Kurt Gödel:
el límite lógico de la Modernidad

Alejandro RODRÍGUEZ-PEÑA

Universidad Autónoma de Madrid

aljn.rodriguez@gmail.com

Recibido: 02/10/2010
Aprobado: 22/12/2010

Resumen:

El proyecto formalista ideado por Hilbert es deudor de un filósofo que podemos considerar como el padre fundador de la modernidad: Descartes. En este escrito se buscará interpretar el teorema de limitación de Kurt Gödel, que muestra la imposibilidad de dicho proyecto, como una crítica a la modernidad.

Palabras clave: Prueba de Gödel, Proyecto formalista, Crítica a la Modernidad.

Abstract:

The formalist project devised by Hilbert is indebted to a philosopher that we can consider as the founding father of modernity: Descartes. In this paper I suggest to interpret the restriction theorem of Kurt Gödel, which shows the impossibility of this project as a critique of modernity.

Keywords: Gödel's proof, Formalist project, Critique of Modernity.

Existe una pretensión en el planteamiento y filosofía de Descartes de alcanzar una utopía respecto a aquello que el hombre puede conocer y acerca de cómo hay que alcanzar dicho conocimiento. Dicha pretensión llegará, en forma de racionalismo, hasta la época de Hilbert. Iré más despacio para mostrar en qué cosiste dicha utopía. Descartes consideraba que para poder alcanzar el conocimiento perfecto, claro y distinto, debíamos hacerlo a través de un Método, una sistematización completa de aquel, es decir, que todo conocimiento verdadero quedaría incluido en una Mathesis Universalis. Este proceder consiste en partir de principios autoevidentes que al combinarse pueden producir conocimientos más complejos. Descartes había imaginado "que todas las cosas, de que el hombre puede adquirir conocimiento, se siguen unas de otras en igual manera, y que, con sólo abstenerse de admitir como verdadera una que no lo sea y guardar siempre el orden necesario para deducirlas unas de otras, no puede haber ninguna, por lejos que se halle situada o por oculta que esté que no se llegue a alcanzar y descubrir"[1]. De este modo el conocer sería el ejercicio combinatorio, calculador, de lo simple a lo complejo, accesible a todo ser humano desde el ejercicio de su razón, y, por tanto, universal. Ahora bien, si concebimos la sistematización como una axiomatización donde esos principios evidentes en sí mismos sean los axiomas, las normas de la combinatoria de la razón sean reglas de inferencia, y el conocimiento más complejo sean los teoremas derivados de los axiomas, entenderemos la pretensión cartesiana de captar el conocimiento de un modo completo como el proyecto formalista de Hilbert.

Ahora bien, el proyecto formalista, a causa de la prueba de Gödel volcada en su artículo más conocido, el de 1930, Sobre sentencias formalmente indecidibles de la Principia Mathematica y sistemas afines[2], será inviable a la par que se hundirá, con él, parte del proyecto moderno. A través de las siguientes cinco preguntas analizaré como, en el interior del proyecto formalista, se dio un problema que no pudo superar:

1.- ¿Qué es una teoría formalizada y sistematizada y qué ventajas ofrece?
2.- ¿Qué significa que una teoría sea consistente?
3.- ¿Qué dicen los teoremas de Gödel?
4.- ¿Qué consecuencias tienen los teoremas para el proyecto formalista?
5.- ¿Qué consecuencias tiene para el mecanicismo?

El contenido de las respuestas, tal y como veremos más adelante, se puede vincular y relacionar, pero para una correcta comprensión me ceñiré a las mismas, aunque sí que explicitaré la posible relación. El esquema y estructura de estas preguntas ha de entenderse del siguiente modo: desde la primera y la segunda se puede explicar el inicio de una esperanza a cumplir por la razón y la lógica que vincularían todo conocimiento a una misma estructura; en la segunda parte, tercera pregunta, se explica el teorema de limitación de Gödel; en la tercera y última parte, que incluye el cuarto y quinto interrogantes, se señalan las consecuencias de este teorema de limitación en el proyecto inicial. Será así como mostraremos la moraleja del sueño de la razón.

[1] Descartes, René, *Discurso del método y Meditaciones metafísicas*, Tecnos, Madrid, 2002, pp. 83.
[2] Gödel, Kurt, *Obras completas*, Alianza, Madrid, 1981, pp. 55-89.

1.- ¿Qué es una teoría formalizada y qué ventajas ofrece?

Esta cuestión puede descomponerse en dos. En primer lugar abordaré que es una teoría formalizada para después contemplar las ventajas que ofrece. A pesar de que esta pregunta parezca trivial no lo es, y antes de empezar con una explicación prefiero mostrar qué es una teoría formalizada. Tenemos aquí la formalización que hizo Peano de la aritmética (a partir de este momento la aritmética de Peano será representada por PA).

$$
\begin{aligned}
&A_1 : N(0)\\
&A_2 : \forall x(N(x) \to N(x'))\\
&A_3 : \neg\exists x(N(x) \land 0 = x')\\
&A_4 : \forall x\forall y((N(x) \land N(y) \land x' = y') \to x = y)\\
&A_5 : \phi(0) \land \forall x\big((\phi(x) \to \phi(x')) \to \forall x\ \phi(x)\big)
\end{aligned}
$$

Es fácil comprobar cómo presenta un aspecto distinto de lo que entendemos por la aritmética que habitualmente es conocida. La elección de la aritmética no es arbitraria tal y como se verá más adelante. Llega el momento de explicar qué es una teoría formalizada, aunque sí que resulta necesario explicar previamente qué es un sistema formal. Un sistema formal S es un lenguaje formal L, entendiendo por éste uno tal que puede definirse completamente sin hacer referencia a ninguna interpretación suya, con un mecanismo deductivo que consta de dos elementos: axiomas y reglas de inferencia. Por axiomas hay que entender el conjunto de proposiciones fundamentales desde los que, por medio de las reglas de inferencia, se pueden derivar el resto de proposiciones que, no son axiomas, son teoremas. De este modo una teoría formalizada será una teoría (re)formulada en un sistema formal: una teoría formal T posee un lenguaje L y contará con unos axiomas y un mecanismo deductivo[3]. En el caso de Descartes los axiomas serían esas ideas autoevidentes y el mecanismo deductivo vendría dado por la razón, siendo, de este modo, universal.

La segunda cuestión en la que descompusimos nuestra primera pregunta era relativa a las ventajas que ofrece una teoría formalizada respecto a otra que no lo es. Resulta necesario remontarnos a finales del S. XIX para entender este aspecto pues se halla íntimamente relacionado con el proyecto formalista. Es interesante vincular esta cuestión con las preguntas cuarta y quinta de este mismo trabajo. En 1879 Gottlob Frege en su Begriffscchrift diseña un sistema formal, la lógica, y la concibe a partir de los planteamientos de Leibniz como modo de expresar el pensar puro. La lógica será capaz de ser el medio de expresión de cualquier concepto. Poco después, en 1889, Guiseppe Peano consigue formalizar la aritmética (de ahí que más arriba la escogiera como ejemplo). Este es el periodo en el que nace el proyecto formalista de la mano de David Hilbert. Éste, en 1904, en *On the Foundations of Logic and Arithmetic*, propondrá que la consistencia de sistemas más complejos se podían probar en sistemas más sencillos. Esto quiere decir que existe la intención de probar la consistencia de PA para que todo el edificio del conocimiento sea consistente. Es fácil vincular esta idea con la de Descartes, pues, lo sencillo nos servirá de cimiento de lo más complejo. Ésta es la primera ventaja, la de poder

[3] Hunter, Geoffrey, “Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden”, Paraninfo, Madrid, 1981, pp. 18/22

estructurar el conocimiento en un "lenguaje universal", poder encontrar una fundamentación del conocimiento de una manera universal. Pero ¿qué es la consistencia? Esto lo dejaremos para la segunda pregunta. Por otro lado, la consistencia no es la única propiedad deseable: también la decidibilidad y la completud. La completud es la propiedad que un sistema que posee todos los teoremas que deberían ser teoremas, es decir, los esperables y deseables. La decidibilidad es la posibilidad de establecer en un proceso finito la respuesta, afirmativa o negativa, de si una proposición es un teorema de la teoría formalizada. Si esto fuera así, cualquier desarrollo conceptual sería un proceso mecánico. Una vez mostrada la primera ventaja, pasaremos a una segunda. Una teoría formalizada puede ser "desarrollada" por cualquier ser humano, en principio. Para Descartes esto es un hecho pues, los conocimientos sencillos son asequibles a todo el mundo dada su autoevidencia a la par que todo ser humano está dotado de razón que es la que dicta las reglas de combinación de aquellos. Todo hombre, visto así, podría ser capaz de inferir desde los axiomas de una teoría todos los teoremas sin conocer previamente la teoría. Esto es así porque, al estar en un lenguaje formal, no necesitamos de una comprensión previa, sino que, puede concebirse dicha tarea como un proceso "mecánico". Estas son las dos ventajas de la formalización además de la claridad a la hora de transmitir teorías. Pero, adelantando acontecimientos, esta última ventaja, casi insignificante y de la que por poco me olvido, será la única que quede de pie al final de esta historia.

2.- ¿Qué significa que una teoría sea consistente?

Tal y como venía diciendo, existe un ideal para las teorías: que sean consistentes, completas y decidibles. Aparentemente podríamos pensar que el Ideal de éstas es que sean verdaderas, pero, si pensamos en la Geometría euclidiana, podemos ver como otras geometrías son también verdaderas, ahora bien, ¿cuál es la verdadera de todas ellas? Por eso estas nuevas características son anheladas, para ver qué teorías son preferibles a otras, como criterio. En este apartado me centraré en la primera de ellas. La consistencia puede definirse como sigue: un sistema S es consistente si, y sólo si, para ninguna fórmula A de S, A y la negación de A son ambas teoremas de S[4]. Por ello una teoría como T será consistente si para ninguna fórmula B de T, B y su negación son ambas teoremas. ¿Qué ocurre si una teoría no es consistente? Pues prácticamente la anula por completo porque de ella se podría inferir cualquier cosa por reducción al absurdo. Por otro lado, una vez visto el programa formalista y el mecanicismo, que una teoría no sea consistente acarrearía una serie de consecuencias poco deseables. Es por ello que estudiaremos la consistencia de PA. Intuitivamente PA parece consistente, esto es: que A y $\neg$A parecen no ser ambas derivables desde PA, porque, ¿quién diría que la aritmética produjera contradicciones? Era tan sólo cuestión de tiempo que alguien diera con una demostración formal de la consistencia de PA. Al menos ese era el pensamiento de la época en general, y de Hilbert en particular. Esta esperanza fue truncada en las Segundas Jornadas sobre Epistemología de las Ciencias Exactas en Königsberg[5]. Gödel y Von Newmann comentan la posible existencia de proposiciones indecidibles en todo sistema capaz de manejar ciertos elementos de la aritmética y de teoría de conjuntos. A las pocas semanas Gödel dio con sus dos teoremas con conclusiones que limitaban el proyecto del formalismo. Mostrará que si la aritmética de

[4] Hunter, Geoffrey, *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden*, Paraninfo, Madrid, 1981, pág. 97

[5] Para más información de dicho congreso recomiendo acudir a:

Alonso, Enrique, *Sócrates en Viena*, Montesinos, Barcelona, 2007, pp. 76 y ss.

Peano es consistente será, entonces, incompleta, por un lado. Por el otro, si PA es consistente, entonces la proposición que expresa esa circunstancia no es derivable en PA[6].

3.- ¿Qué dicen los teoremas de Gödel?

Sin duda este tercer interrogante, y cuestión central, punto de inflexión en tanto que posterior a la exposición del proyecto y previo a la parte que señala las consecuencias, es el más complejo de las tres partes que componen este escrito. Por ello mostraré una aproximación conceptual e informal. Si al lector no le parece fiel mi modo de exposición le recomiendo acuda a la lectura de "Esperanzas rotas. Los resultados de indecibilidad de la matemática elemental" en *Sócrates en Viena* de Enrique Alonso. Si lo que se pretendía encontrar era una demostración formal, aconsejo acudir directamente al artículo de Gödel de 1931 en el que se exponen ambos teoremas. Cierto es que podría haber aprovechado el trabajo de otro y parafrasear su explicación, pero prefiero hacer un enfoque distinto: un acercamiento intuitivo desde nociones más próximas a lectores no especializados. Aún no ha llegado el momento de adentrarnos en los teoremas de Gödel. Primeramente voy a explicar algo que aparentemente nada tiene que ver con lo que debería ocuparnos: la paradoja del mentiroso. Consideremos el enunciado A:

A = El enunciado 'A' es Falso.

Según hemos visto la consistencia dice que no pueden ser derivables simultáneamente A y ¬A. Veamos pues cuál de las dos es verdadera. Supongamos que A es verdadera. De ser verdadero que A fuera falso tal y como enuncia de sí mismo, la proposición A sería falsa. Al haber supuesto que A era verdadero y llegar a la conclusión de que A es falso incurrimos en contradicción. El supuesto inicial no es el caso. A no es verdadero. Supongamos ahora que A es falso. De ser falso que A fuera falso tal y como enuncia de sí mismo, el enunciado A sería verdadero. Al haber supuesto que A era falso y llegar a la conclusión de que A es verdadero incurrimos, nuevamente, en una contradicción. El segundo supuesto no es el caso. A no es falso. Por lo tanto A ni es verdadero ni falso. Ello se debe a la capacidad del lenguaje de autorreferencia. En el caso de A viene dado por el determinante demostrativo 'Este'.

Pues bien, Gödel en su teorema acudirá a una herramienta similar. Cierto es que PA parece no ser autorreferencial, no es fácil encontrar determinantes demostrativos en ella, pero se trata de algo aparente. Gödel consigue desvelar que PA es autorreferencial a través de un proceso complejo conocido por gödelización. No voy a explicar detenidamente dicho proceso, pero sí que señalaré cuál es la idea. La gödelización es una codificación numérica desde la que a una fórmula de PA se le asigna un número de Gödel. Se acaban de generar desde PA los determinantes demostrativos: los número de Gödel. La estrategia a seguir a partir de este momento, como es intuible, es la misma que ha funcionado en la paradoja del mentiroso. De este modo alcanzará una proposición que enuncia de sí misma que no es derivable cuya demostración está comprometida.

G = 'G' no es derivable.

[6] Para más información relativa al desarrollo de los teoremas de Gödel recomiendo:

- Hunter, Geoffrey, *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden*, Paraninfo, Madrid, 1981, pp. 287; y

-Alonso, Enrique, *Sócrates en Viena*, Montesinos, Barcelona, 2007, pp. 86/88.

Supongamos que AP, tal y como indica la intuición es consistente. Luego G o ¬G son derivables en PA en tanto que tenemos la certeza de que una, y sólo una, es un teorema pero no sabemos cuál. Consideremos las dos posibilidades de la disyunción.

Supongamos que + G en PA sea verdaderos. Si G es verdadero entonces es verdadero que G no es derivable en PA, pero, según lo supuesto, hemos incurrido en una contradicción luego G no es el caso + G en PA. Supongamos ahora la otra posibilidad, que + ¬G en PA. Por ello es falso que G no sea derivable, luego G debe ser demostrable. Esto entra en contradicción con lo supuesto. Luego tampoco es el caso que + ¬G en PA. Acabamos de vislumbrar el primer Teorema de Gödel. Lo explicitaré.

Si suponemos, tal como hicimos al principio, que PA es consistente existe una proposición tal que ni ella ni su negación son demostrables. No hay modo de decidir cuál es y por lo tanto indecidible. Si falta algún teorema por demostrar en la teoría tampoco ésta será completa. Esto quiere decir que PA no puede ser simultáneamente consistente, completa ni decidible, esto es, si no hay contradicciones faltarán teoremas por demostrar y no hay modo de saber cómo.

El segundo teorema, siguiendo la misma estrategia que antes, se puede demostrar con una proposición tal que exprese la consistencia de PA no es derivable. Es decir, si G decía de sí que no era derivable, C dice de sí soy consistente. Si C es verdadero entonces G también, pero hemos visto que no es el caso, luego C tampoco. El segundo teorema de Gödel viene a decir que si PA es consistente la proposición que dice de sí que es consistente no es derivable en PA, y por tanto no se puede demostrar la consistencia de PA desde PA.

Resulta entonces que una teoría formalizada que contenga a la aritmética es autorreferencial, esto es, susceptible de gödelización, y en tanto que ello, no puede ser simultáneamente consistente, completa ni decidible, además de ser imposible demostrar la consistencia desde la misma teoría formalizada. Lo importante de estos teoremas no es que sean sólo aplicables a PA, sino que lo son a cualquier formalización de una teoría, a cualquier sistematización inferencial del conocimiento que sea a fin o contenga a la aritmética misma.

4.- ¿Qué consecuencias tienen los teoremas para el proyecto formalista?

Tras haber señalado cuál era el proyecto formalista y su necesidad de que una teoría formalizada como la PA fuera consistente, decidible y completa, tras haber, también, explicado aquí los teoremas de Gödel y sus resultados de limitación en las preguntas anteriores, las consecuencias para el proyecto formalista son fatales.

Según los teoremas de Gödel, si la aritmética de Peano es consistente, ésta es incompleta pues hay una proposición que niega su derivabilidad tal que ni ella ni su negación son derivables. Esto también señala a que no hay un proceso que nos permita decidir cuál es un teorema. Luego, si mantenemos la consistencia, perdemos la completud y la decidibilidad. No pueden darse las tres simultáneamente.

Resulta que si admitimos la consistencia de PA en favor de sistemas más complejos, tal y como pretendía Hilbert, hay que sacrificar la completud y al decidibilidad. El proyecto de fundamentar el edificio del conocimiento es una única base, de fundamentar el conocimiento universal en PA, es imposible. La primera gran ventaja, expectativa tirada al suelo, de la formalización de teorías no es viable. Desde entonces se han intentado distintas reformas de la lógica para solventar los problemas y retomar así el programa del proyecto formalista, pero sin éxito.

5.- ¿Qué consecuencias tiene para el mecanicismo?

Para responder a esta pregunta, al igual que con la pregunta anterior, hay que tener presente lo ya explicado. Lo retomaré brevemente a modo de resumen. Si el proyecto formalista hubiera triunfado y alcanzado sus expectativas, si tanto Descartes como Hilbert hubieran estado en lo cierto, y se hubiera probado formalmente, y las teorías formalizadas, en general, y en particular, la PA, hubieran sido simultáneamente consistentes, completas y decidibles, el mecanicismo hubiera sido posible, dado que esas son las condiciones de su posibilidad.

Los teoremas de Gödel limitan al proyecto, muestran la imposibilidad de poder mecanizar, programar... pues una teoría formalizada nunca podrá ser simultáneamente decidible, consistente y completa. La última gran ventaja se ha diluido. No hubo, hay ni habrá manera de señalar los cimientos del conocimiento y determinar las reglas para derivar el conocimiento más complejo, o lo que es lo mismo, no puede elaborarse una Mathesis Universalis simultáneamente consistente, decidible ni completa. Queda así demostrado que el teorema de Gödel invalida, desde un punto de vista lógico, el proyecto formalista a la par que limita muchas de las pretensiones de la modernidad: resulta inviable una sistematización completa del conocimiento que pueda ser recorrida por la razón. Es por ello que considero que la lógica puede y ha de aportar mucho a la reflexión sobre la modernidad.

La única ventaja que queda es aquella que en su momento, en la primera pregunta, casi paso por alto, casi olvido. Una teoría formalizada es más fácil de transmitir, de enseñar, de aprender y desarrollar. Y nada más.

Bibliografía:

ALONSO, Enrique, *Sócrates en Viena*, Montesinos, Barcelona, 2007.

DESCARTES, René, *Discurso del método y Meditaciones Metafísicas*, Tecnos, 2002.

GÖDEL, Kurt, *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* en “Obras Completas”, Alianza, Madrid, 1981.

HUNTER, Geoffrey, *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden*, Paraninfo, Madrid, 1981.