



Álgebras de Rees, operadores diferenciales y aplicaciones a la resolución de singularidades

Memoria presentada para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

por

María Luz García Escamilla

dirigida por

Orlando E. Villamayor Uriburu

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
Madrid, 2014

A David, Pilar,
Enrique, Esther y
Jesús

Puedes atrapar el viento,
llevar a casa el mar,
evitar que pase el tiempo,
pero no puedes, no puedes dejar,
no puedes dejar el Rock.
Los suaves

¿Qué es la vida? Un frenesí.
¿Qué es la vida? Una ilusión,
una sombra, una ficción,
y el mayor bien es pequeño;
que toda la vida es sueño,
y los sueños, sueños son.

Segismundo en
La vida es sueño,
Calderón de la Barca

Agradecimientos

Me gustaría comenzar estas líneas agradeciendo a mis papás y a mis hermanos todo el cariño y el apoyo que me han dado, me dan y me darán. A Jesús le agradezco el estar ahí siempre, allí o allá, pero siempre ahí.

Esta aventura ha sido posible gracias a Orlando, al que le agradezco su enorme paciencia, su dedicación, todas sus explicaciones y sobre todo su confianza. Y, cómo no, a Ana, a quien agradezco profundamente su apoyo y muchísimas cosas más.

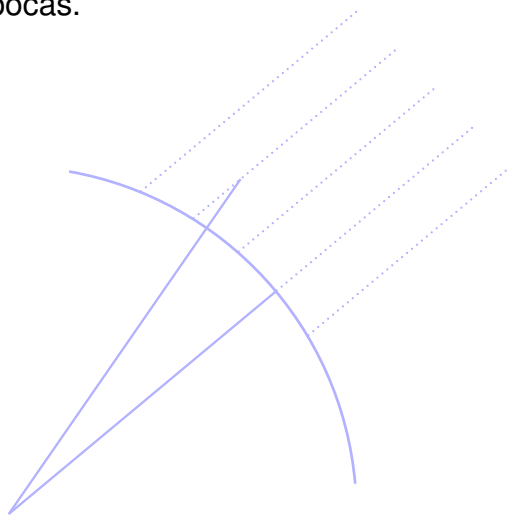
Muchas personas me han animado y alentado en momentos de desesperación. Gracias a mis compis de despacho: Elena, Angélica, Fernando, Nati, Elías, David, Diana, Sebastián y Carlos. Gracias a Adrián, Ana P., Beatriz, Mayte y Amparo, al Friki-Team: Ana G., Pablo, Carlos y Angélica.

También quisiera recordar a los que no veo a menudo pero que para mí son ejemplos: Alberto, Trini, Uri, Rocío, Helena...

Por todos los momentos, gracias Jorge, Esther, Angelines, Edu, Jose, Javi, Belén y Javi.

Por último, quisiera mencionar a todos los miembros del departamento que, especialmente este último año, me han facilitado la vida.

Llegar hasta aquí ha sido posible gracias a muchas personas, aunque aquí haya nombrado sólo a unas pocas.



A todos, ¡Gracias!

Índice

0	Introducción	III
0.1	Álgebras de Rees	III
0.2	Motivación: de resolución de álgebras a resolución de singularidades	V
0.3	Preguntas surgidas por la motivación	VIII
0.3.1	Falta de unicidad en la presentación	VIII
0.3.2	El problema local-global y el Teorema de Canonicidad 5.2.4	X
0.4	Estudio de la canonicidad de álgebras de Rees	XI
0.5	Recopilación de nuestra contribución al problema de resolución de singularidades	XIV
0.6	Descripción del contenido de esta memoria	XVI
1	Básicos	1
1.1	Anillos locales regulares	1
1.2	Anillos graduados	4
1.3	Anillos excelentes	7
1.4	Algunas propiedades de los blow-ups	7
2	Clausura entera	17
2.1	Clausura entera de anillos	17
2.2	Valoraciones y anillos de valoración	25
2.3	Clausura entera de ideales	30
2.3.1	Clausura entera y reducción de ideales	33
2.3.2	Criterios sobre clausura entera de ideales en dominios	36
2.4	Sobre ideales invertibles en esquemas normales	38
2.5	Sobre la valoración de un ideal	39
3	Operadores Diferenciales	41
3.1	Operadores diferenciales sobre anillos de polinomios	41
3.2	Álgebras lisas sobre cuerpos	49
3.2.1	Rango e ideales de Fitting	49
3.2.2	Matriz Jacobiana	54

ÍNDICE

3.2.3	Módulo de diferenciales	55
3.2.4	Nociones de lisitud para álgebras sobre cuerpos	63
3.2.5	Álgebras regulares y álgebras lisas sobre cuerpos	71
3.3	Operadores diferenciales sobre álgebras	74
3.3.1	Módulo de partes principales	74
3.3.2	Módulo de operadores diferenciales	77
3.3.3	Lisitud diferencial para álgebras	80
3.3.4	Construcción del módulo de operadores diferenciales de orden acotado	83
3.3.5	Operadores diferenciales y órdenes de ideales	88
3.4	Morfismos lisos y morfismos étales	94
4	Álgebras de Rees	97
4.1	Definición y ejemplos de álgebras de Rees	97
4.1.1	Lugar singular, orden y conjunto de ceros	98
4.1.2	Operaciones sobre álgebras de Rees	102
4.1.3	Transformación de una álgebra de Rees por explosiones	103
4.2	Clausura entera de álgebras de Rees	105
4.2.1	Lugar singular, orden y conjunto de ceros	110
4.2.2	Clausura entera y transformación por explosiones	112
4.3	Álgebras de Rees diferenciales	115
4.3.1	Lugar singular, orden y conjunto de ceros	117
4.3.2	Saturación por operadores diferenciales y transformación por explosiones: el lema de Giraud	119
5	Equivalencia débil entre álgebras de Rees	121
5.1	Definiciones	121
5.1.1	Relación de equivalencia débil	122
5.1.2	Árboles de álgebras de Rees	126
5.2	Árboles y equivalencia débil: teoremas de Dualidad y de Canonicidad	129
5.2.1	Enunciado de los teoremas de Dualidad y de Canonicidad	129
5.2.2	Relación entre clausura entera y árboles de cerrados	130
5.2.3	Restricciones de árboles en subesquemas cerrados lisos	135
5.2.4	Prueba del Teorema de Dualidad	151
5.3	Otras relaciones de equivalencia	154
5.3.1	Restringiendo la clase de morfismos lisos	155
5.3.2	Restringiendo la clase de transformaciones monoidales	156
	Índice de Símbolos	159
	Índice Alfabético	163
	Bibliografía	165

Capítulo 0

Introducción

Esta memoria está organizada en 6 capítulos. A continuación, en este capítulo 0, veremos una panorámica general de cómo son utilizadas las *álgebras de Rees* en el problema de resolución constructiva de singularidades.

Los capítulos 1, 2 y 3 son compilaciones de resultados que, si bien son conocidos, serán expuestos con detenimiento. Los últimos dos capítulos, el cuarto y el quinto, contienen los resultados específicos del tema de esta memoria.

0.1. Álgebras de Rees

Empezamos dedicando unas líneas a introducir la estructura algebraica con la que vamos a trabajar.

En lo que sigue V denota un esquema liso sobre un cuerpo perfecto. Una *álgebra de Rees* sobre V es un haz de álgebras \mathbb{N} -graduadas finitamente generadas.

Si V es afín, consideramos dos formas de representar las álgebras de Rees: mediante “filtraciones”,

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n W^n \subset \mathcal{O}_V[W];$$

o mediante sus generadores,

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}] \subset \mathcal{O}_V[W].$$

En ambos casos la variable W denota la ponderación en el álgebra graduada.

Las álgebras de Rees son herramientas importantes en el álgebra conmutativa y tienen múltiples aplicaciones a la geometría algebraica (véase por ejemplo [50]).

Nosotros estudiaremos aquí su relación con el problema de resolución de singularidades.

CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

A cada álgebra de Rees \mathcal{G} se le puede asociar un cerrado en V , su *lugar singular*:

$$\text{Sing } \mathcal{G} := \bigcap_{n \geq 1} \{x \in V : \nu_x(I_n) \geq n\} = \bigcap_{i=1}^s \{x \in V : \nu_x(f_i) \geq n_i\},$$

donde ν_x denota el orden en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V,x}$ (véase la Definición 1.2.6).

Un subesquema cerrado y liso $Y \subset V$ es un *centro permisible* para \mathcal{G} si $Y \subset \text{Sing } \mathcal{G}$. Cuando esta condición se satisface, el blow-up de V en Y

$$V \xleftarrow{\rho} V_1$$

se dice que es una *transformación permisible para \mathcal{G}* . Diremos que el *álgebra de Rees transformada de \mathcal{G} mediante ρ* es

$$\mathcal{G}_1 := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_{n,1} W^n,$$

donde $I_{n,1}$ satisface la siguiente igualdad:

$$I_n \mathcal{O}_{V_1} = I(H)^n I_{n,1}$$

(aquí H denota la *hipersuperficie excepcional* de la explosión ρ). Se puede probar que

$$\mathcal{G}_1 := \mathcal{O}_{V_1}[f_{1,1}W^{n_1}, \dots, f_{s,1}W^{n_s}],$$

donde cada $f_{i,1}$ es un *transformado débil con peso n_i* , i. e., un elemento de \mathcal{O}_{V_1} que satisface la siguiente igualdad:

$$\langle f_i \rangle \mathcal{O}_{V_1} = I(H)^{n_i} \langle f_{i,1} \rangle. \quad (0.1.0.1)$$

Diremos que una sucesión finita de transformaciones permisibles

$$\begin{array}{ccccccc} V = V_0 & \xleftarrow{\rho_0} & V_1 & \xleftarrow{\rho_1} & \dots & \xleftarrow{\rho_{M-2}} & V_{M-1} & \xleftarrow{\rho_{M-1}} & V_M \\ \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 & & \mathcal{G}_1 & & \dots & & \mathcal{G}_{M-1} & & \mathcal{G}_M \end{array}$$

es una *resolución de \mathcal{G}* si $\text{Sing } \mathcal{G}_M = \emptyset$.

Se sabe que si uno puede construir una resolución para cada álgebra de Rees, entonces puede construir una resolución para cada variedad singular X inmersa en V . Esta implicación es conocida, pero su justificación es altamente técnica.

Uno de los objetivos de esta memoria es simplificar esta justificación. En la Sección 0.5, concretamente en el apartado A, aclararemos en qué consiste esta simplificación.

0.2. Motivación: de resolución de álgebras a resolución de singularidades

Supongamos que X es una variedad singular sobre un cuerpo perfecto. El problema de resolución de singularidades consiste en probar que existe otra variedad \tilde{X} lisa y un morfismo propio y birracional

$$X \longleftarrow \tilde{X}.$$

Normalmente una resolución de singularidades se construye en sucesivas etapas, digamos

$$X \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_{M-1} \longleftarrow X_M = \tilde{X},$$

en la que cada $X_i \longleftarrow X_{i+1}$ es el blow-up de X_i en un centro liso.

Las explosiones en centros lisos son muy adecuadas cuando la variedad singular X viene provista de una inmersión en una variedad lisa, digamos $X \subset V$, porque en este caso obtenemos un diagrama de explosiones e inmersiones:

$$\begin{array}{ccc} V & \longleftarrow & V_1 \\ \cup & & \cup \\ X & \longleftarrow & X_1, \end{array}$$

donde V_1 vuelve a ser liso.

De este modo, seleccionar centros lisos que den lugar a una resolución de singularidades se traduce en una estrategia de simplificación de las ecuaciones que definen a X como subvariedad de la variedad lisa V .

Para llevar adelante esta idea, se ponderan las singulares de la variedad X y se aborda, en primer lugar, el conjunto de aquellas singularidades que son peores según esta valoración. El paso siguiente es llegar, mediante explosiones en centros lisos incluidos en este conjunto, a una variedad cuyas singularidades sean más simples.

Éste es el enfoque de Hironaka, que toma como punto de partida la ponderación de las singularidades que se deriva de la *función de Hilbert-Samuel*, HS . Indicamos a continuación alguna de sus propiedades relevantes:

Sea $\underline{\text{Máx}} HS_X$ el conjunto de los puntos de X donde HS_X alcanza su valor máximo, i.e.

$$\underline{\text{Máx}} HS_X := \{x \in X : HS_X(x) = \text{máx} HS_X\}.$$

Si $Y \subset \underline{\text{Máx}} HS_X$ es una subvariedad cerrada y lisa, y consideramos la explosión de X en Y , $X \longleftarrow X_1$, entonces

$$\text{máx} HS_X \geq \text{máx} HS_{X_1}.$$

Así que el objetivo de Hironaka es demostrar que, tras un número finito de explosiones, convenientemente escogidas, esta desigualdad termina siendo estricta.

Una segunda propiedad de la función de Hilbert-Samuel es que, fijada una inmersión

$$X \subset V, \quad (0.2.0.1)$$

el estrato $\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$ se puede representar mediante ecuaciones locales y esta descripción se preserva por explosiones. En otras palabras, mientras el valor máximo de la función de Hilbert-Samuel no baje, las “trasformadas” de las ecuaciones locales siguen definiendo los conjuntos de las singularidades “peores” de los transformados de X .

Concretamente, para cada punto $x \in \underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$, se puede probar que, después de reemplazar a V por un entorno étale del punto x , existen funciones

$$f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}_{V,x} \quad (0.2.0.2)$$

de modo que

(1)

$$\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X = \bigcap_{i=1}^s \{x \in V : \nu_x(f_i) \geq n_i\}, \quad (0.2.0.3)$$

donde n_i es la multiplicidad máxima de $f_i = 0$, para cada $i = 1, \dots, s$ y

(2) la igualdad en (0.2.0.3) se preserva tras explosiones en centros lisos contenidos en el estrato $\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$, siempre que el valor máximo de la función de Hilbert-Samuel no baje.

Para simplificar la notación vamos a suponer que las funciones de (0.2.0.2) y la expresión (0.2.0.3) están definidas globalmente en V . En estas condiciones, la segunda condición significa que si

$$\begin{array}{ccccccc} V & = & V_0 & \xleftarrow{\rho_0} & V_1 & \xleftarrow{\rho_1} & \dots & \xleftarrow{\rho_{m-2}} & V_{m-1} & \xleftarrow{\rho_{m-1}} & V_m \\ X & = & X_0 & & X_1 & & \dots & & X_{m-1} & & X_m \end{array} \quad (0.2.0.4)$$

es una sucesión de explosiones en centros lisos $Y_j \subset \underline{\text{Máx}} \text{HS}_{X_j}$, donde cada X_j denota el transformado estricto de X_{j-1} en V_j y sucede que

$$\text{máx HS}_{X_0} = \text{máx HS}_{X_1} = \dots = \text{máx HS}_{X_m},$$

entonces, para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\underline{\text{Máx}} \text{HS}_{X_j} = \bigcap_{i=1}^s \{x \in V_j : \nu_x(f_{i,j}) \geq n_i\}, \quad (0.2.0.5)$$

donde $f_{i,j}$ es un transformado débil de $f_{i,j-1}$ mediante ρ_{j-1} (ver la definición en (0.1.0.1)).

0.2. MOTIVACIÓN: DE RESOLUCIÓN DE ÁLGEBRAS A RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

A continuación vamos a ver que es natural reescribir las expresiones (0.2.0.3) y (0.2.0.5) en términos de álgebras de Rees.

Por ejemplo, si $\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$ tenemos que

$$\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X = \text{Sing } \mathcal{G}, \quad (0.2.0.6a)$$

y esta igualdad se conserva por explosiones mientras no baje máx HS_X . Es decir, si el valor máximo de HS_X permanece constante a lo largo de la sucesión de explosiones (0.2.0.4), se tiene que para cada $j = 1, \dots, m$,

$$\underline{\text{Máx}} \text{HS}_{X_j} = \text{Sing } \mathcal{G}_j. \quad (0.2.0.6b)$$

Resumiendo, podemos decir que si reemplazamos a V por un entorno (étale) de un punto x , digamos $U \rightarrow V$, podemos asociar al valor $\text{máx HS}_{X \cap U}$ una álgebra de Rees $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_U[W]$. Cuando decimos que la igualdad (0.2.0.6b) se mantiene mientras máx HS_X no baje queremos decir que si $\text{Sing } \mathcal{G}_m = \emptyset$ entonces que $\text{máx HS}_{X_m} < \text{máx HS}_X$. Por tanto, si encontramos una sucesión de explosiones que resuelva \mathcal{G} tendremos que el valor máximo de la función de Hilbert-Samuel al final de esta sucesión baja, al menos para el transformado estricto de $X \cap U$.

Para una álgebra de Rees definida sobre un esquema liso sobre un cuerpo de característica cero, existe un proceso para construir una resolución del álgebra. Luego, en este caso, este mismo proceso permite bajar el valor máximo de la función de Hilbert-Samuel en entornos de variedades singulares.

Hironaka prueba que, dada una variedad X , si uno sabe bajar el valor máximo de la función HS por medio de transformaciones monoidales, entonces llega a una resolución de singularidades de X .

La discusión anterior nos indica que, fijada una inclusión $X \subset V$ (donde V es liso), podemos asociar a cada punto $x \in \underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$ una álgebra \mathcal{G} en un entorno (étale) de $x \in V$ que satisface las condiciones de (0.2.0.6). Al ser esta asignación local, la resolución de álgebras de Rees conlleva una *resolución local* de X .

Una de las contribuciones de este trabajo es que, fijada una inclusión $X \subset V$ global, podemos definir un haz de álgebras \mathcal{G} en V con las condiciones anteriores. Este resultado, que se discutirá en el Apartado 0.3.2, permite simplificar algunos aspectos del teorema de resolución de singularidades como, por ejemplo, el pegado de las resoluciones locales (véase la Sección 0.5).

0.3. Preguntas surgidas por la motivación

0.3.1. Falta de unicidad en la presentación

Fijemos una inmersión $X \subset V$ en un esquema liso. Si suponemos que existe una álgebra de Rees sobre V que describe el estrato $\underline{\text{Máx HS}}_X$ en el sentido de las expresiones (0.2.0.6), ésta no tiene porqué ser única.

Por ejemplo, consideramos la variedad

$$X \equiv \{f = 0\} \subset \mathbb{A}_k^2 \equiv \text{Spec}(k[Z, T]), \quad \text{donde } f = Z^2 - T^5.$$

En la Figura 1 se representa el orden de f en los distintos anillos locales regulares $\mathcal{O}_{V,x}$. Observamos que la multiplicidad máxima en puntos de X es 2.

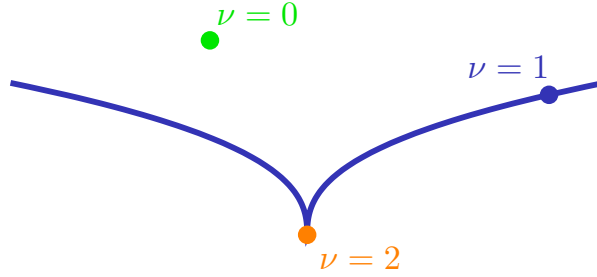


Figura 1: Orden de $f = Z^2 - T^5$ en puntos cerrados.

Así pues $\underline{\text{Máx HS}}_X$ está formada por los puntos de \mathbb{A}_k^2 donde el orden de $Z^2 - T^5$ es mayor o igual que 2, en este caso, el origen. Podemos escoger la siguiente álgebra de Rees:

$$\mathcal{K} = k[Z, T][(Z^2 - T^5)W^2] \subset k[Z, T][W],$$

y con ella describir los puntos de multiplicidad máxima de X :

$$\underline{\text{Máx HS}}_X = \text{Sing } \mathcal{K} = \{x \in \mathbb{A}_k^2 : \nu_x(f) \geq 2\} = \{(0, 0)\}.$$

Notemos que si en lugar de considerar f , hubiésemos considerado f^2 entonces también podemos representar el cerrado $\underline{\text{Máx HS}}_X$ como los puntos donde el orden de f^2 es mayor o igual que 4. En la Figura 2 se representa el orden de f^2 en los puntos cerrados de \mathbb{A}_k^2 . Por lo que también el álgebra de Rees:

$$\mathcal{G} = k[Z, T][(Z^2 - T^5)^2W^4] \subset k[Z, T][W]$$

describe los puntos de multiplicidad máxima:

$$\underline{\text{Máx HS}}_X = \text{Sing } \mathcal{G} = \{x \in \mathbb{A}_k^2 : \nu_x(f^2) \geq 4\} = \{(0, 0)\}.$$

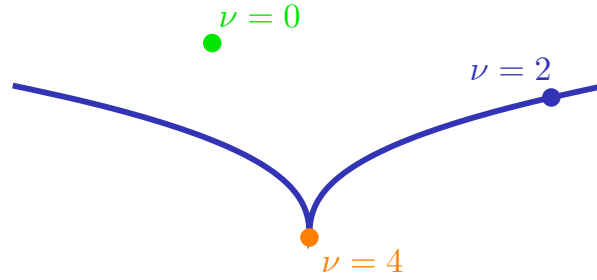


Figura 2: Orden de $f^2 = (Z^2 - T^5)^2$ en puntos cerrados.

De hecho, aunque los valores que toma la función orden no son los mismos, las estratificaciones descritas por las funciones orden de f y de f^2 coinciden.

Veremos a continuación que la igualdad entre los lugares singulares,

$$\text{Sing } \mathcal{K} = \text{Sing } \mathcal{G},$$

se conserva por transformaciones permisibles.

En este caso, el único centro liso posible $Y \subset \text{Sing } \mathcal{K} = \text{Sing } \mathcal{G}$ es el origen. Sea

$$\mathbb{A}_k^2 \longleftarrow V_1$$

el blow-up del espacio afín en este punto. Tomando el siguiente recubrimiento por abiertos:

$$V_1 = U_1 \cup U_2, \quad \text{donde } U_1 = \text{Spec} \left(k \left[\frac{Z}{T}, T \right] \right) \text{ y } U_2 = \text{Spec} \left(k \left[Z, \frac{T}{Z} \right] \right),$$

podemos escribir localmente esta explosión como:

$$\begin{array}{ccc} k[Z, T] & \longrightarrow & k \left[\frac{Z}{T}, T \right] & \text{ y } & k[Z, T] & \longrightarrow & k \left[Z, \frac{T}{Z} \right] \\ Z & \longmapsto & \frac{Z}{T} \cdot T & & Z & \longmapsto & Z \\ T & \longmapsto & T & & T & \longmapsto & Z \cdot \frac{T}{Z}. \end{array}$$

Las álgebras de Rees transformadas en cada carta son:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(U_1) &= k \left[\frac{Z}{T}, T \right] \left[\left(\left(\frac{Z}{T} \right)^2 - T^3 \right) W^2 \right], & \mathcal{K}_1(U_2) &= k \left[Z, \frac{T}{Z} \right] \left[\left(1 - \left(\frac{T}{Z} \right)^5 Z^3 \right) W^2 \right], \\ \mathcal{G}_1(U_1) &= k \left[\frac{Z}{T}, T \right] \left[\left(\left(\frac{Z}{T} \right)^2 - T^3 \right)^2 W^4 \right] & \text{ y } & \mathcal{G}_1(U_2) &= k \left[Z, \frac{T}{Z} \right] \left[\left(1 - \left(\frac{T}{Z} \right)^5 Z^3 \right)^2 W^2 \right], \end{aligned}$$

siendo sus lugares singulares:

$$\text{Sing } \mathcal{G}_1 = \text{Sing } \mathcal{K}_1 = \{ \text{origen de la carta } U_1 \}.$$

La siguiente posible transformación monoidal es el blow-up de U_1 en el origen. Tras ella, se obtiene es que

$$\text{Sing } \mathcal{K}_2 = \text{Sing } \mathcal{G}_2 = \emptyset.$$

Por lo tanto, no existe unicidad en la presentación de $\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$ mediante álgebras de Rees en el sentido de las expresiones (0.2.0.6).

0.3.2. El problema local-global y el Teorema de Canonicidad 5.2.4

Hemos afirmado que en un entorno de un punto $x \in \text{Máx HS}_X$, fijada una inmersión local $X \subset V$ en un esquema liso, existen funciones y enteros que satisfacen las condiciones expresadas en (0.2.0.3) y (0.2.0.5). Con ellos hemos construido una álgebra de Rees que satisface las condiciones (0.2.0.6).

También hemos visto que, en un mismo entorno, podemos obtener distintas álgebras de Rees que cumplen el mismo papel. Así que es natural requerir que

si dos álgebras distintas cumplen las condiciones expresadas en (0.2.0.6), entonces sus resoluciones induzcan la misma sucesión de explosiones sobre X .

Este requerimiento se satisface cuando el cuerpo subyacente tiene característica cero. Y se cumple debido a propiedades del algoritmo de resolución de álgebras de Rees.

Esto nos llevará a establecer una relación de equivalencia que nos permitirá agrupar las álgebras de Rees que satisfacen las condiciones locales anteriores.

En particular, serán equivalentes aquellas álgebras de Rees que cumplan que:

- (1) sus lugares singulares coinciden y
- (2) la situación anterior se preserve por transformaciones en centros lisos contenidos en sus lugares singulares.

Probaremos que existe un *representante canónico* para cada clase de equivalencia.

Notemos que las presentaciones mencionadas en (0.2.0.3) son locales por lo que el representante canónico mencionado anteriormente describirá Máx HS_X también de manera local. Esto conduce de forma natural a la siguiente pregunta de naturaleza global:

Problema local-global:

Fijada una inmersión global $X \subset V$ en un esquema liso, nos preguntamos si existe una álgebra de Rees, \mathcal{D} , definida globalmente, es decir sobre todo V , de modo que satisfaga:

- (1) que $\text{Máx HS}_X = \text{Sing } \mathcal{D}$ y
- (2) que dicha igualdad se preserve por explosiones en el sentido descrito anteriormente.

Discutiremos esta cuestión en el Apartado A de la Sección 0.5. Allí probaremos que el álgebra \mathcal{D} definida en V puede escogerse como un representante canónico de su clase de equivalencia. Mostraremos que \mathcal{D} se obtiene pegando álgebras de Rees canónicas definidas localmente. Esto resultará de la siguiente propiedad:

Propiedad de buena restricción a abiertos:

Dada una álgebra de Rees canónica \mathcal{C}_U en un abierto U y dado un abierto más pequeño $U' \subset U$, se tiene que la restricción usual de \mathcal{C}_U a U' , es canónica en el abierto U' :

$$\mathcal{C}_U(U') = \mathcal{C}_{U'}.$$

De este modo, fijada una inmersión global de X en V , las álgebras canónicas \mathcal{C}_U y $\mathcal{C}_{\tilde{U}}$ de los abiertos U y \tilde{U} , respectivamente, se pueden pegar:

$$\mathcal{C}_U(U \cap \tilde{U}) = \mathcal{C}_{U \cap \tilde{U}} = \mathcal{C}_{\tilde{U}}(U \cap \tilde{U}),$$

con lo que obtenemos una álgebra de Rees \mathcal{D} de manera canónica global en V .

La propiedad anterior nos permitirá resolver el problema local-global: fijada una inmersión X en V , existe una álgebra definida de manera global y canónica en V , cuya existencia queda garantizada por la existencia local de representantes canónicos entre las álgebras de Rees que satisfacen las condiciones locales (0.2.0.6).

Esta construcción global del álgebra de Rees \mathcal{D} asociada al valor $\max \text{HS}_X$ es la que nos permite reformular la mejora de las singularidades de $X \subset V$ en términos de la resolución del álgebra \mathcal{D} . En efecto, en la Sección 0.2 observamos que la resolución de \mathcal{D} induce una sucesión de explosiones que simplifica la complejidad de las singularidades de X (ya que baja el valor máximo de la función de Hilbert-Samuel).

En la siguiente sección se detalla porqué el Teorema de Canonicidad 5.2.4, junto con la Proposición 5.3.1, permiten construir el álgebra global \mathcal{D} .

0.4. Estudio de la canonicidad de álgebras de Rees

Como primer paso para establecer un representante canónico, vamos a considerar una relación de equivalencia entre las distintas álgebras de Rees definidas sobre un esquema liso V .

Hemos mencionado ya que las álgebras \mathcal{G} y \mathcal{K} del Apartado 0.3.1 satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) sus lugares singulares coinciden y
 - (2) la situación anterior se preserva por transformaciones en centros lisos contenidos en sus lugares singulares.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}} \right\} \quad (0.4.0.1)$$

Esta observación apunta el hecho de que si extendemos una álgebra de Rees \mathcal{G} a su clausura entera nos encontramos con dos álgebras de Rees que cumplen las condiciones (0.4.0.1) (véase el Teorema 4.2.11).

Una situación análoga se plantea cuando extendemos \mathcal{G} a otra álgebra de Rees \mathcal{G}' , agregando elementos que resultan de aplicar operadores diferenciales sobre elementos de \mathcal{G} (véase el Corolario 4.3.9).

Por ejemplo, dado un cuerpo perfecto k de característica distinta de 2 y dada el álgebra de Rees

$$\mathcal{G} = k[Z, T][(Z^2 - T^5)W^2]$$

consideramos la siguiente *extensión por diferenciales*:

$$\mathcal{G}' = k[Z, T][(Z^2 - T^5)W^2, ZW],$$

donde el generador añadido, salvo una unidad, es $\frac{\partial(Z^2 - T^5)}{\partial Z}W^{2-1} = 2ZW$. Observamos que los lugares singulares de \mathcal{G} y \mathcal{G}' coinciden:

$$\begin{aligned} \text{Sing } \mathcal{G} &= \{x \in V : \nu_x(Z^2 - T^5) \geq 2\} = \{(0, 0)\} = \\ &= \{x \in V : \nu_x(Z^2 - T^5) \geq 2\} \cap \{x \in V : \nu_x(Z) \geq 1\} = \text{Sing } \mathcal{G}'. \end{aligned}$$

Además, explotando en el origen y tomando la carta adecuada, $U_1 = \text{Spec}(k[\frac{Z}{T}, T])$, nos quedan las siguientes álgebras transformadas

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= k[\frac{Z}{T}, T] \left[\left(\left(\frac{Z}{T} \right)^2 - T^3 \right) W^2 \right] \quad \text{y} \\ \mathcal{G}'_1 &= k[\frac{Z}{T}, T] \left[\left(\left(\frac{Z}{T} \right)^2 - T^3 \right) W^2, \left(\frac{Z}{T} \right) W \right], \end{aligned}$$

donde se vuelve a cumplir que

$$\text{Sing } \mathcal{G}_1 = \text{Sing } \mathcal{G}'_1 = \{ \text{origen de la carta } U_1 \}.$$

Una segunda explosión en el origen de esta carta resuelve ambas álgebras de Rees, por lo que \mathcal{G} y su extensión \mathcal{G}' satisfacen las condiciones (0.4.0.1).

Después de constatar que existen distintos modos de construir extensiones \mathcal{G} que satisfagan las condiciones (0.4.0.1), nos preguntamos si existe alguna extensión “canónica” en el siguiente sentido:

¿Qué entendemos por una “extensión canónica”:

A cada álgebra de Rees \mathcal{G} le asociaremos una extensión, digamos \mathcal{G}_c , que satisfaga las siguientes propiedades:

- (a) \mathcal{G}_c es una álgebra de Rees,
- (b) \mathcal{G} y \mathcal{G}_c satisfacen (0.4.0.1) y

(c) si \mathcal{H} es una álgebra de Rees sobre V tal que \mathcal{G} y \mathcal{H} satisfacen las condiciones (0.4.0.1) entonces

$$\mathcal{G}_c = \mathcal{H}_c.$$

Esto permitirá considerar el álgebra \mathcal{G}_c como un representante canónico del conjunto de equivalencia:

$$\{\mathcal{H}: \mathcal{G} \text{ y } \mathcal{H} \text{ satisfacen (0.4.0.1)}\}.$$

Debemos matizar aquí que para lograr este objetivo (el de hallar un representante canónico), debemos imponer requerimientos adicionales a las condiciones ya impuestas en (0.4.0.1).

Estas nuevas condiciones responden a cuestiones geométricas muy naturales: la *compatibilidad* con multiplicación por esquemas afines y restricción a abiertos. Observemos que si tomamos una álgebra de Rees \mathcal{G} sobre V y el morfismo de proyección

$$V \longleftarrow V \times \mathbb{A}_k^1,$$

se define de manera natural el pull-back de \mathcal{G} como el álgebra de Rees sobre el esquema liso $V \times \mathbb{A}_k^1$.

Por lo tanto, la relación de equivalencia, en el conjunto de álgebras de Rees sobre un esquema liso V , que resultará más conveniente es la siguiente:

Dadas dos álgebras de Rees sobre un esquema liso V , diremos que son *equivalentes* si cumplen que

- | | | |
|--|---|-----------|
| (1) sus lugares singulares coinciden y | } | (0.4.0.2) |
| (2) la situación anterior se preserva por sucesiones de | | |
| (a) blow-ups en centros lisos contenidos en sus lugares singulares y | | |
| (b) multiplicaciones por rectas o restricción a abiertos, | | |

(véase el Apartado 5.3.1). Es esta nueva relación la que nos llevará a la construcción del álgebra \mathcal{G}_c , el representante canónico de la clase de equivalencia:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{G}) := \{\mathcal{H}: \mathcal{G} \text{ y } \mathcal{H} \text{ satisfacen (0.4.0.2)}\}.$$

Terminamos indicando que los Teoremas de Dualidad 5.2.3 y Canonicidad 5.2.4 están enunciados para una relación de equivalencia más general. Aunque la restricción a la situación anterior se discutirá en el Apartado 5.3.1.

Nuestra demostración del Teorema de Canonicidad es una prueba alternativa al teorema “Finite presentation Theorem” de Hironaka que aparece en [40, pág. 119].

Queremos recalcar que los nuevos ingredientes que aparecen en la formulación de la equivalencia en (0.4.0.2) juegan un papel relevante en la demostración del Teorema de Dualidad 5.2.3 (concretamente en la Proposición 5.2.10).

0.5. Recopilación de nuestra contribución al problema de resolución de singularidades

Consideremos a continuación esquemas sobre cuerpos de característica cero. En este caso, fijada una álgebra de Rees sobre un esquema liso, se sabe construir una resolución en el sentido especificado en la Sección 0.1.

Por otro lado, para construir una resolución de singularidades de una variedad singular, digamos X , se necesita especificar una sucesión de centros en los que explotar. Recordamos a continuación los dos resultados, tratados en la Sección 0.2, que se utilizan para seleccionar dichos centros.

Primeramente hemos ponderado las singularidades de X utilizando la función de Hilbert-Samuel, de este modo el problema se afronta iterando el siguiente proceso:

bajar el valor máximo de la función Hilbert-Samuel mediante explosiones en centros lisos (incluidos en $\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$).

Es decir, fijado X queremos construir:

$$X = X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow X_{M-1} \longleftarrow X_M$$

por medio de explosiones en centros $Y_j \subset \underline{\text{Máx}} \text{HS}_{X_j}$ de modo que

$$\text{máx HS}_{X_0} = \text{máx HS}_{X_1} = \dots = \text{máx HS}_{X_{M-1}} > \text{máx HS}_{X_M}.$$

El segundo resultado indica que fijada una inmersión $X \subset V$, y después de reemplazar a V por un entorno (étale) de x , podemos asociar, en dicho entorno de x , al valor máx HS_X una álgebra de Rees sobre V , digamos \mathcal{G} , tal que

$$\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X = \text{Sing } \mathcal{G}, \tag{0.5.0.1}$$

y que esta igualdad se mantenga por transformaciones en centros lisos mientras el máximo de HS_X no baje.

Por lo tanto, reemplazando a X por un entorno de x , las singularidades de $\underline{\text{Máx}} \text{HS}_X$ se mejoran por medio de una resolución del álgebra \mathcal{G} .

Este trabajo contribuye al problema de resolución de singularidades en característica cero en dos aspectos:

A. El problema local-global:

Probaremos que si partimos de una variedad X y una inmersión global en un esquema liso V , $X \subset V$, se puede asociar globalmente al máximo de la función de Hilbert-Samuel una

0.5. RECOPIACIÓN DE NUESTRA CONTRIBUCIÓN AL PROBLEMA DE RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

álgebra de Rees, digamos \mathcal{D} , sobre V , de modo que la resolución de esta álgebra induce una bajada del máximo de la función.

Si, por ejemplo,

$$\begin{array}{ccccccc} V & = & V_0 & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & V_{M-1} & \longleftarrow & V_M \\ \mathcal{D} & = & \mathcal{D}_0 & & \mathcal{D}_1 & & \dots & & \mathcal{D}_{M-1} & & \mathcal{D}_M \end{array}$$

es una resolución del álgebra \mathcal{D} , i.e., si $\text{Sing } \mathcal{D}_M = \emptyset$, entonces esta sucesión de explosiones en centros lisos, digamos

$$Y_j \subset \text{Sing } \mathcal{D}_j, \quad \text{para cada } j = 0, \dots, M-1,$$

induce una sucesión de explosiones en X en centros *normalmente planos* en el sentido de Hironaka (centros regulares en los que la función HS es constante):

$$X = X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow X_{M-1} \longleftarrow X_M, \quad (0.5.0.2)$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$\left. \begin{array}{l} (1) X_j \subset V_j \quad \text{para cada } j = 0, \dots, M, \\ (2) \underline{\text{Máx}} \text{HS}_{X_j} = \text{Sing } \mathcal{D}_j \quad \text{para cada } j = 0, \dots, M-1, \\ (3) \text{máx HS}_{X_0} = \text{máx HS}_{X_1} = \dots, \text{máx HS}_{X_{M-1}} \quad \text{y} \\ (4) \text{máx HS}_{X_0} > \text{máx HS}_{X_M}. \end{array} \right\} \quad (0.5.0.3)$$

Como anteriormente no se sabía de la existencia de una álgebra definida globalmente, se debía proceder por otro camino que ilustramos a continuación.

Fijada la misma inmersión global $X \subset V$, se tomaba un recubrimiento por abiertos

$$V = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Para facilitar la comprensión podemos suponer que son abiertos en la topología de Zariski. En cada abierto U_i , existe una álgebra de Rees, digamos \mathcal{G}_i , que satisface

- (1) $\underline{\text{Máx}} \text{HS}_{X \cap U_i} = \text{Sing } \mathcal{G}_i$ y
- (2) que dicha igualdad se preserve por explosiones.

En estas condiciones, la resolución del álgebra de Rees \mathcal{G}_i (definida sobre U_i)

$$\begin{array}{ccccccc} U_i & = & U_{i,0} & \longleftarrow & U_{i,1} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & U_{i,M-1} & \longleftarrow & U_{i,M} \\ \mathcal{G}_i & = & \mathcal{G}_{i,0} & & \mathcal{G}_{i,1} & & \dots & & \mathcal{G}_{i,M-1} & & \mathcal{G}_{i,M} \end{array}$$

permite definir una secuencia de blow-ups en centros formalmente planos:

$$X \cap U_i \longleftarrow (X \cap U_i)_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow (X \cap U_i)_{M-1} \longleftarrow (X \cap U_i)_M, \quad (0.5.0.4)$$

al final de la cual, $\text{máx HS}_{X \cap U_i} > \text{máx HS}_{(X \cap U_i)_M}$.

El punto delicado, y muy complicado, de este argumento es justificar que estas sucesiones (0.5.0.4) sobre cada abierto $X \cap U_i \subset X$ se peguen adecuadamente definiendo una sucesión de explosiones sobre X como (0.5.0.2) (en la que el valor máximo de HS_X baja).

Este argumento, de pegar resoluciones locales, se puede soslayar gracias al Teorema de Canonicidad 5.2.4 y a la Proposición 5.3.1. En efecto, fijada la inmersión $X \subset V$, la existencia de álgebras canónicas locales y su propiedad de buena restricción a abiertos (mencionada en el Apartado 0.3.2) nos permiten exhibir una álgebra de Rees global \mathcal{D} en V cuya resolución satisface las propiedades (0.5.0.3).

B. Simplificación del proceso de resolución de álgebras de Rees (sobre cuerpos de característica cero):

Fijado un esquema liso sobre un cuerpo de característica cero, existe un algoritmo que nos permite construir una resolución de cualquier álgebra de Rees sobre el esquema. En otras palabras, dada una álgebra \mathcal{G} , se puede construir explícitamente una resolución (tal como la hemos definido en la Sección 0.1). Los resultados de esta tesis permiten simplificar la presentación de este algoritmo.

Grosso modo, el proceso para obtener una resolución de una álgebra de Rees, digamos \mathcal{G} sobre un esquema liso V , se logra mediante una estrategia similar a la anterior: se parte de una función definida sobre $\text{Sing } \mathcal{G}$, con ella se estratifica $\text{Sing } \mathcal{G}$ y se asocia otra álgebra auxiliar, digamos $\mathcal{G}^{(1)}$, al conjunto de los puntos “peores” de $\text{Sing } \mathcal{G}$, según esta función. Más aún, $\mathcal{G}^{(1)}$ es, en algún sentido, más simple que \mathcal{G} y está definida de modo que una resolución de $\mathcal{G}^{(1)}$ induce una mejora en el transformado de \mathcal{G} . Además, iterando este proceso se llega a una resolución de \mathcal{G} .

Sin detallar el proceso de resolución de álgebras de Rees, nos gustaría matizar que se sabía definir las álgebras auxiliares $\mathcal{G}^{(1)}$ de manera local. Nuestro resultado permite definir $\mathcal{G}^{(1)}$ de manera global, lo que conlleva una simplificación de la presentación del algoritmo.

0.6. Descripción del contenido de esta memoria

En el Capítulo 1 presentamos resultados básicos y conocidos que serán útiles en nuestro estudio.

El Capítulo 2 trata sobre la clausura entera de álgebras y de ideales. En él se discuten criterios para reconocer si un elemento pertenece a la clausura de un ideal.

En el Capítulo 3 estudiamos la noción de lisitud sobre cuerpos haciendo especial hincapié en los esquemas lisos de tipo finito sobre un cuerpo perfecto. En este marco utilizamos los operadores diferenciales y discutimos su papel a la hora de describir el orden de un ideal en un punto.

Las álgebras de Rees se estudian en el Capítulo 4. En los apartados 4.2 y 4.3 discutiremos los dos tipos de extensiones de álgebras de Rees mencionados anteriormente, a saber, el cierre entero y la saturación por operadores diferenciales.

En el Capítulo 5 introducimos la relación de equivalencia débil (véase el Apartado 5.1.1) y los teoremas de Dualidad y de Canonicidad (véase el Apartado 5.2.1). El resto de la Sección 5.2 está dedicada a la prueba del Teorema de Dualidad 5.2.3. Este capítulo termina con la Sección 5.3. En ella que se discuten distintas formulaciones de la relación de equivalencia.

Los capítulos 4 y 5 contienen los resultados más relevantes de esta memoria e incluyen los resultados obtenidos en el artículo [13].

A continuación presentamos una descripción más precisa y detallada de cada capítulo:

Capítulo 1. Básicos:

La Sección 1.1, trata sobre la dimensión de Krull en los anillos de la forma R/I donde R es un anillo local regular.

En la Sección 1.2 se describe la función orden en los anillos locales regulares.

La Sección 1.3 contiene una compilación de propiedades de los anillos excelentes.

En la Sección 1.4 se describe la construcción local de un blow-up, así como propiedades que nos serán útiles a lo largo de esta memoria.

Capítulo 2. Clausura entera:

En la Sección 2.1 se recuerdan las nociones de clausura entera de un anillo en una extensión (Definición 2.1.1) y de dominio normal (Definición 2.1.8).

En la Sección 2.2 abordamos las nociones de valoración, anillo de valoración y anillo de valoración discreta (en las definiciones 2.2.1, 2.2.8 y 2.2.14). En el Ejemplo 2.2.5 se menciona la valoración inducida en un anillo local regular.

Los teoremas 2.2.15 y 2.2.16 caracterizan los anillos de valoración discreta.

En la Sección 2.3 se discute la noción de clausura entera de un ideal (Definición 2.3.1) y algunas de sus propiedades.

Además, se presentan criterios para estudiar la clausura entera de un ideal: el Truco del Determinante (el Teorema 2.3.11), el Criterio de Reducciones (el Teorema 2.3.13), el Criterio Valorativo (el Teorema 2.3.15) y el Criterio del Blow-up Normalizado (el Teorema 2.3.16), siendo los dos últimos válidos sólo en dominios.

La Sección 2.4 está dedicada al estudio de la clausura entera de ideales en dominios normales.

Finalmente, en la Sección 2.5 introducimos la noción de valoración de un ideal.

Capítulo 3. Operadores Diferenciales:

En la primera sección de este capítulo se discute sobre ciertos operadores en los anillos de polinomios. Esto sirve como toma de contacto con los operadores diferenciales.

En el contexto de los anillos de polinomios se define el morfismo de Taylor y para cada ideal J se define una extensión $\text{Diff}^r(J)$ (Definición 3.1.1). El resultado principal es el

CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

Teorema 3.1.8 en el que se establece que, para cualquier ideal maximal $\mathfrak{m} \in k[X_1, \dots, X_d]$,

$$\nu_{\mathfrak{m}}(J) \geq b \quad \text{si y sólo si} \quad \text{Diff}^{b-1}(J) \subset \mathfrak{m},$$

siendo k un cuerpo perfecto.

En la Sección 3.2 se aborda la noción de lisitud para álgebras de tipo finito (definiciones 3.2.28, 3.2.31 y 3.2.33). Las dos primeras definiciones utilizan la matriz jacobiana (Definición 3.2.11) y en la última la lisitud se expresa en términos del módulo de diferenciales (Definición 3.2.15).

En esta sección se prueba que las propiedades de lisitud y de regularidad son equivalentes en el contexto de las álgebras de tipo finito sobre cuerpos perfectos (véase el Teorema 3.2.39).

El objetivo de la Sección 3.3 es discutir el comportamiento del orden un ideal J , en términos de sus extensiones $\text{Diff}^r(J)$ (en el caso de álgebras sobre cuerpos perfectos).

En los apartados 3.3.1 y 3.3.2 y en el Teorema 3.3.13 estudiamos el módulo de partes principales y su dual, el módulo de operadores diferenciales.

El Apartado 3.3.4 se centra en el estudio de los operadores diferenciales para un álgebra de tipo finito sobre un cuerpo perfecto. En la Proposición 3.3.20 se da una construcción explícita de los operadores diferenciales.

Esta sección termina con el Apartado 3.3.5. En él se precisa la definición intrínseca del ideal $\text{Diff}^r(J)$: el saturado de J por la acción de todos los operadores diferenciales de orden $\leq r$ (véase la Definición 3.3.24) y, se prueba la igualdad

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B : \nu_{\mathfrak{p}}(J) \geq b\} = V(\text{Diff}^{b-1}(J))$$

cuando B es una álgebra lisa sobre un cuerpo perfecto (véase el Teorema 3.3.28).

Finalmente, la Sección 3.4 contiene una recopilación de propiedades de los morfismos lisos y de los morfismos étales.

Capítulo 4. Álgebras de Rees:

La Sección 4.1 comienza con la definición de álgebra de Rees y con dos ejemplos claves: los anillos de Rees y los casi-anillos de Rees (véanse la Definición 4.1.1 y los ejemplos 4.1.3 y 4.1.4). Asociaremos a cada álgebra de Rees \mathcal{G} dos ingredientes fundamentales: (i) el lugar singular y (ii) la función orden.

El Apartado 4.1.2 está dedicado al estudio de la acción de Veronese (Definición 4.1.17) que relaciona, por medio de extensiones enteras, las álgebras de Rees con ciertos casi-anillos de Rees. Introducimos también la noción de amalgama de dos álgebras (Definición 4.1.19). En el Apartado 4.1.3 se establecen las nociones de transformación y de resolución de álgebras.

En la Sección 4.2 se estudia la clausura entera de álgebras de Rees. Se expresará toda álgebra de Rees como extensión entera de un casi-anillo de Rees (véase el Lema 4.2.6).

En el Apartado 4.2.1 se prueba que si dos álgebras de Rees poseen la misma clausura entera entonces comparten los dos ingredientes fundamentales, a saber, poseen el mismo lugar

singular y el mismo orden. Además, sus álgebras de Rees transformadas por explosiones en centros lisos también tienen la misma clausura entera (véase el Teorema 4.2.11).

La sección termina definiendo el blow-up normalizado de un esquema afín respecto a una álgebra de Rees (véase la Definición 4.2.14).

En la Sección 4.3 se analizan las álgebras de Rees diferenciales y el cierre por diferenciales de las álgebras de Rees (definiciones 4.3.1 y 4.3.3). Concluiremos que si dos álgebras de Rees dan lugar a la misma saturación por diferenciales entonces comparten los dos ingredientes fundamentales: (i) el lugar singular y (ii) la función orden. Gracias al Lema de Giraud 4.3.7, sus respectivas álgebras de Rees transformadas por explosiones en centros lisos tienen la misma saturación por operadores diferenciales (véase el Corolario 4.3.9).

La saturación por diferenciales de una álgebra \mathcal{G} jugará un papel determinante en la construcción de $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{G})$, el representante canónico de \mathcal{G} .

Capítulo 5. Equivalencia débil entre álgebras de Rees:

La Sección 5.1 está dividida en dos apartados. En el primero se establece la noción de sucesión local permisible para una álgebra y se introduce la siguiente relación de equivalencia débil:

Dadas dos álgebras de Rees sobre un esquema liso, se dice que son *débilmente equivalentes* si satisfacen que

- (1) sus lugares singulares coinciden y
- (2) la situación anterior se preserva por sucesiones de
 - (a) blow-ups en centros lisos contenidos en sus lugares singulares y
 - (b) morfismos lisos.

La clase de cada álgebra de Rees \mathcal{G} se denota por $\mathcal{C}(\mathcal{G})$.

Cada álgebra de Rees \mathcal{G} es débilmente equivalente a su clausura entera, $\overline{\mathcal{G}}$, y a su saturación por operadores diferenciales, $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}$ (véanse los lemas 5.1.6 y 5.1.7).

En el segundo apartado se introduce el concepto de árbol de una álgebra, $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ (Definición 5.1.10). Este concepto jugará un papel relevante en la caracterización de la equivalencia débil.

La Sección 5.2 consta de cuatro apartados. En el Apartado 5.2.1 se caracterizan las álgebras débilmente equivalentes como aquellas con el mismo árbol, i. e.,

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = \mathcal{C}(\mathcal{K}) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{F}(\mathcal{G}) = \mathcal{F}(\mathcal{K})$$

(véase la Observación 5.2.1). El Teorema de Dualidad 5.2.3 afirma que

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{G}) \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} \subset \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}},$$

por lo que, dos álgebras serán equivalentes si y sólo si sus saturaciones por diferenciales tienen la clausura entera.

De este resultado se infiere el Teorema de Canonicidad 5.2.4:

$\overline{\text{Diff } \mathcal{G}}$ es un representante canónico de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$.

Los otros tres apartados están dedicados a la prueba del Teorema de Dualidad. En los apartados 5.2.2 y 5.2.3 se discuten ingredientes necesarios para esta prueba, que se aborda, finalmente, en el Apartado 5.2.4.

En la Sección 5.3 se estudian relaciones de equivalencia alternativas, que resultan de modificar los tipos morfismos permitidos en la construcción de las sucesiones locales. En el Apartado 5.3.1 se discute la relación de equivalencia planteada en (0.4.0.2), en la que sólo se consideran (1) explosiones en centros permisibles, (2a) restricciones a abiertos y (2b) multiplicaciones por rectas afines. Recordemos que $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{G})$ denota la clase de \mathcal{G} con esta relación. La Proposición 5.3.1 establece que esta relación y la equivalencia débil son equivalentes,

$$\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{G}) = \mathcal{C}(\mathcal{G}),$$

i. e., que ambas producen las mismas clases de equivalencia en el conjunto de las álgebras de Rees.

En el Apartado 5.3.2 se introduce el concepto del objeto básico, este consistirá en una álgebras de Rees sobre un esquema liso junto con un conjunto de hipersuperficies con cruces normales (Definición 5.3.2). Los objetos básidos surgen de manera natural al estudiar la resolución de las álgebras. Sobre estos objetos se construye una nueva relación de equivalencia imponiendo que los centros permisibles tengan cruzamientos normales con el conjunto de hipersuperficies (Definición 5.3.6). La Proposición 5.3.7 extiende el resultado de la Proposición 5.3.1 a estos nuevos objetos.

Capítulo 1

Básicos

En este capítulo presentaremos nociones y resultados básicos. En la Sección 1.1 expondremos el concepto de anillo local regular. En la Sección 1.2 la noción de orden en anillos locales regulares y en la Sección 1.3 recordaremos propiedades generales de los anillos excelentes.

La última sección, la 1.4, estará dedicada al blow-up. Entre otros resultados veremos la construcción del blow-up mediante cartas (en el Párrafo 1.4.2), probaremos que la regularidad se mantiene al explotar en centros regulares (en el Teorema 1.4.6) y que el blow-up restringido a un cerrado que contiene al centro es también un blow-up (en la Proposición 1.4.7).

A lo largo de este capítulo los anillos y esquemas a considerar serán noetherianos.

1.1. Anillos locales regulares

Proposición 1.1.1. [46, (12.J)] *Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local, y sea R/\mathfrak{m} el cuerpo residual. El R -módulo cociente $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tiene estructura natural de R/\mathfrak{m} -espacio vectorial y se tiene la desigualdad*

$$\dim_{\text{Krull}}(R) \leq \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Definición 1.1.2. [46, (12.J)] *Se dice que un anillo local, (R, \mathfrak{m}) , es regular si*

$$\dim_{\text{Krull}}(R) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Y, en general, se dice que un anillo R es regular si $R_{\mathfrak{p}}$ es regular para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$.

Ejemplo 1.1.3. [46, Teorema 40] *Sea k un cuerpo. Entonces el anillo de polinomios en d variables, $k[X_1, \dots, X_d]$, es regular.*

Lema 1.1.4 (Krull). [21, Corolario 10.9] *Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local y sea f un elemento del ideal maximal \mathfrak{m} . Entonces*

$$\dim_{\text{Krull}} R - 1 \leq \dim_{\text{Krull}} R/\langle f \rangle \leq \dim_{\text{Krull}} R.$$

Demostración. Sea d la dimensión del anillo $R/\langle f \rangle$.

Para probar la primera desigualdad, observamos que existe un ideal de definición* del anillo $R/\langle f \rangle$ generado por exactamente d elementos, digamos $\langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_d} \rangle$ (véase [46, (12.J)]). Por lo tanto, existe un entero a tal que

$$\overline{\mathfrak{m}}^a \subset \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_d} \rangle \subset \overline{\mathfrak{m}}.$$

Levantando estos ideales a R tenemos la siguiente cadena de contenidos:

$$\mathfrak{m}^a \subset (\overline{\mathfrak{m}}^a)^c \subset \langle f, f_1, \dots, f_d \rangle \subset \mathfrak{m}.$$

Con lo que existe un ideal de definición de R generado por $d + 1$ elementos. Del hecho de que $\dim_{\text{Krull}} R$ es una cota inferior para el número mínimo de generadores de un ideal de definición (véase de nuevo [46, (12.J)]) se sigue que $\dim_{\text{Krull}} R \leq d + 1$.

Observando que los ideales primos en $R/\langle f \rangle$ se corresponden con ideales primos en R que contienen a f , tenemos que $d \leq \dim_{\text{Krull}} R$. □

Observaciones 1.1.5. El lema anterior se puede afinar:

- (1) [5, Corolario 11.18] Si además f no es un divisor de cero,

$$\dim_{\text{Krull}} R - 1 = \dim_{\text{Krull}} R/\langle f \rangle;$$

- (2) Si f es nilpotente,

$$\dim_{\text{Krull}} R/\langle f \rangle = \dim_{\text{Krull}} R.$$

Proposición 1.1.6 (Auslander-Buchsbaum). [46, Teorema 48] *Los anillos locales regulares son dominios de factorización única.*

Proposición 1.1.7. [44, VI Proposición 1.10] *Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular de dimensión d y sea $I \subset R$ un ideal. Entonces los siguientes dos enunciados son equivalentes:*

- (1) R/I es un anillo local regular de dimensión e .
 (2) I está generado por $(d - e)$ elementos que forman parte de un sistema regular de parámetros en R .

Proposición 1.1.8. *De hecho, si z_{e+1}, \dots, z_d generan I y forman parte de un sistema regular de parámetros R , digamos $\{z_1, \dots, z_e, z_{e+1}, \dots, z_d\}$, entonces $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_e}\}$ forman un sistema regular de parámetros en R/I .*

*[46, (12.C)] Sea R un anillo semi-local y sea $\mathfrak{m} = \text{Rad}(R)$. Se dice que I es un ideal de definición de R si $\mathfrak{m}^a \subset I \subset \mathfrak{m}$ para algún $a \in \mathbb{N}$.

Demostración. El Lema 1.1.4 afirma que $\dim_{\text{Krull}} R/I \geq d - (d - e) = e$ y como $\langle \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_e \rangle = \bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/I$ se tiene que $\dim_{\text{Krull}} R/I \leq \dim_{R/\mathfrak{m}} \bar{\mathfrak{m}}/\bar{\mathfrak{m}}^2 \leq e$. \square

Definición 1.1.9. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular. Se dice que un ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ es *regular* en R si satisface los enunciados equivalentes de la Proposición 1.1.7.

Observación 1.1.10. Sea R un anillo local regular y sea $I \subset R$ un ideal. Si R/I es un anillo local regular, entonces R/I es un dominio (véase la Proposición 1.1.6) e I es necesariamente un ideal primo.

Definición 1.1.11. [46, (8.H)] Sea R un anillo (noetheriano) y sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo. Se define la *n-ésima potencia simbólica de ideal* \mathfrak{p} como el ideal:

$$\mathfrak{p}^{(n)} := \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R = \{f \in R : \exists h \notin \mathfrak{p} \text{ tal que } fh \in \mathfrak{p}^n\}.$$

Proposición 1.1.12. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular (noetheriano) que contiene un cuerpo k . Si $\mathfrak{p} \subset R$ es un ideal primo regular entonces $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$.

Demostración. Vamos a estudiar el anillo completado \widehat{R} , que es un R -módulo fielmente plano (véase [46, Teorema 56]).

En primer lugar notamos que como (R, \mathfrak{m}) es un anillo local regular y \mathfrak{p} es un primo regular, $(R/\mathfrak{p}, \mathfrak{m}/\mathfrak{p})$ es un anillo local regular (véase la Definición 1.1.9). En segundo lugar, recordamos que el anillo graduado asociado de un anillo local, definido en 1.2.1, y su completado con respecto a su maximal coinciden (véase [5, Proposición 10.15]), por lo que $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ y $(\widehat{R/\mathfrak{p}}, \widehat{\mathfrak{m}/\mathfrak{p}})$ también son anillos locales regulares. Y en tercer lugar, tensorizando por \widehat{R} la siguiente sucesión exacta de R -módulos

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow 0$$

obtenemos que $\widehat{R/\mathfrak{p}}\widehat{R} = (R/\mathfrak{p}) \otimes_R \widehat{R}$ como \widehat{R} -módulos. Además

$$\widehat{R/\mathfrak{p}}\widehat{R} = (R/\mathfrak{p}) \otimes_R \widehat{R} = \widehat{R/\mathfrak{p}}$$

ya que las filtraciones utilizadas para completar R/\mathfrak{p} como anillo y como R -módulo coinciden. Esto prueba que $\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R}$ es un primo regular en el anillo local regular $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$.

En estas condiciones, existe un sistema regular de parámetros $\{y_1, \dots, y_d, z_1, \dots, z_e\}$ tal que $\widehat{\mathfrak{p}}\widehat{R} = \langle z_1, \dots, z_e \rangle$ y \widehat{R} es de la forma

$$\widehat{R} = (R/\mathfrak{m}) [[y_1, \dots, y_d, z_1, \dots, z_e]]$$

(véase [46, (28.J) Corolario 2]).

Para probar que $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un elemento $f \in R$ tal que $f \in \mathfrak{p}^{(n)} \setminus \mathfrak{p}^n$. Por la Definición 1.1.11, existe un elemento $h \in R \setminus \mathfrak{p}$ tal que $fh \in \mathfrak{p}^n$. Sean

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^e} t_\alpha z^\alpha, \quad h = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^e} h_\beta z^\beta \quad \text{y} \quad fh = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^e} u_\gamma z^\gamma,$$

las expresiones de los tres elementos en \widehat{R} , donde t_α, h_β y $u_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} t_\alpha h_\beta$ son elementos de $(R/\mathfrak{m})[[y_1, \dots, y_d]]$. Ahora bien, como

$$I = I\widehat{R} \cap R, \quad \text{para cualquier ideal } I \subset R,$$

por ser \widehat{R} un R -módulo fielmente plano (véase [46, (4.C)]), los coeficientes de f, h y fh satisfacen las siguientes propiedades:

- (1) $t_\alpha \neq 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{N}^e$ tal que $|\alpha| < n$, ya que $f \notin \mathfrak{p}^n \widehat{R}$,
- (2) $h_0 \neq 0$, al ser h un elemento que no pertenece a $\mathfrak{p}\widehat{R}$, y
- (3) $u_\gamma = 0$ para todo γ tal que $|\gamma| < n$, porque $fh \in \mathfrak{p}^n \widehat{R}$.

Terminamos mostrando que estas propiedades son contradictorias.

Sea $a = \min\{|\alpha| : t_\alpha \neq 0\}$ y sea $\alpha_0 \in \mathbb{N}^e$ un exponente donde se alcanza este mínimo, luego $|\alpha_0| < n$. Como t_{α_0} y h_0 son no nulas se tiene que

$$(fh)_{\alpha_0} = \sum_{\alpha+\beta=\alpha_0} t_\alpha h_\beta = t_{\alpha_0} h_0 + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\alpha_0 \\ |\alpha| < a-1}} t_\alpha h_\beta = t_{\alpha_0} h_0 + 0 \neq 0,$$

por lo que $|\alpha_0| \geq n$. Por lo tanto, no existe ningún elemento $f \in \mathfrak{p}^{(n)} \setminus \mathfrak{p}^n$ y ambos ideales son iguales. \square

1.2. Anillos graduados

Definición 1.2.1. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local. Denominamos *anillo graduado asociado a (R, \mathfrak{m})* al siguiente anillo:

$$\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) = R/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$$

Observación 1.2.2. [21, Corolario 12.5] Los anillos locales (R, \mathfrak{m}) y $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ tienen la misma dimensión de Krull.

Definición 1.2.3. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local. Sea $f \in R$ tal que $f \in \mathfrak{m}^n$ y $f \notin \mathfrak{m}^{n+1}$. Se define la *parte inicial de f en $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$* , $\text{In}_{\mathfrak{m}}(f)$, como la clase de f en $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$.

Si I es un ideal propio de R denotamos por $\text{In}_{\mathfrak{m}}(I)$ al ideal homogéneo en $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ generado por las formas iniciales de sus elementos.

Observación 1.2.4. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local y sea $I \subset R$ un ideal propio. Entonces

$$\text{gr}_{\mathfrak{m}/I}(R/I) = \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)/\text{In}_{\mathfrak{m}}(I).$$

Proposición 1.2.5. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular de dimensión d . Entonces $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ es isomorfo a un anillo de polinomios de la forma

$$(R/\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_d].$$

Demostración. Sea $\{f_1, \dots, f_d\}$ un sistema regular de parámetros en R . Es suficiente probar que el siguiente morfismo sobreyectivo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : (R/\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_d] & \longrightarrow & \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) \\ X_i & \longmapsto & \text{In}_{\mathfrak{m}}(f_i) \end{array}$$

también es inyectivo. Para ello observamos los siguientes puntos:

(1) La Proposición 1.1.7 implica que $\{f_1, \dots, f_d\}$ es una R -sucesión regular. i.e. que satisface las siguientes propiedades:

- (a) f_i no es un divisor de cero en $R/\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$ para $i = 1, \dots, d$ y
- (b) $R \neq \langle f_1, \dots, f_d \rangle (= \mathfrak{m})$.

(2) Las R -sucesiones regulares son en particular R -sucesiones quasi-regulares (véase [46, Teorema 27 ii]), i. e. $\{f_1, \dots, f_d\}$ satisface la siguiente condición:

Para cualquier polinomio homogéneo $F(X_1, \dots, X_d) \in R[X_1, \dots, X_d]$ de grado n tal que $F(f_1, \dots, f_d) \in \mathfrak{m}^{n+1}$, se tiene que los coeficientes de F pertenecen a \mathfrak{m} .

Que es equivalente a que φ sea inyectivo.

□

Definición 1.2.6. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular y sea $f \in R \setminus \{0\}$, se denomina *orden de f en R* , $\nu_{\mathfrak{m}}(f)$, a la máxima potencia de \mathfrak{m} que contiene a f , o lo que es lo mismo, al grado de $\text{In}_{\mathfrak{m}}(f)$ en el anillo $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$.

Propiedades 1.2.7. Las propiedades fundamentales del orden en un anillo local regular son:

- (1) $\nu_{\mathfrak{m}}(f \cdot g) = \nu_{\mathfrak{m}}(f) + \nu_{\mathfrak{m}}(g)$ y
- (2) $\nu_{\mathfrak{m}}(f + g) \geq \min\{\nu_{\mathfrak{m}}(f), \nu_{\mathfrak{m}}(g)\}$.

(Para facilitar la notación, aquí hemos extendido la noción de orden a todo el dominio R decretando que $\nu_{\mathfrak{m}}(0) = \infty$).

Demostración. Sea d la dimensión de R . Por la Proposición 1.2.5 tenemos que $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) = (R/\mathfrak{m})[X_1, \dots, X_d]$ y, en particular, un dominio.

Sean $f, g \in R \setminus \{0\}$ y supongamos que $n = \nu_{\mathfrak{m}}(f)$ y $m = \nu_{\mathfrak{m}}(g)$.

(1) Como $f \in \mathfrak{m}^n$ y $g \in \mathfrak{m}^m$ se tiene que $fg \in \mathfrak{m}^{n+m}$. Luego $\nu_{\mathfrak{m}}(fg) \geq n+m$. Para ver que realmente $\nu_{\mathfrak{m}}(fg) = n+m$ vamos a probar que $fg + \mathfrak{m}^{n+m+1} \in \mathfrak{m}^{n+m}/\mathfrak{m}^{n+m+1} \subset \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ es no nulo.

Para ello, escribimos $\text{In}_{\mathfrak{m}}(f) = f + \mathfrak{m}^{n+1} \in \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ y $\text{In}_{\mathfrak{m}}(g) = g + \mathfrak{m}^{m+1} \in \mathfrak{m}^m/\mathfrak{m}^{m+1}$ y notamos que

$$\text{In}_{\mathfrak{m}}(f) \cdot \text{In}_{\mathfrak{m}}(g) = (f + \mathfrak{m}^{n+1})(g + \mathfrak{m}^{m+1}) = fg + \mathfrak{m}^{n+m+1}.$$

Ahora bien, como $\text{In}_{\mathfrak{m}}(f)$ y $\text{In}_{\mathfrak{m}}(g)$ son no nulos y $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ es un dominio, $fg + \mathfrak{m}^{n+m+1} \neq 0$ (como elemento de $\mathfrak{m}^{n+m}/\mathfrak{m}^{n+m+1} \subset \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$).

(2) $f + g \in \mathfrak{m}^{\min\{n,m\}}$, i.e. $\nu_{\mathfrak{m}}(f + g) \geq \min\{n, m\}$.

□

Proposición 1.2.8.

(1) Un morfismo de anillos locales $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \longrightarrow (R', \mathfrak{m}')$ induce un morfismo (graduado) de anillos graduados

$$\psi : \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{m}'}(R'),$$

donde en cada grado, n , se tiene un morfismo de R/\mathfrak{m} -espacios vectoriales:

$$\psi_n : \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \longrightarrow (\mathfrak{m}')^n/(\mathfrak{m}')^{n+1}.$$

(2) Si además R y R' son anillos locales regulares, $\dim_{\text{Krull}} R = \dim_{\text{Krull}} R'$ y $\mathfrak{m}R' = \mathfrak{m}'$, entonces ψ es inyectivo[†] y, en particular, para cualquier $f \in R \setminus \{0\}$ el orden de f en R es el mismo que el orden de $\varphi(f)$ en R' .

Demostración. Los morfismos ψ_n están bien definidos ya que como $\mathfrak{m}R' = (\mathfrak{m}' \cap R)R' = (\mathfrak{m}')^{\text{ce}} \subset \mathfrak{m}'$ tenemos que $\mathfrak{m}^{n+1}R' \subset (\mathfrak{m}')^{n+1}$.

Para demostrar la segunda parte, observamos que, por las nuevas hipótesis, cualquier sistema regular de parámetros, $\{f_1, \dots, f_d\}$, de R lo es también de R' . La Proposición 1.1.6 afirma que ambos son dominios y la Proposición 1.2.5 que sus anillos graduados asociados $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$ y $\text{gr}_{\mathfrak{m}'}(R')$ son isomorfos a anillos de polinomios de d variables (sobre distintos cuerpos), así:

$$\begin{aligned} \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) &\simeq \text{gr}_{\mathfrak{m}}(R) \simeq k[X_1, \dots, X_d] & \text{y} \\ \text{gr}_{\mathfrak{m}'}(R') &\simeq \text{gr}_{\mathfrak{m}'}(R') \simeq k'[X_1, \dots, X_d], \end{aligned}$$

donde $k = R/\mathfrak{m}$ y $k' = R'/\mathfrak{m}'$. Finalmente, como el núcleo del morfismo $R \longrightarrow R' \longrightarrow k'$ es justo $\mathfrak{m}' \cap R = \mathfrak{m}$, tenemos que $k = R/\mathfrak{m} \subset k' = R'/\mathfrak{m}'$ es una extensión de cuerpos y ψ es inyectivo.

□

[†]También se dice que ψ respeta el orden o la graduación.

1.3. Anillos excelentes

Aunque no vamos a formular la definición de anillo excelente, en esta sección vamos a enumerar varias propiedades de estos anillos que nos interesan:

Propiedades 1.3.1. [28, Cap. IV, Escolio (7.8.3) (iv) y (vi)]

(1) Sea R un anillo excelente y sea $X = \text{Spec } R$. El conjunto $\text{Reg } X$ de los puntos donde X es regular es abierto en X .

(2) Si R es un dominio excelente, su clausura entera en cualquier extensión finita de su cuerpo de cocientes es una extensión finita de R .

Otras propiedades también interesantes son:

Propiedades 1.3.2. [28, Cap. IV, Escolio (7.8.3) (ii) y (iii)]

(1) Si R es un anillo excelente y $S \subset R$ es un conjunto multiplicativo, $S^{-1}R$ también es un anillo excelente.

(2) Si R es un anillo excelente, cualquier R -álgebra de tipo finito es excelente.

(3) Un cuerpo es un anillo excelente.

1.4. Algunas propiedades de los blow-ups

Esta sección es una recopilación de propiedades conocidas de los blow-ups.

Definición 1.4.1. Sea $T = \bigoplus_{n \geq 0} T_n$ un anillo graduado generado por elementos de grado 1 donde, además, T_1 es un T_0 -módulo finitamente generado. Los puntos del esquema $\text{Proj}(T)$ son los ideales primos homogéneos de T que no contienen a $\mathfrak{X} = \bigoplus_{n \geq 1} T_n$, el llamado *ideal irrelevante*[‡].

Sea R un anillo y sea $I \subset R$ un ideal no nulo. Denotamos por $R[IW]$ al anillo graduado $R \oplus IW \oplus I^2W^2 \oplus I^3W^3 \oplus \dots$. Se define el *blow-up de R en I* , $\text{Bl}_I(R)$, como $\text{Proj}(R[IW])$.

1.4.2. Sobre la construcción del esquema $\text{Bl}_I(R)$. Sea $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$. En el anillo graduado $R[IW] \subset R[W]$ cada elemento f_iW es de grado 1. Localizando en el elemento f_iW tenemos la siguiente inclusión de anillos graduados

$$(R[IW])_{f_iW} \subset (R[W])_{f_iW} = R_{f_i}[W, W^{-1}],$$

[‡]Esta definición de ideal irrelevante aparece en [41, Definición 5.6.1]. También se dice que un ideal homogéneo es irrelevante si su radical contiene a $\bigoplus_{n \geq 1} A_n$, véase [57, VII §2 pág. 154].

CAPÍTULO 1. BÁSICOS

y tomando las partes de grado cero, nos queda

$$R_i := R^{(i)} \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_{i-1}}{f_i}, \frac{f_{i+1}}{f_i}, \dots, \frac{f_s}{f_i} \right] = [R[IW]_{f_i W}]_0 \subset [R_{f_i}[W, W^{-1}]]_0 = R_{f_i},$$

donde $R^{(i)}$ es la imagen de R en el anillo local R_{f_i} .

Observamos que $\{\text{Spec } R_i\}_{1 \leq i \leq s}$ es un recubrimiento por abiertos afines de $\text{Bl}_I(R)$ y se tiene que:

(1) El morfismo $\text{Spec } R \leftarrow \text{Bl}_I(R)$ es de tipo finito ya que cada anillo R_i es de tipo finito sobre R .

(2) Los ideales primos de R_i están en correspondencia 1-1 con los ideales primos homogéneos de $R[IW]$ que no contienen a $f_i W$:

Si $\mathfrak{q} = \langle g_1 W^{n_1}, \dots, g_r W^{n_r} \rangle \subset R[IW]$ es un ideal primo homogéneo que no contiene a $f_i W$, entonces

$$\mathfrak{q}_{f_i W} = \langle g_1 f_i^{-n_1} W^0, \dots, g_r f_i^{-n_r} W^0 \rangle \subset R[IW]_{f_i W}$$

también es un ideal primo homogéneo generado por elementos de grado cero, así $\mathfrak{q}_{f_i W} \cap R_i = \langle g_1 f_i^{-n_1}, \dots, g_r f_i^{-n_r} \rangle$ es un ideal primo. Recíprocamente si $\mathfrak{p} \subset R_i$ es un ideal primo,

$$\mathfrak{p} R_i [f_i W, (f_i W)^{-1}] = \mathfrak{p} R[IW]_{f_i W} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{p} (f_i W)^n$$

también es primo y homogéneo, por lo que $\mathfrak{p} R[IW]$ es primo, homogéneo y no contiene a $f_i W$.

(3) Como f_i es una unidad en R_{f_i} , no es un divisor de cero en R_{f_i} y tampoco lo es en R_i . Así el ideal

$$I R_i = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle f_i \frac{f_1}{f_i}, \dots, f_i \frac{f_{i-1}}{f_i}, f_i, f_i \frac{f_{i+1}}{f_i}, \dots, f_i \frac{f_s}{f_i} \rangle = \langle f_i \rangle$$

es libre de rango 1 y está generado por un elemento no divisor de cero, i. e. es un ideal invertible.

(4) Si R es un dominio, los anillos R_{f_i} y R_i también lo son. Por lo tanto $R^{(i)} = R$ y se tienen las siguientes inclusiones:

$$R \subset R_i = R \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_{i-1}}{f_i}, \frac{f_{i+1}}{f_i}, \dots, \frac{f_s}{f_i} \right] \subset R_{f_i}.$$

Teorema 1.4.3. *Sea R un anillo y sea $I \subset R$ un ideal. Entonces, para todo $n \geq 1$ se tiene que*

$$\text{Bl}_I(R) = \text{Bl}_{I^n}(R).$$

Demostración. Supongamos que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, entonces $\text{Bl}_I(R)$ se puede recubrir con cartas afines $U_i = \text{Spec}(R_i)$ donde

$$R_i = R^{(i)} \left[\frac{f_1}{f_i}, \frac{f_2}{f_i}, \dots, \frac{f_s}{f_i} \right] \subset R_{f_i}$$

para cada $i = 1, \dots, s$.

Observamos que I^n está generado por el conjunto

$$\left\{ f^\beta = f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \dots f_s^{\beta_s} : \beta \in \mathbb{N}^s, |\beta| = n \right\},$$

luego un recubrimiento por cartas afines del esquema $\text{Bl}_{I^n}(R)$ es el conjunto

$$\{U_\alpha = \text{Spec } R_\alpha\}_{|\alpha|=n}$$

donde

$$R_\alpha = R^{(\alpha)} \left[\frac{f^\beta}{f^\alpha} : \beta \in \mathbb{N}^s, |\beta| = n \right] \subset R_{f^\alpha}.$$

Para demostrar que los dos esquemas coinciden vamos a describir las cartas de $\text{Bl}_{I^n}(R)$ en función de las cartas de $\text{Bl}_I(R)$. Distinguimos un caso particular primero.

caso $\alpha = ne_i = (0, \dots, 0, n, 0, \dots, 0)$:

- como $R_{f_i^n} = R_{f_i}$ se tiene que $R^{(\alpha)} = R^{(i)}$,
- $R_i \subset R_\alpha$ ya que $\frac{f_j}{f_i} = \frac{f_j f_i^{n-1}}{f_i^n}$ y
- $R_\alpha \subset R_i$ porque para cada $\beta \in \mathbb{N}^s$ con $|\beta| = n$ se tiene que $\frac{f^\beta}{f_i^n} = \frac{f_1^{\beta_1}}{f_i^{\beta_1}} \cdot \frac{f_2^{\beta_2}}{f_i^{\beta_2}} \dots \frac{f_s^{\beta_s}}{f_i^{\beta_s}}$.

Por lo tanto, $R_\alpha = R_i$ y la carta $U_{ne_i} = U_i$. En general la carta U_α está contenida en varias cartas de $\text{Bl}_I(R)$.

caso $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$: Sea $\Lambda = \{i : \alpha_i \neq 0\}$, luego $f^\alpha = \prod_{i \in \Lambda} f_i^{\alpha_i}$. Vamos a probar que para cualquier $i \in \Lambda$, $R_\alpha = (R_i)_{t_i}$ donde $t_i = \prod_{j \in \Lambda} \frac{f_j}{f_i}$. Para ello nos alcanza con observar que:

- $R_{f^\alpha} = (R)_{\prod_{j \in \Lambda} f_j}$,
- $\frac{f_j}{f_i} = \frac{f_j f_i^{\alpha - e_i}}{f_i^\alpha}$ y, si además $j \in \Lambda$, se tiene que $\frac{f_j}{f_i}$ es una unidad en R_α y
- si $|\beta| = n$ se tiene que $\frac{f^\beta}{f_i^n} = \frac{f^\beta}{f_i^n} \cdot \left(\frac{f_i}{f_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_i}{f_s}\right)^{\alpha_s} \in (R_i)_{t_i}$.

Luego, $U_\alpha \subset U_i$ para todo $i \in \Lambda$.

De esta forma hemos visto que el recubrimiento por los abiertos afines U_α es un refinamiento del dado por las cartas U_i y ambos cubrimientos describen el mismo esquema. \square

Teorema 1.4.4. *Sea R un anillo y sean $I \subset J$ dos ideales de R . Si la extensión*

$$R[IW] \xrightarrow{\varphi} R[JW]$$

es finita, entonces el siguiente morfismo de esquemas está bien definido:

$$\mathrm{Bl}_J(R) = \mathrm{Proj}(R[JW]) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Bl}_I(R) = \mathrm{Proj}(R[IW]), \quad (1.4.4.1)$$

y además es un morfismo finito.

Demostración.

El morfismo ψ está bien definido: Como φ es un morfismo finito tenemos el siguiente diagrama conmutativo de anillos graduados

$$\begin{array}{ccc} R[JW] & \xrightarrow{\gamma} & R[JW]/\mathfrak{X}_I R[JW] \\ \varphi \uparrow \text{finito} & & \delta \uparrow \text{finito} \\ R[IW] & \xrightarrow{\beta} & R[IW]/\mathfrak{X}_I = R, \end{array}$$

donde $\mathfrak{X}_I = 0 \oplus IW \oplus I^2W^2 \oplus \dots$ es el ideal irrelevante de $R[IW]$. Ahora observamos que:

- (1) $\mathfrak{X}_I \subset R[IW]$ es un ideal homogéneo por lo que β establece una relación 1-1 entre los ideales homogéneos de $R[IW]$ que contienen \mathfrak{X}_I y los ideales homogéneos del anillo graduado $R \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$.
- (2) $\mathfrak{X}_I R[JW] \subset R[JW]$ también es homogéneo, por lo que γ establece una relación 1-1 entre los ideales homogéneos de $R[JW]$ que contienen a $\mathfrak{X}_I R[JW]$ y los ideales homogéneos del cociente $R[JW]/\mathfrak{X}_I R[JW]$.
- (3) δ es un morfismo finito, por lo que $R[JW]/\mathfrak{X}_I R[JW]$ es un R -módulo finitamente generado, i. e. existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $\overline{J^n W^n} = 0$ en $R[JW]/\mathfrak{X}_I R[JW]$.

Ahora, sea $\mathfrak{q} \subset R[JW]$ un ideal primo homogéneo tal que $\mathfrak{q} \not\supset \mathfrak{X}_J = 0 \oplus JW \oplus J^2W^2 \oplus \dots$. Necesitamos probar que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cap R[IW]$ es un ideal primo homogéneo que no contiene a \mathfrak{X}_I .

Observamos que la preimagen de un ideal homogéneo es un ideal homogéneo y la preimagen de un primo es un primo, por lo que queda por demostrar que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ no contiene al ideal irrelevante.

Supongamos lo contrario, que $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \mathfrak{X}_I$. Luego, $\mathfrak{q} \supset \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \supset \mathfrak{X}_I R[JW]$ y el ideal $\bar{\mathfrak{q}} = \gamma(\mathfrak{q}) \subset R[JW]/\mathfrak{X}_I R[JW]$ satisface estas dos propiedades:

(I) $\gamma^{-1}(\bar{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}$, por el punto (2) y

(II) Si denotamos por $[\bar{\mathfrak{q}}]_n$ su parte homogénea de grado n , $[\bar{\mathfrak{q}}]_n = 0$ para $n \geq N$, por el punto (3).

Por lo tanto,

$$[\mathfrak{q}]_n = \gamma^{-1}([\bar{\mathfrak{q}}]_n) = J^n W^n \text{ para } n \geq N.$$

Terminamos observando que si $\ell < N$ y $xW^\ell \in J^\ell W^\ell \subset \mathfrak{X}_J$ es un elemento homogéneo, entonces $x^N W^{\ell N} \in J^{\ell N} W^{\ell N} = [\mathfrak{q}]_{\ell N}$ y, al ser \mathfrak{q} primo, $xW^\ell \in \mathfrak{q}$. Luego $\mathfrak{X}_J \subset \mathfrak{q}$, lo que contradice la suposición de partida.

El morfismo Ψ es finito: Podemos escoger los generadores de I y J de modo que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ y $J = \langle f_1, \dots, f_s, f_{s+1}, \dots, f_r \rangle$. Consideramos los siguientes recubrimientos:

$$\begin{aligned} \text{Proj}(R[IW]) &= \bigcup_{i=1}^s \text{Spec } R_{I,i} \text{ donde } R_{I,i} := [R[IW]_{f_i W}]_0 \subset R_{f_i} \text{ y} \\ \text{Proj}(R[JW]) &= \bigcup_{i=1}^s \text{Spec } R_{J,i} \text{ donde } R_{J,i} := [R[JW]_{f_i W}]_0 \subset R_{f_i}. \end{aligned}$$

Observamos $\text{Proj}(R[JW])$ se puede cubrir con las s primeras cartas. De lo contrario, existiría un ideal primo homogéneo \mathfrak{q} tal que $\mathfrak{q}_{f_i W} = R[JW]_{f_i W}$ para cada $i = 1, \dots, s$, es decir, tal que $f_1 W, \dots, f_s W \in \mathfrak{q}$. Luego, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \mathfrak{X}_I$, el ideal irrelevante de $R[IW]$, lo cual es una contradicción ya que ψ está bien definido.

Para terminar vemos que como $R[IW] \subset R[JW]$ es una extensión finita y, para cada $i = 1, \dots, s$, $f_i \in I \subset J$, se tiene que $R[IW]_{f_i W} \subset R[JW]_{f_i W}$ también es finita y la restricción a sus partes homogéneas de grado cero, $[R[IW]_{f_i W}]_0 \subset [R[JW]_{f_i W}]_0$, también lo es.

□

Teorema 1.4.5. *Sea R un dominio normal y sean $I \subset J$ dos ideales. Si el dominio $R[JW]$ es normal y si $\varphi : R[IW] \hookrightarrow R[JW]$ es una extensión finita, entonces $\text{Proj}(R[JW])$ es el esquema normalizado de $\text{Proj}(R[IW])$.*

CAPÍTULO 1. BÁSICOS

Demostración. Supongamos que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ y que $J = \langle f_1, \dots, f_s, f_{s+1}, \dots, f_r \rangle$. Del mismo modo que en la demostración del teorema anterior, consideramos los siguientes recubrimientos:

$$\begin{aligned} \text{Proj}(R[IW]) &= \bigcup_{i=1}^s \text{Spec } R_{I,i} \text{ donde } R_{I,i} := [R[IW]_{f_i W}]_0 \subset R_{f_i} \text{ y} \\ \text{Proj}(R[JW]) &= \bigcup_{i=1}^s \text{Spec } R_{J,i} \text{ donde } R_{J,i} := [R[JW]_{f_i W}]_0 \subset R_{f_i}. \end{aligned}$$

Observamos que como R es un dominio, $K(R) = K(R_{f_i})$ y como tenemos las siguientes extensiones de dominios

$$R \subset R_{I,i} \subset R_{J,i} \subset R_{f_i},$$

los cuatro dominios poseen el mismo cuerpo de cocientes que denotamos por K . Nuestro objetivo es probar que $R_{J,i}$ es la clausura entera de $R_{I,i}$ en K , para todo $i = 1, \dots, s$.

En primer lugar como, por hipótesis, $R[IW] \subset R[JW]$ es una extensión entera, entonces $R[IW]_{f_i W} \subset R[JW]_{f_i W}$ y

$$[R[IW]_{f_i W}]_0 \subset [R[JW]_{f_i W}]_0 (\subset K)$$

también son extensiones enteras, por lo que sus clausuras enteras en K son iguales, $\overline{R_{I,i}} = \overline{R_{J,i}}$.

En segundo lugar, como $R[JW]$ es íntegramente cerrado en $K(W)$ y $K[W, W^{-1}]$ es íntegramente cerrado en $K(W)$ (por ser el localizado de $K[W]$ en W) se tiene que $R[JW]$ es íntegramente cerrado en $K[W, W^{-1}]$.

De nuevo, por localización, $R[JW]_{f_i W}$ sigue siendo íntegramente cerrado en $K[W, W^{-1}]$, y tomando las partes de grado cero vemos que $R_{J,i}$ es íntegramente cerrado en K .

Por lo tanto, $\overline{R_{I,i}} = R_{J,i}$. □

Para poder hacer sucesiones de explosiones necesitamos asegurar que el resultado de una explosión conserva las suficientes buenas propiedades para poder volver a explotar en él.

Teorema 1.4.6. [31, II Teorema 8.24] *El blow-up de un esquema regular e irreducible en un subesquema cerrado y regular es de nuevo un esquema regular.*

Demostración. Sea (V, \mathcal{O}_V) un esquema regular e irreducible y sea (Y, \mathcal{O}_Y) un subesquema cerrado y regular. Consideramos el blow-up de (V, \mathcal{O}_V) con centro Y

$$(V, \mathcal{O}_V) \xleftarrow{\rho} (V_1, \mathcal{O}_{V_1}).$$

Como V es regular e irreducible, tenemos que es integral, por lo que, tomando un recubrimiento adecuado por cartas afines, nos restringimos al caso afín, en el que $V = \text{Spec}(\mathcal{B})$ y

$Y = \text{Spec}(\mathcal{B}/P)$, donde ambos anillos son dominio regulares (véase la Definición 1.1.2) y en que el morfismo ρ es

$$\text{Spec}(\mathcal{B}) \xleftarrow{\rho} \text{Bl}_P(\mathcal{B}).$$

Sea $Q' \in \text{Bl}_P(\mathcal{B})$ un punto arbitrario, nuestro objetivo es demostrar que el anillo local $\mathcal{O}_{\text{Bl}_P(\mathcal{B}), Q'}$ es regular.

Si $Q = \rho(Q') \not\supset P$, $\mathcal{O}_{\text{Bl}_P(\mathcal{B}), Q'} \simeq \mathcal{B}_Q$ por lo que no hay nada que probar.

Supongamos ahora que $Q = \rho(Q') \supset P$. Por hipótesis, \mathcal{B}_Q y $(\mathcal{B}/P)_{\overline{Q}}$ son anillos locales regulares por lo que existe un sistema regular de parámetros, $\{x_1, \dots, x_s, \dots, x_r\}$, de modo que $P\mathcal{B}_Q = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ es un primo regular (véanse la Proposición 1.1.7 y la Definición 1.1.9).

Supongamos que (en el anillo \mathcal{B}_Q) para cada $i = 1, \dots, r$ podemos escribir una expresión $x_i = \frac{f_i}{g_i}$ donde $g_i \notin Q$, entonces si $g = \prod_{i=1}^s g_i$ podemos extender el sistema regular de parámetros al anillo \mathcal{B}_g , conservando el hecho de que \mathcal{B}_g es un dominio (ya que \mathcal{B} lo es).

Reemplazando \mathcal{B} por \mathcal{B}_g , tenemos que $Q \in \text{Spec } \mathcal{B}$, $Q' \in \text{Bl}_P(\mathcal{B})$ y $\{x_1, \dots, x_s\}$ generan el ideal primo P en \mathcal{B} y forma parte de un sistema regular de parámetros en \mathcal{B}_Q .

Supongamos ahora que Q' está en la carta $U_i = \text{Spec } \mathcal{B}_i$ donde $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_s}{x_i}] \subset \mathcal{B}_{f_i}$ para algún $i \in \{1, \dots, s\}$. Entonces, el problema se reduce a probar que $\mathcal{O}_{\text{Bl}_P(\mathcal{B}), Q'} \simeq (\mathcal{B}_i)_{Q'}$ es un anillo regular.

Como x_i no es un divisor de cero en \mathcal{B} , tampoco lo es en \mathcal{B}_i , ni en $(\mathcal{B}_i)_{Q'}$. Luego, por la Observación 1.1.5(1) tenemos que

$$\dim_{\text{Krull}}(\mathcal{B}_i)_{Q'}/x_i(\mathcal{B}_i)_{Q'} = \dim_{\text{Krull}}(\mathcal{B}_i)_{Q'} - 1.$$

Gracias a esta igualdad, si probamos que $C := (\mathcal{B}_i)_{Q'}/x_i(\mathcal{B}_i)_{Q'}$ es regular tendremos que $(\mathcal{B}_i)_{Q'}$ es regular. Esto es debido a que si $d = \dim_{\text{Krull}}(\mathcal{B}_i)_{Q'}$ y C es regular, el ideal maximal de C está generado por $d - 1$ elementos, digamos $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_{d-1}}\}$, y, por ejemplo, el ideal maximal de $(\mathcal{B}_i)_{Q'}$ estará generado por los siguientes d elementos: z_1, \dots, z_{d-1}, x_i , mostrando que $(\mathcal{B}_i)_{Q'}$ es un anillo local regular.

Para demostrar que C es un anillo local regular escribimos el transformado total de Y en $\text{Bl}_P(\mathcal{B})$, $H = (\rho|_{\text{Spec } \mathcal{B}})^{-1}(Y)$, como el Proj de un anillo graduado.

Recordamos que

$$\text{Bl}_P(\mathcal{B}) = \text{Proj}(\mathcal{B}[PW]) \tag{1.4.6.1}$$

donde $\mathcal{B}[PW] = \mathcal{B} \oplus PW \oplus P^2W^2 \oplus \dots \subset \mathcal{B}[W]$ y que $P\mathcal{B}[PW] \subset \mathcal{B}[PW]$ (ideal homogéneo en grado 0) describe H en $\text{Bl}_P(\mathcal{B}) = \text{Proj}(\mathcal{B}[PW])$. Esta inclusión da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P\mathcal{B}[PW] \longrightarrow \mathcal{B}[PW] \longrightarrow \text{gr}_P(\mathcal{B}) \longrightarrow 0$$

donde $\text{gr}_P(\mathcal{B}) = \mathcal{B}/P \oplus P/P^2W \oplus P^2/P^3W^2 \oplus \dots$, así obtenemos que $H = \text{Proj}(\text{gr}_P(\mathcal{B}))$.

Y este mismo subesquema H en la carta $U_i = \text{Spec } \mathcal{B}_i$ está definido por el ideal $P\mathcal{B}_i = x_i\mathcal{B}_i$ por lo que localizando en $\overline{Q'} \in H$ tenemos

$$\mathcal{O}_{H, \overline{Q'}} = (\mathcal{B}_i/x_i\mathcal{B}_i)_{\overline{Q'}} = (\mathcal{B}_i)_{Q'}/(x_i\mathcal{B}_i)_{Q'}.$$

CAPÍTULO 1. BÁSICOS

Para terminar la demostración, en lugar de probar que $\mathcal{O}_{H, \overline{Q}}$ es un anillo local regular veremos que H es un esquema regular.

Recordamos ahora que $\{x_1, \dots, x_s\}$ es una sucesión \mathcal{B} -regular (ya que forma parte de un sistema regular de parámetros en \mathcal{B}_Q), lo que implica que $\text{gr}_P(\mathcal{B})$ es isomorfo al anillo de polinomios $(\mathcal{B}/P)[X_1, \dots, X_s]$, donde cada X_i es la clase de x_i módulo P/P^2 (véanse [46, teorema 27 y (15.B)]). Finalmente, H es regular ya que se puede cubrir con espectros de anillos de polinomios de la forma

$$(\mathcal{B}/P) \left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_s}{X_i} \right]$$

donde $i = 1, \dots, s$, que son regulares al ser \mathcal{B}/P regular (véase [46, Teorema 40]). \square

Proposición 1.4.7 (Blow-up restringido a un subesquema cerrado). [31, II Corolario 7.15] Sea V un esquema y sea $X \subset V$ un subesquema cerrado. Sea $Y \subset X \subset V$ un subesquema cerrado de ambos. Sea $V \xleftarrow{\rho} V_1$ el blow-up de V en Y y sea $X \xleftarrow{\rho'} X_1$ el blow-up de X en Y . Entonces $\rho' = \rho|_X$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\rho} & V_1 \\ \uparrow i & & \uparrow \\ X & \xleftarrow{\rho'} & X_1 \end{array}$$

Demostración. Observamos que, por construcción,

$$(\rho')^{-1}(I(Y)\mathcal{O}_X)\mathcal{O}_{X_1} = (\rho')^{-1} \circ (i)^{-1}(I(Y)\mathcal{O}_V)\mathcal{O}_{X_1}$$

es un haz invertible sobre X_1 . Por lo tanto, la propiedad universal del blow-up aplicada a ρ , afirma que existe un único morfismo $i_1 : X_1 \rightarrow V_1$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\rho} & V_1 \\ \uparrow i & & \uparrow i_1 \\ X & \xleftarrow{\rho'} & X_1 \end{array}$$

Probaremos a continuación que i_1 es una inmersión cerrada.

Localmente podemos suponer que $V = \text{Spec } \mathcal{B}$ y que existen $I \subset J$ dos ideales en \mathcal{B} tales que $X = \text{Spec } \mathcal{B}/I$ e $Y = \text{Spec}(\mathcal{B}/J)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Bl}_J(\mathcal{B}) &= \text{Proj}(\mathcal{B} \oplus J \oplus J^2 \oplus \dots) \text{ y} \\ \text{Bl}_{J/I}(\mathcal{B}/I) &= \text{Proj}(\mathcal{B}/I \oplus (J/I) \oplus (J/I)^2 \oplus \dots). \end{aligned}$$

Observamos que el morfismo sobreyectivo $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/I$ se extiende de forma natural un morfismo sobreyectivo de álgebras graduadas

$$\mathcal{B} \oplus J \oplus J^2 \oplus J^3 \oplus \dots \longrightarrow \mathcal{B}/I \oplus J/I \oplus (J^2 + I)/I \oplus (J^3 + I)/I \oplus \dots \longrightarrow 0.$$

\square

Corolario 1.4.8. *En la proposición anterior, si V , X e Y son esquemas regulares entonces V_1 y X_1 también lo son.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 1.4.6 ya que $\rho|_X$ es un blow-up. \square

Capítulo 2

Clausura entera

Este capítulo está dedicado al estudio de varios aspectos relacionados con la clausura entera de anillos e ideales.

Empezaremos en la Sección 2.1 tratando la clausura entera de anillos y la noción de *dominio normal* (véase la Definición 2.1.8).

En la Sección 2.2 repasaremos las propiedades de los anillos de valoración.

En la Sección 2.3, que está dedicada a la clausura entera de ideales, se tratarán varias propiedades básicas, como la relación entre la clausura entera y la noción de reducción de ideales (véase el Apartado 2.3.1). Enunciaremos después varios criterios útiles para determinar la clausura entera de un ideal en un dominio (en el Apartado 2.3.2).

En la Sección 2.4 estudiaremos propiedades de ideales principales. En la Sección 2.5 definiremos la valoración de un ideal en un anillo de valoración (véase la Definición 2.5.1).

Si no se especifica lo contrario, supondremos que todos anillos son noetherianos.

2.1. Clausura entera de anillos

Recordamos que si $R \subset \tilde{R}$ es una extensión de anillos, un elemento $x \in \tilde{R}$ es *entero sobre* R si es un cero de algún polinomio mónico con coeficientes en R , i. e. si existe un entero positivo m y elementos $r_i \in R$ para $i = 1, \dots, m$ tales que

$$x^m + r_1x^{m-1} + r_2x^{m-2} + \dots + r_{m-1}x + r_m = 0 \quad (2.1.0.1)$$

(donde las operaciones se realizan en el anillo \tilde{R}). La igualdad (2.1.0.1) se denomina *relación de dependencia entera de x sobre R* .

Definición 2.1.1. [47, pág. 64] El conjunto de elementos de \tilde{R} enteros sobre R se denomina *clausura entera de R en \tilde{R}* y se denota por \overline{R} .

Observación 2.1.2. [5, Corolario 5.3] \overline{R} es un subanillo de \tilde{R} que contiene a R .

CAPÍTULO 2. CLAUSURA ENTERA

Definición 2.1.3. Sea $R \subset \tilde{R}$ una extensión de anillos. Se dice que $R \subset \tilde{R}$ es una extensión entera o que \tilde{R} es entero sobre R si $\overline{R} = \tilde{R}$ (i.e. si todos los elementos de \tilde{R} son enteros sobre R).

Se dice que R es íntegramente cerrado en \tilde{R} si $R = \overline{R}$ (i.e. si los únicos elementos enteros de \tilde{R} sobre R son los elementos que ya pertenecen a R).

Ejemplo 2.1.4. Sea k un cuerpo. El anillo $k[W]$ es íntegramente cerrado en su cuerpo de cocientes $k(W)$.

Ejemplo 2.1.5. [41, Corolario 2.1.13] Sea R un anillo reducido y noetheriano y sean $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ los primos minimales de R . Entonces

- Se tiene una inclusión $0 \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus R/\mathfrak{p}_s$.
- El anillo total de cocientes de R , $Q(R)$, es isomorfo a $K_1 \oplus \dots \oplus K_s$ donde cada K_i es el cuerpo de cocientes de R/\mathfrak{p}_i . Luego $0 \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus R/\mathfrak{p}_s \hookrightarrow Q(R)$.
- La extensión $R \longrightarrow R/\mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus R/\mathfrak{p}_s$ es entera, ya que los elementos de la forma $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ satisfacen la ecuación $X^2 - X = 0$.

Sea $\overline{R/\mathfrak{p}_i}$ la clausura entera de R/\mathfrak{p}_i en K_i . Entonces:

- El anillo $\overline{R/\mathfrak{p}_1} \oplus \dots \oplus \overline{R/\mathfrak{p}_s}$ es entero sobre $R/\mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus R/\mathfrak{p}_s$ e íntegramente cerrado en $Q(R) = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$.

Por lo tanto, la clausura entera de R en $Q(R)$ es $\overline{R/\mathfrak{p}_1} \oplus \dots \oplus \overline{R/\mathfrak{p}_s}$.

Proposición 2.1.6. [41, Teorema 2.3.2] Sea $R \subset \tilde{R}$ una inclusión graduada de anillos \mathbb{N} -graduados. Entonces la clausura entera de R en \tilde{R} es un anillo \mathbb{N} -graduado.

Demostración. Vamos a probar que si $\sum_{n=0}^N s_n W^n \in \tilde{R}$ es entero sobre R entonces cada una de sus partes homogéneas, $s_n W^n$, es un elemento entero sobre R .

Para ello, estudiaremos un caso concreto que después extenderemos al caso general:

Caso particular: Supongamos que en R existen $N+1$ unidades distintas, $\{r_0, \dots, r_N\}$, tales que las diferencias entre ellas sean a su vez unidades, es decir, que $r_j - r_i$ es una unidad para cada par $j \neq i$.

Para cada $r \in \{r_0, \dots, r_N\}$ consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi_r : \tilde{R} &\longrightarrow \tilde{R} \\ fW^n &\longmapsto r^n fW^n, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- es un \tilde{R} -automorfismo \mathbb{N} -graduado, ya que
 - $\varphi_r(fW^n + gW^\ell) = r^n fW^n + r^\ell gW^\ell$,
 - $\varphi_r(fW^n gW^\ell) = \varphi_r(fgW^{n+\ell}) = r^{n+\ell} fgW^{n+\ell} = \varphi_r(fW^n)\varphi_r(gW^\ell)$ y
 - $\sum_{n=0}^M f_n W^n = \varphi_r\left(\sum_{n=0}^M \frac{1}{r^n} f_n W^n\right)$, ya que r es una unidad en R ;
- restringido a R también es un R -automorfismo \mathbb{N} -graduado;
- restringido a $[\tilde{R}]_0$ es la identidad.

Ahora, como s es entero sobre R satisface una relación de dependencia sobre R :

$$s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m = 0,$$

donde $a_i \in R$ para cada $i = 1, \dots, m$. Aplicando a ambos lados φ_r obtenemos que $\varphi_r(s)$ es entero sobre R ya que

$$\varphi_r(s)^m + \varphi_r(a_1)\varphi_r(s)^{m-1} + \dots + \varphi_r(a_{m-1})\varphi_r(s) + \varphi_r(a_m) = \varphi_r(0) = 0,$$

donde los coeficientes $\varphi_r(a_i) \in R$.

Por otro lado, con las $N + 1$ unidades construimos la matriz invertible (de tipo Vandermonde):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r_0^1 & \dots & r_0^N \\ 1 & r_1^1 & \dots & r_1^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_N^1 & \dots & r_N^N \end{pmatrix},$$

y escribimos las acciones de φ_{r_i} en el elemento s :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{r_0}(s) \\ \varphi_{r_1}(s) \\ \vdots \\ \varphi_{r_N}(s) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} s_0 W^0 \\ s_1 W^1 \\ \vdots \\ s_N W^N \end{pmatrix},$$

por lo que

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{r_0}(s) \\ \varphi_{r_1}(s) \\ \vdots \\ \varphi_{r_N}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 W^0 \\ s_1 W^1 \\ \vdots \\ s_N W^N \end{pmatrix}.$$

De este modo, cada $s_n W^n$ es entero sobre R por ser una combinación R -lineal de elementos enteros sobre R .

CAPÍTULO 2. CLAUSURA ENTERA

Caso general: Si R no posee $N + 1$ unidades cuyas diferencias sean a su vez unidades en R definimos

$$\begin{aligned} R' &= R[T_i, T_i^{-1}, (T_j - T_i)^{-1}, i, j = 0, \dots, N] \\ \tilde{R}' &= \tilde{R}[T_i, T_i^{-1}, (T_j - T_i)^{-1}, i, j = 0, \dots, N] \end{aligned}$$

donde T_0, \dots, T_N son variables. Estos anillos son \mathbb{N} -graduados si imponemos que cada T_i tenga grado 0. Ahora R' satisface las condiciones del caso particular por lo que cada parte homogénea $s_n W^n \in \tilde{R} \subset \tilde{R}'$ es entera sobre R' .

Nuestro objetivo ahora es probar que $s_n W^n$ es entero sobre R sabiendo que es entero sobre R' . Para ello, observamos que existe un entero $m' \in \mathbb{N}$ y existen $a'_\ell \in R'$ tales que

$$(s_n W^n)^{m'} + a'_1 (s_n W^n)^{m'-1} + \dots + a'_{m'-1} (s_n W^n) + a'_{m'} = 0. \quad (2.1.6.1)$$

Ahora definimos $b \in R[T_0, T_1, \dots, T_N]$ de la forma

$$b = \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha_i} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (T_i - T_j)^{\beta_{ij}}$$

donde $\alpha_i \geq 0, \beta_{ij} \geq 0$ y son lo suficientemente grandes como para que $ba'_\ell \in R[T_0, \dots, T_N]$, para $\ell = 1, \dots, m'$. Al multiplicar (2.1.6.1) por b , obtenemos la siguiente igualdad con coeficientes en $R[T_0, T_1, \dots, T_N]$:

$$b (s_n W^n)^{m'} + ba'_1 (s_n W^n)^{m'-1} + \dots + ba'_{m'-1} (s_n W^n) + ba'_{m'} = 0. \quad (2.1.6.2)$$

Si desarrollamos b como polinomio en las variables T_0, T_1, \dots, T_N :

$$b = \prod_{i=1}^N T_i^{\alpha_i} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{\gamma_{ij}=0}^{\beta_{ij}} \binom{\beta_{ij}}{\gamma_{ij}} (-1)^{\gamma_{ij}} T_i^{\beta_{ij}-\gamma_{ij}} T_j^{\gamma_{ij}} = \sum_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha T_0^{\alpha_0} T_1^{\alpha_1} \dots T_N^{\alpha_N},$$

donde $\Lambda \subset \mathbb{N}^{N+1}$ es un subconjunto finito, observamos que al menos uno de estos coeficientes, digamos $b_{\alpha'}$, es 1.

Extrayendo los elementos de grado α' en las variables T_0, T_1, \dots, T_N de (2.1.6.2), obtenemos una relación de dependencia entera de $s_n W^n$ sobre R . Por lo que, en el caso general también la clausura entera de R en \tilde{R} es \mathbb{N} -graduada. □

Propiedades 2.1.7.

(1) Si $R \subset R_1 \subset R_2$ son tres anillos y R_1 es íntegramente cerrado en R_2 , entonces la clausura entera de R en R_1 coincide con la clausura entera de R en R_2 .

(2) Si R es un dominio y \overline{R} es su clausura entera en su cuerpo de cocientes, K , entonces $\overline{R[W]} = \overline{R}[W]$, donde $\overline{R[W]}$ es la clausura entera del anillo de polinomios $R[W]$ en su cuerpo de cocientes, $K(R[W]) = K(W)$.

(3) Si $R \subset \tilde{R}$ es una extensión de anillos y $S \subset R$ es un conjunto multiplicativo, entonces $S^{-1}(\overline{R})$ es la clausura entera de $S^{-1}R$ en $S^{-1}\tilde{R}$.

Demostración.

(1) Sea $x \in R_2$ entero sobre R , entonces también es entero sobre R_1 y, como R_1 es íntegramente cerrado, tenemos que $x \in R_1$. El contenido recíproco es obvio porque $R_1 \subset R_2$.

(2) Primero observamos que $\overline{R[W]} \subset K[W]$ ya que se dan las condiciones del apartado (1): $R[W] \subset K[W] \subset K(R[W]) = K(W)$ y $K[W]$ es íntegramente cerrado.

Por la Proposición 2.1.6, es suficiente conocer los elementos homogéneos de $K[W]$ que son enteros sobre $R[W]$:

Si $xW^n \in K[W]$ es entero sobre $R[W]$ satisface una relación de dependencia entera, digamos

$$(xW^n)^m + r_1(xW^n)^{m-1} + \cdots + r_{m-1}(xW^n) + r_m = 0,$$

donde cada $r_i = \sum_{j=0}^{N_i} r_{i,j}W^j \in R[W]$. En particular en grado nm tenemos que

$$(xW^n)^m + r_{1,n}W^n(xW^n)^{m-1} + \cdots + r_{m-1,n(m-1)}W^{n(m-1)}(xW^n) + r_{m,nm}W^{nm} = W^{nm} (x^m + r_{1,n}x^{m-1} + \cdots + r_{m-1,n(m-1)}x + r_{m,nm}) = 0,$$

entendiendo que $r_{i,j} = 0$ si $j > N_i$. Por lo tanto, $x \in \overline{R}$. Luego $\overline{R[W]} \subset \overline{R}[W]$.

Terminamos viendo que como $R[W] \subset \overline{R}[W]$ ($= R[W][\overline{R}]$) es una extensión entera, ambos anillos poseen la misma clausura entera y se tiene que

$$\overline{R[W]} \subset \overline{\overline{R}[W]} = \overline{R[W]} \subset \overline{R}[W].$$

Por lo que $\overline{R[W]} = \overline{R}[W]$.

(3) Si $\frac{a}{b} \in S^{-1}(\tilde{R})$ es entero sobre $S^{-1}R$ entonces se satisface una ecuación de dependencia entera en $S^{-1}(\tilde{R})$, digamos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m + \frac{r_1}{s_1} \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + \cdots + \frac{r_{m-1}}{s_{m-1}} \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{r_m}{s_m} = 0, \quad (2.1.7.1)$$

donde $\frac{r_i}{s_i} \in S^{-1}R$. Sea $s = s_1 \cdot s_2 \cdots s_m \in S$, entonces multiplicando la relación (2.1.7.1) por $(sb)^m$ tenemos la siguiente igualdad en $S^{-1}(\tilde{R})$:

$$(sa)^m + r'_1(sa)^{m-1} + \cdots + r'_{m-1}(sa) + r'_m = 0, \quad (2.1.7.2)$$

CAPÍTULO 2. CLAUSURA ENTERA

donde cada $r'_i = \frac{r_i}{s_i} s^m b^i$ está en la imagen de R en $S^{-1}R$. Por lo tanto, existe un $s' \in S$ tal que

$$s' \left((sa)^m + r'_1 (sa)^{m-1} + \dots + r'_{m-1} (sa) + r'_m \right) = 0$$

en \tilde{R} . Multiplicando entonces (2.1.7.2) por $(s')^m$ tenemos que $s'sa \in \overline{R}$, por lo que $\frac{a}{b} = \frac{s'sa}{s'sb} \in S^{-1}(\overline{R})$.

Recíprocamente, sea $a \in \overline{R}$ y $\frac{a}{s} \in S^{-1}(\overline{R})$. Supongamos que satisface la siguiente relación de dependencia

$$(a)^m + r_1(a)^{m-1} + r_2(a)^{m-2} + \dots + r_m = 0,$$

(igualdad en el anillo \tilde{R}) donde $r_i \in R$. Multiplicando a ambos lados de esta igualdad por $\frac{1}{s^m} \in S^{-1}R$ obtenemos una relación de dependencia,

$$\left(\frac{a}{s}\right)^m + \frac{r_1}{s} \left(\frac{a}{s}\right)^{m-1} + \dots + \frac{r_{m-1}}{s^{m-1}} \left(\frac{a}{s}\right) + \frac{r_m}{s^m} = 0,$$

en el anillo $S^{-1}(\tilde{R})$, que muestra que $\frac{a}{s} \in \overline{S^{-1}R}$.

□

Definición 2.1.8. [46, (17.A)] Se dice que un dominio R es *normal** si es íntegramente cerrado en su cuerpo de cocientes. En estas condiciones también se dice que $\text{Spec } R$ es un esquema normal.

En general, diremos que un esquema V es *normal* si puede cubrirse mediante cartas afines $\text{Spec } R$ donde los anillos R son dominios normales.

Propiedades 2.1.9.

- (1) Los dominios de factorización única son normales.
- (2) Los anillos locales regulares son normales.
- (3) Si R es normal, entonces $R[W]$ también lo es.
- (4) Si R es normal y $S \subset R$ es un conjunto multiplicativo, se tiene que $S^{-1}R$ también es normal.

Demostración.

*[47, pág 64] Un anillo R se dice que es *normal* si, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$, $R_{\mathfrak{p}}$ es un dominio normal. Además se tiene el siguiente resultado: Un anillo es normal si y sólo si es reducido e íntegramente cerrado en su anillo total de cocientes.

(1) Sea R un dominio de factorización única y sea K su cuerpo de cocientes. Supongamos que $\frac{a}{b} \in K$ con $\text{m. c. d.}\{a, b\} = 1$ es entero sobre R , entonces satisface una relación de dependencia entera en K , digamos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m + r_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + \cdots + r_{m-1} \left(\frac{a}{b}\right) + r_m = 0$$

donde $r_i \in R$. Multiplicando ambos lados por b^m nos queda

$$a^m + r_1 a^{m-1} b + \cdots + r_{m-1} a b^{m-1} + r_m b^m = 0,$$

por lo que $a^m = -b(r_1 a^{m-1} + \cdots + r_{m-1} a b^{m-2} + r_m b^{m-1})$. Ahora, si b no es una unidad, llegamos a una contradicción con el hecho de que la fracción inicial era irreducible. Por lo tanto, b es una unidad en R y $\frac{a}{b} \in R$.

(2) Si R es un anillo local regular, la Proposición 1.1.6 afirma que R es un dominio de factorización única y el resultado se sigue de la Propiedad (1).

(3) Por la Propiedad 2.1.7(2) se tiene que $\overline{R[W]} = \overline{R}[W] = R[W]$.

(4) Se sigue de la Propiedad 2.1.7(3).

□

Observación 2.1.10. [5, Proposición 5.13] Sea R un dominio. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (1) R es normal;
- (2) $R_{\mathfrak{p}}$ es normal para todo ideal primo \mathfrak{p} y
- (3) $R_{\mathfrak{m}}$ es normal para todo ideal maximal \mathfrak{m} .

Proposición 2.1.11. Sea R un anillo que verifica que $R_{\mathfrak{p}}$ es un dominio para todo primo \mathfrak{p} , entonces R es una suma directa de dominios. Además, si cada $R_{\mathfrak{p}}$ es normal, entonces R es suma directa de dominios normales.

Demostración. Sea $0 = \bigcap \mathfrak{q}_i$ una descomposición primaria minimal donde cada \mathfrak{q}_i es \mathfrak{p}_i -primario y los ideales primos $\{\mathfrak{p}_i\}$ son todos distintos. Como $R_{\mathfrak{p}_i}$ es un dominio \mathfrak{q}_i es primo (i.e., $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$).

Si $\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j \neq 0$ existe un ideal maximal que lo contiene, digamos $\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{m}$. Por lo tanto, $R_{\mathfrak{m}}$ posee al menos dos ideales primos minimales, lo que es una contradicción con el hecho de que $R_{\mathfrak{m}}$ sea un dominio. Además los primos $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ son coprimos dos a dos ya que si $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{m}$, tenemos que $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{m}$ y, de nuevo, $R_{\mathfrak{m}}$ tiene al menos dos primos minimales lo que es una contradicción. Por lo tanto, $R = R/\mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus R/\mathfrak{p}_s$.

Supongamos además que para cada primo \mathfrak{p} , $R_{\mathfrak{p}}$ es un dominio normal. Sea \mathfrak{m} un ideal maximal que contenga a \mathfrak{p}_i . Como hemos visto $\mathfrak{p}_j \not\subset \mathfrak{m}$, para $j \neq i$, por lo que $(R/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$ es normal. La Observación 2.1.10 implica que R/\mathfrak{p}_i es normal. Luego R es suma de dominios normales. □

Proposición 2.1.12. *Sea $R \subset \tilde{R}$ una extensión entera de anillos y sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo. Entonces:*

- (1) *Si $\mathfrak{q} \subset \tilde{R}$ es un ideal primo que domina a R en \mathfrak{p} entonces \mathfrak{q} es maximal si y solo si \mathfrak{p} es maximal.*
- (2) *Si $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ son dos ideales primos de \tilde{R} que dominan a R en \mathfrak{p} entonces $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*
- (3) *Existe un primo $\mathfrak{q} \subset \tilde{R}$ que domina a R en \mathfrak{p} (i.e. $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$).*
- (4) *De hecho, existe un número finito (y no nulo) de ideales primos de \tilde{R} que dominan a R en \mathfrak{p} .*
- (5) *Se tiene que $\dim_{\text{Krull}} R = \dim_{\text{Krull}} \tilde{R}$.*
- (6) *Si además R y \tilde{R} son dominios y R es normal entonces $\dim_{\text{Krull}} R_{\mathfrak{p}} = \dim_{\text{Krull}} \tilde{R}_{\mathfrak{q}}$ para todo ideal primo \mathfrak{q} de \tilde{R} que domina a R en \mathfrak{p} .*

Demostración. Para (1) véase [5, Corolario 5.8], para (2) véase [5, Corolario 5.9] y para (3) véase [5, Teorema 5.10].

(4) En el caso particular de que R fuese un anillo local y \mathfrak{p} su ideal maximal, observamos que si $\mathfrak{q} \subset \tilde{R}$ domina a R en \mathfrak{p} tenemos que $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}^{ce} = \mathfrak{p}\tilde{R}$ y, por (1), sabemos que \mathfrak{q} es un ideal maximal. El apartado (2), junto al hecho de que trabajamos con anillos noetherianos, implica que el anillo $\tilde{R}/\mathfrak{p}\tilde{R}$ es artiniano (véase [5, Teorema 8.5]), por lo que sólo tiene un número finito de ideales primos (que son maximales) (véase [5, Proposición 8.3]). Luego, sólo un número finito de ideales primos contienen a $\mathfrak{p}\tilde{R}$ y dominan a R en \mathfrak{p} .

El caso general se reduce al caso anterior localizando los anillos R y \tilde{R} en el conjunto multiplicativo $S = R \setminus \mathfrak{p}$. De esta forma obtenemos una extensión entera (véase [5, Proposición 5.6.ii]) de anillos $R_{\mathfrak{p}} \subset S^{-1}\tilde{R}$ donde los primos de $S^{-1}\tilde{R}$ están en correspondencia biyectiva con los primos de \tilde{R} que no intersecan con S y, en particular, se mantiene la correspondencia biyectiva entre los ideales primos de \tilde{R} que dominan a \mathfrak{p} y los ideales primos de $S^{-1}\tilde{R}$ que dominan a $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.

(5) **$\dim_{\text{Krull}} R \geq \dim_{\text{Krull}} \tilde{R}$:** Si $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_e$ es una cadena de ideales primos en \tilde{R} entonces el apartado (2) afirma que las preimágenes, $\mathfrak{q}_i \cap R$, son ideales primos en R distintos.

$\dim_{\text{Krull}} R \leq \dim_{\text{Krull}} \tilde{R}$: Sea $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ una cadena de ideales primos en R . El punto (3) afirma que existe un ideal primo $\mathfrak{q}_0 \subset \tilde{R}$ que domina a R en \mathfrak{p}_0 , luego se puede construir una cadena de ideales primos en \tilde{R} de la forma $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d$ donde $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ (véase el Teorema de Going-up [5, Teorema 5.11]).

(6) El hecho que la dimensión de \tilde{R}_q sea menor o igual que la dimensión de R_p está probado en el apartado anterior. A continuación mostraremos la desigualdad recíproca.

Sea $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ una cadena de ideales primos en R . Como $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ y R es normal, se puede construir una cadena de ideales primos en \tilde{R} de la forma $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d$ donde $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ (véase el Teorema de Going-down [5, Teorema 5.16]).

□

2.2. Valoraciones y anillos de valoración

A lo largo de esta sección, R^\times denotará el grupo multiplicativo de las unidades del anillo R .

Definición 2.2.1. [57, VI §8 pág. 32] Sea K un cuerpo y sea $(\Gamma, +)$ un grupo abeliano totalmente ordenado. Una *valoración en K* o *K -valoración* es una aplicación $\nu : K^\times \rightarrow \Gamma$ tal que para todo $x, y \in K^\times = K \setminus \{0\}$,

$$(1) \nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y) \text{ (i.e. } \nu \text{ es un morfismo de grupos) y}$$

$$(2) \nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\} \text{ si } x + y \neq 0.$$

Observaciones 2.2.2.

$$(1) \text{ Como } \nu(1) = \nu(1 \cdot 1) = \nu(1) + \nu(1) \text{ tenemos que } \nu(1) = 0.$$

$$(2) \text{ Si } x \in K^\times, \text{ escribiendo } 1 = x \cdot x^{-1} \text{ tenemos que } 0 = \nu(x \cdot x^{-1}) = \nu(x) + \nu(x^{-1}), \text{ por lo que } \nu(x^{-1}) = -\nu(x).$$

Definición 2.2.3. Sea K un cuerpo y sea $\nu : K^\times \rightarrow \Gamma$ una K -valoración. La imagen de ν , $\Gamma_\nu = \nu(K^\times) \subset \Gamma$, es un grupo abeliano totalmente ordenado denominado *grupo de valores*.

Definición 2.2.4. Sea R un dominio con cuerpo de cocientes K y sea $(\Gamma, +)$ un grupo abeliano totalmente ordenado. Llamamos *valoración en R* a una función $\nu : R^\times \rightarrow \Gamma$ que satisface las siguientes propiedades:

$$(I) \nu(x \cdot y) = \nu(x) + \nu(y) \text{ y}$$

$$(II) \nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\} \text{ si } x + y \neq 0,$$

para todo $x, y \in R^\times$.

A continuación veremos un ejemplo de valoración que ya hemos tratado.

Ejemplo 2.2.5 (Valoración en un anillo local regular). Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular. El orden en R :

$$\begin{aligned} \nu_{\mathfrak{m}} : R^{\times} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \text{máx}\{n : x \in \mathfrak{m}^n\}, \end{aligned}$$

definido en 1.2.6 es una valoración (véanse las Propiedades 1.2.7). De hecho, es una valoración discreta (véase más adelante la Definición 2.2.14).

Comentario 2.2.6. Una valoración en un dominio R , $\nu : R^{\times} \longrightarrow \Gamma$, se puede extender de forma única a una valoración en su cuerpo de cocientes estableciendo que $\nu\left(\frac{x}{y}\right) = \nu(x) - \nu(y)$ para cualesquiera $x, y \in R^{\times}$.

Comentario 2.2.7. Una valoración en un dominio R , $\nu : R^{\times} \longrightarrow \Gamma$, se extiende formalmente a todo el anillo R añadiendo un elemento más al grupo abeliano ordenado Γ , digamos ∞ , tal que

$$\infty \geq \gamma \text{ e } \infty + \gamma = \gamma + \infty = \infty \text{ para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Entonces definimos $\nu' : R \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ de modo que

$$\nu'(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r = 0 \\ \nu(r) & \text{si } r \neq 0. \end{cases}$$

Definición 2.2.8. [47, pág. 71] Un *anillo de valoración* es un dominio V con cuerpo de cocientes K tal que para todo $x \in K^{\times}$ se cumple que:

$$x \in V \text{ ó } x^{-1} \in V.$$

Proposición 2.2.9. Si V es un anillo de valoración, el conjunto de ideales de V está totalmente ordenado por la inclusión, i.e. para cualesquiera $I, J \subset V$ ideales, $I \subset J$ ó $J \subset I$.

Demostración. Supongamos que $I \not\subset J$, entonces existe un elemento $x \in V$ tal que $x \in I$ y $x \notin J$. Como $x \notin J$ tenemos que $x \notin \langle y \rangle$ para todo $y \in J$. Por lo tanto, para cualquier $y \in J$ no nulo $\frac{x}{y} \notin V$ y, como V es un anillo de valoración, tenemos que $\frac{y}{x} \in V$ para todo $y \in J$. Luego $J \subset I$. \square

Proposición 2.2.10. [41, Lema 6.4.2(1)] Sea V un anillo de valoración. Sea I un ideal finitamente generado de V y sea G un conjunto finito de generadores de I . Entonces existe un elemento $z \in G$ tal que $zV = I$. Por lo tanto, los ideales finitamente generados en un anillo de valoración son principales.

Demostración. Sea $G = \{x_1, \dots, x_s\}$, por la proposición 2.2.9 los ideales: x_1V, \dots, x_sV están totalmente ordenados. Sea x_iV el ideal que contiene a los demás, entonces $I = x_iV$. \square

Corolario 2.2.11. Un anillo de valoración V es un dominio local.

Demostración. Por la Proposición 2.2.9 se tiene que la unión de todos los ideales propios de un anillo de valoración es un ideal propio, luego es el único ideal maximal. \square

Proposición 2.2.12. [41, Proposición 6.4.1] *Un anillo de valoración V es un dominio normal (i. e., es íntegramente cerrado).*

Demostración. Sea K el cuerpo de cocientes de V . Supongamos que V no es íntegramente cerrado, entonces existe un elemento $x \in K$ entero sobre V tal que $x \notin V$.

Por un lado, x satisface una relación de dependencia entera, digamos

$$x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0,$$

donde $a_i \in V$. Y, por otro lado, $x^{-1} \in V$ (véase la Definición 2.2.8). Por lo tanto, multiplicando a ambos lados de la igualdad por x^{-m} nos queda la siguiente igualdad en V :

$$1 + a_1x^{-1} + \cdots + a_{m-1}x^{-m+1} + a_mx^{-m} = 0,$$

de donde obtenemos que

$$1 = -x^{-1}(a_1 + \cdots + a_{m-1}x^{-m} + a_mx^{-m+1}) \in x^{-1}V,$$

por lo que x^{-1} es una unidad en V y $x \in V$, lo que contradice la hipótesis de partida. \square

Observación 2.2.13. Sea $\nu : K^\times \rightarrow \Gamma$ una valoración en K . Entonces

- (1) $R_\nu := \{0\} \cup \{x \in K^\times : \nu(x) \geq 0\}$ es un subanillo de K y
- (2) $\mathfrak{m}_\nu := \{0\} \cup \{x \in K^\times : \nu(x) > 0\}$ es el único ideal maximal de R_ν .

Se observa que R_ν es un anillo de valoración.

Recíprocamente, sea V un anillo de valoración y sea K su cuerpo de cocientes. Sea $\Gamma_V = K^\times/V^\times$ entonces

- (1) Γ_V es un grupo abeliano con la operación $xV^\times \cdot yV^\times = (xy)V^\times$ (el neutro es $1V^\times$ y si $x \neq 0$, el inverso de xV^\times es $x^{-1}V^\times$).
- (2) La relación $xV^\times \leq yV^\times$ si y sólo si $yx^{-1} \in V$ es una relación de orden. Además, como V es una valoración el orden es total (véase la Definición 2.2.8).
- (3) La operación de grupo es compatible con la relación de orden, i. e., si $xV^\times \leq yV^\times$ entonces para cualquier zV^\times se tiene que $xV^\times \cdot zV^\times \leq yV^\times \cdot zV^\times$.

Ahora vemos que el morfismo natural de grupos

$$\begin{array}{ccc} \nu : K^\times & \longrightarrow & \Gamma_V \\ x & \longmapsto & xV^\times \end{array}$$

satisface las dos propiedades que definen una valoración en K :

CAPÍTULO 2. CLAUSURA ENTERA

(I) $\nu(xy) = \nu(x) \cdot \nu(y)$, ya que $xyV^\times = xV^\times \cdot yV^\times$ y

(II) $\nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$: si, por ejemplo, $\nu(x) \leq \nu(y)$, tenemos que $yx^{-1} \in V$ y $(x+y)x^{-1} = 1 + yx^{-1} \in V$, por lo tanto, $\nu(x) \leq \nu(x+y)$.

Definición 2.2.14. [47, pág. 78] Un *anillo de valoración discreta*, AVD, es un anillo de valoración con grupo de valores $(\mathbb{Z}, +)$.

Teorema 2.2.15. [47, Teorema 11.1] *Sea R un anillo de valoración. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) R es un AVD,
- (2) R es un dominio de ideales principales,
- (3) R es noetheriano.

Teorema 2.2.16. [47, Teorema 11.2] *Sea R un anillo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) R es un AVD,
- (2) R es un dominio local de ideales principales y no es un cuerpo,
- (3) R es un anillo local noetheriano, $\dim_{K^{\text{rull}}} R > 0$ y el ideal maximal \mathfrak{m}_R es principal,
- (4) R es un anillo local noetheriano normal de dimensión 1,
- (5) R es un anillo local regular de dimensión 1.

Ejemplo 2.2.17. Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local regular y sea K su cuerpo de cocientes. Sea $\nu_{\mathfrak{m}} : R^\times \rightarrow \mathbb{N}$ la valoración descrita en el Ejemplo 2.2.5. Por el Comentario 2.2.6 $\nu_{\mathfrak{m}}$ se puede extender a una valoración $\nu : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ en K^\times de forma natural:

$$\nu\left(\frac{x}{y}\right) = \nu_{\mathfrak{m}}(x) - \nu_{\mathfrak{m}}(y), \text{ para cualesquiera } x, y \in R \text{ con } y \neq 0.$$

A su vez, por la Observación 2.2.13, la K -valoración ν determina y queda determinada por el siguiente anillo de valoración discreta:

$$R_\nu = \left\{ \frac{x}{y} \in K^\times : \nu_{\mathfrak{m}}(x) \geq \nu_{\mathfrak{m}}(y) \right\} \cup \{0\} \subset K.$$

Consideramos

$$\text{Spec } R \longleftarrow X$$

2.2. VALORACIONES Y ANILLOS DE VALORACIÓN

el blow-up de R en $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$. Sea $H \subset X$ la hipersuperficie excepcional y sea h el punto genérico de H . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\mathcal{O}_{X,h} = (R_1)_{\langle x_1 \rangle}, \quad \text{donde } R_1 = R \left[\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_d}{x_1} \right].$$

Por el Teorema 1.4.6 sabemos que X es regular y, por lo tanto, $R \subset \mathcal{O}_{X,h} \subset K$, el anillo local en el punto genérico de H , es un anillo local regular de dimensión 1, i. e. un anillo de valoración discreta. Llamaremos ν_h a su valoración:

$$\begin{aligned} \nu_h : \mathcal{O}_{X,h}^\times &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \frac{f}{g} &\longmapsto \text{máx} \left\{ n : \frac{f}{g} \in \langle x_1 \rangle^n \right\}. \end{aligned}$$

A continuación vamos a ver que $\mathcal{O}_{X,h} = R_\nu$.

Como $\nu\left(\frac{x_i}{x_1}\right) = 0$ y $\nu(x_1) = 1$ es claro que $\mathcal{O}_{X,h} \subset R_\nu$.

Para probar el contenido recíproco probaremos que si $f \in R$ satisface que $\nu_{\mathfrak{m}}(f) = r$, entonces $\nu_h(f) = r$ (considerado como un elemento de $\mathcal{O}_{X,h}$).

Definimos el siguiente anillo local

$$R' = (R_1)_{\mathfrak{n}} = R \left[\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_d}{x_1} \right]_{\mathfrak{n}}$$

donde $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \langle \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_d}{x_1} \rangle$ y consideramos el siguiente sistema regular de parámetros $\left\{ x_1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_d}{x_1} \right\}$. Observamos que como $\mathcal{O}_{X,h}$ se obtiene localizando R' en $\langle x_1 \rangle$ y \widehat{R}' , el completado de R' , es fielmente plano sobre R' se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) $f \in \langle x_1 \rangle^r$ y $f \notin \langle x_1 \rangle^{r+1}$ en $\mathcal{O}_{X,h}$,
- (2) $f \in \langle x_1 \rangle^r$ y $f \notin \langle x_1 \rangle^{r+1}$ en R' ,
- (3) $(\langle x_1 \rangle^{r+1} + \langle f \rangle) / \langle x_1 \rangle^{r+1} \neq 0$ como R' -módulo y
- (4) $(\langle x_1 \rangle^{r+1} + \langle f \rangle) / \langle x_1 \rangle^{r+1} \neq 0$ como \widehat{R}' -módulo.

Para terminar, consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \widehat{R} = k[[x_1, x_2, \dots, x_d]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_1 & \longrightarrow & \widehat{R}' = k\left[\left[x_1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_d}{x_1}\right]\right], \end{array}$$

y notamos que como $f \in R$ cumple que $f \in \mathfrak{m}^r$ y $f \notin \mathfrak{m}^{r+1}$, se tiene que

- (a) $f = F_r + F_{r+1} + \dots \in \widehat{R}$, con $F_r \neq 0$, donde F_i es su parte homogénea de grado i y
 (b) $f = x_1^r f' \in \widehat{R}'$ donde r es el exponente máximo con esta propiedad.

Luego se satisface la condición (4) y $\nu_h(f) = r$.

2.3. Clausura entera de ideales

Definición 2.3.1. [41, Definición 1.1.1] Sean R un anillo e $I \subset R$ un ideal. Un elemento $r \in R$ se dice que es *entero sobre I* si existe un número entero y positivo m y elementos $a_i \in I^i$, $i = 1, \dots, m$, tales que r satisface la siguiente relación polinomial mónica:

$$r^m + a_1 r^{m-1} + a_2 r^{m-2} + \dots + a_{m-1} r + a_m = 0. \quad (2.3.1.1)$$

La igualdad (2.3.1.1) se denomina *relación de dependencia entera de r sobre I* .

Los elementos de R que son enteros sobre I forman un ideal (véase el Corolario 2.3.14), denominado *clausura entera de I* , que se denota por \bar{I} .

Si $I = \bar{I}$ se dice que I es *íntegramente cerrado*. Si $I \subset J$ son ideales tales que $J \subset \bar{I}$ se dice J es *entero sobre I* .

Proposición 2.3.2. [41, Observaciones 1.1.3 (1) y (3)] Sean R un anillo e $I \subset R$ un ideal. Entonces

- (1) $I \subset \bar{I}$ y
 (2) $\bar{I} \subset \sqrt{I}$.

Demostración. El primer apartado se deduce de la definición. Veamos la prueba del segundo apartado. Si $x \in R$ satisface la relación de dependencia entera sobre I (2.3.1.1), entonces $r^m = -(a_1 r^{m-1} + \dots + a_{m-2} r^2 + a_{m-1} r + a_m) \in I$. \square

Observaciones 2.3.3. Sea R un anillo. Entonces

- (1) $\bar{0}$ es el nilradical de R y
 (2) Si $I \subset J$ son dos ideales de R , se tiene que $\bar{I} \subset \bar{J}$.

Propiedad 2.3.4. [41, Observación 1.1.3(7)] Sea I un ideal en R y sea $\varphi : R \rightarrow R_1$ un morfismo de anillos. Si $r \in \bar{I}$ entonces

$$\varphi(r) \in \overline{\varphi(I)R_1}.$$

Esto implica que $\varphi(I)R_1$ y $\varphi(\bar{I})R_1$ poseen la misma clausura entera.

Demostración. Como r es entero sobre I , existe un $m \in \mathbb{N}$ y existen $a_i \in I^i$ para $i = 1, \dots, m$ tales que

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \dots + a_{m-1} r + a_m = 0$$

en R . Aplicando el morfismo φ a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\varphi(r)^m + \varphi(a_1)\varphi(r)^{m-1} + \dots + \varphi(a_{m-1})\varphi(r) + \varphi(a_m) = 0,$$

donde cada $\varphi(a_i) \in \varphi(I^i) = \varphi(I)^i \subset (\varphi(I)R_1)^i$. Por lo tanto, $\varphi(r)$ es entero sobre $\overline{\varphi(I)R_1}$.

Terminamos observando que $\varphi(I)R_1 \subset \varphi(\bar{I})R_1 \subset \overline{\varphi(I)R_1}$ por lo que $\overline{\varphi(I)R_1} = \overline{\varphi(\bar{I})R_1}$. \square

Propiedad 2.3.5. [41, Observación 1.1.3(8)] Sea $\varphi : R \rightarrow R_1$ un morfismo de anillos y sea $J \subset R_1$ un ideal íntegramente cerrado. Entonces $\varphi^{-1}(J) \subset R$ también es un ideal íntegramente cerrado.

Demostración. Supongamos que $r \in \overline{\varphi^{-1}(J)}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y existen $a_i \in \varphi^{-1}(J)^i$, con $i = 1, \dots, m$, tales que

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \dots + a_{m-1} r + a_m = 0$$

en R . Aplicando el morfismo φ a ambos lados de la igualdad nos queda

$$\varphi(r)^m + \varphi(a_1)\varphi(r)^{m-1} + \dots + \varphi(a_{m-1})\varphi(r) + \varphi(a_m) = 0$$

donde $\varphi(a_i) \in \varphi(\varphi^{-1}(J)^i) = (\varphi\varphi^{-1}(J))^i \subset J^i$. Por lo tanto, $\varphi(r) \in \bar{J} = J$ y $r \in \varphi^{-1}(J)$. \square

Proposición 2.3.6. Sea $\varphi : R \rightarrow S^{-1}R$ la localización en un conjunto multiplicativo $S \subset R$, y sea $I \subset R$ un ideal. Entonces

$$S^{-1}(\bar{I}) = \overline{S^{-1}(I)}.$$

Demostración. Si $I \cap S \neq \emptyset$ ambos ideales coinciden con $S^{-1}R$ así que no hay nada que probar.

Si $I \cap S = \emptyset$, por la Propiedad 2.3.4 sólo tenemos que demostrar que si $\frac{r}{s}$ es entero sobre $S^{-1}(I)$ entonces $\frac{r}{s} \in S^{-1}(\bar{I})$. Supongamos que $\frac{r}{s}$ satisface una relación de dependencia sobre $S^{-1}(I)$, digamos

$$\left(\frac{r}{s}\right)^m + \frac{a_1}{s_1} \left(\frac{r}{s}\right)^{m-1} + \dots + \frac{a_{m-1}}{s_{m-1}} \left(\frac{r}{s}\right) + \frac{a_m}{s_m} = 0,$$

donde $\frac{a_i}{s_i} \in S^{-1}(I^i)$ para $i = 1, \dots, m$.

Observamos que, para cada $i = 1, \dots, m$, existe un elemento $s'_i \in S$ tal que $s'_i a_i \in I^i$. Sea $t = s_1 \cdots s_m \cdot s'_1 \cdots s'_m$. Multiplicando la igualdad anterior por $(st)^m$ se tiene que

$$\frac{(tr)^m + \tilde{a}_1 (tr)^{m-1} + \dots + \tilde{a}_{m-1} (tr) + \tilde{a}_m}{1} = 0,$$

CAPÍTULO 2. CLAUSURA ENTERA

donde $\tilde{a}_i = s^i s_i^{m-1} (s'_i)^m a_i \in I^i$, para cada $i = 1, \dots, m$. Para terminar, observamos que existe un elemento $s' \in S$ tal que

$$(s'tr)^m + s'\tilde{a}_1 (s'tr)^{m-1} + \dots + (s')^{m-1} \tilde{a}_{m-1} (s'tr) + (s')^m \tilde{a}_m = 0,$$

donde ahora la igualdad se da en el anillo R y cada coeficiente $(s')^i \tilde{a}_i \in I^i$. Por lo tanto, $s'tr$ es entero sobre I , con lo que $\frac{r}{s} = \frac{s'tr}{s'ts} \in S^{-1}(\bar{I})$. □

Proposición 2.3.7. [41, Proposición 1.5.2] *Sea R un dominio normal, no necesariamente noetheriano. Si $f \in R \setminus \{0\}$, entonces $\overline{fR} = fR$.*

Demostración. Supongamos que r es entero sobre fR . Entonces

$$r^m + (b_1 f)r^{m-1} + \dots + (b_{m-1} f^{m-1})r + (b_m f^m) = 0$$

para algún $m \in \mathbb{N}$ y para algunos $b_i \in R$ donde $i = 1, \dots, m$. Dividiendo por el elemento no nulo f^m obtenemos la igualdad:

$$\left(\frac{r}{f}\right)^m + b_1 \left(\frac{r}{f}\right)^{m-1} + \dots + b_{m-1} \left(\frac{r}{f}\right) + b_m = 0$$

en el cuerpo de cocientes de R . Así, $\frac{r}{f} \in \overline{R} = R$ (por ser R íntegramente cerrado), luego $r \in fR$.

Terminamos observando que $fR \subset \overline{fR}$ (véase la Proposición 2.3.2(1)). □

Proposición 2.3.8. *Sea R un anillo y sea N el nilradical de R . Sea $\varphi : R \rightarrow R/N$ el morfismo cociente. Sea $r \in R$ y sea $I \subset R$ un ideal^o. Entonces r es entero sobre I si y sólo si $\varphi(r)$ es entero sobre el ideal $\varphi(I)$.*

Demostración.

Supongamos que $\varphi(r)$ satisface una relación de dependencia sobre $\varphi(I)$ en R/N , digamos

$$\varphi(r)^m + a_1 \varphi(r)^{m-1} + \dots + a_{m-1} \varphi(r) + a_m = 0, \quad (2.3.8.1)$$

donde $a_i \in \varphi(I)^i$. Como φ es sobreyectivo, para cada i existe un a'_i tal que $a_i = \varphi(a'_i)$. Por lo tanto, levantando la expresión (2.3.8.1) tenemos que

$$r^m + a'_1 r^{m-1} + \dots + a'_{m-1} r + a'_m = b,$$

donde $b \in N$ y $a'_i \in I^i$. Sea n tal que $b^n = 0$. Entonces

$$(r^m + a'_1 r^{m-1} + \dots + a'_{m-1} r + a'_m)^n = 0,$$

y desarrollando esta expresión observamos que $r \in \bar{I}$.

Para terminar, notamos que el recíproco ya está probado en la Propiedad 2.3.4. □

2.3.1. Clausura entera y reducción de ideales

A continuación daremos algunas definiciones vinculadas a la noción de clausura entera de ideales.

Definición 2.3.9. [41, Definición 1.2.1] Sea R un anillo y sean $I \subset J$ ideales en R . Se dice que I es una *reducción* de J si existe un entero positivo m tal que $J^{m+1} = IJ^m$.

Proposición 2.3.10. [41, Proposición 1.1.7 y Corolario 1.2.2] *Un elemento $r \in R$ es entero sobre I si y sólo si I es una reducción de $I + \langle r \rangle$.*

Demostración. Si $r \in \bar{I}$ entonces satisface una relación de dependencia entera sobre I , digamos

$$r^m + a_1 r^{m-1} + a_2 r^{m-2} + \dots + a_{m-1} r + a_m = 0,$$

donde $a_i \in I^i$ y $a_i r^{m-i} \in I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$, para cada $i = 1, \dots, m$. Así,

$$r^m = -(a_1 r^{m-1} + a_2 r^{m-2} + \dots + a_{m-1} r + a_m) \in I(I + \langle r \rangle)^{m-1},$$

por lo que $(I + \langle r \rangle)^m = I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$.

Recíprocamente, si I es una reducción de $I + \langle r \rangle$ existe un entero positivo m tal que $(I + \langle r \rangle)^m = I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$. En particular, $r^m \in I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$, digamos $r^m = b_1 r^{m-1} + b_2 r^{m-2} + \dots + b_{m-1} r + b_m$ donde cada $b_i \in I \cdot I^{i-1}$, lo que implica que r es entero sobre I . \square

Teorema 2.3.11 (Truco del Determinante). [41, Corolario 1.1.8] *Sea R un anillo noetheriano, sea $I \subset R$ un ideal. Para cualquier elemento $r \in R$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (1) r es entero sobre I .
- (2) Existe un R -módulo finitamente generado M tal que
 - (a) $rM \subset IM$ y
 - (b) si $aM = 0$ para algún $a \in R$ entonces ar es nilpotente.

Demostración.

(1) \Rightarrow (2): Supongamos que $r \in \bar{I}$, entonces por la Proposición 2.3.10 existe un entero m tal que $(I + \langle r \rangle)^m = I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$. Observamos que el R -módulo finitamente generado $(I + \langle r \rangle)^{m-1}$ satisface las dos propiedades del punto (2):

(a) $r(I + \langle r \rangle)^{m-1} \subset (I + \langle r \rangle)^m = I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$ y

(b) si $a(I + \langle r \rangle)^{m-1} = 0$ entonces como $r^m \in (I + \langle r \rangle)^m = I(I + \langle r \rangle)^{m-1}$, en particular, se tiene que $ar^m \in aI(I + \langle r \rangle)^{m-1} = 0$ por lo que ar es nilpotente.

(2)⇒(1): Supongamos que $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ es un conjunto de generadores de M . Por hipótesis, cada $rb_i \in IM$, por lo que $rb_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_j$ con $a_{ij} \in I$. Luego,

$$(r \text{ Id} - A) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = 0,$$

donde $A = (a_{ij})$, así

$$\det(r \text{ Id} - A) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (\text{adj}(r \text{ Id} - A))^t (r \text{ Id} - A) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = 0.$$

Al ser $\{b_1, \dots, b_m\}$ un conjunto de generadores obtenemos que $\det(r \text{ Id} - A)M = 0$. Luego, por hipótesis, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\det(r \text{ Id} - A)r)^n = 0$.

Para obtener una relación de dependencia de r sobre I , observamos que, por construcción, $\det(r \text{ Id} - A) = r^m + c_1r^{m-1} + \dots + c_{m-1}r + c_m$ donde cada $c_i \in I^i$ por lo tanto

$$\begin{aligned} (\det(r \text{ Id} - A))^n &= r^{mn} + d_1r^{mn-1} + \dots + d_{mn-1}r + d_{mn}, \quad \text{y} \\ 0 &= (\det(r \text{ Id} - A))^n r^n = r^{(m+1)n} + d_1r^{(m+1)n-1} + \dots + d_{mn-1}r^{n+1} + d_{mn}r^n, \end{aligned}$$

donde $d_i \in I^i$ para $i \in \{1, \dots, mn\}$.

□

Propiedades 2.3.12. [41, Proposición 1.2.4] Sean R un anillo noetheriano y sean $I \subset K \subset J$ ideales en R .

- (1) Si I es una reducción de K y K es una reducción de J entonces I es una reducción de J .
- (2) Si I es una reducción de J entonces K es una reducción de J .
- (3) Si I es una reducción de J entonces I es una reducción de K .

Demostración.

(1) Por hipótesis existen dos enteros n y m tales que $K^{n+1} = IK^n$ y $J^{m+1} = KJ^m$. Como $I \subset K \subset J$, se tiene que

$$(J^{m+1})^{n+1} = K^{n+1}J^{m(n+1)} = IK^nJ^{m(n+1)} \subset IJ^{mn+m+n} \subset J^{mn+m+n+1},$$

por lo que I es una reducción de J .

(2) Existe un entero positivo m tal que $J^{m+1} = IJ^m$, observando que $I \subset K$ y que $K \subset J$ tenemos la siguiente cadena de contenidos que prueban que K es una reducción de J :

$$J^{m+1} = IJ^m \subset KJ^m \subset J^{m+1}.$$

(3) Supongamos primero que $I \subset K = I + \langle r \rangle \subset J$. Como I es una reducción de J , existe un entero positivo m tal que $J^{m+1} = IJ^m$. Observamos que

(a) $rJ^m \subset J^{m+1} = IJ^m$ y

(b) si $aJ^m = 0$ para algún $a \in R$, como $r \in J$ se tiene que $ar^m = 0$, con lo que ar es nilpotente.

Luego, r es entero sobre I e I es una reducción de K (véanse el Truco del Determinante en el Teorema 2.3.11 y la Proposición 2.3.10).

El caso general en que $I \subset K = I + \langle r_1, \dots, r_t \rangle \subset J$ se prueba iterando t veces el caso anterior y utilizando el apartado (1).

□

Teorema 2.3.13 (Criterio de Reducciones). [41, Corolario 1.2.5] *Sea R un anillo noetheriano y sean $I \subset J$ dos ideales en R . Entonces*

$$J \subset \bar{I} \text{ si y sólo } I \text{ es una reducción de } J.$$

Demostración. Empezamos observando que como R es noetheriano J es un ideal finitamente generado.

Supongamos que I es una reducción de J y que $r \in J$. Como $I \subset I + \langle r \rangle \subset J$ satisfacen las condiciones de la Propiedad 2.3.12(3), se tiene que I es una reducción de $I + \langle r \rangle$, por lo que la Proposición 2.3.10 afirma que r es entero sobre I .

Para probar el recíproco suponemos que $J = \langle r_1, \dots, r_t \rangle \subset \bar{I}$, donde cada r_i es entero sobre I y sobre $I + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle$. La Proposición 2.3.10 establece que $I + \langle r_1, \dots, r_{i-1} \rangle$ es una reducción de $I + \langle r_1, \dots, r_i \rangle$ para $i = 1, \dots, t$ y, finalmente, por la Propiedad 2.3.12(1), I es una reducción de J . □

Corolario 2.3.14. [41, Corolario 1.3.1] *Si I es un ideal de un anillo noetheriano R , entonces \bar{I} es un ideal.*

Demostración. Supongamos que r y s son enteros sobre I . Necesitamos probar que

(I) $br \in \bar{I}$ para cualquier $b \in R$ y

(II) $r + s$ es entero sobre I .

Para ello, observamos que, como $r \in \bar{I}$ y $s \in \bar{I} \subset \overline{I + \langle r \rangle}$, la Proposición 2.3.10 afirma que I es una reducción de $I + \langle r \rangle$ y $I + \langle r \rangle$ es una reducción de $I + \langle r, s \rangle$. Luego, por la Propiedad 2.3.12(1) tenemos que I es una reducción de $I + \langle r, s \rangle$. Los dos resultados se obtienen ahora aplicando la Propiedad 2.3.12(3) a las siguientes cadenas de ideales:

$$(I) \quad I \subset I + \langle br \rangle \subset I + \langle r \rangle \text{ e}$$

$$(II) \quad I \subset I + \langle r + s \rangle \subset I + \langle r, s \rangle.$$

□

2.3.2. Criterios sobre clausura entera de ideales en dominios

Ahora vamos a presentar criterios que nos permiten determinar cuando, en un dominio, un ideal es una extensión entera de otro.

Teorema 2.3.15 (Criterio Valorativo). [41, Proposición 6.8.2] *Sea R un dominio y sea I un ideal en R . Entonces*

$$\bar{I} = \bigcap_V (IV \cap R),$$

donde V varía sobre todos los dominios de valoración del cuerpo de cocientes de R que contienen a R .

Si R es noetheriano, sólo es necesario tomar aquellos V que son anillos de valoración discreta.

Teorema 2.3.16 (Criterio del Blow-up Normalizado). [57, Apéndice 4, Lema pág. 354] *Sea R un dominio noetheriano y sea I un ideal de R . Si*

$$\text{Spec } R \xleftarrow{\Theta} \mathcal{R}$$

es el blow-up normalizado de $\text{Spec}(R)$ en I , entonces un elemento $r \in R$ es entero sobre I si y solo si r es una sección global del haz de ideales invertible $IO_{\mathcal{R}}$.

Demostración. Empezamos observando que Θ factoriza por:

$$\text{Spec } R \xleftarrow{\rho} \text{Bl}_I(R) \longleftarrow \mathcal{R}$$

donde ρ denota el blow-up en I y \mathcal{R} es el normalizado de $\text{Bl}_I(R)$. Si suponemos que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, donde cada f_i es no nulo, podemos cubrir el esquema $\text{Bl}_I(R)$ por las siguientes cartas afines $U_i = \text{Spec}(R_i)$, donde

$$R_i = R \left[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_s}{f_i} \right] \subset R_{f_i} \subset K = K(R).$$

Denotaremos por $\overline{R_i}$ la clausura entera de R_i en K , su cuerpo de cocientes y observamos que $\{\text{Spec } \overline{R_i}\}_{i=1, \dots, s}$ es un recubrimiento por abiertos afines del esquema \mathcal{R} (recordamos que la Propiedad 2.1.9(4) afirma que la localización y el cierre por clausura entera conmutan).

Demostremos el criterio en cada carta.

\Rightarrow Si r es entero sobre I entonces satisface una relación de dependencia en R , digamos

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \dots + a_{m-1} r + a_m = 0,$$

donde cada $a_j \in I^j$. Esta relación se puede ver en cada carta del esquema \mathcal{R} ya que $R \subset \overline{R_i}$. Considerando que cada $a_j \in I^j \overline{R_i} = f_i^j \overline{R_i}$ concluimos que

$$r \in \overline{f_i \overline{R_i}} \stackrel{\text{Proposición 2.3.7}}{=} f_i \overline{R_i} = I \overline{R_i}.$$

Luego, $r \in \bigcap_{i=1}^s I \overline{R_i}$ y por lo tanto, r es una sección global de $I\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$.

\Leftarrow Para probar el recíproco haremos uso del Criterio Valorativo expuesto en el Teorema 2.3.15. Necesitamos probar que si V es un anillo de valoración discreta que cumple que $R \subset V \subset K$ se tiene que $r \in IV$ suponiendo que el elemento r es una sección global del haz $I\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$.

Como I es finitamente generado, el ideal IV es principal (véase la Proposición 2.2.10). Digamos que $IV = f_i V$.

Ahora, como IV es invertible, la propiedad universal del blow-up afirma que existe un único morfismo de esquemas, ϕ , que permite factorizar el morfismo de esquemas afines $\varphi: \text{Spec } V \rightarrow \text{Spec } R$, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Bl}_I(R) & \xleftarrow{\phi} & \text{Spec}(V) \\ & \searrow \rho & \swarrow \varphi \\ & \text{Spec } R & \end{array}$$

Por lo tanto, tomando la carta afín $U_i = \text{Spec}(R_i)$ tenemos el siguiente diagrama de anillos

$$\begin{array}{ccc} R_i & \xrightarrow{\phi^*} & V \\ & \searrow \rho^* & \swarrow \varphi^* \\ & R & \end{array}$$

donde todos los morfismos son inyectivos[†].

[†](ρ^*) es inyectivo por la construcción del blow-up sobre un dominio y φ^* lo es por la elección de V . Si $a = \sum_{|\alpha| \leq M} b_\alpha \left(\frac{f_1}{f_i}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_s}{f_i}\right)^{\alpha_{s-1}} \in \ker(\phi^*)$, entonces $a f_i^M \in \ker(\phi^* \circ \rho^*) = \ker(\varphi^*) = \{0\} \subset R$ luego, $a f_i^M = 0$ en R y como R_i es un dominio y $f_i \neq 0$ en R_i tenemos que $a = 0$.

El siguiente paso es observar que como V es un dominio normal, $\overline{R_i} \subset V$ (véanse la Proposición 2.2.12 y la Propiedad 2.1.7(1)).

Finalmente, por hipótesis, $r \in \overline{IR_i}$. En particular, $r \in IV$ como queríamos probar.

□

2.4. Sobre ideales invertibles en esquemas normales

Hemos visto que el Criterio del Blow-up Normalizado (enunciado en el Teorema 2.3.16) nos permite establecer si un ideal es entero sobre otro. En esta sección continuaremos con estas ideas.

Lema 2.4.1. [47, Teorema 11.5][46, Teorema 38] *Sea R un dominio normal y noetheriano que no sea un cuerpo. Entonces,*

(1) *todos los divisores primos de un ideal principal no nulo, aR , (ideales primos asociados al módulo R/aR) tienen altura 1 y*

(2)

$$R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ primo,} \\ \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} R_{\mathfrak{p}}.$$

Proposición 2.4.2. *Sea \mathcal{R} un esquema normal. Sea $J\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ un haz de ideales y sea $I\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ un haz de ideales principales. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $J\mathcal{O}_{\mathcal{R}} \subset I\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ y

(2) *Para toda hipersuperficie irreducible de \mathcal{R} se tiene que $J\mathcal{O}_{\mathcal{R},h} \subset I\mathcal{O}_{\mathcal{R},h}$, donde h es el punto genérico de dicha hipersuperficie (primo genérico de altura 1).*

Demostración. Sea $\text{Spec } R \subset \mathcal{R}$ un abierto afín, donde R es un dominio normal. Empezamos observando que una de las implicaciones es trivial: si $JR \subset IR$, entonces la inclusión se mantiene después de cualquier localización.

Para demostrar la implicación recíproca recordamos que, por hipótesis, IR es un ideal principal, digamos $IR = aR$. Entonces, el Lema 2.4.1 afirma que $aR = \bigcap_{\mathfrak{p}} aR_{\mathfrak{p}}$, donde \mathfrak{p} recorre los primos de altura 1. Luego

$$JR \subset \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ primo,} \\ \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} JR_{\mathfrak{p}} \cap R \subset \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \text{ primo,} \\ \text{ht}(\mathfrak{p}) = 1}} aR_{\mathfrak{p}} \cap R = aR = IR.$$

□

2.5. Sobre la valoración de un ideal

En esta sección pretendemos exponer varios resultados que nos serán útiles más adelante aplicados al caso concreto de la valoración presentada en el Ejemplo 2.2.5.

Definición 2.5.1. [41, Definición 6.8.9] Sea R un dominio noetheriano con cuerpo de cocientes K . Sea $\nu : K^\times \rightarrow \Gamma$ una valoración que cumpla que $\nu(r) \geq 0_\Gamma$ para todo $r \in R$.

Se define la *valoración del ideal* $I \subset R$ como

$$\nu(I) = \min \{ \nu(x) : x \in I, x \neq 0 \}. \quad (2.5.1.1)$$

(En realidad, la valoración de I se define como el ínfimo del conjunto de la derecha, pero dado que R es noetheriano el mínimo se alcanza).

Proposición 2.5.2. Sea R un dominio noetheriano con cuerpo de cocientes K y sea ν una valoración en K tal que $\nu(r) \geq 0_\Gamma$ para todo $r \in R$. Para cualquier ideal $I \subset V$ se tiene que

- (1) si $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ entonces $\nu(I) = \min_{1 \leq i \leq s} \{ \nu(f_i) \}$,
- (2) [41, Proposición 6.8.10] $\nu(\bar{I}) = \nu(I)$ y
- (3) $\nu(I^n) = n\nu(I)$.

Demostración.

- (1) Cualquier elemento de I se puede expresar como $a_1 f_1 + \dots + a_s f_s$ donde $a_i \in R$, así

$$\nu(a_1 f_1 + \dots + a_s f_s) \geq \min_{1 \leq i \leq s} \{ \nu(a_i) + \nu(f_i) \} \geq \min_{1 \leq i \leq s} \{ \nu(f_i) \}.$$

Luego, $\nu(I) \geq \min_{0 \leq i \leq s} \{ \nu(f_i) \}$. Se tiene la igualdad porque cada $f_i \in I$.

- (2) Es claro que $\nu(I) \geq \nu(\bar{I})$ ya que $I \subset \bar{I}$. Para probar la desigualdad recíproca veremos que $\nu(I) \leq \nu(r)$ para cualquier $r \in \bar{I}$. Sea r un elemento entero sobre I , entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ y $a_j \in I^j$ para $j = 1, \dots, m$ tales que

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \dots + a_{m-1} r + a_m = 0,$$

por lo que

$$r^m = - (a_1 r^{m-1} + \dots + a_{m-1} r + a_m).$$

Aplicando las propiedades de la valoración tenemos

$$\begin{aligned} m\nu(r) = \nu(r^m) &\geq \min_{1 \leq j \leq m} \{ \nu(a_j r^{m-j}) \} = \min_{1 \leq j \leq m} \{ \nu(a_j) + (m-j)\nu(r) \} \geq \\ &\min_{1 \leq j \leq m} \{ \nu(I^j) + (m-j)\nu(r) \} = \min_{1 \leq j \leq m} \{ j(\nu(I) - \nu(r)) \} + m\nu(r), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\min_{1 \leq j \leq m} \{ j(\nu(I) - \nu(r)) \} \leq 0$, con lo que $\nu(I) \leq \nu(r)$.

CAPÍTULO 2. CLAUSURA ENTERA

(3) Por un lado, observamos que $f^n \in I^n$ para todo $f \in I$ por lo que

$$\nu(I^n) \leq \min\{\nu(f^n) : f \in I\} = \min\{n\nu(f) : f \in I\} = n\nu(I).$$

Por el otro lado, si $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, I^n está generado por los elementos de la forma $\prod_{j=1}^n f_{i_j}$ donde $1 \leq i_j \leq s$, cuyo orden está acotado por

$$\nu\left(\prod_{j=1}^n f_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^n \nu(f_{i_j}) \geq n \min_{1 \leq i \leq s} \{\nu(f_i)\} = n\nu(I).$$

De esta forma, el apartado (1) afirma que

$$\nu(I^n) = \min \left\{ \nu\left(\prod_{j=1}^n f_{i_j}\right) : 1 \leq i_j \leq s \right\} \geq n\nu(I).$$

□

Capítulo 3

Operadores Diferenciales

Uno de los objetivos de este capítulo va a consistir en caracterizar el orden de un ideal en términos de operadores diferenciales en el contexto de las álgebras lisas sobre cuerpos perfectos.

En la Sección 3.1 abordaremos esta cuestión en el caso particular de anillos de polinomios y considerando el orden de los ideales sólo sobre puntos cerrados.

Antes de generalizar al contexto de álgebras lisas sobre cuerpos perfecto, vamos a estudiar con detenimiento la noción de lisitud y la construcción los operadores diferenciales.

Respecto a la noción de lisitud, entenderemos varias definiciones equivalentes de lisitud para álgebras de tipo finito. Entre las ventajas de trabajar con álgebras finitas sobre cuerpos perfectos se encuentra el hecho de que en ese caso las propiedades de lisitud y regularidad son equivalentes (véase el Teorema 3.2.39).

En el Apartado 3.3.4 estudiaremos la construcción del módulo de operadores diferenciales de orden acotado sobre k -álgebras lisas para cuerpos perfectos.

Después de este análisis, podremos enunciar y probar la caracterización del orden de un ideal en términos de la acción de los operadores sobre el ideal.

estableceremos que los puntos donde un ideal tiene orden mayor o igual que un entero positivo b coincide con los ceros del ideal saturado por operadores diferenciales de orden menor o igual que $b - 1$ (véase el Teorema 3.3.28).

Concluiremos este capítulo dando una pequeña pincelada sobre morfismos lisos y morfismos étales (véase la Sección 3.4).

A lo largo de este capítulo trataremos solamente con anillos noetherianos.

3.1. Operadores diferenciales sobre anillos de polinomios

Recordamos que un elemento de un anillo local regular tiene orden r si ese elemento pertenece a la potencia r -ésima del ideal maximal y no a la potencia $(r + 1)$ -ésima (véase la Definición 1.2.6).

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

Con esta idea, diremos que $f \in k[X_1, \dots, X_d]$ tiene orden r en un punto $x = (a_1, \dots, a_d)$ de k^d si f como elemento del anillo local regular $k[X_1, \dots, X_d]_{\langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle}$ tiene orden r . Es decir, si

$$f \in \langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle^r \quad \text{y} \quad f \notin \langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle^{r+1}.$$

Esta definición se puede ampliar al ideal $\langle f \rangle$ o a ideales en general: el ideal J tendrá orden r en $x = (a_1, \dots, a_d)$ si

$$J \subset \langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle^r \quad \text{y} \quad J \not\subset \langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle^{r+1}.$$

Vamos a comenzar esta sección describiendo los conjuntos de la forma

$$\{x \in k^d : \nu_x(J) \geq r\},$$

donde $\nu_{(a_1, \dots, a_d)}$ denota el orden en el anillo local regular $k[X_1, \dots, X_d]_{\langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle}$.

Para ello utilizaremos los coeficientes del morfismo de Taylor que definimos a continuación.

Definición 3.1.1. Sea k un cuerpo y sea $k[X_1, \dots, X_d]$ el anillo de polinomios en d variables. Se denomina *morfismo de Taylor* al siguiente morfismo de k -álgebras:

$$\begin{aligned} \text{Tay} : k[X_1, \dots, X_d] &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_d] \\ f(X_1, \dots, X_d) &\longmapsto f(X_1 + T_1, \dots, X_d + T_d) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \Delta^\alpha(f) T^\alpha. \end{aligned} \tag{3.1.1.1}$$

Denominamos *coeficientes de Taylor* a los operadores

$$\Delta^\alpha : k[X_1, \dots, X_d] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_d]$$

correspondientes a los coeficientes del morfismo de Taylor. De entre ellos, los *coeficientes de Taylor de orden $\leq r$* son aquellos en los que $|\alpha| \leq r$.

Dado un ideal $J \subset k[X_1, \dots, X_d]$, para cualquier entero $r \geq 0$, se puede construir la siguiente extensión:

$$\text{Diff}^r(J) = \langle \Delta^\alpha(f) : f \in J, |\alpha| \leq r \rangle. \tag{3.1.1.2}$$

Propiedades 3.1.2.

$$(1) \quad \text{Tay}(f + g) = \text{Tay}(f) + \text{Tay}(g) \quad \text{y} \quad \text{Tay}(f \cdot g) = \text{Tay}(f) \cdot \text{Tay}(g).$$

Desarrollando las sumas e igualando los coeficientes del mismo grado se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha(f + g) &= \Delta^\alpha(f) + \Delta^\alpha(g) \quad \text{y} \\ \Delta^\alpha(f \cdot g) &= \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha} \Delta^{\gamma_1}(f) \cdot \Delta^{\gamma_2}(g) \quad (\text{regla del producto}). \end{aligned}$$

3.1. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ANILLOS DE POLINOMIOS

(2) Como $\Delta^{(0,\dots,0)}(f) = f$, se tiene que $J \subset \text{Diff}^r(J)$ para cualquier r .

(3) Si $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ entonces

$$\text{Diff}^r(J) = \langle \Delta^\alpha(f_i) : i = 1, \dots, s, |\alpha| \leq r \rangle.$$

(4) Para cada $i = 1, \dots, d$ se tiene que

$$\Delta^{e_i} = \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

(5) Para cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ se tiene que

$$\Delta^\alpha(f) = \Delta^{(\alpha_1, 0, \dots, 0)} \circ \Delta^{(0, \alpha_2, 0, \dots, 0)} \circ \dots \circ \Delta^{(0, \dots, 0, \alpha_d)}(f).$$

(6) Si k es un cuerpo de característica cero, se tiene que

$$\Delta^{(0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0)} = \frac{1}{\alpha_i!} \Delta^{e_i} \circ \overset{\alpha_i \text{ veces}}{\dots} \circ \Delta^{e_i}.$$

Pero si la característica de k es $p > 0$ esto no es cierto en general. Por ejemplo si $k = \mathbb{F}_p$ y $A = k[X]$ es el anillo de polinomios en una variable. Vemos que

$$\Delta^{(1)}(X^p) = 0 \quad \text{luego, } \Delta^{(1)} \circ \dots \circ \Delta^{(1)}(X^p) = 0 \quad \text{mientras que, } \Delta^{(p)}(X^p) = 1.$$

Proposición 3.1.3. Sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ el anillo de polinomios en d variables y $J \subset A$ un ideal. Entonces

$$V(\text{Diff}^{b-1}(J)) = \{x \in k^d : \nu_x(J) \geq b\}.$$

Demostración. Sea $x = (a_1, \dots, a_d)$ un punto y sea $\mathfrak{m}_x = \langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle$ su ideal maximal asociado.

Observamos que para cualquier elemento $f \in k[X_1, \dots, X_d]$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_d) &= f(a_1 + (X_1 - a_1), \dots, a_d + (X_d - a_d)) = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \Delta^\alpha(f)(a_1, \dots, a_d) (X_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (X_d - a_d)^{\alpha_d}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) $\nu_x(f) \geq b$,
- (b) $f \in \mathfrak{m}_x^b$,

(c) $f \in \langle T_1, \dots, T_d \rangle^b$ donde cada $T_i = X_i - a_i$,

(d) $\Delta^\alpha(f)(x) = 0$ para $|\alpha| < b$ y

(e) $x \in V(\text{Diff}^{b-1}(f))$.

Considerando ahora los elementos no nulos de J , concluimos que

$$\nu_x(J) \geq b \text{ si y sólo si } x \in V(\text{Diff}^{b-1}(J)).$$

□

A partir de ahora, en lugar de tratar con k^d vamos a considerar el espectro afín

$$\mathbb{A}_k^d := \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_d]).$$

Nuestro problema inicial planteado en este nuevo contexto se puede enunciar así:

¿Qué puntos forman el conjunto $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^d : \nu_{\mathfrak{p}}(J) \geq r\} \subset \mathbb{A}_k^d$?

En esta sección veremos qué puntos cerrados están y qué puntos cerrados no están en este conjunto. Para empezar, observamos que el conjunto de puntos cerrados racionales de \mathbb{A}_k^d se corresponde con k^d . Por lo que si el cuerpo base k es algebraicamente cerrado la Proposición 3.1.3 da respuesta a la cuestión:

Los puntos cerrados de $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_k^d : \nu_{\mathfrak{p}}(J) \geq b\}$ y los de $V(\text{Diff}^{b-1}(J))$ coinciden.

Notamos que si el cuerpo k no es algebraicamente cerrado, existen ideales maximales que no son de la forma $\langle X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d \rangle$, por lo que la demostración de la Proposición 3.1.3 no se puede generalizar. De hecho, el siguiente ejemplo (donde k no es un cuerpo algebraicamente cerrado) muestra que la observación anterior no se satisface en general.

Ejemplo 3.1.4. Sea $k = \mathbb{F}_p(Y)$, un cuerpo de característica $p > 0$. En $k[X]$ consideramos el ideal maximal $\mathfrak{m} = \langle X^p - Y \rangle$ (es maximal porque Y no es una potencia p -ésima). En este caso,

$$\text{Tay}(X^p - Y) = (X + T)^p - Y = X^p - Y + T^p,$$

luego

$$\text{Diff}^{p-1}(\mathfrak{m}) = \langle \Delta^n(X^p - Y) : n = 0, \dots, p-1 \rangle = \langle X^p - Y \rangle.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{m} \in V(\text{Diff}^{p-1}(\mathfrak{m}))$ aunque $\nu_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = 1 \neq p$.

A tenor de lo visto hasta ahora, el enunciado:

“los puntos cerrados de $V(\text{Diff}^{b-1}(J)) (\subset \mathbb{A}_k^d)$ son aquellos donde J tiene orden al menos b ”

es cierto si k es algebraicamente cerrado y es falso en general. A continuación veremos que este enunciado es válido si k es un cuerpo perfecto. Para ello estudiaremos el comportamiento del orden de J en puntos cerrados.

3.1. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ANILLOS DE POLINOMIOS

Lema 3.1.5. *Sea k un cuerpo perfecto y sea $k \subset \tilde{k}$ una extensión finita (y separable) de cuerpos. Sean $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $\tilde{A} = A \otimes_k \tilde{k} = \tilde{k}[X_1, \dots, X_d]$. Entonces el orden de un ideal J en el ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ coincide con el orden de $J\tilde{A}$ en cualquier ideal maximal de \tilde{A} que domine a A en \mathfrak{m} .*

Demostración. Notamos que $A \subset \tilde{A}$ es una extensión finita de anillos, luego la Proposición 2.1.12 afirma que existen ideales primos en \tilde{A} que dominan a A en \mathfrak{m} y que estos ideales primos son además maximales.

Fijamos un ideal maximal $\mathfrak{n} \subset \tilde{A}$ que domine a A en \mathfrak{m} . Y afirmamos que las condiciones de la Proposición 1.2.8 son válidas, a saber:

- (1) $A_{\mathfrak{m}}$ y $\tilde{A}_{\mathfrak{n}}$ son anillos locales regulares,
- (2) $\dim_{\text{Krull}} A_{\mathfrak{m}} = \dim_{\text{Krull}} \tilde{A}_{\mathfrak{n}}$ y
- (3) $\mathfrak{m}\tilde{A}_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}\tilde{A}_{\mathfrak{n}}$,

y, por tanto, el morfismo de anillos graduados

$$\psi : \text{gr}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{n}\tilde{A}_{\mathfrak{n}}}(\tilde{A}_{\mathfrak{n}})$$

inducido por $A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \tilde{A}_{\mathfrak{n}}$ es inyectivo. Esto garantiza que $\nu_{\mathfrak{m}}(J) = \nu_{\mathfrak{n}}(J\tilde{A})$.

Veamos ahora que estos tres requisitos son ciertos.

La condición (1) se sigue del hecho de que los anillos de polinomios son regulares. La condición (2) es cierta por la Proposición 2.1.12(6) ya que $A_{\mathfrak{m}}$ y $\tilde{A}_{\mathfrak{n}}$ son dominios normales y $A \subset \tilde{A}$ es una extensión finita.

Para probar la condición (3) es suficiente demostrar que el anillo $C = \tilde{A}/\mathfrak{m}\tilde{A}$ es una suma finita de cuerpos, ya que en este caso $C_{\mathfrak{n}} = \tilde{A}_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{n}\tilde{A}_{\mathfrak{n}}$ será un cuerpo.

Observamos que, como k es perfecto, $k \subset \kappa = A/\mathfrak{m}$ es una extensión finita y separable, luego el Teorema del Elemento primitivo afirma que $\kappa = k[X]/\langle P(X) \rangle$ donde $P(X)$ es un polinomio irreducible y separable en $k[X]$ (aquí $P(X)$ es el polinomio mínimo de un elemento primitivo de la extensión $k \subset \kappa$). Por lo tanto se tiene que

$$C = \tilde{A}/\mathfrak{m}\tilde{A} \simeq \kappa \otimes_A \tilde{A} \simeq \kappa \otimes_A (A \otimes_k \tilde{k}) \simeq \kappa \otimes_k \tilde{k} \simeq k[X]/\langle P(X) \rangle \otimes_k \tilde{k} \simeq \tilde{k}[X]/\langle P(X) \rangle.$$

Ahora, $P(X) \in \tilde{k}[X]$ también es separable, i. e. es un producto de irreducibles no repetidos, digamos $P(X) = P_1(X) \cdots P_s(X)$ donde cada $\langle P_i(X) \rangle = M_i \subset \tilde{k}[X]$ es un ideal maximal. Entonces, por [46, (1.C)], $\langle P(X) \rangle = M_1 \cdot M_2 \cdots M_s = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_s$ y

$$C \simeq \tilde{k}[X]/M_1 \oplus \tilde{k}[X]/M_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{k}[X]/M_s.$$

□

Comentario 3.1.6. La hipótesis de que k sea perfecto en el lema anterior es necesaria. En el Ejemplo 3.1.4, donde k no es perfecto, el orden cambia al considerar la extensión de k a su clausura algebraica, $k \subset \bar{k}$. El ideal extendido de \mathfrak{m} por el morfismo $k[X] \longrightarrow \bar{k}[X]$ es

$$\mathfrak{m}\bar{k}[X] = \mathfrak{n}^p,$$

donde $\mathfrak{n} = \langle X - Y^{1/p} \rangle \subset \bar{k}[X]$. Por lo que,

$$\nu_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) = 1 \neq \nu_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}\bar{k}[X]) = p.$$

Lema 3.1.7. Sea $k \subset \tilde{k}$ una extensión de cuerpos. Sean $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $\tilde{A} = \tilde{k} \otimes_k A = \tilde{k}[X_1, \dots, X_d]$. Entonces para cualquier ideal $J \subset A$ se tiene que

$$\text{Diff}_{\tilde{A}|\tilde{k}}^r(J\tilde{A}) = \text{Diff}_{A|k}^r(J)\tilde{A} \text{ como } \tilde{A}\text{-módulos.}$$

Demostración. Tenemos dos morfismos de Taylor, uno sobre cada anillo de polinomios:

$$\begin{aligned} \text{Tay}_A : k[X_1, \dots, X_d] &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_d] \\ f &\longmapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \Delta_A^\alpha(f) T^\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tay}_{\tilde{A}} : \tilde{k}[X_1, \dots, X_d] &\longrightarrow \tilde{k}[X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_d] \\ g &\longmapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \Delta_{\tilde{A}}^\alpha(g) T^\alpha. \end{aligned}$$

Supongamos que $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset A$. Recordamos que

$$\text{Diff}_{A|k}^r(J) = \langle \Delta_A^\alpha(f_i) : i = 1, \dots, s, \text{ y } |\alpha| \leq r \rangle,$$

y escogiendo como generadores de $\text{Diff}_{A|k}^r(J)\tilde{A}$ los mismos generadores de $\text{Diff}_{A|k}^r(J)$:

$$\text{Diff}_{A|k}^r(J)\tilde{A} = \langle \Delta_A^\alpha(f_i) : i = 1, \dots, s, |\alpha| \leq r \rangle (\subset \tilde{A}).$$

Por otro lado, también $J\tilde{A} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \tilde{A}$, luego

$$\text{Diff}_{\tilde{A}|\tilde{k}}^r(J\tilde{A}) = \langle \Delta_{\tilde{A}}^\alpha(f_i) : i = 1, \dots, s, |\alpha| \leq r \rangle.$$

Para terminar, observamos que como el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_d] & \xrightarrow{\text{Tay}_A} & k[X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_d] \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \tilde{k}[X_1, \dots, X_d] & \xrightarrow{\text{Tay}_{\tilde{A}}} & \tilde{k}[X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_d], \end{array} \quad (3.1.7.1)$$

3.1. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ANILLOS DE POLINOMIOS

para cada $\alpha \in \mathbb{N}^d$, el operador diferencial Δ_A^α restringido a $k[X_1, \dots, X_d]$ coincide con Δ_A^α . Por lo tanto:

$$\text{Diff}_{\tilde{A}|\tilde{k}}^r(J\tilde{A}) = \langle \Delta_A^\alpha(f_i) : i = 1, \dots, s, |\alpha| \leq r \rangle = \text{Diff}_{A|k}^r(J)\tilde{A}.$$

□

Teorema 3.1.8. *Sea k un cuerpo perfecto. Un ideal J en $A = k[X_1, \dots, X_d]$ tiene orden $\geq b$ en un punto cerrado $\mathfrak{m} \in \mathbb{A}_k^d = \text{Spec } A$ si y sólo si $\mathfrak{m} \in V(\text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J))$.*

Demostración. Si \mathfrak{m} es un punto racional, el argumento utilizado en la Proposición 3.1.3 es válido. En otro caso, fijamos una extensión finita de cuerpos, $k \subset \tilde{k}$, con la propiedad de que exista un ideal maximal $\mathfrak{n} \subset \tilde{A} = \tilde{k} \otimes_k A = \tilde{k}[X_1, \dots, X_d]$ que corresponde a un punto racional y que domine a A en \mathfrak{m} .

Veamos que este tipo de extensiones existen. Sean $\tilde{k} = \kappa = A/\mathfrak{m}$ y $\tilde{A} = A \otimes_k \kappa = \kappa[X_1, \dots, X_d]$. Consideramos los siguientes morfismos sobreyectivos:

$$p: \tilde{A} \longrightarrow \tilde{A}/\mathfrak{m}\tilde{A} \simeq \kappa \otimes_A \tilde{A} \simeq \kappa \otimes_k \kappa \quad \text{y}$$

$$\mu: \kappa \otimes_k \kappa \longrightarrow \kappa \quad \text{donde } \mu(a \otimes b) = ab.$$

Veamos que el ideal $p^{-1}(\ker(\mu)) \subset \tilde{A}$ satisface las propiedades que queríamos:

(a) es maximal y racional ya que

$$\tilde{A}/p^{-1}(\ker(\mu)) \simeq (\kappa \otimes_k \kappa) / \ker(\mu) \simeq \kappa \quad \text{y}$$

(b) domina a A en \mathfrak{m} puesto que

$$p^{-1}(\ker(\mu)) \cap A \text{ es primo y } p^{-1}(\ker(\mu)) \cap A \supset \mathfrak{m}\tilde{A} \cap A \supset \mathfrak{m}.$$

Para terminar observamos las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{l} J \text{ tiene orden } \geq b \text{ en } \mathfrak{m} \\ \Downarrow \text{Lema 3.1.5} \\ J\tilde{A} \text{ tiene orden } \geq b \text{ en } \mathfrak{n} \quad \begin{array}{l} \xleftrightarrow{\text{Proposición 3.1.3}} \text{Diff}_{\tilde{A}|\tilde{k}}^{b-1}(J\tilde{A}) \subset \mathfrak{n} \\ \Downarrow \text{Lema 3.1.7} \\ \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J)\tilde{A} \subset \mathfrak{n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \xleftrightarrow{(1)} \\ \xleftarrow{(2)} \end{array} \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J) \subset \mathfrak{m}, \end{array}$$

donde

$$(1) \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J)\tilde{A} \subset \mathfrak{n} \Rightarrow \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J) \subset \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J)\tilde{A} \cap A \subset \mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m} \quad \text{y}$$

$$(2) \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J) \subset \mathfrak{m} \Rightarrow \text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J)\tilde{A} \subset \mathfrak{m}\tilde{A} = (\mathfrak{n} \cap A)\tilde{A} \subset \mathfrak{n}.$$

Por lo tanto, los puntos cerrados donde J tiene orden al menos b son los puntos cerrados de $V(\text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J))$. □

Proposición 3.1.9. *Sea k un cuerpo (no necesariamente perfecto) y sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$. Si un ideal J tiene orden $\geq b$ en un punto cerrado $\mathfrak{m} \in \mathbb{A}_k^d = \text{Spec } A$ entonces $\mathfrak{m} \in V(\text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J))$.*

Demostración. Recordando que

$$\text{Diff}_{A|k}^{b-1}(J) = \langle \Delta^\alpha(f) : f \in J, 0 \leq |\alpha| \leq b-1 \rangle,$$

vamos a probar que cada elemento de este sistema de generadores pertenece a \mathfrak{m} , suponiendo que $J \subset \mathfrak{m}^b$.

Sea $f \in J$ y sea $\alpha \in \mathbb{N}^d$ satisfaciendo que $|\alpha| \leq b-1$. Escribamos f de la siguiente forma:

$$f = \sum_{i=1}^n g_{i1} \cdots g_{ib},$$

donde cada $g_{ij} \in \mathfrak{m}$. Aplicando las Propiedades 3.1.2(1) tenemos que

$$\Delta^\alpha(f) = \sum_{i=0}^n \Delta^\alpha(g_{i1} \cdots g_{ib}) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_b} \Delta^{\alpha_1}(g_{i1}) \cdots \Delta^{\alpha_b}(g_{ib}) \right).$$

Observamos que como $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_b| \leq b-1$ existe al menos un j para el que α_j es el vector nulo, por lo que $\Delta^{\alpha_j} = \text{Id}$. Por lo tanto, los productos de la forma $\Delta^{\alpha_1}(g_{i1}) \cdots \Delta^{\alpha_b}(g_{ib})$ tiene al menos un factor en el ideal \mathfrak{m} . Luego $\Delta^\alpha(f) \in \mathfrak{m}$. □

Observación 3.1.10. En la construcción del morfismo de Taylor hemos fijado como punto de partida un sistema de coordenadas del anillo de polinomios. Por lo tanto, como a priori la extensión $\text{Diff}_{A|k}^r(J)$ del ideal $J \subset A$ definida en (3.1.1.2) también depende de la elección de las coordenadas, cabe preguntarse si esta extensión es invariante por cambio de coordenadas.

Más adelante, en el Apartado 3.3.2 definiremos los *operadores diferenciales de orden $\leq r$ sobre k en $A = k[X_1, \dots, X_d]$* como aquellos morfismos k -lineales, $D : A \rightarrow A$, que satisfacen la *regla de Leibniz generalizada*:

$$D\left(\prod_{i=1}^{r+1} b_i\right) = \sum_{\substack{H \subset I_{r+1} \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{|H|+1} \left(\prod_{i \in H} b_i\right) D\left(\prod_{i \notin H} b_i\right),$$

donde $I_{r+1} = \{1, 2, \dots, r+1\}$.

Además, veremos que los operadores diferenciales de orden $\leq r$ sobre k forman un A -módulo, que denotaremos por $\text{Diff}_{A|k}^r$, que es libre y que los coeficientes de Taylor de orden $\leq r$ forman una base de este módulo.

Esto nos permitirá expresar el ideal $\text{Diff}_{A|k}^r(J)$ como la saturación de J por todos los operadores diferenciales de A sobre k de orden $\leq r$:

$$\text{Diff}_{A|k}^r(J) = \{D(f) : D \in \text{Diff}_{A|k}^r, f \in J\} = \{\Delta^\alpha(f) : |\alpha| \leq r, f \in J\}.$$

Y, en particular, esto garantiza que es independiente de la elección de coordenadas en A .

3.2. Álgebras lisas sobre cuerpos

El objetivo de esta sección es discutir la noción de lisitud para álgebras de tipo finito sobre cuerpos.

Para ello, empezaremos con los Apartados 3.2.2 y 3.2.3 en los que estudiaremos la matriz jacobiana y el módulo de diferenciales, respectivamente.

Con estas dos estructuras, en el Apartado 3.2.4, estableceremos tres nociones de lisitud equivalentes (las definiciones 3.2.28, 3.2.31 y 3.2.33).

Terminaremos esta sección probando que si el cuerpo base es perfecto, también son equivalentes las nociones de lisitud y regularidad (véase el Teorema 3.2.39).

Comenzamos esta sección estudiando los ideales de Fitting.

3.2.1. Rango e ideales de Fitting

Extenderemos la noción de rango, definido sólo para módulos libres y finitamente generados, al concepto de “mínimo número de generadores”.

Definición 3.2.1. [44, IV§2] Sea R un anillo y sea M un módulo libre y finitamente generado. En este caso $M \simeq R^n$. El número natural n se denomina *rango* de M y se denota por $\text{rg}(M)$.

Si M es un R -módulo finitamente generado denotamos por $\mu(M)$ al número mínimo de elementos necesarios para generar M como R -módulo y por $\mu_{\mathfrak{p}}(M)$ al número mínimo de elementos necesarios para generar $M_{\mathfrak{p}}$ como $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo.

Observaciones 3.2.2.

(1) Si (R, \mathfrak{m}) es un anillo local y M es un R -módulo finitamente generado sabemos, por el lema de Nakayama, que

$$\mu(M) = \text{rg}(M/\mathfrak{m}M) \quad (:= \dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M)).$$

(2) Sea M es un R -módulo proyectivo y finitamente generado. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ se tiene que $M_{\mathfrak{p}}$ es un $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo libre, luego

$$\mu_{\mathfrak{p}}(M) = \text{rg}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Observación 3.2.3. [44, IV Corolario 2.4 d)] Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local y sea M un R -módulo finitamente generado. Cualquier sistema de generadores de M contiene un sistema *minimal*, cuyo cardinal es $\mu(M)$.

Presentamos a continuación los *ideales de Fitting*, una estructura vinculada a la noción de número mínimo de generadores para módulos finitamente generados.

Definición 3.2.4. [44, IV§1 Ejercicio 8] Sea R un anillo y sea M un R -módulo finitamente generado. Supongamos que $\{m_1, \dots, m_s\}$ es un sistema de generadores y que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R^s & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & & & e_i & \longmapsto & m_i, \end{array}$$

donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, es la presentación asociada a este sistema. Sea $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un sistema de generadores de N . Definimos el *ideal de Fitting* de orden j , $\text{Fitt}_j(M)$, como el ideal de R generado por todos los menores $(s-j) \times (s-j)$ de la matriz cuyas filas son los elementos v_λ si $j = 0, \dots, s-1$ y $\text{Fitt}_j(M) = R$ si $j \geq s$.

Ejemplo 3.2.5. Sea k un cuerpo y sea $A = k[X, Y, Z]$. Consideramos un módulo M generado por los elementos m_1, m_2 y m_3 cuya presentación está dada por las siguientes relaciones:

$$Xm_1 + Y^2m_2 = 0 \quad \text{y} \quad Ym_2 + Z^2m_3 = 0.$$

Para calcular los ideales de Fitting asociados a esta presentación:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & A^3 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & & & (1, 0, 0) & \longmapsto & m_1 \\ & & & & (0, 1, 0) & \longmapsto & m_2 \\ & & & & (0, 0, 1) & \longmapsto & m_3 \end{array}$$

observamos que N está generado por $\{(X, Y^2, 0), (0, Y, Z^2)\}$ como A -submódulo de A^3 . Por lo tanto los ideales de Fitting son:

$$\begin{array}{ll} \text{Fitt}_0(M) = 0 & \text{(determinantes } 3 \times 3), \\ \text{Fitt}_1(M) = \langle XY, XZ^2, Y^2Z^2 \rangle & \text{(determinantes } 2 \times 2), \\ \text{Fitt}_2(M) = \langle X, Y^2, Y, Z^2 \rangle = \langle X, Y, Z^2 \rangle & \text{(determinantes } 1 \times 1), \\ \text{Fitt}_3(M) = A. & \end{array}$$

Propiedades 3.2.6. Sea R un anillo y sea M un R -módulo generado por s elementos.

- (1) Para cada j , el ideal $\text{Fitt}_j(M)$ es intrínseco a M , i.e., no depende ni de la elección del sistema de generadores de N ni de la elección del sistema de generadores de M .

(2) Por definición se tiene que

$$\text{Fitt}_0(M) \subset \text{Fitt}_1(M) \subset \cdots \subset \text{Fitt}_s(M) = R.$$

(3) Los ideales de Fitting se comportan bien por cambios de base, i. e., si $R \longrightarrow R_1$ es un morfismo de anillos entonces:

$$\text{Fitt}_j(M \otimes_R R_1) = \text{Fitt}_j(M) \otimes_R R_1 \quad (\subset R_1).$$

(4) En particular, los ideales de Fitting conmutan con la localización, i.e., si $S \subset R$ es un conjunto multiplicativo entonces:

$$\text{Fitt}_j(S^{-1}M) = S^{-1}(\text{Fitt}_j(M)) \quad (\subset S^{-1}R).$$

Demostración. Para las dos primeras propiedades véase [44, IV§1 Ejercicio 8]. Para (3) véase [21, Corolario 20.5]. \square

Lema 3.2.7. [21, Proposición 20.6] *Sea (R, \mathfrak{m}) un anillo local y sea M un R -módulo finitamente generado. Entonces,*

$$\mu(M) = r \quad \text{si y sólo si} \quad \text{Fitt}_{r-1}(M) \subset \mathfrak{m} \text{ y } \text{Fitt}_r(M) = R.$$

Demostración.

\Rightarrow : Supongamos que $\mu(M) = r$, por tanto existe un sistema de generadores con r elementos $\{m_1, \dots, m_r\}$ y una presentación asociada a este sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R^r & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & & & e_i \longmapsto & & m_i. \end{array} \quad (3.2.7.1)$$

Para probar que $\text{Fitt}_{r-1}(M) \subset \mathfrak{m}$ tensorizamos por $\kappa = R/\mathfrak{m}$ y nos queda la siguiente sucesión exacta

$$N \otimes_R \kappa \longrightarrow \kappa^r \longrightarrow M \otimes_R \kappa = M/\mathfrak{m}M \longrightarrow 0,$$

donde κ^r y $M/\mathfrak{m}M$ son κ -espacios vectoriales de dimensión r . Por lo tanto, la imagen de $N \otimes_R \kappa$ en κ^r es cero, luego todas las coordenadas de todos los elementos de N pertenecen a \mathfrak{m} o, lo que es lo mismo, $\text{Fitt}_{r-1}(M) \subset \mathfrak{m}$.

Para terminar, notamos que la existencia de la presentación (3.2.7.1) implica que $\text{Fitt}_r(M) = R$.

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

\Leftarrow : Supongamos ahora que $\text{Fitt}_{r-1}(M) \subset \mathfrak{m} \subsetneq \text{Fitt}_r(M) = R$. Para probar que $\mu(M) = r$ vamos a mostrar que cualquier sistema de generadores de M debe tener al menos r elementos y que si posee más se puede construir otro sistema con un elemento menos.

Sea $\{m_1, \dots, m_s\}$ un conjunto de generadores de M y sea

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R^s & \xrightarrow{\varphi} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & e_i & \longmapsto & \varphi(e_i) & = & m_i \end{array}$$

una presentación.

Recordamos que, por construcción, $\text{Fitt}_s(M) = R$. Luego, $\text{Fitt}_{r-1}(M) \subsetneq \text{Fitt}_s(M)$ con lo que $r - 1 < s$. Así $r \leq s$.

Supongamos ahora que $r \leq s - 1$. Por la Propiedad 3.2.6(2), $R = \text{Fitt}_r(M) \subset \text{Fitt}_{s-1}(M)$. Luego, por definición, existe un elemento $v = (v_1, \dots, v_s) \in N \subset R^s$ donde al menos una de sus coordenadas es una unidad. Reordenando el sistema de generadores podemos suponer que v_s es una unidad. Entonces $\{e_1, \dots, e_{s-1}, v\}$ es una base de R^s (ya que $e_s = \frac{1}{v_s}v - \frac{v_1}{v_s}e_1 - \dots - \frac{v_{s-1}}{v_s}e_{s-1}$) y además,

$$m_s = \varphi(e_s) = \frac{1}{v_s}\varphi(v) - \frac{v_1}{v_s}\varphi(e_1) - \dots - \frac{v_{s-1}}{v_s}\varphi(e_{s-1}) = -\frac{v_1}{v_s}m_1 - \dots - \frac{v_{s-1}}{v_s}m_{s-1},$$

por lo que M se puede generar con $s - 1$ elementos. Repitiendo este argumento concluimos que $r = \mu(M)$. □

Propiedad 3.2.8. Sea R un anillo y sea M un R -módulo finitamente generado. Se tiene que

$$V(\text{Fitt}_{r-1}(M)) = \{\mathfrak{p} \subset R: \mu_{\mathfrak{p}}(M) \geq r\}.$$

Demostración. Se sigue del lema anterior y de la Propiedad 3.2.6(4). □

Ejemplo 3.2.9. Continuamos con el Ejemplo 3.2.5. Observamos que el único ideal primo que contiene a $\text{Fitt}_2(M)$ es $\langle X, Y, Z \rangle$ y los ideales minimales que contienen a $\text{Fitt}_1(M)$ y pero no a $\text{Fitt}_2(M)$ son: $\langle X, Y \rangle$, $\langle X, Z \rangle$ y $\langle Y, Z \rangle$. Por lo tanto,

$$\mu_{\mathfrak{p}}(M) = \begin{cases} 3 & \text{si } \mathfrak{p} = \langle X, Y, Z \rangle, \\ 2 & \text{si } \mathfrak{p} \in V(\langle X, Y \rangle \langle X, Z \rangle \langle Y, Z \rangle) \setminus \{\langle X, Y, Z \rangle\}, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En la Figura 3.1 se representa el número mínimo de generadores de M sobre los puntos cerrados de \mathbb{A}_k^3 .

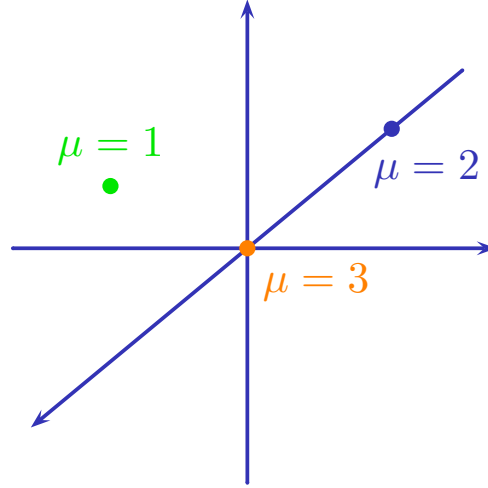


Figura 3.1: Número mínimo de generadores de M sobre puntos cerrados en el Ejemplo 3.2.9.

Proposición 3.2.10. *Sea R un anillo (noetheriano) reducido y sea M un R -módulo finitamente generado tal que $\mu_{\mathfrak{p}}(M) = r$ para todo $\mathfrak{p} \subset R$ ideal primo. Entonces M es un R -módulo localmente libre de rango r .*

Demostración. Sea $\mathfrak{m} \subset R$ un ideal maximal. Nuestro objetivo es probar que el $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo $M_{\mathfrak{m}}$ es libre. Como, por hipótesis, $\mu_{\mathfrak{m}}(M) = r$ existe una presentación de $M_{\mathfrak{m}}$ de la forma:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R_{\mathfrak{m}}^r \longrightarrow M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

y vamos a probar que $N = 0$.

Para ello observamos que el ideal $\text{Fitt}_{r-1}(M_{\mathfrak{m}}) \subset R_{\mathfrak{m}}$ está generado por todas las coordenadas de todos los elementos de N . Por lo tanto, $N = 0$ si y sólo si $\text{Fitt}_{r-1}(M_{\mathfrak{m}}) = 0$.

Además, como $R_{\mathfrak{m}}$ es reducido (por serlo R), un ideal es nulo si está contenido en todos los ideales primos del anillo.

Sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal primo contenido en \mathfrak{m} . Nos gustaría probar que $\text{Fitt}_{r-1}(M_{\mathfrak{m}}) \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}$.

Ahora notamos que (por hipótesis) $\mu_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{m}}) = \mu_{\mathfrak{p}}(M) = r$, lo que es equivalente (gracias al Lema 3.2.7) a que $\text{Fitt}_{r-1}(M_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ y como la construcción de los ideales de Fitting conmuta con la localización (véase la Propiedad 3.2.6(4)) esto vuelve a ser equivalente a que $\text{Fitt}_{r-1}(M_{\mathfrak{m}}) \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}$. Que era lo que queríamos probar. \square

3.2.2. Matriz Jacobiana

Definición 3.2.11. Sea k un cuerpo, sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y sean $f_1, \dots, f_s \in A$. Denominamos *matriz jacobiana de f_1, \dots, f_s* a la siguiente matriz:

$$\text{Jac}(f_1, \dots, f_s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial X_1} & \frac{\partial f_s}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial X_d} \end{pmatrix},$$

cuyas entradas (las derivadas parciales formales) son elementos de A .

Si \mathfrak{p} es un ideal primo tal que $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathfrak{p}$, *evaluar en \mathfrak{p}* esta matriz significa hallar la imagen de cada entrada de la matriz por la siguiente composición:

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \kappa.$$

Denotaremos por $\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\mathfrak{p}}$ ó por $\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\kappa}$ a la matriz jacobiana de f_1, \dots, f_s evaluada en \mathfrak{p} .

Proposición 3.2.12. Si $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_r \rangle \subset A$ es un ideal y $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo tal que $J \subset \mathfrak{p}$ entonces los rangos de las matrices jacobianas evaluadas en \mathfrak{p} coinciden, i.e.,

$$\text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\mathfrak{p}}) = \text{rg}(\text{Jac}(g_1, \dots, g_r)|_{\mathfrak{p}}).$$

Este rango se denota por $\text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\mathfrak{p}})$.

Demostración. Es suficiente probar que $\text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\mathfrak{p}}) = \text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s, g_1)|_{\mathfrak{p}})$. Ya que por inducción tendríamos

$$\text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\mathfrak{p}}) = \text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_r)|_{\mathfrak{p}}) = \text{rg}(\text{Jac}(g_1, \dots, g_r)|_{\mathfrak{p}}).$$

Para ello, escribimos $g_1 = \sum_{i=1}^s a_i f_i$ (ya que $g_1 \in J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$) entonces vemos que $\text{Jac}(g_1)|_{\mathfrak{p}}$ es combinación lineal de las filas de $\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\mathfrak{p}}$ ya que:

$$\frac{\partial g_1}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^s \left(a_i \frac{\partial f_i}{\partial X_j} + f_i \frac{\partial a_i}{\partial X_j} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g_1}{\partial X_j} \Big|_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^s \bar{a}_i \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \Big|_{\mathfrak{p}},$$

(recordamos que $f_i \in J \subset \mathfrak{p}$). Por lo tanto,

$$\text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)|_{\mathfrak{p}}) = \text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_s, g_1)|_{\mathfrak{p}}).$$

□

El *Criterio Jacobiano*, que enunciaremos en el Teorema 3.3.23, será útil para encontrar un sistema regular de parámetros en el anillo local de un punto. Ahora veremos un resultado parcial de este criterio.

Proposición 3.2.13. *Sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ un anillo de polinomios sobre un cuerpo k , sea $M \subset A$ un ideal maximal y sea $\kappa = A/M$ su cuerpo residual. Si $f_1, \dots, f_r \in M$ y verifican que $\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_M$ tiene rango r , entonces $\{f_1, \dots, f_r\}$ se puede extender a un sistema regular de parámetros en el anillo local regular A_M .*

Demostración. Vamos a demostrar que si f_1, \dots, f_r no forman parte de un sistema regular de parámetros en A_M el rango de su matriz jacobiana es estrictamente menor que r .

El hecho de que $\{f_1, \dots, f_r\}$ no forme parte de un sistema regular de parámetros en A_M es equivalente a que $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_r}$ sean linealmente dependientes en el κ -espacio vectorial M/M^2 . Luego, podemos suponer que existen $a_1, \dots, a_r \in A$ no todos pertenecientes a M tales que $L = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r \in M^2$. Además, como esta expresión pertenece a M^2 se puede escribir como $L = \sum_{\ell=1}^n m_{\ell,1} \cdot m_{\ell,2}$, donde $m_{\ell,1}, m_{\ell,2} \in M$. Observamos que para cada $j = 1, \dots, d$, se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^r \left(a_i \frac{\partial f_i}{\partial X_j} + f_i \frac{\partial a_i}{\partial X_j} \right) = \sum_{\ell=1}^n \left(m_{\ell,1} \frac{\partial m_{\ell,2}}{\partial X_j} + m_{\ell,2} \frac{\partial m_{\ell,1}}{\partial X_j} \right).$$

El resultado de evaluar estas expresiones en κ es

$$\sum_{i=1}^r \overline{a_i} \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right|_{\kappa} = 0, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, d,$$

que dan lugar a una combinación lineal nula de las filas de $\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_{\kappa}$ donde algún coeficiente es no nulo. Esto muestra que el rango de esta matriz es estrictamente menor que r . \square

Observación 3.2.14. El recíproco de esta proposición es cierto si $k \subset \kappa = A/M$ es una extensión separable (lo veremos en el Corolario 3.2.38). El Ejemplo 3.2.27(3) muestra que si la extensión es inseparable entonces el recíproco es falso.

3.2.3. Módulo de diferenciales

A lo largo de este apartado, salvo que se diga lo contrario, k denotará un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra (no necesariamente de tipo finito).

El objetivo aquí es definir el *módulo de diferenciales de \mathcal{B} sobre k* , $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ y estudiar algunas de sus propiedades más significativas.

Definición 3.2.15. Dada una k -álgebra \mathcal{B} , consideramos la siguiente sucesión exacta de \mathcal{B} -módulos:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \xrightarrow{\mu} \mathcal{B} \longrightarrow 0 \quad (3.2.15.1)$$

$$b_1 \otimes b_2 \longmapsto b_1 b_2$$

y construimos:

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B})/I^2 \xrightarrow{\bar{\mu}} \mathcal{B} \longrightarrow 0. \quad (3.2.15.2)$$

Se denomina *módulo de diferenciales de \mathcal{B} sobre k* y se denota por $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ al núcleo de $\bar{\mu}$, I/I^2 , considerado con su estructura natural de \mathcal{B} -módulo.

Observaciones 3.2.16.

(1) El ideal $I = \ker \mu$ está generado por $\{1 \otimes b - b \otimes 1\}_{b \in \mathcal{B}}$ como \mathcal{B} -módulo a izquierda.

En efecto, si $\sum_{i=1}^n b_i \otimes b'_i \in \ker \mu$ entonces $\sum_{i=1}^n b_i b'_i = 0$ y

$$\sum_{i=1}^n b_i \otimes b'_i = \sum_{i=1}^n b_i \otimes b'_i - \left(\sum_{i=1}^n b_i b'_i \right) \otimes 1 = \sum_{i=1}^n (b_i \otimes b'_i - b_i b'_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^n (b_i \otimes 1)(1 \otimes b'_i - b'_i \otimes 1).$$

Pasando al cociente, concluimos que el \mathcal{B} -módulo $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ está generado por los elementos de la forma $d_{\mathcal{B}|k}(b) := \overline{1 \otimes b - b \otimes 1}$, donde $b \in \mathcal{B}$.

(2) $d_{\mathcal{B}|k} : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ es una *derivación k -lineal**, ya que satisface las siguientes tres condiciones:

- Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, entonces se tiene que

$$d_{\mathcal{B}|k}(b_1 + b_2) = d_{\mathcal{B}|k}(b_1) + d_{\mathcal{B}|k}(b_2).$$

- Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$. Observamos que

$$\begin{aligned} 1 \otimes b_1 b_2 - b_1 b_2 \otimes 1 &= 1 \otimes b_1 b_2 - b_1 b_2 \otimes 1 + b_1 \otimes b_2 - b_1 \otimes b_2 \\ &= (b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2 - b_2 \otimes 1) + (1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2) \end{aligned} \quad (3.2.16.1)$$

$$\begin{aligned} &= (b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2 - b_2 \otimes 1) + (1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2 - b_2 \otimes 1 + b_2 \otimes 1) \\ &= (b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2 - b_2 \otimes 1) + (b_2 \otimes 1)(1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1) + \\ &\quad + (1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2 - b_2 \otimes 1), \end{aligned} \quad (3.2.16.2)$$

luego, en $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ se tiene que

$$\overline{1 \otimes b_1 b_2 - b_1 b_2 \otimes 1} = \overline{(b_1 \otimes 1)(1 \otimes b_2 - b_2 \otimes 1) + (b_2 \otimes 1)(1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1)} \quad (3.2.16.3)$$

$$d_{\mathcal{B}|k}(b_1 b_2) = b_1 d_{\mathcal{B}|k}(b_2) + b_2 d_{\mathcal{B}|k}(b_1).$$

- Sea $b \in k$. En este caso, $d_{\mathcal{B}|k}(b) = \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} = 0$, ya que $1 \otimes_k b = b \otimes_k 1$.

*[46, (26.A)] Sea \mathcal{B} una k -álgebra y sea M un \mathcal{B} -módulo. Una derivación k -lineal $D : \mathcal{B} \rightarrow M$ es una aplicación k -lineal que satisface $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ para todo $a, b \in \mathcal{B}$.

De hecho, $d_{\mathcal{B}|k}$ es la derivación k -lineal universal, i. e., para cualquier \mathcal{B} -módulo T y para cualquier derivación $D: \mathcal{B} \rightarrow T$, existe un único morfismo Γ de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{D} & T \\ d_{\mathcal{B}|k} \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow \Gamma \\ \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 & & \end{array} \quad (3.2.16.4)$$

(véase [46, Proposición pág. 182]). Esto significa que existe un isomorfismo de \mathcal{B} módulos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Omega_{\mathcal{B}|k}^1, T) \simeq \mathrm{Der}_k(\mathcal{B}, T). \quad (3.2.16.5)$$

(3) Sea $B = k[x_1, \dots, x_m]$ (i. e., una k -álgebra generada por x_1, \dots, x_m). En este caso,

- de la expresión (3.2.16.1) vemos que el ideal $I \subset B \otimes_k B$ está generado por

$$\{1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1, \dots, 1 \otimes x_m - x_m \otimes 1\},$$

- de la expresión (3.2.16.2) tenemos que I está generado como B -módulo (a izquierda) por

$$\left\{ (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)^{\beta_1} \cdots (1 \otimes x_m - x_m \otimes 1)^{\beta_d} \right\}_{\beta \in \mathbb{N}^m} \quad \text{y}$$

- de la expresión (3.2.16.3) concluimos que el B -módulo $\Omega_{B|k}^1$ está generado por

$$\{d_{B|k}(x_1), \dots, d_{B|k}(x_m)\}, \quad \text{donde } d_{B|k}(x_i) = \overline{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1}.$$

Ejemplo 3.2.17. Sea k un anillo y sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ un anillo de polinomios. Sea $I \subset A \otimes_k A$ el núcleo de $\mu: A \otimes_k A \rightarrow A$. Vamos a probar que $\Omega_{A|k}^1$ es un A -módulo libre de rango d .

Como acabamos de ver, el A -módulo $\Omega_{A|k}^1 = I/I^2$ está generado por

$$\{d_{A|k}(X_i) = \overline{1 \otimes X_i - X_i \otimes 1}\}_{i=1, \dots, d}.$$

Supongamos ahora que existen $P_i(X) \in A$ tales que $\sum_{i=1}^d P_i(X) d_{A|k}(X_i) = 0$. Para cada $j = 1, \dots, d$ consideramos la derivación k -lineal: $\frac{\partial}{\partial X_j}$. La propiedad universal del módulo de diferenciales afirma que existe un morfismo de A -módulos, $\Gamma_j: \Omega_{A|k}^1 \rightarrow A$ tal que $\frac{\partial}{\partial X_j} = \Gamma_j \circ d_{A|k}$ (véase el diagrama (3.2.16.4)). Entonces, tenemos que

$$0 = \Gamma_j(0) = \Gamma_j \left(\sum_{i=1}^d P_i(X) d_{A|k}(X_i) \right) = \sum_{i=1}^d P_i(X) \frac{\partial}{\partial X_j} X_i = P_j(X).$$

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

Esto demuestra que $\Omega_{A|k}^1$ es libre de rango d . Por lo tanto, su dual

$$(\Omega_{A|k}^1)^* = \text{Hom}_A(\Omega_{A|k}^1, A) \stackrel{(3.2.16.5)}{\simeq} \text{Der}_k(A, A)$$

también es libre y, por lo que hemos visto, $\left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_d} \right\}$ forma una base de $(\Omega_{A|k}^1)^*$.

A continuación, en la Proposición 3.2.18 y el Teorema 3.2.21 estudiaremos la relación entre el módulo de diferenciales y las operaciones de localización y cociente. Estas relaciones nos permitirán dar, en el Apartado 3.2.4, una caracterización de *álgebras lisas* sobre un cuerpo.

Proposición 3.2.18. [27, Cap. 0, Corolario (20.5.9)] *Sea k un anillo, sea \mathcal{B} una k -álgebra y sea $S \subset \mathcal{B}$ un conjunto multiplicativo. Entonces*

$$S^{-1}\Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \simeq \Omega_{\mathcal{B}_S|k}^1.$$

Demostración. Para relacionar $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ y $\Omega_{\mathcal{B}_S|k}^1$ antes vamos a comparar los ideales

$$I = \ker(\mu_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}) \quad \text{y} \quad J = \ker(\mu_{\mathcal{B}_S} : \mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S \longrightarrow \mathcal{B}_S)$$

y los anillos $(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B})/I^2$ y $(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S)/J^2$.

Comenzamos con la sucesión exacta (3.2.15.1):

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0,$$

localizando primero en el subconjunto multiplicativo $\{s \otimes 1\}_{s \in S}$ (que es lo mismo que tensorizar a la izquierda por $\mathcal{B}_S \otimes_{\mathcal{B}}$) obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes_{\mathcal{B}} I = I(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_S \longrightarrow 0,$$

y localizando después en el subconjunto multiplicativo $\{1 \otimes s\}_{s \in S}$ (que es lo mismo que tensorizar a la derecha por $\otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_S$) obtenemos

$$0 \longrightarrow I(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S) \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S \longrightarrow \mathcal{B}_S \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $I(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S) = J$.

Ahora tomamos la sucesión exacta (3.2.15.2):

$$0 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B})/I^2 \longrightarrow 0. \quad (3.2.18.1)$$

Al tensorizar a la izquierda por $\mathcal{B}_S \otimes_{\mathcal{B}}$ obtenemos

$$0 \longrightarrow I^2(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}/I^2) \longrightarrow 0, \quad (3.2.18.2)$$

y observamos que en el anillo $\mathcal{B}_S \otimes_B (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}/I^2) \simeq (\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B})/(I^2(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}))$ los elementos de la forma $\overline{1 \otimes s} = \overline{s \otimes 1} + \overline{1 \otimes s - s \otimes 1}$ son unidades, por ser suma de una unidad y un elemento nilpotente ($(1 \otimes s - s \otimes 1)^2 \in I^2(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B})$). Por lo tanto, al tensorizar por la derecha con $\otimes_B \mathcal{B}_S$ la sucesión exacta (3.2.18.2) nos queda:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^2(\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S) & \longrightarrow & \mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S & \longrightarrow & \mathcal{B}_S \otimes_B (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}/I^2) \otimes_B \mathcal{B}_S \longrightarrow 0 \\ & & \wr & & & & \wr \\ & & J^2 & & & & \mathcal{B}_S \otimes_B (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}/I^2), \end{array}$$

luego

$$\mathcal{B}_S \otimes_B (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}/I^2) \simeq (\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S)/J^2. \quad (3.2.18.3)$$

Para terminar observamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_S \otimes_B \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 & \longrightarrow & \mathcal{B}_S \otimes_B ((\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B})/I^2) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \bar{\mu}} & \mathcal{B}_S \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \wr & \circlearrowright & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{B}_S|k}^1 & \longrightarrow & (\mathcal{B}_S \otimes_k \mathcal{B}_S)/J^2 & \xrightarrow{\bar{\mu}_{\mathcal{B}_S}} & \mathcal{B}_S \longrightarrow 0, \end{array}$$

donde la primera sucesión exacta proviene de tensorizar por $\mathcal{B}_S \otimes_B$ la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \longrightarrow (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B})/I^2 \xrightarrow{\bar{\mu}} \mathcal{B} \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, el lema de la serpiente afirma que

$$S^{-1}\Omega_{\mathcal{B}|k}^1 = \mathcal{B}_S \otimes_B \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 = \Omega_{\mathcal{B}_S|k}^1.$$

□

Proposición 3.2.19 (Cambio de base). [3, VI Proposición (1.18)] *Sea k un anillo, sean \mathcal{B} y \tilde{k} dos k -álgebras y sea $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \otimes_k \tilde{k}$. Entonces*

$$\Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1 \simeq \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k} \simeq \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_B \tilde{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Primero vamos a construir dos morfismos de $\tilde{\mathcal{B}}$ -módulos:

$$\Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\Theta} \\ \xleftarrow{\Phi} \end{array} \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k}$$

y después vamos a probar que $\Theta \circ \Phi = \text{Id}_{\Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k}}$ y que $\Phi \circ \Theta = \text{Id}_{\Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1}$.

Comenzamos considerando la siguiente derivación \tilde{k} -lineal:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{B}|k} \otimes \text{Id} : \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \otimes_k \tilde{k} &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k} \\ b \otimes \ell &\longmapsto d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes \ell. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

Por la propiedad universal del módulo de diferenciales, existe un único morfismo de $\tilde{\mathcal{B}}$ -módulos, $\Theta : \Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k}$, tal que $\Theta \circ d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}} = d_{\mathcal{B}|k} \otimes \text{Id}$.

Utilizando la propiedad universal del producto tensorial se puede definir el siguiente morfismo de $\tilde{\mathcal{B}}$ -módulos:

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k} &\longrightarrow \Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1 \\ d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes \ell &\longmapsto d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}(b \otimes \ell) = (1 \otimes \ell)d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}(b \otimes 1). \end{aligned}$$

$\Theta \circ \Phi = \text{Id}$: Notamos que $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_k \tilde{k}$ está generado como $\tilde{\mathcal{B}}$ -módulo por elementos de la forma $d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes 1$. Por lo tanto, es suficiente con comprobar que la composición aplicada a estos elementos es la identidad:

$$\Theta \circ \Phi(d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes 1) = \Theta(d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}(b \otimes 1)) = d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes 1.$$

$\Phi \circ \Theta = \text{Id}$: La propiedad universal del $\tilde{\mathcal{B}}$ -módulo de diferenciales, $\Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1$, aplicada a la derivación \tilde{k} -lineal $d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}} : \tilde{\mathcal{B}} \longrightarrow \Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1$ afirma que la identidad es el único morfismo $\Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1 \longrightarrow \Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1$ que fija los elementos de la imagen de $d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}$.

Como $\Phi \circ \Theta$ también fija estos elementos:

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Theta) \left(d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}(b \otimes \ell) \right) &= \left(\Phi \circ \Theta \circ d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}} \right) (b \otimes \ell) = (\Phi \circ d_{\mathcal{B}|k} \otimes \text{Id}) (b \otimes \ell) = \\ &= \Phi(d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes \ell) = d_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}(b \otimes \ell), \end{aligned}$$

se tiene que $\Phi \circ \Theta = \text{Id}_{\Omega_{\tilde{\mathcal{B}}|\tilde{k}}^1}$.

□

Teorema 3.2.20 (Primera sucesión exacta fundamental). [46, Teorema 57] *Sea k un anillo y sean \mathcal{B} y \mathcal{B}_1 dos k -álgebras. Sea $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_1$ un morfismo de k -álgebras. Entonces*

(1) *Existe una sucesión exacta de morfismos naturales de \mathcal{B}_1 -módulos*

$$\Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{v} \Omega_{\mathcal{B}_1|k}^1 \xrightarrow{u} \Omega_{\mathcal{B}_1|\mathcal{B}}^1 \longrightarrow 0,$$

donde

- (a) $v(d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes b_1) = b_1 \cdot d_{\mathcal{B}_1|k}(\psi(b))$ y
- (b) $u(b_1 \cdot d_{\mathcal{B}_1|k}(b'_1)) = b_1 \cdot d_{\mathcal{B}_1|\mathcal{B}}(b'_1)$,

para cualesquiera $b \in \mathcal{B}$ y $b_1, b'_1 \in \mathcal{B}_1$.

(2) v tiene inversa por la izquierda (i.e. v es inyectiva y $\text{Im}(v)$ es un sumando directo de $\Omega_{\mathcal{B}_1|k}^1$ como \mathcal{B}_1 -módulo) si y sólo si cualquier derivación k -lineal de \mathcal{B} en cualquier \mathcal{B}_1 -módulo T se puede extender a una derivación k -lineal $\mathcal{B}_1 \rightarrow T$.

Teorema 3.2.21 (Segunda sucesión exacta fundamental). [46, Teorema 58] Sea k un anillo y sea \mathcal{B} una k -álgebra. Sean $J \subset \mathcal{B}$ un ideal y $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}/J$. Entonces se puede definir el siguiente morfismo de R -módulos

$$\begin{aligned} J &\longrightarrow \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_1 \\ b &\longmapsto d_{\mathcal{B}|k}(b) \otimes_{\mathcal{B}} 1 \end{aligned}$$

que, como la imagen de J^2 es 0, induce un morfismo de \mathcal{B}_1 -módulos $\delta : J/J^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_1$. Además,

(1) La siguiente sucesión es exacta:

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{v} \Omega_{\mathcal{B}_1|k}^1 \longrightarrow 0.$$

(2) δ tiene inversa por la izquierda si y sólo si la extensión

$$0 \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow \mathcal{B}/J^2 \longrightarrow \mathcal{B}_1 \longrightarrow 0$$

de la k -álgebra \mathcal{B}_1 por J/J^2 es trivial[†].

Ejemplo 3.2.22. [46, (26.J)] Sea $k \hookrightarrow \tilde{k}$ una extensión de anillos. Consideramos la k -álgebra $\tilde{k}[X]$ y construimos la primera sucesión exacta fundamental para $\tilde{k} \rightarrow \tilde{k}[X]$:

$$\Omega_{\tilde{k}|k}^1 \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}[X] \xrightarrow{v} \Omega_{\tilde{k}[X]|k}^1 \xrightarrow{u} \Omega_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}^1 \longrightarrow 0.$$

De ella sabemos que $\Omega_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}^1 \simeq \tilde{k}[X]d_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}(X)$ donde $d_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}(X) = \overline{1 \otimes X - X \otimes 1}$ (véase el Ejemplo 3.2.17). Ahora vamos a probar que v tiene inversa por la izquierda utilizando el apartado (2) del Teorema 3.2.20:

Sea T un $\tilde{k}[X]$ -módulo y sea $D : \tilde{k} \rightarrow T$ una derivación k -lineal. D se puede extender a $D_X : \tilde{k}[X] \rightarrow T$ decretando, por ejemplo, que $D_X(X) = 0$.

Por lo tanto, se tiene que

$$\Omega_{\tilde{k}[X]|k}^1 \simeq (\Omega_{\tilde{k}|k}^1 \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}[X]) \oplus \Omega_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}^1 \simeq (\Omega_{\tilde{k}|k}^1 \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}[X]) \oplus \tilde{k}[X]d_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}(X).$$

[†][46, (25.A)] Una extensión $0 \rightarrow N \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\varepsilon} C' \rightarrow 0$ se dice que es *trivial* o que *escinde* si existe una sección $s : C' \rightarrow C$ tal que $\varepsilon \circ s = \text{Id}_{C'}$.

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

Ahora consideramos el anillo cociente $\mathcal{B}_1 = \tilde{k}[X]/\langle f(X) \rangle$. La segunda sucesión exacta fundamental es en este caso:

$$\begin{array}{ccccccc} \langle f \rangle / \langle f^2 \rangle & \xrightarrow{\delta} & \Omega_{\tilde{k}[X]|k}^1 \otimes_{\tilde{k}[X]} \tilde{k}[X] / \langle f \rangle & \longrightarrow & \Omega_{\tilde{k}[X]/\langle f \rangle|k}^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & (\Omega_{\tilde{k}|k}^1 \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}[X] / \langle f \rangle) \oplus \tilde{k}[X] / \langle f \rangle d_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}(X) & & & & \end{array}$$

y si $\sum_{i=0}^n a_i X^i \in \langle f \rangle$

$$\delta\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) \equiv \left(\sum_{i=0}^n d_{\tilde{k}|k}(a_i) \otimes X^i\right) \oplus \left(\sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}\right) d_{\tilde{k}[X]|\tilde{k}}(X) \pmod{\langle f \rangle}.$$

Proposición 3.2.23. [46, Teorema 59 iii)] Sea k un cuerpo y sea $k \subset K$ una extensión finitamente generada de cuerpos. Entonces

$$\text{rg}_K \Omega_{K|k}^1 \geq \text{gr. tras}_k K.$$

Además, la igualdad se satisface si y sólo si K es separable sobre k .

Corolario 3.2.24. Sean k un cuerpo, B una k -álgebra de tipo finito y $\mathfrak{m} \subset B$ un ideal maximal, entonces se tiene que

$$\mu(\Omega_{B|\mathfrak{m}}^1) \geq \dim_{K_{\text{rull}}} B_{\mathfrak{m}}.$$

Demostración. Primero vamos a probar el resultado suponiendo que $B_{\mathfrak{m}}$ es un dominio para después extenderlo al caso general.

Caso particular: Supongamos que $B_{\mathfrak{m}}$ es un dominio y sea K su cuerpo de cocientes. Observamos que tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1) &\geq \text{rg}(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} K) = \dim_K(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} K) \stackrel{\text{Proposición 3.2.18}}{=} \\ &\qquad \qquad \qquad \dim_K \Omega_{K|k}^1 \stackrel{\text{Proposición 3.2.23}}{\geq} \text{gr. tras}_k K. \end{aligned}$$

Para terminar este caso vamos a probar que $\text{gr. tras}_k K = \dim_{K_{\text{rull}}} B_{\mathfrak{m}}$.

Si B no es un dominio, sustituimos B por B/\mathfrak{p} donde $\mathfrak{p} \subset B$ es el único primo minimal contenido en \mathfrak{m} (es único ya que $B_{\mathfrak{m}}$ es un dominio).

Por el lema de normalización de Noether se puede construir una extensión finita de dominios, $k[X_1, \dots, X_d] \longrightarrow B$, siendo $d = \dim_{K_{\text{rull}}} B$. Por lo que, localizando $B \longrightarrow K$, por la propiedad universal de la localización se tiene un cambio de base:

$$\begin{array}{ccc} k[X_1, \dots, X_d] & \xrightarrow{\text{finita}} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(X_1, \dots, X_d) & \xrightarrow{\text{finita}} & K \end{array}$$

Por lo que $\text{gr. tras}_k K = \text{gr. tras}_k k(X_1, \dots, X_d) = d = \dim_{K_{\text{rull}}} B = \dim_{K_{\text{rull}}} B_{\mathfrak{m}}$ (la última igualdad se debe a que \mathfrak{m} es un ideal maximal).

Caso general: Si $B_{\mathfrak{m}}$ no es un dominio, elegimos un primo, $\mathfrak{p} \subset B$, de modo que $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{m}}$ sea minimal y corresponda de una de sus componentes de mayor dimensión. Sea $\overline{B} = B/\mathfrak{p}$ el anillo cociente y sea $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. De esta forma $\dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}} = \dim_{\text{Krull}} \overline{B}_{\overline{\mathfrak{m}}}$.

Ahora, en la segunda sucesión exacta fundamental obtenida al considerar $B \longrightarrow \overline{B} \longrightarrow 0$ aparece el morfismo sobreyectivo:

$$\Omega_{B|k}^1 \otimes \overline{B} \xrightarrow{v} \Omega_{\overline{B}|k}^1 \longrightarrow 0 \quad (3.2.24.1)$$

(véase el Teorema 3.2.21). Finalmente,

$$\mu(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1) = \mu(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} \overline{B}_{\overline{\mathfrak{m}}}) \geq \mu(\Omega_{\overline{B}_{\overline{\mathfrak{m}}}|k}^1) \geq \dim_{\text{Krull}} \overline{B}_{\overline{\mathfrak{m}}} = \dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}}$$

(la primera desigualdad es cierta porque v es un morfismo sobreyectivo y la segunda está probada arriba).

□

3.2.4. Nociones de lisitud para álgebras sobre cuerpos

En este apartado discutiremos el concepto de lisitud para localización de álgebras de tipo finito. Esto se hará en las definiciones 3.2.28 y 3.2.31 que se formulan en términos de la matriz jacobiana y en la Definición 3.2.33 que se expresa en términos del módulo de diferenciales.

Observación 3.2.25. Sea k un cuerpo, sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ un anillo de polinomios y sean $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ y M dos ideales de A tales que M es maximal y $J \subset M$.

Si $\mu_M(J)$, el número mínimo de generadores de $J_M \subset A_M$, es r , por la Observación 3.2.3 y reordenando los generadores, podemos suponer que $J_M = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Luego,

$$\text{rg}(\text{Jac}(J)|_M) = \text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_M) \leq \text{número de filas de la matriz} = r = \mu_M(J). \quad (3.2.25.1)$$

Definición 3.2.26. Se dice que el anillo $B = A/J$ es liso sobre k en un punto cerrado $\mathfrak{m} = M/J$ si se da la igualdad en (3.2.25.1), i. e. si la matriz $\text{Jac}(J)$ evaluada en $B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}} = A/M$ tiene rango $\mu_M(J)$.

En general, se dice que B es liso sobre k si es liso (sobre k) en todo punto cerrado $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$.

Ejemplo 3.2.27.

(1) La matriz jacobiana de $J = \langle X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 \rangle \subset k[X, Y, Z]$ es

$$\text{Jac}(J) = \begin{pmatrix} 2X & 2Y & 2Z \end{pmatrix}.$$

Si k es un cuerpo de característica distinta de 2, $\text{rg}(\text{Jac}(J)) = 1$ en cualquier maximal M que contenga a J . Luego, la esfera sobre los cuerpos de característica distinta de 2 es lisa.

(2) Sea $B = k[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle$. Como

$$\text{rg}((3X^2 - 2Y)|_{\langle X, Y \rangle}) = 0 \text{ mientras que } \mu_{\langle X, Y \rangle}(\langle X^3 - Y^2 \rangle) = 1,$$

concluimos que $k[X, Y]/\langle X^3 - Y^2 \rangle$ no es liso sobre k en el origen.

(3) Sea $k = \mathbb{F}_p(Y)$, sea $A = k[X]$ y sea $M = \langle X^p - Y \rangle$. Observamos que

$$\text{Jac}(X^p - Y) = \left(\frac{\partial(X^p - Y)}{\partial X} \right) = (0),$$

por lo que $\text{rg}(\text{Jac}(M)|_M) = 0 < \mu_M(M) = 1$. Así que, A no es liso sobre k en M .

A continuación reescribimos la Definición 3.2.26 del siguiente modo:

Definición 3.2.28. Sean k un cuerpo, $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $B = A/J$ para un ideal $J \subset A$. Sean $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$ y $M \in \text{Spec } A$ dos puntos cerrados tales que $\mathfrak{m} = M/J$. Se dice que B es liso sobre el cuerpo k en el punto cerrado \mathfrak{m} si existen elementos $f_1, \dots, f_r \in J$ que satisfacen las siguientes dos propiedades:

(1) $\langle f_1, \dots, f_r \rangle A_M = J_M$ y

(2) $\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)$ tiene rango r en el cuerpo residual $\kappa = A/M = B/\mathfrak{m}$.

Proposición 3.2.29. Sea k un cuerpo. La lisitud de una k -álgebra de tipo finito en un punto cerrado es independiente de su presentación.

Demostración. Sea $B = k[X_1, \dots, X_d]/J$. Con esta descripción ya tenemos fijada una presentación:

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A = k[X_1, \dots, X_d] \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0.$$

Sea

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A' \xrightarrow{\theta} B \longrightarrow 0, \quad (3.2.29.1)$$

otra presentación del anillo B donde A' es un anillo de polinomios sobre k .

Fijado un punto cerrado $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$, sean

$$M = \phi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Spec } A \quad \text{y} \quad M' = \theta^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Spec } A'$$

(i.e., $\mathfrak{m} = M/J = M'/K$) y sea κ su cuerpo residual $B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}} = A_M/M A_M = A'_{M'}/M' A_{M'}$.

Vamos a empezar con un caso concreto que después extenderemos al caso general:

Caso particular: Supongamos que en (3.2.29.1) $A' = A[Y] = k[X_1, \dots, X_d, Y]$ y $\theta(f(X)) = \phi(f(X))$ para todo $f(X) \in A$. Como ϕ es sobreyectivo, existe un elemento $h(X) \in A$ tal que $\phi(h(X)) = \theta(Y)$, por lo tanto $K = JA' + \langle Y - h(X) \rangle$, para algún $h(X) \in A$ y $M' = MA' + \langle Y - h(X) \rangle$.

Vamos a demostrar primero que A'/K es liso en M'/K sabiendo que A/J es liso en M/J . Supongamos que existen $f_1, \dots, f_r \in A$ tales que

$$\langle f_1, \dots, f_r \rangle A_M = J_M \text{ y } \operatorname{rg}(\operatorname{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_\kappa) = r,$$

observando que

- (1) $\langle f_1, \dots, f_r, Y - h(X) \rangle A'_{M'} = K_{M'}$ y
- (2) $\operatorname{rg}(\operatorname{Jac}(f_1, \dots, f_r, Y - h(X))|_\kappa) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Jac}(J)|_\kappa & 0 \\ \dots & 1 \end{array}\right) = r + 1$

tenemos que $f_1, \dots, f_r, Y - h(X)$ satisfacen la Definición 3.2.28, por lo que A'/K es liso en M'/K .

Para demostrar el recíproco, vamos suponer que existen $g_1, g_2, \dots, g_t \in K$ tales que

$$\langle g_1, \dots, g_t \rangle A'_{M'} = K_{M'} \text{ y } \operatorname{rg}(\operatorname{Jac}(g_1, \dots, g_t)|_\kappa) = t$$

y vamos a buscar $t - 1$ elementos de J que satisfagan la Definición 3.2.28.

Empezamos observando que $\{g_1, \dots, g_t\}$ es un sistema de generadores minimal de $K_{M'}$ ya que t es un cota inferior para el número de generadores (véase la Observación 3.2.25). Por lo tanto, cualquier base del κ -espacio vectorial $K_{M'}/M'K_{M'}$ está formada por t elementos (lema de Nakayama). Notamos además que $\overline{Y - h(X)} \in K_{M'}/M'K_{M'}$ es no nulo porque de lo contrario $\nu_{M'}(Y - h(X)) \geq 2$ y la Proposición 3.1.9 implicaría que $\operatorname{Diff}^1(\langle Y - h(X) \rangle) \subset M'$, lo cual es una contradicción ya que $1 = \Delta^{(0, \dots, 0, 1)}(Y - h(X)) \in \operatorname{Diff}^1(\langle Y - h(X) \rangle)$.

Luego podemos concluir que del sistema de generadores

$$\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_t}, \overline{Y - h(X)}\} \subset K_{M'}/M'K_{M'}$$

se puede extraer una base del κ -espacio vectorial $K_{M'}/M'K_{M'}$ que contenga al elemento $\overline{Y - h(X)}$. Reordenando si fuese necesario, el lema de Nakayama afirma que

$$K_{M'} = \langle g_1, \dots, g_{t-1}, Y - h(X) \rangle.$$

Nuestro siguiente objetivo es modificar este sistema de generadores para obtener otro en el que los $t - 1$ primeros elementos sean polinomios que sólo involucren las variables X_1, \dots, X_d . Para ello observamos que si $g \in A' = A[Y]$ es un polinomio de grado n en la variable Y :

$$g = a_n(X)Y^n + \text{términos de grado } < n \text{ en } Y,$$

entonces $g - a_n(X)(Y - h(X))^n$ tiene grado $< n$ en la variable Y . Repitiendo el proceso concluimos que existe un elemento $g' \in A$ tal que

$$g \equiv g' \pmod{\langle Y - h(X) \rangle}.$$

Por lo tanto, existen $g'_1, \dots, g'_{t-1} \in A \subset A'$ tales que

$$K_{M'} = \langle g'_1, \dots, g'_{t-1}, Y - h(X) \rangle.$$

En cuanto al rango de la matriz jacobiana, por la Proposición 3.2.12, se tiene que

$$t = \text{rg}(\text{Jac}(K_{M'})|_{\kappa}) = \text{rg}\left(\text{Jac}(g'_1, \dots, g'_{t-1}, Y - h(X))|_{\kappa}\right) = \text{rg}\left(\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial(g'_1, \dots, g'_{t-1})}{\partial(X_1, \dots, X_d)} & 0 \\ \hline \dots & 1 \end{array}\right)\Big|_{\kappa}\right),$$

luego

$$\text{rg}\left(\frac{\partial(g'_1, \dots, g'_{t-1})}{\partial(X_1, \dots, X_d)}\Big|_{\kappa}\right) = t - 1.$$

Por lo tanto, $J_M = K_{M'} \cap A_M = \langle g'_1, \dots, g'_{t-1} \rangle$ y $\text{Jac}(g'_1, \dots, g'_{t-1})|_{\kappa}$ tiene rango $t - 1$, con lo que los elementos $g'_1, \dots, g'_{t-1} \in J$ satisfacen la Definición 3.2.28, mostrando que A/J es liso en M/J .

Caso general: Supongamos que en (3.2.29.1) $A' = k[Y_1, \dots, Y_{d'}]$. El siguiente diagrama conmutativo relaciona las dos presentaciones:

$$\begin{array}{ccccc} A = k[X_1, \dots, X_d] & \xleftarrow{i_X} & A \otimes_k A' = k[X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_{d'}] & & \\ \phi \downarrow & \circlearrowleft & \psi & \circlearrowright & i_Y \uparrow \\ B & \xleftarrow{\theta} & A' = k[Y_1, \dots, Y_{d'}] & & \end{array}$$

donde ψ satisface que $\phi = \psi \circ i_X$ y $\theta = \psi \circ i_Y$. Observamos que como ϕ y θ son sobreyectivas, ψ también lo es, convirtiéndose también en una presentación de B :

$$0 \longrightarrow \ker \psi \longrightarrow A \otimes_k A' \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0.$$

Ahora vamos a generalizar el argumento utilizado en el caso anterior. Como ϕ es sobreyectivo, para cada $i = 1, \dots, d'$ existe un elemento $h_i(X) \in A$ tal que $\psi(Y_i) = \phi(h_i(X))$, con lo que $J + \langle Y_1 - h_1(X), \dots, Y_{d'} - h_{d'}(X) \rangle \subset \ker \psi$. Para demostrar la inclusión recíproca, observamos que si $g(X, Y) \in A \otimes_k A' = A[Y_1, \dots, Y_{d'}]$ es un polinomio de grado n en las variables $Y_1, \dots, Y_{d'}$, digamos

$$g(X, Y) = \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha}(X) Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_{d'}^{\alpha_{d'}} + \text{términos de grado } < n \text{ en } Y_1, \dots, Y_{d'},$$

entonces

$$g(X, Y) - \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha}(X) (Y_1 - h_1(X))^{\alpha_1} \cdots (Y_{d'} - h_{d'}(X))^{\alpha_{d'}}$$

es un polinomio de grado estrictamente menor que n en las variables $Y_1, \dots, Y_{d'}$ y repitiendo este proceso obtenemos un elemento $g'(X) \in A \subset A \otimes_k A'$ tal que

$$g(X, Y) \equiv g'(X) \pmod{\langle Y_1 - h_1(X), \dots, Y_{d'} - h_{d'}(X) \rangle}.$$

Luego,

$$\ker \psi = J(A \otimes_k A') + \langle Y_1 - h_1(X), \dots, Y_{d'} - h_{d'}(X) \rangle,$$

y del mismo modo se prueba que existen $h'_1(Y), \dots, h'_{d'}(Y) \in A' = k[Y_1, \dots, Y_{d'}]$ tales que

$$\ker \psi = K(A \otimes_k A') + \langle X_1 - h'_1(Y), \dots, X_d - h'_d(Y) \rangle.$$

Finalmente, el resultado se obtiene iterando el caso particular visto arriba y de la Proposición 3.2.12, ya que

$$\begin{aligned} B = A/J &= A \otimes A' / (J(A \otimes A') + \langle Y_1 - h_1(X), \dots, Y_{d'} - h_{d'}(X) \rangle) = \\ &= A \otimes A' / (K(A \otimes A') + \langle X_1 - h'_1(Y), \dots, X_d - h'_d(Y) \rangle) = A'/K. \end{aligned}$$

□

Propiedad 3.2.30 (Cambio de base). [30, Cap. IV, Proposición (17.3.3) (iii)] Sea B una k -álgebra lisa en un punto cerrado \mathfrak{m} . Entonces para cualquier extensión de cuerpos, $k \subset \tilde{k}$, la \tilde{k} -álgebra $B \otimes_k \tilde{k}$ es lisa en cualquier punto cerrado, $\tilde{\mathfrak{m}}$, que domine a B en \mathfrak{m} .

En particular, la propiedad de lisitud se preserva al extender el cuerpo base a su clausura algebraica.

Demostración. Sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y sea $B = A/J$ para algún ideal $J \subset A$. Sea $\tilde{A} = A \otimes_k \tilde{k} = \tilde{k}[X_1, \dots, X_d]$. Denotamos por $M \subset A$ y $\tilde{M} \subset \tilde{A}$ a los ideales maximales que cumplen que $\mathfrak{m} = M/J$ y $\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{M}/J\tilde{A}$. Sean $\kappa = A/M$ y $\tilde{\kappa} = \tilde{A}/\tilde{M}$ los respectivos cuerpos residuales de \mathfrak{m} y de $\tilde{\mathfrak{m}}$.

Empezamos construyendo el siguiente morfismo de anillos locales, ya que $\tilde{M} \cap A = M$:

$$\begin{array}{ccc} A_M & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{A}_{\tilde{M}} \\ & \searrow \psi & \downarrow \\ & & \tilde{A}_{\tilde{M}}/\tilde{M}\tilde{A}_{\tilde{M}} = \tilde{\kappa} \end{array}$$

donde $\ker(\psi) = \varphi^{-1}(\tilde{M}\tilde{A}_{\tilde{M}}) = MA_M$. Luego tenemos una extensión de cuerpos,

$$\kappa = A_M/MA_M \subset \tilde{\kappa}.$$

Ahora, considerando que $J\tilde{A}$ se puede generar por elementos de A (por ejemplo con un conjunto de generadores de J), tenemos que la matriz $\text{Jac}(J\tilde{A})|_{\tilde{\kappa}}$ tiene todas las entradas en

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

κ que es un subcuerpo de $\tilde{\kappa}$ y, de hecho, coincide con $\text{Jac}(J)|_{\kappa}$, por lo que el rango de ambas matrices es el mismo.

Por lo tanto, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\mu_{\tilde{M}}(J\tilde{A}) \leq \mu_M(J) \stackrel{\text{Hipótesis}}{=} \text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa}) = \text{rg}(\text{Jac}(J\tilde{A})|_{\tilde{\kappa}}) \stackrel{\text{Observación 3.2.25}}{\leq} \mu_{\tilde{M}}(J\tilde{A}),$$

de donde obtenemos que $\text{rg}(\text{Jac}(J\tilde{A})|_{\tilde{\kappa}}) = \mu_{\tilde{M}}(J\tilde{A})$. \square

A continuación enunciamos otras dos nociones equivalentes de lisitud utilizando módulos de diferenciales.

Definición 3.2.31. [18, Definición 2.6] Sean k un cuerpo, $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $B = A/J$ para un ideal $J \subset A$. Sea $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$ un punto cerrado y sea $M \subset A$ tal que $M \supset J$ y $\mathfrak{m} = M/J$. Se dice que B es liso sobre k en \mathfrak{m} si

$$\text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\mathfrak{m}}) = d - \dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}}.$$

Proposición 3.2.32. Esta definición es equivalente a la dada en 3.2.28.

Demostración. Consideramos la segunda sucesión exacta fundamental (enunciada en el Teorema 3.2.21) para el morfismo sobreyectivo $A_M \longrightarrow B_{\mathfrak{m}} = A_M/J_M$:

$$J_M/J_M^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_k B_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \longrightarrow 0,$$

tensorizando en $\kappa = B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}} = A_M/MA_M$ tenemos una sucesión de κ -espacios vectoriales

$$J_M/J_M^2 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} \kappa \xrightarrow{\delta \otimes \text{Id}} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_k \kappa \longrightarrow \Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} \kappa \longrightarrow 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa}) &= \dim_{\kappa} \text{Im}(\delta \otimes \text{Id}) = \dim_{\kappa} (\Omega_{A_M|k}^1 \otimes_k \kappa) - \dim_{\kappa} (\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} \kappa) = \\ & d - \mu_{\mathfrak{m}}(\Omega_{B|k}^1) \stackrel{\text{Corolario 3.2.24}}{\leq} d - \dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}} \stackrel{\text{Lema 1.1.4}}{\leq} d + \mu_M(J) - d = \mu_M(J). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se cumple la Definición 3.2.28, los dos extremos de la cadena de desigualdades coinciden y también se satisface la Definición 3.2.31.

Probaremos ahora el recíproco. Sea $r = \text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa})$. Luego, existen r elementos de J , digamos f_1, \dots, f_r tales que $\text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_{\kappa}) = r$.

Necesitamos probar que $J_M = \langle f_1, \dots, f_r \rangle A_M$ sabiendo que $r = d - \dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}}$ (la condición de la Definición 3.2.31).

Para ello observamos que el morfismo sobreyectivo $A_M \longrightarrow B_m$ factoriza por el también morfismo sobreyectivo

$$C = A_M / \langle f_1, \dots, f_r \rangle \xrightarrow{\varphi} B_m = A_M / J_M,$$

ya que cada $f_i \in J$.

La Proposición 3.2.13 afirma que $\{f_1, \dots, f_r\} \subset J \subset M$ forman parte de un sistema regular de parámetros en A_M . Luego, C es un anillo local regular y, en particular, un dominio de dimensión

$$\dim_{\text{Kruill}} C = d - r = \dim_{\text{Kruill}} B_m = \dim_{\text{Kruill}} (C / \ker \varphi),$$

(véanse las proposiciones 1.1.7 y 1.1.6). Por lo tanto, $\ker \varphi = 0$ y $J_M = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset A_M$. \square

Ahora vamos a relacionar la Definición 3.2.31 con la caracterización que aparece en [30].

Definición 3.2.33. [30, Cap. IV, Proposición (17.15.5)] Sea k un cuerpo y sea B una k -álgebra de tipo finito. Se dice que B es lisa sobre k en un punto cerrado $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$ si

$$\mu(\Omega_{B_m|k}^1) = \dim_{\text{Kruill}} B_m.$$

(Recordemos que $\mu(\Omega_{B_m|k}^1) = \mu_{\mathfrak{m}}(\Omega_{B|k}^1)$ representa el número mínimo de generadores del B_m -módulo $\Omega_{B_m|k}^1 = (\Omega_{B|k}^1)_{\mathfrak{m}}$, véase la Definición 3.2.1).

Proposición 3.2.34. *Demostraremos ahora que esta definición es equivalente a la dada en 3.2.31.*

Demostración. Sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y sea $J \subset A$ un ideal, de modo que $B = A/J$. Llamamos $M \subset A$ al ideal levantado de \mathfrak{m} (i. e. al que satisface $\mathfrak{m} = M/J$) y κ al cuerpo residual $B_m/\mathfrak{m}B_m = A/M$.

A partir del morfismo sobreyectivo $A_M \longrightarrow B_m$ construimos la segunda sucesión exacta fundamental (véase el Teorema 3.2.21):

$$J_M / J_M^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} B_m \longrightarrow \Omega_{B_m|k}^1 \longrightarrow 0, \quad (3.2.34.1)$$

ahora tensorizamos con el cuerpo residual κ y nos queda la siguiente sucesión de κ -espacios vectoriales:

$$J_M / J_M^2 \otimes \kappa \xrightarrow{\delta \otimes \text{Id}} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} \kappa \longrightarrow \Omega_{B_m|k}^1 \otimes_{B_m} \kappa \longrightarrow 0,$$

donde

- $\dim_{\kappa}(\Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} \kappa) = \text{rg } \Omega_{A_M|k}^1 = d$ (véanse el Ejemplo 3.2.17 y la Proposición 3.2.18)

y

- $\dim_{\kappa}(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} \kappa) = \mu(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1)$ (véase la Observación 3.2.2(1)).

Por lo tanto, el Primer Teorema de Isomorfía afirma que

$$\mu(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1) = d - \dim_{\kappa}(\text{Im}(\delta \otimes \text{Id})) = d - \text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa}). \quad (3.2.34.2)$$

Esta última expresión relaciona la fórmula de la Definición 3.2.33 con la de la Definición 3.2.31. □

Esta demostración aporta un resultado relacionado con el Corolario 3.2.24:

Proposición 3.2.35. *Con la notación de la definición anterior, si el número mínimo de generadores del $B_{\mathfrak{m}}$ -módulo $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$ es $\dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}}$ entonces es un módulo libre.*

Demostración. Es suficiente probar que $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$ es un sumando directo de un módulo libre (ya que $B_{\mathfrak{m}}$ es un anillo local y $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$ es un módulo finitamente generado). Para ello veremos que la sucesión (3.2.34.1) escinde.

Supongamos que $J_M = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ donde $f_i \in A$ y que $\{dX_1 \otimes 1, \dots, dX_d \otimes 1\}$ es una base del módulo libre $\Omega_{A_M|k}^1 \otimes B_{\mathfrak{m}}$. Sea $d' = \mu(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1) = \dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}}$. De la igualdad (3.2.34.2) obtenemos que

$$\text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa}) = d - d'.$$

Esto significa que en la matriz $\text{Jac}(J_M)$ (con entradas en A_M) hay un menor $(d - d') \times (d - d')$ que es una unidad en A_M . Reordenando las coordenadas y los generadores de J_M , si fuera necesario, podemos suponer que el determinante de $D = \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-d'})}{\partial(X_1, \dots, X_{d-d'})}$ es una unidad en A_M .

Por lo tanto, la imagen de δ en (3.2.34.1) está generada por $\{\delta(f_1), \dots, \delta(f_{d-d'})\}$ y este conjunto se puede extender a una base de $\Omega_{A_M|k}^1 \otimes B_{\mathfrak{m}}$, por ejemplo,

$$\{\delta(f_1), \dots, \delta(f_{d-d'}), dX_{d-d'+1} \otimes 1, \dots, dX_d \otimes 1\}.$$

Luego, de (3.2.34.1) obtenemos que la siguiente sucesión exacta

$$J_M/J_M^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} B_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \longrightarrow 0$$

escinde a derecha. □

Terminamos esta sección generalizando la definición de lisitud a esquemas.

Definición 3.2.36. Sea k un cuerpo y sea V un esquema de tipo finito sobre k . Se dice que V es liso sobre k en un punto cerrado $x \in V$ si el anillo local $(\mathcal{O}_{V,x}, \mathfrak{m}_x)$ es liso sobre k en \mathfrak{m}_x .

Se dice que V es *liso sobre k* si es separado[‡] sobre k y liso en cada punto cerrado.

[‡][31, pág. 96] Un esquema V sobre k se dice que *separado* si el morfismo diagonal $\Delta : V \longrightarrow V \times_k V$ es una inmersión cerrada.

3.2.5. Álgebras regulares y álgebras lisas sobre cuerpos

El resultado principal de este apartado es el Teorema 3.2.39. Allí se aborda la equivalencia entre regularidad y lisitud para álgebras de tipo finito sobre cuerpos perfectos.

Lema 3.2.37. [18, Teorema A.1] *Sean k un cuerpo, $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $M \subset A$ un ideal maximal con cuerpo residual $\kappa = A/M$. Entonces, el morfismo*

$$M/M^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} \kappa \quad (3.2.37.1)$$

de la segunda sucesión exacta fundamental obtenido de $A_M \longrightarrow \kappa \longrightarrow 0$ (véase el Teorema 3.2.21) es un isomorfismo si y sólo si κ es separable sobre k .

Demostración. Ya sabemos que A es regular y, por el Ejemplo 3.2.17, también sabemos que $\Omega_{A_M|k}^1$ es libre de rango d . La segunda sucesión exacta fundamental es:

$$M/M^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} \kappa \longrightarrow \Omega_{\kappa|k}^1 \longrightarrow 0,$$

donde M/M^2 y $\Omega_{A_M|k}^1 \otimes_{A_M} \kappa$ son ambos κ -espacios vectoriales de dimensión d . Por lo tanto, δ es un isomorfismo si y sólo si δ es sobreyectivo, lo cual es equivalente a que $\Omega_{\kappa|k}^1 = 0$. Terminamos observando que como κ es una extensión finita de k , la Proposición 3.2.23 afirma que $\text{rg } \Omega_{\kappa|k}^1 = \text{gr. tras}_k \kappa (= 0)$ si y sólo si κ es separable sobre k . □

El siguiente resultado refina la Proposición 3.2.13:

Corolario 3.2.38. *Sean k un cuerpo, $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $M \subset A$ un ideal maximal. Supongamos que el cuerpo residual de M , $\kappa = A/M$, es una extensión (finita) y separable de k . Entonces, $\{f_1, \dots, f_r\} \subset M$ forma parte de un sistema regular de parámetros en A_M si y sólo si $\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_M$ tiene rango r .*

Demostración. Como el morfismo δ de la expresión (3.2.37.1) es un isomorfismo, se tiene que si $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r\}$ forma parte de una base de M/M^2 , entonces

$$\text{rg}(\text{Jac}(f_1, \dots, f_r)|_\kappa) = \dim_\kappa (\delta\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r \rangle) = r.$$

El recíproco es la Proposición 3.2.13. □

Teorema 3.2.39. [18, Teorema 2.8] *Sean k un cuerpo, $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $B = A/J$ para un ideal $J \subset A$. Sea $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(B)$ un punto cerrado.*

(1) *Si B es liso sobre k en \mathfrak{m} , entonces $B_{\mathfrak{m}}$ es regular.*

(2) *El recíproco es cierto si $\kappa = B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ es una extensión separable sobre k .*

Demostración. Para demostrar los dos apartados primero estableceremos una cadena de desigualdades que involucra: $\dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}}$, $\dim_{\kappa} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $\text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa})$ y $\mu_M(J)$, donde M denota el ideal maximal de A que satisface que $\mathfrak{m} = M/J$.

En primer lugar, de la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (J + M^2)/M^2 \longrightarrow M/M^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow 0$$

y del hecho de que A_M es un anillo local regular de dimensión d se obtiene que

$$\dim_{\kappa} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d - \dim_{\kappa} ((J_M + M_M^2)/M_M^2). \quad (3.2.39.1)$$

Y en segundo lugar, de la segunda sucesión exacta fundamental que resulta al considerar el morfismo sobreyectivo $A_M \longrightarrow \kappa = A_M/M$ (véase el Teorema 3.2.21):

$$M_M/M_M^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A_M/k}^1 \otimes \kappa \longrightarrow \Omega_{\kappa/k}^1 \longrightarrow 0 \quad (3.2.39.2)$$

y del hecho de que $(J_M + M_M^2)/M_M^2$ es un subespacio vectorial de M_M/M_M^2 tenemos que

$$\dim_{\kappa} (J_M + M_M^2)/M_M^2 \geq \dim_{\kappa} \delta((J_M + M_M^2)/M_M^2) = \text{rg}(\text{Jac}(J_M)|_{\kappa}) = \text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa}). \quad (3.2.39.3)$$

Por lo tanto,

$$\dim_{\text{Krull}} B_{\mathfrak{m}} \leq \dim_{\kappa} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \stackrel{(3.2.39.1)}{=} d - \dim_{\kappa} ((J_M + M_M^2)/M_M^2) \stackrel{(3.2.39.3)}{\leq} d - \text{rg}(\text{Jac}(J)|_{\kappa}). \quad (3.2.39.4)$$

Ahora probaremos los dos enunciados del teorema:

(1) Si B es liso sobre k en \mathfrak{m} entonces los dos extremos de (3.2.39.4) coinciden (véase la Definición 3.2.31) y, en particular, la primera desigualdad es una igualdad, luego $B_{\mathfrak{m}}$ es regular.

(2) Supongamos ahora que $B_{\mathfrak{m}}$ es regular y que κ es una extensión separable sobre k . Vamos a probar que las desigualdades de (3.2.39.4) son igualdades y así B será liso sobre k en \mathfrak{m} porque satisfará la condición de la Definición 3.2.31.

Primera desigualdad: Es una igualdad porque $B_{\mathfrak{m}}$ es regular.

Segunda desigualdad: Como κ es separable sobre k y $M \subset A$ es un ideal maximal, el Lema 3.2.37 afirma que el morfismo δ en (3.2.39.2) es un isomorfismo y por tanto, en este caso, la desigualdad en (3.2.39.3) es una igualdad.

□

Ejemplo 3.2.40. Sean $k = \mathbb{F}_p(Y)$, $A = k[X]$ y $\mathfrak{m} = \langle X^p - Y \rangle \subset A$ uno de sus ideales maximales.

Por un lado $A_{\mathfrak{m}}$ es regular y por el otro $k[X]/\langle X^p - Y \rangle$ es una extensión inseparable de k y A no es liso sobre k en \mathfrak{m} (véase el Ejemplo 3.2.27(3)).

La siguiente proposición generaliza el Ejemplo 3.2.17 a ciertos anillos locales:

Proposición 3.2.41. [18, Teorema A.10 1.] *Sean k un cuerpo perfecto y B una k -álgebra lisa en un punto cerrado $\mathfrak{m} \in \text{Spec } B$. Si $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $B_{\mathfrak{m}}$ se tiene que*

$$\{dz_1 = \overline{1 \otimes z_1 - z_1 \otimes 1}, \dots, dz_d = \overline{1 \otimes z_d - z_d \otimes 1}\}$$

es una base de $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$.

Demostración. Consideramos la segunda sucesión exacta fundamental (descrita en el Teorema 3.2.21) construida a partir del morfismo sobreyectivo $B_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \kappa = B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2B_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\delta} \Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes \kappa \longrightarrow \Omega_{\kappa|k}^1 \longrightarrow 0, \\ \overline{z_i} \longmapsto d_{B_{\mathfrak{m}}|k} z_i \otimes 1 \end{aligned} \quad (3.2.41.1)$$

y observamos que:

- al ser $k \subset \kappa$ una extensión finita y separable $\Omega_{\kappa|k}^1 = 0$ (véase la Proposición 3.2.23),
- por la Definición 3.2.33 y la Proposición 3.2.35 $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$ es un $B_{\mathfrak{m}}$ -módulo libre de rango d y
- como $B_{\mathfrak{m}}$ es regular, $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2B_{\mathfrak{m}}$ es un κ -espacio vectorial de dimensión d (véase el Teorema 3.2.39(1)).

Por lo tanto, δ es un isomorfismo entre κ -espacios vectoriales de dimensión d . Esto significa que $\{d_{B_{\mathfrak{m}}|k}(z_i) \otimes 1\}_{i=1, \dots, d}$ genera $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1 \otimes_{B_{\mathfrak{m}}} \kappa$ y por el lema de Nakayama $\{d_{B_{\mathfrak{m}}|k}(z_i)\}_{i=1, \dots, d}$ genera $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$ (y es una base). \square

Observación 3.2.42. El recíproco también es cierto. Para probarlo necesitamos los operadores diferenciales que definiremos en el Apartado 3.3.2.

Terminamos esta sección exhibiendo un criterio bajo el cual el cociente de una k -álgebra lisa es también lisa.

Propiedad 3.2.43. Sean k un cuerpo perfecto y B una k -álgebra lisa sobre k . Sean $L \subset B$ un ideal y $\mathfrak{m} \subset B$ un ideal maximal conteniendo a L . Si $LB_{\mathfrak{m}}$ está generado por parte de un sistema regular de parámetros en $B_{\mathfrak{m}}$, entonces $B_1 = B/L$ es liso sobre k en $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/L$.

Demostración. Supongamos que $B = A/J$ donde $A = k[X_1, \dots, X_d]$ y $J \subset A$ es un ideal. Denotamos por L' y M a las preimágenes de L y \mathfrak{m} por $A \longrightarrow B$, respectivamente y por κ al cuerpo residual $A/M = B/\mathfrak{m}$.

Como $B_{\mathfrak{m}}$ es regular (véase el Teorema 3.2.39(1)) y, por hipótesis, $LB_{\mathfrak{m}}$ está generado por parte de un sistema regular de parámetros en $B_{\mathfrak{m}}$ se tiene que $(B_1)_{\mathfrak{n}} = B_{\mathfrak{m}}/LB_{\mathfrak{m}}$ también es regular (véase la Proposición 1.1.7). Reescribimos este anillo:

$$(B_1)_{\mathfrak{n}} = (B/L)_{\mathfrak{m}/L} = ((A/J)/(L'/J))_{(M/J)/(L'/J)} = (A/L')_{M/L'} = A_M/L'A_M.$$

De nuevo, la Proposición 1.1.7 afirma que $L'A_M$ está generado por parte de un sistema regular de parámetros en A_M , digamos $\{g_1, \dots, g_r\}$.

Además, como A_M es un anillo local regular y k es perfecto, el Corolario 3.2.38 establece que

$$\text{rg}(\text{Jac}(L')|_{\kappa}) = \text{rg}(\text{Jac}(g_1, \dots, g_r)|_{\kappa}) = r.$$

Finalmente observamos $B_1 = B/L$ es liso sobre k en \mathfrak{n} ya que se cumplen las condiciones de la Definición 3.2.31: $(B_1)_{\mathfrak{n}} = A_M/L'A_M$ es regular de dimensión $d - r$ y $\text{Jac}(g_1, \dots, g_r)|_{\kappa}$ tiene rango r . \square

3.3. Operadores diferenciales sobre álgebras

La fuerza real de la hipótesis de que k sea un cuerpo perfecto radica en el papel que juegan los operadores diferenciales al describir los órdenes de un ideal. Hemos visto en la Sección 3.1 que la noción de *extensión de ideales por diferenciales* en anillos de polinomios (véase la Definición 3.1.1) es útil para calcular el orden de dichos ideales (véase el Teorema 3.1.8). Si k es perfecto, podemos extender estas ideas al caso de k -álgebras lisas (de tipo finito), como veremos en el Teorema 3.3.26.

Para ello, previamente estudiaremos el módulo de partes principales (en el Apartado 3.3.1), su dual, el módulo de operadores diferenciales, (en el Apartado 3.3.2), la lisitud diferencial (en el Apartado 3.3.3) y la relación de ésta con la lisitud en el caso de álgebras de tipo finito sobre cuerpos perfectos (en el Apartado 3.3.4).

3.3.1. Módulo de partes principales

Definición 3.3.1. [30, Cap. IV, Definición (16.3.1)] Sean k un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra. Como en la definición de módulo de diferenciales empezamos con la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \xrightarrow{\mu} \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

donde $\mu(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$. Se define el \mathcal{B} -módulo de partes principales de orden $\leq r$ sobre k como el cociente

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r := \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}/I^{r+1}. \quad (3.3.1.1)$$

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ÁLGEBRAS

La estructura de \mathcal{B} -módulo se obtiene heredando la estructura de \mathcal{B} -módulo a izquierda de $\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B}$, es decir, considerando la composición

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\xrightarrow{j_1} \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \xrightarrow{\pi_r} \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r \\ b &\longmapsto b \otimes 1 \\ b_1 \otimes b_2 &\longmapsto \overline{b_1 \otimes b_2} = b_1 \otimes b_2 + I^{r+1}. \end{aligned}$$

Además, definimos el siguiente morfismo de anillos:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{B}|k}^r &= \pi_r \circ j_2 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} / I^{r+1} \\ b &\longmapsto \overline{1 \otimes b} = 1 \otimes b + I^{r+1}, \end{aligned} \tag{3.3.1.2}$$

cuya imagen genera $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r$ (como \mathcal{B} -módulo a izquierda) ya que

$$\pi_r(b_1 \otimes b_2) = b_1 \cdot \pi_r(1 \otimes b_2) = b_1 \cdot d_{\mathcal{B}|k}^r(b_2).$$

Cuando no de lugar a confusión escribiremos d^r en lugar de $d_{\mathcal{B}|k}^r$.

Proposición 3.3.2. *Sean k un anillo y $B = k[x_1, \dots, x_m]$ una k -álgebra de tipo finito. El conjunto*

$$\left\{ (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)^{\beta_1} \cdots (1 \otimes x_m - x_m \otimes 1)^{\beta_m} \right\}_{\beta \in \mathbb{N}^m, 0 \leq |\beta| \leq r}$$

genera el B -módulo (a izquierda) $\mathcal{P}_{B|k}^r$.

Demostración. Es suficiente con probar que los elementos $1 \otimes x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} \pmod{I^{r+1}}$ se puede expresar mediante combinaciones B -lineales de los elementos del conjunto dado. Escribimos x^α en lugar de $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$ para simplificar la notación y notamos que

$$\begin{aligned} 1 \otimes x^\alpha &= ((1 \otimes x - x \otimes 1) + x \otimes 1)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (x \otimes 1)^{\alpha-\beta} (1 \otimes x - x \otimes 1)^\beta \\ &\equiv \sum_{\substack{\beta \leq \alpha, \\ |\beta| \leq r}} \binom{\alpha}{\beta} (x^{\alpha-\beta} \otimes 1) (1 \otimes x - x \otimes 1)^\beta \pmod{I^{r+1}}, \end{aligned}$$

donde $0! = 1$ y $\gamma! = \prod_{i=1}^m \gamma_i!$ para cualquier $\gamma \in \mathbb{N}^m$. □

Ejemplo 3.3.3. Sea k un anillo y sea $A = k[X_1, \dots, X_d]$ el anillo de polinomios en d variables. La Observación 3.2.16(3) muestra que

$$I = \ker(\mu : A \otimes_k A \longrightarrow A) = \langle 1 \otimes X_1 - X_1 \otimes 1, \dots, 1 \otimes X_d - X_d \otimes 1 \rangle \subset A \otimes_k A.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{A|k}^r &= k[X_1, \dots, X_d] \otimes_k k[X_1, \dots, X_d] / I^{r+1} \\ &\simeq k[X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d] / \langle Y_1 - X_1, \dots, Y_d - X_d \rangle^{r+1} \end{aligned}$$

y aplicando el cambio de variable $T_i = Y_i - X_i$ tenemos que

$$\mathcal{P}_{A|k}^r \simeq k[X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_d] / \langle T^\beta \rangle_{|\beta|=r+1}.$$

Así vemos que $\{\overline{T^\beta}\}_{0 \leq |\beta| \leq r}$ es una base de $\mathcal{P}_{A|k}^r$ (recordando que trabajamos con su estructura de A -módulo a izquierda).

Proposición 3.3.4. [30, Cap. IV, Proposición (16.4.14)] *La construcción de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r$ y el proceso de localización conmutan, es decir, para cualquier conjunto multiplicativo $S \subset \mathcal{B}$ se tiene que*

$$S^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_S|k}^r.$$

Demostración. La prueba es análoga a la de la Proposición 3.2.18. Se obtiene siguiendo los siguientes pasos:

- De la sucesión exacta de \mathcal{B} -módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow I^{r+1} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} / I^{r+1} \longrightarrow 0$$

obtenemos, al tensorizar por $\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}$, la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_S \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} / I^{r+1}) \longrightarrow 0,$$

por lo tanto

$$\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r = \mathcal{B}_S \otimes (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} / I^{r+1}) \simeq (\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B})). \quad (3.3.4.1)$$

- Como $1 \otimes s = s \otimes 1 + (1 \otimes s - s \otimes 1)$ es una unidad en $(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}))$, por ser suma de una unidad y un elemento nilpotente ($(1 \otimes s - s \otimes 1)^{r+1} \in I^{r+1}$), tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B})) &\simeq ((\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}))) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_S \\ &\simeq (\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S)). \end{aligned} \quad (3.3.4.2)$$

- Consideramos la sucesión exacta de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ -módulos:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow 0,$$

al localizar por el conjunto multiplicativo $S' \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ generado por $\{1 \otimes s, s \otimes 1; s \in S\}$, seguimos teniendo una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S) \longrightarrow (\mathcal{B} \otimes \mathcal{B})_{S'} = \mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S \longrightarrow \mathcal{B}_{\mu(S')} = \mathcal{B}_S \longrightarrow 0,$$

luego $I(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S)$ es el núcleo de $\mu_{\mathcal{B}_S} : \mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S \longrightarrow \mathcal{B}_S$, lo que implica que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_S|k}^r = (\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S)). \quad (3.3.4.3)$$

Enlazando los tres isomorfismos concluimos que

$$\begin{aligned} S^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r &= \mathcal{B}_S \otimes \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r \stackrel{(3.3.4.1)}{=} (\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B})) \\ &\stackrel{(3.3.4.2)}{=} (\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S) / (I^{r+1}(\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_S)) \stackrel{(3.3.4.3)}{=} \mathcal{P}_{\mathcal{B}_S|k}^r. \end{aligned}$$

□

3.3.2. Módulo de operadores diferenciales

Definición 3.3.5. [30, Cap. IV Definición (16.8.1)] Sean k un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra. Se dice que $D : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ es un *operador diferencial de orden $\leq r$ sobre k* si es un morfismo k -lineal y existe un único morfismo de \mathcal{B} -módulos $\Gamma : \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r \rightarrow \mathcal{B}$ que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{D} & \mathcal{B} \\ \text{d}_{\mathcal{B}|k}^r \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow \Gamma \\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r & & \end{array} \quad (3.3.5.1)$$

donde $\text{d}_{\mathcal{B}|k}^r$ está definida en (3.3.1.2).

El conjunto de operadores diferenciales de \mathcal{B} sobre k de orden $\leq r$ forma un \mathcal{B} -módulo, que se denota por $\text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$.

Ejemplo 3.3.6. Sean k un anillo y $A = k[X_1, \dots, X_d]$. El Ejemplo 3.3.3 nos proporciona una base de $\mathcal{P}_{A|k}^r : \{\overline{T}^\beta\}_{0 \leq |\beta| \leq r}$, donde para cada $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$

$$T^\beta = T_1^{\beta_1} \dots T_d^{\beta_d} = \prod_{i=1}^d (1 \otimes X_i - X_i \otimes 1)^{\beta_i}.$$

Sea, ahora, para cada $|\alpha| \leq r$ el siguiente morfismo de A -módulos

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha : \mathcal{P}_{A|k}^r &\longrightarrow A \\ \overline{T}^\beta &\longmapsto \Gamma^\alpha(\overline{T}^\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \alpha \\ 0 & \text{si } \beta \neq \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, $\{\Gamma^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}$ forma una base de $\text{Hom}(\mathcal{P}_{A|k}^r, A)$ y, aplicando el diagrama conmutativo (3.3.5.1), concluimos que

$$\{\Gamma^\alpha \circ \text{d}_{A|k}^r\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}$$

es una base de $\text{Diff}_{A|k}^r$. De hecho, como

$$\text{d}_{A|k}^r(X^\beta) = (\text{d}_{A|k}^r(X))^\beta = (X + T)^\beta = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} X^{\beta-\gamma} T^\gamma,$$

donde $\binom{\beta}{\gamma} = \prod_{i=1}^d \binom{\beta_i}{\gamma_i}$, tenemos que

$$\Gamma^\alpha(\text{d}_{A|k}^r(X^\beta)) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} X^{\beta-\gamma} \Gamma^\alpha(T^\gamma) = \binom{\beta}{\alpha} X^{\beta-\alpha}.$$

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

Por lo tanto, la base hallada se corresponde con los coeficientes del morfismo de Taylor de grado $\leq r$ definidos en (3.1.1.1):

$$\{\Delta^\alpha = \Gamma^\alpha \circ d_{A|k}^r\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}.$$

A continuación enumeramos algunas de las propiedades de los operadores diferenciales.

Propiedades 3.3.7. Sean k un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra.

(1) [30, Cap. IV, Proposición (16.8.4)] De la definición se obtiene el siguiente isomorfismo de \mathcal{B} -módulos:

$$\text{Hom}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r, \mathcal{B}) \simeq \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r.$$

(2) Sea $S \subset \mathcal{B}$ un conjunto multiplicativo,

$$S^{-1} \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r = \text{Diff}_{\mathcal{B}_S|k}^r.$$

(3) [30, Cap. IV, Párrafo (16.8.5)] $\text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$ hereda la estructura de \mathcal{B} -bimódulo de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r$:

$$(b \cdot D)(t) = b(D(t)) \quad \text{y} \quad (D \cdot b)(t) = D(bt),$$

para cualquier $D \in \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$ y para cualesquiera $b, t \in \mathcal{B}$. En otras palabras,

$$b \cdot D = \mu_b \circ D \quad \text{y} \quad D \cdot b = D \circ \mu_b,$$

para cualquier $D \in \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$ y para cualquier $b \in \mathcal{B}$, donde $\mu_b : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ denota la “multiplicación por b ”.

(4) [30, Cap. IV, Proposición (16.8.8) b)] Sean $D \in \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$ y $b \in \mathcal{B}$, entonces

$$D(b \cdot) - b(D(\cdot)) \in \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^{r-1}.$$

(5) [30, Cap. IV, Proposición (16.8.8) c)] Sea $D \in \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$ y sean $b_1, \dots, b_{r+1} \in \mathcal{B}$. Se tiene que

$$\sum_{H \subset I_{r+1}} (-1)^{|H|} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) D \left(\prod_{i \notin H} b_i \right) = 0,$$

donde $I_{r+1} = \{1, 2, \dots, r+1\} \subset \mathbb{N}$. Esta igualdad es equivalente a la conocida *regla de Leibniz*:

$$D \left(\prod_{i=1}^{r+1} b_i \right) = \sum_{\substack{H \subset I_{r+1} \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{|H|+1} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) D \left(\prod_{i \notin H} b_i \right).$$

Demostración.

(2) Tenemos los siguientes isomorfismos:

$$S^{-1} \text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r \stackrel{\text{Propiedad (1)}}{\cong} S^{-1} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r, \mathcal{B}) \stackrel{[26, \text{Cap. 0, Párrafo (1.3.5)]}}{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{B}_S}(S^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r, \mathcal{B}_S) \\ \stackrel{\text{Proposición 3.3.4}}{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{B}_S}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_S|k}^r, \mathcal{B}_S) \stackrel{\text{Propiedad (1)}}{\cong} \text{Diff}_{\mathcal{B}_S|k}^r.$$

(5) Al ser D un operador diferencial de orden $\leq r$, existe un morfismo $\Gamma : \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r \longrightarrow \mathcal{B}$ de \mathcal{B} -módulos tal que $D = \Gamma \circ d_{\mathcal{B}|k}^r$ (véase la Definición 3.3.5).

Por otro lado, observamos que en $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}/I^{r+1}$

$$0 = (1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1) \cdots (1 \otimes b_{r+1} - b_{r+1} \otimes 1) = \sum_{H \subset I_{r+1}} (-1)^{|H|} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) \otimes \left(\prod_{i \notin H} b_i \right).$$

Aplicando el morfismo Γ al elemento nulo vemos que

$$0 = \Gamma(0) = \Gamma \left(\sum_{H \subset I_{r+1}} (-1)^{|H|} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) \otimes \left(\prod_{i \notin H} b_i \right) \right) = \\ \sum_{H \subset I_{r+1}} (-1)^{|H|} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) \Gamma \left(1 \otimes \left(\prod_{i \notin H} b_i \right) \right) = \sum_{H \subset I_{r+1}} (-1)^{|H|} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) D \left(\prod_{i \notin H} b_i \right).$$

Para terminar, la regla de Leibniz se obtiene separando el término en el que $H = \emptyset$:

$$D \left(\prod_{i \in I_{r+1}} b_i \right) = \sum_{\substack{H \subset I_{r+1} \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{|H|+1} \left(\prod_{i \in H} b_i \right) D \left(\prod_{i \notin H} b_i \right).$$

□

Terminamos este apartado considerando k -álgebras de tipo finito y esquemas separados también de tipo finito.

Propiedad 3.3.8. [30, Cap. IV, Corolario (16.4.22)] Sea B una k -álgebra de tipo finito. Entonces $\mathcal{P}_{B|k}^r$ y $\text{Diff}_{B|k}^r$ son B -módulos finitamente generados.

Si V es un esquema separado de tipo finito sobre k , el morfismo diagonal $V \longrightarrow V \times V$ es una inmersión cerrada y $\mathcal{P}_{V|\text{Spec}(k)}^r$ y $\text{Diff}_{V|\text{Spec}(k)}^r$ son haces coherentes.

3.3.3. Lisitud diferencial para álgebras

En esta sección estableceremos la relación que existe entre un álgebra diferencialmente lisa sobre un anillo k (véase la Definición 3.3.11) y sus módulos de operadores diferenciales de orden acotado. Este resultado se encuentra en el Teorema 3.3.13.

A lo largo de esta sección k denotará un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra (no necesariamente de tipo finito).

Observación 3.3.9. Sean k un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra. Denotamos por I al núcleo del morfismo sobreyectivo $\mu : \mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$. Se denomina *anillo graduado asociado a μ* a la siguiente \mathcal{B} -álgebra:

$$\mathrm{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}) := \underbrace{(\mathcal{B} \otimes \mathcal{B})/I}_{\mathcal{B}} \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}.$$

Por la propiedad universal del álgebra simétrica[§], $\mathbb{S}(\Omega_{\mathcal{B}|k}^1)$, el siguiente morfismo de \mathcal{B} -módulos

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 = I/I^2 &\longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}) \\ \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} &\longmapsto \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} \quad \text{en grado 1} \end{aligned}$$

se extiende de forma natural a un morfismo sobreyectivo de \mathcal{B} -álgebras:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}(\Omega_{\mathcal{B}|k}^1) &\longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}) \\ \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} &\longmapsto \overline{1 \otimes b - b \otimes 1} \quad \text{en grado 1,} \end{aligned} \tag{3.3.9.1}$$

donde para los generadores del \mathcal{B} -módulo $\left[\mathbb{S}(\Omega_{\mathcal{B}|k}^1) \right]_n$ queda extendido del siguiente modo:

$$\Phi \left(\overline{1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1} \cdots \overline{1 \otimes b_n - b_n \otimes 1} \right) = \overline{\prod_{i=1}^n (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)} \in I^n/I^{n+1}.$$

Proposición 3.3.10. Si $\{d(b_\lambda) = \overline{1 \otimes b_\lambda - b_\lambda \otimes 1}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un sistema de generadores de $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$, entonces el siguiente conjunto es un sistema de generadores de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r$:

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^{r+1}} \right\}_{0 \leq n \leq r},$$

donde el producto de cero elementos representa el elemento $1 \otimes 1 \pmod{I^{r+1}}$.

[§]Si M es un R -módulo, el par $(\mathbb{S}(M), \Theta : M \longrightarrow \mathbb{S}(M))$ satisface la siguiente propiedad universal: Para cualquier R -álgebra (conmutativa) C y para cualquier morfismo de R -módulos $\phi : M \longrightarrow C$ existe un único morfismo de R -álgebras $\Phi : \mathbb{S}(M) \longrightarrow C$ tal que $\phi = \Phi \circ \Theta$.

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ÁLGEBRAS

Demostración. Recordamos que Φ es sobreyectivo. Luego, los productos de la forma

$$\overline{\prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1)} \equiv \prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^{n+1}} \quad (3.3.10.1)$$

generan el \mathcal{B} -módulo I^n/I^{n+1} .

Para construir un sistema de generadores de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r$ utilizamos un proceso de inducción observando que $I^n/I^{n+1} \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}/I^{n+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^n$ y que el morfismo p_n es sobreyectivo:

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^n \xrightarrow{p_n} \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Si $r = 0$, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^0 = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}/I \simeq \mathcal{B}$ está generado, por ejemplo, por el elemento $\overline{1 \otimes 1} = 1$.

Si $r = 1$, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^1 = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}/I^2$ y utilizando el morfismo sobreyectivo p_1 :

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^1 \xrightarrow{p_1} \mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^0 = \mathcal{B} \longrightarrow 0,$$

tenemos que

$$\{1 \otimes 1 \pmod{I^2}\} \cup \{1 \otimes b_\lambda - b_\lambda \otimes 1 \pmod{I^2}\}_{\lambda \in \Lambda}$$

es un sistema de generadores. (Observamos que el elemento del conjunto de la izquierda es una preimagen por p_1 de 1 (el generador que hemos escogido para $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^0 = \mathcal{B}$) y los elementos del conjunto de la derecha forman el sistema de generadores de I/I^2 escrito en (3.3.10.1) con $n = 1$).

Si por hipótesis de inducción

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^r} \right\}_{0 \leq n \leq r-1} \quad (3.3.10.2)$$

es un sistema de generadores de $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^{r-1}$, entonces

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^{r+1}} \right\}_{0 \leq n \leq r-1} \cup \left\{ \prod_{i=1}^r (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^{r+1}} \right\}$$

genera $\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k}^r$, donde observamos que cada elemento del conjunto de la izquierda es la preimagen de un elemento del conjunto (3.3.10.2), ya que

$$p_r \left(\prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^{r+1}} \right) \equiv \prod_{i=1}^n (1 \otimes b_{\lambda_i} - b_{\lambda_i} \otimes 1) \pmod{I^r},$$

y el conjunto de la derecha forma el sistema de generadores de I^r/I^{r+1} escrito en (3.3.10.1). □

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

Definición 3.3.11. [30, Cap. IV, Definición (16.10.1)] Sean k un anillo y \mathcal{B} una k -álgebra. Se dice que \mathcal{B} es *diferencialmente lisa sobre k* si satisface las siguientes dos condiciones:

- (1) $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1 = I/I^2$ es un \mathcal{B} -módulo proyectivo y
- (2) el morfismo sobreyectivo de \mathcal{B} -álgebras

$$\Phi: \mathbb{S}(\Omega_{\mathcal{B}|k}^1) \longrightarrow \text{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}|k})$$

definido en (3.3.9.1) es biyectivo.

Propiedad 3.3.12. Si \mathcal{B} es una álgebra diferencialmente lisa sobre k y $S \subset \mathcal{B}$ es un conjunto multiplicativo, entonces \mathcal{B}_S es también una álgebra diferencialmente lisa sobre k .

Demostración. Vamos a probar que \mathcal{B}_S satisface las dos condiciones de la Definición 3.3.11:

- (1) Si $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$ es un \mathcal{B} -módulo proyectivo, $\Omega_{\mathcal{B}_S|k}^1 = \Omega_{\mathcal{B}|k}^1 \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}_S$ también es proyectivo, ya que los módulos proyectivos son sumandos directos de módulos libres y esta propiedad se preserva por localización.
- (2) Observamos que $\Phi_{\mathcal{B}_S}: \mathbb{S}(\Omega_{\mathcal{B}_S|k}^1) \longrightarrow \text{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{B}_S|k})$ es un isomorfismo por la propiedad de buena localización de los términos involucrados (los dos anillos y el morfismo).

□

Teorema 3.3.13. [30, Cap. IV, Teorema (16.11.2)] Sean \mathcal{B} una k -álgebra y $\{z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de elementos de \mathcal{B} tales que $\{d(z_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ genera $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) \mathcal{B} es diferencialmente liso sobre k y $\{d(z_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una base de $\Omega_{\mathcal{B}|k}^1$.
- (2) Existe una familia $\{D^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{|\Lambda|}}$ de operadores diferenciales de \mathcal{B} en sí mismo verificando, para $\beta \in \mathbb{N}^{|\Lambda|}$ las siguientes expresiones

$$D^\alpha(z^\beta) = \begin{cases} \binom{\beta}{\alpha} z^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta \geq \alpha \text{ (en todas las componentes)} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.3.13.1)$$

Además, cuando estas condiciones se verifican se tiene que

- (a) la familia $\{D^\alpha\}$ está determinada de forma única por las condiciones (3.3.13.1) y satisface las relaciones

$$D^\alpha \circ D^\gamma = D^\gamma \circ D^\alpha = \frac{(\alpha + \gamma)!}{\alpha! \gamma!} D^{\alpha+\gamma} \quad \text{donde } \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d! \quad \text{y}$$

(b) si Λ es finito, entonces para todo entero r , $\{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}$ es una base del \mathcal{B} -módulo $\text{Diff}_{\mathcal{B}|k}^r$, o dicho de otro modo, cualquier operador diferencial, D , de orden $\leq r$ sobre \mathcal{B} , se puede escribir de una única forma como

$$D = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq r} b_\alpha D^\alpha \text{ donde } b_\alpha \in \mathcal{B}.$$

3.3.4. Construcción del módulo de operadores diferenciales de orden acotado

Vamos a trabajar con esquemas lisos sobre un cuerpo perfecto. Estudiaremos el módulo de operadores diferenciales de orden $\leq r$ localmente en un punto cerrado.

Estableceremos el *Criterio Jacobiano* que nos da una expresión matricial para caracterizar cuándo un subesquema es liso (véase el Teorema 3.3.23).

3.3.14. A lo largo de este apartado, si no se especifica lo contrario, mantendremos la siguiente notación:

k será un cuerpo perfecto, B una k -álgebra de tipo finito, $\mathfrak{m} \subset B$ un ideal maximal, $\kappa = B/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual (extensión finita y separable de k) e I será el núcleo del morfismo $\mu : B_{\mathfrak{m}} \otimes B_{\mathfrak{m}} \longrightarrow B_{\mathfrak{m}}$, donde $\mu(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$.

Además, supondremos que B es una k -álgebra lisa en \mathfrak{m} y que $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en el anillo local $B_{\mathfrak{m}}$.

Proposición 3.3.15. [30, Cap. IV, Proposición (17.15.5)] *Con las condiciones descritas arriba sin imponer que k sea perfecto, se tiene que*

$$B \text{ es lisa sobre } k \text{ en } \mathfrak{m} \iff \text{ existe un elemento } g \in B \setminus \mathfrak{m} \text{ tal que } B_g \text{ es diferencialmente lisa sobre } k.$$

Observación 3.3.16. Otro resultado vinculado con la proposición anterior es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{existe un elemento } g \in B \setminus \mathfrak{m} \text{ tal que} \\ &B_g \text{ es diferencialmente lisa sobre } k \iff B_{\mathfrak{m}} \text{ es diferencialmente lisa sobre } k. \end{aligned}$$

Demostración. Si B_g es diferencialmente lisa sobre k , $B_{\mathfrak{m}}$ también es diferencialmente lisa sobre k por la Propiedad 3.3.12.

Para probar el recíproco, suponemos que $B_{\mathfrak{m}}$ es diferencialmente lisa sobre k y vamos a buscar un elemento $g \in B \setminus \mathfrak{m}$ tal que B_g sea diferencialmente lisa sobre k .

(1) Observamos que como B es una k -álgebra de tipo finito, $\Omega_{B|k}^1$ es un módulo finitamente generado (véase la Observación 3.2.16(3)). Luego, el $B_{\mathfrak{m}}$ -módulo $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}}^1$ además de ser proyectivo es libre (véase [46, (3.G)]) y por lo tanto, existe un elemento $g_1 \in B \setminus \mathfrak{m}$ tal que $\Omega_{B_{g_1}|k}^1$ es libre y, en particular, proyectivo.

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

(2) Notamos que, $\mathbb{S}(\Omega_{B|k}^1)$ y $\text{gr}(\mathcal{P}_{B|k})$ son B -álgebras graduadas finitamente generadas (luego noetherianas) y recordamos que el morfismo B -álgebras graduadas Φ es sobreyectivo por construcción, luego la sucesión

$$0 \longrightarrow \ker(\Phi) \longrightarrow \mathbb{S}(\Omega_{B|k}^1) \xrightarrow{\Phi} \text{gr}(\mathcal{P}_{B|k}) \longrightarrow 0$$

es exacta y el ideal $\ker(\Phi)$ es finitamente generado, digamos por $\{f_1, \dots, f_s\}$. Al localizar esta sucesión en el ideal maximal $\mathfrak{m} \subset B$

$$0 \longrightarrow \ker(\Phi) \otimes_B B_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathbb{S}(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1) \xrightarrow{\Phi_{B_{\mathfrak{m}}}} \text{gr}(\mathcal{P}_{B_{\mathfrak{m}}|k}) \longrightarrow 0$$

se obtiene que $\ker(\Phi) \otimes_B B_{\mathfrak{m}} = 0$ (ya que por hipótesis $\Phi_{B_{\mathfrak{m}}}$ es un isomorfismo).

Así, para cada $i = 1, \dots, s$, se tiene que $f_i \otimes \frac{1}{1} \in \mathbb{S}(\Omega_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1)$ es nulo, luego existe un elemento $b_i \in B \setminus \mathfrak{m}$ tal que $b_i f_i = 0$ (en $\mathbb{S}(\Omega_{B|k}^1)$).

Tomando $g_2 = b_1 \cdots b_s$ vemos que $\ker(\Phi) \otimes_B B_{g_2} = 0$ y $\Phi_{B_{g_2}}$ es un isomorfismo.

Por lo tanto, $g = g_1 g_2$ satisface las propiedades que estábamos buscando, a saber, $\Omega_{B_g|k}^1$ es proyectivo (por ser la localización de un módulo proyectivo) y el morfismo Φ_{B_g} es un isomorfismo (por ser la localización de un isomorfismo). □

Definición 3.3.17. [53, Definición 1.2] Con la notación descrita en el Párrafo 3.3.14, el completado \mathfrak{m} -ádico de $B_{\mathfrak{m}}$, $\widehat{B_{\mathfrak{m}}}$, es isomorfo al anillo de series formales $\kappa[[z_1, \dots, z_d]]$ (ya que B es lisa sobre k en \mathfrak{m}). Sobre él definimos el *morfismo de Taylor*:

$$\begin{aligned} \text{Tay} : \kappa[[z_1, \dots, z_d]] &\longrightarrow \kappa[[z_1, \dots, z_d, T_1, \dots, T_d]] & (3.3.17.1) \\ f(z) &\longmapsto f(z + T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\alpha}(f(z)) T^{\alpha}. \end{aligned}$$

Cada *coeficiente de Taylor*, $\Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\alpha} : \widehat{B_{\mathfrak{m}}} \longrightarrow \widehat{B_{\mathfrak{m}}}$, será considerado como un operador diferencial sobre k , aunque por definición también lo es sobre κ .

Propiedades 3.3.18. Al igual que para el morfismo de Taylor sobre un anillo de polinomios (véase la Propiedad 3.1.2(1)), el morfismo de Taylor sobre el completado satisface las siguientes propiedades:

$$\text{Tay}(f + g) = \text{Tay}(f) + \text{Tay}(g) \quad \text{y} \quad \text{Tay}(f \cdot g) = \text{Tay}(f) \cdot \text{Tay}(g).$$

Desarrollando las series e igualando los coeficientes del mismo grado se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\alpha}(f + g) &= \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\alpha}(f) + \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\alpha}(g) \quad \text{y} \\ \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\alpha}(f \cdot g) &= \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha} \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\gamma_1}(f) \cdot \Delta_{\widehat{B_{\mathfrak{m}}}}^{\gamma_2}(g) \quad (\text{regla del producto}). \end{aligned} \quad (3.3.18.1)$$

Propiedad 3.3.19. En las condiciones descritas en el Párrafo 3.3.14,

$$\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha(B_m) \subset B_m.$$

I.e., cada $\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha$ define por restricción un operador diferencial sobre k en el anillo local B_m , que denotaremos por $\Delta_{B_m}^\alpha$.

Demostración. Como B_m es liso y $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros, entonces

- $\Omega_{B_m|k}^1 = I/I^2$ es libre de rango d y está generado por

$$\{dz_i = \overline{1 \otimes z_i - z_i \otimes 1}\}_{i=1, \dots, d}$$

(véase la Proposición 3.2.41) y

- B_m es diferencialmente liso sobre k , por la Proposición 3.3.15 y la Observación 3.3.16.

Luego el Teorema 3.3.13 afirma que existe una única familia de operadores diferenciales, digamos $\{\Delta_{B_m}^\alpha : B_m \rightarrow B_m\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$, satisfaciendo que

$$\Delta_{B_m}^\alpha(z^\beta) = \begin{cases} \binom{\beta}{\alpha} z^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta \geq \alpha \text{ (en todas las componentes)} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3.19.1)$$

Observamos que tal y cómo están definidos los coeficientes de Taylor, la familia $\{\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ tiene este mismo comportamiento al actuar sobre los elementos de la forma z^β . Luego, por unicidad,

$$\Delta_{\widehat{B}_m|k}^\alpha|_{B_m} = \Delta_{B_m}^\alpha.$$

□

A continuación presentamos y demostramos un resultado más débil del Teorema 3.3.13.

Proposición 3.3.20. *Fijadas las condiciones que hemos establecido en el Párrafo 3.3.14. Entonces el B_m -módulo de partes principales sobre k de orden $\leq r$, $\mathcal{P}_{B_m|k}^r$, es libre.*

Además,

$$\{\zeta^\beta = (1 \otimes z_1 - z_1 \otimes 1)^{\beta_1} \cdots (1 \otimes z_d - z_d \otimes 1)^{\beta_d} \pmod{I^{r+1}}\}_{0 \leq |\beta| \leq r} \quad (3.3.20.1)$$

es una base de $\mathcal{P}_{B_m|k}^r$, por lo que su base dual induce la familia

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{B_m}^\alpha : B_m \longrightarrow B_m \\ z^\beta \longmapsto \binom{\beta}{\alpha} z^{\beta-\alpha} \end{array} \right\}_{0 \leq |\alpha| \leq r},$$

que es una base de $\text{Diff}_{B_m|k}^r$.

Demostración. Veamos cómo las condiciones concretas del enunciado afectan a la construcción del sistema de generadores de $\mathcal{P}_{B_m|k}^r$ descrita en la Proposición 3.3.10.

Al ser B lisa sobre k en \mathfrak{m} , $\Omega_{B_m|k}^1$ es libre (de rango d) y

$$\{dz_i = 1 \otimes z_i - z_i \otimes 1 \pmod{I^2}\}_{1 \leq i \leq d}$$

es una base. Luego, el álgebra simétrica $\mathbb{S}(\Omega_{B_m|k}^1)$ es isomorfa al anillo de polinomios sobre B_m en d variables.

Ahora, como B_m es diferencialmente lisa (por la Proposición 3.3.15 y la Observación 3.3.16), el morfismo $\Phi : \mathbb{S}(\Omega_{B_m|k}^1) \longrightarrow \text{gr}(\mathcal{P}_{B_m|k})$ definido en (3.3.9.1) es un isomorfismo. Así pues, el álgebra $\text{gr}(\mathcal{P}_{B_m|k})$ también es isomorfa al anillo de polinomios en d variables con coeficientes en B_m . Por lo que $\mathcal{P}_{B_m|k}^r$ es isomorfo al B_m -módulo de polinomios en d variables con coeficientes en B_m de grado $\leq r$.

Para terminar observamos que en este caso concreto en la Proposición 3.3.10 se construye una base descomponiendo $\mathcal{P}_{B_m|k}^r$ en una cadena de submódulos:

$$0 \subset M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = \mathcal{P}_{B_m|k}^r,$$

donde $M_0 = B_m$ y $M_n = B \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \cdots \oplus I^n/I^{n+1}$ para cada $n = 1, \dots, r$. De este modo, la unión de las bases de cada uno de los cocientes $M_n/M_{n-1} \simeq I^n/I^{n+1}$ es la base descrita en la expresión (3.3.20.1). □

Observación 3.3.21. Manteniendo las condiciones descritas en el Párrafo 3.3.14, como $\Omega_{B_m|k}^1$ es un módulo libre y $\{d_{B_m|k}(z_1), \dots, d_{B_m|k}(z_d)\}$ es una base, existe un entorno afín de \mathfrak{m} , digamos $\text{Spec } B_g \subset \text{Spec } B$, donde

- (1) $\Omega_{B_g|k}^1$ sigue siendo libre (de rango d) y el conjunto $\{d_{B_g|k}(z_1), \dots, d_{B_g|k}(z_d)\}$ es una base de $\Omega_{B_g|k}^1$ y
- (2) el morfismo $\Phi_{B_g} : \mathbb{S}(\Omega_{B_g|k}^1) \longrightarrow \text{gr}(\mathcal{P}_{B_g|k})$ es un isomorfismo (ya que $(\Phi_{B_g})_{\mathfrak{m}} = \Phi_{B_m}$ es un isomorfismo).

Fijado este entorno afín, B_g es una k -álgebra diferencialmente lisa, por lo que usando un razonamiento análogo al realizado en la Proposición 3.3.20 se concluye que para cada $r \in \mathbb{N}$ el módulo $\text{Diff}_{B_g|k}^r$ es libre y que una base de este módulo es el conjunto

$$\{D^\alpha : B_g \longrightarrow B_g\}_{0 \leq |\alpha| \leq r},$$

donde cada D^α induce al localizar en B_m el operador $\Delta_{B_m}^\alpha : B_m \longrightarrow B_m$.

Comentarios 3.3.22.

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ÁLGEBRAS

(1) En la Proposición 3.3.20, el sistema regular de parámetros de B_m juega el mismo papel que las coordenadas del anillo de polinomios en el Ejemplo 3.3.6.

(2) Por construcción, si $r \leq \tilde{r}$, se tiene que

$$\{\Delta_{B_m}^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r} \subset \{\Delta_{B_m}^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq \tilde{r}} \quad \text{y} \quad \{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r} \subset \{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq \tilde{r}}.$$

(3) Si B es una álgebra lisa sobre k (i.e., lisa sobre k en todo punto cerrado) entonces para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $\text{Diff}_{B|k}^r$ es un módulo localmente libre.

Teorema 3.3.23 (Criterio Jacobiano). *Dadas las condiciones establecidas en el Párrafo 3.3.14. Sean $\frac{\partial}{\partial z_j} := \Delta_{B_m}^{e_j}$, para $j = 1, \dots, d$, los operadores diferenciales de orden ≤ 1 construidos a partir del sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_d\}$ en el Teorema 3.3.13(2). Recordamos que satisfacen*

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(z^\beta) = \Delta_{B_m}^{e_j}(z^\beta) = \begin{cases} \beta_j z^{\beta - e_j} & \text{si } \beta_j \geq 1, \\ 0 & \text{si } \beta_j = 0. \end{cases}$$

Entonces se tiene que un conjunto $\{f_1, \dots, f_r\} \subset \mathfrak{m}B_m$ forma parte de un sistema regular de parámetros en B_m si y sólo si la matriz jacobiana

$$\text{Jac}(f_1, \dots, f_r; z_1, \dots, z_d) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \frac{\partial f_r}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial z_d} \end{pmatrix}$$

tiene rango exactamente r .

Demostración. En la Proposición 3.2.41 vimos que, al ser $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros, se tiene que $\{dz_1, \dots, dz_d\}$ es una base del módulo libre $\Omega_{B_m|k}^1$. Para cada $i = 1, \dots, r$, escribimos $d(f_i)$ en esta base

$$d(f_i) = 1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 = a_{i1}dz_1 + \cdots + a_{id}dz_d \in \Omega_{B_m|k}^1.$$

Supongamos que $\{f_1, \dots, f_r\}$ forma parte de un sistema regular de parámetros en B_m , entonces de nuevo por la Proposición, el conjunto 3.2.41 $\{d(f_1), \dots, d(f_r)\}$ forma parte de una base de $\Omega_{B_m|k}^1$ y, en particular, los elementos $d(f_1), \dots, d(f_r)$ son linealmente independientes, es decir, la matriz $A = (a_{ij})$ tiene rango exactamente r .

Recíprocamente si la matriz A tiene rango r ($\leq d$) el conjunto $\{d(f_1), \dots, d(f_r)\}$ es linealmente independiente, por lo que $\{d(f_1) \otimes 1, \dots, d(f_r) \otimes 1\}$ también lo es y forma parte de una base del κ -espacio vectorial $\Omega_{B_m|k}^1 \otimes \kappa$ (donde $\kappa = B_m/\mathfrak{m}B_m$).

Por lo tanto, el isomorfismo δ que aparece en la segunda sucesión exacta fundamental (véase el Teorema 3.2.21)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}B_m/\mathfrak{m}^2B_m & \xrightarrow{\delta} & \Omega_{B_m|k}^1 \otimes \kappa \\ \bar{f} & \longmapsto & d_{B_m|k}f \otimes 1, \end{array}$$

muestra que los elementos $\overline{f_i} \in \mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2B_{\mathfrak{m}}$ forman parte de una base y por el lema de Nakayama $\{f_1, \dots, f_r\}$ forma parte de un conjunto de d generadores de $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ y, por tanto, de un sistema regular de parámetros en $B_{\mathfrak{m}}$.

Para terminar vamos a calcular la matriz A :

Recordamos que por la Proposición 3.3.20 los conjuntos

$$\{1 \otimes 1 \pmod{I^2}, 1 \otimes z_1 - z_1 \otimes 1 \pmod{I^2}, \dots, 1 \otimes z_d - z_d \otimes 1 \pmod{I^2}\} \text{ y}$$

$$\left\{ \text{Id}, \frac{\partial}{\partial z_1} = \Delta^{e_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_d} = \Delta^{e_d} \right\}$$

son bases de los módulos $\mathcal{P}_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$ y $\text{Diff}_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$, respectivamente.

Si observamos además que en $\mathcal{P}_{B_{\mathfrak{m}}|k}^1$

$$dz_j = 1 \otimes z_j - z_j \otimes 1 \pmod{I^2} \in I \pmod{I^2},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} f_i &= \Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{e_j}(f_i) = \Gamma^{e_j} \circ d^1(f_i) = \Gamma^{e_j}(1 \otimes f_i \pmod{I^2}) = \\ &= \Gamma^{e_j}(1 \otimes f_i - f_i \otimes 1 + f_i \otimes 1 \pmod{I^2}) = \Gamma^{e_j} \left(\sum_j a_{ij} dz_j + f_i \cdot (1 \otimes 1) \pmod{I^2} \right) = a_{ij}, \end{aligned}$$

por lo que $A = \text{Jac}(f_1, \dots, f_r; z_1, \dots, z_d)$. □

3.3.5. Operadores diferenciales y órdenes de ideales: generalización del Teorema 3.1.8

Comenzamos este capítulo fijando un ideal en el anillo de polinomios y estudiando el orden del mismo en los distintos maximales.

Este análisis se hizo en la Proposición 3.1.3 para anillos de polinomios sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. En el Teorema 3.1.8 se analizó el mismo problema sobre cuerpos perfectos.

En los teoremas 3.3.26 y 3.3.28 ampliaremos estos resultados para el caso de álgebras lisas sobre un cuerpo perfecto.

Definición 3.3.24. Sean k un cuerpo y B una k -álgebra de tipo finito. Dado un ideal $J \in B$, se define el *ideal saturado por la acción de los operadores diferenciales en B de orden $\leq r$ sobre J* , $\text{Diff}_{B|k}^r(J)$, como el ideal generado por el resultado de aplicar los operadores diferenciales de B sobre k de orden $\leq r$ sobre los elementos del ideal J ,

$$\text{Diff}_{B|k}^r(J) = \langle D(f) : D \in \text{Diff}_{B|k}^r, f \in J \rangle.$$

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ÁLGEBRAS

Observación 3.3.25. Si B es lisa sobre k en un punto cerrado \mathfrak{m} , y $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $B_{\mathfrak{m}}$, entonces podemos construir una base para el módulo de operadores diferenciales de orden $\leq r$ sobre k en $B_{\mathfrak{m}}$, que denotamos por $\{\Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}$ (véase la Proposición 3.3.20), con lo que

$$\text{Diff}_{B_{\mathfrak{m}}|k}^r(J_{\mathfrak{m}}) = \langle \Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}(f) : 0 \leq |\alpha| \leq r, f \in J \rangle. \quad (3.3.25.1)$$

Recordamos que por la Observación 3.3.21 existe un anillo, B_g , donde los operadores de esta base se puede extender conservando la propiedad de formar una base de los operadores diferenciales de orden $\leq r$. Si llamamos a estos operadores D^{α} tenemos que

$$\text{Diff}_{B_g|k}^r(J_g) = \langle D^{\alpha}(f) : 0 \leq |\alpha| \leq r, f \in J_g \rangle.$$

Además, como los operadores $\Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}$ son las restricciones de los coeficientes del morfismo de Taylor en el anillo local $B_{\mathfrak{m}}$ (véase la Propiedad 3.3.19), tanto los $\Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}$ como los D^{α} heredan las Propiedades 3.3.18, lo que implica que si $J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ tenemos las siguientes descripciones:

$$\text{Diff}_{B_{\mathfrak{m}}|k}^r(J_{\mathfrak{m}}) = \langle \Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}(f_i) : 0 \leq |\alpha| \leq r, i = 1, \dots, s \rangle \quad \text{y} \quad (3.3.25.2)$$

$$\text{Diff}_{B_g|k}^r(J_g) = \langle D^{\alpha}(f_i) : 0 \leq |\alpha| \leq r, i = 1, \dots, s \rangle. \quad (3.3.25.3)$$

Por lo tanto, al menos localmente, tenemos un conjunto finito de generadores de $\text{Diff}_{B|k}^r(J)$.

A continuación presentamos los teoremas 3.3.26 y 3.3.28, que son dos generalizaciones del Teorema 3.1.8 a las k -álgebras lisas sobre un cuerpo perfecto.

Teorema 3.3.26. Sean k un cuerpo perfecto, B una k -álgebra lisa y $J \subset B$ un ideal. Para cualquier maximal \mathfrak{m} conteniendo a J , se tiene que

$$\text{Diff}_{B|k}^{b-1}(J) \subset \mathfrak{m} \Leftrightarrow J_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}^b B_{\mathfrak{m}},$$

i.e., los puntos cerrados de $V(\text{Diff}_{B|k}^{b-1}(J))$ son los puntos cerrados en los que J tiene orden mayor o igual que b .

Demostración. Esta prueba está dividida en dos pasos. Primero veremos que el resultado que queremos probar es equivalente a que se satisfaga este resultado análogo en el anillo completo $\widehat{B}_{\mathfrak{m}}$:

$$\text{Diff}_{\widehat{B}_{\mathfrak{m}}|k}^{b-1}(J_{\mathfrak{m}} \widehat{B}_{\mathfrak{m}}) \subset \mathfrak{m} \widehat{B}_{\mathfrak{m}} \Leftrightarrow J_{\mathfrak{m}} \widehat{B}_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}^b \widehat{B}_{\mathfrak{m}}, \quad (3.3.26.1)$$

y luego probaremos que este resultado equivalente se verifica.

Supongamos que $\dim_{K_{\text{rull}}} B_{\mathfrak{m}} = d$ y que $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $B_{\mathfrak{m}}$. Así, $\widehat{B}_{\mathfrak{m}} = \kappa[[z_1, \dots, z_d]]$ donde $\kappa = B/\mathfrak{m}$.

Sean $\{\Delta_{\widehat{B}_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ los coeficientes de Taylor definidos sobre $\widehat{B}_{\mathfrak{m}}$ y $\{\Delta_{B_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ sus restricciones a $B_{\mathfrak{m}}$.

Paso al completado: Observamos que

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{\widehat{B}_m|k}^{b-1}(J_m \widehat{B}_m) &= \langle \Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha(f) : 0 \leq |\alpha| \leq b-1, f \in J_m \rangle \\ &\stackrel{\text{Propiedad 3.3.19}}{=} \langle \Delta_{B_m}^\alpha(f) : 0 \leq |\alpha| \leq b-1, f \in J_m \rangle \widehat{B}_m = \text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}(J_m) \widehat{B}_m, \end{aligned} \quad (3.3.26.2)$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{B|k}^{b-1}(J) &\subset \mathfrak{m} \\ \Downarrow \text{Propiedad 3.3.7(2)} & \\ \text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}(J_m) &\subset \mathfrak{m} B_m \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \widehat{B}_m \text{ es fielmente plano sobre } B_m \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} (3.3.26.2) + \\ \text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}(J_m) \widehat{B}_m \subset \mathfrak{m} \widehat{B}_m \end{array}$$

y

$$J_m \subset \mathfrak{m}^b B_m \quad \widehat{B}_m \text{ es fielmente plano sobre } B_m \quad \Leftrightarrow \quad J_m \widehat{B}_m \subset \mathfrak{m}^b \widehat{B}_m.$$

Prueba de (3.3.26.1): Es suficiente con probar que para un elemento $f \in J_m$:

$$\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha(f) \in \mathfrak{m} \widehat{B}_m \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq b-1 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}^b \widehat{B}_m.$$

Si consideramos a $f \in J_m$ como un elemento de \widehat{B}_m , podemos expresarlo del siguiente modo

$$f = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} b_\beta z^\beta.$$

Luego, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^d$ satisfaciendo $0 \leq |\alpha| \leq b-1$ se tiene que

$$\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha(f(z)) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} b_{i\beta} \Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha(z^\beta) = \sum_{\beta \geq \alpha} b_\beta \binom{\beta}{\alpha} z^{\beta-\alpha} \equiv b_\alpha \pmod{\mathfrak{m} \widehat{B}_m},$$

por lo que

$$\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha(f) \in \mathfrak{m} \widehat{B}_m \text{ para todo } |\alpha| \leq b-1 \Leftrightarrow b_\beta = 0 \text{ para todo } |\beta| \leq b-1 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{m}^b \widehat{B}_m. \quad \square$$

Antes de enunciar el siguiente resultado que generaliza el teorema que acabamos de ver a puntos no necesariamente cerrados, presentamos el siguiente lema que será utilizado después.

Lema 3.3.27. Sean k un cuerpo y R una k -álgebra lisa. Para cualquier ideal primo \mathfrak{p} , se tiene que

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} \text{ maximal}} \mathfrak{m} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} \text{ maximal t. q.} \\ \mathfrak{p}_m \text{ primo regular en } R_m}} \mathfrak{m}. \quad \spadesuit$$

Además, si $I \subset R$ es un ideal se tiene que $I \subset \mathfrak{p}$ si y solo si $I_m \subset \mathfrak{m}_m$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ tal que \mathfrak{p}_m es un primo regular en R_m .

[¶]Recordamos que $\mathfrak{p}_m \subset R_m$ es un primo regular si R_m/\mathfrak{p}_m es un anillo local regular (véase la Definición 1.1.9).

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ÁLGEBRAS

Demostración. Si \mathfrak{p} es un ideal maximal no hay nada que probar. Comenzamos observando que se tienen las siguientes inclusiones:

$$\mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} \text{ maximal}} \mathfrak{m} \subset \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p} \text{ maximal t. q.} \\ \mathfrak{p}_m \text{ primo regular en } R_m}} \mathfrak{m}.$$

Ahora vamos a probar que las inclusiones no pueden ser estrictas. Sea \mathfrak{q} la intersección de la derecha y supongamos que existe un elemento $f \in R$ tal que $f \in \mathfrak{q}$ y $f \notin \mathfrak{p}$.

En estas condiciones construimos el dominio $R' = R/\mathfrak{p}$ y notamos que sus ideales maximales están en correspondencia 1-1 con los maximales de R que contienen a \mathfrak{p} .

Después construimos el dominio R'_f , donde los ideales maximales se corresponden con ideales maximales de R que contienen a \mathfrak{p} en los que \mathfrak{p}_m no es un primo regular en R_m . Por lo tanto, el conjunto de puntos regulares $\text{Reg}(R'_f) \subset \text{Spec}(R'_f)$ es vacío.

Esto es una contradicción porque para cualquier dominio (noetheriano) C , el conjunto de punto regulares, $\text{Reg } C \subset \text{Spec } C$, es un abierto no vacío (véase [46, (32.B)]). Luego, tal f no existe y $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Para terminar veremos que $I \subset \mathfrak{p}$ si I es un ideal en R con la propiedad que de

$$I_m \subset \mathfrak{m}_m \text{ para todo maximal } \mathfrak{m} \text{ tal que } \mathfrak{p}_m \subset R_m \text{ es un primo regular.}$$

Observamos que en cada localización $R \longrightarrow R_m$ donde \mathfrak{m} es ideal maximal que contiene a \mathfrak{p} se tiene que

$$I_m \subset \mathfrak{m}_m \Rightarrow I \subset I_m \cap R \subset \mathfrak{m}_m \cap R = \mathfrak{m},$$

con lo que

$$I \subset \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}, \text{ maximal} \\ \mathfrak{p}_m \text{ primo regular en } R_m}} \mathfrak{m} = \mathfrak{p}.$$

□

Teorema 3.3.28. Sean k un cuerpo perfecto, B una k -álgebra lisa y $J \subset B$ un ideal. En estas condiciones se tiene que

$$V(\text{Diff}_{B|k}^{b-1}(J)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } B : \nu_{\mathfrak{p}}(J) \geq b\}.$$

Demostración. Vamos a probar que para cualquier ideal primo \mathfrak{p} de B se cumple que

$$\text{Diff}_{B|k}^{b-1}(J) \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow J_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}^b B_{\mathfrak{p}}. \quad (3.3.28.1)$$

Observamos que el caso en el que \mathfrak{p} es un ideal maximal está tratado en el Teorema 3.3.26.

(1) Veamos que (3.3.28.1) es equivalente a que se satisfaga el siguiente enunciado

$$\text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}(J_m) \subset \mathfrak{p}_m \Leftrightarrow J_m \subset \mathfrak{p}_m^b B_m, \quad (3.3.28.2)$$

para todo ideal maximal $m \supset \mathfrak{p}$ con la propiedad de que \mathfrak{p}_m es regular en B_m .

Por un lado, el Lema 3.3.27 y la Propiedad 3.3.7(2) implican que

$$\text{Diff}_{B|k}^{b-1}(J) \subset \mathfrak{p} \text{ si y sólo si } \text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}(J_m) \subset \mathfrak{p}_m \text{ para todo } m \text{ tal que } \mathfrak{p}_m \text{ regular en } B_m.$$

Y por el otro lado, sea m un ideal maximal que contiene a \mathfrak{p} y supongamos que $\mathfrak{p}_m \subset B_m$ es un primo regular**.

■ Si $J_p \subset \mathfrak{p}^b B_p$ se tiene que

$$J_m \subset (J_m)B_p \cap B_m = J_p \cap B_m \subset \mathfrak{p}^b B_p \cap B_m = (\mathfrak{p}^b B_m)B_p \cap B_m \stackrel{\text{Proposición 1.1.12}}{=} \mathfrak{p}^b B_m \quad \text{y}$$

■ el recíproco también es cierto: si $J_m \subset \mathfrak{p}^b B_m$ entonces

$$J_p = (J_m)B_p \subset (\mathfrak{p}^b B_m)B_p = \mathfrak{p}^b B_p.$$

(2) Ahora, fijamos m un ideal maximal satisfaciendo que $m \supset \mathfrak{p}$ y que \mathfrak{p}_m es un primo regular en B_m . Vamos a probar que la doble implicación (3.3.28.2) es equivalente a que

$$\text{Diff}_{\widehat{B}_m|k}^{b-1}(J_m \widehat{B}_m) \subset \mathfrak{p}_m \widehat{B}_m \Leftrightarrow J_m \widehat{B}_m \subset \mathfrak{p}_m^b \widehat{B}_m. \quad (3.3.28.3)$$

Sea $\{y_1, \dots, y_e, z_{e+1}, \dots, z_d\}$ un sistema regular de parámetros en B_m de modo que $\mathfrak{p}_m = \langle z_{e+1}, \dots, z_d \rangle$. Sea

$$\left\{ \Delta_{\widehat{B}_m|k}^{(\alpha', \alpha'')} : \widehat{B}_m \longrightarrow \widehat{B}_m \right\}_{0 \leq |(\alpha', \alpha'')| \leq b-1}$$

una base de $\text{Diff}_{\widehat{B}_m|k}^{b-1}$ construida a partir de este sistema regular de parámetros según la expresión (3.3.17.1), y sea

$$\left\{ \Delta_{B_m|k}^{(\alpha', \alpha'')} = \Delta_{\widehat{B}_m|k}^{(\alpha', \alpha'')} |_{B_m} \right\}_{0 \leq |(\alpha', \alpha'')| \leq b-1}$$

el conjunto de las restricciones de estos operadores a B_m , que por la Propiedad 3.3.19 y la Proposición 3.3.20 forma una base de $\text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}$.

Como la expresión (3.3.26.2) es válida en este contexto y \widehat{B}_m es fielmente plano sobre B_m se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Diff}_{B_m|k}^{b-1}(J_m) \subset \mathfrak{p}_m & \text{ si y sólo si } \text{Diff}_{\widehat{B}_m|k}^{b-1}(J_m \widehat{B}_m) \subset \mathfrak{p}_m \widehat{B}_m \quad \text{y} \\ J_m \subset \mathfrak{p}^b B_m & \text{ si y sólo si } J_m \widehat{B}_m \subset \mathfrak{p}^b \widehat{B}_m. \end{aligned}$$

**Recordamos que la noción de primo regular se formula en anillos locales regulares y B_m lo es ya que B es lisa sobre k en m (véase el Teorema 3.2.39(1)).

3.3. OPERADORES DIFERENCIALES SOBRE ÁLGEBRAS

(3) Para terminar probamos el enunciado (3.3.28.3) viendo que para cualquier $g \in J_m \widehat{B}_m$

$$\text{Diff}_{\widehat{B}_m|k}^{b-1}(g) \subset \mathfrak{p}_m \widehat{B}_m \Leftrightarrow g \in \mathfrak{p}_m^b \widehat{B}_m :$$

Escribimos $g \in J_m \widehat{B}_m$ como

$$g = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^e \\ \beta'' \in \mathbb{N}^{d-e}}} b_{\beta', \beta''} y^{\beta'} z^{\beta''}$$

\Leftarrow : Supongamos que $g \in \mathfrak{p}_m^b \widehat{B}_m$. En este caso,

$$g = \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^e \\ |\beta''| \geq b}} b_{\beta', \beta''} y^{\beta'} z^{\beta''} \quad \text{y} \quad \Delta_{\widehat{B}_m}^{(\alpha', \alpha'')}(g) = \sum_{\substack{\beta' \geq \alpha' \\ |\beta''| \geq b \\ \beta'' \geq \alpha''}} \binom{\beta'}{\alpha'} \binom{\beta''}{\alpha''} b_{\beta', \beta''} y^{\beta' - \alpha'} z^{\beta'' - \alpha''},$$

donde las desigualdades $\beta' \geq \alpha'$ y $\beta'' \geq \alpha''$ se deben satisfacer componente a componente. Observamos que si $|\alpha'| + |\alpha''| \leq b - 1$, en particular $|\alpha''| \leq b - 1$. Además, como $|\beta''| \geq b$ y $\beta''_i \geq \alpha''_i$ para $i = e + 1, \dots, d$, se tiene que

$$(\beta''_{e+1} - \alpha''_{e+1}) + (\beta''_2 - \alpha''_2) + \dots + (\beta''_d - \alpha''_d) \geq 1$$

por lo que al menos una componente de $\beta'' - \alpha''$ es positiva. Esto significa que

$$\Delta_{\widehat{B}_m}^{(\alpha', \alpha'')}(g) \in \mathfrak{p}_m \widehat{B}_m, \quad \text{si } 0 \leq |(\alpha', \alpha'')| = |\alpha'| + |\alpha''| \leq b - 1.$$

\Rightarrow : Supongamos ahora que $\text{Diff}_{\widehat{B}_m}^{b-1}(g) \subset \mathfrak{p}_m \widehat{B}_m = \langle z_{e+1}, \dots, z_d \rangle$. En particular, si $|\alpha''| \leq b - 1$,

$$\Delta_{\widehat{B}_m}^{(0, \alpha'')}(g) = \sum_{\beta' \in \mathbb{N}^e} b_{\beta', \alpha''} y^{\beta'} + \sum_{\substack{\beta' \in \mathbb{N}^{b-t} \\ \beta'' > \alpha''}} \binom{\beta''}{\alpha''} b_{\beta', \beta''} y^{\beta'} z^{\beta'' - \alpha''} \in \langle z_{e+1}, \dots, z_d \rangle,$$

por lo tanto, $b_{\beta', \beta''} = 0$ para $|\beta''| \leq b - 1$ luego,

$$g = \sum_{|\beta''| \geq b} \left(\sum_{\beta' \in \mathbb{N}^e} b_{\beta', \beta''} y^{\beta'} \right) z^{\beta''} \in \mathfrak{p}_m^b \widehat{B}_m.$$

□

Corolario 3.3.29. Sean k un cuerpo perfecto y B una k -álgebra lisa. La función orden del ideal J en B :

$$\begin{aligned} \nu(J) : \text{Spec } B &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \nu_{\mathfrak{q}}(J) = \max_{n \in \mathbb{N}} \{J_{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}^n B_{\mathfrak{q}}\}, \end{aligned}$$

es semi-continua superiormente, i.e. satisface las siguientes dos propiedades:

(1) la función toma sólo un número finito de valores y

(2) para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec } B : \nu_{\mathfrak{q}}(J) \geq n\}$ es cerrado en $\text{Spec } B$.

Demostración. Acabamos de ver que $\nu_{\mathfrak{q}}(J) = r$ si y sólo si $\mathfrak{q} \in \text{Diff}_{B|k}^{r-1}(J)$ y $\mathfrak{q} \notin \text{Diff}_{B|k}^{r-1}(J)$. Por lo tanto, el hecho de que la cadena ascendente de ideales

$$J \subset \text{Diff}^1(J) \subset \text{Diff}^2(J) \subset \dots$$

se estabilice implica que $\nu(J)$ alcanza un sólo un número finito de valores. \square

3.4. Morfismos lisos y morfismos étales

A continuación recordamos la definición de morfismo liso y algunas propiedades.

Definición 3.4.1. [31, III §10 Definición pág. 268] Sean X e Y dos esquemas de tipo finito sobre k . Un morfismo, $f : X \rightarrow Y$, se dice que *liso de dimensión relativa n* si

(1) f es plano,

(2) si $X' \subset X$ e $Y' \subset Y$ son componentes irreducibles tales que $f(X') \subset Y'$, entonces

$$\dim X' = \dim Y' + n \quad y$$

(3) para cada punto $x \in X$ (cerrado o no),

$$\dim_{k(x)} (\Omega_{X|Y}^1 \otimes k(x)) = n.$$

Definición 3.4.2. Un morfismo de esquemas de tipo finito sobre k , $f : X \rightarrow Y$, es *étale* si es liso de dimensión relativa 0.

Propiedades 3.4.3. [31, III Proposición 10.1]

(1) Una inmersión abierta es un morfismo étale.

(2) Si $\phi : X \rightarrow Y$ es liso de dimensión relativa n y $\varphi : Y' \rightarrow Y$ es cualquier morfismo, entonces el morfismo $\phi' : X' \rightarrow Y'$ obtenido por extensión de base es también un morfismo liso de dimensión relativa n .

(3) Si $\phi : X \rightarrow Y$ es liso de dimensión relativa n y $\psi : Y \rightarrow Z$ es liso de dimensión relativa m , entonces $\psi \circ \phi : X \rightarrow Z$ es liso de dimensión relativa $n + m$.

Teorema 3.4.4. *Sean X e Y esquemas lisos de tipo finito sobre un cuerpo perfecto k de dimensiones t y d respectivamente. Sea $\phi: X \rightarrow Y$ un morfismo liso. Sean $x \in X$ e $y = \phi(x) \in Y$ dos puntos cerrados y sea $\phi^*: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ el morfismo inducido. Si $\{z_1, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{Y,y}$ entonces $\{\phi^*(z_1), \dots, \phi^*(z_d)\}$ forma parte de un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Demostración. Del morfismo de k -álgebras $\phi^*: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ construimos la primera sucesión exacta fundamental (véase el Teorema 3.2.20):

$$\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{v} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|k}^1 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|\mathcal{O}_{Y,y}}^1 \longrightarrow 0. \quad (3.4.4.1)$$

Vamos a probar primero que v es inyectivo y que la sucesión escrita arriba escinde:

El $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|\mathcal{O}_{Y,y}}^1$ es libre de rango $t - d$ (véanse la Definición 3.4.1 y la Proposición 3.2.10), luego en particular es proyectivo y por tanto

$$\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|k}^1 \simeq \text{Im}(v) \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|\mathcal{O}_{Y,y}}^1.$$

Ahora $\text{Im}(v)$ es libre (por ser finitamente generado y un sumando directo de un módulo libre sobre un anillo local) de rango $t - (t - d) = d$. Observamos que $\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}^1$ también es libre de rango d , por lo que v es inyectivo y

$$\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|k}^1 \simeq \left(\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}^1 \otimes \mathcal{O}_{X,x} \right) \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|\mathcal{O}_{Y,y}}^1.$$

Terminamos viendo que $\{\phi^*(z_1), \dots, \phi^*(z_d)\}$ forma parte de un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{X,x}$:

Al ser $\{z_1, \dots, z_d\}$ un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{Y,y}$, el Criterio Jacobiano (enunciado en el Teorema 3.3.23) afirma que $\{d_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}(z_1), \dots, d_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}(z_d)\}$ es una base de $\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}^1$. Por lo tanto, el conjunto

$$\left\{ d_{\mathcal{O}_{X,x}|k}(\phi^*(z_1)), \dots, d_{\mathcal{O}_{X,x}|k}(\phi^*(z_d)) \right\}, \text{ donde cada } d_{\mathcal{O}_{X,x}|k}(\phi^*(z_i)) = v \left(d_{\mathcal{O}_{Y,y}|k}(z_i) \otimes 1 \right),$$

es una base para el sumando directo $\text{Im}(v)$ y forma parte de una base de $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|k}^1$. De nuevo por el Criterio Jacobiano concluimos que

$$\{\phi^*(z_1), \dots, \phi^*(z_d)\}$$

forma parte de un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{X,x}$. □

Terminamos esta sección mostrando otra definición equivalente de morfismo étale.

Definición 3.4.5. [48, pág. 22] Se dice que un morfismo de esquemas de tipo finito sobre k , $f: X \rightarrow Y$, es étale en x si satisface las siguientes dos propiedades:

CAPÍTULO 3. OPERADORES DIFERENCIALES

(1) $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ es plano y

(2) $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}|\mathcal{O}_{Y,f(x)}}^1 = (\Omega_{X|Y}^1)_x = 0$.

Notación 3.4.6. Utilizaremos la siguiente expresión $f : (X, x) \longrightarrow (Y, f(x))$ para indicar que el morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es étale en x .

Capítulo 4

Álgebras de Rees

En este capítulo, introducimos el concepto de álgebra de Rees. Como hemos visto en la introducción, estas álgebras juegan un papel muy relevante en la formulación de los distintos problemas de resolución de singularidades.

Estudiaremos el comportamiento de las álgebras de Rees al aplicar sobre ellas dos operaciones fundamentales: el *cierre entero* y la *saturación por operadores diferenciales*.

A lo largo de este capítulo, k denotará un cuerpo perfecto, B una k -álgebra de tipo finito (y por tanto excelente) y si no se especifica lo contrario V será un esquema liso sobre k .

4.1. Definición y ejemplos de álgebras de Rees

Definición 4.1.1. Sea B un anillo noetheriano y sea $\{I_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de ideales de B que satisface las siguientes dos propiedades:

- (1) $I_0 = B$ y
- (2) $I_k \cdot I_\ell \subset I_{k+\ell}$ para cualesquiera $k, \ell \in \mathbb{N}$.

El subanillo graduado $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ del anillo de polinomios $B[W]$ se dice que es una *B-álgebra de Rees*, o una álgebra de Rees sobre B , si es una B -álgebra de tipo finito.

Se denota por $[\mathcal{G}]_n$ a la parte homogénea de grado n del álgebra de Rees \mathcal{G} , con esta formulación $[\mathcal{G}]_n = I_n W^n$.

Observación 4.1.2. Una B -álgebra de Rees se puede describir dando un conjunto finito de generadores homogéneos. Si el conjunto $\{f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}\}$, con $f_i \in B$, genera \mathcal{G} como B -álgebra, escribimos

$$\mathcal{G} = B[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}] \subset B[W].$$

Así, un elemento homogéneo $g \in I_n$ se puede expresar de la forma $g = F_n(f_1, \dots, f_s)$ para algún polinomio homogéneo ponderado de grado n en s variables, $F_n(Y_1, \dots, Y_s)$, donde Y_i tiene peso n_i para cada $i = 1, \dots, s$.

Ejemplo 4.1.3. El *anillo de Rees de un ideal* $J \subset B$ es la B -álgebra de Rees que resulta de tomar la sucesión de ideales $\{J^n\}_{n \geq 0}$:

$$\mathcal{G} = B \oplus JW \oplus J^2W^2 \oplus J^3W^3 \oplus \dots = \bigoplus_{n \geq 0} J^n W^n = B[JW].$$

Ejemplo 4.1.4. Siguiendo la misma idea, también el álgebra graduada

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= B \oplus 0W \oplus \dots \oplus 0W^{b-1} \oplus JW^b \oplus 0W^{b+1} \oplus \dots \oplus 0W^{2b-1} \oplus J^2W^{2b} \oplus 0W^{2b+1} \oplus \dots \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} J^n W^{nb} = B[JW^b] \subset B[W] \end{aligned}$$

es una B -álgebra de Rees que llamaremos *casi-anillo de Rees*. También la denotaremos por $\mathcal{G}_{(J,b)}$.

Definición 4.1.5. Diremos que dos casi-anillos de Rees $B[JW^b]$ y $B[J'W^{b'}]$ tienen la misma graduación si $b = b'$.

Observación 4.1.6. Los casi-anillos de Rees se utilizarán para facilitar el estudio de la clausura entera de álgebras de Rees, como veremos en la Sección 4.2.

Observación 4.1.7. La noción de álgebra de Rees sobre un anillo se extiende a la de álgebra de Rees sobre un esquema V (no necesariamente liso sobre k):

Sea $\{I_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de haces de ideales sobre un esquema V tal que

- (1) I_0 es el haz estructural \mathcal{O}_V y
- (2) $I_k \cdot I_\ell \subset I_{k+\ell}$ para cualesquiera $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Entonces $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ define un haz de álgebras graduadas sobre V . Se dice que \mathcal{G} es una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees o una álgebra de Rees sobre V si existe un recubrimiento por abiertos afines $\{U_i\}$ de V donde

$$\mathcal{G}(U_i) = \bigoplus_{n \geq 0} I_n(U_i) W^n \subset \mathcal{O}_V(U_i)[W]$$

es una $\mathcal{O}_V(U_i)$ -álgebra de Rees en el sentido de la Definición 4.1.1, (i.e., si localmente es una álgebra finitamente generada).

4.1.1. Lugar singular, orden y conjunto de ceros de una álgebra de Rees

A continuación presentamos tres nociones que necesitamos para describir el problema de resolución en términos de álgebras de Rees. En las siguientes secciones veremos su comportamiento al considerar clausura entera de álgebras, o su saturación por operadores diferenciales.

4.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE ÁLGEBRAS DE REES

Definición 4.1.8. [54, Párrafo 1.2] Sean k un cuerpo perfecto y V un esquema liso sobre k . Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ un haz de \mathcal{O}_V -álgebras de Rees. Entonces el *lugar singular de \mathcal{G}* , $\text{Sing } \mathcal{G}$, es el siguiente conjunto cerrado de V :

$$\text{Sing } \mathcal{G} := \bigcap_{n > 0} \{x \in V : \nu_x(I_n) \geq n\},$$

donde $\nu_x(I_n)$ denota el *orden usual* de I_n en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V,x}$ (véase el Ejemplo 2.2.5).

Proposición 4.1.9. [22, Proposición 1.4] Si \mathcal{G} está generada por $\{f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}\}$ en un abierto afín $U \subset V$, entonces

$$\text{Sing } \mathcal{G} \cap U = \bigcap_{i=1}^s \{x \in U : \nu_x(f_i) \geq n_i\}. \quad (4.1.9.1)$$

Demostración. Comenzamos observando que el ideal $I_n(U)$ está generado por productos de la forma $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_s^{\alpha_s}$ donde $\sum_{i=1}^s \alpha_i n_i = n$. Luego

$$\begin{aligned} \nu_x(I_n(U)) &\stackrel{\text{Proposición 2.5.2(1)}}{=} \min \left\{ \nu_x(f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \cdots f_s^{\alpha_s}) : \sum_{i=1}^s \alpha_i n_i = n \right\} = \\ &\min \left\{ \sum_{i=1}^s \alpha_i \nu_x(f_i) : \sum_{i=1}^s \alpha_i n_i = n \right\} \geq \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{n}{n_i} \nu_x(f_i) \right\}. * \end{aligned} \quad (4.1.9.2)$$

Si suponemos que $x \in U$ es un punto donde $\nu_x(f_i) \geq n_i$ para cada $i = 1, \dots, s$ tenemos que $\nu_x(I_n(U)) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, $x \in \text{Sing}(\mathcal{G})$.

Recíprocamente, si $x \in \text{Sing } \mathcal{G}$ para cada generador, $f_i W^{n_i} \in [\mathcal{G}(U)]_{n_i} = I_{n_i}(U) W^{n_i}$, se tiene que

$$\nu_x(f_i) \geq \nu_x(I_{n_i}(U)) \geq n_i,$$

para $i = 1, \dots, s$. □

Definición 4.1.10. [22, Párrafo 6.3] Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ una álgebra de Rees en un esquema liso V , sea $x \in \text{Sing } \mathcal{G}$ y supongamos que $f W^n \in I_n W^n$ en un entorno abierto de x . Entonces definimos el *orden de $f W^n$ en x* como

$$\text{ord}_{f W^n}(x) = \frac{\nu_x(f)}{n} \in \mathbb{Q},$$

donde, como antes, $\nu_x(f)$ denota el orden usual de f en el anillo local regular $\mathcal{O}_{V,x}$.

*Puede ser una desigualdad estricta si $n\nu_x(f_j)$ no es múltiplo de n_j para el índice j donde se alcance el mínimo.

Ahora, definimos *orden de \mathcal{G} en un punto $x \in \text{Sing } \mathcal{G}$* como

$$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\}.$$

Observación 4.1.11. $\text{ord}_{fW^n}(x)$ y $\text{ord}_{\mathcal{G}}(x)$ son números mayores o iguales que 1 ya que están definidos sólo en el caso en que $x \in \text{Sing } \mathcal{G}$.

Proposición 4.1.12. *Si \mathcal{G} está generada por $\{f_1W^{n_1}, \dots, f_sW^{n_s}\}$ en un entorno abierto afín U de $x \in \text{Sing } \mathcal{G}$ entonces*

$$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) = \min_{1 \leq i \leq s} \{\text{ord}_{f_iW^{n_i}}(x)\}. \quad (4.1.12.1)$$

Si, además, L es un múltiplo común de $\{n_1, \dots, n_s\}$ entonces

$$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) = \frac{\nu_x(I_L)}{L}. \quad (4.1.12.2)$$

En particular, $\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$.

Demostración. Sea x un punto de $\text{Sing } \mathcal{G}$. Como $f_i \in I_{n_i}(U)$ tenemos que $\nu_x(I_{n_i}) \leq \nu_x(f_i)$, lo que implica que

$$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\} \leq \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{\nu_x(I_{n_i})}{n_i} \right\} \leq \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{\nu_x(f_i)}{n_i} \right\} = \min_{1 \leq i \leq s} \{\text{ord}_{f_iW^{n_i}}(x)\}.$$

La desigualdad recíproca se obtiene a partir de la cota calculada en (4.1.9.2):

$$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\} \geq \inf_{n \geq 1} \left\{ \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{n}{n_i} \nu_x(f_i) \right\} \right\} = \min_{1 \leq i \leq s} \{\text{ord}_{f_iW^{n_i}}(x)\}.$$

Para probar la segunda parte de la observación, vemos que para cualquier $L \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\frac{\nu_x(I_L)}{L} \geq \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\} = \text{ord}_{\mathcal{G}}(x),$$

y si, además, L es un múltiplo común de todos los n_i entonces $f_i^{L/n_i} \in I_L$ para todo $i = 1, \dots, s$, por lo que se satisface la desigualdad recíproca

$$\min_{1 \leq i \leq s} \{\text{ord}_{f_iW^{n_i}}(x)\} = \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{\nu_x(f_i)}{n_i} \right\} = \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{\nu_x(f_i^{L/n_i})}{L} \right\} \geq \frac{\nu_x(I_L)}{L}.$$

□

4.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS DE ÁLGEBRAS DE REES

Definición 4.1.13. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees. Se define el *conjunto de ceros de \mathcal{G}* , $V(\mathcal{G})$, como

$$V(\mathcal{G}) := \bigcap_{n \geq 1} V(I_n).$$

Observación 4.1.14. En general, $\text{Sing } \mathcal{G} \subsetneq V(\mathcal{G})$.

Por ejemplo, si $V = \text{Spec } k[Z, T]$ y $\mathcal{G} = k[Z, T][\langle Z^2 - T^3 \rangle W^2]$, se tiene que

$$V(\mathcal{G}) = \{Z^2 - T^3 = 0\} \subset \mathbb{A}_k^2$$

consiste en todos los puntos de la cúspide mientras que $\text{Sing } \mathcal{G}$ sólo es el origen.

Concretaremos ahora estas definiciones para casi-anillos de Rees definidos sobre V , un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k (la definición de casi-anillo de Rees se encuentra en el Ejemplo 4.1.4).

Ejemplo 4.1.15. Sea $J \subset \mathcal{O}_V$ un haz de ideales no nulo sobre V . Sea b un entero no nulo y sea $\mathcal{G}_{(J,b)} = \mathcal{O}_V[JW^b]$ el casi-anillo de Rees generado por J en grado b . La Proposición 2.5.2 implica que

$$(1) \text{Sing } \mathcal{G}_{(J,b)} = \bigcap_{n \geq 1} \{x \in V : \nu_x(J^n) \geq nb\} = \{x \in V : \nu_x(J) \geq b\},$$

$$(2) \text{ si } x \in \text{Sing } \mathcal{G}_{(J,b)} \text{ entonces } \text{ord}_{\mathcal{G}_{(J,b)}}(x) = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\nu_x(J^n)}{nb} \right\} = \frac{\nu_x(J)}{b} \text{ y}$$

$$(3) V(\mathcal{G}_{(J,b)}) = \bigcap_{n \geq 1} V(J^n) = V(J).$$

Ejemplo 4.1.16. Sean $\mathbb{H} \subset V$ una hipersuperficie y b un entero no negativo. Sea $\mathcal{G}_{(I(\mathbb{H}),b)} = \mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})W^b] (\subset \mathcal{O}_V[W])$ el casi-anillo de Rees generado por $I(\mathbb{H})$ en grado b . En este caso particular se tiene que

(1) el lugar singular de $\mathcal{G}_{(I(\mathbb{H}),b)}$ es el conjunto de puntos de multiplicidad al menos b de \mathbb{H} (que puede ser el conjunto vacío),

(2) el orden de $\mathcal{G}_{(I(\mathbb{H}),b)}$ en un punto que pertenece a su lugar singular es la multiplicidad de \mathbb{H} en ese punto dividida por b y

(3) el conjunto de ceros de $\mathcal{G}_{(I(\mathbb{H}),b)}$ es \mathbb{H} .

4.1.2. Operaciones sobre álgebras de Rees

Acción de Veronese

Definición 4.1.17. [55, Párrafo 2.3], [53, Expresión (4.3.1)]. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n \subset B[W]$ una B -álgebra de Rees. Dado un número natural M , se define la M -ésima acción de Veronese sobre \mathcal{G} como la B -álgebra de Rees

$$\mathbb{V}_M(\mathcal{G}) := \bigoplus_{n \geq 0} I_{Mn} W^{Mn}.$$

Proposición 4.1.18. La extensión $\mathbb{V}_M(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ es finita para cualquier elección de M . Por lo tanto, ambas álgebras poseen la misma clausura entera en $B[W]$.

Demostración. Recordamos que \mathcal{G} es una B -álgebra finitamente generada por elementos homogéneos, digamos $\mathcal{G} = B[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$. Como

$$(f_i W^{n_i})^M \in (I_{n_i})^M W^{n_i M} \subset I_{n_i M} W^{n_i M} \subset \mathbb{V}_M(\mathcal{G}),$$

vemos que los generadores de \mathcal{G} son enteros sobre $\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$. □

Amalgama de dos álgebras de Rees

Definición 4.1.19. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees. La amalgama de \mathcal{G} y \mathcal{K} , $\mathcal{G} \odot \mathcal{K}$, es la menor álgebra de Rees sobre V que contiene a ambas.

Proposición 4.1.20. Si en un abierto afín $\text{Spec } B \subset V$ se tiene que $\mathcal{G} = B[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$ y $\mathcal{K} = B[g_1 W^{m_1}, \dots, g_r W^{m_r}]$, entonces

$$\mathcal{G} \odot \mathcal{K} = B[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}, g_1 W^{m_1}, \dots, g_r W^{m_r}].$$

Proposición 4.1.21.

$$\text{Sing } \mathcal{G} \odot \mathcal{K} = \text{Sing } \mathcal{G} \cap \text{Sing } \mathcal{K}.$$

Demostración. Siguiendo con la notación de la Definición 4.1.19, la Proposición 4.1.9 establece que

$$\begin{aligned} \text{Sing } (\mathcal{G} \odot \mathcal{K}) = & \left(\bigcap_{i=1}^s \{x \in \text{Spec } B : \nu_x(f_i) \geq n_i\} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^r \{x \in \text{Spec } B : \nu_x(g_j) \geq m_j\} \right) = \\ & \text{Sing } \mathcal{G} \cap \text{Sing } \mathcal{K}. \end{aligned}$$

□

4.1.3. Transformación de una álgebra de Rees por explosiones

Definición 4.1.22. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} J_n W^n \subset \mathcal{O}_V[W]$ una álgebra de Rees sobre un esquema liso V . Un subesquema cerrado y liso $Y \subset V$ se dice que es *permisible para \mathcal{G}* si $Y \subset \text{Sing } \mathcal{G}$, i. e. si para todo punto $x \in Y$ se satisface que $\nu_x(J_n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una *transformación monoidal permisible para \mathcal{G}* es el blow-up en un centro permisible para \mathcal{G} , $V \xleftarrow{\rho} V_1$.

Si $H \subset V_1$ denota el *divisor excepcional* (también llamada *hipersuperficie excepcional*) entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un haz de ideales, digamos $J_{n,1} \subset \mathcal{O}_{V_1}$, tal que

$$J_n \mathcal{O}_{V_1} = I(H)^n J_{n,1}. \quad (4.1.22.1)$$

Definimos el álgebra de Rees *transformada de \mathcal{G} en V_1* como:

$$\mathcal{G}_1 := \bigoplus_{n \geq 0} J_{n,1} W^n.$$

Para un elemento homogéneo dado, $fW^n \in \mathcal{G}(U)$ y un abierto afín, $U_1 \subset \rho^{-1}(U)$ donde $I(H)$ es un ideal principal, digamos $I(H) = \langle h \rangle$, se define un *transformado ponderado local* eligiendo cualquier generador del ideal principal $\langle h^{-n} f \rangle \mathcal{O}_{V_1}(U_1)$. En otras palabras, $f_1 W^n \in \mathcal{G}_1(U_1)$ es un *transformado ponderado* de $fW^n \in \mathcal{G}(U)$ en U_1 si

$$\langle f_1 \rangle = I(H)^{-n} \cdot \langle f \rangle \mathcal{O}_{V_1}(U_1).$$

La siguiente proposición da una descripción local del transformado de una álgebra de Rees tras una transformación monoidal permisible.

Proposición 4.1.23. [22, Proposición 1.6] *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo k , sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} J_n W^n$ una álgebra de Rees sobre V y sea $V \xleftarrow{\rho} V_1$ la transformación monoidal permisible para \mathcal{G} en un centro Y .*

Supongamos por simplicidad que V es afín y que $\{f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}\}$ genera de \mathcal{G} . Si para cada $i = 1, \dots, s$, $f_{i,1} W^{n_i} \in \mathcal{O}_{V_1}(U'_i) W^{n_i}$ es un transformado ponderado de $f_i W^{n_i}$, entonces \mathcal{G}_1 está generada por $\{f_{1,1} W^{n_1}, \dots, f_{s,1} W^{n_s}\}$ en el abierto $U_1 = \bigcap_{i=1}^s U'_i$.

Demostración. Empezamos observando que como $x \in \text{Sing } \mathcal{G}$ se tiene que $\nu_x(f_i) \geq n_i$, por lo que existen transformados ponderados $f_{i,1}$ que satisfacen

$$\langle f_i \rangle \mathcal{O}_{V_1}(U_1) = I(H)^{n_i} \langle f_{i,1} \rangle.$$

Para cada n , el ideal J_n está generado por los monomios de la forma $f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s}$ donde $\sum_{i=1}^s \alpha_i n_i = n$. Para cada uno de estos generadores tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s} \rangle \mathcal{O}_{V_1}(U_1) &= \langle f_1 \rangle^{\alpha_1} \dots \langle f_s \rangle^{\alpha_s} \mathcal{O}_{V_1}(U_1) = \\ &= I(H)^{\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_s n_s} \langle f_{1,1} \rangle^{\alpha_1} \dots \langle f_{s,1} \rangle^{\alpha_s} = I(H)^n \langle f_{1,1}^{\alpha_1} \dots f_{s,1}^{\alpha_s} \rangle. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. ÁLGEBRAS DE REES

Como $J_n \mathcal{O}_{V_1}(U_1) = I(H)^n J_{n,1}$ concluimos que $J_{n,1}$ se puede generar por los monomios $f_{1,1}^{\alpha_1} \cdots f_{s,1}^{\alpha_s}$ donde $\sum_{i=1}^s \alpha_i n_i = n$. Por lo tanto,

$$\mathcal{G}_1(U_1) = \mathcal{O}_{V_1}(U_1)[f_{1,1}W^{n_1}, \dots, f_{s,1}W^{n_s}].$$

□

Proposición 4.1.24. *Con las condiciones establecidas en la proposición anterior, si \mathcal{G} es un casi-anillo de Rees entonces \mathcal{G}_1 también es un casi-anillo de Rees.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{\ell \geq 0} J_\ell W^\ell$ y sea $\mathcal{G}_1 = \bigoplus_{\ell \geq 0} J_{\ell,1} W^\ell$ su transformada. Como \mathcal{G} es un casi-anillo podemos suponer que existe un entero b tal que

$$J_\ell = \begin{cases} (J_b)^n & \text{si } \ell = nb \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para caracterizar $J_{\ell,1}$ recordamos la expresión (4.1.22.1) y distinguimos si ℓ es o no múltiplo de b .

Si $\ell = nb$ observamos que

$$J_\ell \mathcal{O}_{V_1} = (J_b)^n \mathcal{O}_{V_1} = (J_b \mathcal{O}_{V_1})^n = (I(H)^b J_{b,1})^n = I(H)^{nb} (J_{b,1})^n,$$

luego $J_{\ell,1} = (J_{b,1})^n$. Mientras que si ℓ no es múltiplo de b se tiene que $J_\ell = 0$, lo que implica que $J_{\ell,1}$ también es nulo.

Por lo tanto, $\mathcal{G}_1 = \bigoplus_{n \geq 0} (J_{b,1})^n W^{nb}$. □

Ejemplo 4.1.25. Sean $B = k[Z, T]$, $V = \text{Spec}(B)$ y $\mathcal{G} = B[\langle Z^2 - T^3 \rangle W^2]$. Como $\text{Sing } \mathcal{G} = V(\langle Z, T \rangle)$, el blow-up $V \xleftarrow{\rho} V_1$ en el centro $Y = \text{Sing } \mathcal{G}$ es permisible para \mathcal{G} . Tomando el siguiente recubrimiento de V_1 por abiertos afines:

$$V_1 = U_1 \cup U_2 \quad \text{donde } U_1 = \text{Spec} \left(k \left[\frac{Z}{T}, T \right] \right) \text{ y } U_2 = \text{Spec} \left(k \left[Z, \frac{T}{Z} \right] \right),$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(U_1) &= k \left[\frac{Z}{T}, T \right] \left[\left(\left(\frac{Z}{T} \right)^2 - T \right) W^2 \right] \quad \text{y} \\ \mathcal{G}_1(U_2) &= k \left[Z, \frac{T}{Z} \right] \left[\left(1 - \left(\frac{T}{Z} \right)^3 Z \right) W^2 \right]. \end{aligned}$$

Luego

$$\text{Sing } \mathcal{G}_1 = (\text{Sing } \mathcal{G}_1 \cap U_1) \cup (\text{Sing } \mathcal{G}_1 \cap U_2) = \text{Sing } \mathcal{G}_1(U_1) \cap \text{Sing } \mathcal{G}_1(U_2) = \emptyset.$$

Como al transformar una álgebra de Rees por una transformación permisible obtenemos una álgebra de Rees, podemos componer varias transformaciones permisibles.

Definición 4.1.26. Sea \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees. Una *resolución* de \mathcal{G} es un sucesión finita de transformaciones monoidales:

$$\begin{array}{ccccccc} V = V_0 & \xleftarrow{\rho_0} & V_1 & \xleftarrow{\rho_1} & \dots & \xleftarrow{\rho_{M-2}} & V_{M-1} \xleftarrow{\rho_{M-1}} V_M \\ \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 & & \mathcal{G}_1 & & \dots & & \mathcal{G}_{M-1} & \mathcal{G}_M \end{array} \quad (4.1.26.1)$$

en centros permisibles $Y_i \subset \text{Sing } \mathcal{G}_i$, de modo que

- $\text{Sing } \mathcal{G}_M = \emptyset$ y
- el lugar excepcional de la composición $V \longleftarrow V_M$ es una unión de hipersuperficies lisas con cruzamientos normales[†].

4.2. Clausura entera de álgebras de Rees

El objetivo de esta sección es estudiar las clausuras enteras de las álgebras de Rees y en particular las clausuras enteras de los anillos y casi-anillos de Rees.

A partir de este momento (salvo que se indique lo contrario) B denotará un dominio excelente (noetheriano) y normal y $\overline{\mathcal{G}}$ la clausura entera de la B -álgebra de Rees \mathcal{G} en $B[W]$.

Teorema 4.2.1. *Sea B un dominio excelente (noetheriano) y normal y sea $\mathcal{G} \subset B[W]$ una B -álgebra de Rees. La clausura entera $\overline{\mathcal{G}} \subset B[W]$ también es una B -álgebra de Rees.*

Demostración. Vamos a probar que $\overline{\mathcal{G}}$ satisface las condiciones de la definición de álgebra de Rees (Definición 4.1.1):

- La Proposición 2.1.6 afirma que $\overline{\mathcal{G}}$ es un anillo \mathbb{N} -graduado.
- Si nos fijamos sólo en las componentes de grado cero de la siguiente cadena de álgebras graduadas $\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{G}} \subset B[W]$ vemos que $[\overline{\mathcal{G}}]_0 = B$.
- A continuación vamos a probar que $\overline{\mathcal{G}}$ (la clausura entera de \mathcal{G} en $B[W]$) es finitamente generada sobre B . Para ello observamos los siguientes tres puntos:
 - Sea K el cuerpo de cocientes de B . Como $B[W]$ es íntegramente cerrado en $K(W)$ (véase la Propiedad 2.1.9(3)), $\overline{\mathcal{G}}$ también es la clausura entera de \mathcal{G} en el cuerpo $K(W)$ (véase la Propiedad 2.1.7(1)).

[†]Se dice que un conjunto de hipersuperficies $\{H_1, \dots, H_r\}$ tiene cruzamientos normales si para cada $x \in \bigcup_{i=1}^r H_i$ existe un sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_d\}$ en $\mathcal{O}_{V,x}$ de modo que $I(H_i)_x = \langle z_{i_j} \rangle$, para algún $z_{i_j} \in \{z_1, \dots, z_d\}$, si $x \in H_i$.

• Sea $K(\mathcal{G})$ el cuerpo de cocientes de \mathcal{G} . Si $\mathcal{G} = B[f_1W^{n_1}, \dots, f_sW^{n_s}]$ con $f_i \neq 0$, tenemos que $K[W^{n_1}, \dots, W^{n_s}] \subset K(\mathcal{G})$ ya que $\frac{1}{f_i}W^0 \in K(\mathcal{G})$ y $\frac{1}{f_i}W^0 f_i W^{n_i} = W^{n_i} \in K(\mathcal{G})$. De hecho, $K(W^{n_1}, \dots, W^{n_s}) = K(\mathcal{G})$, lo que implica que $K(W)$ es una extensión finita de $K(\mathcal{G})$.

• Finalmente, notamos que al ser B un dominio excelente, \mathcal{G} también lo es, por lo que la clausura entera de \mathcal{G} en $K(W)$ es un \mathcal{G} -módulo finitamente generado (véase la Propiedad 1.3.1(2)) y una B -álgebra de tipo finito.

□

En la práctica es muy difícil calcular clausuras enteras de B -álgebras de Rees, a continuación presentamos resultados parciales que nos serán útiles más adelante.

Ejemplo 4.2.2. [41, Proposición 5.2.1] Sea $J \subset B$ un ideal. La clausura entera del anillo de Rees $\mathcal{G} = B[JW]$ en $B[W]$ es

$$\overline{\mathcal{G}} = B \oplus \overline{J}W \oplus \overline{J^2}W^2 \oplus \dots \oplus \overline{J^n}W^n \oplus \dots$$

Demostración. Empezamos observando que $\overline{\mathcal{G}} \subset B[W]$ es una álgebra graduada (véase la Proposición 2.1.6), por lo que sólo hay que demostrar que $\overline{\mathcal{G}} \cap B[W^n] = \overline{J^n}W^n$.

⊂: Sea fW^n un elemento de $\overline{\mathcal{G}} (\subset B[W])$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y existen $a_i = \sum_{j=0}^{N_i} a_{ij}W^j \in \mathcal{G}$ para $i = 1, \dots, m$ tales que

$$(fW^n)^m + a_1(fW^n)^{m-1} + \dots + a_{m-1}(fW^n) + a_m = 0$$

en $B[W]$. Tomando sólo la parte homogénea de grado nm obtenemos que

$$(fW^n)^m + a_{1,n}W^n (fW^n)^{m-1} + \dots + a_{m-1,n(m-1)}W^{n(m-1)} (fW^n) + a_{m,nm}W^{nm} = 0$$

$$W^{nm} (f^m + a_{1,n}f^{m-1} + \dots + a_{m-1,n(m-1)}f + a_{m,nm}) = 0,$$

donde $a_{i,ni} = 0$ si $ni > N_i$. Queda por observar que cada $a_{i,ni} \in J^{ni}$ ya que $a_{i,ni}W^{ni}$ es la parte homogénea de grado ni de $a_i \in \mathcal{G}$. Por lo que f es entero sobre J^n .

⊃: Supongamos ahora que $f \in B$ es entero sobre J^n , entonces satisface una ecuación de dependencia entera en B , digamos

$$f^m + c_1f^{m-1} + \dots + c_{m-1}f + c_m = 0,$$

donde $c_i \in (J^n)^i$ para $i = 1, \dots, m$. Multiplicando por W^{nm} resulta la siguiente expresión

$$(fW^n)^m + c_1W^n(fW^n)^{m-1} + \dots + c_{m-1}W^{n(m-1)}(fW^n) + c_mW^{nm} = 0,$$

donde ahora $c_iW^{ni} \in (J^n)^iW^{ni} \subset \mathcal{G}$. Por lo tanto, $fW^n \in \overline{\mathcal{G}} \cap BW^n$.

□

Proposición 4.2.3. Si $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ una B -álgebra de Rees íntegramente cerrada (en $B[W]$), entonces cada ideal $I_n \subset B$ es íntegramente cerrado.

Demostración. Supongamos que $f \in B$ es entero sobre I_n , entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ y existen $a_i \in (I_n)^i$ para $i = 1, \dots, m$ tales que

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_{m-1} f + a_m = 0.$$

Multiplicando a ambos lados por W^{nm} nos queda

$$(fW^n)^m + a_1 W^n (fW^n)^{m-1} + \dots + a_{m-1} W^{n(m-1)} (fW^n) + a_m W^{nm} = 0,$$

donde cada $a_i W^{ni} \in (I_n)^i W^{ni} \subset I_{ni} W^{ni} \subset \mathcal{G}$. Luego, como $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$

$$fW^n \in \overline{\mathcal{G}} \cap B[W^n] = \mathcal{G} \cap B[W^n] = I_n W^n.$$

Lo que significa que $f \in I_n$. □

Ejemplo 4.2.4. Sean $\mathcal{G} = B[JW^b] = \bigoplus_{n \geq 0} J^n W^{nb}$ un casi-anillo de Rees y $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ su clausura entera. Entonces $I_{nb} = \overline{J^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

⊂: Vamos a suponer que $fW^{nb} \in I_{nb} W^{nb} = \overline{\mathcal{G}} \cap B[W^{nb}]$. Entonces existe un número $m \in \mathbb{N}$ y existen $a_i = \sum_{j=0}^{N_i} a_{ij} W^{jb} \in \mathcal{G}$ para $i = 1, \dots, m$ tales que

$$(fW^{nb})^m + a_1 (fW^{nb})^{m-1} + \dots + a_{m-1} (fW^{nb}) + a_m = 0.$$

Tomando la parte homogénea de grado nbm nos queda que

$$(fW^{nb})^m + a_{1,n} W^{nb} (fW^{nb})^{m-1} + \dots + a_{m-1, n(m-1)} W^{nb(m-1)} (fW^{nb}) + a_{m, nm} W^{nbm} = 0$$

$$W^{nbm} (f^m + a_{1,n} f^{m-1} + \dots + a_{m-1, n(m-1)} f + a_{m, nm}) = 0,$$

donde $a_{i, ni} = 0$ si $ni > N_i$ y en todos los casos $a_{i, ni} W^{nbi} \in \mathcal{G} \cap B[W^{nbi}] = (J^n)^i W^{nbi}$, por lo que f es entero sobre J^n .

⊃: Si ahora $f \in B$ es entero sobre J^n entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ y existen $c_i \in J^{ni}$ tales que

$$f^m + c_1 f^{m-1} + \dots + c_{m-1} f + c_m = 0.$$

Multiplicando por W^{nbm} nos queda que

$$(fW^{nb})^m + c_1 W^{nb} (fW^{nb})^{m-1} + \dots + c_{m-1} W^{nb(m-1)} (fW^{nb}) + c_m W^{nbm} = 0,$$

donde cada $c_i W^{nbi} \in J^{ni} W^{nbi} \subset \mathcal{G}$, por lo que $fW^{nb} \in \overline{\mathcal{G}}$ y, al ser un elemento homogéneo, $f \in I_{nb}$.

□

Proposición 4.2.5. $\mathbb{V}_M(\overline{\mathcal{G}})$ es la clausura entera de $\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$ en $B[W^M]$.

Demostración. La Proposición 4.1.18 afirma que $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathbb{V}_M(\mathcal{G})}$ (clausuras consideradas en $B[W]$). Por lo tanto, el resultado se prueba recordando que la clausura de $\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$ en $B[W^M]$ son los elementos de $B[W^M]$ que son enteros sobre $\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$, es decir, el conjunto

$$\overline{\mathbb{V}_M(\mathcal{G})} \cap B[W^M] = \mathbb{V}_M(\overline{\mathbb{V}_M(\mathcal{G})}) = \mathbb{V}_M(\overline{\mathcal{G}}).$$

□

Lema 4.2.6. [22, Observación 1.3] [55, Párrafo 2.3] *Sea \mathcal{G} una B -álgebra de Rees. Entonces existe un número natural N tal que el álgebra de Rees $\mathbb{V}_{N'}(\mathcal{G})$ es un casi-anillo de Rees sobre B , para cualquier N' múltiplo de N . En particular, cualquier álgebra de Rees es finita sobre un casi-anillo de Rees.*

Para probar este resultado necesitamos el siguiente lema previo:

Lema Previo 4.2.7. [41, Proposición 5.2.5] *Sean B un dominio (noetheriano y excelente) y $J \subset B$ un ideal. Sea $\mathcal{G} = B[JW] = \bigoplus_{n \geq 0} J^n W^n$ el anillo de Rees del ideal J y sea $T = \bigoplus_{n \geq 0} T_n W^n$ otra B -álgebra \mathbb{N} -graduada que contiene a \mathcal{G} como álgebras graduadas.*

Si T es un \mathcal{G} -módulo finitamente generado entonces existe un entero m tal que para todo $\ell \geq m$, $T_\ell = J^{\ell-m} T_m$.

Demostración del Lema Previo 4.2.7. Como T es un \mathcal{G} -módulo finitamente generado y ambos anillos tienen la misma graduación, podemos suponer que T está generado como \mathcal{G} -módulo por elementos homogéneos: $t_1 W^{m_1}, t_2 W^{m_2}, \dots, t_r W^{m_r}$, i.e. $T = \mathcal{G}t_1 W^{m_1} + \mathcal{G}t_2 W^{m_2} + \dots + \mathcal{G}t_r W^{m_r}$. Mirando la parte homogénea de grado $m = \max\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ de T tenemos que

$$\begin{aligned} T_m W^m &= [\mathcal{G}]_{m-m_1} t_1 W^{m_1} + \dots + [\mathcal{G}]_{m-m_r} t_r W^{m_r} \\ &= (J^{m-m_1} W^{m-m_1}) t_1 W^{m_1} + \dots + (J^{m-m_r} W^{m-m_r}) t_r W^{m_r} \\ &= (J^{m-m_1} t_1 + \dots + J^{m-m_r} t_r) W^m, \end{aligned}$$

entonces cualquier parte homogénea de grado $\ell \geq m$ es de la forma

$$\begin{aligned} T_\ell W^\ell &= [\mathcal{G}]_{\ell-m_1} t_1 W^{m_1} + \dots + [\mathcal{G}]_{\ell-m_r} t_r W^{m_r} \\ &= (J^{\ell-m_1} W^{\ell-m_1}) t_1 W^{m_1} + \dots + (J^{\ell-m_r} W^{\ell-m_r}) t_r W^{m_r} \\ &= J^{\ell-m} (J^{m-m_1} t_1 + \dots + J^{m-m_r} t_r) W^\ell = J^{\ell-m} T_m W^\ell. \end{aligned}$$

□

Comentario 4.2.8. Si además pedimos que T sea una B -álgebra de tipo finito, el recíproco de este Lema Previo 4.2.7 también es cierto. Esto se debe a que cada $T_i W^i$ sería un B -módulo finitamente generado y T se podría escribir como $T = \mathcal{G}T_0 + \mathcal{G}T_1 W + \cdots \mathcal{G}T_m$.

Demostración del Lema 4.2.6. Supongamos que $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ es el álgebra de Rees generada por $\{f_1 W^{n_1}, f_2 W^{n_2}, \dots, f_s W^{n_s}\}$ y sea M un múltiplo común de todos los n_i . Observamos que, para cada $i = 1, \dots, s$, $f_i W^{n_i}$ es entero sobre $B[I_M W^M]$, ya que

$$(f_i W^{n_i})^{M/n_i} = f_i^{M/n_i} W^M \in I_M W^M.$$

Por lo tanto, $B[I_M W^M] \subset \mathcal{G}$ es una extensión finita de módulos y la extensión intermedia que escribimos a continuación también lo es:

$$B[I_M W^M] = \bigoplus_{n \geq 0} (I_M)^n W^{nM} \subset \mathbb{V}_M(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} I_{nM} W^{nM} \subset \mathcal{G}.$$

Si $(I_M)^n = I_{nM}$ para todo $n \geq 1$, entonces $\mathbb{V}_M(\mathcal{G}) = B[I_M W^M]$ es un casi-anillo de Rees y el resultado estaría probado.

En otro caso, al ser $\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$ finito como $B[I_M W^M]$ -módulo, el lema previo afirma que existe un entero no negativo A tal que $I_{\ell M} = (I_M)^{\ell-A} I_{AM}$ para todo $\ell \geq A$.

Ahora, reemplazando ℓ por nA en la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} I_{nAM} &= (I_M)^{nA-A} I_{AM} = (I_M)^{A(n-1)} \cdot I_{AM} \\ &\cup \\ (I_{AM})^n &\qquad \qquad \qquad \cap \\ &\qquad \qquad \qquad (I_{AM})^{n-1} \cdot I_{AM} = (I_{AM})^n. \end{aligned}$$

Por lo que $(I_{AM})^n = I_{nAM}$ para todo $n \geq 1$. Esto prueba que $\mathbb{V}_{AM}(\mathcal{G}) = B[I_{AM} W^{AM}]$ es un casi-anillo de Rees.

Para terminar, observamos que si $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ es un casi-anillo de Rees, entonces $I_{nN} = (I_N)^n$ para todo $n \geq 0$, por lo que

$$\mathbb{V}_{\ell N}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} I_{n\ell N} W^{n\ell N} = \bigoplus_{n \geq 0} (I_N)^{n\ell} W^{n\ell N} = B[(I_N)^\ell W^{\ell N}] = B[I_{\ell N} W^{\ell N}]$$

es también un casi-anillo de Rees. □

Si \mathcal{G} y \mathcal{K} son dos álgebras de Rees, el Lema 4.2.6 afirma que se puede encontrar un entero no negativo, N , tal que $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\mathcal{K})$ sean a la vez casi-anillos de Rees. Además, por la Proposición 4.1.18, $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{K}}$ si y sólo si $\overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{G})} = \overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{K})}$. Esto supone que el estudio de las clausuras enteras de álgebras de Rees se reduce al estudio de las clausuras enteras de los casi-anillos de Rees. El siguiente lema muestra un criterio muy útil para comparar las clausuras enteras de dos casi-anillos de Rees.

Lema 4.2.9. Sean $B[JW^b]$ y $B[IW^c]$ dos casi-anillos de Rees. Entonces, $B[JW^b] \subset \overline{B[IW^c]}$ si y sólo si $J^c \subset \overline{I^b}$. Por lo tanto, $\overline{B[JW^b]} = \overline{B[IW^c]}$ si y sólo si $\overline{J^c} = \overline{I^b}$.

Demostración. Si $B[JW^b] \subset \overline{B[IW^c]}$, mirando las partes homogéneas de grado bc tenemos que

$$J^c W^{bc} = [B[JW^b]]_{bc} \subset [B[IW^c]]_{bc} \stackrel{\text{Ejemplo 4.2.4}}{=} \overline{I^b} W^{bc}.$$

Para probar el recíproco, vamos a demostrar el siguiente contenido

$$\bigoplus_{n \geq 0} J^{cn} W^{bcn} = \mathbb{V}_{bc}(B[JW^c]) \subset \overline{B[IW^c]},$$

ya que la Proposición 4.1.18 afirma que $B[JW^b]$ y $\mathbb{V}_{bc}(B[JW^b])$ tienen la misma clausura entera en $B[W]$.

De nuevo por el Ejemplo 4.2.4, esto es equivalente a probar que

$$J^{cn} \subset \overline{I^{bn}}, \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

lo cual es cierto ya que $J^c \subset \overline{I^b}$ implica que $J^{cn} \subset (\overline{I^b})^n \subset \overline{I^{bn}}$. □

4.2.1. Lugar singular, orden y conjunto de ceros de la clausura entera de una álgebra de Rees

Hemos definido el concepto de lugar singular de una álgebra de Rees en la Definición 4.1.8 y la función orden en la Definición 4.1.10.

En el siguiente teorema veremos como se vincula el lugar singular de un álgebra de Rees con el lugar singular de su clausura entera. Este análisis nos permitirá comparar la función orden de ambas álgebras.

Teorema 4.2.10. Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k . Sea \mathcal{G} una álgebra de Rees sobre V . Entonces \mathcal{G} y $\overline{\mathcal{G}}$ poseen

- (1) [55, Proposición 4.4 1)] el mismo lugar singular,
- (2) [22, Proposición 6.4(2)] el mismo orden en los puntos del lugar singular y
- (3) el mismo conjuntos de ceros.

Demostración. Razonaremos de forma local sobre un abierto afín $U = \text{Spec}(B)$ donde podemos suponer que B es un dominio regular de tipo finito sobre k (ya que V es un esquema liso sobre k).

4.2. CLAUSURA ENTERA DE ÁLGEBRAS DE REES

El Lema 4.2.6 afirma que podemos escoger un entero no negativo N de modo que $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ sean casi-anillos de Rees. Supongamos que $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n \subset B[W]$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_N(\mathcal{G}) &= \bigoplus_{n \geq 0} (I_N)^n W^{nN} = B[I_N W^N] \quad \text{y} \\ \mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}}) &\stackrel{\text{Proposición 4.1.18}}{=} \mathbb{V}_N(\overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{G})}) \stackrel{\text{Ejemplo 4.2.4}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} \overline{(I_N)^n W^{nN}}, \end{aligned}$$

además, por la elección de N , $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ es un casi-anillo de Rees, por lo que

$$\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}}) = B[\overline{I_N W^N}].$$

A la vista de estas descripciones vamos a probar primero que \mathcal{G} y $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ poseen el mismo lugar singular, el mismo orden (en los puntos del lugar singular) y el mismo conjunto de ceros. Después mostraremos que a $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ les sucede lo mismo. Para terminar indicaremos que estas afirmaciones también son válidas para $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ y $\overline{\mathcal{G}}$.

Caso 1: Sean $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n = B[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$ y $\mathbb{V}_N(\mathcal{G}) = B[I_N W^N]$ donde N es un múltiplo común de n_1, \dots, n_s convenientemente escogido (véase el Lema 4.2.6).

Empezamos observando que $\nu_x(I_N) = \min_{1 \leq i \leq s} \{\nu_x(f_i^{N/n_i})\}$ ya que

$$\nu_x(I_N) \stackrel{(4.1.9.2)}{\geq} \min_{1 \leq i \leq s} \left\{ \frac{N}{n_i} \nu_x(f_i) \right\} = \min_{1 \leq i \leq s} \{\nu_x(f_i^{N/n_i})\} \geq \inf \{\nu_x(f) : f \in I_N\} = \nu_x(I_N).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Sing } \mathcal{G} &\stackrel{\text{Proposición 4.1.9}}{=} \bigcap_{i=1}^s \{x \in U : \nu_x(f_i) \geq n_i\} = \bigcap_{i=1}^s \{x \in U : \nu_x(f_i^{N/n_i}) \geq N\} \\ &= \{x \in U : \nu_x(I_N) \geq N\} \stackrel{\text{Ejemplo 4.1.15(1)}}{=} \text{Sing } \mathbb{V}_N(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

Si $x \in \text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathbb{V}_N(\mathcal{G})$,

$$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x) \stackrel{(4.1.12.2)}{=} \frac{\nu_x(I_N)}{N} \stackrel{\text{Ejemplo 4.1.15(2)}}{=} \text{ord}_{\mathbb{V}_N(\mathcal{G})}(x).$$

Además en la definición de álgebra de Rees (Definición 4.1.1) observamos que, para todo $n \geq 1$, $(I_N)^n W^{nN} \subset I_{nN} W^{nN} = [\mathbb{V}_N(\mathcal{G})]_{nN}$, lo que implica que $V(I_n) = V((I_N)^n) \supset V(I_{nN})$. Así,

$$V(\mathcal{G}) = \bigcap_{n \geq 1} V(I_n) \supset \bigcap_{n \geq 1} V(I_{nN}) = V(\mathbb{V}_N(\mathcal{G})) \stackrel{\text{Ejemplo 4.1.15(3)}}{=} V(I_N) \supset V(\mathcal{G}).$$

Caso 2: Sean

$$\mathbb{V}_N(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} (I_N)^n W^{nN} = B[I_N W^N] \quad \text{y} \quad \mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}}) = \bigoplus_{n \geq 0} (\overline{I_N})^n W^{nN} = B[\overline{I_N} W^N].$$

La Proposición 2.5.2(2) afirma que $\nu_x(I_N) = \nu_x(\overline{I_N})$ para todo $x \in U$. Luego, por el Ejemplo 4.1.15, los lugares singulares y los órdenes de $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ coinciden en todo punto de sus lugares singulares.

Para probar que sus conjuntos de ceros son el mismo, notamos que $I_N \subset \overline{I_N} \subset \sqrt{I_N}$ (véase la Proposición 2.3.2) por lo que $V(I_N) = V(\overline{I_N})$. Así,

$$V(\mathbb{V}_N(\mathcal{G})) \stackrel{\text{Ejemplo 4.1.15(3)}}{=} V(I_N) = V(\overline{I_N}) \stackrel{\text{Ejemplo 4.1.15(3)}}{=} V(\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})).$$

Caso 3: Los lugares singulares, la función orden y el conjunto de ceros de $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ y $\overline{\mathcal{G}}$ coinciden, la prueba es la misma que en el Caso 1.

□

4.2.2. Clausura entera y transformación por explosiones

El objetivo de este apartado es estudiar la compatibilidad de las transformaciones de álgebras de Rees con la clausura entera.

Teorema 4.2.11. *Sea \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebras de Rees y sea $V \xleftarrow{\rho} V_1$ una transformación monoidal permisible para \mathcal{G} que, por el Teorema 4.2.10(1), también es permisible para $\overline{\mathcal{G}}$, la clausura entera de \mathcal{G} . En esta situación, las transformadas de \mathcal{G} y de $\overline{\mathcal{G}}$ por ρ poseen la misma clausura entera en \mathcal{O}_{V_1} .*

Demostración. Denotaremos por \mathcal{G}_1 y $(\overline{\mathcal{G}})_1$ a las álgebras de Rees transformadas de \mathcal{G} y $\overline{\mathcal{G}}$, respectivamente.

Como en la demostración del Teorema 4.2.10, escogemos un entero no negativo N de modo que $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ sean casi-anillos de Rees (véase el Lema 4.2.6).

Por la Proposición 4.1.18 y la construcción del álgebra de Rees transformada explicada en la Definición 4.1.22, tenemos las siguientes igualdades:

$$\overline{\mathcal{G}_1} = \overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{G}_1)} = \overline{(\mathbb{V}_N(\mathcal{G}))_1} \quad \text{y} \quad \overline{(\overline{\mathcal{G}})_1} = \overline{\mathbb{V}_N((\overline{\mathcal{G}})_1)} = \overline{(\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}}))_1}.$$

Luego es suficiente con probar que las transformadas de los dos casi-anillos de Rees $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ poseen la misma clausura entera.

Tomando cartas afines podemos considerar que ρ está descrito por la inclusión de los siguientes dominios regulares

$$B \xrightarrow{\rho^*} B_1,$$

y que $\mathbb{V}_N(\mathcal{G}) = B[IW^N]$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}}) = B[\overline{IW^N}]$, para cierto ideal $I \subset B$.

Por la Proposición 4.1.24, sus álgebras transformadas sobre V_1 son $B_1[I_1W^N]$ y $B_1[J_1W^N]$ respectivamente, donde I_1 y $J_1 \subset B_1$ satisfacen las siguientes igualdades

$$IB_1 = h^N I_1 \quad \text{y} \quad \overline{IB_1} = h^N J_1, \quad (4.2.11.1)$$

donde h es un elemento no nulo (un generador local del ideal del divisor excepcional).

En este caso, como tratamos con casi-anillos de Rees con la misma graduación, el Lema 4.2.9 afirma que

$$\overline{B[I_1W^N]} = \overline{B[J_1W^N]} \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{I_1} = \overline{J_1}.$$

Por lo tanto, nuestro objetivo es mostrar que $\overline{I_1} = \overline{J_1}$.

Gracias al Criterio Valorativo (enunciado en el Teorema 2.3.15) el problema se reduce a demostrar que si S es un anillo de valoración discreta tal que $B_1 \subset S \subset K(B_1) = K(B)$ entonces se cumple que

$$I_1S = J_1S.$$

Observando que S también contiene a B , el mismo Criterio Valorativo afirma que

$$(IB_1)S = IS = \overline{IS} = (\overline{IB_1})S.$$

Usando las expresiones (4.2.11.1) se tiene que

$$h^N I_1S = h^N J_1S,$$

lo que implica que $I_1S = J_1S$, ya que h es un elemento no nulo y S es un dominio. \square

El blow-up normalizado respecto a una álgebra de Rees

A cualquier álgebra de Rees definida sobre un dominio se le puede asociar el siguiente blow-up.

Definición 4.2.12. Sea B un dominio. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ una B -álgebra de Rees. Sea N un entero positivo apropiado de modo que la N -ésima acción de Veronese sobre \mathcal{G} (véase la Definición 4.1.17) sea un casi-anillo de Rees, digamos $\mathbb{V}_N(\mathcal{G}) = B[I_N W^N]$ (véase el Lema 4.2.6).

Entonces, consideramos el blow-up de $\text{Spec } B$ en I_N , i.e.,

$$\text{Spec } B \longleftarrow \text{Bl}_{I_N}(B) = \text{Proj}(B \oplus I_N \oplus I_N^2 \oplus \cdots).$$

Considerando $B[I_N W^N]$ como subanillo de $B[W^N]$, podemos decir que el *blow-up de $\text{Spec } B$ respecto a \mathcal{G}* es este mismo esquema, escribiendo:

$$\text{Bl}(\mathcal{G}) := \text{Proj}(B[I_N W^N]).$$

Proposición 4.2.13. *La construcción de $\text{Bl}(\mathcal{G})$ es independiente de la elección de N .*

Demostración. Sea M otro número entero tal que $\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$ es un casi-anillo de Rees. El Lema 4.2.6 afirma que $\mathbb{V}_{NM}(\mathcal{G})$ también es un casi-anillo de Rees. Luego, tenemos tres construcciones posibles para $\text{Bl}(\mathcal{G})$:

$$\text{Proj}(B[I_N W^N]), \quad \text{Proj}(B[I_{NM} W^{NM}]) \quad \text{y} \quad \text{Proj}(B[I_M W^M]).$$

Sin embargo, como NM es múltiplo de N y de M tenemos que $I_{NM} = (I_N)^M = (I_M)^N$ y ahora

$$\text{Bl}_{I_N}(B) \stackrel{\text{Teorema 1.4.3}}{=} \text{Bl}_{(I_N)^M}(B) = \text{Bl}_{I_{NM}}(B) = \text{Bl}_{(I_M)^N}(B) \stackrel{\text{Teorema 1.4.3}}{=} \text{Bl}_{I_M}(B),$$

i.e. las tres construcciones coinciden. \square

Lo que sí que pueden ser distintos es el blow-up respecto a una álgebra y el blow-up respecto a su clausura entera. Por ello, definimos el siguiente invariante:

Definición 4.2.14. El *blow-up normalizado de $\text{Spec } B$ respecto a \mathcal{G}* es el normalizado de $\text{Bl}(\mathcal{G})$:

$$\text{Spec } B \longleftarrow \text{Bl}(\mathcal{G}) \longleftarrow \overline{\text{Bl}(\mathcal{G})} := \overline{\text{Proj}(B[I_N W^N])},$$

donde N es un entero para el que $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ es un casi-anillo de Rees.

Proposición 4.2.15.

$$\overline{\text{Bl}(\mathcal{G})} = \text{Bl}(\overline{\mathcal{G}}).$$

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ una B -álgebra de Rees. El Lema 4.2.6 afirma que existe un elemento $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{V}_N(\mathcal{G})$ y $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$ son casi-anillos de Rees. Empezamos observando que $\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}}) = B[\overline{I_N} W^N]$ ya que

$$[\mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})]_N \stackrel{\text{Proposición 4.2.5}}{=} [\overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{G})} \cap B[W^N]]_N = [B[\overline{I_N} W^N]]_N \stackrel{\text{Ejemplo 4.2.4}}{=} \overline{I_N} W^N. \quad (4.2.15.1)$$

Por lo tanto, $\text{Bl}(\overline{\mathcal{G}}) = \text{Proj}(B[\overline{I_N} W^N])$ mientras que $\text{Bl}(\mathcal{G}) = \text{Proj}(B[I_N W^N])$.

El Criterio de Reducciones establecido en el Teorema 2.3.13 indica que existe un entero positivo m tal que $\overline{I_N}^{m+1} = I_N \cdot \overline{I_N}^m$. Luego, para todo $n \geq m$ tenemos que

$$\overline{I_N}^n = I_N \cdot \overline{I_N}^{n-1} = \dots I_N^{n-m} \cdot \overline{I_N}^m.$$

Ahora, el Comentario 4.2.8 implica que $B[I_N W^N] \subset B[\overline{I_N} W^N] (\subset B[W^N])$ es una extensión finita de anillos graduados y la Proposición 4.2.5 nos dice que

$$B[\overline{I_N} W^N] = \overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{G})} \cap B[W^N] = \mathbb{V}_N(\overline{\mathcal{G}})$$

es íntegramente cerrada en $B[W^N]$. Entonces, como se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4.5, tenemos que $\text{Bl}(\overline{\mathcal{G}})$ es el esquema normalizado de $\text{Bl}(\mathcal{G})$. \square

Corolario 4.2.16. *En el caso particular en que $\mathcal{G} = B[IW^N]$ sea un casi-anillo de Rees, se tiene que*

$$\overline{\text{Bl}_I(B)} = \text{Bl}_{\overline{I}}(B).$$

4.3. Álgebras de Rees diferenciales

Hemos visto que un ideal J de una k -álgebra B se puede extender por la acción del módulo de operadores diferenciales de orden $\leq r$ obteniendo un nuevo ideal, $\text{Diff}_{B|k}^r(J)$ (véase el Apartado 3.3.5). En esta sección vamos a saturar por diferenciales las álgebras de Rees. Veremos la relación entre el lugar singular, el orden y el conjunto de ceros de una álgebra de Rees y de su saturada por operadores diferenciales. Para terminar, estudiaremos su comportamiento por explosiones (éste es un resultado de Giraud).

A partir de este momento, si no se especifica lo contrario, V será un esquema liso de tipo finito sobre un cuerpo perfecto k y, para cualquier entero no negativo r , denotaremos por $\text{Diff}_{V|k}^r$ el haz (localmente libre) de operadores diferenciales de orden $\leq r$ sobre k (véase la Definición 3.3.5).

Definición 4.3.1. Sea V un esquema liso sobre un cuerpo k . Una álgebra de Rees sobre V , $\mathcal{G} = \bigoplus_n I_n W^n$, se dice que es una *álgebra de Rees diferencial sobre k* si satisface la siguiente condición:

Existe un cubrimiento de V por cartas afines, $\{U_i\}$, tal que para cualquier $D \in \text{Diff}_{V|k}^r(U_i)$ y cualquier $h \in I_n(U_i)$ se tiene que $D(h) \in I_{n-r}(U_i)$, siempre que $n \geq r$.

Proposición 4.3.2. Si $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ es diferencial. Como $\text{Diff}_{V|k}^0(U_i) \subset \text{Diff}_{V|k}^1(U_i)$ se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \text{Diff}_{V|k}^0(U_i)(I_{n+1}) \subset \text{Diff}_{V|k}^1(U_i)(I_{n+1}) \subset I_n.$$

Definición 4.3.3. [55, Teorema 3.4] Sea \mathcal{G} una álgebra de Rees sobre un esquema liso V . Denominamos *álgebra de Rees diferencial generada por \mathcal{G}* , $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}$, a la menor álgebra de Rees diferencial sobre V que contiene a \mathcal{G} .

Observación 4.3.4. [55, Teorema 3.4] Dada una álgebra de Rees \mathcal{G} sobre V existe una forma natural de construir $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}$, al menos localmente.

Sea $x \in V$ un punto cerrado y sea $U = \text{Spec } B$ un entorno afín de x en el que se satisfaga la siguiente condición:

Para cada $r \geq 0$ existe una base del módulo libre $\text{Diff}_{U|k}^r$, digamos

$$\{D^\alpha: B \longrightarrow B\}_{0 \leq |\alpha| \leq r},$$

donde cada operador diferencial D^α induce de forma natural por localización el operador diferencial $\Delta_{\mathcal{O}_{V,x}}^\alpha: \mathcal{O}_{V,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}$ proveniente del morfismo de Taylor (véase la Observación 3.3.21).

Observamos que por la construcción de los operadores diferenciales, tenemos una inclusión de conjuntos entre las bases de estos módulos:

$$\{D^\alpha\}_{|\alpha|=0} \subset \{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq 1} \subset \cdots \subset \{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r} \subset \{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r+1} \cdots \quad (4.3.4.1)$$

(véase el Comentario 3.3.22(2)). Por lo tanto, $D^\alpha \in \text{Diff}_{U|k}^r$ para todo $r \geq |\alpha|$.

Además vamos a suponer que $\mathcal{G}(U)$ está generada por el conjunto $\{f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}\}$.

Entre todos los elementos que componen $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)$, están aquellos que son el resultado de la acción de un operador diferencial perteneciente a una de las bases de (4.3.4.1) sobre uno de los generadores de $\mathcal{G}(U)$. Por la definición de álgebra de Rees diferencial generada por \mathcal{G} , tenemos que si $0 \leq |\alpha| < n_i$:

$$D^\alpha(f_i)W^{t_i} \in \mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U), \quad \text{para cada } 1 \leq t_i \leq n_i - |\alpha|.$$

Veremos a continuación que el conjunto

$$\{D^\alpha(f_i)W^{t_i} : 1 \leq i \leq s, 0 \leq |\alpha| < n_i, 1 \leq t_i \leq n_i - |\alpha|\} \quad (4.3.4.2)$$

forma un sistema de generadores de $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)$.

Sea $hW^n = \prod_{j=1}^\ell f_{i_j} W^{n_j} \in \mathcal{G}(U)$ un elemento homogéneo, donde cada $i_j \in \{1, \dots, s\}$ y $n = \sum_{j=1}^\ell n_{i_j}$. Sea D^α un operador de la base de $\text{Diff}_{U|k}^r$ donde $0 \leq r \leq n - 1$ (en particular, $|\alpha| \leq r$). Entonces, por la regla del producto (3.3.18.1), que heredan $\Delta_{\mathcal{O}_{V,x}}^\alpha$ y D^α de los coeficientes de Taylor, se tiene que

$$D^\alpha(h) = \sum_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_\ell = \alpha} D^{\gamma_1}(f_{i_1}) \cdots D^{\gamma_\ell}(f_{i_\ell}).$$

Como $n - r \leq n - |\alpha| = \sum_{j=1}^\ell (n_{i_j} - |\gamma_j|)$ podemos escribir

$$D^\alpha(h)W^{n-r} = \sum_{\substack{\gamma_1 + \cdots + \gamma_\ell = \alpha \\ 0 \leq t_j \leq n_{i_j} - |\gamma_j| \\ t_1 + \cdots + t_\ell = n - r}} D^{\gamma_1}(f_{i_1})W^{t_1} \cdots D^{\gamma_\ell}(f_{i_\ell})W^{t_\ell}$$

(aunque el reparto de las potencias de W no sea único). Esto, junto al hecho de que

$$D^\alpha(h_1 + h_2) = D^\alpha(h_1) + D^\alpha(h_2),$$

propiedad también heredada de los coeficientes de Taylor, implica que no necesitamos más elementos para generar $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)$.

Para terminar, basta con observar que efectivamente $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)$ es una álgebra de Rees ya que el conjunto de generadores que hemos construido es finito.

4.3.1. Lugar singular, orden y conjunto de ceros de una álgebra de Rees diferencial

En esta sección vamos a mostrar que las nociones de lugar singular y orden de una álgebra de Rees son invariantes respecto a la operación de saturar por operadores diferenciales.

Teorema 4.3.5. *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k . Sea \mathcal{G} una álgebra de Rees sobre V y sea $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}$ el álgebra diferencial generada por \mathcal{G} . Entonces*

$$(1) \text{ [55, Proposición 4.4 3)] } \text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}) \quad \text{y}$$

$$(2) \text{ [22, Proposición 6.4 3.] } \text{ si } x \in \text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}), \text{ entonces } \text{ord}_{\mathcal{G}}(x) = \text{ord}_{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}}(x).$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ y que $\mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} J_n W^n$. Sea U un abierto afín de modo que:

- $\mathcal{G}(U)$ está generada por $\{f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}\}$,
- para $0 \leq r < \max\{n_1, \dots, n_s\}$, el módulo $\text{Diff}_{U|k}^r$ está generado por $\{D^\alpha\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}$ y
- $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)$ está generada por $\{D^\alpha(f_i) W^{t_i} : 1 \leq i \leq s, 0 \leq |\alpha| < n_i, 1 \leq t_i \leq n_i - |\alpha|\}$.

(1) El hecho de que $\text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)) \subset \text{Sing}(\mathcal{G}(U))$ se sigue de que $\mathcal{G} \subset \mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}$.

Para probar el contenido recíproco, describimos los lugares singulares de ambas álgebras de Rees del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{Sing}(\mathcal{G}(U)) &\stackrel{\text{Proposición 4.1.9}}{=} \bigcap_{i=1}^s \{x \in U : \nu_x(f_i) \geq n_i\} \stackrel{\text{Teorema 3.3.28}}{=} \bigcap_{i=1}^s V(\text{Diff}^{n_i-1} \langle f_i \rangle) \quad \text{y} \\ \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}(U)) &\stackrel{\text{Proposición 4.1.9}}{=} \bigcap_{i=1}^s \bigcap_{0 \leq |\alpha| < n_i} \bigcap_{t_i=1}^{n_i-|\alpha|} \{x \in U : \nu_x(D^\alpha(f_i)) \geq t_i\} \\ &= \bigcap_{i=1}^s \bigcap_{0 \leq |\alpha| < n_i} \{x \in U : \nu_x(D^\alpha(f_i)) \geq n_i - |\alpha|\} \quad (4.3.5.1) \\ &\stackrel{\text{Teorema 3.3.28}}{=} \bigcap_{i=1}^s \bigcap_{0 \leq |\alpha| < n_i} V(\text{Diff}^{n_i-|\alpha|-1} \langle D^\alpha(f_i) \rangle). \end{aligned}$$

Luego, es suficiente probar que

$$\text{Diff}^{n_i-|\alpha|-1} \langle D^\alpha(f_i) \rangle \subset \text{Diff}^{n_i-1} \langle f_i \rangle \quad \text{para } 0 \leq i \leq s \text{ y } 0 \leq |\alpha| < n_i,$$

lo cual es cierto ya que

$$\text{Diff}^{n_i-|\alpha|-1} \langle D^\alpha(f_i) \rangle \subset \text{Diff}^{n_i-|\alpha|-1} \left(\text{Diff}^{|\alpha|} \langle f_i \rangle \right) \subset \text{Diff}^{n_i-1} \langle f_i \rangle.$$

(2) Supongamos que $x \in \text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{ord}_{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}}(x) &\stackrel{\text{Proposición 4.1.12}}{=} \min \left\{ \frac{\nu_x(D^\alpha(f_i))}{t_i} : 1 \leq i \leq s, 0 \leq |\alpha| < n_i, 1 \leq t_i \leq n_i - |\alpha| \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\nu_x(D^\alpha(f_i))}{n_i - |\alpha|} : 1 \leq i \leq s, 0 \leq |\alpha| < n_i \right\} \\ &\leq \min \left\{ \frac{\nu_x(f_i)}{n_i} : 1 \leq i \leq s \right\} = \text{ord}_{\mathcal{G}}(x). \end{aligned}$$

Para probar que realmente es una igualdad vamos a ver que, para cada $0 \leq |\alpha| \leq n_i$, se tiene que

$$\frac{\nu_x(D^\alpha(f_i))}{n_i - |\alpha|} \geq \frac{\nu_x(f_i) - |\alpha|}{n_i - |\alpha|} \geq \frac{\nu_x(f_i)}{n_i}.$$

(a) La primera desigualdad se obtiene observando que si $c = \nu_x(f)$, con los mismos argumentos del apartado anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} x \in V(\text{Diff}^{c-1}\langle f \rangle) \subset V(\text{Diff}^{c-|\alpha|-1}\langle D^\alpha(f) \rangle), \quad \text{luego} \\ \nu_x(D^\alpha(f)) \geq c - |\alpha| = \nu_x(f) - |\alpha|. \end{aligned}$$

(b) La segunda desigualdad se sigue de que x es un punto del lugar singular:

$$\begin{aligned} \nu_x(f_i) \geq n_i &\Leftrightarrow \nu_x(f_i)|\alpha| \geq n_i|\alpha| \Leftrightarrow -n_i|\alpha| \geq -\nu_x(f_i)|\alpha| \Leftrightarrow \\ (\nu_x(f_i) - |\alpha|)n_i &= \nu_x(f_i)n_i - |\alpha|n_i \geq \nu_x(f_i)n_i - \nu_x(f_i)|\alpha| = \nu_x(f_i)(n_i - |\alpha|). \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.6. [55, Proposición 4.4 4) y 5)] Si $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 1} J_n W^n$ es una álgebra diferencial sobre V entonces

$$\text{Sing } \mathcal{G} = V(J_n),$$

para cualquier $n \geq 1$. Y, en particular, $\text{Sing } \mathcal{G} = V(\mathcal{G})$.

Demostración. Observamos que como \mathcal{G} es diferencial $\text{Diff}^{n-1}(J_n) \subset J_1$ para todo $n \geq 1$ por lo que

$$\begin{aligned} \text{Sing } \mathcal{G} &\stackrel{\text{Definición 4.1.8}}{=} \bigcap_{n \geq 1} \{x \in V : \nu_x(I_n) \geq n\} \stackrel{\text{Teorema 3.3.28}}{=} \bigcap_{n \geq 1} V(\text{Diff}_{V|k}^{n-1}(I_n)) \\ &= V(J_1) \cap \bigcap_{n \geq 2} V(\text{Diff}_{V|k}^{n-1}(I_n)) = V(J_1). \end{aligned}$$

Veremos ahora que $V(J_n) = V(J_1)$ para todo $n \geq 2$. Por un lado, al ser \mathcal{G} una álgebra de Rees, tenemos que $J_1^n \subset J_n$ y, por el otro lado, el hecho de ser diferencial implica que $J_1 \supset J_n$ (véase la Proposición 4.3.2) luego $V(J_1) = V(J_1^n) \supset V(J_n) \supset V(J_1)$.

Finalmente,

$$V(\mathcal{G}) \stackrel{\text{Definición 4.1.13}}{=} \bigcap_{n \geq 1} V(J_n) = V(J_1) = \text{Sing } \mathcal{G}.$$

□

4.3.2. Saturación por operadores diferenciales y transformación por explosiones: el lema de Giraud

A continuación presentamos un resultado que muestra la compatibilidad de las transformaciones de álgebras de Rees (véase la Definición 4.1.22) con la saturación por operadores diferenciales.

Lema 4.3.7 (de Giraud). [22, Teorema 4.1] *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k . Sea \mathcal{G} una álgebra de Rees sobre V y sea $V \xleftarrow{\rho} V_1$ una transformación monoidal permisible para \mathcal{G} (i.e., el centro de ρ está contenido en $\text{Sing } \mathcal{G}$). Entonces*

- (1) ρ también es permisible para $\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G}$ (ya que $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G})$) y
- (2) si denotamos por \mathcal{G}_1 y $\mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{G})_1$ a las álgebras transformadas de \mathcal{G} y de $\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G}$ por ρ , respectivamente, entonces

$$\mathcal{G}_1 \subset (\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G})_1 \subset \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{G}_1).$$

Observación 4.3.8. Con la notación del Lema de Giraud 4.3.7, el Teorema 4.3.5(1) implica que

$$\text{Sing } \mathcal{G}_1 = \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G})_1 = \text{Sing } \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{G}_1) \subset V_1.$$

Corolario 4.3.9. *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo k . Sean $\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{R}$ tres álgebras de Rees sobre V de modo que $\mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{G}) = \mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{R})$ y sea $V \xleftarrow{\rho} V_1$ una transformación monoidal permisible para \mathcal{G} . Entonces*

- (1) $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathcal{K} = \text{Sing } \mathcal{R}$ y, por lo tanto, ρ es permisible para las tres álgebras de Rees y
- (2) si $\mathcal{G}_1, \mathcal{K}_1$ y \mathcal{R}_1 denotan las álgebras de Rees transformadas de \mathcal{G}, \mathcal{K} y \mathcal{R} respectivamente entonces
 - (a) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{R}_1$,
 - (b) $\mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{G}_1) = \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{K}_1) = \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{R}_1)$ y,
 - (c) por lo tanto, $\text{Sing } \mathcal{G}_1 = \text{Sing } \mathcal{K}_1 = \text{Sing } \mathcal{R}_1$.

Demostración.

(1) Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{R}$ entonces, por la definición de lugar singular tenemos que

$$\text{Sing } \mathcal{G} \supset \text{Sing } \mathcal{K} \supset \text{Sing } \mathcal{R}, \quad (4.3.9.1)$$

además el Teorema 4.3.5(1) y las hipótesis iniciales afirman que

$$\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{G}) = \text{Sing } \mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{R}) = \text{Sing } \mathcal{R},$$

por lo que las inclusiones de (4.3.9.1) son igualdades.

(2) Para probar el contenido entre las álgebras de Rees transformadas escribimos

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n, \quad \mathcal{G}_1 = \bigoplus_{n \geq 0} I_{n,1} W^n, \quad \mathcal{K} = \bigoplus_{n \geq 0} J_n W^n \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_1 = \bigoplus_{n \geq 0} J_{n,1} W^n.$$

Observamos que el haz de ideales que define el divisor excepcional, $I(H)$, es un haz localmente libre. Así que podemos suponer que, en un abierto afín $U \subset V_1$, $I(H) = \langle h \rangle$ ($\subset \mathcal{O}_{V_1}(U)$), donde h no es un divisor de cero.

$$h^n I_{n,1}(U) = I_n \mathcal{O}_{V_1}(U) \subset J_n \mathcal{O}_{V_1}(U) = h^n J_{n,1}(U),$$

lo que implica que $I_{n,1}(U) \subset J_{n,1}(U)$. Esto demuestra que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{K}_1$. Y el mismo argumento prueba que $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{R}_1$.

Observamos ahora que estas inclusiones recién probadas, la hipótesis $\mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{G}) = \mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{R})$ y el Lema de Giraud 4.3.7 implican la siguiente cadena de inclusiones de álgebras de Rees:

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{R}_1 \subset (\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{R})_1 = (\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G})_1 \subset \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{G}_1).$$

Por lo tanto, las transformadas de las tres álgebras generan la misma álgebra de Rees diferencial. Y, por el apartado (1), sus lugares singulares coinciden.

□

Capítulo 5

Equivalencia débil entre álgebras de Rees

En el Apartado 4.1.3 hemos visto que una álgebra de Rees \mathcal{G} definida sobre un esquema liso V se puede transformar mediante un blow-up permisible $V \xleftarrow{\rho} V_1$ (i.e., con centro contenido en el lugar singular de \mathcal{G}). Esto da lugar a una nueva álgebra de Rees sobre V_1 que hemos llamado el álgebra de Rees transformada de \mathcal{G} por ρ .

En este capítulo vamos a considerar dos tipos de morfismos: las transformaciones monooidales permisibles, mencionadas anteriormente, y los morfismos lisos.

La transformación de las álgebras de Rees por cada uno de estos morfismos nos llevará a formular la noción de *sucesión local permisible*, la definición de *relación de equivalencia débil* y la noción de *árbol*. Esto será discutido en la primera sección de este capítulo.

En la Sección 5.2, formularemos y demostraremos el Teorema de Dualidad 5.2.3 y el Teorema de Canonicidad 5.2.4 que nos permitirán definir un representante canónico de cada clase de equivalencia débil.

En la última sección consideraremos distintas relaciones de equivalencia que se obtienen cuando cambiamos los morfismos que aparecen en la noción de sucesión local permisible. Probaremos que estas relaciones de equivalencia coinciden utilizando el Teorema de Dualidad 5.2.3.

5.1. Definiciones

En esta sección estableceremos varias nociones relacionadas con las álgebras de Rees construidas a lo largo de composiciones de transformaciones monooidales permisibles y de morfismos lisos.

En el primer apartado veremos las definiciones de *sucesión local* y \mathcal{G} -*sucesión local* para una álgebra de Rees \mathcal{G} (véanse las definiciones 5.1.2 y 5.1.3) con las que podremos establecer lo que llamaremos *relación de equivalencia débil* (véase la Definición 5.1.5). Para terminar este apartado veremos que si dos álgebras de Rees tienen la misma clausura entera, o que si generan el mismo álgebra diferencial, entonces son débilmente equivalentes (véanse los lemas

5.1.6 y 5.1.7).

En el segundo apartado introduciremos el concepto de *árbol* de una álgebra de Rees (véase la Definición 5.1.10) y formularemos las nociones de inclusión e intersección de árboles (véanse las definiciones 5.1.11 y 5.1.14).

5.1.1. Relación de equivalencia débil

Para definir esta relación de equivalencia débil necesitamos considerar morfismos lisos y los pull-backs de las álgebras de Rees por estos morfismos.

Comentario 5.1.1. Sea $V \xleftarrow{\varphi} V'$ un morfismo entre esquemas lisos y sea \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees. Denotaremos por $\varphi^*(\mathcal{G})$ al pull-back de \mathcal{G} por φ . Así, si $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n$ tenemos que

$$\varphi^*(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} \varphi^*(I_n) \mathcal{O}_{V'} W^n$$

y si, localmente, $\mathcal{G}(U) = \mathcal{O}_V(U)[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$ entonces

$$\varphi^*(\mathcal{G}(U)) = \mathcal{O}_{V'}(\varphi^{-1}(U))[\varphi^*(f_1) W^{n_1}, \dots, \varphi^*(f_s) W^{n_s}].$$

Definición 5.1.2. Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k . Una *sucesión local sobre V* es una sucesión de la forma

$$V = V_0 \xleftarrow{\pi_0} V_1 \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-2}} V_{m-1} \xleftarrow{\pi_{m-1}} V_m$$

donde para $j = 0, 1, \dots, m-1$, cada π_j es, o bien el blow-up en un subesquema cerrado y liso, o bien un morfismo liso.

Definición 5.1.3. Sea \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees, una \mathcal{G} -*sucesión local sobre V* es una sucesión local sobre V ,

$$(V, \mathcal{G}) = (V_0, \mathcal{G}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-2}} (V_{m-1}, \mathcal{G}_{m-1}) \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m), \quad (5.1.3.1)$$

donde para $j = 0, 1, \dots, m-1$, π_j es o bien una transformación monoidal permisible para $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{O}_{V_j}[W]$ (y entonces \mathcal{G}_{j+1} es la transformada de \mathcal{G}_j en el sentido de la Definición 4.1.22), o bien es un morfismo liso (y entonces \mathcal{G}_{j+1} es el pull-back de \mathcal{G}_j en V_{j+1} , como en el Comentario 5.1.1).

Definición 5.1.4. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees. Una \mathcal{G} - \mathcal{K} -*sucesión local sobre V* es una sucesión local sobre V que es a la vez una \mathcal{G} -sucesión local y una \mathcal{K} -sucesión local.

Definición 5.1.5. Dos álgebras de Rees, \mathcal{G} y \mathcal{K} , se dice que son *débilmente equivalentes* si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

- (1) $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathcal{K}$,

(2) cualquier \mathcal{G} -sucesión local sobre V induce una \mathcal{K} -sucesión local sobre V y cualquier \mathcal{K} -sucesión local sobre V induce una \mathcal{G} -sucesión local sobre V ,

(3) si

$$(V, \mathcal{G}) = (V_0, \mathcal{G}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m)$$

es una \mathcal{G} -sucesión local sobre V y

$$(V, \mathcal{K}) = (V_0, \mathcal{K}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{K}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{K}_m),$$

es su correspondiente \mathcal{K} -sucesión local sobre V inducida, entonces existe una igualdad de conjuntos cerrados, $\text{Sing}(\mathcal{G}_j) = \text{Sing}(\mathcal{K}_j)$ para $0 \leq j \leq m$, y viceversa, si

$$(V, \mathcal{K}) = (V_0, \mathcal{K}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{K}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{K}_m),$$

es una \mathcal{K} -sucesión local sobre V y

$$(V, \mathcal{G}) = (V_0, \mathcal{G}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m)$$

es su correspondiente \mathcal{G} -sucesión local sobre V inducida, entonces existe una igualdad de conjuntos cerrados, $\text{Sing}(\mathcal{K}_j) = \text{Sing}(\mathcal{G}_j)$ para $0 \leq j \leq m$.

La relación que acabamos de definir es una relación de equivalencia en el conjunto de álgebras de Rees sobre V . Si \mathcal{G} es una álgebra de Rees sobre V , denotaremos por $\mathcal{C}_V(\mathcal{G})$ a su clase de equivalencia.

Lema 5.1.6. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees con la misma clausura entera (i.e., $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{K}}$). Entonces

(1) $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathcal{K}$,

(2) si $V \xleftarrow{\rho} V_1$ es un blow-up en un centro incluido en $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathcal{K}$, entonces \mathcal{G}_1 y \mathcal{K}_1 (las álgebras transformadas de \mathcal{G} y \mathcal{K} en V_1) tienen la misma clausura entera y

(3) si $V \xleftarrow{\varphi} V_1$ es un morfismo liso, entonces $\varphi^*(\mathcal{G})$ y $\varphi^*(\mathcal{K})$ (los respectivos pull-backs de \mathcal{G} y \mathcal{K} por φ) poseen la misma clausura entera en V_1 .

Por lo tanto, \mathcal{G} y \mathcal{K} son débilmente equivalentes.

Demostración. El primer y segundo punto son consecuencia directa de los teoremas 4.2.10(1) y 4.2.11, respectivamente. A continuación veremos la demostración del tercer apartado.

Gracias al Lema 4.2.6 sabemos que existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que la N -ésima acción de Veronese sobre \mathcal{G} y \mathcal{K} produce dos casi-anillos de Rees. Digamos,

$$\mathbb{V}_N(\mathcal{G}) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n W^{nN} = \mathcal{O}_V[IW^N] \quad \text{y} \quad \mathbb{V}_N(\mathcal{K}) = \bigoplus_{n \geq 0} J^n W^{nN} = \mathcal{O}_V[JW^N].$$

CAPÍTULO 5. EQUIVALENCIA DÉBIL ENTRE ÁLGEBRAS DE REES

Por construcción del pull-back de una álgebra de Rees (véase el Comentario 5.1.1) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_N(\varphi^*(\mathcal{G})) &= \varphi^*(\mathbb{V}_N(\mathcal{G})) = \mathcal{O}_{V_1}[\varphi^*(I)\mathcal{O}_{V_1}W^N] \quad \text{y} \\ \mathbb{V}_N(\varphi^*(\mathcal{K})) &= \varphi^*(\mathbb{V}_N(\mathcal{K})) = \mathcal{O}_{V_1}[\varphi^*(J)\mathcal{O}_{V_1}W^N].\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{K}} & \xleftrightarrow{\text{Proposición 4.1.18}} & \overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{G})} = \overline{\mathbb{V}_N(\mathcal{K})} & \xleftrightarrow{\text{Lema 4.2.9}} & \bar{I} = \bar{J} \quad \text{y} \\ \overline{\varphi^*(\mathcal{G})} = \overline{\varphi^*(\mathcal{K})} & \xleftrightarrow{\text{Proposición 4.1.18}} & \overline{\mathbb{V}_N(\varphi^*(\mathcal{G}))} = \overline{\mathbb{V}_N(\varphi^*(\mathcal{K}))} & \xleftrightarrow{\text{Lema 4.2.9}} & \overline{\varphi^*(I)\mathcal{O}_{V_1}} = \overline{\varphi^*(J)\mathcal{O}_{V_1}}. \end{array}$$

Por lo tanto, es suficiente con probar que $\overline{\varphi^*(I)\mathcal{O}_{V_1}} = \overline{\varphi^*(J)\mathcal{O}_{V_1}}$ sabiendo que $\bar{I} = \bar{J}$. Lo cual es cierto ya que

$$\overline{\varphi^*(I)\mathcal{O}_{V_1}} \stackrel{\text{Propiedad 2.3.4}}{=} \overline{\varphi^*(\bar{I})\mathcal{O}_{V_1}} = \overline{\varphi^*(\bar{J})\mathcal{O}_{V_1}} \stackrel{\text{Propiedad 2.3.4}}{=} \overline{\varphi^*(J)\mathcal{O}_{V_1}}.$$

□

Lema 5.1.7. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees que generan la misma álgebra de Rees diferencial (i.e., $\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G} = \mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{K}$). Entonces,

- (1) $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathcal{K}$,
- (2) si $V \xleftarrow{\rho} V_1$ es un blow-up en un centro incluido en $\text{Sing } \mathcal{G} = \text{Sing } \mathcal{K}$, entonces \mathcal{G}_1 y \mathcal{K}_1 (las álgebras transformadas de \mathcal{G} y \mathcal{K} en V_1) también generan la misma \mathcal{O}_{V_1} -álgebra de Rees diferencial.
- (3) si $V \xleftarrow{\varphi} V_1$ es un morfismo liso, entonces $\varphi^*(\mathcal{G})$ y $\varphi^*(\mathcal{K})$ (los respectivos pull-backs de \mathcal{G} y \mathcal{K} por φ) también generan la misma \mathcal{O}_{V_1} -álgebra de Rees diferencial.

Por lo tanto, \mathcal{G} y \mathcal{K} son débilmente equivalentes.

Demostración. El primer punto es una consecuencia directa del Teorema 4.3.5(1). El segundo apartado es el corolario del lema de Giraud:

$$\mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{G}_1) \stackrel{\text{Corolario 4.3.9(2)}}{=} \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{G})_1) = \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathbb{D}\text{iff}_V(\mathcal{K})_1) \stackrel{\text{Corolario 4.3.9(2)}}{=} \mathbb{D}\text{iff}_{V_1}(\mathcal{K}_1).$$

El tercer apartado lo demostraremos sólo sobre puntos cerrados, ya que el resultado se puede extender después a abiertos gracias a la Observación 3.3.21. Sea $x_1 \in V_1$, sea $x = \varphi(x_1)$ y consideramos el morfismo entre anillo locales inducido, $\varphi^* : \mathcal{O}_{V,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{V_1,x_1}$.

Nuestro objetivo será construir un sistema de generadores para cada una de las álgebras de Rees diferenciales $\mathbb{D}\text{iff}(\varphi^*(\mathcal{G})_{x_1})$ y $\mathbb{D}\text{iff}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff}_V \mathcal{G})_{x_1})$ de modo que se puedan comparar.

Para ello vamos a definir un sistema regular de parámetros en los anillos locales regulares $\mathcal{O}_{V,x}$ y \mathcal{O}_{V_1,x_1} de forma adecuada y después, utilizando en el Teorema 3.3.13, definiremos una base de operadores diferenciales en cada uno de los anillos locales regulares.

Como $\mathcal{O}_{V,x}$ y \mathcal{O}_{V_1,x_1} son dominios locales lisos sobre k y φ es un morfismo liso, fijado un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V,x}$, digamos $\{z_1, \dots, z_d\}$, el Teorema 3.4.4 afirma que las imágenes, $\{\varphi^*(z_1), \dots, \varphi^*(z_d)\}$, formar parte de un sistema regular de parámetros en \mathcal{O}_{V_1,x_1} , digamos

$$\{\varphi^*(z_1), \dots, \varphi^*(z_d), y_{d+1}, \dots, y_t\}.$$

Ahora, el conjunto de operadores diferenciales $\{\Delta^\alpha : \mathcal{O}_{V,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,x}\}_{0 \leq |\alpha| \leq r}$ tales que

$$\Delta^\alpha (z^\beta) = \begin{cases} \binom{\beta}{\alpha} z^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta \geq \alpha \text{ (en todas las componentes),} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.1.7.1)$$

es una base de $\text{Diff}_{\mathcal{O}_{V,x}|k}^r$ (véase el Teorema 3.3.13). De igual modo, el conjunto de operadores diferenciales $\{\Delta^{(\alpha,\alpha')} : \mathcal{O}_{V_1,x_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{V_1,x_1}\}_{0 \leq |(\alpha,\alpha')| \leq r}$ donde

$$\Delta^{(\alpha,\alpha')} ((\varphi^* z)^\beta y^{\beta'}) = \begin{cases} \binom{(\beta, \beta')}{(\alpha, \alpha')} (\varphi^* z)^{\beta-\alpha} y^{\beta'-\alpha'} & \text{si } \beta \geq \alpha \text{ y } \beta' \geq \alpha' \\ & \text{(en todas las componentes),} \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.1.7.2)$$

también es una base de $\text{Diff}_{\mathcal{O}_{V_1,x_1}|k}^r$. Observamos que por la particular construcción del sistema regular de parámetros en \mathcal{O}_{V_1,x_1} , comparando (5.1.7.1) y (5.1.7.2) tenemos que

$$\Delta^{(\alpha,\alpha')} ((\varphi^* z)^\beta) = \begin{cases} \binom{\beta}{\alpha} (\varphi^* z)^{\beta-\alpha} = \varphi^*(\Delta^\alpha(z^\beta)) & \text{si } \beta \geq \alpha \text{ y } \alpha' = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos ahora que $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{V,x}[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$ es una álgebra de Rees sobre $\mathcal{O}_{V,x}$, entonces para cada generador $f_i W^{n_i}$ de \mathcal{R} tenemos que

$$\Delta^{(\alpha,\alpha')} (\varphi^*(f_i)) = \begin{cases} \varphi^*(\Delta^\alpha(f_i)) & \text{si } \alpha' = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha' \neq 0. \end{cases}$$

Como

$$\varphi^*(\mathcal{R}) = \mathcal{O}_{V_1,x_1}[\varphi^*(f_1)W^{n_1}, \dots, \varphi^*(f_s)W^{n_s}],$$

el álgebra de Rees diferencial generada por $\varphi^*(\mathcal{R})$ se puede generar por los siguientes conjuntos:

- $\left\{ \Delta^{(\alpha,\alpha')} (\varphi^*(f_i)) W^{t_i} : i = 1, \dots, s, 0 \leq |(\alpha, \alpha')| < n_i, 1 \leq t_i \leq n_i - |(\alpha, \alpha')| \right\},$

- $\left\{ \Delta^{(\alpha,0)}(\varphi^*(f_i))W^{t_i} : i = 1, \dots, s, 0 \leq |\alpha| < n_i, 1 \leq t_i \leq n_i - |\alpha| \right\}$ y
- $\left\{ \varphi^*(\Delta^\alpha(f_i))W^{t_i} : i = 1, \dots, s, 0 \leq |\alpha| < n_i, 1 \leq t_i \leq n_i - |\alpha| \right\}$

(véase la expresión (4.3.4.2)). Por lo que

$$\mathbb{D}\text{iff}_{\mathcal{O}_{V_1, x_1}}(\varphi^*(\mathcal{R})) = \varphi^*(\mathbb{D}\text{iff}_{\mathcal{O}_{V, x}}(\mathcal{R})). \quad (5.1.7.3)$$

Finalmente, observamos que si \mathcal{G}_x y \mathcal{K}_x generan la misma álgebra diferencial concluimos que

$$\mathbb{D}\text{iff}_{\mathcal{O}_{V_1, x_1}}(\varphi^*(\mathcal{G})_{x_1}) \stackrel{(5.1.7.3)}{=} \varphi^*(\mathbb{D}\text{iff}_{\mathcal{O}_{V, x}}(\mathcal{G}_x)) = \varphi^*(\mathbb{D}\text{iff}_{\mathcal{O}_{V, x}}(\mathcal{K}_x)) \stackrel{(5.1.7.3)}{=} \mathbb{D}\text{iff}_{\mathcal{O}_{V_1, x_1}}(\varphi^*(\mathcal{K})_{x_1}).$$

□

Comentario 5.1.8. De la definición de los operadores diferenciales en (5.1.7.2) vemos que, en particular

$$\begin{aligned} \Delta^{(0, \alpha')}(\varphi^*(z)^\beta y^{\beta'}) &= \sum_{\gamma'_1 + \gamma'_2 = \alpha'} \Delta^{(0, \gamma'_1)}(\varphi^*(z)^\beta) \Delta^{(0, \gamma'_2)}(y^{\beta'}) = \varphi^*(z)^\beta \Delta^{(0, \alpha')} (y^{\beta'}) \quad y \\ \Delta^{(0, \alpha')}(\varphi^*(z)^\beta) &= \begin{cases} \varphi^*(z)^\beta & \text{si } \alpha' = 0, \\ 0 & \text{si } \alpha' \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que los operadores diferenciales de la forma $\Delta^{(0, \alpha')}$ son operadores relativos a $\mathcal{O}_{V, x}$.

Comentario 5.1.9. En (5.1.7.3) se prueba que el pull-back de una álgebra de Rees diferencial por un morfismo liso continúa siendo una álgebra de Rees diferencial.

Estos dos ejemplos nos proporcionan dos modos naturales de extender una álgebra de Rees \mathcal{G} permaneciendo en la misma clase de equivalencia débil, a saber, tomando su clausura entera, $\overline{\mathcal{G}}$ y saturando por la acción de operadores diferenciales, $\mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G})$. Los teoremas de Dualidad 5.2.3 y de Canonicidad 5.2.4 identifican un representante canónico de cada clase de equivalencia combinando estas dos acciones.

5.1.2. Árboles de álgebras de Rees

Definición 5.1.10. Sea \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees y sea

$$(V, \mathcal{G}) = (V_0, \mathcal{G}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m), \quad (5.1.10.1)$$

una \mathcal{G} -sucesión local sobre V . La colección de subconjuntos cerrados

$$\text{Sing } \mathcal{G}_0 \subset V_0, \quad \text{Sing } \mathcal{G}_1 \subset V_1, \quad \dots, \quad \text{Sing } \mathcal{G}_m \subset V_m$$

determinada por la \mathcal{G} -sucesión local (5.1.10.1) es una *rama de subconjuntos cerrados sobre V determinada por \mathcal{G}* , o simplemente una *rama de \mathcal{G}* .

La unión de todas las ramas de subconjuntos cerrados construidas considerando todas las \mathcal{G} -sucesiones locales sobre V es el *árbol de subconjuntos cerrados sobre V determinado por \mathcal{G}* o simplemente el *árbol de \mathcal{G}* y lo denotaremos por $\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$.

Definición 5.1.11. Sean \mathcal{K} y \mathcal{G} dos álgebras de Rees sobre V . Se dice que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$$

si $\text{Sing } \mathcal{K} \subset \text{Sing } \mathcal{G}$ y cualquier \mathcal{K} -sucesión local sobre V ,

$$(V, \mathcal{K}) = (V_0, \mathcal{K}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{K}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{K}_m),$$

induce una \mathcal{G} -sucesión local sobre V ,

$$(V, \mathcal{G}) = (V_0, \mathcal{G}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m),$$

donde $\text{Sing } \mathcal{K}_j \subset \text{Sing } \mathcal{G}_j$ para $j = 0, \dots, m$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$ si

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{K}).$$

Observación 5.1.12. Sean \mathcal{K} y \mathcal{G} dos álgebras de Rees sobre V tales que $\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$. Sea $V \xleftarrow{\pi} V'$ una transformación permisible para \mathcal{K} (en este caso también será una transformación permisible para \mathcal{G}) o un morfismo liso. Entonces comparando sólo las ramas de ambos árboles que comienzan con el morfismo π vemos que $\mathcal{F}_{V'}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_{V'}(\mathcal{G})$.

Observación 5.1.13. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees tales que $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ (condición que en un abierto afín significa que tenemos una inclusión de anillos graduados), entonces

(1) $\text{Sing } \mathcal{K} \subset \text{Sing } \mathcal{G}$,

(2) si $V \xleftarrow{\rho} V_1$ es una transformación monoidal permisible para \mathcal{K} entonces también es permisible para \mathcal{G} (ya que $\text{Sing } \mathcal{K} \subset \text{Sing } \mathcal{G}$). Además, por la construcción de las álgebras de Rees transformadas tenemos que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{K}_1$ y

(3) si $V \xleftarrow{\varphi} V_1$ es un morfismo liso entonces $\varphi^*(\mathcal{G}) \subset \varphi^*(\mathcal{K})$.

Luego, por inducción, concluimos que si $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ entonces $\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$.

Definición 5.1.14. Sean \mathcal{G} , \mathcal{K} y \mathcal{R} tres álgebras de Rees en V . Se dice que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{R}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{K})$$

si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

(1) $\text{Sing } \mathcal{R} = \text{Sing } \mathcal{G} \cap \text{Sing } \mathcal{K}$,

(2) cualquier \mathcal{G} - \mathcal{K} -sucesión local sobre V induce una \mathcal{R} -sucesión local sobre V y cualquier \mathcal{R} -sucesión local sobre V induce una \mathcal{G} - \mathcal{K} -sucesión local sobre V y

(3) dada una \mathcal{G} - \mathcal{K} - \mathcal{R} -sucesión local sobre V ,

$$(V, \mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{R}) = (V_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{K}_0, \mathcal{R}_0) \longleftarrow (V_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{R}_1) \longleftarrow \cdots \longleftarrow (V_m, \mathcal{G}_m, \mathcal{K}_m, \mathcal{R}_m),$$

se satisface la siguiente igualdad:

$$\text{Sing } \mathcal{R}_j = \text{Sing } \mathcal{G}_j \cap \text{Sing } \mathcal{K}_j, \quad \text{para cada } j = 0, \dots, m.$$

Lema 5.1.15. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees. Entonces

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{G} \odot \mathcal{K}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{K}),$$

donde $\mathcal{G} \odot \mathcal{K}$ denota el \mathcal{O}_V -álgebra de Rees más pequeña que contiene a \mathcal{G} y a \mathcal{K} (véase la Definición 4.1.19).

Demostración. Por la Proposición 4.1.20 sabemos que localmente la unión de los generadores de \mathcal{G} y de \mathcal{K} generan $\mathcal{G} \odot \mathcal{K}$. Por lo tanto, la Proposición 4.1.21, el Comentario 5.1.1 y la Proposición 4.1.23 implican que $\mathcal{G} \odot \mathcal{K}$ satisface las tres propiedades de la Definición 5.1.14. \square

Observación 5.1.16. Podríamos pensar en la intersección de los árboles $\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$ y $\mathcal{F}_V(\mathcal{K})$ como en las ramas de subconjuntos cerrados formados por las intersecciones de los lugares singulares de las transformadas de \mathcal{G} y \mathcal{K} en las \mathcal{G} - \mathcal{K} -sucesiones locales.

El Lema 5.1.15 establece que esta intersección es el árbol de subconjuntos cerrados de una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees, por lo que podríamos decir que la intersección de árboles de álgebras de Rees es *cerrada*.

Además, con la definición de inclusión de árboles de álgebras de Rees 5.1.11, observamos que el árbol de \mathcal{R} en la Definición 5.1.14 satisface que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{R}) = \text{máx} \{ \mathcal{F}_V(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ es una } \mathcal{O}_V\text{-álgebra de Rees,} \\ \mathcal{F}_V(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \text{ y } \mathcal{F}_V(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \}.$$

En otras palabras, si otra álgebra de Rees, \mathcal{S} , cumple que $\mathcal{F}_V(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{F}_V(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{R})$.

Observación 5.1.17. En el Apartado 5.2.3 estudiaremos la intersección de una álgebra de Rees \mathcal{G} y un casi-anillo de Rees $\mathcal{X} = \mathcal{O}_V[I(X)W]$ donde $X \subset V$ es un subesquema cerrado y liso. Nuestro objetivo será definir esta intersección (que por definición es el árbol de una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees) como el árbol de una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees.

5.2. Árboles y equivalencia débil: teoremas de Dualidad y de Canonicidad

En esta sección enunciaremos el Teorema de Dualidad 5.2.3 y el Teorema de Canonicidad 5.2.4. El primero establece cuándo dos álgebras de Rees son débilmente equivalentes utilizando herramientas del álgebra conmutativa: las ya estudiadas operaciones de clausura entera y saturación por operadores diferenciales. Y el segundo permite dar un representante *canónico* de cada clase de equivalencia débil.

En el primer Apartado 5.2.1 estableceremos estos dos resultados y probaremos el Teorema de Canonicidad como consecuencia del Teorema de Dualidad.

La demostración del Teorema de Dualidad será abordada en el Apartado 5.2.4, en ella se utilizarán los resultados que aparecen en los apartados 5.2.2 y 5.2.3.

5.2.1. Enunciado de los teoremas de Dualidad y de Canonicidad

El motivo por el que hemos introducido la estructura de árbol de una álgebra de Rees es el siguiente:

Observación 5.2.1. Comparando la definición de equivalencia débil 5.1.5 y la definición de árbol 5.1.10 notamos que dos álgebras de Rees son débilmente equivalentes si y sólo si sus árboles coinciden.

I. e., si \mathcal{G} y \mathcal{K} son dos álgebras de Rees sobre un esquema liso V se tiene que

$$\mathcal{C}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{C}_V(\mathcal{K}) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{K}).$$

Ejemplo 5.2.2. Esta observación y los lemas 5.1.6 y 5.1.7 muestran que para cualquier álgebra de Rees \mathcal{G} sobre un esquema liso V ,

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\overline{\mathcal{G}}) = \mathcal{F}_V(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}}).$$

Los siguientes teoremas son más concretos en lo que a este tipo de comparaciones se refiere.

Teorema de Dualidad 5.2.3. *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k y sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos álgebras de Rees sobre V . Entonces*

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} \subset \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}}.$$

Teorema de Canonicidad 5.2.4. *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k , y sea \mathcal{G} una álgebra de Rees. Entonces el álgebra de Rees diferencial $\mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G})$ es un representante canónico de $\mathcal{C}_V(\mathcal{G})$.*

El Teorema de Dualidad 5.2.3 establece que para dos álgebras de Rees, \mathcal{G} y \mathcal{K} , existe un representante canónico para cada una de las clases de equivalencia $\mathcal{C}_V(\mathcal{G})$ y $\mathcal{C}_V(\mathcal{K})$: $\overline{\text{Diff}(\mathcal{G})}$ y $\overline{\text{Diff}(\mathcal{K})}$, de tal manera que $\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$ si y sólo si existe una inclusión entre sus representantes canónicos, i.e., si y sólo si $\overline{\text{Diff}(\mathcal{G})} \subset \overline{\text{Diff}(\mathcal{K})}$.

El Teorema de Canonicidad 5.2.4 afirma que en cada clase de equivalencia, digamos $\mathcal{C}_V(\mathcal{G})$, el elemento $\overline{\text{Diff}(\mathcal{G})}$ es el mayor respecto al orden dado por la inclusión. Por lo tanto, llamaremos *representante canónico* de la clase de equivalencia de \mathcal{G} a $\overline{\text{Diff}(\mathcal{G})}$.

Comentario 5.2.5. Estos resultados están relacionados con el Teorema de Presentación Finita de Hironaka que aparece en [40]. Sin embargo, la prueba que veremos en el Apartado 5.2.4 utiliza técnicas propias del álgebra conmutativa.

Demostración del Teorema de Canonicidad 5.2.4. Si \mathcal{G} y \mathcal{K} son débilmente equivalentes, por la Observación 5.2.1 tenemos que $\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{K})$ y el Teorema de Dualidad 5.2.3 afirma que $\overline{\text{Diff}(\mathcal{G})} = \overline{\text{Diff}(\mathcal{K})}$.

Por lo tanto, si hubiese otra álgebra, $\mathcal{R} \in \mathcal{C}_V(\mathcal{G})$, tal que $\overline{\text{Diff}(\mathcal{G})} \subsetneq \mathcal{R}$, tendríamos la siguiente contradicción

$$\mathcal{R} \subset \overline{\text{Diff}(\mathcal{R})} = \overline{\text{Diff}(\mathcal{G})} \subsetneq \mathcal{R}.$$

□

Observación 5.2.6. El mismo argumento de esta demostración prueba que la clausura entera de $\text{Diff } \mathcal{G}$ es nuevamente una álgebra de Rees diferencial. En efecto, si no fuera su cierre por operadores diferenciales sería una álgebra de Rees más grande.

Observación 5.2.7. Puede haber otras nociones (igualmente) naturales de \mathcal{G} -sucesiones locales sobre esquemas lisos que, en principio, puede llevar a diferentes relaciones de equivalencia entre álgebras de Rees. Veremos algunas de ellas en la Sección 5.3.

El resto de la sección está dedicado a la prueba del Teorema de Dualidad.

Estrategia 5.2.8 (de la demostración del Teorema de Dualidad 5.2.3). La prueba que aparecerá en el Apartado 5.2.4 consiste en reducir el problema a un caso más sencillo que va a ser tratado previamente, en la Proposición 5.2.10. Para poder hacer esta reducción necesitamos afrontar el problema de restringir árboles de álgebras de Rees a subesquemas cerrados de modo que sigan siendo árboles de álgebras de Rees sobre este medio ambiente más pequeño, esto lo trataremos en el Aparato 5.2.3, concretamente en la Proposición 5.2.20.

5.2.2. Relación entre clausura entera y árboles de cerrados

El propósito de este apartado es desarrollar herramientas necesarias para comprobar cuándo una álgebra de Rees está contenida en la clausura entera de otra.

En esta línea ya hemos visto varios resultados: la Proposición 4.1.18 establece que el problema es equivalente a estudiar las álgebras de Rees después de cualquier acción de Veronese,

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

el Lema 4.2.6 afirma que se puede encontrar una acción de Veronese que produzca como resultado un casi-anillo de Rees y el Lema 4.2.9 reduce el problema de comparar clausuras enteras de casi-anillos de Rees al de comparar clausuras enteras de ideales.

Otro resultado en la dirección del Teorema de Dualidad 5.2.3 aparecerá en la Proposición 5.2.10, donde nos interesamos por la clausura entera de casi-anillos de Rees generados por un ideal localmente principal en algún grado (problema relacionado con la Proposición 2.4.2).

Lema 5.2.9. *Sea \mathbb{H} una hipersuficie reducida e irreducible en un esquema liso V , sea $\mathcal{H} = \mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})^N W^n]$ y sea $\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[(I(\mathbb{H})^Q K) W^q]$ para algún haz de ideales $K \not\subset I(\mathbb{H})$. Entonces,*

$$\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}} \text{ si y sólo si } \frac{Q}{q} \geq \frac{N}{n}.$$

Demostración. Antes de probar las dos implicaciones observamos que como \mathcal{H} es un casi-anillo de Rees tenemos que $\left[\overline{\mathcal{H}}\right]_{nq} = \overline{I(\mathbb{H})^{Nq} W^{nq}}$ (véase el Ejemplo 4.2.4).

\Rightarrow : Supongamos que $\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}}$. En las partes homogéneas de grado nq vemos que

$$I(\mathbb{H})^{Qn} K^n \subset \overline{I(\mathbb{H})^{Nq}},$$

y localizando en h , el punto genérico de \mathbb{H} , obtenemos

$$\begin{aligned} I(\mathbb{H})^{Qn} \mathcal{O}_{V,h} &= I(\mathbb{H})^{Qn} K^n \mathcal{O}_{V,h} \subset \overline{I(\mathbb{H})^{Nq}} \mathcal{O}_{V,h} \\ &\stackrel{\text{Proposición 2.3.6}}{=} \overline{I(\mathbb{H})^{Nq} \mathcal{O}_{V,h}} \stackrel{\text{Proposición 2.3.7}}{=} I(\mathbb{H})^{Nq} \mathcal{O}_{V,h}, \end{aligned}$$

por lo que $Qn \geq Nq$.

\Leftarrow : Supongamos ahora que $Qn \geq Nq$ entonces

$$I(\mathbb{H})^{Qn} K^n \subset I(\mathbb{H})^{Nq} = \overline{I(\mathbb{H})^{Nq}},^*$$

y el Lema 4.2.9 implica que

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})^Q K W^q] \subset \overline{\mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})^N W^n]} = \overline{\mathcal{H}}.$$

□

Proposición 5.2.10. *Sea \mathbb{H} una hipersuperficie reducida e irreducible en un esquema liso V . Sean N, n y b tres enteros positivos con $N \geq n$. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})^N W^n]$ y sea $\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[JW^b]$ para algún haz de ideales $J \subset \mathcal{O}_V$. Entonces*

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}}.$$

*Al ser V liso, para cualquier punto $x \in V$, $\mathcal{O}_{V,x}$ es un dominio normal (véase la Propiedad 2.1.9(2)) y el ideal principal $I(\mathbb{H})^{Nq} \mathcal{O}_{V,x}$ es íntegramente cerrado (véase la Proposición 2.3.7). Al suceder esto en todo punto $x \in V$, tenemos que los haces de ideales $I(\mathbb{H})^{Nq}$ y $\overline{I(\mathbb{H})^{Nq}}$ coinciden en todo V .

CAPÍTULO 5. EQUIVALENCIA DÉBIL ENTRE ÁLGEBRAS DE REES

Demostración. La Proposición 4.1.18 afirma que $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{H})}$ y $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{G})}$, luego,

$$\blacksquare \mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{G}} \subset \overline{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \overline{\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{G})} \subset \overline{\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{H})} \Leftrightarrow \mathbb{V}_{nb}(\mathcal{G}) \subset \overline{\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{H})} \text{ y}$$

■ si dos álgebras de Rees tienen la misma clausura entera entonces son débilmente equivalentes y sus árboles de subconjuntos cerrados coinciden (véanse el Lema 5.1.6 y la Observación 5.2.1), en nuestro caso observamos que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_V(\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{H})) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{G})),$$

con lo que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \mathcal{F}_V(\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{F}_V(\mathbb{V}_{nb}(\mathcal{G})).$$

Por lo tanto, es suficiente con probar la proposición para

$$\mathcal{H} = \mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})^{Nb}W^{nb}] \quad \text{y} \quad \mathcal{G} = \mathcal{O}_V[J^nW^{nb}].$$

El siguiente paso consiste en escribir $J^n = I(\mathbb{H})^Q J_1$ con $J_1 \not\subset I(\mathbb{H})$. De este modo, tenemos que

$$\mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}} \stackrel{\text{Lema 5.2.9}}{\Leftrightarrow} \frac{Q}{nb} \geq \frac{Nb}{nb} \Leftrightarrow Q \geq Nb.$$

Por lo tanto, vamos a probar el resultado viendo la siguiente equivalencia:

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \quad \text{si y sólo si} \quad Q \geq Nb.$$

\Leftarrow : Supongamos que $Q \geq Nb$. En este caso $J^n = I(\mathbb{H})^Q J_1 \subset I(\mathbb{H})^{Nb}$ por lo que $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ (considerados anillos graduados), luego la Observación 5.1.13 nos permite concluir que $\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$.

\Rightarrow : Ahora supongamos que $\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$.

Si $N = n$, observamos la siguiente inclusión entre lugares singulares:

$$\mathbb{H} = \text{Sing } \mathcal{H} \stackrel{\text{Definición 5.1.11}}{\subset} \text{Sing } \mathcal{G} = \{x \in V : \nu_x(I(\mathbb{H})^Q J_1) \geq nb\},$$

por lo tanto, en este caso, $Q \geq nb = Nb$.

Si $N > n$, vamos a construir una \mathcal{H} -sucesión local que, por la Definición 5.1.11, también será una \mathcal{G} -sucesión local y aplicaremos el argumento conocido como *truco de Hironaka*. Estos son los morfismos lisos y las transformaciones monoidales que definirán nuestra sucesión local:

(I) Si el subesquema $\mathbb{H} \subset V$ no es liso, sus puntos singulares forman un subconjunto cerrado de al menos codimensión 2 en V (véanse las condiciones equivalentes (4) y (5) del Teorema 2.2.16), por lo tanto, reemplazando V por el conjunto abierto $U = V \setminus \text{Sing } \mathbb{H}$ podemos suponer que $\mathbb{H}|_U$ es liso.

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

El primer paso de la \mathcal{H} -sucesión local que queremos construir es la restricción al abierto U , digamos $V \xleftarrow{\varphi} U$, donde el pull-back de \mathcal{H} por φ es simplemente la restricción del haz de ideales $I(\mathbb{H})$ al abierto U , $\varphi^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H}(U)$.

(II) El segundo morfismo es el producto de U por una recta afín, digamos $U \xleftarrow{\phi} V'_0$, donde $V'_0 = U \times \mathbb{A}_k^1$. Denotamos por \mathcal{H}'_0 el pull-back de $\mathcal{H}(U)$ por ϕ , $\phi^*(\mathcal{H}(U))$ y por \mathbb{H}'_0 la preimagen de la hipersuperficie, $\phi^{-1}(\mathbb{H}|_U) = \mathbb{H}|_U \times \mathbb{A}_k^1$.

(III) Observamos que después de aplicar $\phi \circ \varphi$

$$\mathbb{H}'_0 = \mathbb{H}|_U \times \mathbb{A}_k^1 = \text{Sing } \mathcal{H}'_0.$$

Fijamos un punto cerrado $x \in \mathbb{A}_k^1$ y consideramos la transformación monoidal permisible con centro $\mathbb{H}|_U \times \{x\}$, digamos $V'_0 \xleftarrow{\rho_0} V'_1$. Sean H_1 el divisor excepcional y \mathbb{H}'_1 el transformado estricto de \mathbb{H}'_0 en V'_1 . Ahora \mathcal{H}'_1 , la transformada de \mathcal{H}'_0 , factoriza del siguiente modo:

$$\mathcal{H}'_1 = \mathcal{O}_{V'_1}[I(\mathbb{H}'_1)^{Nb} I(H_1)^{(N-n)b} \mathcal{O}_{V'_1} W^{nb}].$$

(IV) Como $\mathbb{H}'_1 \cap H_1 \subset \mathbb{H}'_1 \subset \text{Sing } \mathcal{H}'_1$, el blow-up en el centro $\mathbb{H}'_1 \cap H_1$, digamos $V'_1 \xleftarrow{\rho_1} V'_2$, es una transformación monoidal permisible para \mathcal{H}'_1 . Su correspondiente álgebra de Rees transformada es:

$$\mathcal{H}'_2 = \mathcal{O}_{V'_2}[I(\mathbb{H}'_2)^{Nb} I(H_1)^{(N-n)b} I(H_2)^{2(N-n)b} W^{nb}].$$

Continuamos explotando en las sucesivas intersecciones del transformado estricto de \mathbb{H}'_1 con el nuevo divisor excepcional. Tras m explosiones de este tipo, la transformada de \mathcal{H}'_1 se puede expresar como:

$$\mathcal{H}'_m = \mathcal{O}_{V'_m}[I(\mathbb{H}'_m)^{Nb} I(H_1)^{(N-n)b} \dots I(H_m)^{m(N-n)b} W^{nb}].$$

(V) Notamos que el número de explosiones m puede ser arbitrariamente grande. Por lo tanto, podemos suponer que $m \geq \frac{n}{N-n}$. Con esta cota, nos aseguramos que

$$H_m \subset \text{Sing } \mathcal{H}'_m = \{x \in V'_m : \nu_x(I(\mathbb{H}'_m)^{Nb} I(H_1)^{(N-n)b} \dots I(H_m)^{m(N-n)b}) \geq nb\}$$

es un centro permisible para \mathcal{H}'_m . Tras explotar en la hipersuperficie H_m , la nueva álgebra de Rees transformada es

$$\mathcal{H}'_{m+1} = \mathcal{O}_{V'_{m+1}}[I(\mathbb{H}'_{m+1})^{Nb} I(H_1)^{(N-n)b} \dots I(H_m)^{m(N-n)b-nb} W^{nb}]$$

y $H_m \subset \text{Sing } \mathcal{H}'_{m+1}$ si y sólo si $m(N-n)b - nb \geq nb$. Continuamos explotando en H_m hasta que deja de ser un centro permisible. Si llamamos ℓ al número máximo de explosiones en H_m que podemos realizar tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq m(N-n)b - \ell nb < nb, \\ \ell nb &\leq m(N-n)b < (1+\ell)nb \\ \ell &\leq \frac{m(N-n)b}{nb} < 1 + \ell, \end{aligned}$$

$$\text{i. e., } \ell = \left\lfloor \frac{m(N-n)b}{nb} \right\rfloor, \text{ donde } \lfloor \cdot \rfloor \text{ denota la parte entera.} \quad (5.2.10.1)$$

La \mathcal{H} -sucesión local (dependiente de m) que hemos construido es:

$$\begin{aligned} V \xleftarrow{\varphi} U \xleftarrow{\phi} U \times \mathbb{A}_k^1 = V'_0 \xleftarrow{\rho_0} V'_1 \xleftarrow{\rho_1} V'_2 \xleftarrow{\rho_2} \dots \\ \mathbb{H}|_U \times \{x\} \quad \mathbb{H}'_1 \cap H_1 \quad \mathbb{H}'_2 \cap H_2 \\ \dots \xleftarrow{\rho_{m-2}} V'_{m-1} \xleftarrow{\rho_{m-1}} V'_m \xleftarrow{\eta_1} \dots \xleftarrow{\eta_{\ell-1}} V'_m \xleftarrow{\eta_\ell} V'_m. \\ \mathbb{H}'_{m-1} \cap H_{m-1} \quad H_m \quad H_m \end{aligned} \quad (5.2.10.2)$$

Por hipótesis, $\mathcal{F}_V(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G})$, por lo tanto la sucesión local (5.2.10.2) también es una \mathcal{G} -sucesión local. Escribimos a continuación las diversas transformadas de \mathcal{G} a lo largo de esta sucesión:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(U) &= \mathcal{O}_U[I(\mathbb{H}|_U)^Q J \mathcal{O}_U W^{nb}], \\ \mathcal{G}'_0 &= \mathcal{O}_{V'_0}[I(\mathbb{H}'_0)^Q J \mathcal{O}_{V'_0} W^{nb}], \\ \mathcal{G}'_1 &= \mathcal{O}_{V'_1}[I(\mathbb{H}'_1)^Q I(H_1)^{Q-nb} J_1 \mathcal{O}_{V'_1} W^{nb}], \\ \mathcal{G}'_2 &= \mathcal{O}_{V'_2}[I(\mathbb{H}'_2)^Q I(H_1)^{Q-nb} I(H_2)^{2(Q-nb)} J_1 \mathcal{O}_{V'_2} W^{nb}], \\ &\vdots \\ \mathcal{G}'_m &= \mathcal{O}_{V'_m}[I(\mathbb{H}'_m)^Q I(H_1)^{Q-nb} \dots I(H_{m-1})^{(m-1)(Q-nb)} I(H_m)^{m(Q-nb)} J_1 \mathcal{O}_{V'_m} W^{nb}], \\ \mathcal{G}'_{m+1} &= \mathcal{O}_{V'_m}[I(\mathbb{H}'_m)^Q I(H_1)^{Q-nb} \dots I(H_{m-1})^{(m-1)(Q-nb)} I(H_m)^{m(Q-nb)-nb} J_1 \mathcal{O}_{V'_m} W^{nb}], \\ &\vdots \\ \mathcal{G}'_{m+\ell} &= \mathcal{O}_{V'_m}[I(\mathbb{H}'_m)^Q I(H_1)^{Q-nb} \dots I(H_{m-1})^{(m-1)(Q-nb)} I(H_m)^{m(Q-nb)-\ell nb} J_1 \mathcal{O}_{V'_m} W^{nb}]. \end{aligned}$$

Observamos que, repitiendo el cálculo de ℓ , el número máximo de explosiones con centro H_m que son permisibles para \mathcal{G}'_m es $\left\lfloor \frac{m(Q-nb)}{nb} \right\rfloor$ y como la sucesión local (5.2.10.2) es permisible para ambas álgebras tenemos que

$$\ell = \left\lfloor \frac{m(N-n)b}{nb} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m(Q-nb)}{nb} \right\rfloor. \quad (5.2.10.3)$$

Vistas como funciones de m , son las partes enteras de las rectas de pendientes $\frac{(N-n)b}{nb}$ y $\frac{Q-nb}{nb}$ respectivamente. Por lo tanto, como la desigualdad (5.2.10.3) se debe satisfacer para cualquier m suficientemente grande ($\geq \frac{n}{N-n}$), tenemos que las pendientes cumplen que

$$\begin{aligned} \frac{(N-n)b}{nb} &\leq \frac{Q-nb}{nb} \\ (N-n)b &\leq Q-nb \\ Nb &\leq Q, \end{aligned}$$

desigualdad que queríamos probar.

□

5.2.3. Restricciones de árboles en subesquemas cerrados lisos

Recordamos que una álgebra de Rees \mathcal{G} sobre V determina un árbol de conjuntos cerrados, $\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$. Este árbol se construye tomando los lugares singulares de las transformadas o los pull-backs de \mathcal{G} por los morfismos que constituyen cada \mathcal{G} -sucesión local en V . Además, la clase $\mathcal{C}_V(\mathcal{G})$ está completamente determinada por $\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$ (véase la Observación 5.2.1).

Presentaremos una noción de restricción de árboles a subesquemas cerrados. El resultado central es la Proposición 5.2.20 que muestra que la restricción de $\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$ en un esquema cerrado y liso, $X \subset V$, es el árbol de una álgebra de Rees definida ahora sobre X .

Empezamos con una primera aproximación:

Observación 5.2.11. Sea \mathcal{G} una álgebra de Rees sobre V . Fijado un subesquema cerrado y liso, $X \subset V$, consideramos el casi-anillo de Rees $\mathcal{X} = \mathcal{O}_V[I(X)W]$ donde $X \subset V$ es un subesquema cerrado y liso. Entonces, cualquier \mathcal{G} - \mathcal{X} -sucesión local sobre V ,

$$(V, \mathcal{G}, \mathcal{X}) = (V_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{X}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{X}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m, \mathcal{X}_m), \quad (5.2.11.1)$$

induce, al mismo tiempo, una sucesión local sobre el esquema X ,

$$X = X_0 \xleftarrow{\pi_0|_{X_0}} X_1 \xleftarrow{\pi_1|_{X_1}} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}|_{X_{m-1}}} X_m,$$

donde $X_{j+1} = \text{Sing } \mathcal{X}_{j+1}$ (es decir, si π_j es una transformación monoidal permisible X_{j+1} es el transformada estricto de X_j en V_{j+1} , y si π_j es un morfismo liso de esquemas, X_{j+1} es la preimagen de X_j por π_j).

En esta sucesión local sobre X :

$$\text{Sing } \mathcal{G}_0 \cap X_0 \subset X_0, \quad \text{Sing } \mathcal{G}_1 \cap X_1 \subset X_1, \quad \dots, \quad \text{Sing } \mathcal{G}_m \cap X_m \subset X_m$$

son subconjuntos cerrados.

Objetivo 5.2.12. Nuestro propósito es averiguar si $\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X})$, que por el Lema 5.1.15 es $\mathcal{F}_V(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})$, es también el árbol de una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees.

Estrategia 5.2.13. Para afrontar esta cuestión, tendremos que comparar árboles de \mathcal{O}_X -álgebras de Rees y árboles de \mathcal{O}_V -álgebras de Rees. Para ello debemos establecer cómo comparar sucesiones locales sobre V con sucesiones locales sobre X .

Como ya hemos visto en la Observación 5.2.11 una \mathcal{X} -sucesión local sobre V se puede restringir a una sucesión local sobre X , por lo que nos queda estudiar cómo las sucesiones locales sobre X pueden ser levantadas, al menos localmente, a sucesiones locales sobre V .

Una primera dificultad en esta dirección aparece al considerar un morfismo liso definido sobre X , digamos $X \xleftarrow{\varphi} X_1$. Como X es un cerrado en V no existe, a priori, un camino natural para definir un morfismo liso, digamos $V \xleftarrow{\varphi'} V_1$, de modo que φ pueda ser identificada con la restricción de φ' sobre el pull-back de X ($\subset V$).

Un modo de superar esta dificultad es construir una retracción local, $r : V \rightarrow X$, (aunque quizá tendremos que reemplazar V por un cubrimiento por abiertos en la topología étale) y probar que cualquier sucesión local sobre X puede ser levantada a una sucesión local sobre V de forma natural utilizando esta retracción local. Estudiaremos estos pasos en la Observación 5.2.14 y en la Proposición 5.2.15.

Ya sabiendo “levantar” sucesiones locales, podremos comparar árboles de \mathcal{O}_X -álgebras de Rees y de \mathcal{O}_V -álgebras de Rees siguiendo lo detallado en la Definición 5.1.11. El Objetivo 5.2.12 se abordará en la Proposición 5.2.20.

Observación 5.2.14 (Existencia de retracciones locales). Sea $x \in V$ un punto cerrado. Sea $\{z_1, \dots, z_d\}$ un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V,x}$, para el cual definimos la siguiente inclusión de un anillo de polinomios en d variables:

$$\begin{array}{ccc} k[Z_1, \dots, Z_d] & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{V,x} \\ Z_i & \longmapsto & z_i. \end{array}$$

Consideramos la primera sucesión exacta fundamental construida a partir de esta inclusión (véase el Teorema 3.2.20):

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_{k[Z_1, \dots, Z_d]|k}^1 \otimes_{k[Z_1, \dots, Z_d]} \mathcal{O}_{V,x} & \xrightarrow{v} & \Omega_{\mathcal{O}_{V,x}|k}^1 & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{O}_{V,x}|k[Z_1, \dots, Z_d]}^1 & \longrightarrow & 0 \\ d_{k[Z_1, \dots, Z_d]|k}(Z_i) \otimes b & \longmapsto & \text{bd}_{\mathcal{O}_{V,x}|k}(z_i). & & & & \end{array}$$

En ella observamos que $\Omega_{k[Z_1, \dots, Z_d]|k}^1$ es un $k[Z_1, \dots, Z_d]$ -módulo libre de rango d (por el Ejemplo 3.2.17), $\Omega_{\mathcal{O}_{V,x}|k}^1$ es un $\mathcal{O}_{V,x}$ -libre de rango d (véanse la Definición 3.2.33 y la Proposición 3.2.35) y v es inyectiva (véase el Criterio Jacobiano en el Teorema 3.3.23). Luego $\Omega_{\mathcal{O}_{V,x}|k[Z_1, \dots, Z_d]}^1 = 0$ y existe un entorno afín $U \subset V$ donde $\Omega_{\mathcal{O}_V(U)|k[Z_1, \dots, Z_d]}^1 = 0$. Esto implica que el morfismo de tipo finito $k[Z_1, \dots, Z_d] \hookrightarrow \mathcal{O}_V(U)$ es no ramificado y, por lo tanto, étale (véanse [48, Proposición 3.5] y [48, Teorema 3.20]).

Siguiendo la Notación 3.4.6, tenemos que (V, x) es un *entorno étale* de $(\mathbb{A}^d, \mathbb{O})$.

Sea $X \subset V$ un subesquema cerrado y liso de dimensión $d - e \leq d$. Y supongamos que $x \in X$. Entonces se puede escoger el sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V,x}$ de modo que $\{z_1 = 0, \dots, z_e = 0\}$ defina X localmente en un entorno de x y (X, x) sea un entorno étale de $(\mathbb{A}^{d-e}, \mathbb{O})$. La proyección de $\mathbb{A}^d \rightarrow \mathbb{A}^{d-e}$ sobre las $d - e$ últimas coordenadas nos lleva al

diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{A}^d, \mathbb{O}) & \longleftarrow & (V, x) \\ \downarrow & & \\ (\mathbb{A}^{d-e}, \mathbb{O}) & \xleftarrow{\varphi} & (X, x), \end{array}$$

donde los morfismos horizontales son étales y el vertical es liso. Por composición el morfismo $\phi : V \rightarrow \mathbb{A}^{d-e}$ es liso en un entorno de x (véase la Propiedad 3.4.3(3)). Construimos el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\varphi'} & V' = V \times X \\ \downarrow \phi & & \downarrow r \\ \mathbb{A}^{d-e} & \xleftarrow{\varphi} & X \end{array}$$

y observamos que, por la propiedad del cambio de base 3.4.3(2),

- r es liso, por serlo ϕ , y
- φ' es étale, por serlo φ .

A partir de la inmersión cerrada $i : X \hookrightarrow V$, la propiedad universal del producto fibrado afirma que existe un morfismo, $s : X \rightarrow V'$, que hace conmutar el siguiente digrama:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \xleftarrow{i} & \\ V & \xleftarrow{\quad} & V' \\ \downarrow \phi & & \downarrow r \\ \mathbb{A}^{d-e} & \xleftarrow{\varphi} & X \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow s \\ \circlearrowleft \text{Id} \end{array}$$

En particular, en un entorno de x , $r \circ s = \text{Id}_X$. Luego s es una sección, r es una retracción y s^* es sobreyectiva, por lo que, en un entorno de x , X puede ser interpretado como un cerrado de V' .

Proposición 5.2.15 (Levantamiento de sucesiones locales). *Sea $X \subset V$ un subesquema cerrado liso y sea $r : V \rightarrow X$ una retracción local. Entonces, cualquier sucesión local sobre X se puede levantar a una sucesión local sobre V .*

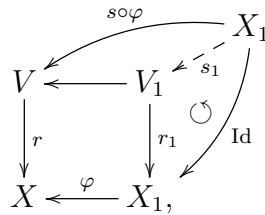
Demostración. Para poder aplicar inducción sobre la longitud de las sucesiones locales es suficiente probar que los dos tipos de morfismos que componen las sucesiones locales se pueden levantar y que, además, al hacerlo la retracción también se puede levantar.

Levantamiento de morfismos lisos: Sea $\varphi : X_1 \rightarrow X$ un morfismo liso. Construimos el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\varphi'} & V_1 = V \times X_1 \\ \downarrow r & & \downarrow r_1 \\ X & \xleftarrow{\varphi} & X_1 \end{array}$$

donde vemos que se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\varphi' : V_1 \rightarrow V$ es un morfismo liso, por serlo φ (véase la Propiedad 3.4.3(2)).
- $r_1 : X_1 \rightarrow V_1$ es una retracción local, ya que la existencia de la sección $s : X \hookrightarrow V$ y la propiedad universal del producto fibrado aseguran la existencia de un único morfismo $s_1 : X_1 \rightarrow V_1$ que, en particular, hace conmutar el diagrama marcado:



i.e. $r_1 \circ s_1 = \text{id}_{X_1}$.

- Como $s_1 : X_1 \rightarrow V_1$ es una sección, localmente a nivel de anillos tenemos un morfismo sobreyectivo, por lo que podemos considerar que X_1 es un subesquema cerrado de V_1 .

Levantamiento de blow-ups: Sea $Y \subset X$ un subesquema cerrado y liso y sea ρ el blow-up de X en el centro Y . Entonces, como Y también es un subesquema cerrado y liso de V , podemos construir el blow-up de V en el centro Y , que denotaremos por ρ' . Por la Proposición 1.4.7 tenemos el siguiente diagrama conmutativo de blow-ups e inmersiones cerradas:

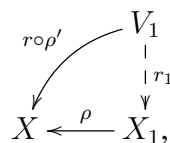
$$\begin{array}{ccc}
 V & \xleftarrow{\rho'} & V_1 \\
 \uparrow s & & \uparrow s_1 \\
 X & \xleftarrow{\rho} & X_1,
 \end{array} \tag{5.2.15.1}$$

donde $X_1 \subset V_1$ es el transformado estricto de X por ρ' y $\rho = \rho'|_{X_1}$.

Tomando la retracción $r : V \rightarrow X$ tenemos que

$$(\rho')^{-1} \left(r^{-1} (I(Y)\mathcal{O}_X)\mathcal{O}_V \right) \mathcal{O}_{V_1} = (\rho')^{-1} (I(Y)\mathcal{O}_V)\mathcal{O}_{V_1}$$

es un haz invertible en V_1 por lo que la propiedad universal del blow-up afirma que existe un único morfismo $r_1 : V_1 \rightarrow X_1$ que hace conmutar el diagrama



i.e. tal que $r \circ \rho' = \rho \circ r_1$. Por lo tanto,

$$\rho = r \circ s \circ \rho \stackrel{(5.2.15.1)}{=} r \circ \rho' \circ s_1 = \rho \circ r_1 \circ s_1.$$

Para terminar observamos que la propiedad universal del blow-up afirma que existe un único morfismo $f: X_1 \rightarrow X_1$ tal que $\rho = \rho \circ f$ y, como claramente el morfismo Id_{X_1} satisface esta condición, tenemos que $\text{Id}_{X_1} = r_1 \circ s_1$. Así que en este caso también hemos podido levantar r a una retracción, r_1 .

□

Comentarios 5.2.16.

(1) Hemos visto que usando la retracción $r: V' \rightarrow X$, cualquier sucesión local sobre X puede ser levantada a una sucesión local sobre V (en el sentido de la Definición 5.1.2).

(2) Si tenemos una retracción $r: V \rightarrow X$, entonces para una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees dada, \mathcal{S} , el árbol de subconjuntos cerrados sobre X definido por \mathcal{S} , $\mathcal{F}_X(\mathcal{S})$, puede ser identificado con un conjunto de subconjuntos cerrados indexado por sucesiones locales sobre V .

Pregunta 5.2.17. Sea \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees cualquiera. Si fijamos un subesquema cerrado y liso $X \subset V$ y el álgebra de Rees $\mathcal{X} = \mathcal{O}_V[I(X)W]$

¿existe una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees \mathcal{S} tal que $\mathcal{F}_X(\mathcal{S}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X})$?

Aquí la inclusión “ \subset ” debe ser interpretada viendo $\mathcal{F}_X(\mathcal{S})$ como un árbol de una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees. Buscamos, por lo tanto, una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees, \mathcal{S} , con la siguiente propiedad:

Para cualquier \mathcal{S} -sucesión local sobre X

$$(X, \mathcal{S}) = (V_0, \mathcal{S}_0) \xleftarrow{\pi_0} (X_1, \mathcal{S}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (X_m, \mathcal{S}_m), \quad (5.2.17.1)$$

y para cualquier retracción local $r: V \rightarrow X$ con sección $s: X \rightarrow V$ la sucesión local sobre V resultante de levantar (5.2.17.1) mediante la retracción r

$$V = V_0 \xleftarrow{\pi_0} V_1 \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} V_m$$

deber ser una $\mathcal{G}\text{-}\mathcal{X}$ -sucesión local, y para cada $j = 0, \dots, m$ se debe satisfacer:

$$s_j(\text{Sing } \mathcal{S}_j) \subset \text{Sing } \mathcal{G}_j \cap \text{Sing } \mathcal{X}_j,$$

siendo $s_j: X_j \rightarrow V_j$ la sección levantada de s .

Debemos imponer que esta condición se satisfaga para cualquier retracción local ya que, a priori, ninguna retracción local $V \rightarrow X$ está dada y se pueden construir un número infinito de ellas.

La inclusión recíproca “ \supset ” se interpreta según la Observación 5.2.11.

Observación 5.2.18. Un primer candidato para \mathcal{S} es $\mathcal{G}|_X$, ya que, como veremos a continuación,

$$\text{Sing } \mathcal{G} \cap X \subset \text{Sing}(\mathcal{G}|_X). \quad (5.2.18.1)$$

Sea $\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[f_1 W^{n_1}, \dots, f_s W^{n_s}]$ y sea $x \in \text{Sing } \mathcal{G} \cap X$. Consideramos un sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_e, y_{e+1}, \dots, y_d\}$ en $\mathcal{O}_{V,x}$ de modo que $I(X) = \langle z_1, \dots, z_e \rangle$. Así el anillo completo $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$ es isomorfo a $\kappa[[z_1, \dots, z_e, y_{e+1}, \dots, y_d]] = \kappa[[z, y]]$, donde κ es el cuerpo residual de x .

Si cada $f_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^e} g_{i,\alpha} z^\alpha \in \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$, donde $g_{i,\alpha} \in \kappa[[y]]$, tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} x \in \text{Sing } \mathcal{G} \cap X & & x \in \text{Sing}(\mathcal{G}|_X) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \nu_x(f_i) \geq n_i \text{ y } \nu_x(z_j) = 1 & & \nu_x(f_i|_X) \geq n_i \\ \text{para } i = 1, \dots, s \text{ y } j = 1, \dots, e, & & \text{para } i = 1, \dots, s, \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \nu_x(g_{i,\alpha}) \geq n_i - |\alpha| \text{ y } \nu_x(z_j) = 1 & \Rightarrow & \nu_x(g_{i,0}) \geq n_i \\ \text{para } i = 1, \dots, s, |\alpha| < n_i \text{ y } j = 1, \dots, e, & & \text{para } i = 1, \dots, s, \end{array}$$

El siguiente ejemplo muestra que, en general, la inclusión (5.2.18.1) es estricta, por lo que este candidato no resuelve el problema.

Ejemplo 5.2.19. Sean $V = \text{Spec}(k[Z, T])$ y $X = V(\langle T \rangle)$. Sea $\mathcal{G} = k[Z, T][\langle (T + Z^3)W^2 \rangle]$. En estas condiciones,

$$\text{Sing } \mathcal{G} \cap X = \{x \in V : \nu_x(T + Z^3) \geq 2\} \cap X = \emptyset$$

y, como $\mathcal{G}|_X = k[Z][Z^3W^2]$,

$$\text{Sing } \mathcal{G}|_X = \{x \in X : \nu_x(Z^3) \geq 2\} = V(\langle Z \rangle).$$

La siguiente proposición muestra una solución afirmativa a la Pregunta 5.2.17.

Proposición 5.2.20. Sea $X \subset V$ un subesquema cerrado y liso. Sean $\mathcal{X} = \mathcal{O}_V[I(X)W]$ y \mathcal{G} una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees arbitraria. Entonces

$$\mathcal{F}_X((\text{Diff } \mathcal{G})|_X) = \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X}).$$

Además, $(\text{Diff } \mathcal{G})|_X$ es una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees diferencial.

Como la prueba es larga daremos primero un esquema y después los detalles.

Esquema de la demostración. Empezamos observando que $\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})$ (véase el Lema 5.1.15), luego tendremos que comparar los árboles de $(\text{Diff } \mathcal{G})|_X$ y de $\mathcal{G} \odot \mathcal{X}$.

La prueba está dividida en cuatro pasos, el primero consiste en reducir el problema a un caso más sencillo y los otros tres en garantizar la igualdad de los árboles según la Definición 5.1.11:

1. Reducción a un caso particular:

Utilizando las propiedades de la amalgama de las álgebras de Rees y la construcción local del álgebra de Rees diferencial, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[fW^b]$ y que X es una hipersuperficie lisa.

Además, trabajando en un entorno étale si es necesario, también podemos suponer que localmente existe una retracción $r : V \rightarrow X$ (véase la Observación 5.2.14). Destacamos que el módulo de operadores diferenciales relativos a esta retracción permitirá plantear el problema en los anillos completos de los puntos cerrados.

2. Igualdad de los lugares singulares:

Fijamos un punto cerrado $x \in X \subset V$ y consideramos un sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_d\}$ en $\mathcal{O}_{V,x}$ donde $\{z_1 = 0\}$ describe localmente el subesquema cerrado X . Si denotamos por κ al cuerpo residual de x , en los anillos completos la retracción local r da lugar a la inclusión

$$\widehat{r^*} : \widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \simeq \kappa[[z_2, \dots, z_d]] \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{V,x}} \simeq \kappa[[z_1, z_2, \dots, z_d]],$$

y a una expresión para f de la forma

$$f = h_0(z_2, \dots, z_d) + z_1 h_1(z_2, \dots, z_d) + z_1^2 h_2(z_2, \dots, z_d) + \dots \in \widehat{\mathcal{O}_{V,x}},$$

donde cada $h_i \equiv \Delta_{\widehat{\mathcal{O}_{V,x}}}^{(i,0,\dots,0)} f \pmod{\langle z_1 \rangle}$. De esta expresión de f deduciremos que $x \in \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})$ si y sólo si

$$x \in \text{Sing} \left(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \left[\left(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}_{V,x}}}^{(i,0,\dots,0)} f \right) \Big|_X W^{b-i} : 0 \leq i \leq b-1 \right] \right).$$

Después, estudiando la construcción del álgebra de Rees diferencial veremos que esta relación de pertenencia también es equivalente a que

$$x \in \text{Sing} \left(\left(\text{Diff}_{\widehat{\mathcal{O}_{V,x}|k}} \mathcal{G} \right) \Big|_X \right).$$

3. $\mathcal{F}_X((\text{Diff } \mathcal{G})|_X) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X})$:

Para cada rama del árbol $\mathcal{F}_X(\text{Diff } \mathcal{G}|_X)$, la $\text{Diff } \mathcal{G}|_X$ -sucesión local sobre X correspondiente se podrá levantar a una \mathcal{X} -sucesión local sobre V levantado en cada paso la retracción local $r : V \rightarrow X$ (véase la Proposición 5.2.15).

En un punto cerrado $x \in X \subset V$, $f \equiv \tilde{f} \pmod{\langle z_1 \rangle^b} \in \widehat{\mathcal{O}_{V,x}}$ donde

$$\tilde{f} = h_0(z_2, \dots, z_d) + z_1 h_1(z_2, \dots, z_d) + z_1^2 h_2(z_2, \dots, z_d) + \dots + z_1^{b-1} h_{b-1}(z_2, \dots, z_d)$$

Veremos que esta expresión se preserva al tomar morfismos lisos o blow-ups en centros permisibles, lo que permite reducir el problema al apartado anterior.

4. $\mathcal{F}_X((\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_X) \supset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X})$:

Como hemos visto en la Observación 5.2.11, una \mathcal{G} - \mathcal{X} -sucesión local induce por restricción una sucesión local sobre X . La Observación 5.2.18 afirma que en cada paso de la sucesión local

$$\text{Sing } \mathcal{G}_j \cap X_j = \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})_j \cap X_j \subset \text{Sing}((\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})_j|_X) = \text{Sing}\left(\left((\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_X\right)_j\right).$$

□

Lo que sigue son los pasos y las ideas expuestos anteriormente ahora de manera detallada.

Demostración con detalles.

1. Reducción a un caso particular:

Recordamos las condiciones de la Proposición 5.2.20. Como V es liso se puede cubrir por cartas afines $V = \cup \text{Spec}(B_i)$ donde cada B_i es un dominio regular (en particular normal). Sea $U = \text{Spec}(B)$ una de estas cartas.

Supongamos que las expresiones locales de \mathcal{G} y \mathcal{X} son las siguientes:

$$\mathcal{G}(U) = B[f_1W^{n_1}, \dots, f_sW^{n_s}] \quad \text{y} \quad \mathcal{X}(U) = B[g_1W, \dots, g_rW].$$

Por un lado, la descripción local de la amalgama de álgebras de Rees (véase la Proposición 4.1.20) nos permite describirlas como

$$\mathcal{G}(U) = B[f_1W^{n_1}] \odot \dots \odot B[f_sW^{n_s}] \quad \text{y} \quad \mathcal{X}(U) = B[g_1W] \odot \dots \odot B[g_rW],$$

luego, por el Lema 5.1.15, el árbol de $\mathcal{G} \odot \mathcal{X}$ resulta ser:

$$\mathcal{F}_U(\mathcal{G} \odot \mathcal{X}) = \mathcal{F}_U(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_U(\mathcal{X}) = \bigcap_{i=1}^s \mathcal{F}_U(B[f_iW^{n_i}]) \cap \bigcap_{j=1}^r \mathcal{F}_U(B[g_jW]).$$

Por otro lado, la construcción del álgebra diferencial generada por $\mathcal{G}(U)$, descrita en la Observación 4.3.4, nos permite afirmar que

$$\mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G}(U)) = \mathbb{D}\text{iff}(B[f_1W^{n_1}]) \odot \dots \odot \mathbb{D}\text{iff}(B[f_sW^{n_s}]),$$

con lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G}(U))|_{X \cap U} &= \bigodot_{i=1}^s \mathbb{D}\text{iff}(B[f_iW^{n_i}]|_{X \cap U}) \quad \text{y} \\ \mathcal{F}_{X \cap U}(\mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G}(U))|_{X \cap U}) &= \bigcap_{i=1}^s \mathcal{F}_{X \cap U}(\mathbb{D}\text{iff}(B[f_iW^{n_i}]|_{X \cap U})). \end{aligned}$$

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

Por lo tanto, es suficiente con considerar el caso particular en que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_V[fW^b]$.

Si tomamos los generadores locales de $I(X)$ adecuadamente (y quizá recubriendo V con entornos más pequeños) podemos restringir $\mathbb{D}\text{iff}(\mathcal{G}(U))$ a $X \cap U$ (un subesquema cerrado y liso) por pasos: primero restringimos a una hipersuperficie lisa $X_1 = \{g_1 = 0\}$ de V que contenga a X , después a una hipersuperficie lisa $X_2 = \{g_2|_{X_1} = 0\}$ de X_1 que contenga a X , y así hasta llegar a $X = X_r = \{g_r|_{X_{r-1}} = 0\} \subset X_{r-1}$. Luego, es suficiente considerar el caso particular en que X es una hipersuperficie lisa.

Además, podemos cubrir V con entornos étales en los que se puede definir una retracción, digamos $r : V \rightarrow X$ con algún abuso de notación (véase la Observación 5.2.14).

En estas condiciones consideramos el módulo de operadores diferenciales absoluto $\text{Diff}_{V|k}$ y el módulo de operadores diferenciales relativos a la retracción r , $\text{Diff}_{V|X}$.

La construcción de estos módulos, analizada en el Apartado 3.3.4, nos permite llevar la discusión al caso de los anillos locales $\mathcal{O}_{V,x}$ y $\mathcal{O}_{X,x}$ donde $x \in V$ es un punto cerrado de X . Ahora, la retracción r induce un diagrama de morfismos

$$\mathcal{O}_{X,x} \overset{\longleftarrow}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{V,x}$$

y, a su vez, en el caso de los anillos completados

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \overset{\longleftarrow}{\hookrightarrow} \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}.$$

2. Mismos lugares singulares:

Vamos a probar que $\text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_X = \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})$. Sea $x \in V$ un punto cerrado. Si $x \notin X$, entonces no aparece en ninguno de los dos lugares singulares. Supongamos por tanto que $x \in X$ y fijemos un sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_d\}$ en $\mathcal{O}_{V,x}$ donde, por ejemplo, $\{z_1 = 0\}$ sea una ecuación local para X^\dagger . En estas condiciones, la retracción local $r : V \rightarrow X$ da lugar a la siguiente inclusión formal:

$$\widehat{r^*} : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \kappa[[z_2, \dots, z_d]] \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \simeq \kappa[[z_1, z_2, \dots, z_d]], \quad (5.2.20.1)$$

donde κ es el cuerpo residual de x .

Denotaremos por ν_x el orden en el anillo completo $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$ (véase la Definición 1.2.6). La descripción del lugar singular de la Proposición 4.1.9 indica que

$$x \in \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X}) = \text{Sing}(\mathcal{O}_V[fW^b, z_1W]) \quad \text{si y sólo si} \quad \nu_x(f) \geq b \text{ y } \nu_x(z_1) \geq 1.$$

[†]Como X es una hipersuperficie y $x \in X \subset V$ es un punto cerrado, podemos escribir $I(X) = \langle g \rangle$ en el dominio local regular $\mathcal{O}_{V,x}$. Además, al ser X lisa, $\mathcal{O}_{V,x}/\langle g \rangle$ es un dominio regular, lo que implica que g forma parte de un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V,x}$ (véase la Observación 1.1.5(1) y la Proposición 1.1.7).

Notando que $\nu_x(z_1) = 1$, ya que z_1 forma parte del sistema regular de parámetros, tenemos que $x \in \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})$ si y sólo si

$$\nu_x(f) \geq b. \quad (5.2.20.2)$$

Consideramos ahora la expresión de f en el anillo completado $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$:

$$f = h_0(z_2, \dots, z_d) + z_1 h_1(z_2, \dots, z_d) + z_1^2 h_2(z_2, \dots, z_d) + \dots, \quad (5.2.20.3)$$

donde cada h_i puede ser considerado tanto un elemento de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ como un elemento de $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$ (i.e., vamos a denotar por h_i tanto a $h_i \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ como a $\widehat{r}^*(h_i) \in \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$).

Al escribir la expresión (5.2.20.3) como la siguiente suma finita:

$$f = h_0 + z_1 h_1 + z_1^2 h_2 + \dots + z_1^{b-1} h_{b-1} + \left(\sum_{i=b}^{\infty} z_1^i h_i \right),$$

donde en cada sumando aparece una potencia distinta de z_1 , notamos que

$$\nu_x(f) = \min \left\{ \nu_x(h_0), \nu_x(z_1 h_1), \dots, \nu_x(z_1^{b-1} h_{b-1}), \nu_x \left(\sum_{i=b}^{\infty} z_1^i h_i \right) \right\},$$

luego la condición (5.2.20.2) es equivalente a que se satisfagan las siguientes condiciones simultáneamente:

$$\nu_x(z_1^i h_i) \geq b \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, b-1 \quad \text{y} \quad (5.2.20.4a)$$

$$\nu_x \left(\sum_{i=b}^{\infty} z_1^i h_i \right) \geq b. \quad (5.2.20.4b)$$

Recordando que $\nu_x(z_1) = 1$ simplificamos estas condiciones:

- como $\nu_x(z_1^i h_i) = i \cdot \nu_x(z_1) + \nu_x(h_i) = i + \nu_x(h_i)$ se tiene que

$$(5.2.20.4a) \quad \text{si y sólo si } \nu_x(h_i) \geq b - i \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, b-1 \quad \text{y}$$

- la condición (5.2.20.4b) siempre se cumple, ya que

$$\nu_x \left(\sum_{i=b}^{\infty} z_1^i h_i \right) = b \cdot \nu_x(z_1) + \nu_x \left(\sum_{i=b}^{\infty} z_1^{i-b} h_i \right) \geq b.$$

Por lo tanto, $x \in \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})$ si y sólo si

$$\nu_x(h_0) \geq b, \quad \nu_x(h_1) \geq b-1, \quad \dots, \quad \nu_x(h_{b-2}) \geq 2 \quad \text{y} \quad \nu_x(h_{b-1}) \geq 1. \quad (5.2.20.5)$$

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

Notamos que estas condiciones están formuladas en el anillo $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$ pero, gracias a la doble naturaleza de los elementos h_i , también se pueden expresar en el anillo completo $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$.

Recopilando, en términos de álgebras de Rees, si $x \in X$ las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} x &\in \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X}), \\ x &\in \text{Sing} \left(\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}[z_1 W, h_0 W^b, h_1 W^{b-1}, \dots, h_{b-2} W^2, h_{b-1} W] \right) \quad \text{y} \\ x &\in \text{Sing} \left(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[h_0 W^b, h_1 W^{b-1}, \dots, h_{b-2} W^2, h_{b-1} W] \right). \end{aligned} \quad (5.2.20.6)$$

Nos gustaría expresar estos requisitos en términos del álgebra de Rees diferencial $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}$. Sea Tay_{z_1} el morfismo de Taylor que actúa sólo en la primera variable:

$$\begin{aligned} \text{Tay}_{z_1} : \kappa[[z_1, \dots, z_d]] &\longrightarrow \kappa[[z_1, \dots, z_d, T]] \\ f(z_1, z_2, \dots, z_d) &\longmapsto f(z_1 + T, z_2, \dots, z_d) = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i(f) T^i \end{aligned} \quad (5.2.20.7)$$

(aquí, $\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i$ denota el coeficiente $\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(i,0,\dots,0)}$ del morfismo de Taylor definido en 3.3.17).

Evaluándolo en f queda

$$\begin{aligned} \text{Tay}_{z_1}(f) &= \sum_{j=0}^{\infty} (z_1 + T)^j h_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} z_1^{j-i} T^i \right) h_j = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} z_1^{j-i} h_j \right) T^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{i+\ell}{i} z_1^{\ell} h_{i+\ell} \right) T^i. \end{aligned}$$

En particular, para cada $i = 0, 1, \dots, b-1$, el operador de orden i , $\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i : \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$, aplicado a f da como resultado:

$$\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i(f) = h_i + z_1 \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \binom{i+\ell}{i} z_1^{\ell-1} h_{i+\ell} \right). \quad (5.2.20.8)$$

Por lo tanto, $(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i f)|_X = h_i \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y, como $x \in X$, tenemos que la condición (5.2.20.6) es equivalente a que

$$x \in \text{Sing} \left(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \left[f|_X W^b, (\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^1 f)|_X W^{b-1}, \dots, (\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{b-2} f)|_X W^2, (\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{b-1} f)|_X W \right] \right). \quad (5.2.20.9)$$

Nos queda por probar que esta última condición (5.2.20.9) es equivalente a que

$$x \in \text{Sing} \left(\left(\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X \right).$$

Para ello buscaremos un sistema de generadores de $\left(\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X$. Recordamos el morfismo de Taylor sobre $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \simeq \kappa[[z_1, \dots, z_d]]$ definido en 3.3.17:

$$\begin{aligned} \text{Tay} : \kappa[[z_1, \dots, z_d]] &\longrightarrow \kappa[[z_1, \dots, z_d, T_1, \dots, T_d]] \\ f(z) &\longmapsto f(z + T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^\alpha (f(z)) T^\alpha, \end{aligned}$$

donde para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)}$ es un operador diferencial de orden r , para todo $r \geq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$. Por lo tanto, la expresión (4.3.4.2) en este caso implica que

$$\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} = \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \left[\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^\alpha (f) W^{t_\alpha} : 0 \leq |\alpha| < b, 1 \leq t_\alpha \leq b - |\alpha| \right]. \quad (5.2.20.10)$$

Observamos que por construcción si $\alpha = (i, \alpha')$ con $\alpha' \in \mathbb{N}^{d-1}$ se tiene que

$$\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^\alpha (f) = \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(0, \alpha')} \left(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(i, 0)} (f) \right) = \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(0, \alpha')} \left(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i (f) \right)$$

y aplicando esta idea a los generadores de $\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G}$ de la expresión (5.2.20.10) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} = \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \left[\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(0, \alpha')} \left(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i (f) \right) W^{t_{(i, \alpha')}} : 0 \leq i < b, 0 \leq |\alpha'| < b - i, \right. \\ \left. 1 \leq t_{(i, \alpha')} \leq b - i - |\alpha'| \right]. \quad (5.2.20.11) \end{aligned}$$

Usando la retracción formal \widehat{r}^* descrita en la expresión (5.2.20.1), observamos que el conjunto de operadores diferenciales

$$\left\{ \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(0, \alpha')} : \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \right\}_{0 \leq |\alpha'| \leq r} \quad (5.2.20.12)$$

genera el $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ -módulo de operadores diferenciales $\text{Diff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}|k}^r$. Por lo que, en general para cualquier $\alpha = (0, \alpha') \in \mathbb{N}^d$ y para cualquier $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$

$$\left(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(0, \alpha')} f \right) \Big|_{\{z_1=0\}} = \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^{(0, \alpha')} \left(f \Big|_{\{z_1=0\}} \right) = \Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}}^{\alpha'} \left(f \Big|_{\{z_1=0\}} \right), \quad (5.2.20.13)$$

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE
CANONICIDAD

luego, de la expresión de $\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G}$ que aparece en (5.2.20.11) obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X &= \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \left[\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}}^{\alpha'} \left((\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i f) \Big|_X \right) W^{t(i,\alpha')} : 0 \leq i \leq b-1, 0 \leq |\alpha'| < b-i, \right. \\ &\quad \left. 1 \leq t(i,\alpha') \leq (b-i) - |\alpha'| \right] \\ &= \mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}|k} \left(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \left[(\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i f) \Big|_X W^{b-i} : 0 \leq i \leq b-1 \right] \right). \end{aligned} \quad (5.2.20.14)$$

Comparando este resultado con la condición (5.2.20.9), el Teorema 4.3.5(1) establece que en el caso en que $x \in X \subset V$ es un punto cerrado

$$x \in \text{Sing}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X}) \quad \text{si y sólo si} \quad x \in \text{Sing} \left(\left(\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X \right).$$

3. $\mathcal{F}_X((\mathbb{D}\text{iff} \mathcal{G})|_X) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X})$:

Sea

$$X \xleftarrow{\pi_0} X_1 \xleftarrow{\pi_1} X_2 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_{m-2}} X_{m-1} \xleftarrow{\pi_{m-1}} X_m, \quad (5.2.20.15)$$

una $\mathbb{D}\text{iff} \mathcal{G}|_X$ -sucesión local sobre X que se levanta a una \mathcal{X} -sucesión local sobre V utilizando la retracción local $r : V \rightarrow X$ (véase la Proposición 5.2.15). Así obtenemos, al menos localmente, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} V & \xleftarrow{\pi'_0} & V_1 & \xleftarrow{\pi'_1} & V_2 & \xleftarrow{\pi'_2} & \dots & \xleftarrow{\pi'_{m-2}} & V_{m-1} & \xleftarrow{\pi'_{m-1}} & V_m \\ \downarrow r & & \downarrow r_1 & & \downarrow r_2 & & & & \downarrow r_{m-1} & & \downarrow r_m \\ X & \xleftarrow{\pi_0} & X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \dots & \xleftarrow{\pi_{m-2}} & X_{m-1} & \xleftarrow{\pi_{m-1}} & X_m \end{array} \quad (5.2.20.16)$$

donde recordamos que:

- cada r_j es una retracción, i. e. en cada paso la retracción local se levanta a una retracción local,
- si π_j es una transformación monoidal permisible π'_j es el blow-up en el mismo centro liso,
- si π_j es un morfismo liso de esquemas, entonces V_{j+1} es el producto fibrado $X_{j+1} \times_{X_j} V_j$, por lo que π'_j es un morfismo liso y
- $\pi_j \circ r_{j+1} = r_j \circ \pi'_j$ y $r_j \circ s_j = \text{Id}_{X_j}$ (tanto si π_j y π'_j son transformaciones monoidales como si son morfismos lisos).

Necesitamos probar que esta \mathcal{X} -sucesión local sobre V es una \mathcal{G} -sucesión local y que en cada paso $\text{Sing} \left(\left(\mathbb{D}\text{iff}_{V|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X \right)_j \subset \text{Sing}(\mathcal{G}_j \odot \mathcal{X}_j)$ (aunque probaremos que de hecho es

una igualdad). Para simplificar la notación estudiaremos el primer paso de estas sucesiones y daremos después un argumento iterativo para el resto de los pasos.

Sean $x \in X \subset V$ y $x_1 \in X_1 \subset V_1$ dos puntos cerrados tales que $x = \pi'(x_1)$ y $x = \pi(x_1)$. Tomando los anillos locales en estos puntos tenemos el correspondiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{V,x} & \xrightarrow{\pi'_0} & \mathcal{O}_{V_1,x_1} \\ s^* \uparrow r^* & \circlearrowleft & \uparrow r_1^* \\ \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\pi_0} & \mathcal{O}_{X_1,x_1} \end{array}$$

también definido en los anillos completos

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} & \xrightarrow{\widehat{\pi}'_0} & \widehat{\mathcal{O}}_{V_1,x_1} \\ s^* \uparrow r^* & \circlearrowleft & \uparrow r_1^* \\ \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} & \xrightarrow{\widehat{\pi}_0} & \widehat{\mathcal{O}}_{X_1,x_1} \end{array}$$

Supongamos que $\{z_1, z_2, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{V,x}$ de modo que $I(X) = \langle z_1 \rangle$. Luego, $\{z_2, \dots, z_d\}$ es un sistema regular de parámetros en $\mathcal{O}_{X,x}$. En estas condiciones, la retracción local $r : V \rightarrow X$ en los anillos completos da lugar a la inclusión (5.2.20.1):

$$\widehat{r}^* : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \kappa[[z_2, \dots, z_d]] \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \simeq \kappa[[z_1, z_2, \dots, z_d]],$$

donde κ es el cuerpo residual de x . Entonces, como en el caso anterior, $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$ se puede expresar como $f \equiv \widetilde{f} \pmod{\langle z_1 \rangle^b}$, donde

$$\widetilde{f} = h_0(z_2, \dots, z_d) + z_1 h_1(z_2, \dots, z_d) + z_1^2 h_2(z_2, \dots, z_d) + \dots + z_1^{b-1} h_{b-1}(z_2, \dots, z_d) \quad (5.2.20.17)$$

(de nuevo h_i va a denotar a $h_i \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ y a $\widehat{r}^*(h_i) \in \widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$).

Sea $\mathcal{K} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} [h_0 W^b, h_1 W^{b-1}, \dots, h_{b-1} W]$. Observamos que, como

$$\left(\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X = \mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}|k} \mathcal{K} \quad (5.2.20.18)$$

(véase la expresión (5.2.20.14)), $\left(\mathbb{D}\text{iff}_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}|k} \mathcal{G} \right) \Big|_X$ y \mathcal{K} son débilmente equivalentes como $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ -álgebras (véase el Lema 5.1.7). Por lo tanto, es suficiente con probar que

$$x_1 \in \text{Sing } \mathcal{G}_1 \cap X_1 \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 \in \text{Sing}(\mathcal{K}_1).$$

Para ello vemos primero las expresiones de $(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})_1$ y de \mathcal{K}_1 dependiendo de si π_0 es un blow-up permisible para \mathcal{K} o de si es un morfismo liso:

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

Blow-up: Sean π_0 y π'_0 los blow-ups en un centro liso Y . En este apartado los denotaremos por ρ y ρ' respectivamente. En estas condiciones, $I(Y) = \langle g_2, \dots, g_s \rangle \subset \mathcal{O}_{X,x}$ y $I(Y) = \langle z_1, g_2, \dots, g_s \rangle \subset \mathcal{O}_{V,x}$ son primos regulares, luego

$$\{g_2, \dots, g_s, y_{s+1}, \dots, y_d\} \subset \mathcal{O}_{X,x} \text{ y } \{z_1, g_2, \dots, g_s, y_{s+1}, \dots, y_d\} \subset \mathcal{O}_{V,x}$$

son sistemas regulares de parámetros. Observamos ahora que los operadores diferenciales $\Delta^i_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}$ (coeficientes del morfismo Tay_{z_1} definido en (5.2.20.7)) son relativos a la retracción y por tanto

$$\begin{aligned} h_i(z_2, \dots, z_d) &= (\Delta^i_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}} f)|_{\{z_1=0\}} = h'_i(g_2, \dots, g_s, y_{s+1}, \dots, y_d), \\ f &= \sum_{i=0}^{\infty} z_1^i h_i = \sum_{i=0}^{\infty} z_1^i h'_i \text{ y} \\ \mathcal{K} &= \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[h'_0 W^b, h'_1 W^{b-1}, \dots, h'_{b-1} W]. \end{aligned}$$

Ahora, como x_1 está en al menos una carta del blow-up, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 \in \text{Spec} \left(\mathcal{O}_{V,x} \left[\frac{g_3}{g_2}, \dots, \frac{g_s}{g_2} \right] \right)$. Con lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{O}}_{V,x} \simeq \kappa[[z_1, g_2, \dots, g_s, y_{s+1}, \dots, y_d]] & \xrightarrow{\widehat{\rho}'^*} & \widehat{\mathcal{O}}_{V_1,x_1} \simeq \kappa\left[\left[\frac{z_1}{g_2}, g_2, \frac{g_3}{g_2}, \dots, \frac{g_s}{g_2}, y_{s+1}, \dots, y_d\right]\right] \\ \uparrow \widehat{r}^* & & \uparrow \widehat{r}_1^* \\ \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \kappa[[g_2, \dots, g_s, y_{s+1}, \dots, y_d]] & \xrightarrow{\widehat{\rho}^*} & \widehat{\mathcal{O}}_{X_1,x_1} \simeq \kappa\left[\left[g_2, \frac{g_3}{g_2}, \dots, \frac{g_s}{g_2}, y_{s+1}, \dots, y_d\right]\right], \end{array}$$

donde la retracción \widehat{r}^* se puede levantar como vimos en la Proposición 5.2.15 a

$$\begin{array}{ccc} \widehat{r}_1^* : \kappa\left[\left[g_2, \frac{g_3}{g_2}, \dots, \frac{g_s}{g_2}, y_{s+1}, \dots, y_d\right]\right] & \hookrightarrow & \kappa\left[\left[z_1, g_2, \frac{g_3}{g_2}, \dots, \frac{g_s}{g_2}, y_{s+1}, \dots, y_d\right]\right] \\ g_2 & \longmapsto & g_2 \\ \frac{g_i}{g_2} & \longmapsto & \frac{g_i}{g_2} \\ y_j & \longmapsto & y_j. \end{array}$$

Para cada $i = 0, 1, \dots, b-1$, sea $h_{i,1} W^{b-i}$ un transformado ponderado de $h'_i W^{b-i}$, i. e., un elemento de $\widehat{\mathcal{O}}_{X_1,x_1}$ tal que

$$\langle h'_i \rangle \widehat{\mathcal{O}}_{X_1,x_1} = \langle g_2 \rangle^{b-i} \langle h_{i,1} \rangle.$$

Entonces, denotando por $z_{1,1}$ a $\frac{z_1}{g_2}$,

$$\widetilde{f}_1 W^b = h_{0,1} W^b + z_{1,1} W h_{1,1} W^{b-1} + \dots + z_{1,1}^{b-1} W^{b-1} h_{b-1,1} W$$

es un transformado ponderado del elemento $\tilde{f}W^b$ definido en (5.2.20.17). Por lo que

$$\begin{aligned} (\mathcal{G} \odot \mathcal{X})_1 &= \widehat{\mathcal{O}_{V_1, x_1}}[\tilde{f}_1 W^b, z_{1,1} W] \quad \text{y} \\ \mathcal{K}_1 &= \widehat{\mathcal{O}_{X_1, x_1}}[h_{0,1} W^b, h_{1,1} W^{b-1}, \dots, h_{b-1,1} W]. \end{aligned} \quad (5.2.20.19)$$

Morfismo liso: Supongamos que π_0 y π'_0 son morfismos lisos, que denotaremos por φ y φ' respectivamente. A partir de los sistemas regulares de parámetros $\{z_1, z_2, \dots, z_d\} \subset \mathcal{O}_{V, x}$ y $\{z_2, \dots, z_d\} \subset \mathcal{O}_{X, x}$ construimos los siguientes sistemas regulares de parámetros:

$$\begin{aligned} \{\varphi^*(z_2), \dots, \varphi^*(z_d), y_{d+1}, \dots, y_t\} &\subset \mathcal{O}_{X_1, x_1} \quad \text{y} \\ \{(\varphi')^*(z_1), (\varphi')^*(z_2), \dots, (\varphi')^*(z_d), y_{d+1}, \dots, y_t\} &\subset \mathcal{O}_{V_1, x_1} \end{aligned}$$

(véase el Teorema 3.4.4). Por tanto en los anillos completos tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{O}_{V, x}} & & \widehat{\mathcal{O}_{V_1, x_1}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \kappa[[z_1, z_2, \dots, z_d]] & \xrightarrow{(\varphi')^*} & \kappa[(\varphi')^*(z_1), (\varphi')^*(z_2), \dots, (\varphi')^*(z_d), y_{d+1}, \dots, y_t] \\ \uparrow \widehat{r}^* & & \uparrow \widehat{r}_1^* \\ \kappa[[z_2, \dots, z_d]] & \xrightarrow{\widehat{\varphi}^*} & \kappa[\varphi^*(z_2), \dots, \varphi^*(z_d), y_{d+1}, \dots, y_t], \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \widehat{\mathcal{O}_{X_1, x}} & & \widehat{\mathcal{O}_{V_1, x_1}} \end{array}$$

donde, $\widehat{r}_1^*(\widehat{\varphi}^*(z_i)) = (\varphi')^*(z_i)$ y $\widehat{r}_1^*(y_j) = y_j$. En este caso también concluimos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{G} \odot \mathcal{X})_1 &= \widehat{(\varphi')^*}(\mathcal{G} \odot \mathcal{X}) = \widehat{\mathcal{O}_{V_1, x_1}}[\tilde{f}_1 W^b, z_{1,1} W] \quad \text{y} \\ \mathcal{K}_1 &= \widehat{\varphi}^*(\mathcal{K}) = \widehat{\mathcal{O}_{X_1, x_1}}[h_{0,1} W^b, h_{1,1} W^{b-1}, \dots, h_{b-1,1} W], \end{aligned} \quad (5.2.20.20)$$

donde

$$\begin{aligned} h_{i,1}(\widehat{\varphi}^*(z_2), \dots, \widehat{\varphi}^*(z_d), y_{d+1}, \dots, y_t) &= h_i(\widehat{\varphi}^*(z_2), \dots, \widehat{\varphi}^*(z_d)), \\ z_{1,1} &= \widehat{(\varphi')^*}(z_1) \quad \text{y} \\ \tilde{f}_1 &= (\varphi')^*(\tilde{f}) = h'_{0,1} + z_{1,1} h'_{1,1} + \dots + z_{1,1}^{b-1} h'_{b-1,1}. \end{aligned}$$

En ambos casos las descripciones de $(\mathcal{G} \odot \mathcal{X})_1$ y de \mathcal{K}_1 , que aparecen en (5.2.20.19) y en (5.2.20.20) están en la misma situación que en el apartado anterior (véase la expresión (5.2.20.6)). Por lo tanto,

$$x_1 \in \text{Sing}(\mathcal{G}_1 \odot \mathcal{X}_1) \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 \in \text{Sing}(\mathcal{K}_1) = \text{Sing}\left(\left((\text{Diff } \mathcal{G})|_{\mathcal{X}}\right)_1\right).$$

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

Terminamos observando que la transformación de los datos iniciales (que aparecen en las expresiones (5.2.20.19) y (5.2.20.20)) nos permite iterar el argumento, ya sea por explosiones o por morfismos lisos.

4. $\mathcal{F}_X((\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_X) \supset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}_V(\mathcal{X})$:

Dada una \mathcal{G} - \mathcal{X} -sucesión local,

$$(V, \mathcal{G}, \mathcal{X}) = (V_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{X}_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{X}_1) \xleftarrow{\pi_1} \dots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m, \mathcal{X}_m),$$

como hemos visto en la Observación 5.2.11 la restricción al transformado de X en cada paso da como resultado una sucesión local sobre X :

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xleftarrow{\pi_0} & V_1 & \xleftarrow{\pi_1} & V_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \dots & \xleftarrow{\pi_{m-2}} & V_{m-1} & \xleftarrow{\pi_{m-1}} & V_m \\ \uparrow s & & \uparrow s_1 & & \uparrow s_2 & & & & \uparrow s_{m-1} & & \uparrow s_m \\ X & \xleftarrow{\pi'_0} & X_1 & \xleftarrow{\pi'_1} & X_2 & \xleftarrow{\pi'_2} & \dots & \xleftarrow{\pi'_{m-2}} & X_{m-1} & \xleftarrow{\pi'_{m-1}} & X_m \end{array}$$

donde si $V_j \xleftarrow{\pi_j} V_{j+1}$ es una transformación monoidal permisible X_{j+1} es el transformado estricto de X_j en V_{j+1} y $s_{j+1} \circ \pi_j = s_j \circ \pi'_j$ (véase la Proposición 1.4.7), mientras que si $V_j \xleftarrow{\pi_j} V_{j+1}$ es un morfismo liso de esquemas, $X_{j+1} = \pi_j^{-1}(X_j) = X_j \times_{V_j} V_{j+1}$, asegurando que $\pi'_j = \pi_j|_{X_{j+1}}$ es liso y que el diagrama conmuta. En cada paso, observamos que

$$\begin{aligned} \text{Sing}(\mathcal{G}_j \odot \mathcal{X}_j) &= \text{Sing } \mathcal{G}_j \cap X_j \stackrel{\text{Lema 5.1.7}}{=} \text{Sing}(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})_j \cap X_j \\ &\stackrel{\text{Observación 5.2.18}}{\subset} \text{Sing}\left((\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})_j|_{X_j}\right) \stackrel{\text{Conmutatividad}}{=} \text{Sing}\left(\left((\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_X\right)_j\right). \end{aligned}$$

Por último, la expresión (5.2.20.14) nos indica que $(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_X$ es una \mathcal{O}_X -álgebra de Rees diferencial. □

5.2.4. Prueba del Teorema de Dualidad

Recordamos primero el enunciado del teorema:

Teorema de Dualidad 5.2.3. *Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto k y sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos álgebras de Rees sobre V . Entonces*

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} \subset \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}}.$$

Demostración. Supongamos que $\overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} \subset \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}}$. En este caso se tiene la siguiente relación entre el árbol de \mathcal{G} y el de \mathcal{K} :

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \stackrel{\text{Ejemplo 5.2.2}}{=} \mathcal{F}_V(\overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}}) \stackrel{\text{Observación 5.1.13}}{\subset} \mathcal{F}_V(\overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}}) \stackrel{\text{Ejemplo 5.2.2}}{=} \mathcal{F}_V(\mathcal{G}).$$

Sean

$$\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} J_n W^n \quad \text{y} \quad \mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K} = \bigoplus_{n \geq 0} I_n W^n.$$

Para probar el recíproco empezamos observando que para cualquier acción de Veronese (véase la Definición 4.1.17):

$$\overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} \subset \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}} \Leftrightarrow \mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G} \subset \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}} \stackrel{\text{Proposición 4.1.18}}{\Leftrightarrow} \mathbb{V}_N(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}) \subset \overline{\mathbb{V}_N(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})},$$

además, por el Lema 4.2.6, podemos escoger N de modo que $\mathbb{V}_N(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})$ y $\mathbb{V}_N(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})$ sean casi-anillos de Rees:

$$\mathbb{V}_N(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}) = \mathcal{O}_V[J_N W^N] \quad \text{y} \quad \mathbb{V}_N(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}) = \mathcal{O}_V[I_N W^N].$$

Por lo tanto, nuestro objetivo va a ser probar que $\mathcal{O}_V[J_N W^N] \subset \overline{\mathcal{O}_V[I_N W^N]}$, lo que, por el Lema 4.2.9, es equivalente a demostrar que $J_N \subset \overline{I_N}$. Ahora bien, el resultado de la Proposición 2.3.6 nos indica que basta con probar esta inclusión localmente.

Recordamos que como V es liso sus componentes conexas son irreducibles y reducidas, por lo que existe un recubrimiento por abiertos afines $\{\text{Spec } B_i\}$ donde cada anillo B_i es un dominio regular. En estas condiciones podemos utilizar el Criterio del Blow-up Normalizado (enunciado en el Teorema 2.3.16). Sea

$$V \xleftarrow{\Theta} \mathcal{B} = \overline{\text{Bl}_{I_N}(V)}$$

el blow-up normalizado de V en I_N , (de hecho \mathcal{B} es el blow-up normalizado de V respecto a $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}$ según la Definición 4.2.14). Entonces $\Theta^*(\mathcal{O}_V[I_N W^N]) = \mathcal{O}_{\mathcal{B}}[I_N \mathcal{O}_{\mathcal{B}} W^N]$ donde ahora $I_N \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ es un haz de ideales invertible en \mathcal{B} , i.e.,

$$I_N \mathcal{O}_{\mathcal{B}} = I(\mathbb{H}_1)^{N_1} \cdots I(\mathbb{H}_s)^{N_s} \tag{5.2.21.1}$$

para algunas hipersuperficies irreducibles y reducidas $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_s \subset \mathcal{B}$. Luego, por la Proposición 2.4.2, tenemos que

$$J_N \subset \overline{I_N} \quad \text{si y sólo si} \quad J_N \mathcal{O}_{\mathcal{B}, h_i} \subset I(\mathbb{H}_i)^{N_i} \mathcal{O}_{\mathcal{B}, h_i} \quad \text{para cada } i = 1 \dots s, \tag{5.2.21.2}$$

donde h_i es punto genérico de \mathbb{H}_i .

Trabajaremos ahora con la hipótesis inicial que se refiere a árboles sobre V .

A continuación vamos a adaptarla para expresarla ahora en términos de árboles sobre \mathcal{B} , o más precisamente, sobre un abierto *suficientemente* grande \mathcal{U} de \mathcal{B} . Para ello, observamos en primer lugar que Θ es un morfismo de tipo finito.[‡] En segundo lugar y dado que \mathcal{B} es normal, el conjunto de puntos singulares tiene codimensión mayor o igual que 2 (véanse las condiciones

[‡]Al ser V un esquema de tipo finito sobre k , los anillos B_i del recubrimiento de V son k -dominios de tipo finito; el blow-up de la carta $\text{Spec } B_i$ en el haz $I_N, \text{Bl}_{I_N}(B_i)$, también se puede recubrir por $\{\text{Spec } B_{ij}\}$ donde cada B_{ij} es un B_i -dominio de tipo finito; las Propiedades 1.3.2 afirman que cada B_{ij} es un dominio excelente y la Propiedad 1.3.1(2) que su clausura entera en su cuerpo de cocientes es una B_{ij} -álgebra finita y, por tanto, una k -álgebra de de tipo finito.

5.2. ÁRBOLES Y EQUIVALENCIA DÉBIL: TEOREMAS DE DUALIDAD Y DE CANONICIDAD

equivalentes (4) y (5) del Teorema 2.2.16 o las Condiciones de Serre en [41, Teorema 4.5.3]), por lo que quitando un subesquema cerrado

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{B} \tag{5.2.21.3}$$

de codimensión al menos dos obtenemos el abierto $\mathcal{U} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{Y}$ que es liso. Esto significa que la restricción de Θ a \mathcal{U} es un morfismo de tipo finito de esquemas lisos.

Consideramos ahora un cubrimiento por abiertos, $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, de \mathcal{U} de modo que la restricción $\Theta|_{\mathcal{U}_\lambda} : \mathcal{U}_\lambda \rightarrow V$ factoriza como una composición de un morfismo liso seguido de una inmersión cerrada de esquemas lisos, digamos

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U}_\lambda \\ & \xleftarrow{\Theta|_{\mathcal{U}_\lambda}} & \\ & & \\ & \swarrow \varphi & \searrow i_\lambda \\ & & \mathcal{Z} = V \times \mathbb{A}_k^t. \end{array}$$

Entonces podemos considerar el morfismo liso φ como el primer paso de una $\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}$ -sucesión local, por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) &\stackrel{\text{Lema 5.1.7}}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}_V(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}) \subset \mathcal{F}_V(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}) \\ &\stackrel{\text{Observación 5.1.12}}{\Rightarrow} \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})). \end{aligned}$$

Luego, recordando que $\mathcal{U}_\lambda \subset \mathcal{Z}$ es un subesquema cerrado liso, intersecamos con el árbol $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}[I(\mathcal{U}_\lambda)W])$ y seguimos manteniendo la inclusión de árboles:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}[I(\mathcal{U}_\lambda)W]) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})) \cap \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}[I(\mathcal{U}_\lambda)W]).$$

El siguiente paso es notar que $\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})$ y $\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})$ son álgebras de Rees diferenciales (véase la expresión (5.1.7.3)), así que la Proposición 5.2.20 afirma que

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_\lambda}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})|_{\mathcal{U}_\lambda}) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{U}_\lambda}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_{\mathcal{U}_\lambda}) \tag{5.2.21.4a}$$

y que

$$\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})|_{\mathcal{U}_\lambda} = (\Theta^*|_{\mathcal{U}_\lambda})(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}) = (\Theta^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}))(\mathcal{U}_\lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} I_n \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\lambda} W^n \quad \text{y} \tag{5.2.21.4b}$$

$$\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G})|_{\mathcal{U}_\lambda} = (\Theta^*|_{\mathcal{U}_\lambda})(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}) = (\Theta^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}))(\mathcal{U}_\lambda) = \bigoplus_{n \geq 0} J_n \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\lambda} W^n \tag{5.2.21.4c}$$

son álgebras de Rees diferenciales. Nos detenemos a continuación en el lugar singular de $\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})|_{\mathcal{U}_\lambda}$:

- del hecho de que el álgebra sea diferencial se sigue que

$$\text{Sing}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})|_{\mathcal{U}_\lambda}) \stackrel{\text{Teorema 4.3.6}}{=} V(I_N \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\lambda}) \stackrel{(5.2.21.1)}{=} \bigcup_{i=1}^s \mathbb{H}_i|_{\mathcal{U}_\lambda} \quad \text{y}$$

- la definición general de lugar singular (véase la Definición 4.1.8) implica que

$$\text{Sing}(\varphi^*(\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K})|_{\mathcal{U}_\lambda}) \subset \{x \in \mathcal{U}_\lambda : \nu_x(I_N \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\lambda}) \geq N\}.$$

Por lo tanto, $N_1, \dots, N_s \geq N$.

Ahora, para cada $i = 1, \dots, s$, nos quedamos con el abierto $\mathcal{U}_{\lambda_i} := \mathcal{U}_\lambda \setminus (\cup_{j \neq i} \mathbb{H}_j|_{\mathcal{U}_\lambda})$ y consideramos las ramas de los árboles que comienzan con la restricción a este abierto $\varphi_{\lambda_i} : \mathcal{U}_{\lambda_i} \rightarrow \mathcal{U}_\lambda$. De las expresiones (5.2.21.4) y de la Observación 5.1.12 obtenemos la siguiente inclusión de árboles:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} \left(\bigoplus_{n \geq 0} I_n \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} W^n \right) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} \left(\bigoplus_{n \geq 0} J_n \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} W^n \right)$$

que, por el Lema 5.1.6 y la Observación 5.2.1, es equivalente a la inclusión

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} \left(\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} [I(\mathbb{H})^{N_i} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} W^N] \right) \subset \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} \left(\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} [J_N \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} W^N] \right)$$

que, a su vez, por la Proposición 5.2.10 es equivalente a

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} [J_N \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} W^N] \subset \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} [I(\mathbb{H}_i)^{N_i} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} W^N]}.$$

Mirando las partes homogéneas de grado N tenemos el siguiente contenido

$$J_N \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}} \subset \overline{I(\mathbb{H}_i)^{N_i} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}}} = \overline{I_N \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}}}.$$

Para terminar observamos que como \mathcal{Y} (véase (5.2.21.3)) es un subesquema de codimensión mayor o igual que dos,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}, h_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_\lambda, h_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}, h_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{B}, h_i}$$

y, por lo tanto, localizando la expresión anterior se tiene que $J_N \mathcal{O}_{\mathcal{B}, h_i} \subset \overline{I_N \mathcal{O}_{\mathcal{B}, h_i}}$. \square

5.3. Otras relaciones de equivalencia

La noción de *equivalencia débil* que hemos descrito en la Definición 5.1.5 depende la noción de *sucesión local* (véase la Definición 5.1.2). Si cambiamos la noción de sucesión local es posible que la relación de equivalencia también cambie. A continuación veremos dos ejemplos de nociones alternativas que también son útiles en el problema de resolución constructiva.

5.3.1. Restringiendo la clase de morfismos lisos

Supongamos que en la Definición 5.1.2 sólo consideramos los morfismos lisos de los siguientes tipos:

- (1) proyección en la primer coordenada, $V \xleftarrow{\varphi} V_1 = V \times \mathbb{A}_k^n$ y
- (2) restricción a un subconjunto abierto (de Zariski) V_1 de V , $V \xleftarrow{\varphi} V_1$.

Por lo tanto, ahora las sucesiones locales sobre V que podemos considerar son las composiciones de transformaciones monoidales y morfismos lisos de los tipos (1) y (2). Notemos que en esta situación, fijada una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees \mathcal{G} , la definición de \mathcal{G} -sucesión local también ha cambiado.

Del mismo modo que en la Definición 5.1.5, podemos definir ahora una nueva relación de equivalencia en el conjunto de las \mathcal{O}_V -álgebras de Rees y una nueva noción de árbol de una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees. Como, en principio, estas nuevas nociones podrían ser diferentes a las anteriores, denotaremos por:

- $\tilde{\mathcal{C}}_V(\mathcal{G})$ a la clase de equivalencia de \mathcal{G} y por
- $\tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{G})$ al árbol de \mathcal{G} ,

ambos conceptos formulados ahora en términos de nuestra nueva noción de sucesión local.

Estas dos nuevas nociones satisfacen, análogamente a la Observación 5.2.1, que:

$$\tilde{\mathcal{C}}_V(\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{C}}_V(\mathcal{K}) \quad \text{si y sólo si} \quad \tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{K}).$$

Proposición 5.3.1. *Las dos nociones de equivalencia coinciden, i.e., para toda \mathcal{O}_V -álgebra de Rees \mathcal{G} se tiene que*

$$\tilde{\mathcal{C}}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{C}_V(\mathcal{G}).$$

Demostración. Sean \mathcal{G} y \mathcal{K} dos \mathcal{O}_V -álgebras de Rees. Probaremos este resultado mostrando que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \quad \text{si y sólo si} \quad \tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{K}).$$

Como la nueva noción de sucesión local es más restrictiva, $\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{K})$ implica que $\tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{K})$. Nos centraremos a continuación en la implicación recíproca.

Recordamos que el Teorema de Dualidad 5.2.3 establece que

$$\mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{K}) \quad (\text{si y}) \text{ sólo si} \quad \overline{\text{Diff } \mathcal{G}} = \overline{\text{Diff } \mathcal{K}}, \quad (5.3.1.1)$$

luego es suficiente probar el siguiente enunciado:

$$\tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{G}) = \tilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{K}) \quad \text{sólo si} \quad \overline{\text{Diff } \mathcal{G}} = \overline{\text{Diff } \mathcal{K}}. \quad (5.3.1.2)$$

Por analogía, vamos a probar (5.3.1.2) utilizando los mismos argumentos que aparecen en la demostración del Teorema de Dualidad pero adaptándolos a las nuevas restricciones. Para ello recordamos que la prueba se resume en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Demostración del} & \\
 & \text{Teorema de Dualidad 5.2.3} & \\
 \mathcal{F}_V(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_V(\mathcal{K}) & \xleftarrow{(\Leftarrow)} & \text{Diff } \mathcal{G} \subset \overline{\text{Diff } \mathcal{K}} \\
 \downarrow \text{Demostración del} & & \uparrow \text{Demostración del} \\
 \text{Teorema de Dualidad 5.2.3} & & \text{Teorema de Dualidad 5.2.3} \\
 \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}}(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Rightarrow} & \mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{H}} \\
 & \text{Proposición 5.2.10} &
 \end{array}$$

donde \mathcal{U}_{λ_i} es subesquema liso y \mathcal{H} es un casi-anillo de Rees de la forma $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{\lambda_i}}[I(\mathbb{H})^{N_i}W^N]$ construido a partir de $\text{Diff } \mathcal{K}$.

Notamos que, tanto en la prueba del Teorema de Dualidad 5.2.3 (que se encuentra en el Apartado 5.2.4) como en la prueba de la Proposición 5.2.10, todos los morfismos lisos que se han empleado son sólo de los tipos (1) y (2). Por lo que ambos resultados, sin necesidad de ser modificados, prueban (5.3.1.2). \square

5.3.2. Restringiendo la clase de transformaciones monoidales

En cada transformación de una álgebra de Rees por una transformación monoidal permisible aparece una hipersuperficie excepcional (véase la Definición 4.1.22). Al componer varias transformaciones manejaremos varias hipersuperficies excepcionales. Y si queremos que una composición concreta de transformaciones sea una resolución de una álgebra de Rees necesitamos además que estas hipersuperficies excepcionales tengan cruzamientos normales (véase la Definición 4.1.26).

Ahora presentaremos una nueva estructura y una nueva definición de transformación monoidal permisible adaptadas para manejar esta información.

Definición 5.3.2. Un *objeto básico* es una tripleta (V, \mathcal{G}, E) donde

- V es un esquema liso sobre un cuerpo perfecto,
- \mathcal{G} es una \mathcal{O}_V -álgebra de Rees y
- $E = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ es un conjunto de hipersuperficies lisas con cruces normales, i. e., para cada punto $x \in \bigcup_{i=1}^r H_i$ existe un sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_d\}$ en $\mathcal{O}_{V,x}$ de modo que, en un entorno adecuado de x ,

$$\bigcup_{i=1}^r H_i = V(z_{j_1} \cdots z_{j_\ell}), \quad \text{para algún } \ell \leq d. \tag{5.3.2.1}$$

Definición 5.3.3. Sea V un esquema liso sobre un cuerpo perfecto, se dice que un subesquema cerrado y liso $Y \subset \text{Sing } \mathcal{G}$ es un *centro permisible para* (V, \mathcal{G}, E) si es permisible para \mathcal{G} según la Definición 4.1.22 y además satisface la condición adicional de *tener cruzamientos normales con* E , lo que significa que

para cada punto $x \in Y$ existe un sistema regular de parámetros $\{z_1, \dots, z_d\}$ que satisface las condiciones enunciadas en (5.3.2.1) y además $Y = V(z_1 \cdots z_t)$ para algún $t \leq d$.

Una *transformación monoidal permisible para el objeto básico* (V, \mathcal{G}, E) es una transformación monoidal $V_1 \longleftarrow V$, en un centro permisible para (V, \mathcal{G}, E) .

El *transformado* de (V, \mathcal{G}, E) es el objeto básico:

$$(V_1, \mathcal{G}_1, E_1)$$

donde \mathcal{G}_1 es la transformada de \mathcal{G} (véase la Definición 4.1.22) y $E_1 = \{H_1, \dots, H_r, H_{r+1}\}$. Aquí $H_i \in E_1$ denota el transformado estricto de $H_i \in E$ para $i = 1, \dots, r$ y H_{r+1} es la hipersuperficie excepcional del blow-up. Observamos que, la condición de que el centro tenga cruzamientos normales con E garantiza que la unión de las hipersuperficies de E_1 posee cruzamientos normales.

En paralelo a la Definición 5.1.3, consideramos ahora una noción de *sucesión local para objetos básicos*:

Definición 5.3.4. Sea (V, \mathcal{G}, E) un objeto básico. Se dice que la sucesión

$$(V, \mathcal{G}, E) = (V_0, \mathcal{G}_0, E_0) \xleftarrow{\pi_0} (V_1, \mathcal{G}_1, E_1) \xleftarrow{\pi_1} \cdots \xleftarrow{\pi_{m-1}} (V_m, \mathcal{G}_m, E_m) \quad (5.3.4.1)$$

es una (V, \mathcal{G}, E) -*sucesión local* si para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$, π_j es o bien una transformación monoidal permisible para $(V_j, \mathcal{G}_j, E_j)$ (y entonces $(V_{j+1}, \mathcal{G}_{j+1}, E_{j+1})$ es el transformado de $(V_j, \mathcal{G}_j, E_j)$ en el sentido de la Definición 5.3.3), o bien π_j es un morfismo liso (y entonces \mathcal{G}_{j+1} y E_{j+1} son, respectivamente, los pull-backs de \mathcal{G}_j y E_j en V_{j+1} por π_j).

Por lo tanto, en este nuevo contexto, la condición de cruzamientos normales se traslada a la noción de sucesión local creando, por tanto, nuevas nociones de equivalencia débil y de árbol.

Definición 5.3.5. El *árbol del objeto básico* (V, \mathcal{G}, E) , que denotaremos por $\mathcal{F}_V((V, \mathcal{G}, E))$, está formado por las ramas del árbol $\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$ que están determinadas por (V, \mathcal{G}, E) -sucesiones locales. I. e., vamos a limitarnos a considerar aquellas \mathcal{G} -sucesiones locales que además sean (V, \mathcal{G}, E) -sucesiones locales.

Definición 5.3.6. Se dice que los objetos básicos (V, \mathcal{G}, E) y (V, \mathcal{K}, E) son *equivalentes* si $\mathcal{F}_V((V, \mathcal{G}, E)) = \mathcal{F}_V((V, \mathcal{K}, E))$.

Proposición 5.3.7. *Dos objetos básicos* (V, \mathcal{G}, E) y (V, \mathcal{K}, E) *son equivalentes (en el sentido de la Definición 5.3.6) si y sólo si* \mathcal{G} *y* \mathcal{K} *son débilmente equivalentes (en el sentido de la Definición 5.1.5).*

Demostración. Probaremos que

$$\mathcal{F}_V((V, \mathcal{G}, E)) = \mathcal{F}_V((V, \mathcal{K}, E)) \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} = \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}}$$

(véase el Teorema de Dualidad 5.2.3).

Un punto clave en la demostración del Teorema de Dualidad 5.2.3 es la reducción al caso tratado en la Proposición 5.2.10, donde consideremos dos álgebras de Rees de la forma $\mathcal{H} = \mathcal{O}_V[I(\mathbb{H})^N W^n]$ y $\mathcal{O}_V[JW^b]$, ambas definidas sobre algún esquema liso V (no necesariamente el anterior).

Modificaremos, si fuera necesario, aquellas transformaciones permisibles que figuran en estas dos demostraciones. Lo haremos para garantizar que los centros tengan cruces normales con las hipersuperficies de E .

Esta modificación es pertinente en la construcción de la \mathcal{H} -sucesión local (5.2.10.2) en la prueba de la Proposición 5.2.10. La abordaremos en dos casos:

- Supongamos que $\mathbb{H}|_U$ tiene cruzamientos normales con E . Bajo estas condiciones observamos que los centros escogidos en la sucesión local (5.2.10.2) tienen cruzamientos normales con los transformados de E .
- En caso contrario, si $\mathbb{H}|_U$ y E no tienen cruzamientos normales, podemos sustituir U por digamos $\tilde{U} = U \setminus F$, donde F es un conjunto cerrado de codimensión al menos dos, de modo que $\mathbb{H}|_{\tilde{U}}$ y $E|_{\tilde{U}}$ sí tengan cruzamientos normales. Esta restricción nos retrotrae al caso anterior.

Para terminar, observamos que como el cerrado F tiene codimensión al menos dos, los abiertos U y \tilde{U} contienen las mismas hipersuperficies. Por lo tanto, esta restricción no afecta a la reducción (5.2.21.2) en la prueba del Teorema de Dualidad, en la que se localiza en primos de altura 1.

□

Observación 5.3.8. En la prueba anterior, hemos tenido que añadir una restricción a un subesquema abierto a la sucesión local (5.2.10.2) de la prueba de la Proposición 5.2.10.

Como este tipo de morfismos es uno de los considerados en el Apartado 5.3.1 podemos imponer las restricciones de los Apartados 5.3.1 y 5.3.2 simultáneamente.

Dicho de otro modo, se puede establecer otra nueva definición de sucesión local para un objeto básico (V, \mathcal{G}, E) restringiendo los tipos de morfismos a

- blow-ups en centros permisibles para \mathcal{G} que tengan cruzamientos normales con E ,
- proyecciones en la primera coordenada, siendo la segunda un espacio afín y
- restricción a abiertos.

De nuevo, a partir de esta nueva noción de sucesión local podemos formalizar una relación de equivalencia entre objetos básicos que cumple que

$$(V, \mathcal{G}, E) \text{ y } (V, \mathcal{K}, E) \text{ son equivalentes} \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{G}} = \overline{\mathbb{D}\text{iff } \mathcal{K}}.$$

Índice de Símbolos

\odot	operación amalgama entre álgebras de Rees, página 102
(V, \mathcal{G}, E)	objeto básico, página 156
$(V_1, \mathcal{G}_1, E_1)$	transformado del objeto básico (V, \mathcal{G}, E) , página 157
$[T]_n$	parte homogénea de grado n del anillo graduado T , página 11
Δ^α	coeficiente de Tay para polinomios, página 42
$\Delta_{\widehat{B}_m}^\alpha$	coeficiente de Tay del anillo completo \widehat{B}_m , página 84
$\Delta_{\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}}^i$	coeficiente de Tay $_{z_1}$, página 145
$\mu(M)$	número mínimo de generadores de M como módulo, página 49
$\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \xrightarrow{\mu} \mathcal{B}$	morfismo producto $\mu(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$, página 55
$\nu(I)$	valoración del ideal I , página 39
$\nu_{\mathfrak{m}}(f)$	orden de f en el anillo local regular (R, \mathfrak{m}) , página 5
$\nu_{(a_1, \dots, a_d)}(J)$	orden de J en el anillo local regular $k[X_1, \dots, X_d]_{(X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d)}$, página 42
$\nu_x(I)$	orden usual de I en el anillo local regular $\widehat{\mathcal{O}}_{V,x}$, página 99
$V \xleftarrow{\pi} V_1$	o bien un blow-up o bien un morfismo liso, página 122
$V \xleftarrow{\rho} V_1$	blow-up de V , página 103
$\varphi^*(\mathcal{G})$	pull-back de \mathcal{G} por el morfismo φ , página 122
$V \xleftarrow{\varphi} V'$	morfismo liso, página 122
$\Omega_{\mathcal{B} k}^1$	módulo de diferenciales de la k -álgebra \mathcal{B} sobre k , página 55

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

\mathbb{A}_k^d	espectro del anillo $k[X_1, \dots, X_d]$, página 44
$\text{Bl}(\mathcal{G})$	blow-up respecto al álgebra de Rees \mathcal{G} , página 113
$\text{Bl}_I(R)$	blow-up o explosión del anillo R en el ideal I , página 7
$\overline{\text{Bl}(\mathcal{G})}$	blow-up normalizado de $\text{Spec } B$ respecto a la B -álgebra de Rees \mathcal{G} , página 114
$B[JW]$	anillo de Rees del ideal $J \subset B$, página 98
$B[JW^b]$	casi-anillo de Rees del ideal J con peso b , página 98
$\mathcal{C}_V(\mathcal{G})$	clase de equivalencia débil de la \mathcal{O}_V -álgebra de Rees \mathcal{G} , página 123
$\tilde{\mathcal{C}}_V(\mathcal{G})$	clase de equivalencia de \mathcal{G} restringiendo los tipos de morfismos lisos, página 155
D^α	Operador diferencial que induce Δ^α , página 86
$\mathcal{B} \xrightarrow{d_{\mathcal{B} k}} \Omega_{\mathcal{B} k}^1$	derivación k -lineal universal, página 56
$\mathcal{B} \xrightarrow{d_{\mathcal{B} k}^r} \mathcal{P}_{\mathcal{B} k}^r$	operador diferencial universal, página 75
$\text{Diff } \mathcal{G}$	mínima álgebra de Rees diferencial que contiene a \mathcal{G} , página 115
$\text{Diff}_{V k} \mathcal{G}$	mínima \mathcal{O}_V -álgebra de Rees diferencial que contiene a \mathcal{G} , página 115
$\text{Diff}^r(J)$	extensión de J por $\{\Delta^\alpha\}_{0 \leq \alpha \leq r}$, página 42
$\text{Diff}_{\mathcal{B} k}^r$	\mathcal{B} -módulo de operadores diferenciales de orden $\leq r$ sobre k , página 77
$\text{Diff}_{\mathcal{B} k}^r(J)$	ideal saturado por los operadores diferenciales k -lineales en B de orden $\leq r$ sobre J , página 88
$\dim_k(M)$	dimensión M como k -espacio vectorial, página 1
$\dim_{\text{Krull}}(R)$	dimensión de Krull del anillo R , página 1
E	conjunto de hipersuperficies, página 156
E_1	transformadas estrictas de las hipersuperficies de E , junto con la hipersuperficie excepcional, página 157
$\text{Fitt}_j(M)$	ideal de Fitting de orden j del módulo M , página 50

$\mathcal{F}_V((V, \mathcal{G}, E))$	árbol del objeto básico (V, \mathcal{G}, E) , página 157
$\mathcal{F}_V(\mathcal{G})$	árbol de la \mathcal{O}_V -álgebra de Rees \mathcal{G} , página 127
$\widetilde{\mathcal{F}}_V(\mathcal{G})$	árbol de \mathcal{G} restringiendo los tipos de morfismos lisos, página 155
$(X, x) \xrightarrow{f} (Y, f(x))$	morfismo étale en x , página 96
$f_1 W^n$	transformado ponderado de fW^n , página 103
$\text{gr}(\mathcal{P}_{\mathcal{B} k})$	anillo graduado asociado a $\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{B} \xrightarrow{\mu} \mathcal{B}$, página 80
$\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$	anillo graduado asociado al anillo local (R, \mathfrak{m}) , página 4
gr. tras $_k K$	grado de trascendencia de la extensión de cuerpos de K sobre k , página 62
\mathcal{G}	álgebra de Rees, página 97
\mathcal{G}_1	transformada del álgebra de Rees \mathcal{G} , página 103
$\mathcal{G}_{(J,b)}$	casi-anillo de Rees, página 98
\mathcal{G}_{j+1}	o bien la transformada o bien el pull-back de \mathcal{G}_j , página 122
$\overline{\mathcal{G}}$	clausura entera del álgebra de Rees \mathcal{G} , página 105
$\text{In}_{\mathfrak{m}}(f)$	parte inicial de f en $\text{gr}_{\mathfrak{m}}(R)$, página 4
\overline{I}	clausura entera del ideal I , página 30
$\text{Jac}(f_1, \dots, f_s)$	matriz jacobiana del conjunto f_1, \dots, f_s , página 54
$K(R)$	cuerpo de cocientes del dominio R , página 21
$\text{ord}_{\mathcal{G}}(x)$	orden del álgebra de Rees \mathcal{G} en el punto x , página 100
$\mathcal{P}_{\mathcal{B} k}^r$	\mathcal{B} -módulo de partes principales de orden $\leq r$ sobre k , página 75
$\text{Proj}(T)$	esquema proyectivo del anillo graduado T , página 7
\overline{R}	clausura entera del anillo R , página 17
$\text{rg}(\text{Jac}(J) _{\mathfrak{p}})$	rango de la matriz jacobiana de J evaluada en \mathfrak{p} , página 54
$\text{rg}(M)$	rango del R -módulo libre M , página 49
R^\times	unidades del anillo R , página 25

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

$\mathbb{S}(M)$	álgebra simétrica del módulo M , página 80
$\text{Sing } \mathcal{G}$	lugar singular de \mathcal{G} , página 99
Tay	morfismo de Taylor para anillos completos, página 84
Tay	morfismo de Taylor para anillos de polinomios, página 42
Tay_{z_1}	morfismo de Taylor para anillos completos sólo en la primera variable, página 145
$\mathbb{V}_M(\mathcal{G})$	M -ésima acción de Veronese sobre \mathcal{G} , página 102
$V(\mathcal{G})$	conjunto de ceros del álgebra de Rees \mathcal{G} , página 101
\mathfrak{X}	ideal irrelevante, página 7
\mathfrak{X}_I	ideal irrelevante del anillo graduado $R[IW]$, página 10

Índice Alfabético

- álgebra de Rees, 97
 - diferencial, 115
 - generada por una álgebra de Rees, 115
 - transformada, *véase* transformada de una álgebra de Rees
- anillo
 - íntegramente cerrado, 18
 - de valoración, 26
 - de valoración discreta, 28
 - graduado asociado a un anillo local, 4
 - local regular, 1
 - normal, 22
 - regular, 1
- anillo de Rees, 98
- árbol
 - de un objeto básico, 157
 - de una álgebra de Rees, 127
- blow-up
 - de un anillo en un ideal, 7
 - normalizado respecto a una álgebra de Rees, 114
 - respecto a una álgebra de Rees, 113
- casi-anillo de Rees, 98
- centro permisible
 - para un objeto básico, 156
 - para una álgebra de Rees, 103
- clausura entera
 - de un anillo, 17
 - de un ideal, 30
- coeficiente de Taylor
 - anillo completo, 84
 - polinomio, 42
- conjunto de ceros de una álgebra de Rees, 101
- cruzamientos normales, 105
- dominio normal, 22
- entero
 - sobre un anillo, 17
 - sobre un ideal, 30
- equivalencia
 - débil, 122
 - entre objetos básicos, 157
- esquema normal, 22
- extensión entera de anillos, 18
- grupo de valores, 25
- hipersuperficie excepcional, 103
- ideal
 - de Fitting, 50
 - íntegramente cerrado, 30
 - irrelevante, 7
 - primo regular, 3
 - saturado por diferenciales, 88
- inclusión de árboles, 127
- intersección de árboles, 127
- lisitud
 - diferencial para k -álgebra, 82
 - esquema, 70

ÍNDICE ALFABÉTICO

- k -álgebra de tipo finito, 64
 - en un punto cerrado, 63, 68, 69
- lugar singular de una álgebra de Rees, 99
- matriz jacobiana
 - conjunto de funciones, 54
- módulo
 - de diferenciales, 56
 - de operadores diferenciales, 77
 - de partes principales, 74
- morfismo
 - de Taylor
 - de un anillo completo, 84
 - de un anillo de polinomios, 42
 - étale, 94, 95
 - liso, 94
- objeto básico, 156
- operador diferencial, 77
- orden
 - de una álgebra de Rees, 100
 - en anillo local regular, 5
- parte inicial, 4
- potencia simbólica, 3
- pull-back
 - de una álgebra de Rees, 122
- rama de una álgebra de Rees, 127
- rango, 49
- reducción, 33
- relación de dependencia entera
 - sobre un anillo, 17
 - sobre un ideal, 30
- resolución
 - de una álgebra de Rees, 105
- sucesión
 - regular, 5
 - trivial, 61
- sucesión local
 - para dos álgebras de Rees, 122
 - para un objeto básico, 157
 - para una álgebra de Rees, 122
 - sobre un esquema, 122
- transformación (monoidal) permisible
 - para un objeto básico, 157
 - para una álgebra de Rees, 103
- transformada
 - de una álgebra de Rees, 103
- transformado
 - ponderado, 103
- valoración
 - de un ideal, 39
 - en un anillo, 25
 - en un cuerpo, 25
- Veronese, acción de, 102

Bibliografía

- [1] S. S. Abhyankar, *Ramification theoretic methods in Algebraic Geometry*, Annals of Mathematics Studies, vol. 43, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1959.
- [2] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, *Newton-Puiseux expansion and generalized Tschirnhausen transformation*. I, J. Reine Angew. Math. **260** (1973), 47–83; II, J. Reine Angew. Math. **261** (1973), 29–54.
- [3] Altman A. and Kleiman S., *Introduction to Grothendieck Duality Theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 146, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [4] J. Álvarez-Montaner, M. Blickle, and G. Lyubeznik, *Generators of D -modules in positive characteristic*, Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 4, 459–473.
- [5] Atiyah M. F. and MacDonald I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [6] A. Benito, *The tau invariant and elimination*, J. Algebra **324** (2010), no. 8, 1903–1920.
- [7] A. Benito and O. E. Villamayor U., *Techniques for the study of singularities with applications to resolution of 2-dimensional schemes*, Math. Ann. **353** (2012), no. 3, 1037–1068.
- [8] ———, *Monoidal transformations and invariants of singularities in positive characteristic*, Compos. Math., Por aparecer, available at [arXiv:1103.3462](https://arxiv.org/abs/1103.3462) [math.AG].
- [9] E. Bierstone and P. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximal strata of a local invariant*, Invent. Math. **128** (1997), no. 2, 207–302.
- [10] R. Blanco and S. Encinas, *Coefficient and elimination algebras in resolution of singularities*, Asian J. Math. **15** (2011), no. 2, 251–271.
- [11] M. Blickle, M. Mustață, and K. E. Smith, *Discreteness and rationality of F -thresholds*, Special volume in honor of Melvin Hochster, 2008, pp. 43–61.
- [12] ———, *F -thresholds of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 12, 6549–6565.
- [13] A. Bravo, M. L. García-Escamilla, and O. E. Villamayor U., *On Rees algebras and invariants for singularities over perfect fields*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 3, 1201–1251.
- [14] A. Bravo and O. E. Villamayor U., *Singularities in positive characteristic, stratification and simplification of the singular locus*, Adv. in Math. **224** (2010), no. 4, 1349–1418.
- [15] V. Cossart, U. Jannsen, and S. Saito, *Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes*, Preprint, available at [arXiv:0905.2191v1](https://arxiv.org/abs/0905.2191v1) [math.AG].
- [16] V. Cossart and O. Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I: Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings*, J. Algebra **320** (2008), no. 3, 1051–1082.

BIBLIOGRAFÍA

- [17] _____, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II*, J. Algebra **321** (2009), no. 7, 1836–1976.
- [18] S. D. Cutkosky, *Resolution of Singularities*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 63, American Mathematical Society, 2004.
- [19] _____, *Resolution of singularities for 3-folds in positive characteristic*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 1, 59–127.
- [20] _____, *A skeleton key to Abhyankar's proof of embedded resolution of characteristic p surfaces.*, Asian. J. Math. **15** (2011), no. 3, 369–416.
- [21] Eisenbud D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer, 1994.
- [22] S. Encinas and O. E. Villamayor U., *Rees algebras and resolution of singularities*, Proceedings del XVI-Coloquio Latinoamericano de Algebra (Colonia, Uruguay, 2005), Biblioteca de la Revista Matematica Iberoamericana, Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 2007, pp. 63–85.
- [23] _____, *A Course on Constructive Desingularization and Equivariance*, Resolution of Singularities: A research textbook in tribute to Oscar Zariski (H. Hauser, J. Lipman, F. Oort, and A. Quirós, eds.), Progr. Math., vol. 181, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 147–227.
- [24] _____, *A new proof of desingularization over fields of characteristic zero*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), no. 2, 339–353.
- [25] J. Giraud, *Contact maximal en caractéristique positive*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 4ème série **8** (1975), no. 2, 201–234.
- [26] Grothendieck A., *Elements de Géométrie Algébrique I*, Publications Mathématiques, vol. 4, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1960.
- [27] _____, *Elements de Géométrie Algébrique IV (Première Partie)*, Publications Mathématiques, vol. 20, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1964.
- [28] _____, *Elements de Géométrie Algébrique IV (Seconde Partie)*, Publications Mathématiques, vol. 24, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1965.
- [29] _____, *Elements de Géométrie Algébrique IV (Troisième Partie)*, Publications Mathématiques, vol. 28, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1966.
- [30] _____, *Elements de Géométrie Algébrique IV (Quatrième Partie)*, Publications Mathématiques, vol. 32, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1967.
- [31] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer, 1977.
- [32] H. Hauser, *Seventeen obstacles for resolution of singularities*, Singularities: The Brieskorn Anniversary Volume, Progr. Math., vol. 162, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998, pp. 289–313.
- [33] _____, *On the problem of resolution of singularities in positive characteristic (or: a proof we are still waiting for)*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **47** (2010), no. 1, 1–30.
- [34] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I*, Ann. of Math. **79** (1964), no. 1, 109–203; II, Ann. of Math. **79** (1964), no. 2, 205–326.
- [35] _____, *Additive groups associated with points of a projective space*, Ann. of Math. **92** (1970), no. 2, 327–334.
- [36] _____, *Certain numerical characters of singularities*, J. Math. Kyoto Univ. **10** (1970), no. 1, 151–187.

- [37] ———, *Introduction to the theory of infinitely near singular points*, Memorias de Matemática del Instituto “Jorge Juan”, vol. 28, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1974.
- [38] ———, *Idealistic exponents of a singularity*, J. J. Sylvester Sympos. (Baltimore, Md, 1976), Algebraic Geometry, The Johns Hopkins centennial lectures, Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md., 1977, pp. 52–125.
- [39] ———, *Theory of infinitely near singular points*, J. Korean Math. Soc. **40** (2003), no. 5, 901–920.
- [40] ———, *Three key theorems on infinitely near singularities*, Singularités Franco-Japonaises, Sémin. Congr., vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 2005, pp. 87–126.
- [41] C. Huneke and I. Swanson, *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 336, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [42] H. Kawanoue, *Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic. I: Foundation; the language of the idealistic filtration*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 3, 819–909.
- [43] H. Kawanoue and K. Matsuki, *Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic (the idealistic filtration program. II: Basic invariants associated to the idealistic filtration and their properties*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46** (2010), no. 2, 359–422.
- [44] Kunz E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birhauser Boston, 1985.
- [45] J. Lipman and B. Teissier, *Pseudorational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals*, Michigan Math. J. **28** (1981), no. 1, 97–116.
- [46] Matsumura H., *Commutative Algebra*, 2^a ed., Benjamin, 1980.
- [47] ———, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, 1986.
- [48] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton mathematical series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.
- [49] T. Oda, *Hironaka’s additive group scheme*, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 181–219.
- [50] W. Vasconcelos, *Integral Closure: Rees Algebras, Multiplicities, Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlang, Berlin, 2005.
- [51] O. E. Villamayor U., *Constructiveness of Hironaka’s resolution*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 4^{ème} série **22** (1989), no. 1, 1–32.
- [52] ———, *Patching local uniformizations*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. 4^{ème} série **25** (1992), no. 6, 629–677.
- [53] ———, *Hypersurface singularities in positive characteristic*, Adv. Math. **213** (2007), no. 2, 687–733.
- [54] ———, *Elimination with applications to singularities in positive characteristic*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 661–697.
- [55] ———, *Rees algebras on smooth schemes: integral closure and higher differential operators*, Rev. Mat. Iberoamericana **24** (2008), no. 1, 213–242.
- [56] J. Włodarczyk, *Simple Hironaka resolution in characteristic zero*, Journal of the A.M.S. **18** (2005), no. 4, 779–822.
- [57] O Zariski and P Samuel, *Commutative Algebra. Volume II*, Graduate texts in mathematics, vol. 29, Springer-Verlag, 1960.

The image displays a musical score for the piece "Carros de fuego" by Vangelis. The score is written in 4/4 time and consists of six staves. The first staff begins with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The notation includes various rhythmic values such as quarter, eighth, and sixteenth notes, as well as rests. The score concludes with a double bar line and repeat dots. The overall style is minimalist and melodic, characteristic of Vangelis's work.

Carros de fuego,
Vangelis