según [29] no es correcta en el caso general; además, se debe demostrar y verificar que existe efectivamente una tendencia creciente por lo que se refiere a la composición orgánica del capital medida en términos de valor-trabajo; por último, Okishio ha demostrado que las nuevas técnicas que satisfacen el criterio capitalista de reducción del coste produce necesariamente (excepto cuando se trata de una industria no básica) un aumento de la tasa general de beneficio (a no ser que aumente suficientemente los salarios).

La controversia teórica sobre la tendencia decreciente de la tasa de beneficio debe realizarse de nuevo sobre bases correctas; la utilización de dicha tendencia como un argumento en el análisis de otros problemas —de un modo especial, el imperialismo— es un punto de partida endeble.

VII. Los precios a corto plazo

A continuación analizaremos brevemente algunas indicaciones de Marx sobre los precios a corto plazo con el fin de mostrar que su enfoque es diferente del basado en los valores-trabajo o en los precios de producción.[34]

Los precios a corto plazo es el tema de casi todo el capítulo 10 del tomo III; en dicho capítulo, Marx, después de analizar las condiciones para que los precios correspondan a los valores, subraya que: «el supuesto de que las mercancías de las diversas esferas de la producción se venden por sus valores sólo significa, naturalmente, que su valor constituye el centro de gravitación en torno al cual giran sus precios y a base del cual se compensan sus constantes alzas y bajas».[35]

Por otra parte destaca, inmediatamente, que: «tienen que darse combinaciones extraordinarias para que las mercancías producidas en las peores condiciones o en las condiciones más favorables regulen el valor comercial que constituye, a su vez, el centro de gravitación para los precios de mercado, los cuales son los mismos siempre para las mercancías de la misma clase. Si la oferta de mercancías al valor medio de la masa que oscila entre los dos extremos satisface la demanda normal, las mercancías cuyo valor individual es inferior al valor comercial realizan una plusvalía o ganancia extraordinaria, mientras que aquellas cuyo valor individual es superior al valor comercial, no puede realizar una parte de la plusvalía que en ellas se contiene».[36]

Así, pues, Marx introduce implícitamente una estructura de la oferta formada por tres grupos de productores; por otro lado, introduce los efectos derivados de la demanda.

En la discusión detallada que sigue, Marx admite que en ciertas condiciones especiales las mercancías producidas tanto en las mejores condiciones como en las peores, pueden determinar el valor de mercado según sean las

34. Marx, K., *op. cit.*, vol. III, sec. I, cap. 10.
35. *Ibid.*
36. *Ibid.*

proporciones de los distintos grupos de productores; no obstante, concluye que: «en cualquiera de estos dos casos será uno de los dos extremos el que determine el valor comercial, a pesar de que, con arreglo a la simple proporción entre las masas producidas en condiciones distintas, debiera obtenerse otro resultado».[37]

El análisis no resulta muy claro; no obstante, la discusión de la renta diferencial constituye un interesante complemento por cuanto —según Marx— la diferencia entre la renta diferencial en la agricultura y los extrabeneficios en la industria, radican en el hecho de que la primera posee una base permanente mientras que la de los segundos es transitoria.[38] Esta consideración permite utilizar en nuestro problema el enfoque basado en la renta diferencial.

De hecho, cuando Marx analiza la renta diferencial (capítulo 38) considera el caso de dos grupos de productores con costes diferentes y en su análisis resulta patente que el precio de producción regulador es el que corresponde a las condiciones peores, sin referencia alguna a las proporciones de las masas de mercancías.

Por consiguiente, parece correcto concluir que, en el enfoque de Marx, el concepto de valor medio (o de precio de producción medio) resulta útil para explicar los precios relativos de las distintas mercancías; sin embargo, cuando el problema es la determinación de los valores de mercado (o de los precios de mercado) es necesario analizar la estructura de costes y la demanda y en estas condiciones son las mercancías producidas en las peores condiciones las que juegan el papel regulador.

Como consecuencia de ello, la definición de los valores-trabajo formulada en el tomo I —y que se refiere a «condiciones normales»— debe interpretarse como *referida a condiciones homogéneas y no a condiciones promedio* (en el sentido estadístico). Centrar el análisis en un caso caracterizado por condiciones homogéneas es bastante lógico cuando el problema central es la explicación de los precios relativos de las mercancías, con el fin de explicar las relaciones de clase que soporta el mercado; *por el contrario, constituye una simplificación incorrecta cuando se trata de analizar* problemas como los extrabeneficios, la renta diferencial, los precios a corto plazo, etc.[39]

* * *

En el presente artículo se ha analizado únicamente el caso más elemental; sería necesario ampliar dicho análisis introduciendo la consideración de distintos tipos de trabajo, diversos períodos de rotación, distintas técnicas, va-

37. *Ibid.*
38. MARX, K., *Historia crítica de las teorías de la plusvalía,* Ed. Venceremos, La Habana, 1958.
39. Sería interesante analizar desde este punto de vista la controversia relativa al cálculo económico entre Kartorovicht y Novochilov, por un lado, y Strumilin y Boiarski por otro.

rios recursos no reproducibles, producción conjunta, etc. La dificultad crucial parece ser la producción conjunta.[40]

ANEXO I

Teoremas fundamentales

Sea A una matriz cuadrada, no negativa e irreductible; se cumple:

a) A posee un valor propio particular —ρ_A^*— real y positivo denominado raíz dominante;

b) ningún otro valor propio de A tiene módulo superior a $|\rho_A^*|$;

c) el vector propio —x_A^*— asociado a ρ_A^* es positivo;

d) $[I - \mu A]^{-1} \gg 0$ si y sólo si $\mu >_A \rho^*$;

e) si un elemento de A crece (decrece), ρ_A^* crece (decrece);

f) si $A \geqq B \geqq 0$, $|\rho_A^*| \geqq |\rho_B^*|$;

g) si C es una submatriz principal de A, se cumple $\rho_c < \rho_A^*$;

h) A es productiva ($Ax < x$) si y sólo si $\hat{\rho}_A^* < 1$;

i) dos matrices —P_n Q— son semejantes, por definición, si existe una matriz T tal que $TPT^{-1} = Q$; sus valores propios coinciden y sus vectores propios —x_P y x_Q— guardan la relación: $x_Q = Tx_P$.

ANEXO II

Composiciones orgánicas del capital iguales

Dada una tasa de explotación común, la condición necesaria y suficiente para que los precios de producción sean proporcionales a los valores-trabajo es que todos los sectores posean igual composición orgánica. Demostración:

Condición necesaria.

Las ecuaciones de la transformación son:[1]

$$\Lambda^T \alpha \mathscr{A} = \frac{1}{1+r} \Lambda^T \alpha$$

40. Las más interesantes contribuciones relacionadas con estos problemas son, en mi opinión, las de BRODY, A., *Prices, proportions and planning,* North Holland, Amsterdam, 1970; MORISHIMA, M., *op. cit.*, y WEIZSÄCKER, C. VON, *Steady state capital theory,* Springer Verlag, Berlín, 1971.

1. En donde:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

y si los precios proporcionales a los valores, la matriz $[\alpha]$ es igual a αI (en donde α es ahora un escalar) y sustituyendo en [30]:

$$\Lambda^T \alpha I \mathscr{A} = \frac{1}{1+r} \Lambda^T \alpha I$$

o sea:

$$\Lambda^T \mathscr{A} = \frac{1}{1+r} \Lambda^T$$

$$[\Lambda_{\mathrm{I}}^T \Lambda_{\mathrm{II}}^T] = \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega B l_{\mathrm{I}}^T & \omega B l_{\mathrm{II}}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{1+r} [\Lambda_{\mathrm{I}}^T \Lambda_{\mathrm{II}}^T]$$

es decir:

$$\{c_1 + v_1,\ c_2 + v_2, \ldots, c_m + v_m\} = \frac{1}{1+r} [\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$$

ahora bien:

$$(1 + r)\ (c_j + v_j) = \lambda_j \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, m)$$

implica:

$$r(c_j + v_j) = s_j \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, m)$$

o sea:

$$r = \frac{s_j}{c_j + v_j} = \frac{e}{k_j + 1} \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, m)$$

con lo que $k_i = k$, para todos los sectores.

Condición suficiente

Si las composiciones orgánicas del capital son idénticas ($k = s_j/v_j$) —teniendo en cuenta que la tasa de explotación es la misma para los diversos sectores— ($e = s_j/v_j$) y que $\lambda_j = c_j + v_j + s_j$ resulta:

$$\frac{s_j}{c_j + v_j} = \frac{e}{k_j + 1} = \pi \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, m)$$

$$\text{o sea:} \quad s_j = \pi\,(c_j + v_j)$$

con lo que: $c_j + v_j + s_j = (1 + \pi)\ (c_j + v_j) = \lambda_j$

Así pues, se cumple:

$$\{\Lambda_{\mathrm{I}}^T \Lambda_{\mathrm{II}}^T\} \begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega B l_{\mathrm{I}}^T & \omega B l_{\mathrm{II}}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\pi} \{\Lambda_{\mathrm{I}}^T \Lambda_{\mathrm{II}}^T\}$$

Ahora bien, dado que los precios de producción verifican:

$$\{p_{\mathrm{I}}^T\ p_{\mathrm{II}}^T\}\begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega Bl_{\mathrm{I}}^T & \omega Bl_{\mathrm{II}}^T \end{bmatrix} = \frac{1}{1+r}\{p_{\mathrm{I}}^T\ p_{\mathrm{II}}^T\}$$

resulta que $1/1+\pi$ y $1/1+r$ son los valores propios de la misma matriz, con lo que $\pi = r$ y $\{\Lambda_{\mathrm{I}}^T\ \Lambda_{\mathrm{II}}^T\}$ y $\{p_{\mathrm{I}}^T\ p_{\mathrm{II}}^T\}$ son vectores colineales, con lo que:

$$\lambda_j \cdot \alpha_j = P_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

ANEXO III

Demostración de la convergencia de la reducción a trabajo fechado

Utilizaremos el hecho de que A_{I} es una submatriz principal de $\mathscr{A}$ y siendo ambas indescomponibles, el valor propio máximo de A_{I} es inferior al de $\mathscr{A}$.

Sea:

$$\frac{1}{1+r_{A_{\mathrm{I}}}} p_{\mathrm{I}}^T = p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{I}} = \rho_{A_{\mathrm{I}}}^* p_{\mathrm{I}}^T$$

y:

$$\frac{1}{1+r_{\mathscr{A}}^*} p^T = p^T \mathscr{A} = \rho_{\mathscr{A}}^* p^T$$

cumpliéndose: $r_{A_{\mathrm{I}}}^* > r_{\mathscr{A}}^*$

La serie $$[I - M]^{-1} = I + M + M^2 + \ldots + M^n + \ldots$$

converge si todos los valores propios de M tienen módulo inferior a la unidad; en consecuencia $[I-(1+r)A_{\mathrm{I}}]^{-1}$ convergirá si todos los valores propios de $A_{\mathrm{I}}(1+r)$ son de módulo inferior a la unidad; llamando $1/1+r_{A_{\mathrm{I}}}^*$ al valor propio máximo de A_{I} el correspondiente de $(1+r)A_{\mathrm{I}}$ es $(1+r)/(1+r_{A_{\mathrm{I}}}^*)$ y dado que $r_{A_{\mathrm{I}}}^* \geq r$ resulta $(1+r)/$ $/(1+r_{A_{\mathrm{I}}}^*) < 1$; por otra parte, el vector propio máximo de una matriz no negativa indescomponible tiene módulo estrictamente superior a las de los demás valores propios; en consecuencia, la serie:

$$[I-(1+r)A_{\mathrm{I}}]^{-1} = I + (1+r)A_{\mathrm{I}} + (1+r)^2 A_{\mathrm{I}}^2 + \ldots$$

converge.

ANEXO IV

La mercancía compuesta, la senda de crecimiento equilibrado y la normalización

El sistema de ecuaciones de la transformación viene dado por [17]:

$$\alpha^T K = \frac{1}{1+r}\,\alpha^T$$

y si buscamos el vector producción que tendrá igual composición que los inputs necesarios resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \dots + c_{1m}b_m = \beta b_1\lambda_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \dots + c_{nm}b_m = \beta b_n\lambda_n \\ v_{n+1,1}b_1 + \dots\dots\dots + v_{n+1,m}b_m = \beta b_{n+1}\lambda_{n+1} \\ v_{m1}b_1 + \dots\dots\dots\dots + v_{mm}b_m = \beta b_m\lambda_m \end{array}\right. \qquad [1]$$

ahora bien dado que:

$$c_{ij} = a_{ij}\lambda_i$$
$$v_{ij} = \omega b_i\lambda_i l_j$$
$$s_{ij} = ev_{ij}$$

[31] resulta igual a:

$$\begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & A_{\mathrm{II}} \\ \omega B l_{\mathrm{I}}^T & \omega B l_{\mathrm{II}}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix} = \beta \begin{Bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix} \qquad [2]$$

o sea que $\{b_{\mathrm{I}}^T b_{\mathrm{II}}^T\}$ es el vector propio a la derecha de la matriz $\mathscr{A}$ y puesto que los valores propios son los mismos a la derecha y a la izquierda: $\beta = 1/1 + r$; el vector $\{b_{\mathrm{I}}^T, b_{\mathrm{II}}^T\}$ corresponde, pues, a la composición de la producción propia de la senda de crecimiento equilibrado.

Por otra, si multiplicamos cada ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} + \sum_{i=n+1}^{m} (1+e)v_{ij} = \lambda_j$$

por la b_j correspondiente, sumamos respecto a j y despejamos e resulta:

$$e = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_j(\lambda_j - \sum_{i=1}^{n} c_{ij} - \sum_{i=n+1}^{m} v_{ij})}{\sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij})} = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=n+1}^{m} s_{ij})}{\sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij})}$$

de donde se desprende que el sistema [2] se halla caracterizado por la misma tasa de explotación que el sistema inicial.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\beta = 1/1 + r$, si sumamos miembro a miembro en [1] y despejamos r resulta:

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j - \sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} + \sum_{i=n+1}^{m} v_{ij})}{\sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} + \sum_{i=n+1}^{m} v_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=n+1}^{m} s_{ij}) / \sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij})}{1 + \sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}) / \sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=n+1}^{m} v_{ij})} = \frac{e}{1 + k^*}$$

de donde resulta que la tasa de ganancia del sistema original puede expresarse en función de la tasa de explotación común, y de la composición orgánica media —k^*— del sistema.

ANEXO V

Teorema fundamental

La condición necesaria y suficiente para la existencia de precios positivos en todas las industrias de modo que cada una de ellas tenga beneficios positivos, es decir, para que:

$$\begin{cases} p_{\mathrm{I}}^T > p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{I}} + l_{\mathrm{I}}\, w \\ p_{\mathrm{II}}^T > p_{\mathrm{I}}^T A_{\mathrm{II}} + l_{\mathrm{II}} w \end{cases}$$

es la existencia de una tasa de explotación positiva.

a) Necesidad:

En la sección III se ha demostrado:

$$p_{\mathrm{I},w}^T > \Lambda_{\mathrm{I}}^T$$

$$p_{\mathrm{II},w}^T > \Lambda_{\mathrm{II}}^T$$

y por definición, se cumple

$$w = \omega p_{\mathrm{II}}^T B$$

o bien

$$1 = \omega p_{\mathrm{II},w}^T B$$

por consiguiente:

$$1 > \omega \Lambda_{\mathrm{II}}^T B \qquad [1]$$

Asimismo, por definición:

$$(1 + e)\, \omega \Lambda_{\mathrm{II}}^T B = 1 \qquad [2]$$

y [1] y [2] implican: $e > 0$

b) **Suficiencia:**

Se cumple:

$$\{\Lambda_{I}^{T}\Lambda_{II}^{T}\} = \{\Lambda_{I}^{T}\Lambda_{II}^{T}\}\begin{bmatrix} A_{I} & A_{II} \\ (1+e)\,\omega Bl_{I} & (1+e)\,\omega Bl_{II} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\Lambda^{T} = \Lambda^{T}N$$

así como:

$$\frac{1}{1+r}\{p_{I}^{T}\,p_{II}^{T}\} = \{p_{I}^{T}\,p_{II}^{T}\}\begin{bmatrix} A_{I} & A_{II} \\ \omega Bl_{I}^{T} & \omega Bl_{II}^{T} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\frac{1}{1+r}p^{T} = p^{T}\mathcal{A}$$

Si $e > 0$, $\rho_{A}^{*} < \rho_{N}^{*}$ y, por consiguiente, $r > 0$, es decir, la matriz $\mathcal{A}$ es productiva y, por tanto, puede escribirse:

$$p^{T} > p^{T}\mathcal{A}$$

o sea

$$\begin{cases} p_{I}^{T} > p_{I}^{T}A_{I} + wl_{I} \\ p_{II}^{T} > p_{I}^{T}A_{II} + wl_{II} \end{cases}$$

Universidad Autónoma de Barcelona.
Facultad de Ciencias Económicas.

BIBLIOGRAFÍA

1. BORKIEWICZ, L. VON, «On the correction of Marx's fundamental Theoretical Construction on the third volume of capital», *Jahrbuch Nationalökonomie Statistik,* 1907, 34, 3, pp. 370-385.
2. BRODY, A., *Prices, proportions and planning,* North Holland, Amsterdam, 1970.
3. CARANDINI, G., *Lavoro e capitale nella teoria di Marx,* Marsilio ed., Padua, 1971.
4 DEBREU, G., y HERSTEIN, I. N., «Nonnegative Square Matrix», *Econometrica, 21,* 597-607, 1953.
5. DOBB, M., *Economía política y capitalismo,* FCE, México, 1966.
6. DOBB, M., «A note on the transformation problem», en *On economic theory and socialism,* Routledge and Paul, 1955, Ch. 1.ª.
7. EMMANUEL, *L'echange inégal,* Maspéro, París, 1969.
8. GRANTMACHER, F. R., *Théorie des matrices,* París, Dunod, 1966.
9. JOHANSEN, L., «Labour theory of value and marginal utilities», *Economics of planning,* vol. 3, 1963, pp. 89-103.
10. MARX, K., *El Capital,* FCE, México.
11. MARX, K., *Historia crítica de las teorías de la plusvalía,* Ed. Venceremos, La Habana, 1958.
12. MEDIO, A., «Profits and surplus valus: Appearance and Reality in capitalist production», *A critique of economic theory.* Editores: E. K. HUNT y J. SCHWARTZ, Penguin Books, 1972.

13. MEEK, R., «Some notes on the transformation problem», *Economic Journal,* marzo 1956, 66, pp. 94-107.
14. MORISHIMA, M., *Marx's economics,* Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
15. MORISHIMA, M., y SETON, F., «Aggregation in Leontief matrices and the labour theory of value», *Econometrica,* abril 1961, 29, pp. 203-220.
16. OKISHIO, N. A., «Technical Changes and the Rate of Profit», *Kobe University Review,* 1961.
17. OKISHIO, N. A., «Mathematical Note on Marxian Theorems», *Weltwirtschaftliches Archiv,* 1963, pp. 287-299.
18. ROBINSON, J., *Introducción a la economía marxista,* Siglo XXI, México, 1968.
19. SAMUELSON, P. A., «Wages and Interest: A modern dissection of marxian economic models», *American economic review,* vol. XLVII, diciembre 1957.
20. SAMUELSON, P. A., «Understanding the Marxian Notion of Explotation: A summary of the so Colled Transformation Problem Between values and competition Prices», *Journal of economic literatur,* 1971.
21. SETON, F., «The transformation problem», *Review of economic studies,* junio 1957, 25, pp. 149-160.
22. SRAFFA, P., *Producción de mercancías por medio de mercancías,* Oikos, Vilasar, 1965.
23. SWEEZY, P., *Teoría del desarrollo capitalista,* FCE, 1963.
24. WEIZSÄCKER, C. VON, *Steady state capital theory,* Springer Verlag, Berlín, 1971.