J. HORTALÁ ARAU

Una ampliación del análisis input-output y sus derivaciones en la programación del desarrollo *

Si bien el análisis input-output puede remontarse a 1755, cuando se publicó por primera vez el *Essai sur la Nature du Commerce en Général* de Cantillon, o a 1758 al hacer Quesnay uso implícito de esta técnica en el diseño de su famoso «Tableau»,[1] no fue hasta 1941, fecha de publicación de la *Estructura de la Economía Americana* de Leontief, en que dicho análisis se abrió camino en la teoría económica. El interés de esta técnica estriba en hacer posible el análisis de la interdependencia estructural de los varios sectores de la economía, usando para ello tablas de doble entrada.[2]

Es por esta razón que el input-output resulta particularmente útil para el estudio de gran número de problemas empíricos, en cuyo tratamiento son inadecuados tanto el análisis de la renta, como el análisis del equilibrio parcial. En contraste con el análisis de Marshall, el input-output se mueve alrededor de la idea del equilibrio general walrasiano, aunque el análisis del equilibrio general iniciado por este economista de Lausanne se simplifica en el nuevo enfoque, en forma y en contenido, para hacerlo más operativo.[3]

* Este artículo corresponde a una versión abreviada del segundo capítulo —escrito en 1965— de *Capital Needs for a Developing Economy,* trabajo con el cual el autor obtuvo el título de doctor por «The London School of Economics and Political Science». Debe asimismo indicarse que la intención del presente artículo no es otra que ofrecer exclusivamente la técnica especificada en dicha tesis doctoral, sin entrar en la discusión de su aplicación al caso español como en la misma se hace. La traducción al castellano ha sido realizada por Luis Argemí.

1. Ver A. Phillips, «The Tableau Economique as a Simple Leontief Model», *Quarterly Journal of Economics,* septiembre, 1955, pp. 137-144.
2. Ver L. Hurwicz, «Input-Output Analysis and Economic Structure», *American Economic Review,* septiembre, 1955, pp. 626-636.
3. Ver J. Balderston, «Models of General Economic Equilibrium», en *Economic Activity Analysis,* ed. por O. Morgenstern (Nueva York, 1954); R. Kuenne, «Walras, Leontief and the interdependence of Economic Activities», *Quarterly Journal of Economics,* agosto, 1954, pp. 323-335; W. Leontief, «Input-Output Analysis and the General Equilibrium Theory», en *The Structural Interdependence of the Economy,* ed. por T. Barna (Proceedings of a International Conference on Input-Output Analysis, Varenne, Italia, 1954).

I. Una referencia al modelo convencional

Como en todos los modelos económicos, el sistema input-output se basa en un conjunto de supuestos y definiciones. Los primeros, en este caso, son característicos de la aportación de Leontief; [4] las segundas, de tipo contable, se formulan en términos matemáticos. Deben notarse, no obstante, algunas distinciones, en particular la existente entre los modelos input-output «abiertos» y «cerrados», debida al tratamiento de los outputs en intermedios y finales y, consiguientemente, los inputs en primarios e intermedios.[5]

Esta división de inputs y outputs en los subgrupos ahora mencionados, permite clasificar las transacciones bajo cuatro encabezamientos que corresponden a los cuatro cuadrantes de la *tabla* input-output.[6] Los símbolos convencionales utilizados en la construcción de ésta son:

S_i : oferta total de la mercancía i.
X_i : producción total de la mercancía i.
W_i : uso intermedio total de la mercancía i $\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)$
Y_i : demanda final de la mercancía i.
X_{ij} : cantidad de la mercancía i usada en el sector j.
M_i : importaciones de la mercancía i.
U_j : uso total por el sector j de los inputs adquiridos en otras industrias $\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\right)$
V_j : uso total de inputs primarios en el sector j.

Mediante la utilización de estas definiciones se obtienen las dos ecuaciones de equilibrio siguientes:

1) Para cada mercancía, la oferta total es igual a la demanda total

$$\text{Oferta: } X_i + M_i \equiv S_i$$
$$=$$
$$\text{Demanda: } \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i$$

4. Ver W. Leontief, *The Structure of the American Economy, 1919-1939. An Empirical Application of Equilibrium Analysis* (Oxford University Press, Nueva York, 1953), parte II, especialmente pp. 33-41. Véase, asimismo, lo que se especifica en la nota 7.

5. Esta distinción, como observan Chenery y Clark, recuerda a la que se encuentra en el análisis keynesiano entre inversión «inducida» e inversión «autónoma». En ambos modelos la distinción no está siempre clara, y los casos límite deben determinarse con la ayuda tanto de consideraciones teóricas como de consideraciones empíricas. Véase, al respecto, H. B. Chenery y P. G. Clark, *Interindustry Economics* (J. Wiley, Nueva York, 1959), pp. 14-21.

6. El cuadrante I registra, en los agregados correspondientes, el empleo final de las mercancías y servicios producidos. El cuadrante II refleja las relaciones interindustriales. El cuadrante III comprende el uso de inputs «primarios» no producidos en el sistema. El cuadrante IV contiene el input directo de factores primarios en el consumo final.

entonces

$$X_i + M_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i = W_i + Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [1]$$

2) La producción total de cada sector es igual al valor de los inputs adquiridos en los demás sectores, más el valor añadido de este sector

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j = U_j + V_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

De acuerdo con estas definiciones y teniendo en cuenta los supuestos del modelo input-output [7] es posible escribir una ecuación de demanda (X_{ij}) de cada industria (j) para cada mercancía (i), como función de su propio nivel de output (X_j). Por razones estadísticas y por conveniencia de cálculo, se supone que estas «funciones input» son lineales [8]

$$X_{ij} = \overline{K}_{ij} + a_{ij}X_j \qquad [2]$$

El parámetro a_{ij} se llama «coeficiente técnico de producción». La constante $\overline{K}_{ij}$ incluye todos los elementos de coste fijo, de tal forma que cuando sea igual a cero, la correspondiente función será [9]

$$X_{ij} = a_{ij}X_j \qquad [3]$$

El modelo original de Leontief se obtiene combinando las relaciones conta-

7. Primero, deben poderse obtener los «sectores productivos» de tal manera que se pueda suponer que existe una función de producción para cada uno. Este supuesto se hace tanto en los modelos de equilibrio general, como en los análisis de equilibrio parcial marshalliano. En aplicaciones empíricas, supone la identificación de todas las actividades productivas en algún sector específico. Por otro lado, el modelo de Leontief está caracterizado por unos supuestos especiales: 1) no hay producción conjunta; 2) un producto determinado lo es sólo para un sector; 3) la cantidad de cada input empleado en la producción por cualquier sector está enteramente determinada por el nivel de output del mismo; 4) cada una de las actividades productivas que tienen un output dado, constituye una «industria», y 5) no se consideran las relaciones entre unidades productivas individuales, sino las relaciones entre grupos de unidades productivas o industrias.

8. Función input equivale, bajo los supuestos del modelo input-output, a una función de producción sin sustituibilidad.

9. La ecuación [3], como «función de producción» básica, supone relaciones lineales y proporcionales. Gráficamente, significa que tal función es lineal y parte del origen de coordenadas. Las comprobaciones empíricas han demostrado que podrían ser mejores otro tipo de funciones analíticas. Por ejemplo, funciones de producción no-homogéneas o cuadráticas. GHOSH, «A Note on Leontief Models with Non-Homogeneous Productions Functions» (*Metroeconomica*, abril, 1960), hace una crítica válida de los supuestos de Leontief y, gracias a los estudios prácticos basados en el análisis de la varianza, muestra la correspondiente desviación de varios tipos de trabajos. Yo mismo publiqué un estudio en este campo, bajo la supervisión del doctor Bergstron, en la *Revista de Economía Política* (núm. 34, 1963), con el título «El input-output como técnica de proyección».

bles expresadas por la ecuación [1], para cada mercancía, y las funciones input de la ecuación [3].[10] Resulta así

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = Y_i - M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [4]$$

con lo que se obtiene un sistema de n ecuaciones en el cual existen n incógnitas, que corresponden a los niveles de producción (X_i); n^2 parámetro (a_{ij}), relativos a las funciones input, y dos conjuntos de n variables autónomas (Y_i y M_i).[11]

II. Una tabla input-output bajo el enfoque Keynes-Clark-Ricardo

La estructura tradicional del sistema input-output, tal como acaba someramente de exponerse, puede hacerse más operativa que la convencional. Dicha mayor operatividad la derivamos de un tipo especial de estructura que denominamos Keynes-Clark-Ricardo.[12]

La evocación a Ricardo se hace al poner énfasis en la distribución de la renta y en el papel jugado por los factores productivos; de Colin Clark se

10. Debe notarse que el comercio internacional se considera en relación con sus propios agregados, aunque en la forma más simple de modelos de este tipo se determina exógenamente. Ahora bien, Chenery y Clark (*op. cit.*, pp. 23-24) estiman que cuando el tráfico exterior es importante, conviene tratar la importación como variable dependiente. Suponen, como primera aproximación, que el nivel de importación (M_i) es función de la oferta total de la mercancía (S_i) y, por tanto, relacionada con el nivel de producción interior (X_i). Estableciendo linealidad, se tiene

$$M_i = \bar{M}_i + m_iX_i$$

en donde m_i es el coeficiente de importación y $\bar{M}_i$ representa los elementos fijos. De ahí que sustituyendo M_i en la ecuación [4] se tiene el correspondiente sistema de ecuaciones.

11. En relación con dicho sistema de ecuaciones conviene mencionar dos salvedades. En primer lugar, [4] puede escribirse de manera más general, incluyendo los elementos del coste fijo tal como se hace en [2]. En este sentido, si en la ecuación resultante se incluyen las consideraciones indicadas en la nota anterior relativas al comercio internacional, se tiene un conjunto de relaciones input-output de carácter mucho más general que la expresada por [4]. En segundo lugar, resulta interesante establecer la comparación de este análisis con el propio de los agregados de la renta nacional. Véase, así, H. L. Liebling, «Interindustry Economics and National Income Theory», en *Input Output Analysis: An Appraisal* (Princeton, 1955), pp. 291-294, y R. Stone, «Input-Output and the Social Accounts», en *The Structural Interdependence of the Economy*, ed. por T. Barna, *op. cit.* Asimismo conviene señalar que este sistema de ecuaciones usualmente se expresa de forma matricial:

$$[1 - A]X = \bar{Y}$$

en donde

$$A = [a_{ij}]_{(n \times n)} \quad ; \quad X = X_{i\ (i=1,\ldots,n)} \quad , \text{e} \quad \bar{Y} = Y_i - M_{i\ (i=1,\ldots,n)}$$

12. Las primeras indicaciones al respecto me las sugirió, con su habitual persuasión, mi maestro, el profesor J. R. Lasuén, guiándose posteriormente los profesores Phillips y Sargan de la L.S.E.

toma el sistema de clasificación de la actividad económica en primaria, secundaria y terciaria; y, finalmente, de J. M. Keynes se adopta su enfoque macroeconómico de algunos de los principales agregados como Consumo, Inversión y Balanza Comercial.[13] Con ello además, se quiere, por un lado, minimizar el esfuerzo requerido para cuantificar, y por otro, facilitar la interpretación de los resultados, con objeto de obtener un cuadro de la dependencia sectorial satisfactorio en base a su claridad y consistencia.

De acuerdo, pues, con todo ello, la correspondiente ordenación se hace definiendo el primer cuadrante como keynesiano, el segundo clarkiano y el tercero ricardiano,[14] con lo que, en la tabla input-output resultante los símbolos representan:

w_{ij} : la cantidad de la mercancía i usada en el sector productivo j.[15]
W_i : output intermedio total de la mercancía i.
W_j^0 : uso total por el sector productivo j de los inputs adquiridos en otras industrias.[16]
W : producción intermedia total.
y_{ij} : cantidad de la mercancía i usada en el sector final j.
Y_i : demanda doméstica total de la mercancía i.
Y_j^0 : uso doméstico de las mercancías adquiridas en otros sectores por el sector final j.
Y : demanda doméstica final.
v_{ij} : cantidad del factor primario i usado en el sector productivo j.
V_i : uso doméstico sectorial del factor primario i.
V_j^0 : uso doméstico de inputs primarios por el sector productivo j.

13. La conexión definida entre las variables que se han de usar y los inspiradores del enfoque se establecen de la siguiente manera.

Sectores Ricardianos	Sectores de Clark	Sectores Keynesianos
Tierra Capital Trabajo	Agricultura Industria Servicios	Exportaciones-Importaciones Consumo Inversión

Ver, en relación con ello, CHENERY y CLARK, *op. cit.*, cap. II; COLIN CLARK, *The Conditions of Economic Progress* (3.ª ed., Londres, 1957); y, M. H. HSING, «The Construction of Social Accounting Models», *Weltwirtschaftliches Archiv*, núm. 1, 1959, pp. 15-31.

14. Es posible establecer las siguientes estructuras input-output, de acuerdo con el enfoque propuesto:

	C	K
C	II	I
R	III	IV

	C	R
C	II	I
R	III	IV

	C	K
C	II	I
K	III	IV

	C	R
C	II	I
K	III	IV

K: Keynes
C: Clark
R: Ricardo

Como se ha indicado, la estructura que se desarrolla en este trabajo es la primera, aunque según la intención del análisis, cualquiera de las cuatro puede resultar mayormente relevante.

15. Esta notación corresponde a la X_{ij} en el análisis input-output tradicional.

16. Esta notación corresponde a la U_j de la definición anterior.

V : uso doméstico de inputs primarios por los sectores productivos.
f_{ij} : cantidad del factor primario i usado en el sector final j.
F_i : uso doméstico final del factor primario i.
F_j^0 : uso doméstico de inputs primarios por el sector final j.
F : uso doméstico de inputs primarios por los sectores finales.
X_i : demanda disponible del sector i.
X_j^0 : oferta disponible del sector productivo j.
X : demanda disponible = oferta disponible.
N_i : uso doméstico total del input primario i.
N_j^0 : uso doméstico total del sector final j.
N : demanda doméstica total = uso total doméstico de inputs primarios.
$H = X + N$.

	Agricultura	Industria	Servicios	Output Intermedio Total	Balanza de Comercio Exterior	Consumo	Inversión	Demanda final doméstica	Demanda total disponible
Agricultura	w_{11}	w_{12}	w_{13}	W_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	Y_1	X_1
Industria	w_{21}	w_{22}	w_{23}	W_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	Y_2	X_2
Servicios	w_{31}	w_{32}	w_{33}	W_3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	Y_3	X_3
Input Intermedio Total	W_1^0	W_2^0	W_3^0	W	Y_1^0	Y_2^0	Y_3^0	Y	X
Tierra	v_{11}	v_{12}	v_{13}	V_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	F_1	N_1
Capital	v_{21}	v_{22}	v_{23}	V_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	F_2	N_2
Trabajo	v_{31}	v_{32}	v_{33}	V_3	f_{31}	f_{32}	f_{33}	F_3	N_3
Uso de Inputs Primarios	V_1^0	V_2^0	V_3^0	V	F_1^0	F_2^0	F_3^0	F	N
Oferta Disponible Total	X_1^0	X_2^0	X_3^0	X	N_1^0	N_2^0	N_3^0	N	H

En relación con esta construcción debe señalarse que: 1) las matrices representativas de los cuadrantes de esta tabla input-output son cuadradas, para facilitar simplificaciones tanto en el análisis como en los cómputos, y 2) la agregación se hace tanto horizontalmente como verticalmente, o sea, se tiene en cuenta al agregar tanto el origen, como los destinos de las actividades económicas.[17]

III. Los elementos de la tabla «K-C-R»

La definición y análisis de los elementos constituyentes de la tabla ahora elaborada es la siguiente:

Elementos	Filas	Columnas
Intermedios	$W_i = \sum_{j=1}^{3} w_{ij}$	$W_j^0 = \sum_{i=1}^{3} w_{ij}$
	$Y_i = \sum_{j=1}^{3} y_{ij}$	$Y_i^0 = \sum_{i=1}^{3} y_{ij}$
	$V_i = \sum_{j=1}^{3} v_{ij}$	$V_j^0 = \sum_{i=1}^{3} v_{ij}$
	$F_i = \sum_{j=1}^{3} f_{ij}$	$F_j^0 = \sum_{i=1}^{3} f_{ij}$
Finales	$W = \sum_{j=1}^{3} W_j^0$	$W = \sum_{i=1}^{3} W_i$
	$Y = \sum_{j=1}^{3} Y_j^0$	$Y = \sum_{i=1}^{3} Y_i$
	$X = \sum_{j=1}^{3} X_j^0$	$X = \sum_{i=1}^{3} X_i$
	$V = \sum_{j=1}^{3} V_j^0$	$V = \sum_{i=1}^{3} V_i$
	$F = \sum_{j=1}^{3} F_j^0$	$F = \sum_{i=1}^{3} F_i$
	$N = \sum_{j=1}^{3} N_j^0$	$N = \sum_{i=1}^{3} N_i$

En cuanto a la definición de los vectores, según se consideren horizontal o verticalmente, se tiene: [18]

17. Ver W. E. Evans, «Input-Output Computations», en *The Structural Interdependence of the Economy, op. cit.*, pp. 51-102; y, del mismo autor, «Input-Output Analysis and Economic Theory», *Fourth Conference of the International Association Research in Income and Wealth,* Dinamarca, 1955.

18. Adviértase que los vectores se definen vertical u horizontalmente, según cómo se consideren sus elementos.

Horizontales

$X^0 = X_j^0 \quad (j=1,\ldots,3)$ $\qquad W^0 = W_j^0 \quad (j=1,\ldots,3)$ $\qquad Y^0 = Y_j^0 \quad (j=1,\ldots,3)$

$V^0 = V_j^0 \quad (j=1,\ldots,3)$ $\qquad N^0 = N_j^0 \quad (j=1,\ldots,3)$ $\qquad F^0 = F_j^0 \quad (j=1,\ldots,3)$

Verticales

$X = X_i \quad (i=1,\ldots,3)$ $\qquad W = W_i \quad (i=1,\ldots,3)$ $\qquad Y = Y_i \quad (i=1,\ldots,3)$

$V = V_i \quad (i=1,\ldots,3)$ $\qquad N = N_i \quad (i=1,\ldots,3)$ $\qquad F = F_i \quad (i=1,\ldots,3)$

Debe tenerse en cuenta que, en estas definiciones, los vectores verticales no son iguales a los horizontales traspuestos, excepto para X en que, dadas las formas particulares de las relaciones input-output, $X_i \equiv X_i^0$.

Atendiendo asimismo a la distinción horizontal-vertical, la definición de las matrices resultante es: [19]

Relaciones	Cuadrantes	Matrices	Definiciones	Orden
Horizontales				
	I	$[\alpha]$	$\alpha_{ij} = \frac{y_{ij}}{N_j^0}$	3×3
	II	$[\beta]$	$\beta_{ij} = \frac{w_{ij}}{X_j^0}$	3×3
	III	$[\gamma]$	$\gamma_{ij} = \frac{v_{ij}}{X_j^0}$	3×3
	IV	$[\varepsilon]$	$\varepsilon_{ij} = \frac{f_{ij}}{N_j^0}$	3×3
Verticales				
	I	$[\eta]$	$\eta_{ij} = \frac{y_{ij}}{X_i}$	3×3
	II [20]	—	— —	—
	III	$[\mu]$	$\mu_{ij} = \frac{v_{ij}}{N_i}$	3×3
	IV	$[\sigma]$	$\sigma_{ij} = \frac{f_{ij}}{N_i}$	3×3

19. Todas las matrices se representan por letras griegas, al objeto de distinguirlas de las del análisis tradicional. Nótese, no obstante, que existe correspondencia entre la matriz $[A]$ del input-output tradicional, y la matriz $[\beta]$ de nuestro enfoque.

20. Podría introducirse aquí otra matriz relevante. Esta matriz, $[\lambda]$, vendría determinada

Se tienen, pues, siete matrices relevantes, significándose que: 1) todos los elementos de las mismas se definen en términos de X o N; 2) todas las matrices pueden trasponerse e invertirse, y, 3) las matrices definidas verticalmente no son las matrices horizontales traspuestas, ya que, como se ha visto, es diferente la definición de las matrices verticales de las horizontales.

IV. Relaciones de equilibrio

Con base en los anteriores desarrollos se pueden definir ahora las relaciones de carácter fundamental: contables y notacionales [21]

Horizontales	*Verticales*
$X^0 = W^0 + V^0$	$X = W + Y$
$N^0 = Y^0 + F^0$	$N = V + F$

en que, en ambos conjuntos, $Y = V$

Relaciones	Cuadrantes	Relación notacional		
		Principal	Indirecta	Inversa
Horizontales	I	$Y = [\alpha]N^0$		
	II	$W = [\beta]X^0$	$Y = [1 - \beta]X^0$	$X^0 = [1 - \beta]^{-1}Y$
	III	$V = [\gamma]X^0$		
	IV	$F = [\varepsilon]N^0$		
Verticales	I	$Y^0 = X[\eta]$		
	II [22]		$V^0 = [\beta^*]X$	$X = [\beta^*]^{-1}V^0$
	III	$V^0 = N[\mu]$		
	IV	$F^0 = N[\sigma]$		

---

por los siguientes elementos:

$$\lambda_{ij} = \frac{w_{ij}}{X_j}$$

Sin embargo, el uso de la matriz $[\lambda]$ implicaría una inconsistencia en relación con la matriz $[\beta]$ a causa de que $X_i = X_j$. Ciertamente,

$$\frac{\beta_{ij}}{\lambda_{ij}} = \frac{X_i}{X_j}$$

y esto sería posible solamente si todas las X_i cambiasen en la misma proporción. De hecho, esto no sucede.

21. Debe hacerse notar en este punto que, en los desarrollos subsiguientes, una relación notacional debe entenderse de manera que implique que dos vectores están conectados por una matriz.

22. Atendiendo a la nota 20, sólo se puede trazar una relación consistente entre V y X, me-

En el primer conjunto de relaciones es importante tener en cuenta que puede establecerse una conexión definida entre ellas y los agregados de la renta nacional. Así,

Renta Nacional = Consumo + Inversión + (Exportación — Importación)

y, por tanto,

$$N = N_1^0 + N_2^0 + N_3^0$$

en donde

N_1^0 = Exportación — Importación
N_2^0 = Consumo + Impuestos Indirectos
N_3^0 = Inversión + Amortizaciones

De aquí que el Producto Nacional Bruto, a precios de mercado, venga dado en nuestro sistema por

$$\sum_{j=1}^{3} N_j^0$$

aunque, de acuerdo con el contenido del cuadrante IV de nuestra tabla input-output, el PNB se puede obtener asimismo por un procedimiento alternativo, dado que

N_1 = renta de la tierra
N_2 = intereses y beneficios
N_3 = salarios

---

diante la matriz [β]. Para obtener, no obstante, la renumeración de los factores, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{3} v_{ij} + \sum_{i=1}^{3} w_{ij} = X_j$$

o

$$\sum_{i=1}^{3} v_{ij} = X_j - \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij} X_j = (1 - \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij}) X_j$$

Así, sólo se precisa computar $(1 - \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij})$ y apricarlo a X_j. De esta manera podemos definir la matriz [β^*] como

$$[\beta^*] = \begin{bmatrix} 1 - \Sigma\beta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \Sigma\beta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \Sigma\beta_{ij} \end{bmatrix}$$

y usarla para relacionar X y V. Tenemos, así $V^0 = [\beta^*]\ X$ o $X = [\beta^*]^{-1}\ V^0$, tal como hemos escrito en el texto.

y, por tanto, la suma, N, de estos tres agregados constituye el Producto Nacional Bruto, ya que la amortización y los impuestos indirectos están implícitamente incluidos (PNB a través de la retribución de los factores).

V. Algunas relaciones entre agregados

El conjunto de relaciones que se ha obtenido permite, por tanto, una mayor utilización de los cuadrantes de una tabla input-output.[23] Como ejemplificación se tiene que, mediante el empleo del conjunto de matrices relevantes antes definidas, pueden establecerse algunas relaciones entre los agregados más significativos que ofrezcan interés desde un punto de vista analítico. Así, considerando que los agregados que deben determinarse son las variables dependientes del sistema y que los agregados predeterminados son las variables independientes, las matrices correspondientes a la estructura input-output que se considera, convenientemente cuantificadas, cobran el papel de parámetros del sistema. De este modo se obtendrán distintos parámetros para distintas estructuras input-output, y de aquí que las relaciones entre los agregados sean también distintas. Entonces, de los agregados que aparecen en la tabla input-output sólo algunos de ellos deberán determinarse para la obtención de la totalidad, siempre y cuando se atienda a las definiciones contables establecidas y se introduzcan ciertos grados de libertad para los comúnmente considerados como autónomos. En la ejemplificación que se considera se tiene, en consecuencia, el siguiente sistema de relaciones:

$$\begin{aligned} N^0 &= \text{determinado exógenamente}^{24} \\ Y &= [\alpha]N^0 \\ X &= [1-\beta]^{-1}Y \\ V &= [\gamma]X^{25} \\ V^0 &= [\beta^*]X \\ N &= V^0[\mu] \\ F^0 &= N[\sigma] \end{aligned} \qquad [5]$$

23. Ver P. N. Rasmussen, *Studies in Inter-sectoral Relations,* Amsterdam, 1956, cap. III.

24. La cuantificación de estas magnitudes dependerá de los determinantes básicos de cada economía, o de las directrices señaladas en la correspondiente planificación.

25. El análisis del uso de los factores primarios conduce a la teoría de la determinación del precio en un sistema input-output. Ver, Chenery-Clark, *op. cit.*, cap. III.

VI. Conclusión

El sistema así obtenido es de interés para analizar determinados problemas del desarrollo económico.[26] Supóngase que se pone en marcha un plan de desarrollo y que existe la posibilidad de cuantificar cierto número de elementos básicos: las variables exógenas y los propios de las matrices del sistema input-output descrito más arriba. Bajo estos supuestos, el sistema [5] permitirá encontrar el valor de los agregados más significativos. A estos agregados les llamaremos «valores input-output planeados». Por otro lado, también [5] puede usarse con la intención de predecir las tendencias de las variables básicas si no existiese un plan de desarrollo. En este caso, se determinará el valor de los agregados significativos, a los que llamamos «valores input-output no planeados». Si comparamos ambos conjuntos de valores podrá hablarse de un plan «pesimista» u «optimista», según que los valores planeados estén por debajo o por encima de los no planeados; o sea, según que los valores obtenidos cuando existe un plan de desarrollo sean mayores o más pequeños que los obtenidos sin la puesta en marcha de tal plan, pudiéndose así enjuiciar su «eficacia».*

Con la ayuda, pues, del sistema de relaciones especificado en [5] se puede evaluar comparativamente un plan de desarrollo. Además, con esta ampliación del modelo input-output tradicional pueden obtenerse aplicaciones a análisis no tan generales, aunque no por ello menos sugestivos, como el estudio de la relación entre recursos productivos y demanda final. En orden a los razonamientos hasta aquí expuestos, este estudio comporta el conocimiento de Y en su conexión con V, por un lado, y, por otro, el de V respecto de Y.

Atendiendo a la primera conexión, resulta que la igualdad $Y = V$, lo es entre cantidades globales, lo que no implica la de sus componentes. De hecho, lo que precisamente interesa analizar es la variación de estos componentes con objeto de saber: 1) cuáles son las repercusiones de su variación sobre el agregado total; 2) cuál es el efecto del cambio de un componente sobre los otros componentes, y, 3) el efecto de los cambios de los componentes de un agregado sobre los del otro. No obstante, para establecer estas relaciones se requiere el conocimiento de una estructura productiva dada, por lo que debe introducirse específicamente tal estructura; es decir, W, aunque debe hacerse en relación a la demanda total y no sólo atendiendo a la demanda intermedia. Con ello se tendría que, para relacionar Y con V, debería primeramente relacionarse V con W y luego, mediante esta última relación, V con Y. Sin em-

26. Para ver la relevancia del input-output en el análisis de problemas de desarrollo económico, ver particularmente CHENERY, «Interindustry Research in Economic Development», *American Economic Review*, mayo 1960, núm. 2, pp. 649-653.

* Debe advertirse nuevamente que estas digresiones se hacen atendiendo específicamente los objetivos perseguidos en *Capital Needs*..., op. cit., en donde dicho sistema se aplica para analizar y subsecuentemente valorar el Plan de Desarrollo español bajo el enfoque de «Valores planeados» y «Valores no planeados».

bargo, la interrelación entre demanda final y factores primarios reside en la naturaleza de la función de producción y por esta razón debe considerarse tanto el output total, como su distribución sectorial. Las relaciones a establecer, ahora a través de un procedimiento indirecto, son por tanto: V con X, luego Y con X y finalmente V e Y. Se tiene, en este sentido, que los inputs primarios y los outputs están relacionados por la matriz $[\gamma]$, cuyos elementos son ratios entre inputs primarios y outputs sectoriales,[27] y que la relación entre X e Y viene dada, tal como han demostrado Dorfman, Samuelson y Solow,[28] por la naturaleza y significación de los elementos de la matriz $[1 - \beta]^{-1}$. Entonces, la consideración de ambas matrices desvela una primera relación entre Y y V, pudiéndose definir, de acuerdo con nuestra tabla, los coeficientes ξ_{ij} de la siguiente manera: [29]

$$\xi_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \gamma_{ik}\, b_{kj} \qquad (i,\, j = 1, \ldots, 3)$$

en donde, en los correspondientes desarrollos, γ_{ij} es el elemento ij-ésimo de la matriz $[\gamma]$ y el b_{ij} el de la matriz $[1 - \beta]^{-1}$. Se tienen, pues, las cantidades de factores requeridas para producir una unidad de cada mercancía, de donde es posible determinar las cantidades necesarias de inputs primarios para producir los outputs componentes de la demanda final. Para ello, basta con introducir los distintos elementos de Y, ordenados institucionalmente. Entonces,

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \xi_{ik}\, y_{kj} \qquad (i,\, j = 1,\, \ldots,\, 3) \qquad [6]$$

en donde ξ_{ij} son los elementos ij-ésimos de la matriz ahora definida e y_{ij} los elementos del cuadrante I de la tabla input-output. Se explicita así la relación entre Y y V,[30] que permite conocer, para una determinada estructura de producción, las distintas cantidades de factores primarios que corresponden a cada elemento de Y.

27. El uso empírico de esta matriz fue hecho por W. D. Evans y M. Hoffenberg, «The Inter-industry Relations Study for 1947», *Review of Economics and Statistics,* mayo 1952, pp. 94-142.
28. *Linear Programming and Economic Analysis* (Nueva York, 1958), pp. 230-237.
29. Tales coeficientes tienen la siguiente ordenación:

II / III	Agricultura	Industria	Servicios
Tierra	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{13}
Capital	ξ_{21}	ξ_{22}	ξ_{23}
Trabajo	ξ_{31}	ξ_{32}	ξ_{33}

30. En lo que se refiere a la relación entre Y y V, es bastante usual definir la noción de

En cuanto a la relación entre los cambios de V sobre los componentes de Y, puede aplicarse el mismo tipo de análisis que el ahora descrito. Sin embargo, como no se trata básicamente de encontrar la magnitud de Y en el supuesto de que se conozcan las cantidades disponibles de recursos productivos, el procedimiento se modifica dada la naturaleza de la tabla input-output definida, precisándose entonces la consideración de la correspondiente estructura sectorial en relación con la distribución del producto total entre los distintos factores. Ello implica la introducción explícita de X y, por tanto, las relaciones a determinar son: 1) la que existe entre X y V; 2) la que existe entre Y y X, y 3) la relación entre ambas. En este sentido, no obstante, debe puntualizarse que: 1) las relaciones son de naturaleza vertical, y 2) se hace referencia explícita a la distribución del output entre los factores de producción.[31] La naturaleza de la relación es vertical porque la matriz $[\beta^*]$ liga explícitamente X con V. Esto es, la fórmula obtenida depende de esta matriz inversa y suministra información sobre la relación entre inputs primarios y cada unidad de output. Precisamente porque con ella se relacionan unidades en vez del producto total, los elementos v_{ij} ilustran cómo se distribuye el output entre los distintos factores. De acuerdo con ello se pueden así definir los coeficientes θ_{ij} que contabilizan el efecto de cada uno de ellos sobre el nivel de outputs de los distintos sectores,

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} \; v_{kj} \qquad (i,\ j = 1, \ldots, 3)$$

en donde b_{ij} corresponde a los elementos de la matriz $[\beta^*]^{-1}$ y los v_{ij} son los propios del cuadrante III de nuestra tabla input-output. Conocida así la cantidad de output que corresponde a cada uno de los componentes de los inputs primarios de cada sector, se pueden hallar las cantidades requeridas de dichos inputs para la producción de cada elemento de la demanda final. Para ello, bastará tener presente que la relación vertical entre X e Y supone el conocimiento de los elementos de la matriz $[\eta]$. De ahí finalmente que la relación entre V e Y venga dada por

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \theta_{ik} \; \eta_{kj} \qquad (i,\ j = 1, \ldots, 3) \qquad [7]$$

«intensidad del factor», que significa la cantidad de un factor necesario para producir una unidad de demanda final. Concretamente:

$$\frac{v_{ij}}{Y_j^0}$$

en donde el campo de variabilidad, en nuestros supuestos, sería para i y j de 1, 2 y 3.

31. Nótese la utilidad del análisis input-ouput bajo el enfoque «K-C-R» para el estudio de los problemas de la ditsribución.

en donde θ_{ij} es el elemento *ij*-ésimo de la matriz ahora definida y η_{ij} de la $[\eta]$ y en que los y_{ij} tienen la característica de corresponder a las cantidades de outputs disponibles en la economía, cuando no cambian ni la estructura de la producción ni la de la distribución.

En suma, atendiendo a las relaciones ahora analizadas entre demanda final y recursos productivos, se tiene que: 1) en [6] se determina, en términos de adecuación, la cantidad de recursos productivos de acuerdos con una demanda final deseada o real, y 2) en [7], justamente lo contrario, o sea, la demanda final adecuada con la disponibilidad real o planeada de inputs primarios. Y ello se consigue, en el ámbito de lo operativo, junto a un ahorro de cálculo por el orden de las matrices definidas así como, por iteración, mediatne la utilización de un número reducido de las mismas, dentro del conjunto de las que se han considerado en este intento de ampliación del análisis input-output convencional.

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Barcelona