UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Teoría de automejora de desigualdades de tipo Poincaré

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por:
Ana Jiménez del Toro

Dirigida por:
D. José María Martell Berrocal

Madrid, 22 de Julio de 2013

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Teoría de automejora de desigualdades de tipo Poincaré

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por:
Ana Jiménez del Toro

Dirigida por:
D. José María Martell Berrocal

Madrid, 22 de Julio de 2013

A mis padres

Prefacio

En los campos del Análisis armónico y las Ecuaciones en Derivadas Parciales podemos encontrar varias estimaciones con propiedades de automejora de la integrabilidad de las funciones involucradas. Algunas situaciones clásicas en las cuales las funciones automejoran su integrabilidad son las siguientes. En $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, el teorema de inmersión de Sobolev afirma que $W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p < n$ y donde $p^* = n\,p/(n-p)$ es el índice de Sobolev conjugado de p (ver por ejemplo [SC4]). Más concretamente, comenzando con la desigualdad clásica de Poincaré-$(1,1)$

$$\fint_Q |f - f_Q|\,dx \leq C\,\ell(Q) \fint_Q |\nabla f|\,dx, \tag{1}$$

o con su versión en $(1,p)$

$$\fint_Q |f - f_Q|\,dx \leq C\,\ell(Q) \left(\fint_Q |\nabla f|^p\,dx \right)^{1/p}, \tag{2}$$

se tiene la siguiente automejora en la integrabilidad de la oscilación

$$\left(\fint_Q |f - f_Q|^{p^*}\,dx \right)^{1/p^*} \leq C\,\ell(Q) \left(\fint_Q |\nabla f|^p\,dx \right)^{1/p}.$$

De esta forma si $n \geq 2$ y $1 \leq p < n$ se tiene que si $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con $\nabla f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L^{p^*}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. En el caso $p = n$ puede probarse que $W^{1,n}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ está contenido en una clase de funciones $\exp L^{n'}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con $n' = n/(n-1)$ a través de la desigualdad de Trudinger (obtenida en primer lugar por Yudovich en [Yud]):

$$\|f - f_Q\|_{\exp L^{n'},Q} \lesssim \left(\int_Q |\nabla f|^n\,dx \right)^{1/n}. \tag{3}$$

Este tipo de automejoras exponenciales aparecen también asociadas al espacio de funciones de oscilación media acotada BMO: recordemos que $f \in \text{BMO}$ si

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \fint_Q |f - f_Q|\,dx < \infty$$

La desigualdad de John-Nirenberg (ver [JoN]) establece que si $f \in \mathrm{BMO}$ (a priori $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$) entonces, f es exponencialmente integrable en cada cubo Q:

$$\|f - f_Q\|_{\exp L, Q} \leq C.$$

Esto claramente implica que $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $1 \leq p < \infty$. Lo mismo ocurre en el espacio $L(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, que definimos del siguiente modo: $f \in L(\alpha)$ si verifica que

$$\sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|^\alpha} \fint_Q |f - f_Q| < \infty.$$

Obsérvese que $L(0)$ es el espacio BMO. Estas funciones también mejoran su integrabilidad obteniéndose

$$\|f - f_Q\|_{\exp L, Q} \leq C\, |Q|^\alpha.$$

En espacios más generales, como variedades de Riemann, Saloff-Coste consideró propiedades de automejora de desigualdades de Poincaré (ver [BCLS], [SC1], [SC2], [SC4]). Éstos son útiles cuando estudiamos grandes escalas del comportamiento de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, tales como Laplace y ecuaciones del calor, en estos contextos (ver, por ejemplo, [HaK1], [HaK2], [Jer], [SC2], [SC4], [VSCC]).

Se puede ver que todas las situaciones anteriores tienen en común que involucran a la oscilación de la función en algún cubo, vía $|f - f_Q|$. Bajo este punto de vista y sin utilizar ninguna estructura diferenciable, en [FPW], [MaP] y [OP] los autores generalizan la teoría clásica de automejora y extienden algunos resultados de [HaK2], [Fra], [GaN], [Lu], [Bus]. Se toma como punto de partida desigualdades de la forma:

$$\fint_Q |f - f_Q|\, dx \leq a(Q, f), \qquad \forall Q \subset \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

donde a es un funcional que depende del cubo Q y en algunas ocasiones de la función f. Bajo ciertas condiciones de tipo geométrico sobre el funcional a, se establece que la desigualdad (4) esconde diferentes tipos de automejora. Así, en espacios de tipo homogéneo, en [FPW] consiguen automejora de tipo L^p, mientras que en [MaP] obtienen resultados de automejora exponencial y en particular, la desigualdad de John-Nirenberg para funciones en BMO. [OP] contiene resultados de automejora de tipo L^p en el contexto euclídeo con medida no doblante.

Por otro lado, se puede ver que la oscilación $|f - f_Q|$ está íntimamente relacionada con el operador maximal agudo de Fefferman-Stein $M^\#$. En [Ma1] se introduce un nuevo operador maximal agudo asociado a una aproximación de la identidad $\{S_t\}_{t>0}$:

$$M^\#_S f(x) = \sup_{Q \ni x} \fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dy,$$

donde t_Q es un parámetro que depende de la longitud del lado del cubo Q. Este operador permite definir nuevos espacios de funciones, como son el espacio de oscilación media acotada asociado a aproximaciones de la identidad, BMO_S de [DuY], y el espacio de Morrey-Campanato asociado a aproximaciones de la identidad, $L_S(\alpha)$ de [DDY] y [Tan]. Además, en [DuY] se muestra como comenzando con una estimación de tipo (4) con $a(Q,f) = C$ y la oscilación $|f - f_Q|$ es reemplazada por $|f - S_{t_Q} f|$, se consigue una propiedad de automejora y el espacio BMO_S y $L_S(\alpha)$ satisfacen la desigualdad de John-Nirenberg correspondiente (ver [DuY], [DDY] y [Tan]).

Nosotros damos un paso más en esta teoría de automejora y estudiamos la oscilación generalizada $|f - S_{t_Q} f|$. En la primera parte de la memoria presentamos un método general que nos permite asegurar propiedades de automejora de desigualdades de tipo Poincaré generalizadas asociadas a aproximaciones de la identidad y semigrupos. Así, tomando como punto de partida una estimación de la forma:

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq a(Q,f), \qquad \forall Q \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

donde $t_Q = \ell(Q)^m$ y $\{S_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad o un semigrupo cuyo núcleo decae suficientemente rápido (ver la Sección 2.6), obtenemos, según las propiedades que satisfaga el funcional a, diferentes estimaciones de la oscilación $|f - S_{t_Q} f|$. Las estimaciones (5) serán denominadas desigualdades de tipo Poincaré generalizadas, por su analogía con (1).

Esta memoria está dividida en dos partes independientes. En la primera se consideran resultados de automejora en el contexto euclídeo. El Capítulo 1 es la introducción, donde explicamos en qué consiste la primera parte de la memoria. En el Capítulo 2 se encuentran algunas definiciones y resultados previos. En el Capítulo 3 mostramos un método basado en el lema de recubrimiento de Whitney y la técnica de las desigualdades de tipo buenas-λ (introducida por Burkholder y Gundy [BuG]) el cual nos permite obtener resultados de automejora en la escala de los espacios de Lebesgue de desigualdades de tipo Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad o semigrupos, en el marco euclídeo $\mathbb{R}^n$ y con la medida de Lebesgue dx (a veces reemplazamos la medida de Lebesgue por un peso de Muckenhoupt). Más concretamente, dada f verificando (5), si a satisface cierta condición de tipo geométrico ($a \in D_r$, ver la Sección 2.5), entonces se obtienen estimaciones de tipo $L^{r,\infty}(Q)$ para la oscilación generalizada $|f - S_{t_Q} f|$. En particular, estudiamos algunas estimaciones de tipo Poincaré expandidas que tienen en cuenta la falta de localización de las aproximaciones de la identidad o de los semigrupos. Como consecuencia de este método, obtenemos desigualdades globales de tipo pseudo-Poincaré y desigualdades de tipo fuerte.

En el Capítulo 4 asumiendo (5) con a un funcional no-decreciente (como en [MaP] escribimos $a \in T_\infty$), conseguimos una estimación de tipo exponencial para oscilaciones generalizadas. También estudiamos algunas estimaciones de tipo Poincaré expandidas.

En la segunda parte del trabajo extendemos esta teoría a los espacios de tipo homogéneo. Recordemos que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo si X es un conjunto dotado de una cuasi-métrica d y una medida de Borel no-negativa μ verificando la siguiente condición:

$$\mu(2\,B) \leq c_\mu\, \mu(B) < \infty,$$

donde $2\,B$ es la bola con el mismo centro que B y con radio doble. El primer estudio sistemático sobre los espacios de tipo homogéneo fue realizado por R.R. Coifman y G. Weiss en el año 1971 (ver [CoiW]), momento desde el cual podemos encontrar numerosas referencias sobre este tema. La historía de dicha teoría muestra cómo, en muchos casos, el ambiente de trabajo es muy cercano al euclídeo y diferentes técnicas utilizadas en el espacio euclídeo pueden ser adaptadas a los espacios de tipo homogéneo. Incluso, los espacios de tipo homogéneo pueden ser dotados de una estructura diádica. M. Christ en [Chr] construye colecciones de conjuntos que imitan el comportamiento de los cubos diádicos en el espacio euclídeo. Estos trabajos y algunos otros, como [MaS] de R.A. Macías y C. Segovia, ponen de manifiesto el alto grado de complejidad y refinamiento que ha adquirido el estudio de los espacios de tipo homogéneo. Además, este contexto se ha ido revelando más natural para ciertas cuestiones.

Así, en la segunda parte de la memoria, continuamos el estudio realizado en la Parte I. Analizamos propiedades de automejora, en la escala de los espacios de Lebesgue, de desigualdades de Poincaré generalizadas en espacios de tipo homogéneo. Del mismo modo que en la Parte I tomamos (5) como punto de partida, en el marco del espacio de tipo homogéneo y para funcionales verificando ciertas condiciones de sumabilidad, obtenemos estimaciones en el espacio débil de Lebesgue con la oscilación $|f - S_t f|$ en el lado izquierdo y una expansión de a sobre bolas dilatadas en el lado derecho. Estas extensiones son análogas a las obtenidas en la primera parte de la memoria y sus demostraciones son más técnicas. Es claro que el contexto euclídeo puede enmarcarse dentro de el de los espacios de tipo homogéneo, sin embargo, la geometría de estos últimos es a menudo más compleja. De este modo, a la hora de desarrollar estas técnicas es conveniente estudiar primero el caso de $\mathbb{R}^n$ donde hay menos preocupaciones de carácter geométrico. Cabe por ejemplo destacar que nuestro método utiliza de forma fundamental la estructura diádica del espacio en cuestión y que en $\mathbb{R}^n$ dichas estructura es más manejable. Así, las ideas fundamentales de este trabajo se encuentran en la primera parte de la memoria donde estudiamos el contexto euclídeo. La segunda parte extiende dichas técnicas a los espacios de tipo homogéneo, usando las mismas ideas, pero en un contexto donde la geometría y la estructura diádica son más complejas.

Por otro lado, las aplicaciones de nuestro método resultan más interesantes en el contexto de los espacios de tipo homogéneo donde, en principio, no tenemos estructura diferenciable. En algunos casos, como el de las variedades riemannianas, pese a tener una estructura diferenciable, las correspondientes desigualdades de Poincaré clásicas pueden fallar o no conocerse. Esta es en muchos casos una de las diferencias a la hora de buscar aplicaciones de nuestro método. En la Sección 7.3 mostraremos algunos ejemplos donde establecemos propiedades de automejora para desigualdades de tipo Poincaré generalizadas en rangos donde las correspondientes desigualdades de Poincaré clásicas pueden no ser ciertas. Esta es quizás una de las motivaciones principales para establecer una teoría de automejora en espacios de tipo homogéneo.

La segunda parte de la memoria está organizada del siguiente modo. El Capítulo 5 es la introducción. En el Capítulo 6 se encuentran algunas definiciones y resultados previos. El Capítulo 7 y el Capítulo 8 son las extensiones a espacios de tipo homogéneo del Capítulo 3 y del Capítulo 4, respectivamente. Así, en el Capítulo 7 mostramos, en espacios de tipo homogéneo, resultados de automejora en la escala de los espacios de Lebesgue de desigualdades de tipo Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad o semigrupos. En el Capítulo 8 conseguimos estimaciones de tipo exponencial para oscilaciones generalizadas en espacios de tipo homogéneo. En ambos capítulos obtenemos aplicaciones en marcos donde pueden fallar o no conocerse las desigualdades de Poincaré. Este es el caso de algunas variedades riemannianas con volúmen doblante y cotas superiores gaussianas para el núcleo asociado al semigrupo del calor asociado al operador de Laplace-Beltrami.

Los resultados que se presentan en esta memoria aparecen en los artículos:

(I) *Self-improvement of Poincaré type inequalities associated with approximations of the identity and semigroups* (con J.M. Martell), Potential Anal. **38**, no. 3, 805–841 (2013).

(II) *L^p self-improvement of generalized Poincaré inequalities in spaces of homogeneous type* (con N. Badr y J.M. Martell), J. Funct. Anal. **260**, no. 11, 3147–3188 (2011).

(III) *Exponential self-improvement of generalized Poincaré inequalities associated with approximations of the identity and semigroups*, Trans. Am. Math. Soc. **364**, no. 2, 637–660 (2012).

El artículo (I) constituye el Capítulo 3. En él obtenemos resultados de automejora en la escala de los espacios de Lebesgue de desigualdades de tipo Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad o semigrupos en el contexto euclídeo.

El artículo (II) corresponde al Capítulo 7. En él extendemos artículo (I) a espacios de tipo homogéneo.

El artículo (III) se corresponde con los Capítulos 4 y 8. En éste conseguimos estimaciones de tipo exponencial para oscilaciones generalizadas en el espacio euclídeo y en espacios de tipo homogéneo.

La bibliografía de la memoria ha sido unificada y puede encontrarse en las últimas páginas.

Agradecimientos

Quiero dedicar unas líneas para expresar mi agradecimiento a todas las personas que de un modo u otro han contribuido con su apoyo científico y/o personal a que este trabajo se haya podido realizar.

En primer lugar agradecer el excelente trato que siempre he recibido del personal de los departamentos de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y de la Universidad Autónoma de Madrid, en particular, al Prof. Carlos Pérez le agradezco el haberme dado la oportunidad de iniciarme en la investigación y ofrecerme la posibilidad de venir a la Universidad Autónoma de Madrid donde he trabajado bajo la supervisión de Chema Martell, a quien le agradezco el apoyo personal y profesional que me ha ofrecido; su paciencia, su energía, su tiempo, su ayuda... Sin él este día nunca habría llegado. Gracias a su familia por abrirme las puertas de su casa y permitirme disfrutar de sus hijos. A su antiguo despacho: a Maite por prestarme su estufa cuando llegue (¡qué frío pase mis primeros días!), a Dani por su alegría y la tranquilidad que me transmitía y a Javier por sus sugerencias.

A J. L. Torrea no tengo palabras para agradecerle todo lo que ha hecho por mí. Ha sido mi abuelo en la UAM (no por la edad, no te lo tomes mal). Sino por su disponibilidad, paciencia, confianza, cariño, consejos, amistad... Gracias por todos los detalles que ha tenido conmigo, por los cafés, comidas, excursiones... Gracias por tantas risas y buenos ratos. Gracias por invitarme al CIMPA y gracias al grupo de investigación al que he pertenecido por facilitarme ir y realizar una estancia de investigación en Argentina. Gracias a todos los miembros del Instituto de Matemáticas Aplicada del Litoral (IMAL) de Santa Fe, de la Universidad Nacional del Sur en Bahía Blanca y de la Universidad Nacional de Comahue en Neuquén con los que trabajé, en especial a: Silvia, Nora, Pola, Oscar, Roberto, Sheldy, Raquel y Ale, son increíbles. Gracias por vuestra hospitalidad, amabilidad, entusiasmo, enseñanza, interés por mi trabajo, dedicación, empuje...

A Magdalena e Ireneo por ser mis padres en la UAM: gracias por vuestra confianza, protección, entrega, cariño... Gracias a ellos y a Gustavo por ayudarme en mis primeros años de docencia, he aprendido mucho de vosotros. Gracias a Eugenio por "obligarme" a impartir docencia, por su cercanía y por su labor de lector.

Gracias a Fernando S. y Ana V. por ayudarme siempre con el papeleo y lo bien que siempre me han tratado. A Matteo B., D. Faraco y Jesús G. agradecerles el entusiasmo con el que trabajan y las sugerencias dadas. A María Teresa Carrillo le agradezco sus palabras de esperanza, seguridad y ánimo y sus reflexiones.

Gracias por la ilusión y motivación para investigar que me dieron los profesores Nadine B. y Javier S. (de la Université Paris-Sud en Orsay y de la Universitat Autònoma de Barcelona, respectivamente), con quienes tuve la suerte de poder trabajar.

Gracias a los "becarios" por las risas, trastadas, por todos los ratos que hemos compartido y por todo lo que me habéis ayudado. A Liviu, Ángel, F. Holgado y M. Cea por acogerme tan bien y estar siempre disponibles. A Nati por ser un ejemplo a seguir, por su fuerza y espíritu de lucha y superación. A Diana (la colombiana) por ser tan buena amiga. A Paco y Pedro por tener mi acento cerquita. A Jose y Benitez por las risas mañaneras y las peleas de chinchetas. A Angélica, Mari Luz, Mari Jose y Primo por las risas y por la tarde de las llaves (una de las más divertidas en la UAM). A David y Javi por sus originales payasadas. A Carlos por su magia. A Mo, Elías y F. Charro por ser unos niños encantadores. A mi despacho: A Pablo y Dani por ser mis dos grandes apoyos, mis niños. A Keith por las luchas con el aire acondicionado (gracias a él las arrugas tardaron algo más en aparecer). A Jose Manuel (el mallorquín) por su humor. A Sofía por nuestras charlas.

A J. M. Casteleiro por darme el empujón necesario para terminar esta tesis. A mis compañeros de colegios por sus ánimos y a mis "gyms" por ser mis válvulas de escape.

Por último, aunque los más importantes, a mi casa. Gracias por vuestra generosidad, por estar siempre disponibles, ayudarme, apoyarme, confiar en mí, valorarme.... Al Bicho por entender y reírse de mis brujiadas. A Virginia por ser muy buena hermana y ayudarme siempre que se lo he pedido. A los señores decirles que aunque no lo diga nunca os quiero mucho. Gracias por estar siempre, por dárnoslo todo, por los valores, educación... Gracias por ser los mejores padres del mundo y gracias por ser tan pesaos.

Gracias a todos por hacer posible que este día haya llegado. Gracias por darme la oportunidad de realizar esta experiencia, donde he conocido a grandes personas y he aprendido mucho (y no sólo de mates).

¡GRACIAS !

Índice general

Parte I

Teoría de automejora en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta parte de la memoria es estudiar extensiones de los resultados de [FPW] y [MaP].

En [FPW], los autores presentan un método general basado en la teoría de Calderón-Zygmund y las desigualdades de tipo buenas-λ que permite establecer (bajo ciertas condiciones de tipo geométrico sobre el funcional a) que la desigualdad (1.1) esconde una automejora de tipo L^r, para $r > 1$. Sea a un funcional definido sobre la familia de cubos de $\mathbb{R}^n$ y f verificando la siguiente desigualdad:

$$\fint_Q |f - f_Q| \, dx \leq a(Q), \tag{1.1}$$

para todo cubo Q y donde $f_Q = \fint_Q f \, dx$. Supongamos que existe $1 < r < \infty$ de forma que $a \in D_r$, esto es,

$$\sum_i a(Q_i)^r \, |Q_i| \leq C_a^r \, a(Q)^r \, |Q|,$$

para cada Q y cualquier familia $\{Q_i\}_i$ de subcubos de Q disjuntos dos a dos. Entonces, (1.1) se automejora hasta obtener la siguiente estimación:

$$\|f - f_Q\|_{L^{r,\infty},Q} \leq C.$$

Además, bajo ciertas condiciones, las estimaciones de tipo débil implican resultados de tipo fuerte. Este punto de vista también permite obtener versiones L^r de la desigualdad de John-Nirenberg para funciones en BMO.

Así, nuestro objetivo es reemplazar $|f - f_Q|$ por $|f - S_{t_Q} f|$, donde $\{S_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad o un semigrupo (ver la Sección 2.6), y presentar una teoría general que nos permita asegurar propiedades de automejora de tipo L^r de desigualdades de Poincaré generalizadas asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos a partir de

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \le a(Q,f), \tag{1.2}$$

para todo cubo $Q \in \mathbb{R}^n$ y donde $t_Q = \ell(Q)^m$ y $\{S_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad o un semigrupo cuyo núcleo decae suficientemente rápido (ver la Sección 2.6). Las estimaciones (1.2) serán denominadas desigualdades de tipo Poincaré generalizadas.

Nuestro método, basado en el lema de recubrimiento de Whitney y la técnica de las desigualdades de tipo buenas-λ (introducida por Burkholder y Gundy [BuG]), nos permite obtener resultados de automejora en la escala de los espacios de Lebesgue de desigualdades de tipo Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad o a semigrupos. El resultado principal del Capítulo 3 es el Teorema 3.1 (ver el Capítulo 2 para la notación y definiciones previas):

> *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 2.6, $1 < r < \infty$ y $a \in D_r$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica*
>
> $$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \le a(Q),$$
>
> *para todo cubo Q y donde $t_Q = \ell(Q)^m$, entonces, para cada Q, se tiene que*
>
> $$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty},Q} \le C \sum_{k \ge 0} 2^{2nk} g(c\, 2^{mk})\, a(2^k Q),$$
>
> *donde g es una función con ciertas propiedades que acota al núcleo de S_{t_Q} (ver la Sección 2.6).*
>
> *Si además a es doblante ($a(2Q) \le C\, a(Q)$), entonces, para cada Q*
>
> $$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty},Q} \le C\, a(Q).$$

En el Capítulo 3 también obtenemos las siguientes extensiones del resultado anterior: a espacios con pesos en los Teoremas 3.3 y 3.8 y a condiciones D_r que permitan que aparezca otro funcional en el lado derecho en los Teoremas 3.11, 3.13 y 3.14.

Como consecuencia de los resultados anteriores mostramos algunas aplicaciones. En primer lugar, en el Ejemplo 3.26 mostramos que si $f \in BMO_S$, donde

$$BMO_S = \Big\{ f \in \mathcal{M} : \sup_Q \fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx < \infty \Big\},$$

entonces, tenemos la siguiente automejora en su integrabilidad local

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r\, dx \right)^{1/r} \le C < \infty,$$

para cada $1 < r < \infty$ y para todo Q.

Motivados por la desigualdad clásica de Poincaré-$(1,1)$ tenemos el Ejemplo 3.28. Dado $1 \le p < n$, escribimos $p^* = n\,p/(n-p)$ que denota al índice de Sobolev conjugado de p. Si la función $f \in \mathcal{M}$ verifica la desigualdad de "Poincaré reducida":

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \le \ell(Q) \fint_Q h \, dx,$$

para todo cubo Q y donde h es una función medible no-negativa, entonces se automejora la integrabilidad del lado izquierdo obteniéndose

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r \, dx \right)^{1/r} \lesssim \sum_{k \ge 0} \sigma(k) \, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dx \right)^{1/p},$$

para cada $1 < r < p^*$, para todo Q y para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k \ge 0}$. Además, si $p \ge n$, la estimación anterior se satisface para cada $1 < r < \infty$. Por otro lado, en la Sección 3.3.2 conseguimos desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales: Para todo $t > 0$ y para cada $1 \le p < n$ y $p \le r < p^*$,

$$\|f - S_t f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*}\right) \frac{n}{m}} \, \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Por último, en la Sección 3.3.3 se encuentran los ejemplos que consideramos más naturales, pues tomamos como punto de partida funciones verificando desigualdades de tipo "Poincaré expandidas" que tienen en cuenta los efectos de cola. Debido a que, en general, el semigrupo no localiza, pensamos que este tipo de desigualdades expandidas son más interesantes que las reducidas. Una aplicación de nuestros resultados es el Ejemplo 3.34, en el que al no utilizar la desigualdad de Poincaré clásica, sirve de motivación para extenderlo a otros contextos:

> *Si $L = -div(A\,\nabla)$ es un operador elíptico de segundo orden con cotas gaussianas para el que $e^{-t\,L}\sqrt{t}\,div$ satisface estimaciones $L^p - L^p$ "off-diagonal" con $1 \le p < \infty$ fijo (ver [AM2], [HoM, Lemma 2.2]), entonces concluimos que*
>
> $$\fint_Q |f - e^{-t_Q\,L} f| \, dx \lesssim \sum_{k \ge 0} e^{-c\,4^k} \, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} |\nabla f|^p \, dx \right)^{1/p}.$$
>
> *Esta estimación y nuestros resultados de automejora nos permiten concluir que para cualquier $1 < q < p^*$ si $1 \le p < n$ ó $1 < q < \infty$ si $p \ge n$ se tiene*
>
> $$\left(\fint_Q |f - e^{-t_Q\,L} f|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \sum_{k \ge 0} e^{-c\,2^k} \, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} |\nabla f|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Tras el estudio de las automejoras en la escala de los espacios de Lebesgue presentaremos las automejoras de tipo exponencial que generalizan [MaP]. En este trabajo se consideran funcionales a no-decrecientes:

$$a(Q_1) \leq C_a\, a(Q_2),$$

para cada $Q_1 \subset Q_2$. Así suponiendo que f verifica (1.1) se tiene que

$$\|f - f_Q\|_{\exp L(Q)} \leq C\, a(Q).$$

En el Capítulo 4 trabajamos en el espacio $\exp L$ y estudiamos propiedades de automejora de tipo exponencial de desigualdades generalizadas de tipo Poincaré con un funcional no-decreciente a (escribimos $a \in T_\infty$, como en [MaP]). El resultado principal es el Teorema 4.1 (ver el Capítulo 2 para la notación y definiciones previas):

Sea $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 2.6 y $a \in T_\infty$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq a(Q),$$

para todo cubo Q y donde $t_Q = \ell(Q)^m$, entonces, para cada cubo Q, se tiene que

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-6)}\big)\, a(2^k\, Q).$$

También se satisface la versión con peso de la desigualdad anterior.

Como aplicación de este resultado, en el Ejemplo 4.5 mejoramos el resultado que conseguimos en el Ejemplo 3.26: Si $f \in BMO_S$ entonces, para todo Q, se tiene que

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \leq C < \infty.$$

En el Ejemplo 4.7 completamos los ejemplos estudiados en la Sección 3.3.1. En particular, continuamos el estudio del Ejemplo 3.28 y demostramos que si $p \geq n$ y la función verifica una desigualdad de Poincaré reducida, entonces

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \leq C \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k\, Q) \left(\fint_{2^k\, Q} h^p\, dx \right)^{1/p},$$

para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k\geq 0}$.

Por último, en el Ejemplo 4.8 continuamos estudiando desigualdades de tipo Poincaré expandidas y conseguimos la siguiente automejora: Si $f \in \mathcal{M}$ satisface

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, \ell(2^k\, Q) \fint_{2^k\, Q} h\, dx,$$

para todo cubo Q, alguna sucesión $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ de números no-negativos y h una función medible no-negativa, entonces

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \lesssim \sum_{k\geq 0} \hat{\alpha}(k)\, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dx \right)^{1/p},$$

para cierta sucesión $\{\hat{\alpha}(k)\}_{k\geq 0}$.

En la segunda parte del trabajo extendemos esta teoría a los espacios de tipo homogéneo.

Capítulo 2

Preliminares

Trabajamos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue dx (a veces cambiaremos la medida de Lebesgue por la medida de Lebesgue con un peso de Muckenhoupt) y utilizamos la distancia infinita. Obviamente, todos los resultados pueden ser adaptados a la distancia euclídea (pues en $\mathbb{R}^n$ todas las distancias son equivalentes). Recordemos que la distancia infinita entre x e $y \in \mathbb{R}^n$ viene dada por $|x-y| = |x-y|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.

Por otro lado, asumimos (sin pérdida de generalidad) que todos los cubos son de la forma

$$Q = \prod_{i=1}^{n} \big[a_i, a_i + \ell(Q)\big),$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $\ell(Q)$ es la longitud del lado del cubo. Denotamos por $|Q|$ a su medida de Lebesgue (así, $|Q| = l(Q)^n$). Dado un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y un parámetro $\lambda > 0$, denotamos por $\lambda\, Q$ al cubo concéntrico con Q, de forma que $\ell(\lambda\, Q) = \lambda\, \ell(Q)$.

Utilizamos la siguiente descomposición de $\mathbb{R}^n$ en anillos diádicos:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\ge 2} C_k(Q),$$

donde $C_2(Q) = 4\,Q$ y $C_k(Q) = 2^k\,Q \setminus 2^{k-1}\,Q$, para todo $k \ge 3$. Además, si $x \in 2\,Q$ e $y \in C_k(Q)$ para $k \ge 2$ entonces,

$$\frac{|x-y|^m}{\ell(Q)} \ge \lambda_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2, \\ 2^{m\,(k-3)}, & \text{si } k \ge 3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pues si $k = 2$, tenemos que $|x-y| \ge 0$, y por lo tanto, $\lambda_2 = 0$. Si $k \ge 3$, tenemos que

$$|x-y| \ge \frac{1}{2}\,(2^{k-1} - 1)\,\ell(Q) \ge 2^{k-3}\,\ell(Q),$$

y así, $\lambda_k = 2^{m\,(k-3)}$, para $k \geq 3$.

Por otro lado, dado X un espacio de Lebesgue, de Marcinkiewicz o de Orlicz (como L^p, $L^{p,\infty}$ o exp$L$), escribimos:

$$\|f\|_{X,Q} = \|f\|_{X(Q,\frac{dx}{|Q|})} \qquad \text{y} \qquad \|f\|_{X(w),Q} = \|f\|_{X(Q,\frac{w}{w(Q)})}.$$

Finalmente, recordemos que $A \lesssim B$ significa que el cociente A/B está acotado por una constante que no depende de las variables relevantes, A y B. Las letras C y c denotan constantes independientes de las variables esenciales y pueden variar de una línea a otra.

2.1. Cubos diádicos

Un intervalo diádico en $\mathbb{R}$ es un intervalo de la forma

$$[j\,2^{-k},\,(j+1)\,2^{-k}), \qquad \text{con} \quad j,k \in \mathbb{Z}.$$

Definimos estos intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, de modo que diferentes intervalos diádicos de la misma longitud son siempre conjuntos disjuntos.

Un cubo diádico en $\mathbb{R}^n$ es un producto de intervalos diádicos de la misma longitud. Es decir, un cubo diádico es un conjunto de la forma

$$\prod_{i=1}^{n}[j_i\,2^{-k},\,(j_i+1)\,2^{-k}), \qquad \text{con} \quad j_1,\ldots,j_n,k \in \mathbb{Z}.$$

Introducimos la siguiente notación: $\mathcal{D}$ denota el conjunto de todos los cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}_k$ denota la k-ésima generación de $\mathcal{D}$. Esto es, $\mathcal{D}_k$ es el conjunto de todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ cuyos lados miden 2^{-k}, así

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k.$$

Algunas propiedades fundamentales de los cubos diádicos son:

(a) Dos cubos diádicos son disjuntos o uno de ellos está contenido en el otro. Además, cada $\mathcal{D}_k$ proporciona una partición de $\mathbb{R}^n$ en conjuntos disjuntos.

(b) Cada $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece a un único cubo en $\mathcal{D}_k$, para cada $k \in \mathbb{Z}$. De este modo, x genera una única $\{Q_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ cadena de cubos diádicos decreciente (esto es, $Q_{k+1} \subset Q_k$) tal que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $Q_k \in \mathcal{D}_k$ y

$$\{x\} = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} Q_k.$$

Como consecuencia de las propiedades anteriores observamos que cada cubo diádico Q pertenece a una única generación $\mathcal{D}_k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y tiene exactamente 2^n descendientes (subcubos de Q de la siguiente generación $\mathcal{D}_{k+1}$). Además, dado Q (no necesariamente diádico) podemos construir $\mathcal{D}(Q)$ el conjunto de cubos diádicos relativos a Q del siguiente modo

$$\mathcal{D}(Q) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k(Q).$$

Donde $\mathcal{D}_0(Q) = Q$, $\mathcal{D}_1(Q)$ es la primera generación: el conjunto de los 2^n cubos descendientes de Q (construidos por bisección de cada uno de sus lados). Dividiendo de este modo cada cubo descendiente, formamos las familias $\{\mathcal{D}_k(Q)\}_{k\geq 0}$. Este conjunto mantiene las mismas propiedades que $\mathcal{D}$.

2.2. Operador maximal y operador maximal agudo

Dada una función localmente integrable f y un cubo Q, denotamos la media de f en Q del siguiente modo:

$$f_Q = \fint_Q f(x)\,dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx.$$

El operador maximal es el supremo de todas las medias de una función localmente integrable sobre aquellos cubos que contienen a un punto fijo:

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q}(|f|_Q).$$

De esta forma, M está acotado en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es de tipo débil $(1,1)$ y fuerte (p,p) para todo $1 < p < \infty$.

El operador maximal agudo es el supremo de todas las oscilaciones de una función localmente integrable sobre aquellos cubos que contienen a un punto fijo:

$$M^{\#}f(x) = \sup_{x\in Q}\fint_Q |f(y) - f_Q|\,dy.$$

2.3. Pesos

Un peso w es una función no-negativa y localmente integrable. Para cualquier conjunto medible E, denotamos

$$w(E) = \int_E w(x)\,dx.$$

Dada una función medible f y un cubo Q, la media de f en Q respecto de w viene dada por

$$\fint_Q f\,dw = \fint_Q f(x)\,dw(x) = \frac{1}{w(Q)}\int_Q f(x)\,w(x)\,dx.$$

Decimos que w es doblante si:

$$w(2\,Q) \leq C_w\,w(Q) < \infty,$$

para alguna constante $0 < C_w < \infty$ y para cada cubo Q. Una colección de pesos doblantes bien conocida, y con la cual trabajaremos, es la clase de pesos de Muckenhoupt. Ésta se define del siguiente modo:

$$A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p.$$

Para $1 < p < \infty$, decimos que $w \in A_p$ si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que

$$\left(\fint_Q w\,dx\right)\left(\fint_Q w^{1-p'}\,dx\right)^{p-1} \leq C,$$

para todo cubo Q y donde p' tal que $1/p + 1/p' = 1$ (entonces, $1 - p' = -1/(p-1)$). Decimos que $w \in A_1$ si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que para cada cubo Q:

$$\fint_Q w\,dx \leq C\,w(y), \qquad \text{para casi todo } y \in Q;$$

o equivalentemente, si

$$Mw(x) \leq C\,w(x) \qquad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ejemplos clásicos de pesos de Muckenhoupt son $w(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > -n$ (necesitamos que $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$). Se puede comprobar que:

- $w \in A_1 \iff -n < \alpha \leq 0$.
- $w \in A_p \iff -n < \alpha < n\,(p-1)$.
- $w \in A_\infty \iff -n < \alpha$.

Otra clase de pesos con la que trabajaremos es la clase de pesos "Reverse Hölder". Decimos que $w \in RH_p$ con $1 < p < \infty$, si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que para cada cubo Q:

$$\left(\fint_Q w^p\,dx\right)^{1/p} \leq C \fint_Q w\,dx.$$

Decimos que $w \in RH_\infty$ si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que para cada cubo Q:

$$\sup \mathrm{ess}_Q w \leq C \fint_Q w\, dx.$$

Algunas propiedades de estas clases de pesos son:

Teorema 2.1 $\displaystyle\bigcup_{1\leq p<\infty} A_p = \bigcup_{1<p\leq\infty} RH_p.$

Si $w \in A_\infty$ existen $1 \leq p < \infty$ y $1 < s \leq \infty$ de modo que $w \in A_p \cap RH_s$. Así, para cualquier cubo Q y cualquier conjunto medible $S \subset Q$, se tiene:

$$\frac{1}{C_w}\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p \leq \frac{w(S)}{w(Q)} \leq C_w \left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^{1/s'}. \tag{2.2}$$

La primera desigualdad es consecuencia del hecho de que $w \in A_p$ y la segunda de que $w \in RH_s$.

Las clases de Muckenhoupt son crecientes y las clases Reverse Hölder son decrecientes. Esto significa que si $1 < p < q < \infty$ entonces,

$$A_1 \subset A_p \subset A_q \qquad \text{y} \qquad RH_\infty \subset RH_q \subset RH_p.$$

Además satisfacen propiedades de "apertura": Si $w \in A_p$ para algún $1 < p < \infty$ entonces, $w \in A_{p-\epsilon}$ para algún $0 < \epsilon < \infty$. Si $w \in RH_p$ para algún $1 < p < \infty$ entonces, $w \in RH_{p+\epsilon}$ para algún $0 < \epsilon < \infty$ (Teorema de Gehring).

Las demostraciones de estas afirmaciones, así como otras muchas propiedades de estas clases de pesos pueden encontrarse en [Duo], [GC-RF] o [Gra].

2.4. Espacio Exp

Este espacio fue introducido por A. Zygmund (y E. C. Titchmarsh) en 1928 y aparece de modo natural como caso límite de L^p cuando $p \to \infty$ (ver [BeS] y sus referencias). El espacio $\exp L(Q)$ se define como el conjunto de todas las funciones f medibles en Q tales que para alguna constante $C > 0$:

$$\fint_Q \exp\big(C\,|f|\big)\, dx < \infty.$$

La norma de Luxemburg localizada y normalizada de $\exp L(Q)$ viene dada por

$$\|f\|_{\exp L,Q} = \mathrm{ínf}\left\{\lambda > 0 : \fint_Q \left(\exp\frac{|f|}{\lambda} - 1\right) dx \leq 1\right\}.$$

Generalizando, el espacio exponencial con peso $\exp L(Q, w)$ es el conjunto de todas las funciones f medibles en Q tales que para alguna constante $C > 0$:

$$\fint_Q \exp\left(C\,|f|\right) w dx < \infty,$$

con norma:

$$\|f\|_{\exp L(w),Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \fint_Q \left(\exp\frac{|f|}{\lambda} - 1\right) dw \leq 1\right\}.$$

Recomendamos consultar [BeS] y [RR] para conocer mejor el espacio $\exp L$ y los espacios de Orlicz.

2.5. Funcionales

Trabajamos con funcionales de la forma:

$$\begin{aligned} a : \mathcal{Q} \times \mathcal{F} &\longrightarrow [0, +\infty) \\ a(Q, f) &\longmapsto [0, +\infty) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{Q}$ es la familia de cubos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{F}$ cierta familia de funciones. Cuando no nos interese cómo a depende de f, escribimos simplemente $a(Q)$.

El funcional a es doblante si existe alguna constante finita y positiva C_a tal que para cada Q:

$$a(2\,Q) \leq C_a\, a(Q).$$

Recordemos las condiciones D_r, utilizadas en [FPW] para estudiar propiedades de automejora de desigualdades del tipo (4):

Definición 2.2 Sea μ una medida de Borel y $1 \leq r < \infty$. Decimos que el funcional a verifica la condición $D_r(\mu)$ (escribimos $a \in D_r(\mu)$) si existe una constante finita $C_a \geq 1$ para la cual a satisface la siguiente estimación:

$$\sum_i a(Q_i)^r\, \mu(Q_i) \leq C_a^r\, a(Q)^r\, \mu(Q), \tag{2.3}$$

para cada Q y cualquier familia $\{Q_i\}_i$ de subcubos de Q disjuntos dos a dos. Denotamos por $\|a\|_{D_r(\mu)}$ ($\|a\|_{D_r(\mu)} \geq 1$) al ínfimo de las constantes C_a. Cuando μ es la medida de Lebesgue simplemente escribimos D_r y $d\mu = w\,dx$ con w un peso dado, escribimos $D_r(w)$.

La siguiente condición fue introducida en [MaP] con el fin de estudiar resultados de automejora de tipo exponencial de desigualdades clásicas de tipo Poincaré:

Definición 2.3 Decimos que el funcional a es no-decreciente o verifica la condición T_∞ (escribimos $a \in T_\infty$) si existe una constante finita y positiva C_a tal que:

$$a(Q_1) \leq C_a \, a(Q_2), \tag{2.4}$$

para cada $Q_1 \subset Q_2$. Denotamos por $\|a\|_{T_\infty}$ ($\|a\|_{T_\infty} \geq 1$) al ínfimo de las constantes C_a. Si $\|a\|_{T_\infty} = 1$, decimos que a es creciente.

Notar que, debido a la desigualdad de Hölder, las condiciones $D_r(\mu)$ son decrecientes:

$$D_r(\mu) \subset D_s(\mu) \qquad \text{y} \qquad \|a\|_{D_s(\mu)} \leq \|a\|_{D_r(\mu)}, \quad \text{para} \quad 1 \leq s < r < \infty$$

y la condición T_∞ es más fuerte que $D_r(\mu)$, para cualquier $1 \leq r < \infty$.

Veamos algunos ejemplos que más tarde utilizaremos:

- $a(Q) = \ell(Q)^\alpha \dfrac{\nu(Q)}{|Q|} \in D_{\frac{n}{n-\alpha}}$, donde $0 \leq \alpha < n$ y ν es una medida de Borel positiva. Dados Q un cubo y $\{Q_i\}_i$ una familia de subcubos de Q disjuntos dos a dos, utilizando que $n/(n-\alpha) \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_i a(Q_i)^{\frac{n}{n-\alpha}} |Q_i| = \sum_i \nu(Q_i)^{\frac{n}{n-\alpha}} &\leq \Big(\sum_i \nu(Q_i)\Big)^{\frac{n}{n-\alpha}} \leq \nu(Q)^{\frac{n}{n-\alpha}} \\ &= a(Q)^{\frac{n}{n-\alpha}} |Q|.\end{aligned}$$

- $a(Q) = \ell(Q) \left(\dfrac{\nu(Q)}{|Q|}\right)^{1/p} \in D_{\frac{pn}{n-p}}$, donde $1 \leq p < n$ y ν es una medida de Borel positiva. Dados Q un cubo y $\{Q_i\}_i$ una familia de subcubos de Q disjuntos dos a dos, utilizando que $n/(n-p) \geq 1$, tenemos que

$$\sum_i a(Q_i)^{\frac{pn}{n-p}} |Q_i| = \sum_i \nu(Q_i)^{\frac{n}{n-p}} \leq \Big(\sum_i \nu(Q_i)\Big)^{\frac{n}{n-p}} \leq \nu(Q)^{\frac{n}{n-p}} = a(Q)^{\frac{pn}{n-p}} |Q|.$$

  En particular, podemos afirmar que

$$a(Q) = \ell(Q) \left(\fint_Q |\nabla f|^p \, dx\right)^{1/p} \in D_{\frac{pn}{n-p}}, \qquad 1 \leq p < n,$$

  pues basta tomar $\nu(Q) = \displaystyle\int_Q |\nabla f|^p \, dx$.

- $a(Q) = 1 \in T_\infty \subset \bigcap_{p\geq 1} D_p(\mu)$, para cualquier μ medida de Borel positiva.
- $a(Q) = \nu(Q)^\alpha \in T_\infty \subset \bigcap_{p\geq 1} D_p(\mu)$, para cualquier μ medida de Borel positiva y $\alpha \geq 0$. Dados dos cubos $Q_1 \subset Q_2$, tenemos que

$$a(Q_1) = \nu(Q_1)^\alpha \leq \nu(Q_2)^\alpha = a(Q_2).$$

En [Per] o en [MaP] se pueden ver otros funcionales y sus propiedades.

2.6. Aproximaciones de la identidad y semigrupos

Trabajamos con familias de operadores lineales $\{S_t\}_{t>0}$ que juegan el papel de aproximaciones de la identidad generalizadas o de semigrupos. Asumimos que estos operadores conmutan (es decir, $S_t \circ S_s = S_s \circ S_t$, para cada s, $t > 0$). Obsérvese que las familias de operadores que forman un semigrupo (esto es, $S_s\, S_t = S_{s+t}$, para todo s, $t > 0$) conmutan. Puede ser conveniente pensar que $\{S_t\}_{t>0}$ es un semigrupo, pues esta es nuestra principal motivación.

A estos operadores también les exigimos que admitan la siguiente representación integral:

$$S_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} s_t(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Los núcleos $s_t(x,y)$ son funciones medibles verificando la siguiente acotación:

$$|s_t(x,y)| \leq \frac{1}{t^{n/m}}\, g\left(\frac{|x-y|^m}{t}\right), \tag{2.5}$$

para alguna constante positiva m y alguna función g positiva, acotada, no-creciente y que para todo $N \geq 0$ satisfaga que $\lim_{r\to\infty} r^N\, g(r) = 0$. Obsérvese que si en la expresión anterior fijamos $N > 0$, imponemos un decaimiento menor sobre g. Nosotros elegiremos N suficientemente grande de modo que las estimaciones que obtengamos no sean triviales. Por otro lado, se puede ver que el decaimiento de g asegura que la representación integral de S_t tiene sentido para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y que los operadores S_t están uniformemente acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Por otro lado, observamos que (2.5) nos conduce a un reescalamiento entre el parámetro t y el espacio de las variables. Así, de ahora en adelante, dado un cubo Q, escribimos $t_Q = \ell(Q)^m$; de modo que t y S_t están "adaptados" o "escalados" a Q.

Consideramos una amplia clase de funciones para las cuales S_t está bien definido. Ésta es definida en [DuY] del siguiente modo: $\mathcal{M} = \bigcup_{\beta>0} \mathcal{M}_\beta$, donde $\mathcal{M}_\beta$ es el conjunto de funciones medibles f tales que:

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\beta} = \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x)\big| \big(1+|x|\big)^{-\beta}\, dx < \infty.$$

En [DuY], los autores establecen que $\big(\mathcal{M}_\beta, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_\beta}\big)$ es un espacio de Banach y que si $f \in \mathcal{M}$ entonces, $S_t f$ y $S_s\,(S_t f)$ están bien definidas y son finitas en casi todo, para todo t, $s > 0$.

Por último, mencionamos algunos ejemplos de aproximaciones de la identidad. Consideramos un operador elíptico de segundo orden asociado a A, una matriz real $n \times n$ y con coeficientes en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esto es, definimos un operador en forma de divergencia elíptico de segundo orden $Lf = -\mathrm{div}\,(A\,\nabla f)$, entendido en el sentido débil como un operador maximal, acretivo, en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. El operador $-L$ genera el semigrupo $\{e^{-t\,L}\}_{t>0}$ cuyo núcleo del calor tiene cotas gaussianas; esto es, se verifica (2.5) para $m = 2$ y $g(t) = C\,e^{-c\,t}$. En dimensiones $n = 1, 2$ también podemos considerar matrices con valores complejos.

En particular, si A es la matriz identidad, $L = -\Delta$, y $\{e^{t\,\Delta}\}_{t>0}$ es el semigrupo del calor clásico.

También podemos tomar los operadores $S_t = I - (I - e^{-t\,L})^k$, para algún $k \geq 1$ fijo. En este caso perdemos la propiedad de semigrupo. Sin embargo, aún tenemos la regla de conmutación y el decaimiento gaussiano, y podemos aplicar nuestros resultados a la familia $\{S_t\}_{t>0}$. En algunas aplicaciones es interesante tener k suficientemente grande para obtener un decaimiento extra en las estimaciones resultantes (ver [HoM], [Aus], [AM2] y sus referencias).

Capítulo 3

Automejora de tipo L^p en $\mathbb{R}^n$ de desigualdades de Poincaré generalizadas asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos

El propósito de este capítulo es presentar un método general que permita estudiar propiedades de automejora en la escala de los espacios de Lebesgue de desigualdades de tipo Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad o semigrupos, en el marco euclídeo $\mathbb{R}^n$ y con la medida de Lebesgue dx (a veces reemplazamos la medida de Lebesgue por un peso de Muckenhoupt).

El capítulo está organizado del siguiente modo: El resultado principal y sus diferentes extensiones están en la Sección 3.1. La Sección 3.2 contiene las demostraciones de estos resultados. Las aplicaciones se encuentran en la Sección 3.3. Dedicamos las Secciones 3.3.1 y 3.3.3 a estudiar varias desigualdades de tipo Poincaré. Primero comenzamos con una estimación cuyo lado derecho está localizado a un cubo dado. Después, tenemos en cuenta la falta de localización de las aproximaciones de la identidad o de los semigrupos y en el lado derecho escribimos una serie de términos que dependen de algunas de las dilataciones de los cubos. En este último caso obtenemos estimaciones en la escala de los espacios de Orlicz. En la Sección 3.3.2 obtenemos desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales.

3.1. Resultados principales

A continuación establecemos nuestro resultado principal que proporciona estimaciones de automejoras de tipo débil a partir de (1.2) y la condición D_r. Después, mostramos una extensión con pesos (para pesos en la clase de Muckenhoupt). Finalmente, generalizamos la condición D_r permitiendo un funcional diferente en el lado derecho para obtener resultados con y sin pesos.

3.1.1. Automejora de tipo $L^{r,\infty}$

Teorema 3.1 *Sean* $\{S_t\}_{t>0}$ *como en la Sección 2.6,* $1 < r < \infty$ *y* $a \in D_r$*. Si* $f \in \mathcal{M}$ *verifica*

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \leq a(Q), \tag{3.1}$$

para todo cubo Q *y donde* $t_Q = \ell(Q)^m$*, entonces, para cada* Q*, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty},Q} \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{2\,n\,k}\, g(c\, 2^{m\,k})\, a(2^k\, Q). \tag{3.2}$$

Si además a *es doblante, entonces, para cada* Q*:*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty},Q} \leq C\, a(Q).$$

Observación 3.2 La constante $0 < c < 1$ depende sólo de m. Por otro lado, $C \geq 1$ depende de n, m, r, $\|a\|_{D_r}$, $g(0)$, $g(1)$ y del decaimiento de g. En la última expresión, C depende también de la constante que hace que a sea doblante.

3.1.2. Extensiones a espacios con pesos

El Teorema 3.1 se puede extender a los espacios con peso A_∞ del siguiente modo:

Teorema 3.3 *Sean* $\{S_t\}_{t>0}$ *como en la Sección 2.6,* $w \in A_\infty$*,* $1 \leq r < \infty$ *y* $a \in D_r(w) \cap D_1$*. Si* $f \in \mathcal{M}$ *verifica* (3.1)*, entonces, para cada cubo* Q*, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty}(w),Q} \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{2\,n\,k}\, g(c\, 2^{m\,k})\, a(2^k\, Q). \tag{3.3}$$

Si además a *es doblante, podemos escribir* $C\, a(Q)$ *en el lado derecho de la desigualdad anterior.*

Observación 3.4 La constante $0 < c < 1$ depende de m y $C \geq 1$ depende de n, m, r, w, $\|a\|_{D_r(w)}$, $\|a\|_{D_1}$, $g(0)$, $g(1)$ y del decaimiento de g.

Observación 3.5 Obsérvese que (3.1) es una estimación sin peso y a partir de ella conseguimos otra con peso para la oscilación $f - S_{t_Q} f$.

Observación 3.6 En el Teorema 3.1 no tiene sentido considerar el caso $r = 1$, pues (3.1) es más fuerte que (3.2) cuando $r = 1$. Sin embargo, en el Teorema 3.3 sí resulta interesante este caso: (3.1) mide la oscilación generalizada de la función respecto a la medida de Lebesgue mientras que (3.3) lo hace respecto a una medida con peso.

Observación 3.7 En el resultado anterior exigimos la condición D_1 debido a que para demostrar el Teorema 3.3 utilizamos el Lema 3.15 y la Proposición 3.18, más abajo. Sin embargo, si $w \in A_r$ y $a \in D_r(w)$ entonces, automáticamente $a \in D_1$. Para cualquier familia $\{Q_i\}_i \subset Q$ de cubos disjuntos, la desigualdad de Hölder implica que

$$\begin{aligned}
\sum_i a(Q_i)\,|Q_i| &\leq \sum_i a(Q_i)\,w(Q_i)^{\frac{1}{r}}\,w^{1-r'}(Q_i)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq \Big(\sum_i a(Q_i)^r\,w(Q_i)\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\sum_i w^{1-r'}(Q_i)\Big)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq \|a\|_{D_r(w)}\,a(Q)\,w(Q)^{\frac{1}{r}}\,w^{1-r'}(Q)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq C\,\|a\|_{D_r(w)}\,a(Q)\,|Q|.
\end{aligned}$$

Por otro lado, en la demostración del siguiente teorema, observamos que cuando S_t es un semigrupo la condición $a \in D_1$ no es necesaria.

Teorema 3.8 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ un semigrupo, $w \in A_\infty$, $1 \leq r < \infty$ y $a \in D_r(w)$. Si $f \in \mathcal{M}$ y verifica* (3.1)*, entonces, para cada cubo Q, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty}(w),Q} \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{n\,k\,(1+s/r)}\,g(c\,2^{m\,k})\,a(2^k\,Q), \tag{3.4}$$

donde $s = \max\{r, s_0\}$ con s_0 tal que $w \in A_{s_0}$. Si además a es doblante podemos escribir $C\,a(Q)$ en el lado derecho de la desigualdad anterior.

La demostración de este resultado (como se puede ver más adelante) es diferente y más técnica que la del Teorema 3.3. Además, necesitamos una prueba alternativa de la Proposición 3.18.

Observación 3.9 La constante $C \geq 1$ en (3.4) depende de n, m, w, $\|a\|_{D_r}$, $g(0)$, $g(1)$ y del decaimiento de g y $0 < c < 1$ depende de m. Si a es doblante, C depende también de la constante que hace que a sea doblante.

Observación 3.10 Si $w \in A_\infty$ entonces, $w \in A_{s_0}$, para algún $1 \le s_0 < \infty$ (ver [Gra]). Pero, como cabe esperar, cuanto más pequeño sea s_0 y más grande sea r (es decir, cuanto más fuerte sean las condiciones sobre el peso y sobre el funcional), mejor será la estimación (3.4). Obsérvese que si $w = 1$, entonces $s_0 = 1$ y $s = r$, y recuperamos el Teorema 3.1.

3.1.3. Más extensiones

Siguiendo las ideas de [FPW], extendemos los Teoremas 3.1 y 3.3 cambiando la hipótesis sobre el funcional a, de modo que la nueva condición de tipo D_r nos permita escribir un funcional diferente en el lado derecho de la desigualdad (2.3).

Teorema 3.11 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 2.6 y $1 < r < \infty$. Supongamos que los funcionales a y $\bar{a}$ verifican la siguiente condición de tipo D_r:*

$$\sum_i a(Q_i)^r\,|Q_i| \le \bar{a}(Q)^r\,|Q|, \tag{3.5}$$

para cada cubo Q y cualquier familia $\{Q_i\}_i$ de subcubos de Q disjuntos dos a dos. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica (3.1)*, entonces, para cada Q, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty},Q} \le C \sum_{k\ge 0} 2^{2\,n\,k}\, g(c\,2^{m\,k})\,\bar{a}(2^k\,Q). \tag{3.6}$$

Si además $\bar{a}$ es doblante, podemos escribir $C\,\bar{a}(Q)$ en el lado derecho de la desigualdad anterior.

Observación 3.12 Dados dos funcionales a y $\bar{a}$ y abusando en la notación, decimos que $(a, \bar{a}) \in D_r$ si verifican (3.5).

Realizando los cambios oportunos, podemos generalizar el Teorema 3.3 permitiendo un funcional diferente en el lado derecho de la condición $D_r(w)$:

Teorema 3.13 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 2.6, $w \in A_\infty$, $1 \le r < \infty$ y $(a, \bar{a}) \in D_r(w) \cap D_1$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica* (3.1)*, entonces, para cada cubo Q, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty}(w),Q} \le C \sum_{k\ge 0} 2^{2\,n\,k}\, g(c\,2^{m\,k})\,\bar{a}(2^k\,Q). \tag{3.7}$$

Si además $\bar{a}$ es doblante, podemos escribir $C\,\bar{a}(Q)$ en el lado derecho de la desigualdad anterior.

Enunciamos ahora una generalización del Teorema 3.8 en este contexto:

Teorema 3.14 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ un semigrupo, $w \in A_\infty$, $1 \le r < \infty$ y $(a, \bar{a}) \in D_r(w)$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica* (3.1), *entonces, para cada cubo Q, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty}(w),Q} \le C \sum_{k\ge 0} 2^{n\,k\,(1+s/r)}\, g(c\,2^{m\,k})\, \bar{a}(2^k\,Q), \tag{3.8}$$

donde $s = \max\{r, s_0\}$ con s_0 tal que $w \in A_{s_0}$.

3.2. Demostraciones de los resultados principales

3.2.1. Demostración del Teorema 3.1

Definimos un nuevo funcional $\tilde{a} : \mathcal{Q} \times \mathcal{F} \longrightarrow (0, +\infty]$ dado por

$$\tilde{a}(Q) = \sum_{k\ge 0} 2^{2\,n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, a(2^k\,Q). \tag{3.9}$$

Fijamos un cubo Q para el cual $\tilde{a}(Q) < \infty$. En caso contrario, no hay nada que probar. Tomamos

$$G(x) = \big|f(x) - S_{t_Q} f(x)\big|\, \chi_{4\,Q}(x). \tag{3.10}$$

Por el teorema de diferenciación de Lebesgue basta estimar $\|MG\|_{L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n, dx/|Q|)}$, y para ello estudiamos los conjuntos de nivel:

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : MG(x) > t\}, \tag{3.11}$$

para todo $t > 0$. Donde M es el operador maximal sobre cubos no centrados.

Dividimos la demostración en dos casos según sea el tamaño de t: para t pequeño, la estimación es trivial. Para t grande, utilizamos el recubrimiento de Whitney adaptado a Q y ciertos resultados auxiliares sobre $\{S_t\}_{t>0}$.

Las demostraciones de todos los resultados auxiliares que vamos a utilizar las posponemos hasta el final de la Sección 3.2.2.

El siguiente lema es una herramienta muy útil que utilizamos repetidamente y cuya primera consecuencia es que la función G es integrable.

Lema 3.15 *Sea $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 2.6. Si $a \in D_1$ y $f \in \mathcal{M}$ satisface* (3.1), *para cada cubo R y $k \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente estimación:*

$$\fint_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\, dx \le \|a\|_{D_1}\, a(k\,R).$$

Aplicando el resultado anterior, que $a \in D_r \subset D_1$ y $\tilde{a}(Q) < \infty$, tenemos que $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{4Q} |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq 4^n \|a\|_{D_1} a(4\,Q)\,|Q| \leq \frac{c_0}{4^n}\,\tilde{a}(Q)\,|Q| < \infty, \tag{3.12}$$

donde $c_0 = \|a\|_{D_1} g(1)^{-1}$. Si además utilizamos que M es de tipo débil $(1,1)$ con constante 3^n, obtenemos:

$$|\Omega_t| \leq \frac{3^n}{t}\,\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{t}\,|Q|. \tag{3.13}$$

Ahora nuestro objetivo es mostrar la siguiente desigualdad que es la clave de la demostración del teorema. Sea $q > 1$ suficientemente grande, a elegir. Veamos que dado $0 < \lambda < 1$, para todo $t > 0$, se satisface la siguiente desigualdad de tipo buenas-λ

$$|\Omega_{q\,t} \cap Q| \leq c\,\lambda\,|\Omega_t \cap Q| + c\left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda\,t}\right)^r |Q|, \tag{3.14}$$

donde $c \geq 1$ depende de n, $\|a\|_{D_r}$ y g.

Si $0 < t \leq c_0\,\tilde{a}(Q)$ y $0 < \lambda < 1$, (3.14) es inmediata:

$$|\Omega_{q\,t} \cap Q| \leq |Q| < \left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda\,t}\right)^r |Q| \leq c\,\lambda\,|\Omega_t \cap Q| + c\left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda\,t}\right)^r |Q|.$$

Para estudiar el otro caso ($t > c_0\,\tilde{a}(Q)$), construimos una malla de $\mathbb{R}^n$ adaptada al cubo fijado Q. Esta malla se forma considerando traslaciones y dilataciones de la estructura diádica clásica del siguiente modo: dado $Q = \prod_{i=1}^n \big[a_i, a_i + \ell(Q)\big)$, denotamos por $\mathcal{D}_Q$ a la colección de cubos diádicos inducidos por Q y por $\mathcal{D}_{Q,k}$ a su k-ésima generación. Esto es:

$$\mathcal{D}_Q = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{Q,k}$$

y, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}_{Q,k}$ es el conjunto de cubos de la forma:

$$\prod_{i=1}^n \big[a_i + 2^k\,m_i\,\ell(Q), a_i + 2^k\,(m_i+1)\,\ell(Q)\big),$$

con $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$. Por construcción, esta descomposición diádica tiene las siguientes características:

(i) Si $R \in \mathcal{D}_{Q,k}$ entonces, $\ell(R) = 2^k\,\ell(Q)$.

(*ii*) Si $R_1, R_2 \in \mathcal{D}_Q$ y $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ entonces, o bien $R_1 \subset R_2$ o bien $R_1 \supset R_2$.

(*iii*) $\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigcup_{R \in \mathcal{D}_{Q,k}} R$, $\{R\}_{R \in \mathcal{D}_{Q,k}}$ es una familia de cubos disjuntos dos a dos y $Q \in \mathcal{D}_{Q,0}$.

Una vez construida la malla diádica, establecemos la siguiente versión del lema de recubrimiento de Whitney:

Teorema 3.16 *Dados $Q \subset \mathbb{R}^n$ y Ω un subconjunto propio y abierto de $\mathbb{R}^n$, existe una familia de cubos de Whitney $\{Q_i\}_i \subset \mathcal{D}_Q$ con las siguientes propiedades:*

(*a*) $\Omega = \displaystyle\bigcup_i Q_i$.

(*b*) *Los cubos son maximales respecto a la inclusión y, así, disjuntos dos a dos.*

(*c*) $\ell(Q_i) < d(Q_i, \Omega^c) \leq 4\,\ell(Q_i)$ *y por lo tanto,* $10\,Q_i \cap \Omega^c \neq \emptyset$.

Obsérvese que Ω_t (dado por (3.11)) es un conjunto abierto, pues es un conjunto de nivel de MG (función semicontinua inferiormente). Además, sabemos que $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $|\Omega_t| < \infty$, y por lo tanto, $\Omega_t \subsetneq \mathbb{R}^n$. Entonces, podemos aplicar el teorema anterior a Ω_t y obtenemos el siguiente resultado:

Lema 3.17 *Dados Q, $t > 0$ y $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Tomamos Ω_t definido por* (3.11) *y $\{Q_i^t\}_i$ su familia de cubos de Whitney. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(*d*) $M\big(G\,\chi_{(2\,Q_i^t)^c}\big)(x) \leq 23^n\,t$, *para todo* $x \in Q_i^t$.

(*e*) $\displaystyle\fint_{2^k\,Q_i^t} G\,dx \leq 10^n\,t$, *para todo* $k \geq 1$.

Así, dada la estructura diádica $\mathcal{D}_Q$ y aplicando el Teorema 3.16 y el Lema 3.17, cubrimos el conjunto Ω_t con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i$, para cada $t > c_0\,\tilde{a}(Q)$. Además, como consecuencia de (3.13) y $t > c_0\,\tilde{a}(Q)$, tenemos que $|\Omega_t| < |Q|$. Esto junto con el hecho de que $Q_i^t \subset \Omega_t$ implica que para todo i:

$$\ell(Q_i^t) < \ell(Q). \tag{3.15}$$

A continuación estudiamos $|\Omega_{q\,t} \cap Q|$: utilizando que los conjuntos de nivel están anidados, escribimos la siguiente cadena de igualdades

$$|\Omega_{q\,t} \cap Q| = |\Omega_{q\,t} \cap \Omega_t \cap Q| = \sum_i \big|\{x \in Q_i^t \cap Q : MG(x) > q\,t\}\big|.$$

Debido a que en el sumatorio anterior sólo contribuyen aquellos Q_i^t tales que $Q_i^t \cap Q \neq \emptyset$, de ahora en adelante, sólo consideramos los cubos $Q_i^t \subset Q$ (pues, $Q_i^t \cap Q \neq \emptyset$, los cubos Q_i^t son diádicos respecto a Q y verifican (3.15)).

Por otro lado, utilizando el apartado (d) del Lema 3.17, podemos localizar $G(x)$ cuando $x \in Q_i^t$ del siguiente modo:

$$MG(x) \leq M(G\,\chi_{2\,Q_i^t})(x) + M(G\,\chi_{(2\,Q_i^t)^c})(x) \leq M(G\,\chi_{2\,Q_i^t})(x) + 23^n\,t.$$

De este modo, si $q > 23^n$, tenemos que

$$|\Omega_{q\,t} \cap Q| \leq \sum_{i:Q_i^t \subset Q} \big|\{x \in Q_i^t : M(G\,\chi_{2\,Q_i^t})(x) > (q - 23^n)\,t\}\big|. \tag{3.16}$$

Notar que a pesar de que la estimación de G está localizada al cubo $2\,Q_i^t$ esta función involucra a Q en su término $S_{t_Q}f$. Para reemplazar $S_{t_Q}f$ por $S_{t_{Q_i^t}}f$, necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 3.18 *Para todo $x \in 2\,Q_i^t$, se tiene que*

$$\big|S_{t_{Q_i^t}}f(x) - S_{t_Q}f(x)\big| \leq C_1\,\big(t + \tilde{a}(Q)\big),$$

donde C_1 depende de n, $\|a\|_{D_1}$ y g.

Observación 3.19 En la demostración de este resultado sólo utilizaremos que $a \in D_1$ y no la condición más fuerte $a \in D_r$.

Así, para $t > c_0\,\tilde{a}(Q)$, tenemos:

$$\begin{aligned} M(G\,\chi_{2\,Q_i^t})(x) &= M\big(|f - S_{t_Q}|\,\chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) \\ &\leq M\big(|f - S_{t_{Q_i^t}}f|\,\chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) + C_1\,\big(t + \tilde{a}(Q)\big) \\ &\leq M\big(|f - S_{t_{Q_i^t}}f|\,\chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) + C_1\,(1 + c_0^{-1})\,t. \end{aligned}$$

Ahora elegimos q suficientemente grande de modo que $b = q - 23^n - C_1\,(1 + c_0^{-1}) > 0$ y tomamos $0 < \lambda < 1$. Entonces, la estimación anterior junto con (3.16) implican que

$$\begin{aligned} |\Omega_{q\,t} \cap Q| &\leq \sum_{i:Q_i^t \subset Q} \big|\{x \in Q_i^t : M\big((f - S_{t_{Q_i^t}}f)\,\chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) > b\,t\}\big| \\ &= \sum_{\Gamma_1} \cdots + \sum_{\Gamma_2} \cdots = I + II, \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde

$$\Gamma_1 = \Big\{ Q_i^t \subset Q : \fint_{2\,Q_i^t} |f - S_{t_{Q_i^t}} f| \, dx \leq \lambda\, t \Big\} \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \Big\{ Q_i^t \subset Q : \fint_{2\,Q_i^t} |f - S_{t_{Q_i^t}} f| \, dx > \lambda\, t \Big\}.$$

Estudiamos cada uno de los sumandos por separado. Para I utilizamos que la función maximal es de tipo débil $(1,1)$ y el Teorema 3.16, y obtenemos que

$$I \leq \frac{3^n}{b\,t} \sum_{\Gamma_1} \int_{2\,Q_i^t} |f - S_{t_{Q_i^t}} f| \, dx \leq \frac{\lambda\, 6^n}{b} \sum_{i:Q_i^t \subset Q} |Q_i^t| \leq \frac{\lambda\, 6^n}{b} |\Omega_t \cap Q|.$$

Para estimar II primero recordamos que $a \in D_r \subset D_1$ y observamos que el hecho de que $Q_i^t \in \Gamma_2$ y el Lema 3.15 implican que

$$\lambda\, t < \fint_{2\,Q_i^t} |f - S_{t_{Q_i^t}} f| \, dx \leq \|a\|_{D_1} \, a(2\,Q_i^t) \tag{3.18}$$

y por lo tanto,

$$1 < \|a\|_{D_1}^r \left(\frac{a(2\,Q_i^t)}{\lambda\, t} \right)^r.$$

Así, la siguiente desigualdad es inmediata

$$II \leq \sum_{\Gamma_2} |Q_i^t| \leq \|a\|_{D_1}^r \sum_{i:Q_i^t \subset Q} \left(\frac{a(2\,Q_i^t)}{\lambda\, t} \right)^r |2\,Q_i^t|.$$

El siguiente paso es aplicar la condición D_r, aunque no podemos hacerlo directamente debido a que los cubos de la familia $\{2\,Q_i^t\}_i$ pueden no ser disjuntos dos a dos. Sin embargo, como veremos más adelante, $\{2\,Q_i^t\}_i \subset 2\,Q$ y además estos cubos pueden ser separados en c_n (con $c_n \leq 144^n$) familias $\mathcal{F}_j$ de cubos disjuntos dos a dos. Entonces podemos utilizar la condición $a \in D_r$ sobre cada familia $\mathcal{F}_j$ y así, obtenemos que

$$\begin{aligned} II &\leq \|a\|_{D_1}^r \sum_{j=1}^{c_n} \sum_{i:Q_i^t \in \mathcal{F}_j} \left(\frac{a(2\,Q_i^t)}{\lambda\, t} \right)^r |2\,Q_i^t| \leq \|a\|_{D_1}^r \, c_n \left(\frac{\|a\|_{D_r} \, a(2\,Q)}{\lambda\, t} \right)^r |2\,Q| \\ &\lesssim \|a\|_{D_r}^r \left(\frac{c_0\, \tilde{a}(Q)}{\lambda\, t} \right)^r |Q|. \end{aligned}$$

Volviendo a (3.17) con las estimaciones obtenidas para I y II, concluimos que

$$|\Omega_{q\,t} \cap Q| < c\,\lambda\, |\Omega_t \cap Q| + c \left(\frac{c_0\, \tilde{a}(Q)}{\lambda\, t} \right)^r |Q|,$$

para todo $t > c_0\, \tilde{a}(Q)$ y donde c depende de n, $\|a\|_{D_r}$ y g.

Para completar la demostración de (3.14) tenemos que probar la afirmación anterior: $\{2\,Q_i^t\}_i \subset 2\,Q$ y los cubos pueden ser separados en c_n (con $c_n \leq 144^n$) familias $\mathcal{F}_j$ de cubos disjuntos dos a dos.

El hecho de que $2\,Q_i^t \subset 2\,Q$ es consecuencia de (3.15): si $x \in 2\,Q_i^t$ y x_i y x_Q son los centros de Q_i^t y Q, respectivamente, entonces

$$|x - x_Q| \leq |x - x_i| + |x_i - x_Q| \leq \ell(Q_i^t) + \frac{1}{2}\,\ell(Q) \leq \ell(Q),$$

por lo tanto, $x \in 2\,Q$. Obsérvese que hemos usado que Q, $Q_i^t \in \mathcal{D}_Q$ y (3.15) implican que $\ell(Q_i^t) \leq \ell(Q)/2$.

Veamos ahora que $2\,Q_i^t \subset \Omega_t$, para todo i: primero, fijamos $x \in 2\,Q_i^t$, y por lo tanto $d(x, Q_i^t) \leq \ell(Q_i^t)/2$. Esto junto con la definición de distancia y la propiedad fundamental del ínfimo implica que dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in Q_i^t$ tal que

$$|x - x_\epsilon| \leq d(x, Q_i^t) + \epsilon \leq \frac{\ell(Q_i^t)}{2} + \epsilon.$$

Por lo tanto, si $y \in \Omega_t^c$, tenemos que

$$d(Q_i^t, \Omega_t^c) \leq |x_\epsilon - y| \leq |x - y| + |x_\epsilon - x| \leq |x - y| + \frac{\ell(Q_i^t)}{2} + \epsilon.$$

Puesto que la desigualdad anterior se satisface para todo $x \in 2\,Q_i^t$, $y \in \Omega_t^c$ y para todo $\epsilon > 0$, podemos utilizar de nuevo la definición de distancia y escribir que

$$d(Q_i^t, \Omega_t^c) \leq d(2\,Q_i^t, \Omega_t^c) + \frac{\ell(Q_i^t)}{2}.$$

Por último, observamos que esta desigualdad y el apartado (c) del Teorema 3.16 implican que

$$0 < \frac{\ell(Q_i^t)}{2} < d(2\,Q_i^t, \Omega_t^c) \leq 4\,\ell(Q_i^t), \tag{3.19}$$

y en particular, $2\,Q_i^t \subset \Omega_t$, para todo i.

Veamos ahora que para cada $x \in \Omega_t$, se tiene que si $x \in \bigcap_{i=1}^k 2\,Q_i^t$, entonces $k \leq 48^n$: sea $d = d(x, \Omega_t^c) > 0$, comprobamos que

$$\bigcup_{i=1}^k 2\,Q_i^t \subset Q(x, 8\,d), \tag{3.20}$$

donde $Q(x, 8\,d)$ es el cubo centrado en x con lado de longitud $8\,d$. Para ello tomamos $y \in \bigcup_{i=1}^k 2\,Q_i^t$. Así, x, $y \in 2\,Q_{i_0}^t$ para algún $1 \leq i_0 \leq k$ y de (3.19) se sigue que

$$|y - x| \leq 2\,\ell(Q_{i_0}^t) < 4\,d(2\,Q_{i_0}^t, \Omega_t^c) \leq 4\,d(x, \Omega_t^c) = 4\,d.$$

Por lo tanto, $y \in Q(x, 8\,d)$, y queda probado (3.20). Por otro lado, el hecho de que $x \in \bigcap_{i=1}^k 2\,Q_i^t$ y (3.19) implican que

$$d = d(x, \Omega_t^c) \leq d(2\,Q_i^t, \Omega_t^c) + \ell(2\,Q_i^t) \leq 6\,\ell(Q_i^t).$$

Por último, utilizando que los cubos de Whitney son disjuntos dos a dos, la estimación previa y (3.20), obtenemos que $k \leq 48^n$:

$$\left(\frac{d}{6}\right)^n k \leq \sum_{i=1}^k |Q_i^t| = \Big|\bigcup_{i=1}^k Q_i^t\Big| \leq \Big|\bigcup_{i=1}^k 2\,Q_i^t\Big| \leq \big|Q(x, 8\,d)\big| = (8\,d)^n.$$

Con todo esto, podemos concluir que $\sum_i \chi_{2\,Q_i^t} \leq 48^n\,\chi_{2\,Q}$.

Para terminar necesitamos el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en la Sección 3.2.2:

Proposición 3.20 *Dado un cubo Q y $\mathcal{F} = \{Q_i\}_i$ una familia de subcubos de Q con $\sum_i \chi_{Q_i}(x) \leq N$, para algún $1 \leq N < \infty$. La familia $\mathcal{F}$ se puede dividir en a lo más $3^n\,N$ subfamilias y cada una de ellas está formada por cubos disjuntos dos a dos.*

Aplicando la proposición anterior, descomponemos $\{2\,Q_i^t\}_i$ en c_n (con $c_n \leq 144^n$) familias $\{\mathcal{F}_j\}_{j=1}^{c_n}$ de cubos disjuntos dos a dos. De este modo, concluimos la demostración de (3.14).

Para completar la demostración del Teorema 3.1 fijamos $N > 0$ y de (3.14) se sigue que

$$\begin{aligned}\sup_{0<t\leq N/q} t^r\,\frac{|\Omega_{q\,t} \cap Q|}{|Q|} &\leq c\,\lambda \sup_{0<t\leq N/q} t^r\,\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|} + c\left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda}\right)^r \\ &\leq c\,\lambda \sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|} + c\left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda}\right)^r.\end{aligned}$$

Cambiando de variable y multiplicando ambos miembros de la desigualdad anterior por q^r, obtenemos

$$\sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|} \leq c\,\lambda\,q^r \sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|} + c\,q^r \left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda}\right)^r. \tag{3.21}$$

Si tomamos $0 < \lambda < \text{mín}\{1, (c\,q^r)^{-1}\}$, podemos esconder el primer término en el lado derecho de la desigualdad anterior, ya que

$$\sup_{0<t\leq N} t^r \frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|} \leq N^r < \infty,$$

y conseguimos que

$$\sup_{0<t\leq N} t^r \frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|} \leq C\,\tilde{a}(Q)^r.$$

Así, basta tomar el límite cuando $N \to \infty$ para concluir que

$$\|MG\|_{L^{r,\infty},Q} \leq C\,\tilde{a}(Q).$$

Esta estimación junto con el teorema de diferenciación de Lebesgue implican la estimación deseada (3.2). ∎

3.2.2. Demostración de los resultados auxiliares

Demostración del Lema 3.15 Cubrimos el cubo $k\,R$ con la familia $\{R_i\}_{i=1}^{k^n}$ formada por subcubos de $k\,R$, disjuntos dos a dos y con lados de longitud $\ell(R)$ (y por lo tanto $t_{R_i} = t_R$). De este modo, podemos escribir:

$$\int_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dy = \sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} |f - S_{t_R} f|\,dy = \sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} |f - S_{t_{R_i}} f|\,dy.$$

Para estimar la última suma utilizamos que f satisface (3.1) y $a \in D_1$ y obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} |f - S_{t_{R_i}} f|\,dy \leq \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\,|R_i| \leq \|a\|_{D_1}\, a(k\,R)\,|k\,R|.$$

De este modo, tenemos que

$$⨍_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dy \leq \|a\|_{D_1}\, a(k\,R).$$

∎

Demostración del Teorema 3.16 A pesar de que la prueba de este resultado es clásica (ver por ejemplo [Gra]), la escribimos con detalle debido a que para nosotros es crucial tener cubos diádicos en $\mathcal{D}_Q$. Recordemos que $\mathcal{D}_Q$ es la colección de cubos diádicos inducidos por Q y $\mathcal{D}_{Q,k}$ es la colección formada por cubos de la k-ésima generación, esto es, con lado $2^k\,\ell(Q)$.

Fijamos Q y definimos $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k$, donde

$$\Omega_k = \big\{x \in \Omega : 2^k\,\ell(Q) < d(x, \Omega^c) \leq 2^{k+1}\,\ell(Q)\big\}.$$

Tomamos la familia $\mathcal{F}$ dada por

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big\{R \in \mathcal{D}_{Q,k} : R \cap \Omega_{k+1} \neq \emptyset\big\}.$$

Vamos a comprobar que los cubos de $\mathcal{F}$ tienen las propiedades (a) y (c). En primer lugar, satisfacen (c): si $R \in \mathcal{F}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $R \in \mathcal{D}_{Q,k}$ y $R \cap \Omega_{k+1} \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe algún $x \in R \cap \Omega_{k+1}$ con

$$d(x, \Omega^c) \leq \ell(R) + d(R, \Omega^c) \qquad \text{y} \qquad 2^{k+1}\,\ell(Q) < d(x, \Omega^c) \leq 2^{k+2}\,\ell(Q).$$

De estas observaciones se sigue que

$$\begin{aligned}\ell(R) = 2^k\,\ell(Q) &< d(x, \Omega^c) - 2^k\,\ell(Q) = d(x, \Omega^c) - \ell(R) \leq d(R, \Omega^c) \leq d(x, \Omega^c)\\ &\leq 2^{k+2}\,\ell(Q) = 4\,\ell(R),\end{aligned}$$

consecuentemente, $\ell(R) < d(R, \Omega^c) \leq 4\,\ell(R)$.

Para mostrar que $10\,R \cap \Omega^c \neq \emptyset$ utilizamos la definición de distancia y la propiedad fundamental del ínfimo. Pues éstas nos aseguran que existe $y_0 \in \Omega^c$ tal que $d(y_0, R) < d(R, \Omega^c) + \ell(R)/2$, y esto junto con la propiedad que acabamos de probar implica que

$$|y_0 - x_R| \leq d(y_0, R) + \frac{1}{2}\,\ell(R) < d(R, \Omega^c) + \ell(R) \leq 5\,\ell(R),$$

donde x_R es el centro de R. Así, $y_0 \in 10\,R \cap \Omega^c$ y (c) queda probada.

Ahora comprobamos (a): $\Omega = \bigcup_{R\in\mathcal{F}} R$. Notar que (c) implica que la distancia de cada cubo $R \in \mathcal{F}$ a Ω^c es estrictamente positiva, y por lo tanto, $\bigcup_{R\in\mathcal{F}} R \subset \Omega$. La otra inclusión es consecuencia de que $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ junto con el hecho de que cada generación de cubos diádicos proporciona una partición del espacio (ver (iii) en la página 39).

Notar que los cubos de la colección $\mathcal{F}$ no son necesariamente disjuntos dos a dos. Para solucionarlo seleccionamos los cubos maximales de $\mathcal{F}$, eliminando aquellos que están contenidos en algún otro de la colección. Esto es, para cada cubo $R \in \mathcal{F}$ seleccionamos el único (pues los cubos son diádicos) cubo maximal $R^{\text{máx}} \in \mathcal{F}$ que contiene a R. Veamos por reducción al absurdo que tal cubo existe: en caso contrario tendríamos una sucesión creciente infinita de cubos $\{R_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{F}$ contenidos en R y verificando (c) (pues estos cubos están en $\mathcal{F}$). En particular, verifican que

$$\ell(R_k) < d(R_k, \Omega^c) \leq d(R, \Omega^c) \leq 4\,\ell(R),$$

para cada $k \geq 1$. Lo que nos conduce a una contradicción. Así, tales cubos maximales existen y $\{Q_i\}_i$ es esta familia de cubos. Además, por maximalidad, estos cubos son disjuntos dos a dos. ∎

Demostración del Lema 3.17 Ya hemos observado que Ω_t es un conjunto propio y abierto de $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 3.16 para cubrir Ω_t con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i \subset \mathcal{D}_Q$.

Fijamos un cubo Q_i^t y $x \in Q_i^t$. Veamos que cualquier otro cubo R tal que $x \in R$ y $R \cap (2\,Q_i^t)^c \neq \emptyset$ satisface que $\ell(Q_i^t) \leq 2\,\ell(R)$: tomamos $y \in R \cap (2\,Q_i^t)^c$ y denotamos por x_R y x_i a los centros de R y Q_i^t respectivamente. Entonces, tenemos que

$$\ell(Q_i^t) \leq |y - x_i| \leq |y - x_R| + |x_R - x| + |x - x_i| \leq \frac{1}{2}\,\ell(R) + \frac{1}{2}\,\ell(R) + \frac{1}{2}\,\ell(Q_i^t).$$

De donde se sigue que $\ell(Q_i^t) \leq 2\,\ell(R)$.

Por otro lado, el apartado (c) del Teorema 3.16 nos asegura que existe $z \in 10\,Q_i^t \cap \Omega_t^c$. Además, $z \in 23\,R$:

$$|z - x_R| \leq |z - x_i| + |x_i - x| + |x - x_R| \leq \frac{10}{2}\,\ell(Q_i^t) + \frac{1}{2}\,\ell(Q_i^t) + \frac{1}{2}\,\ell(R) \leq \frac{23}{2}\,\ell(R).$$

Por último, utilizando que $z \in 23\,R \cap \Omega_t^c$, tenemos que

$$\fint_R G\chi_{(2\,Q_i^t)^c}\,dy \leq 23^n \fint_{23\,R} G\,dy \leq 23^n\,MG(z) \leq 23^n\,t,$$

puesto que $z \in \Omega_t^c$. Tomando el supremo sobre los cubos R tales que $R \ni x$ y $R \cap (2\,Q_i^t)^c \neq \emptyset$, conseguimos la estimación deseada (d).

Para comprobar (e) volvemos a utilizar el apartado (c) del Teorema 3.16 y tomamos $z \in 10\,Q_i^t \cap \Omega_t^c$. Entonces, si $0 \leq k \leq 3$, tenemos que

$$\fint_{2^k\,Q_i^t} G\,dx \leq 10^n \fint_{10\,Q_i^t} G\,dx \leq 10^n\,MG(z) \leq 10^n\,t;$$

y si $k \geq 4$,

$$\fint_{2^k\,Q_i^t} G\,dx \leq MG(z) \leq t,$$

pues $z \in 10\,Q_i^t \cap \Omega_t^c \subset 2^k\,Q_i^t \cap \Omega_t^c$. ∎

Demostración de la Proposición 3.18 Elegimos $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\ell(Q) = 2^{k_i}\,\ell(Q_i^t), \tag{3.22}$$

pues $Q, Q_i^t \in \mathcal{D}_Q$. Entonces, (3.15) y $Q_i^t \in \mathcal{D}_Q$ implican que $\ell(Q_i^t) \le \ell(Q)/2$, y por lo tanto,

$$k_i \ge 1 \qquad \text{y} \qquad 2^{k_i}\, Q_i^t \subset 2\, Q. \tag{3.23}$$

Por otro lado, la regla de la conmutación implica que para cada $x \in 2\, Q_i^t$:

$$\big|S_{t_{Q_i^t}} f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| \le \big|S_{t_{Q_i^t}}\big(f - S_{t_Q} f\big)(x)\big| + \big|S_{t_Q}\big(f - S_{t_{Q_i^t}} f\big)(x)\big| = I + II.$$

Estimamos cada término por separado. Primero observamos que (3.23) implica que si $y \in 2^{k_i}\, Q_i^t$ entonces, $y \in 2\, Q \subset 4\, Q$, y por lo tanto $\big|f(y) - S_{t_Q} f(y)\big| = G(y)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} I = \big|S_{t_{Q_i^t}}\big(f - S_{t_Q} f\big)(x)\big| &\le \frac{1}{|Q_i^t|} \int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i^t}}\Big) \big|f(y) - S_{t_Q} f(y)\big|\, dy \\ &= \frac{1}{|Q_i^t|} \int_{2^{k_i}\, Q_i^t} \cdots\, dy + \frac{1}{|Q_i^t|} \int_{(2^{k_i}\, Q_i^t)^c} \cdots\, dy \\ &\le \frac{1}{|Q_i^t|} \int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i^t}}\Big) G(y)\, dy + \frac{1}{|Q_i^t|} \int_{(2^{k_i}\, Q_i^t)^c} \cdots\, dy = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Estudiamos I_1: para beneficiarnos del decaimiento de g, escribimos $\mathbb{R}^n$ como la unión de los anillos $\{C_k(Q_i^t)\}_{k\ge 2}$. Recordemos que si $x \in 2\, Q_i^t$ e $y \in C_k(Q_i^t)$ entonces, se verifica (2.1):

$$\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i^t}} \ge \lambda_k, \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2, \\ 2^{m\,(k-3)}, & \text{si } k \ge 3. \end{cases}$$

Esta observación y el apartado (e) del Lema 3.17 implican la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} I_1 &\le \frac{1}{|Q_i^t|} \sum_{k\ge 2} g(\lambda_k) \int_{C_k(Q_i^t)} G\, dy \le \sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\, g(\lambda_k) \fint_{2^k\, Q_i^t} G\, dy \le 10^n\, t \sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\, g(\lambda_k) \\ &\le C\, t. \end{aligned}$$

Continuamos estudiando I_2. Aplicamos (3.22), (3.23), el Lema 3.15 y utilizamos que $C_k(Q_i^t) \subset 2^k\, Q_i^t \subset 2^k\, Q$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{|Q_i^t|} \sum_{k\ge k_i+1} \int_{C_k(Q_i^t)} g\Big(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i^t}}\Big) \big|f(y) - S_{t_Q} f(y)\big|\, dy \\ &\le \frac{2^{n\,k_i}}{|Q|} \sum_{k\ge k_i+1} g(\lambda_k) \int_{C_k(Q_i^t)} |f - S_{t_Q} f|\, dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|Q|} \sum_{k \geq k_i+1} 2^{n\,k}\, g(\lambda_k) \int_{C_k(Q_i^t)} |f - S_{t_Q} f|\, dy \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \sum_{k \geq 2} 2^{n\,k}\, g(\lambda_k) \int_{2^k\,Q} \big|f - S_{t_Q} f\big|\, dy \\
&\leq \|a\|_{D_1} \sum_{k \geq 2} 2^{2\,n\,k}\, g(\lambda_k)\, a(2^k\,Q) \\
&\leq C\, \tilde{a}(Q).
\end{aligned}
$$

Obsérvese que de las estimaciones obtenidas para I_1 y I_2 se sigue que $I \lesssim t + \tilde{a}(Q)$.

Ahora vamos a mostrar que $II \lesssim \tilde{a}(Q)$. Primero notar que (3.22) implica que $2^k\,Q_i^t \subset 2^{k-k_i+1}\,Q$, para cada $k \geq k_i$. Argumentando como antes, utilizando los cálculos del Lema 3.15, que $a \in D_1$, (3.22) y (3.23), conseguimos la estimación buscada:

$$
\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} g\bigg(\frac{|x-y|^m}{t_Q}\bigg)\, \big|f(y) - S_{t_{Q_i^t}} f(y)\big|\, dy \\
&= \frac{1}{|Q|} \int_{2^{k_i+1}\,Q_i^t} \cdots\, dy + \frac{1}{|Q|} \int_{(2^{k_i+1}\,Q_i^t)^c} \cdots\, dy \\
&\leq \frac{g(0)}{|Q|} \int_{2^{k_i+1}\,Q_i^t} \big|f - S_{t_{Q_i^t}} f\big|\, dy + \frac{1}{|Q|} \sum_{k \geq k_i+2} g\bigg(\frac{\lambda_k\, t_{Q_i^t}}{t_Q}\bigg) \int_{2^k\,Q_i^t} \big|f - S_{t_{Q_i^t}} f\big|\, dy \\
&\leq g(0)\, \|a\|_{D_1}\, a(4\,Q)\, \frac{|4\,Q|}{|Q|} + \|a\|_{D_1} \sum_{k \geq k_i+2} g\big(2^{m\,(k-k_i-3)}\big)\, a(2^{k-k_i+1}\,Q)\, \frac{|2^{k-k_i+1}\,Q|}{|Q|} \\
&\leq \sum_{k \geq 2} g\big(2^{m\,(k-4)}\big)\, a(2^k\,Q)\, 2^{k\,n} \\
&\leq C\, \tilde{a}(Q).
\end{aligned}
$$

∎

Para demostrar la Proposición 3.20 necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 3.21 *Dado un cubo Q, cualquier familia $\mathcal{F} = \{Q_i\}_i$ de subcubos de Q con $\sum_i \chi_{Q_i}(x) \leq N$, para algún $1 \leq N < \infty$, tiene un cubo con tamaño máximo $Q^{max} \in \mathcal{F}$ tal que $|Q^{max}| = \sup_{Q_i \in \mathcal{F}} |Q_i|$.*

Demostración Sean $\ell_0 = \sup_{Q_i \in \mathcal{F}} \ell(Q_i)$ y $k \geq 0$ tal que $2^{-(k+1)}\,\ell(Q) < \ell_0 \leq 2^{-k}\,\ell(Q)$. Sean $N_k = (2^{k+1}+1)^n$ y $\{x_i\}_{i=1}^{N_k}$ el conjunto de vértices de todos los subcubos diádicos de Q con lados de longitud $2^{-(k+1)}\,\ell(Q)$.

Supongamos que tal cubo Q^{max} no existe. Entonces, tendríamos que $\#\mathcal{F}_\infty = \infty$, donde

$$\mathcal{F}_\infty = \{P \in \mathcal{F} : 2^{-(k+1)}\,\ell(Q) < \ell(P) < \ell_0\}.$$

Definimos la siguiente partición de $\mathcal{F}_\infty$:

$$\mathcal{F}_i = \{P \in \mathcal{F}_\infty : x_i \in P\}, \qquad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq N_k.$$

Observamos que $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ (notar que $\ell(P) > 2^{-(k+1)}\,\ell(Q)$ y para cada $x \in Q$ existe x_j tal que $|x - x_j| < 2^{-(k+1)}\,\ell(Q)$).

Como $\#\mathcal{F}_\infty = \infty$, alguna de estas familias, digamos $\mathcal{F}_1$, tiene infinitos cubos, y esto nos conduce a una contradicción (pues por la propiedad de solapamiento $N \geq \sum_{P\in\mathcal{F}_1} \chi_P(x_1) = \infty$). ∎

Demostración de la Proposición 3.20 Descomponemos $\mathcal{F}$ en las diferentes subfamilias de cubos disjuntos dos a dos que describimos a continuación. Por recurrencia formamos $\mathcal{F}_1 = \{Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, \dots\}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
&|Q_1^1| = \sup\{|Q_i| : \; Q_i \in \mathcal{F}\}\\
&|Q_2^1| = \sup\{|Q_i| : \; Q_i \in \mathcal{F}, \; Q_i \cap Q_1^1 = \emptyset\}\\
&\quad \dots\\
&|Q_j^1| = \sup\{|Q_i| : \; Q_i \in \mathcal{F}, \; Q_i \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{j-1} Q_k^1\Big) = \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Notar que la existencia de cualquiera de estos cubos es consecuencia de la Proposición 3.21 y, por construcción, $\mathcal{F}_1$ es una subfamilia de $\mathcal{F}$ formada por cubos disjuntos dos a dos.

Trabajamos con $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1$ y siguiendo el mismo esquema definimos una nueva familia de cubos disjuntos dos a dos $\mathcal{F}_2$. De este modo encontramos las familias $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$.

Obtenemos una cota para k: tomamos $P \in \mathcal{F}_k$, esto implica que $P \notin \mathcal{F}_j$ para $1 \leq j \leq k-1$ y, por construcción, sabemos que existe $Q_j \in \mathcal{F}_j$ con $1 \leq j \leq k-1$ de modo que $Q_j \cap P \neq \emptyset$ y $|Q_j| \geq |P|$. Escribimos $Q_k = P$ y denotamos por $\{x_j\}_{j=1}^{3^n}$ al conjunto de vértices de todos los subcubos diádicos de P con lados de longitud $2^{-1}\,\ell(P)$. Entonces, por la propiedad de solapamiento, tenemos la siguiente cota:

$$\begin{aligned}
k = \#\{Q_1, \dots, Q_k\} &= \#\bigcup_{j=1}^{3^n}\{Q_i : 1 \leq i \leq k, \, x_j \in Q_i\}\\
&\leq \sum_{j=1}^{3^n} \#\{Q_i : 1 \leq i \leq k, \, x_j \in Q_i\} \leq \sum_{j=1}^{3^n} N = 3^n\,N.
\end{aligned}$$

∎

3.2.3. Demostración del Teorema 3.3

Seguimos los pasos de la demostración del Teorema 3.1 de modo que sólo escribimos con detalle aquellos puntos donde ambas pruebas difieran.

Fijamos un cubo Q y suponemos que $\tilde{a}(Q) < \infty$, donde

$$\tilde{a}(Q) = \sum_{k \geq 0} 2^{2\,n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, a(2^k\, Q).$$

Tomamos la función $G(x) = \big|f(x) - S_{t_Q} f(x)\big|\, \chi_{4\,Q}(x)$ y los conjuntos de nivel $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : MG(x) > t\}$. Sabemos que $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y satisface (3.12) y que $\Omega_t \subsetneq \mathbb{R}^n$ es un abierto propio de $\mathbb{R}^n$ y verifica (3.13), donde hemos usado que $a \in D_1$.

Recordemos que $w \in A_\infty$ implica que existe $1 < s_1 \leq \infty$ tal que $w \in RH_{s_1}$. En particular, para cualquier cubo Q y cualquier conjunto medible $S \subset Q$, se satisface (2.2) y w es doblante.

Tomamos $q > 1$ suficientemente grande, a elegir. Veamos que se satisface la siguiente versión con peso de (3.14): dado $0 < \lambda < 1$, para todo $t > 0$,

$$w(\Omega_{q\,t} \cap Q) \leq c\, \lambda^{1/s_1'}\, w(\Omega_t \cap Q) + c \left(\frac{c_0\, \tilde{a}(Q)}{\lambda\, t}\right)^r w(Q), \tag{3.25}$$

con $c \geq 1$ depende de n, r, w, $\|a\|_{D_r(w)}$, $\|a\|_{D_1}$ y g. De esta desigualdad, la demostración sigue los mismos pasos que la del Teorema 3.1. Veamos (3.25): si $0 < t \leq c_0\, \tilde{a}(Q)$, es trivial:

$$w(\Omega_{q\,t} \cap Q) \leq w(Q) < \left(\frac{c_0\, \tilde{a}(Q)}{\lambda\, t}\right)^r w(Q) \leq c\, \lambda^{\frac{1}{s_1'}}\, w(\Omega_t \cap Q) + c \left(\frac{c_0\, \tilde{a}(Q)}{\lambda\, t}\right)^r w(Q).$$

Si $t > c_0\, \tilde{a}(Q)$, aplicamos el Teorema 3.16 y el Lema 3.17 y escribimos Ω_t como unión de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i$. Utilizamos la Proposición 3.18 (la cual sólo necesita propiedades de la descomposición de Whitney y la condición D_1, ver la Observación 3.19) y argumentando como en (3.16) y (3.17), obtenemos que

$$\begin{aligned} w(\Omega_{q\,t} \cap Q) &\leq \sum_{i: Q_i^t \subset Q} w\big(\{x \in Q_i^t : M\big((f - S_{t_{Q_i^t}} f)\, \chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) > b\,t\}\big) \\ &= \sum_{\Gamma_1} \cdots + \sum_{\Gamma_2} \cdots = I + II, \end{aligned}$$

donde Γ_1 y Γ_2 son los conjuntos definidos en la demostración del Teorema 3.1.

Para estimar I utilizamos (2.2), que la función maximal es de tipo débil $(1,1)$ y el Teorema 3.16, y tenemos que

$$I \leq c \sum_{\Gamma_1} \left(\frac{\big|\{x \in Q_i^t : M\big((f - S_{t_{Q_i^t}} f)\, \chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) > b\,t\}\big|}{|Q_i^t|}\right)^{\frac{1}{s_1'}} w(Q_i^t)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\,\frac{1}{(b\,t)^{\frac{1}{s_1'}}}\sum_{\Gamma_1}\left(\fint_{2\,Q_i^t}|f-S_{t_{Q_i^t}}f|\,dx\right)^{\frac{1}{s_1'}} w(Q_i^t)\\
&\leq c\,\lambda^{\frac{1}{s_1'}}\sum_{i:Q_i^t\subset Q} w(Q_i^t)\\
&\leq c\,\lambda^{\frac{1}{s_1'}}\,w(\Omega_t\cap Q),
\end{aligned}
$$

donde la constante c depende de n, r, w, $\|a\|_{D_1}$ y g.

Por otro lado, siguiendo los cálculos de la estimación de II en la demostración del Teorema 3.1 (reemplazando la medida de Lebesgue por w) y utilizando el Lema 3.15, que w es doblante y $a\in D_r(w)\cap D_1$, concluimos que

$$
II\leq c\left(\frac{a(Q)}{\lambda\,t}\right)^r w(Q)\leq c\left(\frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{\lambda\,t}\right)^r w(Q),
$$

la constante c depende de r, w, $\|a\|_{D_r(w)}$ y $\|a\|_{D_1}$.

De las estimaciones obtenidas para I y II, probamos (3.25) y de este modo completamos la demostración.

∎

3.2.4. Demostración del Teorema 3.8

Sigue los pasos de las demostraciones del Teorema 3.1 y del Teorema 3.3.

Sea $s=\max\{r,s_0\}$, donde s_0 es tal que $w\in A_{s_0}$. Fijamos Q y suponemos que $\tilde{a}(Q)<\infty$ donde

$$
\tilde{a}(Q)=\sum_{k\geq 0}2^{n\,k\,(1+s/r)}\,g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\,a(2^k\,Q).
$$

Consideramos la función G y los conjuntos de nivel Ω_t dados por (3.10) y (3.11), respectivamente.

Bajo nuestras condiciones, conseguimos un resultado análogo al Lema 3.15 para funcionales $a\in D_r(w)$ (sin utilizar la condición $a\in D_1$, la demostración está al final de la sección):

Lema 3.22 *Bajo las hipótesis del Teorema 3.8, para cada cubo R y $k\in\mathbb{N}$, se tiene la siguiente estimación:*

$$
\fint_{k\,R}|f-S_{t_R}f|\,dx\leq C_0\,k^{n\,(s/r-1)}\,a(k\,R),
$$

donde C_0 depende de w, r y $\|a\|_{D_r(w)}$ y $s=\max\{r,s_0\}$ con s_0 tal que $w\in A_{s_0}$.

Procediendo como en la demostración del Teorema 3.3, este resultado nos permite obtener los análogos de (3.12) y (3.13):

$$\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_0}{4^n}\,\tilde{a}(Q)\,|Q| < \infty \qquad \text{y} \qquad |\Omega_t| < \frac{c_0\,\tilde{a}(Q)}{t}\,|Q|,$$

con $c_0 = C_0/g(1)$, C_0 es la constante que aparece en el Lema 3.22.

Eligiendo ahora $q > 1$ suficientemente grande, nuestro objetivo es conseguir (3.25). Pues una vez obtenida, la demostración sigue los mismos pasos que la del Teorema 3.3, por lo que omitimos los detalles.

Si $0 < t \leq c_0\,\tilde{a}(Q)$, (3.25) es trivial.

Si $t > c_0\,\tilde{a}(Q)$, escribimos Ω_t como unión de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i$ (con las propiedades citadas en el Teorema 3.16 y Lema 3.17).

En este contexto, tenemos la siguiente extensión de la Proposición 3.18:

Proposición 3.23 *Bajo las hipótesis del Teorema 3.8, si $x \in 2\,Q_i^t$, se tiene que*

$$\left|S_{t_{Q_i^t}} f(x) - S_{t_Q} f(x)\right| \leq C_1\,\bigl(t + \tilde{a}(Q)\bigr),$$

donde C_1 depende de n, $\|a\|_{D_r(w)}$, g y w.

3.2.5. Demostración de los resultados auxiliares

Demostración del Lema 3.22 Cubrimos $k\,R$ con $\{R_i\}_{i=1}^{k^n}$, familia de subcubos de $k\,R$, disjuntos dos a dos y con lados de longitud $\ell(R)$, y escribimos

$$\int_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dy = \sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} |f - S_{t_{R_i}} f|\,dy \leq \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\,|R_i|. \tag{3.26}$$

Estudiamos primero el caso $1 < r < \infty$. Utilizando que $a \in D_r(w)$ y la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\,|R_i| &\leq |k\,R|\,k^{-n} \left(\sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)^r\,w(R_i)\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{k^n} w(R_i)^{-\frac{r'}{r}}\right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\leq |k\,R|\,k^{-n}\,\|a\|_{D_r(w)}\,a(k\,R)\,w(k\,R)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{k^n} w(R_i)^{-\frac{r'}{r}}\right)^{\frac{1}{r'}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Utilizando ahora, la desigualdad de Jensen para la función convexa $t \mapsto t^{-s'/s}$ junto con el hecho de que $s \geq r$ y $w \in A_{s_0} \subset A_s$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k^n} w(R_i)^{-\frac{r'}{r}} &\leq |R|^{-\frac{r'}{r}} \sum_{i=1}^{k^n} \left(\fint_{R_i} w^{-\frac{s'}{s}}\, dx \right)^{\frac{s-1}{r-1}} \\
&\leq |R|^{-\frac{r'}{r}} \left(\frac{1}{|R|} \sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} w^{-\frac{s'}{s}}\, dx \right)^{\frac{s-1}{r-1}} \\
&\leq |R|^{-\frac{r'}{r}}\, k^{n\,\frac{s-1}{r-1}} \left(\fint_{k\,R} w^{-\frac{s'}{s}}\, dx \right)^{\frac{s-1}{r-1}} \\
&\leq C\, k^{n\,\frac{s-1}{r-1}}\, |R|^{-\frac{r'}{r}} \left(\fint_{k\,R} w\, dx \right)^{-\frac{1}{r-1}} \\
&\leq C\, k^{n\,\frac{s}{r-1}}\, w(k\,R)^{-\frac{1}{r-1}}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Para concluir este caso basta unir las estimaciones obtenidas.

Caso $r = 1$. Primero observamos que w satisface (2.2) con $p = s_0$ (pues $w \in A_{s_0}$) y, en particular,

$$
C^{-1}\, k^{-n\,s_0}\, w(k\,R) \leq w(R_i). \tag{3.29}
$$

Entonces, la desigualdad anterior y $a \in D_1(w)$ implican que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\, |R_i| = \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\, w(R_i)\, \frac{|R_i|}{w(R_i)} &\leq C\, k^{n\,s_0}\, \frac{|R|}{w(k\,R)} \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\, w(R_i) \\
&\leq C\, k^{n\,s_0}\, |R|\, a(k\,R).
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Esta estimación junto con (3.26) muestra el caso $r = 1$.

■

Antes de demostrar la Proposición 3.23 tenemos que ver el siguiente resultado donde recordamos que estamos trabajando bajo la hipótesis de que $\{S_t\}_{t>0}$ forma un semigrupo.

Lema 3.24 *Dados R_1 y R_2 dos cubos tales que $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ y $\ell(R_1) \leq \ell(R_2)$. Si $w \in A_{s_0}$, $a \in D_r(w)$ para algún $1 \leq r < \infty$ y $f \in \mathcal{M}$ y verifica* (3.1)*, entonces, para todo $x \in 2\,R_1$ se tiene que*

$$
\left| S_{t_{R_2}} f(x) - S_{t_{R_2} + t_{R_1}} f(x) \right| \leq C \sum_{k \geq 4} 2^{n\,k\,s/r}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, a(2^k\, R_2), \tag{3.31}
$$

donde C depende de n, r, $\|a\|_{D_r(w)}$, m, $g(0)$ y $g(1)$ y $s = \max\{r, s_0\}$.

Demostración Escribimos $t_1 = t_{R_1}$, $t_2 = t_{R_2}$ y x_1 y x_2 para los centros de R_1 y R_2, respectivamente. Tomamos $\bar{x} \in R_1 \cap R_2$.

Supongamos primero que $t_2/4 \leq t_1 \leq t_2$. Vamos a probar una versión más fuerte de (3.31): Si $t_2 \leq t < 2\,t_2$ y $x \in 2\,R_1$ entonces,

$$\big|S_t f(x) - S_{t+t_1} f(x)\big| \leq C \sum_{k \geq 4} 2^{n\,k\,s/r}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, a(2^k\,R_2). \tag{3.32}$$

Es fácil ver que de (3.32) con $t = t_2$ se sigue (3.31) con $t_2/4 \leq t_1 \leq t_2$.

Notar que los cubos R_1 y R_2 satisfacen las siguientes relaciones:

$$R_1 \subset 4\,R_2 \qquad \text{y} \qquad R_2 \subset 2^{2+2/m}\,R_1. \tag{3.33}$$

La primera inclusión es consecuencia de que si $y \in R_1$ entonces,

$$|y - x_2| \leq |y - \bar{x}| + |\bar{x} - x_2| \leq \ell(R_1) + \frac{1}{2}\,\ell(R_2) \leq \frac{3}{2}\,\ell(R_2) < 2\,\ell(R_2);$$

la segunda se debe a que si $y \in R_2$ entonces,

$$\begin{aligned} |y - x_1| &\leq |y - \bar{x}| + |\bar{x} - x_1| \leq \ell(R_2) + \frac{1}{2}\,\ell(R_1) \leq \Big(2^{\frac{2}{m}} + \frac{1}{2}\Big)\,\ell(R_1) \\ &< 2^{1+\frac{2}{m}}\,\ell(R_1), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $t_2/4 \leq t_1$ (recordemos que $t_2 = \ell(R_2)^m$).

Consideramos ahora la familia de coronas $\{C_k\}_{k \geq 2}$ dada por

$$C_2 = 4\,R_1 \qquad \text{y} \qquad C_k = 2^k\,R_1 \setminus 2^{k-1}\,R_1, \quad k \geq 3.$$

Así, si $x \in 2\,R_1$ e $y \in C_k$, se tiene que por (2.1)

$$\frac{|x - y|^m}{t} \geq \gamma_k, \qquad \text{donde} \qquad \gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2, \\ 2^{m\,(k-3)-3}, & \text{si } k \geq 3. \end{cases} \tag{3.34}$$

Para cada $k \geq 2$, tomamos también la familia de cubos disjuntos $\{Q_j^k\}_{j=1}^{2^{n\,k}} \subset 2^k\,R_1$ tales que

$$\ell(Q_j^k) = \ell(R_1) \qquad \text{y} \qquad \bigcup_j Q_j^k = 2^k\,R_1 \subset 2^{k+2}\,R_2.$$

De esta forma, las propiedades del semigrupo, (3.34), (3.1), la condición D_1 y el decaimiento de g permiten obtener una primera estimación para $x \in 2\,R_1$:

$$\big|S_t f(x) - S_{t+t_1} f(x)\big| = \big|S_t(f - S_{t_1} f)(x)\big| \tag{3.35}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq t^{-\frac{n}{m}} \int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\frac{|x-y|^m}{t}\Big)\, \big|f(y) - S_{t_1} f(y)\big|\, dy \\
&\leq t^{-\frac{n}{m}} \sum_{k\geq 2} g(\gamma_k) \int_{C_k} |f - S_{t_1} f|\, dy \\
&\leq t^{-\frac{n}{m}} \sum_{k\geq 2} g(\gamma_k) \sum_{j=1}^{2^{n\,k}} \int_{Q_j^k} |f - S_{t_{Q_j^k}} f|\, dy \\
&\leq t^{-\frac{n}{m}} \sum_{k\geq 2} g(\gamma_k) \sum_{j=1}^{2^{n\,k}} a(Q_j^k)\, |Q_j^k|
\end{aligned}
$$

Estimamos la suma interior en el caso de que $1 < r < \infty$. Argumentando como en (3.27) y usando que los cubos $\{Q_j^k\}_j$ son disjuntos dos a dos, están contenidos en $2^{k+2}\, R_2$ y $\ell(Q_j^k) = \ell(R_1) = t_1^{1/m}$, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} a(Q_j^k)\, |Q_j^k| &\leq \Big(\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} a(Q_j^k)^r\, w(Q_j^k) \Big)^{1/r} \Big(\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} w(Q_j^k)^{-r'/r}\, |Q_j^k|^{r'} \Big)^{1/r'} \\
&\leq t_1^{n/m}\, \|a\|_{D_r(w)}\, a(2^{k+2}\, R_2)\, w(2^{k+2}\, R_2)^{1/r} \Big(\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} w(Q_j^k)^{-r'/r} \Big)^{1/r'}.
\end{aligned}
$$

Siguiendo los pasos dados en (3.28) y utilizando que $t_2/4 \leq t_1$ y que $w \in A_{s_0}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} w(Q_j^k)^{-\frac{r'}{r}} &\leq |R_1|^{-\frac{r'}{r}} \Big(\frac{1}{|R_1|} \int_{2^{k+2}\, R_2} w^{-\frac{s_0'}{s_0}}\, dx \Big)^{\frac{s_0-1}{r-1}} \\
&\leq C\, |R_1|^{-\frac{s_0}{r-1}}\, |2^{k+2}\, R_2|^{\frac{s_0-1}{r-1}} \Big(\fint_{2^{k+2}\, R_2} w\, dx \Big)^{-\frac{1}{r-1}} \\
&\leq C \Big(\frac{t_2}{t_1} \Big)^{\frac{n\, s_0}{m\,(r-1)}}\, 2^{k\,n\,\frac{s_0}{r-1}}\, w(2^{k+2}\, R_2)^{-\frac{1}{r-1}} \\
&\leq C\, 2^{k\,n\,\frac{s_0}{r-1}}\, w(2^{k+2}\, R_2)^{-\frac{1}{r-1}}.
\end{aligned}
$$

Incorporando esta estimación a la obtenida anteriormente concluimos que

$$
\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} a(Q_j^k)\, |Q_j^k| \leq C\, t_1^{n/m}\, 2^{k\,n\,s_0/r}\, a(2^{k+2}\, R_2).
$$

Si $r = 1$, realizando los cambios oportunos, como en (3.30), podemos concluir que

$$
\sum_{j=1}^{2^{n\,k}} a(Q_j^k)\, |Q_j^k| = \sum_{j=1}^{2^{n\,k}} a(Q_j^k)\, w(Q_j^k)\, \frac{|Q_j^k|}{w(Q_j^k)}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq t_1^{n/m} \sum_{j=1}^{2^{n\,k}} \left(\frac{|2^{k+2}\,R_2|}{|Q_j^k|} \right)^{s_0} a(Q_j^k)\, w(Q_j^k) \\
&\leq C\, \|a\|_{D_1(w)}\, t_1^{n/m}\, 2^{k\,n\,s_0}\, a(2^{k+2}\,R_2).
\end{aligned}$$

Así, utilizando que $t_1 \leq t_2 \leq t$, las estimaciones obtenidas para su suma interior y el decaimiento de la función g, podemos continuar estimando (3.35) y obtenemos la desigualdad buscada:

$$\begin{aligned}
\big|S_t f(x) - S_{t+t_1} f(x)\big| &\leq C\, t^{-\frac{n}{m}} \sum_{k \geq 2} 2^{n\,k\,s/r}\, g(\gamma_k)\, a(2^{k+2}\, R_2) \\
&= C \left(\frac{t_2}{t}\right)^{\frac{n}{m}} \sum_{k \geq 2} 2^{n\,k\,s/r}\, g(\gamma_k)\, a(2^{k+2}\, R_2) \\
&\leq C \sum_{k \geq 4} 2^{n\,k\,s/r}\, g(\gamma_{k-2})\, a(2^k\, R_2) \\
&= C \sum_{k \geq 4} 2^{n\,k\,s/r}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, a(2^k\, R_2).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Suponemos ahora que $0 < t_1 < t_2/4$ y escribimos

$$\begin{aligned}
\big|S_{t_2} f(x) - S_{t_2+t_1} f(x)\big| &\leq \big|S_{t_2} f(x) - S_{t_2+t_2} f(x)\big| + \big|S_{t_2+t_1} f(x) - S_{t_2+t_1+(t_2-t_1)} f(x)\big| \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Estudiamos cada término por separado. Para I basta tomar $\tilde{R}_1 = \frac{\ell(R_2)}{\ell(R_1)}\, R_1$, $\tilde{R}_2 = R_2$ y $t = t_{\tilde{R}_2} = t_2$ y observar que $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 \supset R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ y $\ell(\tilde{R}_1) = \ell(\tilde{R}_2) = \ell(R_2)$. Así, tenemos (3.32) en $2\,\tilde{R}_1 \supset 2\,R_1$.

La estimación de II se obtiene de forma similar. Tomamos $\tilde{R}_1 = \frac{(t_2-t_1)^{1/m}}{\ell(R_1)}\, R_1$, $\tilde{R}_2 = R_2$ y $t = t_2 + t_1$ y observamos que $t_2 < t < 2\,t_2$, $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 \neq \emptyset$ (pues $R_1 \subset \tilde{R}_1$) y $\ell(\tilde{R}_1) \leq \ell(\tilde{R}_2)$. De esta forma, tenemos (3.32) en $2\,\tilde{R}_1 \supset 2\,R_1$.

Coleccionando las dos estimaciones, obtenemos (3.31). ∎

Demostración de la Proposición 3.23 Es análoga a la demostración de la Proposición 3.18. En primer lugar, fijamos $x \in 2\,Q_i^t$ y escribimos

$$\big|S_{t_{Q_i^t}} f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| \leq \big|S_{t_{Q_i^t}}\big(f - S_{t_Q} f\big)(x)\big| + \big|S_{t_Q}\big(f - S_{t_{Q_i^t}} f\big)(x)\big| = I + II,$$

donde hemos usado que $\{S_t\}_{t>0}$ es un semigrupo.

Como caso particular del Lema 3.24, tenemos que

$$II = \big|S_{t_Q} f(x) - S_{t_Q + t_{Q_i^t}} f(x)\big| \leq C \sum_{k \geq 4} 2^{k\,\frac{n\,s}{r}}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, a(2^k\, Q) \leq C\, \tilde{a}(Q).$$

Para estimar I seguimos los pasos de la demostración de la Proposición 3.18. Controlamos I_1 e I_2, dados en (3.24). La estimación de I_1 es la misma: $I_1 \le C\,t$. Para I_2, usamos el Lema 3.22 (en lugar del Lema 3.15) y obtenemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{|Q_i^t|}\int_{(2\,Q_i^t)^c} g\Big(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i^t}}\Big)\,G(y)\,dy \le \frac{1}{|Q|}\sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\,g(\lambda_k)\int_{2^k\,Q}\big|f - S_{t_Q} f\big|\,dy \\ &\le C_0\sum_{k\ge 2} 2^{k\,n\,(1+\frac{s}{r})}\,g(\lambda_k)\,a(2^k\,Q) \le C\,\tilde{a}(Q). \end{aligned}$$

∎

3.2.6. Demostración del Teorema 3.11

Seguimos los pasos de la demostración del Teorema 3.1. Tomamos $\tilde{a}$ dado por

$$\tilde{a}(Q) = \sum_{k\ge 0} 2^{2\,n\,k}\,g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\,\bar{a}(2^k\,Q).$$

Fijamos Q tal que $\tilde{a}(Q) < \infty$. Utilizando que $(a,\bar{a})$ satisface (3.5) y razonando como en la demostración del Lema 3.15, tenemos que, para cada cubo R y $k\ge 1$:

$$\fint_{2^k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dx \le \bar{a}(2^k\,R). \tag{3.37}$$

Lo cual implica que $G = |f - S_{t_Q} f|\,\chi_{4\,Q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \tilde{a}(Q)\,|Q|$ y $|\Omega_t| \lesssim \tilde{a}(Q)\,|Q|/t$. Así, podemos conseguir un resultado análogo a la Proposición 3.18 con $\tilde{a}$ (escrito en función de $\bar{a}$ en lugar de en función de a):

Proposición 3.25 *Bajo las hipótesis del Teorema 3.11, si $x \in 2\,Q_i^t$, se tiene que*

$$\big|S_{t_{Q_i^t}} f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| \le C_1\,\big(t + \tilde{a}(Q)\big),$$

para alguna constante $0 < C_1 < \infty$.

Utilizando el resultado anterior y del mismo modo que en la demostración del Teorema 3.1, tomamos q suficientemente grande y $0<\lambda<1$, y tenemos

$$\begin{aligned} |\Omega_{q\,t}\cap Q| &\le \sum_{i:Q_i^t\subset Q} \big|\{x\in Q_i^t : M\big((f - S_{t_{Q_i^t}} f)\,\chi_{2\,Q_i^t}\big)(x) > b\,t\}\big| \\ &= \sum_{\Gamma_1}\cdots + \sum_{\Gamma_2}\cdots = I + II, \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_1=\Big\{Q_i^t\subset Q:\fint_{2\,Q_i^t}|f-S_{t_{Q_i^t}}f|\,dx\le\lambda\,t\Big\}\quad\text{y}\quad\Gamma_2=\Big\{Q_i^t\subset Q:\fint_{2\,Q_i^t}|f-S_{t_{Q_i^t}}f|\,dx>\lambda\,t\Big\}.$$

La estimación para I es exactamente igual que en la demostración del Teorema 3.1:

$$I\le\frac{3^n}{b\,t}\sum_{\Gamma_1}\int_{2\,Q_i^t}|f-S_{t_{Q_i^t}}f|\,dx\le\frac{\lambda\,6^n}{b}\sum_{i:Q_i^t\subset Q}|Q_i^t|\le\frac{\lambda\,6^n}{b}\,|\Omega_t\cap Q|.$$

Para II utilizamos las mismas ideas, aunque en este caso no queremos aplicar (3.37) (pues esto nos podría conducir a $\bar a$ antes de poder utilizar (3.5)). Así que, en primer lugar, dividimos cada $2\,Q_i^t$ en 2^n cubos disjuntos dos a dos $\{(Q_i^t)_k\}_{k=1}^{2^n}$ con $\ell((Q_i^t)_k)=\ell(Q_i^t)$. Para cada $Q_i^t\in\Gamma_2$, tenemos que

$$\lambda\,t<\fint_{2\,Q_i^t}|f-S_{t_{Q_i^t}}f|\,dx=2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}\fint_{(Q_i^t)_k}|f-S_{t_{(Q_i^t)_k}}f|\,dx\le2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}a((Q_i^t)_k),\tag{3.38}$$

y, por lo tanto,

$$II\le\sum_{\Gamma_2}|Q_i^t|\le2^{-n}\sum_{i:Q_i^t\subset Q}\sum_{k=1}^{2^n}\left(\frac{a((Q_i^t)_k)}{\lambda\,t}\right)^r|(Q_i^t)_k|.$$

Dividimos los cubos de la familia $\{2\,Q_i^t\}_i$ en c_n (con $c_n\le144^n$) familias $\mathcal{F}_j$ de cubos disjuntos dos a dos. Notar que los cubos de $\mathcal{F}_j^*=\{(Q_i^t)_k:Q_i^t\in\mathcal{F}_j,1\le k\le2^n\}$ son disjuntos dos a dos y de este modo, por (3.5), tenemos que

$$\begin{aligned}II&\le C\sum_{j=1}^{c_n}\sum_{k=1}^{2^n}\sum_{(Q_i^t)_k\in\mathcal{F}_j^*}\left(\frac{a((Q_i^t)_k)}{\lambda\,t}\right)^r|(Q_i^t)_k|\\&\le C\,144^n\,2^n\left(\frac{\bar a(Q)}{\lambda\,t}\right)^r|Q|\\&\le C\left(\frac{\tilde a(Q)}{\lambda\,t}\right)^r|Q|.\end{aligned}$$

De aquí se sigue

$$|\Omega_{q\,t}\cap Q|\le C\,\lambda\,|\Omega_t\cap Q|+C\left(\frac{\tilde a(Q)}{\lambda\,t}\right)^r|Q|$$

y consecuentemente (3.6). Los demás detalles se dejan al lector interesado. ∎

3.2.7. Demostración de los resultados auxiliares

En primer lugar mostramos (3.37) siguiendo los pasos de la demostración del Lema 3.15. Cubrimos el cubo $k\,R$ con la familia $\{R_i\}_{i=1}^{k^n}$ formada por subcubos de $k\,R$, disjuntos dos a dos y con lados de longitud $\ell(R)$, utilizamos que f satisface (3.1) y $(a,\bar{a}) \in D_1$, y conseguimos (3.37):

$$\int_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dy = \sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} |f - S_{t_{R_i}} f|\,dy \le \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\,|R_i| \le \bar{a}(k\,R)\,|k\,R|.$$

■

Demostración de la Proposición 3.25 Sigue los pasos de la demostración de la Proposición 3.18 con la única diferencia de que ahora se utiliza (3.37) en lugar del Lema 3.15. Por este motivo, ahora $\tilde{a}$ depende de $\bar{a}$ (en lugar de depender de a). ■

3.2.8. Demostración del Teorema 3.14

Sigue los pasos de la demostración del Teorema 3.8. Tomamos $\tilde{a}$ dado por

$$\tilde{a}(Q) = C \sum_{k\ge 0} 2^{n\,k\,(1+s/r)}\, g(c\,2^{m\,k})\,\bar{a}(2^k\,Q).$$

Fijamos Q para el cual $\tilde{a}(Q) < \infty$. Utilizando que $(a,\bar{a}) \in D_r(w)$ se puede probar (de modo análogo a la demostración del Lema 3.15) que para cada cubo R y $k \in \mathbb{N}$:

$$⨍_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dy \le k^{n\,(s/r-1)}\,\bar{a}(k\,R).$$

Lo cual implica que $G = |f - S_{t_Q} f|\,\chi_{4\,Q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \tilde{a}(Q)\,|Q|$ y $|\Omega_t| \lesssim \tilde{a}(Q)\,|Q|/t$.

Argumentando del mismo modo que en la demostración del Teorema 3.8 (con la diferencia de que el funcional $\tilde{a}$ viene dado en función de $\bar{a}$, en lugar de en términos de a), conseguimos el resultado. ■

3.3. Aplicaciones

En esta sección presentamos algunas aplicaciones de los resultados anteriores. Recordemos que la desigualdad de Kolmogorov implica que para cualquier $0 < q < r < \infty$ se tiene que

$$\left(⨍_Q |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \le \left(\frac{r}{r-q}\right)^{1/q} \|f\|_{L^{r,\infty},Q}. \tag{3.39}$$

Esto significa que siempre que podamos aplicar alguno de los resultados anteriores, podremos reemplazar $L^{r,\infty}$ por L^q para cada $0 < q < r < \infty$. Además, como en algunos ejemplos la condición D_r se satisface para cualquier $1 < r < \infty$, automáticamente conseguimos estimaciones de tipo fuerte en el mismo rango. Lo mismo ocurre en el caso con pesos.

Veamos algunos ejemplos generales. Después nos centramos en el estudio de desigualdades de tipo Poincaré.

Ejemplo 3.26 (Espacios BMO **y Morrey-Campanato)** En [DuY] y [DDY] se estudian estos espacios cuando $\{S_t\}_{t>0}$ es un semigrupo. Nosotros lo hacemos en un caso más general, tomamos $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 2.6 y $\alpha \geq 0$ y definimos el espacio de Morrey-Campanato $L_S(\alpha)$ del siguiente modo:

$$L_S(\alpha) = \Big\{ f \in \mathcal{M} : \sup_Q \frac{1}{|Q|^\alpha} \fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx < \infty \Big\}.$$

Cuando $\alpha = 0$, este espacio coincide con el espacio de funciones de oscilación media acotada BMO_S:

$$\mathrm{BMO}_S = \Big\{ f \in \mathcal{M} : \sup_Q \fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx < \infty \Big\}.$$

Las definiciones anteriores generalizan a las de los espacios clásicos $L(\alpha)$ y BMO, donde $S_{t_Q} f$ es reemplazada por f_Q.

De este modo, si $f \in L_S(\alpha)$ con $\alpha \geq 0$, para cada cubo Q, verifica que

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \leq C \, |Q|^\alpha,$$

entonces elegimos $a(Q) = |Q|^\alpha$ (intencionadamente olvidamos la constante). Notar que a es creciente ($a(Q) \leq a(Q')$ para cada $Q \subset Q'$) y, por lo tanto, $a \in D_r$ para cada $1 < r < \infty$. Además, a es doblante ($a(2\,Q) \leq 2^{\alpha\, n}\, a(Q)$, para cada Q). Así, del Teorema 3.1 se sigue que para cada $1 < r < \infty$:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty},Q} \lesssim |Q|^\alpha.$$

Utilizando ahora la desigualdad de Kolmogorov (3.39) concluimos que cada $f \in L(\alpha)$ con $\alpha \geq 0$ verifica la siguiente estimación para cada $1 < r < \infty$ y para todo Q:

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r \, dx \right)^{1/r} \lesssim |Q|^\alpha.$$

Por otro lado, como a es creciente, $a \in D_r(w)$ para cada $1 \leq r < \infty$ y $w \in A_\infty$. Así, podemos aplicar el Teorema 3.3 y la versión con peso de (3.39) y obtenemos que cualquier $f \in L(\alpha)$ con $\alpha \geq 0$ verifica la siguiente estimación para cada $1 \leq r < \infty$, $w \in A_\infty$ y para todo Q:

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r \, dw\right)^{1/r} \lesssim |Q|^\alpha.$$

Por último señalar que en este tipo de ejemplos podemos conseguir mejor automejora en la escala de los espacios de Orlicz. En [DuY], [DDY] y en el siguiente capítulo se muestra que podemos escribir la cuasi-norma $\exp L$ en el lado izquierdo, lo que claramente implica las estimaciones anteriores.

Por otro lado, S. Spanne [Spa] introduce nuevos espacios de funciones que contienen a la imagen de L^p con $p > n/\alpha$ por la integral fraccionaria I_α para $\alpha \geq 0$. Estos espacios son generalizaciones del clásico BMO: Dada una función φ definida en $(0, \infty)$ la cual es no-decreciente y positiva se define el espacio BMO_φ del siguiente modo

$$\mathrm{BMO}_\varphi = \Big\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \sup_Q \frac{1}{\varphi\big(\ell(Q)\big)} \fint_Q |f - f_Q| \, dx < \infty \Big\}.$$

Nosotros extendemos la definición de BMO_φ reemplazando f_Q por $S_{t_Q} f$:

$$\mathrm{BMO}_{\varphi,S} = \Big\{ f \in \mathcal{M} : \sup_Q \frac{1}{\varphi\big(\ell(Q)\big)} \fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx < \infty \Big\},$$

y observamos que cada función $f \in \mathrm{BMO}_{\varphi,S}$ satisface la siguiente estimación para cada $1 < r < \infty$ y para todo Q

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r \, dx\right)^{1/r} \lesssim \sum_{k \geq 0} 2^{2\,n\,k} \, g(c\, 2^{m\,k}) \, \varphi\big(2^k \, \ell(Q)\big).$$

Para comprobar esta afirmación, basta aplicar el Teorema 3.1 con $a(Q) = \varphi\big(\ell(Q)\big)$, el cual es no-decreciente –esto es, $a \in T_\infty$– (pues φ es no-decreciente) y, por lo tanto, satisface la condición D_r para todo $r \geq 1$.

Además, si φ es doblante (esto es, $\varphi(2\,t) \lesssim \varphi(t),\ t > 0$) entonces también lo es a, y esto junto con el decaimiento de g implican que

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r \, dx\right)^{1/r} \lesssim \varphi\big(\ell(Q)\big).$$

Utilizando el Teorema 3.3, en lugar del Teorema 3.1, conseguimos los resultados análogos para pesos A_∞.

Ejemplo 3.27 (Media fraccionaria) Este tipo de ejemplo está relacionado con el concepto de gradiente superior introducido por J. Heinonen y P. Koskela en [HeK1] y [HeK2].

Dados $\lambda \geq 1$, $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ y un peso u, definimos el funcional a del siguiente modo:

$$a(Q) = \ell(Q)^{\alpha} \left(\frac{u(\lambda\, Q)}{|Q|}\right)^{1/p}.$$

Recordemos que en la Sección 2.5 comprobamos que en el caso de que $\lambda = p = 1$, el funcional a es de tipo $D_{n/(n-\alpha)}$. Aunque de manera análoga, en [FPW], los autores comprueban que $a \in D_r$ para $1 < r < p\,n/(n - \alpha p)$. Así, aplicando el Teorema 3.1, si $f \in \mathcal{M}$ y, para todo Q, verifica:

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \lesssim \ell(Q)^{\alpha} \left(\frac{u(\lambda\, Q)}{|Q|}\right)^{1/p}, \tag{3.40}$$

entonces, para cada $1 < r < p\,n/(n - \alpha p)$, también satisface la siguiente estimación:

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r\, dx\right)^{1/r} \lesssim \sum_{k\geq 0} 2^{2\,n\,k}\, g(c\, 2^{m\,k})\, \ell(2^k\, Q)^{\alpha} \left(\frac{u(2^k\, \lambda\, Q)}{|2^k\, Q|}\right)^{1/p}.$$

Si $u \in A_\infty$ en [FPW] se muestra que $a \in D_{\frac{p\,n}{n-\alpha\,p}+\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$ dependiendo de la constante A_∞ del peso u. Además, en este caso u es doblante y, por lo tanto, también lo es a (y en particular, podemos tomar $\lambda = 1$). Consecuentemente, el Teorema 3.1 asegura un control de la oscilación generalizada en $L^{\frac{p\,n}{n-\alpha\,p}+\epsilon,\infty}$, y junto con la desigualdad de Kolmogorov (3.39), se tiene que

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^{\frac{p\,n}{n-\alpha\,p}}\, dx\right)^{\frac{n-\alpha\,p}{p\,n}} \lesssim \ell(Q)^{\alpha} \left(\frac{u(Q)}{|Q|}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mostramos un caso particular de este tipo de ejemplos. Sea X un operador diferencial verificando la siguiente desigualdad para alguna $f \in \mathcal{M}$ y para todo Q:

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \lesssim \ell(Q)^{\alpha} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\lambda\, Q} |X f|^p\, dx\right)^{1/p}, \tag{3.41}$$

con $\lambda \geq 1$, $0 < \alpha < n$ y $1 \leq p < n/\alpha$. Entonces, también verifica la siguiente automejora para cada $1 < r < p\,n/(n - \alpha\, p)$:

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r\, dx\right)^{1/r} \lesssim \sum_{k\geq 0} 2^{2\,n\,k}\, g(c\, 2^{m\,k})\, \ell(2^k\, Q)^{\alpha} \left(\frac{1}{|2^k Q|} \int_{\lambda\, 2^k Q} |X f|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Si además $|Xf|^p \in A_\infty$, mejoramos la estimación anterior del siguiente modo:

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^{\frac{pn}{n-\alpha p}}\,dx\right)^{\frac{n-\alpha p}{pn}} \lesssim \ell(Q)^\alpha \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Xf|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Obsérvese que si $p \geq n/\alpha$, el funcional a es creciente y, por lo tanto, satisface la condición D_r y $D_r(w)$ para cada $r \geq 1$ y $w \in A_\infty$. En este caso, los resultados principales nos proporcionan automejoras en el rango $1 \leq r < \infty$. En el siguiente capítulo volveremos sobre este caso.

3.3.1. Desigualdades de tipo Poincaré reducidas

Motivados por la desigualdad clásica de Poincaré-$(1,1)$ tomamos como punto de partida $f \in \mathcal{M}$ tal que

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\,dx \leq \ell(Q) \fint_Q h\,dx, \tag{3.42}$$

para todo cubo Q y h una función medible no-negativa. Generalmente h depende de f (por ejemplo $h = C\,|\nabla f|$), aunque, para realizar los cálculos, podemos trabajar con cualquier función h dada.

Llamamos a esta estimación desigualdad de Poincaré reducida, en contraposición con las estimaciones expandidas (3.51) que estudiamos posteriormente en la Sección 3.3.3.

A continuación aplicamos nuestros resultados para obtener automejora en la integrabilidad del lado izquierdo de la desigualdad (3.42):

Ejemplo 3.28 (Desigualdad de Poincaré-Sobolev) Dados $1 \leq p < n$ y $p^* = n\,p/(n-p)$ el índice de Sobolev conjugado de p, (3.42) implica

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{p^*,\infty},Q} \leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\,\ell(2^k Q)\left(\fint_{2^k Q} h^p\,dx\right)^{1/p} \tag{3.43}$$

y, para cada $1 < r < p^*$,

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r\,dx\right)^{1/r} \lesssim \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\,\ell(2^k Q)\left(\fint_{2^k Q} h^p\,dx\right)^{1/p} \tag{3.44}$$

para todo Q y para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k\geq 0}$. Además, si $p \geq n$, la estimación anterior se satisface para cada $1 < r < \infty$.

Obsérvese que (3.44) es consecuencia de (3.43) y la desigualdad de Kolmogorov (3.39). Veamos (3.43). En primer lugar, notar que (3.42) junto con la desigualdad de Jensen implican

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \leq \ell(Q) \Big(\fint_Q h^p \, dx \Big)^{1/p} = a(Q). \tag{3.45}$$

Cuando $p \geq n$, a es creciente y, por lo tanto, $a \in D_r$ para cada $1 \leq r < \infty$. En caso contrario, utilizando que $p^*/p > 1$ mostramos que $a \in D_{p^*}$: dado Q y una familia $\{Q_i\}_i$ de subcubos de Q disjuntos dos a dos, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_i a(Q_i)^{p^*} |Q_i| &= \sum_i \Big(\int_{Q_i} h^p \, dx \Big)^{p^*/p} \leq \Big(\sum_i \int_{Q_i} h^p \, dx \Big)^{p^*/p} \\ &\leq \Big(\int_Q h^p \, dx \Big)^{p^*/p} = a(Q)^{p^*} |Q|. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Entonces, podemos aplicar el Teorema 3.1, y conseguimos (3.43).

Ejemplo 3.29 (Desigualdad de Poincaré-Sobolev para pesos A_1) Dados $w \in A_1$ y $1 \leq p < n$, (3.42) proporciona la siguiente desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev con peso:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{p^*,\infty}(w),Q} \leq \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, \ell(2^k Q) \Big(\fint_{2^k Q} h^p \, dw \Big)^{1/p}, \tag{3.47}$$

para todo Q y para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k \geq 0}$. Si además aplicamos la versión con peso de la desigualdad de Kolmogorov, para cada $1 < r < p^*$, conseguimos:

$$\Big(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r \, dw \Big)^{1/r} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, \ell(2^k Q) \Big(\fint_{2^k Q} h^p \, dw \Big)^{1/p}.$$

Veamos (3.47): primero, (3.42) y $w \in A_1 \subset A_p$ implican

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \leq C \, \ell(Q) \Big(\fint_Q h^p \, dw \Big)^{1/p} = a(Q). \tag{3.48}$$

Por otro lado, dado Q y una familia $\{Q_i\}_i \subset Q$ de cubos disjuntos dos a dos, el hecho de que $w \in A_1$ implica que $w(Q)/w(Q_i) \lesssim |Q|/|Q_i|$, véase (2.2). Esto junto con que $p^* > p$ nos asegura que $a \in D_{p^*}(w)$ (intencionadamente olvidamos la constante):

$$\sum_i a(Q_i)^{p^*} w(Q_i) = \sum_i \ell(Q_i)^{p^*} w(Q_i)^{1 - \frac{p^*}{p}} \Big(\int_{Q_i} h^p \, dw \Big)^{\frac{p^*}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \ell(Q)^{p^*}\, w(Q)^{1-\frac{p^*}{p}} \sum_i \Big(\int_{Q_i} h^p\, dw\Big)^{\frac{p^*}{p}} \\
&\leq a(Q)^{p^*}\, w(Q).
\end{aligned}
$$

Así, $a \in D_{p^*}(w)$ y, como $w \in A_1 \subset A_{p^*}$, $a \in D_1$ (ver la Observación 3.7). De este modo, aplicando el Teorema 3.3, obtenemos (3.47).

Obsérvese que si $p \geq n$, utilizando que en este caso a es creciente, obtenemos estimaciones de tipo fuerte en un rango mayor $1 < r < \infty$. Debido a que podemos aplicar el Teorema 3.3 para cualquier $1 \leq r < \infty$ ($a \in D_r(w)$ y $w \in A_1$) y así

$$
\Big(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^r\, dw\Big)^{1/r} \leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k Q) \Big(\fint_{2^k Q} h^p\, dw\Big)^{1/p}.
$$

Ejemplo 3.30 (Desigualdad de Poincaré-Sobolev para pesos A_p, $p > 1$) La desigualdad (3.42) implica que para cada $p > 1$ y $w \in A_p$, existe $q > p\, n'$ (dependiendo de p, n y w) de modo que

$$
\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{q,\infty}(w),Q} \leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k Q) \Big(\fint_{2^k Q} h^p\, dw\Big)^{1/p},
$$

para todo Q y para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k\geq 0}$. Aplicando también la versión con peso de la desigualdad de Kolmogorov (3.39) se sigue que

$$
\Big(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^{p\, n'}\, dw\Big)^{\frac{1}{p\, n'}} \lesssim \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k Q) \Big(\fint_{2^k Q} h^p\, dw\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.49}
$$

Para comprobar este resultado primero definimos el funcional a sobre el que aplicamos nuestro resultado y mostramos que $a \in D_q(w)$ para algún $q > p\, n'$. Del mismo modo que en el ejemplo anterior y debido a que $w \in A_p$, tenemos (3.48); la cual nos define a. Por otro lado, la propiedad de apertura de la clase A_p nos asegura que $w \in A_{\tau\, p}$ para algún $0 < \tau < 1$, y, sin pérdida de generalidad, podemos elegir $\tau > 1/n$. Así, para cualquier Q y cualquier conjunto medible $E \subset Q$, de (2.2) se sigue que

$$
\frac{w(Q)}{w(E)} \lesssim \Big(\frac{|Q|}{|E|}\Big)^{\tau\, p}.
$$

Utilizando esta desigualdad, obtenemos que $a \in D_q(w)$, donde $q = p\,(n\,\tau)'$: dado Q y una familia $\{Q_i\}_i \subset Q$ de cubos disjuntos dos a dos,

$$
\sum_i a(Q_i)^q\, w(Q_i) = \sum_i \Big(\frac{\ell(Q_i)}{\ell(Q)}\Big)^q \Big(\frac{w(Q)}{w(Q_i)}\Big)^{\frac{q}{p}-1} \Big(\int_{Q_i} h^p\, dw\Big)^{\frac{q}{p}} \ell(Q)^q\, w(Q)^{1-\frac{q}{p}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_i \left(\int_{Q_i} h^p \, dw \right)^{\frac{q}{p}} \ell(Q)^q \, w(Q)^{1-\frac{q}{p}} \\
&\leq \left(\int_Q h^p \, dw \right)^{\frac{q}{p}} \ell(Q)^q \, w(Q)^{1-\frac{q}{p}} \\
&= a(Q)^q \, w(Q).
\end{aligned}
$$

Ahora, basta aplicar el Teorema 3.1 y la Observación 3.7 para conseguir la estimación buscada.

Ejemplo 3.31 (Desigualdad de Poincaré con dos pesos) Sean $1 \leq p \leq q \leq r < \infty$ y (w, v) un par de pesos con $w \in A_r$, $v \in A_{q/p}$ y verificando la siguiente condición de "balance"

$$
\frac{\ell(Q_2)}{\ell(Q_1)} \left(\frac{w(Q_2)}{w(Q_1)} \right)^{1/r} \lesssim \left(\frac{v(Q_2)}{v(Q_1)} \right)^{1/q},
$$

para todo Q_1 y Q_2 con $Q_2 \subset Q_1$. Bajo tales condiciones, (3.42) implica que

$$
\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{r,\infty}(w),Q} \leq \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dv \right)^{1/p},
$$

para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k \geq 0}$. Aplicando también la desigualdad de Kolmogorov, conseguimos estimaciones de tipo fuerte en el rango $1 < s < r$.

Para mostrar este resultado observamos que (3.42) y $v \in A_{q/p}$ implican que

$$
\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \lesssim \ell(Q) \left(\fint_Q h^p \, dx \right)^{1/p} \lesssim \ell(Q) \left(\fint_Q h^q \, dv \right)^{1/q} = a(Q).
$$

Se puede ver que $a \in D_r(w)$ utilizando la condición de "balance" y que $r/q \geq 1$: dado Q y una familia $\{Q_i\}_i \subset Q$ de cubos disjuntos dos a dos,

$$
\begin{aligned}
\sum_i a(Q_i)^r \, w(Q_i) &= \sum_i \left(\frac{\ell(Q_i)}{\ell(Q)} \right)^r \left(\frac{v(Q)}{v(Q_i)} \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_i} h^q \, dv \right)^{\frac{r}{q}} w(Q_i) \, \ell(Q)^r \left(\frac{1}{v(Q)} \right)^{\frac{r}{q}} \\
&\lesssim \sum_i \left(\int_{Q_i} h^q \, dv \right)^{\frac{r}{q}} \ell(Q)^r \left(\frac{1}{v(Q)} \right)^{\frac{r}{q}} w(Q) \\
&\leq a(Q)^r \, w(Q).
\end{aligned}
$$

Entonces, aplicando el Teorema 3.3 obtenemos la desigualdad deseada.

Ejemplo 3.32 (Desigualdad de Hardy generalizada) En $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ y $w(x) = |x|^{-2}$, (3.42) implica la siguiente desigualdad para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k\geq 0}$:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{2,\infty}(w),Q} \leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k) \left(\frac{1}{w(2^k Q)} \int_{2^k Q} h^2\, dx \right)^{1/2}, \tag{3.50}$$

y, como consecuencia de (3.39), automáticamente obtenemos estimaciones en $L^r(w)$ para cada $1 \leq r < 2$.

Comprobamos esta afirmación. En primer lugar, se puede ver que $w \in A_1$ (página 26) y $\ell(Q)\left(w(Q)/|Q|\right)^{1/2} \lesssim 1$ para todo Q. Esto junto con (3.42) y la desigualdad de Jensen implica que

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq \ell(Q) \left(\fint_Q h^2\, dx \right)^{1/2} \lesssim \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q h^2\, dx \right)^{1/2} = a(Q).$$

Es inmediato ver que $a \in D_2(w)$: dado Q y una familia $\{Q_i\}_i \subset Q$ de cubos disjuntos dos a dos, tenemos

$$\sum_i a(Q_i)^2\, w(Q_i) = \sum_i \int_{Q_i} h^2\, dx \leq \int_Q h^2\, dx = a(Q)^2\, w(Q).$$

Entonces (aplicando el Teorema 3.3 y la Observación 3.7), conseguimos (3.50).

Ejemplo 3.33 (Desigualdad de Hardy generalizada multiparamétrica) En $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ con $m \geq 3$ y $n - m \geq 1$. Escribimos $x \in \mathbb{R}^n$ como $x = (y; z)$ donde $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ y $w(x) = w(y; z) = |y|^{-2}$. En este marco, tenemos que (3.42) implica

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{L^{2,\infty}(w),Q} \leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k) \left(\frac{1}{w(2^k Q)} \int_{2^k Q} h^2\, dx \right)^{1/2}$$

y en consecuencia, podemos reemplazar $L^{2,\infty}(w)$ por $L^r(w)$ con $1 < r < 2$.

La demostración es análoga a la del ejemplo anterior. Notar que $w \in A_1(\mathbb{R}^n)$ (pues $|y|^{-2} \in A_1(\mathbb{R}^m)$ para $m \geq 3$) y verifica que $\ell(Q)\left(w(Q)/|Q|\right)^{1/2} \lesssim 1$.

3.3.2. Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales

Como consecuencia de nuestros resultados vamos a obtener desigualdades generalizadas de tipo pseudo-Poincaré globales (ver [SC4] en el caso $h = |\nabla f|$). Ahora estamos interesados en obtener desigualdades de tipo Gagliardo-Nirenberg. Ver [SC4], [BCLS], [Led], [MM] y sus referencias.

Supongamos que $f \in \mathcal{M}$ y satisface (3.42):

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq \ell(Q) \fint_Q h\, dx.$$

Entonces, las siguientes desigualdades también se verifican para todo $t > 0$:

(1) **Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales:** Para cada $1 \leq p < n$ y $p \leq r < p^*$,

$$\|f - S_t f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*}\right)\frac{n}{m}} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{y} \quad \|f - S_t f\|_{L^{p^*,\infty}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(2) **Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales con pesos:** Si $w \in A_p$ y $1 \leq p < n$,

$$\|f - S_t f\|_{L^p(w)} \lesssim t^{\frac{1}{m}} \|h\|_{L^p(w)}.$$

(3) **Desigualdades de tipo pseudo-Hardy globales:** Si $n \geq 3$,

$$\|f - S_t f\|_{L^{2,\infty}(|x|^{-2})} \lesssim t^{\frac{1}{m}} \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración de (1) Fijamos $t > 0$ y escribimos $\mathbb{R}^n = \bigcup_i Q_i$, donde los cubos Q_i son disjuntos dos a dos y $\ell(Q_i) = t^{1/m}$. Para tales Q_i y $k \geq 0$, existen a lo más $2^{n\,(k+2)}$ cubos Q_j con $2^k Q_i \cap 2^k Q_j \neq \emptyset$: Si $k = 0$ no hay nada que probar. Si $k \geq 1$, veamos primero que

$$\bigcup_{j\,:\,2^k Q_j \cap 2^k Q_i \neq \emptyset} Q_j \subset 2^{k+2} Q_i.$$

Para ello denotamos por x_i y x_j a los centros de Q_i y Q_j, respectivamente, y tomamos $x \in \bigcup_{j\,:\,2^k Q_j \cap 2^k Q_i \neq \emptyset} Q_j$ entonces, existe Q_j tal que $x \in Q_j$ y existe $y \in 2^k Q_j \cap 2^k Q_i$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} |x - x_i| &\leq |x - x_j| + |x_j - y| + |y - x_i| \leq \frac{1}{2}\ell(Q_j) + 2^{k-1}\ell(Q_j) + 2^{k-1}\ell(Q_i) \\ &\leq 2^{k+1}\ell(Q_i), \end{aligned}$$

y por lo tanto, $x \in 2^{k+2} Q_i$. De la inclusión que acabamos de mostrar se sigue que:

$$\begin{aligned} 2^{n\,(k+2)}\, t^{n/m} = |2^{k+2} Q_i| &\geq \Big| \bigcup_{j\,:\,2^k Q_j \cap 2^k Q_i \neq \emptyset} Q_j \Big| = \sum_{j\,:\,2^k Q_j \cap 2^k Q_i \neq \emptyset} |Q_j| \\ &= t^{n/m}\, \#\{j \,:\, 2^k Q_j \cap 2^k Q_i \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

y de este modo,

$$\#\{j \,:\, 2^k Q_j \cap 2^k Q_i \neq \emptyset\} \leq 2^{n\,(k+2)}.$$

Por otro lado, el Ejemplo 3.28 nos proporciona (3.44) con $p \leq r < p^*$. Todo esto, la desigualdad de Minkowski y $r/p \geq 1$ implican que

$$\begin{aligned}
\|f - S_t f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_i \int_{Q_i} |f - S_{t_{Q_i}} f|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\lesssim \left\{ \sum_i |Q_i| \left[\sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, \ell(2^k Q_i) \left(\fint_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^r \right\}^{\frac{1}{r}} \\
&\leq t^{\frac{n}{m} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*})} \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, 2^{k\,(1 - \frac{n}{p})} \left[\sum_i \left(\int_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{r}{p}} \right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq t^{\frac{n}{m} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*})} \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, 2^{k\,(1 - \frac{n}{p})} \left(\sum_i \int_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim t^{\frac{n}{m} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*})} \left(\sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, 2^k \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim t^{\frac{n}{m} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p^*})} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

hemos utilizado que la sucesión $\{\sigma(k)\}_{k \geq 0}$ genera una serie convergente (debido al decaimiento de g).

Para demostrar la desigualdad análoga de tipo débil utilizamos las mismas ideas que antes, aunque ahora tomamos como punto de partida (3.43): Sea $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
&\lambda \, |\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |f - S_t f|(x) > \lambda\}|^{1/p^*} = \lambda \left(\sum_i |\{x \in Q_i \, : \, |f - S_{t_{Q_i}} f|(x) > \lambda\}| \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\quad \leq \left\{ \sum_i |Q_i| \left[\sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, \ell(2^k Q_i) \left(\fint_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p^*} \right\}^{\frac{1}{p^*}} \\
&\quad = \left\{ \sum_i \left[\sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, 2^{k\,(1 - \frac{n}{p})} \left(\int_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{p^*} \right\}^{\frac{1}{p^*}} \\
&\quad \leq \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, 2^{k\,(1 - \frac{n}{p})} \left[\sum_i \left(\int_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{p^*}{p}} \right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&\quad \leq \sum_{k \geq 0} \sigma(k) \, 2^{k\,(1 - \frac{n}{p})} \left(\sum_i \int_{2^k Q_i} h^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, 2^{k\,(1-\frac{n}{p})}\, \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Tomando el supremo para $\lambda > 0$ concluimos la prueba de (1).

Demostración de (2) Es análoga a la demostración de (1), con la diferencia de que ahora necesitamos el Ejemplo 3.30 (en lugar del Ejemplo 3.28) y el hecho de que si $w \in A_p$ entonces, existe $1 < s < \infty$ de modo que $w \in RH_s$, y por lo tanto $w(Q_i)/w(2^k\, Q_i) \lesssim 2^{-k\,n/s'}$ (ver (2.2)). Utilizando esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f - S_t f\|_{L^p(w)} &= \left(\sum_i \int_{Q_i} |f - S_{t_{Q_i}} f|^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \left\{ \sum_i w(Q_i) \left[\sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k\, Q_i) \left(\fint_{2^k\, Q_i} h^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim t^{\frac{1}{m}} \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, 2^{k\,(1-\frac{n}{p\,s'})} \left(\sum_i \int_{2^k\, Q_i} h^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim t^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, 2^{k\,(1+\frac{n}{p\,s})} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} h^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim t^{\frac{1}{m}}\, \|h\|_{L^p(w)}.
\end{aligned}$$

Demostración de (3) Sean $\lambda > 0$ y $w(x) = |x|^{-2}$. Se puede ver que para cualquier cubo Q y $k \geq 0$, $w(Q)/w(2^k\, Q) \lesssim 2^{-k(n-2)}$. Utilizando esta observación, el Ejemplo 3.32 y siguiendo los pasos de las demostraciones anteriores, tenemos que

$$\lambda\, w(\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f - S_t f|(x) > \lambda\})^{1/2} = \lambda \left(\sum_i w(\{x \in Q_i \,:\, |f - S_{t_{Q_i}} f|(x) > \lambda\}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \sum_i w(Q_i) \left[\sum_{k\geq 0} \sigma(k) \left(\frac{1}{w(2^k\, Q_i)} \int_{2^k\, Q_i} h^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \sum_i \left[\sum_{k\geq 0} \sigma(k) \left(\frac{w(Q_i)}{w(2^k\, Q_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^k\, Q_i} h^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, 2^{-k\,(n-2)} \left(\sum_i \int_{2^k\, Q_i} h^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, 2^{-k\,(\frac{n}{2}-2)}\, \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo para $\lambda > 0$ concluimos la prueba de (3).

3.3.3. Desigualdades de tipo Poincaré expandidas

Tomamos como punto de partida la siguiente desigualdad de Poincaré-$(1,1)$ generalizada: $f \in \mathcal{M}$ tal que

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \leq \sum_{k \geq 0} \alpha(k) \, \ell(2^k Q) \fint_{2^k Q} h \, dx, \tag{3.51}$$

para todo cubo Q, alguna sucesión $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ de números no-negativos y h una función medible no-negativa —como antes h puede depender de f (por ejemplo $h = |\nabla f|$). Aunque aquí trabajamos con cualquier función h dada.

Obsérvese que la situación clásica se consigue reemplazando $S_{t_Q} f$ por f_Q y tomando $h = |\nabla f|$ y $\alpha(k) = 0$ para $k \geq 1$. Pues en ese caso, (3.51) no es más que la desigualdad de Poincaré-$(1,1)$. Nótese también que si $\alpha(k) = 0$ para $k \geq 1$, tenemos (3.42) (estudiada en la sección anterior). También, si h es doblante y $\alpha(k)$ decae suficientemente rápido, (3.51) implica (3.42).

Pensamos que las estimaciones que estamos considerando en esta sección son más naturales que las anteriores. Pues éstas tienen en cuenta los efectos de cola (debidos a que el semigrupo, en general, no localiza), en lugar de observar sólo el término local. Además, bajo ciertas condiciones, la desigualdad clásica de Poincaré-$(1,1)$ implica (3.51) con $h = |\nabla f|$. Por ejemplo, si tomamos $\{S_t\}_{t>0}$ con la hipótesis adicional de que $S_t 1 = 1$ en casi todo $\mathbb{R}^n$ y para todo $t > 0$, (1) implica (3.51). Veamos esta afirmación: fijamos un cubo Q y una función de Lipschitz $f \in \mathcal{M}$ (sabemos que satisface (1)). Utilizando que $S_{t_Q} 1 = 1$ en casi todo $\mathbb{R}^n$ y (1), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx &\leq \fint_Q |f - f_Q| \, dx + \fint_Q \big|S_{t_Q}(f - f_Q)\big| \, dx \\
&\lesssim \ell(Q) \fint_Q |\nabla f| \, dx + \fint_Q \big|S_{t_Q}(f - f_Q)\big| \, dx.
\end{aligned}$$

Para estimar el segundo sumando escribimos $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \geq 2} C_k$, con $C_2 = 4Q$ y $C_k = 2^k Q \setminus 2^{k-1} Q$ si $k \geq 3$. Entonces, utilizando (2.1) y (2.5), conseguimos que

$$\begin{aligned}
\fint_Q \big|S_{t_Q}(f - f_Q)\big| \, dx &= \fint_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n} s_{t_Q}(x,y) \, (f - f_Q)(y) \, dy \right| dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|} \fint_Q \sum_{k \geq 2} \int_{C_k} g\left(\frac{|x-y|^m}{t_Q} \right) |f(y) - f_Q| \, dy \, dx \\
&\leq \sum_{k \geq 2} \frac{g(\lambda_k)}{|Q|} \int_{C_k} |f(y) - f_Q| \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le \sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\, g(\lambda_k) \fint_{2^k Q} |f(y) - f_Q|\, dy \\ &\lesssim \sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-3)}\big) \fint_{2^k Q} |f - f_Q|\, dy. \end{aligned}$$

Para controlar cada una de las integrales que aparecen en el lado derecho de la desigualdad anterior, aplicamos (1) y, para cada $k \ge 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \fint_{2^k Q} |f - f_Q|\, dx &\le \fint_{2^k Q} |f - f_{2^k Q}|\, dx + \sum_{l=1}^{k} |f_{2^l Q} - f_{2^{l-1} Q}| \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{k} \fint_{2^l Q} |f - f_{2^l Q}|\, dx \\ &\lesssim \sum_{l=1}^{k} \ell(2^l Q) \fint_{2^l Q} |\nabla f|\, dx. \end{aligned}$$

De las estimaciones conseguidas, obtenemos (3.51) con $\alpha(k) = C \sum_{l\ge k} 2^{n\,l}\, g\big(2^{m\,(l-3)}\big)$:

$$\begin{aligned} \fint_Q |f - f_Q|\, dx &\lesssim \ell(Q) \fint_Q |\nabla f|\, dx + \sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-3)}\big) \sum_{l=1}^{k} \ell(2^l Q) \fint_{2^l Q} |\nabla f|\, dx \\ &\lesssim \sum_{k\ge 1} \sum_{l\ge k} 2^{n\,l}\, g\big(2^{m\,(l-3)}\big)\, \ell(2^k Q) \fint_{2^k Q} |\nabla f|\, dx \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos conseguir desigualdades de Poincaré expandidas sin necesidad de usar las desigualdades de Poincaré. Esto será de utilidad en la segunda parte de la memoria. Veamos un par de casos particulares:

Ejemplo 3.34 Si $L = -\mathrm{div}(A\,\nabla)$ es un operador elíptico de segundo orden con cotas gaussianas (esto es, si $S_t = e^{-t\,L}$ verifica (2.5) con $m = 2$ y $g(t) = C\, e^{-c\,t}$) y además $e^{-t\,L}\sqrt{t}\,\mathrm{div}$ satisface, sin usar Poincaré, estimaciones $L^p - L^p$ off-diagonal con $1 \le p < \infty$ fijo (ver [AM2], [HoM, Lemma 2.2]), podemos concluir que, sin usar Poincaré,

$$\fint_Q |f - e^{-t_Q\,L} f|\, dx \lesssim \sum_{k\ge 0} e^{-c\,4^k}\, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} |\nabla f|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Veámoslo. En primer lugar, observamos que

$$\fint_Q |f - e^{-t_Q\,L} f|\, dx = \fint_Q \Big| \int_0^{t_Q} \partial_s (e^{-s\,L} f)\, ds \Big|\, dx \le \int_0^{t_Q} \fint_Q \big| e^{-s\,L}\, L f \big|\, dx\, ds. \tag{3.52}$$

Definimos $h = L^{1/2} f$ y $h_k = h\,\chi_{C_k}$, con $k \geq 2$ y donde (utilizando (2.1))

$$C_k = \begin{cases} 4\,Q, & \text{si } k = 2, \\ 2^k\,Q \setminus 2^{k-1}\,Q, & \text{si } k \geq 3 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2, \\ 2^{2\,(k-3)}, & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

Con esta notación, escribimos

$$Lf = L^{1/2}\,(L^{1/2} f) = L^{1/2} h = c \int_0^\infty e^{-t\,L}\,\sqrt{t}\,Lh\,\frac{dt}{t} = c \sum_{k\geq 2} \int_0^\infty e^{-t\,L}\,\sqrt{t}\,Lh_k\,\frac{dt}{t}$$

y así,

$$e^{-s\,L}\,Lf = c \sum_{k\geq 2} \int_0^\infty e^{-(s+t)\,L}\,Lh_k\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}.$$

Volviendo a (3.52) con esta notación, tenemos que para ciertas constantes θ_1 y θ_2:

$$\begin{aligned}
\fint_Q |f - e^{-t_Q\,L} f|\,dx &\leq \int_0^{t_Q} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\fint_Q \left| e^{-s\,L}\,\sqrt{s}\,\mathrm{div}(A\,\nabla\,f) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} ds \\
&\leq \sum_{k\geq 2} \int_0^{t_Q} \sqrt{s}\,2^{k\,\theta_1} \left(\frac{2^k\,\ell(Q)}{\sqrt{s}} \right)^{\theta_2} e^{-c\,\frac{4^k\,\ell(Q)^2}{s}}\,\frac{ds}{s} \left(\fint_{2^k\,Q} |\nabla f|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k\geq 2} \int_{2^k}^\infty \frac{2^k\,\ell(Q)}{t}\,2^{k\,\theta_1}\,t^{\theta_2}\,e^{-c\,t^2}\,\frac{dt}{t} \left(\fint_{2^k\,Q} |\nabla f|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k\geq 2} 2^{k\,\theta_1} \int_{2^k}^\infty t^{\theta_2 - 1}\,e^{-c\,t^2}\,\frac{dt}{t} \left(\fint_{2^k\,Q} |\nabla f|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k\geq 2} \left(\int_1^\infty e^{-c\,t^2}\,\frac{dt}{t} \right) e^{-c\,4^k}\,\ell(2^k\,Q) \left(\fint_{2^k\,Q} |\nabla f|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \sum_{k\geq 0} e^{-c\,4^k}\,\ell(2^k\,Q) \left(\fint_{2^k\,Q} |\nabla f|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.35 Si $S_t = I - (I - e^{-t\,L})^{m+1}$ con $m \geq 0$ y $L = -\mathrm{div}(A\,\nabla)$ es un operador elíptico de divergencia de segundo orden con cotas gaussianas, podemos conseguir (utilizando argumentos de [HoM]) (3.51) con $h = |\sqrt{L} f|$ con $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ que decaerá suficientemente tomando m grande. Escribimos

$$I - S_t = (I - e^{-t\,L})^m\,(I - e^{-t\,L}),$$

$$h = L^{1/2} f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \quad \text{con} \quad h_k = h\,\chi_{C_k(Q)} \quad \text{y} \quad L^{1/2} = \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t\,L}\, L\, \frac{dt}{t},$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx &= \fint_Q |(I - S_{t_Q}) f|\, dx \\
&= \fint_Q |(I - e^{-t_Q\,L})^m\, (I - e^{-t_Q\,L}) f|\, dx \\
&= \fint_Q \left|(I - e^{-t_Q\,L})^m \int_0^{t_Q} \partial_s e^{-s\,L} f\, ds\right| dx \\
&\le \int_0^{t_Q} \fint_Q \big|(I - e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-s\,L}\, Lf\big| dx\, ds \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_Q} \int_0^\infty \fint_Q \big|(I - e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, Lh_k\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds.
\end{aligned}$$

De [AM1, Sección 4] se sigue que dados E y F conjuntos cerrados y $t > 0$, se tiene que

$$\|e^{-t\,L}\,(t\,L)(f\,\chi_E)\|_{L^1(F)} \le C\, e^{-c\,\frac{d(E,F)^2}{t}}\, \|f\|_{L^1(E)}. \tag{3.53}$$

Consecuentemente, $e^{-t\,L}\,(t\,L)$ y $(I - e^{-t\,L})^m$ están uniformemente acotados en L^1. Esto nos permite estimar el término $k = 1$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_Q} \int_0^\infty \fint_Q \big|(I - e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, Lh_1\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds &\lesssim \fint_{4\,Q} |h|\, dx \int_0^{t_Q} \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t+s}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\lesssim \ell(4\,Q) \fint_{4\,Q} |h|\, dx.
\end{aligned}$$

Para $k \ge 2$ separamos el dominio de integración de la variable t en dos: $0 < t < (m+1)\,t_Q$ y $t \ge (m+1)\,t_Q$. Primero fijamos $0 < t < (m+1)\,t_Q$ y $0 < s < t_Q$ y observamos que, si $0 \le j \le m$, entonces $t + s \le j\,t_Q + t + s \le (2\,m+2)\,t_Q$ y para cierta constante $C_{j,m}$ entonces

$$(I - e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, L = \sum_{j=0}^{m} C_{j,m}\, e^{-(j\,t_Q + t + s)\,L}.$$

Así, (3.53) implica que

$$\fint_Q \big|(I - e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, Lh_k\big| dx \lesssim \frac{1}{|Q|} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j\,t_Q + t + s}\, e^{-c\,\frac{4^k\,\ell(Q)^2}{j\,t_Q + t + s}} \int_{2^k\,Q} |h|\, dx$$

$$\lesssim 2^{k\,n}\, e^{-c\,4^k}\, \frac{1}{t+s} \fint_{2^k\,Q} |h|\, dx.$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_Q} \int_0^{(m+1)\,t_Q} \fint_Q \big|(I-e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, Lh_k\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\qquad \lesssim e^{-c\,4^k}\, 2^{k\,n} \fint_{2^k\,Q} |h|\, dx \int_0^{t_Q} \int_0^{(m+1)\,t_Q} \frac{\sqrt{t}}{t+s}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\qquad \lesssim e^{-c\,4^k}\, \ell(2^k\,Q) \fint_{2^k\,Q} |h|\, dx.
\end{aligned}$$

Si hacemos un cambio de variables y llamamos $t' = \dfrac{t}{t_Q\,(m+1)}$ y $s' = \dfrac{s}{t_Q}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_Q} \int_{(m+1)\,t_Q}^{\infty} \fint_Q \big|(I-e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, Lh_k\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\quad \lesssim \ell(Q) \int_0^1 \int_1^{\infty} \fint_Q \big|(I-e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-t\,t_Q\,m\,L}\, e^{-(s+t)\,t_Q\,L}\, (t_Q\,L) h_k\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\quad \lesssim \ell(Q) \int_0^1 \int_1^{\infty} \fint_Q \big|(e^{-t\,t_Q\,L}-e^{-(t\,t_Q+t_Q)\,L})^m\, e^{-(s+t)\,t_Q\,L}\, ((s+t)\,t_Q\,L) h_k\big| dx\, \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}\, ds.
\end{aligned}$$

Necesitamos ahora el siguiente resultado:

Lema 3.36 *Dados E y F conjuntos cerrados y $0 < t \le s$, tenemos que*

$$\Big\| \frac{s}{t}\, \big(e^{-s\,L}-e^{-(s+t)\,L}\big)(f\,\chi_E) \Big\|_{L^1(F)} \le C\, e^{-c\,\frac{d(E,F)^2}{s}}\, \|f\|_{L^1(E)}. \tag{3.54}$$

Utilizando este resultado, (3.53) y [HoM, Lemma 2.3], tenemos para cada $0 < s < 1 < t < \infty$:

$$\begin{aligned}
&\fint_Q \big|(e^{-t\,t_Q\,L}-e^{-(t\,t_Q+t_Q)\,L})^m\, e^{-(s+t)\,t_Q\,L}\, ((s+t)\,t_Q\,L) h_k\big| dx \\
&\qquad \lesssim t^{-m}\, \frac{1}{|Q|}\, e^{-c\,\frac{4^k\,\ell(Q)^2}{\max\{t\,t_Q,(s+t)\,t_Q\}}} \int_{2^k\,B} |h|\, dx \\
&\qquad \lesssim t^{-m}\, 2^{k\,n} e^{-c\,\frac{4^k}{t}} \fint_{2^k\,Q} |h|\, dx.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^{t_Q} \int_{(m+1)\,t_Q}^{\infty} \fint_Q \big|(I-e^{-t_Q\,L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, Lh_k\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds$$

$$\lesssim \ell(Q)\, 2^{k\,n} \fint_{2^k Q} |h|\, dx \int_0^1 \int_1^\infty t^{-m}\, e^{-c\,\frac{4^k}{t}}\, \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}\, ds$$

$$\lesssim 2^{-k\,(m+2-n)}\, \ell(2^k Q) \fint_{2^k Q} |h|\, dx.$$

Reuniendo las estimaciones, completamos la demostración:

$$\begin{aligned}
\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx &\lesssim \sum_{k=1}^\infty \int_0^{t_Q} \int_0^\infty \fint_Q \big|(I - e^{-t_Q\, L})^m\, e^{-(s+t)\,L}\, L h_k\big| dx\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\lesssim \ell(4\,Q) \fint_{4\,Q} |h|\, dx + \sum_{k=2}^\infty \big(e^{-c\,4^k} + 2^{-k\,(2\,m-n)}\big)\, \ell(2^k Q) \fint_{2^k Q} |h|\, dx \\
&\lesssim \sum_{k=1}^\infty 2^{-k\,(m+2-n)}\, \ell(2^k Q) \fint_{2^k Q} |h|\, dx.
\end{aligned}$$

∎

Demostración del Lema 3.36 Argumentamos como en [HoM, p. 504] y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Big\| \frac{s}{t} \big(e^{-s\,L} - e^{-(s+t)\,L}\big)(f\,\chi_E) \Big\|_{L^1(F)} &= \Big\| - \frac{s}{t} \int_0^t \frac{d}{du} e^{-(s+u)\,L} (f\,\chi_E)\, du\, \Big\|_{L^1(F)} \\
&\le \frac{s}{t} \int_0^t \big\| e^{-(s+u)\,L}((s+u)\,L)(f\,\chi_E) \big\|_{L^1(F)}\, \frac{du}{s+u} \\
&\le C\, \|f\|_{L^1(E)}\, \frac{s}{t} \int_0^t e^{-\frac{c\,d(E,F)^2}{s+u}}\, \frac{du}{s+u} \\
&\le C\, e^{-\frac{c\,d(E,F)^2}{s}}\, \|f\|_{L^1(E)},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (3.53) y que $s \le s+u \le s+t \le 2\,s$. ∎

A continuación vamos a aplicar nuestros resultados principales para obtener automejora en la integrabilidad del lado izquierdo de (3.51). Por fijar ideas nos centramos en estudiar el caso de desigualdades de tipo Poincaré-Sobolev sin peso, análogas a las estudiadas en el Ejemplo 3.28. Aunque las mismas ideas se pueden utilizar para tratar los otros ejemplos de la sección anterior. Así, seguimos los pasos dados en el Ejemplo 3.28: Tomamos $1 \le p < n$ y observamos que (3.51) implica

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \le \sum_{k\ge 0} \alpha(k)\, \ell(2^k Q) \Big(\fint_{2^k Q} h^p\, dx \Big)^{1/p} = a(Q). \tag{3.55}$$

Una vez elegido el funcional a, tenemos que mostrar que $a \in D_q$ para algún $q > 1$. Una elección natural es $q = p^*$ (como en el Ejemplo 3.28), pero no podemos comprobar (utilizando la demostración dada en el Ejemplo 3.28) que $a \in D_{p^*}$. Pues, para que se verifique la última desigualdad de la demostración de $a \in D_{p^*}$ (página 64, (3.46)) es crucial que la familia de cubos con la que trabajamos sea disjunta, y en este caso no siempre podemos trabajar con cubos disjuntos (tenemos integrales en cubos dilatados de Q de la forma $2^k Q$, que dejan de ser disjuntos dos a dos). Este hecho arruina los cálculos y, por lo tanto, no podemos comprobar (utilizando esa demostración) que $a \in D_{p^*}$. Así, en este caso, no sólo conseguiremos que $a \in D_q$ para cada $1 < q < p^*$. Pues, en algún sentido, tener $q < p^*$ nos ayuda a controlar el solapamiento de los cubos dilatados. Por lo tanto, tenemos que trabajar con una condición más débil que la introducida en el Teorema 3.11. Vamos a afinar la condición D_q considerando la escala de los espacios de Orlicz. Esto eventualmente nos conduce a mostrar que existe una estimación de tipo Poincaré-Sobolev en el espacio de Orlicz débil y en la misma escala que $L^{p^*,\infty}$. Para simplificar la notación, fijamos $1 \le p < n$ y escribimos

$$a(Q) = \sum_{k \ge 0} \alpha(k)\, a_0(2^k Q) \quad \text{con} \quad a_0(Q) = \ell(Q) \left(\fint_Q h^p \, dx \right)^{1/p}. \tag{3.56}$$

En la siguiente proposición encontramos otro funcional $\bar{a}$ con una expresión similar a a y tal que el par $(a, \bar{a}) \in D_q$:

Proposición 3.37 *Sean $1 \le p < n$, $1 < q < p^*$ y a dado por* (3.56). *Existe una sucesión de números no-negativos $\{\bar{\alpha}(k)\}_{k \ge 0}$ de modo que si tomamos*

$$\bar{a}(Q) = \sum_{k \ge 0} \bar{\alpha}(k)\, a_0(2^k Q),$$

entonces $(a, \bar{a}) \in D_q$.

En la demostración de este resultado, podemos ver que

$$\bar{\alpha}(k) = \begin{cases} C\,\alpha(0), & \text{si } k = 0, \\ C\, 2^{k\,n\,(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \displaystyle\sum_{l \ge k-1} 2^{l\,n\,(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}\, \alpha(l), & \text{si } k \ge 1 \end{cases}$$

Este resultado, el Teorema 3.11 y la desigualdad de Kolmogorov (3.39) nos conducen al siguiente corolario:

Corolario 3.38 *Dado $1 \le p < n$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica* (3.51) *o, más general, si $f \in \mathcal{M}$ verifica que*

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f| \, dx \le \sum_{k \ge 0} \alpha(k)\, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{3.57}$$

para todo cubo Q y para alguna $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ sucesión de números no-negativos y h una función medible no-negativa, entonces, para todo $1 < q < p^*$ existe otra sucesión de números no-negativos $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k\geq 0}$ de modo que

$$\left(\fint_Q |f - S_{t_Q} f|^q\, dx\right)^{1/q} \leq \sum_{k\geq 0} \tilde{\alpha}(k)\, \ell(2^k\, Q) \left(\fint_{2^k\, Q} h^p\, dx\right)^{1/p},$$

donde $\tilde{\alpha}(k) = C \sum_{j=0}^{k} 2^{2\,n\,j}\, g(c\, 2^{m\,j})\, \bar{\alpha}(k-j)$, $k \geq 0$.

Por otro lado, notar que si $p \geq n$, el funcional $a(Q)$ (definido en (3.55)) es creciente y, de este modo, la estimación anterior se verifica para todo $1 < q < \infty$.

También podemos obtener estimaciones de tipo pseudo-Poincaré globales comenzando con (3.55). Para ello utilizamos el Corolario 3.38 y seguimos la pista de las constantes y sucesiones involucradas en las demostraciones de las desigualdades de tipo pseudo-Poincaré fuertes en el rango $p \leq q < p^*$.

Demostración de la Proposición 3.37 Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \leq q < p^*$, pues la condición D_q es decreciente (esto es consecuencia de la desigualdad de Hölder).

Fijamos un cubo Q y una familia $\{Q_i\}_i$ de subcubos de Q disjuntos dos a dos. Aplicamos la desigualdad de Minkowski y que $q \geq p$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{(3.58)}\qquad \Big(\sum_i a(Q_i)^q\, |Q_i|\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k) \Big(\sum_i a_0(2^k\, Q_i)^q\, |Q_i|\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, 2^{-k\,\frac{n}{p^*}} \Big(\sum_i \ell(Q_i)^{(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \int_{2^k\, Q_i} h^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Estimamos la suma interna como sigue: si $k = 0$, utilizando que los cubos $Q_i \subset Q$ son disjuntos dos a dos y que $p \leq q < p^*$, tenemos que

$$\sum_i \ell(Q_i)^{(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \int_{Q_i} h^p\, dx \leq \ell(Q)^{(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \int_Q h^p\, dx = |Q|^{\frac{p}{q}}\, a_0(Q)^p.$$

Si $k \geq 1$ ordenamos los cubos según la longitud de sus lados y conseguimos la siguiente estimación de su solapamiento cuya prueba se encuentra al final de esta demostración:

Lema 3.39 *Sean $k \geq 1$, Q un cubo y $\{Q_i\}_i$ una familia de subcubos de Q disjuntos dos a dos con $2^{-l}\, \ell(Q) < \ell(Q_i) \leq 2^{-l+1}\, \ell(Q)$, para algún $l \geq 1$ fijo. Se tiene que para cada $2^k\, Q_i$ existen a lo más $\min\{2^{n\,(k+4)}, 2^{l\,n}\}$ cubos Q_j de modo que $2^k\, Q_i \cap 2^k\, Q_j \neq \emptyset$. Además, $2^k\, Q_i \subset 2^{k-l+2}\, Q$, cuando $1 \leq l \leq k+1$, y $2^k\, Q_i \subset 2\, Q$, cuando $l \geq k+2$.*

Entonces, para cada $l \geq 1$, escribimos $E_l = \{Q_i : 2^{-l}\,\ell(Q) < \ell(Q_i) \leq 2^{-l+1}\,\ell(Q)\}$ y utilizando el lema anterior, que $p < n$ y $p \leq q < p^*$, conseguimos:

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \ell(Q_i)^{(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \int_{2^k Q_i} h^p\,dx \\
&\quad\lesssim \ell(Q)^{(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \sum_{l\geq 1} 2^{-l\,(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \sum_{Q_i\in E_l} \int_{2^k Q_i} h^p\,dx \\
&\quad\lesssim \ell(Q)^{(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)} \Big(\sum_{1\leq l\leq k+1} 2^{-l\,(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)}\, 2^{n\,l} \int_{2^{k-l+2}\,Q} h^p\,dx \\
&\qquad\qquad + \sum_{l\geq k+2} 2^{-l\,(n-p)\,(\frac{p^*}{q}-1)}\, 2^{n\,k} \int_{2\,Q} h^p\,dx \Big) \\
&\quad\lesssim |Q|^{\frac{p}{q}}\, 2^{k\,(n-p)} \sum_{1\leq l\leq k+1} 2^{-l\,n\,(\frac{p}{q}-1)}\, a_0(2^{k-l+2}\,Q)^p \\
&\quad= |Q|^{\frac{p}{q}}\, 2^{k\,(2\,n-p-\frac{n\,p}{q})} \sum_{1\leq l\leq k+1} 2^{l\,n\,(\frac{p}{q}-1)}\, a_0(2^l\,Q)^p.
\end{aligned}
$$

Volviendo con estas estimaciones a (3.58), concluimos que

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_i a(Q_i)^q\,|Q_i|\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\lesssim \alpha(0)\,|Q|^{\frac{1}{q}}\,a_0(Q) + |Q|^{\frac{1}{q}} \sum_{k\geq 1} \alpha(k)\,2^{k\,n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Big(\sum_{1\leq l\leq k+1} 2^{l\,n\,(\frac{p}{q}-1)}\, a_0(2^l\,Q)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\leq \alpha(0)\,|Q|^{\frac{1}{q}}\,a_0(Q) + |Q|^{\frac{1}{q}} \sum_{l\geq 1} \Big(2^{-l\,n\,(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_{k\geq l-1} \alpha(k)\,2^{k\,n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Big)\, a_0(2^l\,Q) \\
&\quad= |Q|^{\frac{1}{q}} \sum_{l\geq 0} \bar{\alpha}(l)\; a_0(2^l\,Q) = \big(\bar{a}(Q)^q\,|Q|\big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

donde $\bar{\alpha}(0) = C\,\alpha(0)$ y $\bar{\alpha}(l) = C\,2^{-l\,n\,(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_{k\geq l-1} \alpha(k)\,2^{k\,n\,(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$, para $l \geq 1$. De este modo queda demostrado que $(a, \bar{a}) \in D_q$. ∎

Observación 3.40 Notar que, en el argumento anterior, ha sido crucial que $p \leq q < p^*$. Pues en caso contrario, la suma geométrica sería divergente para los términos $l \geq k+2$.

Demostración del Lema 3.39 Fijamos $k \geq 1$, $l \geq 1$ y un cubo Q_i de la familia de subcubos de Q disjuntos dos a dos con $2^{-l}\,\ell(Q) < \ell(Q_i) \leq 2^{-l+1}\,\ell(Q)$. Entonces, tenemos que

$$\bigcup_{j:2^k Q_i \cap 2^k Q_j \neq \emptyset} Q_j \subset 2^{k+3} Q_i$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned} 2^{n\,(k+4)-l\,n}\,\ell(Q)^n \geq |2^{k+3}\,Q_i| &\geq \sum_{j:2^k Q_i \cap 2^k Q_j \neq \emptyset} |Q_j| \\ &> 2^{-l\,n}\,\ell(Q)^n\,\#\{j : 2^k\,Q_i \cap 2^k\,Q_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$|Q| \geq |\bigcup_i Q_i| = \sum_i |Q_i| \geq 2^{-l\,n}\,|Q|\,\#\{Q_i\}_i.$$

La otra afirmación del lema es inmediata, utilizando las condiciones sobre las longitudes de los lados de los cubos de la familia. Veámoslo. Fijamos $k \geq 1$. Tomamos $x \in 2^k\,Q_i$ y denotamos por x_i y x_Q a los centros de Q_i y Q, respectivamente. Entonces, tenemos que

$$|x - x_Q| \leq |x - x_i| + |x_i - x_Q| \leq 2^{k-1}\,\ell(Q_i) + \frac{1}{2}\,\ell(Q) \leq \Big(2^{k-l} + \frac{1}{2}\Big)\,\ell(Q).$$

De este modo, hemos comprobado que si $1 \leq l \leq k+1$, entonces $x \in 2^{k-l+2}\,Q$ (pues $2^{k-l} + 2^{-1} \leq 2^{k-l+1}$). Por otro lado, si $l \geq k+2$, $x \in 2\,Q$ (pues, en este caso, $2^{k-l} + 2^{-1} \leq 1$). ∎

3.3.4. Afinando la condición D_q: Escala de Orlicz

En el Corolario 3.38 mostramos, utilizando que el funcional a satisface una condición de tipo D_q, automejoras de tipo L^q para cada $1 < q < p^*$ y $1 \leq p < n$. Pero como no hemos conseguido demostrar que el funcional verifique una condición de tipo D_{p^*} (de hecho creemos que esta condición falla debido al solapamiento), nuestros métodos no nos proporcionan resultados en $L^{p^*,\infty}$. Así, nuestro siguiente objetivo es encontrar una estimación en un espacio de Marcinkiewicz (el cual corresponde al espacio de tipo débil de un espacio de Orlicz) en la escala p^*. Consideramos entonces el espacio de Orlicz $L^{p^*}\,(\log L)^{-(1+\epsilon)}$ con $\epsilon > 0$ asociado a la función de Young

$$\phi(t) = t^{p^*}\,(1 + \log^+ t)^{-(1+\epsilon)}$$

y con función fundamental

$$\varphi(t) = \frac{1}{\phi^{-1}(t)} \approx t^{\frac{1}{p^*}}\,\Big(1 + \log^+ \frac{1}{t}\Big)^{-\frac{1+\epsilon}{p^*}}.$$

Recordemos que la función fundamental se define como

$$\varphi(t) = \|\chi_E\|_{L^{p^*}(\log L)^{-(1+\epsilon)}}, \qquad \text{con} \qquad |E| = t.$$

Su espacio de Marcinkiewicz correspondiente $\mathbb{M}_\varphi$ viene dado por la cuasi-norma:

$$\|f\|_{\mathbb{M}_\varphi, Q} = \sup_{t>0} t\, \varphi\bigg(\frac{\big|\big\{x \in Q : |f(x)| > t\big\}\big|}{|Q|}\bigg).$$

Este es el mayor espacio de funciones con la función fundamental φ. El espacio $\mathbb{M}_\varphi$ tiene la misma relación con $L^{p^*}(\log L)^{-(1+\epsilon)}$ que $L^{p,\infty}$ con L^p. Obsérvese que $L^{p^*}(\log L)^{-(1+\epsilon)}$ y $\mathbb{M}_\varphi$ están en la escala p^*, en el sentido de el índice superior y el índice inferior de Boyd es p^*. Recomendamos consultar [BeS] o [RR] para estudiar la teoría general de los espacios de Orlicz.

Establecemos la siguiente automejora en el espacio de Marcinkiewicz:

Teorema 3.41 *Dado* $1 \le p < n$. *Si* $f \in \mathcal{M}$ *verifica* (3.57) (*hecho que ocurre si en particular,* $f \in \mathcal{M}$ *verifica* (3.51)), *entonces, existe otra sucesión de números no-negativos* $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k\ge 0}$ *de modo que se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\mathbb{M}_\varphi, Q} \le \sum_{k\ge 0} \tilde{\alpha}(k)\, \ell(2^k Q) \left(⨍_{2^k Q} h^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{3.59}$$

Obsérvese que (3.59) es más fuerte que las estimaciones obtenidas en el Corolario 3.38. Pues, si $1 < q < p^*$, se tiene que $t^{1/q} \lesssim \varphi(t)$, para cualquier $0 < t \le 1$; así, $\|f\|_{L^{q,\infty}, Q} \lesssim \|f\|_{\mathbb{M}_\varphi, Q}$, para cualquier función f.

Por último escribimos un ejemplo sugerido por [HoM]: Dado $1 \le p < n$, sea $f \in \mathcal{M}$ verificando la siguiente desigualdad

$$⨍_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \lesssim \ell(2\,Q) \left(⨍_{2\,Q} |\nabla f|^p\, dx\right)^{1/p} + \sum_{k\ge 2} \alpha(k)\, \ell(2^k Q) ⨍_{2^k Q} |\nabla f|\, dx = a(Q),$$

para alguna sucesión de números no-negativos $\{\alpha(k)\}_{k\ge 2}$, entonces el mismo tipo de argumento que hemos utilizado nos permite mostrar que

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\mathbb{M}_\varphi, Q} \le \sum_{k\ge 0} \tilde{\alpha}(k)\, a(2^k Q), \tag{3.60}$$

para alguna $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k\ge 0}$ y $\varphi(t) \approx t^{1/1^*}(1 + \log^+ 1/t)^{-(1+\epsilon)/1^*}$. Para conseguir esta estimación basta mostrar que el término local (el que involucra a $2\,Q$) satisface la condición de sumación asociada al espacio $L^{p^*}(\log L)^{-(1+\epsilon)}$ y que el término global (la suma de los términos $2^k Q$, $k \ge 2$) verifica la condición asociada a $L^{1^*}(\log L)^{-(1+\epsilon)}$, ver el Lema 3.42. De este modo, a verifica la condición y, por lo tanto, el Teorema 3.41 nos proporciona (3.60).

3.3.5. Demostración del Teorema 3.41

Recordemos que

$$\phi(t) = \frac{t^{p^*}}{(1+\log^+ t)^{1+\epsilon}}, \quad \text{con} \quad \phi^{-1}(t) \approx t^{\frac{1}{p^*}} (1+\log^+ t)^{\frac{1+\epsilon}{p^*}}$$

y

$$\varphi(t) = \frac{1}{\phi^{-1}(\frac{1}{t})} \approx t^{\frac{1}{p^*}} \Big(1+\log^+\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^{-\frac{1+\epsilon}{p^*}},$$

con

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{1}{\phi(\frac{1}{t})} \approx t^{p^*} \Big(1+\log^+\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^{1+\epsilon}.$$

Fijamos $f \in \mathcal{M}$ de modo que verifique (3.51) o (3.57) y escribimos

$$a(Q) = \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, a_0(2^k Q), \qquad a_0(Q) = \ell(Q) \left(\fint_Q h^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Consideramos los funcionales $\bar{a}, \tilde{a} : \mathcal{Q} \times \mathcal{F} \longrightarrow (0, +\infty]$ dados por

$$\bar{a}(Q) = \sum_{k\geq 1} \bar{\alpha}(k)\, a_0(2^k Q),$$

y

$$\tilde{a}(Q) = C \sum_{k\geq 0} 2^{2\,n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-5)-3}\big)\, \bar{a}(2^k Q) = \sum_{k\geq 1} \tilde{\alpha}(k)\, a_0(2^k Q),$$

donde

$$\bar{\alpha}(k) = C\, 2^{-k\,n/p} \sum_{l\geq k-1} 2^{l\,n/p}\, \alpha(l) \quad \text{y} \quad \tilde{\alpha}(k) = C \sum_{l=0}^{k-1} 2^{2\,n\,l}\, g\big(2^{m\,(l-5)-3}\big)\, \bar{\alpha}(l-k).$$

Fijamos un cubo Q tal que $\tilde{a}(Q) < \infty$. En caso contrario, no hay nada que probar. Como antes, definimos $G(x) = \big|f(x) - S_{t_Q} f(x)\big|\, \chi_{4\,Q}(x)$ y estimamos $\|MG\|_{\mathbb{M}_\varphi,Q}$. Esto junto con el teorema de diferenciación de Lebesgue implican (3.59).

Seguimos las ideas de la demostración del Teorema 3.11. Primero conseguimos una estimación del tipo D_r adaptada a ϕ para $(a, \bar{a})$, cuya demostración se encuentra al final de la sección:

Lema 3.42 *Para cualquier cubo Q y cualquier familia de cubos disjuntos dos a dos $\{Q_i\}_i \subset Q$, se tiene que*

$$\sum_i \phi\bigg(\frac{a(Q_i)}{\bar{a}(Q)}\bigg) \frac{|Q_i|}{|Q|} \lesssim 1.$$

Este resultado implica que $(a, \bar{a}) \in D_1$. Pues, de la desigualdad de Young se sigue que

$$\sum_i \frac{a(Q_i)}{\bar{a}(Q)} \frac{|Q_i|}{|Q|} \leq \sum_i \phi\Big(\frac{a(Q_i)}{\bar{a}(Q)}\Big) \frac{|Q_i|}{|Q|} + \sum_i \bar{\phi}(1) \frac{|Q_i|}{|Q|} \lesssim 1,$$

donde $\bar{\phi}(t) \approx t^{(p^*)'} (1 + \log^+ t)^{(1+\epsilon)(p^*)'/p^*}$ es la función conjugada de ϕ.

Por lo tanto, se satisface (3.37): para cada cubo R y $k \geq 1$,

$$\fint_{2^k R} |f - S_{t_R} f| \, dx \leq \bar{a}(2^k R).$$

Consecuentemente, $G = |f - S_{t_Q} f| \, \chi_{4Q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \tilde{a}(Q) \, |Q|$ y $|\Omega_t| \lesssim \tilde{a}(Q) \, |Q|/t$, donde Ω_t es el conjunto de nivel t de MG.

Fijamos ahora $q > 1$ suficientemente grande a elegir y $0 < \lambda < 1$ suficientemente pequeño. Vamos a mostrar que para todo $t > 0$ se satisface la siguiente desigualdad del tipo:

$$|\Omega_{q\,t} \cap Q| \leq c_1 \, \lambda \, |\Omega_t \cap Q| + \frac{c_2}{\phi\big(\frac{\lambda \, t}{\tilde{a}(Q)}\big)} \, |Q|. \tag{3.61}$$

Como consecuencia de esta desigualdad y utilizando que φ es una función cóncava y creciente, obtenemos:

$$\varphi\Big(\frac{|\Omega_{q\,t} \cap Q|}{|Q|}\Big) \leq \varphi\Big(c_1 \, \lambda \, \frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|}\Big) + c_2 \, \frac{\tilde{a}(Q)}{\lambda \, t}.$$

Si además λ es suficientemente pequeño, la desigualdad anterior implica que

$$\varphi\Big(\frac{|\Omega_{q\,t} \cap Q|}{|Q|}\Big) \leq (c_1 \, \lambda)^{1/p^*} \, \varphi\Big(\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|}\Big) + c_2 \, \frac{\tilde{a}(Q)}{\lambda \, t}.$$

Fijamos $N > 0$, tomamos supremo sobre t y obtenemos:

$$\sup_{0<t\leq N/q} t \, \varphi\Big(\frac{|\Omega_{q\,t} \cap Q|}{|Q|}\Big) \leq (c_1 \, \lambda)^{1/p^*} \sup_{0<t\leq N/q} t \, \varphi\Big(\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|}\Big) + \frac{c_2}{\lambda} \, \tilde{a}(Q).$$

Cambiando de variable en la parte izquierda de la desigualdad y multiplicando por q la desigualdad anterior:

$$\sup_{0<t\leq N} t \, \varphi\Big(\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|}\Big) \leq q \, (c_1 \, \lambda)^{1/p^*} \sup_{0<t\leq N} t \, \varphi\Big(\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|}\Big) + \frac{c_2 \, q \, \tilde{a}(Q)}{\lambda}. \tag{3.62}$$

Notar que debido a que φ es una función creciente, tenemos que

$$\sup_{0<t\leq N} t \, \varphi\Big(\frac{|\Omega_t \cap Q|}{|Q|}\Big) \leq N < \infty.$$

Entonces, si elegimos λ suficientemente pequeño, podemos mover el primer término del lado derecho de (3.62) a su lado izquierdo, y así conseguimos:

$$\sup_{0<t\leq N} t\,\varphi\Big(\frac{|\Omega_t\cap Q|}{|Q|}\Big)\lesssim \tilde{a}(Q).$$

Tomando límite cuando $N\to\infty$, concluimos que

$$\|MG\|_{\mathbb{M}_\varphi,Q}\lesssim \tilde{a}(Q).$$

Veamos ahora (3.61): tomamos $c_0>0$ de modo que $|\Omega_t|<|Q|/2$, si $t>c_0\,\tilde{a}(Q)$. Si $0<t\leq c_0\,\tilde{a}(Q)$, utilizando que ϕ es una función creciente, tenemos la siguiente desigualdad:

$$|\Omega_{q\,t}\cap Q|\leq |Q|\leq c_1\,\lambda\,|\Omega_t\cap Q|+\frac{c_2}{\phi\big(\frac{\lambda\,t}{\bar{a}(Q)}\big)}\,|Q|.$$

Caso $t>c_0\,\tilde{a}(Q)$: aplicamos el Teorema 3.16 y el Lema 3.17 para cubrir Ω_t con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i$ con $\ell(Q_i^t)<\ell(Q)$. Por otro lado, pues $(a,\bar{a})\in D_1$, podemos aplicar la Proposición 3.25, donde $\tilde{a}$ depende de $\bar{a}$. Estas observaciones nos permiten obtener (3.17). La estimación de I es exactamente igual. Para II utilizamos la notación y los argumentos de la demostración del Teorema 3.11 y (3.38) y utilizando que ϕ es convexa, conseguimos:

$$II\leq\sum_{\Gamma_2}|Q_i^t|\lesssim\phi\Big(\frac{\lambda\,t}{\bar{a}(Q)}\Big)^{-1}|Q|\sum_{i:Q_i^t\subset Q}\sum_{k=1}^{2^n}\phi\Big(\frac{a((Q_i^t)_k)}{\bar{a}(Q)}\Big)\frac{|(Q_i^t)_k|}{|Q|}.$$

Ahora separamos la familia $\{2\,Q_i^t\}_i$ en c_n familias $\mathcal{F}_j$ de cubos disjuntos dos a dos. Gracias a que los cubos de la colección $\mathcal{F}_j^*=\{(Q_i^t)_k: Q_i^t\in\mathcal{F}_j, 1\leq k\leq 2^n\}$ son disjuntos dos a dos, podemos aplicar el Lema 3.42 y conseguimos la siguiente estimación:

$$II\lesssim\phi\Big(\frac{\lambda\,t}{\bar{a}(Q)}\Big)^{-1}|Q|\leq\phi\Big(\frac{\lambda\,t}{\tilde{a}(Q)}\Big)^{-1}|Q|,$$

que completa la demostración de (3.61). ∎

Demostración del Lema 3.42 Nótese que

$$\bar{a}(Q)\gtrsim\sum_{k\geq 2}\alpha(k)\Big(\sum_{l=1}^{k+1}2^{l\,n/p}\,a_0(2^{k-l+2}\,Q)\Big)=\sum_{k\geq 2}\alpha(k)\,b_k(Q).$$

Basta entonces mostrar que para cada $k\geq 2$:

$$\sum_i\phi\Big(\frac{a_0(2^kQ_i)}{b_k(Q)}\Big)\frac{|Q_i|}{|Q|}\lesssim 1. \tag{3.63}$$

Pues utilizando que la función ϕ es convexa, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_i \phi\biggl(\frac{a(Q_i)}{\bar{a}(Q)}\biggr)\frac{|Q_i|}{|Q|} &\lesssim \sum_i \phi\biggl(\frac{\sum_{k\geq 2}\alpha(k)\,a_0(2^k\,Q_i)}{\sum_{k\geq 2}\alpha(k)\,b_k(Q)}\biggr)\frac{|Q_i|}{|Q|}\\ &\leq \sum_{k\geq 2}\frac{\alpha(k)\,b_k(Q)}{\sum_{k\geq 2}\alpha(k)\,b_k(Q)}\sum_i \phi\biggl(\frac{a_0(2^kQ_i)}{b_k(Q)}\biggr)\frac{|Q_i|}{|Q|}\lesssim 1.\end{aligned}$$

Veamos (3.63): para cada $l \geq 1$ definimos

$$E_l = \{Q_i : 2^{-l}\,\ell(Q) < \ell(Q_i) \leq 2^{-l+1}\,\ell(Q)\}.$$

Sea $\psi(t) = \phi(t^{1/p})$, utilizando que ψ es una función de Young, podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_i \phi\biggl(\frac{a_0(2^kQ_i)}{b_k(Q)}\biggr)\frac{|Q_i|}{|Q|} &\lesssim \sum_{l=1}^{\infty}2^{-l\,n}\sum_{Q_i\in E_l}\psi\biggl(b_k(Q)^{-p}\,|2^k\,Q|^{-\frac{p}{p^*}}\,2^{l\,\frac{n\,p}{p^*}}\int_{2^k\,Q_i}h^p\,dx\biggr)\\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty}2^{-l\,n}\psi\biggl(b_k(Q)^{-p}\,|2^k\,Q|^{-\frac{p}{p^*}}\,2^{l\,\frac{n\,p}{p^*}}\sum_{Q_i\in E_l}\int_{2^k\,Q_i}h^p\,dx\biggr)\\ &= \sum_{l=1}^{k+1}\cdots + \sum_{l\geq k+2}\cdots = I + II.\end{aligned}$$

Estimamos cada término por separado. Aplicando el Lema 3.39 y que $\phi(t) = t^{p^*}$ para $t \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}I &\leq \sum_{l=1}^{k+1}2^{-l\,n}\,\psi\biggl(b_k(Q)^{-p}\,|2^k\,Q|^{-\frac{p}{p^*}}\,2^{l\,\frac{n\,p}{p^*}}\,2^{n\,l}\int_{2^{k-l+2}\,Q}h^p\,dx\biggr)\\ &\lesssim \sum_{l=1}^{k+1}2^{-l\,n}\,\phi\bigl(b_k(Q)^{-1}\,2^{l\,\frac{n}{p}}\,a_0(2^{k-l+2}\,Q)\bigr)\\ &= b_k(Q)^{-p^*}\sum_{l=1}^{k+1}2^{l\,\frac{n\,p^*}{p}}\,a_0(2^{k-l+2}\,Q)^{p^*}\\ &\lesssim b_k(Q)^{-p^*}\,\Bigl(\sum_{l=1}^{k+1}2^{l\,\frac{n}{p}}\,a_0(2^{k-l+2}\,Q)\Bigr)^{p^*}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Por otro lado, del Lema 3.39 y el hecho de que $b_k(Q) \geq 2^{k\,n/p}\,a_0(2\,Q)$ se sigue que

$$II \lesssim \sum_{l\geq k+2}2^{-l\,n}\,\psi\biggl(b_k(Q)^{-p}\,|2^k\,Q|^{-\frac{p}{p^*}}\,2^{l\,\frac{n\,p}{p^*}}\,2^{n\,(k+4)}\int_{2\,Q}h^p\,dx\biggr)$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{l\geq k+2} 2^{-l\,n}\,\phi\big(b_k(Q)^{-1}\,2^{\frac{n}{p^*}\,(l-k)}\,2^{\frac{n\,k}{p}}\,a_0(2\,Q)\big)\\
&\lesssim \sum_{l\geq k+2} 2^{-l\,n}\,\phi(2^{(l-k)\,\frac{n}{p^*}}) \lesssim \sum_{l\geq 1} l^{-(1+\epsilon)} \lesssim 1.
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración. ∎

Capítulo 4

Automejora de tipo exponencial en $\mathbb{R}^n$ de desigualdades de Poincaré generalizadas asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos

El propósito de este capítulo es presentar un método general que permita estudiar propiedades de automejora de tipo exponencial de desigualdades generalizadas de Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos. Como aplicación, mostramos la conexión entre nuestros resultados y el teorema de John-Nirenberg para el espacio BMO asociado a aproximaciones de la identidad y a semigrupos.

El capítulo está organizado como sigue: los preliminares y principales definiciones están en el Capítulo 2, los resultados principales en la Sección 4.1, las demostraciones de estos resultados están en la Sección 4.2.1 y las aplicaciones en la Sección 4.3.

4.1. Resultados principales

El resultado principal de este capítulo es el siguiente (ver el Capítulo 2 para los preliminares y definiciones necesarios):

Teorema 4.1 *Sea* $\{S_t\}_{t>0}$ *como en la Sección 2.6 y* $a \in T_\infty$*. Si* $f \in \mathcal{M}$ *verifica* (3.1)*, entonces, para cada cubo* Q*, se tiene que*

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \le C \sum_{k\ge 0} 2^{n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-6)}\big)\, a(2^k\, Q). \tag{4.1}$$

También se satisface la siguiente versión con peso para cada $w \in A_\infty$ y cada Q:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L(w),Q} \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{n\,k}\, g\big(c\, 2^{m\,k}\big)\, a(2^k\, Q), \tag{4.2}$$

con $C \geq 1$ y $0 < c < 1$.

Observación 4.2 Obsérvese que (3.1) es una estimación sin peso y que a partir de ella conseguimos otra con peso para la oscilación $f - S_{t_Q} f$. Por otro lado, hay que tener en cuenta que si a es doblante, entonces el decaimiento de g implica que podemos escribir $C\, a(Q)$ en el lado derecho de (4.1) y (4.2).

4.2. Demostración de los resultados principales

4.2.1. Demostración del Teorema 4.1

Demostración de (4.1)

Utilizamos ideas de [MaP]. Podemos suponer que $\|a\|_{T_\infty} = 1$: pues si tomamos $\hat{a}(Q) = \sup_{P\subset Q} a(P)$, tenemos que $a(Q) \leq \hat{a}(Q) \leq \|a\|_{T_\infty}\, a(Q)$ y $\|\hat{a}\|_{T_\infty} = 1$. De este modo, se verifica (3.1) con a reemplazado por $\hat{a}$.

Definimos un nuevo funcional $\tilde{a} : \mathcal{Q} \times \mathcal{F} \longrightarrow (0, +\infty]$ dado por

$$\tilde{a}(Q) = \frac{4^n}{g(1)} \sum_{k\geq 0} 2^{n\,k}\, g\big(2^{m\,(k-5)}\big)\, a(2^k\, Q). \tag{4.3}$$

Notar que $a \in T_\infty$ implica que $\tilde{a} \in T_\infty$ con $\|\tilde{a}\|_{T_\infty} = \|a\|_{T_\infty} = 1$. Fijamos un cubo Q y asumimos que $\tilde{a}(Q) < \infty$, pues en caso contrario no hay nada que probar.

Definimos la función

$$G(x) = \frac{|f(x) - S_{t_Q} f(x)|}{\tilde{a}(Q)}\, \chi_{4\,Q}(x). \tag{4.4}$$

El siguiente resultado, cuya demostración se encuentra en la Sección 4.2.2, nos permite mostrar que $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

Lema 4.3 *Bajo la hipótesis del Teorema 4.1, para cada cubo R y $k \geq 1$, se tiene que*

$$\fint_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\, dx \leq \|a\|_{T_\infty}\, a(k\,R).$$

Aplicando este lema y que $\tilde{a}(Q) \geq 16^n\, a(4\,Q)$, obtenemos:

$$\|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{\tilde{a}(Q)} \int_{4\,Q} |f - S_{t_Q} f|\, dx \leq \frac{a(4\,Q)}{\tilde{a}(Q)}\, |4\,Q| \leq \frac{1}{4^n}\, |Q| < \infty.$$

Tomamos el conjunto de nivel:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : MG(x) > e\}, \tag{4.5}$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood. Utilizando que M es de tipo débil $(1,1)$ con constante 3^n, tenemos

$$|\Omega| \leq \frac{3^n}{e}\, \|G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < e^{-1}\, |Q| < \infty. \tag{4.6}$$

Además, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y propio: Ω es un conjunto de nivel de una función semicontinua inferiormente MG, con $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $|\Omega| < \infty$.

Utilizamos la malla diádica de $\mathbb{R}^n$ adaptada a Q y cubrimos Ω con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i\}$ dada en el Teorema 3.16. Notar que (4.6) implica que, para cada i, $\ell(Q_i) < \ell(Q)$.

Por otro lado, para cada $t > 0$ y cada cubo R, definimos el conjunto:

$$E(R,t) = \big\{x \in R : \big|f(x) - S_{t_R} f(x)\big| > t\, \tilde{a}(R)\big\}. \tag{4.7}$$

Tomamos $t > e$ y, salvo por un conjunto de medida de Lebesgue nula, podemos escribir:

$$E(Q,t) = E(Q,t) \cap \big\{x \in Q : MG(x) > e\big\} = \bigcup_i \big\{x \in Q_i \cap Q : G(x) > t\big\}.$$

Observando los últimos conjuntos de la igualdad anterior, nos damos cuenta de que sólo tenemos que preocupamos de aquellos cubos Q_i tales que $Q_i \cap Q \neq \emptyset$; es decir, aquellos Q_i tales que $Q_i \subset Q$ (pues los cubos Q_i son diádicos respecto a Q y $\ell(Q_i) < \ell(Q)$). Así, escribimos (salvo conjuntos de medida de Lebesgue nula)

$$E(Q,t) = \bigcup_{i:Q_i \subset Q} \big\{x \in Q_i : \big|f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| > t\, \tilde{a}(Q)\big\}. \tag{4.8}$$

Ahora, reemplazamos $S_{t_Q} f$ por $S_{t_{Q_i}} f$ utilizando el siguiente resultado auxiliar, cuya demostración está en la Sección 4.2.2:

Proposición 4.4 *Bajo las hipótesis del Teorema 4.1, para todo $x \in Q_i$, tenemos que*

$$\big|S_{t_{Q_i}} f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| \leq c_0\, \tilde{a}(Q).$$

Así, si $x \in Q_i$, tenemos

$$\big|f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| \leq \big|f(x) - S_{t_{Q_i}} f(x)\big| + c_0\, \tilde{a}(Q).$$

Fijamos $t > C_0$ con $C_0 = \text{máx}\{e, c_0\}$ y c_0 la constante que aparece en la proposición anterior. Utilizando que $\tilde{a}(Q_i) \leq \tilde{a}(Q)$ (pues a es creciente y $Q_i \subset Q$), obtenemos:

$$\begin{aligned} \big|E(Q,t)\big| &\leq \sum_{i:Q_i \subset Q} \Big|\big\{x \in Q_i : \big|f(x) - S_{t_{Q_i}} f(x)\big| > (t - C_0)\, \tilde{a}(Q_i)\big\}\Big| \\ &= \sum_{i:Q_i \subset Q} \big|E(Q_i, t - C_0)\big|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Definimos ahora la función $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1]$ dada por

$$\varphi(t) = \sup_R \frac{|E(R,t)|}{|R|}$$

Notar que $\varphi(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Además, si $t > C_0$, (4.9) y (4.6) implican que

$$|E(Q,t)| \leq \varphi(t - C_0) \sum_{i:Q_i \subset Q} |Q_i| \leq \varphi(t - C_0)\, |\Omega| < e^{-1}\, \varphi(t - C_0)\, |Q|.$$

Dividiendo por $|Q|$ y tomando supremo en Q, tenemos que $\varphi(t) < e^{-1}\, \varphi(t - C_0)$ para todo $t > C_0$. De este modo, iterando las estimaciones y utilizando que $\varphi(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$, concluimos que $\varphi(t) \leq e^{-(t/C_0 - 1)}$ para todo $t \geq 0$. En particular, para cada $t \geq 0$, se verifica que

$$\frac{|E(Q,t)|}{|Q|} \leq \varphi(t) \leq e^{-\frac{t}{C_0} + 1}.$$

Entonces, eligiendo $A = (e + 1)\, C_0$ y utilizando la estimación previa, obtenemos

$$\fint_Q \left[\exp\left(\frac{|f - S_{t_Q} f|}{A\, \tilde{a}(Q)}\right) - 1\right] dx \leq \int_0^\infty e^t\, \frac{|E(Q, A\, t)|}{|Q|}\, dt \leq \int_0^\infty e^{1 - e\, t}\, dt = 1.$$

De aquí se sigue que $\|f - S_{t_Q} f\|_{expL,Q} \leq (e + 1)\, C_0\, \tilde{a}(Q)$. ∎

Demostración de (4.2)

Seguimos los argumentos de la demostración de (4.1) y sólo insistiremos en aquellos puntos donde ambas demostraciones difieran. Recordemos primero que $w \in A_\infty$ implica que existen $1 \leq p < \infty$ y $1 < s \leq \infty$ tales que $w \in A_p \cap RH_s$, y en particular satisface (2.2).

Tomamos $\tilde{a}$ definido en (4.3) y fijamos Q tal que $\tilde{a}(Q) < \infty$. Tomamos también la función G dada por (4.4) y Ω el conjunto de nivel de MG a nivel $e^{s'(1+\log C_w)}$, donde C_w es la constante que aparece en (2.2). Aplicando el Teorema 3.16 y el Lema 3.17, cubrimos Ω con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i\}_i \subset \mathcal{D}_Q$. Consideramos el funcional $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1]$ dado por

$$\varphi(t) = \sup_R \frac{w\big(E(R,t)\big)}{w(R)},$$

con $E(R,t)$ definido en (4.7). Es inmediato ver que $\varphi(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Sea $t > C_0$ con $C_0 = \text{máx}\{e^{-s'(1+\log C_w)}, c_0\}$ y donde c_0 es la constante que aparece en la Proposición 4.4. Argumentando como en (4.9), utilizamos (2.2) y que $|\Omega| < e^{-s'(1+\log C_w)}\,|Q|$, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
w\big(E(Q,t)\big) &\leq \sum_{i:Q_i\subset Q} w\big(E(Q_i, t-C_0)\big) \\
&\leq \varphi(t-C_0) \sum_{i:Q_i\subset Q} w(Q_i) \\
&= \varphi(t-C_0)\, w\Big(\bigcup_{i:Q_i\subset Q} Q_i\Big) \\
&\leq C_w\, \varphi(t-C_0)\, w(Q) \left(\frac{|\bigcup_{i:Q_i\subset Q} Q_i|}{|Q|}\right)^{1/s'} \\
&< e^{-1}\, \varphi(t-C_0)\, w(Q).
\end{aligned}$$

Así, $\varphi(t) < e^{-1}\,\varphi(t-C_0)$ para $t > C_0$. Iterando la estimación previa, obtenemos $\varphi(t) \leq e^{-(t/C_0-1)}$ cuando $t \geq 0$. Como en la demostración de (4.1), la estimación resultante para el funcional φ nos permite completar la prueba de (4.2). ∎

4.2.2. Demostración de los resultados auxiliares

Demostración del Lema 4.3 Cubrimos $k\,R$ con la familia de cubos $\{R_i\}_{i=1}^{k^n}$ disjuntos dos a dos y con lado de longitud $\ell(R)$, y así $t_R = t_{R_i}$. Utilizando que f satisface (3.1) y a es creciente, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{k\,R} |f - S_{t_R} f|\,dy &= \sum_{i=1}^{k^n} \int_{R_i} |f - S_{t_{R_i}} f|\,dy \leq \sum_{i=1}^{k^n} a(R_i)\,|R_i| \leq \|a\|_{T_\infty}\, a(k\,R) \sum_{i=1}^{k^n} |R_i| \\
&= \|a\|_{T_\infty}\, a(k\,R)\,|k\,R|.
\end{aligned}$$

∎

Demostración de la Proposición 4.4 Seguimos los pasos de la Proposición 3.18. Tomamos $k_i \in \mathbb{Z}$ como en (3.22):

$$\ell(Q) = 2^{k_i}\,\ell(Q_i). \tag{4.10}$$

Entonces, (4.6) y $Q_i \in \mathcal{D}_Q$ implican que $\ell(Q_i) \le \ell(Q)/2$; por lo tanto, ver (3.23),

$$k_i \ge 1 \qquad \text{y} \qquad 2^{k_i}\,Q_i \subset 2\,Q. \tag{4.11}$$

Por otro lado, la regla de la conmutación implica que para cada $x \in Q_i$:

$$\big|S_{t_{Q_i}} f(x) - S_{t_Q} f(x)\big| \le \big|S_{t_{Q_i}}\big(f - S_{t_Q} f\big)(x)\big| + \big|S_{t_Q}\big(f - S_{t_{Q_i}} f\big)(x)\big| = I + II.$$

Estudiamos cada término por separado. Primero observamos que (4.11) implica que si $y \in 2^{k_i}\,Q_i$ entonces, $\big|f(y) - S_{t_Q} f(y)\big| = G(y)\,\tilde{a}(Q)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
I &\le \frac{1}{|Q_i|}\int_{\mathbb{R}^n} g\bigg(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i}}\bigg)\,\big|f(y) - S_{t_Q} f(y)\big|\,dy \\
&\le \frac{\tilde{a}(Q)}{|Q_i|}\int_{\mathbb{R}^n} g\bigg(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i}}\bigg)\,G(y)\,dy + \frac{1}{|Q_i|}\int_{(2^{k_i}\,Q_i)^c} \cdots\ dy = I_1\,\tilde{a}(Q) + I_2.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.17, estimamos I_1 como sigue:

$$I_1 \le \frac{1}{|Q_i|}\sum_{k\ge 2} g(\lambda_k)\int_{C_k(Q_i)} G\,dy \le \sum_{k\ge 2} 2^{n\,k}\,g(\lambda_k)\fint_{2^k\,Q_i} G\,dy \lesssim 1,$$

con λ_k dado en (2.1).

Para I_2, aplicamos el Lema 4.3 y el hecho de que $C_k(Q_i) \subset 2^k\,Q_i \subset 2^{k-k_i+1}\,Q \subset 2^k\,Q$, para cada $k \ge k_i$:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{|Q_i|}\sum_{k\ge k_i+1}\int_{C_k(Q_i)} g\bigg(\frac{|x-y|^m}{t_{Q_i}}\bigg)\,\big|f(y) - S_{t_Q} f(y)\big|\,dy \\
&\lesssim \sum_{k\ge k_i+1} 2^{n\,k}\,g(\lambda_k)\fint_{2^{k-k_i+1}\,Q} |f - S_{t_Q} f|\,dy \\
&\lesssim \sum_{k\ge k_i+1} 2^{n\,k}\,g(\lambda_k)\,a(2^{k-k_i+1}\,Q) \\
&\lesssim \sum_{k\ge k_i+1} 2^{n\,k}\,g(\lambda_k)\,a(2^k\,Q) \\
&\lesssim \tilde{a}(Q).
\end{aligned}$$

De este modo, conseguimos que $I \lesssim \tilde{a}(Q)$.

Veamos ahora que $II \lesssim \tilde{a}(Q)$: Argumentando como en la demostración de la Proposición 3.18 (utilizando los cálculos del Lema 4.3, (4.10) y (4.11)), obtenemos:

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\frac{|x-y|^m}{t_Q}\Big)\,\big|f(y)-S_{t_{Q_i}}f(y)\big|\,dy\\
&\leq \frac{g(0)}{|Q|}\int_{2^{k_i+1}Q_i}|f-S_{t_{Q_i}}f|\,dy+\frac{1}{|Q|}\sum_{k\geq k_i+2} g\Big(\frac{\lambda_k\,t_{Q_i}}{t_Q}\Big)\int_{2^k Q_i}|f-S_{t_{Q_i}}f|\,dy\\
&\lesssim a(2^{k_i+1}Q_i)+\sum_{k\geq k_i+2}2^{n(k-k_i)}\,g\big(\lambda_k\,2^{-m(k_i+1)}\big)\,a(2^k Q_i)\\
&\lesssim a(4\,Q)+\sum_{k\geq k_i+2}2^{n(k-k_i)}\,g\big(2^{m(k-k_i-4)}\big)\,a(2^{k-k_i+1}Q)\\
&\lesssim a(4\,Q)+\sum_{k\geq 3}2^{n\,k}\,g\big(2^{m(k-5)}\big)\,a(2^k Q)\\
&\lesssim \tilde{a}(Q).
\end{aligned}$$

∎

4.3. Aplicaciones

Ejemplo 4.5 (Espacios BMO **y Morrey-Campanato)** En el Ejemplo 3.26 comprobábamos que si $f \in L_S(\alpha)$ entonces (como consecuencia del Teorema 3.1), para cada $1<r<\infty$: $\|f-S_{t_Q}f\|_{L^{r,\infty},Q} \lesssim |Q|^\alpha$, para cada Q. Utilizando ahora el Teorema 4.1 (en lugar del Teorema 3.1), mejoramos esta estimación y conseguimos la siguiente automejora para cada Q:

$$\|f-S_{t_Q}f\|_{\exp L,Q} \lesssim |Q|^\alpha.$$

Del mismo modo (aplicando el Teorema 4.1 en lugar del Teorema 3.3), para cada $w\in A_\infty$ y cada Q, tenemos:

$$\|f-S_{t_Q}f\|_{\exp L(w),Q} \lesssim |Q|^\alpha.$$

Por otro lado, el Teorema 4.1, implica que para cada $f\in \mathrm{BMO}_{\varphi,S}$ y cada Q:

$$\|f-S_{t_Q}f\|_{\exp L,Q} \leq C\sum_{k\geq 0}2^{n\,k}\,g\big(c\,2^{m\,k}\big)\,\varphi\big(2^k\,\ell(Q)\big)$$

y si además φ es doblante:

$$\|f-S_{t_Q}f\|_{\exp L,Q} \lesssim \varphi\big(\ell(Q)\big).$$

También podemos conseguir versiones con peso para pesos en la clase A_∞.

Ejemplo 4.6 (Media fraccionaria) En el Ejemplo 3.27 estudiamos automejora de funciones $f \in \mathcal{M}$ verificando (3.40):

$$\fint_Q |f - S_{t_Q} f|\, dx \lesssim a(Q), \quad \text{con} \quad a(Q) = \ell(Q)^\alpha \left(\frac{u(\lambda\, Q)}{|Q|}\right)^{1/p},$$

para todo cubo Q y donde $\lambda \geq 1$, $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ y un peso u. Ahora completamos este estudio considerando el caso $p \geq n/\alpha$. Notar que si $p \geq n/\alpha$, el funcional a es creciente, y por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 4.1. Así, si $f \in \mathcal{M}$ y verifica (3.40), entonces:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \lesssim \sum_{k \geq 0} 2^{n\, k}\, g(c\, 2^{m\, k})\, \ell(2^k\, Q)^\alpha \left(\frac{u(2^k\, \lambda\, Q)}{|2^k\, Q|}\right)^{1/p}.$$

Si además u es doblante, mejoramos la estimación anterior escribiendo $\ell(Q)^\alpha \left(\frac{u(Q)}{|Q|}\right)^{1/p}$ en su lado derecho.

Análogamente, si tomamos como punto de partida (3.41) y $p \geq n/\alpha$ entonces, a es creciente y, aplicando el Teorema 4.1, tenemos que

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \lesssim \sum_{k \geq 0} 2^{n\, k}\, g(c\, 2^{m\, k})\, \ell(2^k\, Q)^\alpha \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\lambda\, Q} |X f|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Si además $|X f|^p \in A_\infty$, podemos escribir $\ell(Q)^\alpha \left(\fint_Q |X f|^p\, dx\right)^{1/p}$ en el lado derecho de la desigualdad anterior.

Ejemplo 4.7 (Desigualdades de tipo Poincaré reducidas) Completamos los ejemplos estudiados en la Sección 3.3.1.

(1) **Desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev:** Si $p \geq n$, el funcional dado por (3.45) es creciente, y por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 4.1 y de (3.42) se sigue la siguiente estimación:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L, Q} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k\, Q) \left(\fint_{2^k\, Q} h^p\, dx\right)^{1/p},$$

para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k \geq 0}$.

(2) **Desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev para pesos A_1:** Si $p \geq n$ y $w \in A_1$, el funcional dado por (3.48) es creciente y (del mismo modo que en el caso anterior) tenemos:

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L(w),Q} \leq C \sum_{k\geq 0} \sigma(k)\, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dw \right)^{1/p},$$

para alguna sucesión $\{\sigma(k)\}_{k\geq 0}$.

(3) **Desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev para pesos A_p con $p > 1$:** Si $p \geq n$ y $w \in A_{p/n}$, conseguimos el mismo resultado anterior.

Ejemplo 4.8 (Desigualdades de tipo Poincaré-Sobolev expandidas) En la Sección 3.3.3 ya hemos estudiado propiedades de automejora de este tipo de desigualdades. Allí conseguimos propiedades de automejora en $L^{q,\infty}$ para cada $1 < q < p^*$ y $1 < p < n$ y también estimaciones de tipo fuerte en el mismo rango (como consecuencia de la desigualdad de Kolmogorov). Para $q = p^*$, obtuvimos una estimación de tipo débil en un espacio de Orlicz. Para el rango $p \geq n$, las condiciones D_q se satisfacen para todo q (pues a es no-decreciente) y de este modo, tenemos estimaciones de tipo débil y fuerte en todo el rango $1 < q < \infty$.

Ahora consideramos el caso $p \geq n$ y buscamos estimaciones de tipo exponencial. Basta observar que si $p \geq n$,

$$a(Q) = \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dx \right)^{1/p} \in T_\infty$$

y, como consecuencia del Teorema 4.1, si $f \in \mathcal{M}$ satisface (3.51) o (3.57) entonces,

$$\|f - S_{t_Q} f\|_{\exp L,Q} \lesssim \sum_{k\geq 0} \hat{\alpha}(k)\, \ell(2^k Q) \left(\fint_{2^k Q} h^p \, dx \right)^{1/p},$$

con $\hat{\alpha}(k) = \sum_{0\leq l\leq k} 2^{n\,l}\, g\big(2^{m\,(l-6)}\big)\, \alpha(k-l)$ para todo $k \geq 0$.

También, por el Teorema 4.1, podemos obtener la correspondiente versión con peso para pesos A_∞.

Parte II

Propiedades de automejora en espacios de tipo homogéneo

Capítulo 5

Introducción

Recientemente se desarrolla el Análisis en espacios más abstractos que el euclídeo con una estructura a priori no suave. Algunos ejemplos son [HeK2], [HaK1] y [HaK2]. El objetivo de esta parte de la memoria es extender el estudio realizado en la Parte I a espacios de tipo homogéneo. Recordemos que un espacio métrico equipado con una medida doblante es un espacio de tipo homogéneo (esta noción fue introducida por Coifman y Weiss en [CoiW]). Las medidas doblantes conservan algunas propiedades de la medida de Lebesgue y esto hace posible extender muchos resultados del Análisis armónico a marcos más generales como espacios de tipo homogéneo. Alguna de las ventajas de situarse en los espacios de tipo homogéneo es que una amplia variedad de casos como variedades, grafos, campos vectoriales y grupos pueden ser considerados utilizando el mismo método general. Así, queremos presentar una teoría general que nos permita asegurar propiedades de automejora de tipo L^r de desigualdades de Poincaré generalizadas asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos a partir de

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, dx \leq a(B), \tag{5.1}$$

para toda bola B y donde $t_B = \mathrm{r}(B)^m$ y $\{S_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad o un semigrupo cuyo núcleo decae suficientemente rápido (ver el Capítulo 6). Del mismo modo que en la Parte I las estimaciones (5.1) serán denominadas desigualdades de tipo Poincaré generalizadas.

El propósito del Capítulo 7 es presentar un método general que permita estudiar propiedades de automejora en la escala de los espacios de Lebesgue de desigualdades de tipo Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad o semigrupos, en espacios de tipo homogéneo. El resultado principal es el Teorema 7.1 (ver el Capítulo 6 para la notación y definiciones previas):

Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5, $1 < r < \infty$ y $a \in D_r$. Si $f \in \mathcal{M}$

verifica

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq a(B),$$

para toda bola B *y donde* $t_B = \mathrm{r}(B)^m$*, entonces, para cada bola* B*, se tiene que*

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty},B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{2\,n\,k} \, g(c\,\sigma^{m\,k}) \, a(\sigma^k \, B),$$

con $C \geq 1$ *y* $0 < c < 1$*. Si además,* a *es doblante, entonces, para cada* B*:*

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty},B} \lesssim a(B).$$

En el Capítulo 7 también obtenemos una extensión del teorema anterior a espacios con pesos en el Teorema 7.2 y a condiciones D_r que permitan que aparezca otro funcional en el lado derecho en el Teorema 7.5.

Del mismo modo que en la Parte I y a diferencia de la situación clásica, las oscilaciones involucran aproximaciones de la identidad o semigrupos y la estimación resultante tiene en cuenta la falta de localización.

Como consecuencia de los resultados anteriores mostramos algunas aplicaciones. En primer lugar, en el Ejemplo 7.14 vemos que si $f \in BMO_S$, donde

$$BMO_S = \Big\{ f \in \mathcal{M} : \sup_B \fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu < \infty \Big\},$$

entonces, tenemos la siguiente automejora en su integrabilidad local

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \leq C < \infty,$$

para cada $1 < r < \infty$ y para toda B.

En la Sección 7.3.1 generalizamos la Sección 3.3.1. En particular, en el Ejemplo 7.17 asumimos que los anillos no son vacíos (ver la Observación 7.15) y que $f \in \mathcal{M}$ verifica una desigualdad de "Poincaré reducida":

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq \mathrm{r}(B) \left(\fint_B h^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

para toda bola B, h una función medible no-negativa y $1 \leq p < \infty$. Mostramos que se automejora la integrabilidad del lado izquierdo obteniéndose

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \leq \sum_{k \geq 0} \phi(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k \, B) \left(\fint_{\sigma^k \, B} h^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

para cada $1 < r < p^*$, $p^* = n\,p/(n-p)$, para toda bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\geq 0}$. Además, si $p \geq n$, la estimación anterior se satisface para cada $1 < r < \infty$. Por otro lado, en la Sección 7.3.2 conseguimos desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales: Para todo $t > 0$ y para cada $1 \leq p < n$ y $p \leq r < p^*$,

$$\|f - S_t f\|_{L^p(X)} \lesssim t^{\frac{1}{m}}\, \|h\|_{L^p(X)}.$$

Por último, en las Secciones 7.3.3 y 7.3.4 se encuentran los ejemplos que consideramos más naturales. Donde tomamos como punto de partida funciones verificando desigualdades de tipo "Poincaré expandidas" que tienen en cuenta los efectos de cola.

Además, como las técnicas que utilizamos no involucran ninguna desigualdad clásica de Poincaré o de Sobolev-Poincaré, obtenemos aplicaciones en marcos donde estas desigualdades no son ciertas o no se conocen. Este es el caso de algunas variedades riemannianas con medida de volumen doblante y cotas superiores gaussianas para el núcleo asociado al semigrupo del calor asociado al operador de Laplace-Beltrami. Estas aplicaciones son las principales motivaciones de nuestros resultados. Como consecuencia de nuestros resultados y en ausencia de desigualdades de Poincaré, obtenemos lo siguiente (ver el Corolario 7.32 para conocer las formulaciones precisas):

> *Sea M una variedad de Riemann completa, no-compacta y conexa con medida de volumen doblante y (UE). Dado $1 \leq p < \infty$, tomamos $p^* = n\,p/(n-p)$ si $1 \leq p < n$, donde n es la constante que aparece en* (6.1)*, y $p^* = \infty$ en caso contrario.*
>
> (*a*) *Dado $m \geq 1$ (m suficientemente grande cuando $1 < p < n$), definimos $S_t^m = I - (I - e^{-t\,\Delta})^m$ y tomamos $1 < q < p^*$. Entonces, para cualquier función suave con soporte compacto f, tenemos:*
>
> $$\left(\fint_B |f - S_{t_B}^m f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq C \sum_{k\geq 1} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} |\Delta^{1/2} f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$
>
> *donde $\phi(k) = \sigma^{-k\,\theta}$ y θ dependen de m, n y p.*
>
> (*b*) *Para cualquier $p \in ((\tilde{q}_+)', \infty) \cup [2, \infty)$, cualquier $1 < q < p^*$ y función suave con soporte compacto f, tenemos:*
>
> $$\left(\fint_B |f - e^{-t_B\,\Delta} f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq C \sum_{k\geq 1} e^{-c\,\sigma^k}\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$
>
> *En este resultado, σ es una constante grande que depende de la medida (ver el Teorema 6.1).*

Una vez estudiadas las automejoras en la escala de los espacios de Lebesgue generalizamos el Capítulo 4 presentando automejoras de tipo exponencial en espacios de tipo homogéneo. El resultado principal del Capítulo 8 es el Teorema 4.1 (ver el Capítulo 6 para la notación y definiciones previas):

Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5 y $a \in T_\infty$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq a(B),$$

para toda bola B y donde $t_B = \mathrm{r}(B)^m$. Entonces, para cada bola B, se tiene que

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L, B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{n\,k} \, g\big(c\, \sigma^{m\,k}\big) \, a(\sigma^k B).$$

Si además a es doblante, entonces podemos escribir $a(B)$ en el lado derecho. También se satisface la versión con peso de la desigualdad anterior.

Como aplicación de este resultado, en el Ejemplo 8.4 obtenemos que si $f \in BMO_S$ entonces se tiene la siguiente desigualdad de John-Nirenberg: para toda B,

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L, B} \leq C < \infty.$$

Obsérvese que este resultado mejora lo obtenido en el Ejemplo 7.14. Además, extiende lo obtenido en [DuY] que suponía que la familia $\{S_t\}_{t>0}$ formaba un semigrupo.

En el Ejemplo 8.6 completamos los ejemplos estudiados en las Secciones 7.3.1, 7.3.3 y 7.3.4 En particular, mostramos que si $f \in \mathcal{M}$ satisface una desigualdad generalizada de Poincaré con $p \geq n$:

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq \sum_{k \geq 0} \alpha(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

(donde n es la constante que aparece en (6.1) y (6.2)), entonces

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L, B} \lesssim \sum_{k \geq 0} \hat{\alpha}(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

se verifica para toda bola B y cierta sucesión $\{\hat{\alpha}(k)\}_{k \geq 0}$.

Estas estimaciones permiten obtener, en ausencia de desigualdades de Poincaré, lo siguiente (ver el Corolario 8.7 para los detalles completos):

Sea M una variedad de Riemann, completa, no-compacta, conexa, con medida de volumen doblante y (UE), y sea $p \geq n$.

(*a*) *Sea* $S_t^m = I - (I - e^{-t\,\Delta})^m$ *con* $m \geq 1$*. Entonces, cualquier función suave con soporte compacto* f *verifica que*

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L, B} \leq C \sum_{k\geq 1} \sigma^{-k\,(2\,m-n)}\ \mathrm{r}(\sigma^k\,B) \left(\fint_{\sigma^k\,B} |\Delta^{1/2} f|^p\,d\mu \right)^{1/p}.$$

(*b*) *Cualquier función suave con soporte compacto* f *verifica que*

$$\|f - e^{-t_B\,\Delta} f\|_{\exp L, B} \leq C \sum_{k\geq 1} e^{-c\,\sigma^k}\ \mathrm{r}(\sigma^k\,B) \left(\fint_{\sigma^k\,B} |\nabla f|^p\,d\mu \right)^{1/p}.$$

En este resultado, σ *es una constante grande que depende de la medida (ver el Teorema 6.1).*

Capítulo 6

Preliminares

6.1. Espacios de tipo homogéneo

Recordemos que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo si X es un conjunto dotado de una cuasi-métrica d y una medida de Borel no-negativa μ verificando la siguiente condición, para alguna constante $c_\mu \geq 1$:

$$\mu\big(B(x, 2\,r)\big) \leq c_\mu\, \mu\big(B(x, r)\big) < \infty,$$

uniformemente para todo $x \in X$ y $r > 0$, y donde $B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$.

El hecho de que la medida sea doblante implica que existen ciertas constantes c_μ, $n > 0$ tales que para todo x, $y \in X$, $r > 0$ y $\lambda \geq 1$:

$$\mu\big(B(x, \lambda\, r)\big) \leq c_\mu\, \lambda^n\, \mu\big(B(x, r)\big) \tag{6.1}$$

y también, para todas las bolas B_1 y B_2 con $B_1 \subsetneq B_2$:

$$\mu(B_2) \leq c_\mu \left(\frac{\mathrm{r}(B_2)}{\mathrm{r}(B_1)}\right)^n \mu(B_1). \tag{6.2}$$

El hecho de que d sea una cuasi-métrica en X significa que d es una función de $X \times X$ en $[0, +\infty)$ verificando las mismas condiciones que una métrica excepto la desigualdad triangular que se debilita por esta otra:

$$d(x, y) \leq D_0\,\big(d(x, z) + d(z, y)\big),$$

para todo x, y, $z \in X$ y para alguna $1 \leq D_0 < \infty$, constante independiente de x, y, z. Recordemos que cuando $D_0 > 1$ las bolas pueden no ser conjuntos abiertos. Sin embargo, Macías y Segovia ([MaS]) muestran que dada una cuasi-métrica d, existe otra cuasi-métrica d' equivalente a d de modo que las bolas definidas respecto a la cuasi-métrica d' son abiertas. Así, de ahora en adelante, supondremos que las bolas son conjuntos abiertos.

Hacemos los siguientes convenios:

- Para simplificar los cálculos (ver [Ma2]), suponemos que X no está acotado y, por lo tanto, $\mu(X) = \infty$.
- Dada una bola B, implícitamente asumimos que están dados un centro y un radio: $B = B(x_B, r(B))$, donde x_B es el centro y $r(B)$ el radio. Obsérvese que, en general, diferentes centros y radios pueden definir una misma bola.
- Dada $B = B(x_B, r(B))$ y $\lambda > 0$, escribimos $\lambda B = B(x_B, \lambda r(B))$.
- Para cualquier conjunto E, denotamos $\operatorname{diam}(E) = \sup_{x,y\in E} d(x, y)$.
- La media de $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ en B es
$$f_B = ⨍_B f(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(x)\, d\mu(x).$$
- Las normas localizadas y normalizadas de un espacio de funciones de Banach o cuasi-Banach $\mathbb{A}$ vienen dadas por
$$\|f\|_{\mathbb{A},B} = \|f\|_{\mathbb{A}(B,\frac{d\mu}{\mu(B)})} \qquad \text{y} \qquad \|f\|_{\mathbb{A}(w),B} = \|f\|_{\mathbb{A}(B,\frac{w}{w(B)})}.$$
  Ejemplos de espacios $\mathbb{A}$ son $L^{p,\infty}$, L^p o espacios más generales de Marcinkiewicz y Orlicz.

Recomendamos consultar [CoiW] y [Chr], si se desea realizar un estudio detallado de estos espacios.

Utilizamos la misma notación que en la primera parte del trabajo, salvo que reemplazamos la medida de Lebesgue por una medida de Borel doblante y no-negativa μ y la distancia infinita por la cuasi-métrica d.

6.2. Conjuntos diádicos

Tomamos la estructura diádica dada en [Chr]:

Teorema 6.1 ([Chr]) *Existe $\sigma > 4\, D_0^3 > 1$ suficientemente grande, $0 < c_1, C_1 < \infty$ y $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$ una colección numerable de conjuntos abiertos Q con las siguientes propiedades:*

(i) *$\mathcal{D}_k$ es una colección numerable de conjuntos disjuntos tales que* $X = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_k} Q$ *en μ-casi todo punto.*

(ii) *Si $Q \in \mathcal{D}_k$, entonces* $\operatorname{diam}(Q) \le C_1 \sigma^k$.

(iii) *Si $Q \in \mathcal{D}_k$, entonces existen $x_Q \in Q$ y $B_Q = B(x_Q, c_1 \sigma^k)$ y $\hat{B}_Q = B(x_Q, C_1 \sigma^k)$ dos bolas en X tales que $B_Q \subset Q \subset \hat{B}_Q$.*

(iv) *Si $Q_1 \in \mathcal{D}_{k_1}$ y $Q_2 \in \mathcal{D}_{k_2}$ con $k_1 \le k_2$, entonces o bien $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ o bien $Q_1 \subseteq Q_2$.*

Por comodidad, tomamos

$$C_2 = \frac{C_1}{c_1}. \tag{6.3}$$

Estos conjuntos son los análogos a los cubos diádicos euclídeos en $\mathbb{R}^n$. Así, por analogía, llamaremos a Q cubo diádico y a $\mathcal{D}_k$ la k-ésima generación de $\mathcal{D}$. Nos ayudará pensar en Q como un cubo cuyo lado mide σ^k y su centro es x_Q. Obsérvese que (III) y (6.2) implican

$$\mu(\hat{B}_Q) \le c_\mu \, C_2^n \, \mu(B_Q) \le c_\mu \, C_2^n \, \mu(Q). \tag{6.4}$$

En lo que sigue, fijamos $\sigma > 4\, D_0^3$ suficientemente grande y trabajamos con la estructura diádica dada en el Teorema 6.1.

Utilizaremos en varias ocasiones las siguientes descomposiciones de X. Dada una bola B,

$$X = \bigcup_{k \ge 2} C_k(B),$$

con $C_2(B) = \sigma^2 B$ y $C_k(B) = \sigma^k B \setminus \sigma^{k-1} B$, $k \ge 3$. Adicionalmente, dado $Q \in \mathcal{D}$, escribimos

$$X = \bigcup_{k \ge 2} C_k(Q),$$

con $C_2(Q) = \sigma^2 \hat{B}_Q$ y $C_k(Q) = \sigma^k \hat{B}_Q \setminus \sigma^{k-1} \hat{B}_Q$, $k \ge 3$.

También necesitamos la siguiente versión del lema de recubrimiento de Whitney:

Teorema 6.2 *Sea Ω es un subconjunto abierto y propio de X. Existe una familia de cubos de Whitney $\{Q_i\}_i \subset \mathcal{D}$ con las siguientes propiedades:*

(*a*) $\Omega = \bigcup_i Q_i$ *en μ-casi todo punto.*

(*b*) *Los cubos son maximales respecto a la inclusión y, así, disjuntos dos a dos.*

(*c*) $0 < C_2\,\sigma^6\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}) < d(Q_i, \Omega^c) \leq C_2\,\sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i})$ *y así,* $\sigma^9\,C_2^2\,B_{Q_i} \cap \Omega^c \neq \emptyset$.

Si Ω es un conjunto de nivel de la función maximal de Hardy-Littlewood, entonces se tiene el siguiente resultado:

Lema 6.3 *Dados $t > 0$ y $G \in L^1(X)$. Si $\Omega = \{x \in X : MG(x) > t\}$ y $\{Q_i\}_i$ es su familia de cubos de Whitney, se verifican:*

(*d*) $\displaystyle ⨍_{\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i}} G\,d\mu \leq c_\mu\,C_2^{2\,n}\,\sigma^{8\,n}\,t$, *para cada $k \geq 1$.*

(*e*) $M(G\,\chi_{(\sigma\,\hat{B}_{Q_i})^c})(x) \leq c_\mu\,C_2^{2\,n}\,\sigma^{10\,n}\,t$, *para todo $x \in Q_i$.*

Demostración del Teorema 6.2 Escribimos $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k$, donde

$$\Omega_k = \Big\{x \in \Omega\ :\ C_1\,C_2\,\sigma^{k+6} < d(x, \Omega^c) \leq C_1\,C_2\,\sigma^{k+7}\Big\}.$$

Tomamos la familia $\mathcal{F}$ dada por

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big\{R \in \mathcal{D}_k : R \cap \Omega_{k+1} \neq \emptyset\big\}.$$

Vamos a mostrar que los cubos de $\mathcal{F}$ satisfacen las propiedades (*a*) y (*c*). Primero comprobamos que verifican (*c*): Si $R \in \mathcal{F}$ entonces, para algún $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que $R \in \mathcal{D}_k$ y $R \cap \Omega_{k+1} \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $x \in R \cap \Omega_{k+1}$ y se verifica que

$$C_1\,C_2\,\sigma^{k+7} < d(x, \Omega^c) \leq D_0\,\big(d(R, \Omega^c) + \mathrm{diam}(R)\big) \leq D_0\,\big(d(R, \Omega^c) + C_1\,\sigma^k\big).$$

Lo cual implica que

$$d(R, \Omega^c) > C_1\,\sigma^k\,(C_2\,\frac{\sigma^7}{D_0} - 1) \geq C_2\,\sigma^6\ \mathrm{r}(\hat{B}_R).$$

Por otro lado, tenemos que

$$d(R, \Omega^c) \leq d(x, \Omega^c) \leq C_1\,C_2\,\sigma^{k+8} = C_2\,\sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_R).$$

De este modo, queda probado que los cubos de $\mathcal{F}$ satisfacen la primera afirmación de (c):
$$0 < C_2\,\sigma^6\ \mathrm{r}(\hat{B}_R) < d(R,\Omega^c) \leq C_2\,\sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_R).$$

Veamos ahora que $C_2^2\,\sigma^9\,B_R \cap \Omega^c \neq \emptyset$: La propiedad fundamental del ínfimo implica que existe $y_0 \in \Omega^c$ tal que
$$d(R,y_0) < d(R,\Omega^c) + \mathrm{r}(\hat{B}_R).$$

Utilizando la desigualdad anterior y la primera propiedad de (c), obtenemos que
$$\begin{aligned} d(y_0,x_R) &\leq D_0\left(d(y_0,R) + \mathrm{r}(\hat{B}_R)\right) \\ &< D_0\left(d(R,\Omega^c) + 2\ \mathrm{r}(\hat{B}_R)\right) \\ &\leq D_0\,(C_2\,\sigma^8 + 2)\ \mathrm{r}(\hat{B}_R) \\ &\leq C_2\,\sigma^9\ \mathrm{r}(\hat{B}_R) \\ &= C_2^2\,\sigma^9\ \mathrm{r}(B_R). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $y_0 \in C_2^2\,\sigma^9\,B_R \cap \Omega^c$. De este modo queda probado que los cubos de $\mathcal{F}$ satisfacen la propiedad (c).

Veamos ahora que verifican (a): $\Omega = \bigcup_{R\in\mathcal{F}} R$ en μ-casi todo punto. En primer lugar, observamos que (c) implica que la distancia de cada cubo $R \in \mathcal{F}$ a Ω^c es estrictamente positiva, por lo tanto, $\bigcup_{R\in\mathcal{F}} R \subset \Omega$. La otra inclusión es consecuencia de que $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ junto con el hecho de que cada generación de cubos diádicos proporciona una partición del espacio salvo conjuntos de medida nula.

El problema es que la colección $\mathcal{F}$ está formada por cubos que no son necesariamente disjuntos dos a dos (por lo tanto, no verifican (b)). Para solucionarlo, seleccionamos los cubos maximales de $\mathcal{F}$, eliminado aquellos que están contenidos en algún otro de la colección. Es decir, para cada cubo $R \in \mathcal{F}$ seleccionamos el único cubo maximal $R^{\text{máx}} \in \mathcal{F}$ que contiene a R. Tal cubo maximal existe, pues en caso contrario existiría una sucesión infinita creciente de cubos $\{R_k\}_{k\geq 1} \subset \mathcal{F}$ que contienen a R. En particular, por (c), para cada $k \geq 1$ tenemos
$$\mathrm{r}(\hat{B}_{R_k}) < \frac{1}{C_2}\,\frac{1}{\sigma^6}\,d(R_k,\Omega^c) \leq \frac{1}{C_2}\,\frac{1}{\sigma^6}\,d(R,\Omega^c) \leq \sigma^2\ \mathrm{r}(\hat{B}_R)$$
y esto nos conduce a una contradicción (pues $\lim_{k\to\infty} \mathrm{r}(\hat{B}_{R_k}) = \infty$). Por lo tanto, tal cubo maximal existe y $\{Q_i\}_i$ es precisamente la familia de todos los cubos maximales. Notar que por maximalidad estos cubos son disjuntos dos a dos y verifican todas las propiedades enunciadas en el teorema. ∎

Demostración del Lema 6.3 En primer lugar, observamos que Ω es un conjunto abierto de X y $\Omega \subsetneq X$ (pues $\mu(\Omega) \leq t^{-1} \|M\|_{L^1} < \infty$ y $\mu(X) = \infty$). Así, Ω es un conjunto abierto y propio de X. Entonces, usando el Teorema 6.2, cubrimos Ω con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i\}_i$.

Para mostrar (d), fijamos $z \in C_2^2\, \sigma^9\, \hat{B}_{Q_i} \cap \Omega^c$. Dividimos la prueba en dos partes según sea el tamaño de $k \geq 1$. Si $\sigma^k \leq C_2^2\, \sigma^9$, utilizando que μ es una medida doblante, escribimos

$$\fint_{\sigma^k\, \hat{B}_{Q_i}} G\, d\mu \leq \frac{\mu(C_2^2\, \sigma^9\, \hat{B}_{Q_i})}{\mu(\sigma^k\, \hat{B}_{Q_i})} \fint_{C_2^2\, \sigma^9\, \hat{B}_{Q_i}} G\, d\mu \leq c_\mu\, C_2^{2\,n}\, \sigma^{(9-k)\,n}\, MG(z) \leq c_\mu\, C_2^{2\,n}\, \sigma^{8\,n}\, t.$$

En caso contrario, cuando $\sigma^k > C_2^2\, \sigma^9$, tenemos que $z \in \sigma^k\, \hat{B}_{Q_i}$ y por tanto

$$\fint_{\sigma^k\, \hat{B}_{Q_i}} G\, d\mu \leq MG(z) \leq t.$$

Así, queda probada la propiedad (d).

Veamos que (e) es consecuencia del apartado (c) del Teorema 6.2. Fijamos Q_i y $x \in Q_i$. Tomamos B una bola cualquiera tal que $x \in B$ y $B \cap (\sigma\, \hat{B}_{Q_i})^c \neq \emptyset$. Observamos que B tiene que ser grande, es decir, $\mathrm{r}(B) > (3/2)\, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i})$: sea $y \in B \cap (\sigma\, \hat{B}_{Q_i})^c$ entonces,

$$\begin{aligned}
\sigma\, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}) &< d(y, x_{Q_i}) \\
&\leq D_0\, (d(y, x_B) + d(x_B, x_{Q_i})) \\
&\leq D_0\, [\mathrm{r}(B) + D_0\, (d(x_B, x) + d(x, x_{Q_i}))] \\
&\leq (D_0 + D_0^2)\, \mathrm{r}(B) + D_0^2\, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}).
\end{aligned}$$

De este modo, tenemos que

$$\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}) < \frac{D_0 + D_0^2}{\sigma - D_0^2}\, \mathrm{r}(B) < \frac{2}{3}\, \mathrm{r}(B).$$

Por otro lado, el apartado (c) del Teorema 6.2 asegura que existe $z \in \sigma^9\, C_2^2\, B_{Q_i} \cap \Omega^c$. Veamos que $z \in C_2^2\, \sigma^{10}\, B$: como $x \in B \cap Q_i$, $y \in B \cap (\sigma\, \hat{B}_{Q_i})^c$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d(z, x_B) &\leq D_0\, (d(z, x_{Q_i}) + d(x_{Q_i}, x_B)) \\
&\leq D_0\, \left[\sigma^9\, C_2^2\, \mathrm{r}(B_{Q_i}) + D_0\, (d(x_{Q_i}, x) + d(x, x_B))\right] \\
&\leq D_0\, (\sigma^9\, C_2 + D_0)\, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}) + D_0^2\, \mathrm{r}(B) \\
&< \left(D_0\, (\sigma^9\, C_2 + D_0)\, \frac{2}{3} + D_0^2\right)\, \mathrm{r}(B) \leq C_2\, \sigma^{10}\, \mathrm{r}(B).
\end{aligned}$$

Utilizando que μ es doblante y $z \in \Omega^c \cap C_2^2\,\sigma^{10}\,B$, concluimos que

$$\begin{aligned}\fint_B G\chi_{(\sigma\,\hat{B}_{Q_i})^c}\,d\mu &\leq c_\mu\,C_2^{2\,n}\,\sigma^{10\,n}\fint_{C_2^2\,\sigma^{10}\,B} G\,d\mu \leq c_\mu\,C_2^{2\,n}\,\sigma^{10\,n}\,MG(z)\\ &\leq c_\mu\,C_2^{2\,n}\,\sigma^{10\,n}\,t,\end{aligned}$$

Obsérvese que esta desigualdad se tiene para cualquier bola B tal que $B \ni x$ y $B \cap (\sigma\,\hat{B}_{Q_i})^c \neq \emptyset$. Entonces, tomando supremo sobre estas bolas, obtenemos la desigualdad deseada. ∎

6.3. Pesos

Un peso w es una función no-negativa localmente integrable. Para cualquier conjunto medible E, escribimos

$$w(E) = \int_E w(x)\,d\mu(x)$$

y la media de $f \in L^1_{loc}(X)$ en E respecto al peso w como

$$\fint_E f\,dw = \fint_E f(x)\,dw(x) = \frac{1}{w(E)}\int_E f(x)\,w(x)\,d\mu(x).$$

Las definiciones y propiedades de pesos que aparecen en la primera parte se pueden extender a este contexto, reemplazando la medida de Lebesgue por μ (ver [ST]). Para familiarizarnos con la notación recordemos la clase de pesos de Muckenhoupt:

$$A_\infty(\mu) = \bigcup_{p\geq 1} A_p(\mu).$$

Para $1 < p < \infty$, decimos que $w \in A_p(\mu)$ si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que para cada bola B:

$$\left(\fint_B w\,d\mu\right)\left(\fint_B w^{1-p'}\,d\mu\right)^{p-1} \leq C,$$

donde p' tal que $1/p+1/p' = 1$ (entonces, $1-p' = -1/(p-1)$). Decimos que $w \in A_1(\mu)$ si existe una constante $0 < C < \infty$ tal que para cada bola B:

$$\fint_B w\,d\mu \leq C\,w(y), \qquad \text{para } \mu\text{-casi todo } y \in B.$$

Decimos que un peso w es doblante si exististe una contante $0 < C < \infty$ tal que para cada bola B:

$$w(\sigma\,B) \leq C\,w(B).$$

6.4. Funcionales

Consideramos funcionales de la forma:

$$\begin{aligned} a : \mathcal{B} \times \mathcal{F} &\longrightarrow [0, +\infty) \\ a(B, f) &\longmapsto [0, +\infty) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B}$ es la familia de todas las bolas de X y $\mathcal{F}$ alguna familia de funciones. Cuando no nos interese cómo depende a de las funciones, escribiremos $a(B)$.

Decimos que a es doblante si existe alguna constante $0 < C_a < \infty$ tal que para cada bola B:

$$a(\sigma\, B) \leq C_a\, a(B).$$

Definición 6.4 Sea ν una medida de Borel y $1 \leq r < \infty$. Decimos que el funcional a verifica la condición $D_r(\nu)$ (escribimos $a \in D_r(\nu)$) si existe una constante finita $C_a \geq 1$ para la cual a satisface la siguiente estimación:

$$\sum_i a(B_i)^r\, \nu(B_i) \leq C_a^r\, a(B)^r\, \nu(B). \tag{6.5}$$

para cada bola B y cualquier familia de bolas disjuntas dos a dos $\{B_i\}_i \subset B$. Denotamos por $\|a\|_{D_r(\nu)}$ al ínfimo de las constantes C_a. Cuando $\nu = \mu$, simplemente escribimos D_r y cuando w es un peso dado, $D_r(w)$.

Definición 6.5 Decimos que el funcional a es no-decreciente o verifica la condición T_∞ (escribimos $a \in T_\infty$) si existe una constante finita y positiva C_a tal que:

$$a(B_1) \leq C_a\, a(B_2),$$

cuando $B_1 \subset B_2$. Denotamos por $\|a\|_{T_\infty}$ ($\|a\|_{T_\infty} \geq 1$) al ínfimo de las constantes C_a. Si $\|a\|_{T_\infty} = 1$, decimos que a es creciente.

Notar que, debido a la desigualdad de Hölder, las condiciones $D_r(\nu)$ son decrecientes:

$$D_r(\nu) \subset D_s(\nu) \qquad \text{y} \qquad \|a\|_{D_s(\nu)} \leq \|a\|_{D_r(\nu)}, \quad \text{para} \quad 1 \leq s < r < \infty$$

y la condición T_∞ es más fuerte que $D_r(\nu)$, para cualquier $1 \leq r < \infty$ y para cualquier medida ν.

6.5. Aproximaciones de la identidad y semigrupos

Trabajamos con familias de operadores lineales $\{S_t\}_{t>0}$ con las propiedades establecidas en la Sección 2.6, aunque con la diferencia de que ahora reemplazamos la medida de Lebesgue por una medida de Borel doblante y no-negativa μ y la distancia infinita por la cuasi-métrica d. Así, estos operadores admiten la siguiente representación integral:

$$S_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} s_t(x, y)\, f(y)\, dy.$$

Los núcleos son funciones medibles verificando la siguiente acotación (en lugar de (2.5)):

$$|s_t(x, y)| \leq \frac{1}{\mu\big(B(x, t^{1/m})\big)}\, g\bigg(\frac{d(x, y)^m}{t}\bigg), \tag{6.6}$$

para alguna constante positiva m y alguna función g positiva, acotada, no-creciente y verificando que, para todo $N \geq 0$, $\lim_{r\to\infty} r^N g(r) = 0$. Si fijamos $N > 0$ (en la expresión anterior), podemos imponer un decaimiento menor sobre g, aunque nosotros elegimos este exponente suficientemente grande de modo que las estimaciones que obtengamos no sean triviales.

Por otro lado, observamos que (6.6) nos conduce a un reescalamiento entre el parámetro t y el espacio de las variables. Así, de ahora en adelante, dada una bola B, escribimos $t_B = \mathrm{r}(B)^m$. De este modo t y S_t están "adaptados" o "escalados" a B.

Del mismo modo que en [DuY], definimos $\mathcal{M} = \bigcup_{x\in X} \bigcup_{\beta>0} \mathcal{M}_{(x,\beta)}$, donde $\mathcal{M}_{(x,\beta)}$ es el conjunto de funciones medibles f tales que

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{(x,\beta)}} = \int_X \frac{|f(y)|}{\big(1 + d(x, y)\big)^{2n+\beta}\, \mu\big(B(x, 1 + d(x, y))\big)}\, d\mu(y) < \infty.$$

En [DuY], los autores establecen que $\big(\mathcal{M}_{(x,\beta)}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_{(x,\beta)}}\big)$ es un espacio de Banach y que si $f \in \mathcal{M}$ entonces, $S_t f$ y $S_s(S_t f)$ están bien definidas y son finitas en casi todo, para todo t, $s > 0$.

Algunos ejemplos interesantes son las variedades de Riemann X con medida doblante. En tal situación, podemos considerar el operador de Laplace-Beltrami Δ. Asumimos que el núcleo $p_t(x, y)$ del semigrupo del calor $e^{-t\Delta}$ tiene cotas superiores gaussianas (UE). Como en la primera parte del trabajo, esto nos permite utilizar nuestros resultados tanto para $S_t = e^{-t\Delta}$ como para $S_t = I - (I - e^{-t\Delta})^m$, para algún $m \geq 1$ fijado. Notar que las cotas superiores gaussianas implican (6.6) con $m = 2$ y $g(t) = C\, e^{-ct}$. En la Sección 7.3.4 mostramos algunas aplicaciones de nuestros resultados en este marco.

Capítulo 7

Automejora de tipo L^p en espacios de tipo homogéneo de desigualdades de Poincaré generalizada asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos

Continuamos el estudio realizado en el Capítulo 3 y obtenemos propiedades de automejora, en la escala de los espacios de Lebesgue, de desigualdades de Poincaré generalizadas en espacios de tipo homogéneo.

El capítulo está organizado del siguiente modo: El resultado principal y sus diferentes extensiones están en la Sección 7.1. La Sección 7.2.1 contiene las demostraciones de estos resultados. Las aplicaciones se encuentran en la Sección 7.3. En particular, dedicamos las Secciones 7.3.1 y 7.3.3 a estudiar varias desigualdades de tipo Poincaré en espacios generales de tipo homogéneo. Tomamos como punto de partida una estimación cuyo lado derecho está localizado a una bola dada B. Después tenemos en cuenta la falta de localización de la aproximación de la identidad o del semigrupo y en el lado derecho de la estimación aparecerán una serie de términos como las que nos aparecieron cuando aplicábamos nuestros resultados a variedades. Como consecuencia, en la Sección 7.3.2, obtenemos desigualdades pseudo-Poincaré globales. En la Sección 7.3.4, consideramos las aplicaciones anteriores y obtenemos desigualdades de tipo Poincaré generalizadas en variedades de Riemann.

7.1. Resultados principales

A continuación establecemos nuestro resultado principal que proporciona estimaciones de automejoras de tipo débil a partir de (5.1) y la condición D_r. Después, mostramos una extensión con pesos (para pesos en la clase de Muckenhoupt). Finalmente, generalizamos la condición D_r permitiendo un funcional diferente en el lado derecho para obtener resultados con y sin pesos.

Teorema 7.1 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5, $1 < r < \infty$ y $a \in D_r$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica*

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq a(B), \tag{7.1}$$

para toda bola B y donde $t_B = \mathrm{r}(B)^m$, entonces, para cada bola B, se tiene que

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty}, B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{2nk} g(c\, \sigma^{mk}) \, a(\sigma^k B), \tag{7.2}$$

con $C \geq 1$ y $0 < c < 1$. Si además, a es doblante, entonces, para cada B:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty}, B} \lesssim a(B).$$

Podemos extender el teorema anterior a espacios con pesos $A_\infty(\mu)$ como sigue:

Teorema 7.2 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5, $w \in A_\infty(\mu)$, $1 \leq r < \infty$ y $a \in D_r(w) \cap D_1$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica (7.1), entonces, para cada bola B, se tiene que*

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty}(w), B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{2nk} g(c\, \sigma^{mk}) \, a(\sigma^k B),$$

con $C \geq 1$ y $0 < c < 1$. Si además, a es doblante, podemos escribir $C\, a(B)$ en el lado derecho.

Observación 7.3 Obsérvese que (7.1) es una estimación sin peso y a partir de ella conseguimos otra con peso para la oscilación $f - S_{t_B} f$.

Observación 7.4 Exigimos la condición D_1 debido a que para demostrar el Teorema 7.2 utilizamos el Lema 7.8 y la Proposición 7.9, más abajo. Sin embargo, si $w \in A_r(\mu)$ y $a \in D_r(w)$ entonces, $a \in D_1$ (ver la Observación 3.7 en el caso euclídeo).

Por otro lado, si S_t es un semigrupo, no tenemos que imponer la condición $a \in D_1$. La demostración del teorema es algo diferente y más técnica, pues necesitamos pruebas alternativas del Lema 7.8 y la Proposición 7.9. La demostración del Teorema 3.8 corresponde al caso euclídeo, el caso general lo dejamos al lector interesado.

Siguiendo las ideas de [FPW], extendemos los Teoremas 7.1 y 7.2 cambiando la hipótesis sobre el funcional a, de modo que la nueva condición de tipo D_r nos permita escribir un funcional diferente en el lado derecho de la desigualdad (6.5):

Teorema 7.5 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5 y $1 < r < \infty$. Supongamos que los funcionales a y $\bar{a}$ satisfacen la siguiente condición de tipo D_r:*

$$\sum_i a(B_i)^r \, \mu(B_i) \leq \bar{a}(B)^r \, \mu(B), \tag{7.3}$$

para cada bola B y cualquier familia de bolas disjuntas dos a dos $\{B_i\}_i \subset B$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica (7.1)*, entonces, para cada bola B, se tiene que*

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty},B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{2\,n\,k} \, g(c\,\sigma^{m\,k}) \, \bar{a}(\sigma^k \, B), \tag{7.4}$$

con $C \geq 1$ y $0 < c < 1$. Si además, $\bar{a}$ es doblante, podemos escribir $C\,\bar{a}(B)$ en el lado derecho de la desigualdad anterior.

Observación 7.6 Dados dos funcionales a y $\bar{a}$, abusando de la notación, decimos que $(a, \bar{a}) \in D_r$ si verifican (7.3).

Observación 7.7 Realizando los cambios oportunos, podemos considerar una extensión con peso del resultado anterior. Suponiendo que $(a, \bar{a}) \in D_r(w) \cap D_1$, obtenemos la correspondiente estimación $L^{r,\infty}(w)$. Dejamos los detalles al lector interesado.

7.2. Demostraciones de los resultados principales

7.2.1. Demostración del Teorema 7.1

Dividimos la prueba en dos partes.

Paso I: Caso diádico

Utilizamos algunas ideas de la primera parte del trabajo. Fijamos $\sigma > 4\,D_0^3 > 1$ y tomamos la estructura diádica dada en el Teorema 6.1. En esta parte de la demostración mostramos que para cada $1 \leq \tau < \sigma^m$ y cada $Q \in \mathcal{D}$:

$$\big\|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f\big\|_{L^{r,\infty},Q} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma^{2\,n\,k} \, g\big(\sigma^{m\,(k-8)}\big) \, a(\sigma^k \, \hat{B}_Q). \tag{7.5}$$

En primer lugar definimos el siguiente funcional: $\tilde{a} : \mathcal{B} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ dado por

$$\tilde{a}(B) = \sum_{k \geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-8)}\big)\, a(\sigma^k\, B).$$

Fijamos $Q \in \mathcal{D}$ para el cual $\tilde{a}(\hat{B}_Q) < \infty$. En caso contrario, no hay nada que probar.

Definimos la función

$$G(x) = \big|f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big|\, \chi_{\sigma^2\, \hat{B}_Q}(x)$$

y los conjuntos de nivel

$$\Omega_t = \{x \in X : MG(x) > t\},$$

para todo $t > 0$.

Estudiamos los conjuntos Ω_t, pues el teorema de diferenciación de Lebesgue implica que para obtener (7.5) basta estimar $\|MG\|_{L^{r,\infty},Q}$ (y para ello, los conjuntos de nivel de MG). Dividimos la demostración en dos casos según sea el tamaño de t. Para t pequeño, la estimación es directa. Para t grande, utilizamos el recubrimiento de Whitney (Teorema 6.2).

El siguiente lema es una herramienta muy útil y, aunque lo utilizamos repetidamente, su primera consecuencia es que la función G es integrable. Las demostraciones de todos los resultados auxiliares que vamos a utilizar aparecen en la Sección 7.2.2.

Lema 7.8 *Sea $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5. Si $a \in D_1$ y $f \in \mathcal{M}$ verifica* (7.1) *entonces, para cada $1 \leq \tau < \sigma^m$, $k \geq 0$ y $R \in \mathcal{D}$, se tiene la siguiente estimación:*

$$⨍_{\sigma^k\, \hat{B}_R} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_R}} f|\, d\mu \leq \|a\|_{D_1}\, c_\mu^2\, C_2^n\, \sigma^{5\,n}\, a(\sigma^{k+2}\, \hat{B}_R).$$

Aplicando el resultado anterior, que $a \in D_r \subset D_1$ y $\tilde{a}(\hat{B}_Q) < \infty$, tenemos que $G \in L^1(X)$:

$$\|G\|_{L^1(X)} = \int_{\sigma^2\, \hat{B}_Q} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f|\, d\mu \leq \frac{\|a\|_{D_1}}{\sigma^n}\, \frac{c_\mu^3\, C_2^{2\,n}}{g(1)}\, \tilde{a}(\hat{B}_Q)\, \mu(Q). \tag{7.6}$$

Si además utilizamos que M es de tipo débil $(1,1)$ con constante c_M, obtenemos:

$$\mu(\Omega_t) \leq \frac{c_M}{t}\, \|G\|_{L^1(X)} \leq \frac{c_M\, c_\mu^3\, C_2^{2\,n}}{g(1)}\, \frac{\|a\|_{D_1}}{\sigma^n}\, \frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{t}\, \mu(Q) = \frac{c_0}{t}\, \frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\sigma^n}\, \mu(Q), \tag{7.7}$$

donde c_M es la constante de tipo débil $(1,1)$ de M y $c_0 = \frac{c_M\, c_\mu^3\, C_2^{2\,n}}{g(1)}\, \|a\|_{D_1}$.

Ahora nuestro objetivo es mostrar la siguiente desigualdad de tipo buenas-λ: dados $q>1$ suficientemente grande y $0<\lambda<1$, para todo $t>0$,

$$\mu(\Omega_{q\,t}\cap Q)\lesssim \lambda\,\mu(\Omega_t\cap Q)+\left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda\,t}\right)^r\mu(Q). \tag{7.8}$$

Tomamos $t_0=c_0\,c_\mu\,C_2^n\,\sigma^n\,\tilde{a}(\hat{B}_Q)$. Si $0<t\le t_0$ entonces (7.8) es trivial:

$$\mu(\Omega_{q\,t}\cap Q)\le\mu(Q)\lesssim\left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda\,t}\right)^r\mu(Q)\lesssim\lambda\,\mu(\Omega_t\cap Q)+\left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda\,t}\right)^r\mu(Q).$$

Para estudiar el otro caso ($t>t_0$), utilizamos el Teorema de Whitney (Teorema 6.2). Obsérvese que Ω_t es un subconjunto abierto propio de X, pues es un conjunto de nivel de MG, función semicontinua inferiormente. Además, $G\in L^1(X)$ y $\mu(\Omega_t)<\infty$. De este modo, aplicando el Teorema 6.2, el conjunto Ω_t puede ser cubierto con una familia de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i$.

De ahora en adelante, fijamos $t>t_0$ y nos restringimos a considerar aquellos cubos Q_i^t con $Q_i^t\cap Q\neq\emptyset$. Es decir, aquellos Q_i^t tales que $Q_i^t\subsetneq Q$ (consecuencia de que los cubos son diádicos, del tamaño de t y (7.7)). Veamos que estos cubos también satisfacen las siguientes condiciones:

$$\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})\le\sigma^{-2}\,\mathrm{r}(\hat{B}_Q)\qquad\text{y}\qquad\sigma^2\,\hat{B}_{Q_i^t}\subset\sigma\,\hat{B}_Q. \tag{7.9}$$

La condición sobre el tamaño de los radios es consecuencia de (6.2), (7.7) y la elección de t:

$$\mu(Q_i^t)\le\mu(\Omega_t)<\frac{1}{\sigma^{2\,n}\,C_2^n\,c_\mu}\,\mu(Q)\le\frac{1}{\sigma^{2\,n}\,C_2^n}\left(\frac{\mathrm{r}(\hat{B}_Q)}{\mathrm{r}(B_{Q_i^t})}\right)^n\mu(Q_i^t)=\frac{1}{\sigma^{2\,n}}\left(\frac{\mathrm{r}(\hat{B}_Q)}{\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})}\right)^n\mu(Q_i^t)$$

y por lo tanto, $\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})<\sigma^{-2}\,\mathrm{r}(\hat{B}_Q)$.

Para comprobar la otra afirmación tomamos $x\in\sigma^2\,\hat{B}_{Q_i^t}$ y, utilizando la condición que acabamos de probar, tenemos que $d(x,x_{Q_i^t})\le\sigma^2\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})\le\mathrm{r}(\hat{B}_Q)$. Esta observación junto con el hecho de que $B_{Q_i^t}\subset Q_i^t\subset Q\subset\hat{B}_Q$ nos permite escribir que

$$d(x,x_Q)\le D_0\,(d(x,x_{Q_i^t})+d(x_{Q_i^t},x_Q))\le 2\,D_0\,\mathrm{r}(\hat{B}_Q)\le\sigma\,\mathrm{r}(\hat{B}_Q),$$

de este modo $x\in\sigma\,\hat{B}_Q$ y queda probado que $\sigma^2\,\hat{B}_{Q_i^t}\subset\sigma\,\hat{B}_Q$.

Ahora necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 7.9 *Para cada $x\in Q_i^t$, se tiene*

$$MG(x)\le M(|f-S_{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i^t}}}f|\,\chi_{\sigma\,\hat{B}_{Q_i^t}})(x)+c_1\,t+c_2\,\tilde{a}(\hat{B}_Q),$$

para ciertas constantes $0<c_1,\,c_2<\infty$.

Pues $t > t_0$, utilizando la proposición anterior, tenemos que

$$MG(x) \leq M(|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, \chi_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}})(x) + C_0\, t, \tag{7.10}$$

para alguna constante positiva y finita C_0.

Elegimos q suficientemente grande, de modo que $q > C_0$ y tomamos $0 < \lambda < 1$. Utilizando (7.10) y que los conjuntos de nivel están encajados, escribimos:

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{q\,t} \cap Q) &= \sum_{i:Q_i^t \subset Q} \mu\big(\{x \in Q_i^t : MG(x) > q\,t\}\big) \\ &\leq \sum_{i:Q_i^t \subset Q} \mu\big(\{x \in Q_i^t : M(|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, \chi_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}})(x) > (q - C_0)\, t\}\big) \\ &= \sum_{\Gamma_1} \cdots + \sum_{\Gamma_2} \cdots = I + II, \end{aligned} \tag{7.11}$$

donde

$$\Gamma_1 = \Big\{ Q_i^t \subset Q \,:\, ⨍_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \leq \lambda\, t \Big\}$$

y

$$\Gamma_2 = \Big\{ Q_i^t \subset Q \,:\, ⨍_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu > \lambda\, t \Big\}.$$

Estudiamos cada uno de los sumandos por separado. Para I utilizamos que M es de tipo débil $(1,1)$, μ es doblante y el Teorema 6.2 y obtenemos que

$$I \lesssim \frac{1}{t} \sum_{\Gamma_1} \int_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \lesssim \lambda \sum_{i:Q_i^t \subset Q} \mu(Q_i^t) \lesssim \lambda\, \mu(\Omega_t \cap Q).$$

Para estimar II primero observamos que si $Q_i^t \in \Gamma_2$, el Lema 7.8 implica que

$$\lambda\, t < ⨍_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \lesssim a(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t})$$

y por lo tanto,

$$II \leq \sum_{\Gamma_2} \mu(Q_i^t) \lesssim \Big(\frac{1}{\lambda\, t}\Big)^r \sum_{i:Q_i^t \subset Q} a(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t})^r\, \mu(Q_i^t).$$

El siguiente paso consiste en aplicar la condición D_r. Aunque, debido a que las bolas de la familia $\{\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}\}_i$ pueden no ser disjuntas dos a dos, no podemos hacerlo directamente y necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 7.10 *La familia de bolas* $\{\sigma^3\,\hat{B}_{Q_i^t}\}_i$ *está contenida en la bola* $\sigma^2\,\hat{B}_Q$ *y puede ser separada en* K *(con* $K \leq c_\mu\, C_2^{3\,n}\,\sigma^{13\,n}$*) subfamilias* $\{\mathcal{E}_j\}_{j=1}^K$ *de bolas disjuntas dos a dos.*

Entones, podemos aplicar que $a \in D_r$ sobre cada $\mathcal{E}_j$. Esto junto con el hecho de que de μ es doblante implica que

$$\begin{aligned} II &\lesssim \left(\frac{1}{\lambda\,t}\right)^r \sum_{j=1}^{K} \sum_{i\,:\,Q_i^t\in\mathcal{E}_j} a(\sigma^3\,\hat{B}_{Q_i^t})^r\,\mu(\sigma^3\,\hat{B}_{Q_i^t}) \lesssim \left(\frac{1}{\lambda\,t}\right)^r a(\sigma^2\,\hat{B}_Q)^r\,\mu(\sigma^2\,\hat{B}_Q) \\ &\lesssim \left(\frac{1}{\lambda\,t}\right)^r \tilde{a}(\hat{B}_Q)^r\,\mu(Q). \end{aligned}$$

Volviendo a (7.11) con las estimaciones obtenidas para I y II, concluimos que

$$\mu(\Omega_{q\,t}\cap Q) \lesssim \lambda\,\mu(\Omega_t\cap Q) + \left(\frac{1}{\lambda\,t}\right)^r \tilde{a}(\hat{B}_Q)^r\,\mu(Q).$$

Ahora fijamos $N > 0$. Obsérvese que la desigualdad de tipo buenas-λ (7.8) implica que para alguna constante finita $c > 0$:

$$\begin{aligned} \sup_{0<t\leq N/q} t^r\,\frac{\mu(\Omega_{q\,t}\cap Q)}{\mu(Q)} &\leq c\,\lambda \sup_{0<t\leq N/q} t^r\,\frac{\mu(\Omega_t\cap Q)}{\mu(Q)} + c\left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda}\right)^r \\ &\leq c\,\lambda \sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{\mu(\Omega_t\cap Q)}{\mu(Q)} + c\left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda}\right)^r, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{\mu(\Omega_t\cap Q)}{\mu(Q)} \leq c\,\lambda\,q^r \sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{\mu(\Omega_t\cap Q)}{\mu(Q)} + c\,q^r\left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda}\right)^r. \tag{7.12}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{\mu(\Omega_t\cap Q)}{\mu(Q)} \leq N^r < \infty.$$

Entonces, si tomamos $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, podemos esconder el primer término en el lado derecho de (7.12) y obtenemos que

$$\sup_{0<t\leq N} t^r\,\frac{\mu(\Omega_t\cap Q)}{\mu(Q)} \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q)^r.$$

Tomando límite cuando $N \to \infty$, concluimos que

$$\|MG\|_{L^{r,\infty},Q} \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q).$$

Esta estimación junto con el teorema de diferenciación de Lebesgue implica la desigualdad deseada (como observábamos al comienzo de la demostración). ∎

Paso II: Caso general

Fijamos una bola B y $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$C_1\,\sigma^{k_0} \leq \mathrm{r}(B) < C_1\,\sigma^{k_0+1}.$$

Para tal k_0 definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{I} = \{Q \in \mathcal{D}_{k_0} : Q \cap B \neq \emptyset\}.$$

Para cada $Q \in \mathcal{I}$ se puede ver que $\hat{B}_Q \subset \sigma\,B \subset \sigma^3\hat{B}_Q$, $\mu(B) \approx \mu(Q)$ y $t_B = \tau_Q\,t_{\hat{B}_Q}$, para algún τ_Q con $1 \leq \tau_Q < \sigma^m$.

También, aplicando (6.2), tenemos que

$$\begin{aligned}\#\mathcal{I}\,\mu(\sigma\,B) &\leq \sum_{Q\in\mathcal{I}} \mu(\sigma^3\hat{B}_Q) \leq c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,C_2^n \sum_{Q\in\mathcal{I}} \mu(Q) = c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,C_2^n\,\mu\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{I}} Q\Big)\\ &\leq c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,C_2^n\,\mu(\sigma\,B).\end{aligned}$$

Lo cual nos conduce a $\#\mathcal{I} \leq c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,C_2^n$.

De todo lo anterior y la primera parte de la demostración se sigue que

$$\begin{aligned}\|f - S_{t_B}f\|_{L^{r,\infty},B} &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{I}} \|f - S_{t_B}f\|_{L^{r,\infty},Q} = \sum_{Q\in\mathcal{I}} \big\|f - S_{t_{\tau_Q\,t_{\hat{B}_Q}}}f\big\|_{L^{r,\infty},Q}\\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{I}}\sum_{k\geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\,g\big(\sigma^{m\,(k-8)}\big)\,a(\sigma^k\,\hat{B}_Q)\end{aligned} \tag{7.13}$$

Utilizando ahora que $\{\sigma^k\,\hat{B}_Q\}_{Q\in\mathcal{I}} \subset \sigma^{k+1}\,B$, $a \in D_1$ y (6.2), tenemos que

$$a(\sigma^k\,\hat{B}_Q)\,\mu(\sigma^k\,\hat{B}_Q) \leq \|a\|_{D_1}\,a(\sigma^{k+1}\,B)\,\mu(\sigma^{k+1}\,B) \leq \|a\|_{D_1}\,c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,a(\sigma^{k+1}\,B)\,\mu(\sigma^k\,\hat{B}_Q),$$

por lo tanto,

$$a(\sigma^k\,\hat{B}_Q) \leq \|a\|_{D_1}\,c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,a(\sigma^{k+1}\,B).$$

Así, tenemos que

$$\sum_{Q\in\mathcal{I}} a(\sigma^k\,\hat{B}_Q) \leq \#\mathcal{I}\,\|a\|_{D_1}\,c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,a(\sigma^{k+1}\,B) \leq \|a\|_{D_1}\,c_\mu^2\,\sigma^{6\,n}\,C_2^n\,a(\sigma^{k+1}\,B)$$

Esta observación nos permite continuar la estimación (7.13) del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\|f - S_{t_B}f\|_{L^{r,\infty},B} &\lesssim \sum_{k\geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\,g\big(\sigma^{m\,(k-8)}\big)\,a(\sigma^{k+1}\,B)\\ &\lesssim \sum_{k\geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\,g\big(\sigma^{m\,(k-9)}\big)\,a(\sigma^k\,B).\end{aligned}$$

∎

7.2.2. Demostraciones de los resultados auxiliares

Lema 7.11 *Sea $\mathcal{E} = \{E_j\}_j$ una sucesión de conjuntos cuyo solapamiento es a lo más N, con $N \geq 2$:*

$$\sup_j \#\{E_i \,:\, E_i \cap E_j \neq \emptyset\} \leq N,$$

entonces, existen K subfamilias no vacías y disjuntas $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K \subset \mathcal{E}$ formadas por conjuntos disjuntos dos a dos de modo que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{E}_i \qquad y \qquad K \leq N.$$

Demostración Utilizamos el axioma de elección. Primero elegimos $E_{i_0} \in \mathcal{E}$. Luego seleccionamos $E_{i_1} \in \mathcal{E}$ de modo que $E_{i_1} \cap E_{i_0} = \emptyset$. A continuación tomamos $E_{i_2} \in \mathcal{E}$ de forma que $E_{i_2} \cap (E_{i_0} \cup E_{i_1}) = \emptyset$. Iteramos este proceso y todos estos conjuntos seleccionados definen $\mathcal{E}_1$. Repetimos este proceso en $\mathcal{E}\backslash\mathcal{E}_1$ (siempre que esta colección no sea vacía) y obtenemos $\mathcal{E}_2$. Iterando este método, conseguimos una colección de familias $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^K$. Cada familia es no vacía, disjunta y está formada por conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{E}$.

Veamos que $K \leq N$: supongamos que $K \geq N+1$ y llegaremos a una contradicción. Si $K \geq N+1$, existe $E_{N+1} \in \mathcal{E}_{N+1}$. Como $E_{N+1} \notin \mathcal{E}_i$ para ningún $1 \leq i \leq N$, existe $E_i \in \mathcal{E}_i$ tal que $E_{N+1} \cap E_i \neq \emptyset$. De este modo, tenemos que

$$\#\{E_j \,:\, E_j \cap E_{N+1} \neq \emptyset\} \geq \#\{E_1,\, E_2,\, \cdots,\, E_{N+1}\} = N+1.$$

Lo cual contradice nuestra hipótesis, y por lo tanto, $K \leq N$. ∎

Demostración de la Proposición 7.10 El hecho de que $\{\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}\}_i \subset \sigma^2\, \hat{B}_Q$ es consecuencia de (7.9). Pues si fijamos una bola $\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}$ y tomamos $x \in \sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}$, tenemos que (7.9) proporciona

$$\begin{aligned} d(x, x_Q) &\leq D_0\, [d(x, x_{Q_i^t}) + d(x_Q, x_{Q_i^t})] \leq D_0\, [\sigma^3\, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) + \mathrm{r}(\hat{B}_Q)] \leq D_0\, (\sigma+1)\, \mathrm{r}(\hat{B}_Q) \\ &\leq \sigma^2\, \mathrm{r}(\hat{B}_Q) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $x \in \sigma^2\, \hat{B}_Q$. Así queda probado que $\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma^2\, \hat{B}_Q$, para cualquier bola $\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}$, y de este modo, $\{\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}\}_i \subset \sigma^2\, \hat{B}_Q$.

Comprobamos la otra afirmación: fijamos Q_j^t y definimos

$$E_j = \{Q_i^t : \sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t} \cap \sigma^3\, \hat{B}_{Q_j^t} \neq \emptyset\}.$$

Entonces, por el Lema 7.11, basta probar que se verifica

$$\#E_j \leq c_\mu\, C_2^{3\,n}\, \sigma^{13\,n}. \tag{7.14}$$

En primer lugar, mostramos que para cualquier $Q_i^t \in E_j$:

$$0 < \sigma^5\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) < d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}, \Omega_t^c) \leq C_2\, \sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}). \tag{7.15}$$

Esto es consecuencia de los Teoremas 6.1 y 6.2. Veamos que $\sigma^5\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) < d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}, \Omega_t^c)$: utilizando el apartado (c) del Teorema 6.2, tenemos que

$$\begin{aligned} C_2\, \sigma^6\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) < d(Q_i^t,\, \Omega_t^c) &\leq D_0\, [\mathrm{diam}(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}) + d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t},\, \Omega_t^c)] \\ &\leq D_0\, [2\, D_0\, \sigma^3\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) + d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t},\, \Omega_t^c)], \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t},\, \Omega_t^c) &> \left(C_2\, \frac{\sigma^6}{D_0} - 2\, D_0\, \sigma^3 \right) \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) \\ &\geq (C_2\, 4\, D_0^2\, \sigma^5 - 2\, D_0\, \sigma^3)\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) \geq \sigma^5\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}). \end{aligned}$$

Veamos la otra desigualdad de (7.15): $d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}, \Omega_t^c) \leq \sigma^8\, C_2\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})$. Utilizando que $Q_i^t \subset \hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}$ junto con el apartado (c) del Teorema 6.2, tenemos que

$$d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}, \Omega_t^c) \leq d(Q_i^t, \Omega_t^c) \leq C_2\, \sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}).$$

Por otro lado, como consecuencia de (7.15) vamos a mostrar que para cada $Q_i^t \in E_j$,

$$\frac{1}{C_2}\, \frac{1}{\sigma^4}\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) \leq \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}) \leq C_2\, \sigma^4\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) \tag{7.16}$$

y

$$Q_i^t \subset \sigma^8\, C_2\, \hat{B}_{Q_j^t} \subset \sigma^{13}\, C_2^2\, \hat{B}_{Q_i^t}. \tag{7.17}$$

Para mostrar (7.16) basta utilizar (7.15) y la definición de E_j. Veamos la primera desigualdad: sea $z \in \sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t} \bigcap \sigma^3\, \hat{B}_{Q_j^t}$,

$$\begin{aligned} \sigma^5\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) < d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}, \Omega_t^c) &\leq d(z, \Omega_t^c) \\ &\leq \mathrm{diam}(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_j^t}) + d(\sigma^3\, \hat{B}_{Q_j^t}, \Omega_t^c) \\ &\leq 2\, D_0\, \sigma^3\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}) + C_2\, \sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}) \end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\leq C_2\,\sigma^9\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}),$$

así,

$$\sigma^{-4}\,C_2^{-1}\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) < \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}).$$

Para mostrar la segunda desigualdad de (7.16) basta intercambiar Q_i^t y Q_j^t en (7.18).

Veamos ahora la primera inclusión de (7.17). Tomamos $x \in Q_i^t$ y $z \in \sigma^3\,\hat{B}_{Q_i^t} \cap \sigma^3\,\hat{B}_{Q_j^t}$ y utilizando (7.16), obtenemos que $x \in C_2\,\sigma^8\,\hat{B}_{Q_j^t}$. Pues,

$$\begin{aligned}
d(x, x_{Q_j^t}) &\leq D_0\,[d(x, x_{Q_i^t}) + d(x_{Q_j^t}, x_{Q_i^t})]\\
&\leq D_0\,\big[d(x, x_{Q_i^t}) + D_0\,\big(d(x_{Q_j^t}, z) + d(z, x_{Q_i^t})\big)\big]\\
&\leq D_0\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) + D_0^2\,\sigma^3\,[\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}) + \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})]\\
&\leq D_0^2\,\sigma^3\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}) + 2\,D_0^2\,\sigma^3\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})\\
&< C_2\,\sigma^8\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}).
\end{aligned}$$

Veamos la segunda inclusión. Tomamos $x \in C_2\,\sigma^8\,\hat{B}_{Q_j^t}$ y $z \in \sigma^3\,\hat{B}_{Q_i^t} \cap \sigma^3\,\hat{B}_{Q_j^t}$ y utilizando (7.16), obtenemos que $x \in \sigma^{13}\,C_2^2\,\hat{B}_{Q_i^t}$. Pues,

$$\begin{aligned}
d(x, x_{Q_i^t}) &\leq D_0\,[d(x, x_{Q_j^t}) + d(x_{Q_j^t}, x_{Q_i^t})]\\
&\leq D_0\,\big[d(x, x_{Q_j^t}) + D_0\,\big(d(x_{Q_j^t}, z) + d(z, x_{Q_i^t})\big)\big]\\
&\leq (D_0\,C_2\,\sigma^8 + D_0^2\,\sigma^3)\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_j^t}) + D_0^2\,\sigma^3\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})\\
&\leq \big((D_0\,C_2\,\sigma^8 + D_0^2\,\sigma^3)\,C_2\,\sigma^4 + D_0^2\,\sigma^3\big)\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})\\
&\leq C_2^2\,\sigma^{13}\ \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}).
\end{aligned}$$

Utilizando ahora (7.17), obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^8\,C_2\,\hat{B}_{Q_j^t})\,\#E_j &\leq \sum_{Q_i^t \in E_j} \mu(\sigma^{13}\,C_2^2\,\hat{B}_{Q_i^t})\\
&\leq c_\mu\,\sigma^{13\,n}\,C_2^{3\,n} \sum_{Q_i^t \in E_j} \mu(Q_i^t)\\
&\leq c_\mu\,\sigma^{13\,n}\,C_2^{3\,n}\,\mu\Big(\bigcup_{Q_i^t \in E_j} Q_i^t\Big)\\
&\leq c_\mu\,\sigma^{13\,n}\,C_2^{3\,n}\,\mu(\sigma^8\,C_2\,\hat{B}_{Q_j^t})
\end{aligned}$$

y esto nos conduce a la estimación que buscábamos para $\#E_j$. ∎

Lema 7.12 *Dado $R \in \mathcal{D}_{k_0}$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$. Para cada $k \geq 0$ definimos los conjuntos $\mathcal{J}_k = \{Q \in \mathcal{D}_{k_0} : Q \cap \sigma^k \hat{B}_R \neq \emptyset\}$. Entonces, en μ-casi todo punto, se tiene que*

$$\sigma^k \hat{B}_R \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{J}_k} Q \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{J}_k} \hat{B}_Q \subset \sigma^{k+1} \hat{B}_R. \tag{7.19}$$

y

$$\# \mathcal{J}_k \leq c_\mu \, \sigma^{(k+2)\, n} \, C_2^n. \tag{7.20}$$

También, dado $1 \leq \tau \leq \sigma^m$, para cada $Q_0 \in \mathcal{J}_k$ fijo, se tiene que

$$\# \mathcal{I}_k = \#\{Q \in \mathcal{J}_k : \tau^{1/m} \hat{B}_Q \cap \tau^{1/m} \hat{B}_{Q_0} \neq \emptyset\} \leq c_\mu \, \sigma^{3\, n} \, C_2^n. \tag{7.21}$$

Demostración Obsérvese que (7.19) sigue del Teorema 6.1. También, se puede ver que para cada $Q \in \mathcal{J}_k$, $\sigma^{k+1} \hat{B}_R \subset \sigma^{k+2} \hat{B}_Q$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^{k+1} \hat{B}_R) \, \# \mathcal{J}_k &\leq \sum_{Q \in \mathcal{J}_k} \mu(\sigma^{k+2} \hat{B}_Q) \\
&\leq c_\mu \, \sigma^{(k+2)\, n} \, C_2^n \sum_{Q \in \mathcal{J}_k} \mu(Q) \\
&\leq c_\mu \, \sigma^{(k+2)\, n} \, C_2^n \, \mu\Big(\bigcup_{Q \in \mathcal{J}_k} Q \Big) \\
&\leq c_\mu \, \sigma^{(k+2)\, n} \, C_2^n \, \mu(\sigma^{k+1} \hat{B}_R),
\end{aligned}$$

y de esta manera obtenemos (7.20).

Ahora, observamos que para cada $Q \in \mathcal{I}_k$, tenemos $Q \subset \sigma^2 \hat{B}_{Q_0} \subset \sigma^3 \hat{B}_Q$. Entonces, procediendo como antes, obtenemos (7.21):

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^2 \hat{B}_{Q_0}) \, \# \mathcal{I}_k &\leq \sum_{Q \in \mathcal{I}_k} \mu(\sigma^3 \hat{B}_Q) \\
&\leq c_\mu \, \sigma^{3\, n} \, C_2^n \sum_{Q \in \mathcal{I}_k} \mu(Q) \\
&\leq c_\mu \, \sigma^{3\, n} \, C_2^n \, \mu\Big(\bigcup_{Q \in \mathcal{I}_k} Q \Big) \\
&\leq c_\mu \, \sigma^{3\, n} \, C_2^n \, \mu(\sigma^2 \hat{B}_{Q_0}).
\end{aligned}$$

∎

Demostración del Lema 7.8 Fijamos $R \in \mathcal{D}_{k_0}$, para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ y $1 \leq \tau < \sigma^m$. Aplicando el Lema 7.12 cubrimos $\sigma^k \hat{B}_R$ con la familia $\{\tau^{1/m} \hat{B}_Q\}_{Q \in \mathcal{J}_k} \subset \sigma^{k+2} \hat{B}_R$

con solapamiento controlado por (7.21). Utilizando ahora el Lema 7.11 separamos esta familia en $N \leq c_\mu \, \sigma^{3\,n} \, C_2^n$ subfamilias de conjuntos disjuntos dos a dos. De todo esto, aplicando que f verifica (7.1), que $a \in D_1(\mu)$ en cada subfamilia y que la medida es doblante, concluimos que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma^k \, \hat{B}_R} |f - S_{\tau \, t_{\hat{B}_R}} f| \, d\mu &\leq \sum_{Q \in \mathcal{J}_k} \int_{\tau^{1/m} \, \hat{B}_Q} |f - S_{t_{\tau^{1/m} \, \hat{B}_Q}} f| \, d\mu \\ &\leq \sum_{Q \in \mathcal{J}_k} a(\tau^{1/m} \, \hat{B}_Q) \, \mu(\tau^{1/m} \, \hat{B}_Q) \\ &\leq \|a\|_{D_1} \, c_\mu \, \sigma^{3\,n} \, C_2^n \, a(\sigma^{k+2} \, \hat{B}_R) \, \mu(\sigma^{k+2} \, \hat{B}_R) \\ &\leq \|a\|_{D_1} \, c_\mu^2 \, \sigma^{5\,n} \, C_2^n \, a(\sigma^{k+2} \, \hat{B}_R) \, \mu(\sigma^k \, \hat{B}_R).\end{aligned}$$

∎

Observación 7.13 De esta demostración se sigue que si $\tilde{B}$ es cualquier bola tal que $\sigma^k \, \hat{B}_R \subset \tilde{B}$, entonces

$$\int_{\sigma^k \, \hat{B}_R} |f - S_{\tau \, t_{\hat{B}_R}} f| \, d\mu \leq \|a\|_{D_1} \, c_\mu \, \sigma^{3\,n} \, C_2^n \, a(\sigma^2 \, \tilde{B}) \, \mu(\sigma^2 \, \tilde{B}).$$

Esta estimación es consecuencia de que $\{\tau^{1/m} \, \hat{B}_Q\}_{Q \in \mathcal{J}_k} \subset \sigma^{k+2} \, \hat{B}_R \subset \sigma^2 \, \tilde{B}$.

Demostración de la Proposición 7.9 Supongamos de momento que para cada $x \in \sigma \, \hat{B}_{Q_i^t}$,

$$\big|S_{\tau \, \hat{B} t_{Q_i^t}} f(x) - S_{\tau \, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big| \lesssim t + \tilde{a}(\hat{B}_Q). \tag{7.22}$$

Entonces, de la estimación anterior y (e) en el Teorema 6.2 se sigue que para cada $x \in Q_i^t$,

$$MG(x) \leq M(G\chi_{(\sigma \, \hat{B}_{Q_i^t})^c})(x) + M(G\chi_{\sigma \, \hat{B}_{Q_i^t}})(x) \lesssim t + \tilde{a}(\hat{B}_Q) + M\big(|f - S_{\tau \, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\chi_{\sigma \, \hat{B}_{Q_i^t}}\big)(x).$$

Veamos (7.22). En primer lugar, la regla de conmutación implica que

$$\begin{aligned}\big|S_{\tau \, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f(x) - S_{\tau \, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big| &\leq \big|S_{\tau \, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} \big(f - S_{\tau \, t_{\hat{B}_Q}} f\big)(x)\big| + \big|S_{\tau \, t_{\hat{B}_Q}} \big(f - S_{\tau \, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f\big)(x)\big| \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Estudiamos cada término por separado. Fijamos $x \in \sigma \, \hat{B}_{Q_i^t}$ y elegimos $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sigma^{k_i} \, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}) \leq \mathrm{r}(\hat{B}_Q) < \sigma^{k_i+1} \, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}). \tag{7.23}$$

Utilizando (7.9), tenemos que

$$k_i \geq 2 \qquad \text{y} \qquad \sigma^{k_i}\,\hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma\,\hat{B}_Q. \tag{7.24}$$

Esto implica que $\left|f(y) - S_{\tau\,t_{\hat{B}_Q}} f(y)\right| = G(y)$, cuando $y \in \sigma^{k_i}\,\hat{B}_{Q_i^t}$. De este modo y utilizando que $1 \leq \tau < \sigma^m$, podemos escribir

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{\mu\big(B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))\big)} \int_X g\bigg(\frac{d(x,y)^m}{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i^t}}}\bigg)\, |f(y) - S_{\tau\,t_{\hat{B}_Q}} f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{\mu\big(B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))\big)} \int_X g\bigg(\frac{d(x,y)^m}{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i^t}}}\bigg)\, G(y)\, d\mu(y) \\ &\qquad + \frac{1}{\mu\big(B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))\big)} \int_{(\sigma^{k_i}\,\hat{B}_{Q_i^t})^c} \cdots\, d\mu(y) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Para aprovechar el decaimiento de g escribimos X como unión de anillos diádicos $\{C_k(Q_i^t)\}_{k\geq 2}$. De modo que si $x \in \sigma\,\hat{B}_{Q_i^t}$, $y \in C_k(Q_i^t)$ observamos que

$$\frac{d(x,y)^m}{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} \geq \lambda_k \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2, \\ \sigma^{m\,(k-3)}, & \text{si } k \geq 3. \end{cases}$$

Por otro lado, para cada $k \geq 2$, tenemos que $\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma^{k+1}\,B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))$ y, utilizando que μ es doblante, $\mu(\sigma^{k+1}\,B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))) \leq c_\mu\,\sigma^{n\,(k+1)}\,\mu(B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})))$. De las observaciones anteriores, el decaimiento de g y el Lema 6.3, obtenemos:

$$I_1 \lesssim \sum_{k\geq 2} \sigma^{n\,k}\, g(\lambda_k) \fint_{\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i^t}} G\, d\mu \lesssim t \sum_{k\geq 2} g(\lambda_k)\, \sigma^{n\,k} \lesssim t.$$

Estudiamos I_2. En primer lugar, se puede ver que $Q_i^t \subset Q$, (7.23) y (7.24) implican lo siguiente: Para cada $k \geq k_i + 1$ y $x \in \sigma\,\hat{B}_{Q_i^t}$,

$$C_k(Q_i^t) \subset \sigma^k\,\hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q \subset \sigma^{k-1}\,\hat{B}_Q \subset \sigma^{k+k_i+1}\,B\big(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t})\big). \tag{7.26}$$

De este modo, argumentando como en el Lema 7.8 y utilizando que $a \in D_1(\mu)$ y μ es doblante, obtenemos

$$I_2 \leq \frac{1}{\mu\big(B(x, \mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))\big)} \sum_{k\geq k_i+1} g(\lambda_k) \int_{\sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_Q}} f|\, d\mu$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \frac{1}{\mu\big(B(x,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i^t}))\big)} \sum_{k\geq k_i+1} g(\lambda_k)\, a(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q)\,\mu(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q) \\
&\lesssim \sum_{k\geq k_i+1} \sigma^{n\,(k+k_i)}\, g\big(\sigma^{m\,(k-3)}\big)\, a(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q) \\
&\lesssim \sum_{k\geq 3} \sigma^{2\,n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-3)}\big)\, a(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q) \\
&\lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q).
\end{aligned}
$$

De las estimaciones obtenidas para I_1 e I_2, conseguimos:

$$
I \lesssim t + \tilde{a}(\hat{B}_Q).
$$

Veamos ahora que $II \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q)$. Obsérvese primero que (7.26) implica que $\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q \subset \sigma^{k-k_i+2}\,B(x,\mathrm{r}(\hat{B}_Q))$, para cada $k \geq k_i+1$. Entonces, procediendo como en el Lema 7.8 y utilizando que μ es doblante, obtenemos

$$
\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{\mu\big(B(x,\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \int_X g\left(\frac{d(x,y)^m}{\tau\, t_{\hat{B}_Q}}\right) \big|f(y) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f(y)\big|\, d\mu(y) \\
&\leq \frac{g(0)}{\mu\big(B(x,\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \int_{\sigma^{k_i+1}\,\hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \\
&\qquad + \frac{1}{\mu\big(B(x,\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \sum_{k\geq k_i+2} g\left(\frac{\lambda_k\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}}{\tau\, t_{\hat{B}_Q}}\right) \int_{\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \\
&\lesssim a(\sigma^4\,\hat{B}_Q) + \sum_{k\geq k_i+2} g\big(\sigma^{m\,(k-k_i-5)}\big)\, \sigma^{n\,(k-k_i)}\, a(\sigma^{k-k_i+3}\,\hat{B}_Q) \\
&\lesssim \sum_{k\geq 2} \sigma^{n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-8)}\big)\, a(\sigma^k\,\hat{B}_Q) \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q).
\end{aligned}
$$

∎

7.2.3. Demostración del Teorema 7.2

Seguimos los pasos de la demostración del Teorema 7.1. Así, sólo detallaremos aquellos puntos donde ambas pruebas difieran. Recordemos que $w \in A_\infty(\mu)$ implica que existen $1 < p,\ s < \infty$ tales que $w \in A_p(\mu) \cap RH_s(\mu)$. Por lo tanto, para cualquier bola B y cualquier conjunto medible $S \subset B$, se tiene que

$$
\frac{1}{C_w}\left(\frac{\mu(S)}{\mu(B)}\right)^p \leq \frac{w(S)}{w(B)} \leq C_w\left(\frac{\mu(S)}{\mu(B)}\right)^{1/s'}. \tag{7.27}
$$

La primera desigualdad sigue de que $w \in A_p(\mu)$ y la segunda de que $w \in RH_s(\mu)$ (ver [ST]). Obsérvese que como consecuencia de (7.27), w es doblante.

Fijamos $Q \in \mathcal{D}$ y supongamos que $\tilde{a}(\hat{B}_Q) < \infty$, donde

$$\tilde{a}(\hat{B}_Q) = \sum_{k\geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-9)}\big)\, a(\sigma^k\, \hat{B}_Q).$$

Tomamos G y Ω_t como en la demostración del Teorema 7.1:

$$G(x) = \big|f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big|\, \chi_{\sigma^2\, \hat{B}_Q}(x) \qquad \text{y} \qquad \Omega_t = \{x \in X : MG(x) > t\},\ t > 0.$$

Del mismo modo que en la demostración del Teorema 7.1 (aplicando el Lema 7.8, pues $a \in D_1$ y $\tilde{a}(\hat{B}_Q) < \infty$), tenemos (7.6):

$$G \in L^1(X) \qquad \text{con} \qquad \|G\|_{L^1(X)} \leq \frac{\|a\|_{D_1}}{\sigma^n}\, \frac{c_\mu^3\, C_2^{2\,n}}{g(1)}\, \tilde{a}(\hat{B}_Q)\, \mu(Q);$$

y utilizando que M es de tipo débil $(1,1)$ con constante c_M, tenemos (7.7):

$$\mu(\Omega_t) \leq \frac{c_M}{t}\, \|G\|_{L^1(X)} \leq \frac{c_M\, c_\mu^3\, C_2^{2\,n}}{g(1)}\, \frac{\|a\|_{D_1}}{\sigma^n}\, \frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{t}\, \mu(Q).$$

donde c_M es la constante de tipo débil $(1,1)$ de M.

Tomamos $q > 1$ suficientemente grande y mostramos la siguiente versión con peso de (7.8): dado $0 < \lambda < 1$, para todo $t > 0$,

$$w(\Omega_{q\,t} \cap Q) \lesssim \lambda^{1/s'}\, w(\Omega_t \cap Q) + \left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda\, t}\right)^r w(Q). \tag{7.28}$$

Una vez probada esta desigualdad, la demostración sigue los pasos del Teorema 7.1.

Dividimos la prueba de (7.28) en dos casos. Si $0 < t \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q)$, la estimación es trivial, pues

$$w(\Omega_{q\,t} \cap Q) \leq w(Q) \lesssim \left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda\, t}\right)^r w(Q).$$

Si $t \gtrsim \tilde{a}(Q)$. Utilizando el Teorema 6.2, escribimos Ω_t como unión de cubos de Whitney $\{Q_i^t\}_i$ en casi todo μ (pues $G \in L^1(X)$ y $\mu(\Omega_t) < \infty$, por (7.6) y (7.7)). Argumentando como en la demostración del Teorema 7.1, obtenemos que

$$w(\Omega_{q\,t} \cap Q) \leq \sum_{i:Q_i^t \subset Q} w\big(\{x \in Q_i^t : M(|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, \chi_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}})(x) > (q - C_0)\, t\}\big)$$

$$= \sum_{\Gamma_1} \cdots + \sum_{\Gamma_2} \cdots = I + II.$$

Para estimar I utilizamos (7.27), que M es de tipo débil $(1,1)$, μ es doblante y el Teorema 6.2, y conseguimos que

$$\begin{aligned} I &\lesssim \sum_{\Gamma_1} \left(\frac{\mu\big(\{x \in Q_i^t : M(|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, \chi_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}})(x) > (q - C_0)\, t\}\big)}{\mu(Q_i^t)} \right)^{1/s'} w(Q_i^t) \\ &\lesssim \frac{1}{t^{1/s'}} \sum_{\Gamma_1} \left(\fint_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \right)^{1/s'} w(Q_i^t) \\ &\lesssim \lambda^{1/s'} \sum_{i : Q_i^t \subset Q} w(Q_i^t) \lesssim \lambda^{1/s'}\, w(\Omega_t \cap Q). \end{aligned}$$

Para II seguimos los cálculos que hicimos en la demostración del Teorema 7.1 para estimar II (reemplazando la medida de Lebesgue por w), utilizamos que w es doblante, $a \in D_r(w) \cap D_1$ y el Lema 7.8 y obtenemos que

$$II \lesssim \left(\frac{a(\hat{B}_Q)}{\lambda\, t} \right)^r w(Q) \lesssim \left(\frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\lambda\, t} \right)^r w(Q).$$

De las estimaciones obtenidas para I y II, obtenemos (7.28) y de este modo completamos la demostración. ∎

7.2.4. Demostración del Teorema 7.5

Seguimos la demostración del Teorema 7.1 y solamente describimos los cambios necesarios. En primer lugar, tenemos que modificar el argumento de la página 122 en el que pasamos del caso diádico al caso general utilizando que $a \in D_1$ —pues $a \in D_1$ implica $a(B_1) \lesssim a(B_2)$, si $B_1 \subset B_2 \subset \sigma^3 B_1$—. Aquí no tenemos esta propiedad (a menos que supongamos que $\bar{a} \in D_1$), pero podemos utilizar la siguiente observación: si $(a, \bar{a}) \in D_r$ entonces, para cada B y $\tilde{B}$ con $B \subset \tilde{B}$ y para cualquier familia de bolas disjuntas dos a dos $\{B_i\}_i \subset B$, tenemos que

$$\sum_i a(B_i)^r\, \mu(B_i) \lesssim \bar{a}(\tilde{B})^r\, \mu(\tilde{B}). \tag{7.29}$$

Comenzamos como en el Paso II: fijamos una bola B. La cubrimos con cubos diádicos en $\mathcal{I}$ y, utilizando que el cardinal de $\mathcal{I}$ está controlado por una constante geométrica, basta obtener la estimación deseada para un cubo fijo $Q \in \mathcal{I}$. Recordemos que $\mathcal{I} = \{Q \in \mathcal{D}_{k_0} : Q \cap B \neq \emptyset\}$, con $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $C_1\,\sigma^{k_0} \leq \mathrm{r}(B) < C_1\,\sigma^{k_0+1}$ y $\#\mathcal{I} \leq c_\mu\,\sigma^{3\,n}\,C_2^n$.

Tomamos $\tilde{a}$ dado por

$$\tilde{a}(B) = \sum_{k\geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-9)}\big)\,\bar{a}(\sigma^k\,B).$$

Utilizando que $(a, \bar{a})$ satisface (7.3), podemos ver (como en la demostración del Lema 7.8) que para cada $R \in \mathcal{D}$, $1 \leq \tau < \sigma^m$ y $k \geq 1$:

$$\fint_{\sigma^k\,\hat{B}_R} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_R}} f|\, d\mu \lesssim \bar{a}(\sigma^{k+2}\,\hat{B}_R). \tag{7.30}$$

Además, cuando $R = Q$ utilizando que $\sigma^{k+2}\,\hat{B}_Q \subset \sigma^{k+3}\,B \subset \sigma^{k+5}\,\hat{B}_Q$, $\mu(\sigma^{k+3}\,B) \lesssim \mu(\sigma^k\,\hat{B}_Q)$ y (7.29), podemos obtener

$$\fint_{\sigma^k\,\hat{B}_Q} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_Q}} f|\, d\mu \lesssim \bar{a}(\sigma^{k+3}\,B). \tag{7.31}$$

Esto implica que $G = \big|f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_Q}} f\big|\,\chi_{\sigma^2\,\hat{B}_Q} \in L^1(X)$ con $\|G\|_{L^1(X)} \lesssim \tilde{a}(B)\,\mu(Q)$. También se puede ver que los conjuntos de nivel t de MG, Ω_t, satisfacen que $\mu(\Omega_t) \lesssim \tilde{a}(B)\,\mu(Q)/t$.

Nuestro objetivo es mostrar la siguiente desigualdad de tipo buenas-λ: dado $0 < \lambda < 1$, para todo $t > 0$,

$$\mu(\Omega_{q\,t} \cap Q) \lesssim \lambda\,\mu(\Omega_t \cap Q) + \left(\frac{\tilde{a}(B)}{\lambda\,t}\right)^r \mu(Q). \tag{7.32}$$

Como consecuencia de esta desigualdad y del mismo modo que en la demostración del Teorema 7.1, obtenemos que $\|MG\|_{L^{r,\infty},Q} \lesssim \tilde{a}(B)$. Lo cual a su vez implica la estimación deseada:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty},B} \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{I}} \|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty},Q} \leq \sum_{Q\in\mathcal{I}} \|MG\|_{L^{r,\infty},Q} \lesssim \tilde{a}(B)\,\#\mathcal{I} \lesssim \tilde{a}(B).$$

Obsérvese que (7.32) es trivial si $0 < t \lesssim \tilde{a}(B)$. En caso contrario, procediendo como en la demostración del Teorema 7.1 y utilizando las mismas ideas podemos obtener un resultado análogo a la Proposición 7.9 con $\tilde{a}(B)$ en el lado derecho, el cual está escrito en términos de $\bar{a}$ en lugar de en función de a. De todo esto se sigue (7.11). Ahora, la estimación para I se consigue exactamente igual que en la demostración del Teorema 7.1. Para II, aunque utilizamos las mismas ideas no aplicamos (7.30) (pues esto nos conduciría a obtener $\bar{a}$ antes de utilizar (7.3)). Utilizamos el Lema 7.12, y procediendo como en el Lema 7.8, para cada $Q_i^t \in \Gamma_2$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
(7.33) \qquad \lambda\, t &< \fint_{\sigma\, \hat{B}_{Q_i^t}} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i^t}}} f|\, d\mu \lesssim \sum_{R \in \mathcal{J}(Q_i^t)} \fint_{\tau^{1/m}\, \hat{B}_R} |f - S_{t_{\tau^{1/m}\, \hat{B}_R}} f|\, d\mu \\
&\leq \sum_{R \in \mathcal{J}(Q_i^t)} a(\tau^{1/m}\, \hat{B}_R),
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{J}(Q_i^t) = \mathcal{J}_1(Q_i^t)$. Esto junto con el hecho de que $\#\mathcal{J}(Q_i^t) \leq C$ implica que

$$
II \leq \sum_{\Gamma_2} \mu(\hat{B}_{Q_i^t}) \lesssim \sum_{i : Q_i^t \subset Q} \sum_{R \in \mathcal{J}(Q_i^t)} \left(\frac{a(\tau^{1/m}\, \hat{B}_R)}{\lambda\, t} \right)^r \mu(\tau^{1/m}\, \hat{B}_R).
$$

Como en la demostración del Teorema 7.1, separamos $\{\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}\}_i$ en K familias $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^K$ de bolas disjuntas dos a dos. Para cada Q_i^t, por (7.21) y el Lema 7.11, podemos dividir la familia

$$
I(Q_i^t) = \{\tau^{1/m}\, \hat{B}_R \,:\, R \in \mathcal{J}(Q_i^t)\}
$$

en $\{\mathcal{I}(Q_i^t)_j\}_{j=1}^{J_{Q_i^t}}$ familias de subconjuntos disjuntos dos a dos. Obsérvese que $J_{Q_i^t} \leq c_\mu\, \sigma^{3\,n}\, C_2^n$. Escribimos $J = \max J_{Q_i^t}$ y $\mathcal{I}(Q_i^t)_j = \emptyset$, para cada $J_{Q_i^t} < j \leq J$. De este modo, para cada Q_i^t hemos dividido $I(Q_i^t)$ en J familias disjuntas dos a dos (alguna de ellas podría ser vacía) de modo que en cada familia las bolas son disjuntas dos a dos. Notar que para cada $1 \leq k \leq K$ y $1 \leq j \leq J$ fijados, tenemos que $\{\tau^{1/m}\, \hat{B}_R \,:\, R \in \mathcal{I}(Q_i^t)_j,$ con $Q_i^t \in \mathcal{E}_k\}$ es una familia disjunta (pues así lo es para cada Q_i^t fijo, $\tau^{1/m}\, \hat{B}_R \subset \sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t}$) y también $\{\sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t} \,:\, Q_i^t \in \mathcal{E}_k\}$ es una familia disjunta. Entonces, utilizamos (7.29) y el hecho de que $\tau^{1/m}\, \hat{B}_R \subset \sigma^3\, \hat{B}_{Q_i^t} \subset \sigma^2\, \hat{B}_Q \subset \sigma^3\, B$ y conseguimos la siguiente estimación para II:

$$
\begin{aligned}
II &\lesssim \frac{1}{(\lambda\, t)^r} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} \sum_{\substack{R \in \mathcal{I}(Q_i^t)_j, \\ Q_i^t \in \mathcal{E}_k}} \left(\frac{a(\tau^{1/m}\, \hat{B}_R)}{\lambda\, t} \right)^r \mu(\tau^{1/m}\, \hat{B}_R) \\
&\lesssim \frac{J \cdot K}{(\lambda\, t)^r}\, \bar{a}(\sigma^3\, B)^r\, \mu(\sigma^3\, B) \lesssim \left(\frac{\tilde{a}(B)}{\lambda\, t} \right)^r \mu(Q)
\end{aligned}
$$

De todo lo anterior, obtenemos la desigualdad de tipo buenas-λ (7.32). ∎

7.3. Aplicaciones

En esta sección presentamos algunas aplicaciones de los resultados anteriores. Recordemos que la desigualdad de Kolmogorov implica que para cualquier $0 < q < r < \infty$

se tiene que

$$\|f\|_{L^q,B} \leq \left(\frac{r}{r-q}\right)^{1/q} \|f\|_{L^{r,\infty},B}. \tag{7.34}$$

Esto significa que siempre que podamos aplicar algunos de los resultados anteriores, podremos reemplazar $L^{r,\infty}$ por L^q para cada $0 < q < r < \infty$. Además, como en algunos ejemplos la condición D_r se satisface para cualquier $1 < r < \infty$, automáticamente conseguimos estimaciones de tipo fuerte en el mismo rango. Lo mismo ocurre en el caso con pesos.

Veamos algunos ejemplos generales:

Ejemplo 7.14 (Espacios BMO **y Morrey-Campanato)** Este resultado es el análogo al Ejemplo 3.26 en espacios de tipo homogéneo, en lugar de en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Sea $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5, el espacio de Morrey-Campanato $L_S(\alpha)$ con $\alpha \geq 0$ se define del siguiente modo:

$$L_S(\alpha) = \Big\{f \in \mathcal{M} \,:\, \sup_B \frac{1}{\mu(B)^\alpha} ⨍_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu < \infty\Big\}.$$

Cuando $\alpha = 0$, este espacio coincide con el espacio BMO_S:

$$\mathrm{BMO}_S = \Big\{f \in \mathcal{M} \,:\, \sup_B ⨍_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu < \infty\Big\}.$$

Estos espacios están definidos en [DuY], [DDY] y [Tan] bajo la hipótesis adicional de que $\{S_t\}_{t>0}$ sea un semigrupo.

De este modo, si $f \in L_S(\alpha)$ con $\alpha \geq 0$, para cada bola B, verifica que

$$⨍_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \leq C\, \mu(B)^\alpha.$$

Entonces, tomamos $a(B) = \mu(B)^\alpha$ (intencionadamente olvidamos la constante). Notar que a es creciente ($a(B) \leq a(B')$ para cada $B \subset B'$) y, por lo tanto, $a \in D_r$ para cada $1 < r < \infty$. Además, a es doblante ($a(\sigma B) \leq C_a\, a(B)$ para cada B). Así, del Teorema 7.1 y de la desigualdad de Kolmogorov se sigue la siguiente estimación para cada $1 < r < \infty$ y para toda bola B:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^r,B} \lesssim \mu(B)^\alpha.$$

Esta estimación también se verifica en $L^r(w)$ con $w \in A_\infty(\mu)$.

Por último señalar que en este tipo de ejemplos podemos conseguir mejor automejora en la escala de los espacios de Orlicz. En el siguiente capítulo (Ejemplo 8.4) mostramos que podemos escribir la cuasi-norma $\exp L$ en el lado izquierdo, lo que claramente implica las estimaciones anteriores.

Por otro lado, obtenemos también resultados de automejora para funciones $f \in \mathrm{BMO}_{\varphi,S}(\mu)$. Los espacios $\mathrm{BMO}_{\varphi,S}(\mu)$ generalizan aquellos que fueron definidos por S. Spanne [Spa] en $\mathbb{R}^n$: dada una función φ definida en $(0,\infty)$ la cual es no-decreciente y positiva se define el espacio $\mathrm{BMO}_{\varphi,S}(\mu)$ del siguiente modo

$$\mathrm{BMO}_{\varphi,S}(\mu) = \Big\{ f \in \mathcal{M} : \sup_B \frac{1}{\varphi\big(\mathrm{r}(B)\big)} \fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu < \infty \Big\}.$$

Tomamos $a(B) = \varphi\big(\mathrm{r}(B)\big)$ que es no-decreciente, esto es, $a \in T_\infty$, pues φ es no-decreciente. Así se satisface la condición D_r para todo $r \geq 1$. Aplicando el Teorema 7.1 obtenemos que que cada función $f \in \mathrm{BMO}_{\varphi,S}$ satisface la siguiente estimación para cada $1 < r < \infty$ y para toda bola B:

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma^{2nk}\, g(c\,\sigma^{mk})\, \varphi\big(\sigma^k\ \mathrm{r}(B)\big).$$

Además, si φ es doblante (esto es, $\varphi(\sigma\, t) \lesssim \varphi(t),\ t > 0$) entonces también lo es a, y esto junto con el decaimiento de g implica que

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \lesssim \varphi\big(\mathrm{r}(B)\big).$$

Si en lugar del Teorema 7.1, aplicamos el Teorema 7.2, conseguimos los resultados análogos para pesos A_∞. También se puede escribir $\varphi\big(\mu(B)\big)$ en lugar de $\varphi\big(\mathrm{r}(B)\big)$.

Observación 7.15 Para los siguientes ejemplos asumimos que los anillos no son vacíos (en general, esta condición no tiene que satisfacerse). Esto es, para cada $0 < r < R < \infty$:

$$B(x,R) \setminus B(x,r) \neq \emptyset.$$

Esta propiedad implica que

$$\mathrm{r}(B) \approx \mathrm{diam}(B)$$

y también que si $B_1 \subset B_2$ entonces, $\mathrm{r}(B_1) \lesssim r(B_2)$ y en particular,

$$\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)} \leq c_\mu \left(\frac{\mathrm{r}(B_2)}{\mathrm{r}(B_1)} \right)^n. \tag{7.35}$$

En los ejemplos que escribimos a continuación, podemos reemplazar $\mathrm{r}(B)$ por $\mathrm{diam}(B)$ (lo cual está unívocamente determinado). Sin embargo, mantendremos $\mathrm{r}(B)$ para enfatizar la analogía con el caso euclídeo.

La propiedad de que los anillos no son vacíos también implica que (ver [Whe]) existen $\bar{n} > 0$ y $\bar{c}_\mu > 0$ tales que

$$\frac{\mu(B_1)}{\mu(B_2)} \leq \bar{c}_\mu \left(\frac{\mathrm{r}(B_1)}{\mathrm{r}(B_2)}\right)^{\bar{n}}, \tag{7.36}$$

para toda bola B_1 y B_2 con $B_1 \subset B_2$.

Ejemplo 7.16 (Medias fraccionarias) Este resultado generaliza el Ejemplo 3.27 a espacios de tipo homogéneo. Dados $\lambda \geq 1$, $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$ y un peso u, definimos:

$$a(B) = \mathrm{r}(B)^\alpha \left(\frac{u(\lambda B)}{\mu(B)}\right)^{1/p}.$$

En [FPW], los autores comprueban que $a \in D_r$ para $1 < r < pn/(n - \alpha p)$. Así, aplicando el Teorema 7.1, si $f \in \mathcal{M}$ y, para toda bola B, verifica:

$$⨍_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \lesssim \mathrm{r}(B)^\alpha \left(\frac{u(\lambda B)}{\mu(B)}\right)^{1/p}.$$

Entonces, para cada B y cada $1 < r < pn/(n - \alpha p)$, también satisface:

$$\left(⨍_B |f - S_{t_B} f|^r \, dx\right)^{1/r} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma^{2nk} g(c\,\sigma^{mk}) \, \mathrm{r}(\sigma^k B)^\alpha \left(\frac{u(\sigma^k \lambda B)}{\mu(\sigma^k B)}\right)^{1/p},$$

Si $u \in A_\infty(\mu)$ en [FPW] se muestra que $a \in D_{\frac{pn}{n-\alpha p}+\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$ dependiendo de la constante $A_\infty(\mu)$ del peso u. En este caso u es doblante y, por lo tanto, también lo es a (para simplificar tomamos $\lambda = 1$). Consecuentemente, el Teorema 7.1 asegura un control de la oscilación generalizada en $L^{\frac{pn}{n-\alpha p}+\epsilon,\infty}$. Esto junto con la desigualdad de Kolmogorov, implica:

$$\left(⨍_B |f - S_{t_B} f|^{\frac{pn}{n-\alpha p}} \, d\mu\right)^{\frac{n-\alpha p}{pn}} \lesssim \mathrm{r}(B)^\alpha \left(\frac{u(B)}{\mu(B)}\right)^{1/p}.$$

Obsérvese que si $p \geq n/\alpha$, (6.2) implica que el funcional a es creciente. Por lo tanto, $a \in D_r \cap D_r(w)$, para cada $r \geq 1$ y $w \in A_\infty(\mu)$. Así, el Teorema 7.1 junto con la desigualdad de Kolmogorov proporcionan automejoras en el rango $1 \leq r < \infty$ para $L^r(\mu)$ y $L^r(w)$ con $w \in A_\infty(\mu)$.

Mostramos un caso particular. Sea X un operador diferencial tal que para alguna función $f \in \mathcal{M}$ y toda bola B:

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \lesssim \mathrm{r}(B)^\alpha \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_{\lambda B} |X f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \tag{7.37}$$

con $\lambda \geq 1$, $0 < \alpha < n$ y $1 \leq p < n/\alpha$. Entonces, también verifica la siguiente automejora para cada $1 < r < p\,n/(n - \alpha\, p)$ y para toda bola B:

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma^{2\,n\,k} \, g(c\,\sigma^{m\,k}) \; \mathrm{r}(\sigma^k B)^\alpha \left(\frac{1}{\mu(\sigma^k B)} \int_{\lambda\,\sigma^k B} |X f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si además, $|X f|^p \in A_\infty(\mu)$ entonces,

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^{\frac{p\,n}{n - \alpha\,p}} \, d\mu \right)^{\frac{n - \alpha\,p}{p\,n}} \lesssim \mathrm{r}(B)^\alpha \left(\fint_B |X f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

7.3.1. Desigualdades de tipo Poincaré reducidas

En primer lugar recordemos cuales son para nosotros las desigualdades de tipo Poincaré reducidas en este contexto: $f \in \mathcal{M}$ tal que

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq \mathrm{r}(B) \fint_B h \, d\mu, \tag{7.38}$$

para toda bola B y h una función medible no-negativa. Generalmente h depende de f (por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ uno puede tomar $h = C\,|\nabla f|$) aunque, podemos trabajar con cualquier función dada h. Estas estimaciones son denominadas de tipo Poincaré por su semejanza a la desigualdad clásica de Poincaré-$(1,1)$ y usamos el adjetivo reducidas en contraposición con las estimaciones expandidas (7.52) que estudiaremos en la Sección 7.3.3.

En esta sección estudiamos los resultados de la Sección 3.3.1 en espacios de tipo homogéneo y bajo la suposición de la Observación 7.15. Obsérvese que (7.38) es una estimación análoga a la estudiada en la Sección 3.3.1. Sin embargo, en este contexto, es más natural relajar (7.38) y tomar como punto de partida: $f \in \mathcal{M}$ tal que

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \leq \mathrm{r}(B) \left(\fint_B h^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{7.39}$$

con $1 \leq p < \infty$. Asumiendo que esta desigualdad se verifica, vamos a aplicar nuestros resultados para obtener automejora en la integrabilidad del lado izquierdo de (7.39).

Ejemplo 7.17 (Desigualdad de Poincaré-Sobolev) Dados $1 \leq p < n$ y $p^* = \frac{np}{n-p}$. Veamos que (7.39) implica

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{p^*,\infty},B} \leq \sum_{k\geq 0} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{7.40}$$

para toda bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\geq 0}$. Además, (7.40) y la desigualdad de Kolmogorov implican que para cada $1 < r < p^*$,

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B} f|^r \, d\mu \right)^{1/r} \leq \sum_{k\geq 0} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{7.41}$$

para toda bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\geq 0}$.

Para mostrar (7.40) seguimos los argumentos mostrados en el Ejemplo 3.28. Primero definimos el funcional

$$a(B) = \mathrm{r}(B) \left(\fint_B h^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{7.42}$$

Si $1 \leq p < n$, $a \in D_{p^*}(\mu)$: dada una bola B y $\{B_i\}_i$ una familia de bolas contenidas en B y disjuntas dos a dos, utilizando (6.2) y el hecho de que $p^*/p \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_i a(B_i)^{p^*} \mu(B_i) &= \sum_i \left(\frac{\mu(B)}{\mu(B_i)} \right)^{\frac{p^*}{p}-1} \left(\frac{\mathrm{r}(B_i)}{\mathrm{r}(B)} \right)^{p^*} \left(\int_{B_i} h^p \, d\mu \right)^{\frac{p^*}{p}} \frac{\mathrm{r}(B)^{p^*}}{\mu(B)^{\frac{p^*}{p}-1}} \\
&\leq c_\mu \sum_i \left(\int_{B_i} h^p \, d\mu \right)^{\frac{p^*}{p}} \frac{\mathrm{r}(B)^{p^*}}{\mu(B)^{\frac{p^*}{p}-1}} \\
&\leq c_\mu \left(\sum_i \int_{B_i} h^p \, d\mu \right)^{\frac{p^*}{p}} \frac{\mathrm{r}(B)^{p^*}}{\mu(B)^{\frac{p^*}{p}-1}} \\
&\leq c_\mu \left(\int_B h^p \, d\mu \right)^{\frac{p^*}{p}} \frac{\mathrm{r}(B)^{p^*}}{\mu(B)^{\frac{p^*}{p}-1}} \\
&= c_\mu \, a(B)^{p^*} \mu(B).
\end{aligned}$$

Entonces, podemos aplicar el Teorema 7.1 y así conseguimos (7.40).

Si $p \geq n$, $a \in D_r(\mu)$ para cada $1 \leq r < \infty$ (pues a es creciente). Por lo tanto, (7.41) se verifica para cada $1 < r < \infty$. Este caso es estudiado en el siguiente capítulo, donde obtenemos una automejora de tipo exponencial.

Ejemplo 7.18 (Desigualdad de Poincaré-Sobolev para pesos $A_1(\mu)$) Dados $w \in A_1(\mu)$ y $1 \le p < n$, (7.39) implica la siguiente desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev con pesos para cada bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\ge 0}$:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{p^*,\infty}(w),B} \le \sum_{k\ge 0} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p\, dw \right)^{1/p}. \tag{7.43}$$

Como consecuencia de la estimación anterior y la versión con peso de la desigualdad de Kolmogorov, para cada $1 < r < p^*$, conseguimos:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r}(w),B} \le \sum_{k\ge 0} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p\, dw \right)^{1/p}.$$

Para mostrar (7.43) utilizamos el Teorema 7.2. Primero, utilizando que $w \in A_1(\mu)$, tenemos que (7.39) implica que

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \lesssim \mathrm{r}(B) \left(\fint_B h^p\, dw \right)^{1/p} = a(B).$$

Por otro lado, dada una bola B y una familia $\{B_i\}_i \subset B$ de bolas disjuntas dos a dos. Notar que (6.2) y $w \in A_1(\mu)$ implican $w(B)/w(B_i) \lesssim \big(\mathrm{r}(B)/\,\mathrm{r}(B_i)\big)^n$. Utilizando esta observación junto con que $p^* > p$, tenemos que $a \in D_{p^*}(w)$:

$$\begin{aligned} \sum_i a(B_i)^{p^*}\, w(B_i) &= \sum_i \mathrm{r}(B_i)^{p^*}\, w(B_i)^{1-p^*/p} \left(\int_{B_i} h^p\, dw \right)^{p^*/p} \\ &\lesssim \mathrm{r}(B)^{p^*}\, w(B)^{1-p^*/p} \sum_i \left(\int_{B_i} h^p\, dw \right)^{p^*/p} \le a(B)^{p^*}\, w(B). \end{aligned}$$

Por otro lado, $w \in A_1(\mu) \subset A_{p^*}(\mu)$ y, por lo tanto, $a \in D_1$ (ver la Observación 7.4). Así, aplicando el Teorema 7.2, conseguimos (7.43).

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, cuando $p \ge n$, obtenemos automejora de tipo $L^r(w)$ en todo el rango $1 < r < \infty$ (pues el funcional es creciente). En el siguiente capítulo conseguiremos mejorar este resultado, obteniendo una automejora de tipo exponencial.

Ejemplo 7.19 (Desigualdad de Poincaré-Sobolev para pesos $A_r(\mu)$, $r > 1$) La desigualdad (7.39), con $1 \le p < n$, implica que para cada $r > 1$ y $w \in A_r(\mu)$, existe

$q > r\,p^*$ (dependiendo de p, n, w) tal que se verifica la siguiente estimación para cada bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\geq 0}$:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^q(w),B} \leq \sum_{k\geq 0} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B)\bigg(\fint_{\sigma^k B} h^{r\,p}\, dw\bigg)^{\frac{1}{r\,p}}. \tag{7.44}$$

Para comprobar esta afirmación, primero observamos que (7.39) y $w \in A_r(\mu)$ implican que

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \lesssim \mathrm{r}(B)\bigg(\fint_B h^{r\,p}\, dw\bigg)^{\frac{1}{r\,p}} = a(B).$$

Por otro lado, la propiedad de apertura de las clases $A_r(\mu)$ implica que $w \in A_{\tau\,r}(\mu)$, para algún $0 < \tau < 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir τ de modo que $p/n < \tau < 1$. Así, para cualquier bola B y cualquier conjunto medible $E \subset B$, tenemos

$$\frac{w(B)}{w(E)} \lesssim \bigg(\frac{\mu(B)}{\mu(E)}\bigg)^{\tau\,r}.$$

Utilizando esta desigualdad, obtenemos que $a \in D_{q_0}(w)$, donde $q_0 = r\,\frac{n\,p}{n-\frac{p}{\tau}} > r\,p^*$: dada una bola B y una familia $\{B_i\}_i \subset B$ de bolas disjuntas dos a dos,

$$\begin{aligned}
\sum_i a(B_i)^{q_0}\, w(B_i) &= \sum_i \bigg(\frac{\mathrm{r}(B_i)}{\mathrm{r}(B)}\bigg)^{q_0} \bigg(\frac{w(B)}{w(B_i)}\bigg)^{\frac{q_0}{r\,p}-1} \bigg(\int_{B_i} h^{r\,p}\, dw\bigg)^{\frac{q_0}{r\,p}} \mathrm{r}(B)^{q_0}\, w(B)^{1-\frac{q_0}{r\,p}} \\
&\lesssim \sum_i \bigg(\int_{B_i} h^{r\,p}\, dw\bigg)^{\frac{q_0}{r\,p}} \mathrm{r}(B)^{q_0}\, w(B)^{1-\frac{q_0}{r\,p}} \\
&\leq \bigg(\int_B h^{r\,p}\, dw\bigg)^{\frac{q_0}{r\,p}} \mathrm{r}(B)^{q_0}\, w(B)^{1-\frac{q_0}{r\,p}} \\
&= a(B)^{q_0}\, w(B).
\end{aligned}$$

Así, aplicando el Teorema 7.2 y la Observación 7.4 (pues $q_0 > r$), conseguimos una estimación en $L^{q_0,\infty}(w)$, y por la desigualdad de Kolmogorov, se sigue (7.44) con $r\,p^* < q < q_0$.

Ejemplo 7.20 (Desigualdad de Poincaré con dos pesos) Sean $1 \leq p \leq q \leq r < \infty$ y (w, v) un par de pesos con $w \in A_r(\mu)$, $v \in A_{q/p}(\mu)$ y verificando la siguiente condición de "balance"

$$\frac{\mathrm{r}\,(B_1)}{\mathrm{r}\,(B_2)} \bigg(\frac{w(B_1)}{w(B_2)}\bigg)^{1/r} \lesssim \bigg(\frac{v(B_1)}{v(B_2)}\bigg)^{1/q}, \tag{7.45}$$

para toda B_1 y B_2 con $B_1 \subset B_2$. Bajo tales condiciones, (7.39) implica

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{r,\infty}(w),B} \leq \sum_{k\geq 0} \phi(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^q \, dv \right)^{1/q}, \tag{7.46}$$

para toda bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\geq 0}$. Como consecuencia, por la desigualdad de Kolmogorov, automáticamente se verifican estimaciones de tipo fuerte en el rango $1 < s < r$.

Para obtener (7.46), primero definimos el funcional a utilizando (7.39) y que $v \in A_{q/p}(\mu)$,

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \lesssim \mathrm{r}(B) \left(\fint_B h^q \, dv \right)^{1/q} = a(B).$$

Utilizando la condición de "balance" junto con que $r/q \geq 1$, vemos que $a \in D_r(w)$: dada una bola B y una familia $\{B_i\}_i \subset B$ de bolas disjuntas dos a dos,

$$\begin{aligned}
&\sum_i a(B_i)^r \, w(B_i) \\
&\quad = \sum_i \left(\frac{\mathrm{r}(B_i)}{\mathrm{r}(B)} \right)^r \left(\frac{v(B)}{v(B_i)} \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{B_i} h^q \, dv \right)^{\frac{r}{q}} \mathrm{r}(B)^r \left(\frac{1}{v(B)} \right)^{\frac{r}{q}} \frac{w(B_i)}{w(B)} \, w(B) \\
&\quad \lesssim \sum_i \left(\int_{B_i} h^q \, dv \right)^{\frac{r}{q}} \mathrm{r}(B)^r \, \frac{1}{v(B)^{\frac{r}{q}}} \, w(B) \\
&\quad \leq a(B)^r \, w(B).
\end{aligned}$$

Así, aplicando la Observación 7.4 y el Teorema 7.2, conseguimos la desigualdad deseada.

Ejemplo 7.21 (Desigualdad de Hardy generalizada) Sea $1 < p < \bar{n}$, donde $\bar{n}$ es el exponente dado en (7.36). Fijamos $x_0 \in X$ y definimos el peso $w_{x_0}(x) = d(x, x_0)^{-p}$. Veamos que de (7.39) se sigue

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{p,\infty}(w_{x_0}),B} \leq \sum_{k\geq 0} \phi(k) \left(\frac{1}{w_{x_0}(\sigma^k B)} \int_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{7.47}$$

para toda bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k\geq 0}$. Notar que (7.47) implica que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \, w_{x_0}\{x \in B : |f(x) - S_{t_B} f(x)| > \lambda\}^{1/p} \leq \sum_{k\geq 0} \tilde{\phi}(k) \left(\int_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Como consecuencia de la desigualdad de Kolmogorov, automáticamente obtenemos estimaciones de tipo fuerte en el rango $1 < r < p$.

Para obtener (7.47), es fácil ver que para cada bola $B = B(x_B, \mathrm{r}(B))$:

$$\fint_B d(x,x_0)^\alpha \, d\mu(x) \approx d(x_0,x_B)^\alpha, \qquad x_0 \notin 2\,D_0\,B, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.48}$$

y usando (7.36) que

$$\fint_B d(x,x_0)^\alpha \, d\mu(x) \approx \mathrm{r}(B)^\alpha, \qquad x_0 \in 2\,D_0\,B, \quad -\bar{n} < \alpha \leq 0. \tag{7.49}$$

De estas estimaciones se sigue que $w_{x_0} \in A_1(\mu)$ y $\mathrm{r}(B)\,(w_{x_0}(B)/\mu(B))^{1/p} \lesssim 1$. En particular, (7.39) implica

$$\fint_B |f - S_{t_B} f| \, d\mu \lesssim \left(\frac{1}{w_{x_0}(B)} \int_B h^p \, d\mu \right)^{1/p} = a(B) \in D_p(w_{x_0}) \cap D_1(\mu). \tag{7.50}$$

Así, el Teorema 7.2 asegura la estimación (7.47).

Ejemplo 7.22 (Desigualdad de Hardy generalizada con dos pesos) Sean $1 < p < \bar{n}$ y $0 \leq q \leq p$. Fijamos $x_0 \in X$ y definimos $w_{x_0}(x) = d(x,x_0)^{-p}$ y $\bar{w}_{x_0}(x) = d(x,x_0)^{-q}$. Veamos que (7.39) implica

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^{p,\infty}(\bar{w}_{x_0}),B} \leq \sum_{k \geq 0} \phi(k) \left(\frac{1}{w_{x_0}(\sigma^k\,B)} \int_{\sigma^k\,B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{7.51}$$

para toda bola B y para alguna sucesión $\{\phi(k)\}_{k \geq 0}$. Como consecuencia de la versión con peso de la desigualdad de Kolmogorov, obtenemos automáticamente estimaciones en $L^r(\bar{w}_{x_0})$ para cada $1 \leq r < p$.

Para mostrar (7.51), tomamos el funcional del ejemplo anterior:

$$a(B) = \left(\frac{1}{w_{x_0}(B)} \int_B h^p \, d\mu \right)^{1/p} \in D_p(w_{x_0}) \cap D_1.$$

Por otro lado, utilizando (7.48) y (7.49), obtenemos que $\bar{w}_{x_0} \in A_1(\mu)$ y la siguiente condición de "balance":

$$\frac{\bar{w}_{x_0}(B_1)}{\bar{w}_{x_0}(B_2)} \, \frac{w_{x_0}(B_2)}{w_{x_0}(B_1)} \lesssim 1, \qquad \forall B_1 \subset B_2.$$

La cual implica que $a \in D_p(\bar{w}_{x_0})$. Así, del Teorema 7.2 se sigue que (7.51).

7.3.2. Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales reducidas

Como consecuencia de nuestros resultados y argumentando como en la Sección 3.3.2, obtenemos las siguientes desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales. Este tipo de desigualdades son interesantes para obtener resultados de interpolación y desigualdades de Gagliardo-Nirenberg (ver [SC4], [BCLS], [Led], [MM]).

Supongamos que $f \in \mathcal{M}$ y verifica (7.39) con $1 \leq p < n$. Entonces, las siguientes desigualdades también se verifican para todo $t > 0$:

(1) **Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales:**

$$\|f - S_t f\|_{L^p(X)} \lesssim t^{\frac{1}{m}} \|h\|_{L^p(X)}.$$

(2) **Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales con pesos:** Para cada $w \in A_r(\mu)$, $1 \leq r < \infty$

$$\|f - S_t f\|_{L^{p\,r}(w)} \lesssim t^{\frac{1}{m}} \|h\|_{L^{p\,r}(w)}.$$

(3) **Desigualdades de tipo pseudo-Hardy:** Sean $1 < p < \bar{n}$ y $w_{x_0}(x) = d(x, x_0)^{-p}$ con $x_0 \in X$ fijo,

$$\|f - S_t f\|_{L^{p,\infty}(w_{x_0})} \lesssim \|h\|_{L^p(X)}.$$

Demostración de (1) Fijamos $t > 0$ y tomamos $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$C_1\, \sigma^{k_0} \leq t^{1/m} < C_1\, \sigma^{k_0+1}.$$

Escribimos, salvo conjuntos de medida nula,

$$X = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}_{k_0}} Q.$$

Notar que para cada $Q \in \mathcal{D}_{k_0}$, existe τ con $1 \leq \tau < \sigma^m$ tal que $t = \tau\, t_{\hat{B}_Q}$.

Del mismo modo que en el Lema 7.12, fijamos $Q_0 \in \mathcal{D}_{k_0}$ y consideramos la familia

$$\mathcal{J}_k = \{Q \in \mathcal{D}_{k_0} : \sigma^{k+1}\, \hat{B}_Q \cap \sigma^{k+1}\, \hat{B}_{Q_0} \neq \emptyset\}.$$

Se puede ver que si $Q \in \mathcal{J}_k$ entonces,

$$Q \subset \sigma^{k+2}\, \hat{B}_{Q_0} \subset \sigma^{k+3}\, \hat{B}_Q.$$

Esta observación junto con el hecho de que μ es doblante implican que

$$\#\mathcal{J}_k \leq c_\mu\, C_2^n\, \sigma^{n\,(k+3)}.$$

Por otro lado, el Ejemplo 7.17 proporciona (7.41) con $r = p$. Entonces, la desigualdad de Minkowski y el Lema 7.11 implican

$$
\begin{aligned}
\|f - S_t f\|_{L^p(X)} &= \Big(\sum_{Q \in \mathcal{D}_{k_0}} \int_Q |f - S_t f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\sum_{Q \in \mathcal{D}_{k_0}} \int_{\tau^{\frac{1}{m}} \hat{B}_Q} |f - S_{\tau \, t_{\hat{B}_Q}} f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \Big(\sum_{Q \in \mathcal{D}_{k_0}} \mu(\tau^{\frac{1}{m}} \hat{B}_Q) \Big(\sum_{k \geq 0} \phi(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k \, \tau^{\frac{1}{m}} \hat{B}_Q) \Big(\fint_{\sigma^k \, \tau^{\frac{1}{m}} \hat{B}_Q} h^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq t^{\frac{1}{m}} \sum_{k \geq 0} \phi(k) \, \sigma^{k\,(1 - \frac{\bar{n}}{p})} \Big(\sum_{Q \in \mathcal{D}_{k_0}} \int_{\sigma^{k+1} \hat{B}_Q} h^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim t^{\frac{1}{m}} \sum_{k \geq 0} \phi(k) \, \sigma^{k\,(1 + \frac{n}{p} - \frac{\bar{n}}{p})} \Big(\int_X h^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim t^{\frac{1}{m}} \, \|h\|_{L^p(X)}.
\end{aligned}
$$

Hemos utilizado que $\{\phi(k)\}_{k \geq 0}$ (dada en el Teorema 7.1) es una sucesión con decaimiento rápido (debido al decaimiento de g).

Demostración de (2) En el caso con peso $w \in A_r(\mu)$, utilizamos el Ejemplo 7.18 para $r = 1$ y el Ejemplo 3.30 para $r > 1$. Si $r \geq 1$, $r\,p^* > r\,p$, y por lo tanto, podemos escribir:

$$
\Big(\fint_B |f - S_{t_B} f|^{r\,p} \, dw \Big)^{\frac{1}{r\,p}} \leq \sum_{k \geq 0} \phi(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \Big(\fint_{\sigma^k B} h^{r\,p} \, dw \Big)^{\frac{1}{r\,p}}.
$$

Procediendo como antes y utilizando que la medida $w\,d\mu$ es doblante, obtenemos la desigualdad deseada.

Demostración de (3) Para las desigualdades de tipo pseudo-Hardy, utilizamos las mismas ideas con la norma de tipo débil en el lado izquierdo.

7.3.3. Desigualdades de tipo Poincaré expandidas

Dados $1 \leq p, q < \infty$, decimos que $f \in \mathcal{M}$ satisface una desigualdad de Poincaré $L^q - L^p$ expandida, si verifica la siguiente estimación

$$
\Big(\fint_B |f - S_{t_B} f|^q \, d\mu \Big)^{1/q} \leq \sum_{k \geq 0} \alpha(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \Big(\fint_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \Big)^{1/p},
$$

para cada bola $B \subset X$ y para alguna sucesión de números no-negativos $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ y h alguna función medible no-negativa.

En esta sección mostramos que una desigualdad de Poincaré $L^1 - L^p$ expandida implica una desigualdad de Poincaré $L^q - L^p$ expandida para q en el rango $1 < q < p^*$. Siendo más precisos, nuestro punto de partida es el siguiente: sea $p \geq 1$ y $f \in \mathcal{M}$ tal que

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} h^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{7.52}$$

para cada bola $B \subset X$ y $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ alguna una sucesión de números no-negativos y h una función medible no-negativa. Del mismo modo que observábamos en el caso euclídeo, pensamos que las estimaciones (7.52) son más naturales que (7.38) o (7.39), en el sentido de que éstas tienen en cuenta los efectos de cola del semigrupo, en lugar de estudiar sólo lo que ocurre en el término local.

En la situación clásica, reemplazando $S_{t_B} f$ por f_B y tomando $h = C\,|\nabla f|$ y $\alpha(k) = 0$ para $k \geq 1$, esta desigualdad no es más que la desigualdad de Poincaré-Sobolev $L^1 - L^p$. Observemos también que si $\alpha(k) = 0$ para $k \geq 1$, volvemos a (7.38) en la sección anterior. Por otro lado, si h^p es doblante y $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ decae suficientemente rápido, entonces (7.52) nos conduce de nuevo a (7.39). También si $S_t 1 \equiv 1$ en casi todo X y para todo $t > 0$, y se tiene la desigualdad clásica de Poincaré-Sobolev $L^1 - L^p$

$$\fint_B |f - f_B|\, d\mu \leq C\, \mathrm{r}(B) \left(\fint_B |Df|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

para algún operador (diferencial) D, se puede mostrar que se cumple (7.52) con $h = |Df|$.

Por otro lado, como veremos en la Sección 7.3.4, bajo ciertas condiciones en la variedad de Riemann, podemos obtener (7.52) sin ningún tipo de desigualdad de Poincaré-Sobolev como punto de partida. De este modo, nuestros resultados son aplicables a situaciones donde tales estimaciones no se esperan o no son conocidas.

Comenzando con (7.52) vamos a aplicar nuestros resultados principales para obtener automejora en la integrabilidad del lado izquierdo de la desigualdad de Poincaré-Sobolev, de modo análogo a como hicimos en la Sección 3.3.3 en el caso del espacio euclídeo. Por simplicidad, sólo generalizamos el Ejemplo 7.17 (el caso sin peso). Aunque podemos utilizar las mismas ideas para estudiar el Ejemplo 7.18 y obtener (7.43) con $L^r(w)$ para $1 < r < p^*$, en lugar de $L^{p^*,\infty}(w)$ (aquí podemos mostrar que $a \in D_{p^*-\epsilon}(w)$); o el Ejemplo 7.19 y obtener (7.44) para algún $q > \frac{n\,r\,p}{n-p}$ (aquí podemos mostrar que $a \in D_{q_0-\epsilon}(w)$ y esto nos permite elegir tal valor de q); o el Ejemplo 7.20 para el cual podemos mostrar (7.46) con $L^s(w)$, $1 < s < r$ (en lugar de $L^{r,\infty}(w)$) si además suponemos que $1 \leq p \leq q < r$ (aquí se puede mostrar que $a \in D_{r-\epsilon}(w)$).

Procedemos como en la Sección 3.3.3. Fijamos $1 \leq p < n$ y definimos

$$a(B) = \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, a_0(\sigma^k B) \qquad \text{con} \qquad a_0(B) = \mathrm{r}(B)\Big(\fint_B h^p\, d\mu\Big)^{1/p}. \tag{7.53}$$

En la siguiente proposición encontramos otro funcional $\bar{a}$, con una expresión similar, de modo que $(a, \bar{a})$ satisfaga una condición de tipo D_q (la definición de esta condición se encuentra en el Teorema 7.5):

Proposición 7.23 *Sean $1 \leq p < n$, $1 < q < p^*$ y a dado por* (7.53). *Existe una sucesión de números no-negativos $\{\bar{\alpha}(k)\}_{k\geq 0}$ de modo que si tomamos*

$$\bar{a}(B) = \sum_{k\geq 0} \bar{\alpha}(k)\, a_0(\sigma^k B),$$

entonces $(a, \bar{a}) \in D_q$.

En la demostración de este resultado (escrita al final de esta sección) podemos ver que

$$\bar{\alpha}(l) = \begin{cases} C\,\alpha(0), & \text{si } k = 0, \\ C\,\sigma^{\frac{l\,\tilde{n}}{\tilde{q}}} \displaystyle\sum_{k\geq \max\{l-2,1\}} \sigma^{k\,(\frac{n}{p} - \frac{\tilde{n}}{\tilde{q}})}\,\alpha(k), & \text{si } l \geq 1 \ \text{ con } \tilde{q} = \max\{q, p\}. \end{cases}$$

Este resultado, el Teorema 7.5 y la desigualdad de Kolmogorov nos conducen al siguiente corolario:

Corolario 7.24 *Dado $1 \leq p < n$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica* (7.52), *entonces, para cada $1 < q < p^*$ existe otra sucesión de números no-negativos $\{\tilde{\alpha}(k)\}_{k\geq 0}$ de modo que para cada bola B:*

$$\Big(\fint_B |f - S_{t_B} f|^q\, d\mu\Big)^{1/q} \leq \sum_{k\geq 0} \tilde{\alpha}(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k B)\Big(\fint_{\sigma^k B} h^p\, d\mu\Big)^{1/p},$$

donde $\tilde{\alpha}(k) = C \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \sigma^{2\,n\,j}\, g(c\,\sigma^{m\,j})\,\bar{\alpha}(k-j)$, para todo $k \geq 0$.

Observación 7.25 Si $p \geq n$, el funcional a definido por (7.53) es creciente. Así, la estimación previa se satisface para todo $1 < q < \infty$ (con una sucesión $\tilde{\alpha}$ definida como antes con $\bar{\alpha} = \alpha$).

Observación 7.26 Si $1 \leq p < \infty$, el Corolario 7.24 y la Observación 7.25 (ambos particularizados a $q = p$), implican que $f \in \mathcal{M}$ satisface una desigualdad de tipo Poincaré $L^1 - L^p$ expandida ((7.52) con una sucesión que decae rápidamente) si y sólo si $f \in \mathcal{M}$ satisface una desigualdad de tipo Poincaré $L^p - L^p$ expandida. Obsérvese también que una desigualdad de tipo Poincaré $L^1 - L^p$ expandida implica trivialmente una desigualdad de tipo Poincaré $L^1 - L^q$ (equivalentemente $L^q - L^q$) expandida, para cada $q \geq p$.

Observación 7.27 (Desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales) Como consecuencia de la Observación 7.26, tomando como punto de partida (7.52) y repitiendo los argumentos de la Sección 7.3.2, obtenemos desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales: para todo $q \geq p$ y todo $t > 0$

$$\|f - S_t f\|_{L^q(X)} \lesssim t^{1/m} \, \|h\|_{L^q(X)}.$$

Observación 7.28 (Escala de Orlicz) También podemos considerar desigualdades de Poincaré generalizadas en la escala p^* (como hicimos en la Sección 3.3.4). Más concretamente, podemos afinar el exponente q hacia p^* y obtener una estimación en el espacio de Marcinkiewicz asociado a $\varphi(t) \approx t^{1/p^*} (1 + \log^+ 1/t)^{-(1+\epsilon)/p^*}$, $\epsilon > 0$. Recordemos que φ es la función fundamental del espacio de Orlicz $L^{p^*} (\log L)^{-(1+\epsilon)}$, y que el espacio de Marcinkiewicz es $\mathbb{M}_\varphi$, el correspondiente espacio de tipo débil (como $L^{q,\infty}$ lo es para L^q).

Demostración de la Proposición 7.23 Adaptamos los argumentos de la demostración de la Proposición 3.37 a nuestro contexto. Fijamos q tal que $1 < q < p^*$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $p \leq q < p^*$, pues la desigualdad de Hölder implica que las condiciones D_q son decrecientes.

Fijamos una bola B y una familia $\{B_i\}_i \subset B$ de bolas disjuntas dos a dos. La desigualdad de Minkowski y el hecho de que $q \geq p$ implican que

$$\begin{aligned} \text{(7.54)} \qquad \Big(\sum_i a(B_i)^q \, \mu(B_i)\Big)^{1/q} &\leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k) \Big(\sum_i a_0(\sigma^k B_i)^q \, \mu(B_i)\Big)^{1/q} \\ &\leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k) \Big(\sum_i \frac{\mathrm{r}(\sigma^k B_i)^p \, \mu(B_i)^{p/q}}{\mu(\sigma^k B_i)} \int_{\sigma^k B_i} h^p \, d\mu\Big)^{1/p}. \end{aligned}$$

Estimamos la suma interna del siguiente modo: si $k = 0$ utilizamos que $p \leq q < p^*$, (7.35) y que las bolas $B_i \subset B$ son disjuntas dos a dos y obtenemos que

$$\sum_i \frac{\mathrm{r}(B_i)^p \, \mu(B_i)^{p/q}}{\mu(B_i)} \int_{B_i} h^p \, d\mu \lesssim \frac{\mathrm{r}(B)^p}{\mu(B)^{1-p/q}} \int_B h^p \, d\mu = \mu(B)^{p/q} \, a_0(B)^p.$$

Si $k \geq 1$, necesitamos el siguiente resultado que, ordenando las bolas según el tamaño del radio, estima el solapamiento de las bolas de la familia $\{\sigma^k B_i\}_{k>0}$:

Lema 7.29 *Dados $k \geq 1$, B una bola y $\{B_i\}_i$ una familia de bolas contenidas en B, disjuntas dos a dos con $\sigma^{-l}\,\mathrm{r}(B) < \mathrm{r}(B_i) \leq \sigma^{-l+1}\,\mathrm{r}(B)$, para algún $l \geq 0$ fijo. Se tiene que para cada $\sigma^k B_i$ existen a lo más $c_\mu \min\{\sigma^{n\,(k+4)}, \sigma^{n\,l}\}$ bolas B_j de modo que $\sigma^k B_i \cap \sigma^k B_j \neq \emptyset$. Además, $\sigma^k B_i \subset \sigma^{k-l+2} B$, cuando $0 \leq l \leq k+1$, y $\sigma^k B_i \subset \sigma B$, si $l \geq k+2$.*

Así, primero ordenamos las bolas según el tamaño de sus radios. Para cada $l \geq 1$, escribimos

$$\mathcal{E}_l = \{B_i \,:\, \sigma^{-l}\,\mathrm{r}(B) < \mathrm{r}(B_i) \leq \sigma^{-l+1}\,\mathrm{r}(B)\}$$

y de este modo:

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{\mathrm{r}(\sigma^k B_i)^p\,\mu(B_i)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma^k B_i)} \int_{\sigma^k B_i} h^p\,d\mu &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{B_i \in \mathcal{E}_l} \frac{\mathrm{r}(\sigma^k B_i)^p\,\mu(B_i)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma^k B_i)} \int_{\sigma^k B_i} h^p\,d\mu \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} \cdots + \sum_{l=k+2}^{\infty} \cdots = \Sigma_1 + \Sigma_2.
\end{aligned}$$

Estimamos Σ_1: utilizando el resultado anterior, (7.35), (7.36) y el Lema 7.11 tenemos

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{l=0}^{k+1} \frac{\mathrm{r}(\sigma^{k-l+2} B)^p\,\mu(B)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma^{k-l+2} B)} \sum_{B_i \in \mathcal{E}_l} \left(\frac{\mathrm{r}(\sigma^k B_i)}{\mathrm{r}(\sigma^{k-l+2} B)}\right)^p \left(\frac{\mu(B_i)}{\mu(B)}\right)^{\frac{p}{q}} \frac{\mu(\sigma^{k-l+2} B)}{\mu(\sigma^k B_i)} \int_{\sigma^k B_i} h^p\,d\mu \\
&\lesssim \sum_{l=0}^{k+1} \frac{\mathrm{r}(\sigma^{k-l+2} B)^p\,\mu(B)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma^{k-l+2} B)}\,\sigma^{-l\,\frac{\bar{n}\,p}{q}} \sum_{B_i \in \mathcal{E}_l} \int_{\sigma^k B_i} h^p\,d\mu \\
&\lesssim \sum_{l=0}^{k+1} \frac{\mathrm{r}(\sigma^{k-l+2} B)^p\,\mu(B)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma^{k-l+2} B)}\,\sigma^{-l\,\frac{\bar{n}\,p}{q}}\,\sigma^{n\,k} \int_{\sigma^{k-l+2} B} h^p\,d\mu \\
&= \mu(B)^{\frac{p}{q}}\,\sigma^{n\,k} \sum_{l=0}^{k+1} \sigma^{-l\,\frac{\bar{n}\,p}{q}}\,a_0(\sigma^{k-l+2} B)^p \\
&= \mu(B)^{\frac{p}{q}}\,\sigma^{k\,(n-\frac{\bar{n}\,p}{q})} \sum_{l=1}^{k+2} \sigma^{-l\,\frac{\bar{n}\,p}{q}}\,a_0(\sigma^l B)^p.
\end{aligned}$$

Por otro lado, el Lema 7.29, (7.35), (7.36), el Lema 7.11 y el hecho de que $p \leq q < p^*$ implican que

$$\Sigma_2 = \frac{\mathrm{r}(\sigma B)^p\,\mu(B)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma B)} \sum_{l=k+2}^{\infty} \sum_{B_i \in \mathcal{E}_l} \left(\frac{\mathrm{r}(\sigma^k B_i)}{\mathrm{r}(\sigma B)}\right)^p \left(\frac{\mu(B_i)}{\mu(\sigma^k B_i)}\,\frac{\mu(\sigma B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \left(\frac{\mu(\sigma B)}{\mu(\sigma^k B_i)}\right)^{1-\frac{p}{q}} \int_{\sigma^k B_i} h^p \, d\mu \\
&\lesssim \frac{\mathrm{r}(\sigma B)^p \, \mu(B)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma B)} \sigma^{k\,p\,(1+\frac{n-\bar{n}}{q}-\frac{n}{p})} \sum_{l=k+2}^{\infty} \sigma^{-l\,(p+\frac{n\,p}{q}-n)} \sum_{B_i \in \mathcal{E}_l} \int_{\sigma^k B_i} h^p \, d\mu \\
&\lesssim \frac{\mathrm{r}(\sigma B)^p \, \mu(B)^{\frac{p}{q}}}{\mu(\sigma B)} \sigma^{k\,p\,(1+\frac{n-\bar{n}}{q})} \int_{\sigma B} h^p \, d\mu \sum_{l=k+2}^{\infty} \sigma^{-l\,(p+\frac{n\,p}{q}-n)} \\
&\lesssim \mu(B)^{\frac{p}{q}} \, \sigma^{k\,(n-\frac{\bar{n}\,p}{q})} \, a_0(\sigma B)^p.
\end{aligned}
$$

Volviendo a (7.54) con todas las estimaciones obtenidas, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_i a(B_i)^q \, \mu(B_i)\Big)^{\frac{1}{q}} &\lesssim \alpha(0) \, \mu(B)^{\frac{1}{q}} \, a_0(B) + \sum_{k\geq 1} \alpha(k) \, (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \alpha(0) \, \mu(B)^{\frac{1}{q}} \, a_0(B) + \sum_{k\geq 1} \alpha(k) \Big(\mu(B)^{\frac{p}{q}} \, \sigma^{k\,(n-\frac{\bar{n}\,p}{q})} \sum_{l=1}^{k+2} \sigma^{l\,\bar{n}\,p/q} \, a_0(\sigma^l B)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \alpha(0) \, \mu(B)^{\frac{1}{q}} \, a_0(B) + \mu(B)^{\frac{1}{q}} \sum_{l=1}^{\infty} a_0(\sigma^l B) \Big(\sigma^{l\,\frac{\bar{n}}{q}} \sum_{k \geq \max\{l-2,1\}} \sigma^{k\,(\frac{n}{p}-\frac{\bar{n}}{q})} \, \alpha(k)\Big) \\
&= \mu(B)^{\frac{1}{q}} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{\alpha}(l) \, a_0(\sigma^l B) = \big(\bar{a}(B)^q \, \mu(B)\big)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

donde $\bar{\alpha}(0) = C\,\alpha(0)$ y $\bar{\alpha}(l) = \sigma^{l\,\frac{\bar{n}}{q}} \sum_{k\geq \max\{l-2,1\}} \sigma^{k\,(\frac{n}{p}-\frac{\bar{n}}{q})} \, \alpha(k)$ para $l \geq 1$. Esto muestra que $(a, \bar{a}) \in D_q$. ∎

Observación 7.30 Obsérvese que en el argumento anterior es crucial que $q < p^*$, pues, en caso contrario, la suma geométrica para los términos $l \geq k+2$ divergería.

Demostración del Lema 7.29 Fijamos $k \geq 1$ y escribimos

$$
\mathcal{J}_k(B_i) = \{B_j \in \mathcal{E}_l \,:\, \sigma^k B_i \cap \sigma^k B_j \neq \emptyset\}, \quad \text{con } B_i \in \mathcal{E}_l\,, \text{ para todo } i,
$$

donde, para cada $l \geq 0$,

$$
\mathcal{E}_l = \{B_i \,:\, \sigma^{-l}\,\mathrm{r}(B) < \mathrm{r}(B_i) \leq \sigma^{-l+1}\,\mathrm{r}(B)\}.
$$

Observamos la siguiente relación entre los radio de las bolas $B_i, B_j \in \mathcal{E}_l$:

$$
\mathrm{r}(B_i) \leq \sigma^{-l+1}\,\mathrm{r}(B) < \sigma\,\mathrm{r}(B_j) \leq \sigma^{-l+2}\,\mathrm{r}(B) < \sigma^2\,\mathrm{r}(B_i). \tag{7.55}
$$

Tenemos que mostrar que

$$\#\mathcal{J}_k(B_i) \leq c_\mu \text{ mín}\{\sigma^{n\,(k+4)}, \sigma^{n\,l}\}.$$

Supongamos de momento que se verifican las siguientes afirmaciones:

$$\bigcup_{B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)} B_j \subset \sigma^{k+2}\, B_i \tag{7.56}$$

y para cada $B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)$,

$$\mu(B_j) \geq \frac{1}{c_\mu\, \sigma^{n\,(k+4)}}\, \mu(\sigma^{k+2}\, B_i). \tag{7.57}$$

Entonces,

$$\mu(\sigma^{k+2}\, B_i) \geq \mu\Big(\bigcup_{B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)} B_j \Big) = \sum_{B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)} \mu(B_j) \geq \frac{\#\mathcal{J}_k(B_i)}{c_\mu\, \sigma^{n\,(k+4)}}\, \mu(\sigma^{k+2}\, B_i),$$

de donde obtenemos que

$$\#\mathcal{J}_k(B_i) \leq c_\mu\, \sigma^{n\,(k+4)}.$$

Veamos las afirmaciones anteriores. Para mostrar (7.56) fijamos $x \in \bigcup_{B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)} B_j$, entonces $x \in B_j$, para alguna bola $B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)$ y tomamos $z \in \sigma^k\, B_i \cap \sigma^k\, B_j$. Entonces, como consecuencia de (7.55), tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, x_i) &\leq D_0 \left[d(x, x_j) + D_0 \big(d(x_j, z) + d(z, x_i) \big) \right] \\ &\leq D_0 \left[\mathrm{r}(B_j) + D_0 \big(\sigma^k\ \mathrm{r}(B_j) + \sigma^k\ \mathrm{r}(B_i) \big) \right] \\ &< D_0 \left[\sigma + D_0 \left(\sigma^{k+1} + \sigma^k \right) \right]\ \mathrm{r}(B_i) \\ &\leq \sigma^{k+2}\ \mathrm{r}(B_i). \end{aligned}$$

De este modo hemos mostrado que $x \in \sigma^{k+2}\, B_i$ y, como consecuencia, $\bigcup_{B_j \in \mathcal{J}_k(B_i)} B_j \subset \sigma^{k+2}\, B_i$.

Para mostrar (7.57) fijamos $x \in \sigma^{k+2}\, B_i$ y $z \in \sigma^k\, B_i \cap \sigma^k\, B_j$ y como consecuencia de (7.55), tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, x_j) &\leq D_0 \left[d(x, x_i) + D_0 \big(d(x_i, z) + d(z, x_j) \big) \right] \\ &\leq D_0 \left[\sigma^{k+2}\ \mathrm{r}(B_i) + D_0 \big(\sigma^k\ \mathrm{r}(B_i) + \sigma^k\ \mathrm{r}(B_j) \big) \right] \\ &< D_0 \left[\sigma^{k+3} + D_0 \left(\sigma^{k+1} + \sigma^k \right) \right]\ \mathrm{r}(B_j) \\ &\leq \sigma^{k+4}\ \mathrm{r}(B_j), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\sigma^{k+2} B_i \subset \sigma^{k+4} B_j$. Esto junto con el hecho de que la medida es doblante implican (7.57), pues

$$\mu(\sigma^{k+2} B_i) \leq \mu(\sigma^{k+4} B_j) \leq c_\mu \, \sigma^{n\,(k+4)} \, \mu(B_j).$$

Por otro lado, como consecuencia de la propiedad de que la medida sea doblante, tenemos que

$$\mu(B) \geq \mu\Big(\bigcup_i B_i\Big) \geq \sum_i \mu(B_i) \geq \frac{\#\{B_i\}}{c_\mu \, \sigma^{n\,l}} \mu(B) \geq \frac{\#\mathcal{J}_k(B_i)}{c_\mu \, \sigma^{n\,l}} \mu(B),$$

y por lo tanto, $\#\mathcal{J}_k(B_i) \leq c_\mu \; \text{mín}\{\sigma^{n\,(k+4)}, \sigma^{n\,l}\}$

La otra afirmación del lema es inmediata, utilizando las condiciones sobre las longitudes de los radios de las bolas de la familia. Veámoslo. Fijamos $k \geq 1$ y tomamos $x \in \sigma^k B_i$. Entonces, tenemos que

$$d(x, x_B) \leq D_0 \, [d(x, x_i) + d(x_i, x_B)] \leq D_0 \, [\sigma^k \; \mathrm{r}(B_i) + \mathrm{r}(B)] \leq D_0 \, (\sigma^{k-l+1} + 1) \, \mathrm{r}(B)$$

De este modo, si $0 \leq l \leq k+1$, $x \in \sigma^{k-l+2} B$, y si $l \geq k+2$, $x \in \sigma \, B$.

∎

7.3.4. Desigualdades de tipo Poincaré expandidas en variedades

Las desigualdades de tipo Poincaré-Sobolev son muy útiles cuando se desarrolla el Análisis de variedades riemannianas, aún más que en el espacio euclídeo, pues algunas herramientas (tales como el Análisis de Fourier) no se pueden utilizar.

En esta sección mostramos cómo en una variedad de Riemann podemos obtener desigualdades de tipo Poincaré expandidas del tipo (7.52) para diferentes funciones h en el lado derecho a las cuales podemos aplicar nuestros resultados de automejora. Como observábamos al comienzo de la Sección 7.3.3, suponiendo que $S_t 1 = 1$ en μ-casi todo punto, las desigualdades clásicas de Poincaré-Sobolev implican (7.52). Sin embargo, existen situaciones en las cuales tales desigualdades de Poincaré no se satisfacen o no se conocen. Referimos al lector a [ACDH] y sus referencias para un completo estudio de este tema.

De ahora en adelante M es una variedad de Riemann completa, no-compacta y conexa con d su distancia geodésica y la medida de volumen μ es doblante. La distancia canónica asociada a la estructura de Riemann de M, $d(x, y)$, puede ser definida como la menor longitud de todos los trozos de curva C^1 que unen x e y. La topología de (M, d) como un espacio métrico es la misma que la de M como una variedad. De este modo, M equipada con la distancia geodésica d y la medida de volumen μ es un espacio de tipo homogéneo. M completa significa que (M, d) es un espacio métrico completo. En particular, todo conjunto cerrado y acotado es compacto. El hecho de que M sea no-compacta implica que su diámetro es infinito. De esto junto con el hecho de que la medida tiene volumen doblante se sigue que $\mu(M) = \infty$ (ver, por ejemplo, [Ma2]). También la propiedad de conectividad de M implica que M satisface que sus anillos no son vacíos (recordemos la Observación 7.15). Por lo tanto, nos encontramos en el marco adecuado para poder aplicar todas las aplicaciones previas.

Por otro lado, recordemos que una variedad de Riemann es una variedad diferenciable real en la que cada espacio tangente se equipa con un producto interior de manera que varíe suavemente punto a punto. Así, una variedad de Riemann es una generalización del concepto métrico, diferencial y topológico del espacio euclídeo a objetos geométricos que localmente tienen la misma estructura que el espacio euclídeo pero globalmente pueden "curvarse". De hecho, los ejemplos más sencillos de variedades de Riemann son precisamente superficies curvas de $\mathbb{R}^3$ y subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Además, la estructura de la geometría riemanniana permite extender a subconjuntos curvos o hipersuperficies del espacio euclídeo varias nociones métricas como longitud de una curva, ángulo entre dos curvas, área de una superficie o volumen, curvatura, gradiente de funciones y divergencia de campos vectoriales. Esto se realiza definiendo en cada punto el tensor métrico que permite especificar un procedimiento para medir distancias, y por tanto definir cualquier otro concepto métrico basado en distancias y sus variaciones. Más concretamente, una variedad de Riemann es una tripleta del tipo: $(M, \{\phi_\alpha\}, g)$, donde $(M, \{\phi_\alpha\})$ es una variedad diferenciable en la que se ha especificado el conjunto de cartas locales y g es una aplicación bilineal definida positiva desde el espacio tangente a la variedad. Es decir, verifica las siguientes condiciones:

(a) $g_x(u, v) = g_x(v, u), \ \forall u, v \in T_x(M)$

(b) $g_x(u, u) \geq 0, \ \forall u \in T_x(M)$ y $g_x(u, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$,

donde $T_x(M)$ es el espacio de vectores tangentes a M en el punto x. El espacio tangente TM es la unión de los espacios tangentes $T_x(M)$, con $x \in M$. $T_x^*(M)$ es el dual del espacio $T_x(M)$ y T^*M es la unión de estos espacios. A las secciones suaves de TM se les llaman campos vectoriales y a las secciones suaves de T^*M se les llaman formas (1-forma). Existe una relación natural

$$\begin{aligned} TM \times T^*M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \eta(\xi) \end{aligned}$$

inducida de forma natural por el emparejamiento de T_x y T_x^*, $x \in M$. Equivalentemente, el campo vectorial también puede ser definido a través de la derivación, es decir, ξ : $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ tal que $\xi(f\,g) = f\,\xi\,g + g\,\xi\,f$, para toda f, $g \in C^\infty(M)$. Si f es una función suave en M, la relación entre su derivada df la cual es una forma y ξf donde ξ es un campo vectorial viene dado por $df(\xi) = \xi f$.

En cada T_x tenemos un producto escalar $< \cdot, \cdot >_x$. Si $f \in C^\infty(M)$, su gradiente se define como el único campo vectorial ∇f tal que para todo $x \in M$ y para todo $\xi \in TM$,

$$< \nabla f(x), \xi(x) >_x = df(\xi)(x).$$

La divergencia $\mathrm{div}(\xi)$ de un campo vectorial ξ se define como la única función suave en M tal que para toda $f \in C_0^\infty(M)$,

$$\int_M f \,\mathrm{div}(\xi)\, d\mu = -\int_M df(\xi)\, d\mu.$$

El operador de Laplace-Beltrami Δ en M es el operador diferencial de segundo orden definido por

$$\Delta f = -\mathrm{div}(\nabla f),$$

para toda $f \in C_0^\infty(M)$. Notar que con esta definición

$$\int_M f\, \Delta g\, d\mu = \int_M < \nabla f, \nabla g > \, d\mu,$$

para toda f, $g \in C_0^\infty(M)$.

La transformada de Riesz es el operador $\nabla \Delta^{-1/2}$ con valores en el espacio tangente TM. Por construcción, está acotado de $L^2(M, \mu)$ en $L^2(M; TM, \mu)$.

Se dice que el núcleo $p_t(x, y)$ del semigrupo del calor $e^{-t\Delta}$ tiene cotas superiores gaussianas si existen constantes c, $C > 0$ tales que para todo $t > 0$ y x, $y \in M$, verifica:

$$p_t(x, y) \leq \frac{C}{\mu(B(x, \sqrt{t}))}\, e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}. \tag{UE}$$

Es conocido que bajo la propiedad de volumen doblante, (UE) es consecuencia de la misma desigualdad con $y = x$ (ver [Gr2, Teo 1.1]). Notar que (UE) implica que $p_t(x, y)$ satisface (6.6) con $m = 2$ (de este modo, $t_B = r(B)^2$) y $g(t) = C\, e^{-c\,t}$. Así, podemos aplicar nuestros resultados al semigrupo $S_t = e^{-t\,\Delta}$ y a la familia de operadores conmutativos $S_t = I - (I - e^{-t\,\Delta})^m$ con $m \geq 1$. Si expandimos la última expresión, podemos ver que su núcleo satisface (UE).

Bajo la condición de volumen doblante y (UE), [CouD] muestra que

$$\big\| \, |\nabla \Delta^{-1/2} f| \, \big\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \tag{R_p}$$

se verifica para $1 < p < 2$ y para toda f acotada con soporte compacto. Aquí, $|\cdot|$ es la norma en TM asociada al producto interior. Así, definimos

$$q_+ = \sup \big\{ p \in (1, \infty) \, : \, (R_p) \text{ se verifica} \big\}.$$

En particular, bajo la propiedad de volumen doblante y (UE), tenemos que $q_+ \geq 2$. En [CouD] se muestra que q puede ser igual a 2. Si asumimos desigualdades de tipo L^2 de Poincaré entonces $q_+ > 2$ ([AC]).

También definimos $\tilde{q}_+$ como el supremo de aquellos $p \in (1, \infty)$ tales que, para todo $t > 0$,

$$\big\| \, |\nabla e^{-t\,\Delta} f| \, \big\|_{L^p} \leq C\, t^{-1/2} \|f\|_{L^p}. \tag{G_p}$$

Por analiticidad del semigrupo del calor, siempre tenemos que $\tilde{q}_+ \geq q_+$. De hecho, (R_p) implica (G_p):

$$\big\| \, |\nabla e^{-t\,\Delta} f| \big\|_{L^p} \leq C_p \, \|\Delta^{1/2} \, e^{-t\,\Delta} f\|_{L^p} \leq C_p' \, t^{-1/2} \, \|f\|_{L^p}.$$

Como siempre tenemos (R_2) entonces, esta estimación implica (G_2). Bajo la propiedad de medida de volumen doblante y las desigualdades L^2 de Poincaré, $q_+ = \tilde{q}_+$, ver [ACDH, Teorema 1.3]. No se sabe si la igualdad se satisface o no bajo la propiedad de volumen doblante y cotas superiores gaussianas.

Proposición 7.31 *Sea M una variedad de Riemann, completa, no-compacta, conexa, verificando la propiedad de medida de volumen doblante y (UE).*

(a) Dados $m \geq 1$ y $S_t^m = I - (I - e^{-t\,\Delta})^m$. Cualquier función suave con soporte compacto f satisface que

$$⨍_B |f - S_{t_B}^m f| \, d\mu \leq C \sum_{k \geq 1} \sigma^{-k\,(2\,m - n)} \, \mathrm{r}(\sigma^k\, B) ⨍_{\sigma^k\, B} |\Delta^{1/2} f| \, d\mu.$$

(b) Dados $p \in ((\tilde{q}_+)', \infty) \cup [2, \infty)$ y f una función suave con soporte compacto, se verifica

$$\left(⨍_B |f - e^{-t_B\,\Delta} f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq C \sum_{k \geq 1} e^{-c\,\sigma^{2\,k}} \, \mathrm{r}(\sigma^k\, B) \left(⨍_{\sigma^k\, B} |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Como consecuencia de este resultado, el Corolario 7.24 y la Observación 7.25 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 7.32 *Sea M una variedad de Riemann, completa, no-compacta, conexa, con medida de volumen doblante y (UE). Dado $1 \leq p < \infty$, tomamos $p^* = n\,p/(n-p)$, cuando $1 \leq p < n$, y $p^* = \infty$ en caso contrario.*

(a) Sea $S_t^m = I - (I - e^{-t\,\Delta})^m$ con $m \geq 1$ si $p \geq n$ y si $1 < p < n$ tomamos $m > \dfrac{n + \frac{n}{p} - \frac{\bar{n}}{\max\{q,p\}}}{2}$ con $1 < q < p^*$. Entonces, cualquier función suave con

soporte compacto f verifica que

$$\left(\fint_B |f - S_{t_B}^m f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq C \sum_{k\geq 1} \phi(k) \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} |\Delta^{1/2} f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

donde $\phi(k) = \sigma^{-k(2m-n-n/p)}$, *si* $1 < p < n$, *y* $\phi(k) = \sigma^{-k(2m-n)}$, *si* $p \geq n$.

(*b*) *Si* $p \in ((\tilde{q}_+)', \infty) \cup [2, \infty)$ *y* $1 < q < p^*$, *cualquier función suave con soporte compacto f verifica que*

$$\left(\fint_B |f - e^{-t_B \Delta} f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq C \sum_{k\geq 1} e^{-c\,\sigma^k} \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Observación 7.33 Podemos conseguir estimaciones similares asumiendo desigualdades locales de Poincaré-Sobolev. Observamos primero que en este contexto $e^{-t\Delta}1 \equiv 1$. Supongamos que M satisface la desigualdad clásica de Poincaré L^1–L^p, con $1 \leq p < \infty$. Esto es, para cada bola B y cada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ con $|\nabla f| \in L^p_{\mathrm{loc}}(M)$:

$$\fint_B |f - f_B| d\mu \leq \mathrm{r}(B) \left(\fint_B |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Entonces, se tiene que

$$\fint_B |f - S_t f| \, d\mu \leq C \sum_{k\geq 1} e^{-c\,\sigma^k} \; \mathrm{r}(\sigma^k B) \left(\fint_{\sigma^k B} |\nabla f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

donde o bien $S_t = e^{-t\Delta}$ o bien $S_t = I - (I - e^{-t\Delta})^m$. Obsérvese que la Proposición 7.31 establece esta estimación para ciertos valores de p, y para la primera elección de S_t, sin asumir ningún tipo de desigualdad de Poincaré.

Nos gustaría señalar que, del mismo modo, podríamos demostrar estimaciones similares, en la línea de los Ejemplos 7.18, 7.19 y 7.20 y también desigualdades de tipo pseudo-Poincaré globales.

Por último, terminamos esta sección mostrando algunos otros ejemplos de variedades en las cuales podemos aplicar los resultados anteriores. El ejemplo más interesante, donde nuestros resultados parecen ser nuevos, es el siguiente: consideramos dos copias de $\mathbb{R}^n$ menos la bola unidad adheridas suavemente a lo largo de su círculo unitario, con $n \geq 2$. En [CouD] se muestra que esta variedad tiene medida de volumen doblante y cotas superiores gaussianas. Sin embargo, no se satisface la desigualdad de Poincaré $L^2 - L^2$. De hecho, se verifica la desigualdad de Poincaré $L^p - L^p$ si y sólo si $p > n$

(ver [HaK2] en el caso similar de un cono doble en $\mathbb{R}^n$). Si $n = 2$, (R_p) se verifica si y sólo si $p \leq 2$ ([CouD]). Si $n > 2$, (R_p) se verifica si y sólo si $p < n$ ([CCH]). En cualquier caso, tenemos $q_+ = n$, y por tanto $\tilde{q}_+ \geq n$. Así, podemos aplicar el Corolario 7.32 y obtenemos (a) y (b). En particular, (b) implica desigualdades de tipo Poincaré $L^p - L^p$ expandidas, para todo $n' < p < \infty$.

Existen muchos ejemplos de variedades o subvariedades verificando la propiedad de volumen doblante y la desigualdad clásica de Poincaré $L^1 - L^1$. Como volumen doblante y Poincaré $L^1 - L^1$ implican (UE), podemos aplicar la Proposición 7.31 y el Corolario 7.32 en tales variedades. Notar que en este caso, (b) de la Proposición 7.31 y el Corolario 7.32 no son nuevos. Pues, ya hemos mencionado que las desigualdades de Poincaré son más fuertes que las desigualdades de Poincaré expandidas. Sin embargo, (a) implica una nueva desigualdad de Poincaré expandida que involucra en su lado derecho a la raíz cuadrada de las raíces del operador de Laplace-Beltrami. Algunos ejemplos de estas variedades que nos gustaría mencionar son los siguientes:

- Las variedades completas de Riemann que son cuasi-isométricas a una variedad de Riemann con curvatura de Ricci no-negativa (en particular, cada variedad de Riemann con curvatura de Ricci no-negativa) tienen medida de volumen doblante y admiten la clásica desigualdad de Poincaré $L^1 - L^1$.

- Las variedades cónicas singulares con base cerrada admiten una desigualdad clásica de Poincaré $L^2 - L^2$ para funciones C^∞ (ver [CouL]). Utilizando los métodos de [Gr1], también se puede ver que verifican la desigualdad clásica de Poincaré $L^1 - L^1$. En general, tales variedades no necesariamente satisfacen la propiedad de volumen doblante, pero lo hacen si asumimos que la base es compacta, por ejemplo.

- "Co-compact covering manifolds" con cociente compacto y grupo de automorfismos de la cubierta con crecimiento polinómico con la propiedad de volumen doblante y la clásica desigualdad $L^1 - L^1$ de Poincaré (ver [SC3]).

- Los grupos de Lie nilpotentes con crecimiento polinomial satisfacen la propiedad de volumen doblante y la desigualdad clásica de Poincaré $L^1 - L^1$. Un ejemplo de éstos son los grupos de Carnot.

Demostración de la Proposición 7.31 Veamos (b). Fijamos $p \in ((\tilde{q}_+)', \infty) \cup [2, \infty)$ y observamos que

$$\left(\fint_B |f - e^{-t_B \Delta} f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\fint_B \left| - \int_0^{t_B} \frac{d}{ds} e^{-s\Delta} f(x) \, ds \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \int_0^{t_B} \left(\fint_B |e^{-s\Delta} \Delta f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} ds.$$

Fijamos $0 < s < t_B$ y tomamos una función suave φ soportada en B con

$$\|\varphi\|_{L^{p'}(B,\frac{\mu}{\mu(B)})} = 1.$$

Para simplificar la notación, escribimos:

$$I = \frac{1}{\mu(B)} \left| \int_M e^{-s\,\Delta} \Delta f(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x) \right| \quad \text{y} \quad I_k = \Big(\int_{C_k(B)} |\nabla e^{-s\,\Delta} \varphi|^{p'} d\mu \Big)^{\frac{1}{p'}},\ \forall k \geq 2.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\mu(B)} \left| \int_M e^{-s\,\Delta} \Delta f(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x) \right| \\
&= \frac{1}{\mu(B)} \left| \int_M \nabla f(x) \cdot \nabla e^{-s\,\Delta} \varphi(x)\, d\mu(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu(\sigma^k B)^{\frac{1}{p}}}{\mu(B)} \Big(⨍_{\sigma^k B} |\nabla f|^p\, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{C_k(B)} |\nabla e^{-s\,\Delta} \varphi|^{p'} d\mu \Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\lesssim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma^{k\,\frac{n}{p}}}{\mu(B)^{\frac{1}{p'}}} \Big(⨍_{\sigma^k B} |\nabla f|^p\, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{C_k(B)} |\nabla e^{-s\,\Delta} \varphi|^{p'} d\mu \Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sigma^{k\,\frac{n}{p}}}{\mu(B)^{\frac{1}{p'}}} \Big(⨍_{\sigma^k B} |\nabla f|^p\, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} I_k.
\end{aligned} \tag{7.58}$$

Estimamos cada I_k. Para $k = 2$ notar que $p' \in (1, 2] \cup (1, \tilde{q}_+)$ nos permite utilizar $(G_{p'})$ (recordemos que $\tilde{q}_+ \geq q_+ \geq 2$ y que (G_2) siempre se verifica):

$$I_2 \leq \big\| |\nabla e^{-s\,\Delta} \varphi| \big\|_{L^{p'}} \leq C\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \|\varphi\|_{L^{p'}} = C\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \mu(B)^{\frac{1}{p'}}.$$

Para $k \geq 3$, por definición de $\tilde{q}_+$ y el argumento de [ACDH, p. 944], tenemos que

$$\Big(\int_M |\nabla_x p_s(x,y)|^{p'}\, e^{\gamma\, \frac{d^2(x,y)}{s}}\, d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{C}{\sqrt{s}\, \mu(B(y,\sqrt{s}))^{\frac{1}{p}}},$$

para todo $s > 0$ y $y \in M$, con $\gamma > 0$ dependiendo de p'. Por otro lado, como $0 < s < t_B = \mathrm{r}(B)^2$, también tenemos que si $y \in B$ entonces,

$$\mu(B) \approx \mu\big(B(y, \mathrm{r}(B))\big) \leq c_\mu \Big(\frac{\mathrm{r}(B)}{\sqrt{s}} \Big)^n \mu\big(B(y, \sqrt{s})\big).$$

Utilizando estas estimaciones y la desigualdad de Minkowski estimamos I_k del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
I_k &= \left(\int_{C_k(B)} \left| \int_B \nabla_x p_s(x,y)\, \varphi(y)\, d\mu(y) \right|^{p'} d\mu(x) \right)^{1/p'} \\
&\leq e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\ \mathrm{r}(B)^2}{s}} \int_B \left(\int_{C_k(B)} |\nabla_x\, p_s(x,y)|^{p'}\, e^{\gamma\,\frac{d^2(x,y)}{s}}\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}} |\varphi(y)|\, d\mu(y) \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\ \mathrm{r}(B)^2}{s}} \int_B \frac{1}{\mu(B(y,\sqrt{s}))^{\frac{1}{p}}}\, \varphi(y)\, d\mu(y) \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{\mathrm{r}(B)}{\sqrt{s}} \right)^{\frac{n}{p}} e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\ \mathrm{r}(B)^2}{s}}\, \frac{1}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}} \int_B \varphi(y)\, d\mu(y) \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{\mathrm{r}(B)}{\sqrt{s}} \right)^{\frac{n}{p}} e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\ \mathrm{r}(B)^2}{s}}\, \mu(B)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}
$$

Entonces, volviendo a (7.58), tenemos que

$$
I \lesssim \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\fint_{\sigma^2\,B} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{\sigma^k\ \mathrm{r}(B)}{\sqrt{s}} \right)^{\frac{n}{p}} e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\ \mathrm{r}(B)^2}{s}} \left(\fint_{\sigma^k\,B} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Tomando supremo sobre todas estas funciones φ, obtenemos tal y como deseábamos

$$
\begin{aligned}
&\left(\fint_B |f - e^{-t_B\,\Delta} f|\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\lesssim \left(\fint_{\sigma^2\,B} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{t_B} \frac{1}{\sqrt{s}}\, ds \\
&\qquad\quad + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\fint_{\sigma^k\,B} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{t_B} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{\sigma^k\ \mathrm{r}(B)}{\sqrt{s}} \right)^{\frac{n}{p}} e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\ \mathrm{r}(B)^2}{s}}\, ds \\
&\quad\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c\,\sigma^{2\,k}}\ \mathrm{r}(\sigma^k\,B) \left(\fint_{\sigma^k\,B} |\nabla f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Veamos ahora (a). Escribimos $h = \Delta^{1/2} f$ y $h = \sum_{k=2}^{\infty} h_k$ con $h_k = h\,\chi_{C_k(B)}$. Utilizando que $\Delta^{1/2} = c \int_0^\infty \sqrt{t}\, e^{-t\,\Delta}\, \Delta\, \frac{dt}{t}$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\fint_B |f - S_{t_B}^m f|\, d\mu &= \fint_B |(I - e^{-t_B\,\Delta})^m f|\, d\mu \\
&= \fint_B \left| (I - e^{-t_B\,\Delta})^{m-1} \left(- \int_0^{t_B} \frac{d}{ds} e^{-s\,\Delta} f(x)\, ds \right) \right| d\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_0^{t_B} \fint_B \big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-s\,\Delta}\,\Delta^{1/2}h\big|d\mu\,ds\\
&\lesssim \int_0^{t_B}\int_0^\infty \fint_B \big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\le \sum_{k=2}^\infty \int_0^{t_B}\int_0^\infty \fint_B \big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h_k\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds.
\end{aligned}
$$

Nótese que se tiene que $t\,\partial_t p_t(x,y)$ también satisface (UE) (ver [Dav, Teorema 4] o [Gr2, Corolario 3.3]) y esto implica que $\{e^{-t\,\Delta}\,(t\,\Delta)\}_{t>0}$ verifica todas las estimaciones L^1-L^1 off-diagonal (ver [AM1] para una discusión completa de las estimaciones off-diagonal asociadas a semigrupos). Así, dados E y F conjuntos cerrados y $t>0$

$$
\|e^{-t\,\Delta}\,(t\,\Delta)(f\,\chi_E)\|_{L^1(F)} \le C\,e^{-c\,\frac{d(E,F)^2}{t}}\,\|f\|_{L^1(E)}. \tag{7.59}
$$

Esto y (UE) implican que $e^{-t\,\Delta}\,(t\,\Delta)$ y $(I-e^{-t\,\Delta})^{m-1}$ están uniformemente acotados en L^1. Estos hechos nos permiten estimar el término $k=2$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_B}\int_0^\infty \fint_B &\big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h_2\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\lesssim \fint_{\sigma^2\,B}|h|\,d\mu \int_0^{t_B}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t+s}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\lesssim \mathrm{r}(\sigma^2\,B)\fint_{\sigma^2\,B}|h|\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Para $k\ge 3$ separamos el dominio de integración de la variable t en dos: $0<t<m\,t_B$ y $t\ge m\,t_B$. Primero fijamos $0<t<m\,t_B$ y $0<s<t_B$ y observamos que si $0\le j\le m-1$ tenemos que $t+s\le j\,t_B+t+s\le 2\,m\,t_B$ y para cierta constante $C_{j,m}$:

$$
(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta = \sum_{j=0}^{m-1} C_{j,m}\,e^{-(j\,t_B+t+s)\,\Delta}.
$$

Entonces, (7.59) implica que

$$
\begin{aligned}
\fint_B \big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h_k\big|d\mu &\lesssim \frac{1}{\mu(B)}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j\,t_B+t+s}\,e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\,\mathrm{r}(B)^2}{j\,t_B+t+s}}\int_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu\\
&\lesssim \sigma^{k\,n}\,e^{-c\,\sigma^{2\,k}}\,\frac{1}{t+s}\fint_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Así, concluimos que

$$
\int_0^{t_B}\int_0^{m\,t_B}\fint_B \big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h_k\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds
$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim e^{-c\,\sigma^{2\,k}}\,\sigma^{k\,n}\fint_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu\int_0^{t_B}\int_0^{m\,t_B}\frac{\sqrt{t}}{t+s}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\lesssim e^{-c\,\sigma^{2\,k}}\;\mathrm{r}(\sigma^k\,B)\fint_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu.
\end{aligned}$$

Ahora para cada $t \geq m\,t_B$ cambiamos de variables $t' = \dfrac{t}{t_B\,m}$ y $s' = \dfrac{s}{t_B}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_B}\int_{m\,t_B}^{\infty}\fint_B\big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h_k\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\quad\lesssim \mathrm{r}(B)\int_0^1\int_1^{\infty}\fint_B\big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-t\,t_B\,(m-1)\,\Delta}\,e^{-(s+t)\,t_B\,\Delta}\,(t_B\,\Delta)h_k\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\quad\lesssim \mathrm{r}(B)\int_0^1\int_1^{\infty}\fint_B\big|(e^{-t\,t_B\,\Delta}-e^{-(t\,t_B+t_B)\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,t_B\,\Delta}\,((s+t)\,t_B\,\Delta)h_k\big|d\mu\,\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}\,ds.
\end{aligned}$$

Necesitamos el siguiente resultado:

Lema 7.34 *Dados E y F conjuntos cerrados y $0 < t \leq s$, tenemos que*

$$\Big\|\frac{s}{t}\,\big(e^{-s\,\Delta}-e^{-(s+t)\,\Delta}\big)(f\,\chi_E)\Big\|_{L^1(F)} \leq C\,e^{-c\,\frac{d(E,F)^2}{s}}\,\|f\|_{L^1(E)}. \tag{7.60}$$

Utilizando este resultado, (7.59) y [HoM, Lemma 2.3], tenemos para cada $0 < s < 1 < t < \infty$:

$$\begin{aligned}
&\fint_B\big|(e^{-t\,t_B\,\Delta}-e^{-(t\,t_B+t_B)\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,t_B\,\Delta}\,((s+t)\,t_B\,\Delta)h_k\big|d\mu\\
&\qquad\lesssim t^{-(m-1)}\,\frac{1}{\mu(B)}\,e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}\,\mathrm{r}(B)^2}{\text{máx}\{t\,t_B,(s+t)\,t_B\}}}\int_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu\\
&\qquad\lesssim t^{-(m-1)}\,\sigma^{k\,n}e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}}{t}}\fint_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_B}\int_{m\,t_B}^{\infty}\fint_B\big|(I-e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\,e^{-(s+t)\,\Delta}\,\Delta h_k\big|d\mu\,\sqrt{t}\,\frac{dt}{t}\,ds\\
&\qquad\lesssim \mathrm{r}(B)\,\sigma^{k\,n}\fint_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu\int_0^1\int_1^{\infty}t^{-(m-1)}\,e^{-c\,\frac{\sigma^{2\,k}}{t}}\,\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}\,ds\\
&\qquad\lesssim \sigma^{-k\,(2\,m-n)}\;\mathrm{r}(\sigma^k\,B)\fint_{\sigma^k\,B}|h|\,d\mu.
\end{aligned}$$

Reuniendo las estimaciones, completamos la demostración:

$$\begin{aligned}
⨍_B |f - S_{t_B}^m f|\, d\mu &\lesssim \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^{t_B} \int_0^{\infty} ⨍_B \left|(I - e^{-t_B\,\Delta})^{m-1}\, e^{-(s+t)\,\Delta}\, \Delta h_k\right| d\mu\, \sqrt{t}\, \frac{dt}{t}\, ds \\
&\lesssim \mathrm{r}(\sigma^2\, B) ⨍_{\sigma^2\, B} |h|\, d\mu + \sum_{k=3}^{\infty} \left(e^{-c\,\sigma^{2\,k}} + \sigma^{-k\,(2\,m-n)}\right)\, \mathrm{r}(\sigma^k\, B) ⨍_{\sigma^k\, B} |h|\, d\mu \\
&\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{-k\,(2\,m-n)}\, \mathrm{r}(\sigma^k\, B) ⨍_{\sigma^k\, B} |h|\, d\mu.
\end{aligned}$$

∎

Demostración del Lema 7.34 Argumentamos como en [HoM, p. 504] y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{s}{t} \left(e^{-s\,\Delta} - e^{-(s+t)\,\Delta}\right)(f\,\chi_E)\right\|_{L^1(F)} &= \left\| - \frac{s}{t} \int_0^t \frac{d}{du} e^{-(s+u)\,\Delta}(f\,\chi_E)\, du \right\|_{L^1(F)} \\
&\le \frac{s}{t} \int_0^t \left\|e^{-(s+u)\,\Delta}((s+u)\,\Delta)(f\,\chi_E)\right\|_{L^1(F)} \frac{du}{s+u} \\
&\le C\, \|f\|_{L^1(E)}\, \frac{s}{t} \int_0^t e^{-\frac{c\,d(E,F)^2}{s+u}}\, \frac{du}{s+u} \\
&\le C\, e^{-\frac{c\,d(E,F)^2}{s}}\, \|f\|_{L^1(E)},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (7.59) y que $s \le s + u \le s + t \le 2\,s$. ∎

Capítulo 8

Automejora de tipo exponencial en espacios de tipo homogéneo de desigualdades de Poincaré generalizadas asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos

El propósito de este capítulo es presentar un método general que permita estudiar propiedades de automejora de tipo exponencial de desigualdades generalizadas de Poincaré asociadas a aproximaciones de la identidad y a semigrupos en espacios de tipo homogéneo. Como aplicación, mostramos la conexión entre nuestros resultados y el teorema de John-Nirenberg para el espacio BMO asociado a aproximaciones de la identidad y a semigrupos.

El capítulo está organizado como sigue: los resultados principales se exponen en la Sección 8.1, las demostraciones de estos resultados están en la Sección 8.2 y las aplicaciones en la Sección 8.3.

8.1. Resultado principal

Como mencionábamos anteriormente, el objetivo de este capítulo es establecer en espacios de tipo homogéneo un resultado análogo al Teorema 4.1. En todo el capítulo $\sigma > 4\,D_0^3 > 1$ es un parámetro fijo suficientemente grande (ver el Teorema 6.1).

Teorema 8.1 *Sean $\{S_t\}_{t>0}$ como en la Sección 6.5 y $a \in T_\infty$. Si $f \in \mathcal{M}$ verifica*

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \leq a(B),$$

para toda bola B y donde $t_B = \mathrm{r}(B)^m$. Entonces, para cada bola B, se tiene que

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L, B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{n\,k}\, g\big(c\, \sigma^{m\,k}\big)\, a(\sigma^k\, B). \tag{8.1}$$

También se satisface la siguiente versión con peso para cada $w \in A_\infty(\mu)$ y cada B:

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L(w), B} \leq C \sum_{k \geq 0} \sigma^{n\,k}\, g\big(c\, \sigma^{m\,k}\big)\, a(\sigma^k\, B), \tag{8.2}$$

donde $C \geq 1$ y $0 < c < 1$.

Si además a es doblante, entonces podemos escribir $a(B)$ en el lado derecho de las estimaciones anteriores.

8.2. Demostración del Teorema 8.1

Las demostraciones de todos los resultados auxiliares se encuentran en la Sección 8.2.4. Seguimos la prueba del Teorema 4.1. Probamos (8.1) con las mismas ideas que utilizamos para mostrar (7.2).

8.2.1. Paso I: Caso diádico

Consideramos la estructura diádica dada en el Teorema 6.1 y mostramos que para cada $1 \leq \tau < \sigma^m$ y para cada $Q \in \mathcal{D}$, se tiene que

$$\|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f\|_{\exp L, Q} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma^{n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-7)}\big)\, a(\sigma^k\, \hat{B}_Q).$$

Presentamos el siguiente resultado auxiliar:

Lema 8.2 *Bajo las hipótesis del Teorema 8.1, para cada $1 \leq \tau < \sigma^m$, $k \geq 0$ y $R \in \mathcal{D}$, tenemos que*

$$\fint_{\sigma^k\, \hat{B}_R} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_R}} f|\, d\mu \leq c_\mu^2\, C_2^m\, \|a\|_{T_\infty}\, \sigma^{2\,n}\, a(\sigma^{2+k}\, \hat{B}_R).$$

Podemos suponer que $\|a\|_{T_\infty} = 1$. Pues si tomamos $\hat{a}(B) = \sup_{\tilde{B}\subset B} a(\tilde{B})$, tenemos que $a(B) \le \hat{a}(B) \le \|a\|_{T_\infty} a(B)$ y $\|\hat{a}\|_{T_\infty} = 1$. De este modo, se verifica (7.1) con a reemplazado por $\hat{a}$. Definimos el funcional $\tilde{a} : \mathcal{B} \times \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ dado por

$$\tilde{a}(B) = \sum_{k\ge 0} \sigma^{n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-7)}\big)\, a(\sigma^k\, B). \tag{8.3}$$

Notar que $a \in T_\infty$ implica que $\tilde{a} \in T_\infty$ con $\|\tilde{a}\|_{T_\infty} = \|a\|_{T_\infty} = 1$. Fijamos $Q \in \mathcal{D}$ para el cual $\tilde{a}(\hat{B}_Q) < \infty$.

Definimos la función:

$$G(x) = \frac{|f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(x)|}{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}\, \chi_{\sigma^2\, \hat{B}_Q}(x). \tag{8.4}$$

Esta función está bien definida y, además, el Lema 8.2 y la propiedad de volumen doblante de la medida μ implican que $G \in L^1(X)$ con

$$\|G\|_{L^1(X)} \le \frac{c_\mu^3\, C_2^{2\,n}}{g(1)}\, \mu(Q) < \infty.$$

Sea $\lambda_0 = c_M\, c_\mu^3\, C_2^{2\,n}\, \sigma^{2\,n}/g(1) > 0$, donde c_M es la constante de tipo débil $(1,1)$ de la función maximal de Hardy-Littlewood no centrada M. Consideramos el conjunto de nivel:

$$\Omega = \{x \in X : MG(x) > \lambda_0\} \tag{8.5}$$

con

$$\mu(\Omega) \le \frac{c_M}{\lambda_0}\, \|G\|_{L^1(X)} \le \frac{1}{\sigma^{2\,n}}\, \mu(Q). \tag{8.6}$$

Utilizando el Teorema 6.2 (pues Ω es abierto y $\Omega \subsetneq X$, $\mu(X) = \infty$) escribimos $\Omega = \bigcup_i Q_i$, donde $\{Q_i\}_i$ es la familia de cubos de Whitney. Además, aquellos Q_i tales que $Q_i \cap Q \ne \emptyset$ verifican que $Q_i \subsetneq Q$ (pues $\mu(Q_i) \le \sigma^{-2\,n}\, \mu(Q)$) y por lo tanto,

$$\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}) \le \sigma^{-2}\, \mathrm{r}(\hat{B}_Q) \qquad \text{y} \qquad \sigma^2\, \hat{B}_{Q_i} \subset \sigma\, \hat{B}_Q. \tag{8.7}$$

Por otro lado, para cada $t > 0$ y $R \in \mathcal{D}$, definimos el conjunto:

$$E(R,t) = \big\{x \in R \,:\, \big|f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_R}} f(x)\big| > t\, \tilde{a}(\hat{B}_R)\big\}. \tag{8.8}$$

Fijamos $t > \lambda_0$ y observamos que salvo conjuntos de medida nula:

$$E(Q,t) = E(Q,t) \cap \big\{x \in Q \,:\, MG(x) > \lambda_0\big\} = \bigcup_i \big\{x \in Q_i \cap Q \,:\, G(x) > t\big\}.$$

De ahora en adelante, sólo tendremos en cuenta aquellos cubos Q_i tales que $Q_i \cap Q \neq \emptyset$, y por lo tanto $Q_i \subset Q$. Así, escribimos que en μ-casi todo punto:

$$E(Q,t) = \bigcup_{i\,:\,Q_i \subset Q} \big\{x \in Q_i \,:\, \big|f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big| > t\, \tilde{a}(\hat{B}_Q)\big\}.$$

Para reemplazar $S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f$ por $S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}} f$, utilizamos el siguiente resultado auxiliar:

Proposición 8.3 *Bajo las hipótesis del Teorema 8.1, para todo $x \in Q_i$, tenemos que*

$$\big|S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}} f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big| \leq c_0\, \tilde{a}(\hat{B}_Q).$$

Fijamos $t > C_0$ con $C_0 = \max\{\lambda_0, c_0\}$. Debido a que $\tilde{a}(\hat{B}_{Q_i}) \leq \tilde{a}(\hat{B}_Q)$ (pues a es creciente y se verifica (8.7)), obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{(8.9)} \qquad \mu\big(E(Q,t)\big) &\leq \sum_{i\,:\,Q_i \subset Q} \mu\Big(\big\{x \in Q_i \,:\, \big|f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}} f(x)\big| > (t - C_0)\, \tilde{a}(\hat{B}_{Q_i})\big\}\Big) \\ &= \sum_{i\,:\,Q_i \subset Q} \mu\big(E(Q_i, t - C_0)\big). \end{aligned}$$

Definimos la función $\varphi : [0,+\infty) \to [0,1]$ dada por

$$\varphi(t) = \sup_R \frac{\mu\big(E(R,t)\big)}{\mu(R)}.$$

Notar que $\varphi(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Esto junto con (8.9), (8.6) y $\sigma > e$ nos permiten obtener

$$\mu\big(E(Q,t)\big) \leq \varphi(t - C_0) \sum_{i\,:\,Q_i \subset Q} \mu(Q_i) \leq \varphi(t - C_0)\, \mu(\Omega) \leq e^{-2\,n}\, \varphi(t - C_0)\, \mu(Q)$$

y así

$$\varphi(t) \leq e^{-2\,n}\, \varphi(t - C_0),$$

para todo $t > C_0$. Iterando, tenemos

$$\varphi(t) \leq e^{-2\,n\,(t/C_0 - 1)},$$

para todo $t \geq 0$. Para terminar, elegimos $A > C_0/(2\,n)$ y utilizando la estimación previa, concluimos que

$$\begin{aligned} \fint_Q \left(\exp\left(\frac{|f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f|}{A\, \tilde{a}(\hat{B}_Q)} \right) - 1 \right) d\mu &\leq \int_0^\infty e^t\, \frac{\mu\big(E(Q, A\, t)\big)}{\mu(Q)}\, dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{t - 2\,n\,(t\,A/C_0 - 1)}\, dt < \infty, \end{aligned}$$

lo cual nos conduce a la estimación deseada. ∎

8.2.2. Paso II: Caso general

Fijamos una bola B. Tomamos $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$C_1\,\sigma^{k_0} \le \mathrm{r}(B) < C_1\,\sigma^{k_0+1}$$

y definimos el conjunto

$$\mathcal{I} = \{Q \in \mathcal{D}_{k_0} \,:\, Q \cap B \neq \emptyset\}.$$

En la demostración del Teorema 7.2 vimos que

$$\#\mathcal{I} \le c_\mu\, C_2^n\, \sigma^{3\,n},$$

que salvo conjuntos de medida nula

$$B \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{I}} Q \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{I}} \hat{B}_Q \subset \sigma\, B,$$

y que cada $Q \in \mathcal{I}$ verifica que

$$\mu(\hat{B}_Q) \approx \mu(B).$$

Por otro lado, notar que $t_B = \tau\, t_Q$ con $1 \le \tau < \sigma^m$ y $a \in T_\infty$ implican que para todo $k \ge 0$,

$$a(\sigma^k\,\hat{B}_Q) \lesssim a(\sigma^{k+1}\,B).$$

De las observaciones anteriores y el Paso I de la demostración, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L,B} &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{I}} \|f - S_{t_B} f\|_{\exp L,Q} \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{I}} \|f - S_{\tau\, t_Q} f\|_{\exp L,Q} \\
&\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{I}} \sum_{k\ge 0} \sigma^{n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-7)}\big)\, a(\sigma^k\,\hat{B}_Q) \\
&\lesssim \sum_{k\ge 0} \sigma^{n\,k}\, g\big(\sigma^{m\,(k-8)}\big)\, a(\sigma^k\,B).
\end{aligned}$$

∎

8.2.3. Demostración de (8.2)

Seguimos los argumentos de la demostración de (8.1) y sólo insistiremos en aquellos puntos donde ambas demostraciones difieran. Recordemos primero que $w \in A_\infty(\mu)$ implica que existen $1 \le p < \infty$ y $1 < s \le \infty$ tales que $w \in A_p(\mu) \cap RH_s(\mu)$, y en particular satisface (7.27).

Tomamos $\tilde{a}$ definido en (8.3) y fijamos Q tal que $\tilde{a}(Q) < \infty$. Tomamos también la función G dada por (8.4) y Ω (dado por (8.5)) el conjunto de nivel de MG a nivel $\lambda_0\, C_w^{s'}$, donde C_w es la constante que aparece en (7.27). Aplicando el Teorema 6.2 y el Lema 6.3, cubrimos Ω con la familia de cubos de Whitney $\{Q_i\}_i \subset \mathcal{D}_Q$. Consideramos el funcional $\varphi : [0, +\infty) \to [0, 1]$ dado por

$$\varphi(t) = \sup_R \frac{w\big(E(R,t)\big)}{w(R)},$$

con $E(R,t)$ definido en (8.8). Es inmediato ver que $\varphi(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Sea $t > C_0$ con $C_0 = \max\{\lambda_0\, C_w^{s'}, c_0\}$ y donde c_0 es la constante que aparece en la Proposición 8.3. Argumentando como en (8.9), utilizamos (7.27) y que $\mu(\Omega) < C_w^{-s'}\, \sigma^{-2\,n}\, \mu(Q)$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} w\big(E(Q,t)\big) &\leq \sum_{i:Q_i \subset Q} w\big(E(Q_i, t - C_0)\big) \\ &\leq \varphi(t - C_0) \sum_{i:Q_i \subset Q} w(Q_i) \\ &= \varphi(t - C_0)\, w\Big(\bigcup_{i:Q_i \subset Q} Q_i\Big) \\ &\leq C_w\, \varphi(t - C_0)\, w(Q) \left(\frac{\mu(\bigcup_{i:Q_i \subset Q} Q_i)}{\mu(Q)}\right)^{1/s'} \\ &< \sigma^{-2\,n/s'}\, \varphi(t - C_0)\, w(Q) \\ &< e^{-2\,n/s'}\, \varphi(t - C_0)\, w(Q). \end{aligned}$$

Así, $\varphi(t) < e^{-2\,n/s'}\, \varphi(t - C_0)$ para $t > C_0$. Iterando la estimación previa, obtenemos $\varphi(t) \leq e^{-2\,n(t/C_0 - 1)/s'}$ cuando $t \geq 0$. Como en la demostración de (8.1), la estimación resultante para el funcional φ nos permite completar la prueba de (8.2). ∎

8.2.4. Demostración de los resultados auxiliares

Demostración del Lema 8.2 Fijamos $k \geq 0$, $1 \leq \tau < \sigma^m$ y $R \in \mathcal{D}_{k_0}$ para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$. Tomamos el conjunto de cubos definido en el Lema 7.12

$$\mathcal{J}_k = \{Q \in \mathcal{D}_{k_0} \,:\, Q \cap \sigma^k\, \hat{B}_R \neq \emptyset\}$$

y recordamos que el Lema 7.12 nos asegura que si $Q \in \mathcal{J}_k$ entonces, $\hat{B}_Q \subset \sigma^{k+1}\, \hat{B}_R$ y, por lo tanto,

$$\tau^{1/m}\, \hat{B}_Q \subset \sigma^{k+2}\, \hat{B}_R.$$

Pues si $x \in \tau^{1/m}\,\hat{B}_Q$ entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x,x_R) &\le D_0\,[d(x,x_Q)+d(x_Q,x_R)] \\ &\le D_0\,[\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_Q)+\sigma^{k+1}\,\mathrm{r}(\hat{B}_R)] \\ &= D_0\,(\tau^{1/m}+\sigma^{k+1})\,\mathrm{r}(\hat{B}_R) \\ &< \sigma^{k+2}\,\mathrm{r}(\hat{B}_R). \end{aligned}$$

De este modo, $x \in \sigma^{k+2}\,\hat{B}_R$, y por lo tanto, queda probada la inclusión. Consecuencia de la inclusión anterior, (7.19) y el hecho de que a es creciente, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\sigma^k\,\hat{B}_R} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_R}} f|\,d\mu &\le \sum_{Q\in\mathcal{J}_k} \int_{\tau^{1/m}\,\hat{B}_Q} |f - S_{t_{\tau^{1/m}\,\hat{B}_Q}} f|\,d\mu \\ &\le \sum_{Q\in\mathcal{J}_k} a(\tau^{1/m}\,\hat{B}_Q)\,\mu(\tau^{1/m}\,\hat{B}_Q) \\ &\le \|a\|_{T_\infty}\,c_\mu\,C_2^n\,\sigma^n\,a(\sigma^{2+k}\,\hat{B}_R)\sum_{Q\in\mathcal{J}_k}\mu(Q) \\ &\le \|a\|_{T_\infty}\,c_\mu^2\,C_2^n\,\sigma^{2\,n}\,a(\sigma^{2+k}\,\hat{B}_R)\,\mu(\sigma^k\,\hat{B}_R). \end{aligned}$$

∎

Demostración de la Proposición 8.3 Seguimos las ideas de la Proposición 4.4 y Proposición 7.9, por lo tanto, omitiremos algunos detalles. Fijamos $x \in Q_i$. La regla de la conmutación implica que

$$\big|S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}} f(x) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(x)\big| \le \big|S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}}\big(f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f\big)(x)\big| + \big|S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}}\big(f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}} f\big)(x)\big| = I + II.$$

Estudiamos cada término por separado. Del mismo modo que en la demostración de la Proposición 7.9, elegimos $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sigma^{k_i}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}) \le \mathrm{r}(\hat{B}_Q) < \sigma^{k_i+1}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}). \tag{8.10}$$

Recordemos que se verifica (7.24). Esto implica que si $y \in \sigma^{k_i}\,\hat{B}_{Q_i}$, $\big|f(y) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(y)\big| = G(y)\,\tilde{a}(\hat{B}_Q)$. De este modo, obtenemos la siguiente estimación para I:

$$\begin{aligned} I &\le \frac{1}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \int_X g\bigg(\frac{d(x,y)^m}{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}}\bigg)\,\big|f(y) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(y)\big|\,d\mu(y) \\ &\le \frac{\tilde{a}(\hat{B}_Q)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \int_X g\bigg(\frac{d(x,y)^m}{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}}\bigg)\,G(y)\,d\mu(y) \end{aligned} \tag{8.11}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{1}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \int_{(\sigma^{k_i}\,\hat{B}_{Q_i})^c} g\bigg(\frac{d(x,y)^m}{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}}\bigg) \big|f(y) - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f(y)\big|\, d\mu(y) \\
&= I_1\, \tilde{a}(\hat{B}_Q) + I_2.
\end{aligned}
$$

Para estimar I_1 y I_2, descomponemos X como unión de anillos diádicos $\{C_k(Q_i)\}_{k\geq 2}$. Entonces, si $x \in Q_i$ y $y \in C_k(Q_i)$, en el capítulo anterior vimos que

$$
\frac{d(x,y)^m}{\tau\, t_{\hat{B}_{Q_i}}} \geq \lambda_k \qquad \text{donde} \qquad \lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2, \\ \sigma^{m\,(k-3)}, & \text{si } k \geq 3. \end{cases}
$$

Por otro lado, notar que $\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i} \subset \sigma^{k+1}\,B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))$ y, utilizando que la medida es doblante, tenemos que

$$
\mu\big(\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i}\big) \leq \sigma^{(k+1)\,n}\,\mu\big(\sigma^{k+1}\,B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big).
$$

De las observaciones anteriores, el Lema 6.3 y el decaimiento de g, obtenemos

$$
I_1 \leq \sum_{k\geq 2} g(\lambda_k)\, \frac{\mu(\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i})}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \fint_{\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i}} G\, d\mu \lesssim \lambda_0.
$$

Continuamos con I_2. Primero observamos que para cada $k \geq k_i + 1$, el hecho de que la medida sea doblante implica que

$$
\frac{\mu\big(\sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q\big)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \leq c_\mu \left(\frac{\sigma^{k-k_i+1}\,\mathrm{r}(\hat{B}_Q)}{\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i})}\right)^n < c_\mu\, \sigma^{n\,(k+2)}.
$$

Por otro lado, $a \in T_\infty$ implica que

$$
a(\sigma^{k-k_i+3}\,\hat{B}_Q) \leq a(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q).
$$

Entonces, utilizando las observaciones previas y el Lema 8.2, escribimos:

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \sum_{k\geq k_i+1} g(\lambda_k) \int_{\sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f|\, d\mu \\
&\leq \sum_{k\geq k_i+1} g(\lambda_k)\, \frac{\mu\big(\sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q\big)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\,\mathrm{r}(\hat{B}_{Q_i}))\big)} \fint_{\sigma^{k-k_i+1}\,\hat{B}_Q} |f - S_{\tau\, t_{\hat{B}_Q}} f|\, d\mu \\
&\lesssim \sum_{k\geq k_i+1} g(\lambda_k)\, \sigma^{n\,k}\, a(\sigma^{k-k_i+3}\,\hat{B}_Q) \\
&\lesssim \sum_{k\geq k_i+1} g(\lambda_k)\, \sigma^{n\,k}\, a(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q)
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \sum_{k\geq 3} g(\lambda_k)\,\sigma^{n\,k}\,a(\sigma^{k+1}\,\hat{B}_Q)$$
$$\lesssim \sum_{k\geq 2} g\big(\sigma^{m\,(k-4)}\big)\,\sigma^{n\,k}\,a(\sigma^{k}\,\hat{B}_Q) \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q).$$

Volviendo a (8.11) con todas las estimaciones obtenidas, podemos escribir que

$$I \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q).$$

Para II obtenemos la misma estimación. Notar que $k \geq k_i+1$, la medida es doblante y $a \in T_\infty$ implican que

$$\frac{\mu\big(\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i}\big)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\;\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \lesssim \sigma^{n\,(k-k_i)} \qquad \text{y} \qquad a(\sigma^{k+2}\,\hat{B}_{Q_i}) \leq a(\sigma^{k-k_i+3}\,\hat{B}_Q).$$

Utilizando estas observaciones y el Lema 8.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{g(0)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\;\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \int_{\sigma^{k_i+1}\,\hat{B}_{Q_i}} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i}}} f|\,d\mu \\
&\quad + \frac{1}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\;\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \sum_{k\geq k_i+2} g\left(\lambda_k\,\frac{t_{\hat{B}_{Q_i}}}{t_{\hat{B}_Q}}\right) \int_{\sigma^{k}\,\hat{B}_{Q_i}} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i}}} f|\,d\mu \\
&= g(0)\,\frac{\mu\big(\sigma^{k_i+1}\,\hat{B}_{Q_i}\big)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\;\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \fint_{\sigma^{k_i+1}\,\hat{B}_{Q_i}} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i}}} f|\,d\mu \\
&\quad + \sum_{k\geq k_i+2} g\left(\lambda_k\,\frac{t_{\hat{B}_{Q_i}}}{t_{\hat{B}_Q}}\right) \frac{\mu\big(\sigma^k\,\hat{B}_{Q_i}\big)}{\mu\big(B(x,\tau^{1/m}\;\mathrm{r}(\hat{B}_Q))\big)} \fint_{\sigma^{k}\,\hat{B}_{Q_i}} |f - S_{\tau\,t_{\hat{B}_{Q_i}}} f|\,d\mu \\
&\lesssim a(\sigma^{k_i+3}\,\hat{B}_{Q_i}) + \sum_{k\geq k_i+2} g\big(\sigma^{m\,(k-k_i-4)}\big)\,\sigma^{n\,(k-k_i)}\,a(\sigma^{k+2}\,\hat{B}_{Q_i}) \\
&\lesssim a(\sigma^{k_i+3}\,\hat{B}_{Q_i}) + \sum_{k\geq k_i+2} g\big(\sigma^{m\,(k-k_i-4)}\big)\,\sigma^{n\,(k-k_i)}\,a(\sigma^{k-k_i+3}\,\hat{B}_{Q}) \\
&\lesssim a(\sigma^{4}\,\hat{B}_{Q}) + \sum_{k\geq 5} g\big(\sigma^{m\,(k-7)}\big)\,\sigma^{n\,k}\,a(\sigma^{k}\,\hat{B}_{Q}) \lesssim \tilde{a}(\hat{B}_Q).
\end{aligned}$$

∎

8.3. Aplicaciones

Ejemplo 8.4 (Espacios BMO **y Morrey-Campanato)** Aplicando el Teorema 8.1 podemos conseguir mejores estimaciones que las obtenidas en el Ejemplo 7.14. Allí hemos mostrado que para cualquier $\alpha \geq 0$ fijo, $a(B) = \mu(B)^\alpha \in D_r$ para todo $1 \leq r < \infty$

y, utilizando el Teorema 7.1, hemos concluido que cualquier $f \in L_S(\alpha)$ verifica que

$$\|f - S_{t_B} f\|_{L^r,B} \lesssim \mu(B)^\alpha,$$

para cada $1 \leq r < \infty$ y para toda bola B. Ahora observamos que el funcional $a(B) = \mu(B)^\alpha$ es creciente y doblante. Entonces, aplicando el Teorema 8.1, mejoramos la estimación anterior. Pues tenemos que cada $f \in L_S(\alpha)$ verifica

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L,B} \lesssim \mu(B)^\alpha$$

para toda bola B. Obsérvese que esta estimación extiende los resultados de [DuY], [DDY] y [Tan] donde se suponía adicionalmente que la familia $\{S_t\}_{t>0}$ era un semigrupo.

También se verifica la versión con peso de esta desigualdad. Del mismo modo que en el Ejemplo 4.5, también podemos obtener resultados de automejora para funciones $f \in \mathrm{BMO}_{\varphi,S}(\mu)$ en este contexto (donde $\mathrm{BMO}_{\varphi,S}(\mu)$ se define como allí, reemplazando la medida de Lebesgue por μ).

Ejemplo 8.5 (Medias fraccionarias) Como hicimos anteriormente suponemos que los anillos no son vacíos. En este ejemplo mejoramos los resultados obtenidos en el Ejemplo 7.16 en el rango $p \geq n/\alpha$. Como allí dados $\lambda \geq 1$, $0 < \alpha < n$, un peso u, y $f \in \mathcal{M}$ suponemos que para toda bola B se tiene

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \lesssim \mathrm{r}(B)^\alpha \left(\frac{u(\lambda\, B)}{\mu(B)}\right)^{1/p} = a(B). \tag{8.12}$$

Notar que si $p \geq n/\alpha$, el funcional a es creciente. Esto puede obtenerse de forma sencilla puesto que usando que μ es doblante (ver (6.2)) se tiene que si $B_1 \subset B_2$ entonces,

$$\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)} \leq c_\mu \left(\frac{\mathrm{r}(B_2)}{\mathrm{r}(B_1)}\right)^n.$$

Usando esta estimación y que $p \geq n/\alpha$ concluimos que $a \in T_\infty$:

$$\frac{a(B_1)}{a(B_2)} = \left(\frac{\mathrm{r}(B_1)}{\mathrm{r}(B_2)}\right)^\alpha \left(\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)}\right)^{1/p} \left(\frac{u(\lambda\, B_1)}{u(\lambda\, B_2)}\right)^{1/p} \leq c_\mu^{1/p} \left(\frac{\mathrm{r}(B_1)}{\mathrm{r}(B_2)}\right)^{\alpha - n/p} \leq C.$$

Podemos aplicar el Teorema 8.1 para concluir que

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L,B} \lesssim \sum_{k \geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\, g(c\,\sigma^{m\,k})\; \mathrm{r}(\sigma^k\, B)^\alpha \left(\frac{u(\sigma^k\, \lambda\, B)}{\mu(\sigma^k\, B)}\right)^{1/p}.$$

Si además u es doblante, mejoramos la estimación anterior escribiendo $\mathrm{r}(B)^{\alpha}\left(\frac{u(B)}{\mu(B)}\right)^{1/p}$ en su lado derecho. Análogamente, si tomamos como punto de partida (7.37) y $p \geq n/\alpha$ entonces, a es creciente y, aplicando el Teorema 8.1, tenemos que

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L,B} \lesssim \sum_{k\geq 0} \sigma^{2\,n\,k}\, g(c\,\sigma^{m\,k})\ \mathrm{r}(\sigma^k\, B)^{\alpha} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_{\lambda\, B} |Xf|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Si además $|Xf|^p \in A_\infty(\mu)$, podemos escribir $\mathrm{r}(B)^{\alpha}\left(\fint_B |Xf|^p\, d\mu\right)^{1/p}$ en el lado derecho de la desigualdad anterior.

Ejemplo 8.6 (Desigualdades de tipo Poincaré reducidas y expandidas) Al igual que antes supondremos que los anillos no son vacíos. Fijamos $p \geq 1$ y suponemos que $f \in \mathcal{M}$ satisface

$$\fint_B |f - S_{t_B} f|\, d\mu \leq \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k\, B) \left(\fint_{\sigma^k\, B} h^p\, dx\right)^{1/p} = a(Q), \tag{8.13}$$

para toda bola $B \subset X$ y donde es $\{\alpha(k)\}_{k\geq 0}$ una sucesión de números no-negativos y h una función medible no-negativa. Estas estimaciones fueron denominadas en las Secciones 3.3.3 y 3.3.1 desigualdades de Poincaré expandidas o reducidas en el caso particular en que $\alpha(k) = 0$ para todo $k \geq 1$.

Ahora vamos a ver que cuando el funcional que genera las estimaciones anteriores es creciente podemos estudiar todas estas desigualdades de forma conjunta. Para ello escribimos

$$a(B) = \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, a_0(\sigma^k\, B) \qquad \text{con} \qquad a_0(B) = \mathrm{r}(B) \left(\fint_B h^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

(1) **Desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev:** Del Teorema 8.1 se sigue que si $f \in \mathcal{M}$ satisface (8.13) con $p \geq n$ (donde n es la constante que aparece en (6.1) y (6.2)), entonces para toda bola B

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L,B} \lesssim \sum_{k\geq 0} \hat{\alpha}(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k\, B) \left(\fint_{\sigma^k\, B} h^p\, d\mu\right)^{1/p}$$

donde

$$\hat{\alpha}(k) = \sum_{0\leq l\leq k} \sigma^{n\,l}\, g\big(c\,\sigma^{m\,l}\big)\, \alpha(k-l), \qquad k \geq 0.$$

Obsérvese que esta estimación mejora a las obtenidas en el Ejemplo 7.17 (en el caso de desigualdades reducidas) y en el Corolario 7.24 y la Observación 7.25 (en el caso de desigualdades expandidas).

Para obtener la estimación deseada, basta observar que puesto que μ es doblante (ver (6.2))y $p \geq n$, si $B_1 \subset B_2$ entonces,

$$\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)} \leq c_\mu \left(\frac{\mathrm{r}(B_2)}{\mathrm{r}(B_1)}\right)^n \leq c_\mu \left(\frac{\mathrm{r}(B_2)}{\mathrm{r}(B_1)}\right)^p.$$

Esto implica que claramente $a_0 \in T_\infty$ y consecuentemente $a \in T_\infty$. Así, aplicamos el Teorema 8.1 y conseguimos la estimación deseada.

(2) **Desigualdad de tipo Poincaré-Sobolev para pesos $A_r(\mu)$, $r \geq 1$:** En este caso vamos a mejorar lo obtenido en los Ejemplos 7.18 y 7.19 (en el caso de desigualdades reducidas) y los resultados análogos para las desigualdades expandidas. Si $p \geq n$ y $w \in A_r(\mu)$ para algún $r \geq 1$, vamos a demostrar que si $f \in \mathcal{M}$ satisface (8.13) entonces para toda bola B

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L(w),B} \leq C \sum_{k\geq 0} \tilde{\alpha}(k)\ \mathrm{r}(\sigma^k\, B) \left(\fint_{\sigma^k\, B} h^{p\,r}\, dw\right)^{\frac{1}{p\,r}},$$

para $\{\hat{\alpha}(k)\}_{k\geq 0}$ como en el ejemplo anterior.

Para demostrar esta estimación definimos los funcionales

$$a^w(B) = \sum_{k\geq 0} \alpha(k)\, a_0^w(\sigma^k\, B) \qquad \text{con} \qquad a_0^w(B) = \mathrm{r}(B)\left(\fint_B h^{p\,r}\, dw\right)^{\frac{1}{p\,r}}.$$

De esta forma, usando que $w \in A_r(\mu)$ obtenemos que si $B_1 \subset B_2$

$$\frac{\mathrm{r}(B_1)}{\mathrm{r}(B_2)}\left(\frac{w(B_2)}{w(B_1)}\right)^{\frac{1}{p\,r}} \lesssim \frac{\mathrm{r}(B_1)}{\mathrm{r}(B_2)}\left(\frac{\mu(B_2)}{\mu(B_1)}\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left(\frac{\mathrm{r}(B_1)}{\mathrm{r}(B_2)}\right)^{1-\frac{n}{p}} \lesssim 1,$$

donde hemos usado (7.27) (con r en lugar de p pues $w \in A_r(\mu)$), (6.2) y que $p \geq n$. Esto nos permite probar que $a_0 \in T_\infty$ y por tanto $a \in T_\infty$. Por otro lado, como $w \in A_r(\mu)$ obtenemos que $a_0(B) \lesssim a_0^w(B)$ y por tanto $a(B) \lesssim a^w(B)$. Todos estos ingredientes nos permiten aplicar el Teorema 8.1 y conseguimos la estimación deseada.

Para concluir con las aplicaciones podemos observar que combinando el ejemplo anterior con la Proposición 8.3 podemos obtener las siguientes estimaciones que mejoran lo obtenido en el Corolario 7.32:

Corolario 8.7 *Sea M una variedad de Riemann, completa, no-compacta, conexa, con medida de volumen doblante y (UE), y sea $p \geq n$.*

(*a*) *Sea* $S_t^m = I - (I - e^{-t\,\Delta})^m$ *con* $m \geq 1$*. Entonces, cualquier función suave con soporte compacto* f *verifica que*

$$\|f - S_{t_B} f\|_{\exp L, B} \leq C \sum_{k \geq 1} \sigma^{-k\,(2\,m-n)}\ \mathrm{r}(\sigma^k\, B) \left(\fint_{\sigma^k\, B} |\Delta^{1/2} f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

(*b*) *Cualquier función suave con soporte compacto* f *verifica que*

$$\|f - e^{-t_B\,\Delta} f\|_{\exp L, B} \leq C \sum_{k \geq 1} e^{-c\,\sigma^k}\ \mathrm{r}(\sigma^k\, B) \left(\fint_{\sigma^k\, B} |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Bibliografía

[Aus] P. Auscher, *On necessary and sufficient conditions for L^p estimates of Riesz transform associated elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. **186**, no. 871 (2007).

[AC] P. Auscher y T. Coulhon, *Riesz transforms on manifolds and Poincaré inequalities*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **4**, no. 5, 1–25 (2005).

[ACDH] P. Auscher, T. Coulhon, X.T. Duong y S. Hofmann, *Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. Paris **37**, no. 6, 911-957 (2004).

[AM1] P. Auscher y J.M. Martell, *Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part II: Off-diagonal estimates on spaces of homogeneous type*, J. Evol. Equ. **7**, no. 2, 265–316 (2007).

[AM2] P. Auscher y J.M. Martell, *Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part III: Harmonic analysis of elliptic operators*, J. Funct. Anal. **241**, 703–746 (2006).

[BJM] N. Badr, A. Jiménez-del-Toro y J.M. Martell, *L^p self-improvement of generalized Poincaré inequalities in spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal. **260**, no. 11, 3147–3188 (2011).

[BCLS] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux y L. Saloff-Coste, *Sobolev inequalities in disguise*, Indiana J. Math. **44**, 1033–1074 (1995).

[BeS] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Inc. **129** (1988).

[BuG] D.L. Burkholder y R.F. Gundy, *Extrapolation and interpolation of quasilinear operators on martingales*, Acta Math. **124**, 249–304 (1970).

[Bus] P. Buser, *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. **15**, 213–230 (1982).

[CCH] G. Carron, T. Coulhon y A. Hassell, *Riesz transform and L^p-cohomology for manifolds with Euclidean ends*, Duke Math. J. **133**, no. 1, 59–93 (2006).

[Chr] M. Christ, *A T(B) theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloq. Math. **60/61**, no. 2, 601–628 (1990).

[CoiW] R.R. Coifman y G. Weiss, *Analyse harmonique non-conmutative sur certains espaces homogénes*, Lecture Notes in Mathematics **242**, Springer-Verlag, 1971.

[CouD] T. Coulhon y X.T. Duong, *Riesz transforms for* $1 \leq p \leq 2$, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, 1151–1169 (1999).

[CouL] T. Coulhon y H.Q. Li, *Estimations inférieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et transformée de Riesz*, Arch. Math. **83**, 229–242 (2004).

[Dav] E.B. Davies, *Non-Gaussian aspects of heat kernel behaviour*, J. London Math. Soc. (2) **55**, no. 1, 105–125 (1997).

[DDY] D. Deng, X.T. Duong y L. Yan, *A characterization of the Morrey-Campanato spaces*, Math. Z. **250**, no. 3, 641–655 (2005).

[Duo] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, AMS, 2000.

[DuY] X.T. Duong y L. Yan, *New function spaces of BMO type, the John-Nirenberg inequality, interpolation, and applications*, Comm. Pure Appl. Math. **58**, no. 10, 1375–1420 (2005)

[FKS] E.B. Fabes, C. Kenig y R. Serapioni, *The local regularity of solution of degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **7**, no. 1, 77–116 (1982).

[Fra] B. Franchi, *Inégalités de Sobolev pour des champs de vecteurs lipschitziens*, C. R. Acad. Sci. Paris, **311**, no. 6, 329–332 (1990).

[FPW] B. Franchi, C. Pérez y R.L. Wheeden, *Self-improving properties of John-Nirenberg and Poincaré inequalities on space of homogeneous type*, J. Funct. Anal. **153**, no. 1, 108–146 (1998).

[GC-RF] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norms inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies Vol. 116, North Holland, Amsterdam, 1985.

[GaN] N. Garofalo y D. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **49**, no. 10, 1081–1144 (1996).

[Gra] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Prentice Hall, 2004.

[Gr1] A.A. Grigor'yan, *The heat equation on noncompact Riemannian manifolds*, Mat. Sb. **182**, no. 1, 55–87 (1991); translation in Math. USSR-Sb. **72**, no. 1, 47–77 (1992).

[Gr2] A. Grigor'yan, *Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds*, J. Differential Geom. **45**, no. 1, 33–52 (1997).

[HaK1] P. Hajłasz y P. Koskela, *Sobolev meets Poincaré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320**, no. 10, 1211–1215 (1995).

[HaK2] P. Hajłasz y P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. **145**, no. 688, (2000).

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpelainen y O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic Equations*, Oxford Univ. Press, 1993.

[HeK1] J. Heinonen y P. Koskela, *From local to global in quasiconformal estructures*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **93**, no. 2, 554–556 (1996).

[HeK2] J. Heinonen y P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. **181**, no. 1, 1–61 (1998).

[HoM] S. Hofmann y J.M. Martell, *L^p bounds for Riesz transforms and square roots associated to second order elliptic operators*, Pub. Mat. **47**, 497–515 (2003).

[Jer] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition*, Duke Math. J. **53**, no.2, 503–523 (1986).

[Jim] A. Jiménez-del-Toro, *Exponential self-improvement of generalized Poincaré inequalities associated with approximations of the identity and semigroups*, Trans. Am. Math. Soc. **364**, no. 2, 637–660 (2012).

[JM] A. Jiménez-del-Toro y J.M. Martell, *Self-improvement of Poincaré type inequalities associated with approximations of the identity and semigroups*, Potential Anal. **38**, no. 3, 805–841 (2013).

[JoN] F. John y L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14**, 415–426 (1961).

[Led] M. Ledoux, *On Improved Sobolev embedding theorems*, Math. Res. Lett. **10**, no. 5–6, 659–669 (2003).

[Lu] G. Lu, *Embedding theorems on Campanato-Morrey spaces for vector fields of Hörmander*, Approx. Theory Appl. (N.S.) no. 1, 69–80 (1998).

[MaS] R.A. Macías y C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33**, no.3, 257–270 (1979).

[MaP] P. MacManus and C. Pérez, *Trudinger inequalities without derivatives*, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, no. 5, 1997–2012 (2002).

[Ma1] J.M. Martell, *Sharp maximal functions associated with approximations of the identity in spaces of homogeneous type and applications*, Studia Math. **161**, no.2, 113–145 (2004).

[Ma2] J.M. Martell, *Desigualdades con pesos en el Análisis de Fourier: de los espacios de tipo homogéneo a las medidas no doblantes*, Ph.D. Thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 2001.

[MM] J. Martin y M. Milman, *Sharp Gagliardo-Nirenberg inequalities via symmetrization*, Math. Res. Lett. **14**, no. 1, 49–62 (2007)

[Nir] L. Nirenberg, *Estimates and uniqueness of solutions of elliptic equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics **9**, 509–530 (1956).

[OP] J. Orobitg y C. Pérez, *A_p weights for nondoubling measures in $\mathbb{R}^n$ and applications*, Trans. Am. Math. Soc. **354**, no. 5, 2013–2033 (2002).

[Per] C. Pérez, *Calderón-Zygmund Theory Related to Poincaré-Sobolev Inequalities, Fractional Integrals and Singular Integral Operators*, Paseky's lecture notes.

[RR] M.M. Rao y Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **146**, Marcel Dekker Inc. (1991).

[SC1] L. Saloff-Coste, *Uniformly elliptic operators on Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **36**, no.2, 417–450 (1992).

[SC2] L. Saloff-Coste, *A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities*, Internat. Math. Res. Notices 1992, no. 2, 27–38.

[SC3] L. Saloff-Coste, *Parabolic Harnack inequality for divergence-form second-order differential operators*, Potential theory and degenerate partial differential operators (Parma). Potential Anal. **4**, no. 4, 429–467 (1995).

[SC4] L. Saloff-Coste, *Aspects of Sobolev-type inequalities*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **289**, Cambridge University Press (2002).

[Spa] S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa **19**, no. 3, 593–608 (1965).

[ST] J.O. Strömberg y A. Torchinsky, *Weighted Hardy spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1381**, Springer-Verlag, 1989.

[Tan] L. Tang, *New function spaces of Morrey-Campanato type on spaces of homogeneous type*, Illinois J. Math. **51**, no. 2, 625–644 (2007).

[VSCC] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste y T. Coulhon, *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, **100**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Whe] R.L. Wheeden, *A characterization of some weighted norm inequalities for the fractional maximal function*, Studia Math. **107**, 251–272 (1993).

[Yud] Yudovich, Dokl. Akad. Nauk SSRR **138**, 805–808 (1961) (English translation: Soviet Math., no. 2-3, 746–749, 1961).