FACULTAD DE FORMACIÓN DE
PROFESORADO Y EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

LA FORMACIÓN MATEMÁTICO-DIDÁCTICA DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA.
DE LAS MATEMÁTICAS POR ENSEÑAR A LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

DIRECTORES

MARIANNA BOSCH CASABÓ

JOSEP GASCÓN PÉREZ

ALICIA RUIZ-OLARRÍA

Madrid, 2015

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación es el fruto de un trabajo colectivo de personas que han colaborado y de instituciones que han apoyado su realización a lo largo de estos años, y a quienes deseo expresar mi agradecimiento:

A la Universidad Autónoma de Madrid.

A la Facultad de Formación de Profesorado y Educación.

Al Departamento de Didácticas Específicas.

A Menchu García Gómez, Clemente Herrero y Manuel Álvaro, sucesivos directores del Departamento.

A Tomás Sierra, con quien empecé a conocer los trabajos de Guy Brousseau e Yves Chevallard.

A Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón; juntos preparamos y realizamos la primera experiencia de REI.

A Tomás Sierra y Josep Gascón; quienes me han invitado en distintas ocasiones a participar en los cursos del master de formación del profesorado de secundaria.

A Marianna Bosch y Josep Gascón; juntos realizamos el REI último incluido en esta memoria.

A Manuel Lorite, quien me resolvió todas las dudas técnicas sobre citas y referencias. A Chema Tomás, quien encontró libros que necesité.

A todos mis amigos y compañeros del grupo de investigación de didáctica de matemáticas, con quienes tantos seminarios he compartido.

A Montserrat Casabò y a Lola García por acogerme en su casa de Barcelona.

A mi familia y amigos, quienes siempre me han apoyado incondicionalmente.

A mis directores de tesis Marianna Bosch y Josep Gascón, cuya generosidad, sabiduría, trabajo y amistad me han acompañado siempre.

A Alicia, mi madre

y

A mis hijas, Beatriz y Cristina

ÍNDICE

Introducción general

El Comité de Educación de la Sociedad Europea de Matemáticas está publicando estos últimos años una serie de informes sobre «resultados sólidos» de la investigación didáctica. En ellos se recopilan breves síntesis de resultados de investigación, considerados de importancia en la comunidad europea de educación matemática por estar basados en investigaciones reconocidas, haber influido en el campo de la investigación didáctica y poderse utilizar o aplicar en circunstancias y ámbitos relativamente amplios. El primer informe de 2012 se titula: *It is Necessary that Teachers are Mathematically Proficient, but is it Sufficient? Solid Findings in Mathematics Education on Teacher Knowledge*. En él se afirma que la investigación en didáctica establece tres factores decisivos para la enseñanza de las matemáticas y la formación del profesorado (*mathematics teacher education*). El primer factor es el tipo de matemáticas y otros conocimientos relacionados que los profesores deben saber, es decir, el *contenido* de la enseñanza. El segundo factor es la *comunidad* y se refiere al trabajo en equipo del profesorado en los centros de enseñanza, tanto entre profesores de matemáticas como entre docentes de distintas disciplinas y niveles educativos. Finalmente, el tercer factor es el *contexto*, esto es, el conjunto de dispositivos que dan soporte a la tarea docente más allá del centro escolar.

Nuestra investigación aborda el primero de estos factores, el contenido de la enseñanza, es decir las *matemáticas por enseñar* teniendo en cuenta, además, las *matemáticas necesarias para enseñar matemáticas*. Más concretamente, nos centramos en cómo la formación del profesorado puede incidir sobre la relación del profesor de matemáticas con el contenido que debe enseñar, sin abordar la multitud de otras tareas que conforman la profesión docente y que la formación no puede obviar. Sobre este factor de «contenido», el informe mencionado indica que «saber matemáticas es naturalmente un prerrequisito esencial para enseñar matemáticas». Pero en seguida precisa que necesario no significa suficiente, puesto que «una enseñanza eficiente de las matemáticas, independientemente de quiénes sean los alumnos, también necesita otro tipos de conocimientos y destrezas» estrechamente relacionadas con el conocimiento matemático. Como ejemplos de este tipo de conocimientos se remite, entre otros, a la distinción establecida por el psicólogo de la educación Lee Shulman (1987), y ampliamente utilizada hoy día, entre el «conocimiento del contenido», es decir la formación puramente matemática, el «conocimiento pedagógico del contenido», es decir sobre las matemáticas tal como se enseñan y se aprenden, y el «conocimiento pedagógico», es decir la forma general de enseñar o aprender cualquier disciplina.

El trabajo de investigación que aquí presentamos tiene su punto de partida en dos cuestiones que convergen. La primera gran cuestión es precisamente la que acabamos de señalar y que pone de manifiesto el informe recién aludido. Refiere, particularmente, a la propia formación del profesorado en relación con el contenido de enseñanza y al problema de determinar el tipo de actuación más necesario y eficaz que puede aportar la didáctica de las matemáticas en este nivel. En relación con este gran problema, tomaremos como punto de partida el trabajo realizado por los investigadores franceses Gisèle Cirade e Yves Chevallard (Cirade 2006; Chevallard y Cirade 2009) sobre lo que denominan «las matemáticas para la enseñanza». Asumimos con ellos que:

> Une formation professionnelle qui se veut authentiquement universitaire se doit de refuser l'illusion de l'application sans peine de savoirs tout faits et l'absence d'un véritable dialogue épistémologique, culturel et professionnel permanent. Pour ce faire, il est crucial de pouvoir s'appuyer sur des dispositifs de formation et de recherche permettant de faire émerger les problèmes de la profession pour les étudier avec les professionnels en formation, leurs formateurs et les chercheurs qui consentent à s'impliquer dans des recherches fondamentales à finalité de développement professionnel. (Chevallard y Cirade 2009)

En su trabajo de tesis, Cirade (2006) pone de manifiesto que un aspecto importante de las dificultades que encuentran los profesores en el ejercicio de la actividad docente está ligado a la problematicidad (matemática) de las matemáticas por enseñar, por lo que plantea la necesidad de elaborar nuevas infraestructuras matemáticas para la enseñanza y, sobre todo, para la profesión docente. En las conclusiones de su estudio, indica de forma categórica (Cirade 2006, p. 444-445):

> La recherche « clinique » que nous avons menée en interrogeant les difficultés et obstacles rencontrés sur le chemin qui va de l'état d'étudiant en mathématiques au statut de professeur de mathématiques met au jour ce qui est sans doute le nœud d'un malentendu fondamental sur le métier de professeur et les exigences qui lui sont consubstantielles. Alors que le contrat qui se noue dans la société à propos de l'École postule depuis des siècles que la matière enseignée ne fait pas en elle-même problème, que seul le *choix* de cette matière donne lieu à débat, voire à polémiques, et qu'elle ne fait problème en vérité que pour ceux qui doivent apprendre, l'étude conduite ici établit l'évidence contraire : la matière

> mathématique, puisque c'est cela qui nous importe, est presque toujours mal définie, insuffisamment travaillée, et indéfiniment problématique.

La segunda cuestión que origina nuestro trabajo se basa en los resultados obtenidos por nuestro grupo de investigación español en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (en adelante, TAD)[1]. Durante el periodo 2004-2011 se desarrollan dos proyectos de investigación basados en la enseñanza de la modelización matemática en secundaria y primeros cursos universitarios, mediante un nuevo tipo de dispositivo didáctico llamado «recorrido de estudio e investigación»[2]. Estos proyectos se centran en analizar las condiciones de posibilidad y de difusión generalizada de estos recorridos de estudio e investigación (en adelante, REI) en los actuales sistemas de enseñanza. El estudio de la *ecología* de los REI, es decir de las condiciones institucionales que permiten su existencia como dispositivo normalizado de enseñanza, pone de manifiesto la presencia de importantes restricciones que emanan de los paradigmas epistemológicos y pedagógicos dominantes en la enseñanza. Nuestro equipo de investigación ha indagado esta cuestión en relación con distintos contenidos de enseñanza y en diferentes niveles educativos, desde la enseñanza secundaria obligatoria hasta la universidad (F. J. García 2005, Esther Rodríguez 2006, Tomás S. Sierra 2006, Berta Barquero 2009, Noemí Ruiz-Munzón 2010). Aunque muchas de las restricciones detectadas se sitúan en el nivel institucional, necesitamos apoyarnos en la incidencia de las personas como constituyentes esenciales de las instituciones para intentar modificarlas y hacerlas evolucionar. De ahí que el colectivo de profesores aparezca como una vía crucial de actuación, especialmente a partir de esta conexión privilegiada que se establece entre la investigación didáctica y la formación inicial y continua del profesorado. Asumimos que la superación de las restricciones detectadas requiere un cambio en las estrategias didácticas y pedagógicas de los profesores y también de los alumnos, tanto en el nivel práctico (sus maneras de enseñar y aprender) como en el teórico (la manera de concebir, entender y justificar las estrategias docentes y discentes). Si la evolución de las actividades y formas de pensar de los alumnos está parcialmente en manos de los profesores, la de los propios profesores también está parcialmente en manos de los formadores de profesores, cuya misión es la de adecuar el

[1] www.atd-tad.org.

[2] "Los Recorridos de Estudio e Investigación como propuesta didáctica para la enseñanza de la modelización matemática" (Ministerio de Ciencia y Tecnología EDU2008-02750) y "Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del currículum de matemáticas entre la ESO, el Bachillerato y el Primer ciclo universitario" (Ministerio de Ciencia y Tecnología BSO2003-04000).

equipamiento de los docentes a los retos que les plantea y les planteará el ejercicio de su profesión.

Para abordar estas dos grandes cuestiones que acabamos de presentar, formularemos una serie de asunciones y conjeturas que se situarán en el centro de nuestro trabajo de investigación.

(1) Asumimos en primer lugar que la principal contribución de la didáctica de las matemáticas en la formación del profesorado (en adelante, FP) para abordar la problematicidad de la matemática por enseñar, consiste en aportar herramientas que permitan deconstruir y reconstruir los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza, así como, más en general, las infraestructuras matemáticas y didácticas necesarias para la profesión docente.

(2) Asumimos también que, en el ámbito de la TAD donde se sitúa este trabajo, y como expondremos con detalle en los capítulos 2 y 3 de esta memoria, un conjunto importante de herramientas que la didáctica puede aportar a los profesores se basa en la elaboración de un modelo epistemológico de referencia (en adelante, MER) de los contenidos y en cuestiones que conforman (o podrían conformar) el currículum de los distintos niveles educativos y en diseñar organizaciones didácticas asociadas al modelo reconstruido.

(3) Conjeturamos que una posible manera de poner la elaboración de los MER a disposición del profesorado, tanto en la formación inicial como en la formación continua, puede basarse en el dispositivo didáctico de los REI. De este modo, los REI adquieren la condición de instrumentos apropiados para abordar en la FP la problematicidad de las matemáticas para la enseñanza, lo que, como veremos en el capítulo 3 de esta memoria, conlleva su transformación-reconversión en recorridos de estudio investigación para la formación del profesorado, esto es, en REI-FP.

(4) Así pues, conjeturamos que los REI-FP pueden funcionar como dispositivos viables y efectivos en la FP en la medida en que cumplen una serie de requisitos, tal como nos proponemos mostrar en esta memoria:

- Permiten incorporar y abordar la problemática del profesor, por lo menos en su dimensión matemática (no siempre muy visible por parte del profesorado, pero presente).
- Resultan ser un buen dispositivo de formación para difundir-enseñar-transmitir los MER a los profesores, evitando una estrategia monumentalista basada únicamente en presentar o «enseñar» en el sentido de mostrar los MER como si fuesen monumentos.

- Permiten vivir en carne propia nuevos paradigmas epistemológicos y nuevos contratos didácticos mediante una nueva redistribución de las responsabilidades didácticas en el aula.
- Proporcionan un «medio experimental» para el análisis didáctico y, a su vez, para introducir nociones de didáctica (MER, medio, esquema herbartiano, etc.).
- No proponen organizaciones didácticas cerradas, sino que aportan un marco general para el análisis, diseño, gestión y evaluación de los procesos didácticos.

El trabajo que presentamos en esta memoria se ha organizado en cinco capítulos. El primero, titulado *Respuesta institucional a las necesidades de formación del profesorado de matemáticas de Secundaria,* se inicia con un análisis de la consideración social del oficio de profesor concluyéndose que actualmente el oficio de enseñante se mantiene en un estado de subdesarrollo práctico, profesional y científico hasta el punto que, socialmente, es considerado como una «semiprofesión» y que la respuesta que oficialmente se propone a las necesidades de formación es coherente con esta baja consideración. En este capítulo se recogen las disposiciones y normativa que desde los años 70 han regulado los requisitos relativos a la formación del profesorado de Secundaria para entrar a formar parte del cuerpo de funcionarios docentes. En especial recogemos aquellos aspectos que atañen a la formación específica legalmente obligatoria para la enseñanza que, inicialmente, consistía en realizar los cursos para la obtención del Certificado de Aptitud Pedagógica y actualmente, pasa por realizar el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria y Bachillerato, en adelante MFPS. A continuación presentamos los planes de estudio y guías docentes de algunos de los másteres ofrecidos en distintas universidades españolas y, particularmente, los contenidos de la asignatura «Complementos de formación» de la especialidad de matemáticas. El capítulo finaliza analizando brevemente la respuesta del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria al problema de la formación del profesorado y proponiendo, como alternativa, un primer esbozo de la respuesta que propugna la TAD. Esta respuesta empieza por asignar a la didáctica de las matemáticas una función central e integradora de todo el proceso de formación y en considerar que dicha formación debe estar articulada en torno al estudio de problemas profesionales de los que se propone una primera muestra.

El capítulo segundo lo dedicamos a presentar investigaciones relevantes centradas en el conocimiento del profesor y la formación del profesorado de matemáticas. Distinguimos las investigaciones desarrolladas bajo el denominado *enfoque cognitivo* en didáctica de las matemáticas, que toman como objeto *primario* de investigación la construcción y evolución de los conocimientos de los alumnos —y, secundariamente, de los profesores— y cuyo principal exponente, posiblemente, sea el trabajo desarrollado en torno al *conocimiento pedagógico del contenido* (en adelante PCK, por *pedagogical content knowledge*) que hemos comentado más arriba. La introducción del PCK abre una nueva línea de investigación que pone el acento en el *conocimiento matemático para la enseñanza* (en adelante, MKT, por *mathematical knowledge for teaching*). El MKT se define como el compendio de tipos de conocimientos de los que deberían disponer los profesores de matemáticas, entre los que se encuentra *el conocimiento especializado del contenido*, que viene a precisar el conocimiento específico relativo a las matemáticas y necesario para su enseñanza. Expondremos, asimismo, algunos de los desarrollos recientes sobre el MKT, investigaciones que ponen el acento en el carácter profesional del profesorado y las correspondientes necesidades de formación profesional del profesor de matemáticas y, finalmente, investigaciones que enfatizan la adquisición de las competencias profesionales del profesorado. El capítulo finaliza con la exposición de cómo el denominado *enfoque epistemológico* en didáctica de las matemáticas integra lo pedagógico y lo matemático ampliando radicalmente lo que se entiende clásicamente por «lo matemático» y cambia su objeto primario de investigación centrándose no tanto en el *conocimiento matemático del alumno* y su ampliación posterior al *pensamiento del profesor*, sino en la *actividad matemática escolar* y en las condiciones institucionales que la hacen posible.

En el capítulo tercero mostraremos en qué sentido se puede considerar que la teoría antropológica de lo didáctico se ha ocupado desde sus inicios de la formación inicial y continua del profesorado al tomar como objeto de estudio, además de las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Expondremos algunas de las nociones básicas conceptualizadas en la TAD que nos permiten reformular con nitidez *el problema de la formación del profesorado* que está en la base de nuestra investigación. Abordaremos algunos aspectos de la *dimensión ecológica* de este problema, es decir, de las condiciones y restricciones que inciden en la formación del profesorado, considerando no solo las que emergen de las esferas habituales como son las del aula y la disciplina, sino poniendo la mirada en otros ámbitos que, normalmente, no se han cuestionado como factores determinantes en dicha formación. Podremos, a continuación, volver de nuevo la mirada hacia las propuestas del PCK y del MKT para analizarlas y compartir o cuestionar las diversas asunciones de estos enfoques. Como hemos anunciado anteriormente, al presentar las asunciones básicas y conjeturas de esta investigación, nuestra propuesta al problema de la formación matemática del profesorado se materializa en lo que llamamos *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (en adelante, REI-FP). La visión de la matemática escolar que estos recorridos propugnan se basa, ahora, en una actitud cuestionadora y reconstructiva no solo de los contenidos que se enseñan y de la forma de organizarlos, sino también de los paradigmas pedagógicos en que se sustentan su enseñanza y aprendizaje. Describiremos la estructura modular de los REI-FP mostrando la relación estrecha que estos establecen entre *modelo epistemológico de referencia* y *praxeología para la enseñanza*. El ejemplo del álgebra elemental nos permitirá ilustrar esta relación. El capítulo finaliza con la formulación definitiva del problema de investigación en términos de la construcción conjunta entre profesores y formadores de praxeologías para la enseñanza.

El cuarto capítulo constituye el núcleo de nuestra investigación. En él presentamos las principales experimentaciones de REI-FP que sustentan nuestro estudio. Empezamos describiendo dos pruebas piloto que se realizaron inicialmente y que permitieron rediseñar nuestra propuesta inicial, muy centrada en el estudio matemático y muy dirigida por parte de los formadores. El dispositivo que surge de estas primeras experimentaciones toma como punto de partida una cuestión problemática para el profesorado y se basa en una organización didáctica más abierta y más rica. Presentamos un caso completo de REI-FP en torno al problema de la enseñanza de la proporcionalidad y la modelización funcional elemental en la ESO: el diseño a priori, las condiciones de experimentación, la crónica de la puesta en marcha del REI-FP y las conclusiones obtenidas.

El capítulo cinco cierra la memoria presentando los principales resultados de la investigación, entre los que destacamos la propuesta de estrategia metodológica para reconstruir una praxeología para la enseñanza a través de los REI-FP. Dado el carácter exploratorio de nuestra investigación, dejamos planteados una variedad de problemas que abren nuevas y futuras líneas de trabajo.

CAPÍTULO I

RESPUESTA INSTITUCIONAL A LAS NECESIDADES DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

1. La consideración social del «oficio» de profesor

Para empezar a estudiar las necesidades de formación del profesorado y dar cuenta de la respuesta institucional a las mismas, nos podemos preguntar por la forma cómo se conceptualiza el oficio de profesor por parte de las autoridades educativas. Trataremos de mostrar que la respuesta de estas últimas con relación a la formación del profesorado es coherente en gran medida con la forma en que la sociedad ha venido interpretando y evaluando hasta hace poco el oficio de profesor, en tanto que una semi-profesión. El término fue acuñado por el sociólogo Amitai Etzioni que publicó, en 1969, la obra *The Semiprofessions and their Organisation* con el siguiente subtítulo: *Teachers*, *Nurses*, *Social Workers*. La búsqueda del término *semiprofesión* en la Wikipedia («Semiprofession», s.f.) reseña los ítems que publica la *American Association of Colleges for Teacher Education* (AACTE):

- Lower in occupational status.
- Shorter training periods.
- Lack of societal acceptance that the nature of the service and/or the level of expertise justifies the autonomy that is granted to the professions.
- A less specialized and less highly developed body of knowledge and skills.
- Markedly less emphasis on theoretical and conceptual bases for practice.
- A tendency for the individual to identify with the employment institution more and with the profession less.
- More subject to administrative and supervisory surveillance and control.
- Less autonomy in professional decision making, with accountability to superiors rather than to the profession.
- Management by persons who have themselves been prepared and served in that semiprofession.
- A preponderance of women.
- Absence of the right of privileged communication between client and professional.
- Little or no involvement in matters of life and death.

De acuerdo con Etzioni, Chevallard (2010) sostiene que la historia ha mantenido el *oficio de enseñante* en un estado de subdesarrollo práctico, profesional, científico y epistemológico, por lo que esta profesión no existe como tal, siendo a lo más una semiprofesión, en el sentido que se acaba de exponer. Dicho con otras palabras, si partimos de la idea de *profesión* como un conjunto de actores, con distintas funciones, dedicados a desarrollar e impulsar a lo largo del tiempo y en un esfuerzo continuado *el oficio* de la enseñanza, podemos concluir que todavía este oficio se mantiene en un estado de semiprofesión.

Parece lógico suponer que una institución que vela por el desarrollo de una profesión se ocupa de las dificultades que los profesionales encuentran en el ejercicio de la misma y propone maneras de superarlas, ya sea poniendo a disposición los recursos necesarios, ya sea promoviendo la elaboración de estos recursos. ¿Cuál sería entonces la institución (o instituciones) que acoge y se ocupa de las dificultades que les surgen a los profesores en el ejercicio de la docencia? ¿Qué sería, en el caso de los docentes, el equivalente de un colegio profesional como el de los médicos, abogados, economistas, arquitectos, etc.? Según explica Cirade (2006) y retoma Chevallard (2010), hay dos formas de concebir y abordar las dificultades de los profesores en el ejercicio de la docencia. Podemos tratarlas como *problemas individuales* e incluso personales (falta de preparación, de empatía, predisposición, carisma, etc.) o como *dificultades de la profesión*, es decir, la manifestación de la falta de recursos colectivos para abordar los distintos tipos de tareas que conforman el quehacer docente. En este segundo caso, la investigación debe identificar estas necesidades, lo que llamaremos los *problemas de la profesión*, y hacer todo lo posible para que se elaboren y difundan los recursos materiales y de conocimiento necesarios para superarlas.

Siguiendo a los autores anteriores, podemos considerar que la *profesión* la constituirán los responsables que gestionan el devenir de las enseñanzas, los propios profesores y los investigadores que se vuelcan en el estudio de los problemas de la profesión. Las preguntas cruciales que surgen entonces son: ¿cuáles son estos problemas?, ¿en qué ámbito surgen?, ¿quién los identifica como tales?, ¿cómo se pueden resolver de forma efectiva?

Es evidente que una buena parte de estos problemas emergen en el ejercicio de la docencia, y concretamente en las aulas de las clases. Pero muchos tienen su origen mucho más allá de las aulas, por ejemplo en los procesos de transposición didáctica (si nos quedamos cerca del contenido de enseñanza) o de la frágil situación de la escuela en nuestras sociedades actuales (por situarnos en un ámbito más general). Además, independientemente de donde tengan su origen estos problemas, no está claro que su identificación corresponda a los propios profesores, puesto que no siempre quien está más involucrado en un problema es la persona más indicada para detectarlo y resolverlo. De ahí la importancia de una institución que permita identificar estos problemas de forma colectiva con y en nombre de los profesores y que haga todo lo posible para que las respuestas o soluciones lleguen a manos de los profesores. Este es el papel de la profesión.

En lo que sigue describiremos brevemente la evolución de la respuesta institucional, en España, al problema de la formación del profesorado centrándonos especialmente en el caso del profesorado de matemáticas de Secundaria. Comprobaremos cómo esta respuesta es coherente con la baja consideración social del oficio de profesor y, al mismo tiempo, que el papel que se asigna a la didáctica es muy secundario en beneficio de una visión psicopedagógica que tiende a separar el contenido de la enseñanza de las formas de organizar la docencia. En todo caso, la respuesta institucional al problema de la formación del profesorado refleja que, socialmente y culturalmente, dicho problema es considerado básicamente «práctico», en el sentido que depende esencialmente y casi únicamente de disponer de los medios materiales para impartir una formación.

2. La formación inicial del profesorado de enseñanza secundaria en España

Podemos considerar dos períodos principales en la formación del profesorado de secundaria en España: el que se inicia en 1971 con la implementación del Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP) impartido en las universidades por los Institutos de Ciencias de la Educación; y el que se inicia en 2009 con el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria (en adelante, MFPS), actualmente vigente. Entre medio se establece en la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990 el Título de Especialización Didáctica (TED) cuya implantación se vio retrasada a causa, entre otras, de su tardía regulación, y que finalmente no se llegó a instaurar de manera generalizada, conviviendo con el CAP hasta el año 2009.

En el año 2008, antes de ponerse en marcha el MFPS, la historiadora Gemma Tribó (2008) describe con precisión la imperiosa necesidad de mejorar la formación profesional inicial del profesorado de Secundaria. Al tiempo que reclama dicha formación, muestra muy claramente cuál es el punto de vista predominante con relación al contenido de la misma:

> Así, en un sistema educativo inclusivo hasta los 16 años, es urgente garantizar una sólida formación profesional a los profesores de secundaria, que conozcan cómo aprenden los alumnos (psicología de la educación), que sepan con qué métodos enseñar (pedagogía), que lo hagan contextualizando el acto educativo (sociología de la educación) y que sean capaces de tomar decisiones sobre cómo transferir el conocimiento disciplinar a la dinámica de aula (didáctica específica). Negar esta formación profesional a los docentes de secundaria comporta alargar el malestar y la frustración de numerosos profesores, que recibieron una buena formación académica en su disciplina, pero que, faltos de una adecuada formación profesional, a menudo, se encuentran sin recursos y sin respuestas ante los nuevos problemas educativos. Evocando el título de un viejo libro diría: para enseñar no es suficiente con dominar la asignatura. Empieza a ser hora de que los docentes de secundaria sean, además de buenos químicos, buenos matemáticos o buenos historiadores, buenos profesores de su materia o área. Para lograr este objetivo, además de la formación disciplinar en la ciencia referente, deben adquirir una formación inicial profesional –orientada por las competencias docentes-, complementaria de la formación disciplinar y en modo alguno contrapuesta. (p. 185)

Es interesante advertir cual es el papel que se asigna implícita pero claramente a cada una de las disciplinas que, supuestamente, deberían participar en dicha formación. En particular, hay que subrayar el rol que se asigna a la pedagogía, a la que supone capaz de proponer métodos para enseñar independientemente de la disciplina, y a las «didácticas específicas» a las que se les asigna un papel subsidiario.

2.1. Los cursos de cualificación pedagógica (CAP).

La Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (España 1970), también conocida como Ley Villar Palasí, puso punto final a un marco legal del sistema educativo que se había quedado obsoleto hacía tiempo, al no atender a las necesidades de una sociedad radicalmente diferente de aquella para la que se habían establecido las leyes de educación, basadas en la ya centenaria Ley Moyano de 1857. Era incuestionable que se había quedado muy atrás:

> […] una España de quince millones de habitantes con el setenta y cinco por ciento de analfabetos, dos millones y medio de jornaleros del campo y doscientos sesenta

> mil «pobres de solemnidad», con una estructura socioeconómica preindustrial en la que apenas apuntaban algunos intentos aislados de industrialización. Era un sistema educativo para una sociedad estática, con una Universidad cuya estructura y organización respondía a modelos de allende las fronteras. (pp. 12525-15256)

Asimismo, se había tomado conciencia de que una reforma tan trascendente y vital como la que se pretendía llevar a cabo, exigía el asesoramiento y participación de los sectores profesionales más preparados y de las entidades más representativas de la sociedad española, como paso previo a la redacción de la ley. Así, se había publicado en febrero de 1969 el estudio «La educación en España: bases para una política educativa» —Libro Blanco—, donde ya se ponía el acento en la *falta de formación pedagógica del profesorado* estando, por el contrario, muy polarizada en los conocimientos científicos y especializados. De esta formación y perfeccionamiento continuado del profesorado se encargarán los Institutos de Ciencias de la Educación (ICE) de las universidades españolas, creados en el año 1969.

En el artículo tercero de la citada ley se referencia a quienes ejercen la profesión docente como portadores de *relevantes cualidades humanas, pedagógicas y profesionales*; en el artículo 73 se establece que los Institutos de Ciencias de la Educación se integrarán directamente en cada Universidad, encargándose de la formación docente de los universitarios que se incorporen a la enseñanza en todos los niveles y del perfeccionamiento del profesorado en ejercicio, entre otras. En el artículo 103 se exige a los profesores de Bachillerato el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto además de una formación pedagógica adecuada, que se obtendrá mediante cursos intensivos de los que se harán responsables, como se acaba de mencionar, los ICE.

Será un año después cuando se establezca un marco mínimo de referencia para que los ICE, conservando cada uno la autonomía propia de su universidad, puedan capacitar pedagógicamente a los futuros docentes. Así, con la Orden de 8 de julio de 1971 se regulan las características generales de los cursos de formación del profesorado, cuyo desarrollo se establece en dos ciclos. El primero es programado por cada ICE en torno a las temáticas relativas a los principios, objetivos y problemática de la educación en sus aspectos psicológicos, sociológicos e históricos; a la tecnología y sistemas de innovación educativa; y a las didácticas especiales. Este primer ciclo, de carácter teórico y con una duración mínima de 150 horas, se continua con un segundo de carácter práctico, al poner a los alumnos en formación ante el ejercicio de la labor docente en los centros designados por cada ICE, y bajo la responsabilidad de profesores tutores. Este segundo ciclo tiene también una duración mínima de 150 horas.

Una vez superados estos dos ciclos, el alumno obtiene el certificado de Aptitud Pedagógica (CAP) cuya expedición queda a cargo de los rectorados de cada universidad.

Con el paso de los años, lo que supone normalmente grandes transformaciones en las sociedades, como así ocurrió en la nuestra, emerge la necesidad de realizar cambios profundos en la Ley General de Educación (LGE) de 1970 —en 1985 se había promulgado la Ley Orgánica reguladora del Derecho a la Educación (LODE), ley que no afectaba la estructura del sistema educativo. Con el fin de conformar una nueva ley que suscitara un amplio apoyo, el Gobierno presentó el «Proyecto para la Reforma de la Enseñanza. Propuesta para debate», en 1987, que fue completado un año después con un documento específico relativo a la formación profesional. En 1989 se publica El Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo, que recoge los pronunciamientos y aportaciones que a lo largo de casi dos años, emanaron de Administraciones Públicas, organizaciones patronales y sindicales, colectivos y entidades profesionales, centros educativos, expertos reconocidos y personalidades con experiencia, fuerzas políticas, instituciones religiosas, y, fundamentalmente, los distintos sectores de la comunidad educativa. La Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo da finalmente forma jurídica a la propuesta recogida en El Libro Blanco y se convierte en el instrumento esencial de la reforma, como así aparece en su preámbulo:

> Con la consecución de objetivos tan fundamentales como la ampliación de la educación básica, llevándola hasta los dieciséis años edad mínima legal de incorporación al trabajo, en condiciones de obligatoriedad y gratuidad; con la reordenación del sistema educativo estableciendo en su régimen general las etapas de educación infantil educación primaria, educación secundaria –que comprenderá la educación secundaria obligatoria, el bachillerato y la formación profesional de grado medio–, la formación profesional de grado superior y la educación universitaria; con la prestación a todos los españoles de una enseñanza secundaria; con la reforma profunda de la formación profesional y con la mejora de la calidad de la enseñanza, esta ley trata no sólo de superar las deficiencias del pasado y del presente sino, sobre todo, de dar respuesta adecuada y ambiciosa a las exigencias del presente y de futuro. (p. 28928)

Hasta entonces el certificado de aptitud pedagógica (CAP) era requisito indispensable para ejercer la docencia en la etapa de Bachillerato (14-18 años), aunque su ámbito se reducía a los centros públicos. En la LOGSE este certificado, u otro equiparable, se convierte en obligatorio en las etapas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato. El artículo 24.2 de la LOGSE establece que:

> Para impartir las enseñanzas de educación secundaria obligatoria será necesario además estar en posesión de un título profesional de especialización didáctica. Este título se obtendrá mediante la realización de un curso de cualificación pedagógica, con una duración mínima de un año académico, que incluirá, en todo caso, un período de prácticas docentes. El Gobierno regulará las condiciones de acceso a este curso y el carácter y efectos de los correspondientes títulos profesionales, así como las condiciones para su obtención, expedición y homologación. Las Administraciones educativas podrán establecer los correspondientes convenios con las universidades al objeto de la realización del mencionado curso.

Y en el artículo 28, se establece que para impartir el bachillerato (16-18 años) se exigen las mismas titulaciones y la misma cualificación pedagógica que las requeridas para la educación secundaria obligatoria.

La LOGSE, por otra parte, enfatiza la relación entre la calidad de la enseñanza y la formación del profesorado —formación inicial y formación permanente—, dando a ésta un carácter tanto de derecho como de obligación. Así, en el título IV se establece que una de las obligaciones del profesorado consiste en la realización periódica de actividades de actualización científica, didáctica y profesional en los centros docentes, en instituciones formativas específicas, en las universidades, lo que se liga a la responsabilidad de las Administraciones educativas y de los propios centros, que deberán garantizar una oferta diversificada y medidas oportunas para favorecer la participación del profesorado en los cursos planificados.

Promulgada la LOGSE en el año 1990, se dejan pasar cinco años hasta la publicación del Real Decreto 1692/1995 por el que se regula el título profesional de especialización didáctica. Para su obtención, se precisa realizar un curso de cualificación pedagógica que en ningún caso podrá ser inferior a 60 créditos ni superior a 75 —sobre la base de una correspondencia de diez horas lectivas por crédito—, y distribuidos en dos bloques formativos para así integrar los conocimientos psicopedagógicos y didácticos con los conocimientos propios de las disciplinas. El bloque de enseñanzas teórico-prácticas incluía materias obligatorias generales y materias específicas, propias de la especialidad que se hubiere elegido. Las materias obligatorias generales —que supondrían 40 créditos como mínimo de periodo lectivo— habrían de tratar los aspectos sociológicos, pedagógicos y psicológicos relevantes para el ejercicio de la docencia en la educaci6n secundaria; y las materias obligatorias específicas versarían sobre los aspectos didácticos de la enseñanza de las disciplinas, materias y módulos correspondientes a las distintas especialidades.

EI bloque de enseñanzas de práctica profesional docente —el Practicum— tendría una carga lectiva de 15 créditos de los que al menos 10 se destinarían a practicar la docencia tutorizada en centros de educaci6n secundaria, y el resto a la preparación, análisis, reflexión y valoración de las prácticas docentes realizadas. Durante este periodo, cada alumno es tutorizado por un profesor del centro donde se realiza el Practicum y cuyo nivel de calidad en el desempeño de la función docente ha quedado acreditado.

Pasados doce años se publica la Ley Orgánica 10/2002 de Calidad de la Educación (LOCE), con el fin de responder a las nuevas realidades complejas de la sociedad cuyo desarrollo económico y social se genera en el conocimiento y la información:

> La educación se encuentra hoy en el centro de los desafíos y de las oportunidades de las sociedades del siglo XXI. Gracias a los esfuerzos de los ciudadanos y al continuo impulso de los gobiernos, el acceso a la educación se ha universalizado, convirtiéndose en un derecho fundamental y efectivo de los ciudadanos.
>
> La educación, que une el pasado y el futuro de los individuos y las sociedades, está siempre influida por el mundo del conocimiento y por el de los valores, por las legítimas expectativas de los individuos y por las exigencias razonables de la vida en común. Pero nunca como hoy ha sido más necesaria la convergencia entre esas dimensiones esenciales de la educación; nunca ha sido tan evidente que calidad y equidad, desarrollo económico y cohesión social, no son elementos contrapuestos, sino objetivos ineludibles, a la vez que complementarios, del avance de nuestras sociedades. (p. 45188)

El objetivo de esta nueva ley (LOCE) es promover la mejora de la calidad del sistema educativo que se organiza en torno a cinco ejes fundamentales, de los que el cuarto se refiere al profesorado: se pone el énfasis en la calidad de la relación profesor-alumno —núcleo de la educación— como garantía de los buenos resultados escolares y el efecto multiplicador que dicha relación promueve. Esto comporta que las políticas dirigidas al profesorado constituyen el elemento más valioso y decisivo a la hora de lograr la eficacia y la eficiencia de los sistemas de educación y de formación.

En el Título IV dedicado a la función docente, se establece el marco general que regula al profesorado, considerado uno de los factores determinantes de la calidad y mejora de la enseñanza. Así, se sientan las bases para la formación inicial y permanente del profesorado, se pone en valor el desempeño de la función docente y las medidas de apoyo que requiere dicho desempeño y se establece que las Administraciones educativas son las encargadas de promover la actualización y la mejora continua de la cualificación profesional de los profesores y la adecuación de sus conocimientos y métodos a la evolución de la ciencia y de las didácticas específicas.

En particular, en su artículo 58 dedicado a la Formación Inicial, se exige estar en posesión de un título profesional de Especialización Didáctica para impartir las enseñanzas de la Educación Secundaria, de la Formación Profesional de grado superior y las enseñanzas de régimen especial, además de estar en posesión de las titulaciones académicas correspondientes. Se deja en manos del gobierno la regulación de este título cuyos estudios abarcarán un período académico y otro de prácticas docentes.

Sin embargo, el Real Decreto 325/2003 viene a modificar, en su artículo único, el Real Decreto 1692/1995 por el que se regula el título profesional de Especialización Didáctica, en su redacción dada por el Real Decreto 321/2000. Si en 1995 se establece que las enseñanzas conducentes a la obtención del título de Especialización Didáctica estarían implantadas con carácter general a partir del curso 1999/2000 y en 2000 se hace una modificación a este respecto, posponiendo su implantación al curso 2002/2003, finalmente esta implantación no se lleva a cabo. En consecuencia, se pospone la exigencia del título de Especialización Didáctica y se prorrogan las enseñanzas conducentes a la obtención de los certificados de aptitud pedagógica.

Este Real Decreto, además, viene a reconocer como equivalente a todos los efectos al título de Especialización Didáctica, la experiencia docente previa durante dos cursos académicos completos, realizada en centros públicos o privados debidamente autorizados y adquirida con anterioridad al uno de septiembre de 2005. Han pasado pues 30 años y no solo sigue vigente el CAP a todos los efectos, sino que este se equipara con dos años de experiencia. El calificativo de semi-profesión en lo que se refiere a la formación profesional del profesorado nos parece a este respecto totalmente adecuada. ¿Vendrán nuevos aires de Europa?

2.2. La formación del profesorado: una titulación de posgrado¡Error! Marcador no definido.

En 1999 la Declaración de Bolonia constituye el primer paso para la construcción del Espacio Europeo de Educación Superior y establece 2010 como el año de la plena consecución de este Espacio, incluyendo entre sus objetivos la adopción de un sistema flexible de titulaciones, comprensible y comparable, tendente a promover oportunidades de trabajo para los estudiantes y con posibilidades de una mayor competitividad internacional del sistema de educación superior europeo. Unos años más tarde, en España, el Real Decreto 55/2005 establece la estructura de las enseñanzas universitarias y regula los estudios universitarios oficiales de Grado, recogiendo las directrices de esta Declaración y las de la Conferencia de Praga en 2001 y la de Berlín en 2003.

También se publica, a continuación, el Real Decreto 56/2005, por el que se regulan los estudios universitarios oficiales de Posgrado, apoyándose en la comunicación de la Conferencia de Berlín de 2003, en la que los ministros europeos responsables de la educación superior habían reafirmado la importancia del proceso educativo de convergencia y la importancia de los estudios europeos de Posgrado, como uno de los principales elementos para reforzar el atractivo de la educación superior europea en el contexto internacional. En este real decreto se presenta el marco jurídico para que las universidades españolas estructuren, con flexibilidad y autonomía, sus enseñanzas de Posgrado de carácter oficial, y para lograr armonizarlas con las que se establezcan en el ámbito no sólo europeo, sino mundial. Se introduce, en consecuencia, el título oficial de Máster de Formación del Profesorado de Secundaria (MFPS) y se regulan los estudios conducentes a su obtención, al tiempo que se deposita en las universidades la responsabilidad de organizar sus programas que determinarán tanto la composición y normas de funcionamiento de la comisión de estudios de Posgrado como los centros universitarios encargados de su desarrollo.

En su artículo 3 se establece que para el acceso a los estudios oficiales de Posgrado será necesario estar en posesión del título de Grado u otro expresamente declarado equivalente. Asimismo, los estudiantes podrán acceder a cualquier programa oficial de Posgrado, relacionado o no científicamente con su currículo universitario, y en cualquier universidad, previa admisión efectuada por el órgano responsable del indicado programa, conforme a los requisitos de admisión específicos y criterios de valoración de méritos que, en su caso, establezca la universidad.

En su artículo 8 se dispone que, aunque los programas de Posgrado se elaborarán y organizarán en la forma que instituya cada universidad, el Gobierno podrá establecer directrices generales propias y requisitos especiales de acceso en los estudios conducentes al título oficial de MFPS, en aquellos casos en que, según la normativa vigente, dicho título habilite para el acceso a actividades profesionales reguladas.

En septiembre de 2004 con ocasión de la 47ª Conferencia Internacional de Educación convocada por la UNESCO, los más de sesenta ministros reunidos en Ginebra se planteaban la necesidad de integrar calidad y equidad en la oferta educativa. Esta necesidad ya se había manifestado por parte de los países más desarrollados catorce años antes y ahora se había extendido a otros países con características y niveles de desarrollo muy dispares. También la sociedad española tiene la convicción de que es posible mejorar la calidad de la educación y hacerla extensiva a todos los jóvenes, sin exclusiones, por lo que se promulga la. Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE), uno de cuyos principios se expresa en los términos siguientes:

> La actividad de los centros docentes recae, en última instancia, en el profesorado que en ellos trabaja. Conseguir que todos los jóvenes desarrollen al máximo sus capacidades, en un marco de calidad y equidad, convertir los objetivos generales en logros concretos, adaptar el currículo y la acción educativa a las circunstancias específicas en que los centros se desenvuelven, conseguir que los padres y las madres se impliquen en la educación de sus hijos, no es posible sin un profesorado comprometido en su tarea. Por una parte, los cambios que se han producido en el sistema educativo y en el funcionamiento de los centros docentes obligan a revisar el modelo de la formación inicial del profesorado y adecuarlo al entorno europeo. Por otra parte, el desarrollo profesional exige un compromiso por parte de las Administraciones educativas por la formación continua del profesorado ligada a la práctica educativa. Y todo ello resulta imposible sin el necesario reconocimiento social de la función que los profesores desempeñan y de la tarea que desarrollan.

El título III de la ley desarrolla el ámbito relativo al profesorado, concediendo gran importancia a su formación inicial y permanente, que deberá comenzarse en un futuro próximo, en el contexto del espacio europeo de educación superior. La formación inicial, además de la preparación científica, incluirá formación pedagógica y didáctica.

Así, en su artículo 100 sobre la Formación inicial del profesorado, entre otras se establece que para ejercer la docencia será necesario estar en posesión de las titulaciones académicas correspondientes y tener la formación pedagógica y didáctica que el Gobierno establezca para cada enseñanza. Esta formación se articulará a partir de convenios que las Administraciones educativas establezcan con las universidades. En su conjunto, la formación inicial se adaptará al sistema de grados y postgrados del espacio europeo de educación superior según lo que establezca la correspondiente normativa básica. Asimismo, el artículo 102 establece la formación permanente del profesorado como un derecho y una obligación del mismo, haciendo responsable a las Administraciones educativas y a los propios centros de dicha formación y a los que corresponde fomentar programas de investigación e innovación.

La Ley Orgánica 4/2007 en su título VI establecía una nueva estructuración de las enseñanzas y títulos universitarios oficiales con el fin de reorientar el proceso de convergencia de nuestras enseñanzas universitarias con los principios dimanantes de la construcción del Espacio Europeo de Educación Superior. El Real Decreto 1393/2007, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, siguiendo los principios sentados por la citada Ley, profundiza en la concepción y expresión de la autonomía universitaria, que crearán y propondrán las enseñanzas y títulos que hayan de impartir y expedir, sin sujeción a la existencia de un catálogo previo establecido por el Gobierno.

Los planes de estudios conducentes a la obtención de un título deberán ampliarse y, ahora, tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes. Se proponen los créditos europeos, ECTS, tal y como se definen en el Real Decreto 1125/2003, como unidad de medida que refleja los resultados del aprendizaje y volumen de trabajo realizado por el estudiante para alcanzar los objetivos establecidos en el plan de estudios, poniendo en valor la motivación y el esfuerzo del estudiante para aprender. Se introducen, asimismo, los sistemas de Garantía de la Calidad —SGIC— como parte de los nuevos planes de estudios, con el fin de asegurar que la nueva organización de las enseñanzas funcione eficientemente y fundar la confianza en el proceso de acreditación de los títulos.

En su artículo 15 se presentan las directrices para el diseño de títulos de Máster Universitario, estableciendo, entre otras, los créditos de los planes de estudio —entre 60 y 120—, que supondrán toda la formación teórica y práctica que el estudiante deba adquirir. Asimismo, en lo referente a títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, es el Gobierno el que establecerá las condiciones a las que deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios, que además deberán ajustarse, en su caso, a la normativa europea aplicable. Estos planes de estudios deberán, en todo caso, diseñarse de forma que permitan obtener las competencias necesarias para ejercer esa profesión.

La Resolución de 17 de diciembre de 2007 de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación por la que se establecen las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos que habiliten para el ejercicio de las profesiones reguladas de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato —además de las de Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas —, establece que para el ejercicio de estas profesiones se requiere un título de Máster. Los planes de estudios tendrán una duración de 60 créditos europeos, y deberán cumplir, además de lo previsto en el Real Decreto 1393/2007, los requisitos que establezca el Ministerio de Educación y Ciencia respecto a objetivos del título y planificación de las enseñanzas. Asimismo, garantizarán la adquisición de las competencias necesarias para ejercer la profesión de acuerdo con lo regulado en la normativa aplicable.

En la Orden ECI/3858/2007 se señalan los requisitos que han de cumplir los planes de estudios del MFPS, se formulan los objetivos en términos de competencias que han de adquirir los estudiantes y se establecen los contenidos básicos, organizados por materias:

- Un módulo genérico de formación psicopedagógica (12 créditos)
- Un módulo específico de formación didáctica y epistemológica (24 créditos)
- Un módulo de Practicum que incluye un trabajo fin de Máster (16 créditos)
- Un módulo complementario (8 créditos) que deja un margen de libertad a las universidades para ampliar los contenidos de los módulos anteriores o para ofertar las materias complementarias que estimen necesarias.

El Real Decreto 1834/2008 define las condiciones de formación para el ejercicio de la docencia en la Educación Secundaria obligatoria, el bachillerato, la Formación Profesional y las enseñanzas de régimen especial y se establecen las especialidades de los cuerpos docentes, entre las que se encuentra la de Matemáticas.

Asimismo, este real decreto tiene por objetivo determinar la validez de los títulos universitarios oficiales de máster para acreditar la formación pedagógica y didáctica exigida por la LOE. En particular, queda establecido que, partir del 1 de octubre de

2009, las universidades no podrán organizar el curso del CAP y será necesario estar en posesión de un título oficial de MFPS que acredite la formación pedagógica y didáctica.

Del conjunto de toda esta normativa cabe poner el acento en algunos de los párrafos que resaltan la ubicación de la formación docente en el nivel universitario de postgrado y el carácter profesionalizador del modelo de formación adoptado:

> Para impartir las enseñanzas de Educación Secundaria obligatoria y de bachillerato será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, o el título de Grado equivalente, además de la formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado.
>
> Los planes de estudios […] garantizarán la adquisición de las competencias necesarias para ejercer la profesión de acuerdo con lo regulado en la normativa aplicable.
>
> Las enseñanzas se estructurarán teniendo en cuenta las materias y ámbitos docentes en Educación Secundaria obligatoria y bachillerato, Formación Profesional, enseñanzas artísticas, enseñanzas de idiomas y enseñanzas deportivas.

Así, en el curso 2009/2010 dejan de impartirse las enseñanzas que finalizaban con la obtención del CAP, para implantar un Máster específico: el Máster en profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas. Desde 1971 han pasado casi 40 años…

2.3. **Planes de estudio y guías docentes de los Másteres de FPS**¡Error! Marcador no definido.

En la Ley Orgánica 2/2006, se habían conformado las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas como profesiones reguladas, cuyo ejercicio requiere estar en posesión del correspondiente título oficial de MFPS. En el Real Decreto 1393/2007 quedaba establecido que el Ministerio de Educación y Ciencia precisará los contenidos a los que habrán de ajustarse las solicitudes presentadas por las universidades para la obtención de la verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos oficiales de Máster. Es en la Orden ECI/3858/2007 donde se establecen los requisitos para esta verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas y que, como ha quedado señalado, todas las universidades deberán cumplir para que sus títulos sean verificados por el Consejo de Universidades.

Así, además de lo previsto en el Real Decreto 1393/2007, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, los requisitos que se deberán satisfacer describen las competencias que los estudiantes deben adquirir, como son:

> 1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.
>
> 2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
>
> 3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.
>
> 4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
>
> 5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.
>
> 6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.
>
> 7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.

8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.

10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.

11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.

Estas enseñanzas, cuyos planes de estudio tendrán una duración de 60 créditos europeos, se estructurarán teniendo en cuenta las materias y ámbitos docentes en educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional, enseñanzas artísticas, enseñanzas de idiomas y enseñanzas deportivas. Con carácter general, han de ser presenciales, al menos, en el 80% de los créditos totales del MFPS, incluido necesariamente el Practicum. Las Universidades que por su especificidad diseñan, programan y desarrollan las enseñanzas exclusivamente a distancia, han de garantizar que el Practicum tenga carácter presencial. El Practicum se realizará en colaboración con las instituciones educativas establecidas mediante convenios entre Universidades y Administraciones Educativas. Las instituciones educativas participantes en la realización del Practicum habrán de estar reconocidas como centros de prácticas, así como los tutores encargados de la orientación y tutela de los estudiantes.

Asimismo, se establece el mínimo de módulos de los planes de estudio, según la tabla siguiente:

MÓDULOS	Créditos europeos
Genérico Aprendizaje y desarrollo de la personalidad. Procesos y contextos educativos. Sociedad, familia y educación	**12**

Específico Complementos para la formación disciplinar. Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes. Innovación docente e iniciación a la investigación educativa	**24**
Practicum Practicum en la especialización, incluyendo el Trabajo fin de Máster	**16**

En cada módulo se busca desarrollar determinadas competencias que también quedan establecidas en esta Orden del modo siguiente:

En el *módulo genérico*:

1) Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones. Comprender el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje. Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje.

2) Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas. Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país. Conocer y aplicar recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana. Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.

3) Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes como en la educación en el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad. Conocer la evolución histórica de la familia, sus diferentes tipos y la incidencia del contexto familiar en la educación. Adquirir habilidades sociales en la relación y orientación familiar.

En el *módulo específico*:

1) Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder

transmitir una visión dinámica de las mismas. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares. En formación profesional, conocer la evolución del mundo laboral, la interacción entre sociedad, trabajo y calidad de vida, así como la necesidad de adquirir la formación adecuada para la adaptación a los cambios y transformaciones que puedan requerir las profesiones.

2) Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3) Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.

4) Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.

En el *Practicum*:

1) Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica. Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas.

2) Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias. Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo fin de Máster que compendia la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas descritas.

Dos aspectos llaman inicialmente la atención en este listado de competencias. El primero es la distinción un tanto artificial a nuestro entender entre el módulo genérico (común a todas las especialidades) y el específico. Por ejemplo en el primero encontramos actividades como "Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje" muy ligadas al contenido por enseñar.

La segunda observación es relativa al carácter eminentemente individual de las competencias, donde en ningún caso se incluye la integración en equipos de trabajo de profesores o de otros profesionales de ningún tipo, ni mono ni multidisciplinares.

Desde el curso 2009/2010, en la mayoría de universidades del Estado Español se ofrecen los estudios de MFPS, pudiéndose recabar mucha información sobre los mismos en sus páginas web. A continuación presentamos un breve resumen de la organización general del MFPS en tres de ellas: la Universidad Complutense de Madrid, la Universidad Autónoma de Madrid y la Universidad de Murcia. Su elección proviene por nuestra facilidad posterior para conseguir el material asociado a la asignatura *Complementos de formación disciplinar.* El caso de las universidades catalanas y, en especial, la Universidad Autónoma de Barcelona se tratará más adelante pues constituye el centro donde hemos realizado la mayoría de nuestras experimentaciones.

2.3.1. El MFPS en la Universidad Complutense de Madrid

Se implantó en el curso 2009-2010 el Máster Universitario en Formación del Profesorado de ESO y Bachillerato, FP y Enseñanzas de Idiomas, ofertándose actualmente para 18 especialidades. El centro responsable del máster es la Facultad de Educación – Centro de Formación del Profesorado y la información completa sobre el mismo, como se ha indicado, se encuentra en su página web (Universidad Complutense de Madrid, 2014)

Para cualquiera de las especialidades, la duración es de un año y los 60 créditos se distribuyen en los tres módulos preceptivos: Genérico, Específico y Practicum. El módulo genérico, común a todas las especialidades del MFPS, tiene como objetivo "proporcionar a los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, los conocimientos de carácter psicopedagógico que necesitarán en su futura profesión". Las materias de este módulo son, asimismo, las preceptivas —Aprendizaje y desarrollo de la personalidad, Procesos y contextos educativos, y Sociedad, familia y educación— de 4 ECTS cada una de ellas.

El módulo específico tiene como objetivo «proporcionar la formación complementaria y preparación didáctica adecuada a la especialidad», variando la organización de cada materia según las diferentes especialidades de que se trate. Las asignaturas de este módulo de la especialidad de Matemáticas y los créditos asignados se presentan en tabla siguiente:

MATERIA	ASIGNATURA	ECTS
Complementos para la formación matemática	El significado de la matemática en la Educación Secundaria	**10**
	Pensamiento matemático y resolución de problemas	**5**
Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes	Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas	**10**
Innovación docente e iniciación a la investigación educativa.	Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas.	**5**
Practicum	Prácticas.	**12**
	Trabajo de fin de máster.	**6**

Las prácticas, que se realizan en un centro de educación secundaria, tienen por objetivo acercar al estudiante a su futura práctica profesional, familiarizándolo con los aspectos administrativos y organizativos del centro, con su proyecto educativo, la programación anual, la planificación de la enseñanza, la innovación docente y la acción tutorial, principalmente.

El trabajo de fin de máster —TFM— pretende servir de síntesis de la formación recibida, debiendo reflejar las competencias adquiridas por el estudiante con relación a la especialidad. Es supervisado por un profesor de la UCM, preferiblemente si es el tutor de prácticas, y se defiende ante un tribunal, al finalizar el curso, siempre que se hayan superado las asignaturas restantes de la titulación.

2.3.2. El MFPS en la Universidad Autónoma de Madrid

También se implantó en el curso 2009-2010, teniendo como objetivos prioritarios: «a) la formación de un profesorado capaz de adaptarse a contextos y ámbitos diversos, b) la integración de una formación multidisciplinar y generalista con una formación especializada, y c) el fortalecimiento del trabajo cooperativo y la complementación entre el trabajo teórico y el práctico en las aulas». Los Centros responsables del máster son la Facultad de Formación de Profesorado y Educación y el Vicerrectorado de Estudios de Posgrado. Toda la información se encuentra en su página web (Universidad Autónoma de Madrid, 2014).

Así, es posible ver que la actual estructura de las enseñanzas y su distribución por tipo de materias y créditos se establece en obligatorias, de 14 ECTS, optativas, de 26 ECTS, Prácticas externas, de 14 ECTS, y Trabajo Fin de Máster, de 6 ECTS. El módulo básico de la formación lo constituyen las materias preceptivas —Aprendizaje y desarrollo de la personalidad, Procesos y contextos educativos y Sociedad, familia y educación—, junto con Prácticas externas —de 4 ECTS—, siendo comunes para todos los estudiantes, puesto que «incluye la formación obligatoria nuclear y la multidisciplinar » y donde se trata de «analizar los procesos básicos de la enseñanza en la formación secundaria y bachillerato».

El resto de materias y Prácticas externas conforman el módulo específico propio de cada itinerario. Las materias del módulo de Matemáticas, su impartición por semestres y los créditos asignados se pueden ver en la tabla siguiente:

MATERIA	ASIGNATURAS	ECTS
Complementos para la formación disciplinar en Matemáticas	Asignatura 1.1.Perspectiva educativa de la historia de las matemáticas Asignatura 1.2.Complementos matemáticos para la educación secundaria2	10
Aprendizaje y enseñanza de Matemáticas	Aprendizaje y enseñanza de Matemáticas 2	12
Innovación docente e iniciación a la investigación educativa	Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas2	4
Prácticas externas		14
Trabajo Fin de Máster		6

2.3.3. El MFPS en la Universidad de Murcia

Se implantó el MFPS en el curso 2009-2010 siendo el centro responsable la Facultad de Educación. Toda la información sobre los estudios del máster, que incluye 19 especialidades, se encuentra en su página web (Universidad de Murcia, 2014).

El modulo Genérico de 15 créditos, como es sabido, y común para todas las especialidades que se imparten, incluye las tres materias preceptivas —*Aprendizaje y desarrollo de la personalidad*, *Procesos y contextos educativos* y *Sociedad, familia y educación*—, y el módulo específico, de 27 créditos, se distribuye en la especialidad de Matemáticas según la tabla siguiente:

Materia	**Asignatura**	**ECTS**	**Semestre**
Complementos para la formación disciplinar en Matemáticas	Historia de las Matemáticas	4	1
	Matemáticas, sociedad y cultura	4	1
Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas	Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	5	1
	Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	5	2
	Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	5	2
Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas		4	2
Aprendizaje y desarrollo de la personalidad		3	1
Procesos y contextos educativos		9	1
Sociedad, familia y educación		3	1
Practicum	Prácticas de enseñanza	3	1
	Prácticas de enseñanza	9	2
	Trabajo de fin de máster	6	2

3. Contenidos de la materia «Complementos de Formación disciplinar» del MFPS

A continuación examinaremos la materia «Complementos de Formación» de los tres másteres considerados, puesto que es la que recoge los aspectos más cercanos a nuestra problemática de investigación: el tratamiento del saber matemático por enseñar y del saber matemático para la enseñanza en la formación del profesorado de secundaria de matemáticas.

3.1. Los «Complementos de formación disciplinar» en la UCM

En la UCM la materia *Complementos de formación disciplinar* se canaliza a través de dos asignaturas: *El significado de la matemática en la Educación Secundaria*, de 10 ECTS, y *Pensamiento matemático y resolución de problemas*, de 5 ECTS. Un total de 15 ECTS que representan por lo tanto una cuarta parte de la formación total del máster.

En las *fichas docentes* de la página web del máster se encuentra la información completa de cada una de estas asignaturas, información de la que entresacamos solamente algunos de los contenidos.

«<u>El significado de las matemáticas en la Educación Secundaria</u>»

Las competencias previstas con la realización de esta asignatura están clasificadas en generales y específicas.

Las *competencias generales* son:

- Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente.
- Profundizar en algunos contenidos propios de la Enseñanza Secundaria no tratados con detalle en los textos de la misma.
- Mostrar aprecio hacia el significado del pensamiento matemático en el conocimiento de la naturaleza y la cultura modernas.

Las *competencias específicas*:

- Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a los contenidos que se cursan en la enseñanza de las Matemáticas.
- Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.

- Adquirir una visión amplia, desde diversos puntos de vista, de algunos temas de Matemática Elemental.

El objetivo a alcanzar es el de proporcionar los instrumentos o herramientas de Matemática elemental desde un punto de vista más general que el adquirido en el grado. Como era de esperar, en ningún momento se alude al carácter problemático o abierto de estos contenidos. Sorprende la expresión "Mostrar aprecio" como objetivo de la formación, así como la enigmática caracterización de los "contenidos propios […] no tratados en el texto de la misma [¿Enseñanza Secundaria?]".

El contenido de la asignatura se compone de tres bloques, más cercanos a la división de las enseñanzas universitarias que a la división escolar de la matemática enseñada en Secundaria:

A. Probabilidad y estadística en la enseñanza secundaria.
B. Elementos de geometría.
C. Elementos de álgebra y análisis.

Los contenidos de cada bloque son los siguientes:

A. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

1. Como organizar y analizar conjuntos de datos que contienen incertidumbre: Análisis de datos estadísticos: casos uni y multidimensional.

2. Cómo cuantificar la incertidumbre: Introducción a la probabilidad. Interpretaciones y metodologías de asignación: clásica, objetivista y subjetivista.

3. Valoración numérica de los resultados de un experimento estadístico: Variables aleatorias. Modelos de probabilidad de variables notables.

4. Como obtener información cuando no hay posibilidad de estudiar de manera exhaustiva un conjunto de datos estadísticos: Muestreo e Inferencia Estadística.

5. Cuando se precisa un valor aislado: Estimación puntual.

6. Cuando se prefiere tener un intervalo de valores: Estimación por intervalos de confianza. Fichas técnicas de los estudios por muestreo.

7. Cuando se quiere validar una conjetura: Tests de hipótesis: Tests paramétricos más usuales. Tests asociados a la Chi-cuadrado: bondad de ajuste, homogeneidad e independencia.

8. Aplicaciones de las técnicas de Inferencia Estadística: El modelo de regresión lineal y el modelo de diseño de experimentos.

B. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

1. Cuestiones elementales sobre la geometría del triángulo: Teorema extendido del seno. Teorema de Ceva. El triángulo órtico. La recta de Euler. La circunferencia de los nueve puntos. La recta de Simson. 2. Geometría del cuadrilátero: Cuadriláteros cíclicos. Teoremas de Brahmagupta y Ptolomeo. Construcción de un cuadrilátero cíclico.

3. Teoremas de Napoleón, Aubel, Pappus y Desargues.

4. Los tres problemas clásicos de la geometría: Cuadratura del círculo, duplicación del cubo, trisección del ángulo. Algunas soluciones.

5. El cuerpo de los números construibles con la regla y el compás.

6. Imposibilidad de la solución de los tres problemas clásicos con la regla y el compás. Teorema de Wantzel.

7. Construcción de polígonos regulares con la regla y el compás. Teorema de Gauss.

8. Una construcción del polígono regular de 17 lados con la regla y el compás.

La construcción de Arquímedes del heptágono regular

C. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

1. Cuestiones sobre teoría de números.

2. Temas "espinosos" en Secundaria: Suma y producto de enteros, producto y cociente de fracciones, Teorema de Thales, concurrencia de las medianas, independencia de sucesos, la equivalencia entre la independencia de las filas de un determinante y no ser cero, la concavidad y la segunda derivada, el papel de dx en el cálculo de primitivas.

3. Cuestiones elementales sobre los irracionales en la enseñanza secundaria.

4. El número π: irracionalidad y apariciones sorprendentes

5. El número e: una introducción más natural, irracionalidad sin utilizar la fórmula de Taylor, apariciones sorprendentes

6. Cuestiones no elementales de Combinatoria.

7. Las derivadas laterales y los límites laterales de f'.

8. Las relaciones entre lo discreto y lo continuo: las sucesiones de Fibonacci y el número áureo, el teorema de los números primos y su distribución.

9. Descenso infinito de Fermat.

10. Ternas pitagóricas.

No sorprenden mucho los contenidos listados, que corresponden básicamente a aspectos poco presentes tradicionalmente en las formaciones habituales de grado de matemáticas, en especial la estadística y la geometría euclidiana. Sorprende más la inclusión de temas considerados como problemáticos en la matemática escolar, a pesar de que se caractericen con el término un tanto despectivo de «espinosos », que parece rebajar la problematicidad del tema a una cuestión muy local, dada la elección muy dispersa de los temas elegidos.

Finalmente, la bibliografía recomendada para el estudio de los contenidos descritos aparece presentada en la forma siguiente (que no coincide con ningún formato estándar conocido por nosotros)**:**

- A primer in Probability. Subrahmaniam, K. Ed. Marcel Dekker Inc.., NY
- Estadística Aplicada. Horra Navarro, J. Ed. Díaz de Santos.
- Probability and Statistics. De Groot, M.
- Statistics. Battacharaya
- Estadística: Una guía de lo desconocido. Tanur, J.
- MATEX. Edición electrónica. Universidad de Cantabria
- Viaje a través de los genios. Dunham. Pirámide.
- Mathematical Circles. Fomin y otros. American Mathematical Society.
- Hoy to count without counting. Ivan Niven. M.A.A.
- Numbers: Rational and Irrational. Ivan Niven. M.A.A.
- Aventuras matemáticas. Miguel de Guzmán. Editorial Pirámide.
- Para pensar mejor. Miguel de Guzmán. Editorial Pirámide.
- Excursions in Calculus. Robert M.Young. M.A.A.
- Aha! Solutions. Martin Erickson. M.A.A.
- ¿Qué son las Matemáticas? Courant y Robbins. Notas de Ian Stewart. Fondo de Cultura Económica.
- Matemáticas II. S.M.
- A Century of Calculus. Tom Apostol y otros. M.A.A.

- Calculus Gems. George F. Simmons. M.A.A.
- Biscuits in Numer Theory. Arthur T. Benjamin. M.A.A.
- The Geometry of numbers. Olds y otros. M.A.A.
- Matemática elemental desde un punto de vista superior. Volumen I (Álgebra, Geometría y Análisis). Félix Klein. Nivola.
- Geometry Revisited. H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer. M.A.A-
- Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. Ross Honsberger. M.A.A.
- Fundamentals of Modern Elementary Geometry. Howard Eves. Jones and Bartlett Publishers.
- Théorie des Corps. La régle et le compas. Jean Claude Carrega. Hermann Editeurs des Sciences et des Arts.
- The Real projective Plane. H.S.M. Coxeter. Springer-Verlag.

En lo que se refiere a la asignatura «Pensamiento matemático y resolución de problemas», también se diferencian las competencias previstas en generales y específicas.

Competencias generales

- Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
- Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.
- Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.

Competencias específicas

- Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.

- Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.
- Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
- Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.
- Integrar la formación en comunicación audiovisual, multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje y entornos tecnológicos.

Los *objetivos* a conseguir al cursar esta asignatura son:

- Acercarse a la matemática como un saber de método en el proceso educativo inicial.
- Considerar los procesos matemáticos como contenido en la matemática de Secundaria y Bachillerato.
- Adquirir conocimientos de cómo enseñar a resolver problemas.
- Familiarizarse con procesos de pensamiento matemático.
- Analizar y desarrollar actividades en orden a crear nuevas tareas y favorecer los procesos de resolución de problemas en los alumnos.
- Profundizar en los procesos de prueba y visualización.
- Profundizar en los procesos de prueba y visualización.
- Profundizar en modelización matemática en diferentes contextos aplicables a la enseñanza secundaria.

El contenido de esta asignatura se articula en tres bloques:

A- Resolución de problemas.

B- Pensamiento Matemático.

C- Modelización matemática en diferentes contextos aplicables a la enseñanza secundaria.

El bloque *Resolución de problemas* se desarrolla según los siguientes epígrafes:

1. La resolución de problemas como eje de la actividad matemática:
   a) Qué es un problema
   b) Corrientes actuales en la resolución de problemas.

c) Perspectiva histórica

2. Un modelo de competencia: G. Polya y el resolutor ideal.
3. Modelos de instrucción:
   a) Modelos de Mason, Burton, Stacey (1988) y Guzmán (1991)
   b) Modos de tratar la resolución de problemas en el currículo de Matemáticas
4. Algunas técnicas en la resolución de problemas: paridad, invariantes, principio del palomar
5. Tipos de problemas interesantes para la educación secundaria:
   a) Juegos de estrategias
   b) Máximos y mínimos sin cálculo diferencial
6. Evaluación de los alumnos en resolución de problemas. Elaboración, análisis y evaluación de protocolos.

Los contenidos del bloque *Pensamiento matemático*:

1. Comprensión y razonamiento en matemáticas
2. Tipos de razonamiento en matemáticas: inductivos, deductivo, combinatorio, espacial, etc.
3. Comprensión y razonamiento en matemáticas.
4. Razonamiento plausible y razonamiento demostrativo.
5. Intuición y Visualización.

Los contenidos del bloque *Modelización matemática en diferentes contextos aplicables a la enseñanza secundaria*:

1. Competencias matemáticas para la modelización en Ciencias Sociales.
2. Modelización en Análisis, Álgebra y Geometría. Modelos matemáticos y Ejemplos
3. Aportes de las nuevas tecnologías

3.2. Los «Complementos de Formación» en la UAM¡Error! Marcador no definido.

En la UAM la materia *Complementos para la formación disciplinar en matemáticas* ocupa una parte más reducida del máster, con tan solo 10 ECTS. Se implanta mediante dos asignaturas cuyas denominaciones son *Asignatura* 1.1 y *Asignatura* 1.2.

Los objetivos del curso de la *Asignatura* 1.1 se desglosan como sigue:

1. Conocer el valor formativo y cultural de las matemáticas observando su desarrollo a lo largo de la historia.

2. Conocer la historia de las matemáticas desde una perspectiva dirigida a profesores de enseñanza secundaria.
3. Identificar problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al analizar algunas de las dificultades surgidas a lo largo de la historia en la concreción, notación o evolución de nociones matemáticas y tratar de plantear soluciones para superarlos mediante la creación de situaciones didácticas adecuadas.

Los contenidos de esta asignatura se expresan en los epígrafes siguientes:

1. *Importancia didáctica de la historia de la matemática*. Principios didácticos que pueden derivarse de la historia. Los problemas y la historia de la matemática.
2. *La aritmética*. Evolución histórica de la teoría de números. Situaciones y problemas históricos de interés didáctico: sistemas de numeración, números poligonales, la criba de Eratóstenes, cuadrados mágicos, problemas abiertos.
3. *El álgebra*. Historia de las ecuaciones. Situaciones y problemas históricos de interés didáctico: problemas de Diofanto, resolución geométrica de ecuaciones de segundo grado por Al-Khwarizmi, la ecuación cúbica, método de Descartes para la resolución gráfica de ecuaciones
4. *La geometría*. Desarrollo histórico de la geometría. Situaciones y problemas históricos de interés didáctico: el teorema de Pitágoras, las lúnulas de Hipócrates y los problemas clásicos de la geometría griega, problemas de Arquímedes, el tangram, construcciones geométricas para el cálculo de π.
5. *La estadística y la probabilidad*. Historia del cálculo de probabilidades y la estadística. Situaciones y problemas históricos de interés didáctico: la aguja de Buffon, los problemas del Caballero De Meré, el problema del cumpleaños…
6. *El análisis matemático*. Recorrido histórico por la teoría de funciones y el cálculo infinitesimal. Situaciones y problemas históricos de interés didáctico: la sucesión de Fibonacci, las fracciones continuas, cálculo de la tangente, procedimientos alternativos para la resolución de problemas de optimización.

Como *bibliografía básica*, se recomienda la siguiente:

Peralta, J. (1995). Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática. Madrid: Huerga y Fierro.

Y como *bibliografía complementaria*:

Aleksandrov, A. D. et al. (1976). La matemática: su contenido, métodos y significado, Vols. 1, 2 y 3. Madrid: Alianza.

Bouvier, A. et al. (1986). Didactique des mathématiques. Paris: Cedic/Nathan.

Boyer, C. (1968). Historia de la matemática. Madrid: Alianza.

Dunham, W. (1992). Viaje a través de los genios. Madrid: Pirámide.

Le Lionnais, F. et al. (1976). Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: EUDEBA.

Peralta, J. (1994). "Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución". Educación Matemática, Vol. 6, 2. pp. 56-71.

Peralta, J. (1996). Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener aproximaciones de los mismos. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid (Cuadernos del ICE).

Peralta, J. (1999). "Algunas ideas para la resolución de ecuaciones". Suma, nº 32, pp. 79-89.

Peralta, J. (1999). "Consideraciones didácticas e históricas sobre el número π". Aula Abierta, nº 74, pp. 177-191.

Peralta, J. (2007). "Un viaje por el apasionante mundo de los números", en VV.AA.: Aprender matemáticas: metodología y modelos europeos. MEC, Aulas de verano, pp. 27-50.

Peralta, J. (2008). "Las matemáticas y las artes liberales", en VV.AA.: Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar. MEC, Aulas de verano, pp. 91-118.

Peralta, J. (2008). "Pythagorean approximations and continued fracctions". Teaching Mathematics and its Applications, 27 (4), pp. 200-209.

Rey Pastor, J y Babini, J. (1986). Historia de la Matemática, Vols. 1 y 2. Barcelona: Gedisa.

VV.AA. (1986). Historia de la Matemática hasta el siglo XVII. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

VV.AA. (2008). El rostro humano de las matemáticas. Madrid: Nivola. www.divulgamat.net (sección de Historia de las Matemáticas).

Se añade a esta bibliografía libros de la colección *La matemática en sus personajes*, de la editorial Nivola.

La *Asignatura* 1.2 tiene como objetivos:

1. Repasar contenidos que se usan en la enseñanza secundaria, desde un punto de vista más general.
2. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican las matemáticas.
3. Conocer algunos desarrollos recientes de las matemáticas y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.

Y sus contenidos se presentan en la lista siguiente:

1. Medias, porcentajes, crecimiento.
2. Aritmética. Distintos tipos de números. Demostraciones. Números primos. Algoritmo de Euclides. Aritmética modular. Códigos de barras.
3. Álgebra lineal (con geometría analítica). Sistemas de ecuaciones. Espacios vectoriales. Transformaciones en el plano y en el espacio. Sistemas dinámicos discretos.
4. Geometría. El teorema de Thales. El teorema de Pitágoras. Demostraciones visuales. Cónicas. Poliedros y mosaicos.
5. Optimización. Problemas de optimización. Optimización en una y varias variables. Optimización sin derivar.
6. Probabilidad y estadística. Combinatoria y probabilidad. Estadística descriptiva. Regresión. Distribución normal. Intervalos de confianza.
7. Concursos de resolución de problemas. Descripción de los concursos de resolución de problemas de ámbito regional, nacional e internacional.

La bibliografía recomendada es:

- Alsina, R.B. Nelsen, Math made visual: creating images for understanding mathematics, The Mathematical Association of America, 2006.
- Comap, Las matemáticas en la vida cotidiana, Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1999.
- R. Courant, H. Robbins, What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods, Oxford University Press, 1941.
- H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry revisited, Mathematical Association of America.
- J. Dorronsoro, E. Hernández, Número, grupos y anillos, Addisón Wesley y Universidad Autónoma de Madrid, 1996.
- R. D. Driver, Why Math? Springer, 1984.
- M. De Guzmán, B. Rubio, Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático: estrategias de pensamiento matemático. Ediciones Pirámide S. A., Vol. 1, 1990. Vol. 2, 1992.
- Hernández, Álgebra y geometría. Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 2ª Edición, 1994.
- Strang, Álgebra lineal y sus aplicaciones. Addison Wesley, 1998.

3.3. Los «Complementos de formación disciplinar» en la Universidad de Murcia

En la Universidad de Murcia la materia *Complementos para la formación disciplinar en matemáticas* se materializa en las asignaturas *Historia de las Matemáticas* y *Matemáticas sociedad y cultura*, cada una de 4 créditos, cursándose en el primer cuatrimestre del año académico.

El objetivo de la asignatura *Historia de las Matemáticas*, como se desprende de la guía docente, es el conocimiento de algunos episodios históricos de distintos aspectos de las matemáticas del curriculum de ESO y Bachillerato, así como la introducción en los posibles usos de la historia de las matemáticas en la enseñanza de la misma.
Las competencias que se aspira adquieran los futuros profesores al cursar esta asignatura son:

- Reconocer las matemáticas como rama del conocimiento humano, su antigüedad y transcendencia.
- Conocer los principales momentos en el desarrollo histórico de los conceptos del currículo oficial.
- Conocer las principales dificultades que a lo largo de la historia se han ido presentando en la evolución de las técnicas y los conceptos matemáticos del currículo oficial.

Los contenidos que se trabajan a lo largo de esta asignatura se presentan mediante los nueve temas siguientes:

1. Introducción a la Historia de la Ciencia.
2. La matemática prehelénica. Babilonia y Egipto.
3. La matemática griega. Álgebra geométrica, método de exhaución, Elementos de Euclides, Arquímedes, epígonos y comentaristas.
4. El periodo medieval y la matemática en el Renacimiento.
5. El siglo XVII. Algebrización de las matemáticas, precursores y fundadores del cálculo infinitesimal.
6. El siglo newtoniano. Euler, la escuela francesa.
7. El siglo XIX. La Aritmetización del análisis.
8. Inicio, desarrollo y consolidación de la Estadística.
9. Posibles usos de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las mismas.

Bibliografía

Bernal, J.D. (1968). Historia social de la Ciencia, 2 vols. Barcelona: Península. (Básica).

Boyer, C.B. (1959). The History of the Calculus and its Conceptual Development . New York: Dover.

Boyer, C.B. (1986). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial. (Básica).

Santos del Cerro, J y García Secades, M. (2006). Historia de la Probabilidad y la Estadística, Vols. I, II y III. Madrid: Delta.

La asignatura *Matemáticas sociedad y cultura* tiene como objetivo el conocimiento de algunas de las aplicaciones de las matemáticas del currículum de ESO y Bachillerato, su presencia en la vida cotidiana, en la sociedad, en la cultura y en el arte; así como la elaboración de actividades relacionadas con dichos aspectos para su uso en el aula.

Las competencias relativas a esta asignatura son:

- Conocer el valor formativo y cultural de las matemáticas
- Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
- Desarrollar la creatividad a la hora de diseñar materiales para la presentación de diversos contenidos curriculares.

Estas competencias se desarrollarán a través de los 8 temas de títulos:

1. Triángulos.
2. Cónicas y cuádricas.
3. Simetrías.
4. Recubrimientos.
5. Geometrías no euclídeas.
6. Distancias y geodésicas.
7. Códigos detectores, correctores y criptográficos.
8. Matemáticas en el Arte, en los medios de comunicación o en la Literatura.

Y la bibliografía recomendada para el estudio de la asignatura:

- Doran, Jody L. & Hernández, Eugenio (Eds.). (2006), Las Matemáticas de la Vida Cotidiana. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana S.A. y Universidad Autónoma de Madrid. (Básica)

- Marqués, Luisa & de Miguel Borja (Eds.). (2000) Fotografiando las matemáticas. Barcelona: Carroggio S.A. de ediciones. (Básica).

3.4. Los «Complementos de formación disciplinar» en la Universidad de Cantabria

De manera análoga a la Universidad de Murcia, en la Universidad de Cantabria, la materia *Complementos para la formación disciplinar s*e estructura en las asignaturas *El Desarrollo Histórico y Reciente de las Matemáticas y Conocimiento Escolar*, de 4.5 ECTS y *Las Matemáticas en el Currículum de Secundaria*, también de 4,5 ECTS.

La asignatura *Desarrollo Histórico y Reciente de las Matemáticas y del Conocimiento Escolar* lleva asociada las siguientes competencias:

Competencias generales:

- Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.
- Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios.
- Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones -y los conocimientos y razones últimas que las sustentan- a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades.
- Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.
- Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización.
- Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.

Competencias Específicas:

- Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.

- Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.
- Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.
- Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente.

Objetivos de la asignatura

- Conocer aspectos fundamentales de la Historia de las Matemáticas que sirvan para la práctica docente.
- Proporcionar recursos bibliográficos, de internet, etc, para poder afrontar temas nuevos, estar al día de las novedades de la disciplina, etc.
- Conocer el modo de razonar y escribir en matemáticas Situar las Matemáticas en relación con otras disciplinas y su utilización en la vida cotidiana.
- Conocer los campos de desarrollo actual de las matemáticas.

Los contenidos se desglosan en los cuatro temas siguientes:

1. Historia de las Matemáticas. Fuentes de información.
2. El lenguaje matemático.
3. Las Matemáticas en relación con otros ámbitos.
4. Fronteras de las Matemáticas. Matemáticas y Realidad.

Y la bibliografía básica recomendada es:

- Victor J. Katz: A History of Mathematics. An Introduction. Pearson.
- Ernst Hairer y Gerhard Wanner: Analysis by Its History. Springer, N. Yok, Berlín, Heildelberg, 1996.
- Joseph W. Dauben:The history of mathematics from antiquity to the present : a selective bibliography.

Con relación a la asignatura *Las Matemáticas en el Currículum de Secundaria*, las competencias que lleva asociadas son:

Competencias genéricas:

- Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio.

- Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.
- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros profesionales y docentes del centro.
- Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización.
- Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de estudiantes.
- Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y cooperativamente, y desarrollar habilidades de pensamiento y decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.
- Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.

Competencias Específicas:

- Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país.
- Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.
- Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.
- Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
- Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.
- Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada.
- Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.

Los resultados de aprendizaje esperados se concretan en «la mejora de los conocimientos, la adquisición de procedimientos, y el desarrollo de aptitudes y actitudes relativas a las competencias generales y específicas de la materia». Los *objetivos de la asignatura* relativos a los conocimientos se centran en:

- Conocer la historia reciente del currículo de matemáticas en nuestro país y su influencia en el currículo actual
- Conocer algunos aspectos sobre la competencia matemática y su rol en el currículo actual
- Conocer los fines y objetivos del currículo de matemáticas
- Conocer algunos aspectos del papel de las TICs en ese currículo
- Conocer en detalle el desarrollo del currículo actual de matemáticas.

Y con relación a las habilidades pretendidas con el estudio de la asignatura, se pretende: Integrar las TICs en el desarrollo de distintos ítems del currículo.

- Integrar la adquisición de competencias en el desarrollo de distintos ítems del currículo.
- Planificar el desarrollo de distintos ítems del currículo.

Los contenidos de la asignatura son:

1. Introducción al currículo de matemáticas. Historia, fines, competencias y métodos.
2. Desarrollo detallado del currículo de matemáticas.

La bibliografía recomendad como básica es:

- Sierra, M. González Astudillo, M.T. y López, C. (2007) Evolución histórica de la enseñanza de las Matemáticas a través de contenidos y edades, en "Estudio de Evaluación de las Matemáticas en Castilla y León". JCYL.
- Sierra, M. González Astudillo, M.T. (2005) La Matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria en España en el primer tercio el siglo XX: un análisis a través de los Planes de estudio. (Ponencia CIBEM).

- Rico, L., Lupiañez, J.L. (2008): Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Alianza Editorial.
- Recio, T. (2008): Competencia Obligatoria. La Gaceta de la RSME. Vol. 11, Núm. 3, Págs. 559 571.
- Recio, T (2007). La Ciencia Invisible. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, ISSN 1133-9853, Nº. 46.
- Recio. T (2006): PISA y la evaluación de las matemáticas. Revista de Educación. Nº 1, pags. 263-273
- Cockcroft, W. H. (1985): Las Matemáticas Sí Cuentan. Estudios de Educación. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- OECD (2005): Marcos teóricos de PISA 2003. Ministerio de Educación y Ciencia-INECSE. Madrid.

4. El papel de la didáctica en la formación del profesorado¡Error! Marcador no definido.

4.1. El generalismo pedagógico y la estructura del MFPS

Como hemos visto en la sección 2, la formación propuesta por el MFPS se basa en una estructura que separa cuatro ámbitos claramente diferenciados. Por un lado, aparecen materias propias de la formación *específica* del área de contenido considerada (matemáticas, lengua, filosofía, etc.), parte de la cual se adquiere en el grado y otra parte en los *Complementos de formación disciplinar*. Por otro lado, la formación contempla la enseñanza de unos *principios generales* que supuestamente estructuran cualquier proceso de aprendizaje y que, por tanto, proporcionaría a todos los profesores *criterios generales* para diseñar y gestionar las actividades de enseñanza-aprendizaje independientemente de que se trate de aprender música, literatura, inglés, filosofía o matemáticas. Entre los dos, aparece una formación que combina la enseñanza con la materia considerada (*Aprendizaje y enseñanza* de las materias correspondientes. *Innovación docente* e *Iniciación a la investigación educativa*) sin establecer relación con la didáctica de las matemáticas como disciplina. Finalmente, y sin un claro vínculo con alguno de los tres módulos anteriores, se sitúan el *Practicum* y el *Trabajo final de máster*, a modo de culminación teórico-práctica del proceso global de formación.

En esta estructura encontramos ciertas reminiscencias de un cierto *generalismo pedagógico* que establece una separación nítida entre *hacer* matemáticas y *enseñar* matemáticas, y que agrava y perpetúa la distancia entre la *comunidad que enseña* matemáticas en Secundaria y la que *produce y aplica* las matemáticas[3]. Este principio se encarna en la estructura global del MFPS mediante la separación del *módulo genérico*, común a todas las especialidades y que tiene como objetivo proporcionar a los futuros profesores de todas las materias los conocimientos psico-peda-sociológicos que necesitarán en su profesión, y los respectivos módulos *específicos* de las diferentes especialidades, una separación que deja en tierra de nadie el módulo del Practicum. Se confía así al futuro profesor la responsabilidad de hacer compatibles entre sí los citados criterios generales y especificarlos en lo relativo al contenido particular que ha de enseñar, especialmente en el momento de llevar a la práctica dichos criterios.

Con la programación del módulo específico, de forma escindida del módulo genérico, se acaba diseñando —aunque no sea esta la voluntad explícita de los diseñadores—, un MFPS que interpreta la formación del profesorado como la unión relativamente disjunta de competencias genéricas preestablecidas por un lado y conocimientos disciplinares específicos por otro. Resulta, en definitiva, que el tipo de formación que el MFPS ofrece a los futuros profesores separa en cierta forma el dominio de las *matemáticas* y del de la *enseñanza*. En efecto el futuro profesor, después de recibir una formación matemática determinada (ya sea en el grado de matemáticas o en el de física, ingeniería, económicas o arquitectura, entre otros) que, en general, está poco orientada a las necesidades matemáticas de la enseñanza de las matemáticas, se enfrenta en el módulo genérico del MFPS a un conjunto de conocimientos psicológicos, pedagógicos, sociológicos completamente *desconectados* entre sí. Se le ofrece de este modo una amalgama de enfoques y teorías independientes cuya integración y utilización se deja a cargo del profesor.

En lo referente a los contenidos de la materia *Complementos de formación disciplinar* en el caso de la especialidad de matemáticas, constatamos en primer lugar que, en general, es una materia que en los programas del MFPS presenta gran variabilidad según la universidad considerada, pudiéndose escindir en diferentes asignaturas como,

[3] En Gascón (2002a) se analiza la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática y en Gascón et al, (2004) se describen algunas de las consecuencias del generalismo pedagógico sobre el desarrollo del Sistema de Enseñanza de las Matemáticas.

por ejemplo: *Historia de las Matemáticas* y *Matemáticas, sociedad y cultura; El significado de la matemática en la Educación Secundaria* y *Pensamiento matemático y resolución de problema*; o bien *Resolución de Problemas, Modelización Matemática e Historia de las Matemáticas*, entre otras posibilidades. En todos los casos, cuando bajamos al detalle de los contenidos, al lado de elementos de historia de las matemáticas y de resolución de problemas que, como sabemos, puede tener tratamientos muy diversos e incluso contrapuestos (Gascón, 1994; Rodríguez, Bosch y Gascón, 2004), encontramos «temas» matemáticos tales como: Triángulos, Simetrías, Distancias y geodésicas, Muestreo e inferencia estadística, Test de hipótesis, Teoremas de Napoleón, Pappus y Desargues, El número e, Ternas pitagóricas, Problemas de optimización, Cónicas y cuádricas, Geometrías no euclídeas, etc. Todos ellos, como ya hemos comentado, con cierto grado de prestigio cultural o social.

En resumen, después de muchos años de reivindicar que las instituciones educativas tomasen en serio el problema de la formación del profesorado de Secundaria, nos encontramos con un MFPS que no acaba de superar la baja consideración de la profesión de profesor por parte de las autoridades educativas y, también, por parte de ciertos sectores sociales que la siguen considerando como una semiprofesión. El hecho de que en España puedan cursar el MFPS en la especialidad de matemáticas (o de cualquier otra) graduados de muy diversas especialidades y que, efectivamente, la mayor parte de los candidatos a profesor de matemáticas de Secundaria no tengan una formación matemática suficiente, pone de manifiesto que tampoco existe, para los futuros profesores, una exigencia de formación en la disciplina enseñada aunque, eso sí, las autoridades educativas declaran que esta variedad en la formación constituye una «riqueza del profesorado de matemáticas»:

> Una cláusula esencial del contrato social sobre el oficio de profesor es que el ejercicio correcto del oficio no debe o no debería exigir largos y profundos estudios específicos de este oficio. Hay que distinguir este hecho de otro que lo podría disimular fácilmente. La exigencia de formación en la disciplina enseñada –que es de hecho una exigencia que fluctúa, aunque sea real–, no debe esconder que va asociada con una débil exigencia de instrucción profesional. Para encontrar un punto de comparación, hay que imaginarse una situación en la cual para ser médico se exigiría al candidato una licenciatura de biología, completada por algunos meses de formación específica para el ejercicio de la medicina, sin privilegiar además la elección de tal o cual área de la biología –una licenciatura de biología vegetal valdría lo mismo que una de biología humana o de oceanografía–, declarando que

esta variedad en la formación resulta ser una riqueza del cuerpo médico". (Chevallard 2001a)

4.2. La función integradora de la didáctica de las matemáticas¡Error! Marcador no definido.

Una respuesta muy distinta a la que propone la pedagogía generalista y que, en parte, encarna el MFPS, la proporciona aunque de manera incipiente la didáctica de las matemáticas. En efecto, la didáctica de las matemáticas se constituye como disciplina científica para hacerse cargo de manera integrada, del *hacer* y del *enseñar matemáticas*, esto es, de las *condiciones específicas que hacen posible la construcción y la difusión de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus sociedades* (Brousseau 1998). Como tal, la didáctica tiene la vocación de ocuparse de todas las cuestiones que surgen en el sistema de enseñanza de las matemáticas y, en particular, de la problemática docente del profesor de matemáticas.

¿Cuál es el mecanismo que permite a la didáctica de las matemáticas tratar de manera unitaria el conjunto de cuestiones que constituyen la problemática docente? Para responder a esta cuestión empezaremos por recordar brevemente la sucesión de niveles de codeterminación didáctica introducida por Chevallard (2001). En esta escala el nivel más genérico es la Civilización y el más específico está representado por cada una de las cuestiones matemáticas concretas que se proponen para ser estudiadas.

Podemos distinguir, simplificando mucho las cosas, entre los niveles «genéricos» (Civilización, Sociedad, Escuela y Pedagogía) y los «específicos» (Disciplina, Área, Sector, Tema y Cuestión) y, dentro de estos últimos, tenemos los dos niveles más específicos (Tema y la Cuestión) en los que se suele confinar al profesor.[4]

Civilización → Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Volviendo a la cuestión planteada, diremos, siguiendo a Bosch y Gascón (2007), que uno de los mecanismos que permite a la ciencia didáctica tratar de manera unitaria el conjunto de cuestiones que constituyen la problemática docente y, en consecuencia,

[4] Esta confinación a la cual está sometido el profesor, como tal profesor, constituye un fenómeno didáctico que ha sido estudiado por la TAD y que recibe el nombre de *autismo temático*. Se trata de un fenómeno que acarrea importantes consecuencias entre las que cabe señalar la limitación de la responsabilidad asignada al profesor (que obstaculiza objetivamente cualquier formación docente que pretenda instruir en materia de análisis y control de los efectos que provocan las *restricciones que surgen en los niveles superiores*, esto es, más allá de los temas) y la pérdida de la razón de ser de muchos de los contenidos de la matemática escolar (Chevallard, 2001 y Gascón, 2004).

unificar el proceso de formación del profesorado, consiste en tomar en consideración como cuestiones generatrices de la formación aquellas que emergen en los que denominaremos *niveles intermedios de codeterminación didáctica* (Disciplina, Área y Sector).

En términos generales podemos afirmar que en la formación que ofrece el MFPS se tratan cuestiones de la problemática docente que, o bien tienen un alto grado de generalidad, esto es, cuestiones que se pueden formular sin hacer mención a la disciplina concreta (en el módulo genérico) o bien cuestiones encerradas en los niveles más bajos o específicos de la jerarquía (Tema y Cuestión), por lo que las cuestiones generadas en los niveles intermedios suelen quedar fuera del programa del MFPS. Una posible explicación de la relativa ausencia de cuestiones emergentes en los niveles intermedios es la siguiente: se trata de cuestiones que ni tienen el grado de generalidad necesario para ser consideradas como problemas pedagógicos, psicológicos o sociológicos (y, por tanto, caen fuera del ámbito del módulo genérico), ni son suficientemente específicas para caer bajo la limitada esfera de responsabilidad que la escuela otorga al profesor de matemáticas.

En estos niveles intermedios tienen cabida todas las cuestiones que hacen referencia a las matemáticas como disciplina, así como las que involucran a las diferentes áreas y sectores en que las matemáticas se compartimentan en la escuela.

Civilización → Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

¿Cuáles son estas cuestiones? No pretendemos, de ninguna manera, proponer una lista exhaustiva de las citadas cuestiones que surgen en los niveles intermedios. Pero creemos que es importante presentar algunas de ellas a fin de sugerir el tipo de análisis que requieren, mostrar el papel central que juega la didáctica de las matemáticas en dicho análisis y subrayar la especificidad matemática de su tratamiento. Estas cuestiones prefiguran el punto de partida de nuestra propuesta de *programa de formación para el profesorado de matemáticas* en el sentido de que las cuestiones que surgen en estos niveles intermedios constituyen un marco al que se acabarán refiriendo el conjunto de las cuestiones profesionales que constituyen la problemática de la profesión. Para todas ellas, la didáctica de las matemáticas aparece como el instrumento fundamental para el estudio y la elaboración de respuestas efectivas, tanto teóricas como prácticas.

Empezaremos formulando y comentando brevemente las cuestiones que se refieren a las matemáticas como un todo y que, por tanto, surgen en el nivel *Disciplina* en la cadena de niveles de codeterminación.

> D1. *¿Qué se entiende por «matemáticas»? ¿Cómo se puede describir la actividad matemática? ¿Qué términos, qué categorías y qué lenguaje son los más adecuados?*

La profesión de profesor comporta la necesidad de hablar, describir, interpretar, organizar, desarrollar y evaluar las matemáticas que se enseñan. ¿Es útil, por ejemplo, hablar de contenidos «conceptuales», «procedimentales» y «actitudinales» como propugnaba la LOGSE? ¿Hasta qué punto la epistemología del profesor (esto es, la manera de interpretar y describir las matemáticas por parte del profesor) está determinada por la forma como se interpretan y describen las matemáticas por parte de los documentos curriculares oficiales (y que articulan el *modelo epistemológico dominante en la institución escolar*)? ¿En qué medida este modelo epistemológico determina (o condiciona) el *modelo docente*, esto es, las posibles formas de enseñar y aprender matemáticas en la institución? Así, por ejemplo, en las instituciones en las que el modelo epistemológico dominante es el «conceptualismo», ¿cuáles son las formas posibles de organizar la enseñanza de las matemáticas?

> D2. ¿*Cuál es la función de las matemáticas en la sociedad*? ¿*Por qué y para qué se enseñan matemáticas en la escuela*?

Podemos distinguir dos grandes modalidades de enseñanza o tipos de modelos docentes que están basados en dos concepciones claramente diferenciadas de las funciones que tienen los saberes y los conocimientos en la sociedad. Está, por un lado, el enfoque *monumentalista* que parte de una cierta sacralización de los saberes considerándolos como monumentos creados por el género humano en épocas más o menos remotas y que la escuela tiene la misión de trasmitir a todos los ciudadanos, a pesar de que la propia escuela ha «olvidado» la razón de ser de estos monumentos. En el extremo opuesto encontramos el enfoque *funcionalista* que considera que los saberes y conocimientos son esencialmente instrumentos para el desarrollo de las prácticas sociales, útiles tanto para mejorar la acción como para mejorar la comprensión y justificación de esta acción e, incluso, como instrumentos para cuestionar las respuestas impuestas como indiscutibles o transparentes. En el caso de la enseñanza de las matemáticas nos encontramos en la práctica escolar habitual, como ya hemos dicho, mucho más cerca del primer enfoque que del segundo. Los alumnos aprenden cosas como el Teorema de Tales, las funciones, las ecuaciones de segundo grado y las fracciones, pero muy pocos salen de la escuela convencidos de la funcionalidad de estas herramientas matemáticas para «vivir mejor todos juntos».

D3. *¿Qué papel juegan las matemáticas en la comprensión y en la posibilidad de acción sobre el* «*mundo*»? *¿Qué significa hoy día la matematización de la* «*realidad*» (*matemática o extra-matemática*)?

¿Cómo instaurar la dialéctica necesaria entre la construcción matemática y la presencia de lo no-matemático en la clase de matemáticas? ¿Cómo integrar en la matemática escolar las aplicaciones prácticas que requieren un vínculo estrecho entre las matemáticas y el mundo no-matemático? ¿Qué nociones son necesarias para pensar matemáticamente la realidad no-matemática? Por ejemplo, ¿cómo matematizar las nociones de *magnitud* y *unidad* para poder elaborar un *álgebra de magnitudes* imprescindible para la mayor parte de las utilizaciones prácticas de las matemáticas? ¿Qué limitaciones tiene esta matematización? ¿En qué sentido la geometría es una matematización del espacio físico? ¿Y la estadística y la probabilidad, constituyen una matematización de la «variabilidad»?, etc.

D4. *¿Qué matemáticas se han de enseñar en la ESO y en el Bachillerato*?

Esta cuestión que podemos denominar «problema del currículo» es central en la formación del profesorado. Si recuperamos la dialéctica entre las cuestiones y las respuestas que debería generar todo proceso de formación, el problema del currículo se convierte en el problema de la elección de las cuestiones que se han de estudiar en la escuela y de las posibles formas de organizar dicho estudio (incluyendo el papel conjunto de las diferentes disciplinas). ¿Qué cuestiones y qué tipo de respuestas no deberían estar ausentes de la escolaridad obligatoria? ¿Cuáles de estas cuestiones conducen o facilitan el acceso a estudios posteriores? ¿Cómo hemos de cambiarlas a medida que cambian las necesidades matemáticas y didácticas? La trigonometría fue durante muchos siglos una herramienta esencial para la medición de longitudes a través de las triangulaciones, pero hoy en día ha quedado desplazada por las herramientas electrónicas que, al mismo tiempo que provocan una ampliación brutal de nuestra capacidad de acción, introducen nuevos problemas de control y de justificación. La teoría de grafos y la estadística inferencial se introducen en los currículos obligatorios de muchos países europeos. ¿Qué papel se deberá asignar entonces al álgebra lineal? ¿Cómo se deberá reorganizar o reconstruir el álgebra lineal para que sea útil en el estudio elemental de la estadística? ¿Cómo se pueden integrar las nuevas tecnologías a la enseñanza de las matemáticas? Etc.

D5. *¿Qué papel ha de jugar la experimentación y la actividad de modelización en la matemática escolar*?

¿Es posible enseñar a los alumnos a construir, utilizar y evaluar *modelos matemáticos*? ¿Cómo se ha de relacionar esta actividad con la resolución de problemas? ¿Y con la demostración? ¿La modelización matemática se ha de considerar como una aplicación de las matemáticas previamente enseñadas? ¿O, por el contrario, se ha de partir de problemas físicos, económicos, sociales, etc. e introducir las matemáticas como herramienta para modelizar el sistema subyacente y resolver dichos problemas? ¿Qué papel tienen (o podrían tener) las TIC en este trabajo experimental y en un trabajo de modelización?

D6. ¿*Los dispositivos didácticos existentes en las instituciones escolares son adecuados y suficientes para enseñar matemáticas en las sociedades actuales*?

Cuando la enseñanza secundaria se generaliza y se transforma prácticamente en obligatoria, el estudio escolar de las matemáticas plantea *nuevas necesidades didácticas*. ¿Los dispositivos didácticos actualmente existentes (libro de texto, clase de matemáticas, consultas puntuales, apuntes de clase y pruebas de evaluación) son suficientes? ¿Cuáles son sus principales limitaciones en fin de satisfacer las nuevas necesidades didácticas? ¿Qué nuevos dispositivos permitirían paliar estas necesidades didácticas? ¿Cómo provocar que los alumnos, *por sí mismos*, lleven a cabo actividades esenciales para el estudio de las matemáticas como, por ejemplo, el planteamiento de cuestiones, la exploración espontánea de nuevos problemas, la producción de medios de validación de sus propias respuestas, la búsqueda de información externa o el desarrollo del trabajo de la técnica?

D7. ¿*La actual organización curricular de las matemáticas es la más adecuada*? ¿*Qué consecuencias acarrea sobre la organización didáctica escolar*?

¿A qué criterio o a qué lógica responde la actual compartimentación del currículum de matemáticas en bloques temáticos (o «áreas») y éstos en «sectores»? ¿Hasta qué punto esta compartimentación puede convertirse en un *obstáculo didáctico* cuando, por ejemplo, se han de combinar conocimientos y técnicas situados en diferentes sectores y hasta en diferentes áreas del currículum? ¿Cómo conservar el sentido de cada una de las áreas en que se divide la matemática escolar cuando las actividades están tan compartimentadas que, a lo sumo, hacen referencia a un tema particular de un sector concreto de dicha área? Así, por ejemplo, ¿cómo dar sentido al álgebra si en la práctica matemática escolar ésta se reduce a un conjunto de cálculos formales («simplificar», «factorizar», «sacar factor común», «desarrollar», «operar», etc.) sin ninguna razón de ser?

Consideramos que el estudio de estas cuestiones, y de otras muchas que hacen referencia a la matemática escolar como un todo, debería formar parte de alguna de las materias del MFPS. Asimismo existen cuestiones que surgen en los niveles correspondientes a las *Áreas* y las *Secciones* (incluidos también dentro de los que hemos denominado niveles intermedios de codeterminación didáctica) cuyo estudio también es ineludible en un programa de formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En la sección 4.3 formularemos una pequeña muestra de estas cuestiones que junto a las que surgen en el nivel de la *Disciplina* (y de las que ya hemos presentado una pequeña muestra en esta sección) forman una red de cuestiones que, postulamos, permitirá reformular o reinterpretar la mayor parte de los problemas de la profesión docente.

Sin tener la pretensión de proponer en esta memoria una reestructuración global del MFPS, queremos subrayar que estos tipos de cuestiones deben plantearse en la *formación matemática* de los futuros profesores y que, como hemos dicho, la didáctica de las matemáticas constituye el instrumento fundamental para el estudio y la elaboración de respuestas efectivas a estas cuestiones.

4.3. Propuestas alternativas para diseñar la asignatura *Complementos de formación disciplinar* en la especialidad de matemáticas del MFPS

Hay que reconocer que hoy día, dado el nivel de desarrollo de la didáctica de las matemáticas, no existe un acuerdo común sobre cuáles son los contenidos básicos y la función principal de esta disciplina en la formación de profesores. En particular, nuestra posición al respecto dentro del marco de la TAD no coincide con otras posibles enmarcadas en otros enfoques didácticos. Para mostrar esta divergencia de posibles posiciones, y antes de presentar los principios básicos de nuestra propuesta, mostraremos los resultados de un trabajo colectivo de investigadores españoles en didáctica de las matemáticas que ha dado lugar al libro titulado *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*, publicado en 2011 bajo la coordinación de Jesús María Goñi (2011). En el índice del libro se pueden ver los *capítulos* que se desarrollan por los distintos autores, profesores e investigadores en el ámbito de la didáctica de las matemáticas:

1. **El currículo de Matemáticas en la educación secundaria obligatoria**, Jesús María Goñi
   La educación secundaria obligatoria
   El bachillerato
   Referencias bibliográficas
2. **Procesos matemáticos en la educación secundaria**, Germán Torregrosa y María Luz Callejo
   Procesos matemáticos en el contexto de la resolución de problemas
   Coordinación de procesos en geometría
   Referencias bibliográficas
3. **Aritmética y álgebra**, Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz
   Aritmética
   Álgebra
   Referencias bibliográficas

4. **Magnitudes y medida**, Santiago Fernández Fernández
   Breve historia de la medida
   La enseñanza de la medida en la educación secundaria
   Magnitudes y medida
   Magnitudes
   Thales y la medida
   El teorema de Pitágoras
   Las unidades de las nuevas tecnologías
   Referencias bibliográficas
5. **Geometría**, Romà Pujol
   Nociones de historia de la geometría
   La enseñanza de la geometría en la educación secundaria
   Figuras planas: Triángulos, cuadriláteros y polígonos
   Transformaciones en el plano
   Geometría del espacio
   De la geometría al álgebra
   Referencias bibliográficas
6. **Funciones**,Vicenç Font
   Evolución histórica de la noción de función
   Algunas ideas clave que nos ofrece la evolución de la noción de función
   La perspectiva formalista sobre las funciones
   La perspectiva realista sobre las funciones
   Diferentes representaciones de las funciones
   Funciones elementales
   Referencias bibliográficas
7. **Estadística y probabilidad**, Romà Pujol
   Estadística descriptiva
   La probabilidad
   Herramientas informáticas para el estudio de la estadística y la probabilidad
   Referencias bibliográficas

Los objetivos de la obra se centran en ofrecer un conjunto de pautas para […] *revisar, focalizar y reconceptualizar, sobre todo, conocimientos de actualización formativa*, así como proporcionar formación complementaria a quienes los estudios realizados *no han sido todo lo sistemáticos que sería conveniente o se han desarrollado en un nivel que no se considera suficiente para que puedan impartir la docencia en secundaria y bachillerato unos a docencia sistemática*. (p. 6.)

Por ejemplo, en el tema de las *funciones* (Vicenç Font 2011) se enfatiza la importancia, en la formación del profesorado, del conocimiento de la evolución histórica del concepto de función. Dado que, históricamente, la observación de la variación conjunta de magnitudes dio origen a la noción de función, se propone que seguir este camino para su introducción en la enseñanza secundaria. Se enfatiza la importancia de asociar al concepto de función diferentes representaciones: expresión verbal, expresión simbólica, tabla de valores y gráfica, así como las posibles traducciones y conversiones entre estas representaciones porque son fundamentales para su comprensión y, por ello, para su enseñanza y aprendizaje. Se considera que la utilización de las funciones en las diversas prácticas matemáticas conlleva también la utilización de otros objetos matemáticos, de relaciones entre ellos, y de propiedades. Se proponen los *mapas conceptuales* y las *configuraciones epistémicas* como herramienta para mostrar esta complejidad.

En la práctica, se propone introducir las funciones en Secundaria a partir de problemas de contexto que el alumno puede resolver con sus conocimientos previos (matemáticos y no matemáticos) y cuyo fin principal es facilitar la construcción por parte de los alumnos de los conceptos matemáticos nuevos que se van a estudiar en la unidad didáctica. Así, los problemas contextualizados sirven de plataforma para avanzar intercalando ejemplos de funciones que se utilizan para introducir los términos, propiedades, características de las mismas. Se debe insistir en las cuatro representaciones de las funciones y la argumentación visual (sobre una gráfica dada) tiene un papel importante en actividades donde se explicita el crecimiento, decrecimiento, máximos, etc.

Estas presentaciones reciben el nombre de configuraciones empíricas, al presuponer una cierta concepción empírica de las matemáticas: las matemáticas son (o se pueden enseñar como si fueran) generalizaciones de la experiencia y también presuponen que saber matemáticas incluye la competencia para aplicar las matemáticas a situaciones extra matemáticas de la vida real.

En el tema dedicado a Aritmética y Álgebra (Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz 2011).se destaca la importancia de desarrollar la competencia básica «dar sentido a los contenidos» que van a ser objeto de estudio y se propone como uno de los caminos posibles para este fin el conocimiento del desarrollo histórico de los contenidos que van a ser tratados.

Con relación a la Aritmética, se establecen dos apartados: *Los números y sus operaciones* y *La competencia numérica*: *la interpretación de la información*. El objetivo plasmado en *Los números y sus operaciones* es ofrecer al futuro profesor diversas actividades para el repaso y la reconceptualización de conocimientos que el futuro profesor trabajará en Secundaria. Sumariamente, estas actividades implican la escritura de números en otras bases distintas de 10 y recíprocamente; el cálculo de múltiplos y divisores de algunos números; comprobar que un número es perfecto; el cálculo del tiempo necesario para la realización de un recorrido; la asociación entre fracciones y frases que incluyen números decimales, porcentajes o “tantos de cuantos”; la asociación entre escrituras decimales, fraccionarias o periódicas puras y secciones de figuras geométricas y actividades de cálculo con fracciones, potencias y raíces. Parte de estas actividades se han presentado en un contexto extramatemático.

El apartado *La competencia numérica*: *la interpretación de la información* se basa en los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM (NCTM 2003), particularmente, en el dedicado a números y operaciones el cual gira en torno a los tres pilares del «desarrollo del sentido numérico»: la representación de los números, las relaciones existentes entre ellos y los conjuntos numéricos. Así, se recomienda que en la educación primaria los alumnos representen números utilizando materiales diversos puesto que facilitará que en la enseñanza secundaria se incremente el tipo de números que se presentan en la recta numérica y se favorezca la compresión de las relaciones existentes entre las distintas formas de representarlos. Se exponen, por otra parte, algunas de las recomendaciones generales de los estándares de la NCTM (2003) relativas a qué conocimientos de los distintos conjuntos numéricos se deben impulsar en la enseñanza secundaria y se proponen actividades para asociar un número a una expresión y determinar a qué conjunto numérico pertenecen, para operar con números enteros y fraccionarios y para realizar cálculos con fluidez y hacer estimaciones.

Con relación al Álgebra, se citan tres documentos (R. D. 1631/2006, Pisa 2006 y NCTM 2003) de los que se puede extraer que el álgebra es una herramienta que facilita la expresión del cambio y las regularidades existentes en todo tipo de situaciones y, consecuentemente, los alumnos deberán desarrollar las capacidades siguientes:

- *Comprender patrones, relaciones y funciones*: el alumno inicia su acercamiento al álgebra describiendo regularidades en secuencias de figuras geométricas en las que intervienen tanto su forma como sus colores.
- *Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos*: la noción de variable conviene introducirla como el indicativo de un número determinado. Más adelante, se establecerá la diferencia entre el uso de variables en una ecuación, una identidad y una fórmula, se hallarán expresiones equivalentes, se calculará con símbolos y se resolverán ecuaciones sencillas.

- *Elaborar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas*: se puede iniciar con el uso de objetos, dibujos y símbolos para modelizar situaciones relacionadas con las operaciones con números naturales y posteriormente utilizar los modelos para predecir o extraer conclusiones del contexto inicial.
- *Analizar el cambio en contextos diversos*: se trataría de estudiar la dependencia de las relaciones establecidas entre las variables, a partir de situaciones diversas.

En el tema dedicado a la Geometría (Romà Pujol 2011) se explicita que la historia de la matemática es el eje vertebrador de su enseñanza, la que deberá proponerse a partir de materiales diversos que los alumnos puedan manipular, con el fin de ir construyendo los conocimientos pretendidos y, siempre, en el ámbito de la resolución de problemas.

Asimismo, y particularmente con relación a la geometría, se propone el abandono de su enseñanza en bloques temáticos que abordan un solo objeto para ampliar su estudio estableciendo relaciones con otros temas y, así, romper el aislamiento en los que con frecuencia se encierran. Las líneas básicas que se proponen en este capítulo se apoyan en el trabajo del alumno, a partir de cuestiones que el profesor plantea y que en primera instancia implica el trabajo manipulativo con de materiales. Se trata de que sean los alumnos quienes propongan ideas, experimenten, hagan conjeturas, comprueben sus predicciones, en definitiva, sea el alumno el protagonista de su propio aprendizaje. En este sentido, la evaluación no debería fijarse, exclusivamente, en los resultados alcanzados por los alumnos, sino también en la evolución que se ha experimentado para llegar al resultado final.

La dirección por parte del profesor del proceso de estudio es básica, no solo en el planteamiento de las cuestiones que inician el estudio sino en las que podría plantear en el curso del mismo, sobre la base de las respuestas de los alumnos y sin perder de vista los objetivos por alcanzar e, incluso, otros que podrían surgir derivados del decurso del trabajo propuesto.

Por ejemplo, se propone la actividad siguiente:

> Resuelve los dos problemas que vienen a continuación y haz un comentario de los procesos seguidos para su resolución:
>
> - Hemos visto que el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se divisa un segmento dado bajo un ángulo recto es la circunferencia que tienen dicho

segmento por diámetro. ¿Desde qué puntos se divisa un segmento dado bajo un ángulo que mide medio recto?

- Una de las ideas comentadas ha llevado a ver que un paralelogramo inscrito en una circunferencia era un rectángulo. Pero ¿qué cuadriláteros se pueden inscribir en una circunferencia? (p. 124)

Puesto que, en los primeros niveles de la educación secundaria, la experimentación está en la base de un aprendizaje significativo, las actividades que se proponen a los alumnos pasan por los juegos de manipulación de objetos variados, desde dominós a fichas, desde piezas de plástico hasta construcciones por realizar a mano o con software informático, y aunque los juegos están sometidos a determinadas reglas carecen de un procedimientos adelantado por el profesor, con el fin de que los alumnos actúen y vivan en primera persona las experiencias que los materiales y las cuestiones planteadas provocan. Es el profesor quien solicitará que, en un momento apropiado, sean los alumnos los que traten de demostrar razonadamente los resultados alcanzados.

Los problemas basados en situaciones concretas pueden conducir a que los alumnos descubran diferentes objetos geométricos y algunas de sus propiedades. La manipulación con varillas de plástico permiten descubrir qué condiciones deben cumplir tres segmentos para que puedan formar un triángulo y esta relación se puede utilizar posteriormente, si fuera el caso, para consolidar otros resultados. Una idea recurrente es que no se debe olvidar de que se trata de facilitar que sea el estudiante el que descubre lo que se pretende que aprenda.

Asimismo, se ofrecen al profesor en formación actividades para que sea él quien experimente, conjeture y posteriormente demuestre. Una de estas actividades es la siguiente:

> Dibuja un triángulo cualquiera y sus mediatrices (recta que pasa por el punto medio de un lado y que es perpendicular al mismo lado). Estudia dónde se intersecan, ¿Cuál es la distancia del punto de intersección obtenido, llamado circuncentro del triángulo, a cada uno de sus vértices?
>
> Dibuja un triángulo cualquiera y sus bisectrices (recta que pasa por un vértice y que divide al ángulo en dos iguales). Estudia dónde se intersecan. ¿Cuál es la distancia del punto de intersección obtenido, llamado incentro del triángulo, a cada uno de sus lados?

Por otra parte, la incorporación de recursos informáticos en las aulas y para el trabajo de los alumnos no se puede obviar. Como ejemplo, se destaca su utilidad en el descubrimiento de invariantes en la clase de geometría y la posibilidad que ofrecen para la construcción de macros, lo que da la oportunidad al estudiante de construir su propio conocimiento.

Con relación a los poliedros, el uso de materiales está indicado para llegar a descubrir invariantes geométricos. Un ejemplo sería el siguiente: ¿qué poliedros mantienen invariante el cociente entre la cantidad de caras y la cantidad de aristas? Junto con la exploración de otros ejemplos se posibilitará caracterizar los poliedros regulares, *deltaedros* y *semiregulares* o *arquimedianos*. Otra cuestión posible a plantear sería: ¿todos los poliedros cumplen la relación $C - A + V = 2$?, dando lugar a una conjetura que habrá que poner a prueba con otras figuras no manipuladas o bien acudiendo a otras fuentes.

Con relación a estas propuestas para la enseñanza de las funciones, la aritmética, el álgebra y la geometría, que se acaban de sintetizar, nos parece oportuno comentar el hecho de que todas las propuestas consideran de fundamental importancia el conocimiento de la historia de las matemáticas como piedra angular para una enseñanza vertebradora de las mismas, dando a entender que las razones que justifican los aprendizajes que se proponen son las mismas razones que, en su día, provocaron la emergencia de los conocimientos. Asimismo, se constata la ausencia de cuestionamiento de los temas incluidos en el currículo, poniendo la atención en directrices sobre cómo se pueden abordar antes que en las razones que justificarían su presencia en el propio currículo.

4.4. Propuesta de la TAD de algunas cuestiones por estudiar en la materia Complementos de formación disciplinar de la especialidad de matemáticas

Desde la TAD, y como hemos indicado al principio de este capítulo, consideramos que la formación del profesorado no puede desvincularse del conjunto de cuestiones problemáticas que surgen en el quehacer docente y que no se reducen, en general, a simples «temas espinosos » o dificultades personales del profesor. El carácter problemático de las matemáticas por enseñar y las necesidades de nuevos desarrollos de las matemáticas para la enseñanza deben ser las guías y puntos de referencia de la formación. Para dar mayor concreción a este principio, muy alejado de la cultura pedagógica más extendida, describiremos brevemente en este apartado unas pocas cuestiones que surgen en los niveles de codeterminación didáctica correspondientes a las Áreas y los Sectores de la matemática escolar y que, postulamos, son cruciales para la profesión por lo que proponemos se estudien en la asignatura *Complementos de formación disciplinar* como parte integrante de la formación matemática para la enseñanza de las matemáticas.

En este apartado no haremos alusión al complejo problema de la organización didáctica del proceso de estudio de estas cuestiones (en el ámbito de la formación del profesorado) del que nos ocuparemos ampliamente en los capítulos III y IV de esta memoria. Es importante adelantar, sin embargo, que el estudio de cada una de ellas requiere diseñar un dispositivo que denominados *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) que, eventualmente, se sustenta en un *recorrido de estudio e investigación* (REI) experimentado previamente con los alumnos de Secundaria. Cada una de las cuestiones (o conjuntos de cuestiones) que proponemos a continuación hará el papel de *cuestión generatriz* del correspondiente REI-FP cuyos detalles se explican en los citados capítulos III y IV.

Empezaremos por enunciar la cuestión generatriz de un REI-FP, en torno a la *modelización funcional elemental*, cuyo diseño y experimentación se describe con todo detalle en el capítulo IV. El resto de cuestiones generatrices que proponemos se corresponden con investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de la TAD pero no serán tratadas en esta memoria.

A. Modelización funcional elemental

¿Cómo organizar la enseñanza de la *modelización funcional elemental* (MFE) en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y qué papel asignar a la proporcionalidad en dicha organización? ¿Qué características presenta actualmente en la ESO la organización matemática curricular en torno a la MFE? ¿Qué tipos de modelos funcionales aparecen? ¿Cómo se relacionan entre sí? ¿A qué cuestiones viene a responder la MFE en la ESO? ¿Por qué y para qué se introducen los modelos funcionales en la ESO? Esto es, ¿cuál es la *razón de ser oficial* que la matemática escolar (el currículo y los libros de texto) asigna a los modelos funcionales que aparecen en la ESO? ¿Qué papel desempeña la proporcionalidad con relación al conjunto de modelos funcionales elementales que aparecen en la ESO? (Francisco J. García 2005; Francisco J. García, Josep Gascón, Luisa Ruiz Higueras y Marianna Bosch 2006).

Aparte de la respuesta del sistema escolar, ¿qué otras propuestas didácticas alternativas existen (en los trabajos de innovación didáctica, en los artículos de investigación, en los materiales de formación del profesorado, etc.) para organizar la enseñanza de los modelos funcionales en la ESO?

B. Sistemas de numeración

¿Cómo diseñar y gestionar en Secundaria la enseñanza de los Sistemas de Numeración? ¿Cuáles son las formas de organizar actualmente la enseñanza de los SN en Secundaria? ¿Cuáles son las tareas matemáticas escolares cuya resolución requiere del uso explícito de las propiedades de los SN? Estas tareas y las cuestiones asociadas constituyen la razón de ser oficial que el sistema escolar asigna a los SN. ¿Sería posible asignar otra razón de ser a los SN a fin de articularlos con los otros bloques de la matemática por enseñar y dar un nuevo sentido a su estudio? ¿Qué papel desempeñan los SN en los diferentes bloques del currículum de Secundaria? ¿Qué funciones han jugado históricamente los SN en la actividad matemática y en el resto de actividades sociales? (Tomás Á. Sierra 2006, Tomás Á. Sierra, Marianna Bosch y Josep Gascón 2007)

C. El papel del álgebra elemental en la matemática escolar obligatoria

¿Cómo introducir el álgebra elemental en la ESO? ¿A partir de qué tipo de cuestiones? ¿El estudio del álgebra elemental puede proponerse a un nivel equivalente al estudio de los números o al de la geometría o, por el contrario, se trata de un ámbito de otra naturaleza? ¿Dónde situar la modelización algebraica del campo numérico o de la geometría del plano? ¿Es posible utilizar el álgebra elemental como herramienta de estudio de las relaciones funcionales? En particular, ¿cómo vincular la proporcionalidad (habitualmente encerrada en el bloque de los números y la medida) con el resto de relaciones funcionales entre magnitudes?

Muchas investigaciones han puesto de manifiesto un fenómeno didáctico que podemos denominar la *desalgebrización* (o el *carácter prealgebraico*) *de las matemáticas enseñadas* en Secundaria. Los aspectos más visibles de este fenómeno son, entre otros:

(a) La desintegración escolar de un corpus algebraico restringido.
(b) El empobrecimiento y aislamiento de las técnicas algebraicas escolares.

(c) La relación unilateral y unidireccional del álgebra escolar con el ámbito numérico.

Todo ello provoca que el álgebra escolar elemental sea considerada como si se tratara de mero *lenguaje aritmético generalizado* en el que, además de números, utiliza también «letras». ¿Qué consecuencias tiene este fenómeno en lo que hace referencia al tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo en Secundaria? ¿Cómo habría que cambiar los actuales dispositivos didácticos «espontáneos» para hacer posible una actividad matemática más algebrizada? (Pilar Bolea 2003; Pilar Bolea, Marianna Bosch y Josep Gascón 2001, 2004; Noemí Ruiz-Munzón 2010; Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón 2011; Noemí Ruiz-Munzón Yves Matheron, Marianna Bosch y Josep Gascón 2012).

D. Ampliaciones sucesivas del campo numérico

¿A qué cuestiones responden los números enteros? ¿Y los racionales? ¿Qué situaciones –matemáticas o extramatemáticas– pueden justificar la necesidad de ampliar sucesivamente el campo numérico de los naturales a los racionales? ¿Cuáles son los modelos más adecuados para introducir cada uno de los campos numéricos? Por ejemplo, ¿cuál es el modelo pertinente para introducir los números enteros negativos? ¿Y los racionales? ¿En qué forma se modifican las propiedades de los "números" en cada nueva ampliación? ¿Y las propiedades de las operaciones? ¿Cómo relacionar los racionales con los decimales limitados y con la medida de magnitudes continuas? ¿Es necesario introducir los números reales en la ESO? ¿Y en el Bachillerato? ¿Cuáles son los números reales que se manipulan efectivamente en la Enseñanza Secundaria? (Eva Cid y Pilar Bolea 2010; Eva Cid y Noemí Ruiz Munzón 2011).

E. Integración de las geometrías sintética y analítica

¿Se debe enseñar geometría en Secundaria? ¿Qué geometría? ¿La geometría sintética de construcción y determinación de figuras con regla y compás, la analítica con figuras o el álgebra lineal sin figuras (como proponía Dieudonné)? Actualmente se estudian, completamente desconectadas, la geometría sintética en la ESO y la analítica en el Bachillerato (y la Universidad). Sin embargo, si partimos de un tipo de problemas de *geometría sintética* como, por ejemplo, los problemas de construcción con regla y compás, es fácil mostrar que el desarrollo de las técnicas sintéticas clásicas provoca, junto a la progresiva ampliación del campo de problemas, la aparición –o, como mínimo, la necesidad– de las técnicas analíticas. ¿Cómo sería posible la articulación de la geometría sintética de la E.S.O. con la geometría analítica del Bachillerato y primeros ciclos universitarios? ¿Cómo mostrar que son precisamente las limitaciones de las *técnicas sintéticas* las que *dan sentido* a las *técnicas analíticas*, constituyéndose por lo tanto en sus *razones de ser*? Y, recíprocamente, ¿en qué situaciones será posible mostrar que para resolver determinados problemas geométricos las técnicas sintéticas son mucho más potentes que las analíticas? Incluso problemas que requieren la utilización de técnicas analíticas para ser resueltos con toda generalidad, necesitan de manera casi imprescindible la utilización previa de técnicas sintéticas a fin de diseñar la estrategia que se llevará a cabo posteriormente con las técnicas analíticas. En definitiva, ¿cómo poner de manifiesto la *complementariedad* entre ambos tipos de técnicas? (Gascón 2002).

F. Razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional

¿Cuáles son las cuestiones a las que debe responder el *cálculo diferencial elemental* (CDE) en el paso de la Secundaria a la Universidad? ¿Cómo se manifiesta el fenómeno general de rigidez y desarticulación de las organizaciones matemáticas escolares en el caso particular del CDE y la *modelización funcional* (MF) en el paso de Secundaria a la Universidad? ¿Cómo ha evolucionado (a lo largo del último siglo) el papel del CDE en el paso de la Secundaria a la Universidad? ¿Cuál es la razón de ser que el sistema educativo asigna actualmente al CDE en el paso de Secundaria a la Universidad? ¿Qué condiciones se requieren y, en particular, qué restricciones dificultan o impiden el desarrollo normal de la MF en el paso de Secundaria a la Universidad? ¿Qué papel podría jugar el CDE en el establecimiento de las citadas condiciones? ¿Qué infraestructuras matemáticas y didácticas se necesitarían para hacer viable un proceso didáctico con dichas características en el paso de Secundaria a la Universidad? ¿Qué papel podrían jugar las TIC en el diseño y puesta en práctica de dicha organización didáctica? (Cecilio Fonseca, Josep Gascón y Catarina Lucas 2014, Catarina Lucas Cecilio Fonseca Josep Gascón 2013).

Digamos para finalizar y como primera aproximación a la tesis que defendemos en esta memoria, que es precisamente el estudio de las cuestiones emergentes en estos niveles intermedios las que permiten integrar el *hacer matemáticas* (materializado en los niveles más específicos —de los temas y las cuestiones) con el *enseñar matemáticas* (que suele situarse en los niveles pedagógico y escolar) y que, por tanto, constituyen las potenciales *cuestiones generatrices* de las organizaciones matemáticas y didácticas que deben reconstruirse en el proceso de formación de los profesores de matemáticas.

Pero el problema de la formación de los profesores de matemáticas no puede resolverse únicamente diseñando y poniendo en marcha una dialéctica de cuestiones y respuestas (que, por lo demás, es esencial) sino que, como todo problema didáctico, contiene una dimensión más compleja que denominamos *dimensión ecológica*: ¿Qué sistema de dichas organizaciones matemáticas y didácticas podemos hacer vivir en la institución de Formación del Profesorado de matemáticas? ¿Cuáles son las condiciones que harán posible que dichas organizaciones se generen, vivan y se desarrollen adecuadamente en la institución citada?

> […] la didactique se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des groupes humains. (Chevallard, 2005)

El problema de la formación de los profesores de matemáticas no es, por tanto, ni un problema «administrativo» ni un problema «pedagógico», es un importante problema de investigación didáctica. Además, considerado como problema ecológico, el problema de la formación del profesorado de matemáticas se refiere simultáneamente a las organizaciones *matemáticas* y a las *didácticas* o, mejor, dada la integración e inseparabilidad que postula la didáctica entre lo matemático y lo didáctico, se refiere a las organizaciones matemático-didácticas.

Es por tanto la *didáctica de las matemáticas* la ciencia que debe proporcionar tanto el discurso *tecnológico* como, en última instancia, la *teoría* que permita justificar, interpretar y hacer evolucionar la práctica didáctico-matemática que constituye el núcleo la formación de los profesores de matemáticas (Artaud, 2007).

CAPÍTULO II

INVESTIGACIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Ya hemos indicado que nuestra investigación se centra en el papel de la formación *matemática para la enseñanza de las matemáticas*, dejando de lado el problema mucho más amplio de la formación integral del profesorado de matemáticas, que puede incluir otras áreas de conocimiento, así como el contacto con «el terreno» mediante las prácticas docentes. De todos modos, y solo considerando el componente *matemático* de esta formación, no podemos dejar de subrayar que éste debe integrarse en una formación matemático-didáctica más amplia que no se reduzca a una mera «práctica», como se interpreta a veces cuando se habla de la «práctica docente», sino que debe también incluir un *logos didáctico*, esto es, un discurso justificativo y explicativo de la citada práctica.

En este capítulo describiremos el papel que ha ocupado la problemática del profesor y, particularmente, el problema de la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria en la investigación didáctica. Hablaremos de la *problemática del profesorado* para referirnos al conjunto de problemas, cuestiones y dificultades con que se encuentran los profesores de Secundaria durante el ejercicio de su profesión docente. Debemos entenderla aquí como una problemática colectiva, que concierne a toda la profesión y no a los profesores por sus características individuales. Utilizaremos inicialmente las expresiones «formación del profesorado», «desarrollo profesional», «práctica docente», etc. según su uso más habitual en la enseñanza y adaptándonos, en cada caso, a los trabajos que comentaremos.

Para situar el enfoque que adoptamos en nuestra investigación, utilizaremos un esquema propuesto por Gascón (1998) que permite llevar a cabo una *reconstrucción racional* (Lakatos 1971) de la evolución de una de las líneas de desarrollo de la didáctica de las matemáticas, partiendo de la *problemática docente* del profesor de matemáticas. Esta reconstrucción establece esencialmente dos ampliaciones sucesivas del objeto de estudio de esta disciplina que dan origen, respectivamente, a dos programas de investigación en didáctica de las matemáticas que, para simplificar, denominaremos como *enfoque cognitivo* y *enfoque epistemológico* (Gascón 1999b).

Como veremos, el «enfoque cognitivo» en didáctica de las matemáticas toma como objeto primario de investigación la construcción y evolución de los conocimientos de los alumnos —y, secundariamente, de los profesores—, mientras que el «enfoque epistemológico» se centra inicialmente en cuestionar y modelizar los contenidos matemáticos objetos de enseñanza desde una perspectiva institucional. Aunque esta distinción constituye una simplificación de la complejidad de enfoques en didáctica, tiene la virtud de clarificar los supuestos implícitos de las distintas investigaciones y de permitir agruparlas por sus similitudes y proximidades.

En este capítulo nos ocuparemos esencialmente de la evolución de la problemática del profesor en las investigaciones desarrolladas dentro del enfoque cognitivo, describiendo el mecanismo que utiliza dicho enfoque para integrar lo «pedagógico» y lo «matemático». Destacaremos, en primer lugar, la forma de ampliar lo «cognitivo» mediante la noción de *conocimiento pedagógico del contenido* (*pedagogical content knowledge,* PCK) de Lee Shulman (1987, 1988) que desemboca en los trabajos sobre el *conocimiento matemático para la enseñanza* (*mathematical knowledge for teaching*, MKT) iniciados por Deborah Ball y sus colaboradores (Deborah L. Ball y Hyman Bass 2009, Deborah L Ball, Mark H. Thames y Geoffrey Phelps 2008) y que han dado lugar al ámbito de investigación que se conoce como «*mathematics teacher education*».

En la segunda parte del capítulo nos ocuparemos de algunos de los desarrollos recientes sobre el MKT, de las investigaciones que ponen el acento en el carácter profesional del profesorado y las correspondientes necesidades de formación profesional del profesor de matemáticas y en las investigaciones que enfatizan la adquisición de las competencias profesionales del profesorado.

El capítulo finaliza explicando que, a diferencia del enfoque más puramente cognitivo, el enfoque epistemológico propone una integración de lo pedagógico y lo matemático ampliando radicalmente lo que se consideraba como *matemático* en la epistemología clásica. Se muestra así en qué forma el enfoque epistemológico cambia la problemática cognitiva centrada en caracterizar los conocimientos y las concepciones del profesor y la incidencia de éstos sobre las prácticas docentes y sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, por el problema más comprensivo (y de otra naturaleza) de caracterizar las organizaciones matemáticas y didácticas de las instituciones escolares y analizar la *ecología institucional* de las mismas, esto es, las condiciones que hacen posible la vida institucional de las citadas organizaciones y, en particular, las restricciones que dificultan su génesis y desarrollo.

1. La problemática del profesor en las investigaciones del enfoque cognitivo¡Error! Marcador no definido.

Siguiendo a Gascón (1998), el *enfoque cognitivo* en didáctica de las matemáticas engloba una gran variedad de trabajos que toman como objeto primario de investigación el conocimiento matemático del alumno y su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje. En un primer momento los problemas de investigación de este enfoque utilizan una teoría cognitiva del aprendizaje, más o menos implícita, que es coherente con un modelo epistemológico de las matemáticas consideradas globalmente como un sistema de conceptos, y estaban muy centrados en el aprendizaje del alumno. En términos generales, el tipo de cuestiones que se abordan en este enfoque se pueden formular de la manera siguiente:

- ¿Cuáles son las concepciones espontáneas de los alumnos respecto de los conceptos matemáticos que se enseñan en la escuela (por ejemplo: «magnitud», «número decimal», «variable», «ecuación» o «límite de función»)?
- ¿De qué manera influyen dichas concepciones sobre las dificultades y errores que cometen los alumnos cuando realizan tareas en las que intervienen dichos conceptos?
- ¿Cómo podrían utilizarse las semejanzas y diferencias entre las estructuras conceptuales de los alumnos y las correspondientes estructuras de los sistemas de conceptos matemáticos, a fin de potenciar el aprendizaje significativo?
- ¿Cómo deben ser modificadas las prácticas tradicionales de enseñanza para ayudar a los estudiantes a construir (o adquirir) los conceptos matemáticos?

Después de esta primera etapa centrada en el aprendizaje del alumno, el enfoque cognitivo amplió la problemática didáctica introduciendo cuestiones relativas al profesor. Aunque desvió su atención hacia la actividad docente y tomó el pensamiento del profesor como nuevo objeto primario de investigación, siguió considerando el aprendizaje del alumno como lo que, en última instancia, debe ser explicado por la investigación.

Podría decirse que en la primera etapa se buscaban las variables explicativas del aprendizaje de los alumnos en el propio alumno: concepciones de los alumnos; conocimientos previos; habilidades intelectuales y actitudes. En la segunda etapa, que es la que nos interesa principalmente en esta memoria, se amplía el rango de variables explicativas poniendo el énfasis en las que dependen del profesor: conocimientos, creencias y actitudes del profesor.

En este ámbito, los trabajos sobre las *prácticas docentes del profesor de matemáticas* (*mathematics teaching practices*) tienen una larga historia. Mary S. Koehler y Douglas G Grouws (1992) hacen una revisión de este tipo de investigaciones clasificándolas según su nivel de complejidad y encuentran que, después de una primera fase en la que se enfatizaban las características del profesor por encima de las de la enseñanza, todos los estudios asumen que el comportamiento del profesor y el de los alumnos se influyen mutuamente en el aula, aunque atribuyen funciones asimétricas a las variables cognitivas según que provengan del uno o de los otros. Así, mientras las variables relativas a las características del profesor se toman como *variables independientes*, las del alumno (especialmente su aprendizaje en términos de rendimiento) se toman como *variables dependientes*.

Este esquema fue aumentando progresivamente en complejidad y culminó a finales de los años 80 y principios de los años 90 con la elaboración de un modelo de investigación en el que se toman como variables independientes o explicativas —las que supuestamente determinan el comportamiento del profesor en el aula—, las siguientes:

(a) El *conocimiento del profesor* que, a su vez, tiene tres componentes: el conocimiento del *contenido matemático*; el conocimiento *pedagógico* de los métodos de enseñanza; y el conocimiento de los mecanismos mediante los cuales los alumnos *entienden* y *aprenden* un contenido particular.

(b) Las *creencias del profesor* articuladas en dos componentes: creencias respecto a qué son las *matemáticas*; y creencias respecto al proceso de *enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*.

(c) Las *actitudes del profesor*.

En este modelo de investigación, la variable última por explicar sigue siendo el rendimiento (o el aprendizaje) de los alumnos que, se supone, está directamente determinada por el comportamiento del alumno en el aula. Sobre éste actúan, además del comportamiento del profesor en el aula —determinado, a su vez, por las tres variables citadas— las características personales del propio alumno y sus *actitudes* hacia las matemáticas y hacia sí mismo.

A título de ilustración, mostraremos una de las variantes de este modelo genérico de investigación utilizada en el proyecto *Cognitively Guided Instruction* (Elizabeth Fennema, Tomas P. Carpenter y. Penelope L. Peterson 1989), y que se esquematiza en la Figura 1:

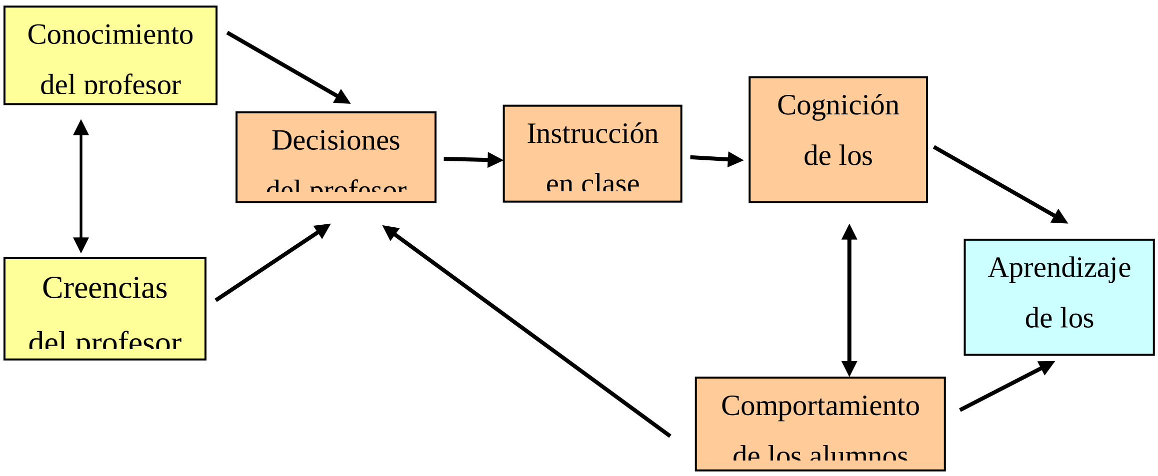


Figura 1. Un modelo para el desarrollo del currículo
Adaptado de Fennema, Carpenter y Peterson (1989, p. 180)

Es interesante observar que este modelo de investigación ha evolucionado, en algunos casos, hacia modelos centrados esencialmente en caracterizar y predecir las decisiones y las acciones que lleva a cabo el profesor de matemáticas en el aula (en lugar de intentar explicar el aprendizaje de los alumnos) hasta el punto que se observa un cierto deslizamiento desde el intento de elaborar modelos del *proceso de enseñanza* (*models of the teaching process*), hacia una elaboración efectiva de un *modelo del profesor* (*model of the teacher*). Como indica Alan Schoenfeld:

> When the modeling process is done, the model of a particular teacher will contain representations of the goals, beliefs, and knowledge attributed to the teacher, a decision-making mechanisms that suggests how, in any set of circumstances, those goals, beliefs,

> and knowledge will shape the teacher's decision regarding what to do "next". (Schoenfeld 2000, p. 249)

1.1. Integración de lo «pedagógico» y lo «matemático» en el enfoque cognitivo¡Error! Marcador no definido.

La mayoría de enfoques en didáctica de las matemáticas proponen, en mayor o menor medida, una integración de lo matemático y lo pedagógico, entendido éste como lo relativo a la enseñanza y aprendizaje de un contenido cualquiera. En el ámbito del enfoque cognitivo, una manera de realizar esta integración ha consistido en priorizar el estudio de las llamadas « concepciones » de los sujetos de la institución escolar. En una primera etapa, como ya hemos indicado, las investigaciones se centraron en el estudio de las concepciones de los alumnos. En una segunda etapa, que es la que nos interesa aquí, la estrategia del enfoque cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático prioriza el estudio de la enseñanza de las matemáticas y centra su atención en el análisis de los conocimientos y las concepciones del profesor. Veremos que, con diferentes variantes, es una estrategia paralela a la que se llevó a cabo con las concepciones de los alumnos. Según Paul Ernest (1988, citado por Thompson 1992, p. 131):

> The research literature on mathematics teachers beliefs, although scant, indicates that teachers' approaches to mathematics teaching depend fundamentally on their systems of beliefs, in particular on their conceptions of the nature and meaning of mathematics, and on their mental models of teaching and learning mathematics.

La nueva problemática didáctica girará, por tanto, en torno a las *concepciones de los profesores*: se preguntará, por ejemplo, cuáles son las concepciones (espontáneas) de los profesores sobre la «demostración», la «geometría» o las «matemáticas» globalmente consideradas, además de preguntarse por las concepciones espontáneas de los alumnos respecto de estos mismos conceptos. Esta nueva problemática también contendrá cuestiones relativas a las concepciones de los profesores respecto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se postula, en efecto, que:

> What a teacher considers to be desirable goals of the mathematics program, his o her own role in teaching, the students' role, appropriate classroom activities, desirable instructional approaches and emphases, legitimate mathematical procedures, and acceptable outcomes of instruction are all part of the teacher's conception of mathematics teaching" (Thompson 1992, p. 135).

Así, si en el caso de los alumnos se intentaban relacionar sus concepciones con las dificultades y errores que éstos cometían cuando realizaban tareas en las que aparecían los conceptos en cuestión, se propone ahora relacionar los diversos tipos de concepciones de los profesores con determinados « modelos de enseñanza de las matemáticas». El objetivo, en última instancia, es ver hasta qué punto, y en qué medida, las prácticas docentes de un profesor son consecuencia de sus concepciones. Del mismo modo, si en el caso de las concepciones de los alumnos se planteaba la cuestión de cómo podrían utilizarse las semejanzas y diferencias entre sus estructuras conceptuales —las de los alumnos— y las correspondientes estructuras de los sistemas de conceptos matemáticos, con el objetivo de potenciar un mejor aprendizaje, paralelamente en el caso de las concepciones de los profesores, se plantean cuestiones relativas a cómo utilizar la dependencia entre determinadas concepciones filosóficas de la naturaleza de las matemáticas (elaboradas por la epistemología clásica de las matemáticas) y ciertos modelos de enseñanza de las matemáticas, para promover cambios en las prácticas docentes de los profesores mediante cambios potenciales en sus concepciones. Haciendo una simplificación inevitable, podemos resumir esta problemática en los términos siguientes:

¿Cómo caracterizar los conocimientos y las concepciones de un profesor concreto y determinar sus relaciones con las prácticas docentes que lleva a cabo? ¿En qué medida los «puntos de vista respecto a lo que son las matemáticas y a cómo se deben enseñar» determinan las prácticas docentes que el profesor realiza efectivamente en el aula? ¿Cómo inciden, en definitiva, los conocimientos y las concepciones del profesor sobre el aprendizaje matemático de los alumnos?

Simplificando mucho, podríamos decir que la estrategia del enfoque cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático consiste en considerar, inicialmente, los fenómenos didácticos como fenómenos esencialmente cognitivos en el sentido de la psicología cognitiva. Esta identificación, que queda más o menos implícita, se refleja en el interés por modelizar la estructura de los *conocimientos* (Elizabeth Fennema y Megan Loef 1992) y de las *concepciones de un profesor* concreto (Alba G. Thompson, 1992). A continuación, se intenta relacionar esa estructura con las prácticas docentes que el profesor realiza efectivamente en el aula, lo que añade una cierta dimensión social a los fenómenos didácticos; y por último, aparece la necesidad de considerar la especificidad del aprendizaje matemático, lo que proporciona una nueva dimensión a dichos fenómenos. Como indica Gascón (2003):

> Tenemos, en resumen, que en el Programa Cognitivo la integración de lo pedagógico y lo matemático se produce cuestionando la presunta transparencia así como la presunta suficiencia de "lo pedagógico" (entendido en el sentido clásico) y modelizándolo de tal manera que comporta, de hecho, una *ampliación* de lo "pedagógico-cognitivo" para incluir componentes "matemáticos". (p. 684).

1.2. Pedagogical Content Knowledge (PCK)

La búsqueda de medidas encaminadas a mejorar la formación del profesorado y el ejercicio de la profesión docente han sido y siguen siendo objeto permanente de investigación desde diferentes disciplinas y ha dado lugar a diversas teorías y enfoques que tratan de delimitar dicha problemática y proponer soluciones. Una de las propuestas más influyentes surgió en los años 80 del siglo pasado, con la noción de «conocimiento pedagógico del contenido» (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) introducida por el psicólogo americano Lee S. Shulman (1986, 1987). El PCK se interpreta como una *amalgama de conocimientos sobre la materia y conocimientos de pedagogía* que, se supone, constituyen la forma propia y exclusiva de comprensión profesional de los profesores. Se afirma que el PCK permite organizar los temas, representarlos y adaptarlos a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, así como exponerlos en la enseñanza de la manera más eficaz.

En la próxima sección veremos cómo, en esta misma línea, la investigadora americana Deborah L. Ball toma en consideración, específicamente, el conocimiento matemático desde el punto de vista de la enseñanza, incluyendo el conocimiento de la estructura de la materia, las normas que rigen su funcionamiento y las relaciones entre sus contenidos. De forma similar al PCK, la nueva noción de «conocimiento matemático para la enseñanza» (*mathematical knowledge for teaching*, MKT) constituye una herramienta analítica para el estudio del conocimiento matemático-didáctico de los profesores más que un modelo de tal conocimiento en sí mismo (Ball, Thames y Phelps 2008). La tesis central de estas aportaciones consiste en subrayar la existencia de un tipo especial de conocimiento del contenido (y, en particular, del contenido matemático) que es específico de la profesión de profesor. Se trata de una tesis que se ha construido a partir del análisis empírico de las prácticas docentes del profesorado y que ha tenido y sigue teniendo una gran influencia en las investigaciones educativas.

La línea de investigación inaugurada por Shulman en 1987 surge como respuesta a la pregunta: ¿Qué conocimiento es esencial para el profesor? La noción clave para responder a esta pregunta es la de *conocimiento pedagógico del contenido* (*pedagogical content knowledge*, PCK). Esta noción surge de la constatación repetida de que ni el conocimiento del *contenido matemático* es una garantía suficiente para que el profesor enseñe dicho contenido de una manera eficaz, ni el *conocimiento pedagógico* que pueda tener el profesor de los métodos de enseñanza, cuando este conocimiento es independiente de la disciplina a enseñar, mejora las cosas significativamente. El *conocimiento pedagógico del contenido* incluye, así, aquellos conocimientos del profesor relativos al aprendizaje de los estudiantes de un contenido específico como, por ejemplo, el conocimiento de las dificultades típicas de los estudiantes en cada tema concreto y la manera de preverlas y remediarlas. De esta forma se amplía la noción de *conocimiento pedagógico* incluyendo componentes matemáticos. Ésta sería la forma como el programa cognitivo integra lo pedagógico y lo matemático. Según Alan Schoenfeld (2000) esta idea constituye el origen de un nuevo programa de investigación en el que ya se ha llevado a cabo un importante volumen de trabajo y que, sobre todo, plantea cuestiones muy interesantes para futuras investigaciones:

> The idea of the pedagogical content knowledge has been elaborated in numerous studies (e. g., Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Grossman, 1990; Ma, 1999; Sherin, 1996; Stein, Baxter & Leinhart, 1990). Such studies indicate ways in which teachers' knowledge shapes what the teachers are able to do in the classroom at times constraining their options, at times providing the support-structure for a wide range of activities. But there are many open questions as one considers the nature of teachers' knowledge. What forms does such knowledge take? How is it organized? How is it accessed? A comprehensive model of teaching needs to address such issues. (p. 247)

Debido a la enorme influencia que ha tenido el trabajo de Shulman sobre las investigaciones relativas a la formación del profesorado a lo largo de los últimos 25 años, sintetizaremos sus principales aportaciones tal como aparecen en Shulman (1987), donde expone lo que considera el «conocimiento base para la enseñanza» —*the knowledge base of teaching*— en el afán de dar una respuesta a la pregunta acerca de la base intelectual, práctica y normativa para la profesionalización de la docencia.

¿Cuáles son las fuentes del *conocimiento base para la enseñanza* y en qué términos se pueden conceptualizar estas fuentes? Para empezar a dar respuesta a estas cuestiones, Shulman y sus colaboradores observan, según sus propias palabras, cómo se desarrollan los conocimientos de pedagogía y del contenido de las materias en los jóvenes profesores, desde que son estudiantes en los programas de formación del profesorado hasta que se transforman en profesores noveles. Los resultados de sus propias investigaciones y las de otros colegas (David C. Berliner 1986;Gaca Leinhardt y James G. Greeno 1986) le llevaron a la identificación de las fuentes del *conocimiento base para la enseñanza* al tiempo que sugerían esquemas generales de este conocimiento. La observación de cómo maestros experimentados enseñaban «la materia» que planteaba dificultades a los profesores novatos sirvió para centrar la atención en los tipos de conocimientos y destrezas necesarios para enseñar bien. Por otra parte, la atención en la enseñanza de temas específicos —Huckleberry Finn, las ecuaciones de segundo grado, el subcontinente indio, la fotosíntesis— fue reveladora de la manera en que determinados tipos de conocimientos de la materia y ciertas estrategias didácticas interactuaban en la mente de los profesores. Como resultado de todas estas investigaciones, Shulman establece las 7 categorías siguientes del *conocimiento base para la enseñanza*:

– *conocimiento del contenido*, considerado como la formación estándar del profesor en su especialidad y medida en el nivel de titulación;

– *conocimiento pedagógico general*, atendiendo especialmente aquellos principios y estrategias de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;

– *conocimiento del currículo*, con especial dominio de los materiales y los programas que sirven como «herramientas para el oficio» del docente;

– *conocimiento pedagógico del contenido*, entendido como esa «amalgama especial» entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los profesores, su propia forma de comprensión profesional;

– *conocimiento de los alumnos* y de sus características;

– *conocimiento de los contextos educativos*, que abarca desde el funcionamiento del grupo clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas;

– conocimiento de *los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos*. Los profesores deben basar sus concepciones sobre las finalidades posibles y deseables de la educación en las obras que, desde Platón hasta Dewey, Neill y Skinner expresan sus ideas sobre los buenos sistemas educativos y, en general, en las obras de índole filosófica, crítica y empírica que pueden informar los objetivos, las visiones y los sueños de los profesores.

Entre estas categorías, el *conocimiento pedagógico del contenido* (*pedagogical content knowledge*, PCK) adquiere particular interés porque identifica los cuerpos de conocimientos propios para la enseñanza. Representa la mezcla entre conocimientos pedagógicos y conocimientos sobre la materia y permite comprender cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. El conocimiento pedagógico del contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del profesor.

Durante años, Shulman y sus colaboradores han realizado observaciones y análisis de los comportamientos de numerosos profesores cuando enseñan. La organización de los datos y su interpretación les ha permitido inferir, a partir de la práctica, principios que pueden servir como guías útiles para su implementación. Se trata, también, de reconocer las características específicas relativas a las estrategias pedagógicas según la materia en cuestión. Como resultado de sus observaciones, estos autores coligen que no se puede evaluar adecuadamente al profesorado por medio de la observación de su actuación docente si no se tiene en cuenta la materia que se está enseñando. Propugnan que los programas de formación del profesorado no deben restringir su actividad a la didáctica general y la supervisión de las prácticas, ya que no son ámbitos libres de contenidos; consideran que el énfasis en el conocimiento pedagógico de la materia que se enseña debería impregnar todo el currículo de la formación de profesores.

2. El conocimiento para la enseñanza como ámbito de investigación

A partir de las investigaciones realizadas por Shulman se ha puesto en evidencia que no basta con el conocimiento del contenido para enseñar de manera eficaz, el problema está en cómo hay que saber este contenido y qué otros conocimientos deberían tener los profesores. El énfasis hay que ponerlo en el uso del conocimiento en y para la enseñanza, y no tanto en la actuación concreta del profesor en el aula.

2.1 Mathematical Knowledge for teaching (MKT)

Los trabajos de Ball, Thames y Phelps (2008) se basan en las citadas investigaciones de Shulman centrándose en «aquello que los profesores tienen que saber y poder hacer para llevar a cabo de una manera eficiente el trabajo de enseñar matemáticas» (p. 397). Plantean así la necesidad de responder, en primera instancia, a la pregunta:

> What fundamental activities are demanded by the broad aims of developing a classroom in which mathematics is treated with integrity, students' ideas are taken seriously, and mathematical work is a collective as well as an individual endeavour? (Ibíd. p. 396)

La noción fundamental que introducen Ball, Thames y Phelps (2008) es la de *conocimiento matemático para la enseñanza* (*mathematical knowledge for teaching*, MKT). Se interpreta como los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza de las matemáticas ya que, según estos autores:

> Teaching involves showing students how to solve problems, answering students' questions, and checking students' work, it demands an understanding of the content of the school curriculum. (Ibíd. p. 396)

Sus investigaciones se apoyan en el estudio de casos concretos y también en estudios longitudinales realizados en las aulas: videos de clases, planes de estudio, apuntes de profesores y trabajos de estudiantes. Se trata de coordinar los puntos de vista matemático y pedagógico a partir del análisis detallado de los registros de estas prácticas, con el objetivo de llegar a desarrollar una teoría basada en la práctica del conocimiento matemático conforme se va utilizando en la enseñanza. El análisis cualitativo que llevan a cabo está guiado por las dos cuestiones siguientes:

> 1. What are the recurrent tasks and problems of teaching mathematics? What do teachers do as they teach mathematics?
> 2. What mathematical knowledge, skills, and sensibilities are required to manage these tasks? (Ibíd. p. 396).

Por ejemplo, el profesor tiene que saber por qué se producen los errores de los alumnos, cuál es la fuente de estos errores y la manera de subsanarlos «con fluidez». Estos conocimientos, según estos autores, marcan una diferencia con las demás profesiones. Estiman que dicha diferencia se manifiesta, por ejemplo, en que los investigadores han de revisar sus propios errores y no los de los demás, mientras que el profesor no sólo debe revisar los errores de los estudiantes sino que también debe analizar respuestas inusuales de los alumnos y proporcionar soluciones acertadas, lo que es fundamental en el trabajo de la enseñanza.

En el análisis que hacen de las tareas de enseñanza, Ball, Thames y Phelps (2008) han concluido que muchas de ellas requieren conocimientos matemáticos aparte de los conocimientos acerca de los estudiantes o de la enseñanza. Por ejemplo, decidir si un método funciona para el caso general, seleccionar una representación matemática adecuada o determinar la validez de un argumento matemático, requiere conocimiento matemático, antes que conocimiento acerca de los estudiantes o de la enseñanza lo que, por otra parte, no se aprende en los cursos universitarios de matemáticas. En resumen, los autores ponen de manifiesto que existen conocimientos sobre la materia que no forman parte ni del conocimiento matemático oficial ni del pedagógico y que, por lo tanto, hay que identificar y organizar adecuadamente para incluirlos en los cursos de formación para profesores.

Desde un punto de vista metodológico y como complemento a los análisis cualitativos de la enseñanza, estos autores desarrollaron y validaron encuestas sobre los conocimientos matemáticos para la enseñanza. Estas encuestas se pasaron a grandes muestras de profesores y los resultados obtenidos proporcionaron una base empírica para contrastar las hipótesis sobre la estructura del conocimiento matemático para la enseñanza a la vez que ayudaron a refinar las categorías correspondientes. En definitiva, los análisis realizado aportaron evidencia de que el conocimiento matemático necesario para la enseñanza es multidimensional (Hill et al. 2004).

En este sentido, y como resultado de los análisis descritos, para materializar el nuevo mapa del MKT, Ball, Thames y Phelps (2008) establecen cuatro dominios:

(1) El *conocimiento común del contenido* (*common content knowledge*, CCK) que se utiliza en otros ámbitos distintos del de la enseñanza. Por ejemplo, los profesores deben saber hacer el trabajo que exigen a sus alumnos.

(2) El *conocimiento especializado del contenido* (*specialized content knowledge*, SCK) que se requiere exclusivamente para la enseñanza. Este conocimiento se necesita, por ejemplo, para generalizar un procedimiento inusual o buscar patrones de errores en las respuestas de los alumnos, así como saber qué objetos elegir a la hora de representar situaciones matemáticas con eficacia. Para hacer este trabajo, se precisa una especie de «descompresión» de las matemáticas que no se necesita en otros ámbitos.

(3) El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (*knowledge of content and students*, KCS) combina conocimientos acerca de los estudiantes y de las matemáticas. Los profesores tienen que anticipar qué es lo que los estudiantes van a encontrar fácil o difícil, qué será motivador para ellos, qué será interesante, etc. Deben, asimismo, poder interpretar lo que los estudiantes dicen, ayudarlos en la expresión de sus pensamientos emergentes, conocer las concepciones y los errores más comunes, etc.

(4) El *conocimiento del contenido y la enseñanza* (*knowledge of content and teaching*, KCT) combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento de las matemáticas. Los profesores secuencian un contenido particular y eligen qué ejemplos presentar para ayudar a los estudiantes a profundizar mejor en el contenido. Un ejemplo sería conocer diferentes modelos del algoritmo de la resta válidos para su enseñanza en un nivel educativo concreto y saber implementarlos con eficacia.

En relación con las categorías del mapa de Shulman, los puntos (3) y (4) coinciden con las dos dimensiones centrales del *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK), pero el punto (2) aparece como un conocimiento específico esencial que no se entrelaza con el PCK. Además, Ball y sus colaboradores postulan la necesidad de considerar otro tipo de conocimiento del contenido: el *conocimiento matemático en el horizonte* (*horizon knowledge of mathematics*, HKC). Se trata de un tipo de visión periférica que no se exterioriza en la enseñanza pero que orienta y dirige la práctica docente (Ball y Bass 2009). Del mismo modo aparece también lo que se considera *conocimiento del currículo* (Figura 1).

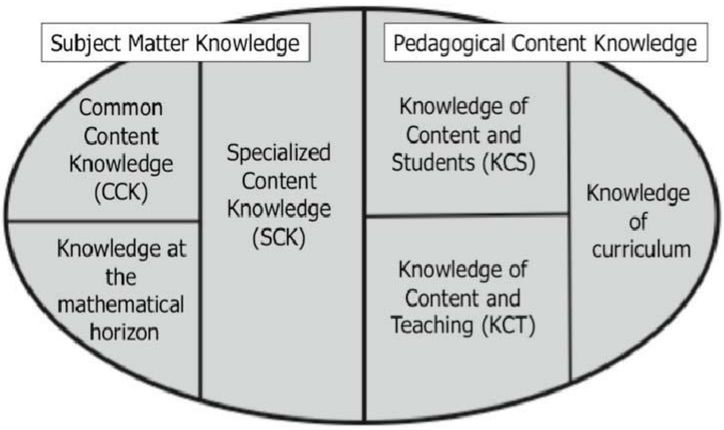


Figura 1. Mapa del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). Ball & Bass (2009)

En definitiva y según sus propios autores, la principal aportación de este enfoque consiste en proponer la existencia de un conocimiento matemático que no se necesita normalmente para fines distintos de la enseñanza y que, por tanto, se puede considerar como específico de la profesión de profesor, es el denominado *conocimiento especializado del contenido* (SCK). Se trata de un conocimiento caracterizado por ser explícito y consciente más allá del conocimiento implícito o tácito. Entre las tareas matemáticas habituales e incluso rutinarias que llevan a cabo los profesores y en las que se manifiesta este tipo de conocimiento, Ball, Thames y Phelps (2008) destacan las siguientes:

(a) presentar los conceptos matemáticos;

(b) responder a los estudiantes mediante preguntas;

(c) encontrar un ejemplo para tratar una cuestión matemática específica;

(d) seleccionar una representación matemática adecuada;

(e) conectar los temas de los diferentes cursos académicos;

(f) explicar los objetivos matemáticos a los padres;

(g) evaluar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto;

(h) graduar la dificultad de las tareas;

(i) determinar la validez de un argumento matemático;

(j) elegir definiciones adecuadas;

(k) utilizar la notación matemática y el lenguaje natural de manera crítica;

(l) reconocer equivalencias entre dos expresiones.

Para ilustrar lo que distingue el conocimiento *especializado* del contenido del conocimiento *puro* del contenido, Ball y Bass (2009, p. 3) toman el ejemplo de la multiplicación de números enteros y las producciones de tres alumnos (Figura 2).

$$
\begin{array}{r}
49 \\
\times\, 25 \\
\hline
405 \\
108 \\
\hline
1485
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
49 \\
\times\, 25 \\
\hline
225 \\
100 \\
\hline
325
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
49 \\
\times\, 25 \\
\hline
1250 \\
25 \\
\hline
1275
\end{array}
$$

Figura 2. Producciones de tres alumnos en una multiplicación

Llegar a identificar las causas que han originado los errores en los resultados es un conocimiento exigible al profesorado de matemáticas puesto que, a juicio de estos investigadores, facilitará una manera mejor de intervenir para evitar su reproducción. Es tarea del profesor averiguar y poder dar una explicación de cada uno de los pasos que el alumno ha ejecutado.

Así, en el primer ejemplo, la hipótesis plausible es que el alumno haya iniciado el algoritmo «usual» alterando el orden de «la llevada»: al multiplicar 5 por 49, ha escrito 5, la cifra de las unidades y ha sumado el 4, cifra de las decenas a la cifra de las decenas de 49, lo que da 8, cuyo producto por 5 es 40. Esta interpretación concuerda con el resultado 108 de multiplicar 2 por 49 siguiendo la misma pauta.

Ball y Bass (2009) afirman que este tipo de análisis es una habilidad de la que carecen muchos profesores a pesar de ser un requisito indispensable para poder determinar las causas de estos errores. Para dar respuesta a esta tarea, proponen bucear en las diferentes maneras en que los estudiantes han aprendido a realizar cálculos y tratar de identificar fragmentos de estos algoritmos que se hayan podido deslizar en los nuevos cálculos. Los profesores no solo deberían estar en condiciones de determinar los procedimientos erróneos sino también los procedimientos correctos pero inusuales. Ball, Thames y Phelps (2008) se sirven de las siguientes sustracciones, a título de ejemplo, para poner de manifiesto lo que los profesores deberían saber: no solamente explicar cómo se realizan los distintos pasos sino su generalización posible más allá de los casos concretos (Figura 3).

$$
\begin{array}{r}
307 \\
-168 \\
\hline
-1 \\
-60 \\
200 \\
\hline
139
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
307 \\
-168 \\
\hline
2 \\
30 \\
107 \\
\hline
1\,39
\end{array}
$$

Figura 3. Dos técnicas para realizar sustracciones

Así, en el primer caso, el – 1 sale de la diferencia entre las cifras mayor y menor de las unidades respectivas añadiendo el signo $-$ porque la cifra del sustraendo es mayor que la del minuendo; -60 es el equivalente a lo anterior con relación a las cifras de las decenas, al igual que 200. El resultado final se obtiene restando 61 de 200. En el segundo caso, se escriben los resultados parciales de completar el sustraendo a la decena y centena superiores, lo que permite completar 168 a 200 (añadiendo 2 y 30), y se añaden finalmente las 107 unidades que permiten llegar a 307.

Con estos ejemplos los autores especifican en qué sentido el *conocimiento especializado del contenido* va más allá del *conocimiento común.* Enfatizan de este modo la existencia de una relación al conocimiento matemático que es propia de la profesión docente y no coincide con las de otras instituciones:

> The mathematical demands of teaching require specialized mathematical knowledge, needed by teachers, but not needed by others. Accountants have to calculate and reconcile numbers and engineers have to mathematically model properties of materials, but neither group needs to explain why, when you multiply by ten, you "add a zero." In developing survey questions to measure such knowledge, we ask, for example, whether an unusual method proposed by a student would work in general, which statement best explains why we find common denominators when adding fractions, and which of a set of given drawings could be used to represent 2 divided by 2/3. These and questions like them are the daily fare of teaching. The demands of the work of teaching mathematics create the need for a body of mathematical knowledge that is specialized to teaching. (Ball, Thames y Phelps 2008, p. 401)

En resumen, la aportación fundamental del trabajo de Shulman y, en el caso de las matemáticas, del iniciado por Ball, consiste en abrir una línea de investigación que pone el énfasis en la necesidad de tomar en consideración, en la formación del profesorado, la especificidad de los contenidos que se enseñan. Podemos decir que, en cierto sentido, Shulman identifica una *dimensión didáctica* en las organizaciones docentes, es decir, algo que no se puede reducir ni a la disciplina enseñada en sentido estricto ni a la pedagogía general. Dicho con otras palabras, establece la existencia de una nueva *relación* a los contenidos de la enseñanza que no se reduce a la relación del saber sabio y que es *específica de la profesión docente*. El punto que permanece más oscuro en las investigaciones que hemos considerado de este ámbito es la manera cómo propone que la *investigación educativa* aborde esta nueva dimensión *didáctica* de la problemática docente.

2.2 Desarrollos de los trabajos sobre el MKT¡Error! Marcador no definido.

En la comunidad europea, y más concretamente en la española, numerosas investigaciones sobre la formación del profesorado se apoyan en los trabajos de

Deborah Ball. Entre ellas podemos destacar las de José Carrillo, Nuria Climent, Luis C. Contreras y M. Cinta Muñoz-Catalán (2013), quienes reconocen el MKT como una teoría poderosa para la descripción de los conocimientos requeridos por los profesores de matemáticas y subrayan su carácter pionero en la consideración del conocimiento matemático desde el punto de vista de su enseñanza, así como su valor de herramienta analítica para el estudio del conocimiento de los profesores.

Carrillo et al. (2013), tomando el testigo de algunas de las conclusiones sobre el MKT que los propios autores advertían en cuanto a la necesidad de seguir avanzando en las descripciones de este conocimiento, proponen una reformulación derivada de nuevas investigaciones.

> First, we have not limited ourselves to merely observing episodes of classroom practice, but have proposed a sound theoretical model, which can be subsequently tested in practice (observations), especially longitudinal studies combining classroom observation and shared reflection. Secondly, we have remained open to the possible restructuring of the MK domain, and the potential for new or different subdomains, and even the possibility of the subdomains of PCK being affected. (p. 3029)

Por una parte, advierten la gran dificultad para establecer hasta dónde llega el conocimiento común del contenido y dónde empieza el conocimiento especializado —por ejemplo, saber por qué hay que tener el mismo denominador para sumar fracciones, ¿es conocimiento común de alguien con un cierto nivel de educación?— por lo que sugieren definir el primero como el conocimiento matemático en sí mismo, sin más alusiones.

Asimismo, consideran que debido a la propia definición del conocimiento especializado del contenido, es difícil establecer su límite tanto con respecto al conocimiento en el horizonte del contenido como al conocimiento del contenido y de los estudiantes. Para ilustrar esta dificultad, recurren a dos ejemplos.

> […] In this case, we can consider the example of the commutative property in relation to different objects. First, we will consider this property in relation to the addition and multiplication of natural numbers. Although both operations fulfill this property for this particular numerical set, from the point of view of their meaning, we can say that addition is semantically commutative, but not multiplication (adding or uniting 2 elements and then 3 is the same whichever the order; considering 3 groups of 2 elements is not the same, however, as considering 2 groups of 3 elements). This subtle difference affects how each case is perceived, and relates to how each is learnt. Now we will consider the property in relation to multiplying matrices. In this case, commutability does not generally occur,

> except in the case of square matrices in which the operation can be done either way. This fact differentiates the multiplication of matrices from that of numbers, and knowledge of this difference implies associating both contexts, which we would argue forms part of HCK. Additionally, it provides a mathematical explanation for a common student error in multiplying matrices, which associates it with KCS. (Ibíd. p. 3028)
>
> […] Returning briefly to one of the examples above, knowing that the product of matrices is not commutable pertains to KOT; knowing that in this sense it is different from the multiplying natural numbers would pertain to *knowledge of the structure* (as it means taking a basic viewpoint to the multiplication of matrices, like multiplying numbers) and knowing that the pupils believe that the product of matrices is commutative because they extrapolate this property from multiplying numbers (which they learn at school) would form a part of *pedagogical content knowledge* (as we will now explain). If we take the point of view of *specialized content knowledge* within the MKT model, reflection about specialization in both contexts is a reflection about the specific content of the act of teaching, for which reason we consider it as SCK, which, as we have noted above, results in overlap with *horizon knowledge* and *knowledge of content and students*. (Ibíd. p. 3031)

Sin entrar a valorar, de momento, los ejemplos expuestos, cabe señalar que los autores los utilizan para poner en evidencia la dificultad de establecer demarcaciones claras entre los tipos de conocimiento componentes del *subject matter knowledge* de la figura 2. Así, introducen la noción de «*conocimiento especializado de los profesores de matemáticas*» (mathematics teachers' specialized knowledge, MTSK), como un conocimiento que solo tiene sentido para los profesores de matemáticas y, consecuentemente, su naturaleza es especializada. Establecen dos campos del MTSK relativos a los conocimientos matemáticos y a los conocimientos pedagógicos, respectivamente. Los ámbitos del conocimiento matemático, a su vez, son: el conocimiento de los temas (*knowledge of topics*, KOT), el conocimiento de la estructura de las matemáticas (*knowledge of the structure of mathematics*, KSM) y el conocimiento sobre las matemáticas (*knowledge about mathematics*, KAM).

El KOT incluye el conocimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos junto con los fundamentos teóricos correspondientes. El KSM, incluye el conocimiento de las ideas principales y de las estructuras, tales como conocimiento de las propiedades y nociones relativas a los temas específicos que se abordan en cualquier momento, o el conocimiento de las conexiones entre temas en curso, temas ya vistos y temas por ver. El KAM es el conocimiento relativo a la manera de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento sobre las formas de conocer y crear o producir matemáticas (conocimiento sintáctico), aspectos de la comunicación matemática, razonamiento y prueba, conocimiento sobre cómo definir y utilizar definiciones, el establecimiento de relaciones (entre conceptos, propiedades, etc.), correspondencias y equivalencias, selección de representaciones, argumentación, generalización y exploración.

Esta nueva definición a partir de los tres ámbitos referidos, cubriría al completo el universo matemático. Lo ilustran retomando uno de los ejemplos anteriores:

> Returning briefly to one of the examples above, knowing that the product of matrices is not commutable pertains to KOT; knowing that in this sense it is different from the multiplying natural numbers would pertain to *knowledge of the structure* (as it means taking a basic viewpoint to the multiplication of matrices, like multiplying numbers) and knowing that the pupils believe that the product of matrices is commutative because they extrapolate this property from multiplying numbers (which they learn at school) would form a part of *pedagogical content knowledge* (as we will now explain). If we take the point of view of *specialized content knowledge* within the MKT model, reflection about specialisation in both contexts is a reflection about the specific content of the act of teaching, for which reason we consider it as SCK, which, as we have noted above, results in overlap with *horizon knowledge* and *knowledge of content and students*. (Ibíd. p. 3031)

Los elementos del MTSK relativos al Conocimiento Pedagógico del Contenido son: el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (*knowledge of Features of Learning Mathematics*, *KFLM*), el conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (*knowledge of Mathematics Teaching*, *KMT*) y el conocimiento del currículum (*knowledge of Mathematics Learning Standards*, *KMLS*).

El KFLM abarca una amplia gama de conocimientos relativos a cómo los alumnos entienden, piensan y presentan dificultades ante las tareas matemáticas. No es conocimiento matemático, pero lo requiere. Sería el KCS de Ball. El KMT tampoco es conocimiento matemático aunque también lo requiere, es un tipo de conocimiento relativo a las representaciones o materiales que el profesor elige a la hora de trabajar un determinado concepto o procedimiento. Sería el equivalente del KCT de Ball. KMLS que abarcaría el KCC de Ball ampliando el conocimiento de los objetivos de aprendizaje más allá de los derivados del contexto institucional del profesor.

Finalmente, esta nueva propuesta a partir de la estructura del MKT delimita con claridad los conocimientos necesarios para la profesión y establece aquellos que son exclusivos de los profesores de matemáticas: el KOT, el KFLM y el KMLS. La investigación debe especificar cada vez de manera más adecuada el conocimiento profesional de un profesor de matemáticas lo que es crucial en el propio desarrollo de la profesión. Particularmente, el MTSK es una vía para el trabajo colaborativo, donde el propio grupo tiene la libertad de decidir qué estudiar y sobre qué reflexionar.

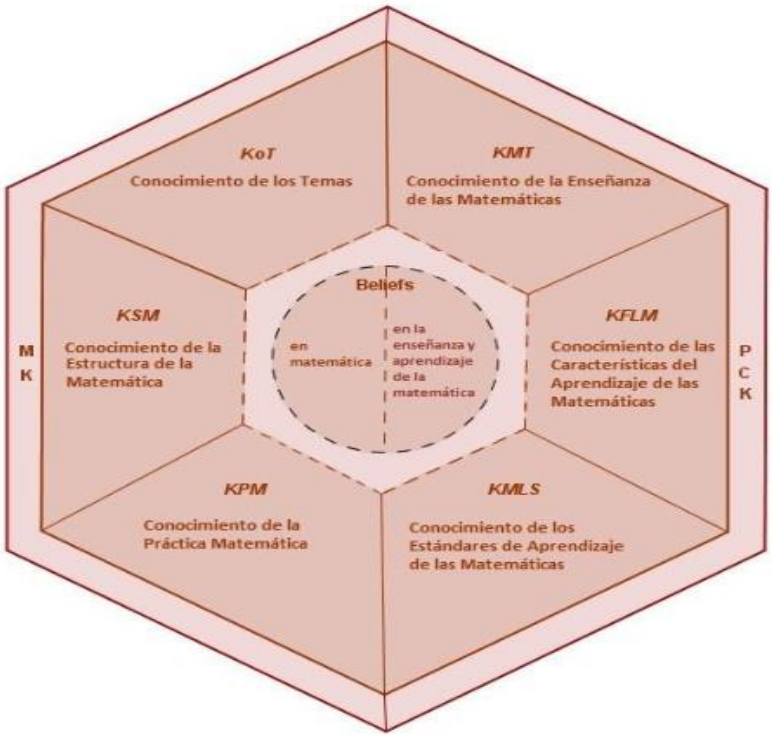


Figura 4: Subdominios del MTSK.
Montes, Contreras y Carrillo, 2013, p. 405

Otro de los desarrollos interesantes de los trabajos sobre el MKT se refiere al *Horizonte Content Knowledge* (HCK). En particular el trabajo de Sainza Fernández y Lourdes Figueiras (2014) al retomar la noción de conocimiento del contenido en el horizonte (HCK) como constructo primordial, particularmente, para abordar las cuestiones relativas a la enseñanza de las matemáticas cuando los estudiantes pasan a un nivel superior —Primaria a Secundaria—, ya que el HCK posibilita la ausencia de cambios abruptos, al implicar conocimientos no sólo de lo que se enseña en un nivel dado sino de lo que ya se ha enseñado en niveles previos y de lo que se enseñará después. Esta sería, a juicio de los autores, una de las funciones cardinales de este conocimiento, lo que les lleva a profundizar, redefinir y extender su ámbito a la vez que sugieren se introduzca específicamente en los programas de formación del profesorado.

Ahora, la noción de HCK —que desaparece del lugar que ocupaba en la estructura del MKT— es ampliada para asignarle el papel de moldear e influir en el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) y el conocimiento especializado del contenido (SCK).

En la figura 6 se muestra la reformulación de la estructura del MKT que las autoras proponen, distinguiendo dos tipos de conocimientos: los que aparecen solamente cuando se está llevando a cabo la enseñanza —conocimientos en acción—, y los conocimientos que no están necesariamente ligados a la enseñanza.

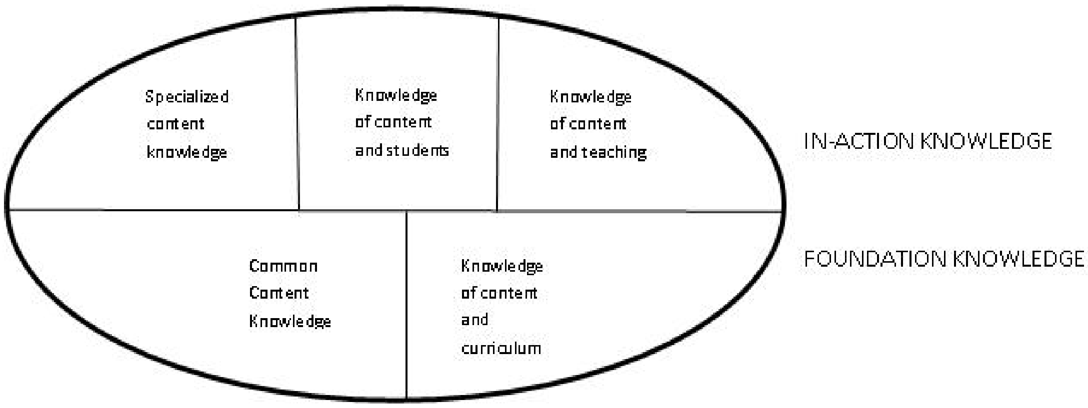


Figura 5. Categorías de conocimientos matemáticos para la enseñanza sin El HCK Sainza y Figueiras (2014, p. 15)

La idea principal es que la presencia del HCK modifica la práctica de la enseñanza:

> From this perspective, this refinement of the construct HCK becomes our theoretical way in to investigate the role of teachers' professional knowledge during transition to secondary school. Summarizing, HCK is a mathematical knowledge specific for the teaching practice that requires both a longitudinal perspective of the mathematical topics and also the ability to communicate this perspective in the teaching practice. Hill, Rowan and Ball (2009) describe HCK as "a kind of peripheral vision" but we consider this horizon picture from a whole temporal perspective which includes and relates the past, the present and the mathematical future. (Ibíd., p. 15)

Mediante una tabla (Tabla 1) presentan los tres principales eventos que sirven para concretar e identificar el HCK en la actividad docente, y que componen el conocimiento profesional sobre la enseñanza en un nivel determinado así como en los anteriores y posteriores. Cada uno de estos tres eventos queda establecido a partir de los indicadores que lo identifican.

Preparación de las actividades desde una perspectiva de continuidad
El profesor considera que la secuencia de los contenidos en la planificación de las actividades, aumenta el rigor en el lenguaje matemático y el nivel de generalización de los problemas matemáticos. Y su plan de secuencia incluye ejercicios que se dirigen a la aparición de errores típicos y dificultades. Y reconoce el potencial de las tareas y la información extra- matemática que conducen a la construcción de las actividades matemáticas en diferentes niveles.
Identificación, prevención y reorientación de los conceptos erróneos y las dificultades desde una perspectiva de continuidad.
El maestro conoce ideas, conocimientos y dificultades previas de los alumnos. E identifica y analiza los errores de los estudiantes y las sitúa en el tiempo (educativa) Y comparte con el estudiante el origen de un error y vuelve a la estudiante o la clase la responsabilidad de corregirlo.
Adaptación de la actividad en el aula a partir de las contribuciones y el nivel de los estudiantes
El maestro interpreta el conocimiento matemático de los estudiantes desde una perspectiva de continuidad. E integra conocimientos de los estudiantes mediante la adaptación del lenguaje y rigor, sin modificar la tarea previamente planificada. Y establece conexiones entre las tareas y utiliza nuevos ejemplos.

Tabla 1. Expresión del HCK en la práctica de la docencia

(Adaptado de Fernández y Figueiras 2014, p. 17).

Para concretar cómo el HCK está presente en las actividades del profesor, plantean el ejemplo siguiente: hay tres cabinas representadas por tres puntos en el plano y se trata de dividir la superficie en zonas coloreadas de modo que cada una delimite los puntos que están más próximos a una de las cabinas.

Los autores entienden que esta actividad enfatiza la influencia que tiene el HCK sobre el KCT al implicar la planificación antes de realizar la lección así como la metodología utilizada. En concreto, la presencia de HCK estaría en el planteamiento por parte del profesor de esta actividad […] *because the rigor, level of generalization and understanding required to solve it is significantly greater than those required to solve a simple problem of construction of the three perpendicular bisectors or the circumcenter of a triangle*. (Ibíd. p. 19)

Otro signo de esta presencia estaría en que el profesor tiene conocimiento de los conceptos erróneos (confusión entre mediatrices y medianas) de los alumnos y este problema permite actuar ante ello.

El HCK relativo a la interacción entre profesor y alumno se manifiesta en el conocimiento que el profesor tiene de los errores más comunes y en su capacidad para actuar en consonancia.

La influencia del HCK en el KCS, por ejemplo, en un primer nivel el profesor simplemente muestra a los estudiantes con un contraejemplo por qué la mediana no funciona, lo que permite al estudiante reconocer su error. En un segundo nivel, establecería una interpretación del porqué del error de Anna (las medianas dividen al triángulo en tres zonas de áreas iguales) y habría que analizar y posicionar este error, conduciendo a los alumnos hacia la explicación previa relativa al hecho de que hay un error.

El último grado de sofisticación es averiguar y compartir con el estudiante y la clase el origen de este error. Esto se haría, por ejemplo simplificando el problema (considerando solo dos puntos), con el fin de que los alumnos llegaran a una generalización a tres puntos. También se podría poner un contraejemplo (un triángulo específico) con el fin de discutir las propiedades geométricas de las medianas del triángulo.

2.3 **Otros trabajos sobre el profesorado de matemáticas**¡Error! Marcador no definido.

La formación profesional del profesor de matemáticas es prioritaria en el campo de la educación matemática para numerosos investigadores. Empezamos por mencionar a José Mª Cardeñoso, Pedro Flores y Pilar Azcárate (2001), quienes sitúan sus investigaciones a este respecto en «el profesor de matemáticas y su evolución como profesional », una de las líneas u objeto de estudio en el campo de la educación matemática. Sostienen que para llevar a cabo esta formación profesional hay que tener en cuenta, ante todo, el aspecto personal del propio profesor, puesto que «el desarrollo es personal, adecuado a la experiencia, condiciones y percepciones, por lo que no puede establecerse de manera externa» (p. 234). La formación del profesor vendría a ser más un proceso relacionado con la intervención y ayuda en su práctica docente que una asunción de conocimientos académicos y de técnicas de actuación ante los alumnos. Este proceso formativo implicaría la construcción paulatina de un conocimiento profesional cada vez más elaborado con ideas en evolución hacia nuevas formas de concebir la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En este enfoque los *entornos de aprendizaje* (Salvador Llinares 2004) jugarían un papel crucial a la hora de facilitar este proceso de construcción que, como se ha señalado, pone al profesor en el centro de la diana al solicitar su entera implicación en el mencionado proceso.

Otros autores (Salvador Llinares, Julia Valls y Ana-Isabel Roig 2008) parten de tres cuestiones que a su juicio están en el corazón de la formación: cuestiones relativas al conocimiento y destrezas necesarias para el desenvolvimiento en el aula; el modo de adquirir dicho conocimiento; y, consecuentemente a estas premisas, los medios —oportunidades de aprendizaje— que es posible diseñar para lograr estos propósitos.

Para abordar el conocimiento y las destrezas que los profesores deberían «dominar » al realizar la actividad de enseñanza, establecen los tres ámbitos que se pueden ver en la figura 6 (Ibíd., p.34):

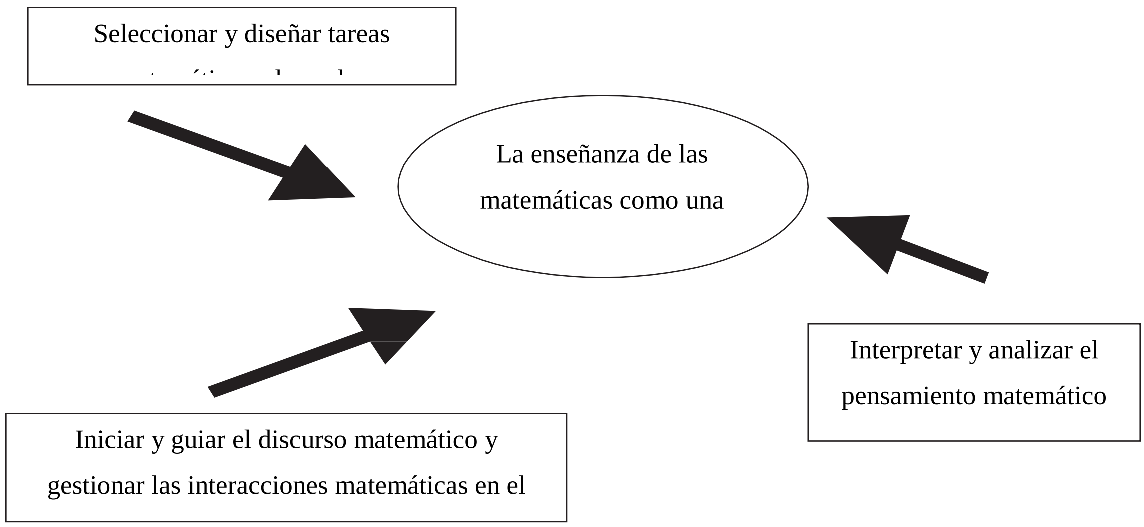


Figura 6: Sistema de actividad en la enseñanza de las matemáticas como una práctica.
Llinares, Valls y Roig (2008, p.34)

Para poder desempeñar esta tarea, la formación tiene que caracterizar *el conocimiento de y sobre las matemáticas* que se debe proporcionar al futuro profesor, conocimiento que es específico a la enseñanza y, como tal, diferente del conocimiento matemático de otras profesiones. Una de las vías para conseguirlo sería presentar a los profesores en formación *secuencias de enseñanza* —por ejemplo, videos o problemas que se extraen de libros de texto— para «investigar su potencial» ya que al tomar dichas secuencias

> […] como instrumentos de aprendizaje matemático, implica considerar en qué medida estas situaciones pueden generar procesos matemáticos como construir, conjeturar/formular, probar, generalizar, proponer problemas, clasificar/definir y comunicar. (Ibíd. p. 35)

Asimismo, la formación inicial de los estudiantes para profesor incluiría la exploración de situaciones matemáticas que se plantean en el aula a los alumnos con el fin de averiguar el abanico de elementos matemáticos implicados en las tareas y las posibles estrategias que los alumnos pondrían en funcionamiento para su resolución. Esta exploración es necesaria para poder *analizar la enseñanza*, una de las tareas formativas para la profesión, que culminaría con una discusión entre los estudiantes para profesor y el formador sobre los resultados obtenidos, las relaciones entre estos y otras posibles maneras de abordar las tareas lo que da lugar, a juicio de los autores, a establecer una relación entre «lo matemático» y «lo didáctico»:

> De esta manera, la introducción de "lo didáctico" en el análisis de las tareas matemáticas, cuando se ven como instrumento de aprendizaje, se convierte en sí mismo en un objetivo didáctico para el formador de profesores. (Ibíd., p. 36)

Los estudiantes para profesor también deben saber cómo «piensan» los alumnos las matemáticas. La formación de profesores puede aportar medios para que empiecen a desarrollar estrategias que relacionen información teórica con procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de tareas. Aquí, el visionado de videos vuelve a ser un medio de gran potencial puesto que, además de dar a conocer los diferentes procedimientos recién mencionados, permiten conjeturar sobre la comprensión matemática e identificar nuevas tareas y preguntas que, en situaciones análogas, permitirían aumentar la comprensión matemática de los alumnos.

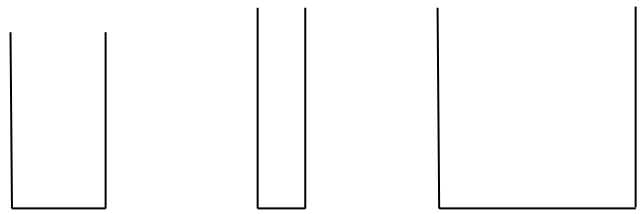
De este modo, se logran establecer vínculos entre lo matemático y lo didáctico y se facilita a los estudiantes para profesor (Ibíd., p. 38):

> 1. Empezar a caracterizar los conceptos y procesos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje (intentar verlos como nociones y procesos que han de ser aprendidos y no sólo como elementos componentes de un determinado dominio de conocimiento matemático).
>
> 2. Identificar sus propias concepciones sobre el aprendizaje matemático, la enseñanza, su papel como profesores y las situaciones matemáticas como instrumentos de aprendizaje.
>
> 3. Expresar sus propias ideas didácticas y desarrollarlas cuando interpretan los procesos de aprendizaje matemático de los alumnos.

La *interpretación de las situaciones de enseñanza* es otro de los objetivos por alcanzar en la formación de los estudiantes para profesor, y para desarrollar los procesos interpretativos es necesario poder dar una explicación —aun sabiendo que pueden darse otras— de lo que acontece en el aula cuando los alumnos realizan tareas matemáticas. Al tratar de dar una respuesta a las observaciones efectuadas en el aula —por ejemplo, el visionado de un video—, los estudiantes para profesor pueden establecer relaciones con la didáctica de las matemáticas y, de este modo, ligar lo particular con lo general, «germen del desarrollo del conocimiento profesional» (Ibíd., p. 40).

Para concretar sobre este aspecto, presentan un video clip de un segmento de enseñanza donde una profesora trabaja con alumnos de 15 a 16 años. El problema es el siguiente:

Se ven tres vasijas de igual forma y diferente anchura



Y hay que determinar la relación entre el volumen de líquido vertido y la altura que alcanza el líquido en la vasija.

Aquí, los estudiantes para profesor tratarían de identificar y caracterizar las diferentes maneras en las que la profesora puede estar gestionando las preguntas de sus alumnos, como una manera de ayudarlos a dotar de significado a la idea de relación funcional o de pendiente de una función lineal, y esto forma parte del proceso de aprender “sobre” la enseñanza de las matemáticas. Desarrollar procesos interpretativos significa mirar las situaciones de enseñanza con el propósito de comprender lo que sucede, lo que los alumnos parecen estar pensando sobre las matemáticas o cómo influyen las cuestiones planteadas por el profesor en el pensamiento matemático de los alumnos.

Hay un conocimiento necesario para la enseñanza cuyo proceso de construcción, por parte de los estudiantes para profesor, consiste en utilizar en las situaciones de enseñanza los instrumentos teóricos que la didáctica de la matemática ha elaborado y dicho proceso está relacionado con la generación de conocimiento matemático desde la propia práctica. Este nexo plantea interrogantes sobre las relaciones entre la teoría y la práctica, interrogantes para los que es posible elaborar una respuesta a partir de la creación de *entornos de aprendizaje*.

2.4 Del conocimiento para la enseñanza a las competencias profesionales¡Error! Marcador no definido.

Otros autores (Vicenç Font, Norma Rubio, Joaquim Giménez-Rodríguez y Nuria Planas 2009) centran el objetivo de la formación inicial de los profesores de matemáticas en la adquisición de las competencias profesionales. Estas son las que, en particular, permiten determinar o conocer las competencias matemáticas de los alumnos descritas en los actuales currículos, puesto que ya no habría que adquirir conceptos sino aprender procesos (modelización, resolución de problemas, argumentación, etc.). Si los currículos de Secundaria están explicitados en términos de competencias, los de los profesores en formación también deben hacerlo en estos términos:

> Los currículos por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dada la estrecha relación existente entre procesos matemáticos y competencias matemáticas afirmamos que desarrollar la competencia del profesorado en el análisis de procesos y objetos matemáticos, activados en las prácticas matemáticas, es un paso necesario para desarrollar la competencia *profesional que permita la evaluación de las competencias matemáticas de los alumnos.* (p.13)

Así pues, una de las competencias profesionales que la formación debería incorporar como objetivo es que los futuros profesores sean competentes en el *análisis de procesos y objetos* matemáticos, análisis que surgiría, en opinión de los autores, de la realización de *una actividad matemática rica seguida de una reflexión sobre dicha actividad* (p. 13). Y aunque esta competencia es necesaria para el análisis de procesos y objetos, consecuentemente, para poder llegar a inferir la competencia matemática de los alumnos, no bastaría para llegar a entender la complejidad que entrañan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por lo tanto, dado que no basta con ser competente en el análisis de procesos y objetos, los futuros profesores deberán adquirir las herramientas necesarias para poder analizar tanto los aspectos cognitivos y emocionales como las interacciones producidas en el aula y las normas que condicionan estas interacciones, es decir, deberán adquirir la competencia en el análisis didáctico de procesos de instrucción que se concreta en el *análisis de las trayectorias e interacciones didácticas* y en la *identificación del sistema de normas y metanormas*.

Otro de los objetivos de la formación inicial del profesorado estaría en la mejora del proceso de instrucción a partir de la valoración de procesos de instrucción efectivamente realizados y guiando su mejora. Es un tercer nivel de competencia en el análisis didáctico que proponen los autores y que se centra en la valoración de la *idoneidad didáctica* (Godino et al, 2006, p.15). Dicho análisis se basa en los análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

En esta misma línea, Vicenç Font y Marta Adán (2013) ponen el acento en el *diseño de tareas* como elemento clave en la formación de los futuros profesores. Así, a los futuros profesores se les expone a una tarea profesional como puede ser la evaluación de la calidad matemática de una actividad docente real: una prueba elaborada por un profesor de bachillerato con el fin de que los alumnos a quienes imparte clase se preparen para el examen sobre el tema de integrales. A los estudiantes para profesor se les proporciona los ítems de la prueba mencionada, el texto del currículo relativo al tema en cuestión incluidos los criterios de evaluación y el índice del libro de texto, con el fin de que discutieran sobre la cuestión siguiente: ¿Podrías valorar si el cuestionario digital tiene calidad matemática o no? Justifica tu respuesta. (Ibíd., p. 288). Como resultado de las deliberaciones, los grupos llegan al acuerdo de que para poder responder hay que tener en cuenta, por una parte, si dicho cuestionario se adapta a los criterios de evaluación y, por otra, si refleja la complejidad de la integral.

A partir de estos acuerdos alcanzados por los grupos, el docente los reformula y los vincula para mostrarlos como dos componentes de la noción "calidad matemática" (los estudiantes para profesor no han recibido formación sobre esta noción tal y como se considera en el Enfoque Ontosemiótico (EOS)). Para hacer, finalmente, la valoración y poder determinar la calidad matemática del cuestionario, se introducen los términos: contextualización, algoritmización, comunicación, argumentación y resolución de problemas, para medir la "riqueza de procesos matemáticos" y también se explican siete significados parciales de "integral", para medir el grado de complejidad (geométrico, resultado de proceso de cambio, inversa de la derivada, aproximación al límite, generalizada, algebraica y métodos numéricos), indicadores que se puntúan con 0 o 1. La figura 8 resume el proceso seguido en el dispositivo de formación.

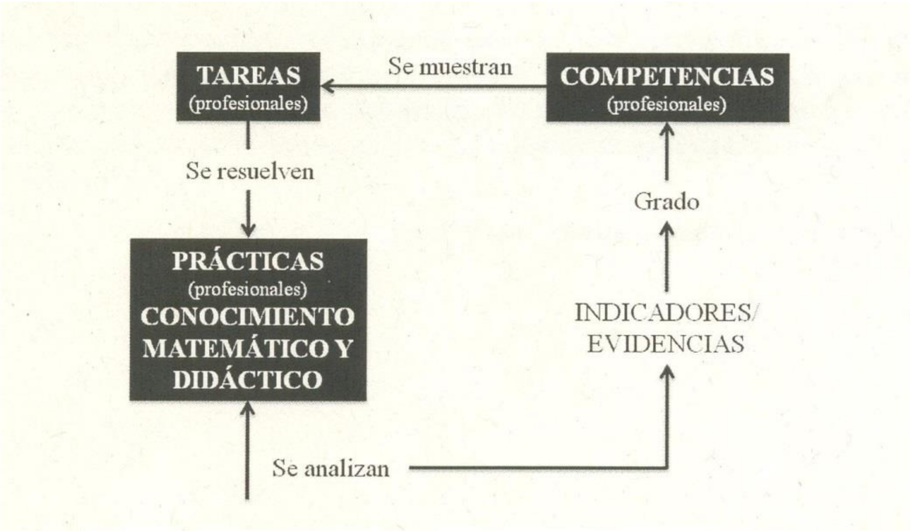


Figura 7. Evaluación y desarrollo de competencias profesionales.
(Font y Adán 2013, p. 284)

En síntesis, la mayoría de autores arriba señalados estarían de acuerdo con Shulman, Ball, Thames, Moore, Ball, Lubienski y Mewborn entre otros, cuando plantean el estudio de una misma cuestión central: ¿*Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas*?, y cuyas respuestas son relativamente coincidentes en la consideración de que una competencia profesional del profesorado es aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje pero que, sin embargo, difieren en cuanto a las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico y en cuanto a los dispositivos para ayudar a los profesores a adquirir dichas competencias.

3. Integración de lo «pedagógico» y lo «matemático» en el enfoque epistemológico

En el ámbito del *enfoque epistemológico* en didáctica de las matemáticas, la toma en consideración de la actividad del profesor de matemáticas ha aparecido mucho más tardíamente, al menos de una manera explícita. Puede considerarse que fue a principios de la década de 1990 cuando, por primera vez, el desarrollo de algunas teorías que se sitúan inequívocamente en dicho enfoque — singularmente la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)— permitió empezar a tomar en consideración el estudio de *las prácticas docentes del profesor de matemáticas*[5]:

> Les chercheurs vont s'intéresser davantage aux raisons pour lesquelles l'enseignant résiste à la reproduction des ingénieries didactiques mises au point dans les recherches expérimentales, et tenter de théoriser les contraintes qui pèsent sur les enseignants et de modéliser le rôle de l'enseignant, en classe d'abord, plus largement ensuite. (Margolinas et Perrin-Glorian, 1997, p. 10).

En coherencia con el punto de vista inaugurado por Guy Brousseau[6], el objeto primario de investigación de lo que hemos denominado el enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas no es el *conocimiento matemático del alumno* y su ampliación posterior al *pensamiento del profesor*, sino que se centra en la *actividad matemática escolar* y en las condiciones institucionales que la hacen posible. Esto comporta que los conocimientos del alumno, sus actividades de aprendizaje, la actividad docente del profesor, los procesos cognitivos que acompañan a estas actividades y, en general, los procesos de enseñanza-aprendizaje, pasen a ser considerados como objetos «secundarios» (lo que no quiere decir que sean menos importantes) porque deberán ser construidos o definidos a partir de los términos primitivos del modelo epistemológico de las matemáticas que se adopte como núcleo firme y como puerta de entrada al análisis de los fenómenos didácticos.

Con este postulado el enfoque epistemológico no pretende, en absoluto, « reducir » los fenómenos *cognitivos* (ni, mucho menos, los fenómenos *didácticos*) a fenómenos *matemáticos* entendidos en el sentido de la epistemología tradicional. Lo que se postula es que el estudio integrado o sistémico de los fenómenos didácticos puede llevarse a cabo, con ventaja, cuestionando y modelizando *en primera instancia* el componente matemático de éstos (lo que modificará la noción misma de «*matemático*») y que, en ningún caso, los fenómenos didácticos se pueden reducir a fenómenos cognitivos. En realidad, lo que cambia en el enfoque epistemológico con relación al enfoque cognitivo

---

[5] Fue precisamente en l'École d'Été de 1991 en la que, por primera vez, se trató explícitamente el tema « *La place de l'enseignant dans le système didactique* ».

[6] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la « epistemología experimental », constituyen el germen del enfoque epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

es la noción misma de *fenómeno didáctico* (Artigue, Bosch y Gascón 2011) y, por tanto, el objeto de estudio de la didáctica.

Esta es la razón, en nuestra opinión, por la que la problemática didáctica que propuso inicialmente la TSD no incluía, al menos explícitamente, ni el comportamiento del alumno ni el comportamiento del profesor. La extensión posterior del enfoque epistemológico propuesta por la TAD no hizo más que profundizar esta discontinuidad con el enfoque cognitivo. En efecto, una de las primeras aportaciones de la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985) consistió en poner de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. El desarrollo posterior de esta teoría mostró que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas no pueden ser estudiadas separadamente (Chevallard 1991). La actividad matemática escolar se integra así en la problemática mucho más amplia de las *actividades matemáticas institucionales* y éstas pasan a constituir el nuevo y más extenso *objeto primario* investigación de la didáctica.

Surge así una definición de didáctica de las matemáticas como «*ciencia de las condiciones específicas de difusión* (*impuesta*) *de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas*» (Brousseau 1994) que generaliza la que proponía inicialmente la TSD.

¿Hasta qué punto la nueva problemática didáctica incluye a la problemática clásica? Y, en particular, ¿hasta qué punto y en qué forma el enfoque epistemológico incluye entre sus objetos de estudio lo que hemos denominado «*prácticas docentes del profesor de matemáticas*»?

El enfoque epistemológico parte del cuestionamiento y la modelización explícita de la actividad matemática institucionalizada. Este cuestionamiento de la transparencia de lo «matemático» puso de manifiesto, desde el principio, que las condiciones que rigen la génesis y el desarrollo escolar de los conocimientos matemáticos así como las condiciones de su utilización, en situación escolar, *forman parte de dichos conocimientos*. Se produjo así una *primera ampliación de lo «matemático»* que se materializó históricamente en la TSD. La siguiente ampliación es obra de la TAD al proponer que las diferentes formas de manipulación social de las matemáticas, entre las que se cuentan la producción, la enseñanza, la utilización y la transposición institucional, deben ser objeto estudio de la nueva epistemología de las matemáticas y, correlativamente, que la problemática didáctica se sitúe en el marco de esta epistemología ampliada entendida como una *antropología de las matemáticas* que, a su vez, se integra en una *antropología de los saberes* o *antropología cognitiva* (Chevallard 1991).

> Tenemos, en resumen, que la integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* se produce en el Programa Epistemológico cuestionando y ampliando radicalmente lo «matemático». (Gascón 2003, p.689)

En la cuestión que nos ocupa, esto es, para abordar los problemas relativos al papel del profesor en el sistema didáctico, el enfoque epistemológico postula que el sistema empírico que debe tomarse en consideración para abordar dichos problemas debe abarcar todas las instituciones que intervienen en la *transposición didáctica* (Chevallard 1985) así como el hecho esencial de que las organizaciones matemáticas y didácticas se determinan mutuamente como dos caras inseparables de una misma moneda.

> Le principe fondateur des didactiques, au moins au sens brousseaunien du terme, est que non seulement ce qui est transmis dépend de l'outil avec lequel on prétend réussir sa transmission, mais encore que les organisations de transmission, c'est-à-dire didactiques, se configurent de façon très étroitement liée à la structure de ce qu'il faut transmettre. En d'autres termes, les organisations didactiques dépendent fortement des organisations à enseigner : des organisations mathématiques, dans notre cas. Cet isomorphisme didactico-mathématique est ce que j'exprime à travers une hierarchie de niveaux de codétermination des OD et des OM. (Chevallard 2001b).

Tenemos, en resumen, que el enfoque epistemológico cambia el problema de caracterizar los conocimientos y las concepciones del profesor y la incidencia de éstos sobre las prácticas docentes y sobre el aprendizaje matemático de los alumnos, por el problema mucho más amplio de caracterizar las organizaciones matemáticas y didácticas de las instituciones escolares y analizar las *condiciones de existencia*, *génesis*, *desarrollo* y *codeterminación* recíproca. Se trata, en definitiva, de estudiar la *ecología institucional* de las mismas, esto es, las *condiciones* que posibilitan su génesis y desarrollo institucional.

Las organizaciones matemáticas y didácticas distan mucho de estar completamente elaboradas en todos sus detalles y, en general, están fuertemente «*naturalizadas*» hasta el extremo de ser transparentes para los sujetos de la institución que las asumen y las transmiten a través de sus prácticas institucionalizadas. En consecuencia, su descripción y confrontación empírica deberán sustentarse en una metodología que tenga más en cuenta las prácticas efectivamente realizables y los discursos objetivamente existentes (o, cuando menos, posibles) en la institución escolar, que las «opiniones» explícitas de los sujetos de la misma.

4. A modo de síntesis

En conclusión podemos caracterizar las investigaciones sobre el conocimiento del profesor y la formación del profesorado, tanto las de corte más cognitivo como las que se sitúan más próximas al enfoque epistemológico, mediante un conjunto de principios o postulados que en parte se obtienen como resultado de las investigaciones que se han llevado a cabo en cada uno de los enfoques y, en parte, son asunciones básicas previas al trabajo empírico.

Citaremos a continuación y confrontaremos algunos de estos principios o asunciones empezando por resaltar un punto de convergencia que consideramos muy importante entre ambos enfoques. Se trata de la necesidad de tomar en consideración, en la formación del profesorado, la especificidad de los contenidos que se enseñan. Ambos enfoques coinciden en que la formación del profesorado no se puede reducir ni a la disciplina enseñada en sentido estricto ni a la pedagogía general. Ambos enfoques construyen la *dimensión didáctica* mediante la integración —cada enfoque a su manera—, de lo pedagógico y lo matemático tal y como hemos descrito anteriormente.

- ✓ Desde el enfoque cognitivo se considera que la relación a las matemáticas que deben establecer los docentes es específica de esta profesión (de ahí que se deba contemplar en la formación del profesorado), pero en ningún momento se ve necesario llevar a cabo elaboraciones matemáticas originales para proveer los recursos matemáticos que requiere el ejercicio de la profesión. Esta asunción es consecuencia de la forma como desde el enfoque cognitivo se integra lo pedagógico y lo matemático cuestionando la naturaleza clásica de lo pedagógico y modelizando *lo didáctico* de tal manera que comporta, de hecho, una *ampliación de lo cognitivo*. Sin embargo, desde el enfoque epistemológico y también como consecuencia de la forma como se construye la *dimensión didáctica*, se considera indispensable la elaboración de matemáticas originales o, en su caso, la readaptación de construcciones elaboradas previamente.

- ✓ En general, el punto de partida para llevar a cabo estas elaboraciones que propugna el enfoque epistemológico lo constituye el *cuestionamiento de la matemática escolar*. Este cuestionamiento se materializa en modelos alternativos de los diferentes ámbitos de matemática escolar. Por su lado, la mayor parte de las investigaciones que se llevan a cabo en el ámbito del enfoque cognitivo sobre la formación del profesorado toman el propio currículum oficial, sin cuestionarlo, como uno de los criterios principales para caracterizar las matemáticas para la enseñanza.
- ✓ Las investigaciones desarrolladas en el enfoque cognitivo en torno a los conocimientos del profesor suelen tomar como ámbito empírico la práctica de éste en el aula. Por su parte, el enfoque epistemológico amplía radicalmente el ámbito empírico en el que sitúa la problemática didáctica y, en particular, el problema de la formación del profesorado. Más allá de las creencias del profesor, de sus conocimientos, de sus actitudes, del comportamiento de los alumnos y, en definitiva, de las prácticas docentes en el aula como ámbito empírico, el enfoque epistemológico necesita tomar en consideración datos provenientes del resto de las instituciones que intervienen en la transposición didáctica.
- ✓ En el enfoque cognitivo se asume normalmente que las dificultades o cuestiones problemáticas a las que se debe enfrentar un profesor en su práctica docente y los conocimientos o competencias que necesita para ello son conocidas de antemano o, al menos, pueden obtenerse a partir del análisis empírico de su actividad docente. En las investigaciones sobre la formación del profesorado que se desarrollan en el enfoque epistemológico parten de la premisa de que el problema de la formación es esencialmente un *problema abierto* (de investigación didáctica).

En coherencia con lo anterior, y como veremos en el próximo capítulo, la metodología para la formación del profesorado que proponemos en esta memoria, está basada en el estudio de cuestiones cruciales para la profesión más que en la adquisición de competencias caracterizadas a priori o en la enseñanza de respuestas previamente elaboradas. Este punto de vista se contrapone claramente a la asunción según la cual los conocimientos o competencias que necesita el profesor para realizar su práctica docente son conocidos de antemano.

CAPÍTULO III

EL PROBLEMA DE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO EN EL ÁMBITO DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

1. La teoría antropológica de lo didáctico y la formación del profesorado

Como la mayoría de enfoques en didáctica de las matemáticas, la teoría antropológica de lo didáctico (desde ahora TAD) ha estado siempre estrechamente relacionada con la formación inicial y continua de los profesores, y ello por distintas razones. En primer lugar, porque los profesores en activo forman parte de muchos de los equipos de investigación que trabajan en el ámbito de la TAD. En segundo lugar porque, desde sus inicios con la puesta en evidencia del fenómeno de la transposición didáctica (Chevallard 1985), la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye, además, todas las instituciones que participan en este proceso entre las que se cuentan el propio *profesorado*, que consideramos como institución, y también aquellas que intervienen en su formación inicial y continua. Y, en tercer lugar, porque muchos investigadores que trabajan en la TAD se han visto involucrados en la formación del profesorado de los distintos niveles educativos. De ahí que el desarrollo de este enfoque se haya visto siempre potenciado por los problemas que surgen en dichos procesos de formación y el esfuerzo para aportar elementos de respuesta. No sorprende entonces que la formación de profesores se considere como uno de los principales ámbitos de estudio e investigación de la TAD. El anuncio de su II Congreso Internacional de 2007 lo situaba en el ámbito más amplio del eje «Enseñar matemáticas: la profesión y sus problemas» que se sustentó sobre dos pilares conceptuales principales:

– El de *la profesión*, entendiéndola como *el conjunto de los actores* de la enseñanza de las matemáticas «del parvulario a la universidad», es decir, no solamente los *profesores* ni, en particular, los profesores de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria, que forman el grueso de la «tropa», sino también los *militantes* de asociaciones o sindicatos, así como los *formadores* de profesores, los *inspectores*, los *responsables ministeriales* de la enseñanza de las matemáticas e incluso los *investigadores* de la enseñanza de las matemáticas (en breve, la «noosfera» *en sentido amplio*).

– El de los *problemas de la profesión*, los que surgen en el ejercicio mismo de la docencia o los que se identifican por la observación y el análisis de las condiciones y de las restricciones que la afectan y son reconocidos, al menos por una parte de la profesión, como dificultades objetivas (incluso si se viven subjetivamente), dignas de la movilización colectiva de ciertos recursos de la profesión.

En la concepción corriente del oficio docente, el profesor es visto y se ve a sí mismo como un pequeño productor independiente que se debe procurar sus recursos de manera individual. En consecuencia, se ve abocado a considerar que los problemas y dificultades que encuentra en el desarrollo de su oficio provienen de sus limitaciones personales. Si se viera a sí mismo como miembro de una profesión (lo que requeriría un desarrollo de la profesión todavía incipiente), su oficio cambiaría profundamente puesto que tendría la posibilidad de interpretar muchos de los problemas docentes como *problemas de la profesión*. La responsabilidad de buscar respuestas a los mismos no recaería sobre el profesor individualmente considerado sino sobre la institución de la profesión.

1.1. Reformulación del problema de la formación del profesorado¡Error! Marcador no definido.

El problema de la formación de los profesores de matemáticas acepta clásicamente dos formulaciones distintas con connotaciones diferentes y cuya complementariedad —o dualidad— no siempre es fácil de establecer. La primera formulación es la que parte de una determinada visión del perfil de profesional que se quiere formar y elabora un proceso formativo de acuerdo con las necesidades de este «modelo final». Si utilizamos la terminología al uso en las actuales instituciones de enseñanza, se podría concretar como sigue:

***Formulación inicial del Problema del Profesorado*:** ¿Qué conocimientos o competencias son necesarios (o por lo menos útiles) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de tal o cual etapa educativa) y qué se puede hacer para ayudar a los profesores a que construyan o adquieran estos conocimientos o competencias?

Es sorprendente que, en algunas nuevas propuestas para la formación del profesorado, parezca que el problema de la formación se pueda resolver simplemente mediante una propuesta de descripción —en general bastante detallada— del conjunto de competencias que se consideran necesarias para el ejercicio de la profesión docente, como si el simple hecho de formular el objetivo de la formación resolviera de un plumazo el problema de determinar el *proceso* y las *condiciones* para adquirir o desarrollar las competencias especificadas. Veremos que, en nuestro caso, tanto los criterios de determinación de los conocimientos o competencias necesarios, como el diseño y gestión del proceso para adquirirlos forman parte intrínseca del problema de la formación del profesorado, que reformularemos situándonos en el ámbito de la TAD.

Para ello, la TAD introduce una conceptualización unitaria sencilla en términos de *praxeologías* —unión de los términos griegos *logos* y *praxis*— que generaliza diferentes nociones al uso y permite designar, sin hacer ninguna valoración, cualquier posible estructura de conocimiento y cualquier tipo de actividad, en especial aquellas centradas en la construcción o transmisión del conocimiento.

Se parte del postulado que toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo así que, en la perspectiva antropológica adoptada, toda práctica o «saber hacer » (toda *praxis*) aparece siempre acompañada de un discurso o «saber» (un *logos*), es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Antes de examinar la reformulación del problema de la formación que propone la TAD, conviene recordar algunas puntualizaciones sobre la noción de praxeología que serán útiles en lo que sigue[7]. La estructura praxeológica más sencilla —que designamos «puntual»— se compone de un *tipo de tareas* T, de una *técnica* τ o manera de llevar a cabo las tareas del tipo T, de una *tecnología* θ o discurso razonado (*logos*) sobre la

[7] Se puede encontrar una introducción más detallada en Chevallard (1999, 2005, 2007a) y una visión de síntesis de los últimos 25 años de la TAD en Bosch y Gascón (2007).

técnica (*tekhne*) para hacer inteligible la técnica τ como medio para realizar T y de un componente *teórico* Θ que rige la propia tecnología θ, aportando elementos descriptivos, justificativos y generativos de los demás componentes de la praxeología. La *praxis* (o «saber hacer») refiere el bloque práctico-técnico de la praxeología que se designa $[T,\tau]$ y el *logos* (o «saber») el bloque tecnológico-teórico $[\theta,\Theta]$.

Una primera ventaja de la noción de praxeología es que unifica bajo un mismo concepto el «saber» o conjunto organizado de conocimientos y la «práctica» o actividad. Cuando hablamos de una teoría o disciplina (como por ejemplo las matemáticas, la teoría de números, la psicología social o la didáctica de las matemáticas) nos referimos generalmente a un conjunto de praxeologías que designamos metonímicamente aludiendo a uno de sus componentes, en este caso a su componente tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$. A la inversa, hablar de la «práctica docente», de la «pericia» o del «saber hacer» del profesor, es enfatizar el bloque práctico-técnico $[T, \tau]$ de la praxeología, omitiendo o dejando implícito su componente tecnológico-teórico (a menudo muy naturalizado y difícil de describir). Desde la TAD se postula que todo «saber» (todo discurso razonado o explicativo) tiene asociado, aunque esté implícita, una praxis potencial y, a la inversa, que existe un discurso descriptivo y justificativo para toda «práctica», por rudimentario que éste sea.

En el ámbito de actividades en que actúan los profesores de matemáticas encontramos una gran diversidad de praxeologías de distintos tamaños. Están, por un lado, las *praxeologías matemáticas* que el profesor debe enseñar. Estas praxeologías son *puntuales* cuando se centran en un único tipo de tareas, generalmente asociadas a un pequeño conjunto de técnicas, como: resolver ecuaciones de primer grado, simplificar fracciones, calcular el perímetro de una circunferencia, o hallar la derivada de una función elemental. Cuando los bloques prácticos se articulan en torno a un discurso tecnológico común, pasamos a tener praxeologías *locales*, como serían los «temas» en que estructuramos la enseñanza: las funciones afines, la divisibilidad, la semejanza de figuras, etc. Y si las praxeologías locales se estructuran en base a una teoría, conforman praxeologías *regionales* que, en el caso de la matemática escolar, se designan generalmente como «bloques temáticos» o «sectores»: las funciones, la estadística, la geometría, etc. No hay que perder de vista, sin embargo, que el carácter puntual, local o regional de una praxeología es relativo a la institución considerada: una praxeología regional en una institución, como es la geometría plana en la enseñanza secundaria, podría considerarse, en otra institución, como una praxeología local insertada en el ámbito de las «geometrías euclidianas y no euclidianas», por ejemplo.

Además de estas praxeologías matemáticas *por enseñar*, el profesor debe activar otros tipos de praxeologías útiles para la enseñanza. Hablaremos en general de *praxeologías docentes* o *praxeologías didácticas del profesor* para designar aquellas praxeologías propias de la profesión docente. Del mismo modo, podemos hablar de las *praxeologías discentes* o *praxeologías didácticas del alumno*. En general, las praxeologías didácticas involucran tanto al profesor como a los alumnos y son, en consecuencia, praxeologías cooperativas.

Dentro del conjunto de praxeologías del profesor —su *equipamiento praxeológico*—,, algunas son, por supuesto, también matemáticas: el *equipamiento praxeológico matemático* del profesor no puede reducirse a aquello que debe enseñar. Constituyen lo que Cirade (2006) designa como *praxeologías matemáticas para la enseñanza*, y contienen los conocimientos matemáticos necesarios para delimitar, interpretar, relacionar y explicitar la «razón de ser» de las matemáticas por enseñar y para concebir y construir las praxeologías didácticas asociadas a las praxeologías por enseñar.

Ambos tipos de praxeologías se insertan en un conjunto más amplio de praxeologías, que designaremos como praxeologías *de la profesión docente* en la medida en que estén orientadas a la *difusión social de las praxeologías matemáticas* y, por tanto, contienen conocimientos que, sin formar parte de las praxeologías para la enseñanza, también se requieren para diseñar y gestionar las praxeologías didácticas. Estas praxeologías didácticas, como tales, pueden ser *puntuales*, *locales* o *regionales* según el grado de cohesión que presente el discurso tecnológico-teórico que las organiza. A diferencia de las matemáticas —o de cualquier disciplina con historia y tradición—, es más difícil encontrar para las praxeologías didácticas puntuales un discurso tecnológico-teórico que las describa, estructure y justifique de forma más o menos sistemática. Avanzar en el conocimiento y desarrollo de las praxeologías didácticas es, de hecho, uno de los principales objetivos de la investigación en didáctica de las matemáticas.

En resumen, y siguiendo a Cirade (2006), podemos distinguir, al menos, tres tipos de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de matemáticas, cada uno de los cuales está contenido en el siguiente (ver Figura 1).

Praxeologías matemáticas por enseñar	$\subset$	Praxeologías para la enseñanza	$\subset$	Praxeologías de la profesión docente

Figura 1. Praxeologías relacionadas con la docencia de matemáticas

Podemos ahora reformular el problema inicial en los términos siguientes:

Reformulación del problema de la formación del profesorado. ¿Cuál es el equipamiento praxeológico necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de una determinada etapa educativa) y qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él?

¿Qué se gana con esta nueva formulación? En primer lugar, mejora nuestra capacidad para describir y abordar la problemática de la formación del profesorado. Podemos, en efecto, preguntarnos por el conjunto de tareas y técnicas que el profesor debe llevar a cabo: cómo se definen, delimitan y concretan; de qué tipos son; de dónde surgen la técnicas; cómo se pueden desarrollar, evaluar, mejorar, etc. Del mismo modo podemos preguntarnos por las tareas y técnicas que efectivamente lleva a cabo, las que podría realizar pero no realiza y las que no lleva a cabo porque no se dan las condiciones necesarias para ello. También podemos indagar sobre el tipo de discurso tecnológico-teórico que utilizan los profesores (o la institución docente) para describir, tipificar y justificar las distintas *praxis*, así como reflexionar sobre ellas para hacerlas evolucionar. ¿De dónde surgen estos discursos? ¿Quiénes los producen? ¿Cómo evolucionan? ¿Cómo afectan las distintas prácticas? Y, podemos finalmente analizar los tipos de conexiones (o de desconexiones) que se establecen entre el bloque práctico y el bloque teórico de las praxeologías docentes. Por ejemplo, ¿pueden las praxeologías docentes evolucionar únicamente a partir del desarrollo natural de las técnicas y de discursos tecnológico-teóricos espontáneos? O, por el contrario, ¿se requiere algún tipo de elaboración más sistemática, un verdadero esfuerzo de investigación y formación, para desarrollar la profesión? Recíprocamente, ¿qué incidencia tienen sobre las tareas y técnicas docentes los discursos tecnológico-teóricos que aporta la didáctica de las matemáticas o aquellos más generalistas que provienen del ámbito de la pedagogía o la psicología educativa? ¿Hasta qué punto se yuxtaponen a antiguas prácticas o son realmente capaces de generar nuevas maneras de hacer y de pensar?

Queremos destacar finalmente un último aporte, para nosotros esencial, de la formulación del problema de la formación en términos de praxeologías. Y es que, a diferencia de las nociones culturales de saber, conocimiento, competencia, reflexión, creencia, habilidad o destreza, la noción de praxeología no aporta ningún juicio de valor *a priori* sobre los componentes de las actividades consideradas. La definición más rigurosa o el teorema mejor justificado son ingredientes praxeológicos del mismo modo que lo son las intuiciones, creencias, prejuicios o ideas comunes. Y lo mismo ocurre entre una metodología sofisticada y una simple manera de hacer: tal vez haya diferencias en su estado de evolución y grado de eficacia, pero las dos son «técnicas», con el mismo valor antropológico para la investigación.

Con relación al equipamiento praxeológico del profesor, es importante tener en cuenta que:

(a) Las praxeologías que lo constituyen no son, generalmente, construcciones individuales. La TAD asume un principio fundamental, el del *carácter institucional o colectivo de las praxeologías* según el cual su «vida» (en el sentido de construcción, desarrollo, mantenimiento, difusión, evolución, desaparición, etc.) no depende, en primera instancia, de las personas individualmente consideradas, sino de las *instituciones* en las que actúan estas personas.

(b) Muchas praxeologías relacionadas con la enseñanza (por enseñar, para la enseñanza y de la profesión) de las matemáticas no se pueden considerar como disponibles y listas para ser utilizadas en la enseñanza ni, mucho menos, en la formación del profesorado. Las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* se construyen en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías matemáticas *por enseñar* y están, como éstas, en evolución permanente. Así, por ejemplo, una cuestión del tipo «¿Cómo justificar en la enseñanza obligatoria la regla de los signos del producto de números enteros?», que pertenece plenamente a las matemáticas por enseñar, puede generar la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza —relacionando la emergencia de los números negativos con las necesidades manipulativas del álgebra elemental (Eva Cid y Noemí Ruiz-Munzón 2011)— y una praxeología de la profesión (en este caso, aún por construir).

(c) Dado el carácter permanentemente evolutivo de las *praxeologías de la profesión docente* con las que el profesor se tiene que equipar, el problema de su descripción puede formularse, dualmente, como el problema de determinar las *cuestiones* que están en el origen de estas praxeologías. Las designaremos como cuestiones «cruciales» o «umbilicales» ya que son las que explican la emergencia, existencia y desarrollo de estas praxeologías. El problema de la formación admite entonces una nueva formulación que podemos considerar como dual de la anterior:

Nueva reformulación del problema de la formación del profesorado. ¿Cuáles son las *cuestiones cruciales* con las que deben enfrentarse los profesores en su práctica docente y qué puede hacer la formación para ayudarles a construir *respuestas satisfactorias* (en forma de praxeologías) a estas cuestiones? En particular, ¿cómo se generan las cuestiones que están en el origen de las praxeologías matemáticas *por enseñar* y de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza*? ¿Cuáles son los problemas que constituyen la razón de ser de las *praxeologías de la profesión docente*?

El carácter «dual» de las dos formulaciones radica en que las respuestas a las cuestiones cruciales son, precisamente, los ingredientes básicos del *equipamiento praxeológico del profesor*. Ahora bien, este planteamiento tiene la virtud de mantener abierto el problema de la descripción de este equipamiento praxeológico y, por lo tanto, de su construcción y difusión en los procesos de formación. Hay que precisar entonces que estas cuestiones no son dificultades personales de los profesores debido a una supuesta falta de vocación, de interés, de formación o de dedicación. Remiten, al contrario, a problemas con que debe enfrentarse *la profesión de profesor* y a los que ésta debe aportar una respuesta colectivamente, es decir mediante la elaboración (o la puesta a disposición) de los recursos técnicos y teóricos —praxeológicos— apropiados. Tanto en la detección y formulación de estas cuestiones como en la elaboración y difusión de las respuestas, la didáctica de las matemáticas halla su función como saber instrumental básico para el profesorado.

(d) Cabe indicar, finalmente, que el equipamiento praxeológico necesario para la profesión docente requiere un trabajo matemático original y no trivial, como se pone claramente de manifiesto en la gran problematicidad que encierran las matemáticas que se enseñan en Secundaria (Cirade 2006).

La búsqueda de elementos de respuesta no es inmediata para el profesor ya que para responderlas se requieren *elaboraciones matemáticas originales* que se sitúan a caballo entre las matemáticas «sabias» y las «escolares». Son herramientas *matemáticas* de uso *didáctico* necesarias para el diseño, implementación y evaluación de los procesos formativos. Algunos ejemplos relevantes de elaboración de infraestructuras matemáticas potencialmente útiles para diseñar praxeologías matemáticas para la enseñanza, y dirigidos explícitamente a la formación del profesorado, se encuentran en el trabajo ya clásico de Félix Klein (1908/2006) *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior*, en el de Henri Lebesgue (1915/1995) *La medida de las magnitudes*, cuyo objetivo es fundamentar la relación entre los números reales y la medida de magnitudes continuas, o el menos conocido de Hassler Whitney (1968) sobre la matematización del cálculo con unidades.

1.2. Dimensión ecológica del problema de la formación del profesorado¡Error! Marcador no definido.

Para concretar la afirmación anterior, es bueno precisar que la TAD define la didáctica de las matemáticas como la *ciencia de las condiciones y restricciones de la difusión social de las praxeologías matemáticas,* difusión que incluye tanto los procesos de enseñanza y aprendizaje en instituciones escolares o de formación, como los procesos transpositivos entre diferentes tipos de instituciones, tanto de enseñanza como de producción y utilización de las matemáticas. Es evidente, en este sentido, que no sólo el problema de la formación del profesorado entra de pleno en su campo de estudio, sino que, al ser la escuela la institución «difusora» por excelencia y el profesorado su principal actor, la profesión docente y sus problemas constituyen, como decíamos al principio, uno de sus ejes prioritarios de investigación.

En la definición que hemos propuesto, se consideran como *condiciones y restricciones* de difusión de las matemáticas todo aquello que permite, favorece o impide esta difusión, siendo las *restricciones* aquellas condiciones difícilmente modificables en un momento dado y desde cierta posición institucional dada. Por ejemplo, el profesor en clase crea ciertas *condiciones* para que los alumnos puedan llevar a cabo una determinada actividad matemática, aportando las cuestiones y materiales que considera apropiados, interviniendo en los momentos cruciales, haciendo progresar, valorando y evaluando el trabajo de los alumnos, etc. Pero el hecho de que haya una escuela, una clase con alumnos de una misma edad, sesiones de 50 minutos tres veces a la semana y un currículum oficial, aun siendo *condiciones* que hacen posible los procesos de enseñanza y aprendizaje, representan, para el profesor, *restricciones* a su capacidad de acción y decisión (que el profesor como tal, desde su posición de profesor, no puede modificar).

Tradicionalmente, la investigación didáctica se ha centrado en el estudio de las condiciones creadas en el aula y, generalmente, al alcance del profesor que podrían mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A partir del estudio de los procesos de transposición didáctica, la TAD ya propuso no focalizarse únicamente en el ámbito circunscrito de la clase y considerar aquellas condiciones que no crea el profesor pero que son necesarias para que los procesos de enseñanza y aprendizaje puedan tener lugar (o dejen de tenerlo). Posteriormente, Chevallard (2001) propuso una manera de estructurar estas condiciones y restricciones siguiendo una jerarquía que designa como la *escala de niveles de codeterminación didáctica* y que se esquematiza en la Figura 3.

Los profesores en su práctica docente se encuentran con restricciones y condiciones que afectan su trabajo matemático en el aula con sus alumnos y que son específicas de la disciplina que enseña: se requiere disponer de determinadas nociones o herramientas matemáticas antes de poder construir otras, que las praxeologías matemáticas se puedan organizar en praxeologías locales, regionales, etc. en base a determinados criterios, etc. Como profesores pueden actuar sobre alguna de estas condiciones (en general aquellas relativas al nivel del *tema* o de la praxeología local) pero no sobre otras (por ejemplos sobre los «bloques de contenidos» o determinada manera de estructurarlos), condiciones que actúan entonces como restricciones del nivel de la disciplina. Y también se encuentran con restricciones y condiciones que provienen de los niveles superiores de codeterminación, las que afectan la forma de organizar el estudio de una disciplina en el centro —nivel de la pedagogía—, o de organizar el estudio en un

Civilización
↓
Sociedad
↓
Escuela
↓
Pedagogía
↓
Disciplina
↓
Área → Sector → Tema → Cuestión

Figura 3. Escala de los niveles de ccodeterminación didáctica.

determinado tipo de centro escolar —nivel de la escuela—, de organizarlo en una sociedad u otra, y de hacerlo siguiendo los principios y valores de una determinada civilización.

Bajo la presión de la pedagogía y las ciencias de la educación (que se dedican al estudio de las condiciones y restricciones no específicas de ningún contenido praxeológico dado), la didáctica de las matemáticas ha tendido tradicionalmente a circunscribir su ámbito de actuación a los niveles didáctico e inferiores, es decir aquellos que son específicos de la disciplina[8]. Pero es importante reconsiderar hoy esta delimitación original del objeto de estudio para poder afrontar un número importante de fenómenos que, desde los niveles más altos de determinación, afectan notablemente las condiciones concretas de difusión de la disciplina. Esto no significa que la didáctica deba ocuparse de todos los fenómenos sociales, escolares, y pedagógicos (lo que sería tan absurdo como imposible), pero sí que debe estudiar los *efectos didácticos de estos fenómenos*, es decir la manera cómo afectan la difusión de las praxeologías matemáticas en un determinado entorno institucional.

Por lo tanto, si nos tomamos en serio la *complementariedad de las distintas formulaciones* del problema de la formación del profesorado que hemos propuesto y asumimos que las cuestiones cruciales del profesorado deben estar en la base de su formación (asunción en la que coincidiríamos con muchos autores como Llinares (2004), Da Ponte (2004), Azcárate (2004), García et al. (2006), entonces la didáctica debe ampliar su objeto de investigación para abarcar fenómenos que surgen en los distintos niveles de la escala de codeterminación. Sólo despojándose de las limitaciones propias de la función docente —cuyo ámbito de actuación difícilmente puede rebasar los límites de la institución escolar— podrá la didáctica ampliar la mirada hacia aquellas condiciones no creadas ni modificables por el profesor pero que afectan de manera a veces determinante su capacidad de acción y de reflexión.

1.3. Interpretación del problema que plantean el PCK y el MKT

Una vez planteado el problema de la formación docente utilizando la noción básica de praxeología de la TAD, podemos reconsiderar los ejemplos presentados como prototipos del conocimiento especializado del contenido (PCK y MKT). En efecto estos también muestran los elementos praxeológicos específicos de la tarea docente. En los de

[8] Este tema se desarrolla en Gascón y Bosch (2007).

la Figura 2 y la Figura 3 dela sección 2.1. del Capítulo II donde se presentan producciones de algunos al alumnos relativas a la multiplicación y a la sustracción parece evidente que los alumnos han intentado emplear la «técnica usual» respectiva —predominante en la enseñanza— aunque hayan obtenido un resultado erróneo. Desde el punto de vista del observador, se trata de la puesta en funcionamiento de una técnica relativa a una *praxeología por enseñar*. El *conocimiento especializado del contenido*, necesario para elucidar por qué un alumno ha combinado, sustituido, confundido, etc. la secuencia de gestos prescritos para lograr el buen resultado, se situaría en el nivel de una *praxeología matemática para la enseñanza* en la institución de educación primaria. Los componentes de una tal praxeología incluyen las praxeologías por enseñar (es decir, la realización de los algoritmos de cálculo como el producto y la sustracción con sus gestos técnicos y algunos elementos tecnológicos explicativo), pero deben incorporar otros elementos praxeológicos (identificación de elementos de técnicas alternativas, con sus posibles justificaciones tecnológicas, etc.) que son los que «expanden», como dicen los autores, el conocimiento matemático elemental. Creemos que, mientras los alumnos pueden utilizar (de forma correcta o incorrecta) técnicas de una *praxeología por enseñar* para resolver tareas matemáticas sin un conocimiento explícito de las correspondientes tecnologías que permiten interpretar y justificar dichas técnicas, los profesores deben conocer o construir explícitamente las citadas tecnologías matemáticas para llevar a cabo las tareas que forman parte del *conocimiento especializado del contenido*.

Lo que no se observa en los distintos componentes del conocimiento especializado del contenido es el *cuestionamiento* de las praxeologías matemáticas por enseñar, de su naturaleza y componentes. ¿Qué técnica de multiplicación o de sustracción se enseña y por qué? ¿Qué otras alternativas posibles no se enseñan y por qué? ¿Qué diferencias, en un sentido ergonómico se pueden establecer entre las distintas técnicas (Sierra Bosch gascon 2013, Brousseau 2007, 2010) ¿Qué elementos tecnológicos deberían acompañarlas?, etc. Este tipo de cuestionamiento debería conducir, por medio de un análisis praxeológico, al estudio crítico de los componentes del saber por enseñar (por ejemplo mediante el análisis de los procesos transpositivos) y a la construcción de *modelos epistemológicos de referencia* (MER) relativos a los contenidos considerados, lo que requiere en general cuestionar también las delimitaciones de estos contenidos y su estructuración con otras praxeologías, más allá del nivel puntual e incluso local.

El enfoque centrado en el MKT pretende indagar cuáles son los tipos de tareas y problemas habituales que surgen en la enseñanza de las matemáticas y cuáles son los conocimientos, habilidades y sensibilidades que se requieren para gestionar dichas tareas. Para responder a estas cuestiones utiliza una metodología de corte «empirista» que no suele considerar las múltiples restricciones institucionales provenientes de los diferentes niveles de codeterminación didáctica que influyen en las prácticas sociales (en este caso prácticas docentes). Supone así que el *conocimiento matemático para la enseñanza* puede extraerse directamente de la observación de los profesores (especialmente aquellos considerados como «excelentes») y, además, que su difusión en las instituciones de formación puede llevarse a cabo sin demasiada dificultad.

En el mapa del *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), dentro del cual la noción fundamental es el citado *conocimiento especializado del contenido* (SCK), se considera que este conocimiento es específico de la profesión docente y que requiere interpretar, analizar y «extender» el conocimiento matemático tal como viene propuesto tanto por la matemática sabia como por la matemática escolar (el «conocimiento común»). Para describir este conocimiento, se utilizan las nociones habituales de la epistemología escolar, haciendo alusión a actividades «genéricas» que pueden hacer referencia a cualquier contenido matemático y a todos los temas del currículo.

A pesar de poner mucho énfasis en el carácter profesional de este conocimiento (no asimilable a ningún otro tipo de colectivo), no se considera como una construcción colectiva, manteniendo el carácter individual del problema de su adquisición, sin plantear la necesidad de generarlo, desarrollarlo, y hacerlo evolucionar hacia formas más adecuadas y transferibles. Tampoco se toma en consideración el problema de su fundamentación «teórica» ni de su articulación para formar un cuerpo de conocimientos con entidad propia. Y, lo que es más importante, el SCK no llega en ningún momento a cuestionar las praxeologías matemáticas escolares, asumiendo el modelo epistemológico dominante de las instituciones docentes.

Una de las consecuencias de la asunción acrítica del modelo epistemológico dominante en la descripción de las tareas en las que se supone interviene el SCK es la ambigüedad de su formulación. Así por ejemplo, la tarea de «evaluar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto» (Ball, Thames y Phelps, 2008) es completamente ambigua a menos que se precise el criterio sobre el que se basará dicha evaluación y adaptación. Así, en el caso del álgebra elemental, ¿qué significaría, por ejemplo, «evaluar y adaptar el papel que juegan los problemas de planteo algebraico en los libros de texto»? Es evidente que la respuesta a esta pregunta difiere según el tipo de modelo epistemológico que se asuma como referente.

Análogamente, las tareas de «presentar los conceptos matemáticos» y «elegir definiciones adecuadas» (Ibíd. 2008) comportan actividades completamente diferentes en función del papel que se pretenda otorgar a dichos conceptos y a dichas definiciones en una praxeología determinada. Asimismo, el significado de la tarea docente de «conectar los temas de los diferentes cursos académicos» (Ibíd. 2008) depende esencialmente del modelo epistemológico que se sustente para cada uno de los «temas» que se pretende conectar y para el conglomerado de los mismos. Por ejemplo, en el caso del álgebra elemental, ¿qué criterios deberían utilizar los profesores para «conectar» el álgebra elemental con la aritmética? ¿Considerando el álgebra como una aritmética generalizada, como un lenguaje que generaliza un presunto «lenguaje aritmético» o, por el contrario, considerando que el álgebra constituye un instrumento de construcción de lo numérico?

En resumen, la línea de investigación que se inició con el PCK y continuó con el MKT y sus diferentes desarrollos, enfatiza la necesidad de incluir en la formación del profesorado conocimientos disciplinares (en nuestro caso, conocimientos *matemáticos*) que no se limitan a los contenidos que el profesor debe enseñar y que, en general, no forman parte de la formación disciplinar básica de los futuros profesores. Nosotros asumimos completamente esta necesidad, al tiempo que proponemos ampliarla incorporando los siguientes postulados:

(1) El conjunto de las praxeologías de la profesión de profesor de matemáticas está estructurado en una progresión de complejidad y completitud creciente, tal como se indica en la Figura 2.

(2) Dado que las praxeologías referidas están en permanente estado de evolución y revisión, asumimos que, desde la didáctica de las matemáticas, no se dispone de descripciones completas y definitivas de ninguno de los tres niveles. Ni siquiera las praxeologías matemáticas *por enseñar* se pueden considerar como ya *disponibles en algún lugar* y, por tanto, susceptibles de ser utilizadas en la formación del profesorado. Mucho menos en lo que se refiere a las praxeologías *para la enseñanza* y a las praxeologías de la profesión docente. Postulamos, además, que la elaboración y

desarrollo de las praxeologías *matemáticas para la enseñanza* suelen modificar tanto las praxeologías matemáticas *por enseñar* como las propias praxeologías *de la profesión*.

(3) En todos los casos, la construcción y puesta a punto de las praxeologías que forman parte del equipamiento del profesorado de matemáticas *requiere un laborioso trabajo de investigación* que no puede soslayarse mediante un mero análisis empírico de los conocimientos que ya utilizan los profesores en su práctica docente habitual.

(4) Las praxeologías matemáticas *para la enseñanza*, al contener los conocimientos necesarios para delimitar adecuadamente, interpretar, relacionar entre sí y explicitar la razón de ser de las matemáticas *por enseñar*, constituyen componentes esenciales de las praxeologías de la profesión docente. Los casos citados anteriormente relativos a los trabajos de Whitney (1968), Lebesgue (1915/1995), y Klein (1908/2006) son ejemplos paradigmáticos que muestran que para enseñar matemáticas lo primero que se necesitan son «más matemáticas».

(5) Las praxeologías de la profesión docente se construyen (o reconstruyen) en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* o, incluso, en el ámbito de las praxeologías matemáticas *por enseñar*. Así, por ejemplo, una cuestión del tipo ¿cómo justificar en la enseñanza obligatoria la regla de los signos del producto de números enteros?, que pertenece plenamente a las matemáticas *por enseñar*, puede generar la construcción de una praxeología matemática *para la enseñanza* —relacionando la regla de los signos con la introducción del álgebra elemental— y una praxeología *didáctica* asociada (Cid y Ruiz-Munzón, 2011).

(6) Las *cuestiones generatrices* de dichas praxeologías pueden surgir en distintos ámbitos, como por ejemplo la formación del profesorado (planteadas, por ejemplo, por los propios profesores en formación), la noosfera, la propia profesión docente (por ejemplo, vía las asociaciones de profesores) o la investigación didáctica.

(7) La última de nuestras asunciones es que no tenemos un conocimiento muy amplio de cuáles son las cuestiones umbilicales de la profesión docente. Postulamos la necesidad de introducir nuevos dispositivos de investigación y de desarrollo profesional que posibiliten el *estudio de cuestiones* y sean capaces de generar y estudiar en las instituciones responsables de la formación del profesorado las cuestiones umbilicales de la profesión, siguiendo la brecha abierta por Cirade (2006).

2. Metodología de los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP)

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) propugna la necesidad de superar el paradigma escolar *de la visita de las obras*, todavía dominante en las instituciones escolares. En este paradigma, del que todos tenemos experiencia personal, las materias a estudiar son designadas por un programa establecido a priori sin que su *razón de ser*, esto es, las cuestiones a las que dichas materias vienen a responder, estén explícitamente presentes en el programa de estudio ni hayan sido acordadas socialmente. Se propone subsumir la visita de las obras en un nuevo paradigma, el *del cuestionamiento del mundo*, centrado en la necesidad de aportar respuestas a cuestiones problemáticas que surgen en la vida en sociedad y que se necesitan abordar para mejorar tanto nuestra comprensión del mundo como las formas de vivir colectivamente. En este nuevo paradigma, el estudio de obras preestablecidas no desaparece pero sí queda condicionado a la necesidad de utilizarlas para resolver problemas y cuestionar el mundo que nos rodea.

A fin de avanzar hacia el paradigma *del cuestionamiento del mundo*, la TAD propone un dispositivo didáctico, los *recorridos de estudio e investigación* (REI), que integra la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2013) y favorece el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional (Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Serrano, 2013). La aproximación progresiva a este nuevo paradigma requiere necesariamente la transformación de las condiciones del trabajo matemático del profesorado y, en particular, un replanteamiento radical del tipo de formación necesaria para la enseñanza de las matemáticas. En esta sección describiremos el dispositivo para la formación del profesorado que proponemos desde la TAD.

2.1. El cuestionamiento de la matemática escolar como punto de partida

En múltiples trabajos desarrollados en el ámbito de la TAD se ha cuestionado con argumentos matemático-didácticos la *razón de ser* que asigna el programa de estudios oficial —explicitada en los libros de texto— a determinados ámbitos (y hasta a nociones aisladas) de la matemática escolar.

Este cuestionamiento parte, normalmente, del estudio de un fenómeno didáctico en el que está involucrado dicho ámbito, y comporta la propuesta de una posible *razón de ser alternativa* que se materializa en un *modelo epistemológico de referencia* (MER) del ámbito en cuestión que, si se toma en serio, acabará modificando profundamente la actividad matemática establecida en la institución escolar —en torno al citado ámbito— así como las relaciones que dicho ámbito mantenía con las otras áreas de la matemática escolar.

Así, por ejemplo, la matemática escolar sitúa los números negativos en el área de la aritmética y utiliza modelos «realistas» (temperaturas, ascensores, haberes y deudas, etc.) para caracterizar su razón de ser. Supuestamente, la razón de ser de los números con signo sería la de expresar la medida de magnitudes opuestas y su estructura y operatividad se establecería por analogía a las de las magnitudes. Las limitaciones y hasta contradicciones de estos modelos realistas provocan la aparición de multitud de hechos didácticos entre los que citaremos la falsa necesidad de los negativos para resolver problemas aritméticos elementales, la imposibilidad de justificar y hasta de interpretar la regla de los signos del producto de números enteros y la incoherencia entre la ordenación que se deduce de los modelos realistas y el orden en el anillo de los enteros. Este conjunto de hechos permite conjeturar la existencia de fenómenos didácticos y provoca la necesidad de una interpretación alternativa de los números enteros y de su razón de ser en Secundaria. En esta línea, diversos trabajos han propuesto, desde la década de los 80, la introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico, mostrando que éstos son imprescindibles para simplificar el trabajo que debe llevarse a cabo con el cálculo algebraico y que, en consecuencia, ésta función constituye una posible razón de ser alternativa de los números enteros en la enseñanza secundaria. (Brousseau 1983, Chevallard 1988, 1990, Cid 2002, 2003, Cid y Bolea 2010, Ruiz-Munzón et al 2012).

> […] son las peculiaridades del cálculo algebraico las que fuerzan a operar con sumandos y sustraendos, en vez de con números, y posteriormente, serán la necesidad de establecer una teoría general de ecuaciones algebraicas, por un lado, y de modelizar algebraicamente la geometría, por otro, las que conducirán a la aceptación de los sumandos y sustraendos como números. (Cid y Bolea 2010, p. 586)

Como resultado de esta nueva posición curricular asignada a los negativos se transforma completamente la actividad matemática que será posible (y necesario) llevar a cabo con ellos y aparece la necesidad de introducirlos simultáneamente con el álgebra elemental, por lo que cambia completamente su relación con las diferentes áreas de la matemática escolar.

Situaciones similares se dan en otros ámbitos de la matemática escolar, como la proporcionalidad, el álgebra elemental, la medida, la numeración, las funciones, el cálculo diferencial, la geometría, la probabilidad, etc. Numerosos trabajos de investigación en la TSD y en la TAD, así como en otros enfoques didácticos muestran que la organización escolar de estos contenidos responde a principios epistemológicos discutibles, fruto de la acumulación de procesos de transposición didáctica complejos, realizados en distintos momentos del tiempo y como respuesta a proyectos sociales no siempre coherentes o cuanto menos heterogéneos.

La visión de la matemática escolar que propone la didáctica se basa pues en una actitud cuestionadora y reconstructiva no solo de los contenidos que se enseñan y de la forma de organizarlos, sino también de los paradigmas pedagógicos —visita de las obras frente a cuestionamiento del mundo— en que se sustentan su enseñanza y aprendizaje. En esta situación, y ante la pregunta ya clásica de Brousseau (1990, 1991) sobre qué puede aportar la didáctica al profesorado de matemáticas (en nuestro caso de secundaria), asumimos los dos postulados básicos siguientes:

(1) La didáctica aporta herramientas de cuestionamiento y análisis que permiten al profesorado mejorar su comprensión de la realidad escolar en la que debe actuar y también incrementar su capacidad de acción.

(2) La forma de poner estas herramientas a disposición del profesorado a través de la formación no puede inscribirse dentro del paradigma de la visita de obras que la propia didáctica contribuye a cuestionar, sino que debe tomar como punto de partida las cuestiones problemáticas que afectan a la profesión docente y que están en evolución permanente.

2.2. Modelo epistemológico de referencia, esquema herbartiano y recorridos de estudio e investigación (REI)

Como consecuencia del cuestionamiento de la matemática escolar, y para materializar la nueva forma de interpretar el ámbito de la actividad matemática en juego de tal manera que responda a la razón de ser alternativa que se postula, la metodología de la TAD propone, en cada caso, la elaboración de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) y la experimentación de *recorridos de estudio e investigación* (REI) sustentados en dicho MER y adaptados a los niveles educativos y condiciones de cada institución escolar. La actividad matemática que permiten llevar a cabo estos REI difiere radicalmente de la que es posible llevar a cabo en el correspondiente ámbito de la matemática escolar habitual y, al igual que sucedía en el caso de los números negativos, establece nuevas relaciones con el resto de las áreas de la matemática escolar.

La noción de REI surge de la necesidad de fundamentar las organizaciones didácticas —tanto las escolares como las de cualquier otro tipo de institución— en una epistemología realmente *funcional*, en la que los saberes aparezcan como máquinas productoras de conocimientos útiles a la creación de respuestas R a cuestiones Q. En palabras del mismo Y. Chevallard (2004)

> Contre le point de vue monumentaliste, qui donne le primat à l'étude « à vide » des savoirs et rejette au second plan, voire oblitère, les couples (Q, R), le point de vue *fonctionnel* met au premier plan les couples (Q, R), et ne promeut un savoir S qu'à proportion de son utilité éprouvée dans l'étude de questions Q et l'élaboration de réponses R.

Podemos ahora considerar un modelo más general de proyecto en el que el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de saberes o de sistemas praxeológicos designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones Q a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta $R^\heartsuit$. En este modelo, durante la actividad de estudio, se movilizarán todos aquellos recursos, medios, saberes y respuestas ya disponibles $R^\lozenge$ que sea necesario con tal de construir una «buena respuesta» $R^\heartsuit$.

El esquema herbartiano más general que permite representar las distintas formas posibles de cualquier recorrido de estudio e investigación es el siguiente:

$$[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow \{\, O_1, O_k, Q_1, Q_m, R_1^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge\}] \hookrightarrow R^\heartsuit$$

Puede considerarse de entrada como un sistema de referencia que utiliza el didacta para observar, describir, analizar y evaluar los sistemas didácticos existentes en las instituciones sociales o los sistemas teóricamente posibles. Lo podemos también considerar, por tanto, como un *modelo didáctico de referencia* (MDR) que proporciona un punto de vista propio y un modelo general de lo que se entiende en la TAD por «estudiar una cuestión» y, más en general, por «estudiar una obra».

Los elementos del esquema son los siguientes: Se parte de un sistema didáctico S formado por una comunidad de estudio X que se propone abordar una cuestión Q con la ayuda de un equipo de profesores Y. (tanto X como Y pueden reducirse a un único actor y también puede darse el caso de que Y sea inexistente, asumiendo X toda la responsabilidad del proceso). El resultado final de abordar la cuestión Q es la elaboración de una respuesta $R^{\heartsuit}$ formada por elementos praxeológicos más o menos integrados.

El «medio didáctico», $M = \{ O_1, \ldots, O_k, Q_1, \ldots, Q_m, R_1^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}\}$ está formado por tres conjuntos de elementos clave: un conjunto de cuestiones derivadas Q_i, un conjunto de respuestas ya establecidas, $R_i^{\lozenge}$ y, en cierto sentido, etiquetadas (o «selladas») por la cultura como entidades identificables, que representan respuestas previamente construidas con relación a las Q_i a las que se puede tener acceso. Dicho medio se compone además de otras obras u objetos, O_k que resultan de utilidad para la «deconstrucción» de las respuestas preestablecidas $R_i^{\lozenge}$, que fueron en su momento construidas para tratar cuestiones más o menos relacionadas con las que se están ahora planteando. Estas respuestas deben ser finalmente reconstruidas e incorporadas de acuerdo con las propias necesidades del estudio de Q y de las a las Q_i. En este sentido, cualquier respuesta preestablecida va a ser «buena» para el proceso de estudio si contribuye a la creación de respuestas parciales a Q, lo que conlleva un proceso epistemológicamente esencial de deconstrucción-reconstrucción de las praxeologías. No desarrollaremos más aquí este esquema que incluye, por sí mismo, toda la *dinámica* del desarrollo interno de las praxeologías (por ejemplo en la reconstrucción y puesta a prueba de las $R_i^{\lozenge}$). Nos centraremos ahora en destacar aquellas características que la TAD asigna a los procesos de estudio para poder ser considerados como REI.

El punto de partida de un REI es una cuestión generatriz Q «viva» para la comunidad de estudio y cuya respuesta no aparece directamente accesible. Como ya hemos dicho, el objetivo de estudiar Q no es la construcción de cierta organización matemática designada de antemano, sino la búsqueda de una respuesta apropiada $R^{\heartsuit}$. Esta respuesta debe constituir en sí misma una aportación significativa, en el sentido de ampliar el universo praxeológico de la comunidad de estudio. Por ello, acabará generalmente incluyendo praxeologías por lo menos locales, integrando elementos praxeológicos que pueden ir más allá del nivel regional e incluso disciplinario. Nos referiremos a ello diciendo que Q es una *cuestión* en el sentido fuerte de la palabra.

A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q evoluciona y da lugar a muchas nuevas cuestiones derivadas: Q_1, Q_2,…, Q_n cuya pertinencia debe ser constantemente revisada. El criterio esencial para decidir la pertinencia de las Q_i es precisamente su capacidad para proporcionar respuestas praxeológicas R_i que contribuyan a elaborar la respuesta final $R^\heartsuit$. Forma parte del propio REI el tomar en consideración la dificultad o «estudiabilidad » de estas cuestiones derivadas, esto es, la posibilidad, para la comunidad de estudio, de proporcionarse «medios» de validación adecuados y de disponer de buenos «media» al respecto. De ahí que todo REI presente una estructura necesariamente abierta e indeterminada al inicio, puesto que es el propio proceso de estudio el que va delimitando los posibles caminos a seguir (con tantos retrocesos, rodeos y atajos como sea necesario). Es también habitual que, a lo largo del REI, la cuestión generatriz Q evolucione y se transforme en una o varias nuevas cuestiones, por ejemplo cuando el avance del estudio requiere un nuevo planteamiento o reformulación del problema inicial, lo que marca otro grado de apertura de los REI.

Podemos postular, sin reducir el universo de posibles «formas» y «estructuras» de un REI, que, en todos los casos, el trabajo de producción de $R^\heartsuit$ podrá describirse como una arborescencia de cuestiones Q_i y de respuestas R_i a estas cuestiones, lo que conduce a un conjunto de praxeologías relacionadas entre sí que se pueden interpretar a menudo como un proceso de modelización progresiva y recursiva (Barquero, Bosch y Gascón, 2007).

2.3. Estructura del proceso de formación: el dispositivo de los REI-FP

En nuestra investigación proponemos un dispositivo didáctico con estructura de REI enfocado a la formación del profesorado, que denominamos *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP). La motivación de este tipo de dispositivo es doble. Por un lado, las investigaciones sobre la ecología de los REI han puesto en evidencia el problema de la formación de los profesores para adaptarlos al nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo. Además, si el objetivo es ir preparando una transición efectiva del paradigma monumentalista al del cuestionamiento del mundo, la propia formación del profesorado requiere dispositivos didácticos que no se fundamenten únicamente en el paradigma monumentalista y, por ello, deben recurrir de un modo u otro a dispositivos con estructura tipo REI (estudio de cuestiones, medias y medios, etc.). Proponemos, en consecuencia, un dispositivo didáctico con estructura de REI enfocado a la formación del profesorado, el REI-FP, cuyos componentes principales se describen a continuación.

La cuestión generatriz del REI-FP

Todo proceso de formación surge para dar respuesta a una cuestión problemática $\mathbf{Q_0}$. En el caso de la formación del profesorado, el punto de partida lo constituye una cuestión viva y crucial para la profesión docente que denominamos **$\mathbf{Q_0}$-FP**. Para responder a esta cuestión, el proceso de formación se articula en cinco módulos y es precisamente el estudio de esta cuestión inicial lo que dará lugar al REI-FP permitiendo al mismo tiempo articular los módulos que lo componen y mostrar su funcionalidad.

Veremos en lo que sigue que esta cuestión inicial debe poder formularse en términos propios de la problemática docente y hacer referencia al entorno institucional del profesorado. Esto significa que la problemática que se estudia en la formación del profesorado debe tomar en consideración e incluir las preocupaciones más básicas de los profesores en formación, aquellas que traen de la noosfera o de la pedagogía dominante, pero sin reducirse a ellas, puesto que muchas necesidades matemático-didácticas de la profesión que se ponen de manifiesto en el estudio de determinados fenómenos didácticos, no siempre son reconocidas explícitamente por los propios profesores.

Módulo $\mathbf{M_0}$: «¿Cómo enseñar *C*?»

A fin de partir de una cuestión inicial que forme parte de la problemática de la profesión, los REI-FP experimentados hasta el momento siempre han tenido origen en un determinado ámbito, competencia o contenido matemático *C* (por ejemplo la proporcionalidad, el álgebra elemental, los sistemas de numeración, la modelización, etc.) y de la pregunta umbilical para la profesión $\mathbf{Q_0}$: «¿Cómo enseñar *C*?», que también puede formularse como «¿Cómo organizar el estudio de *C*?» La toma en consideración de esta cuestión es lo que va a generar todo el REI-FP, por lo tanto, el módulo M_0 es en cierta forma transversal a todo el recorrido, a diferencia de los siguientes que requieren una secuencia temporal.

Este módulo contiene tanto la *construcción* de Q_0 (su elección y asunción) como las primeras exploraciones con vista a elaborar primeros elementos de respuesta, generalmente a partir de los *media* más habituales para los profesores: currículum, libros de texto, revistas para el profesorado, revistas de investigación, centros de recursos, webs, etc. El rol de los formadores *Y* en este proceso no es el de aportar elementos de respuesta para darlos a conocer a los profesores, sino guiarlos en la búsqueda de estos elementos y, sobre todo, iniciarlos a los gestos básicos del cuestionamiento didáctico: ¿Qué es *C*? ¿De dónde viene? ¿En qué ámbitos matemáticos y no matemáticos se utiliza o utilizaba? ¿Por qué hay que enseñarlo? ¿Cuáles son sus razones de ser en la matemática escolar (las establecidas explícita o implícitamente y las potenciales)? ¿Qué propuestas de enseñanza existen? ¿Qué se dice o sabe de ellas?, etc.

Es muy importante que durante todo el REI-FP estas cuestiones se mantengan vivas, es decir, a la vez presentes y sin respuesta definitiva. Desafortunadamente, no es la actitud habitual en nuestra sociedad, ni en relación con las cuestiones docentes ni en relación con muchas otras. Chevallard retomaba al respecto algunas afirmaciones totalmente pertinentes del literato francés Maurice Blanchot:

> [N]ous tendons à regarder le monde comme un ensemble de réponses à des questions que nous finirons bientôt par oublier. « Dans les périodes dites heureuses, seules les réponses semblent vivantes » observe justement Maurice Blanchot (1907-2003). Inversement, voir le monde comme un ensemble de questions – éventuellement sans (bonnes) réponses – ne va pas de soi. […] [E]n outre, l'assomption d'une question Q peut être réduite à rien par l'imposition trop rapide, intempestive, dogmatique d'une réponse R qui ne serait avancée que pour masquer et faire oublier la question, selon un mécanisme que Blanchot a su condenser en ce précieux aphorisme : « La réponse est le malheur de la question. » Quelle qu'elle soit, au demeurant, la réponse R doit être considérée comme provisoire, simple moyen de pourvoir à des besoins qui n'attendent pas, en un geste qui ne soit ni figé ni fermé sur lui-même – quand bien même le provisoire semblerait promis à durer. Toute réponse à une question doit ainsi être regardée comme indéfiniment offerte à de fécondes reprises en forme de déconstructions et de reconstructions : « lorsque tu affirmes, tu interroges encore », soulignait Blanchot.

Podemos, en definitiva, definir este módulo inicial y transversal del REI-FP como el módulo de la problemática del profesor, donde se parte de una cuestión o de un conjunto de cuestiones propias de la profesión para las que se irán elaborando poco a poco elementos de respuestas colectivos y para las que, al final del proceso, cada uno de los profesores deberá también poder aportar sus respuestas personales.

Módulo M_1: «Vivir un REI»

Dentro del módulo M_0 que acabamos de presentar aparecerán muchas respuestas institucionales elaboradas desde distintos ámbitos, como propuesta de enseñanza de *C*. Sin duda, será más difícil obtener elementos cuestionadores o refundadores de *C*, algo que se considera fundamental en la TAD (así como en otros enfoques). La herramienta principal de que se dispone en didáctica para este cuestionamiento es el modelo epistemológico de referencia (MER) y las distintas formas que pueda tomar. Dado que este MER tiene estructura de REI, una posible manera directa de poderlo poner a disposición a los profesores es realizarlo directamente durante el proceso de formación.

Por lo tanto este módulo se diseñará con el objetivo de que el estudiante-profesor realice un REI en posición de matemático o, más generalmente, de estudiante X de un sistema didáctico S(X, Y) que se sitúa en la institución de formación del profesorado. Como en todo REI, esta primera fase del recorrido de formación partirá de una cuestión Q_1 a la que se deberá aportar una respuesta. La cuestión Q_1 es, por lo general, una reformulación de la cuestión generatriz que guio el REI previamente experimentado con alumnos de secundaria. Más adelante mostraremos ejemplos de REI y comentaremos sus relaciones con los MER asociados.

Módulo M_2: «Analizar el REI vivido»

La cuestión generatriz Q_2 que dirige esta segunda fase del recorrido de formación debe girar en torno al cuestionamiento matemático-didáctico del REI vivido anteriormente en posición de estudiante.

En este segundo módulo se debe cuestionar y analizar en profundidad la estructura y la dinámica del REI vivido, tanto en lo que respecta a la *praxeología matemática construida* efectivamente, como en lo que hace referencia a la *organización didáctica* de este proceso en términos de la articulación de los *momentos del estudio*, de los *gestos* y las *técnicas y tecnologías didácticas* que se han puesto en juego, y en términos de las *responsabilidades* que han asumido los profesores en formación (en su papel de estudiantes) y el formador (en su papel de director del proceso de estudio) (Chevallard, 1999). En esta memoria nos centraremos en los aspectos del análisis del REI vivido que pueden contribuir directamente a la *construcción de una praxeología para la enseñanza*.

En general, la estrategia que se utiliza para la elaboración de una praxeología *para la enseñanza*, se inicia con el cuestionamiento de la correspondiente praxeología *escolar por enseñar* y, por consiguiente, con la construcción de un MER que redefine el ámbito específico de la matemática escolar que está en juego. En el Capítulo IV de esta memoria se ejemplifican diversos casos particulares de aplicación de esta estrategia.

En esta estrategia, los criterios y principios que rigen el proceso de construcción del MER son componentes importantes de la praxeología para la enseñanza, puesto que el conocimiento de los mismos es imprescindible para delimitar e interpretar adecuadamente la actividad matemática en cuestión. Para sacar a la luz los citados criterios y principios, que deben explicitarse en esta fase del proceso de formación en la que se analiza el REI vivido, se requiere un análisis comparado entre la razón de ser que el currículo oficial asigna al ámbito de la actividad matemática en juego, y la razón de ser alternativa que le asigna el MER que sustenta al REI vivido.

Para llevar a cabo este análisis, los profesores en formación deberán utilizar como material empírico los documentos curriculares oficiales y libros texto, los materiales que describen la experimentación realizada previamente con los alumnos de Secundaria, y el material elaborado en su propia vivencia del REI.

Es obvio que, como en todo análisis científico, la elección de las cuestiones que dirigirán el análisis estará guiada por el punto de vista que tomemos para realizarlo. En este caso, al igual que en el primer módulo, el punto de vista nos lo proporciona el MER construido.

Módulo M_3: «Diseñar un REI»

La cuestión generatriz Q_3 que dirige esta tercera fase del recorrido de formación puede enunciarse del modo siguiente: ¿Cómo llevar a cabo la tarea de diseñar un REI para los alumnos de cierta etapa educativa, análogo al vivido, y analizado en las fases anteriores? Esta cuestión da origen a otras más concretas tales como: ¿Qué elementos componen el diseño de un REI? ¿Cuál es el orden más razonable para diseñar cada uno de dichos elementos? ¿Cómo deben expresarse materialmente dichos elementos del REI? Los criterios básicos para dar respuesta a estas cuestiones y explicitar un *diseño didáctico a priori* de un REI análogo al vivido surgen directamente de las respuestas aportadas en los dos módulos anteriores, si bien hay que tener en cuenta que la aplicación de los criterios matemático-didácticos obtenidos no es inmediata.

Módulo M_4: «Gestionar y experimentar un REI»

El objetivo de este módulo es doble: por un lado, dar soporte regular a los profesores que se inician en el diseño y gestión de los REI y, por otro, recoger las cuestiones, dificultades y obstáculos que han podido surgir durante esta gestión. Este trabajo experimental debería proporcionar criterios fundados para modificar el diseño de los REI de cara a nuevas experimentaciones.

En estos momentos no podemos decir gran cosa de este módulo que se ha experimentado en muy pocas situaciones de formación y está en proceso de análisis y concreción. Consideramos, de todos modos, que este módulo es clave por diversos motivos. En primer lugar, porque constituye un ámbito de validación experimental final del REI-FP llevado a cabo y de las nuevas posibles formas de organizar tanto los contenidos matemáticos curriculares como su enseñanza y aprendizaje (lo que sería la $R^{\heartsuit}$ del REI-FP). En segundo lugar, porque es también una fuente de nuevas cuestiones para proseguir con el estudio, tanto para los profesores que lo experimentan como para los investigadores o formadores. Finalmente, creemos que este módulo puede representar un buen terreno de cooperación entre profesores e investigadores en una perspectiva análoga a la que propone el equipo de la universidad de Turín dirigido por Ferdinando Arzarello (2013).

3. Aportación del MER a la construcción de praxeologías para la enseñanza: el caso del álgebra escolar

En los trabajos llevados a cabo en la TAD, los criterios para concebir y construir praxeologías didácticas se obtienen, normalmente, a partir del estudio de un fenómeno didáctico emergente de prácticas matemáticas institucionales en torno a un ámbito específico de actividad. Utilizando dichos criterios, y apoyándose en determinadas *infraestructuras matemáticas* que también forman parte de las praxeologías de la profesión docente, se construye en cada caso un *modelo epistemológico de referencia* (MER) en torno al ámbito en cuestión. Es este MER el que sirve de núcleo básico para desarrollar una praxeología matemática para la enseñanza que permite concebir y construir, junto a otros componentes de las praxeologías de la profesión, la praxeología didáctica asociada a la praxeología por enseñar (que podemos considerar, en cierto sentido, contenida en la anterior).

De acuerdo con lo dicho anteriormente, el problema de la construcción de una praxeología *para la enseñanza* con el fin de utilizarla, por ejemplo, en una institución de formación del profesorado, está estrechamente relacionado con el problema de la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) de la correspondiente praxeología *por enseñar*. Consideramos que el proceso de construcción de un MER y los criterios y principios que lo rigen constituyen componentes de una praxeología para la enseñanza, sin olvidar que, en la propia construcción del MER y de la praxeología para la enseñanza también intervienen componentes de las praxeologías de la profesión. Esta es la razón por la cual la elaboración de una praxeología para la enseñanza, en el ámbito de la TAD, ha estado siempre ligada al cuestionamiento de las praxeologías escolares habituales y, consiguientemente, a la reconstrucción de nuevas maneras de interpretar las praxeologías por enseñar.

En este apartado mostraremos, a título de ejemplo, qué aspectos del proceso de construcción de un MER en torno a una praxeología por enseñar (en cierta institución) pueden interpretarse como componentes de una praxeología para la enseñanza en la citada institución. Para ello tomaremos el caso del *álgebra elemental* porque disponemos de múltiples trabajos elaborados en el ámbito de la TAD en los que se cuestiona y se reformula este ámbito de la matemática escolar (Chevallard 1985, 1989, 1990; Bolea, Bosch y Gascón 2001; Bolea 2003; Ruiz-Munzón 2010; Ruiz-Munzón et al 2012; Chevallard y Bosch 2012; Bosch 2012).

Ante el problema de la enseñanza del álgebra elemental, el cuestionamiento del que parte la TAD no aborda, como *objeto de estudio primario*, los errores y dificultades que muestran los alumnos en su actividad matemática ni los posibles recursos que pueden utilizar los profesores para mejorar su enseñanza. El primer paso consiste en analizar los componentes de la organización matemática escolar que, en el caso que nos ocupa, es la organización en torno al álgebra elemental. Se empieza así por estudiar qué se enseña actualmente bajo la designación de «álgebra» en las distintas instituciones escolares, qué se ha enseñado en otros periodos y qué tipos de evoluciones ha seguido el proceso transpositivo para desembocar en la organización matemática escolar actual en torno al álgebra elemental. Se constata entonces (Chevallard 1985) que la problemática a la que responde lo que se denomina escolarmente «álgebra elemental» no está claramente explícita ni en el currículo oficial ni en los libros de texto y, en cierto sentido, podríamos decir que la institución de la enseñanza secundaria (no sólo los profesores ni sólo los libros de texto) ha «olvidado» la razón de ser del álgebra elemental. El modelo epistemológico del álgebra elemental vigente la presenta, de hecho, como una *aritmética generalizada* constituida por un conjunto de tareas y técnicas bastante formales y desarticuladas, y muy débilmente interpretadas y justificadas Este hecho permite explicar muchas de las dificultades para enseñar y aprender el álgebra elemental en Secundaria (Bolea, Bosch y Gascón 2004).

En esta situación, cuando se pretende construir un programa de formación del profesorado, no parece razonable diseñar una praxeología *para la enseñanza* con base en el modelo epistemológico del álgebra elemental dominante en la enseñanza secundaria, ya que no sólo no permitiría a los futuros profesores cuestionar el saber por enseñar y, en consecuencia, superar las limitaciones didácticas que provoca el modelo epistemológico dominante, sino que las reforzaría. La TAD propone utilizar el *análisis praxeológico* del álgebra elemental y el estudio de los procesos transpositivos que afectan a este ámbito de la matemática enseñada como punto de partida en la formación del profesorado, para llevar a cabo el proceso de *co-construcción de un MER* para dicho ámbito y, en particular, conseguir que afloren los *criterios y principios* que han regido su construcción y que servirán posteriormente como criterios y principios para el diseño, gestión, análisis y desarrollo de nuevos procesos didácticos quesuperen las limitaciones citadas.

En lo que sigue, desarrollaremos brevemente y a modo de ejemplo, algunas de las principales cuestiones y principios que han guiado la construcción del MER en torno al álgebra elemental, para mostrar en qué sentido se pueden considerar como una base para diseñar una posible praxeología matemática para la enseñanza en torno a dicho ámbito. En otros términos, las cuestiones que propondremos son cuestiones que deberían surgir y estudiarse en un proceso de formación del profesorado de matemáticas. El conjunto de dichas cuestiones que, junto a las respuestas provisionales formarían parte de una posible praxeología para la enseñanza, es decir del conjunto de herramientas útiles (necesarias pero no suficientes) para el profesorado en el momento de diseñar, gestionar, analizar y desarrollar procesos de enseñanza del álgebra elemental. En el caso que nos ocupa, la elección de las cuestiones que propondremos se fundamenta en la forma como se interpreta en la TAD el álgebra elemental y en los resultados obtenidos en los trabajos de investigación desarrollados anteriormente en este ámbito.

El proceso de construcción de un MER del álgebra elemental en Secundaria podría partir de una cuestión como la siguiente:

> Q_0: ¿Qué papel juega y qué papel podría jugar el álgebra elemental en la matemática escolar de Secundaria?

Con relación a la razón de ser «oficial» asignada al álgebra elemental, esto es, al papel que juega el álgebra elemental en Secundaria, ya hemos indicado que el modelo epistemológico vigente la presenta como una *aritmética generalizada* constituida por un conjunto de tareas y técnicas bastante formales y desarticuladas y muy débilmente interpretadas y justificadas (Bolea et al. 2001).

Entre las posibles respuestas a la pregunta relativa al papel que el álgebra elemental podría jugar, debería considerarse, entre otras, la que afirma que el álgebra elemental debe considerarse, en Secundaria, como un *instrumento de modelización* de todo tipo de sistemas (sean estos matemáticos o extramatemáticos). Plantearemos a continuación cuestiones que surgen al identificar el álgebra elemental con un instrumento de modelización:

Q_1: ¿Qué praxeologías matemáticas pueden tomarse como sistema inicial a modelizar?

Q_2: ¿Qué tipos de tareas matemáticas planteables en este sistema podemos tomar como punto de partida?

Entre las respuestas posibles se encuentra la de considerar como sistema inicial por modelizar la praxeología matemática en torno a los *problemas aritméticos*, con la emergencia de la noción de *programa de cálculo aritmético* (PCA) (Ruiz-Munzón 2010).

Si aceptamos que el álgebra elemental debe jugar inicialmente el papel de un *instrumento de modelización* y que este instrumento se desarrolla a través de etapas sucesivas que denominamos *etapas del proceso de algebrización* de praxeologías matemáticas, entonces la construcción del MER requerirá plantearse y discutir posibles respuestas alternativas a la siguiente cuestión:

Q_3: ¿Qué cuestiones problemáticas que se pueden plantear en dicho sistema requieren de manera ineludible el uso, en la primera etapa de la ESO, del instrumento algebraico y, por lo tanto, posibilitan la génesis funcional del mismo?

En la respuesta que propone actualmente la TAD, se identifica la *primera etapa del proceso de algebrización* con el momento en que es necesario trasladar la *formulación retórica* de un PCA a una *formulación escrita* (simbólica) de dicho PCA y manipular su estructura globalmente. En esta etapa aparecen nuevas técnicas, esencialmente de *simplificación*, para resolver los nuevos problemas. El paso de la formulación retórica de un PCA a su formulación simbólica pone en juego la necesidad de escribir la secuencia de *operaciones en una única línea, explicitando su estructura de forma global* y, por lo tanto, tomando en consideración la *jerarquía de las operaciones*, las reglas del *uso de paréntesis* y las propiedades de las relaciones entre ellas (elementos tecnológicos).

Q_4: ¿Qué nuevo tipo de tareas deberán plantearse en el ámbito de los problemas aritméticos para poner de manifiesto las limitaciones de las técnicas de simplificación y provocar la emergencia de nuevas técnicas algebraicas definitorias de una segunda etapa de algebrización?

En los trabajos de la TAD, el paso a la *segunda etapa del proceso de algebrización* se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que contienen los dos mismos argumentos no numéricos x_1 y x_2.

$$P\ (x_1, x_2, a_1,\ldots, a_k) = Q\ (x_1, x_2, b_1,\ldots, b_s)$$

Se requiere de nuevas técnicas, las *técnicas de cancelación*, puesto que hay que manipular una igualdad de dos PCA como un nuevo objeto matemático (se trata, en general, de una *ecuación con dos incógnitas*). Dichas técnicas persiguen obtener *ecuaciones equivalentes* y no sólo PCA equivalentes como pasaba con las técnicas de simplificación características de la primera etapa. En esta segunda etapa del proceso de algebrización es donde se sitúa, como caso particular, la praxeología que contiene los tipos de tareas resolubles mediante *ecuaciones con una incógnita* (en el caso que uno de los argumentos, x_1 o x_2, tome un valor numérico concreto). Es precisamente en esta sub-etapa del proceso de algebrización —caracterizada por la resolución de ecuaciones con una incógnita (o de sistemas de ecuaciones compatibles determinados) y de los problemas de planteo cuya resolución da origen a este tipo de ecuaciones o sistemas, donde el currículo oficial sitúa la razón de ser del álgebra elemental.

Q_5: ¿En cuántas etapas parece razonable articular el proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas en la enseñanza secundaria?

La TAD propone estructurar el proceso de algebrización en tres etapas. La *tercera etapa* corresponde al momento en que surge la necesidad de no limitar el número de variables y de no hacer distinción entre *incógnitas* y *parámetros*. El tipo de cuestiones que provoca esta ampliación tiene relación con el estudio sobre cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre el PCA, aunque las técnicas disponibles (en la institución de la enseñanza secundaria obligatoria) para abordar estas cuestiones en el ámbito puramente algebraico son bastante limitadas. Otro tipo de cuestiones que no pueden resolverse plenamente en la segunda etapa son las que hacen referencia a la *existencia y unicidad de soluciones* ni tampoco las que apelan a la *razón de ser alternativa* que se asigna al álgebra elemental en Secundaria cuando se la identifica con un instrumento de modelización.

Q_6: ¿Qué papel se asignará a las ecuaciones con una incógnita en dicho proceso?

Q_7: ¿Y a las ecuaciones con dos incógnitas?

En el MER que propone la TAD, la actividad matemática en torno a las ecuaciones con una incógnita se sitúan entre la primera etapa (ecuaciones con una incógnita que no requieren del uso de la técnica de cancelación) y la segunda etapa (ecuaciones que requieren el uso de dicha técnica). Dicha actividad se considera como un caso muy particular de la actividad en torno a las ecuaciones con dos incógnitas que se sitúa plenamente en la segunda etapa del proceso de algebrización.

> Q_8: ¿Cuáles son las cuestiones matemáticas o extramatemáticas a las que el álgebra elemental viene a responder en la enseñanza secundaria? Esto es, ¿cuál es la razón de ser del álgebra elemental?

> Q_9: Los problemas que se resuelven por medio de un sistema de ecuaciones con solución única, ¿constituyen la razón de ser del álgebra elemental en Secundaria?

La TAD propone como razón de ser del álgebra elemental —como culminación del proceso de algebrización elemental— la actividad que caracteriza la tercera etapa del proceso de algebrización, esto es, el trabajo sistemático con *fórmulas* en el que no se limita el número de variables y en el que se lleva a cabo un juego sistemático entre «incógnitas» y «parámetros» que se consideran intercambiables.

Añadamos, finalmente, que la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza en torno al álgebra elemental también debería incluir cuestiones matemático-didácticas de más largo alcance aunque no avanzaremos más en este desarrollo sobre los posibles componentes de las praxeologías para la enseñanza y su relación con la elaboración y uso de un MER.

Hemos querido ilustrar la complejidad y riqueza del *análisis praxeológico* de la matemática enseñada que propone la TAD y que también debería incluir el estudio de los *procesos transpositivos* que explican el estado actual de la enseñanza del álgebra en secundaria, sus orígenes, motivaciones y deficiencias (Ruiz-Munzón, 2011).

Postulamos que las cuestiones Q_i ($i = 1,\ldots, 9$) junto a posibles respuestas tentativas a las mismas (alternativas a las que propone la TAD en estos momentos), así como otras muchas posibles cuestiones derivadas de dichas respuestas, deben formar parte de una praxeología matemática para la enseñanza en torno al álgebra elemental.

Los principios y criterios que se utilizan no sólo para responder a las sucesivas cuestiones Q_i sino, sobre todo, para formularlas y determinar así la estructura y la dinámica de un MER u otro y, por consiguiente, la asignación de una razón de ser u otra al álgebra elemental en Secundaria, deben considerarse como componentes de una primera versión de una praxeología para la enseñanza que deberá ser reconstruida completada y desarrollada en cada nuevo proceso de formación del profesorado y que, en última instancia, está basada en infraestructuras matemático-didácticas que forman parte de las praxeologías de la profesión.

4. **Formulación del problema de investigación**¡Error! Marcador no definido.

Hemos visto que el problema de la formación del profesorado de matemáticas es un problema abierto para la investigación en didáctica de las matemáticas, tanto cuando se plantea en términos del equipamiento praxeológico necesario para el ejercicio de la profesión de profesor de matemáticas como cuando se plantea en términos de las cuestiones cruciales con las que se enfrentan estos profesionales de la docencia. Es evidente que el problema debe permanecer abierto porque el conjunto de cuestiones está en evolución permanente, ya sea por los cambios que afectan al sistema de enseñanza en su conjunto, como por los nuevos desafíos que plantea la difusión de las matemáticas en nuestra sociedad también cambiante. Del mismo modo, tampoco se puede zanjar de una vez por todas el problema del equipamiento praxeológico del profesorado, en primer lugar porque cambian las cuestiones a las que este equipamiento debe aportar respuesta, pero también porque, a partir de la investigación didáctica y del desarrollo de la propia práctica docente, surgen constantemente nuevos recursos, nuevos conocimientos, nuevos desafíos y también la necesidad de modificar y renovar las antiguas praxis.

Como indican Chevallard y Cirade (2009), dispositivos de formación como el de las «preguntas de la semana» tienen la virtud de permitir:

> Pour cette raison, une formation professionnelle d’université doit assumer humblement un postulat d’ignorance ou de quasi-ignorance grâce auquel il devient possible d’identifier peu à peu, collectivement, les principaux problèmes de la profession sur lesquels butent non seulement les professionnels en formation mais aussi, presque toujours, la profession elle-même. Car une formation de professionnels est nécessairement coextensive à une redéfinition (à prétention méliorative) de la profession. (p. 56)

La línea de investigación iniciada por estos dos autores sobre la identificación y el análisis de estos *problemas de la profesión* saca a relucir interesantes resultados sobre el alcance y las posibilidades de tratamiento de esta problemática. Como hemos indicado, en esta memoria nos centramos en un aspecto esencial de los problemas de la profesión detectados: el que tiene que ver con la problematicidad *matemática* y, más en general, con la compleja relación que se establece entre la profesión de profesor de matemáticas y la disciplina que los profesores tiene que enseñar.

4.1 Problematicidad de la matemática escolar para la profesión docente¡Error! Marcador no definido.

En su trabajo de tesis doctoral centrado en el proceso de formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria en el IUFM de Aix-Marseille, Cirade (2006) analiza los tipos de dificultades con que se encuentran los alumnos-profesores para asumir y transformar las normas institucionales del oficio al que se inician. En el análisis meticuloso que lleva a cabo del dispositivo de las preguntas de la semana, que completa con otros tipos de datos empíricos, como los informes de observación de clase por parte de los formadores y los que redacta el profesor-tutor, esta investigación pone en evidencia que, al iniciarse en el oficio de profesor, los alumnos profesores descubren bastante pronto algo que su formación disciplinar previa no les permitía sospechar: a saber, que las matemáticas resultan ser, desde distintas perspectivas, algo *problemático*.

En algunos casos es posible obtener la información necesaria para construir las respuestas apropiadas a través de los colegas profesores o de recursos fácilmente disponibles para los miembros de la profesión. La formación inicial —tanto matemática como didáctica— y las prácticas tuteladas del joven profesor constituyen aquí la vía ideal para subsanar el problema. Sin embargo, en muchos otros casos la búsqueda de elementos de respuesta adquiere una mayor complejidad, como cuando surgen cuestiones del tipo:

- ¿Cómo justificar la regla de los signos del producto de números enteros?
- ¿Qué diferencia hay entre una razón, una fracción y un cociente?
- ¿Por qué se miden los ángulos en radianes?
- ¿Por qué es tan importante la función de proporcionalidad?
- ¿Se necesitan realmente los números reales en la educación secundaria?
- ¿Para qué sirve la noción de mediana?
- Entre las diferentes escrituras de los números que aparecen en Secundaria (fracciones, decimales, raíces cuadradas, potencias de diez,…), ¿dónde se sitúan los cosenos?

Esta última cuestión ha sido tomada de Chevallard y Cirade (2010) y en ese mismo trabajo se propone una primera respuesta para subsanar esta *carencia matemática de la profesión* y es la profesión la que tiene la responsabilidad de elaborar una respuesta adecuada para ponerla a disposición de los profesores.

> Un professeur stagiaire ayant en charge, durant l'année 2003-2004, une classe de 4^e témoignait de difficultés qu'on ne peut ignorer lorsqu'on doit piloter une classe ou former à ce pilotage : « Je voudrais, écrivait-il, faire avec les élèves un bilan sur les différentes écritures des nombres rencontrées en 4^e : forme décimale, fractions, racines carrées, puissances de 10. Je ne sais pas comment traiter les cosinus. » Que faire en effet des cosinus ? La question renvoie d'abord à un manque *mathématique* de la profession.
>
> Disons en quelques mots par quoi ce manque pourrait commencer d'être comblé. Il est « facile » d'abord de montrer que, si $\theta = \frac{m}{n}\pi$ rad (où m, $n \in \mathbf{N^*}$), alors cos θ, sin θ et tan θ sont des nombres *algébriques* : ce ne sont pas nécessairement des nombres *constructibles* (au contraire des racines carrées d'entiers), mais ce ne sont pas non plus des nombres *transcendants*. Ces derniers sont pourtant nécessaires quand on manipule (on le fait dès la classe de 4^e) des fonctions trigonométriques *inverses* : en classe de seconde, on sait ainsi qu'un angle dont le cosinus vaut 0,5 a pour mesure en radians $\pi/3$; et on peut montrer que, lorsque a est un réel algébrique différent de 0 et de 1, alors arccos a, arcsin a et arctan a sont transcendants. Ainsi en va-t-il en particulier lorsque a est rationnel, ou même constructible, résultat qui généralise le fait connu que, par exemple, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Tous ces résultats relèvent des mathématiques *pour la profession*, même si celle-ci les ignore.
>
> Que telle soit bien la réalité ne saurait être contesté au motif que, parmi les membres de la profession, d'aucuns sauraient tout cela, du fait par exemple de quelque particularité dans les études supérieures suivies à l'université. Dire « la profession sait cela », en effet, c'est dire que ses membres le savent, à de rares exceptions près ; et que, surtout, chacun de ses membres *peut* le savoir aisément dès lors que la profession le sait : *scire licet* – « il est possible de (le) savoir » – est la maxime de toute profession véritable. Les jeux individuels ou collectifs clos sur eux-mêmes ne sont ainsi que le symptôme d'un *retard de développement de la profession* : le professionnel véritable apprend de la profession, qui apprend de tous. Tout professeur de mathématiques peut se demander ce qu'on peut savoir de la nature du nombre $\frac{\arcsin a}{\pi}$ lorsque a est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 ; mais imaginer que chacun recherche la réponse *par lui-même* serait ignorer que c'est *à la profession* de s'affairer pour rendre disponible une réponse adéquate, que chacun en son sein puisse connaître. (p. 46)

Así, poco a poco, la formación impartida consigue sacar a relucir cuestiones de mayor calado que entrarían dentro de lo que Cirade designa como las *matemáticas para la enseñanza,* haciendo referencia a aquellas praxeologías matemáticas que se requieren para concebir y gestionar los procesos didácticos. Lo normal es que el joven profesor recurra de entrada a materiales de las «matemáticas sabias», a los que su formación inicial brinda acceso, pero descubre rápidamente la inadecuación de estos materiales para responder a los problemas planteados. Y es que la mayoría de las cuestiones problemáticas requieren *elaboraciones matemáticas originales* que la autora nombra «elaboraciones transpositivas intermedias», por situarse a caballo entre las matemáticas sabias y las escolares. Son pues herramientas *matemáticas* de uso *didáctico* necesarias para el diseño, implementación y evaluación de los procesos formativos.

Estas elaboraciones, que constituyen un trabajo continuo de actualización y revisión constante de las matemáticas escolares, distan mucho de ser triviales desde el punto de vista de los recursos matemáticos que solicitan. Un trabajo como las «Matemáticas de las magnitudes físicas» de Whitney (1968) puede ser un buen ejemplo de este tipo de elaboración intermedia, construida por un matemático «sabio» para aportar una respuesta funcional a la necesidad de justificar expresiones del tipo $\frac{3\text{ km}}{\text{h}} \times 4\text{ h} = (3 \times 4)\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \text{h} = 12\text{ km}$, que son fundamentales en las técnicas basadas en los factores de conversión, tan apreciados por los profesores de ciencias experimentales como repudiados por los amantes del purismo matemático (Bosch 1994 y Chevallard y Bosch 2000).

Como ya hemos anotado anteriormente, otros ejemplos relevantes de elaboración de infraestructuras matemáticas potencialmente útiles para diseñar praxeologías matemáticas para la enseñanza, y dirigidos explícitamente a la formación del profesorado, se encuentran en el trabajo ya clásico de Félix Klein (1908/2006) *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior* y en el de Henri Lebesgue (1915/1995) *La medida de las magnitudes*, cuyo objetivo es fundamentar la relación entre los números reales y la medida de magnitudes continuas. Se podrían aportar otros muchos ejemplos que, en distintos ámbitos de la matemática escolar, siguen planteando dificultades en la docencia y para los que no se dispone todavía de una respuesta apropiada para la profesión.

De todos modos, la experiencia nos muestra que no basta con que existan bonitos discursos tecnológico-teóricos disponibles, realizados por matemáticos que, en algún momento de su carrera, se han preocupado e incluso volcado hacia los problemas matemáticos de la educación. La mayoría de las veces estas propuestas no son compatibles con las condiciones y restricciones bajo las que actúa el profesor. Es necesario un verdadero trabajo de *investigación didáctica* y de *producción praxeológica* que asegure la integración y eficiencia de estas tecnologías matemáticas en las praxeologías docentes, es decir, que aporte herramientas efectivas para el desarrollo y viabilidad de nuevas *praxeologías didácticas* acordes con las restricciones que afectan la labor docente desde los distintos niveles de codeterminación. En definitiva, si ya cuesta objetivar la problematicidad que se esconde detrás de las «matemáticas elementales», todavía es más costoso —y no sólo para el joven matemático recién licenciado— asumir que la infraestructura matemática y didáctica necesaria para abordar esta «matemática elemental desde un punto de vista superior» y adecuarla a las condiciones y restricciones que plantea su utilización efectiva en el aula, no es tarea ni de un solo profesor, ni de algunas tardes de reflexión. Representa un trabajo de una envergadura y complejidad suficientes como para requerir el esfuerzo de toda una comunidad investigadora, que en nuestro caso es la de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Añadiremos un aspecto significativo que ya hemos señalado en otras ocasiones (Gascón y Bosch 2007) y que el trabajo de Cirade (2006) viene a corroborar. A saber, que el tratamiento efectivo de los problemas de la profesión en la formación didáctica del profesorado conduce a abordar grandes cuestiones que se sitúan en los *niveles intermedios* de la escala de codeterminación y que raramente se plantean desde la problemática docente, puesto que no forma parte de sus objetivos el cuestionar estos niveles. En efecto, la formación didáctica del profesorado no puede evitar plantear y abordar cuestiones de gran calado que van más allá de los niveles específicos en que se sitúa la labor docente (los de la «cuestión» o el «tema»). Al ingente conjunto de preguntas que plantean los alumnos-profesores no se puede responder con propiedad y eficiencia sin abordar al mismo tiempo cuestiones como, por ejemplo: ¿Qué (praxeologías) matemáticas deben formar parte del currículum obligatorio? ¿Qué problemas y técnicas y con qué justificaciones tecnológico-teóricas? ¿De dónde viene y qué sentido tiene la actual estructuración de las (praxeologías) matemáticas escolares en las áreas o bloques de contenido actuales? ¿Cuáles son las cuestiones que están en el origen —y conforman la razón de ser— de los distintos sectores o temas de las matemáticas escolares? ¿De qué (praxeologías) se compone y a qué cuestiones responden: el álgebra, la geometría, la estadística, las funciones elementales o, más específicamente, los límites de funciones, la semejanza de triángulos, los números enteros, la proporcionalidad, la desviación típica? Etc.

Ante la amplitud de este tipo de cuestionamiento, es evidente que la investigación en didáctica debe considerarse como una fuerza productora indispensable para, junto con la propia institución de formación, ayudar a aportar respuestas a las necesidades praxeológicas que están en la base del proceso de formación.

4.1. El problema de investigación: estudio de praxeologías para la enseñanza

Al plantearse la cuestión de la formación del profesorado, parece razonable construir las praxeologías para la enseñanza sobre la base de las praxeologías matemáticas reconstruidas (y descritas por el correspondiente MER alternativo), en lugar de hacerlo a partir de las organizaciones matemáticas escolares habituales.

En coherencia con esto, en este trabajo utilizaremos únicamente algunos de los *REI diseñados y experimentados previamente en la enseñanza secundaria*, lo que constituye una primera acotación de nuestro problema de investigación.

Una segunda acotación se refiere al ámbito institucional en el que situaremos dicho problema. Nos centraremos en la formación inicial del profesorado y, más concretamente, en la *formación matemático-didáctica* que se imparte en los estudios del máster oficial de formación del profesorado de Secundaria. Trataremos únicamente, por tanto, un aspecto particular de la formación del profesorado (la formación matemático-didáctica) y sólo en un momento concreto de dicha formación (la formación inicial).

El problema de investigación que nos planteamos inicialmente en esta memoria puede formularse, brevemente, como el de la construcción, reconstrucción y estudio de praxeologías para la enseñanza mediante la puesta en marcha (diseño y gestión didáctica) de los Módulos M_0, M_1 y M_2 del dispositivo REI-FP en el ámbito de la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Esto significa que nuestro problema de investigación abarcará solamente un pequeño sub-problema del gran problema didáctico de la formación del profesorado aunque, evidentemente, deberemos tomar en consideración la relación entre la citada formación matemático-didáctica y el resto de los aspectos de la formación del profesorado, así como la continuidad entre la formación inicial y la formación permanente.

En consecuencia, formarán parte de la problemática que trataremos en esta memoria, esto es, de nuestro problema de investigación, aspectos importantes de las cuestiones que constituyen el problema didáctico global de la formación del profesorado (de matemáticas). Entre éstas podemos citar:

- ¿Cómo se generan las cuestiones que están en el origen de las praxeologías matemáticas *por enseñar* y de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza*?
- ¿Cómo abordan estas cuestiones los profesores (con qué tipo de recursos) y qué tipo de respuestas les aportan?

Otras cuestiones que deberemos abordar son las relativas a la gestión del proceso de formación y a la ecología de los REI-FP:

- ¿Cómo diseñar, gestionar y evaluar en una institución de formación un REI-FP cuyo núcleo está constituido por un REI previamente diseñado o experimentado?
- ¿Cómo hacer vivir el REI de Secundaria a los profesores en formación?
- ¿Cómo utilizar los documentos curriculares y, en especial, los libros de texto como media para avanzar en el citado análisis? ¿Qué tipo de medios permiten deconstruir y reconstruir las propuestas disponibles?
- ¿Qué condiciones (relativas a la formación previa de los estudiantes para profesor, a la estructura global del proceso de formación, al papel que desempeñan las prácticas docentes, al modelo docente dominante en la citada institución, etc.) deberían instaurarse en la institución de formación del profesorado para que este tipo de formación pudiese vivir con normalidad en dicha institución? En particular, ¿qué restricciones dificultan actualmente el desarrollo normalizado de este tipo de formación?
- ¿En qué niveles de codeterminación didáctica y desde qué posiciones institucionales dichas restricciones pueden considerarse como condiciones modificables?

Estas son las cuestiones que guiarán el trabajo experimental que presentamos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV

RECONSTRUCCIÓN DE PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

1. Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado

Este capítulo presenta el trabajo experimental de nuestra memoria que culmina en el diseño, experimentación y análisis de un *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) en torno a la proporcionalidad y la modelización funcional elemental. Pondremos un énfasis especial en la estrategia encaminada a reconstruir *praxeologías matemáticas para la enseñanza* que constituye uno de los principales frutos de la puesta en marcha de un REI-FP.

En realidad el trabajo experimental que presentamos en este capítulo puede describirse en tres etapas:

- En la primera llevamos a cabo un estudio exploratorio, que denominamos REI-FP en torno a los descuentos progresivos, cuyo objetivo consiste en un primer estudio de la ecología de los REI, esto es, de las condiciones que se requieren y las restricciones que dificultan la puesta en práctica en la formación del profesorado de un proceso de estudio con estructura de REI. En este caso, el REI-FP experimentado da lugar a la construcción de elementos de una *praxeología matemática* que no ha sido elaborada como respuesta a un fenómeno didáctico emergente en la organización matemática escolar (ver sección 2.1.).

- En la segunda etapa, considerada todavía dentro del periodo preliminar de nuestra investigación, hemos llevado a cabo dos experimentaciones de REI-FP en torno a la proporcionalidad. En este caso, junto al análisis ecológico antes citado, el diseño experimentado pretendía implícitamente que los estudiantes construyeran una *praxeología matemática por enseñar* como alternativa a la que propone el currículum de Secundaria. (ver sección 2.2.2.).

- Por último, en la sección 4, describimos con detalle el diseño y desarrollo de un REI-FP en torno a la modelización funcional elemental en la ESO, que hemos construido y experimentado utilizando los criterios obtenidos del análisis a posteriori de las citadas experimentaciones preliminares. En este, caso hemos seguido avanzando en la ecología de los REI y, basándonos en las investigaciones anteriores de nuestro equipo, hemos puesto en marcha una estrategia metodológica que, junto a su función formativa, permite reconstruir una *praxeología matemática para la enseñanza* que engloba ampliamente a la correspondiente praxeología por enseñar.

En esta memoria nos restringiremos a la primera etapa del REI-FP integrada por los módulos $M_{0,}$ M_1 y M_2 que, como veremos, culmina con la reconstrucción de una versión de una praxeología para la enseñanza. El diseño de los módulos M_3 y M_4 del REI-FP, que llevaremos a cabo en futuros trabajos, se fundamentará en las conclusiones que obtengamos en esta memoria. Al mismo tiempo, consideramos que el análisis a posteriori de la gestión y experimentación que se llevará a cabo en M_4 proporcionarán nuevos datos empíricos potencialmente útiles para modificar y completar la versión de la praxeología para la enseñanza que construiremos en esta memoria, tal como se pone de manifiesto en la estrategia metodológica que se describe en el capítulo V.

Como hemos visto en el capítulo III, desde la TAD el problema de la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria debe plantearse tomando como punto de partida los problemas de la profesión docente en este ámbito. Dichos problemas presentan distintos grados de especificidad con relación al conocimiento matemático, desde los más generales que afectan a cualquier docente de secundaria —¿Qué hacer cuando un estudiante falta reiteradamente a clase? ¿Cómo se organiza el examen de Selectividad? ¿Cómo se deciden y redactan las competencias transversales?, etc. —, hasta los más específicos vinculados a la enseñanza o aprendizaje de algún contenido concreto —¿Cómo enseñar un contenido *C*? ¿Cómo motivar su estudio? ¿Cómo relacionarlo con otros conocimientos o ámbitos, dentro y fuera de las matemáticas? ¿Cómo facilitar su aprendizaje? ¿Qué hacer ante tal o cual respuesta de los estudiantes? Etc.—. Son estos últimos los que consideramos aquí: los problemas que se formulan en relación con las praxeologías matemáticas por enseñar. Es evidente que ambos tipos de praxeologías deben estar presentes en la formación del profesorado y que lo pueden estar de muy diversas formas. Es importante subrayar que junto a las praxeologías matemático-didácticas «oficiales», determinadas por el currículum oficial y por los modelos epistemológico y docente dominantes en la institución, también deben integrarse en la formación del profesorado otras praxeologías complementarias o alternativas fruto de la investigación didáctica.

Así, ante la problemática didáctica que plantea un contenido matemático *C* por enseñar en Secundaria (como, por ejemplo, la geometría sintética, la proporcionalidad, el álgebra elemental, los números negativos, los sistemas de numeración, la probabilidad condicionada, la medida de magnitudes continuas, la geometría analítica, los números reales, el cálculo diferencial elemental, etc.) surgen inicialmente de manera inevitable, al menos en el ámbito de la TAD, las siguientes cuestiones relativas al contenido *C* de que se trate:

- ¿Cuál es la *razón de ser* oficial que la institución escolar asigna a *C*?
- ¿Qué actividades matemáticas se propone llevar a cabo en torno a dicho contenido en la enseñanza secundaria?
- ¿Cómo se relaciona *C* con los restantes ámbitos de la matemática escolar?
- ¿Cómo incide todo ello en las posibles formas de organizar el proceso de estudio de *C* y, en particular, su enseñanza?
- ¿Cómo surge *C* como contenido por enseñar? ¿De dónde proviene? ¿En qué tipo de organizaciones matemáticas se ha inscrito o se podría inscribir?
- ¿Qué fenómenos didácticos emergen en torno a *C* o al ámbito de la actividad matemática que lo contiene en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas?

La estrategia que ejemplificaremos en este capítulo avanza mediante la construcción, en cada caso, de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) específico del ámbito de la actividad matemática en el que se inscribe *C*. El objetivo de este modelo es el de proporcionar un punto de vista propio —que no asuma acríticamente la visión dominante en la institución escolar—, para poder observar, describir, analizar, diseñar, desarrollar, evaluar, etc. la enseñanza del contenido *C*. Este modelo tendrá el estatus de *hipótesis científica* a contrastar experimentalmente y estará en revisión permanente, según el tipo de cuestiones problemáticas que se pretendan abordar. Su construcción requiere cuestionar la organización matemática escolar y proponer una manera distinta de organizar la actividad matemática en torno a dicho contenido, que supone generalmente postular una posible *razón de ser alternativa* a la que le asigna el currículo oficial. Sobre la base del MER, y con el objetivo último de construir una praxeología *para la enseñanza* en torno al ámbito en cuestión, la estrategia prosigue elaborando la correspondiente praxeología *por enseñar* (alternativa o complementaria a la que se propone en el currículum oficial) en forma de un *mapa de posibles recorridos de estudio e investigación*.

Generalmente, los MER que reformulan y redefinen los distintos contenidos por enseñar se basan en investigaciones didácticas previas que han abordado el estudio de algún fenómeno didáctico relacionado con ese contenido. En consecuencia, se puede utilizar el MER para diseñar un recorrido de estudio e investigación (REI) en Secundaria. Por último, se utiliza dicho REI como un componente esencial para diseñar un recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP) y construir, mediante la puesta en marcha de los Módulos M_0, M_1 y M_2 de este dispositivo, la correspondiente praxeología *matemática para la enseñanza*.

En definitiva, el origen de los REI-FP proviene de dos procesos que consideramos complementarios:

- El primero parte del *cuestionamiento del modelo epistemológico* dominante en una institución escolar en torno a un ámbito de las matemáticas por enseñar, junto con el estudio de las transformaciones que ha sufrido dicho ámbito a lo largo del proceso de transposición didáctica. Este cuestionamiento comporta la construcción de un modelo epistemológico de referencia que asigna al ámbito matemático en cuestión una razón de ser específica, generalmente distinta de la razón de ser «oficial».
- El segundo proceso parte de la necesidad de permitir a los profesores superar el modelo didáctico imperante inscrito en el paradigma escolar de la visita de las obras (Chevallard 2012), necesidad que trae consigo el uso de los REI como dispositivos didácticos privilegiados para dotar de sentido al estudio y aprendizaje de las matemáticas y avanzar así hacia el nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo.

En el capítulo III hemos precisado y fundamentado nuestra propuesta al respecto basada en los *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP). Esta propuesta persigue los siguientes objetivos, el primero de los cuales acabamos de comentar:

- Partir del *cuestionamiento* de las praxeologías matemáticas por enseñar como paso previo para *concebir y construir praxeologías didácticas* adecuadas a un proyecto educativo concreto (Módulo M_0: «¿Cómo enseñar *C*?»).
- Incluir un proceso de estudio e investigación de alguna cuestión generatriz asociada a la praxeología por enseñar (Módulo M_1: «Vivir un REI») que permita la construcción en acto de un modelo epistemológico de referencia (MER) en torno a la praxeología matemática por enseñar.
- Aportar herramientas de descripción, explicitación y análisis del MER así como de los principales elementos que intervienen en el proceso de estudio (Módulo M_2: «Analizar el REI vivido»): dinámica de cuestiones y respuestas (*cronogénesis*); construcción y evolución del medio empírico y de las fuentes de información (*meso* y *mediagénesis*); reparto de responsabilidades entre profesor y alumnos (*topogénesis*); estudio de los recursos, dispositivos, condiciones y restricciones disponibles para el estudio (*ecología*).
- Poner a prueba los elementos anteriores en el diseño y experimentación de nuevos procesos de estudio adaptados a las condiciones institucionales de un determinado grupo de estudiantes (Módulos M_3 y M_4: «Diseñar un REI» y «Experimentar un REI»).

Nuestra investigación solo ha abordado los tres primeros módulos de la propuesta y una pequeña parte de M_3. En lo que sigue, presentaremos las experimentaciones preliminares y el principal caso experimentado en torno a la modelización funcional elemental. Este REI-FP se llevó a cabo en el Máster de formación del profesorado de matemáticas de secundaria de Catalunya en el curso 2013/14.

Antes de entrar en el corazón de nuestra experimentación, describiremos brevemente una prueba piloto de un REI-FP de los descuentos progresivos (sección 2.1) y dos experimentaciones previas realizadas durante 2011/12 (sección 2.2.2.) que han servido de *estudio exploratorio* y que, como tales, han aportado criterios importantes para el diseño y análisis a priori del REI-FP en torno a la modelización funcional elemental.

Veremos, en particular, que la principal limitación de estos REI-FP desarrollados en las experimentaciones preliminares consiste en no tomar como punto de partida una cuestión crucial para el profesorado e imponer de entrada el estudio de una cuestión matemática relativamente ajena a la profesión. Para poder justificar la elección de la cuestión inicial del REI-FP sobre la modelización funcional, que constituye el núcleo de la fase experimental de nuestra investigación, presentamos en la sección 3 una descripción breve del que designamos como «problema docente de la enseñanza de la proporcionalidad y la modelización funcional elemental». La respuesta a dicho problema aportada por algunos trabajos anteriores fundamentará las primeras etapas de nuestra estrategia metodológica encaminada a la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza. La sección 4 se centra en el diseño y la experimentación realizada. En ella se presenta la experimentación del REI-FP, así como la construcción de la correspondiente praxeología para la enseñanza a que da lugar.

2. Estudio exploratorio del dispositivo de los REI-FP

2.1. Un REI-FP en torno a los descuentos progresivos¡Error! Marcador no definido.

Durante el curso 2010/11 se llevó a cabo en el marco de la asignatura *Complementos de Formación Matemática* del Máster de Formación del Profesorado de Matemáticas de Secundaria en la Universitat Autònoma de Barcelona una prueba piloto de un REI-FP basado en un problema de modelización de descuentos progresivos. El primer objetivo de esta experimentación, en términos formativos, fue el de introducir a los estudiantes en una actividad abierta de modelización y poder analizar posteriormente sus características didácticas. El segundo objetivo, de cara a nuestra investigación, fue el de explorar las condiciones requeridas para el desarrollo de un REI en la formación del profesorado así como las principales restricciones que podrían surgir durante su implementación. Presentamos a continuación una breve descripción de las condiciones de realización, el análisis a priori del REI-FP y los principales resultados obtenidos. El Anexo 1 presenta una crónica detallada del recorrido así como una muestra de los materiales producidos por los alumnos. Este mismo REI-FP fue utilizado en agosto de 2011 como el material de base de un taller de investigación didáctica en la XVI *École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Bosch y Ruiz-Olarría 2012).

2.1.1. Condiciones de realización

El REI-FP sobre Descuentos Progresivos se llevó a cabo los días 11, 16 y 18 de mayo de 2011 con un grupo de 20 alumnos de la asignatura *Complementos de formación matemática* de 12 ECTS, en sesiones de dos horas y cuarto de duración y bajo la dirección de los profesores Josep Gascón, Noemí Ruiz-Munzón y la autora de esta memoria que actuaba como observadora participante.

El curso completo de «Complementos de Formación Matemática» constó de 36 sesiones presenciales de 2 horas y 15 minutos y se dividió en dos partes separadas por la Fase IV en la que se realizó el Practicum II.

- Primera parte: Contiene la Fase I (del 4-10-2010 al 19-11-2010) y la Fase III (del 9/12/10 al 25/2/11), con un total de 27 sesiones.

- Segunda parte: Contiene la Fase V (del 25/4/10 al 27/5/11) con un total de 9 sesiones.

La organización didáctica de esta asignatura estaba estructurada en torno a cuatro áreas del currículo de la enseñanza secundaria, enfatizándose el estudio de las cuestiones que emergían de cada uno de los temas, tal como indica el extracto de programa de la asignatura que presentamos a continuación:

(1) Ampliacions successives del camp numèric.
- Raó de ser dels nombres negatius, decimals limitats i racionals. El paper dels nombres reals en el Batxillerat.
- Modelització matemàtica d'un sistema aritmètic: la divisibilitat.
- Àlgebra de magnituds en l'Ensenyament Secundari.

(2) Procés de algebrització de la matemàtica (escolar)
- Algebrització dels Programes de Càlcul Aritmètic.
- Integració de la Proporcionalitat en l'àmbit de les relacions funcionals.
- Algebrització de la Proporcionalitat.

(3) El paper de la geometria en l'estudi escolar de les matemàtiques
- Determinació i construcció de «figures geomètriques».
- Estudi del canvi de posició, grandària i forma de les figures geomètriques.
- Complementarietat entre les geometries sintètica i analítica.

(4) El càlcul diferencial i integral en el Batxillerat
- Modelització funcional amb paràmetres i emergència del Càlcul diferencial.
- Dues formes d'interpretar el càlcul de límits de funcions.
- Procés d'estudi dels problemes d'optimització en el pas de Secundària a la Universitat.

Con el fin de mostrar la interdependencia entre las cuatro áreas consideradas, se añadió como parte fundamental de la asignatura una problemática transversal generada por las cuestiones que hacen referencia al *papel de la modelización matemática* como núcleo de la actividad matemática y del resto de las disciplinas científicas. Entre los contenidos tratados en esta problemática transversal se encuentran los siguientes:

- Modelització matemàtica de sistemes matemàtics.
- Procés d'algebrització de les Organitzacions Matemàtiques.
- Relació de l'Àlgebra amb l'Aritmètica i la Geometria.
- El paper de les Calculadores Simbòliques en les diferents etapes del procés de modelització.
- Controvèrsia sobre la Geometria en les Matemàtiques i en l'ensenyament de les Matemàtiques.
- Relació entre les Matemàtiques i les Ciències Experimentals.
- Primer Aritmètica, després Àlgebra i, finalment, Càlcul.
- Diferents formes d'interpretar el paper de la Resolució de Problemes en l'Activitat Matemàtica.
- Els Tallers de Pràctiques Matemàtiques com reforma local del Sistema d'Ensenyament de les Matemàtiques.

Fue precisamente en el ámbito de un Taller de Prácticas Matemáticas en el que se situó el REI-FP experimental sobre los descuentos progresivos.

2.1.2. *Diseño didáctico a priori del Taller de descuentos progresivos*

La propuesta didáctica se concretó en la realización de un taller que denominamos *Taller de descuentos progresivos* cuya introducción se presentaría a los alumnos en los términos siguientes[9]

> Actualmente mucha gente trabaja en asesorías o consultorías que son empresas especializadas en resolver problemas que les plantean sus clientes: problemas financieros, legales, de recursos humanos, de aseguradoras, de psicología, de marketing, etc.
>
> Nuestro taller es una consultoría matemática e intentaremos resolver los problemas de nuestros clientes. Por ejemplo, en un taller similar a este, un cliente profesor de lengua nos pidió que lo ayudásemos a calcular las notas finales de los exámenes de los alumnos suponiendo que cada control tenía una importancia diferente (media ponderada). En otro taller, un grupo de alumnos de 4º de ESO nos solicitaron que les hiciéramos un «plan de ahorros» para recoger dinero para el viaje de final de curso.
>
> La idea es considerar la clase como un «taller» donde llegan «encargos» de posibles clientes para los cuales hay que producir un «informe de resultados» y proporcionarles un «servicio post-venta» adecuado.

---

[9] En esta parte del curso, se adoptó el castellano como lengua vehicular para facilitar la participación de la autora de esta memoria en el proceso de formación.

El trabajo del taller no se debe reducir simplemente a dar una solución numérica a cada pregunta o problema planteado. Nos hemos de ubicar en una situación más amplia donde cada problema sea el representante de un tipo de problemas. En una asesoría se deben producir respuestas más generales, que permitan englobar diferentes casos particulares, anticipar nuevos problemas que se nos puedan plantear, etc.

Situación problemática inicial

Una tienda de venta de alimentos ecológicos on-line (www.delaterra.net) aplica a los clientes el siguiente tipo de descuentos:

- 1% si el importe de la compra supera los 70 €
- 2% si el importe de la compra supera los 80 €
- 3% si el importe de la compra supera los 90 €
- 4% si el importe de la compra supera los 100 €
- 5% si el importe de la compra supera los 125 €
- 6% si el importe de la compra supera los 150 €
- 7% si el importe de la compra supera los 175 €
- 8% si el importe de la compra supera los 200 €

El cliente (que puede ser una escuela, una asociación cultural, un restaurante, etc.) nos plantea algunas cuestiones cuyas respuestas le ayudarán a tomar decisiones sobre la política de compras que más le interesa. Se pregunta, por ejemplo, en qué casos puede ser más conveniente hacer un pedido cuyo coste inicial supere levemente los costes fronterizos que determinan un cambio en el porcentaje del descuento. Es decir, ¿qué le interesa más, hacer un pedido por 100 € o por 102 €?

Este texto se acompañaría de la siguiente explicación:

Esta situación problemática inicial permite plantear muchos otros tipos de cuestiones cuyas respuestas pueden ser útiles para decidir una buena política de compras. En la consultoría matemática exploraremos dichas cuestiones y elaboraremos un informe que deberá permitir dar respuesta a todas ellas. El estudio, para ser útil en el trabajo futuro de la consultoría, deberá englobar situaciones que abarquen además de «la tienda de alimentos ecológicos» otras situaciones socialmente relevantes.

Posible tipo de problemas a tratar después de la puesta en común

¿Cómo empezamos el estudio?

¿En qué tipo de problemas situaremos el problema concreto propuesto?

Podemos probar algunos casos concretos calculando con lápiz y papel.

Probar muchos casos concretos con Excel.

Intentar una primera modelización general con fórmulas.

….

Una posible manera de empezar a abordar el problema es situándonos en un tipo de problemas en el que se trabaje con intervalos regulares (de la misma longitud). Este estudio nos permitirá entre otras cosas abordar el caso de los alimentos ecológicos tratándolo en dos partes (intervalos de longitud 10 e intervalos de longitud 25).

La organización didáctica de las sesiones seguiría un formato regular:

- Inicio de la sesión (30 minutos)
- Trabajo en grupos y entrega de un informe escrito (45 minutos)
- Puesta en común (20 minutos)
- Trabajos en grupos (45 minutos)
- Cierre y propuesta de trabajo para la siguiente sesión (10 minutos)

De este modo, los resultados parciales del estudio del grupo se pondrían en común y se discutirían con el fin de llegar a tomar acuerdos sobre la línea (o líneas) de trabajo a seguir. Al finalizar la última sesión, cada grupo debería exponer a los formadores y al resto de grupos un breve resumen del informe elaborado para la consultora.

2.1.3. Diseño matemático a priori

Presentamos a continuación una síntesis de las principales cuestiones que marcan el REI vivido. En el Anexo 1 se encuentra el detalle del estudio que elaboramos en su momento como análisis a priori del REI-FP experimentado.

Simplificación de la cuestión inicial al caso en que los descuentos varían por intervalos regulares de amplitud 10:

- 1% si el importe de la compra supera los 70 €
- 2% si el importe de la compra supera los 80 €
- 3% si el importe de la compra supera los 90 €
- …
- 14% si el importe de la compra supera los 200 €

Una posible primera manera de empezar a abordar el problema es estudiar la relación entre los costes finales (con descuento) y los costes iniciales si el importe de la compra supera los 70 €.

Q_0: Si el importe de la compra está próximo a una de las cantidades «fronterizas» del tipo de descuento (70€, 80€, etc.), ¿sale a cuenta incrementar el coste inicial (sin descuento) para obtener un descuento mayor? ¿Es posible, incluso, que el coste final (con descuento) disminuya al aumentar un poco el coste inicial de manera que rebase levemente la cantidad «frontera»?

- ¿Cómo varía el coste final de cada euro añadido al coste inicial a medida que éste aumenta? Dicho con otras palabras, ¿cómo varía el «coste relativo» al aumentar el coste inicial?

- En enero, la tienda aumentó un punto porcentual cada descuento. ¿Cómo incide este cambio en cada una de las cuestiones anteriores?

- ¿Qué ventajas tiene este tipo de descuento para la tienda? ¿Qué pasaría si se cambian los intervalos y la escala de los porcentajes de los descuentos?

Empezamos considerando intervalos de igual amplitud y caso discreto.

Q_1: ¿Cómo se comportan los costes finales (con descuento) con respecto a los costes iniciales? Esto es, a medida que aumenta el coste de la compra, ¿cómo varía éste al aplicar el descuento?

Se estudió esta cuestión mirando lo que ocurre en los valores frontera —70 €, 80 €, 90 €, etc.— y considerando que los productos se adquieren en cantidades cuyo coste es siempre un múltiplo de 10, lo que supuso situarnos, inicialmente, en el *caso discreto*.

Designaremos con:

- I el coste inicial.
- p el porcentaje de descuento.
- D el descuento resultante.
- F el coste final.
- $\mathrm{Var}(F)$ la diferencia entre dos valores consecutivos de F.
- $\mathrm{Var}_2(F)$ la diferencia entre dos valores consecutivos de $\mathrm{Var}(F)$.

La tabla obtenida a partir del uso de los datos en una hoja Excel nos proporcionó una primera respuesta:

R_1: Los descuentos D crecen (tipos mayores sobre cantidades mayores) por lo que los costes finales F crecen cada vez menos. Se observa que los valores de Var (F) siguen una progresión aritmética decreciente de diferencia – 0,20. Por lo tanto, cada vez que el coste inicial aumenta en 10 €, la variación respectiva de los costes finales disminuye en 0,20 €.

Surgen nuevas preguntas:

Q_2: ¿Qué relación tiene la diferencia constante de – 0,20 con la escala de descuentos 1%, 2%, 3%, etc.? ¿Qué pasaría si la escala de descuentos porcentuales fuera otra como, por ejemplo, 0,5%, 1%, 1,5%, 2%, etc.? ¿Cómo cambiaría dicha diferencia si se modificara la longitud L de los intervalos de costes iniciales (por ejemplo si la longitud fuera L = 15 en lugar de 10)?

Del estudio de esta cuestión obtuvimos la respuesta siguiente:

R_2: Si la sucesión de descuentos sigue una progresión aritmética de diferencia d, la variación segunda de F es constante con valor $-2\cdot d^3/10$, en el caso de que la longitud de los intervalos de descuento sea 10.

Cuando los intervalos de descuento constante tienen una amplitud L, la variación segunda de F tiene un valor constante e igual a $-2\cdot L/100$, en caso de tener una sucesión de descuentos porcentuales de 1, 2,….14.

Surge una nueva pregunta:

Q_{21}: ¿Cómo depende Var_2 (F) de la sucesión de descuentos porcentuales $p(n) = n\cdot d$ y de la sucesión de costes iniciales $I(n) = 70 + L\cdot n$, siendo ambas sucesiones aritméticas? ¿Cómo se puede interpretar esta dependencia?

Para la que obtenemos una respuesta:

R_{21}: Podemos afirmar que Var_2 (F) siempre es constante cuando se consideran intervalos de descuento de la misma longitud y la sucesión de los porcentajes de descuento es una progresión aritmética.

Además, si L es la longitud referida y d la diferencia de la progresión aritmética de los porcentajes de descuentos, Var_2 (F) = $-\ 2 \cdot d^3 \cdot$L/100.

El signo negativo de Var_2 (F) nos dice que los costes finales cada vez crecen «más despacio»; y su carácter (de valor) constante nos dice que el ritmo de decrecimiento es siempre el mismo (e igual a $2 \cdot d^3 \cdot$L/100.

Retomamos las cuestiones iniciales:

Q_3: Si el importe de la compra está próximo a una de las cantidades «fronterizas» del tipo de descuento (70€, 80€, etc.), ¿sale a cuenta incrementar el coste inicial (sin descuento) para obtener un descuento mayor? ¿Es posible, incluso, que el coste final (con descuento) disminuya al aumentar un poco el coste inicial de manera que rebase levemente la cantidad **«**frontera**»**?

Y obtenemos:

R_3: Cuando el coste inicial coincide con una «cantidad frontera», si aumentamos en uno o dos euros el coste inicial se produce una disminución del coste final en algunos casos. Esto sucede únicamente al aumentar 1€ las cantidades frontera a partir de 100, así como al aumentar 2€ las cantidades frontera a partir de 190 y en el entorno de la frontera, a partir de 179.

Los aumentos de 1 € y 2 € en el coste inicial que acabamos de analizar nos conducen a interrogarnos sobre el incremento real del coste final (que casi siempre es positivo) en el entorno de los puntos frontera. Surge así la cuestión siguiente:

Q_4: ¿Cómo pueden cuantificarse las ventajas de aumentar el coste inicial? En particular, ¿cómo varía el coste final de cada euro añadido al coste inicial en un valor frontera a medida que éste aumenta?

Para medir dicho incremento utilizaremos una nueva magnitud que representa la cantidad en que aumenta, por *término medio*, el coste final por cada euro que aumentemos el coste inicial (cerca de los puntos frontera). Dado que aumentamos dos euros el coste inicial, el coste relativo por cada euro aumentado vendrá dado por las expresiones $(F_1 - F_{-1})/2$ y $(F_2 - F_0)/2$.

Llegamos a la respuesta siguiente:

R_4: Podemos concluir que si aumentamos 2 € el coste inicial en un punto frontera, el **coste relativo por euro** siempre es inferior a 1 y va disminuyendo a medida que aumenta el coste inicial. Esta disminución, además, es constante con valor 0,06.

La conclusión anterior lleva a que nos preguntemos por la relación existente en general entre el aumento en el coste inicial y la disminución consecuente en el coste final (2 y 0,06 €, respectivamente, en el caso estudiado).

Para responder a esta cuestión hemos de estudiar el «coste relativo» en general, esto es, la **variación media** de la función coste final para incrementos dados por una nueva variable **h** ($0 < h \leq 10$) del coste inicial.

En principio supondremos dichos incrementos a partir de los puntos frontera. Por otra parte, hemos dicho que, supuestamente, al incrementar en 3 € el coste inicial a partir de un punto frontera, no disminuirá el coste final. Esta cuestión forma parte de una problemática mucho más general que podemos enunciar como sigue:

Q_5: (a) En general, ¿cuál es el coste relativo por euro (o variación media de la función coste final) en el intervalo $(70 + 10 \cdot n, 70 + 10 \cdot n + h)$? ¿Cómo puede explicarse la relación observada entre los valores 2 y 0,06 correspondientes al aumento y a la variación del coste relativo, respectivamente?

(b) ¿Cuál es el incremento máximo del coste inicial en cada punto frontera para el cual no aumenta el coste final (suponiendo la sucesión 0%, 1%, 2%,…, 14% de descuentos)? ¿Existe un máximo absoluto de dicha cantidad?

R_5: (a) Podemos concluir que la variación media de la función coste final en el intervalo (70 + 10·n, 70 + 10·n + h) es igual a 1/(100·h)·[h·(99 – n) – (70 + 10·n)] y, consecuentemente, la variación del coste relativo [– (10 + h)/100] solamente depende de h, lo que explica la relación obtenida entre éste y h = 2.

(b) En cada intervalo (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)), hemos calculado el punto en el que el coste final es igual al coste inicial. Si indicamos este punto por 70 + 10·n + h, resulta ser

h = (70 + 10·n)/(99 – n)

El máximo absoluto corresponde a n = 13 y su valor es de h(13) = 2,3258 … < 3

Q_6: En el caso en que, por necesidades de eliminación de stocks la empresa decidiese prolongar la sucesión de descuentos más allá del 14%, ¿cuál sería el máximo descuento "razonable", esto es, el máximo descuento a partir del cual el coste final no aumentaría, independientemente del aumento del coste inicial?

R_6: En caso de que la empresa decida deshacerse de productos almacenados vía aumento progresivo del descuento, el tope de éste se sitúa en el 46% y corresponde a una compra cuyo coste inicial es superior a 520 €.

Acabamos de establecer el descuento máximo «razonable» a realizar por la adquisición de productos, en un momento en que la política de la emprea es deshacerse de stoks. Así, por ejemplo, una compra cuyo precio inicial sea de 521 €, el descuento del 46% la reducirá a 281,34 € y una compra cuyo precio inicial sea de 520 €, con el descuento del 45% se quedará en 286 €, esto es, un aumento en el coste inicial de 1 € se traduce en una disminución del coste final de 4,64 €. Este resultado, aparentemente contradictorio con la respuesta recién elaborada, nos lleva a plantear la cuestión siguiente:

Q_7: ¿Cuál es el valor de h para el que F(45, h) = F(45)? ¿El criterio utilizado para determinar el valor del descuento máximo es el más adecuado? ¿La empresa podría establecer algún otro criterio para disminuir stoks?

R_7: El valor de h para el que F(45, h) = F(45) es h = 9,63. Buscar el máximo descuento "razonable" allí donde los costes finales empiezan a ser decrecientes es una primera aproximación para determinar un criterio máximo de descuento, teniendo en consideración otros factores de la situación. Tomar en cuenta la sucesión de valores donde, para cada uno de éstos, el coste final es igual al coste inicial en el punto frontera, permitirá controlar y decidir sobre el descuento máximo deseado.

Q_8: ¿Cuál es el incremento máximo del coste inicial en cada punto frontera para el cual no aumenta el coste final (suponiendo la sucesión 0%, 1%, 2%,…, 46% de descuentos)? ¿Existe un máximo absoluto de dicha cantidad?

Cambios en la sucesión de descuentos

Q_9: ¿Cómo depende Var_2 (*F*) de la sucesión de descuentos porcentuales si esta sucesión es geométrica de razón r, esto es, $p(0) = 0$ y $p(n) = r^n$ (si n > 0)? Por ejemplo si $r = 1{,}3$ y $L = 10$.

Q_{10}: Considerando los intervalos $(70 + 10 \cdot n, 70 + 10 \cdot (n + 1)]$ para n = 0, 1,….14, donde el descuento a aplicar se mantiene constante para cada n. Si queremos que este descuento siga una progresión geométrica de razón r, ¿qué valor deberá tomar r para que los costes finales sean siempre crecientes?

$F(n) = (70 + 10 \cdot n) \cdot (1 - r^n/100)$

$F'(n) = 10(1 - r^n/100) + (70 + 10n)(- r^n \cdot \ln (r)/100) = 100 - (8 + n)r^n \ln (r)$

F(n) es creciente syss $F'(n) > 0$ syss $r^{14} \ln(r) < 100/22 = 4{,}545454…$.

Se pueden probar distintos valores para r, mayores a 1 y menores a 1,3. Por ejemplo, se puede probar si 1,2 verifica la desigualdad $1{,}2^{14} \cdot \ln 1{,}2) < 100/22 = 4{,}545454\ldots$.

Q_{11}: Dados los intervalos [70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)] nos interesa establecer una progresión de descuentos de manera que el que se aplica en [70 + 10·(n + 1), 70 + 10·(n + 2)] sea un x% superior al que se aplica en [70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)]. ¿Qué relación deberá existir entre x y n para que la sucesión de descuentos sea siempre creciente?

Otros posibles desarrollos

1) Utilizar el trabajo realizado para tratar el problema inicial dividiéndolo en dos partes (intervalos regulares de 10 y de 25).
2) Repetir el estudio para el caso de la serie geométrica de descuentos de razón $r = 1{,}3$ (u otras razones similares).
3) ¿Cuál debería ser la razón r de la sucesión geométrica de descuentos porcentuales para que $h(13) \geq 5$ o bien para que se cumplan otras condiciones preestablecidas?
4) Estudio general con impuestos progresivos (en lugar de descuentos).

2.1.4. Desarrollo del REI

La organización de las tres sesiones se muestra en los cuadros siguientes. La primera se decidió a priori y la segunda y tercera se adaptaron al trabajo llevado a cabo en las anteriores.

SESIÓN 1

Presentación del taller (P) Descripción de la Situación problemática inicial (P)	18:15 – 18:30
Exploración en grupos (A) Redactar en el cuaderno las cuestiones, ideas, dudas, primeros tanteos y posibles líneas de trabajo que han surgido en la exploración.	18:30 – 19:15
Puesta en común (A y P) Acordar, en su caso, una nomenclatura común y una o varias	19:15 – 19:35

líneas de trabajo (tipo de problemas a tratar)	
Trabajo en Grupos (A) Redactar en el cuaderno los resultados provisionales obtenidos por cada grupo incluyendo los desarrollos que se hayan desechado y posibles nuevas cuestiones a estudiar	19:35 – 20:20
Cierre de la sesión (A y P) Propuesta de continuación para el lunes 16 de mayo.	20:20 – 20:30

SESIÓN 2

Exposición del «estado de la cuestión» (P)	18:15 – 18:30
Informe de resultados provisionales (A) Cada grupo decide cómo expone sus resultados.	18:30 – 18:45
Puesta en común (A y P) Un representante de cada grupo expone brevemente (5') dichos resultados.	18:45 – 19:00
Tareas pendientes (A y P) Se elaborará una lista de tareas y se decidirá cómo se distribuyen	19:00 – 19:15
Trabajo en grupos (A)	19:15 – 20:15
Síntesis (A) Redacción en el cuaderno de bitácora de las respuestas provisionales	20:15 – 20:30

SESIÓN 3

Ultimar el trabajo y redactar un Informe Final para la consultora (A)	18:15 – 19:15
Puesta en común de los informes finales (A y P)	19:15 – 19:45
Responder a un cuestionario de evaluación de la asignatura (A)	19:45 – 20:00
Análisis en gran grupo de la actividad matemática desarrollada a lo largo del curso (A y P)	20:00 – 20:30

En la primera sesión, el trabajo de los grupos se centró en la búsqueda de situaciones asimilables a la planteada y en la exploración de la situación presentada (pruebas con algunos casos, mediante cálculos con lápiz y papel, pruebas con numerosos casos, con hojas de cálculo, primeras modelización funcionales,…).

En la segunda sesión, y después de presentar los avances realizados por los distintos grupos, se acordó fijar una nomenclatura común y abordar el estudio de la relación entre el coste final F y el coste inicial I cuando se pasa de un pedido cuyo coste inicial es I a otro de coste inicial $I+h$. La sucesión de descuentos sería la de una progresión aritmética de diferencia 1 sobre intervalos de igual amplitud L.

En la tercera sesión, cuando cada grupo expuso los resultados alcanzados, se verificó que habían respondido a las cuestiones siguientes:

Q_1: ¿Qué relación debe cumplirse entre los diferentes parámetros para que el coste en un punto interior de un intervalo cualquiera de longitud L sea inferior al coste en el punto frontera menor del intervalo en cuestión?

Q_2: ¿Es generalizable el resultado anterior si la sucesión de descuentos se ajusta a una progresión aritmética $d(n) = \lambda n$?

Q_3: ¿Qué valores de n serían factibles para $L = 10$ y $d(n) = n$?

Con relación al informe que debían elaborar por escrito para presentar al cliente, se pidió que tuvieran en cuenta algunos elementos como los siguientes:

1. Definir las funciones, los parámetros y, en su caso, los valores particulares que delimitan la situación problemática a estudiar.

2. Formular con precisión los problemas matemáticos abordados.

3. Redactar las respuestas a dichos problemas.
4. Elaborar las conclusiones obtenidas.
5. Describir futuras líneas de trabajo (cuestiones abiertas)

Para concluir el taller sobre los descuentos progresivos, se solicitó a los estudiantes que dijeran características de la experiencia vivida en estas sesiones, y más concretamente, los aspectos —o dimensiones— de la actividad matemática realizada pero ausentes de la «escuela» (incluyendo la Universidad). Las respuestas aportadas se pueden resumir en los puntos siguientes:

- Se define el sistema (matemático o extra-matemático) a estudiar mediante un modelo matemático.
- Se plantean problemas concretos por resolver.
- Se eligen las herramientas matemáticas (teóricas y técnicas) por utilizar.
- Se articulan diferentes técnicas (aritméticas, algebraicas, analíticas, gráficas,…).
- Se evalúan los resultados parciales y se decide el camino a seguir.
- Se desarrolla una actividad sistemática, que se prolonga en el tiempo.

2.1.5. Primeras valoraciones

El objetivo principal de este REI-FP fue conseguir que los estudiantes vivieran en carne propia una actividad matemática de modelización distinta de las actividades matemáticas escolares que suelen tener un carácter más cerrado y dirigido. Dado que se desarrolló durante las tres últimas sesiones del curso, su análisis y contraste con las actividades matemáticas escolares no pudo tener lugar, quedando en cierta manera truncada la propuesta inicial. Podemos pues decir que esta experimentación consistió más en llevar a cabo un REI con profesores en formación que en realizar un REI-FP.

Las actividades llevadas a cabo por los distintos grupos de estudiantes fueron muy variadas, cada uno activando distintos medios tanto matemáticos como informáticos, desde la modelización puramente aritmético-algebraica hasta modelos funcionales, Excel y GeoGebra, etc. En esta experimentación, el recurso a respuestas disponibles ha sido poco desarrollado, parcialmente por el problema de tiempo antes señalado, también porque no se provocó su necesidad por parte del profesorado. Hubiera sido muy interesante poder acabar la actividad ampliando la cuestión abordada con otras del mismo tipo como por ejemplo los impuestos progresivos. Aquí se hubiera podido buscar información disponible y desarrollar el estudio hacia el ámbito de las relacionales funcionales (Castillo 2001).

En cuanto al contrato didáctico establecido, se constataron algunas dificultades por parte del equipo de profesores para guiar la actividad de los estudiantes sin imponerles una ruta preestablecida de desarrollo del estudio. Por ejemplo, en las valoraciones finales de los estudiantes, una alumna indicó que la actividad le había resultado muy interesante al inicio pero que, cuando los profesores propusieron unificar las notaciones, se dio cuenta de que, en realidad, la apertura de la propuesta inicial resultó ser menos real de lo esperado.

Finalmente, valoramos como algo negativo el hecho de que la actividad propuesta, por querer que fuera muy abierta también para los formadores, no tuviera un vínculo claro con ningún problema concreto de enseñanza de las matemáticas en secundaria. Se decidió entonces que los REI-FP deberían partir de cuestiones que también fueran abiertas desde el punto de vista matemático para los estudiantes pero que, además, surgieran de necesidades didácticas, es decir del estudio de algún problema docente concreto.

2.2. Otros REI experimentados¡Error! Marcador no definido.

2.2.1. El proyecto i-Math (2010): Integración de la modelización matemática mediante las TIC en el máster de formación del profesorado

Una vez realizada la prueba piloto del REI-FP sobre los descuentos progresivos, la investigación se desarrolló en una nueva etapa gracias al proyecto i-Math de Ingenio Mathematica. En la convocatoria del año 2009 nuestro grupo de investigación presentó el citado proyecto que fue financiado con la referencia EDU-C5-0346.

Los objetivos de dicho proyecto pueden resumirse en los puntos siguientes:

- Estudiar el papel que juega y el que podría jugar la *modelización matemática* en los nuevos estudios de Máster de Formación del Profesorado de Secundaria (en la especialidad de matemáticas) y situar dicho ámbito de la formación en el conjunto global de la problemática del profesorado tal como es percibida por los propios profesores en formación.

- Analizar la viabilidad de la adaptación de los *Recorridos de Estudio e Investigación* (REI) para utilizarlos en la formación del profesorado.

- Proponer una forma concreta de integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como instrumentos de trabajo en la formación del profesorado de matemáticas.

En el curso del trabajo, que nos ocupó durante todo el año 2010 y parte del 2011, uno de los temas prioritarios fue el estudio del papel de los REI en la formación del profesorado y, más concretamente, las posibles propuestas relativas a la *organización didáctica* de dichas actividades de formación, esto es, a cómo organizar el proceso de formación del profesorado —en el ámbito del Máster en cuestión— cuando se trata de experimentar uno de los REI diseñados inicialmente como sustento de una organización didáctica escolar para la Enseñanza Secundaria. A este respecto, la propuesta final del proyecto citado se materializó en el documento que se presenta en el Anexo 2 y es la que se utilizó en las dos primeras experimentaciones exploratorias llevadas a cabo en los másteres de la UCM y la UAM, respectivamente, durante el curso académico 2011/2012.

Asimismo, fue a lo largo del desarrollo de este proyecto cuando surgieron las nociones y la estructura de los módulos *uno* a *cuatro* de los REI-FP. El módulo *cero* apareció posteriormente ligado a la necesidad de tomar como punto de partida una cuestión viva de la profesión docente[10].

2.2.2. Versión preliminar del REI-FP sobre planes de ahorro

Como se acaba de indicar, una primera versión de un REI sobre los planes de ahorro se llevó a cabo en los másteres de formación de profesorado de secundaria de la UCM —diciembre de 2011— y de la UAM —enero y febrero de 2012. Ambas experimentaciones estuvieron muy próximas no sólo en el tiempo, sino en su desarrollo, por lo que presentaremos brevemente la realizada en la UAM.

En el curso académico 2011/2012, quien presenta este trabajo de investigación fue responsable de dos créditos de la asignatura *Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas*, del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria, en la Universidad Autónoma de Madrid. Como una de las partes de la asignatura, se llevó a cabo un taller de modelización sobre planes de ahorro que se diseñó con estructura de

[10] En la memoria científica de este proyecto se destacaba la previsible incidencia de los resultados obtenidos en el mismo sobre algunos trabajos en aquel momento incipientes, subrayando su impacto potencial sobre las tesis iniciadas en aquellos momentos en nuestro grupo de investigación que trataban directamente el problema de la formación del profesorado de matemáticas y, en particular, se mencionaba explícitamente el trabajo que presentamos en esta memoria.

REI. Los 10 estudiantes para profesor que cursaron la asignatura formaban un grupo heterogéneo en cuanto a edades, puestos de trabajo y formación básica. El taller se desarrolló en cuatro sesiones de dos horas y media de duración que se dedicaron a vivir en posición de alumnos el REI mencionado.

Una de las primeras tareas propuestas a los estudiantes consistió en el análisis matemático de dos lecciones que trataban la proporcionalidad en sendos libros de 1º y 2º de ESO, respectivamente. Para ello, se empezó analizando las lecciones previas a la proporcionalidad en las que se introducían las fracciones, dado que habitualmente se interpreta la «proporción» como una igualdad entre dos «razones» (y las razones se suelen identificar con las fracciones). Se pretendía que los alumnos tuvieran una primera oportunidad de investigar los elementos matemáticos que figuraban en las lecciones revisadas y de indagar el papel que jugaban dichos elementos en la proporcionalidad. El tipo de análisis que se les propuso estaba basado en la noción de *praxeología* de la TAD, puesto que se les pedía que identificaran las tareas y las técnicas que figuraban en las lecciones citadas y, en la medida de lo posible, la tecnología matemática que justificaba y explicaba dichas técnicas. En resumen se pretendía que los estudiantes conocieran de primera mano cómo se planteaba la proporcionalidad en la ESO, las tareas que se proponían a los alumnos, para qué se introducían y, en definitiva, cuál era la razón de ser que el sistema escolar asignaba a dicho ámbito de la actividad matemática. Hay que señalar que, debido a que los estudiantes se encontraban por primera vez con esta problemática, tuvieron dificultades para responder, llegando a sentir cierta confusión respecto de por qué se les planteaban estas tareas.

Una vez finalizado el análisis de la actividad matemática escolar en torno a la proporcionalidad, y en coherencia con la estructura de REI con la que pretendía diseñar el taller, la formadora planteó una cuestión (que se denominó *cuestión generatriz*) a fin de provocar el desarrollo de un proceso de estudio encaminado a construir una respuesta, al menos provisional, a dicha cuestión. En realidad lo que se pretendía, desde el punto de vista formativo, era que los estudiantes conocieran una forma alternativa de organizar la actividad matemática en torno a la proporcionalidad y «vivieran» un proceso de estudio basado en dicha organización.

En concreto, la cuestión generatriz que se propuso como punto de partida es la que se había utilizado previamente en una investigación con alumnos de cuarto curso ESO (García 2005):

> Deseamos planificar con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un plan de ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación de la cantidad de dinero que necesitamos, y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades a dar en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar ni cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos al final de curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje.

Como respuesta a esta cuestión los estudiantes intentaron inicialmente buscar formas de financiar un viaje de fin de curso más que estudiar matemáticamente posibles tipos de planes de ahorro. Reconducidos posteriormente por la formadora, y utilizando libremente el material del Anexo 2, los alumnos empezaron a estudiar algunos planes de ahorro concretos empezando por los de cuota constante (planes *equitativos*) y siguiendo por aquellos cuya cuota sigue una progresión aritmética (planes *aditivos*) o geométrica (planes *multiplicativos*). En el Anexo 3 presentamos algunas de las producciones realizadas por los alumnos tanto individualmente como trabajando en grupo.

Un análisis crítico a posteriori del desarrollo de esta versión preliminar de un REI-FP en torno a la proporcionalidad nos aportó criterios muy útiles para diseñar y llevar a cabo el REI-FP descrito con detalle en la sección 4 de este capítulo.

La primera de las limitaciones que queremos subrayar presenta dos facetas:

- La desconexión, vivida por los estudiantes, entre el análisis de la organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad por un lado, y el estudio de los diferentes planes de ahorro por otro;
- La poca relevancia dada a la actividad de modelización funcional como tal y, asimismo, a la integración de la relación de proporcionalidad en el conjunto de las relaciones funcionales elementales que se estudian en la ESO, lo que provocó que la modelización funcional elemental jugase un papel secundario.

Estas limitaciones, que pueden interpretarse como indicios de un proceso de estudio poco articulado, pueden explicarse en gran medida por la ausencia de una cuestión generatriz de carácter profesional que articule el REI-FP. Dicho en otros términos, podemos postular que los estudiantes no interiorizaron la relación entre los dos tipos de tareas propuestas porque éstas no se integraban en un proceso global necesario para responder a un problema profesional del tipo: ¿*Cómo diseñar y gestionar un proceso de estudio en torno a la proporcionalidad con alumnos de cuarto de ESO*?

Las dificultades para articular y dar sentido a las tareas propuestas a los estudiantes aumentan cuando el REI vivido por ellos no pone un énfasis explícito en el papel que juega la proporcionalidad en el conjunto de las relaciones funcionales elementales. En efecto, la segunda de las tareas propuestas (el estudio de diferentes planes de ahorro) se podría articular con la primera (el análisis de la organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad) si el ámbito de estudio se situara en la modelización funcional y, secundariamente, en el papel de la proporcionalidad en el conjunto de relaciones funcionales.

Para superar estas limitaciones hemos introducido el módulo M_0 cuya cuestión generatriz, que llamamos Q_0-FP, encarna una problemática profesional y recorre y articula todo el REI-FP. En nuestro caso, además, la cuestión Q_0-FP se planteará en el ámbito de la modelización funcional elemental a fin de solventar el segundo aspecto de la desarticulación que hemos citado.

Digamos, por último, que en esta versión preliminar del REI-FP sobre planes de ahorro no se potenció suficientemente el trabajo autónomo de los estudiantes, lo que provocó una uniformidad en las respuestas que se circunscribieron esencialmente a cuestiones planteables en el nivel educativo de cuarto de ESO. El proceso de estudio fue excesivamente dirigido por la formadora, en parte debido a que no se pretendía en ningún momento la construcción de una *praxeología matemática para la enseñanza*, por lo que no se favoreció la formulación de cuestiones cuyas respuestas pueden ser útiles y hasta necesarias para la enseñanza pero que no pueden plantearse en la ESO. En definitiva, el proceso de formación estaba diseñado implícitamente para que los estudiantes construyeran una *praxeología por enseñar* en torno a la proporcionalidad como alternativa a la que se propone en el currículum de Secundaria.

3. El problema docente de la enseñanza de la proporcionalidad y la modelización funcional elemental¡Error! Marcador no definido.

Antes de describir la experimentación realizada con el REI-FP en torno a la modelización funcional elemental (en adelante, MFE), presentaremos los resultados de las investigaciones llevadas a cabo por nuestro grupo en relación al problema didáctico de la enseñanza, en Secundaria, de dicho ámbito de la matemática escolar. Estos resultados justificarán, en cierto sentido, su elección como problema docente y, por otro lado, aportarán los recursos matemáticos y didácticos para diseñar el REI-FP experimentado.

Nuestro punto de partida fue la investigación realizada por Francisco Javier García (2005) en la que se pone de manifiesto la relativa uniformidad que existe en los documentos curriculares de distintas comunidades autónomas y los libros de texto de la ESO en España en lo que se refiere tanto al tratamiento de la «proporcionalidad» como al de las «relaciones funcionales». En todos los casos se observa que la organización matemática por enseñar separa en dos praxeologías distintas, aunque con algunos elementos comunes, la proporcionalidad (situada en el ámbito clásico de la proporcionalidad aritmética) y las relaciones funcionales (entre las que se incluye la función lineal).

Junto a este fenómeno de *desarticulación interna* del mundo de la proporcionalidad, se observa que el papel de la MFE que se propone en la organización matemática por enseñar es accesorio y casi superfluo, puesto que sólo juega un papel importante en aquellos casos en que la transparencia cultural del sistema permite tomar al propio sistema como modelo (esto sucede, esencialmente, con los sistemas «lineales» y «lineales inversos»). Como el propio García (2005) constata, cuando esta transparencia cultural desaparece, se observa una disipación progresiva de la MFE en el currículo de la matemática escolar que se desplaza entonces al estudio de las propiedades formales de diferentes tipos de funciones numéricas.

Otra muestra clara del papel oportunista de la MFE en la organización matemática por enseñar, lo pone de manifiesto la ausencia de cuestionamiento en torno al tipo de relación funcional más pertinente para modelizar un sistema determinado en función de las cuestiones problemáticas que se planteen en dicho sistema. En particular, en los pocos casos en los que aparece una relación funcional como modelo de un sistema (esencialmente en los sistemas lineales) nunca aparece la necesidad de hacer evolucionar la relación funcional que modeliza el sistema para obtener más conocimientos del mismo sistema (que también debería ser sucesivamente reconstruido). Ésta es una posible causa de que la articulación curricular entre los diferentes tipos de relaciones funcionales sea puramente formal; la organización matemática por enseñar no puede articular las diferentes relaciones funcionales basándose en las sucesivas necesidades de modelización de un sistema porque, de hecho, nunca se explicita claramente la separación entre el sistema y el modelo. Aparece aquí otro aspecto esencial del fenómeno que estamos describiendo y que podríamos denominar el *aislamiento de la proporcionalidad* del resto de relaciones funcionales (que puede considerarse como una *desarticulación externa* al mundo de la proporcionalidad).

Tenemos, en definitiva, que la actividad de modelización matemática y, en particular, la MFE, en el sentido que propone la TAD, está prácticamente ausente en la organización matemática por enseñar en la ESO, puesto que no hay ningún tipo de problematización de los sistemas de variación. Éstos sólo se utilizan de forma accesoria y transparente, lo que permite explicar en parte las enormes dificultades del currículo para integrar el estudio de la proporcionalidad en una praxeología regional en torno a la MFE.

Como consecuencia de todo ello puede detectarse un importante problema docente o *problema de la profesión docente* en torno a la enseñanza de la proporcionalidad que se manifiesta en las enormes dificultades del profesorado de Secundaria para par sentido al estudio y a la enseñanza de la proporcionalidad y, sobre todo, para articular el mundo de la proporcionalidad escolar con el resto de relaciones funcionales elementales. Estas restricciones, que son de origen institucional y que, de hecho, se manifiestan como un reflejo del modelo epistemológico específico en torno a la proporcionalidad dominante en la enseñanza secundaria, impiden dar entrada a la modelización funcional en la ESO, y constituyen el origen de un problema profesional, no siempre explicitado por los profesores, que debe abordarse en el proceso de formación del profesorado.

Es importante señalar que muchas investigaciones llevadas a cabo bajo distintos marcos teóricos asumen de manera acrítica este modelo epistemológico dominante en la institución de Secundaria en torno a la proporcionalidad. Como consecuencia se tiende a considerar la proporcionalidad como una relación aislada que no se articula dentro de un conjunto más amplio de posibles relaciones funcionales elementales entre magnitudes, lo que impide situarla en la problemática de la modelización de sistemas con dos o más magnitudes susceptibles de estar relacionadas entre sí.

Como respuesta a este problema de la profesión docente, hemos diseñado y experimentado la primera etapa de un REI-FP que culminará con la reconstrucción de una *praxeología para la enseñanza* en torno a la MFE.

Como ya hemos dicho, los REI-FP surgen como dispositivos didácticos inherentes a la problemática profesional del profesorado y, en particular, están asociados a las cuestiones que tiene su origen en la *problematicidad de la matemática escolar* y a las *limitaciones del modelo didáctico* imperante en las instituciones escolares. En consecuencia, para dar respuesta a un problema profesional del profesorado, el diseño de un REI-FP tomará en consideración esas dos problemáticas como punto de partida.

En la próxima sección describiremos el diseño y la experimentación de un REI-FP, en el bien entendido de que únicamente diseñaremos (y posteriormente experimentaremos) la primera etapa del mismo, esto es, los módulos M_1 y M_2 junto al módulo M_0 que es transversal y está presente a lo largo de todo el proceso de formación.

Antes de diseñar los citados módulos M_0, M_1 y M_2 del REI-FP y para superar algunas de las consecuencias didácticas indeseables del fenómeno descrito, propondremos una manera distinta de interpretar, en la ESO, la MFE y la actividad matemática en torno a ella, esto es, una posible *razón de ser alternativa* a la que le asigna el currículo oficial y que, postulamos, permitirá superar las limitaciones que muestra la razón de ser oficial. Para ello utilizaremos un *modelo epistemológico de referencia* (MER) de la MFE en Secundaria construido previamente (apartado 3.1). Posteriormente, presentaremos un REI sustentado en dicho MER que se experimentó con alumnos de Secundaria (apartado 3.2). En síntesis, los apartados 3.1 y 3.2 constituyen elementos de respuesta elaborados en el ámbito de la investigación al problema docente de la enseñanza de la proporcionalidad y su relación con la modelización funcional elemental.

En la sección 4, que constituye el núcleo de este capítulo, presentaremos una descripción detallada del diseño y la experimentación de este REI-FP. Mostraremos así en qué forma hemos utilizado los elementos de respuesta propuestos desde la TAD como base para diseñar una primera versión de un (REI-FP) y para construir la correspondiente versión de una praxeología *para la enseñanza*[11].

3.1. Elementos de un MER en torno a la modelización funcional elemental en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

Como respuesta a los problemas didácticos asociados al fenómeno didáctico de la desarticulación y la pérdida de sentido de la proporcionalidad en la ESO y, muy especialmente, para responder al problema docente en torno a la proporcionalidad (que podemos reformular como un problema de investigación didáctica) se propone un MER que sitúa la *razón de ser de la proporcionalidad* en el ámbito de las modelizaciones funcionales elementales. En este sentido, es importante recordar que el ámbito de la actividad matemática en el que se sitúa la razón de ser de un objeto matemático condiciona en gran medida la naturaleza de dicho objeto y el tipo de actividad que es posible desarrollar en torno a él.

En concreto, García (2005) y García et al (2006) proponen un MER que parte de la caracterización de diferentes tipos de variación de magnitudes. Para ello, y teniendo en cuenta las restricciones institucionales que provienen de la Educación Secundaria Obligatoria, se consideran dos magnitudes *M* y *M*' discretas, se parte de un conjunto de cantidades de la primera magnitud que están en progresión aritmética y se analiza el tipo de variación de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud.

En este punto aparece la necesidad de tomar una decisión que será fundamental en la construcción del MER: ¿Qué criterio utilizar para definir diferentes «tipos de variación»?

En la práctica se utiliza el criterio que proporciona la imposición de determinadas condiciones elementales sobre el tipo de variación. Así, por ejemplo, se define la *condición de equidad* imponiendo que las cantidades correspondientes de la magnitud *M*' también estén en progresión aritmética. Y, por extensión, la *condición de diferencias*

[11] Esta secuencia temporal que empieza por el diseño y experimentación en Secundaria (o en Primaria) de un REI, sustentado en un MER alternativo, y culmina con la elaboración de un REI-FP para la formación del profesorado, no es intrínsecamente necesaria. De hecho, en este momento se están llevando a cabo dos trabajos de tesis doctoral en las que se construye directamente un REI-FP y su correspondiente praxeología *para la enseñanza* (en torno a los números reales y a la geometría elemental respectivamente) a partir de un esbozo del MER alternativo y sin basarse en un REI experimentado previamente (ver capítulo V).

constantes de orden n imponiendo que las diferencias de orden *n* de la sucesión de imágenes sean constantes.

De esta forma, la *relación de proporcionalidad directa* queda caracterizada como un caso particular de la *condición de equidad*. En efecto, la relación de proporcionalidad directa cumple la condición de equidad y, además, transforma progresiones geométricas en progresiones geométricas de la misma razón, lo que comporta que cumpla la *condición de linealidad.* Junto a ella aparecen otros tipos de relaciones (afines, cuadráticas, exponenciales, de proporcionalidad inversa, etc.) según el tipo de variación que caracteriza cada tipo de relación.

En definitiva, el MER propuesto en García (2005) integra el estudio de sistemas (mediante la MFE) en los que las cantidades de magnitud son susceptibles de variar según las *condiciones* enunciadas, y en el que se construyen, amplían e integran diferentes praxeologías en torno a los distintos tipos de variación, conformando una organización matemática regional articulada en torno a la *teoría de las funciones reales de variable real*.

3.2. Los Planes de Ahorro: un REI en torno a la modelización funcional elemental

Como continuación del trabajo descrito en la sección anterior, García (2005) describe con todo detalle el diseño a priori y la experimentación del REI llevado a cabo con alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y sustentado en el MER presentado anteriormente. A continuación resumiremos brevemente las principales características del diseño a priori del REI.

El REI diseñado sitúa los sistemas de variación a estudiar en un entorno de tipo *económico* (elaboración de Planes de ahorro). Como todo REI, parte de una cuestión generatriz Q_0 que provoca la emergencia de una arborescencia de cuestiones derivadas que generarán nuevos tipos de tareas como germen de las praxeologías que irán apareciendo progresivamente como respuestas provisionales a dichas cuestiones.

La formulación de Q_0 puede tomar diferentes formas y diferentes grados de concreción en función de las características de la comunidad de estudio. En el trabajo citado se planteó como sigue:

> **Q_0:** Deseamos planear con tiempo un viaje, como el de fin de curso u otro que deseemos hacer con nuestro grupo de amigos, para lo que tenemos que decidir un programa de ahorro que nos permita reunir la cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún la cantidad

> de dinero que necesitaremos, podemos hacer una estimación de la misma, y decidir los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades a dar en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar y cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos a final de curso y a las necesidades que tendremos. (Ibíd., p.352)

En el diseño a priori del REI se postula que esta cuestión dará lugar a:

(a) La generación de una actividad matemática a partir de un *medio matemático* relativamente limitado (*técnicas aritméticas elementales*) como el que tienen a su disposición los alumnos de la institución en la que el REI se ubica (segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, alumnos de 14 a 16 años).

(b) La construcción y simulación de diferentes Planes de ahorro que en principio surgirán como praxeologías puntuales, esto es, generadas por un tipo particular de tareas y permitirá la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas que serán el verdadero motor del REI.

De esta forma, la comunidad de estudio tiene la responsabilidad de determinar las variables relevantes del sistema, lo que constituye un paso previo imprescindible antes de construir el primer modelo de un plan de ahorro. Entre dichas variables podemos citar: imposición inicial, número total de imposiciones, relación entre los valores de las sucesivas imposiciones (para simplificar nos restringiremos a relaciones de recurrencia de orden uno), distribución temporal de las imposiciones (uniformemente espaciada en el tiempo o bien siguiendo otro tipo de distribución) y ahorro acumulado después de cada imposición (y, en particular, el ahorro final).

Siguiendo con el diseño a priori del REI, se considera que los alumnos de la ESO también tendrán que asumir la responsabilidad de simular el desarrollo temporal del sistema, esto es, construir un conjunto de *estados del sistema* lo suficientemente amplio como para construir una base empírica suficiente para responder a ciertas cuestiones relativas al Plan de ahorro cuyo desarrollo se está simulando.

Este diseño a priori del REI presupone la emergencia de planes de ahorro con distribuciones temporales uniformemente espaciadas y entrega de cuotas según una *ley recurrente de orden uno*, que darán lugar a diferentes planes de ahorro elementales. Se postula que, entre los tipos de planes que emergerán a lo largo del proceso de estudio, es previsible que aparezcan, entre otros, los siguientes:

- Planes de ahorro de variación *equitativa*: en cada plazo se entrega una cantidad fija C.
- Planes de ahorro de variación *acumulativa con cuota creciente*: en cada plazo se entrega una cuota mayor que la depositada en el plazo anterior (los más sencillos son los *aditivos* donde cada cuota se obtiene sumando una cantidad $C > 0$ a la cuota anterior, y los multiplicativos caracterizados porque cada cuota se obtiene multiplicando la anterior por una constante $k > 1$).
- Planes de ahorro de variación *acumulativa con cuota decreciente* que se definen de manera similar a los anteriores (con $C < 0$ y $0 < k < 1$).

Este diseño del REI propone que se parta de la simulación de planes de ahorro según diferentes tipos de variación, y para cada uno de ellos se elija el número de cuotas y la cuantía de los parámetros iniciales y se calculen las cantidades acumuladas en cada plazo hasta obtener la cantidad final ahorrada.

La realización de esta primera tarea se supone que conducirá a la construcción de un conjunto de *técnicas aritméticas* sencillas que, si se desea, pueden ser programadas usando una herramienta informática como Excel. De esta forma, para cada tipo de variación se construye el germen de una primera *praxeología puntual*.

El diseño a priori del REI pretendía que los alumnos llevaran a cabo una actividad matemática en cada una de estas praxeologías puntuales con el objetivo de sacar a la luz las limitaciones del trabajo matemático dentro de las mismas. Estas limitaciones se harían especialmente evidentes al pretender no sólo construir estados particulares del sistema, sino *controlar el sistema* (en el sentido de tomar decisiones sobre sus parámetros), esto es, tomar decisiones que nos permitan prever y anticipar su comportamiento, y construir sistemas «a medida», según distintas necesidades de ahorro. También se supone que aparecerán limitaciones para la realización de tareas relativas a la comparación entre dos o más planes de ahorro.

Surgirá así la necesidad de ampliar estas praxeologías puntuales y construir praxeologías más amplias y completas en las que disponer de instrumentos que permitan controlar y anticipar el comportamiento del sistema, así como comparar diferentes sistemas. Para ello, el diseño a priori del REI propugna que la comunidad de estudio, distribuida en pequeños grupos, trabaje en cada uno de los planes de ahorro elaborados previamente con el fin de construir *modelos algebraicos* que permitan caracterizar los estados del sistema y relacionarlos con los parámetros iniciales. El hecho de que los diferentes tipos de variación estén formulados en términos de una relación de recurrencia de orden uno permite construir y utilizar técnicas algebraicas elementales.

En García (2005) se describen exhaustivamente dos experimentaciones llevadas a cabo en un grupo de 4º de ESO y un grupo de 1º de bachillerato, respectivamente. Destacamos la *organización matemática aprendida* que los alumnos de bachillerato presentaron como resultado del recorrido de estudio e investigación realizado. Esta organización matemática se extrae del informe final que, a solicitud del profesor, debe redactar el grupo y donde se deben plasmar los planes de ahorro estudiados.

> Así, en este informe final, los alumnos construyen ejemplos particulares muy detallados de planes de ahorro equitativos con cuota aditiva, utilizando Excel, y cuestionando a la vez este tipo de planes. Representan diferentes tipos de planes de ahorro mediante gráficos y justifican discursivamente la relación entre el plan y las características geométricas de su representación. Algunas de las expresiones algebraicas que presentan surgen «sin más» en unos tipos de planes y, en otros, las deducen a partir de un conjunto de plazos. Inventan ejemplos donde aplicar la fórmula hallada que utilizan para determinar algún parámetro (inicial o de otro tipo) y, finalmente, validan sus cálculos con Excel y una representación gráfica.

4. Diseño y desarrollo de un REI-FP en torno al problema docente de la modelización funcional elemental en la ESO

En esta sección describiremos el diseño y la puesta en marcha de los Módulos M_0, M_1 y M_2 de un REI-FP. El desarrollo de este proceso de estudio en el ámbito de la formación del profesorado presenta diversos objetivos relacionados entre sí. El primero consiste en llevar a cabo un proceso de formación encaminado a proporcionar a los futuros profesores herramientas útiles para diseñar y gestionar en la ESO un REI en torno a la modelización funcional elemental y la proporcionalidad. Un segundo objetivo, central en esta memoria, consiste en construir colectivamente una *praxeología matemática para la enseñanza* en torno a la modelización funcional elemental, que podrá utilizarse posteriormente como un instrumento de formación a reelaborar en cada nueva implementación. Y, por último, en el ámbito de la investigación didáctica, la experimentación que describiremos a continuación, pionera en la implementación de un REI-FP, persigue analizar las condiciones que hacen posible y las restricciones con las que chocará dicha implementación, al tiempo que pretende diseñar y utilizar una *estrategia metodológica* general para construir praxeologías matemáticas para la enseñanza en torno a diferentes ámbitos de la matemática escolar.

4.1. Condiciones de la experimentación¡Error! Marcador no definido.

A fin de detallar las condiciones materiales e institucionales en las que se ha desarrollado la implementación del REI-FP que hemos experimentado con estudiantes, describiremos en lo que sigue la estructura del máster en el que se sitúa el bloque *Modelización matemática* dentro del cual se ha llevado a cabo la citada experimentación, la organización material y los dispositivos de evaluación así como la organización didáctica global de dicho bloque.

4.1.1. Los Complementos de formación disciplinar en matemáticas como un módulo del Máster universitario de formación del profesorado de secundaria

La experimentación de un REI-FP en torno a la modelización funcional elemental se llevó a cabo en el ámbito del *Màster interuniversitari de formació de professorat d'educació secundària obligatòria i batxillerat, formació professional i ensenyaments d'idiomes*, en la especialidad de matemáticas dentro del módulo Complementos de formación disciplinar en matemáticas que se impartió el curso 2013-2014. Dicho máster se estructura en seis módulos obligatorios cuyo peso relativo en términos de ECTS se muestra en el siguiente cuadro:

Módulo	**ECTS**
Formación psicopedagógica y social	12
Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	12
Innovación docente e iniciación a la investigación educativa	6
Complementos de formación disciplinar en matemáticas	10

Practicum	14
Trabajo de fin de máster	6
TOTAL	60

Según indica la *Guía del Estudiante*,

> […] en el Módulo Común de Formación psicopedagógica y social para la Educación Secundaria se desarrollan competencias profesionales de carácter psico-socio-pedagógico. En los módulos de Complementos, Innovación docente y Enseñanza y Aprendizaje se desarrollan competencias relacionadas con la didáctica y el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el Practicum se aplican de forma integrada las competencias trabajadas en los módulos anteriores y se completa su adquisición mediante la vivencia y la participación en experiencias reales en los centros docentes. Finalmente, en el Trabajo de fin de máster se desarrollan todas las competencias del máster incluida la capacidad para comunicar, tanto por escrito como oralmente, los resultados del trabajo realizado.

Cada módulo se estructura en *bloques*, cada uno de los cuales está sujeto a una evaluación propia, de tal forma que los estudiantes reciben al final de curso una calificación para cada uno de los módulos.

El módulo *Complementos de formación disciplinar en matemáticas* tiene un peso total de 10 ECTS distribuidos en tres bloques: «Temas clave de matemáticas desde una perspectiva histórica» (4 ECTS), «Resolución de problemas» (4 ECTS) y «Modelización matemática» (2 ECTS).

Globalmente considerado, este módulo tiene como objetivo fundamental aportar a los estudiantes los complementos matemáticos más relevantes para enseñar matemáticas en secundaria.

La *Guía Docente* describe brevemente el contenido y la función de cada uno de estos bloques en los términos siguientes:

> 1. *Temas clave de matemáticas desde una perspectiva histórica* (4 ECTS). La enseñanza de las matemáticas requiere disponer de un conocimiento sólido de la materia que vaya más allá de los contenidos estrictos que se trasmiten en la ESO y el Bachillerato. Es necesario que el profesorado tenga un bagaje formativo que le otorgue una perspectiva amplia e integrada de los conceptos y procedimientos matemáticos que ha de trasmitir y que conozca su origen y su evolución a lo largo del tiempo. Esta perspectiva es importante para

la comprensión global de la materia y también para acercar al alumnado a los aspectos humanos de la ciencia.

2. *Resolución de Problemas* (4 ECTS). El objetivo de este bloque es la utilización de los problemas para incentivar y motivar el aprendizaje de las matemáticas. Por ello es conveniente: utilizar la notación matemática correctamente; aclarar y estudiar, si es necesario, los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema y trabajar hasta conseguir la comprensión por parte de los estudiantes; aplicar técnicas y estrategias de resolución de problemas; redactar con estilo matemático y en un lenguaje adecuado, y no sólo simbólico, los materiales trabajados; reflexionar sobre las ideas y procesos que intervienen en la resolución de cada problema.

3. *Modelización matemática* (2 ECTS). La modelización matemática es una parte importante del Currículum de Secundaria. El preámbulo del currículum de Matemáticas de la ESO dice: Las matemáticas son un instrumento de conocimiento y análisis de la realidad [...]. Asimismo, las matemáticas posibilitan la creación de modelos simplificados del mundo real que permiten una interpretación acotada de éste y, al mismo tiempo, generan problemas adecuados al momento educativo del alumno facilitando su espíritu crítico y despertando su creatividad. Esto nos da una idea de la importancia que el currículum concede a la modelización matemática.

La organización en Catalunya del Máster de Formación del profesorado de Secundaria, en la especialidad de matemáticas tuvo por primera vez durante el curso 2013-2014 un carácter interuniversitario, participando en su organización diversas universidades catalanas. En el módulo *Complementos de formación disciplinar en matemáticas* han participado seis profesores pertenecientes a cuatro universidades: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Universitat Pompeu Fabra (UPF) y Universitat de Barcelona (UB).

El total de alumnos matriculados se ha dividido en dos grupos-clase con 24 estudiantes en cada uno de ellos. La formación básica de estos estudiantes o profesores en formación es diversa: alrededor de un 20% son licenciados o graduados en matemáticas, el resto tienen formación como arquitectos, economistas, ingenieros de diversas especialidades, físicos.

Los dos formadores responsables del grupo de estudiantes en el cual se ha llevado a cabo la experimentación, en lo que se refiere al módulo de Complementos, han sido: Maria Rosa Massa (UPC) profesora del bloque *Temas clave de matemáticas desde una perspectiva histórica* y Josep Gascón (UAB) profesor de los dos bloques restantes, *Resolución de Problemas* y *Modelización matemática*.

4.1.2. Organización material y dispositivo de evaluación del bloque Modelización Matemática dentro del módulo Complementos de Formación ***¡Error! Marcador no definido.***

El bloque *Modelización matemática* [12] tiene una valoración de 2 ECTS y se desarrolló a lo largo de siete sesiones de 2 horas de duración, a las que hay que añadir una sesión preliminar en la cual se trabajaron y ejemplificaron las nociones básicas de la actividad de modelización matemática tal como se conceptualiza en los trabajos de la TAD. La distribución horaria de las sesiones fue la siguiente: la sesión preliminar se impartió el 22 de enero de 2014 en horario de 18h30 a 20h. En esta sesión se introdujeron algunas nociones básicas relativas a la modelización matemática tales como: *sistema*, *cuestiones problemáticas*, *modelos matemáticos*, *respuestas provisionales*, *recursividad* y *reflexividad de la actividad de modelización matemática*. La sesión concluyó mediante un trabajo práctico de modelización matemática, desarrollado en pequeños grupos de trabajo y con la presentación de la cuestión Q_0-FP del REI-FP a desarrollar en las próximas sesiones.

El grueso de las sesiones, que serán descritas con todo detalle en lo que sigue, se concentró en un periodo de 15 días entre el 29 de enero y el 12 de febrero de 2014 con el siguiente horario: el 29 de enero la sesión fue de 18h30 a 20h30 y en los días 5, 7 y 12 de febrero se hicieron dos sesiones de dos horas cada día (de 16h a 18h y de 18h30 a 20h30). Las dos últimas —del 12 de febrero—, se destinaron a la exposición pública de los trabajos realizados por cada uno de los cinco grupos de trabajo en los que se dividía el grupo clase.

En cuanto a los dispositivos de evaluación, los requisitos para tener derecho a la evaluación final incluían la asistencia a un mínimo del 80% de las sesiones de clase y la entrega de todas las prácticas y ejercicios de evaluación dentro de los plazos establecidos. En el caso particular del bloque *Modelización matemática* la asistencia y participación en clase proporcionaba un 10 % de la calificación global y la realización en pequeño grupo y presentación pública de un trabajo sobre modelización funcional elemental aportaba el 90% restante. Es importante tener en cuenta que este bloque constituye únicamente el 20% del módulo *Complementos de formación disciplinar en*

[12] Al inicio de este bloque se incorpora la autora de la memoria como formadora, junto al profesor Josep Gascón.

matemáticas (2 ECTS sobre un total de 10 ECTS) y, por tanto, su aportación a la calificación final del módulo tiene un peso del 20 %.

4.1.3. Organización didáctica global

(a) *Estructuración de la comunidad de estudio en grupos de trabajo*: Antes de iniciarse el REI-FP se constituyeron 5 pequeños grupos de trabajo (de 4 o 5 miembros cada uno). A lo largo de todo el recorrido de estudio los estudiantes trabajaron en grupo y como culminación del REI cada uno de los grupos de trabajo diseñó su respuesta y la presentó en gran grupo.

(b) *Dispositivos didácticos*: Cada uno de los grupos dispuso de un cuaderno —facilitado por los formadores— sobre el que plasmaron el trabajo a medida que lo iban realizando, así como todo tipo de elementos, comentarios y cuestiones que surgieron en el trascurso del mismo. Este cuaderno fue entregado a los formadores al final del recorrido. Cada grupo de trabajo eligió un *Secretario* que era el encargado de anotar en el cuaderno las conclusiones provisionales a las que había llegado el grupo y el encargado de exponerlas públicamente para discutirlas y confrontarlas con las respuestas del resto de los grupos. Este cargo era rotatorio entre los miembros de cada grupo de trabajo.

(c) *Medios disponibles*: entre los medios que utilizaron habitualmente los estudiantes están diferentes programas como Excel y GeoGebra, que resultaron de gran utilidad para simular la dinámica de algunos Planes de Ahorro. A lo largo del proceso de estudio los estudiantes dispusieron, asimismo, de otros muchos medios para desarrollar su trabajo, como diversos materiales proporcionados por los formadores, textos escolares, currículum de Secundaria, documentos elaborados por los grupos, el propio cuaderno de trabajo, presentaciones en la pizarra, entre otros, tal como se detalla en lo que sigue.

(d) *Nuevo contrato didáctico*: La función de los formadores se circunscribió, esencialmente, a determinar la organización temporal de las etapas del proceso, a fijar las respectivas responsabilidades tanto individuales como de los grupos de trabajo y, sobre todo, a plantear cuestiones sobre las propuestas y sobre las respuestas de los grupos de estudiantes: ¿De dónde sale? ¿Cómo se puede validar? etc.

(e) *Organización temporal:* En la tabla siguiente se especifica el diseño a priori de la distribución temporal de las tareas que estructuran los diferentes módulos.

Módulo	*Tarea*	*Periodo previsto*
Sesión preliminar	T0: Nociones básicas de modelización matemática	Día 22-01-2014 18:30 h a 20:00 h.
Módulo 0	T0: Presentación de Q_0-FP	Día 22-01-2014 20:00 h a 20:30 h.
Módulo 0	T1: Los grupos de trabajo exploran las respuestas existentes a Q_0-FP	Periodo comprendido entre el 22-01-2014 y el 27-01-2014
Módulo 0	T1: Cada grupo envía su informe a la comunidad de estudio	Día 27-01-2014
Módulo 0	T2: Exposición por grupos y síntesis en gran grupo de las respuestas a Q_0-FP	Día 29-01-2014 18:30 h a 19:30 h.
Módulo 1	T3: Presentación del REI de los Planes de Ahorro generado por la cuestión Q_1 como respuesta alternativa a Q_0-FP	Día 29-01-2014 19:30 h a 20:30 h.
Módulo 1	T3: Primer encuentro con los Planes de Ahorro	Día 05-02-2014 16:00 h a 17:00 h
Módulo 1	T4: Exposición por grupos y síntesis en gran grupo	Día 05-02-2014 17:00 h a 18:00 h
Módulo 1	T5: Exploración de nuevos tipos de Planes de Ahorro	Día 05-02-2014 18:30 h a 19:30 h
Módulo 1	T6: Exposición por grupos y en gran grupo. Elaboración de un mapa matemático provisional de los planes de ahorro	Día 05-02-2014 19:30 h a 20:30 h
Módulo 2	T7: Posición del recorrido M vivido en el mapa de los planes de ahorro y comparación con la M escolar	Día 07-02-2014 16:00 h a 17:00 h
Módulo 2	T8: Respuesta a Q_{22} Características didácticas del REI vivido y adaptación a cuarto de ESO	Día 07-02-2014 17:00 h a 18:00 h
Módulo 2	T9. Desarrollo del Recorrido Matemático vivido por cada grupo	Día 07-02-2014 18:30 h a 20:30 h
Módulo 2	T10. Presentación en gran grupo y construcción de una respuesta colectiva	Día 12-02-2014 16:00 h a 20:30 h

4.2. El módulo M_0 del REI-FP: ¿Cómo enseñar la modelización funcional elemental en la ESO?

4.2.1. Diseño a priori

El módulo M_0 del REI-FP, que es inicial y a la vez transversal, estará presente a lo largo de todo el recorrido. De hecho, la problemática que se plantea en este módulo será especialmente relevante en la parte última del recorrido y, sobre todo, en la elaboración del informa final, puesto que es allí donde se materializará la respuesta que aporten los estudiantes a Q_0-FP como resultado del trabajo hecho. En nuestro caso, y dado que únicamente experimentaremos los módulos M_0, M_1 y M_2, la cuestión Q_0-FP será sólo parcialmente respondida mediante la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza.

El módulo M_0 se desencadena mediante una cuestión generatriz que denotaremos Q_0-FP y que debe ser una cuestión crucial de la profesión de profesor: un problema profesional. El estudio de esta cuestión inicial debe poder formularse en términos propios a la problemática docente y hacer referencia al entorno institucional del profesorado. En nuestro caso, la cuestión generatriz se formula en los términos siguientes:

> Q_0-FP: *¿Cómo organizar la enseñanza de la modelización funcional elemental en la ESO y qué papel darle a la proporcionalidad en dicha organización?*

Para facilitar la devolución de esta cuestión y ayudar a los estudiantes del curso a iniciar el trabajo de búsqueda de elementos de respuesta disponibles, se decidió acompañarla con el siguiente conjunto de cuestiones derivadas:

> *¿Qué características presenta en la ESO la organización matemática curricular en torno a la modelización funcional elemental*? *¿Qué tipos de modelos funcionales aparecen*? *¿Cómo se relacionan entre sí*? *¿A qué cuestiones viene a responder la modelización funcional elemental en la ESO*? *¿Por qué y para qué se introducen los modelos funcionales en la ESO*? *Esto es, ¿cuál es la razón de ser oficial que la matemática escolar (el currículo y los libros de texto) asigna a los modelos funcionales que aparecen en la ESO*? *¿Qué papel desempeña la proporcionalidad con relación al conjunto de modelos funcionales elementales que aparecen en la ESO*?
>
> *Aparte de la respuesta del sistema escolar, ¿qué otras propuestas didácticas alternativas existen* (*en los trabajos de innovación didáctica, en los artículos de investigación, en los materiales de formación del profesorado, etc.*) *para organizar la enseñanza de los modelos funcionales en la ESO*?

Para buscar respuestas disponibles a estas cuestiones, se propone a los estudiantes que hagan un uso libre de cualquiera de los documentos virtuales y materiales que tengan a su disposición: libros de texto, currículo oficial de la ESO, artículos de investigación e innovación didáctica, materiales de formación del profesorado, producciones de la noosfera, su propia experiencia como alumnos, etc. Cabe la posibilidad de que los formadores indiquen algunos de los *media* más accesibles, aunque es de suponer que los estudiantes no tengan dificultades en este ámbito.

El diseño a priori prevé que la recopilación y análisis preliminar de las respuestas que se aporten a la cuestión Q_0-FP provocará la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas. En particular, la discusión dentro de los grupos de trabajo debe hacer surgir cuestiones relativas al problema de la fundamentación y validación de dichas respuestas y a la propia noción de MFE (ausente en el discurso curricular oficial), así como a las posibles incoherencias internas de las praxeologías matemáticas escolares y a las carencias de componentes praxeológicos que se detectan en los libros de texto.

Con la realización de esta primera tarea, el diseño a priori del módulo M_0 pretende que los estudiantes *cuestionen las organizaciones matemáticas escolares* en torno a la proporcionalidad y la modelización funcional como punto de partida para analizar las organizaciones didácticas asociadas. Se pretende así superar la tendencia a identificar necesariamente cualquier ámbito matemático (en este caso la MFE) con los contenidos escolares que aparecen habitualmente en los libros de texto.

Como segunda tarea, y por medio de un *Secretario* del grupo de trabajo (que deberá ser diferente para cada uno de los sucesivos informes) se propone que cada grupo *exponga brevemente* (unos 10 minutos por grupo) al gran grupo *sus conclusiones provisionales* relativas a su estudio de la cuestión Q_0-FP. En gran grupo se discutirán y articularán las diferentes respuestas y se elaborará una caracterización provisional de la organización matemática de la ESO en torno a la MFE.

En este punto, el diseño a priori pretende que surjan nuevas cuestiones por parte de los grupos de trabajo y por parte de los formadores como, por ejemplo:

> ¿*Es necesario modificar esta organización curricular en torno a la MFE*? ¿*En qué sentido*? ¿*Por qué*? ¿*Qué dificultades es previsible que aparezcan en el proceso de estudio de los modelos funcionales elementales tal como aparecen en los libros de texto de la ESO*?

La estructura temporal prevista para las sesiones asociadas a este módulo y el material propuesto como acompañamiento son los siguientes:

Tarea y tiempo previsto	*Contenido*	*Material utilizado*
Tarea 0 (a) 90 minutos	Nociones básicas de modelización matemática	Presentación en PowerPoint (Anexo 4)
Tarea 0 (b) 30 minutos	Presentación de Q_0-FP	Material nº 1 (Anexo 5)
Tarea 1 6 días	Exploración de algunas respuestas a Q_0-FP y envío de informes a los grupos	Textos escolares y Currículum de la ESO
Tarea 2 60 minutos	Exposición por grupos y síntesis en gran grupo de las respuestas a Q_0-FP	Material nº 2 (Anexo 6) Documento elaborado por cada grupo

4.2.2. Desarrollo del Módulo M_0 y respuestas de los grupos de estudiantes **¡Error! Marcador no definido.**

Tarea 1: Exploración de algunas respuestas institucionales a la cuestión Q_0-FP

En la experimentación llevada a cabo en el Máster de Formación del Profesorado impartido durante el curso académico 2013-2014, los 24 estudiantes se organizaron en cinco grupos: cuatro grupos de 5 estudiantes y un grupo con 4. A sugerencia de los formadores, convinieron el reparto del trabajo de búsqueda de información quedando asignado a cada grupo un curso de la ESO y dejando al grupo restante la exploración del currículo oficial de esta etapa educativa. A cada grupo de trabajo se le encomendó *sintetizar en un informe breve, por escrito,* las respuestas que proporcionan a dichas cuestiones los libros de texto, el currículo y «la innovación». Se pidió también a cada grupo que incluyera en el informe todas aquellas preguntas que surgiesen al hilo de la exploración de los diversos materiales.

Los estudiantes analizaron principalmente el currículo oficial y los libros de texto más utilizados, aunque en el enunciado de la tarea se decía explícitamente que tenían libertad para acudir a todo tipo de documentos para responder a la última de las preguntas de Q_0-FP. De este modo, y de forma no prevista por los formadores, uno de los grupos de trabajo encontró en la red la tesis doctoral de Javier García (2005) y la aportó como material para responder a dichas cuestiones. La búsqueda en Google de “modelización funcional” y “proporcionalidad” remite muy rápidamente a la tesis mencionada. Se constata así una posible manera subrepticia de dirigir la búsqueda de los estudiantes a partir de la elección de la expresión utilizada para la designación del ámbito matemático objeto de estudio en el REI-FP.

Tarea 2: Exposición por grupos y síntesis en gran grupo

A lo largo del periodo en que los grupos de estudiantes estaban elaborando sus respuestas, plantearon por correo electrónico algunas dudas con relación a cómo debían formular el resultado de su trabajo. Atendiendo a esta demanda, los formadores enviaron a todos los grupos las siguientes indicaciones:

(1) Se han de especificar los libros concretos de la ESO que se están analizando.

(2) Vuestra tarea en este informe consiste en describir la respuesta que dan los libros de la ESO (o el currículum) a las cuestiones que forman parte de Q_0-FP.

(3) Se debe indicar con precisión el origen de los ejemplos que citéis.

(4) Es importante explicar la relevancia que tienen las funciones y los modelos funcionales en el conjunto del currículum de matemáticas de cada uno de los cursos de la ESO, tanto cuantitativamente como cualitativamente.

(5) Indicad con claridad qué cuestiones vienen a responder la modelización funcional (y, en general, las funciones) en la matemática de la ESO, es decir, la razón por la que se introducen. En otras palabras, ¿cuál es la razón de ser que asignan los libros de ESO (y el currículum) a las funciones y a los modelos funcionales?

(6) En concreto, en relación con el punto anterior, ¿cuáles son las tareas matemáticas específicas que el libro de texto resuelve o propone para resolver utilizando las funciones o los modelos funcionales?

(7) ¿Cómo se relacionan entre sí los diferentes modelos funcionales que aparecen? ¿Qué sistema simbólico predomina en la descripción de las funciones y los modelos funcionales? ¿Las gráficas, las tablas, la descripción verbal de las funciones, o el lenguaje algebraico?

(8) Por último, pero no menos importante, se debe explicar el papel que se adjudica a la proporcionalidad en el conjunto de modelos funcionales. ¿Cómo se relaciona la proporcionalidad con el resto de modelos funcionales elementales? Los libros de texto (y el currículum), ¿otorgan un papel central a la proporcionalidad o, por el contrario, la consideran como una relación funcional más al mismo nivel que las restantes?

Describimos a continuación una síntesis de las respuestas aportadas por los grupos de trabajo que participaron en la experimentación. Queremos advertir que en lo que sigue hemos utilizado libremente el texto presentado por los estudiantes, seleccionando algunas de las expresiones y de las explicaciones que proponen.

Grupo encargado de analizar el currículum de 1º ESO

Después de estudiar cuatro libros observamos que en el primer curso de la ESO, en general, no se trata explícitamente el concepto de función.

Para poder responder a la pregunta $\boldsymbol{Q}_0$, hemos resumido en tres aspectos las representaciones de las funciones —expresión analítica, gráfica y tabla de valores— y hemos identificado los siguientes tipos de funciones —lineales, afines, cuadráticas, raíces y potencias— que estarían en la base de diferentes cálculos solicitados a los alumnos, cálculos puntuales, y que mencionaremos como «modelos funcionales».

En ninguno de los libros analizados hemos podido encontrar una relación entre los diferentes modelos funcionales y el propio concepto de función. Sólo en el libro de la editorial *Brúixola* se define el concepto de función, dentro del capítulo de estadística y azar, cuando ya se ha trabajado durante todo el curso con modelizaciones funcionales sin mencionar la palabra función. Hemos podido observar que los libros presentan capítulos cerrados, muertos en sí mismos y con pocas relaciones entre ellos.

También, de manera general, hemos visto que en el primer curso de la ESO se trabajan los modelos funcionales a partir de gráficos, tablas de valores dadas o mediante ejercicios que se pueden resolver aritméticamente.

Esto nos plantea una pregunta: ¿por qué no introducir las funciones o mencionar qué es lo que hay detrás? ¿Por qué esconderlas? En el currículo se habla de entender y comprender funciones pero con estas metodologías y guías, ¿pueden los alumnos llegar a entender y comprender qué son las funciones?

Uno de los puntos donde se trabajan más los modelos funcionales está dentro del contenido de medida, debido a la relación de áreas, volúmenes, etc. Ahora bien, ¿no se podría proponer un tipo de ejercicio donde variando uno de los lados se pudiera representar la dependencia entre las dos medidas fijando el área? Creemos que estas preguntas no tienen por qué ser conflictivas para los alumnos de primero de ESO.

Otro bloque donde se trabajan modelos funcionales es en el de cambio y relaciones, ya que todos los libros dedican un tema a la proporcionalidad y cálculo de porcentajes. Sin embargo, lo hacen de manera muy implícita proponiendo ejercicios en los que hay una función de trasfondo, normalmente lineal, pero en ningún momento se especifica este hecho. A pesar de tener conciencia de la relación entre una proporción y una función lineal o inversa, no se menciona en ningún momento. Creemos que este sería el momento para la introducción del concepto de función, haciendo hincapié en que una posible razón de ser de algunas funciones es la proporcionalidad.

Al preguntarnos por la razón de ser que se asigna a los modelos funcionales en los libros de texto, observamos que en el primer curso de la educación secundaria obligatoria, las funciones responden a las sucesivas necesidades que tiene el libro en los diferentes contenidos. Es por ello que, en el libro de la editorial *Brúixola*, las funciones se definen en el tema de estadística debido a la necesidad de su existencia.

Grupo encargado de analizar el currículum de 2º ESO

El trabajo se ha realizado con dos libros de texto de los que se puede decir, de manera general, que tratan los mismos temas relativos a las funciones y de manera muy similar. Gracias a la introducción de las funciones, los alumnos son capaces de ver que con las funciones pueden representar ciertos eventos. Seguramente se debería profundizar en la idea de que una función es una representación aproximada de un «hecho».

Una de las características comunes a ambos libros es que, a excepción de la Unidad Didáctica que trata de funciones, en el resto de temas no se indica al alumno que está trabajando también con funciones.

En particular, se introduce la proporcionalidad antes del concepto de función, puesto que para trabajar con funciones los alumnos han de aplicar previamente el concepto de proporcionalidad.

Los modelos funcionales no se relacionan entre sí, aunque sí se utiliza un mismo modelo para representar diferentes características de una función, como por ejemplo, el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.

En particular, uno de los ejemplos que hemos podido ver es el del cálculo de interés simple, con la explicación de su utilidad, lo que permite ver al alumno una aplicación de un modelo funcional.

En nuestra opinión, las funciones unen aspectos como el álgebra, representación de tablas, representación gráfica, etc. y pueden servir para poder dotar a los alumnos de competencia tecnológica, aprovechando el uso de las TIC para realizar estudios de funciones, hacer su representación, conseguir un conjunto de valores a partir de la expresión algebraica de la función, etc.

La razón de ser de las funciones pues, es la comprensión y estudio de fenómenos que se dan en la vida cotidiana. Entender gráficos, pictogramas, etc. puede servir por ejemplo para entender las noticias de los periódicos y extraer conclusiones como identificar relaciones de proporcionalidad numérica y entender el comportamiento para poder prever resultados futuros.

En los libros de texto se toma la proporcionalidad para trabajar muchos conceptos matemáticos. Si bien históricamente la geometría ha jugado este papel. Con el acceso de toda la población al saber matemático, se ha sustituido la matemática analítica por un razonamiento basado en la lógica elemental de la proporcionalidad. Esto supone un problema porque cuando en el bachillerato se aborda la geometría sintética, se hace aún más difícil de establecer conexiones con la geometría analítica, ejercicio clave para una comprensión intrínseca.

Queremos hacer hincapié en el hecho de que los alumnos no sólo ven modelos funcionales en la clase de matemáticas. Otras formas que tienen de adquirir este conocimiento es gracias a los gráficos y tablas que se pueden encontrar en otras asignaturas como Ciencias de la Naturaleza, Ciencias Sociales, Historia, Educación Física, etc. En todas estas áreas se plantean cuestiones que sirven para dar sentido a las funciones, ya sea por su uso a la hora de realizar una actividad o para hacer más comprensible el tema que se está tratando.

Grupo encargado de analizar el currículum de 3º ESO

Este grupo se propuso responder, de manera ordenada, a las cuestiones que se planteaban como cuestiones derivadas de Q_0-FP.

¿*Qué características presenta en la ESO la organización matemática curricular en torno a la modelización funcional*?

La organización relativa a los modelos funcionales se estructura mediante la presentación de conceptos, ejemplos y ejercicios. Se hace una breve introducción histórica y se plantea una serie de problemas, al final del tema correspondiente, con el fin de ejercitar las nociones introducidas. Con el objetivo que el alumno pueda interpretar y entender la utilidad de la modelización funcional, los conceptos se contextualizan a partir de situaciones reales —mediante un ejemplo tangible y comprensible— al principio de cada apartado.

El tema titulado «Funciones y Gráficas» se inicia con un símil entre las funciones y algunas tareas del mundo laboral —para hacer una función bien hecha hay que entender el significado de la relación que existe entre variables diferentes.

Los modelos funcionales que aparecen en el texto son, básicamente, la representación gráfica, el modelo tipo tabla de valores y el modelo de expresión algebraica; este último como medio para poder hacer una clasificación de las funciones lineales y cuadráticas.

Las funciones se tratan haciendo énfasis en el concepto, en las maneras de expresarlas y en sus características. Se trabajan particularmente las funciones lineales, las funciones afines, las ecuaciones y las gráficas, las rectas paralelas y rectas secantes, las rectas paralelas a los ejes de coordenadas, las funciones de proporcionalidad inversa y presentan algunas aplicaciones a casos de la vida real.

¿*Qué tipos de modelos funcionales aparecen*? ¿*Cómo se relacionan entre sí*?

Uno de los textos utiliza representaciones gráficas de funciones como soporte para introducir los términos «variables, ejes, escala en los ejes, dominio y recorrido» y, así, finalmente llegar a la noción de función.

Más adelante se explican conceptos más relacionados con las características de las funciones como: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, periodicidad y continuidad y discontinuidad. Por último, se define la expresión analítica de una función como «una ecuación que relaciona algebraicamente las dos variables que intervienen».

El tema dedicado al estudio de las funciones lineales se inicia con la función de proporcionalidad: la pendiente, la representación gráfica y ecuación a partir de la gráfica. Después se estudia la función $\boldsymbol{y = mx + n}$, a partir de un ejemplo, lo que se enlaza con otros ejemplos relativos a rectas y puntos: recta de la que se conoce un punto y su pendiente, ecuación de la recta que pasa por dos puntos, forma general de la ecuación de una recta y, al final se presenta alguna aplicación de la función lineal.

Los ejercicios que se plantean son de aplicación directa de lo que previamente se ha mostrado, aunque también aparecen ejemplos contextualizados para que el alumno pueda hacer interpretaciones y relacionar los conocimientos que va aprendiendo con situaciones que pueden tener visos de realidad.

En alguno de los textos analizados, uno de los temas está dedicado a la proporcionalidad, abordando la proporcionalidad directa e inversa, aunque no aparece el término “función” y tampoco se presenta gráfica alguna.

En el tema dedicado a las progresiones, después de introducir las progresiones geométricas se presenta el interés compuesto, pero en ningún momento se plantea ni la ecuación que relaciona el capital final con el tiempo como una función ni su representación gráfica.

En el tema dedicado a las funciones se tratan cuestiones como el concepto de función, su expresión por medio de tablas de valores, su expresión algebraica, su representación gráfica y sus características (continuidad, discontinuidad, variable discreta, dominio y recorrido, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodicidad, simetrías). A lo largo del tema, los ejercicios que aparecen son puramente matemáticos. Sólo al final, se pueden ver algunos ejemplos de ejercicios basados en situaciones de la vida real.

En el tema siguiente se introducen las funciones lineales y afines, sus representaciones gráficas y cómo hacer el paso de la ecuación a la gráfica y de la gráfica a la ecuación. Se introducen las nociones de rectas secantes, rectas paralelas, y de funciones de proporcionalidad inversa. Algunos de los ejercicios se contextualizan con aplicaciones en la vida real.

En general, los temas están centrados en aquello que se proponen explicar y no se establecen relaciones posibles con nociones tratadas fuera del propio tema.

¿A qué cuestiones viene a responder la modelización funcional elemental en la ESO?

En algunos textos no queda muy clara la cuestión —o cuestiones— a las que la MFE pretende responder. Se establecen definiciones de conceptos que los alumnos deberán entender, poder interpretar y ajustar a su realidad para encontrar el sentido a la materia que está estudiando.

Los modelos funcionales en la ESO están estructurados para que el alumno tenga que asumir y aprender unos determinados conceptos sin tener la posibilidad de algún tipo de cuestionamiento, sin llegar a tener un criterio propio acerca de lo que está haciendo, aceptando cada concepto nuevo que se le explica y acatando las órdenes mecanizadas para resolver los problemas que se le plantean.

Por otra parte, es importante explicar de manera constructivista los conocimientos necesarios para entender los nuevos conceptos y saber en qué condiciones se podrían aplicar, aunque este sistema de estudio y trabajo no promueve la creación de técnicas no algorítmicas que potencien el desarrollo y la capacidad del alumnado.

En otro de los libros analizados se intenta transmitir que las funciones se utilizan en ámbitos del mundo laboral y que son conceptos que deben entenderse para poder desarrollar competencias de los oficios y de profesiones tan diferentes como son la mecánica de coches, las instalaciones eléctricas, la medicina, etc.

En otro caso se aborda el proceso de la modelización funcional empezando por explicar diferentes tipos de funciones para, después, poner a disposición de los estudiantes situaciones de la vida real que satisfacen las relaciones entre variables que se acaban de estudiar: linealidad, relación cuadrática, exponencial, etc. Entre estas situaciones de la vida real, se encuentran las «clásicas» de recorrido hecho por vehículos en función del tiempo, capital final que habrá en una cuenta corriente del banco después de un cierto período de tiempo y a un determinado tipo de interés, etc.

¿Por qué y para qué se introducen los modelos funcionales en la ESO?

El estudiante debe saber interpretar, orientar y conocer qué es y para qué sirve la construcción de gráficas y funciones, con el fin de adquirir una base que le permita entender algunas hechos que suceden en nuestro entorno —relaciones de causa-efecto— donde intervienen una o varias variables y poder realizar una lectura e interpretación adecuadas.

El problema es que el temario no está desarrollado para que el alumnado logre esta competencia, ya que los conceptos se presentan sin que, de manera explícita, se vea la intención y el propósito de por qué se hace. Aunque aparezcan algunos ejemplos reales (que ya es mucho), la estructura es muy algorítmica, sin la posibilidad de hacer reflexiones ni preguntas que lleven a nuevas preguntas y se pueda llegar a distintas conclusiones que, por otra parte, se presentan en el libro desde el inicio.

En otro de los textos, se introducen los modelos funcionales sencillamente porque es una cuestión que «toca tratarla», sin pretender ir más allá. Es un tema del que se tiene que hablar y se hace, por decirlo de alguna manera, como se escribiría una «receta de cocina».

Aunque se intenta establecer relaciones con la vida real, la mayor parte de los ejemplos y ejercicios se circunscriben al ámbito matemático, sin conexión con la realidad.

¿Qué papel desempeña la proporcionalidad con relación al conjunto de modelos funcionales elementales que aparecen en la ESO?

El papel de la proporcionalidad ayuda a descubrir y entender la pendiente de la recta. Haciendo una búsqueda sobre productos de alimentos y los precios correspondientes, el libro expone ejemplos que configuran una gráfica con una función y, a partir de aquí, explica la constante de proporcionalidad, su obtención y cómo se representa.

El concepto de proporcionalidad no aparece como tal, aparece el concepto función polinómica de variable real de primer grado o afín, y explica las características de la función afín como una aplicación (estudia como caso particular de aplicación biyectiva).

En otro caso, el concepto de proporcionalidad aparece como recurso para poder entender mejor cómo se puede relacionar de manera elemental una variable dependiente respecto de una variable independiente.

En el tema donde se introduce la proporcionalidad, aparecen distintos ejemplos como son las ganancias obtenidas y las horas trabajadas, los centímetros de un mapa y la distancia real que representan, el precio de un anuncio en el periódico y el número de líneas escritas que tiene, la velocidad de un vehículo y el tiempo empleado en recorrer una cierta distancia, el consumo de combustible y el espacio recorrido, la altura de dos edificios y las respectivas sombras que proyectan en el suelo, el caudal de un grifo y el tiempo necesario para llenar un depósito, el dinero obtenido y el periodo de tiempo empleado (en función del tipo de interés), etc.

Más adelante, en el tema dedicado a las funciones, aparecen las funciones de proporcionalidad. Los ejemplos que se presentan son el del precio de un viaje en taxi en función de los kilómetros recorridos (función afín), el precio de un cierto número de kilos de fruta en función del precio unitario (función lineal), la relación entre el volumen y la presión de un gas (función de proporcionalidad inversa), el precio de la factura del agua en función del consumo (función afín), etc.

¿*Qué otras propuestas didácticas alternativas existen para organizar la enseñanza de los modelos funcionales*?

No ha habido ocasión de consultar propuestas didácticas alternativas ni artículos de investigación ni materiales de formación del profesorado.

Grupo encargado de analizar el currículo de cuarto curso de ESO

Para introducir la noción de función se presentan previamente ejemplos de la vida cotidiana —consumo de agua, importe de factura, nº de diputados de un partido-nº de votos conseguidos, etc. —para pasar a definirla como una relación de dependencia entre dos variables regida por una ley.

El lenguaje asociado a las funciones —dominio, recorrido, expresión algebraica— se introduce a partir de ejemplos de figuras geométricas y con apoyo de una gráfica, se definen los restantes términos que se trabajarán —puntos de corte, crecimiento, decrecimiento, simetrías, continuidad, etc.

Las funciones que se estudian son las de proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, cuadráticas y exponenciales, a partir de su expresión algebraica, salvo para la proporcionalidad directa que se explica mediante una tabla de valores. En ningún caso se presentan con ejemplos reales. Sin embargo, las funciones exponenciales se introducen mediante ejemplos de situaciones reales.

Cuando se trata el tema sobre ecuaciones, se utilizan las gráficas de las funciones cuadráticas para mostrar que las soluciones de la ecuación asociada coinciden con los puntos donde la gráfica corta al eje de abscisas.

En el tema donde se trata la semejanza, se introducen los términos *tercera proporcional* y *cuarta proporcional*, así como la *razón de proporcionalidad*.

De manera general, se puede concluir que en cuarto curso de ESO —con la restricción de los dos textos analizados— aparece un bloque de contenidos centrados en el estudio de las funciones. No siempre se trabaja la modelización funcional sino que se exponen diferentes formas de expresión de las funciones: mediante una ecuación, una gráfica, una tabla de valores, o un enunciado. Se exponen algunos tipos de funciones y se clasifican en continuas o no continuas, se destacan las funciones lineales (representadas con una recta) y se introducen algunas curvas como las parábolas, las hipérbolas, las exponenciales y las logarítmicas.

Todas estas funciones se trabajan con definiciones y razonamientos matemáticos y, al final de cada explicación, se propone un ejercicio en el que aparecen unos modelos sencillos de velocidades, péndulos, o período de semidesintegración. Es complicado observar las ventajas del uso de funciones en la modelización de este problema, porque al encontrarse al final de la explicación parece un simple ejemplo más y no un punto de partida para la utilidad de las funciones.

Grupo encargado de analizar todo el currículo de la ESO

El grupo encargado de indagar en los escritos fuera de los libros de texto, como podían ser documentos oficiales, artículos de difusión, de investigación, páginas web, etc. encuentran el Decreto 143/2007, de 26 de junio, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Catalunya, en su Anexo 2, del que extraen lo siguiente:

[…] las matemáticas posibilitan la creación de modelos simplificados del mundo real que permiten una interpretación acotada de éste y al mismo tiempo generan problemas adecuados al momento educativo del alumno facilitando su espíritu crítico y despertando su creatividad […], o bien […] modelizar situaciones de la vida real y vinculadas a otras áreas del conocimiento y traducirlas a modelos matemáticos, con el fin de buscar soluciones con más facilidad y certeza […].

En la estructuración de los contenidos, el bloque titulado *Cambio y relaciones* cuyo significado viene a ser el desarrollar la comprensión y análisis de los patrones y el uso de modelos y expresiones matemáticas para representar las relaciones; y el trabajo en torno al concepto de función. También se trata de dotar de significado a las variables que intervienen en una situación de cambio y de identificar las relaciones de dependencia entre variables.

Asimismo, entre los once objetivos que propone el currículo de la ESO, destacan tres en los que se señala la utilización de modelos matemáticos —para identificar, representar y dotar de significado relaciones cuantitativas de dependencia entre variables—, modelos geométricos —para descubrir y probar propiedades geométricas y para resolver problemas—, y la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiadas para obtener medidas (de manera directa e indirecta) y hacer estimaciones razonables, en contextos diversos.

Con relación al contenido del currículo de los cuatro cursos de la ESO, las conclusiones que el grupo extrae se pueden resumir en lo siguiente:

- En el Decreto se indica que la secuenciación de los contenidos del currículo no implica un tratamiento diferenciado, sin embargo, no se establece cómo articular e integrar los diferentes contenidos.
- En los bloques de «Numeración y cálculo» y «Medidas», se localizan componentes de la modelización proporcional de sistemas lineales y lineales inversos (relación de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes, porcentajes, cálculo de fuerzas y movimientos).
- En los bloques de «Cambio y relaciones» y «Espacio y forma», se proponen contenidos sobre lectura e interpretación de gráficas, caracterización de dependencias entre dos variables y en su representación mediante tablas, gráficas y expresiones algebraicas, sistemas lineales y lineales inversos, y sistemas caracterizados por otros tipos de relaciones. Observamos que las situaciones de modelización están pensadas para lograr el aprendizaje de un cierto conocimiento matemático.

- Se puede observar, con relación a diversas situaciones que se proponen, la pretensión de que el alumno elabore de forma autónoma estrategias de modelización, aunque sea de forma aislada para la situación concreta, sin ir más allá en grado de complejidad y sin ser aplicable a otros campos.
- El modelo proporcional es predominante y se aplica en gran cantidad de contenidos en toda la etapa (cálculo, álgebra, geometría, probabilidad) y de manera distinta en cada uno de ellos. Esto nos hace pensar que las relaciones de proporcionalidad y proporcionalidad inversa entre magnitudes son tratadas realmente como modelo funcional, con las ventajas para el conocimiento que ello implica. Se usa como razonamiento, lo que permite el estudio de las relaciones internas (variabilidad entre magnitudes) más allá de sus formas de representación.
- Otros tipos de relaciones funcionales aparecen exclusivamente mediante fórmulas y gráficos sin articulación posible entre ellos, y cuyo aprendizaje no se extiende a otros ámbitos.

Como conclusión final acerca del currículo de la ESO, el grupo acuerda que:

> […] los modelos no lineales existentes en el Currículo deberían articularse en torno al modelo de proporcionalidad que el mismo documento propone, cuya razón de ser reside en las posibilidades de conocimiento que genera la variabilidad de una magnitud respecto de otra, para ir introduciendo progresivamente los distintos grados de complejidad funcional.

Con relación a la cuestión que aparece en último término de Q_0-FP, relativa a otras propuestas didácticas para organizar la enseñanza de los modelos funcionales en la ESO, este es el grupo que ha encontrado en internet la tesis doctoral titulada «*La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*» de García (2005). Destacan, en particular, la propuesta del autor de la mencionada tesis al considerar los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente, que necesariamente deben partir del cuestionamiento de las razones de ser de las organizaciones matemáticas que se desean reconstruir y articular. Indican, asimismo, que el autor reformula el problema docente de la «proporcionalidad» como un problema didáctico: *el problema de la desarticulación de las matemáticas escolares*, lo que le lleva a postular la necesidad de integrar la «proporcionalidad» en una organización matemática regional donde la «relación de proporcionalidad» aparezca como una relación más entre las posibles relaciones entre magnitudes.

En síntesis, podemos decir que los cinco grupos han explorado los materiales disponibles de manera bastante exhaustiva y totalmente autónoma aunque en general se limitaron a revisar los libros de texto y el currículum oficial, salvo el grupo que encontró la citada tesis doctoral.

4.2.3. Conclusiones de la comunidad de estudio **¡Error! Marcador no definido.**

Cada grupo de alumnos, por voz del Secretario, utilizó el texto que había elaborado y distribuido previamente por correo electrónico a todos los miembros de la comunidad de estudio para explicar verbalmente los puntos principales de dicho documento. A lo largo de las exposiciones de estas respuestas, los componentes de los demás grupos y los propios formadores plantearon algunas cuestiones y formularon comentarios que fueron discutidos en gran grupo. Como síntesis del trabajo presentado por los diferentes grupos y de las discusiones citadas, se elaboró de forma colectiva en la pizarra y se sintetizaron algunos rasgos de la organización matemática de la ESO en torno a la MFE en los términos siguientes:

> (1) Ausencia de la formulación explícita de las funciones en la primera etapa de la ESO.
>
> En la *primera etapa* de la ESO (alumnos de 1º y 2º de ESO, con edades entre 12 y 14 años) las funciones aparecen esencialmente de manera implícita y, en consecuencia, los modelos funcionales como tales modelos no juegan ningún papel en esta etapa.
>
> (2) Estudio de las características de las funciones en la segunda etapa de la ESO
>
> Cuando aparecen explícitamente las funciones en la *segunda etapa* de la ESO (alumnos de tercero y cuarto de ESO, con edades entre 14 y 16 años) y muy especialmente en el último curso, el tratamiento escolar de las funciones se reduce prácticamente al estudio de propiedades internas de las mismas y sólo excepcionalmente se utiliza una función como modelo (siempre dado de antemano) de una sistema.
>
> (3) Aislamiento de la proporcionalidad.
>
> En general, la relación funcional de proporcionalidad aparece en la ESO aislada del resto de relaciones funcionales elementales, se la sitúa en un universo particular (que, en algunas ocasiones, revive el universo arcaico de las razones, proporciones y regla de tres) y se le asigna un papel especial y, en cierto sentido, preponderante.

Para sintetizar las conclusiones de la comunidad de estudio, utilizaremos una gradación de las actividades de modelización funcional en tres niveles. En el primer nivel situamos el trabajo con *funciones* sin más, en el segundo la utilización de *modelos funcionales* y el tercero la *actividad de modelización funcional* que incluye la construcción del modelo funcional para responder cuestiones de un sistema, el trabajo dentro del modelo y la interpretación de los resultados obtenidos en el ámbito del sistema.

Utilizando este esquema, podemos decir que en la primera etapa de la ESO las *funciones* aparecen únicamente de forma implícita y que cuando se presentan de manera explícita, la razón de ser que les asigna el sistema escolar en la ESO queda completamente encerrada en ellas mismas, esto es, en el estudio de algunas de sus características.

Los pocos *modelos funcionales* que aparecen son modelos dados de antemano con los que únicamente se propone un trabajo puramente aritmético como, por ejemplo, calcular la altura de un cono dado el volumen y el radio de la base o bien calcular el precio bruto de un artículo conociendo el precio neto y el descuento. En cuanto a la *actividad de modelización funcional* propiamente dicha, podemos decir que está ausente en la ESO.

Una vez analizadas y sintetizadas en gran grupo las respuestas oficiales a las cuestiones derivadas de Q_0-FP, vamos a proponer a los estudiantes en el módulo M_1 la construcción de una respuesta alternativa partiendo de la cuestión generatriz de un REI experimentado previamente con alumnos de la ESO. Esta respuesta se utilizará en el módulo M_2 como punto de referencia para describir, analizar y evaluar otras posibles organizaciones matemático-didácticas en torno a la modelización funcional y, en particular, el papel que se asigna a la proporcionalidad en cada una de ellas.

4.3. El módulo M_1 del REI-FP: Vivir un REI en posición de estudiante

Este módulo tiene como objetivo principal que los estudiantes *tengan la vivencia*, en posición de estudiantes y no de profesores, de una respuesta particular a la cuestión ¿Cómo enseñar la MFE en la ESO y qué papel se le puede asignar a la proporcionalidad? surgida en la investigación didáctica llevada a cabo en el ámbito de la TAD. Se trata de una respuesta muy distinta (tanto desde el punto de vista matemático como didáctico) de las imperantes en la enseñanza secundaria y universitaria, por lo que consideramos imprescindible la vivencia conjunta de dicha respuesta por parte de los profesores en formación y su desarrollo efectivo como ejecutores de la misma, en oposición a la mera descripción y visualización (mediante materiales, vídeos, grabaciones, etc.). Esta vivencia permite al mismo tiempo separar la actividad matemática de estudio e investigación y su análisis praxeológico (o epistemológico) del problema de su enseñanza. De esta forma, se pretende proporcionar a los estudiantes un punto de vista propio, esto es, una respuesta tentativa, provisional y revisable, desde la cual observar, analizar y evaluar las posibles respuestas a Q_0-FP.

4.3.1. *Diseño a priori*

La actividad elegida para diseñar este REI-FP está basada en el REI en torno a los planes de ahorro diseñado y experimentado por F. J. García (2005), descrito en la sección 3.2. Como ya hemos dicho, los REI son dispositivos didácticos surgidos de la investigación didáctica y están centrados en la actividad de modelización matemática, que es una competencia central del currículum de matemáticas de la ESO, lo que les confiere legitimación para utilizarlos en la enseñanza formal. Igualmente, se trata de un material del cual conocemos su fundamentación, validación y sus limitaciones y, al estar alejado de las prácticas docentes habituales, nos permitirá ampliar el universo de los posibles que ofrece el sistema de enseñanza y nos obligará a tomar en consideración las restricciones que éste impone a las actividades escolares.

La respuesta que se propone elaborar mediante la puesta en práctica de este módulo servirá posteriormente como *objeto de estudio* para el módulo 2 (ver sección 4.4.) y, también, como *herramienta de estudio*, porque se tomará como sistema de referencia provisional para analizar las respuestas a la cuestión Q_0-FP inicialmente identificadas en el módulo M_0. Mientras que las respuestas que han encontrado los estudiantes en el currículum y en los libros de texto vienen dadas como simples descripciones escritas con su material de acompañamiento, el trabajo que proponemos en este módulo proporcionará la experiencia de «vivir una respuesta» que, como tal, deberá ser elaborada por los propios estudiantes bajo la tutela de los profesores formadores.

La estructura temporal prevista para las sesiones asociadas a este módulo y el material necesario son los siguientes:

Tarea y tiempo previsto	*Contenido*	*Material necesario*
Tarea 3(a) 60 minutos	Presentación del REI de los Planes de Ahorro	Material nº 3 Anexo 4
Tarea 3(b) 60 minutos	Primer encuentro con los Planes de Ahorro	Cuestión Q_1 Excel y GeoGebra
Tarea 4 60 minutos	Exposición por grupos y síntesis en gran grupo	Cuadernos de trabajo y presentación en la pizarra
Tarea 5 60 minutos	Exploración de nuevos tipos de Planes de Ahorro	Cuadernos de trabajo Excel y GeoGebra

Tarea 6(a) 30 minutos	Exposición por grupos de las respuestas a Q_1	Cuadernos de trabajo y presentación en la pizarra
Tarea 6(b) 30 minutos	Síntesis y elaboración en gran grupo de un mapa provisional de Planes de Ahorro	Programa bubble.us

La situación de partida de los Planes de Ahorro es la organización de un viaje de fin de curso por parte de un grupo de alumnos de la ESO análoga a la que se planteó a los alumnos de cuarto curso de la ESO en la experimentación descrita en García (2005). Nótese que hablamos de planes, en plural, porque se trata de diseñar diferentes tipos de planes de ahorro potencialmente adaptables a las necesidades y deseos de cada grupo de alumnos-ahorradores.

La cuestión generatriz que se propone presentar a los estudiantes es prácticamente idéntica a la experimentada por García (2005) y se formula en los términos siguientes:

> $\boldsymbol{Q_1}$: *Deseamos planear con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un Plan de Ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación de la cantidad de dinero que necesitamos, y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades que deberían aportarse en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar ni cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos al final de curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje. El objetivo final es preparar un informe, que podamos presentar a la dirección del centro, y que ayude, en los años sucesivos, a planificar el ahorro de dinero a vuestros compañeros. Este informe debería dar respuesta a cuestiones tales como*: ¿*Qué posibles planes o estrategias de ahorro se pueden considerar*? ¿*Qué ventajas e inconvenientes tiene cada uno*? ¿*Cómo decidir los plazos, las cantidades a dar en cada plazo, la duración del ahorro, etc.*?

4.3.2. Desarrollo del módulo M_0 y respuestas de los grupos de estudiantes

Como ya hemos dicho, se propuso que los estudiantes trabajaran en pequeños grupos (de 4 o 5 personas) para empezar a responder a la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$. Cada grupo utilizó un cuaderno en el que fueron anotando el progreso de su trabajo, así como todos los comentarios, cuestiones y dudas que iban surgiendo. Los formadores se limitaron a hacer sugerencias y plantear cuestiones relativas a las propuestas y a las respuestas de los grupos de estudiantes.

Tarea 3: Presentación del REI y primer encuentro con los planes de ahorro

Se propuso a los estudiantes que continuasen con el estudio de la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$ analizando la evolución de planes elementales particulares donde las imposiciones, los plazos y la duración total del ahorro venían dados, inicialmente, por cantidades concretas. Los estudiantes debían describir con todo detalle los ejemplos de planes de ahorro desarrollados y hacer una propuesta de cómo proseguir el estudio.

Tarea 4: Exposición por grupos y síntesis en gran grupo

Por medio del Secretario de turno, cada grupo de trabajo *expuso brevemente sus conclusiones provisionales al gran grupo* después del primer encuentro con los planes de ahorro. En este primer encuentro, los grupos de trabajo, después de explorar diversas posibilidades, se concentraron en general en los planes de ahorro más elementales.

Cada grupo exploró algunos nuevos tipos de Planes de ahorro, empezando por los *equitativos* que son los más sencillos y que están caracterizados por una distribución temporal uniforme de los plazos y por una cuota fija, con la opción de fijar una cuota inicial o no.

La mayoría de los grupos constató que al suponer que se mantiene una distribución temporal uniforme de los plazos, cada plan de ahorro viene caracterizado por una ley que determina la variación de la cuota que se entrega en cada plazo.

Tarea 5: Exploración de nuevos tipos de Planes de ahorro

A lo largo del desarrollo de esta tarea, los formadores disponían de un conjunto de posibles cuestiones, sugerencias y propuestas para motivar e impulsar el estudio de los planes de ahorro más elementales. Los formadores intentaron en todo momento utilizar dichos elementos de forma «socrática», esto es, únicamente en la medida en que eran explícitamente reclamados por los grupos de estudiantes. De todas maneras, los formadores eran conscientes de la importancia de que, al menos algunos grupos, estudiasen ciertos planes de ahorro elementales (además del equitativo, aquellos cuya cuota varía según una ley aditiva o multiplicativa simple) puesto que éstos constituyen la base del REI sobre los *Planes de Ahorro* (García 2005) que la TAD propone como mecanismo de construcción de una posible respuesta a la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_1}$.

En el Anexo 1 se pueden ver algunos de estos elementos que pueden ser útiles para estudiar los Planes de ahorro equitativos, así como otros Planes de ahorro elementales.

Tarea 6(a): Exposición por grupos de las respuestas a Q_1

En el diseño a priori del módulo M_1 se indicaba, y así fue transmitido a los estudiantes, que este informe debería ser útil para años sucesivos. No se trataba de dar una respuesta puntual para un Plan de Ahorro concreto, sino de realizar un estudio general en función de las posibles «condiciones iniciales», esto es, en función de las diversas hipótesis que pueden hacerse de las necesidades y las posibilidades de ahorro.

Por medio del Secretario de turno, cada grupo de trabajo *elaboró un resumen por escrito* de la respuesta a la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_1}$ incluyendo en la mayor parte de los casos, tablas, gráficas y fórmulas. Mostramos a continuación algunos elementos de las respuestas de los grupos de estudiantes a la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$.

Uno de los grupos utilizó una hoja Excel para simular la evolución de cinco planes de ahorro hasta 13 imposiciones. En concreto, los planes simulados por el tipo de imposición:

Equitativo (imposición constante): $C_n = C_0$

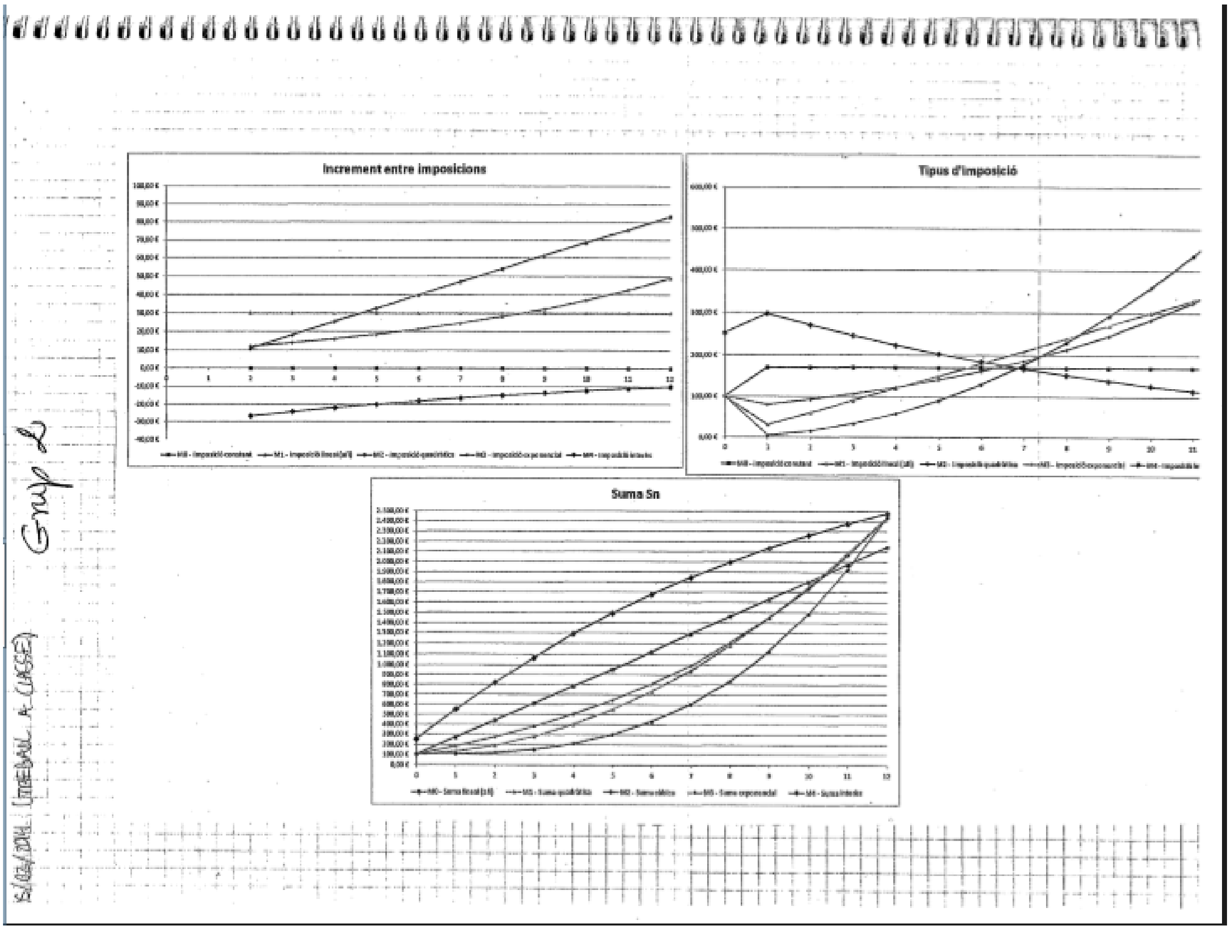
De imposición lineal: $C_{n+1} = C_n + d$

De imposición cuadrática: $C_n = k \cdot n^2$

De imposición exponencial: $C_n = d \cdot r^n$

De imposición con interés compuesto: $C_n = C(1 + i)^{T \cdot n}$

Presentamos a continuación las gráficas construidas por este grupo relativas a incremento entre imposiciones, tipos de imposición y suma acumulada, para cada uno de estos tipos de planes.



4.3.3. Conclusiones de la comunidad de estudio

Tarea 6(b): Síntesis en gran grupo de las respuestas a Q_1 y elaboración de un Mapa provisional de los Planes de ahorro

En gran grupo, y como síntesis de las aportaciones de los diferentes grupos de trabajo, la comunidad de estudio dirigida por los formadores elaboró una *respuesta conjunta a la cuestión generatriz* $\boldsymbol{Q_1}$. Esta respuesta contempló diferentes «casos» en función de las *hipótesis* que cada uno de los grupos propuso para *caracterizar el sistema modelizado*.

Entre los elementos comunes que propusieron los grupos de trabajo como características fundamentales que determinan la naturaleza y la evolución temporal de un plan de ahorro, pueden citarse los siguientes:

- El número de cuotas y su distribución temporal.
- La posibilidad de fijar una cuota inicial.
- La cantidad de dinero que se entregará en cada cuota.

- Las posibles relaciones entre dichos elementos y, en particular, la relación entre las sucesivas cuotas.

Como síntesis del trabajo realizado por los grupos y como primer esbozo de la respuesta conjunta de la comunidad de estudio se elaboró en gran grupo, bajo la dirección de los formadores, un Mapa provisional de los Planes de ahorro que integra y articula las aportaciones de todos los grupos. Este mapa parte de la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_1}$ y está estructurado por las cuestiones derivadas, las respuestas provisionales a dichas cuestiones, las hipótesis sobre los Planes de ahorro y las sucesivas cuestiones, respuestas e hipótesis.

Podemos decir que este mapa constituye el primer esbozo (muy provisional) de una *praxeología para la enseñanza en torno a la modelización funcional elemental* reconstruida por la comunidad de estudio. En dicho mapa aparecen determinadas caracterizaciones de los planes de ahorro (inicialmente mediante la ley recursiva que relaciona cada cuota con la anterior) y, consecuentemente, caracterizaciones de los *modelos funcionales* asociados a cada tipo de plan de ahorro. Presentamos a continuación el citado mapa matemático global provisional de los Planes de ahorro. (Figura 1)

Dicho mapa, como hemos mencionado, parte de la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$: ¿Qué planes de ahorro son posibles? ¿Qué ventajas e inconvenientes presentan cada uno de ellos? ¿Qué decisiones se pueden tomar sobre los plazos, las cuotas, etc.? De esta cuestión inicial surgen dos cuestiones de diferente naturaleza: Q_{2a} y Q_{2b}. Mientras que Q_{2b} deriva en cuestiones dirigidas a explorar las diferentes modalidades de planes de ahorro existentes en las entidades bancarias (inversiones de riesgo, interés fijo e interés variable, con sus diferentes modalidades), Q_{2a} pretende generar la mayor parte de los tipos de planes estudiados hasta ese momento a lo largo del REI vivido. Así, después de plantear el problema de cuáles son las variables que determinan un plan de ahorro y tomar como respuesta provisional que dichas variables son las consignadas al principio de esta sección —conclusión alcanzada por la comunidad de estudio—, surge la cuestión Q_3 sobre tipos de planes posibles y, paralelamente, la cuestión práctica Q_{4a} de en qué medida es realista, práctico o, incluso, absurdo cada uno de estos planes. Como primera caracterización de dos grandes tipos de planes de ahorro se propone: los que tienen imposiciones según periodos de tiempo regulares preestablecidos en contraposición a aquellos cuyos periodos de imposición no son regulares. Entre los planes que tienen periodos de imposición regular preestablecida se consideran aquellos cuya sucesión de imposiciones cumple una ley de recurrencia y, entre éstas, podemos se consideran considerar las que siguen una *ley de recurrencia aditiva*:

$$C_{n+1} = C_n + f(n)$$

y las que siguen una ley de recurrencia *multiplicativa*:

$$C_{n+1} = f(n) \cdot C_n$$

donde $f(n)$ es, en principio, una función polinómica en n.

Como caso particular de ambos tipos de planes que, en general, tienen cuota variable, se encuentra el plan de ahorro *equitativo* o de cuota constante: $C_{n+1} = C_n$.

Entre los tipos de planes cuyas cuotas cumplen una ley de recurrencia *aditiva*, los más sencillos son aquellos en que $f(n)$ es un *polinomio* en n. Si $f(n) = d$ es *constante* tenemos la sucesión $C_{n+1} = C_n + d$ que puede ser *creciente* (si $d > 0$) o *decreciente* (si $d < 0$). Pero a medida que aumenta el grado del polinomio $f(n)$ los planes resultantes se van haciendo más complejos, como muestran aquellos caracterizados por:

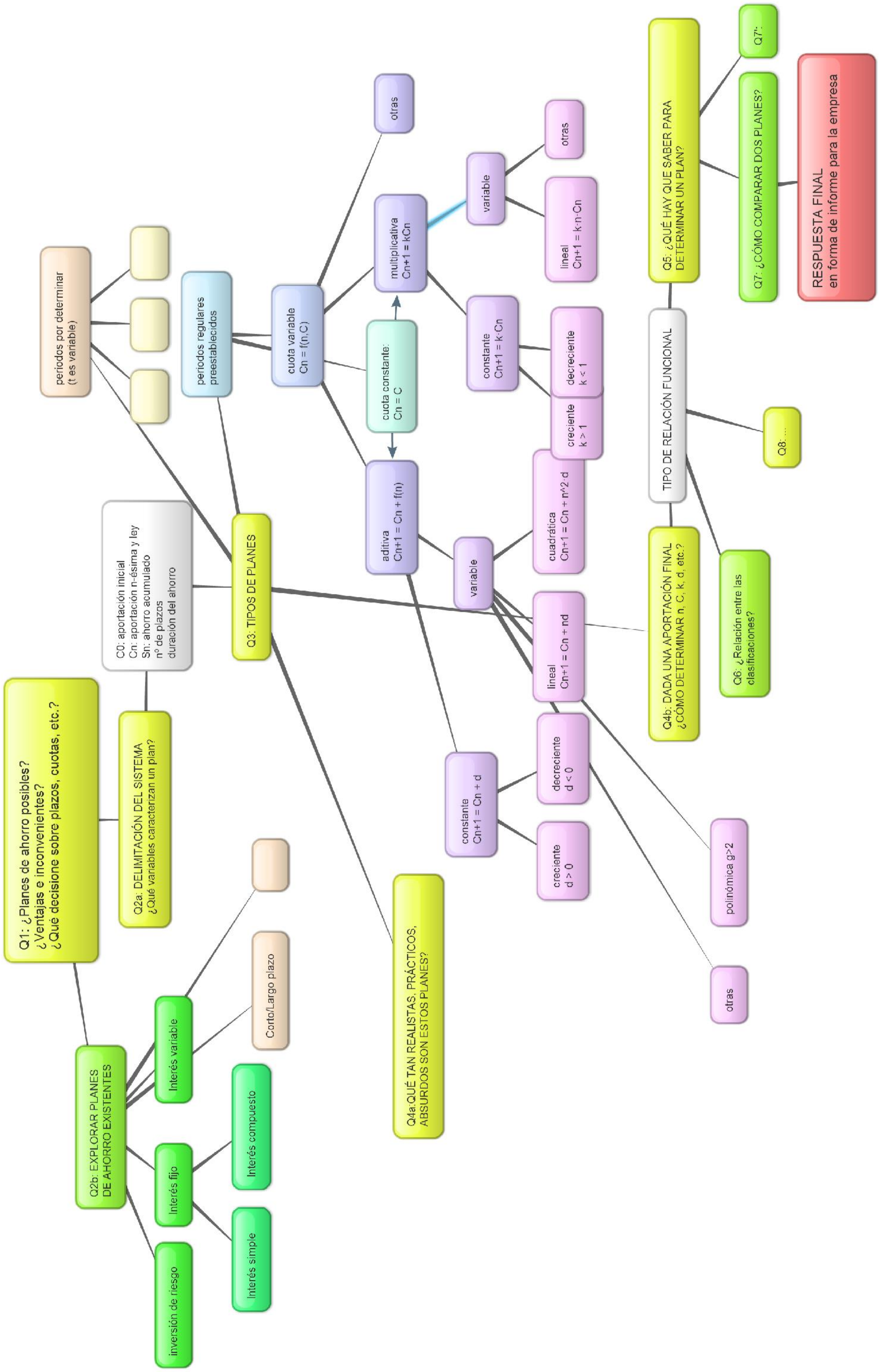
$$C_{n+1} = C_n + n \cdot d$$

$$C_{n+1} = C_n + n^2 \cdot d.$$

Análogamente, entre los tipos de planes cuyas cuotas cumplen una ley de recurrencia *multiplicativa* los más sencillos son aquellos en que $f(n)$ es un *polinomio* en n. En el caso en que $f(n) = k$ es *constante* aparece la sucesión $C_{n+1} = k \cdot C_n$ que puede ser *creciente* (si $k > 1$) o *decreciente* (si $k < 1$). De nuevo, al aumentar el grado del polinomio $f(n)$, los planes resultantes se van haciendo más complejos como muestran los planes caracterizados por: $C_{n+1} = k \cdot n \cdot C_n$ o bien por $C_{n+1} = k \cdot n^2 \cdot C_n$.

Obviamente existen muchos otros tipos de planes de cuota variable que no se explicitan en este mapa provisional.

Una vez estudiados algunos de estos tipos de planes surge la cuestión Q_{4b} relativa a la posibilidad, para cada uno de dichos planes, de expresar el *ahorro acumulado* en función de los parámetros que definen el plan y, una vez hecho esto, expresar cada uno de dichos parámetros en función de los otros. En definitiva, surge con mucha fuerza el problema del *tipo de relación funcional* que caracteriza cada uno de los tipos de planes y cómo se relacionan (cuestión Q_6) las diferentes maneras de definir un plan, ya sea mediante la ley que caracteriza la sucesión de cuotas (que puede ser recursiva o no), mediante la función que expresa el ahorro acumulado, o incluso mediante la expresión del término general de la sucesión de cuotas en función de n. El mapa concluye con las cuestiones relativas a lo que se necesita para conocer y controlar un plan (cuestión Q_5) y a la comparación entre ellos (cuestión Q_7).



Q1: ¿Planes de ahorro posibles?
¿Ventajas e inconvenientes?
¿Qué decisione sobre plazos, cuotas, etc.?
Q2a. DELIMITACIÓN DEL SISTEMA
¿Qué variables caracterizan un plan?
C0: aportación inicial
Cn: aportación n-ésima y ley
Sn: ahorro acumulado
nº de plazos
duración del ahorro
Q2b: EXPLORAR PLANES DE AHORRO EXISTENTES
inversión de riesgo
Interés fijo
Interés variable
Interés simple
Interés compuesto
Corto/Largo plazo
Q3: TIPOS DE PLANES
periodos por determinar (t es variable)
periodos regulares preestablecidos
cuota variable Cn = f(n,C)
cuota constante: Cn = C
otras
multiplicativa Cn+1 = kCn
variable
otras
lineal Cn+1 = k·n·Cn
constante Cn+1 = k·Cn
decreciente k < 1
creciente k > 1
aditiva Cn+1 = Cn + f(n)
variable
cuadrática Cn+1 = Cn + n^2 d
lineal Cn+1 = Cn + nd
polinómica g>2
otras
constante Cn+1 = Cn + d
decreciente d < 0
creciente d > 0
Q4a:QUÉ TAN REALISTAS, PRÁCTICOS, ABSURDOS SON ESTOS PLANES?
Q4b: DADA UNA APORTACIÓN FINAL ¿CÓMO DETERMINAR n, C, k, d, etc.?
TIPO DE RELACIÓN FUNCIONAL
Q5: ¿QUÉ HAY QUE SABER PARA DETERMINAR UN PLAN?
Q6: ¿Relación entre las clasificaciones?
Q7: ¿CÓMO COMPARAR DOS PLANES?
Q7':
Q8: ...
RESPUESTA FINAL
en forma de informe para la empresa

Figura 1

4.4. El módulo M_2 del REI-FP: Análisis matemático-didáctico del REI vivido

La vivencia del REI llevada a cabo en el módulo M_1 por parte de los estudiantes puede considerarse como un primer paso en el análisis de la respuesta a Q_0-FP que proponemos. Ahora, este análisis incipiente debe completarse mediante el análisis explícito y plenamente consciente de dicha vivencia y su comparación con la respuesta que proporcionan los libros de texto y el currículum de la ESO, y también con los materiales empíricos de los REI experimentados con alumnos de cuarto curso de secundaria. Éste es uno de los objetivos del Módulo 2 del REI-FP. En nuestro caso, y dado que nos proponemos como objetivo principal la construcción de una praxeología para la enseñanza en torno a la modelización funcional elemental, nos centraremos esencialmente (aunque no únicamente) en el análisis matemático del REI vivido.

La estructura temporal, el contenido de las tareas y el material necesario para desarrollar el módulo M_2 son los siguientes:

Tarea y tiempo previsto	***Contenido***	***Material necesario***
Tarea 7(a) 30 minutos	Comparar la actividad matemática vivida con la escolar	Cuestión Q_{21} y cuestiones derivadas Materiales elaborados en los módulos M_0 y M_1
Tarea 7(b) 30 minutos	Situar el RM vivido por cada grupo en el Mapa de los Planes de ahorro	Mapa provisional de los Planes de ahorro Respuestas a la Tarea (1)
Tarea 8(a) 30 minutos	Ventajas e inconvenientes didácticos de los REI y de la organización escolar habitual	Cuestión Q_{22} Materiales elaborados en los módulos M_0 y M_1
Tarea 8(b) 30 minutos	Adaptación del REI para alumnos de 4º de ESO	Descripción de una experimentación con alumnos de Secundaria
Tarea 9 120 minutos	Desarrollo matemático del recorrido vivido por cada uno de los grupos	Cuadernos de trabajo y Excel y GeoGebra
Tarea 10 240 minutos	Presentación en gran grupo y construcción de una respuesta colectiva	Power-Point Excel y GeoGebra

4.4.1. Análisis matemático del REI vivido ***¡Error! Marcador no definido.***

La primera de las cuestiones (bastante genérica) que se propone presentar a los estudiantes en esta segunda fase, con el objetivo de que lleven a cabo un análisis matemático de la actividad desarrollada, es la siguiente:

> $\boldsymbol{Q_{21}}$: ¿Cómo se puede describir la actividad matemática desarrollada para responder a la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$? ¿Cuáles son los elementos matemáticos (nociones, técnicas, propiedades, etc.) utilizados y el procedimiento seguido?

Para proporcionar a los estudiantes los medios para abordar estas cuestiones, será necesario introducir las expresiones y los ingredientes necesarios para «hablar» de la actividad matemática realizada. Hay que tener en cuenta que, en general, la matemática sabia proporciona más elementos descriptivos de las obras cristalizadas que medios para describir los procesos de construcción. De ahí la importancia de recordar la terminología específica para describir la actividad de modelización matemática retomando algunos de los elementos estudiados de manera más sistemática en la sesión preliminar.

Además, y con el objetivo de precisar el significado de la cuestión $\boldsymbol{Q_{21}}$ se introducirán algunas *cuestiones derivadas* para guiar el análisis praxeológico (matemático) del REI vivido:

- ¿Se han analizado y comparado las ventajas e inconvenientes de utilizar unas técnicas (aritméticas, algebraicas, graficas) u otras para estudiar los planes de ahorro?
- ¿Qué papel han desempeñado las técnicas *aritméticas* a lo largo del proceso de estudio?
- ¿En qué momentos concretos del proceso ha surgido la necesidad de utilizar técnicas *algebraicas*? ¿Qué limitaciones de las técnicas aritméticas se han puesto claramente de manifiesto?
- ¿Se han articulado las técnicas *algebraicas* y las técnicas *funcionales* a fin de abordar ciertas tareas matemáticas?
- Para estudiar los planes de ahorro ¿se han utilizado técnicas gráficas? ¿Cómo se han justificado?
- ¿Qué papel ha desempeñado la *proporcionalidad* en la actividad matemática desarrollada?
- ¿Cómo se ha relacionado la *proporcionalidad* con el resto de relaciones funcionales? ¿Aparece como una relación funcional «especial» o como una más en el conjunto de relaciones funcionales elementales?

- ¿Consideráis necesario continuar el proceso de estudio varias sesiones más o, al contrario, tenéis la sensación de haber dedicado un tiempo suficiente al problema de los *Planes de Ahorro*?
- ¿Cuáles han sido los *objetivos del proceso de estudio* que hemos vivido (aunque de manera incipiente)? Se trata tanto de los objetivos relativos a los contenidos matemáticos, como los relativos al tipo de actividad matemática desarrollada.

Por otra parte, y dado que se pretende que los estudiantes comparen la organización matemática escolar en torno a la modelización funcional —analizada en la Tarea 1— con la vivida por ellos mismos en el módulo M_1 se les planteará un conjunto de cuestiones, cada una de las cuales requerirá dos respuestas, así como la comparación entre ellas.

- ¿Se estudian, se analizan, se cuestionan, *diferentes tipos de relaciones funcionales* que pueden relacionar dos o más magnitudes? ¿Se plantean situaciones en las que se tenga que *indagar el tipo de variación* que relaciona dos magnitudes o, por el contrario, el tipo de relación funcional está normalmente determinado de antemano?
- ¿Cuáles son, en cada caso, las cuestiones a las que viene a responder la proporcionalidad? Esto es, ¿cuál es la *razón de ser* que se asigna a la proporcionalidad (en el REI vivido y en la matemática escolar habitual)?
- En el caso de la proporcionalidad, ¿perviven componentes de la *organización clásica* como, por ejemplo: *razón* = cociente entre cantidades de magnitud (que no hay que confundir con *fracción* = cociente entre dos números enteros) y *proporción* = igualdad entre dos razones que consta de dos *medios* y dos *extremos*? En caso afirmativo, explicad el papel que juegan dichos elementos.
- ¿Se proponen propiedades de las *proporciones* (como, por ejemplo, que el producto de medios es igual al producto de extremos) a fin de *evitar el uso del instrumento algebraico*?
- Los problemas de proporcionalidad, ¿son considerados como *problemas aritméticos* o bien como *problemas de modelización algebraico-funcional*? ¿Qué relación se establece entre el mundo de la proporcionalidad y el mundo funcional?
- ¿Aparece la *regla de tres*? En caso afirmativo, ¿se interpreta en términos funcionales o bien en términos aritméticos (meramente numéricos)? ¿Existe en los textos un discurso matemático justificativo de la regla de tres o, por el contrario, ésta aparece como una técnica *auto-justificada*, esto es, como una técnica que no precisa de ningún tipo de justificación exterior porque es culturalmente inteligible y, como tal, se justifica a sí misma porque «funciona»?
- ¿Aparecen situaciones problemáticas en las que se pongan claramente de manifiesto las limitaciones de las *técnicas aritméticas* y la consiguiente necesidad de introducir la *herramienta algebraica*?
- ¿Se presenta la proporcionalidad como una relación más, *integrada* en el ámbito de un conjunto de relaciones funcionales elementales o, por el contrario, aparece *aislada*?

4.4.2. *Desarrollo del análisis matemático del REI vivido y respuestas de los grupos de estudiantes*

Tarea 7(a): Llevar a cabo un análisis de la actividad matemática desarrollada y tomarla como punto de referencia para volver a analizar la actividad matemática escolar en torno a la modelización funcional elemental y al papel que se asigna a la proporcionalidad

Cada uno de los grupos de trabajo propuso, por escrito, una respuesta a la cuestión $\boldsymbol{Q_{21}}$ así como a algunas de las *cuestiones derivadas* citadas, en la medida y en la forma que consideró oportuno. Para ello, utilizó los materiales recopilados y sintetizados en la Tarea 1 junto a los materiales elaborados por el propio grupo a lo largo del módulo M_1. De esta manera, los estudiantes analizaron con cierta profundidad la organización matemática subyacente al REI vivido, comparándola con la organización matemática escolar en torno a la MFE y, en particular, comparando el papel que desempaña la proporcionalidad en ambos casos.

Algunos de los elementos principales y más repetidos de las respuestas son los siguientes:

- La mayor parte de grupos de trabajo constatan las limitaciones de las técnicas aritméticas para abordar cuestiones relativas al control de la evolución de un plan de ahorro y para comparar planes de características dadas, por lo que muy rápidamente se vieron abocados a utilizar técnicas algebraicas.
- Algunos grupos indican que han utilizado, junto a las técnicas aritméticas y algebraicas, diversas técnicas funcionales y gráficas a fin de modelizar de forma más intuitiva la evolución de los planes y para visualizar en qué momento dos planes diferentes acumulan la misma cantidad.
- En general, observan que mientras que la proporcionalidad aparece relativamente aislada del resto de relaciones funcionales en la organización matemática escolar de la ESO, a lo largo del REI vivido aparece completamente integrada como una relación funcional más. La proporcionalidad, o mejor, la relación funcional lineal ha jugado, en el REI vivido, el papel de relación funcional básica a partir de la cual pueden definirse, mediante diferentes tipos de generalizaciones, muchas de las restantes funciones elementales.
- Con respecto de la forma como interpretan el objetivo de la actividad desarrollada, los estudiantes la vinculan claramente a la modelización funcional.
- Los estudiantes consignan que mientras en la organización matemática escolar de la ESO está prácticamente ausente el cuestionamiento del tipo función que relaciona en un sistema determinado dos o más magnitudes, en el REI vivido es una problemática que está siempre presente (tanto para

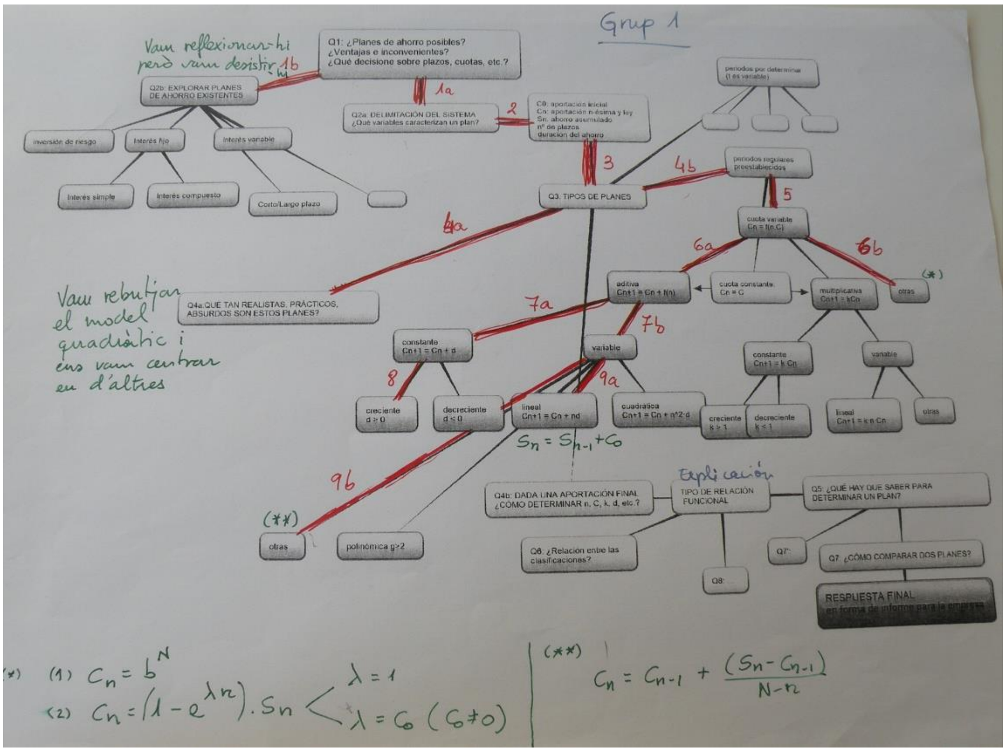
relacionar una cuota con la siguiente como para expresar la suma acumulad en función de una o más variables).

- En la proporcionalidad escolar se sigue hablando en muchos casos de «razón», «proporción» y «regla de tres» y se plantean problemas «aritméticos» en torno a dichas nociones. En cambio, los estudiantes observaron que en el REI vivido las cuestiones no tratan sobre la proporcionalidad «numérica» sino sobre el tipo de relación funcional ligado a la proporcionalidad (encarnada en el los planes de ahorro equitativos).

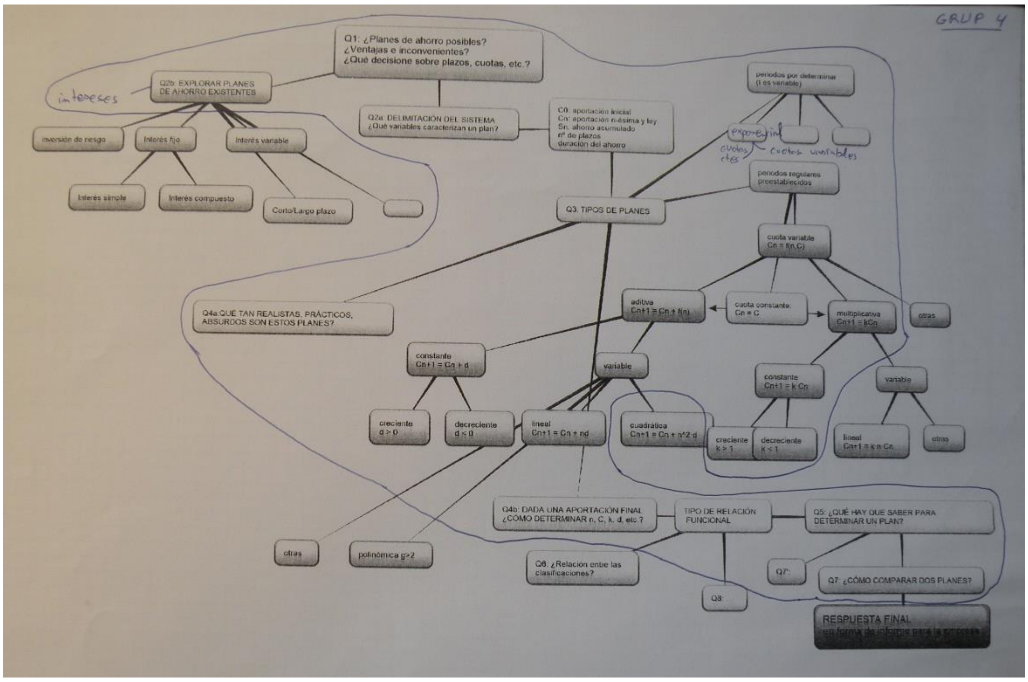
- Alguno de los grupos señaló que en la matemática escolar normalmente se supone a priori (en el enunciado de los problemas) que dos magnitudes determinadas son proporcionales y únicamente se cuestiona la proporcionalidad para preguntarse si se trata de proporcionalidad directa o de proporcionalidad inversa.

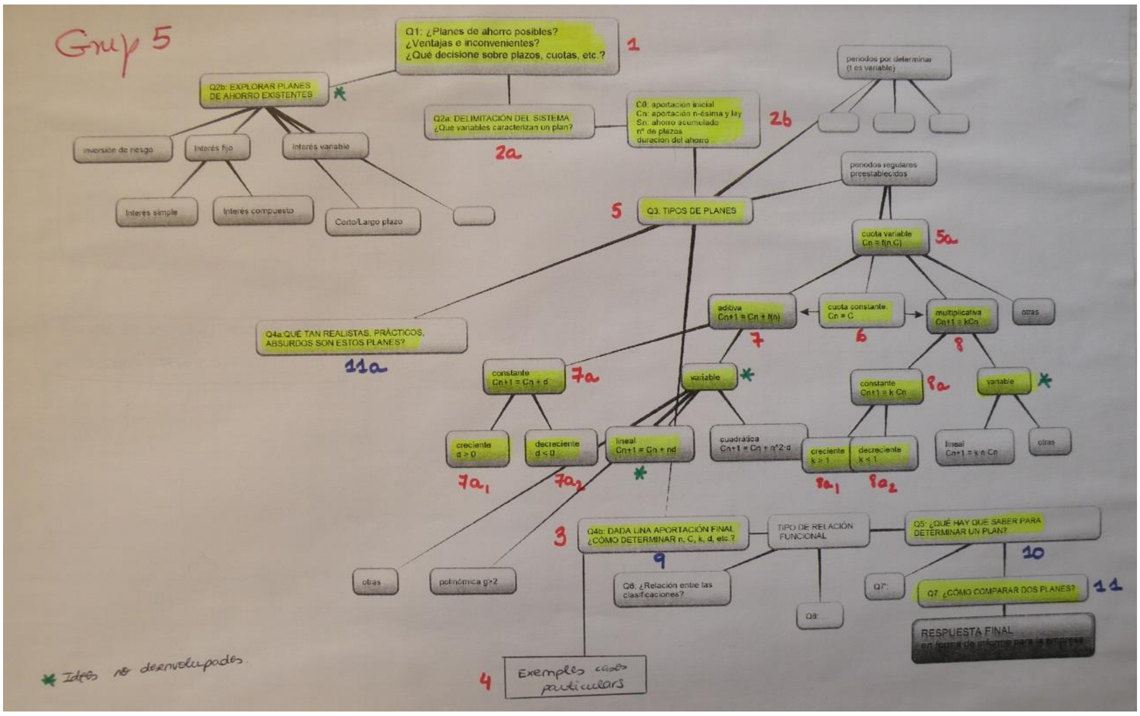
Tarea 7(b): <u>Situar el recorrido matemático vivido por cada grupo dentro del Mapa provisional de los planes de ahorro</u>

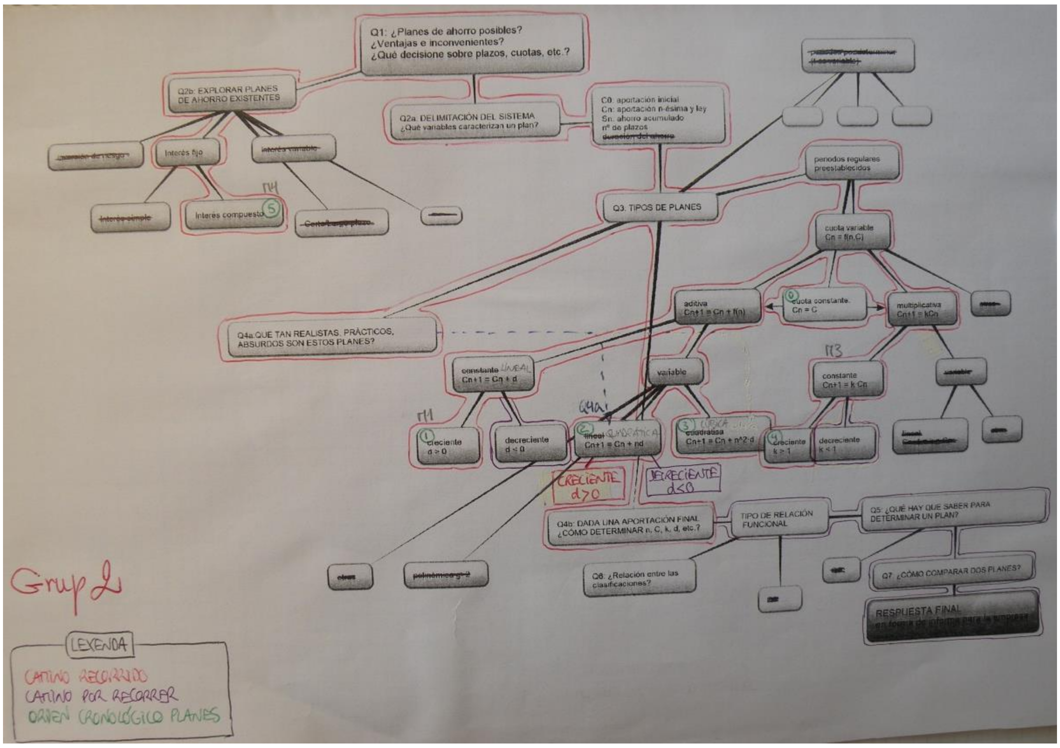
Para llevar a cabo esta tarea se entregó una copia en papel del Mapa provisional de los planes de ahorro a cada uno de los grupos y se propuso que situaran dentro del mismo el recorrido matemático vivido por su grupo en el módulo M_1 (cuestiones abordadas, tareas planteadas, respuestas parciales aportadas, hipótesis formuladas, tipos de planes estudiados). Se advirtió que, en caso necesario, se debía añadir al mapa los elementos tratados por el grupo que no figurasen en el mismo. Mostramos a continuación algunas de las respuestas de los grupos a esta tarea.



Los diferentes grupos sitúan claramente en el mapa el recorrido matemático que han vivido explicitando incluso, en algunos casos, la caracterización de algunos de los planes de ahorro que han estudiado y qe no formaban parte del Mapa provisional de los planes de ahorro.







En el mapa del grupo 4 se aprecia la línea continua que han trazado para dejar en el interior el recorrido que han realizado al estudiar posibles planes de ahorro. Como se puede ver, añaden detalles a los puntos *planes de ahorro existentes* y *periodos por determinar*, donde se da a entender que es posible el estudio de planes que producen intereses de tipos diversos, por una parte, y también se pueden considerar planes cuyas imposiciones sigan un crecimiento exponencial con la posibilidad de que las cuotas sean constantes o variables.

El mapa del grupo 5 muestra detalladamente la cronología del estudio seguido así como las *ideas* que no han abordado.

4.4.3. Análisis didáctico del REI vivido

Una vez especificada una versión provisional del MER, esto es, del «esqueleto» del REI de los planes de ahorro, se debía pasar a la descripción del proceso de estudio en términos de los «gestos de estudio» y de «ayuda al estudio» llevados a cabo efectivamente a lo largo del recorrido, tanto por parte de los estudiantes como por parte de los formadores. Para ello los estudiantes deberían utilizar, entre otros media, la documentación relativa a la experimentación llevada a cabo previamente con el REI de los planes de ahorro con alumnos de cuarto curso de ESO (García, 2005).

El diseño a priori plantea proponer la cuestión generatriz de esta fase del segundo módulo como sigue:

> $\boldsymbol{Q_{22}}$: ¿Cómo se puede describir la actividad didáctica llevada a cabo en el seno del REI vivido? ¿Qué dispositivos didácticos nuevos han aparecido con relación a la organización didáctica escolar y, en particular, cómo se ha modificado la distribución habitual de las responsabilidades didácticas entre los miembros de la comunidad de estudio?

Y para concretar esta cuestión generatriz y guiar el análisis didáctico del REI vivido se propone plantear diez cuestiones derivadas referidas tanto al REI vivido en el módulo M_1 por los estudiantes como al experimentado con alumnos de cuarto curso de ESO. Cada cuestión requiere, por lo tanto, dos respuestas así como la comparación entre ellas.

- ¿Sobre quienes ha recaído, en cada uno de los REI, la responsabilidad de definir y delimitar el sistema de los *Planes de Ahorro*?
- ¿Quién ha tomado, en cada caso, la responsabilidad de elegir el modelo matemático utilizado para estudiar dicho sistema?
- ¿Qué papel ha desempeñado la cuestión generatriz a lo largo del REI? ¿Se ha mantenido «viva»? ¿Se ha «desvanecido»? ¿Ha permanecido invariante a lo largo del proceso o ha evolucionado?
- ¿Quiénes se han responsabilizado de plantear las cuestiones y las tareas iniciales? ¿Qué otras tareas podrían haber surgido de dicha cuestión generatriz? ¿Qué otra posible dirección hubiese podido tomar el proceso de estudio?
- ¿Sobre quiénes ha recaído la responsabilidad de decidir en cada momento los medios, los instrumentos, las técnicas más adecuados para proseguir el estudio?
- ¿Cómo se ha decidido el tipo de problemas a estudiar en cada momento, así como la dirección que debía tomar el proceso de estudio?
- ¿Cómo se ha gestionado el *tiempo didáctico*? Esto es, ¿en base a qué criterios se ha decidido el tiempo que debía dedicarse a cada tipo de problemas?, ¿en base a qué criterios se ha decidido *profundizar* en un determinado tipo de problemas o, por el contrario, *cambiar la actividad* para estudiar otro tipo de problemas?
- ¿Sobre quiénes ha recaído la responsabilidad de evaluar los resultados parciales y las respuestas provisionales que han surgido a lo largo del proceso?
- ¿Cuál ha sido, en definitiva, el grado de autonomía asumido por los estudiantes a lo largo del REI vivido?
- Muchas investigaciones ponen de manifiesto que los alumnos de Enseñanza Secundaria hacen un uso abusivo y a veces indiscriminado de lo proporcional y de la regla de tres cada vez que, dados tres valores concretos, se trata de calcular un cuarto valor desconocido. De hecho, la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes ha llegado a ser tan natural que a muchas personas cultas les

cuesta aceptar que el espacio recorrido por un móvil no siempre es directamente proporcional al tiempo empleado para recorrerlo y que el área de un cuadrado no es proporcional a la longitud del lado. Uno de los prejuicios más extendidos en el ámbito de la proporcionalidad podría enunciarse como sigue (en forma de «teorema en acto»): «Cuando dos magnitudes se comportan de tal manera que siempre aumentan o disminuyen simultáneamente, entonces son magnitudes directamente proporcionales». ¿Cómo explicar este *fenómeno matemático-didáctico*?

4.4.4. Desarrollo del análisis didáctico del REI vivido y respuestas de los estudiantes

En la experimentación llevada a cabo, cada grupo utilizó los documentos curriculares analizados en la Tarea 1 así como los informes de su propio grupo de trabajo (y del resto de los grupos). Asimismo, se analizó y evaluó la *organización didáctica puesta en práctica en el* REI vivido. Por fin, y para completar ambos análisis, se comparó la estructura y la dinámica del REI vivido por los estudiantes con las del REI sobre los planes de a

Tarea 8(a): Análisis de las ventajas e inconvenientes didácticos de los REI en comparación con las que ofrece la organización didáctica escolar habitual.

Cada uno de los grupos de trabajo propuso, por escrito, una respuesta a la cuestión $\boldsymbol{Q_{22}}$ utilizando las *cuestiones derivadas* citadas en la medida y en la forma que consideró oportuno. Para ello utilizó la documentación del REI sobre los Planes de Ahorro experimentado con alumnos de cuarto curso de la ESO (García 2005). Dicha documentación fue aportada por los formadores a fin de que todos los grupos tuviesen acceso a la misma.

El análisis didáctico del REI vivido concluyó con una síntesis conjunta, en gran grupo, de las principales características de un REI como dispositivo didáctico en términos de ventajas e inconvenientes de su potencial inclusión en el sistema escolar y, paralelamente, de ventajas e inconvenientes de la organización didáctica habitual. El dispositivo que se utilizó para sintetizar las aportaciones de todos los grupos fue el siguiente: cada grupo exponía una de sus conclusiones, los formadores la anotaban en la pantalla y se discutía brevemente en gran grupo.

A continuación, sintetizamos dichas conclusiones partiendo en todos los casos de las aportaciones de los grupos de estudiantes y utilizando como etiqueta de cada una de las ventajas o inconvenientes, la expresión que utilizaron los propios estudiantes.

Ventajas de los REI o posibilidades que según los grupos de estudiantes podría provocar su integración en el sistema escolar:

- Potencia el desarrollo de la actividad de modelización matemática funcional. Se trata de una actividad que, como se ha constatado en el módulo M_1, está prácticamente ausente en la ESO.
- Permite responder a cuestiones vivas. Un REI siempre parte de una cuestión viva con gran poder generador de nuevas cuestiones derivadas.
- Posibilita la articulación de diferentes modelos funcionales. La actividad de modelización funcional comporta la articulación de diferentes modelos funcionales y, en particular, la integración de la proporcionalidad como una relación funcional entre otras.
- Potencia el planteamiento de problemas nuevos y la discusión de casos. Los problemas que aparecerán cuando se pone en marcha un REI y, en particular, cuando se utilizan modelos funcionales, son incontrolables a priori. Además, los REI comportan necesariamente la comparación de distintos modelos construidos a partir de diferentes hipótesis y la discusión de los distintos resultados que se obtienen.
- Requiere el juego entre parámetros y variables. La actividad de modelización funcional que los REI posibilitan comporta el juego entre parámetros y variables que es propio de cierto nivel de algebrización.
- Potencia el trabajo en grupo. Los REI requieren el trabajo en pequeño grupo y, también la contrastación y discusión de los resultados obtenidos por los diferentes grupos.
- Origina un nuevo reparto de responsabilidades con relación al contrato didáctico habitual. En particular los REI provocan una redistribución de las responsabilidades relativas a la planificación del trabajo, validación de las respuestas parciales, elección de los instrumentos de trabajo, tiempo didáctico, etc.
- Integra la razón de ser de la matemática estudiada en el corazón del programa de estudio. Una de las principales características de los REI consiste en que son dispositivos didácticos cuya finalidad es responder a una cuestión que debe mantenerse viva a lo largo de todo el proceso de estudio. De esta manera la razón de ser de toda la actividad matemática que se desarrolla radica de manera explícita en la cuestión generatriz del REI.

Inconvenientes de los REI o dificultades y restricciones con las que podría chocar, según los estudiantes, su integración en el sistema escolar:

- Difícil encaje curricular. Es evidente que los REI chocarán con muchas restricciones al intentar integrarlos en los actuales sistemas escolares. Se requerirá modificar radicalmente el contrato didáctico y, en lo que refiere al currículum, no sólo se deberían modificar los actuales «contenidos curriculares» sino también la propia estructura de éstos, puesto que los REI requieren un currículum expresado en términos de cuestiones y tipos de cuestiones en lugar de los actuales currículos expresados en términos de temas.

- Dilatación del tiempo didáctico. Aparentemente, y ésta fue una cuestión muy discutida por parte de los estudiantes, los REI son dispositivos en los que el tiempo didáctico discurre muy lentamente, lo que chocaría con la necesidad del *avance rápido* que imponen los actuales currículos (dificultades para «acabar el programa»).

- Poca variedad de problemas (o contextos). Los REI parten de una cuestión generatriz y se centran durante un largo periodo de tiempo en una misma cuestión (o, mejor, en el conjunto de cuestiones derivadas de la cuestión generatriz) y en un mismo contexto. Ello podría provocar cierto cansancio a los alumnos. ¿Aburrimiento por trabajar demasiado tiempo en un mismo problema?

- Mayor descontrol en la gestión de la clase. El tipo de trabajo que se lleva a cabo en los REI no es compatible con una clase silenciosa y atenta a las explicaciones del profesor. La dinámica del trabajo en los REI comporta muchas discusiones, tanto en pequeño grupo como en el ámbito del grupo-clase.

- No se conocen las respuestas a priori. El trabajo en un REI comporta siempre la aparición de cuestiones cuya respuesta no es conocida de antemano (tampoco por el profesor).

- Nuevas dificultades para evaluar los conocimientos de los alumnos. Los dispositivos de evaluación deben evolucionar en concordancia con el nuevo contrato didáctico que los REI requieren. Ya no será posible evaluar con los viejos dispositivos únicamente individuales y muchas veces basados en tareas aisladas y descontextualizadas.

- No se puede seguir un libro de texto. Obviamente el trabajo de diseño y gestión de un REI no puede hacerse siguiendo un libro de texto.

- Se requiere una preparación previa del profesor. Para diseñar a priori un REI, el profesor debe poder prever qué cuestiones generarán otras cuestiones derivadas ricas y fecundas y una actividad matemática que tenga legitimidad matemática y social.

- Posibles dificultades de coordinación con el resto de profesores del centro escolar. Es obvio que las restricciones que dificultan la implantación regular de los REI como dispositivos didácticos al uso no provienen únicamente del aula en la que se pretendan implantar. Las restricciones provenientes del nivel escolar (y de niveles más genéricos) deben ser consideradas.

Ventajas de la organización didáctica habitual (utilizando los resultados del análisis del currículum y los libros de texto de la ESO):

- Enseñar muchos conceptos en poco tiempo. En la organización matemática habitual el tiempo didáctico avanza muy rápidamente, se enseñan muchos conceptos en poco tiempo.

- Uniformidad entre los diferentes grupos. En un grupo concreto todos los alumnos trabajan al mismo ritmo y en el mismo tipo de cuestiones. Además la relativa uniformidad (al menos teórica) que garantiza el currículum simplifica los posibles cambios de grupo y de centro.

- Control de la gestión de la clase. Esta uniformidad y el tipo de dinámica de la clase permite un gran control de la gestión de la clase por parte del profesor.
- Seguir un libro de texto. El uso de un libro de texto (o de unos apuntes prefijados) es otro elemento de control y de uniformidad.
- Respuestas preestablecidas a las cuestiones que aparecen. Esta característica de las organizaciones escolares provoca que las discusiones estén prácticamente ausentes y que el profesor proporcione siempre y de manera inmediata las respuestas a todas las cuestiones que aparecen.
- Evaluación fácilmente cuantificable. Todas las características anteriores comportan que la cuantificación de la evaluación sea relativamente sencilla y rápida.

Inconvenientes, dificultades y restricciones que tienen su origen, según los estudiantes, en la organización didáctica habitual. Para proponer estas respuestas los estudiantes utilizaron los resultados del análisis del currículum y los libros de texto de la ESO que habían llevado a cabo en el módulo M_0.

- Ausencia de una verdadera actividad de modelización matemática. El trabajo que se propone en torno a las funciones es muy atomizado y en los pocos casos que se utiliza un modelo funcional éste está dado de antemano.
- Razón de ser inexistente. En la organización didáctica habitual el currículum y los libros de texto han «olvidado» las cuestiones a las que los temas y las nociones matemáticas vienen a responder. ¿Por qué y para qué se estudian las propiedades de las funciones?
- Falta de motivación. Este olvido provoca una desmotivación no únicamente de los alumnos, sino también del profesor, puesto que la única motivación posible y duradera es la motivación intrínseca, esto es, la que proviene de la actividad misma, de la necesidad de responder a cuestiones que se quiere responder.
- No se potencia la formulación de cuestiones ni problemas nuevos. En el contrato didáctico habitual el alumno no tiene la responsabilidad de plantear cuestiones auténticas, esto es, cuestiones que vayan más allá de las dudas sobre lo que el profesor ha explicado. Las únicas cuestiones que se plantean en clase las formula el profesor y son cuestiones previamente establecidas por el programa y el libro de texto.
- No se aprende a planificar, ni a evaluar si un resultado es correcto, ni a decidir qué tipo de técnicas utilizar, etc. Es obvio que estas actividades recaen en exclusiva bajo la responsabilidad del profesor.

Como culminación del análisis didáctico del REI vivido, y sin pretender que los estudiantes diseñasen detalladamente un REI para experimentar con alumnos de cuarto curso de ESO, puesto que éste es el objetivo del módulo M_3 del REI-FP que, como hemos reiterado, no trataremos en esta memoria, los formadores propusieron algunas cuestiones en esa dirección. El objetivo de esta tarea es el de profundizar en el análisis didáctico del REI vivido relacionándolo con un hipotético REI experimentable en Secundaria. Para llevar a cabo esta tarea los estudiantes utilizaron libremente, como referencia, el material de la experimentación llevada a cabo en García (2005).

Tarea 8(b): *Adaptación del REI para alumnos de cuarto curso de ESO*

Se propuso a los grupos de trabajo que refinaran las cuestiones $\boldsymbol{Q_1}$, $\boldsymbol{Q_2}$ y $\boldsymbol{Q_3}$ del Mapa provisional de los planes de ahorro, presentado en la sección 4.3.3, para empezar a diseñar el esquema simplificado de un posible REI para alumnos de cuarto curso de ESO. Asimismo, se les planteó la cuestión relativa a los recursos que habría que proporcionar a los alumnos de secundaria para que pudiesen realizar el recorrido adaptado, tanto en cuanto a los conocimientos previos necesarios como a los instrumentos de validación de sus respuestas; y preguntas relativas a la forma de organizar el proceso de estudio del REI esbozado.

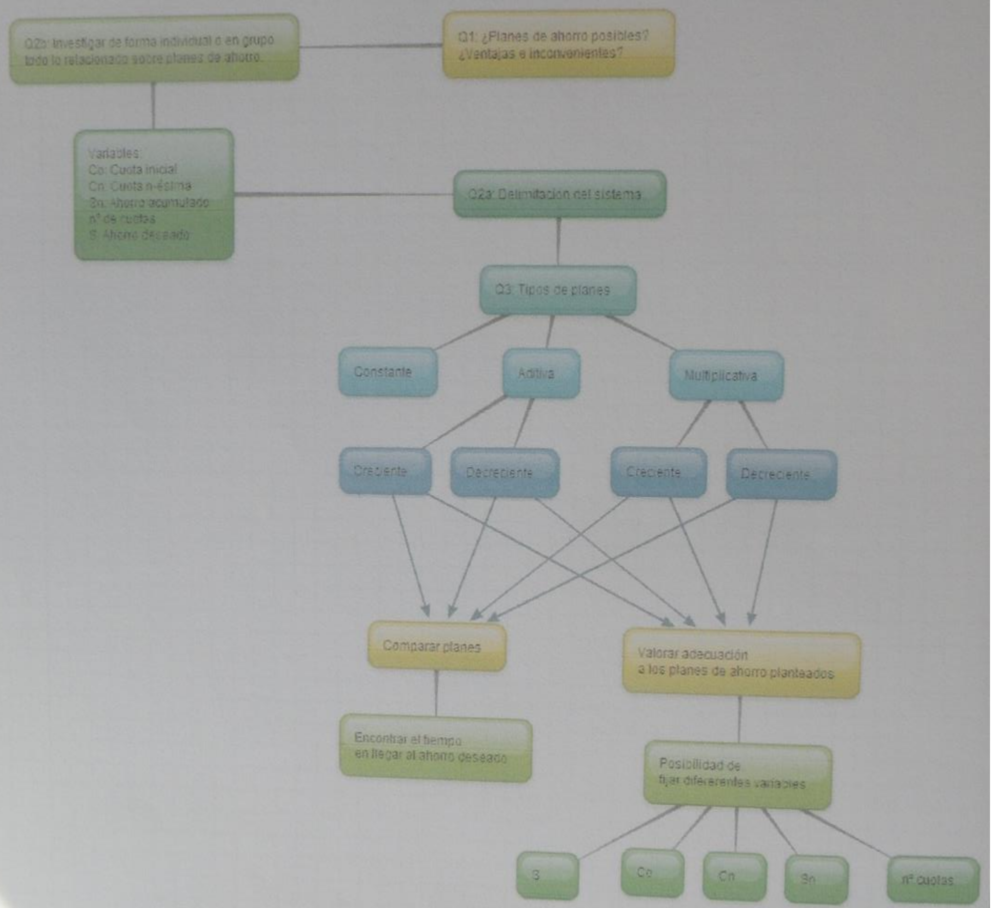
Los diferentes grupos de estudiantes propusieron respuestas tentativas a cada una de estas cuestiones. En general sus propuestas estaban bastante relacionadas con la experimentación descrita en García (2005), aunque en algunos casos incluyeron cuestiones y tareas extraídas de su propio trabajo. En particular, algunos grupos añadieron cuestiones más concretas para facilitar la devolución a los alumnos de ESO.

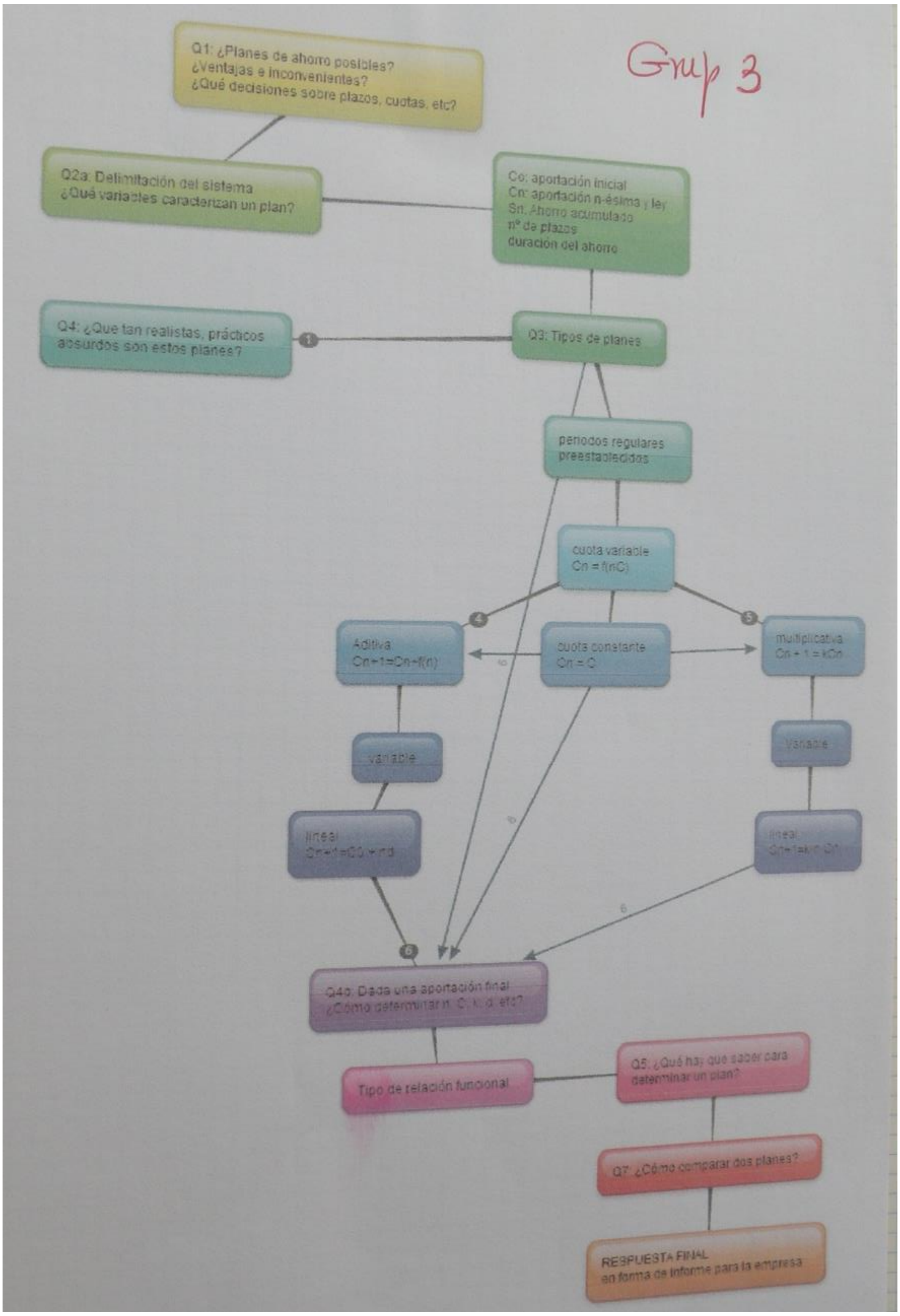
Presentamos a continuación dos esquemas propuestos por uno de los grupos. Se trata de dos propuestas muy similares entre sí caracterizadas por recortar el Mapa provisional de los planes de ahorro de tal forma que queda reducido esencialmente al MER utilizado por García (2005) en su experimentación con alumnos de enseñanza secundaria.

Grup 3

Propuesta de trabajo en grupo: adaptación del REY para alumnos de 4º de ESO

A continuación ponemos el esquema que tendríamos que seguir para guiar a los alumnos para que puedan buscar los diferentes tipos de planes de ahorro.




Grup 3
Q1: ¿Planes de ahorro posibles?
¿Ventajas e inconvenientes?
¿Qué decisiones sobre plazos, cuotas, etc?
Q2a: Delimitación del sistema
¿Qué variables caracterizan un plan?
Co: aportación inicial
Cn: aportación n-ésima y ley
Sn: Ahorro acumulado
nº de plazos
duración del ahorro
Q4: ¿Que tan realistas, prácticos absurdos son estos planes?
1
Q3: Tipos de planes
periodos regulares preestablecidos
cuota variable
Cn = f(nC)
4
5
Aditiva
Cn+1=Cn+f(n)
cuota constante
Cn = C
multiplicativa
Cn + 1 = kCn
variable
variable
lineal
Cn+1=C0+nd
lineal
6
6
6
6
Q4c: Dada una aportación final
¿Cómo determinar n, C, k, d, etc?
Tipo de relación funcional
Q5: ¿Qué hay que saber para determinar un plan?
Q7: ¿Cómo comparar dos planes?
RESPUESTA FINAL
en forma de informe para la empresa

4.4.5. *Conclusiones de la comunidad de estudio relativas al análisis didáctico del REI vivido*

La comparación entre las ventajas e inconvenientes didácticos de los REI en comparación con las que presenta la organización didáctica habitual muestra que los REI proponen una verdadera actividad matemática, cercana a una actividad de investigación o de búsqueda de solución a problemas que se pueden plantear en la vida cotidiana, lo que incluiría la vida social y también la profesional. La práctica en torno a la enseñanza-aprendizaje más habitual en la escuela queda alejada de la realidad de los problemas que surgen fuera, donde no parece la figura del profesor para darte la solución. Aquí hay que buscar los medios, indagar, probar, consultar, discutir, pero a partir de cuestiones que no resultan ajenas a uno mismo, ya sea por motivos personales, profesionales o de otra índole, lo que en sí mismo motiva el estudio y lo prolonga.

Con relación a los inconvenientes señalados por los estudiantes, cabe preguntarse si es posible realizarlos desde una posición «objetiva». Los estudiantes no parece que se puedan apartar con facilidad de un modelo de enseñanza que pervive en la institución educativa desde décadas y en el que se hallan inmersos. La mirada, en este caso, se hace desde una posición que, entendemos, no sería equidistante con respecto a los REI. Así, cuando se da por sentado que hay gran empleo del tiempo didáctico, más que resultar un inconveniente «en sí mismo», podemos pensar que lo es como resultado de su comparación con el tiempo que se dedica habitualmente. Parece evidente que el ritmo de una actividad que fomenta la búsqueda de respuesta, su validación y su posterior discusión, no puede ser el mismo que el de actividades donde el alumno «recibe» los conocimientos (respuestas a preguntas que han desaparecido) y, en todo caso, deberá ponerlos en práctica más tarde ante «problemas» normalmente planteados para el ejercicio de esos conocimientos aprendidos.

Por otra parte, el hecho de que el profesor debe saber más que el alumno, lo que nadie discutiría en principio, tiene su correlato en el dogma de que el alumno tiene que encontrar en el profesor un proveedor de respuestas seguras e inmediatas, lo que resulta en otra fuente de incertidumbre —la evaluación no lo es menos— ante los REI, dado que pueden surgir cuestiones que no se hallan previsto y ante las que el profesor deberá tomar decisiones sobre su estudio sin saber a priori las respuestas posibles.

4.4.6. Desarrollo del Mapa provisional de los planes de ahorro mediante las respuestas elaboradas por los grupos de estudiantes ***¡Error! Marcador no definido.***

Los formadores propusieron a cada uno de los grupos de estudiantes, como trabajo final del proceso de estudio, que explicitase con todo detalle un proceso de modelización funcional que, partiendo del sistema de los *Planes de Ahorro* (García 2005) que *articula la relación de proporcionalidad con el resto de relaciones funcionales elementales*, lo desarrollara en alguna dirección en coherencia con la especificidad del trabajo llevado a cabo anteriormente por el propio grupo y que fue plasmada en el mapa provisional.

Se sugirió que, por ejemplo, se podían considerar planes de ahorro caracterizados mediante otras hipótesis, o cuya modelización requiera utilizar otros tipos de funciones, o familias de funciones o, incluso, familias de funciones de varias variables. También se planteó la posibilidad de considerar planes de ahorro en otros contextos diferentes al que aparece en $\boldsymbol{Q_1}$ —la financiación de un viaje de fin de curso— como, por ejemplo, la financiación de la compra de un piso o de un coche. En concreto se formuló la tarea en los siguientes términos:

Tareas 9 y 10: <u>Diseño de un proceso de modelización funcional que desarrolle el trabajo con los planes de ahorro llevado a cabo previamente y presentación en gran grupo de una síntesis del trabajo realizado.</u>

Cada uno de los grupos de trabajo eligió una forma particular de ampliar el proceso de modelización funcional trabajado previamente en torno a los planes de ahorro, y desarrolló una parte de la *praxeología para la enseñanza en torno a la modelización funcional elemental*, esbozada en el mapa provisional presentado en el apartado 4.3.3. Describimos a continuación los rasgos principales del desarrollo elaborado por cada uno de los grupos de trabajo.

***Desarrollos elaborados por el Grupo* 1**

El trabajo de este grupo se inició estudiando y simulando el *plan de ahorro creciente* en el que hicieron coincidir la diferencia entre cada aportación y la anterior con la aportación inicial C_0:

Plan de ahorro aditivo $C_n = C_{n-1} + C_0 = n\, C_0 + C_0 = (n + 1)\, C_0$

A continuación, en lugar de continuar trabajando con los planes de ahorro elementales definidos mediante una ley recursiva aditiva o multiplicativa, trabajaron en un plan que se obtiene incrementando las cuotas del plan de ahorro aditivo anterior como sigue:

Plan con interés $C_n = C_{n-1}(1 + i) + nC_0$.

$$C_n = C(1 + i)^n + C_0(1 + i)^{n-1} + 2C_0(1 + i)^{n-2} + \ . . . + (n - 1)C_0(1 + i) + nC_0$$

También estudiaron un plan de ahorro que denominaron «amortiguado», caracterizado por la siguiente condición:

Queremos realizar un total de $N - 1$ imposiciones de tal manera que la última cuota C_{N-1} sea una cantidad predeterminada y fijada de antemano.

Para ello se puede definir la siguiente relación de recurrencia:

Plan de Ahorro amortiguado $C_n = C_{n-1} + \frac{C_{N-1} - C_{n-1}}{N-n} \quad con\ 1 \leq n \leq N - 1$

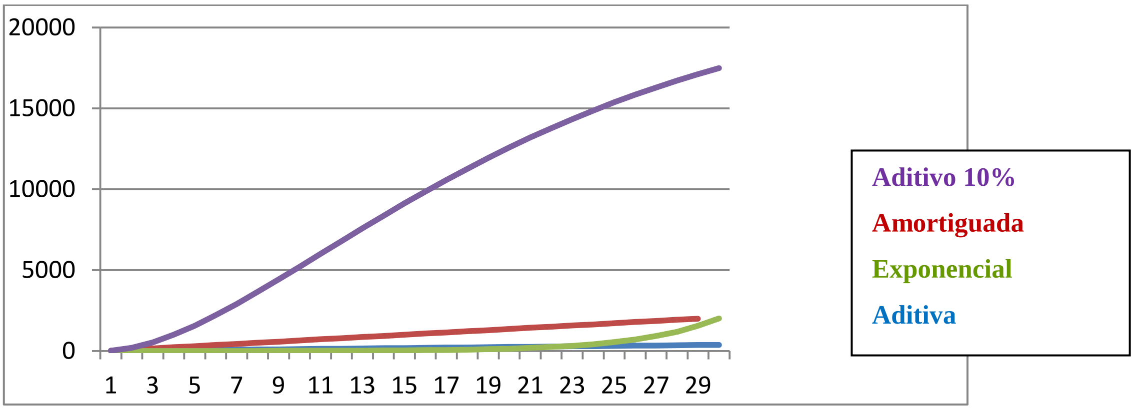
También definieron y simularon la evolución de las aportaciones sucesivas de planes de ahorro definidos por otro tipo de relaciones de recurrencia tales como los siguientes:

Plan de Ahorro de Fibonacci: $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$

Plan de Ahorro exponencial: $C_n = C_0^n$

Plan de Ahorro cuadrático: $C_n = C_{n-1}^2$

Hicieron una comparación entre las gráficas de las cuotas de algunos de los planes de ahorro definidos.



Y se plantearon un conjunto de cuestiones relativas a dichos planes:

- ¿Cuántas cuotas tendríamos que pagar para conseguir el total del ahorro previsto?
- ¿Cómo varía dicho número de cuotas en cada Plan de Ahorros en función de la cuota inicial?
- ¿Cómo se produce el crecimiento de las cuotas en cada uno de los planes?
- ¿Cuál es la tasa de variación de las cuotas?
- ¿Cuándo se alcanza la mitad del ahorro previsto? ¿Y un tercio? ¿Y un cuarto?
- ¿Cuál tendría que ser la cuota inicial si fijamos el número de cuotas para alcanzar el ahorro previsto?

***Desarrollos elaborados por el Grupo* 2**

El trabajo del Grupo 2 fue más sistemático. Empezaron por delimitar el sistema a modelizar, esto es, por elegir y dar nombre a las variables que determinan un Plan de Ahorro:

C_0	cuota inicial
$C_1 = C$	primera cuota
N	número de la cuota
C_n	cuota n-ésima
S_n	ahorro acumulado con n cuotas

Y la relación fundamental entre dichas variables:

$$S_n = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Utilizando esta nomenclatura, estudiaron los siguientes tipos de planes de ahorro:

Modelo equitativo:

$$C_{n+1} = C_n = C \quad \rightarrow \quad S_n = C_0 + nC$$

Modelo aditivo de grado 1*:*

$$C_{n+1} = C_n + d \ \ (si\ n \geq 1) \rightarrow \ \ C_n = C + d(n-1) \ \ \rightarrow \ \ S_n = C_0 + \left(C - \tfrac{d}{2}\right)n + \tfrac{d}{2}n^2$$

Si $d = 0$ tenemos el modelo equitativo.

Modelo aditivo de grado 2:

$$C_{n+1} = C_n + d \cdot n \ \rightarrow \ C_n = C + \tfrac{d}{2}n + \tfrac{d}{2}n^2 \ \rightarrow \ S_n = C_0 + \left(C + \tfrac{d}{4}\right)n + \tfrac{d}{2}n^2 + \tfrac{d}{6}n^3$$

De nuevo, en el caso $d = 0$ tenemos el plan equitativo.

Es importante subrayar que mediante los sucesivos modelos aditivos de grado n se obtiene como modelo del ahorro acumulado S_n una función polinómica de grado $n + 1$, de manera que tenemos un proceso que permite *integrar la función de proporcionalidad*, que se corresponde con la función asociada al modelo equitativo con $C_0 = 0$, como una *relación funcional más* en el conjunto de las relaciones funcionales elementales.

Modelo multiplicativo de razón constante:

$$C_{n+1} = C_n \cdot k \quad \rightarrow \quad C_n = C \cdot k^{n-1} \quad \rightarrow \quad S_n = C_0 + C \cdot \tfrac{k^n - 1}{k-1} \quad (si\ k \neq 1)$$

Si $k = 1$ aparece de nuevo el plan equitativo.

Modelo equitativo con interés compuesto

$$S_n = C_0(1+i)^n + C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + \cdots + C(1+i)^{n-n}$$
$$= C_0(1+i)^n + C\frac{(1+i)^n - 1}{i}; i \neq 0$$

De nuevo, en el caso en que el interés es muy próximo a cero se obtiene una función que se aproxima a una función afín. Si $i = 0$, $S_n = C_0 + nC$, y se obtiene el modelo equitativo.

Una vez descritos con cierto detalle estos cinco tipos de planes de ahorro, el grupo planteó cuestiones relativas a la determinación y al control de cada uno ellos así como a la comparación de dos planes de ahorro concretos, correspondientes al mismo tipo o a tipos diferentes. Por último, finalizaron su trabajo planteándose el problema general de cómo expresar, en cada uno de los cinco tipos de planes de ahorro considerados, cada una de las variables que lo caracterizan en función de las restantes.

- ***Desarrollos elaborados por el Grupo* 3**

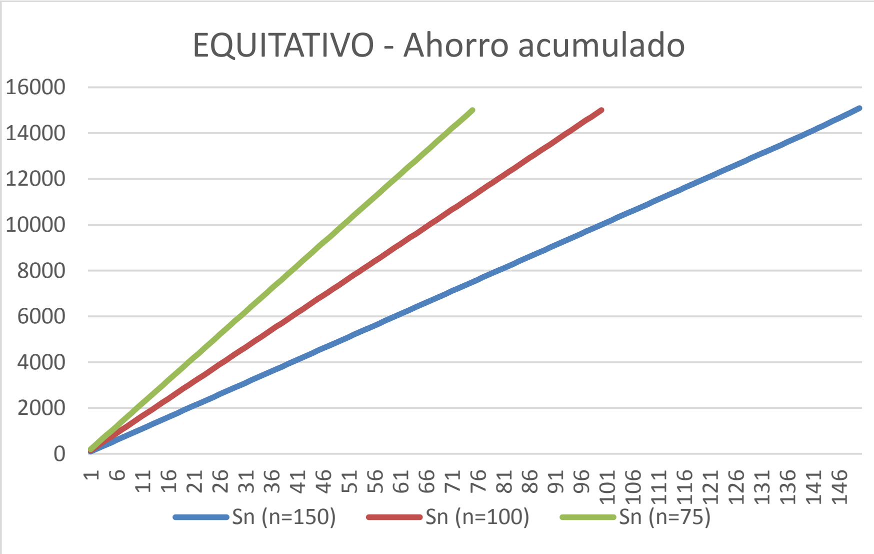
Este grupo utilizó Excel para simular los planes de ahorros equitativos, los aditivos crecientes y los multiplicativos lineales.

Plan de ahorro equitativo

$$C_n = C_0, \;\; con\ C_0 \neq 0$$

$$S_n = n \cdot C_0$$

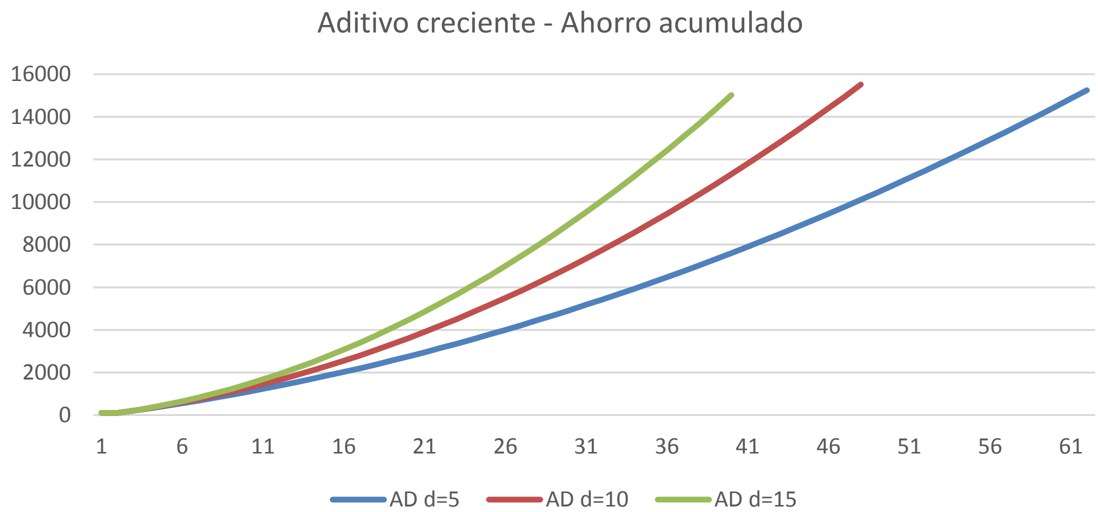
Prefijando un *ahorro acumulado final*, comparan gráficamente el crecimiento de la función S_n para diferentes tipos de planes de ahorro y en función de diferentes parámetros. En el caso del plan de ahorro equitativo hacen variar el número n de aportaciones necesarias para obtener el citado ahorro prefijado final. En el caso del plan de ahorro aditivo creciente hacen variar la diferencia d de la sucesión aritmética de las cuotas y en el caso del plan de ahorro multiplicativo lineal creciente hacen variar el parámetro k para un mismo C_0.



Plan de ahorro aditivo creciente

$C_n = C_0 + n \cdot d$

$S_n = C_0 + (C_0 + \frac{d}{2})n + \frac{d}{2}n^2$



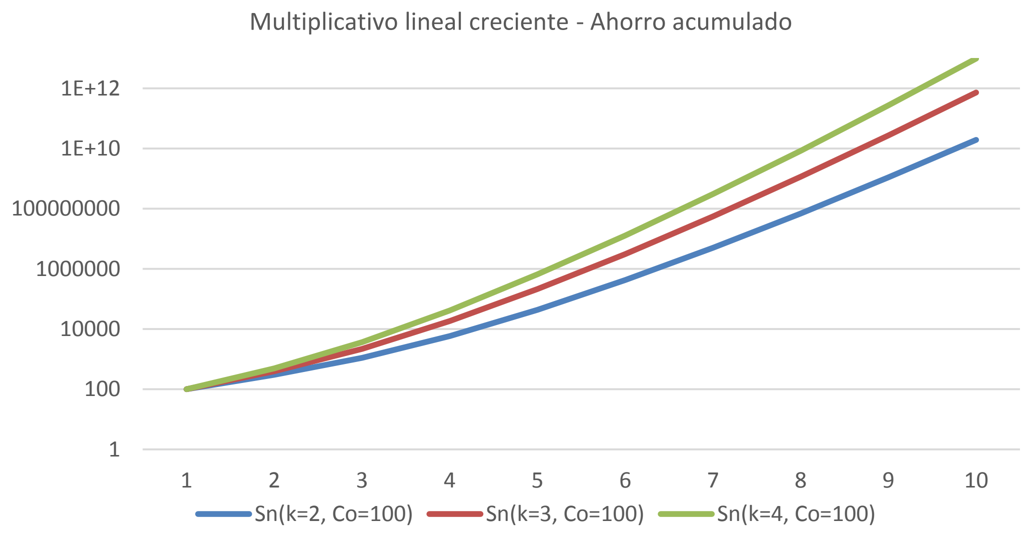
Plan de ahorro multiplicativo lineal creciente

Las cuotas que se incrementan en un factor $k{\cdot}n$ respecto de la primera.

$$C_{n+1} = nkC_n \quad con\ k > 0 \ \ y \ \ C_1 = Co$$

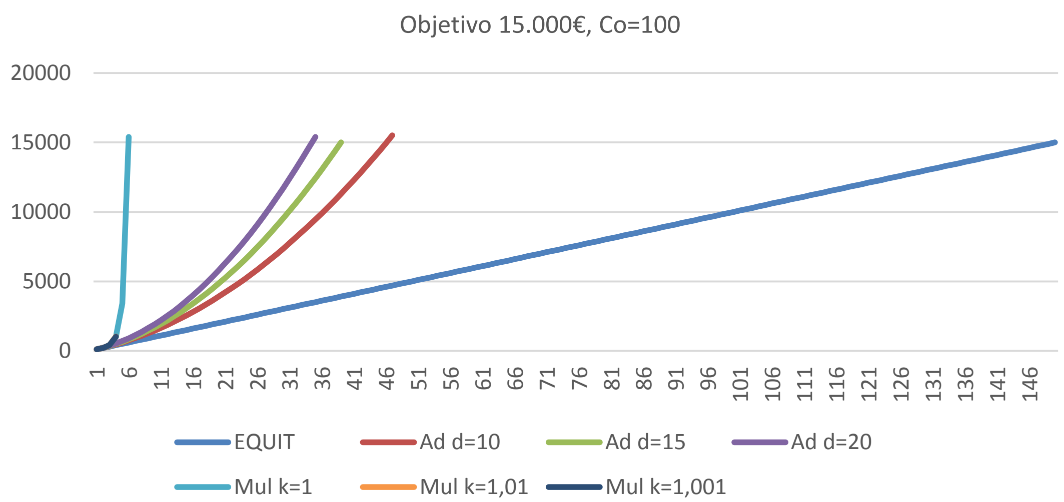
Se obtiene el modelo siguiente:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} (i-1)!\, k^{i-1} C_0$$



En todos los casos expresaron cada una de las variables del sistema en función de las restantes.

Por último hicieron una comparación del ahorro acumulado con cada uno de los tres planes de ahorro.



Concluyen que:

- Si bien sobre el papel todos los planes son viables, podemos ver que el multiplicativo lineal es poco factible en la vida real.

- El modelo equitativo es el más lento y tiene cuotas «controladas».

- El modelo aditivo permite reducir mucho la cantidad de cuotas necesarias para conseguir un *ahorro prefijado*, respecto al modelo equitativo.

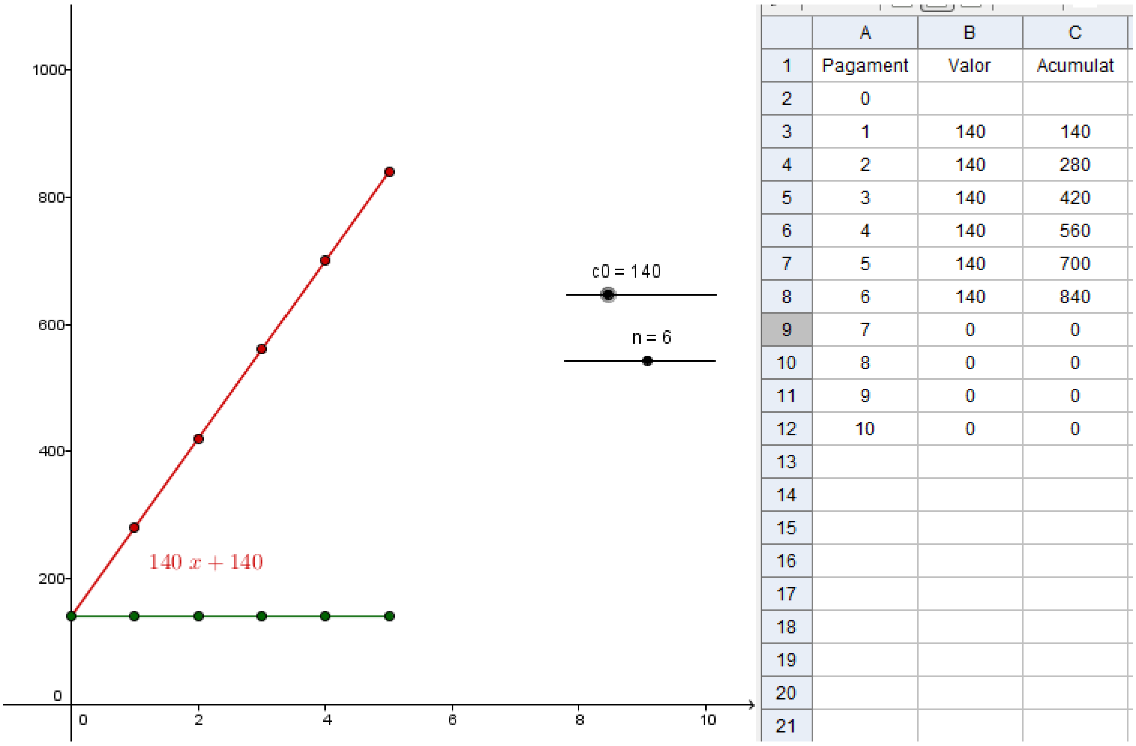
- Podría pensarse en un nuevo tipo de plan de ahorro, un híbrido entre el equitativo y el aditivo, que permitiese alcanzar el objetivo en un tiempo menor pero asegurando que no se sobrepasa un cierto valor máximo para las cuotas.

- ***Desarrollos elaborados por el Grupo 4***

Este grupo utilizó GeoGebra para simular la variación de las cuotas y del ahorro acumulado en todos los tipos de planes de ahorro que estudió.

Empezaron estudiando el caso más elemental en que las cuotas y los periodos de pago son constantes: $c_n = c_0$

Modelo equitativo $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i = n \cdot c_0$



	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	140	140
4	2	140	280
5	3	140	420
6	4	140	560
7	5	140	700
8	6	140	840
9	7	0	0
10	8	0	0
11	9	0	0
12	10	0	0
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			

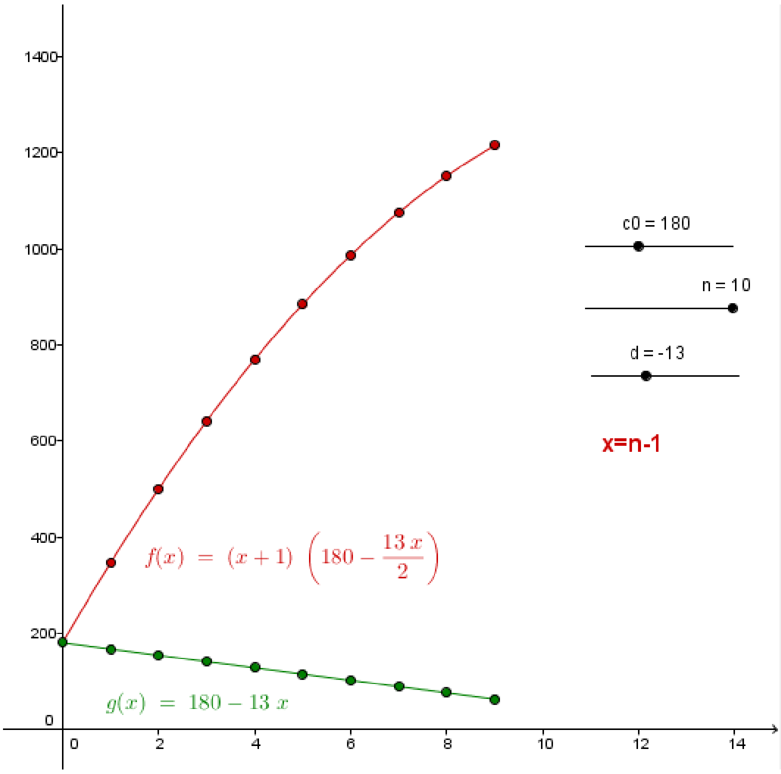
Partiendo de este modelo básico, que incluye la *relación funcional de proporcionalidad*, el grupo describió distintas modificaciones y generalizaciones que se pueden realizar para obtener planes de ahorro. Se plantearon inicialmente las siguientes posibilidades:

- Modificar las cuotas
- Variar los periodos de tiempo entre dos cuotas consecutivas
- Fijar la función de dinero acumulado
- Fijar la función que describe las cuotas

Modelo Aditivo

Modificando las cuotas y considerando los periodos de pago constantes podemos considerar la siguiente función que relaciona las cuotas:

$$c_n = c_0 + n \cdot d \rightarrow S_n = (n+1)(c_0 + \frac{d \cdot n}{2})$$

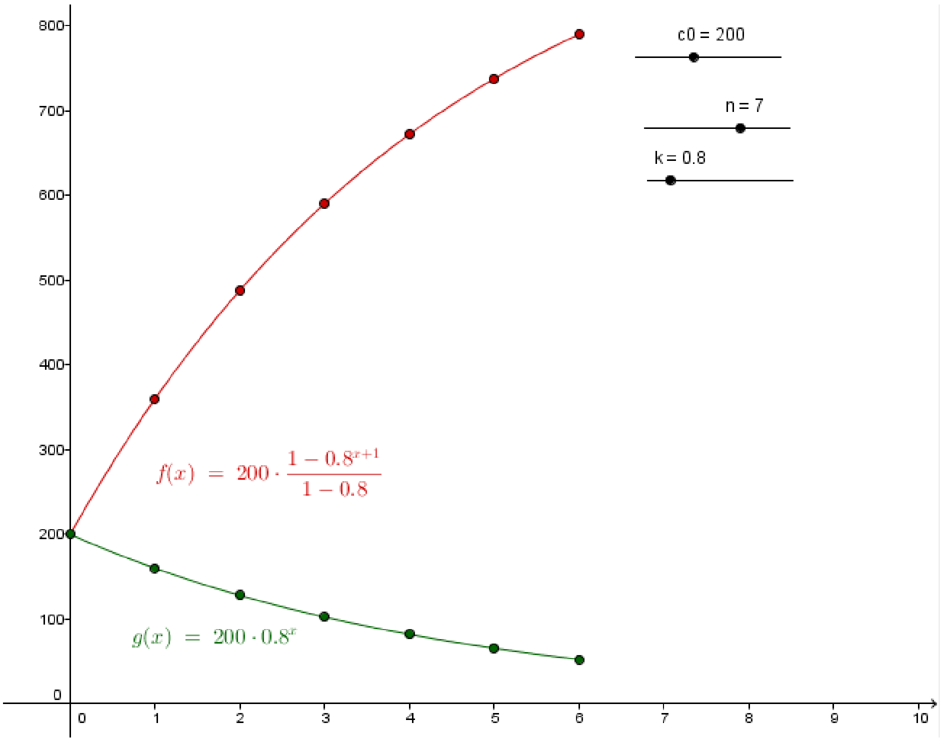


	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	180	180
4	2	167	347
5	3	154	501
6	4	141	642
7	5	128	770
8	6	115	885
9	7	102	987
10	8	89	1076
11	9	76	1152
12	10	63	1215
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			

Modelo multiplicativo

Si cada cuota se obtiene multiplicando la anterior por un factor:

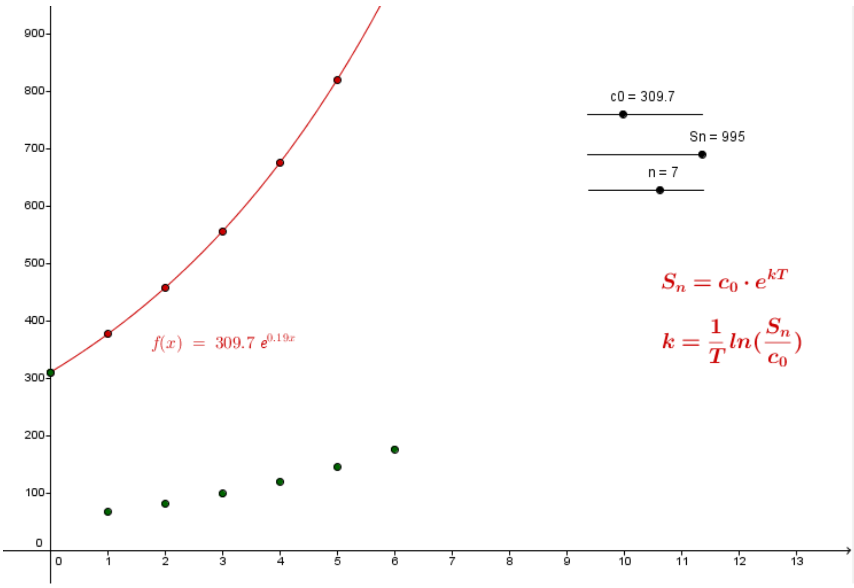
$$c_n = k \cdot c_{n-1} \;\rightarrow c_n = c_0 \cdot k^n \;\;\rightarrow\;\; S_n = \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$$



	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	200	200
4	2	160	360
5	3	128	488
6	4	102.4	590.4
7	5	81.92	672.32
8	6	65.54	737.86
9	7	52.43	790.28
10	8	0	0
11	9	0	0
12	10	0	0
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			

Modelo exponencial de base e

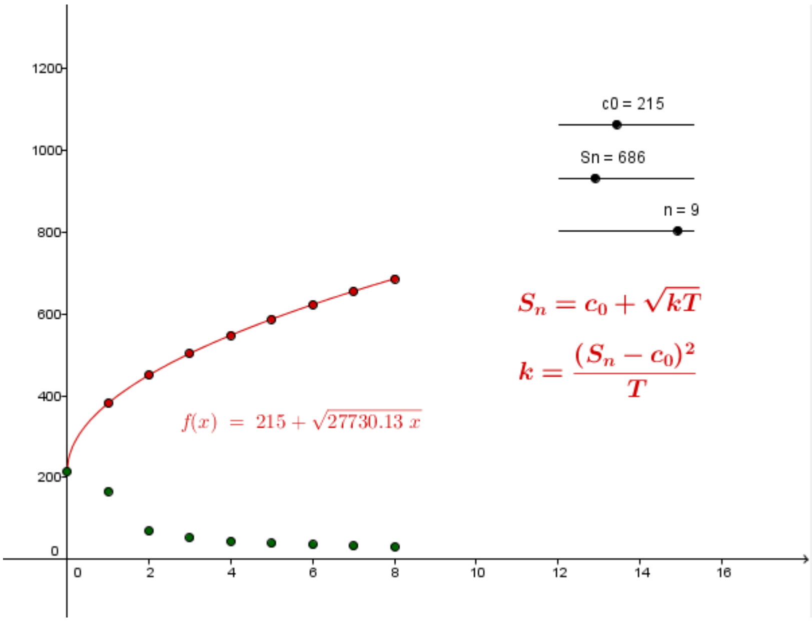
Si *fijamos la función del ahorro acumulado*: $S_n = c_0 \cdot e^{kT}$ donde los plazos de pago son fijos e iguales, nos podemos preguntar cuál será la función que describe la relación analítica entre las cuotas sucesivas. El grupo dejó el problema abierto.



	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	309.7	309.7
4	2	66.5	376.2
5	3	80.78	456.98
6	4	98.13	555.11
7	5	119.2	674.31
8	6	144.8	819.11
9	7	175.89	995
10	8	0	0
11	9	0	0
12	10	0	0
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			

Modelo radical

Análogamente al imponer que el ahorro acumulado venga descrito mediante una función siguiente: $S_n = c_0 + \sqrt{kT}$ quedó abierto el problema de expresar la relación analítica entre las cuotas sucesivas.

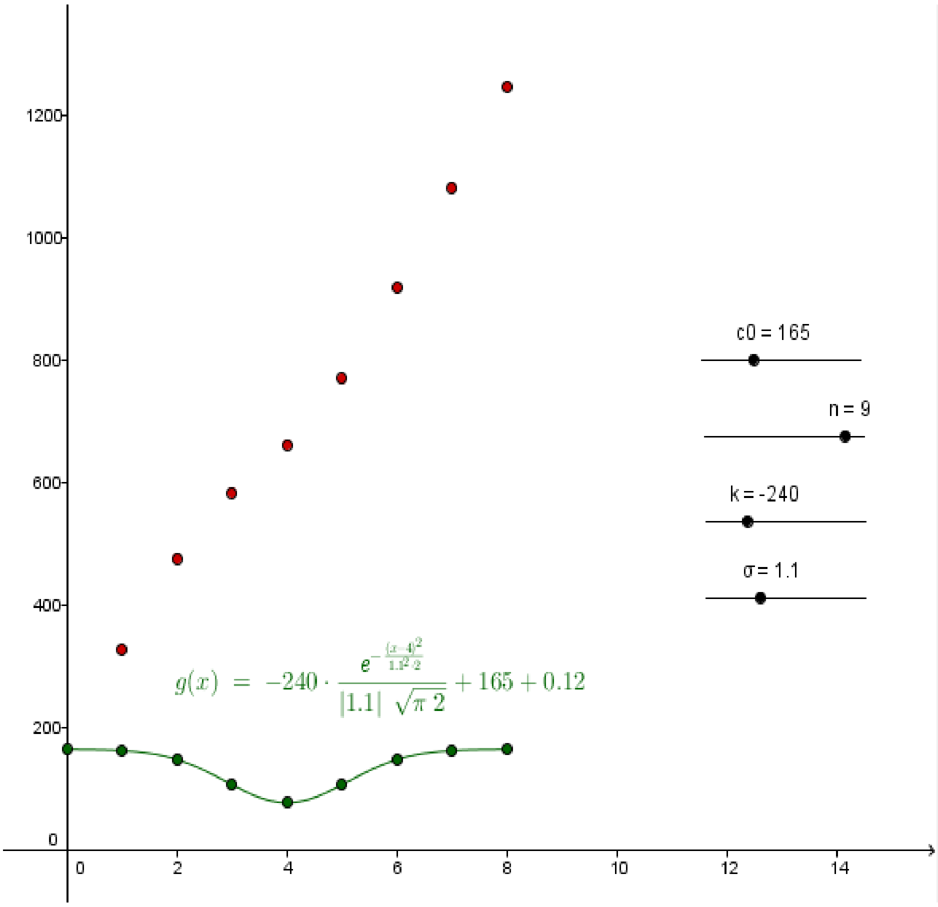


	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	215	215
4	2	166.52	381.52
5	3	68.98	450.5
6	4	52.93	503.43
7	5	44.62	548.05
8	6	39.31	587.36
9	7	35.54	622.9
10	8	32.68	655.58
11	9	30.42	686
12	10	0	0
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Por último, el grupo empezó a estudiar dos nuevos tipos de planes de ahorro. En ambos casos fijaron la función que relaciona las cuotas y a partir de éstas se calcula el ahorro acumulado.

Modelo distribución normal

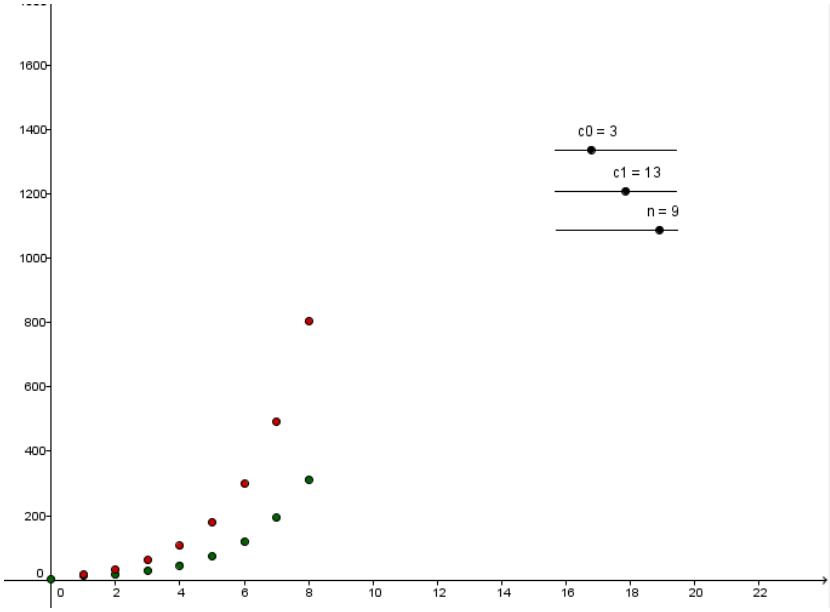
En este caso las cuotas siguen una distribución normal $N(\mu, s)$.



	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	165	165
4	2	163.01	328.01
5	3	148.45	476.45
6	4	107.54	583.99
7	5	78.08	662.07
8	6	107.54	769.6
9	7	148.45	918.05
10	8	163.01	1081.06
11	9	165	1246.06
12	10	0	0
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			

Modelo de Fibonacci

En este caso las cuotas siguen una sucesión recursiva de orden dos, pudiéndose fijar arbitrariamente las dos cuotas iniciales c_0 y c_1



	A	B	C
1	Pagament	Valor	Acumulat
2	0		
3	1	3	3
4	2	13	16
5	3	16	32
6	4	29	61
7	5	45	106
8	6	74	180
9	7	119	299
10	8	193	492
11	9	312	804
12	10	0	0
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			

- ***Desarrollos elaborados por el Grupo* 5**

El trabajo de este grupo se centró en tres tipos de planes de ahorro, *equitativos*, *de variación aditiva* y *de variación multiplicativa*, así como en el estudio de la relación entre ellos.

Las cuestiones que pretender responder, explícitamente, son las siguientes:

***Q*₁:** ¿Cuál es el comportamiento de los planes de ahorro considerados?

***Q*₂:** ¿Cómo se relacionan entre sí dichos planes de ahorro? ¿Qué ventajas e inconvenientes presenta cada uno de ellos?

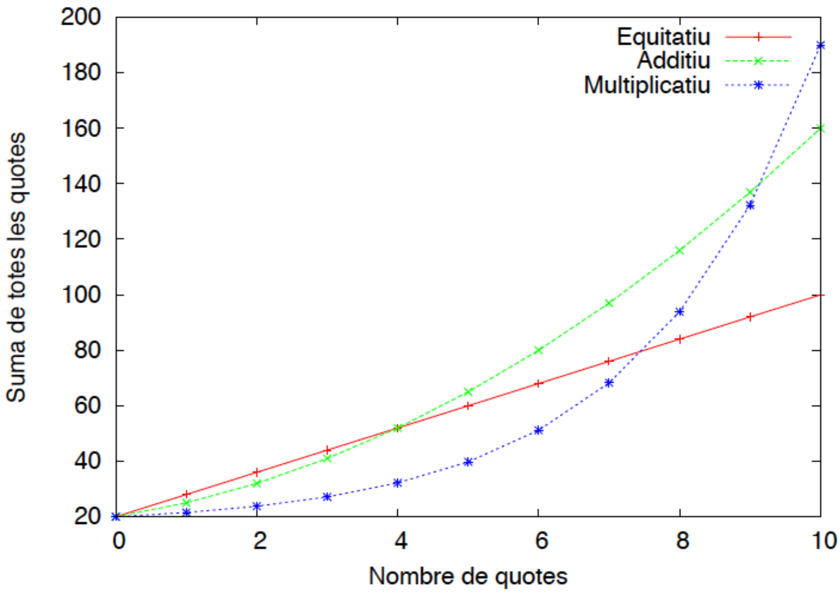
Después de analizar el comportamiento de cada uno de los tres tipos de planes considerados, el grupo de trabajo llevó a cabo un estudio sistemático de las relaciones entre los parámetros que caracterizan a cada uno de ellos.

Como desarrollo del modelo aditivo, plantearon el problema de calcular la función que describe el ahorro acumulado si en lugar de considerar $C_n = C_{n-1} + d$ suponemos que $C_n = C_{n-1} + P(n) \cdot d$ donde $P(n)$ es un polinomio en n.

Como ejemplo abordan el problema en el caso particular en que $P(n) = n^2$ obteniendo como resultado la siguiente función cúbica: $S_n = C_0 + nC_1 + d \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

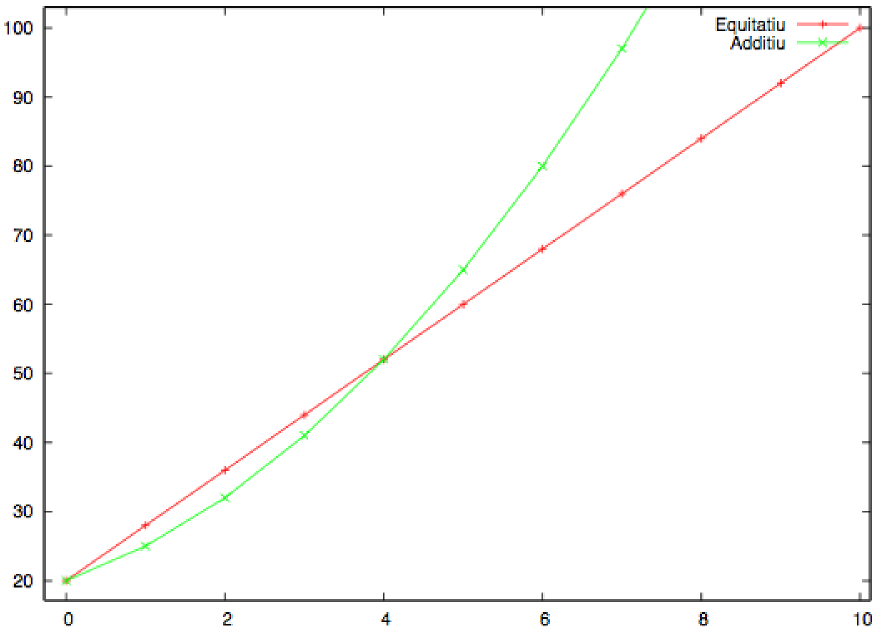
En el caso de los planes de variación multiplicativa también se plantean la misma cuestión —que dejan como tarea pendiente—: Si en lugar de considerar $C_n = k \cdot C_{n-1}$ se supone que $C_n = k \cdot P(n) \cdot C_{n-1}$ donde $P(n)$ es un polinomio en n, ¿cuál sería en este caso la función que describe el ahorro acumulado?

Para estudiar las relaciones entre estos tres tipos de Planes de ahorro, empiezan fijando en todos los casos $C_0 = 20$ y $S_n = 200$, obteniendo la siguiente comparación gráfica de la evolución del ahorro acumulado:

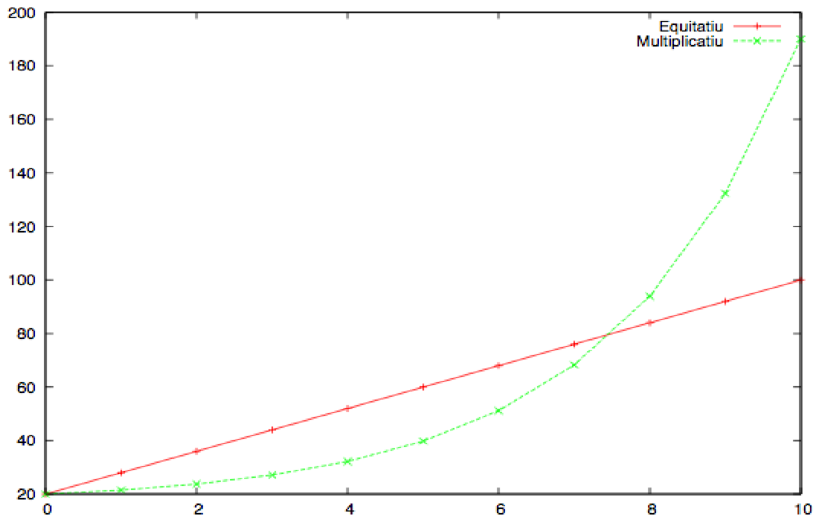


Otra forma de comparar los planes consiste en considerar C_1 diferente en cada modelo, imponiendo que se hagan la misma cantidad de aportaciones, esto es, para el mismo valor de n. En estas condiciones llevan a cabo tres comparaciones:

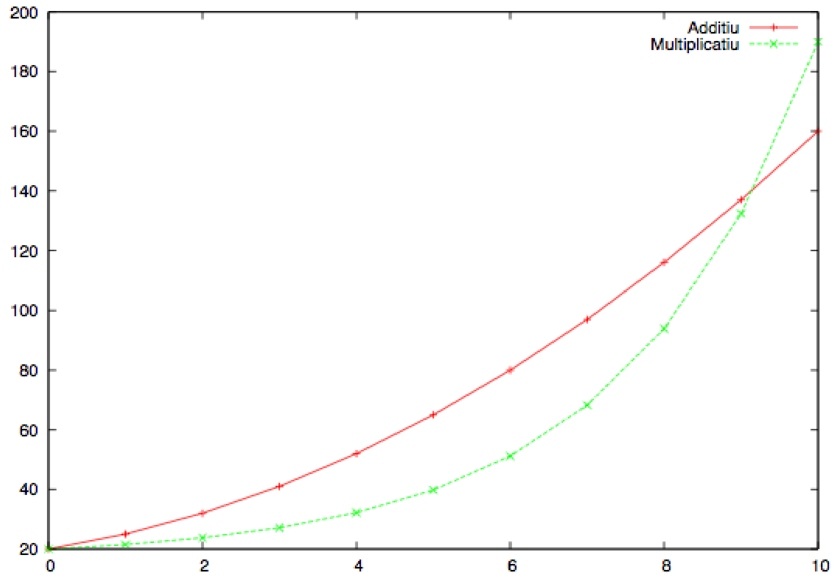
Aditivo versus equitativo



Multiplicativo versus equitativo



Aditivo versus multiplicativo



El grupo terminó su trabajo proponiendo nuevas cuestiones:

***Q*$_3$: ¿**Qué pasaría si en lugar de depositar cuotas las invirtiésemos a un cierto interés?

***Q*$_4$:** ¿Cómo se modifica la distribución de las cuotas individuales si éstas han de dividirse entre los participantes en el viaje y hubiese alguna variación (baja o alta) en el número de alumnos?

4.4.7. Construcción de una praxeología para la enseñanza en torno a la modelización funcional elemental

Esquematizaremos una primera versión de un modelo epistemológico de referencia de una praxeología para la enseñanza en torno a la modelización funcional (que denominamos MER-FP) mediante un Mapa de los Planes de Ahorro que completará relativamente el anterior mapa provisional. (Figura 2)

Dicho mapa contiene las cuestiones y respuestas finales elaboradas cooperativamente por el gran grupo. El MER-FP está generado por la cuestión Q_1 sobre Planes de Ahorro. Se trata de una cuestión muy general que provocará, inicialmente, la emergencia de dos cuestiones derivadas: la referida a los planes de ahorro existentes en la sociedad (Q_{2b}) y la que pregunta por las variables que caracterizan un plan de ahorro (Q_{2a}).

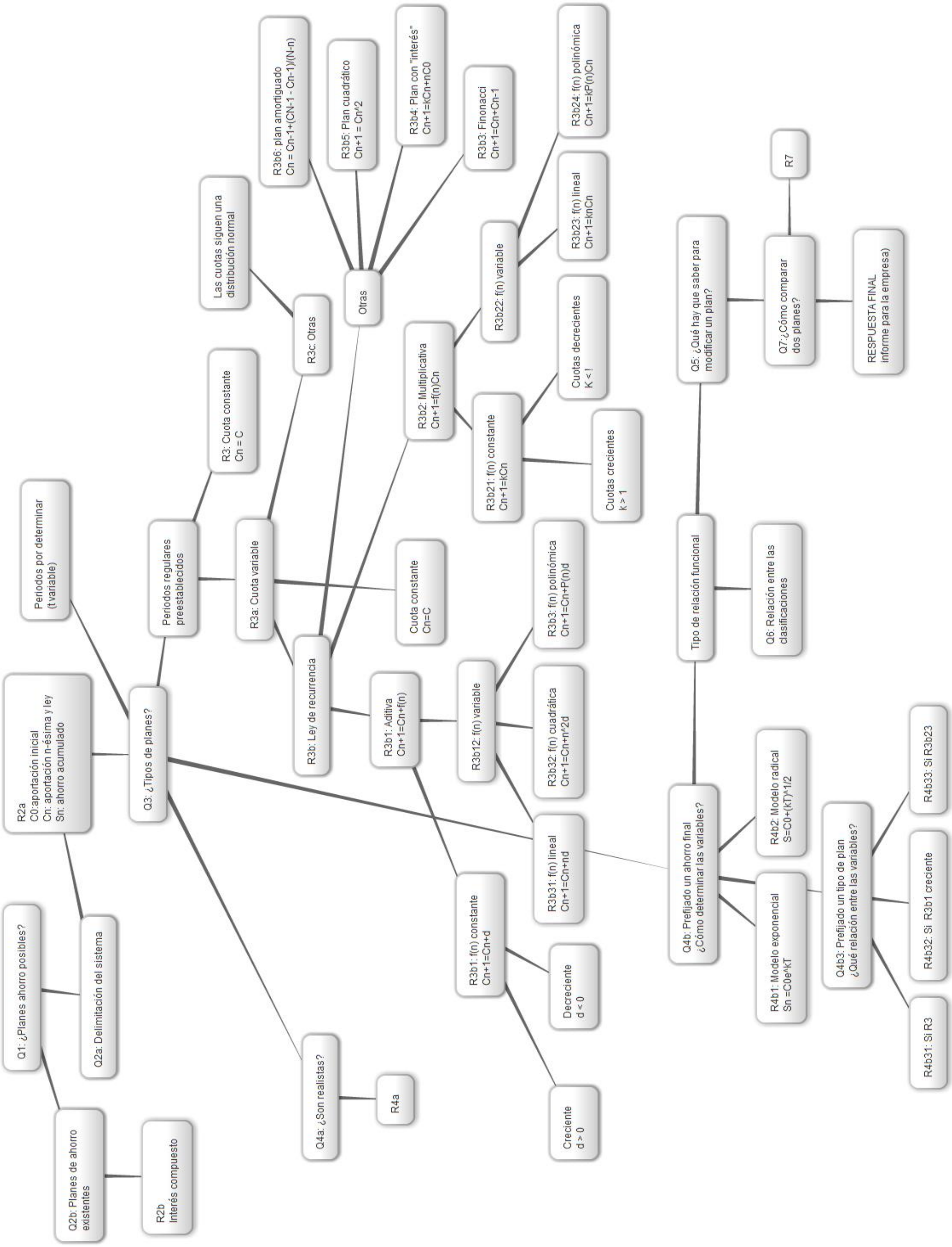


Figura 2: Mapa de los Planes de Ahorro

En la experimentación que hemos descrito, la comunidad de estudio propuso únicamente una respuesta parcial R_{2b} a la cuestión Q_{2b} de los planes existentes, denominada por los propios estudiantes «plan de ahorro de *interés compuesto*». Dicho plan está generado por cuotas que producen un interés a lo largo del desarrollo del plan. En concreto se parte de una cuota inicial C_0 y cuotas iguales C cuyas imposiciones se hacen en periodos regulares. Todas ellas se interpretan como aportaciones a un plan de ahorro con un interés compuesto del i por uno, de tal manera que después de n imposiciones (pasados n periodos) C_0 se ha convertido en $C_0(1 + i)^n$ y las siguientes imposiciones se convierten respectivamente en: $C(1 + i)^{n-1}$, $C(1 + i)^{n-2}$, …, $C(1 + i)^{n-n}$.

Por lo tanto, el ahorro acumulado después de n periodos viene dado por la expresión

$$S_n = C_0(1+i)^n + C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + \cdots + C(1+i)^{n-n}$$
$$= C_0(1+i)^n + C\,\frac{(1+i)^n - 1}{i};$$

La respuesta R_{2a} a la cuestión Q_{2a} establece las principales variables que caracterizan un plan de ahorro:

- C_0: aportación inicial, con la posibilidad de que tome el valor 0.
- C_n: aportación o cuota relativa al plazo n-ésimo de imposición (cuota n-ésima).
- S_n: ahorro acumulado tras n imposiciones.
- L: ley que caracteriza la sucesión de cuotas.

A partir de aquí surge la cuestión Q_3 sobre posibles tipos de planes caracterizados por dichas variables. Una primera clasificación se establece teniendo en cuenta los periodos de tiempo entre cuotas, al considerar dos modalidades: periodos por determinar y periodos regulares preestablecidos, siendo los planes con períodos regulares los únicos que se estudian puesto que los planes con periodos no regulares entre imposiciones sólo son nombrados por uno de los grupos que acabó desistiendo de su estudio.

Una primera respuesta a esta cuestión, R_{3a}, viene dada por la posibilidad de estudiar planes cuya cuota es variable, que se desglosa en dos respuestas posibles: cuotas que siguen una ley de recurrencia (R_{3b}) y cuotas que siguen leyes de otros tipos (R_{3c}).

Dentro de los planes cuyas cuotas siguen una ley de recurrencia, se estudian los siguientes tipos:

R_{3b1}: Recurrencia aditiva, determinada por $C_{n+1} = C_n + f(n)$

R_{3b2}: Recurrencia multiplicativa, determinada por $C_{n+1} = C_n \cdot f(n)$

R_{3b3}: De Fibonacci, determinada por $C_{n+1} = C_n + C_{n-1}$

R_{3b4}: «Plan con interés», determinada por $C_{n+1} = k \cdot C_n + n \cdot C_0$, (con $k > 1$).

R_{3b5}: «Plan cuadrático», determinada por $C_{n+1} = (C_n)^2$

R_{3b6}: «Plan amortiguado», determinado por

$$C_n = C_{n-1} + \frac{C_{N-1} - C_{n-1}}{N - n} \quad con\ 1 \leq n \leq N - 1$$

Donde C_{N-1} es la última imposición (estableciéndose que únicamente se hacen N-1 imposiciones) y, además, la última cuota C_{N-1} es una cantidad predeterminada de antemano.

Hacemos notar que en el «Plan con interés», denominado así por el grupo de estudiantes, el sentido que se da al término *interés* no es el habitual en las entidades financieras.

De nuevo, a partir de R_{3b1} cuya ley de recurrencia, que se ha denominado aditiva, es $C_{n+1} = C_n + f(n)$, surgen nuevas cuestiones derivadas relativas al tipo de función f(n) de las que sólo se consideraron las funciones polinómicas. Así, aparecen las respuestas siguientes:

R_{3b11}: f(n) constante, $C_{n+1} = C_n + d$, con las dos posibilidades acerca del carácter positivo o negativo de d (que dan origen, respectivamente, a cuotas crecientes o decrecientes).

R_{3b12}: f(n) variable. Las funciones que han aparecido en esta situación han sido todas polinómicas (aunque, obviamente, se podría generalizar).

R_{3b31}: f(n) lineal, $C_{n+1} = C_n + n \cdot d$

R_{3b32}: f(n) cuadrática, $C_{n+1} = C_n + n^2 \cdot d$

R_{3b33}: f(n) polinómica de grado mayor que 2, $C_{n+1} = C_n + f(n) \cdot d$ (no se han estudiado explícitamente).

Respecto a los planes relativos a R_{3b2} cuya ley de recurrencia es multiplicativa del tipo $C_{n+1} = f(n) \cdot C_n$ surgen, asimismo, distintas posibilidades para f(n).

R_{3b21}**:** f(n) constante, $C_{n+1} = k \cdot C_n$, abriéndose dos posibilidades según sea $k > 1$ o $k < 1$ (correspondientes a cuotas crecientes o decrecientes).

Un grupo de estudiantes propuso un plan que denominaron «plan exponencial» y caracterizaron mediante: $C_n = (C_0)^{n+1}$ que, de hecho, equivale a $C_{n+1} = C_0 \cdot C_n$ por lo que se trata de un caso particular del anterior con $k = C_0$.

R_{3b22}: f(n) variable. Aquí han aparecido las siguientes:

R_{3b13}: f(n) lineal $C_{n+1} = k \cdot n \cdot C_n$

R_{3b24}: f(n) polinómica de grado mayor que 1, $C_{n+1} = k \cdot f(n) \cdot C_n$ (no se han estudiado explícitamente).

De entre los planes caracterizados por una sucesión de cuotas que no sigue una ley de recurrencia, se ha estudiado (brevemente) únicamente uno.

R_{3c}: Las cuotas C_n siguen una distribución normal.

Junto a los planes determinados por la sucesión de cuotas, se han estudiado dos tipos de planes determinados directamente por la sucesión S_n de ahorros acumulados.

- $S_n = C_0 \cdot e^{kn}$
- $S_n = C_0 + (kn)^{1/2}$

En cada uno de los casos, y con ayuda de Excel, los estudiantes obtienen la gráfica, punto a punto, de la sucesión de cuotas y de la sucesión de ahorros acumulados (para los primeros 12 valores de n). No pudieron establecer en ninguno de los dos casos la ley que caracteriza la sucesión de cuotas, que quedó como un problema abierto. De hecho, la cuestión general de la determinación de la función que caracteriza la sucesión de cuotas C_n, conocida la función que caracteriza la sucesión de ahorros acumulados, S_n, ha sido muy poco estudiada.

La cuestión acerca del «realismo» de los planes formulados (Q_{4a}) se abordó de manera tangencial, después de estudiar algunos planes concretos (equitativo, aditivo creciente y multiplicativo lineal) para concluir que sobre el papel, en principio, es posible diseñar numerosos planes de ahorro, pero en el caso particular de los reseñados, el multiplicativo lineal es poco factible en la vida real, conclusión alcanzada una vez observadas las gráficas obtenidas mediante Excel (R_{4a}).

La cuestión sobre las relaciones entre las variables cuando se establece a priori el ahorro final deseado y un tipo de plan (Q_{4b3}), se ha abordado para los tipos *equitativo*, *aditivo creciente* y *multiplicativo lineal*, cuyo estudio se ha circunscrito a la obtención, mediante Excel, de las gráficas de los distintos planes fijando, además, alguna de las variables que los definen.

Asimismo, estos planes se han utilizado para compararlos entre sí, dando una respuesta parcial R_7 a la cuestión Q_7, también con uso del programa Excel.

En síntesis, y como hemos indicado al principio de esta sección, podemos considerar que el Mapa de los Planes de Ahorro constituye un esquema de un modelo epistemológico de referencia de una *praxeología para la enseñanza* en torno a la modelización funcional elemental (que denominamos MER-FP para distinguirlo del correspondiente MER de Secundaria o MER-S).

Si consideramos la versión de MER-S que sustenta una *praxeología por enseñar* construida y experimentada previamente con alumnos de Secundaria (sección 3.1), es interesante observar en qué forma y en qué direcciones el MER-FP aquí construido y desarrolla y completa (relativamente) el MER-S y, en consecuencia, qué relaciones pueden establecerse entre los posibles recorridos de estudio e investigación (REI) sustentados en uno y otro MER.

De hecho, en la sección 3.2 hemos descrito de manera muy sucinta un proceso de estudio en el cual un grupo de alumnos de cuarto curso de ESO, bajo la dirección de un profesor concreto llevó a cabo, en cierta institución, la reconstrucción parcial de un conjunto de praxeologías como respuesta a una cuestión inicial. Dichas praxeologías, formaban parte de un MER-S construido previamente y fueron reconstruidas parcialmente por la comunidad de estudio siguiendo un cierto orden, mediante el estudio de cierto tipo particular de cuestiones de cada una de ellas y poniendo en marcha unas técnicas (entre todas las posibles) justificadas mediante un discurso tecnológico particular. Por todo ello decimos que la citada comunidad de estudio vivió un *recorrido de estudio e investigación*, REI, sustentado en el MER-S y que, en cierta forma, reconstruyó una versión parcial de dicho MER que consideramos como el MER de una praxeología *por enseñar* (provisional y revisable como todos).

En la sección 4 de este capítulo hemos descrito un proceso de estudio (protagonizado por los profesores en formación) que presenta algunas similitudes pero también algunas diferencias con el anterior. La principal diferencia consiste en que no partíamos de un MER-FP en torno a la MFE construido previamente. De hecho el proceso de estudio desarrollado ha permitido construir una primera versión de dicho MER-FP. Las similitudes entre ambos procesos son las siguientes: al igual que los alumnos de la ESO, un grupo concreto de estudiantes han llevado a cabo una construcción parcial de un conjunto de praxeologías, en una institución determinada de formación del profesorado, bajo la dirección de ciertos formadores y como respuesta a la misma cuestión inicial. En este caso, las praxeologías reconstruidas por la comunidad de estudio contienen ampliamente y desarrollan las construidas por los alumnos de ESO y es por ello por lo que denominamos MER-FP a la arborescencia de dichas praxeologías, para distinguirlo del MER-S al que contienen. También en este caso las praxeologías se estudiaron en un orden determinado (entre muchos otros posibles), a partir del trabajo con algunas de las tareas que forman parte de cada una de las citadas praxeologías y utilizando algunas herramientas concretas de entre las que las praxeologías ofrecen. Resultó, en definitiva, que lo que hemos descrito esquemáticamente en las secciones 4.4.6 y 4.4.7, tras la vivencia de los tres primeros módulos M_0, M_1 y M_2 de un *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP), puede considerarse como la construcción de un MER-FP de una praxeología *para la enseñanza*.

CAPÍTULO V

PRINCIPALES APORTACIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

En este capítulo presentamos las principales aportaciones de esta memoria y formulamos un conjunto de problemas didácticos que continúan abiertos y que surgen de manera más o menos directa de los resultados obtenidos. De hecho, las aportaciones y los problemas abiertos están profundamente relacionados entre sí. En efecto, los problemas abiertos que pueden formularse con las herramientas teóricas o metodológicas que proporciona una investigación constituyen, en sí mismos, importantes aportaciones de dicha investigación y, recíprocamente, las aportaciones científicas proporcionan algunos de los elementos imprescindibles para formular nuevos problemas de investigación.

Distinguiremos dos tipos de aportaciones: las primeras están relacionadas con la formación tradicional del profesorado y las investigaciones centradas en los conocimientos necesarios para la enseñanza (de las matemáticas); las segundas refieren al problema de la formación del profesorado en el ámbito de la TAD y, en especial, destacaremos las aportaciones relacionadas con la elaboración de una estrategia metodológica para construir explícitamente praxeologías matemáticas para la enseñanza de las matemáticas.

1. La formación tradicional del profesorado de matemáticas y las investigaciones sobre los conocimientos necesarios para la enseñanza

Hemos caracterizado la noción cultural de «profesor de matemáticas de secundaria» vigente en nuestra cultura (incluyendo la cultura escolar), mostrando que el oficio docente sigue siendo considerado socialmente como una «semiprofesión» y que la respuesta institucional al problema de la formación del profesorado de secundaria (de matemáticas o de cualquier otra materia) ha sido tradicionalmente coherente con esta baja consideración social del oficio de profesor. Con más precisión, nuestros análisis ponen de manifiesto que, en España, la respuesta oficial a las necesidades de formación del profesorado de secundaria presenta las siguientes características:

El profesorado debe cursar en primer lugar una formación disciplinar de grado (por ejemplo en matemáticas) que no tiene para nada en cuenta las necesidades matemáticas de la profesión. Esta formación disciplinar se completa posteriormente en el máster de formación del profesorado con cursos de amplitud variable (entre 8 y 15 créditos de un total de 60 del máster y de un total de 300 si consideramos grado y máster) de contenido muy variable según las universidades y que no parece resultar de ningún estudio previo sobre estas necesidades ni sobre el carácter problemático de muchos aspectos de la matemática escolar.

- Después de la formación disciplinar de grado, el máster considera una formación específicamente profesional (12 créditos), tildada de *genérica* puesto que atañe a todos los profesores de cualquier disciplina, basada en conocimientos de psicología, pedagogía y sociología que, por su naturaleza, no abordan los problemas propiamente didácticos del profesorado, es decir aquellos en los que aparece involucrado, en mayor o menor medida, el contenido de la enseñanza.
- Sí existen módulos específicamente didácticos que suponen un total de 40 créditos y que podrían en cierta forma limitar esta visión psicopedagógica dominante: las materias «Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas», «Innovación docente e iniciación a la investigación educativa» y, principalmente, el Practicum y el Trabajo de fin de máster. Sin embargo, el papel integrador de las dos materias de didáctica es limitado.

En definitiva, podemos afirmar que la formación del profesorado de secundaria:

(a) No logra desprenderse totalmente de una visión *psicopedagógica* de la enseñanza que provoca, en la práctica, una escisión entre la formación dirigida a *hacer* matemáticas y la encaminada a *enseñar* matemáticas.

(b) Se organiza como si las necesidades de formación del profesorado pudiesen satisfacerse mediante *respuestas disponibles*, puesto que muy raramente se considera que el problema de formación del profesorado es, en gran medida, un problema abierto.

(c) Asigna un papel secundario a la *investigación didáctica*.

En este punto, nuestra principal aportación consiste en enfatizar el *carácter integrador de la didáctica* de las matemáticas explicitando el mecanismo que permite a esta disciplina tratar de manera unitaria el conjunto de cuestiones que constituyen la problemática docente y *unificar* así el proceso de formación del profesorado. Este mecanismo se formula en términos de los niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001) y consiste en tomar en consideración como cuestiones generatrices de la formación aquellas que emergen en los denominados niveles intermedios de codeterminación didáctica, esto es, en los correspondientes a la *Disciplina* (en nuestro caso, las Matemáticas) el *Área* y el *Sector*. Estas cuestiones generatrices prefiguran el punto de partida de nuestra propuesta de programa de formación del profesorado de matemáticas, puesto que generan una problemática a la que acabarán refiriéndose el resto de las cuestiones profesionales, sea cual sea su grado de generalidad.

Algunos de los problemas abiertos que surgen en este ámbito pueden formularse como sigue:

- ✓ ¿Cómo elegir las cuestiones emergentes de los niveles intermedios de codeterminación didáctica de tal manera que sean capaces de generar un programa de formación del profesorado integrado y suficientemente comprensivo?
- ✓ ¿Qué instituciones tienen la legitimidad y la responsabilidad científica y social para proponer una selección de cuestiones a estudiar en la formación del profesorado?

En el Capítulo I de la memoria describimos de manera explícita algunas de estas cuestiones potencialmente generadoras de *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) y en el Capítulo IV detallamos la experimentación de un REI-FP generado por una de dichas cuestiones, la referente a la modelización funcional elemental.

Con relación a las investigaciones sobre los conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas nos hemos centrado principalmente en el análisis de los trabajos sobre el MKT y sus desarrollos así como en las investigaciones encaminadas a determinar las competencias profesionales docentes que la formación del profesorado debería incorporar. En este punto la aportación más importante de esta memoria consiste, en primer lugar, en cambiar el problema formulado por los enfoques de corte cognitivo, que pretenden caracterizar los conocimientos y concepciones del profesor así como la incidencia de éstos sobre las prácticas docentes y sobre el aprendizaje de los alumnos, por otro de naturaleza más institucional, el de caracterizar las organizaciones matemático-didácticas que viven en las instituciones escolares y analizar las condiciones de existencia, génesis y desarrollo de las mismas. Se trata, en definitiva, de situar el problema de la formación del profesorado en el marco del estudio de la ecología institucional de las organizaciones matemático-didácticas.

Hemos mostrado que ambos enfoques del problema de la formación matemática del profesorado coinciden en que ésta no se puede reducir ni a una formación estrictamente matemática, ni a una formación pedagógica ni, tampoco, a una yuxtaposición mecánica de ambas. De hecho, los dos enfoques comparten la necesidad de tomar en consideración la que podríamos denominar *dimensión didáctica* del problema de la formación, que surge al *integrar* lo pedagógico y lo matemático y que cada enfoque lleva a cabo de distinta manera. Precisamente, en base a la diferente forma de integrar lo pedagógico y lo matemático, otra de las aportaciones de esta memoria consiste en caracterizar de la diferente forma de integrar lo pedagógico y lo matemático hemos caracterizado las principales diferencias entre ambos enfoques en relación con las asunciones básicas sobre las que descansan los respectivos planes de formación del profesorado de matemáticas.

(a) Las investigaciones que se llevan a cabo en el ámbito del enfoque cognitivo sobre la formación del profesorado toman el currículo oficial, sin cuestionarlo, como uno de los criterios que caracterizan las matemáticas para la enseñanza. Sin embargo, en el enfoque epistemológico se cuestiona la organización matemática escolar y se considera que para proveer los recursos matemáticos que requiere el ejercicio de la profesión, es necesario llevar a cabo elaboraciones matemáticas que no son simples copias simplificadas de las obras matemáticas existentes, sino que son verdaderos desarrollos *originales*. Estos desarrollos o infraestructuras matemáticas constituyen modelos alternativos de los diferentes ámbitos de la matemática escolar y su estructura puede diferir en gran medida de la propuesta por el currículo.

(b) Mientras que en las investigaciones desarrolladas en el enfoque cognitivo en torno a los conocimientos del profesor se suele tomar como *ámbito empírico* del trabajo que éste desarrolla en el aula, en el enfoque epistemológico, y especialmente en los trabajos que se sustentan en la TAD, se necesita, además, tomar en consideración datos provenientes del resto de instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica, para abordar el problema de la formación del profesorado.

(c) Mientras que en el enfoque cognitivo se tiende a considerar que los conocimientos o las competencias que el profesor necesita para llevar a cabo su oficio son conocidas de antemano o, al menos, pueden obtenerse mediante un análisis empírico, en el enfoque epistemológico se considera que el problema de la formación del profesorado es, en gran medida, un *problema abierto de investigación didáctica* del que disponemos únicamente de respuestas parciales y provisionales.

Desde el punto de vista que proporciona la TAD, situada en el enfoque epistemológico, surgen diversas cuestiones:

- ✓ En las citadas elaboraciones matemáticas originales, ¿qué papel deben jugar la profesión docente, los didactas, los investigadores en matemáticas?, ¿qué tipo de equipos multidisciplinares deben formarse como responsables de este trabajo y en que institución deben situarse?
- ✓ ¿Cómo difundir dichas elaboraciones matemáticas para que puedan convertirse en materiales efectivamente útiles para el profesor en su práctica docente? ¿Qué papel debe jugar la profesión docente y la formación del profesorado en este proceso?
- ✓ ¿Cómo establecer un sistema de cooperación que permita identificar las cuestiones problemáticas del profesorado, hacerlas visibles, abordarlas como problemas de formación y de investigación y difundir en la profesión las posibles respuestas elaboradas?

2. El problema de la formación del profesorado en el ámbito de la TAD

En la TAD, el problema de la formación del profesorado se formula en términos de la evolución del *equipamiento praxeológico* del profesor. De esta manera, basándonos en la estructura y la dinámica de las praxeologías, podemos preguntarnos:

- ✓ ¿Cómo se definen y delimitan las tareas docentes; de dónde surgen las técnicas didácticas; cómo se pueden desarrollar, evaluar y mejorar?
- ✓ ¿De dónde surge y cómo se construye el discurso tecnológico-teórico que utilizan los profesores para describir y justificar su praxis, y cómo incide dicho discurso sobre las distintas prácticas?

Dado que el equipamiento praxeológico de los profesores depende, en gran medida, de las construcciones praxeológicas de las instituciones a las que están sujetos como tales profesores, postulamos que para abordar el problema de la formación del profesorado y construir las *praxeologías de la profesión docente* con las que el profesor se tiene que equipar, se debe empezar determinando las *cuestiones* que están en el origen de estas praxeologías: se designan como cuestiones «cruciales» o «umbilicales» ya que son las que explican la emergencia, existencia y desarrollo de estas praxeologías. En este punto y con vistas a la *elaboración de un programa global de formación* (*matemática*) *del profesorado*, permanecen abiertos un gran número de problemas:

- ✓ ¿Cuáles son las *cuestiones cruciales* con las que deben enfrentarse los profesores en su práctica docente y qué puede hacer la formación para ayudarlos a construir *respuestas satisfactorias* (en forma de praxeologías) a estas cuestiones?
- ✓ ¿Cómo se generan dichas cuestiones? ¿Qué instrumentos metodológicos podemos utilizar para detectar y formular dichas cuestiones?
- ✓ ¿Cómo se relacionan entre sí y cómo pueden articularse en un programa de formación no atomizado? ¿Qué institución está legitimada para elaborar dicho programa?

En cuanto a la relación entre el programa de formación que propone la TAD y la investigación que se inició con el PCK y continuó con el MKT y sus diferentes desarrollos, empezaremos diciendo que estamos completamente de acuerdo con la necesidad de incluir en la formación del profesorado conocimientos *matemáticos* que no se limitan a los contenidos que el profesor debe enseñar y que, en general, no forman parte de la formación disciplinar básica que los futuros profesores han recibido en los diferentes grados universitarios. Sin embargo, el programa de formación que proponemos, contiene características nuevas con relación a la propuesta iniciada por el MKT. A continuación resumimos brevemente dichas características:

(a) Siguiendo a Cirade (2006) hemos estructurado el conjunto de praxeologías relacionadas con la formación del profesorado de matemáticas en tres niveles de complejidad y amplitud creciente (por enseñar, para la enseñanza y de la profesión).

(b) Hemos mostrado que el desarrollo de las praxeologías matemáticas *para la enseñanza*, que contienen los conocimientos necesarios para delimitar adecuadamente, interpretar, relacionar entre sí y explicitar la razón de ser de las matemáticas *por enseñar*, modifica tanto las praxeologías matemáticas *por enseñar* como las propias praxeologías *de la profesión*.

(c) Hemos diseñado y experimentado un nuevo dispositivo didáctico de formación, los REI-FP, cuya puesta en marcha posibilita el *estudio de cuestiones umbilicales* de la profesión, así como llevar a cabo una estrategia metodológica para construir praxeologías matemáticas para la enseñanza (¿sección 3 de este capítulo?).

De hecho, el problema de investigación que nos planteamos inicialmente en esta memoria lo hemos formulado como el problema de la *construcción, reconstrucción y estudio de praxeologías para la enseñanza mediante la puesta en marcha* (*diseño y gestión didáctica*) *de los Módulos M_0, M_1 y M_2 del dispositivo REI-FP en el ámbito de la formación inicial del profesorado de matemáticas*.

Entre la cuestiones que surgen de este planteamiento del problema, y que hemos abordado parcialmente en el capítulo IV de esta memoria, podemos citar las siguientes:

- ✓ ¿Cómo diseñar, gestionar y evaluar en una institución de formación un REI-FP cuyo núcleo está constituido por un REI de partida experimentado previamente en la enseñanza secundaria?
- ✓ ¿Cómo hacer vivir el REI de Secundaria a los profesores en formación o, en su caso, cómo modificar su cuestión generatriz para que tenga cabida en las instituciones de formación del profesorado?
- ✓ ¿Qué condiciones (relativas a la formación previa de los estudiantes para profesor, a la estructura global del proceso de formación, al papel que desempeñan las prácticas docentes, al modelo docente dominante en la citada institución, etc.) deberían instaurarse en la institución de formación del profesorado para que los REI-FP puedan vivir con normalidad en dicha institución?
- ✓ En particular, ¿qué restricciones dificultan actualmente el desarrollo normalizado de este tipo de formación?
- ✓ ¿En qué niveles de codeterminación didáctica y desde qué posiciones institucionales dichas restricciones pueden considerarse como condiciones modificables?

3. Estrategia metodológica para reconstruir una praxeología para la enseñanza.

En el Capítulo IV hemos descrito la estrategia llevada a cabo en el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria para reconstruir, mediante la experimentación de los Módulos M_0, M_1 y M_2 de un REI-FP, una versión de una *praxeología matemática para la enseñanza* en torno a la modelización funcional elemental (MFE).

Dado que la estructura de esta estrategia es aplicable a otros muchos casos con el objetivo de reconstruir praxeologías matemáticas para la enseñanza (en torno a diversos ámbitos de la actividad matemática escolar), consideramos que la estrategia metodológica utilizada —que, como veremos, es sólo una parte de una estrategia más amplia—, constituye en sí misma una de las aportaciones centrales de esta memoria. Resumiremos brevemente en lo que sigue sus principales etapas y las relaciones entre ellas advirtiendo que no es posible establecer una linealidad temporal estricta entre las mismas, puesto que algunas de ellas se desarrollan de manera simultánea en la práctica efectiva y, en algunos casos, se establecen relaciones recíprocas entre etapas en el sentido que el desarrollo de cada una de ellas provoca modificaciones importantes en el de las otras.

Con el objetivo de presentar una visión global de esta estrategia proponemos un esquema de conjunto (Figura 1) en el que hemos numerado las etapas que estructuran dicha estrategia, desde la (1) hasta la (11), interpretándolas como tareas a realizar e indicando mediante flechas las relaciones entre ellas. Es importante tener en cuenta, además, que la primera parte de la estrategia, la que desemboca en el diseño y experimentación de un REI en Secundaria y que comprende las etapas de (1) a (5) de la misma, tiene sentido en sí misma cuando se trata de construir simplemente una *praxeología matemática por enseñar* (por ejemplo en Secundaria) sin que ésta tenga que utilizarse necesariamente —aunque pueda utilizarse— como una primera etapa de la estrategia encaminada a construir una *praxeología matemática para la enseñanza.*

Como hemos indicado, el citado esquema global es más completo en dos aspectos que el utilizado efectivamente en esta memoria. En primer lugar el esquema completo contiene las etapas (8), (9), (10) y (11), no desarrolladas en este trabajo y, en segundo lugar, contiene una estrategia alternativa completa, que tampoco hemos experimentado. Esta estrategia alternativa no requiere pasar necesariamente por el diseño de una praxeología por enseñar en Secundaria ni por el diseño a priori de un REI y su consiguiente experimentación. En ella las etapas (4), (5), (6), (7), (10) y (11) se cambian por las etapas (4'), (6'), (7') (10') y (11')[13]. La principal diferencia entre ambas estrategias consiste en que en esta última se construye directamente un REI para ser vivido en la institución de Formación del Profesorado y la correspondiente *praxeología para la enseñanza* a partir del MER-FP obtenido, a su vez, en base a los criterios y principios para construir un MER-S, pero sin haber construido explícitamente dicho MER-S y, por tanto, sin basarse en la experimentación previa de un REI sustentado en él.

En lo que sigue, describimos brevemente la parte de la estrategia que hemos utilizado efectivamente en esta memoria y que contiene las etapas (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8') que, globalmente consideradas, constituyen una de las principales aportaciones de la misma. No describiremos aquí las etapas (8), (9), (10) y (11), ni tampoco las (9'), (10') y (11') porque, como hemos indicado, no forman parte del trabajo que hemos desarrollado en esta memoria.

(1) *Dialéctica entre la formulación de un problema de la profesión docente y la toma en consideración de un fenómeno didáctico*

La estrategia que hemos puesto en marcha en esta memoria parte de la constatación de un *problema de la profesión docente* que, en nuestro caso, es el problema relativo al diseño y gestión, en la ESO, de la enseñanza y el aprendizaje de la MFE, incluyendo el papel que juega la relación de proporcionalidad en la matemática escolar. Simultáneamente, dicha estrategia se inicia con la toma en consideración de un *fenómeno didáctico* emergente en dicho ámbito que se manifiesta en la ausencia de *problematización de los sistemas de variación*. En la organización matemática escolar, éstos se utilizan de forma transparente y accesoria, lo que permite explicar en parte el *aislamiento de la proporcionalidad* del resto de relaciones funcionales y las enormes dificultades del currículo (y, por lo tanto, de los profesores) para integrar el estudio de la proporcionalidad en una praxeología *regional* en torno a la MFE. Esta simultaneidad entre la constatación de un problema de la profesión docente relativo a un ámbito de la actividad matemática escolar y la toma en consideración de un fenómeno didáctico

[13] En estos momentos se están desarrollando dos tesis doctorales que utilizan esta estrategia alternativa en la que se construye directamente un MER-FP y su correspondiente praxeología *para la enseñanza* (en torno a los números reales y a la geometría elemental respectivamente) a partir de un esbozo del MER-S alternativo, sin basarse en un REI experimentado previamente en Secundaria.

emergente en dicho ámbito no consiste únicamente en una coincidencia temporal. De hecho, la constatación de un problema docente constituye un componente importante de la base empírica para construir el fenómeno didáctico y, recíprocamente, la toma en consideración del fenómeno en cuestión permite replantear el problema docente como un verdadero problema de investigación didáctica. En nuestro, caso la formulación inicial del problema docente hace referencia a la *enseñanza de la proporcionalidad* y, gracias a la toma en consideración del fenómeno didáctico citado, hemos reformulado dicho problema en términos del papel de la proporcionalidad en el ámbito de la MFE.

Al inicio de esta estrategia, y como punto de partida del proceso de formación del profesorado que se desarrollará a lo largo del REI-FP, se plantea la cuestión generatriz **Q_0-FP** del REI-FP. Dicha cuestión se propone en el Módulo M_0 en términos de una cuestión que, en el caso que nos ocupa, se formula en los siguientes términos: ¿*Cómo organizar la enseñanza de la MFE en la ESO y qué papel darle a la proporcionalidad en dicha organización*? de la que se deriva un amplio conjunto de cuestiones.

(2) *Cuestionamiento de la matemática escolar, análisis de los procesos transpositivos y caracterización del modelo epistemológico dominante en Secundaria*

La formulación del citado fenómeno didáctico y el replanteamiento del problema docente asociado requieren el cuestionamiento de la organización matemática escolar en torno a la MFE y, correlativamente, el análisis de las transformaciones que ha sufrido dicho ámbito a lo largo del proceso de transposición didáctica, a fin de caracterizar el *modelo epistemológico dominante* en la ESO en torno a la MFE. Para llevar a cabo dicho cuestionamiento, la estrategia metodológica requiere que se planteen cuestiones tales como: ¿Qué se entiende en dicha institución por MFE? ¿Cuál es la *razón de ser* «oficial» que la institución escolar le asigna? ¿Qué actividades matemáticas se llevan a cabo en la ESO en las que aparezca la MFE? ¿Cómo se relaciona la proporcionalidad con el resto de relaciones funcionales elementales? En resumen, el objetivo de este cuestionamiento y del correspondiente análisis transpositivo, consiste en indagar el s*istema de reglas y principios que regulan la estructura y el funcionamiento* de la MFE en el sistema escolar y su relación con la proporcionalidad, esto es, analizar la «economía escolar» (Gascón 2011) de dicho ámbito de la actividad matemática en la ESO.

(3) ***Criterios y principios para construir un MER-S***

El análisis del citado *modelo epistemológico dominante* en la ESO en torno a la MFE y la clarificación de la consiguiente razón de ser «oficial» que se asigna a dicho ámbito en la matemática escolar aportan, con la ayuda de los instrumentos que proporciona la TAD, algunos criterios y principios necesarios para construir un MER-S que asigne en Secundaria una razón de ser alternativa (o, según el caso, complementaria) a la citada razón de ser oficial. Obviamente, la formulación de estos criterios y principios está basada esencialmente en el análisis del fenómeno didáctico y, correlativamente, en el estudio del problema de la profesión docente asociado, por lo que deben empezar a dibujar los nuevos objetivos matemático-didácticos que el MER encarnará. Esta explicitación de objetivos matemático-didácticos posibles constituye una de las etapas cruciales de la estrategia metodológica. En nuestro caso, la nueva praxeología por enseñar redefinida por el MER-S explicita como objetivos didáctico-matemáticos posibles la integración de la *problematización de los sistemas de variación*, la superación del *aislamiento de la proporcionalidad* del resto de relaciones funcionales y su integración en una praxeología *regional* en torno a la MFE.

(4) ***Construcción de un MER-S y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar en Secundaria***

La estrategia metodológica continúa mediante la construcción efectiva de una primera versión del MER-S a partir de los citados principios y criterios, lo que comporta una nueva redefinición de lo que se entiende en la ESO por «modelización funcional elemental», de su relación con la proporcionalidad y de su posición curricular con respecto al resto de áreas de la matemática escolar. En consecuencia, cada versión del MER-S delimita, reestructura y redefine, una *praxeología por enseñar* en torno a la MFE en la ESO (que puede diferir ampliamente de la *praxeología por enseñar oficial*). Se supone que esta nueva praxeología por enseñar permitirá llevar a cabo un proceso de estudio que se acerque progresivamente (a medida que se construyen nuevas versiones de la misma) a ciertos objetivos matemático-didácticos determinados de antemano (ver punto (3)) y potencialmente diferentes a los que era posible alcanzar en el ámbito de la actividad matemática escolar en torno a la MFE, cuando ésta estaba definida y estructurada basándose en el antiguo modelo epistemológico dominante. La construcción efectiva del MER-S puede provocar cambios en los criterios y principios que regulan a priori su construcción.

(5) ***Diseño, experimentación y evaluación de un REI en Secundaria***

Una vez construida en el ámbito de la investigación didáctica una versión del MER-S que, no debe olvidarse, tiene el estatus de *hipótesis científica*, siempre provisional, a contrastar experimentalmente, la estrategia metodológica que estamos describiendo (y que tiene como objetivo final reconstruir una praxeología para la enseñanza) continúa con el diseño, experimentación y evaluación en Secundaria de un (REI) sustentado en dicho MER-S. Este REI, que se cristaliza en un proceso de estudio con un grupo de alumnos y un profesor concretos en una institución determinada, construye implícitamente una respuesta a $\boldsymbol{Q_0}$**-FP** que puede considerarse surgida de la investigación didáctica. En nuestro caso se trata del REI de los Planes de Ahorro (García, 2005) que hemos descrito en la sección 3.2 del capítulo IV. Como hemos señalado anteriormente, cada experimentación y evaluación de un REI sustentado en un MER-S proporciona criterios para *contrastar empíricamente* el citado MER-S, considerado como una hipótesis científica. Esto significa que el análisis a posteriori del desarrollo del REI permitirá comprobar hasta qué punto la actividad matemática que encarna dicho MER-S posibilita alcanzar los objetivos matemático-didácticos previstos de antemano. En todo caso, el citado análisis aportará datos para modificar el MER-S.

(1) ***Estudio de un problema de la profesión docente***

Suponiendo que se ha construido un MER-S y que se ha experimentado en Secundaria un REI sustentado en el mismo, la estrategia metodológica que estamos describiendo propugna utilizar la experiencia y los resultados de dicho proceso para diseñar un recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP) cuyo objetivo sea posibilitar el estudio de un problema de la profesión construido simultáneamente con el MER-S. La formulación de dicho problema y las primeras etapas de su estudio se llevan a cabo en el Módulo M_0, que está generado por una cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_0}$**-FP**. La primera tarea que propone la estrategia metodológica para empezar a estudiar dicha cuestión consiste en indagar cuál es la respuesta que aporta la institución escolar a la misma y, paralelamente, qué otras posibles respuestas están disponibles en otras instituciones como la investigación didáctica o la formación del profesorado.

(6) ***Módulo M_1-S: vivir un REI sustentado en un MER-S***

En este Módulo M_1-S del REI-FP la estrategia metodológica pretende que los profesores en formación empiecen a construir, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta a $\boldsymbol{Q_0}$**-FP**. Como primer paso, este módulo constituye un dispositivo didáctico diseñado para proporcionar a los profesores en formación la posibilidad de vivir en propia carne un REI, sustentado en un MER-S y experimentado previamente en Secundaria. Se pretende que los estudiantes *construyan por ellos mismos* una respuesta a la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_1}$ de dicho REI que contenga en cierta forma la proporcionada previamente por los alumnos de Secundaria. Para ello se les propone vivir dicho REI (sustentado en un MER-S) en posición de estudiantes o de matemáticos aprendices. Esto significa que, en primera instancia, deberán construir una respuesta a $\boldsymbol{Q_1}$ que, en nuestro caso, se materializó en una cuestión relativa a la construcción de *planes de ahorro*. Sólo en segunda instancia podrán interpretar, en el Módulo M_2, que el trabajo llevado a cabo para construir esta respuesta puede interpretarse como una respuesta provisional a $\boldsymbol{Q_0}$**-FP**. Esta respuesta revisable, relativamente análoga a la proporcionada por la TAD (García, 2005), les proporcionará un punto de vista, un sistema de referencia, desde el cual observar, analizar y evaluar otras posibles respuestas a dicha cuestión.

(7) ***Módulo M_2: Analizar el REI vivido sustentado en un MER-S***

En esta etapa de la estrategia metodológica que estamos describiendo, los profesores en formación llevan a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido. Para ello, se retoma el problema de la profesión docente descrito mediante la cuestión $\boldsymbol{Q_0}$**-FP**, así como las respuestas parciales que los profesores en formación hayan encontrado en el Módulo M_0 a partir de la exploración de los diversos documentos oficiales que tienen a su disposición (incluyendo su propia experiencia como alumnos). Estos datos, junto a una descripción de la respuesta particular a la cuestión $\boldsymbol{Q_0}$**-FP** surgida en el ámbito de la investigación didáctica y materializada en el REI experimentado en el cuarto curso de la ESO, constituyen los *media* del que disponen los profesores en formación para llevar a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido.

(8') ***Construcción de un MER-FP y de la correspondiente praxeología matemática para la enseñanza***

A partir de los datos proporcionados por el análisis del REI vivido (especialmente por el análisis matemático), surgen cuestiones que extienden y pueden contener ampliamente las que forman parte del MER-S y cuyas respuestas aparecen como necesarias, o al menos útiles, para: delimitar la actividad matemática escolar en torno a la MFE (y, en particular, en torno al papel que se asigna a la proporcionalidad), explicitar la razón de ser oficial que se asigna en la enseñanza secundaria obligatoria a dicho ámbito de la actividad matemática, interpretar adecuadamente la razón de ser alternativa que el MER-S le asigna y relacionar la MFE con los diferentes bloques o áreas de la matemática por enseñar y otros ámbitos de la vida escolar y social. Éstas son algunas de las cuestiones que estructuran el MER-FP y que se plantean en esta última etapa de la estrategia metodológica.

En nuestro caso, las cuestiones que estructuran el MER-S se limitan esencialmente a las tocantes al tipo de relación funcional entre la cuota *n*-ésima o el ahorro acumulado y el número *n* de imposiciones.

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} C_k$$

En el MER-S las cuestiones se restringen esencialmente a los casos en que las cuotas varían formando una sucesión aritmética o geométrica. En particular, en el caso en que las imposiciones son constantes, dan lugar al *plan de ahorro equitativo* en el que aparece la *función de proporcionalidad*.

Como desarrollo de esta problemática elemental, muy rica para alumnos de la ESO, surge el problema de la relación entre ambos tipos de funciones en situaciones mucho más generales.

Dado que en los casos elementales citados C_k varía según una relación de recurrencia lineal muy elemental (dada mediante una sucesión aritmética o geométrica), en el MER-FP aparecen, en primera instancia, cuestiones relativas a la relación entre la variación de las cuotas y la variación del ahorro acumulado, en el caso en que las imposiciones varían según una ley de recurrencia aditiva, $C_{n+1} = C_n + f(n)$, o bien una ley de recurrencia multiplicativa, $C_{n+1} = f(n) \cdot C_n$ (donde $f(n)$ es, en principio, una función polinómica). A partir de aquí surge la cuestión no trivial de cómo determinar la evolución de las cuotas (que no tiene por qué ser necesariamente mediante una ley de recurrencia) a partir de una función preestablecida que define la variación del ahorro acumulado, como por ejemplo:

$$S_n = c_0 \cdot e^{kT} \text{ o bien } S_n = c_0 + \sqrt{kT}.$$

Recíprocamente, dada una ley que caracteriza la evolución de las cuotas como, por ejemplo: $C_n = C(1 + i)^{T \cdot n}$; $C_{n+1} = n \cdot k \cdot C_n$; $C_n = C_{n-1} + n^2 \cdot d$ o bien $C_{n+2} = C_n + C_{n+1}$, se propone determinar la función que describe la evolución del ahorro acumulado.

Esta problemática funcional que estructura el MER-FP y que se materializa en una *praxeología matemática para la enseñanza*, contiene asimismo la problemática que hemos denominado del *control* de los planes de ahorro trabajados o, en el lenguaje de la modelización funcional, la problemática ligada a la construcción de un modelo funcional que cumpla determinadas condiciones (o hipótesis sobre el sistema modelizado) establecidas a priori. También forman parte del MER-FP las cuestiones relativas a la *comparación* de los planes de ahorro o modelos funcionales en cuestión.

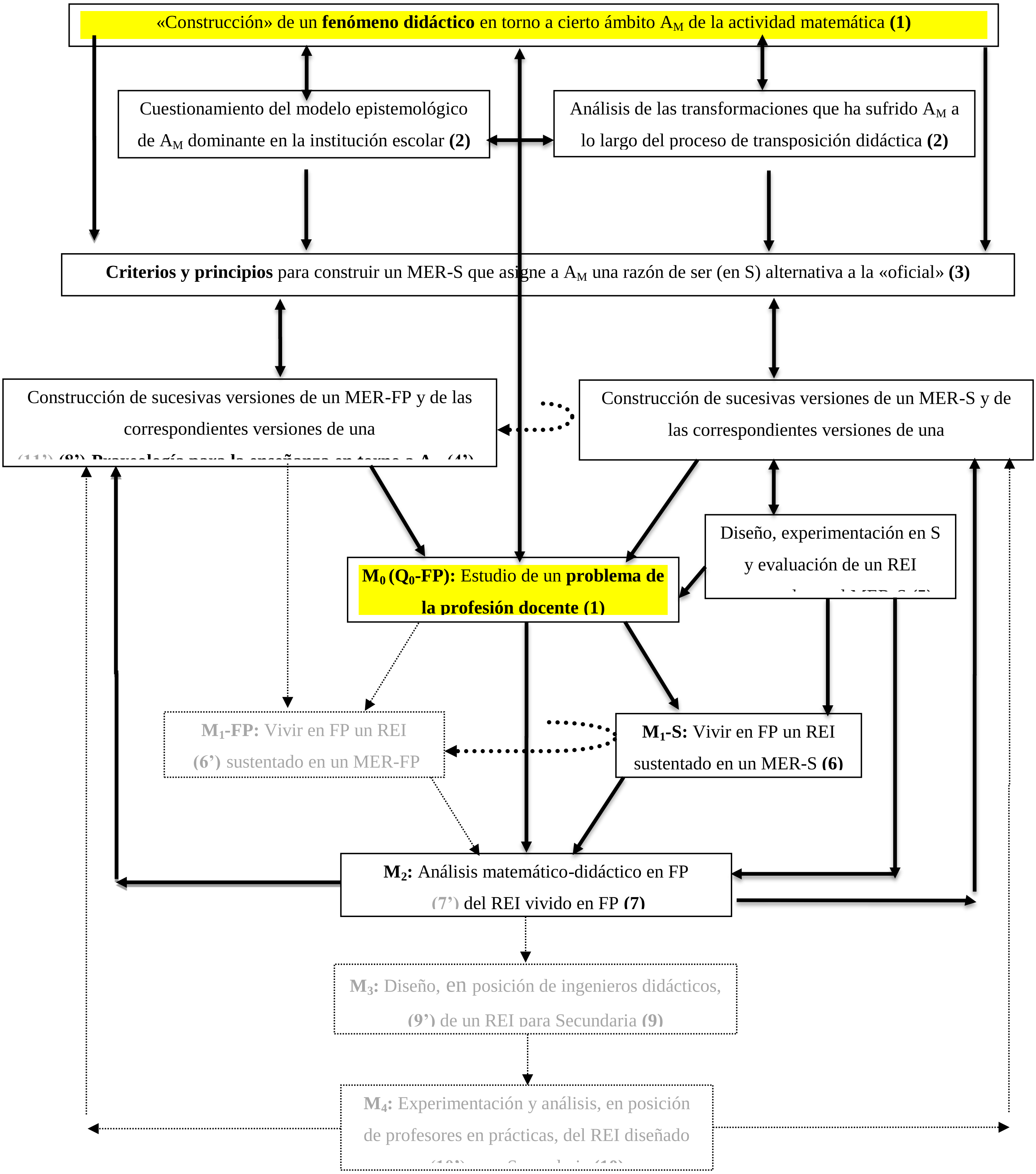

«Construcción» de un **fenómeno didáctico** en torno a cierto ámbito A_M de la actividad matemática **(1)**
Cuestionamiento del modelo epistemológico de A_M dominante en la institución escolar **(2)**
Análisis de las transformaciones que ha sufrido A_M a lo largo del proceso de transposición didáctica **(2)**
Criterios y principios para construir un MER-S que asigne a A_M una razón de ser (en S) alternativa a la «oficial» **(3)**
Construcción de sucesivas versiones de un MER-FP y de las correspondientes versiones de una
Construcción de sucesivas versiones de un MER-S y de las correspondientes versiones de una
Diseño, experimentación en S y evaluación de un REI
M_0 (Q_0-FP): Estudio de un **problema de la profesión docente (1)**
M_1-FP: Vivir en FP un REI
(6') sustentado en un MER-FP
M_1-S: Vivir en FP un REI sustentado en un MER-S **(6)**
M_2: Análisis matemático-didáctico en FP
(7') del REI vivido en FP **(7)**
M_3: Diseño, en posición de ingenieros didácticos,
(9') de un REI para Secundaria **(9)**
M_4: Experimentación y análisis, en posición de profesores en prácticas, del REI diseñado

Figura 1

4. Problemas abiertos que surgen en la estrategia metodológica para construir una praxeología matemática para la enseñanza

Antes de proponer las cuestiones que surgen en el desarrollo de la estrategia metodológica utilizada en esta memoria, podemos formular un problema didáctico previo y muy general:

- ✓ Dado un problema de la profesión docente que involucre cierto ámbito de la actividad matemática escolar, ¿cómo delimitar el equipamiento praxeológico necesario para diseñar y gestionar la enseñanza de dicho ámbito?, esto es, ¿cómo determinar las praxeologías para la enseñanza que son útiles para diseñar y gestionar la enseñanza de dicho ámbito?
- ✓ ¿Qué estrategias, diferentes a la que hemos utilizado en esta memoria, pueden utilizarse para construir una praxeología matemática para la enseñanza en torno a un ámbito matemático concreto que responda a un problema profesional determinado?
- ✓ Una vez aceptado el esquema global esquematizado en la Figura 1 ¿de qué criterios disponemos para elegir una de las dos estrategias alternativas que aparecen en dicho esquema?

Situándonos específicamente en la estrategia metodológica utilizada en esta memoria, veremos que, en cada una de las etapas que forman parte de la misma, aparecen problemas de investigación didáctica de diferentes niveles de especificidad que, en general, no están resueltos, si bien en esta memoria hemos aportado respuestas parciales a algunos de ellos en el caso particular de una praxeología para la enseñanza en torno a la MFE.

En esta sección formularemos brevemente algunos de dichos problemas expresados mediante un conjunto de cuestiones referidas a las diferentes etapas de la estrategia metodológica en sí misma sin restringirnos al caso de la MFE, aunque en ocasiones lo tomaremos como ejemplo.

Dialéctica entre la formulación de un problema de la profesión docente y la toma en consideración de un fenómeno didáctico

En torno a la cuestión generatriz ***Q_0*-FP** del REI-FP surgen múltiples cuestiones:

- ✓ ¿Qué limitaciones tiene una formación del profesorado que no cuestione el modelo epistemológico dominante en las instituciones didácticas y reduzca el estudio de los problemas de la profesión docente a plantearse únicamente «cómo enseñar determinado ámbito del currículum escolar»?
- ✓ ¿Qué papel juega o podría jugar la investigación didáctica en la formulación de la cuestión ***Q_0*-FP** como punto de partida de los REI-FP?
- ✓ ¿Hasta qué punto y en qué forma es adecuado integrar en la formación de profesorado cierto análisis de los fenómenos didácticos que, según nuestra estrategia metodológica, permiten reformular los problemas docentes como problemas de investigación didáctica?

Cuestionamiento de la matemática escolar, análisis de los procesos transpositivos y caracterización del modelo epistemológico dominante en Secundaria

Para caracterizar el modelo epistemológico dominante en Secundaria (específico de cierto ámbito de la actividad matemática) se requiere un punto de vista, un sistema de referencia (relativo y provisional) desde el cual analizar y cuestionar la actividad matemática que se lleva a cabo en Secundaria en torno a dicho ámbito. Ahora bien, este sistema de referencia, que denominamos MER-S, es una hipótesis científica que se construye tomando como base empírica, entre otros elementos, la propia actividad matemática escolar y los fenómenos que emergen de la misma. Se plantea así la cuestión siguiente:

- ✓ ¿Cómo solventar en la práctica científica esta dependencia recíproca entre la construcción de un MER y el análisis de la actividad matemática escolar que dicho MER-S redefine?

En particular el MER-S puede modificar no sólo la estructura sino también la amplitud de la actividad matemática escolar habitual y sus relaciones con el resto de bloques o áreas del currículum. En esta situación:

- ✓ ¿Cómo recortar el ámbito de la matemática escolar para estudiar su evolución histórica y los procesos transpositivos correspondientes?

Construcción de un MER-S y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar en Secundaria

La construcción de un MER-S, esto es, de un MER que redefina cierto ámbito de la actividad matemática escolar y le asigne una razón de ser alternativa, cristaliza en una nueva *praxeología por enseñar* (en Secundaria). Esta praxeología por enseñar no se construye para que sea «diferente» o «innovadora» en relación con la que se propone oficialmente en el sistema escolar; su construcción, por el contrario, responde a un problema didáctico y está diseñada como un instrumento para favorecer la consecución de determinados objetivos matemático-didácticos preestablecidos de antemano. Surgen diversas cuestiones:

- ✓ ¿Cómo elegir esos nuevos objetivos matemático-didácticos que, de hecho, serán los que caracterizarán al MER-S?, ¿qué estatus asignar a dichos objetivos posibles?
- ✓ ¿Qué indicadores utilizar para constatar empíricamente si el MER-S permite efectivamente alcanzar (o, al menos, acercarse a) los nuevos objetivos matemático-didácticos?

Así, por ejemplo, en el caso descrito con detalle en el capítulo IV, los nuevos objetivos didácticos que el MER-S propugna consisten en superar el aislamiento de la proporcionalidad mediante su integración en la MFE y la consiguiente problematización y caracterización de los tipos de sistemas de variación.

Módulo M_0: estudio de un problema de la profesión docente

Una vez formulada, en el Módulo M_0 y en términos de un problema de la profesión docente, la cuestión generatriz del REI-FP, surgen diversas cuestiones:

- ✓ ¿Cuál ha de ser la participación de los formadores en la formulación de las cuestiones más específicas, derivadas de ***Q*$_0$-FP**, que son imprescindibles para precisar el significado de esta cuestión general?
- ✓ ¿De qué *media* deben disponer los estudiantes para llevar a cabo el análisis preliminar de la respuesta oficial aportada por el sistema educativo a la cuestión profesional ***Q*$_0$-FP**?
- ✓ ¿Deben los estudiantes realizar este trabajo de forma completamente autónoma?

- ✓ ¿Qué *medios* pueden utilizar los estudiantes para contrastar la validez de los resultados de sus análisis?
- ✓ En el proceso de cuestionamiento de la forma de organizar los contenidos escolares de un ámbito matemático concreto, ¿cómo justificar la necesidad o la conveniencia de modificar la correspondiente organización matemática escolar en torno a dicho ámbito en una dirección determinada?

Módulo M_1: vivir, en la formación del profesorado, un REI sustentado en un MER-S

En el Módulo M_1 se propone a los profesores en formación el estudio de una cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_1}$ que puede ser más o menos análoga a la que desencadenó el desarrollo de un REI experimentado en Secundaria. En nuestro caso se les planteó exactamente la misma cuestión sobre la construcción de *planes de ahorro* que se había presentado en su momento a los alumnos del cuarto curso de la ESO. En este punto aparecen dos cuestiones:

- ✓ ¿Quién debe decidir y con qué criterios la formulación de la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$ en cada proceso de formación?
- ✓ ¿En qué casos debe modificarse la $\boldsymbol{Q_1}$ formulada a los alumnos de Secundaria para adaptarla a la cultura matemática de los profesores en formación?

Los profesores en formación saben que el estudio de $\boldsymbol{Q_1}$ que se les propone en este Módulo M_1 es un primer paso para acabar construyendo posteriormente una respuesta a la cuestión $\boldsymbol{Q_0}$ **-FP** (en nuestro caso, a la cuestión sobre la organización de la enseñanza de la MFE en la ESO). Surge, por tanto, la siguiente cuestión:

- ✓ ¿Cómo relacionar explícitamente, en los inicios del proceso de formación y en particular en el Módulo M_1, estas dos cuestiones $\boldsymbol{Q_0}$ **–FP** y $\boldsymbol{Q_1}$, aparentemente tan alejadas y de diferente naturaleza?

Dado que en este Módulo M_1 se pretende que los estudiantes construyan por ellos mismos, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta que contenga en cierta forma a la proporcionada por los alumnos de Secundaria en la experimentación realizada previamente, surgen las siguientes cuestiones:

- ✓ ¿Cómo gestionar didácticamente en el ámbito de la formación del profesorado el estudio de la cuestión $\boldsymbol{Q_1}$ (en nuestro caso la cuestión sobre los Planes de

Ahorro), para que la respuesta de los profesores en formación contenga efectivamente la proporcionada previamente por los alumnos de Secundaria?

- ✓ ¿Qué instrumentos se deberían poner al alcance de los estudiantes para llevar a cabo este estudio y qué nivel de autonomía sería el más adecuado?

Módulo M_2: analizar en la formación del profesorado el REI vivido

El objetivo de este módulo consiste en que los profesores en formación, con vistas a construir una respuesta propia a la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_0}$**-FP**, analicen el REI vivido y tomando dicha vivencia como una respuesta provisional a $\boldsymbol{Q_0}$**-FP**, la utilicen como sistema de referencia para contrastarla con la respuesta que proponen los libros de texto y el currículum de Secundaria (analizada en el módulo M_0) y, también, con la que proporcionaron los alumnos de enseñanza secundaria en una experimentación anterior. Cabe plantearse entonces:

- ✓ ¿Qué términos, nociones nociones y herramientas matemático-didácticas pueden utilizar los estudiantes para describir y analizar la actividad matemática llevada a cabo a lo largo del REI vivido?
- ✓ ¿Qué papel juega el MER-S como generador de nociones necesarias para formular ciertas cuestiones y de cuestiones específicas cuyas respuestas serán útiles para llevar a cabo dicho análisis?

Por ejemplo, en el caso de la modelización funcional elemental, podemos considerar el estudio de cuestión tales como: ¿Se discuten los *diferentes tipos de relaciones funcionales* que pueden relacionar dos o más magnitudes?, ¿Se plantean situaciones en las que se tenga que *indagar el tipo de variación* que relaciona dos magnitudes o, por el contrario, el tipo de relación funcional está normalmente determinado de antemano?, o incluso, ¿Cuál es la *razón de ser* que se asigna a la proporcionalidad (en el REI vivido y en la matemática escolar habitual)?. Se trata de cuestiones importantes para llevar a cabo el análisis del REI vivido, pero son difícilmente planteables sin un conocimiento del MER-S, ya que se desprenden de éste MER-S.

Surge así un problema crucial:

- ✓ ¿En qué medida y en qué forma el MER-S debe ser explicitado en el Módulo M_2 para que los profesores en formación puedan utilizarlo como instrumento de análisis de la actividad matemática?

Construcción de un MER-FP y de la correspondiente praxeología matemática para la enseñanza

Como culminación del análisis del REI vivido y, en especial, como resultado del análisis de la actividad matemática desarrollada, la comunidad de estudio, de manera colaborativa, construye una versión de una praxeología matemática para la enseñanza en torno a cierto ámbito de la matemática escolar. Se trata de una praxeología cuyo estudio (o reconstrucción) proporcionará algunos de los conocimientos necesarios no sólo para delimitar, interpretar y cuestionar la praxeología *por enseñar* que aparece en Secundaria en torno a la proporcionalidad y las relaciones funcionales, sino también para diseñar y gestionar una *nueva praxeología por enseñar* sustentada en el MER-S.

Si llamamos «problemática básica» de una praxeología *para la enseñanza* a la integrada por las cuestiones que ya formaban parte de la correspondiente praxeología *por enseñar* experimentada en Secundaria, aparecen las siguientes cuestiones:

- ✓ ¿Cómo elegir las cuestiones que, aunque no pueden formularse en Secundaria, requieren respuestas que son útiles para delimitar la praxeología por enseñar, dar cuenta de su razón de ser y relacionarla con las restantes áreas del currículo?
- ✓ ¿En qué direcciones ampliar dicha problemática básica, integrada por cuestiones que pueden ser formuladas en Secundaria y que cristalizan en la nueva praxeología por enseñar (sustentada en el MER-S), para construir el MER-FP que cristalizará en una praxeología para la enseñanza?

Dado que las respuestas a las cuestiones que generan la praxeología para la enseñanza, y hasta las propias cuestiones están muy relacionadas con los criterios y principios para construir el MER-S, resurge de nuevo el problema didáctico del papel que debería jugar la explicitación del MER-S en el proceso de formación del profesorado.

Digamos, para acabar, que una vez construido un modelo epistemológico de referencia de una *praxeología para la enseñanza* (MER-FP) mediante una determinada ampliación del MER-S, será posible llevar a cabo una modalidad de formación del profesorado que no hemos desarrollado en esta memoria y cuya puesta en marcha provocará, sin duda, nuevas cuestiones y problemas abiertos. Esta modalidad consiste en asignar a un MER-FP (por ejemplo, el esquematizado en el Mapa de los Planes de ahorro) y a las sucesivas versiones que pudiesen construirse, el mismo papel, respecto de la formación del profesorado, que el que juega un MER-S (por ejemplo el descrito en García, 2005) respecto de la formación de los alumnos de ESO. Esto significa que, en futuros procesos de formación del profesorado, se podrá utilizar como punto de partida el MER-FP que hemos descrito para sustentar diferentes REI en la institución de formación del profesorado, sin que sea imprescindible (aunque en muchos casos pueda ser recomendable) que los profesores en formación vivan previamente un REI basado en el MER-S.

REFERENCIAS

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., Sabena, C. y Soury-Lavergne, S. (2013). The meta-didactical transposition: a model for analysing teachers education programs. *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Kiel, Germany: PME. Recuperado de http://www.pme2013.de/en/documents/rf4-1

Artaud, M. (2007) La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fontions. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp.). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Artigue, Bosch y Gascón, 2011 Artigue, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l'interaction entre cadre théoriques en didactique des mathématiques. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, … y M. Larguier (Eds.), Un panorama de la TAD (pp. 33-55). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Azcárate P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En Castor E., De la Torre E. (eds.) *Investigación en Educación Matemática. VIII Simposio de la SEIEM.* A Coruña: Universidade da Coruña. Recuperado el 20 de mayo de 2009 en http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper prepared based on keynote address at the *43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik*, Oldenburg, Germany, March 1-4.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 573-594). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemá-ticas escolares. *Monografía del seminario matemático García de Galdeano, 29*. Departamento de Matemáticas, Universidad

Bolea P., Bosch M. y Gascón J. (2001). La transposición didáctica de Organizaciones Matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 125-133.

Bosch M. (1994): La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona

Bosch, M. (2012) Recorridos de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: el grupo TAD. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp.23-47). Jaén: SEIEM.

Bosch M. y Gascón J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch Casabò, M y Ruiz-Olarría, A. (2011). Un parcours d'étude et de recherche en formation initial des professeurs : le cas des «réductions progressives», *Actes de la 16e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 415-420). Grenoble: La pensé Sauvage.

Brousseau G. (1983) Les obstacles ́épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué puede aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de matemáticas? *Enseñanza de las Ciencias*, *9*(1), 10-21.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué puede aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de matemáticas? *Enseñanza de las Ciencias*, *8*(3), 259-267.

Brousseau, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94*: Washington.

Brouseau, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990*. En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield (Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Le calcul «a la plume» des multiplications et des divisions elementaires*. ARDM. Recuperado de http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie1.pdf

Brousseau, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N*, *85*(2), 13-41.

Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001) El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática**.** En P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013) Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8) (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University.

Castillo (2001) CASTILLO CLAVERO, A. M. (2001): «Cooperación internacional en la sociedad del conocimiento: la dimensión estratégica del papel de las universidades», LI Convención Anual de Asovac, Encuentro sobre Cooperación e Integración Internacional, Ed. en CD-Rom. San Cristóbal, Táchira, Venezuela.

Catalán Fernández, A. y Forteza Forteza, D. (2011). *La formació inicial del professorat d'educació secundària. Passat i present*. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3742329

Chevallard Y. (1991). La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.(2ª ed.). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5,* 51-94.

Chevallard, Y. (1988) Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation. Publications de l'IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 25,* 5-38.

Chevallard, Y. (1991): Didactique, anthropologie, mathématiques, Postfacio a la 2ª edición de La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999). Enseignement des mathématiques et besoins professionnels. Le cas des élèves-instituteurs, *XVI colloque inter-IREM des PEN et autres formateurs d'instituteurs en mathématiques*, Bordeaux. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard Y. (2001a). Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2001b): Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions *Actes de la 16e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. ¿ ?). Grenoble: La pensé Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle Epistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard Y. (2005). La didactique dans la cité avec les autres sciences. Contribution au *symposium de didactique comparée*, Montpellier, 15 et 16 septembre 2005. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard Y. (2007a). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica*. (pp. 705- 746). Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard Y. (octubre 2010) L'échec splendide des IUFM et l'interminable passion du pédant. Quel avenir pour le métier de professeur ? Conférence inaugurale du *Colloque Regards des didactiques des disciplines sur les pratiques et la formation des enseignants* organisé par le Gridife (Toulouse, France). Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=179yvar_recherche=l %27% E9chec+splendide

Chevallard, Y. (2012) Des programmes, oui. Mais pour quoi faire? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. En *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège*. Lyon: Educmath, 2012.Recuperado de:
http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-chevallard

Chevallard Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal ofResearch in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. doi: 10.4471 /redimat.2013.26

Chevallard Y. y Bosch M. (2000), Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*. 55 5-32.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation. *Recherches en Didactique des Mathématiques (special issue).*

Chevallard, Y., Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. *Recherche et Formation pour les professions de l'éducation, 60*, 51-62. Recuperado de http://rechercheformation.revues.org/584

Cid, E. (2000) *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Actas del XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Boletín del SI-IDM, 10. Recuperado de
http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Cid, E. (2002), Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, 2, 529-542.

Cid, E. (2003) La investigación didáctica sobre los números negativos: Estado de la cuestión. Pre-publicaciones del Seminario matemático *García de Galdeano* nº 25. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. y Bolea, P. (2010) Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), (pp. 575-594) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier: Université de Montpellier.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, … y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

Cirade, G. (2006). Devenir professeur de mathèmatiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel (Tesis doctoral). Université de Provence, Marsella. Recuperado de http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709

Cirade, G. (2012). La formation des professeurs : entre analyse de praxéologies professionnelles et étude de problèmes de la profession. En J.-L. Dorier y S. Coutat (Eds), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT2, pp. 314-323). Recuperado de http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.

Da Ponte J. P. (2004). Investigar a nossa pròpria prática: uma estrégia de formação e de construção do conhecimiento profissional. En E. Castor y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*. VIII Simposio de la SEIEM. A Coruña: Universidade da Coruña. Recuperado de http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm.

Education Committee of the EMS (2012). It is Necessary that Teachers are Mathematically Proficient, but is it Sufficient? Solid Findings in Mathematics Education on Teacher Knowledge. *Newsletter of the European Mathematical Society*, *83*, 46-50.

España (1970). *Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa*. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/1970/08/06/pdfs/A12525-12546.pdf

España (1971). *Orden de* 8 *de julio de* 1971 *sobre actividades docentes de los Institutos de Ciencias de la Educación en relación con la Formación pedagógica de los universitarios*. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/1971/08/12/pdfs/A13170-13170.pdf

España (1990). *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo*. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/1990/10/04/pdfs/A28927-28942.pdf

España (1995). *Real decreto* 1692/1995, *de* 20 *de octubre*, *por el que se regula el título profesional de especialización didáctica.* Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/1995/11/09/pdfs/A32569-32574.pdf

España (2002). *Ley Orgánica* 10/2002*, de* 23 *de diciembre, de Calidad de la Educación*. Recuperado de http://www.boe.es/boe/dias/2002/12/24/pdfs/A45188-45220.pdf

España (2003). *Real decreto* 325/2003*, de* 14 *de marzo, por el que se modifica el Real Decreto* 1692/1995*, de* 20 *de octubre, que regula el título profesional de Especialización Didáctica*. Recuperado de http://www.boe.es/boe/dias/2002/12/24/pdfs/A45188-45220.pdf

España (2005). R*eal decreto* 55/2005*, de 21 de enero, por el que se establece la estructura de las enseñanzas universitarias y se regulan los estudios universitarios oficiales de Grado*. Recuperado de http://www.boe.es/boe/dias/2005/01/25/pdfs/A02842-02846.pdf

España (2005). *Real Decreto 56/2005, de 21 de enero, por el que se regulan los estudios universitarios oficiales de Posgrado*. Recuperado de http://www.boe.es/boe/dias/2005/01/25/pdfs/A02842-02846.pdf

España (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf

España (2007). *Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas*. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2007/12/29/pdfs/A53751-53753.pdf

España (2007). *Real Decreto* 1393/2007*, de* 29 *de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales*. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2007/10/30/pdfs/A44037-44048.pdf

España (2007). *Resolución de 17 de diciembre de* 2007*, de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación, por la que se publica el Acuerdo de Consejo de Ministros de* 14 *de diciembre de* 2007*, por el que se establecen las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos que habiliten para el ejercicio de las profesiones reguladas de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas*. Recuperado de http://www.boe.es/boe/dias/2007/12/21/pdfs/A52851-52852.pdf

España (2008). *Real Decreto* 1834/2008*, de* 8 *de noviembre, por el que se definen las condiciones de formación para el ejercicio de la docencia en la educación secundaria obligatoria, el bachillerato, la formación profesional y las enseñanzas de régimen especial y se establecen las especialidades de los cuerpos docentes de enseñanza* secundaria. Recuperado de http://www.boe.es/boe/dias/2008/11/28/pdfs/A47586-47591.pdf

Etzioni, A. (1969). The semi-professions and their organization: teachers, nurses, social workers. Nueva York: Free Press.

Fennema, E. Carpenter, T. P. y Peterson, P. L. (1989): Teachers' decision making and cognitively *guided* instruction: A new paradigm for curriculum development. En N. F. Ellerton y M. A. (Ken) Clements (Eds.), *School Mathematics: The Challenge to Change* (pp. 174-187). Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Fennema, E. y Loef, M. (1992). Teacher' Knowledge and its impact. En Grows D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematicis Teaching and Learning* (pp. 147-163). Nueva York: MacMillan.

Fernández *Domínguez*, J. y Muñoz, J. (2011). Aritmética y álgebra. En J. M. Goñi (Ed.), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp. 57-78). Barcelona: Graó.

Fernández, S. y Figueiras, L (2011). Implicación afectiva y evolución de estrategias de resolución de problemas de conteo en la transición de primaria a secundaria (Affective Involvement and Evolution of Solving Strategies on Counting Problems in the Transition from Primary to Secondary Education). *PNA*, *5*(4), 147-161.

Fonseca, C., Gascón, J. y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME*, *17*(3), 289-318.

Font V., Rubio N., Giménez-Rodríguez J. y Planas N. (2009). Competencias profesionales en el máster de profesorado de secundaria *Uno*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *51*, 9-18.

Font, V. (2011). Funciones. En J. M. Goñi (Ed.), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-186). Barcelona: Graó.

Font, V. y Adán., M.(2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 283-291). Bilbao: SEIEM.

García M., Sánchez V. y Escudero I. (2006). Learning through reflexión in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 1-17.

García, F. J. (2005). La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Jaén.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 38*(3), 226-246.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée », *Petit x*, *37*, 43-63.

Gascón, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1), 7-34.

Gascón, J. (1999a): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega. (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid: SEIEM.

Gascón, J. (1999b): "Didactique fondamentale" versus "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, pp. 152-170, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Gascón, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*: *RELIME, 4*(2), 129-159.

Gascón, J. (2002a). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *5*(3), 673-698.

Gascón, J. (2002b). Geometría *sintética* en la E.S.O. y *analítica* en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma. Revista sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, 39*, 13-25.

Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programmes, *For the Learning of Mathematics, 23*(2), 44-55.

Gascón, J. (2004). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, *45*; 41-52.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *RELIME*, *14*(2), 203-231.

Gascón J., Bosch M. (2007). La miseria del "generalismo pedagógico" ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica* (pp. 201- 240). Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Goñi, J. M. (Ed.). (2011). Matemáticas. Complementos de formación disciplinar. Barcelona: Graó.

Hill, H. C., y Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal of Research in Mathematics Education*, *35*, 330-351.

Klein, F. (2006) *Matemática elemental desde el punto de vista superior*. (Trad., J. Fernández). Madrid: Nivola. (Obra origina publicada en 1905).

Koehler, M. S. y Grouws, D. A. (1992): Mathematics Teaching Practices and Their Effects. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 115-126). New York: Mac Millan.

Lakatos, I. (1974). Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales. Madrid: Tecnos.

Lebesgue, H. (1995) *La medida de las magnitudes.* México: Limusa. (Obra original publicada en 1915).

Leinhardt, G., y Greeno, J. G. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology, 78*(2) 75-95.

Llinares S. (2004). Investigación sobre formación de profesores. En E. Castor y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. VIII Simposio de la SEIEM.* Universidade da Coruña. Recuperado de

http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas *Educación Matemática*, *20*(3), 31-54.

Lucas, C., Fonseca, C. y Gascón, J. (en prensa). La modelización funcional y la razón de ser del cálculo diferencial elemental en la enseñanza secundaria, *IV^e^ congrès international sur la TAD*

Lucas, C., Fonseca, C. y Gascón, J. (en prensa). La modelización funcional y la razón de ser del cálculo diferencial elemental en la enseñanza secundaria, *IV^e^ congrès international sur la TAD*

Margolinas, C. y Perrin-Glorian, M. J. (1997): Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(3), 7-16.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Granada: SAEM Thales

Pujol, R. Geometría. En J. M. Goñi (Ed.), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp. 117-143). Barcelona: Graó.

Rodríguez, E., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). ¿Qué papel se asigna a la resolución de problemas en el actual currículum de matemáticas? En C. de Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 95-118). Barcelona: Edebé.

Rodríguez Quintana, E. (2006). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, …y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. special. Enseignement de l'algèbre élémentaire. RDM, 87-106.

Schoenfeld, A. H. (2000): Models of the Teaching Process, *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261.

Semiprofession. (s.f.). Recuperado 19/12/2015 de Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Semiprofession

Serramona J. (2003). La enseñanza como profesión. *Educació Física. Lectures curtes.* http://www.*educaciofisica*.com/1.laenseñanzacomoprofesion.htm

Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987): Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado de www.ucm.es/BUCM/2009.htm

Sierra, T. A., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática. El caso del algoritmo de la multiplicación. *BOLEMA, 27*(47), 805-828.

Sierra, T. Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los Sistemas de Numeración. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Matemáticas, Escuela y Sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 359-381), Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén.

Sosa, L. y Carrillo, L. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M. Moreno, A. Estrada, J.

Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Thompson, A. G. (1992). Teachers beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). Nueva York: MacMillan.

Tribó Travería, G. (2008). El nuevo perfil profesional de los profesores de secundaria. *Educación* xx1, *11*(0), 183-209.

Universidad Autónoma de Madrid. (2014). *Resolución de* 24 *de febrero de* 2014, *de la Universidad Autónoma de Madrid*, *por la que se publica el plan de estudios de Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato*. Recuperado de http://www.uam.es/ss/Satellite?blobcol=urldatayblobheader=application%2Fpdfyblobheadername1=pragmayblobheadervalue1=attachment%3B+filename%3DBOE_MESOB.pdfyblobheadervalue2=publicyblobkey=idyblobtable=MungoBlobsyblobwhere=1242770836927yssbinary=true.

Universidad Autónoma de Madrid. (2014). Universidad Autónoma de Madrid - Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Recuperado de

http://www.uam.es/ss/Satellite/FProfesorado/es/1242657363782/1242669339504/estudio/detalleGrado/Master_Universitario_en_Formacion_de_Profesorado_de_Educacion_Secundaria_Obligatoria_y_Bachillerato.htm.

Universidad Complutense de Madrid. (2014). *UCM-Máster Universitario en Formación del Profesorado de ESO y Bachillerato*, *FP y Enseñanzas de Idiomas*. Recuperado de http://www.ucm.es/masterformacionprofesorado.

Universidad de Murcia. (2014). Máster Universitario en Formación del Profesorado Facultad de Educación - Universidad de Murcia. Recuperado de http://www.um.es/web/educacion/contenido/estudios/masteres/master-secundaria.

Universidat Autònoma de Barcelona. (2014). Màster Universitari Formació de Professorat d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes (Especialitat de Matemàtiques) - UAB Barcelona. Recuperado de http://www.uab.*cat*/web/informacio-academica-dels-masters-oficials/l-oferta-de-masters-oficials/informacio-general/formacio-de-professorat-d-educacio-secundaria-obligatoria-i-batxillerat-formacio-professional-i-ensenyaments-d-idiomes-especialitat-de-matematiques-1096480139517.html?param1=1345658530548.

ANEXO 1

TALLER DE DESCUENTOS PROGRESIVOS

Somos consultores matemáticos y nos llegan cuestiones o problemas que la gente se plantea. Nuestro trabajo consiste en estudiar estas cuestiones y entregar un informe en un plazo determinado. Nosotros haremos tres reuniones de trabajo de dos horas cada una para estudiar el encargo y elaborar la respuesta. Debemos organizar el tiempo y las tareas para este propósito. Alicia es la responsable de la consultoría y vosotros los técnicos. La gestión empresarial moderna aconseja que no haya jerarquías, que se compartan las responsabilidades y que los temas se discutan y acuerden entre todos.

Primero, Alicia nos presenta la cuestión y luego discutiremos entre todos el camino a seguir. Creemos que puede ser eficaz aprovechar los grupos de trabajo que han venido funcionando hasta ahora porque ya os conocéis, tenéis una dinámica establecida que será más productiva que si empezamos desde cero.

CUESTIÓN INICIAL

Una tienda de venta de alimentos ecológicos on-line aplica a los clientes el siguiente tipo de descuentos:

- 1% si el importe de la compra supera los 70 €
- 2% si el importe de la compra supera los 80 €
- 3% si el importe de la compra supera los 90 €
- 4% si el importe de la compra supera los 100 €
- 5% si el importe de la compra supera los 125 €
- 6% si el importe de la compra supera los 150 €
- 7% si el importe de la compra supera los 175 €
- 8% si el importe de la compra supera los 200 €

El cliente (que puede ser una escuela, una asociación cultural, un restaurante, etc.) nos plantea algunas cuestiones cuyas respuestas les ayudarán a tomar decisiones sobre el coste inicial que más les interesa. Se preguntan, entre otras cosas, ¿en qué casos puede ser más conveniente hacer un pedido cuyo coste inicial supere levemente los costes fronterizos que determinan un cambio en el porcentaje del descuento? ¿Qué política de compras es la más conveniente?

La consultora después de estudiar la situación observa que el problema planteado es un caso particular de una situación socialmente bastante general determinada por una sucesión de descuentos o impuestos escalonados por intervalos. A la consultora le interesa estudiar el caso general para poder dar respuesta a ésta y a otras consultas posibles y, para ello, propone en primera instancia ampliar la situación y hacer un estudio más general.

Una posible manera de empezar a abordar el problema es situándose en un caso más simple que el citado anteriormente, trabajando con intervalos regulares (de la misma longitud). Este estudio permitirá abordar el caso de los alimentos ecológicos tratándolo en dos partes (intervalos de longitud 10 e intervalos de longitud 25). Empezaremos suponiendo que los descuentos varían por intervalos de 10, del modo siguiente:

- 1% si el importe de la compra supera los 70 €
- 2% si el importe de la compra supera los 80 €
- 3% si el importe de la compra supera los 90 €
- 4% si el importe de la compra supera los 100 €
- 5% si el importe de la compra supera los 110 €
- 6% si el importe de la compra supera los 120 €
- 7% si el importe de la compra supera los 130 €
- 8% si el importe de la compra supera los 140 €
- 9% si el importe de la compra supera los 150 €
- 10% si el importe de la compra supera los 160 €
- 11% si el importe de la compra supera los 170 €
- 12% si el importe de la compra supera los 180 €
- 13% si el importe de la compra supera los 190 €
- 14% si el importe de la compra supera los 200 €

Una posible primera manera de empezar a abordar el problema es estudiar la relación entre los costes finales (con descuento) y los costes iniciales si el importe de la compra supera los 70 €.

Posible resultado de la exploración inicial

Q_0: Si el importe de la compra está próximo a una de las cantidades "fronterizas" del tipo de descuento (70€, 80€, etc.), ¿sale a cuenta incrementar el coste inicial (sin descuento) para obtener un descuento mayor? ¿Es posible, incluso, que el coste final (con descuento) disminuya al aumentar un poco el coste inicial de manera que rebase levemente la cantidad "frontera"?

- ¿~~Cómo pueden cuantificarse las ventajas de aumentar el coste inicial? Esto es,~~ ¿cómo varía el coste final de cada euro añadido al coste inicial a medida que éste aumenta? Dicho con otras palabras, ¿cómo varía el "coste relativo" al aumentar el coste inicial?

- En enero, la tienda aumentó un punto porcentual cada descuento. ¿Cómo incide este cambio en cada una de las cuestiones anteriores?

- ¿Qué ventajas tiene este tipo de descuento para la tienda? ¿Qué pasaría si se cambian los intervalos y la escala de los porcentajes de los descuentos?

INTERVALOS DE MISMA AMPLITUD Y CASO DISCRETO ("rama IMAdiscreto")

Empezaremos formulando una pregunta bastante general:

> **Q_1:** ¿Cómo se comportan los costes finales (con descuento) con respecto a los costes iniciales? Esto es, a medida que aumenta el coste de la compra, ¿cómo varía éste al aplicar el descuento?

Para estudiar esta cuestión, vamos a mirar qué ocurre en los valores "frontera": 70 €, 80 €, 90 €, etc., valores a partir de los cuales el descuento aumenta 1 punto porcentual. Este caso corresponde a lo que podemos llamar el "caso de costes discreto".

Para simplificar, empezaremos considerando que los productos se adquieren en cantidades cuyo coste es siempre un múltiplo de 10. Esto significa que nos situamos, inicialmente, en el **caso discreto**.

Designaremos con:

- I el coste inicial (que aquí toma los valores 70, 80, 90, etc. por lo dicho anteriormente)
- p el porcentaje de descuento
- D el descuento resultante
- F el coste final
- Var (F) la diferencia entre dos valores consecutivos de F.
- Var_2 (F) la diferencia entre dos valores consecutivos de Var (F).

Podemos introducir estos valores en una tabla Excel y obtenemos:

I	**p**	**D**	**F**	**Var(F)**	**Var_2(F)**
70	0%	0,00	70,00	-	-
80	1%	0,80	79,20	9,20	-
90	2%	1,80	88,20	9	– 0,20
100	3%	3,00	97,00	8,80	– 0,20
110	4%	4,40	105,60	8,60	– 0,20
120	5%	6	114,00	8,40	– 0,20
130	6%	7,8	122,20	8,20	– 0,20
140	7%	9,8	130,20	8,00	– 0,20
150	8%	12	138,00	7,80	– 0,20
160	9%	14,4	145,60	7,60	– 0,20
170	10%	17	153,00	7,40	– 0,20
180	11%	19,8	160,20	7,20	– 0,20
190	12%	22,8	167,20	7	– 0,20
200	13%	26	174,00	6,80	– 0,20
210	14%	29,4	180,60	6,60	– 0,20

¿Qué nos dice esta tabla?

R_1: Vemos que, obviamente, los descuentos D crecen cada vez más (tipos mayores sobre cantidades mayores), por lo que los costes finales F crecen cada vez menos. Con más precisión, se observa que ~~las diferencias entre~~ los valores de Var (F) siguen una progresión aritmética decreciente de diferencia – **0,20**. Por lo tanto, cada vez que el coste inicial aumenta en 10 €, la variación respectiva de los costes finales disminuye en 0,20 €.

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN SEGUNDA DE LOS COSTES FINALES ("rama VSCFdiscreto")

Surgen nuevas preguntas:

Q_2: ¿Qué relación tiene la diferencia constante de – **0,20** con la escala de descuentos 1%, 2%, 3%, etc.? ¿Qué pasaría si la escala de descuentos porcentuales fuera otra como, por ejemplo, 0,5%, 1%, 1,5%, 2%, etc.? ¿Cómo cambiaría dicha diferencia si se modificara la longitud L de los intervalos de costes iniciales (por ejemplo si la longitud fuera de L = 15 en lugar de 10)?

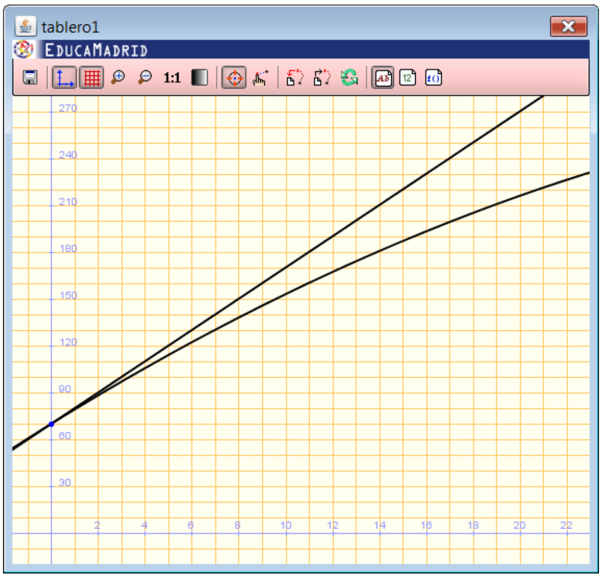
Para estudiar la relación entre las variaciones de F, Var (F), y el porcentaje p de descuento, vamos a expresar las magnitudes de la tabla anterior de forma algebraica, esto es, como términos generales de sucesiones. Escribiremos los costes iniciales I en función de *n*, siendo *n* el valor porcentual de descuento aplicado a un coste inicial de:

$$I(n) = 70 + 10\cdot n \quad (n = 0, 1, 2, 3,\ldots 14)$$

En consecuencia, los costes finales son:

$$F(n) = I(n)\cdot(1 - n/100) = (70 + 10\cdot n)(1 - n/100) = -0{,}10n^2 + 9{,}3n + 70$$

Utilizamos la calculadora simbólica Wiris para obtener las gráficas correspondientes a las funciones I(n) y F(n):



¿Qué nos muestra la gráfica? Podemos observar que, mientras los costes iniciales se sitúan en una recta respecto a la variable independiente n, los costes finales se sitúan en una parábola de “amplitud” a = – 0,10. Se ve así que los costes finales crecen según una parábola cuyo vértice es un máximo, y las diferencias Var(F), en consecuencia, van disminuyendo.

El hecho de que las **segundas variaciones** Var_2 (F) sean constantes e igual a – 0,20, tiene su origen en el resultado siguiente:

> Si $\{x_i\}$ es una progresión aritmética de diferencia d, las diferencias segundas de la sucesión $\{f(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c\}$ son constantes e iguales a $2ad^2$. En nuestro caso, la variable independiente es n y d = 1, por lo tanto, $2ad^2 = 2\ (-0{,}1)\cdot 1^2 = -0{,}20$.

En efecto, si tomamos tres valores consecutivos $x_i - d$, x_i, $x_i + d$, y calculamos sus correspondientes imágenes, obtenemos:

Primeras diferencias:	$a(x_i + d)^2 + b(x_i + d) + c - a\,x_i^2 - b\,x_i - c = ad^2 + 2a\,x_i\,d + bd$
	$a\,x_i^2 + b\,x_i + c - a(x_i - d)^2 - b(x_i - d) - c = -\ ad^2 + 2a\,x_i\,d + bd$
Segundas diferencias:	$2ad^2$

Si la sucesión de descuentos se iniciara con un 0,5% (para I = 80 €) y continuara de 0,5 en 0,5 puntos porcentuales, la variación de dos valores consecutivos de Var (F) sería:

$$F(n) = I(n)\cdot(1 - 0{,}5\cdot n/100) = (70 + 10\cdot n)(1 - 0{,}5n/100) = -0{,}05n^2 + 9{,}65n + 70$$

$$Var_2\ (F) = 2ad^2 = 2\cdot(-0{,}05)\cdot(0{,}5)^2 = -0{,}025$$

Es evidente la “forma” en que F(n) depende de la diferencia **d** de la progresión aritmética de descuentos, ya que:

$$F(n) = I(n)\cdot(1 - d\cdot n/100) = (70 + 10\cdot n)(1 - d\cdot n/100) = -d/10\cdot n^2 =$$

$$-(d/10)\cdot n^2 + (10 - 0{,}7\cdot d)\cdot n + 70$$

En consecuencia, los puntos de F(n) se sitúan siempre en una parábola de amplitud –d/10 cuyas diferencias segundas, como se ha demostrado más arriba, son constantes e iguales a $2\cdot(-d/10)\cdot d^2 = -2\cdot d^3/10$.

Para dar respuesta a la cuestión sobre la relación entre Var_2 (F) y la amplitud de los intervalos, supongamos en primer lugar que ésta sea de L = 15 y que volvemos a la sucesión inicial (1%, 2%, 3%, …, 14%) de descuentos porcentuales.

Las funciones de coste inicial y coste final, respectivamente, son:

$$I(n) = 70 + 15\cdot n \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots, 14)$$

$$F(n) = I(n)\cdot(1 - n/100) = (70 + 15\cdot n)(1 - n/100) = -0{,}15n^2 + 14{,}3n + 70$$

Luego:

$$Var_2 (F) = 2ad^2 = 2\cdot(-0{,}15)\cdot 1^2 = -0{,}30.$$

Si la longitud de los intervalos de descuento constante es L (donde L será un número natural), la amplitud de la parábola sobre la que se sitúan los puntos de la gráfica de

$$F(n) = (c + L\cdot n)(1 - n/100)$$

es igual a – L/100.

R_2: Concluimos que si la sucesión de descuentos sigue una progresión aritmética de diferencia d, la variación segunda de F es constante con valor $-2\cdot d^3/10$, en el caso de que la longitud de los intervalos de descuento sea 10.
Cuando los intervalos de descuento constante tienen una amplitud L, la variación segunda de F tiene un valor constante e igual a $-2\cdot L/100$, en caso de tener una sucesión de descuentos porcentuales de 1, 2, ….14.

Parece natural preguntarse por la relación existente entre la escala de descuentos, la amplitud de los intervalos donde se producen y la variación segunda de F. Esto es:

Q_{21}: ¿Cómo depende Var_2 (F) de la sucesión de descuentos porcentuales $p(n) = n\cdot d$ y de la sucesión de costes iniciales $I(n) = 70 + L\cdot n$, siendo ambas sucesiones aritméticas? ¿Cómo se puede interpretar esta dependencia?

Para responder a esta nueva cuestión, consideremos la sucesión de costes iníciales $I(n) = 70 + L\cdot n$, donde L designa la amplitud máxima del intervalo donde el descuento no varía, y la sucesión de descuentos $p(n) = n\cdot d$, (n = 0, 1, ...,14; d > 0)

En esta situación, los costes finales vienen dados por $F(n) = (70 + L\cdot n)\cdot(1 - n\cdot d/100)$.

La amplitud de esta parábola es igual a $-d\cdot L/100$ y según el resultado obtenido anteriormente,

$$Var_2 (F) = 2\cdot(-d\cdot L/100)\cdot d^2 = -2\cdot d^3\cdot L/100$$

Como se puede observar, esta variación segunda es constante para valores dados de la diferencia d (de la progresión aritmética) y de la longitud del intervalo L de costes iniciales, donde los descuentos se mantienen constantes.

R_{21}: Como respuesta a **Q_{21}** podemos afirmar que Var_2 (F) siempre es constante cuando se consideran intervalos de descuento de la misma longitud y la sucesión de los porcentajes de descuento es una progresión aritmética.
Además, si **L** es la longitud referida y **d** la diferencia de la progresión aritmética de los porcentajes de descuentos, Var_2 (F) = $-\ 2 \cdot d^3 \cdot L/100$.
El signo negativo de Var_2 (F) nos dice que los costes finales cada vez crecen "más despacio"; y su carácter (de valor) constante nos dice que el ritmo de decrecimiento es siempre el mismo (e igual a $2 \cdot d^3 \cdot L/100$.

AUMENTOS DE 1€ Y 2€ EN LOS PUNTOS FRONTERA ("rama PF")

Hasta ahora hemos visto el comportamiento de los precios finales en los puntos frontera, esto es, en los puntos $70 + 10 \cdot n$, donde los descuentos van aumentando un punto porcentual con los sucesivos valores de n. Nos proponemos, ahora, estudiar qué pasa cuando los incrementos son inferiores a 10 €, ya que que los descuentos se mantienen constantes en cada intervalo $(70 + 10 \cdot n, 70 + 10 \cdot (n + 1)]$.

Así, volvemos a considerar la situación descrita por la tabla

- 1% si el importe de la compra supera los 70 €
- 2% si el importe de la compra supera los 80 €
- 3% si el importe de la compra supera los 90 €
- 4% si el importe de la compra supera los 100 €
- 5% si el importe de la compra supera los 110 €
- 6% si el importe de la compra supera los 120 €
- 7% si el importe de la compra supera los 130 €
- 8% si el importe de la compra supera los 140 €
- 9% si el importe de la compra supera los 150 €
- 10% si el importe de la compra supera los 160 €
- 11% si el importe de la compra supera los 170 €
- 12% si el importe de la compra supera los 180 €
- 13% si el importe de la compra supera los 190 €
- 14% si el importe de la compra supera los 200 €

Y retomamos las cuestiones iniciales:

Q_3: Si el importe de la compra está próximo a una de las cantidades "fronterizas" del tipo de descuento (70€, 80€, etc.), ¿sale a cuenta incrementar el coste inicial (sin descuento) para obtener un descuento mayor? ¿Es posible, incluso, que el coste final (con descuento) disminuya al aumentar un poco el coste inicial de manera que rebase levemente la cantidad "frontera"?

Hacemos una simulación numérica en los "valores frontera" de los costes iniciales, es decir, 70€, 80€, etc.

TABLA 1: Incrementos de 1€ a partir de los “puntos frontera”

I	p	D	F	Var(F)
70 71	0 1%	0,00 0,71	70,00 70,29	0,29
80 81	1% 2%	0,80 1,62	79,20 79,38	0,18
90 91	2% 3%	1,80 2,73	88,20 88,27	0,07
100 101	3% 4%	3,00 4,04	97,00 96,96	–0,04
110 111	4% 5%	4,40 5,55	105,,60 105,45	–0,15
120 121	5% 6%	6,00 7,26	114 113,74	–0,26
130 131	6% 7%	7,80 9,17	122,20 121,83	–0,37
140 141	7% 8%	9,80 11,28	130,20 129,72	–0,48
150 151	8% 9%	12,00 13,59	138,00 137,41	–0,59
160 161	9% 10%	14,40 16,10	145,60 144,90	–0,7
170 171	10% 11%	17,00 18,81	153,00 152,19	–0,81
180 181	11% 12%	19,80 21,72	160,20 159,28	–0,92
190 191	12% 13%	22,80 24,83	167,20 166,17	–1,03
200 201	13% 14%	26,00 28,14	174,00 172,86	–1,14

¿Qué nos muestra la tabla?
En la tabla se puede ver que I = 101 es el primer valor para el que el coste final F = 96,96 es inferior al coste final F = 97 correspondiente al valor I = 100.

Se podían haber previsto resultados para algunas de las cantidades. Por ejemplo, entre 70 y 71 € sabemos que un descuento de un 1% nunca se va a compensar con el incremento de 1€. Tiene sentido que la compensación aparezca a partir de 100 €.

¿Y si el incremento fuera de 2 € en un entorno de los puntos frontera?

TABLA 2: Costes finales para costes iniciales que se diferencian en 2 €

I	P	D	F	I	P	D	F
69	0%	0,00	69	70	0%	0,00	70,00
71	1%	0,71	70,29	72	1%	0,72	71,28
79	1%	0,79	78,21	80	1%	0,8	79,20
81	2%	1,62	79,38	82	2%	1,64	80,36
89	2%	1,78	87,22	90	2%	1,80	88,2
91	3%	2,73	88,27	92	3%	2,76	89,24
99	3%	2,97	96,03	100	3%	3,00	97,00
101	4%	4,04	96,96	102	4%	4,08	97,92
109	4%	4,36	119	110	4%	4,40	105,60
111	5%	5,55	105,45	112	5%	5,60	106,40
119	5%	5,95	113,05	120	5%	6,00	114,00
121	6%	6,26	113,74	122	6%	7,32	114,68
129	6%	7,74	121,26	130	6%	7,80	122,20
131	7%	9,17	121,83	132	7%	9,24	122,76
139	7%	9,73	129,27	140	7%	9,80	130,20
141	8%	11,28	129,72	142	8%	11,28	130,64
149	8%	11,92	137,08	150	8%	12,00	138,00
151	9%	13,59	137,41	152	9%	13,68	138,32
159	9%	14,31	144,69	160	9%	14,40	145,60
161	10%	16,10	144,90	162	10%	16,20	145,80
169	10%	16,90	152,10	170	10%	17,00	153,00
171	11%	18,81	152,19	172	11%	18,92	153,08
179	11%	19,69	159,31	180	11%	19,80	160,02
181	12%	21,72	159,28	182	12%	21,84	160,16
189	12%	22,68	166,32	190	12%	22,80	167,20
191	13%	24,83	166,17	192	13%	24,96	167,04
199	13%	25,87	173,13	200	13%	26,00	174,00
201	14%	28,14	172,86	202	14%	28,28	173,72

Vemos las sucesiones de los costes finales en las columnas de la derecha y, en rojo, los pares de (valores de) costes iniciales para los que se produce una disminución en los respectivos costes finales. Presumiblemente, “dar un salto” de 3 € no dará origen a ningún ahorro efectivo, aunque ésta es una cuestión que deberemos demostrar más adelante.

R_3: Hemos visto que cuando el coste inicial coincide con una “cantidad frontera”, si aumentamos en uno o dos euros el coste inicial se produce una disminución del coste final en algunos casos. Esto sucede únicamente al aumentar 1€ las cantidades frontera a partir de 100, así como al aumentar 2€ las cantidades frontera a partir de 190 y en el entorno de la frontera, a partir de 179.

Los aumentos de 1 € y 2 € en el coste inicial que acabamos de analizar nos conducen a interrogarnos sobre el incremento real del coste final (que casi siempre es positivo) en el entorno de los puntos frontera. Surge así la cuestión siguiente:

Q_4: ¿Cómo pueden cuantificarse las ventajas de aumentar el coste inicial? En particular, ¿cómo varía el coste final de cada euro añadido al coste inicial en un valor frontera a medida que éste aumenta?

Para medir dicho incremento utilizaremos una nueva magnitud que representa la cantidad en que aumenta, por término medio, el coste final por cada euro que aumentemos el coste inicial (cerca de los puntos frontera). Dado que aumentamos dos euros el coste inicial, el **coste relativo** por cada euro aumentado vendrá dado por las expresiones:

$$(F_1 - F_{-1})/2 \quad \text{y} \quad (F_2 - F_0)/2$$

según se indica en la tabla siguiente:

I	P	D	F_{-1} F_1	½ $(F_1 - F_{-1})$
69 71	0% 1%	0,00 0,71	69,00 70,29	0,645
79 81	1% 2%	0,79 1,62	78,21 79,38	0,585
89 91	2% 3%	1,78 2,73	87,22 88,27	0,525
99 101	3% 4%	2,97 4,04	96,03 96,96	0,465
109 111	4% 5%	4,36 5,55	119,00 105,45	0,405
119 121	5% 6%	5,95 6,26	113,05 113,74	0,345
129 131	6% 7%	7,74 9,17	121,26 121,83	0,285
139 141	7% 8%	9,73 11,28	129,27 129,72	0,225
149 151	8% 9%	11,92 13,59	137,08 137,41	0,165
159 161	9% 10%	14,31 16,10	144,69 144,90	0,105

I	P	D	F_0 F_2	½ $(F_2 - F_0)$
70 72	0% 1%	0,00 0,72	70,00 71,28	0,64
80 82	1% 2%	0,8 1,64	79,20 80,36	0,58
90 92	2% 3%	1,80 2,76	88,20 89,24	0,52
100 102	3% 4%	3,00 4,08	97,00 97,92	0,46
110 112	4% 5%	4,40 5,60	105,60 106,40	0,40
120 122	5% 6%	6,00 7,32	114,00 114,68	0,34
130 132	6% 7%	7,80 9,24	122,20 122,76	0,28
140 142	7% 8%	9,80 11,28	130,20 130,64	0,22
150 152	8% 9%	12,00 13,68	138,00 138,32	0,16
160 162	9% 10%	14,40 16,20	145,60	

169 171	10% 11%	16,90 18,81	152,10 152,19	0,045
179 181	11% 12%	19,69 21,72	159,31 159,28	−0,015
189 191	12% 13%	22,68 24,83	166,32 166,17	−0,075
199 201	13% 14%	25,87 28,14	173,13 172,86	−0,135

			145,80	0,10
170 172	10% 11%	17,00 18,92	153,00 153,08	0,04
180 182	11% 12%	19,80 21,84	160,02 160,16	−0,02
190 192	12% 13%	22,80 24,96	167,20 167,04	−0,08
200 202	13% 14%	26,00 28,28	174,00 173,72	−0,14

Por ejemplo, para la compra inicial de 80 € el coste final es de 79,20 €, y para la de 82€ es de 80,36€, resulta un **coste relativo por euro** de:

$$1/2(80{,}36 - 79{,}20) = 1{,}16/2 = 0{,}58$$

Lo que significa que si aumentas en 2 euros el coste inicial, en realidad el coste final aumenta sólo 0,58 euros por cada uno de ellos. Si el coste relativo es negativo, como por ejemplo en el paso de 199 a 201 que es de –0,135, significa que por cada euro añadido al coste inicial, el coste final disminuye en 0,135 €.

R$_4$: Podemos concluir que si aumentamos 2 € el coste inicial en un punto frontera, el **coste relativo por euro** siempre es inferior a 1 y va disminuyendo a medida que aumenta el coste inicial. Esta disminución, además, es constante con valor 0,06.

AUMENTOS CUALESQUIERA EN LOS PUNTOS FRONTERA (“rama ACPF”): F(n,h) y F(n)

La conclusión anterior lleva a que nos preguntemos por la relación existente entre el aumento en el coste inicial y la disminución, consecuente, en el coste final (2 y 0,06 €, respectivamente, en el caso estudiado).
Para responder a esta cuestión hemos de estudiar el “coste relativo” en general, esto es, la **variación media** de la función coste final para incrementos dados por una nueva variable **h** ($0 < h \leq 10$) del coste inicial.

En principio supondremos dichos incrementos a partir de los puntos frontera. Por otra parte, hemos dicho que, supuestamente, al incrementar en 3 € el coste inicial a partir de un punto frontera, no disminuirá el coste final. Esta cuestión forma parte de una problemática mucho más general que podemos enunciar como sigue:

Q$_5$: (a) En general, ¿cuál es el coste relativo por euro (o variación media de la función coste final) en el intervalo ($70 + 10·n$, $70 + 10·n + h$)? ¿Cómo puede explicarse la relación observada entre los valores 2 y 0,06 correspondientes al aumento y a la variación del coste relativo, respectivamente?
(b) ¿Cuál es el incremento máximo del coste inicial en cada punto frontera para el cual no aumenta el coste final (suponiendo la sucesión 0%, 1%, 2%, …, 14% de descuentos)? ¿Existe un máximo absoluto de dicha cantidad?

Para responder a estas cuestiones modelizaremos la situación mediante funciones de dos variables que generalizan las utilizadas hasta el momento. Es necesario añadir una nueva **variable real h** si queremos poder comparar el coste final en un punto frontera con el coste final resultante de añadir **h** euros al coste inicial (donde $0 < h \leq 10$ y $0 \leq n \leq 13$).

$$I(n, h) = 70 + 10 \cdot n + h$$

$$F(n, h) = I(n, h) \cdot [1 - (n+1)/100] = (70 + 10 \cdot n + h) \cdot [1 - (n+1)/100]$$

(a) Calcularemos la variación media en el intervalo $(70 + 10 \cdot n, 70 + 10 \cdot n + h)$

$$(1/h)[F(n+1, h) - F(n, h)] = (70 + 10 \cdot n + h) \cdot [1 - (n+1)/100] - (70 + 10 \cdot n) \cdot [1 - n/100] =$$

$$= (1/100 \cdot h) \cdot [h \cdot (99 - n) - (70 + 10 \cdot n)]$$

Para explicar la relación obtenida anteriormente entre un aumento de 2 € en el coste inicial y la variación de 0,06 del coste relativo, calculamos la **variación segunda**:

$$[F(n+1, h) - F(n+1)] - [F(n, h) - F(n)] = -(10 + h)/100$$

Observamos que la **variación del coste relativo** no depende de n.

$$(1/h) \cdot [F(n+1, h) - F(n+1)] - [F(n, h) - F(n)] = -(10 + h)/100 \cdot h$$

y que para el caso particular **h** = 2 obtenemos el valor de la **variación del coste relativo por euro**: $-(10 + 2)/100 \cdot 2 = -0{,}06$

(b) Dado que

$$F(n, h) - F(n) = (70 + 10 \cdot n + h) \cdot [1 - (n+1)/100] - (70 + 10 \cdot n) \cdot [1 - n/100] =$$

$$= (1/100) \cdot [h \cdot (99 - n) - (70 + 10 \cdot n)]$$

Para cada punto frontera (determinado por un valor de n) calcularemos el valor de h para el cual $F(n, h) - F(n) = 0$. Este será, para cada n, el mayor valor de h para el cual no aumenta el coste final.

$$F(n, h) - F(n) = 0 \Rightarrow (1/100) \cdot [h \cdot (99 - n) - (70 + 10 \cdot n)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{h = (70 + 10\,n)/(99 - n)}$$

Si consideramos h como función de n, podemos calcular la derivada siguiente

$$h'(x) = [10 \cdot (99 - x) + (70 + 10 \cdot x)]/(99 - x)^2 = 1060/(99 - x)^2 > 0$$

Observamos que para cualquier valor de n, la función derivada es positiva y, en consecuencia, h(n) es estrictamente creciente. Por lo tanto, el máximo absoluto de esta función en el intervalo (0, 13] se alcanza en n = 13 y su valor es, aproximadamente:

$$h(13) = 2{,}3258 \ldots$$

que, como apuntábamos más arriba, es menor que 3.

R_5: a) Podemos concluir que la variación media de la función coste final en el intervalo (70 + 10·n, 70 + 10·n + h) es igual a 1/(100·h)·[h·(99 – n) – (70 + 10·n)] y, consecuentemente, la variación del coste relativo [– (10 + h)/100] solamente depende de h, lo que explica la relación obtenida entre éste y h = 2.

b) En cada intervalo (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)), hemos calculado el punto en el que el coste final es igual al coste inicial. Si indicamos este punto por 70 + 10·n + h, resulta ser

$$h = (70 + 10\cdot n)/(99 - n)$$

El máximo absoluto corresponde a n = 13 y su valor es de h(13) = 2,3258 … < 3

Q_6: En el caso en que, por necesidades de eliminación de stocks la empresa decidiese prolongar la sucesión de descuentos más allá del 14%, ¿cuál sería el máximo descuento "razonable", esto es, el máximo descuento a partir del cual el coste final no aumentaría, independientemente del aumento del coste inicial?

Tendríamos la siguiente tabla de descuentos:

- 1% si el importe de la compra supera los 70 €
- 2% si el importe de la compra supera los 80 €
- 3% si el importe de la compra supera los 90 €
- 4% si el importe de la compra supera los 100 €
- 5% si el importe de la compra supera los 110 €
- 6% si el importe de la compra supera los 120 €
- 7% si el importe de la compra supera los 130 €
- 8% si el importe de la compra supera los 140 €
- 9% si el importe de la compra supera los 150 €
- 10% si el importe de la compra supera los 160 €
- 11% si el importe de la compra supera los 170 €
- 12% si el importe de la compra supera los 180 €
- 13% si el importe de la compra supera los 190 €
- 14% si el importe de la compra supera los 200 €
- 15% si el importe de la compra supera los 210 €
- 16% si el importe de la compra supera los 220 €
- Etc.

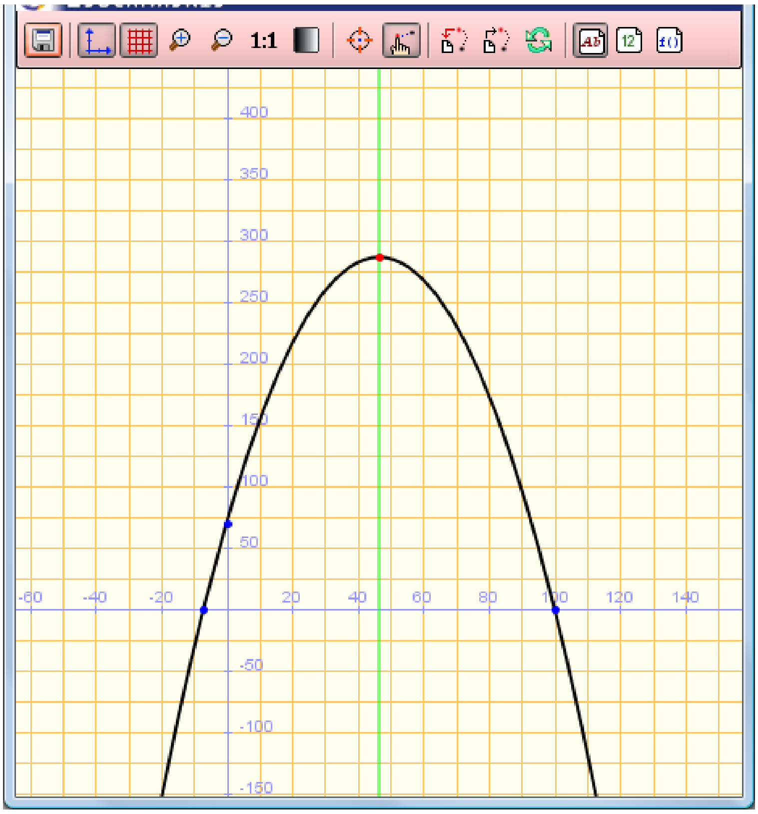
Suponiendo que la serie de descuentos se prolongase indefinidamente, vamos a calcular el valor del coste inicial a partir del cual el coste final deja de aumentar.
Como sabemos que los costes finales en los puntos frontera se sitúan sobre la parábola:

$$F(n) = (70 + 10n)\cdot(1 - n/10) = -0{,}1n^2 + 9{,}3n + 70$$

Calculamos su vértice y resulta ser V = (46,5; 286,225), de donde se deduce que el descuento máximo "razonable" es 46%.

Utilizamos la calculadora simbólica WIRIS para obtener la gráfica de la parábola

$$f(x) = -0{,}1n^2 + 9{,}3n + 70$$



Aquí se puede ver que el máximo se halla en un punto próximo y mayor a 45 y menor a 60, cuyo valor exacto es el calculado más arriba: 46,5

Puesto que en el intervalo (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)] el descuento que se realiza es (n + 1)%, hallamos el coste inicial a partir del cual el descuento es del 46%:

$$70 + 10 \cdot 45 = 520$$

Y, por tanto, el descuento máximo del 46% se aplicará a compras superiores a 520 €.

R_6: En caso de que la empresa decida deshacerse de productos almacenados vía aumento progresivo del descuento, el tope de éste se sitúa en el 46% y corresponde a una compra cuyo coste inicial es superior a 520 €.

Acabamos de establecer el descuento máximo “razonable” a realizar por la adquisición de productos, en un momento en que la política de la emprea es deshacerse de stoks. Así, por ejemplo, una compra cuyo precio inicial sea de 521 €, el descuento del 46% la reducirá a 281,34 € y una compra cuyo precio inicial sea de 520 €, con el descuento del 45% se quedará en 286 €, esto es, un aumento en el coste inicial de 1 € se traduce en una disminución del coste final de 4,64 €. Este resultado, aparentemente contradictorio con la respuesta recién elaborada, nos lleva a plantear la cuestión siguiente:

Q$_7$: ¿Cuál es el valor de h para el que F(45, h) = F(45)? ¿El criterio utilizado para determinar el valor del descuento máximo es el más adecuado? ¿La empresa podría establecer algún otro criterio para disminuir stoks?

En cada intervalo (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)), hemos calculado anteriormente el punto en el que el coste final es igual al coste inicial. Si indicamos este punto por 70 + 10·n + h, resulta

$$h = (70 + 10\cdot n)/(99 - n)$$

y para n = 45, h = 9,629629 …

Esto significa que el coste final en los puntos 70 + 10·45 +h (h > 0) es menor que el coste final en el punto frontera 70 + 10·45, cuando h < 9,63, al ser h una función estrictamente creciente, como se demostró anteriormente. Dicho con otras palabras, el descuento del 46% en el intervalo de costes iniciales (70 + 10·45, 70 + 10·46] se traduce en un coste final inferior al coste final en 70 + 10·45, en la gran mayoría de los puntos del intervalo.

Vemos que, al ser h = (70 + 10·n)/(99 – n) creciente en **n**, cada vez es más amplio el subintervalo (70 + 10·n, 70 + 10·n + h] donde los costes finales son inferiores al coste inicial en 70 + 10·n.

La empresa puede, entonces, valorar criterios para decidir el tope del descuento teniendo presente este resultado. Por ejemplo, puede decidir que llegará al descuento máximo con la condición de que el valor h para el que el coste final es igual al coste final en el punto frontera esté en el medio del intervalo, o sea, para h = 5. En este caso,

$$5 = (70 + 10\cdot n)/(99 - n) \Rightarrow n = 29$$

R$_7$: El valor de h para el que F(45, h) = F(45) es h = 9,63. Buscar el máximo descuento “razonable” allí donde los costes finales empiezan a ser decrecientes es una primera aproximación para determinar un criterio máximo de descuento, teniendo en consideración otros factores de la situación. Tomar en cuenta la sucesión de valores donde, para cada uno de éstos, el coste final es igual al coste inicial en el punto frontera, permitirá controlar y decidir sobre el descuento máximo deseado.

Q$_8$: ¿Cuál es el incremento máximo del coste inicial en cada punto frontera para el cual no aumenta el coste final (suponiendo la sucesión 0%, 1%, 2%, …, 46% de descuentos)? ¿Existe un máximo absoluto de dicha cantidad?

CAMBIOS EN LA SUCESIÓN DE DESCUENTOS (“rama DescuentosGeométricos”)

Q$_9$**:** ¿Cómo depende Var_2 (F) de la sucesión de descuentos porcentuales si esta sucesión es geométrica de razón r, esto es, p(0) = 0 y $p(n) = r^n$ (si n > 0)? Por ejemplo si r = 1,3 y L = 10.

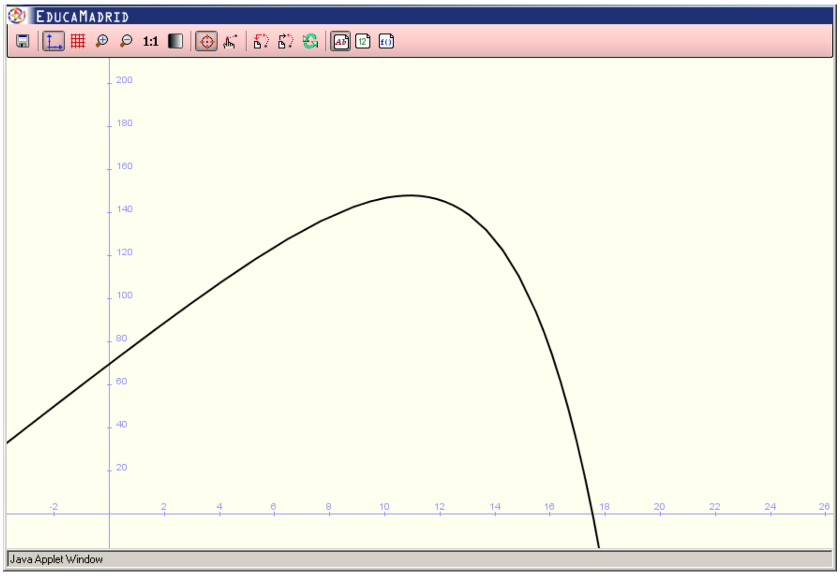
Cuando la progresión de descuentos $p(n) = r^n$ para n > 0 y p(0) = 0 es geométrica, las funciones de costes iniciales (antes del descuento) y costes finales (después del descuento) son, respectivamente:

$$I(n) = 70 + L\cdot n$$
$$F(n) = I(n)\cdot(1 - r^n/100) = (70 + L\cdot n)\cdot(1 - r^n/100)$$

Al tomar r = 1,3 la nueva sucesión de descuentos será: 1,3%; 1,69%; 2,197%; 2,8561%; …; 39,3737% (este último descuento corresponde a $1{,}3^{14}$ y, por tanto, se aplicaría a compras cuyo coste inicial fuera superior a 200 €).
El hecho de ser r = 1,3 significa que en cada intervalo el descuento porcentual es un 30% mayor que el descuento aplicado en el anterior.
Para estudiar la función resultante en el caso particular propuesto (L = 10 y r= 1,3):

$$F(n) = (70 + 10\cdot n)\cdot(1 - 1{,}3^n/100)$$

empezaremos dibujando su gráfica con ayuda de la calculadora simbólica WIRIS.



Aquí se puede ver que el máximo se alcanza en un valor próximo e inferior a n = 12, lo que significa que, al menos, los costes iniciales con valores de 190 €, 200 € y 210 € tienen costes finales decrecientes que se "estabilizan" en este último (a partir de 210 € el descuento es el mismo que el que se aplica al coste inicial de 200 €).
En la tabla siguiente aparecen algunos costes iniciales y sus respectivos costes finales:

COSTE INICIAL EN EUROS	% DE DESCUENTO (aproximado)	COSTE FINAL EN EUROS (aproximado)
180 (= 70 + 10·**11**)	$1{,}3^{11} \cong 17{,}92$	144,42
190 (= 70 + 10·**12**)	$1{,}3^{12} \cong 23{,}29$	145,75
200 (= 70 + 10·**13**)	$1{,}3^{13} \cong 30{,}27$	139,46
210 (= 70 + 10·**14**)	$1{,}3^{14} \cong 39{,}35$	127,34
220	$1{,}3^{14} \cong 39{,}35$	133,34

y resulta que el mayor coste final se da para el coste inicial de 190 €, al que se le aplica un porcentaje de descuento del $1{,}3^{12}$ % (≅ 23,29%).

R_3:

Es evidente que no tiene sentido considerar conjuntamente los valores L = 10 y r = $1,3^n$ para n = 0, 1,…, 14 y en cambio plantearse que si se desea establecer una sucesión de descuentos en los intervalos (70, 70 + 10·n] para n = 0, 1, …14, la progresión geométrica de los descuentos a fijar se debe cambiar. También es posible mantener la progresión geométrica dada y hacer alguna modificación en los intervalos de descuento a considerar.

Estas observaciones nos llevan a plantear la cuestión siguiente:

Q_4: Considerando los intervalos (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)] para n = 0, 1, ….14, donde el descuento a aplicar se mantiene constante para cada n. Si queremos que este descuento siga una progresión geométrica de razón r, ¿qué valor deberá tomar r para que los costes finales sean siempre crecientes?

$F(n) = (70 + 10\cdot n)\cdot(1 - r^n/100)$
$F'(n) = 10(1 - r^n/100) + (70 + 10n)(- r^n\cdot \ln (r)/100) =$
$100 - (8 + n)r^n \cdot \ln (r)$
F(n) es creciente syss $F'(n) > 0$ syss $r^{14} \cdot \ln (r) < 100/22 = 4,545454….$

Se pueden probar distintos valores para r, mayores a 1 y menores a 1,3. Por ejemplo, se puede probar si 1,2 verifica la desigualdad $1,2^{14} \cdot \ln (1,2) < 100/22 = 4,545454….$

Q_5: Dados los intervalos (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)] nos interesa establecer una progresión de descuentos de manera que el que se aplica en (70 + 10·(n + 1), 70 + 10·(n + 2)] sea un *x*% superior al que se aplica en (70 + 10·n, 70 + 10·(n + 1)]. ¿Qué relación deberá existir entre *x* y n para que la sucesión de descuentos sea siempre creciente?

ANEXO 2

Introducción a un curso TAD de formación del profesorado

1. DIFERENTES TIPOS DE DISCURSOS EN UN CURSO TAD

En un curso TAD de formación del profesorado aparecerán múltiples discursos. Hay que precisar en cada caso quien es el emisor y quien es el receptor y cuál es la posición que ocupa cada uno de ellos.

Los actores (posibles emisores y posibles receptores) son los siguientes:

- El formador (**F**) que tomará el papel de director de estudio (**DE**) del curso y que, por el momento, identificaremos con los diseñadores del mismo. Pero, dado que esta identificación es sólo temporal, el material puede contener algunos mensajes de los diseñadores del curso al formador. Se trata de mensajes que, debidamente matizados, deberá trasladar el formador al estudiante-profesor en la fase de formación didáctica (ver Infra Fase 2) a fin de que éste los tenga en cuenta para diseñar el REI matemático para vivir con los estudiantes de Secundaria (Fase 3).
- El estudiante-profesor o profesor en formación que en algunos momentos tomará el papel de "estudiante" (**ES**), en otros el de "estudiante-profesor" (**EP**) y en otros el de "director del proceso de estudio" (**DE**).
- El estudiante de Secundaria que normalmente tomará el papel de estudiante(**ES**), aunque también colaborará en la dirección del proceso de estudio (**DE**).

2. FASES DE UN CURSO TAD

Fase 1: El estudiante-profesor vive en posición de estudiante un **REI "matemático"**. En esta fase el discurso del material va dirigido del formador en su papel de director del estudio (**DE**) al estudiante-profesor en su papel de estudiante (**ES**). Como tal estudiante éste elaborará discursos dirigidos al formador y, también, discursos dirigidos a sus compañeros de estudio.

Dado que el estudiante-profesor actúa aquí como un estudiante (**ES**), es normal que pase por momentos de desorientación, véase desconcierto cognitivo, debido a la apertura de la actividad y a la naturaleza "poco habitual" de los gestos de estudio que se le piden que realice.

Fase 2: El estudiante-profesor vive en posición de tal un **REI "didáctico-matemático"** con el objetivo de adquirir la formación didáctica necesaria para diseñar y experimentar un REI con los estudiantes de Secundaria. En esta fase el discurso del material va dirigido del formador (**F**) al estudiante-profesor como tal (**EP**). Éste elaborará discursos dirigidos al formador y, también, a sus compañeros de formación.

Fase 3: El estudiante-profesor lleva a cabo el diseño didáctico a priori de un REI "matemático" para vivirlo en posición de director de estudio con los estudiantes de Secundaria. Éste diseño se considerará como "trabajo de fin de curso". En esta fase los discursos que elabora el estudiante-profesor pueden ir dirigidos a los futuros estudiantes de Secundaria (**ES**) en cuyo caso lo hará desde la posición de director de estudio (**DE**) y, también pueden ir dirigidos al formador (**F**) en cuyo caso lo hará en posición de estudiante-profesor (**EP**).

3. CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DE LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN (REI)

Cuestión generatriz:

Apertura y falta de concreción:

Tiempo:

Reparto de responsabilidades:

Tareas y gestos de estudio poco habituales:

Uso de distintas herramientas y contenidos:

La proporcionalidad junto a los otros modelos funcionales

FASE 1: El estudiante-profesor vive en posición de estudiante un REI matemático

Introducción

En las siguientes unidades explorarás, en posición de un hipotético alumno de la Educación Secundaria Obligatoria, un conjunto de situaciones y tareas matemáticas en torno al problema que hemos llamado "Los planes de ahorro". Las diferentes tareas estarán numeradas de forma consecutiva (T_k).

Guarda en la memoria las cuestiones que vayan apareciendo ya que será necesario volver sobre ellas en diversas ocasiones. Disfruta del viaje.

Primera unidad: primer encuentro con "los planes de ahorro"

La situación de partida es la organización de un viaje de fin de curso. Tradicionalmente este viaje tiene lugar al final del curso académico y se financia con el dinero que los alumnos van consiguiendo poco a poco a lo largo de cierto periodo de tiempo. Establecer programas o planes de ahorro, con el fin de que todos los alumnos tengan el dinero necesario cuando el viaje llegue, resulta una iniciativa lógica y hasta recomendable. Nótese que hablamos de planes (en plural), porque no tiene que ser de uno, sino diferentes tipos potencialmente adaptables a las necesidades y deseos de cada alumno-ahorrador.

La **cuestión de partida** es la siguiente:

Deseamos planear con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un plan de ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación de la cantidad de dinero que necesitamos, y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades a dar en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar ni cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos al final de curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje.

El objetivo final es preparar un informe, que podamos presentar a la dirección del centro, y que ayude, en los años sucesivos, a planificar el ahorro de dinero a vuestros compañeros. Este informe debería dar respuesta a cuestiones cómo:

¿Qué posibles planes o estrategias de ahorro se pueden considerar? ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene cada uno? ¿Cómo decidir los plazos, las cantidades a dar en cada plazo, la duración del ahorro, etc.?

Una vez planteada la cuestión inicial, el primer gesto del estudio consiste en familiarizarse con la situación, por ejemplo simulando casos particulares, planteando nuevas preguntas y proponiendo un plan de actuación para seguir con el estudio.

Sugerencia | **? Ayuda**

? Ayuda: Por ejemplo, Silvia propuso que todas las semanas ahorraría 10 € para el viaje. A Manuel le pareció bien la idea, pero prefirió fijar sus cuotas cada 15 días, y que estas fuesen de 30 €. Alba considera que ahora mismo es temprano para poner una cuota tan grande, pero que conforme pase el tiempo, le gustaría ir poniendo cada vez más.

Sugerencia: una hoja de cálculo, como Excel, le puede ayudar a simular algunos de sus planes de ahorro.

PRIMER INFORME DE AVANCE (IA_1)

Publique en el foro los elementos de la situación que has considerado como relevantes así como los ejemplos que has desarrollado: ¿cuáles son los *elementos* de la situación que son realmente determinantes para diseñar un plan de ahorro? Descríbelos, así como las posibles conexiones entre ellos.

Sugerencia | **? Ayuda**

Sugerencia | **? Ayuda**

? Ayuda: ...

Sugerencia: Posible estructura del informe

..

PUESTA EN COMÚN

Examine las propuestas de los demás y plantee una posible planificación de las cuestiones que pueden guiar el proceso de estudio.

Sugerencia **? Ayuda**

Sugerencia **? Ayuda**

? Ayuda: ...

Sugerencia: posible estructura

..

SÍNTESIS Y PROPUESTA DE AVANCE

...

1er stop: (Mensaje de los diseñadores del curso al formador) Hasta que el EP no haga la lista de "elementos" y no proponga diferentes hipótesis de ahorro, no debería poder continuar. En este punto, sería deseable que los EP pudiesen ver y comentar las propuestas de sus compañeros de curso antes de seguir. Por ejemplo, una "tarea de formación" (que no matemática) del tipo: publica tus planes de ahorro en el foro. Estudia los de tus compañeros y discútelos (he optado por incluirla como apartado D. en la tarea 1).

Segunda unidad: explorando los planes de ahorro *equitativos*

Tras la primera unidad, en tu propuesta de algunos tipos de planes de ahorro y en las que han hecho tus compañeros, seguro que algunos elementos importantes de la situación han emergido con fuerza. Entre ellos:

- El número de cuotas que vais a entregar y su distribución temporal.
- La posibilidad de fijar una cuota inicial.
- La cantidad de dinero que se entregará en cada cuota.

Asimismo, es probable que hayáis coincido en vuestras propuestas de algunos planes de ahorro mientras que tal vez te hayas o te hayan sorprendido con algún tipo de ahorro diferente.

Es muy probable que todos hayáis coincido en plantear, como caso más sencillo, un plan de ahorro de cuota fija (que llamaremos *equitativos*). En esta segunda unidad exploraremos las características de este tipo de planes. En las siguientes unidades plantearemos planes diferentes que también exploraremos.

Fijemos algunos términos y algunas notaciones:

Un plan de ahorro de tipo *equitativo* está caracterizado por:

- Una distribución temporal de cuotas uniforme (cada mes, cada quincena, cada semana, …)
- Una cuota (mensual, semanal, …) fija (C).
- Posibilidad de fijar una cuota inicial (C_0) en concepto de “reserva”.

T_2

Elabore algunos planes de ahorro de tipo *equitativo*, simulando su comportamiento para un conjunto de plazos.

Sugerencia | ? Ayuda

? Ayuda: Para cada plan de ahorro, tiene que decidir los parámetros iniciales:

- La existencia o no de una cantidad inicial C_0, en concepto de reserva o entrada, y su cuantía.
- El número de plazos de pago de los que constará.
- La cuota a pagar en cada plazo (C).

En función de los resultados finales de ahorro de su plan, puede decidir cambiar alguno de estos parámetros para generar un plan de ahorro nuevo que se ajuste mejor a sus expectativas de ahorro.

Sugerencia: una hoja de cálculo, como Excel, le puede ayudar a realizar esta simulación. Además, puede usar diferentes columnas para diferentes planes de manera que, en una misma hoja, podrá establecer las primeras comparaciones (plantilla).

	A	B	C	D	E	F
1	C_0	→				
2	C	→				
3	nº de plazos	→				
4	PLAZOS	Nº	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDA
5	Plazo inicial	0				
6	Plazo nº					
7	Plazo nº					
8	Plazo nº					
9	Plazo nº					
10	Plazo nº					
11	Plazo nº					
12	Plazo nº					
13	Plazo nº					
14	Plazo nº					
15	Plazo nº					
16	Plazo nº					
17	Plazo nº					
18	Plazo nº					
19	Plazo nº					

T_3

Elabore diferentes planes de ahorro *equitativos*, uno para cada una de las siguientes circunstancias (diferentes presupuestos ofertados por agencias de viajes):

- Plan 1 → Cantidad final ahorrada de 400 €
- Plan 2 → Cantidad final ahorrada de 650 €
- Plan 3 → Cantidad final ahorrada de 310 €

T_4

Con toda probabilidad habrá sido una tarea sencilla para usted la construcción de planes de ahorro para cada una de las cantidades anteriores y hasta, probablemente, haya construido alguna fórmula (modelo algebraico) para representar de forma genérica cualquier plan de ahorro *equitativo*.

Si es así, escriba su modelo y describa brevemente cómo lo ha obtenido.

Si aún no ha construido un modelo algebraico para representar genéricamente este tipo de ahorro, le proponemos que lo haga ahora.

? Ayuda

? Ayuda: puesto que estamos trabajando sobre sistemas de ahorro que son acumulativos, esto es, en cada plazo sumamos una cantidad a lo que ya teníamos ahorrado en el plazo anterior, seleccione alguno (o varios) de los planes que ya ha realizado e intente descomponer la cantidad ahorrada en cada plazo (plazo 1, 2, 3, etc.) en función de las cantidades de los plazos anteriores.

T_5
Tras trabajar sobre varios planes de ahorro *equitativos*, queremos poner a prueba nuestras técnicas para ver hasta qué punto somos capaces de controlar un plan de ahorro y de tomar decisiones sobre él. Por ejemplo, ante las siguientes situaciones: A. Un grupo de amigos ha decidido no poner cuota inicial. Desean ahorrar 360€ para su viaje, en 6 cuotas. ¿Qué cantidad C deben aportar? ¿Y si desean realizar el ahorro en 10 cuotas? B. Otro grupo, que también va a ahorrar 360€ ha decido, sin embargo, que van a poner una cuota inicial de 60€ y, en cada plazo, 25€. ¿Cuántos plazos deberán realizar? ¿Y si la cuota inicial hubiese sido sólo de 20€? C. Luis decide entregar una cuota inicial alta (60€), y pagar el resto en 15 plazos. Ana, sin embargo, sólo desea entregar al comienzo 15€. ¿Qué cuota tendrá qué entregar cada uno para obtener los 360€? ¿Podrías comparar la evolución del ahorro de Luis con la del ahorro de Ana?

T_6
Elabore un resumen por escrito con todas las características de los planes de ahorro *equitativos* (puede incluir tablas, gráficas, fórmulas para poder calcular las cantidades ahorradas según las cuotas y los plazos, etc) para poder presentarlas como una propuesta a los alumnos. Es importante incluir varios ejemplos.

2º stop: (Mensaje de los diseñadores del curso al formador) De nuevo sería necesario "evaluar" el trabajo desarrollado por los alumnos-profesores. Es de esperar que, salvo cuando se les ha pedido simular los planes de ahorro, las técnicas aritméticas estén ausentes y que la tarea 4 sea "anecdótica". Es importante observar si han usado la ley de recurrencia que define el tipo de ahorro o no. En este momento su uso explícito no es necesario, esto es, la realización de un trabajo de naturaleza algebraica sobre un estado en relación con los anteriores.

Por otro lado, también es importante "evaluar" cómo describen los planes de ahorro equitativos y qué propiedades identifican.

Finalmente, también es interesante observar la utilización que hacen de Excel, aunque esto dependerá mucho del conocimiento que tengan del software (opcionalmente, se les pueden pasar unos mini-apuntes de Excel que preparé para mis alumnos).

Tercera unidad: ampliando el conjunto de planes de ahorro

En la segunda unidad ha explorado un tipo de plan de ahorro, tal vez el más sencillo, caracterizado por una distribución temporal uniforme de los plazos y por una cuota fija, con la opción de fijar una cuota inicial o no.

Sin embargo, en la primera unidad es muy probable que, bien a partir de su trabajo o del de sus compañeros, apareciesen otros tipos de planes de ahorro, diferentes a los *equitativos*.

Si mantenemos una distribución uniforme de los plazos, necesariamente estos nuevos planes de ahorro tienen que estar caracterizados por una variación en la cuota que se entrega en cada plazo.

En esta unidad, le proponemos centrar el trabajo sobre planes de ahorro en los que la cuota sea creciente, esto es, que conforme los plazos van pasando, la cuota de ahorro sea cada vez mayor.

T7

A. Diseñe uno o varios planes de ahorro nuevos, caracterizados por un crecimiento en la cuota que se entrega en cada plazo.
B. Para cada uno de ellos, simule como funcionarían, desarrollando algunos ejemplos.
C. Publique en el foro las hipótesis que ha fijado para generar sus nuevos planes así como los ejemplos que ha desarrollado. Examine las propuestas de los demás y discutan sobre diferentes tipos de planes de ahorro con cuota creciente.

Sugerencia | ? Ayuda

? Ayuda: evidentemente, puede elegir múltiples formas de ir incrementando la cuota en cada plazo, pero si no desea que este crecimiento sea aleatorio, puede formular un cierto incremento de la cuota que se vaya repitiendo plazo a plazo.

Sugerencia: de nuevo Excel le puede ayudar a simular sus nuevos planes de ahorro, puesto que le permite automatizar los cálculos y extenderlos de un plazo a otro.

3er stop: de nuevo, el “formador” debería poder examinar qué hipótesis han formulado los alumnos-profesores antes de seguir. En principio contamos con dos tipos de ahorro de cuota creciente que queremos explorar:

<table>
<tr><th>1er tipo
Variación aditiva en la cuota</th><th>2º tipo
Variación multiplicativa en la cuota</th></tr>
<tr><td>La cuota se incrementa sumando una cantidad fija a la cuota anterior.

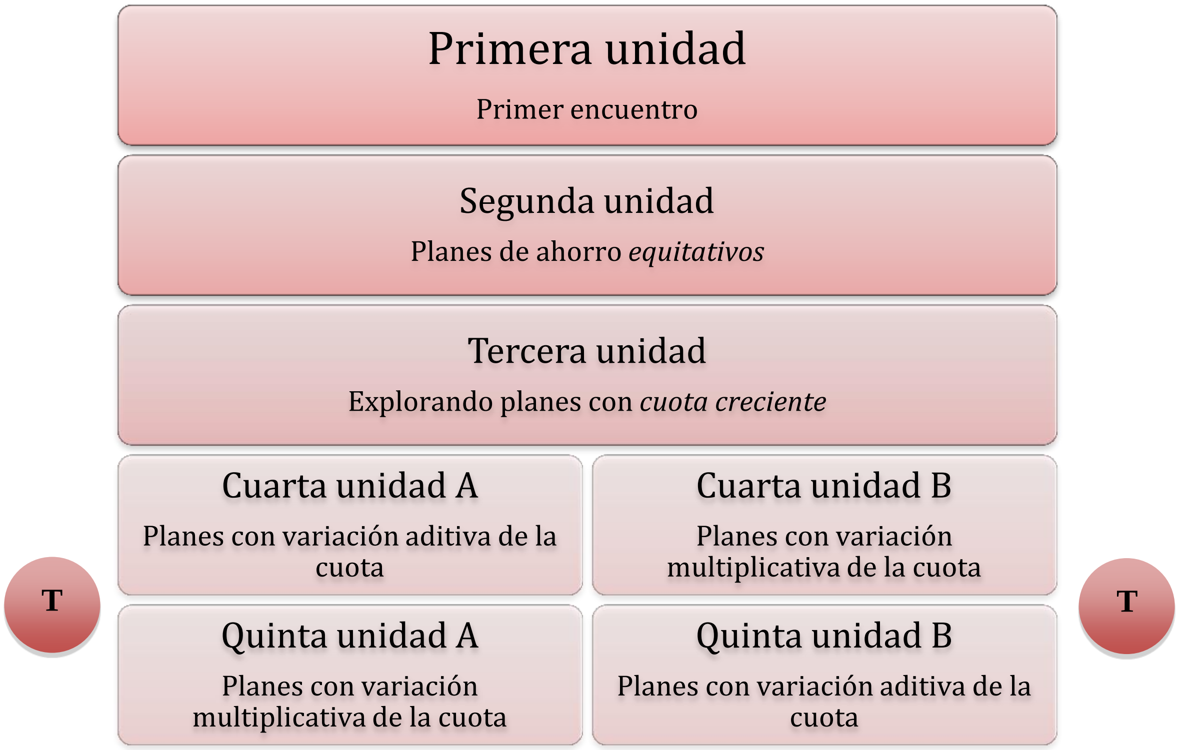
Por ejemplo:
En el primer plazo se entrega C.
En el segundo, lo que se entregó antes más D (esto es, C+D).
En el tercero, lo que se entregó antes más D (esto es, C+D+D=C+2D).
En el cuarto, lo que se entregó antes más D (esto es, C+2D+D=C+3D).
…
En un caso simplificado, el incremento D puede ser igual a C.</td><td>La cuota se incrementa multiplicando por una cantidad fija k (>1) la cuota anterior.

Por ejemplo:
En el primer plazo se entrega una cantidad C.
En el segundo k veces la anterior ($k \cdot C$)
En el tercero, k veces la anterior ($k \cdot k \cdot C = k^2 \cdot C$)
En el cuarto, k veces la anterior ($k \cdot k^2 \cdot C = k^3 \cdot C$).
…
Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando la cuota aumenta según un porcentaje fijo. Así, si la cuota aumenta un 10% en cada plazo, entonces k=1,1.</td></tr>
</table>

Es posible que haya otros tipos, pero con casi toda seguridad algún caso concreto de estos dos debería surgir (al menos, esto prevemos).

Puesto que el tutor del curso debe decidir cómo seguir en función de lo que ocurra en este punto, proponemos dos trayectorias (A y B) para la cuarta unidad y la quinta unidad:

- Trayectoria A (T_A): primero se exploran los planes con variación aditiva de la cuota (cuarta unidad A), luego los de variación multiplicativa de la cuota (quinta unidad A).
- Trayectoria B (T_B): primero se explora los planes con variación multiplicativa de la cuota (cuarta unidad B), luego los de variación aditiva de la cuota (quinta unidad B).



Entendemos que en ocasiones el tutor optará por "activar" la trayectoria A, y en otras la B.

Las opciones aquí son múltiples:

- Si en las aportaciones de los profesores hay un claro predominio de un tipo de variación, se empieza por éste y luego se continúa por el otro (esto determina si el tutor decide "activar" la trayectoria T_A o T_B).
- Si ambas aparecen más o menos con la misma frecuencia, el tutor puede optar por elegir cuál de las dos trayectorias activa, o incluso dividir a los participantes en dos grupos, cada uno trabajando en una propuesta diferente, y luego intercambiar el trabajo, analizar y discutir (en este caso, un grupo trabajaría en la "cuarta unidad A" y otro en la "cuarta unidad B") .
- Si no aparece nítidamente ninguna de esta dos propuestas, el tutor del curso ("formador") optaría por introducirlas desde su "autoridad". En tal caso, será él quien decida si propone la trayectoria A o la B.

Cuarta unidad A: explorando *planes de ahorro de cuota creciente* (variación aditiva de la cuota).

En esta unidad vamos a centrar nuestro trabajo en explorar los *planes de ahorro con una cuota creciente*, en los que ésta aumenta de forma aditiva.

Son planes de ahorro en los que:

- Puede haber, o no, una cuota inicial C_0
- En el primer plazo se entrega una cantidad C.
- En el segundo plazo se entrega lo mismo que se entregó en el primero, más D.
- En el tercer plazo se entrega lo mismo que se entregó en el segundo, más D.
- Así sucesivamente.

T_8
Proponga y simule varios ejemplos de *planes de ahorro de cuota creciente*, en los que la cuota aumente aditivamente.

Sugerencia | ? Ayuda

? Ayuda: Son planes de ahorro en los que:

- Puede haber, o no, una cantidad inicial C_0
- En el primer plazo se entrega una cantidad C.
- En el segundo plazo se entrega lo mismo que se entregó en el primero, más D.
- En el tercer plazo se entrega lo mismo que se entregó en el segundo, más D.
- Así sucesivamente.

Sugerencia: si lo desea, puede usar la siguiente plantilla de Excel, o bien generar la suya propia. En caso de usar Excel, puede utilizar diferentes columnas para simular, a la vez, diferentes planes de ahorro.

T_9
Elabore diferentes *planes de ahorro con cuota creciente aditivamente*, uno para cada una de las siguientes circunstancias (diferentes presupuestos ofertados por agencias de viajes): • Plan 1 → Cantidad final ahorrada de 400 € • Plan 2 → Cantidad final ahorrada de 650 € • Plan 3 → Cantidad final ahorrada de 310 €

En contraste con los planes *equitativos* que exploró en la segunda unidad, probablemente ahora le haya costado más trabajo encontrar el conjunto de parámetros que genere, si no la cantidad exacta para cada uno de los presupuestos ofertados por la agencia de viajes, al menos cantidades aproximadas. Incluso con las ventajas que ofrece Excel para modificar los parámetros a voluntad, estos planes parecen más difíciles de controlar.

T_{10}
Disponer de un modelo algebraico (una fórmula), en el que se relacionen los parámetros que definen uno de estos planes (plazo n, cantidad inicial C_0, cuota C, incremento D) con la cantidad ahorrada al cabo de n plazos (C_n), sin duda ayudaría a tomar el control de estos planes de ahorro. ¿Podría construir este modelo?

❓ Ayuda

❓ Ayuda: estos planes de ahorro comparten con los *equitativos* el hecho de que la cuota a entregar en cada plazo está construida a partir de la cuota anterior (están definidos mediante una ley de recurrencia). ¿Podría utilizar ahora una extensión de la técnica que usó para configurar el modelo algebraico de los planes de ahorro *equitativos*?

Frente a las primeras simulaciones que ha llevado a cabo, de carácter aritmético, ahora dispone de nuevo modelo algebraico que pone en relación todas las cantidades que, de una u otra forma, están implicadas en este tipo de plan de ahorro: cantidad inicial C_0, cuota C, incremento de la cuota D, número de plazos n y cantidad ahorrada en cada plazo C_n.

Le proponemos trabajar ahora sobre algunos casos hipotéticos, con el fin de poner a prueba y explotar los modelos construidos. Decida si desea seguir trabajando en un marco aritmético (con o sin Excel) o explotar las posibilidades que le ofrece el disponer de un modelo algebraico.

T_{11}

A. Luis necesita ahorrar 410€. Decide ahorrar en 12 plazos, con una cuota de 5€ que irá aumentando sucesivamente de 5 en 5 euros. ¿Qué cantidad inicial debe poner?
B. Ana, sin embargo, necesita ahorrar 408€ con un plan de ahorro de cuota creciente por suma. Decide entregar una cantidad inicial de 3€ y partir con una cuota de 9€, que irá aumentando sucesivamente de 6 en 6 euros. ¿Cuántos plazos deberá realizar?
C. Por último, María, desea ahorrar 430€ en 14 plazos, con un plan de ahorro de cuota creciente por suma. Decide entregar una cantidad inicial de 10€. ¿Con qué cantidad C deberá partir y cómo debe irla aumentando?

T_{12}

¿Ha intentado resolver alguna de la situaciones de la tarea 11 mediante técnicas aritméticas, sin poner en funcionamiento el modelo algebraico?

A. Si lo ha intentado, ¿ha podido resolver la situación con éxito? ¿Qué dificultades ha encontrado? Explique y justifique sus respuestas.
B. Si no lo ha intentado, ¿podría explicar y justificar por qué ha desechado el trabajo aritmético?

Hasta el momento ha explorado dos tipos de planes de ahorro que hemos llamado, respectivamente, planes *equitativos* y de *cuota creciente por suma*. Salvo por su mayor o menor complejidad matemática, no hay razones a priori para elegir uno frente al otro. Dependerá de la evolución del ahorro que cada uno nos ofrezca y de la situación e intereses de la persona que desea usarlos.

T_{13}
Según la oferta recibida de la agencia de viajes, el coste total del viaje de fin de curso va a ser de 400€. Se cuentan las semanas que quedan y se decide que se van a entregar 12 cuotas y 10€ en concepto de reserva (cantidad inicial). A. Carlos desea realizar un ahorro *equitativo*. ¿Cómo serán sus cuotas en los sucesivos plazos? ¿Cómo evolucionarán sus ahorros? B. Rocío desea realizar un ahorro de *cuota creciente por suma*, comenzando por una cuota muy pequeña 2 euros e incrementándola en cada plazo mediante la suma de una cantidad D fija. ¿Cómo serán sus cuotas en los sucesivos plazos? ¿Cómo evolucionarán sus ahorros? C. Compare la evolución, plazo a plazo, de ambos planes de ahorro.

Una vez que ha explorado estos nuevos planes de ahorro, le proponemos como tarea recapitular, resumir y presentar sus propiedades y cómo funcionan.

T_{14}
Elabore un resumen por escrito con todas las características de los *planes de ahorro de cuota creciente por suma* (puede incluir tablas, gráficas, fórmulas para poder calcular las cantidades ahorradas según las cuotas y los plazos, etc) para poder presentarlas como una propuesta a los alumnos. Es importante incluir varios ejemplos.

Cuarta unidad B: explorando *planes de ahorro de cuota* creciente (variación multiplicativa de la cuota).

En esta unidad vamos a centrar nuestro trabajo en explorar los *planes de ahorro con una cuota creciente*, en los que ésta aumenta de forma multiplicativa. En concreto, nos limitaremos a aquellos en los que la cuota aumenta en un porcentaje fijo de un plazo a otro.

T_8
Proponga y simule varios ejemplos de *planes de ahorro de cuota creciente*, en los que la cuota aumente un porcentaje fijo en relación con la cuota del plazo anterior.

Sugerencia | ? Ayuda

❓ Ayuda: Son planes de ahorro en los que:

- Puede haber, o no, una cantidad inicial C_0
- En el primer plazo se entrega una cantidad C.
- En el segundo plazo se incrementa en un k% la cuota entregada en el primer plazo.
- En el tercer plazo se incrementa en un k% la cuota entregada en el segundo plazo.
- Así sucesivamente.

Sugerencia: si lo desea, puede usar la siguiente plantilla de Excel, o bien generar la suya propia. En caso de usar Excel, puede usar diferentes columnas para simular, a la vez, diferentes planes de ahorro.

T9

Elabore diferentes planes de ahorro cuya cuota crezca según un porcentaje fijo, uno para cada una de las siguientes circunstancias (diferentes presupuestos ofertados por agencias de viajes):

- Plan 1 → Cantidad final ahorrada de 400 €
- Plan 2 → Cantidad final ahorrada de 650 €

- Plan 3 → Cantidad final ahorrada de 310 €

En contraste con los planes *equitativos* que exploró en la segunda unidad, probablemente ahora le haya costado más trabajo encontrar el conjunto de parámetros que genere, si no la cantidad exacta para cada uno de los presupuestos ofertados por la agencia de viajes, al menos cantidades aproximadas. Incluso con las ventajas que ofrece Excel para modificar los parámetros a voluntad, esto planes parecen más difíciles de controlar.

T_{10}

Disponer de un modelo algebraico (una fórmula), en el que se relacionen los parámetros que definen uno de estos planes (plazo n, cantidad inicial C_0, cuota C, porcentaje k de incremento de la cuota) con la cantidad ahorrada al cabo de n plazos (C_n), sin duda ayudaría a tomar el control de estos planes de ahorro. ¿Podría construir este modelo?

? Ayuda

? Ayuda: estos planes de ahorro comparten con los *equitativos* el hecho de que la cuota a entregar en cada plazo está construida a partir de la cuota anterior (están definidos mediante una ley de recurrencia). ¿Podría utilizar ahora una extensión de la técnica que usó para configurar el modelo algebraico de los planes de ahorro *equitativos*?

Frente a la primera simulaciones de carácter aritmético que ha llevado a cabo, ahora dispone de nuevo modelo algebraico que pone en relación todas las cantidades que, de una u otra forma, están implicadas en este tipo de plan de ahorro: cantidad inicial C_0, cuota C, incremento de la cuota en un k%, número de plazos y cantidad ahorrada en cada plazo.

Le proponemos trabajar ahora sobre algunos casos hipotéticos, con el fin de poner a prueba y explotar los modelos construidos. Decida si desea seguir trabajando en un marco aritmético (con o sin Excel) o explotar las posibilidades que le ofrece el disponer de un modelo algebraico.

T_{11}

A. Luis necesita ahorrar 270€. Decide ahorrar en 11 plazos, con una reserva de 3€ (C_0) y una cuota C que irá incrementando un 25% en cada plazo. ¿Cuánto vale

C?

B. María, sin embargo, necesita ahorrar 300€ en 15 plazos. Decide entregar una reserva de 10€ (C_0) y una cuota C que irá incrementando en un 20%. ¿Cuánto vale C?
C. Por último, Ana necesita ahorrar 400€. Decide entregar una reserva de 5€ y partir con una cuota de C que irá incrementando en un 40%. ¿Cuántos plazos deberá realizar?.

T_{12}
¿Ha intentado resolver alguna de la situaciones de la tarea 11 mediante técnicas aritméticas, sin poner en funcionamiento el modelo algebraico? A. Si lo ha intentado, ¿ha podido resolver la situación con éxito? ¿Qué dificultades ha encontrado? Explique y justifique sus respuestas. B. Si no lo ha intentado, ¿podría explicar y justificar por qué ha desechado el trabajo aritmético?

Hasta el momento ha explorado dos tipos de planes de ahorro que hemos llamado, respectivamente, planes *equitativos* y de *cuota creciente por un porcentaje fijo*. Salvo por su mayor o menor complejidad matemática, no hay razones a priori para elegir uno frente al otro. Dependerá de la evolución del ahorro que cada uno nos ofrezca y de la situación e intereses de la persona que desea usarlos.

T_{13}
Según la oferta recibida de la agencia de viajes, el coste total del viaje de fin de curso va a ser de 400€. Se cuentan las semanas que quedan y se decide que se van a entregar 12 cuotas y 10€ en concepto de reserva (cuota inicial). A. Carlos desea realizar un ahorro *equitativo*. ¿Cómo serán sus cuotas? B. Rocío desea realizar un ahorro de cuota creciente por suma, comenzando por una cuota muy pequeña 2 euros e incrementándola en cada plazo un porcentaje fijo respecto de la cuota del plazo anterior. ¿Cómo serán sus cuotas? C. Compare la evolución, plazo a plazo, de ambos planes de ahorro.

Una vez que ha explorado estos nuevos planes de ahorro, le proponemos como tarea recapitular, resumir y presentar sus propiedades y cómo funcionan.

T_{14}
Elabore un resumen por escrito con todas las características de los planes de ahorro cuya cuota crece un porcentaje fijo plazo a plazo (puede incluir tablas, gráficas, fórmulas para poder calcular las cantidades ahorradas según las cuotas y los plazos, etc) para poder presentarlas como una propuesta a los alumnos. Es importante incluir

varios ejemplos.

Quinta unidad A: explorando planes de ahorro de cuota creciente (variación multiplicativa de la cuota).

En la segunda unidad exploró planes de ahorro con cuota fija (*equitativos*). En la tercera imaginó y exploró otros planes de ahorro en los que la cuota no fuese fija, sino que se fuese incrementado conforme los plazos van avanzando.

Entre los que usted y sus compañeros identificaron, en la cuarta unidad han trabajado en profundidad sobre planes de ahorro en los que la cuota iba creciendo de plazo en plazo, de forma aditiva (esto es, añadiendo una cantidad D a la cuota entregada en el plazo anterior).

Le proponemos explorar ahora otros tipos de planes de ahorro, que probablemente ya alguien propuso en la tercera unidad. De nuevo, son planes de ahorro en los que la cuota se incrementa plazo a plazo pero, en esta ocasión, no de forma aditiva sino aumentando en un porcentaje k la cuota entregada en el plazo anterior.

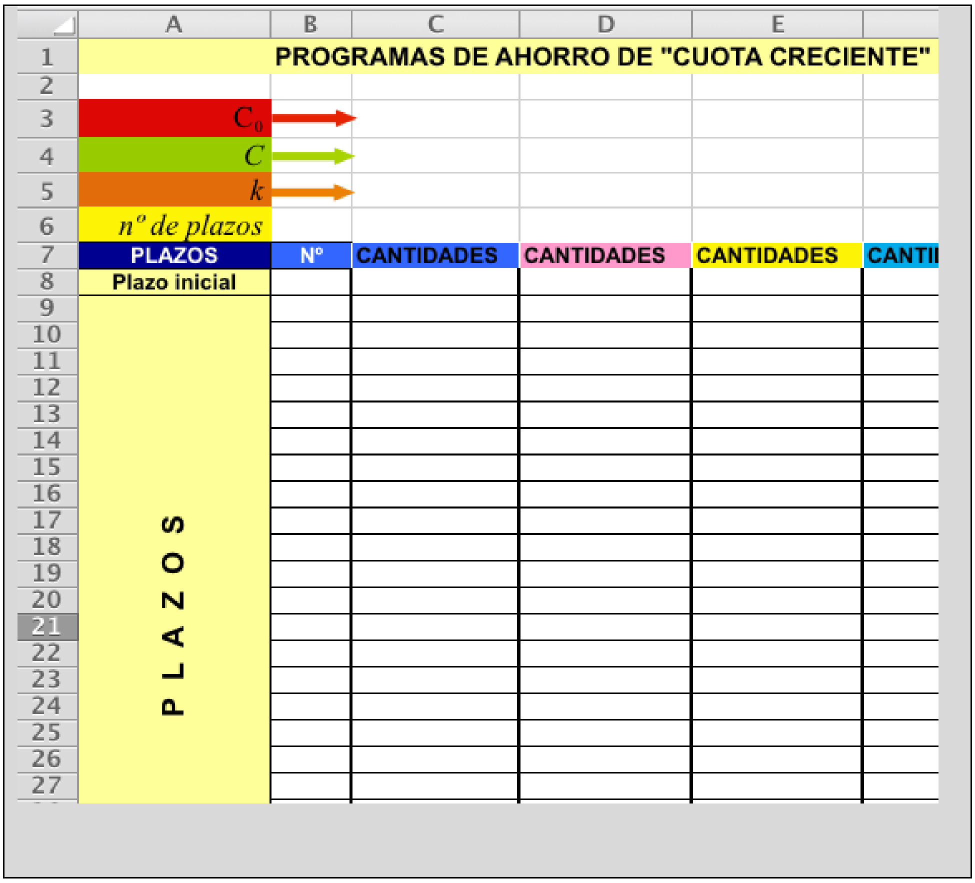
T_{15}
Proponga y simule varios ejemplos de *planes de ahorro de cuota creciente*, en los que la cuota aumente un porcentaje fijo en relación con la cuota del plazo anterior.

Sugerencia | ? Ayuda

? Ayuda: Son planes de ahorro en los que:

- Puede haber, o no, una cantidad inicial C_0
- En el primer plazo se entrega una cantidad C.
- En el segundo plazo se incrementa en un k% la cuota entregada en el primer plazo.
- En el tercer plazo se incrementa en un k% la cuota entregada en el segundo plazo.
- Así sucesivamente.

Sugerencia: si lo desea, puede usar la siguiente plantilla de Excel, o bien generar la suya propia. En caso de usar Excel, puede usar diferentes columnas para simular, a la vez, diferentes planes de ahorro.



T_{16}
Elabore diferentes planes de ahorro cuya cuota crezca según un porcentaje fijo, uno para cada una de las siguientes circunstancias (diferentes presupuestos ofertados por agencias de viajes):

- Plan 1 → Cantidad final ahorrada de 400 €
- Plan 2 → Cantidad final ahorrada de 650 €
- Plan 3 → Cantidad final ahorrada de 310 €

T_{17}
Elabore un modelo algebraico (una fórmula), en el que se relacionen los parámetros que definen estos planes (plazo n, cantidad inicial C_0, cuota C, porcentaje k de incremento de la cuota) con la cantidad ahorrada al cabo de n plazos (C_n).

? Ayuda

? Ayuda: de nuevo, puede probar a extender la técnica basada en la ley recursiva que define este tipo de planes y que ya usó para construir los modelos algebraicos de los planes *equitativos* y de los de *cuota creciente*

por suma.

Como en la cuarta unidad, le proponemos algunos casos hipotéticos sobre los que poner a prueba el alcance y la pertinencia de los modelos aritméticos y algebraicos.

T_{18}

A. Luis necesita ahorrar 270€. Decide ahorrar en 11 plazos, con una reserva de 3€ (C_0) y una cuota C que irá incrementando un 25% en cada plazo. ¿Cuánto vale C?
B. María, sin embargo, necesita ahorrar 300€ en 15 plazos. Decide entregar una reserva de 10€ (C_0) y una cuota C que irá incrementando en un 20%. ¿Cuánto vale C?
C. Por último, Ana necesita ahorrar 400€. Decide entregar una reserva de 5€ y partir con una cuota de C que irá incrementando en un 40%. ¿Cuántos plazos deberá realizar?.

T_{19}

¿Ha intentado resolver alguna de la situaciones de la tarea 18 mediante técnicas aritméticas, sin poner en funcionamiento el modelo algebraico?

A. Si lo ha intentado, ¿ha podido resolver la situación con éxito? ¿Qué dificultades ha encontrado? Explique y justifique sus respuestas.
B. Si no lo ha intentado, ¿podría explicar y justificar por qué ha desechado el trabajo aritmético?

Ahora ya ha explorado en profundidad tres tipos diferentes de planes de ahorro. De nuevo cada usuario podría decidir acogerse a uno u otro en función de sus intereses y circunstancias personales. Le proponemos que "complete" la tarea 13 añadiendo el nuevo tipo de ahorro que ha explorado en esta quinta unidad.

T_{20}

Según la oferta recibida de la agencia de viajes, el coste total del viaje de fin de curso va a ser de 400€. Se cuentan las semanas que quedan y se decide que se van a entregar 12 cuotas y 10€ en concepto de reserva (cuota inicial).

A. Carlos desea realizar un ahorro *equitativo*. ¿Cómo serán sus cuotas?
B. Rocío desea realizar un ahorro de cuota creciente por suma, comenzando por una cuota muy pequeña 2 euros e incrementándola en cada plazo mediante la suma de una cantidad D fija. ¿Cómo serán sus cuotas?
C. Luisa desea realizar un ahorro de cuota creciente, comenzando por una cuota muy pequeña 2 euros e incrementándola en cada plazo un porcentaje fijo respecto de la cuota del plazo anterior. ¿Cómo serán sus cuotas?
D. Compare la evolución, plazo a plazo, de ambos planes de ahorro.

T_{21}
Elabore un resumen por escrito con todas las características de los planes de ahorro cuya cuota crece un porcentaje fijo plazo a plazo (puede incluir tablas, gráficas, fórmulas para poder calcular las cantidades ahorradas según las cuotas y los plazos, etc) para poder presentarlas como una propuesta a los alumnos. Es importante incluir varios ejemplos.

Quinta unidad B: explorando planes de ahorro de cuota creciente (variación aditiva de la cuota).

En la segunda unidad exploró planes de ahorro con cuota fija (*equitativos*). En la tercera imaginó y exploró otros planes de ahorro en los que la cuota no fuese fija, sino que se fuese incrementado conforme los plazos van avanzando.

Entre los que usted y sus compañeros identificaron, en la cuarta unidad han trabajado en profundidad sobre planes de ahorro en los que la cuota se iba incrementando un porcentaje fijo de plazo en plazo.

Le proponemos explorar ahora otros tipos de planes de ahorro que probablemente ya alguien propuso en la tercera unidad. De nuevo, son planes de ahorro en los que la cuota se incrementa plazo a plazo pero, en esta ocasión, no de forma multiplicativa sino sumando una cantidad fija D a la cuota que se entregó en el plazo anterior.

T_{15}
Proponga y simule varios ejemplos de *planes de ahorro de cuota creciente*, en los que la cuota aumente una cantidad fija D respecto a la cuota del plazo anterior.

Sugerencia | ? Ayuda

? Ayuda: Son planes de ahorro en los que:

- Puede haber, o no, una cantidad inicial C_0
- En el primer plazo se entrega una cantidad C.
- En el segundo plazo se entrega lo mismo que se entregó en el primero, más D.
- En el tercer plazo se entrega lo mismo que se entregó en el segundo, más D.
- Así sucesivamente.

Sugerencia: si lo desea, puede usar la siguiente plantilla de Excel, o bien generar la suya propia. En caso de usar Excel, puede utilizar diferentes columnas para simular, a la vez, diferentes planes de ahorro.

T$_{16}$

Elabore diferentes *planes de ahorro con cuota creciente aditivamente*, uno para cada una de las siguientes circunstancias (diferentes presupuestos ofertados por agencias de viajes):

- Plan 1 → Cantidad final ahorrada de 400 €
- Plan 2 → Cantidad final ahorrada de 650 €
- Plan 3 → Cantidad final ahorrada de 310 €

T$_{17}$

Elabore un modelo algebraico (una fórmula), en el que se relacionen los parámetros que definen estos planes (plazo n, cantidad inicial C_0, cuota C, incremento D) con la cantidad ahorrada al cabo de n plazos.

? Ayuda

? Ayuda: de nuevo, puede probar a extender la técnica basada en la ley recursiva que define este tipo de planes y que ya usó para construir los modelos algebraicos de los planes *equitativos* y de los *de cuota creciente porcentualmente*.

Como en la cuarta unidad, le proponemos algunos casos hipotéticos sobre los que poner a prueba el alcance y la pertinencia de los modelos aritméticos y algebraicos.

T_{18}
A. Luis necesita ahorrar 410€. Decide ahorrar en 12 plazos, con una cuota de 5€ que irá aumentando sucesivamente de 5 en 5 euros. ¿Qué cantidad inicial debe poner? B. Ana, sin embargo, necesita ahorrar 408€ con un plan de ahorro de cuota creciente por suma. Decide entregar una cantidad inicial de 3€ y partir con una cuota de 9€, que irá aumentando sucesivamente de 6 en 6 euros. ¿Cuántos plazos deberá realizar? C. Por último, María, desea ahorrar 430€ en 14 plazos, con un plan de ahorro de cuota creciente por suma. Decide entregar una cantidad inicial de 10€. ¿Con qué cantidad C deberá partir y cómo debe irla aumentando?

T_{19}
¿Ha intentado resolver alguna de la situaciones de la tarea 18 mediante técnicas aritméticas, sin poner en funcionamiento el modelo algebraico? A. Si lo ha intentado, ¿ha podido resolver la situación con éxito? ¿Qué dificultades ha encontrado? Explique y justifique sus respuestas. B. Si no lo ha intentado, ¿podría explicar y justificar por qué ha desechado el trabajo aritmético?

Ahora ya ha explorado en profundidad tres tipos diferentes de planes de ahorro. De nuevo cada usuario podría decidir acogerse a uno u otro en función de sus intereses y circunstancias personales. Le proponemos que "complete" la tarea 13 añadiendo el nuevo tipo de ahorro que ha explorado en esta quinta unidad.

T_{20}
Según la oferta recibida de la agencia de viajes, el coste total del viaje de fin de curso va a ser de 400€. Se cuentan las semanas que quedan y se decide que se van a entregar 12 cuotas y 10€ en concepto de reserva (cuota inicial). A. Carlos desea realizar un ahorro *equitativo*. ¿Cómo serán sus cuotas en los sucesivos plazos? ¿Cómo evolucionarán sus ahorros? B. Rocío desea realizar un ahorro de cuota creciente, comenzando por una cuota muy pequeña 2 euros e incrementándola en cada plazo un porcentaje fijo respecto de la cuota del plazo anterior. ¿Cómo serán sus cuotas en los sucesivos plazos? ¿Cómo evolucionarán sus ahorros? C. Luisa desea realizar un ahorro de cuota creciente por suma, comenzando por una cuota muy pequeña 2 euros e incrementándola en cada plazo mediante la suma de una cantidad D fija. ¿Cómo serán sus cuotas? D. Compare la evolución, plazo a plazo, de ambos planes de ahorro.

T_{21}
Elabore un resumen por escrito con todas las características de los planes de ahorro cuya cuota crece aditivamente una cantidad D plazo a plazo (puede incluir tablas, gráficas, fórmulas para poder calcular las cantidades ahorradas según las cuotas y los plazos, etc) para poder presentarlas como una propuesta a los alumnos. Es importante incluir varios ejemplos.

FASE 2: El estudiante-profesor vive en posición de tal un REI didáctico-matemático

Introducción:

La proporcionalidad es sin duda uno de los temas centrales en la enseñanza obligatoria, que los alumnos comienzan a explorar durante la Educación Primaria en situaciones multiplicativas de variación equitativa (por ejemplo, si por una lata de refresco pago 1,20€, por tres latas pagaré el triple), pero que se convierte en objeto explícito de estudio en el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria y, en ocasiones, perdura hasta el segundo ciclo.

Sin embargo, ¿a qué nos referimos cuando hablamos de proporcionalidad?

Si nos limitamos a la proporcionalidad en la educación secundaria, algunos libros de texto ofrecen las siguientes definiciones:

> Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar el valor de una de ellas por un número dado, el correspondiente valor de la otra queda también multiplicado por el mismo número.
>
> Oxford University Press España – Proyecto Exedra (2002)

Magnitudes directamente proporcionales

Las tablas siguientes reproducen la información que habían visto Raúl y Laura. Obsérvalas:

Bolsas (masa)	*Precio (céntimos de euro)*
1 kg	55
2 kg	110
4 kg	220
10 kg	550

× 2 × 10

Bolsas (masa)	*Precio (céntimos de euro)*
1 kg	55
2 kg	110
4 kg	220
10 kg	550

: 10 : 5

- Al multiplicar la masa por una constante, el valor de su precio queda multiplicado por la misma constante.
- Al dividir la masa por una constante, el valor de su precio queda dividido por la misma constante.

Diremos que estas magnitudes son *directamente proporcionales*, o que entre ellas hay una *proporcionalidad directa*.

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar o dividir un valor de una de las magnitudes por una constante, el valor correspondiente de la otra queda multiplicado o dividido por la misma constante.

Guadiel – Grupo Edebé(2003)

Automáticamente asociamos la proporcionalidad con una actividad de carácter principalmente aritmético cuya máximo exponente lo constituye la ***regla de tres***. De hecho, es habitual que los libros de texto y las programaciones docentes la sitúen antes de que el alumno entre en el estudio del álgebra.

Pero la proporcionalidad es variación entre magnitudes, variación funcional de hecho, y reaparece, a veces camuflada, cuando se introducen las relaciones funcionales, en concreto en las funciones lineales. Sin embargo, rara vez los alumnos conectan este estudio con el trabajo aritmético, en torno a la regla de tres, que hicieron meses atrás. Tampoco los libros de texto lo pretenden. Como mucho, las situaciones proporcionales se usan para *motivar* el estudio de la funciones lineales las cuales, una vez introducidas, se independizan lo más rápidamente posible del *mundo proporcional* y de los tipos de problemas que allí se resolvían, para adentrase en el ***mundo funcional***, caracterizado por otros tipos de problemas, otros tipos de técnicas matemáticas y de resultados matemáticos.

En particular, la conexión con contextos y situaciones más o menos cotidianas[14], característica del estudio "clásico" de la proporcionalidad, queda relegada a los problemas finales "de aplicación" de las funciones lineales, mientras que emerge todo un conjunto de problemas nuevos para el alumno, con un marcado carácter geométrico-analítico (pendiente de una recta, puntos de corte con los ejes, corte entre dos rectas), desligados de cualquier contexto extra-matemático.

De esta forma, usando un leguaje provocador, podíamos afirmar que el sistema somete al alumno a una situación de ***esquizofrenia proporcional*** que, en la mayoría de los casos, no puede gestionar más que aceptando la autoridad impuesta que emana de la institución escolar. O tal vez podíamos hablar de que el alumno es víctima de una desarticulación de la matemática escolar, que no es malintencionada en sí mismo sino que es fruto de la necesidad que tiene todo saber de ser adaptado y estructurado para encontrar un lugar donde *vivir* dentro del sistema escolar.

Esta situación sin duda se agrava cuando la función lineal se convierte en la puerta de entrada a un universo nuevo, y sin duda espectacular: el universo de las funciones y, más allá, del análisis matemático. Es entonces cuando definitivamente la proporcionalidad "clásica" sufre un profundo desvanecimiento en el sistema de enseñanza hasta quedar relegada a ese argumento molesto que los alumnos con

[14] Muy a menudo forzadas e irreales.

determinada frecuencia aplican por doquier, tanto en situaciones proporcionales como no proporcionales. Este fenómeno está ampliamente documentado en la investigación en didáctica de las matemáticas y seguro que ha sido vivido por muchos profesores de matemáticas y de ciencias en innumerables ocasiones (nos referimos al uso indiscriminado de la *regla de tres* cada vez que hay que determinar un valor desconocido).

No pretendemos cuestionar aquí si es lo ideal, o no, que los alumnos primero estudien la proporcionalidad desde esta visión "clásica" y aritmética antes de entrar en el mundo funcional. Sin duda sería imposible llegar a un consenso en este sentido. Sin embargo, sí nos surgen otras preguntas que consideramos relevantes: los alumnos de secundaria, de forma mayoritaria, hacen un uso abusivo de "lo proporcional" pero, ¿han tenido alguna vez la *oportunidad* real de cuestionar qué tipos de variaciones se pueden dar entre dos o más magnitudes? ¿Mayoritariamente les ofrecemos a los alumnos situaciones en los que el tipo de variación ya está determinado de antemano y, como mucho, es su responsabilidad determinar cuál es y movilizar los objetos matemáticos pertinentes? ¿Han podido explorar alguna vez la limitación de las técnicas aritméticas, como la regla de tres, y la necesidad de introducir la herramienta algebraica? ¿Han tenido la oportunidad de estudiar de forma integrada las relaciones funcionales, entre las que la proporcionalidad es una más?

ANEXO 3

Planes de ahorro equitativos

1.- Distribuccion temporal de cuotas uniforme
2.- Cuota fija Cf a pagar en cada plazo
3.- Cuota inicial Ci en concepto de reserva

T1 Realizada en clase y entregada

T2

	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3	PLAN 4	PLAN 5	PLAN 6
Ci	100	100	150	150	200	200
Cf	15	20	10	12,5	8	10
Precio viaje	400	400	400	400	400	400
N. de plazos	20	15	25	20	25	20

PLAZOS	N	ANTIDADE	ANTIDADE	ANTIDADE	ANTIDADE	ANTIDADE	ANTIDADES
Plazo inicial	0	100	100	150	150	200	200
Plazo n	1	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	2	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	3	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	4	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	5	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	6	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	7	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	8	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	9	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	10	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	11	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	12	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	13	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	14	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	15	15	20	10	12,5	8	10
Plazo n	16	15	0	10	12,5	8	10
Plazo n	17	15	0	10	12,5	8	10
Plazo n	18	15	0	10	12,5	8	10
Plazo n	19	15	0	10	12,5	8	10
Plazo n	20	15	0	10	12,5	8	10
Plazo n	21	0	0	10	0	8	0
Plazo n	22	0	0	10	0	8	0
Plazo n	23	0	0	10	0	8	0
Plazo n	24	0	0	10	0	8	0
Plazo n	25	0	0	10	0	8	0
TOTAL		400	400	400	400	400	400

T5

	A1	A2	B1	B2	Luis	Ana
Ci	0	0	60	20	60	15
Cf	60	36	25	25	20	23
Precio viaje	360	360	360	360	360	360
N. de plazos	6	10	12	13,6	15	15

T4 plazos= (Precio viaje-cuota inicial)/cuota fi

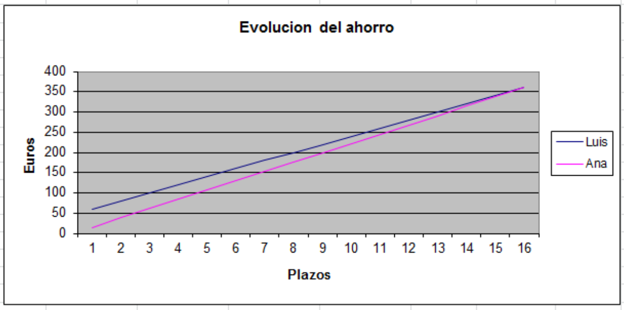
Simplemente establecemos una formula para saber el numero de plazos de cuota fija que necesito pagar, el resto simplemente con una tabla

T3

	PLAN 1	PLAN 3	PLAN 4
Ci	100	150	100
Cf	15	20	10
Precio viaje	400	650	310
N. de plazos	20	25	21

PLAZOS	N	CANTIDADE	CANTIDADE	CANTIDADES
Plazo inicial	0	100	150	100
Plazo n	1	15	20	10
Plazo n	2	15	20	10
Plazo n	3	15	20	10
Plazo n	4	15	20	10
Plazo n	5	15	20	10
Plazo n	6	15	20	10
Plazo n	7	15	20	10
Plazo n	8	15	20	10
Plazo n	9	15	20	10
Plazo n	10	15	20	10
Plazo n	11	15	20	10
Plazo n	12	15	20	10
Plazo n	13	15	20	10
Plazo n	14	15	20	10
Plazo n	15	15	20	10
Plazo n	16	15	20	10
Plazo n	17	15	20	10
Plazo n	18	15	20	10
Plazo n	19	15	20	10
Plazo n	20	15	20	10
Plazo n	21	0	20	10
Plazo n	22	0	20	0
Plazo n	23	0	20	0
Plazo n	24	0	20	0
Plazo n	25	0	20	0
TOTAL		400	650	310

Plazo	Luis	Ana
0	60	15
1	80	38
2	100	61
3	120	84
4	140	107
5	160	130
6	180	153
7	200	176
8	220	199
9	240	222
10	260	245
11	280	268
12	300	291
13	320	314
14	340	337
15	360	360



T6 RESUMEN

Un plan de ahorro equitativo se caracteriza porque se ahorra una cantidad de dinero constante (Cf) en un número de plazos determinado (N). De tal manera que sabiendo la cantidad a ahorrar (A) y el posible ahorro inicial o cuota inicial (Ci) obtenemos las cuotas a ahorrar (Cf) en cada plazo fijando el número de plazos o el número de plazos (N) si fijamos la cuota a pagar en cada plazo (Cf).

Así, si fijamos la cuota a ahorrar en cada plazo, el número de plazos vendría dado por N=(A-Ci)/Cf, podemos ver un ejemplo en los casos B1 y B2 de la T5.

Análogamente, si fijamos el número de plazos la cuota fija a ahorrar se obtiene de Cf=(A-I)/N, podemos ver otro ejemplo en los casos A1 y A2 de la T5.

Planes		Semanal	Quincenal	Mensual
C0		50	50	50
C		15	25	50
Nº PLAZOS		20	10	5
PLAZOS	Nº	CANTIDAD	CANTIDAD	CANTIDAD
Plazo inicial	0	50	50	50
Plazo	1	65	75	100
Plazo	2	80	100	150
Plazo	3	95	125	200
Plazo	4	110	150	250
Plazo	5	125	175	300
Plazo	6	140	200	
Plazo	7	155	225	
Plazo	8	170	250	
Plazo	9	185	275	
Plazo	10	200	300	
	11	215		
	12	230		
	13	245		
	14	260		
	15	275		
	16	290		
	17	305		
	18	320		
	19	335		
	20	350		
Total		350	300	300

Tarea 1 | Tarea 2 y Tarea 3 | Tarea 4 | Hoja para resumen

Planes		Plan 1 (Quincenal)	Plan 2 (Mensual)	Plan 3 (Semanal)
C0		80	170	50
C		20	60	13
Nº PLAZOS		16	8	20
PLAZOS	Nº	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	80	170	50
Plazo	1	100	230	63
Plazo	2	120	290	76
Plazo	3	140	350	89
Plazo	4	160	410	102
Plazo	5	180	470	115
Plazo	6	200	530	128
Plazo	7	220	590	141
Plazo	8	240	650	154
Plazo	9	260		167
Plazo	10	280		180
Plazo	11	300		193
Plazo	12	320		206
Plazo	13	340		219
Plazo	14	360		232
Plazo	15	380		245
Plazo	16	400		258
Plazo	17			271
Plazo	18			284
Plazo	19			297
Plazo	20			310
Total		400	650	310

Los modelos algebraicos de los tres planes son de la forma A = Cp + C0 donde A es el dinero ahorrado, C es la cuota fijada para cada plazo p y C0 es la cuota inicial

Plan 1	A = 20p + 80	p = 1,...,16
Plan 2	A = 60p + 170	p = 1,...,8
Plan 3	A = 13p + 50	p = 1,...,20

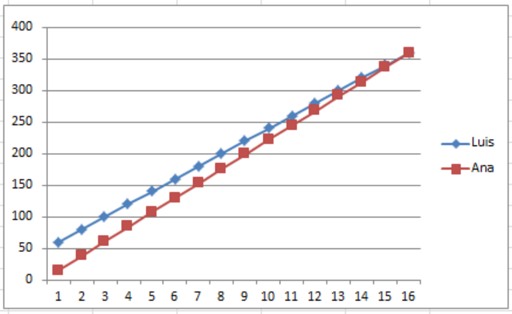
Tarea 1 | Tarea 2 y Tarea 3 | Tarea 4 | Hoja para resumen

PLAZOS	Nº	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	0	0	60	20	60	15
Plazo	1	60	36	85	45	80	38
Plazo	2	120	72	110	70	100	61
Plazo	3	180	108	135	95	120	84
Plazo	4	240	144	160	120	140	107
Plazo	5	300	180	185	145	160	130
Plazo	6	360	216	210	170	180	153
Plazo	7		252	235	195	200	176
Plazo	8		288	260	220	220	199
Plazo	9		324	285	245	240	222
Plazo	10		360	310	270	260	245
	11			335	295	280	268
	12			360	320	300	291
	13				345	320	314
	14				360	340	337
						360	360
Total		360	360	360	360	360	360

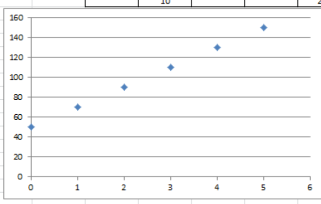
A. El grupo debe aportar una cuota de 60€.
Si desean realizar el ahorro en 10 cuotas, cada cuota sería de 36€

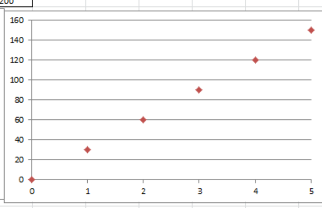
B. El grupo debe realizar 12 plazos.
Si la cuota inicial fuera de 20€ deberían realizar 14 plazos, pero en el último solo deberían pagar 15 €.

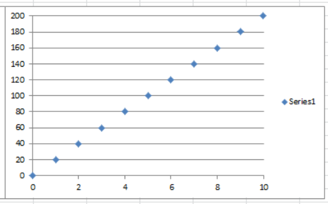
C. La cuota de Luis es de 20€ mientras que la de Ana es de 23€.



		Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
Plazos	0	50	0	0
	1	70	30	20
	2	90	60	40
	3	110	90	60
	4	130	120	80
	5	150	150	100
	6			120
	7			140
	8			160
	9			180
	10			200







C59 f_x 0

Planes de ahorro cuota creciente

1.- Distribución temporal uniforme de cuotas creciente
2.- Cuota C2
3.- Cuota primer plazo C1
4.- Cuota inicial Ci en concepto de reserva

T7

	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3	PLAN 4	PLAN 5	PLAN 6
Ci	0	44	23	2	7	49
C1	10	10	5	10	3	5
C2	5	7	4	6	2	2
Precio viaje	400	600	400	600	400	600
N. de plazos (semanas)	13	13	13	13	13	13

PLAZOS	N	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	0	44	23	2	7	49
Plazo n	1	10	54	28	12	10	54
Plazo n	2	15	61	37	28	15	61
Plazo n	3	25	75	50	50	25	75
Plazo n	4	40	96	67	78	40	96
Plazo n	5	60	124	88	112	60	124
Plazo n	6	85	159	113	152	85	159
Plazo n	7	115	201	142	198	115	201
Plazo n	8	150	250	175	250	150	250
Plazo n	9	190	306	212	308	190	306
Plazo n	10	235	369	253	372	235	369
Plazo n	11	285	439	298	442	285	439
Plazo n	12	340	516	347	518	340	516
Plazo n	13	400	600	400	600	400	600
Plazo n	14	0	0	0	0	0	0
Plazo n	15	0	0	0	0	0	0

T10 **Modelo algebraico**

$$Cn = Ci + n\cdot C + \sum_{i=1}^{n}(n-1)\cdot D \quad \text{o} \quad Cn = Ci + n\cdot C + n\cdot(n-1)\cdot D/2$$

T11

	Luis	Ana	Maria	Luis	Ana	Maria
Ci	10	3	10	10	3	10
C	5	9	4	5	9	4
D	5	6	4	5	6	4
Precio viaje	410	408	430	410	408	430
N. de plazos	12	11	14	12	10,66	14
(semanas)				Tabla con las formulas algebraicas		

PLAZOS	N	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	10	3	10
Plazo n	1	15	12	14
Plazo n	2	25	27	22
Plazo n	3	40	48	34
Plazo n	4	60	75	50
Plazo n	5	85	108	70
Plazo n	6	115	147	94
Plazo n	7	150	192	122
Plazo n	8	190	243	154
Plazo n	9	235	300	190
Plazo n	10	285	363	230
Plazo n	11	340	432	274
Plazo n	12	400	0	322
Plazo n	13	0	0	374
Plazo n	14	0	0	430
Plazo n	15	0	0	0

T12

a) No he encontrado dificultades en el caso de Luis y Ana gracias al excel, en el caso de Maria he tenido que hacer

Planes de ahorro cuota creciente aditiva

1.- Distribución temporal uniforme de cuotas creciente
2.- Cuota creciente D
3.- Cuota primer plazo C
4.- Cuota inicial Ci en concepto de reserva

T8

	PLAN 1	PLAN 3	PLAN 4
Ci	23	2	46
C	5	10	10
D	4	6	8
Precio viaje	400	600	800
N. de plazos (semanas)	13	13	13

PLAZOS	N	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	23	2	46
Plazo n	1	28	12	56
Plazo n	2	37	28	74
Plazo n	3	50	50	100
Plazo n	4	67	78	134
Plazo n	5	88	112	176
Plazo n	6	113	152	226
Plazo n	7	142	198	284
Plazo n	8	175	250	350
Plazo n	9	212	308	424
Plazo n	10	253	372	506
Plazo n	11	298	442	596
Plazo n	12	347	518	694
Plazo n	13	400	600	800
Plazo n	14	0	0	0
Plazo n	15	0	0	0

Planes de ahorro cuota creciente aditiva

1.- Distribución temporal uniforme de cuotas creciente
2.- Cuota creciente D
3.- Cuota primer plazo C
4.- Cuota inicial Ci en concepto de reserva

T9

	PLAN 1	PLAN 3	PLAN 4
Ci	10	2	24
C	6	10	10
D	4	6	2
Precio viaje	400	650	310
N. de plazos (semanas)	13	13	13

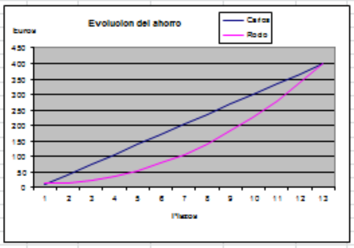
PLAZOS	N	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	10	2	24
Plazo n	1	16	12	34
Plazo n	2	26	28	46
Plazo n	3	40	50	60
Plazo n	4	58	78	76
Plazo n	5	80	112	94
Plazo n	6	106	152	114
Plazo n	7	136	198	136
Plazo n	8	170	250	160
Plazo n	9	208	308	186
Plazo n	10	250	372	214
Plazo n	11	296	442	244
Plazo n	12	346	518	276
Plazo n	13	400	600	310
Plazo n	14	0	0	0
Plazo n	15	0	0	0

T13

	Carlos
Ci	10
Cf	32,5
Precio viaje	400
N. de plazos (semanas)	12

	Rocio
Ci	13
C	2
D	5,5
Precio viaje	400
N. de plazos (semanas)	12

PLAZOS	N	Carlos	Rocio	PLAZOS	N	NTIDADES
Plazo inicial	0	10	13	Plazo inicial	0	13
Plazo n	1	42,5	15	Plazo n	1	15
Plazo n	2	75	22,5	Plazo n	2	22,5
Plazo n	3	107,5	35,5	Plazo n	3	35,5
Plazo n	4	140	54	Plazo n	4	54
Plazo n	5	172,5	78	Plazo n	5	78
Plazo n	6	205	107,5	Plazo n	6	107,5
Plazo n	7	237,5	142,5	Plazo n	7	142,5
Plazo n	8	270	183	Plazo n	8	183
Plazo n	9	302,5	229	Plazo n	9	229
Plazo n	10	335	280,5	Plazo n	10	280,5
Plazo n	11	367,5	337,5	Plazo n	11	337,5
Plazo n	12	400	400	Plazo n	12	400



Los planes de ahorros equitativos presentan una evolución del ahorro constante en el tiempo, mientras que los planes de ahorro con cuota creciente permiten un ahorro inicial menor que progresivamente se va incrementando, de manera que las primeras cuotas a ahorrar son menores que las del ahorro equitativo y las posteriores son mayores.

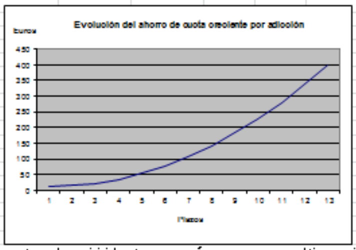
T14

Los planes de ahorro de cuota creciente se basan en la siguiente fórmula

$$\boxed{Cn = Ci + n \cdot C + n \cdot (n-1) \cdot D/2}$$

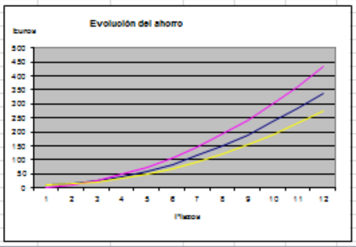
donde Cn es el ahorro en el plazo n, Ci es la cuota inicial, C es la cuota del primer plazo y D es la cuota que en cada plazo incrementa la cuota anterior de ahorro y n la cantidad de plazos.

Su evolución a lo largo del tiempo se refleja en la siguiente grafica



Las cuotas a ahorrar inicialmente son pequeñas, pero crecen con el tiempo, siendo las posteriores muy elevadas

En la siguiente gráfica se presentan la evolucion de los ahorros de varios ejemplos vistos



Planes de ahorro equitativos

1.- Distribuccion temporal de cuotas uniforme
2.- Cuota fija Cf a pagar en cada plazo
3.- Cuota inicial Ci en concepto de reserva

T1 Realizada en clase y entregada

T4 N plazos= (Precio viaje-cuota inicial)/cuota fija

Simplemente establecemos una formula para saber el numero de plazos de cuota fija que necesito pagar, el resto simplemente con una tabla

T2

	PLAN 1	PLAN 2	PLAN 3	PLAN 4	PLAN 5	PLAN 6
Ci	100	100	150	150	200	200
Cf	15	20	10	12,5	8	10
Precio viaje	400	400	400	400	400	400
N. de plazos (semanas)	20	15	25	20	25	20

PLAZOS	N	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	100	100	150	150	200	200
Plazo n	1	115	120	160	162,5	208	210
Plazo n	2	130	140	170	175	216	220
Plazo n	3	145	160	180	187,5	224	230
Plazo n	4	160	180	190	200	232	240
Plazo n	5	175	200	200	212,5	240	250
Plazo n	6	190	220	210	225	248	260
Plazo n	7	205	240	220	237,5	256	270
Plazo n	8	220	260	230	250	264	280
Plazo n	9	235	280	240	262,5	272	290
Plazo n	10	250	300	250	275	280	300
Plazo n	11	265	320	260	287,5	288	310
Plazo n	12	280	340	270	300	296	320
Plazo n	13	295	360	280	312,5	304	330
Plazo n	14	310	380	290	325	312	340
Plazo n	15	325	400	300	337,5	320	350
Plazo n	16	340	0	310	350	328	360
Plazo n	17	355	0	320	362,5	336	370
Plazo n	18	370	0	330	375	344	380
Plazo n	19	385	0	340	387,5	352	390
Plazo n	20	400	0	350	400	360	400
Plazo n	21	0	0	360	0	368	0
Plazo n	22	0	0	370	0	376	0
Plazo n	23	0	0	380	0	384	0
Plazo n	24	0	0	390	0	392	0
Plazo n	25	0	0	400	0	400	0
TOTAL		400	400	400	400	400	400

T3

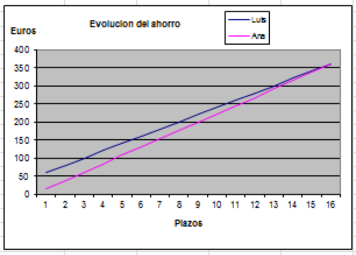
	PLAN 1	PLAN 3	PLAN 4
Ci	100	150	100
Cf	15	20	10
Precio viaje	400	650	310
N. de plazos (semanas)	20	25	21

PLAZOS	N	CANTIDADES	CANTIDADES	CANTIDADES
Plazo inicial	0	100	150	100
Plazo n	1	115	170	110
Plazo n	2	130	190	120
Plazo n	3	145	210	130
Plazo n	4	160	230	140
Plazo n	5	175	250	150
Plazo n	6	190	270	160
Plazo n	7	205	290	170
Plazo n	8	220	310	180
Plazo n	9	235	330	190
Plazo n	10	250	350	200
Plazo n	11	265	370	210
Plazo n	12	280	390	220
Plazo n	13	295	410	230
Plazo n	14	310	430	240
Plazo n	15	325	450	250
Plazo n	16	340	470	260
Plazo n	17	355	490	270
Plazo n	18	370	510	280
Plazo n	19	385	530	290
Plazo n	20	400	550	300
Plazo n	21	0	570	310
Plazo n	22	0	590	0
Plazo n	23	0	610	0
Plazo n	24	0	630	0
Plazo n	25	0	650	0
TOTAL		400	650	310

T5

	A1	A2	B1	B2	Luis	Ana
Ci	0	0	60	20	60	15
Cf	60	36	25	25	20	23
Precio viaje	360	360	360	360	360	360
N. de plazos	6	10	12	13,6	15	15

Plazo	Luis	Ana
0	60	15
1	80	38
2	100	61
3	120	84
4	140	107
5	160	130
6	180	153
7	200	176
8	220	199
9	240	222
10	260	245
11	280	268
12	300	291
13	320	314
14	340	337
15	360	360



T6 RESUMEN

13	320	314
14	340	337
15	360	360

Plazos

T6 RESUMEN

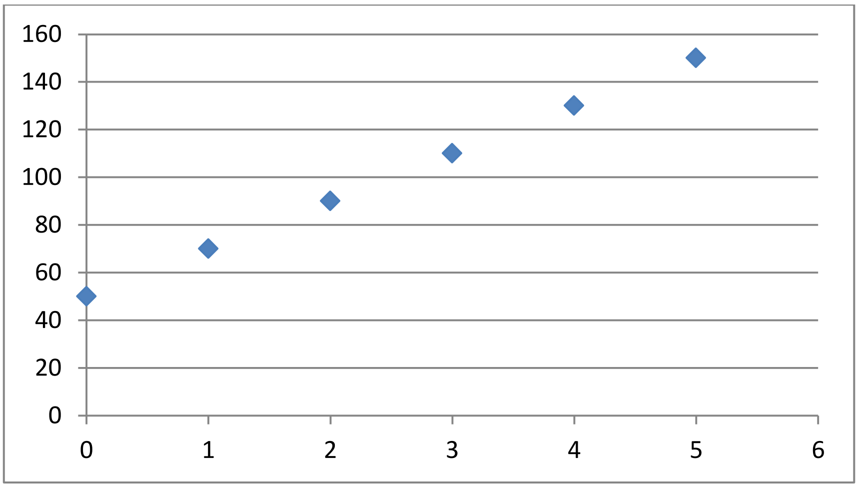
Un plan de ahorro equitativo se caracteriza porque se ahorra una cantidad de dinero constante (Cf) en un número de plazos determinado (N). De tal manera que sabiendo la cantidad a ahorrar (A) y el posible ahorro inicial o cuota inicial (Ci) obtenemos las cuotas a ahorrar (Cf) en cada plazo fijando el número de plazos o el número de plazos (N) si fijamos la cuota a pagar en cada plazo (Cf).

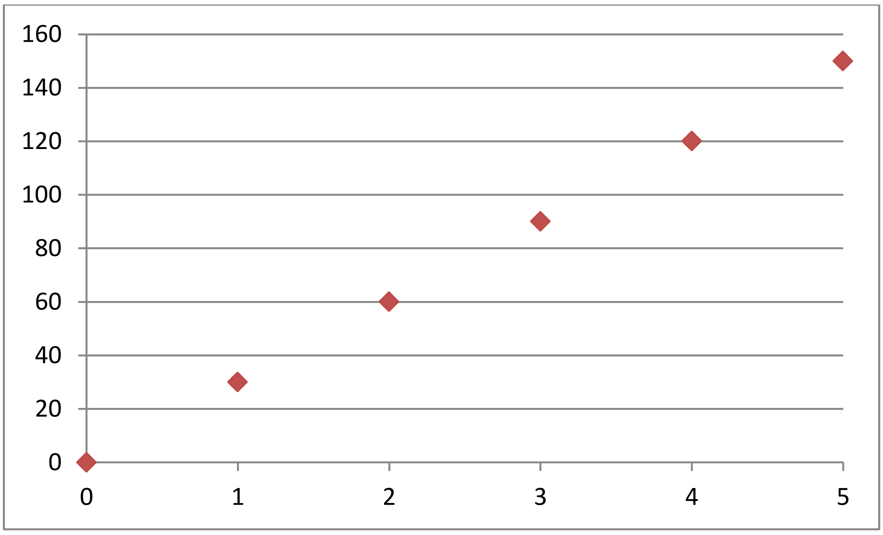
Así, si fijamos la cuota a ahorrar en cada plazo, el número de plazos vendría dado por N=(A-Ci)/Cf, podemos ver un ejemplo en los casos B1 y B2 de la T5.

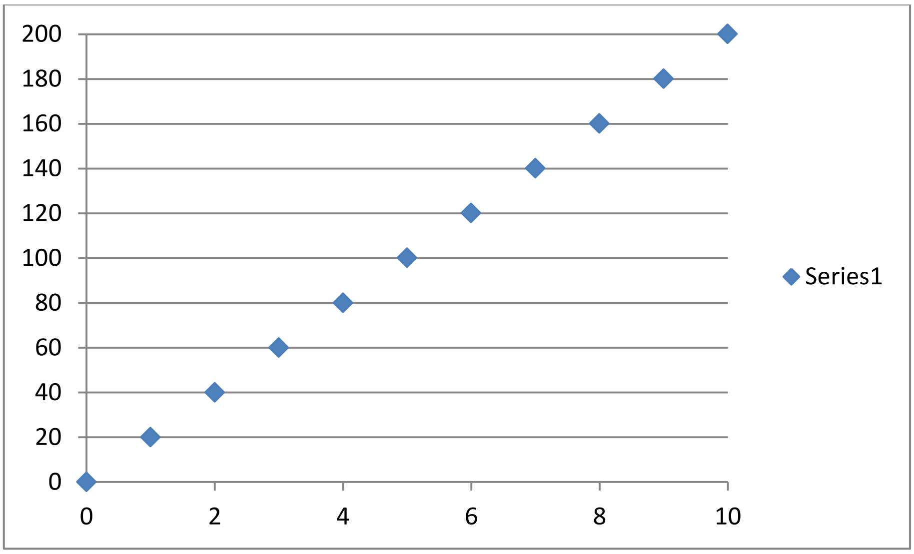
Análogamente, si fijamos el número de plazos la cuota fija a ahorrar se obtiene de Cf=(A-I)/N, podemos ver otro ejemplo en los casos A1 y A2 de la T5.

Para un misma cantidad a ahorrar (A), en función de la cantidad ahorrada inicial (Ci) podemos encontrar diferentes planes de ahorro en función de la cuota fija a ahorrar (Cf) que más nos interese o del número de plazos (N) que necesitemos. En el caso C de la T5 podemos observar la evolución del plano de ahorro equitativo tanto en su representación en tablas como en graficas cuando elegimos dos cuotas fijas a pagar diferentes. Análogamente se podría representar misma situación cuando en vez de la cuota fija estemos condicionados por un número de plazos
determinado.

Las cantidad ahorrada en cada momento (a) viene dada por a=Ci+ Cf x n, donde n representa al número de plazos ya ahorrados.


160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6


160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5


200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
Series1

ANEXO 4

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
Departament de Matemàtiques

Algunes nocions bàsiques en relació a la Modelització Matemàtica

Guió

1. Sistemes i qüestions problemàtiques
2. Models matemàtics i respostes provisionals
3. Recursivitat i reflexivitat
4. Quatre estadis del procés de modelització

- ✓ Delimitació del sistema
- ✓ Construcció del model i reformulació de les qüestions problemàtiques
- ✓ Treball tècnic dins el model i interpretació en l'àmbit del sistema
- ✓ Formulació de noves qüestions: el model s'independitza

2

1. Sistemes i qüestions problemàtiques

• Podem considerar que tota activitat matemàtica és (o es pot interpretar com) una activitat de **modelització matemàtica** (MM).

• El procés més elemental de MM es pot descriure mitjançant tres elements: el **sistema**, el **model** i la **relació** entre ells que estableix el procés de modelització.

• El sistema pot ser **matemàtic o extra-matemàtic**.

• El model matemàtic no pretén ser una "fotografia" del sistema (metàfora representacionalista).

• Una metàfora més adequada es la del model com a "màquina que produeix coneixements sobre el sistema"

3

1. Sistemes i qüestions problemàtiques

• La construcció d'un model d'un cert sistema sempre és conseqüència de la detecció de qüestions problemàtiques que no es poden respondre amb les eines del model.

• El sistema a modelitzar també es construeix (no hi ha res "donat d'antuvi") mitjançant una forta simplificació del sistema "brut" inicialment considerat.

• Aquesta **simplificació del sistema** (prèvia a la primera modelització explícita) pot passar desapercebuda, malgrat que és una autèntica modelització del sistema (matemàtic o extra-matemàtic).

• Aquesta simplificació-modelització inicial es fa en funció de les qüestions problemàtiques que es volen prendre en consideració.

4

2. Models matemàtics i respostes provisionals

• Veurem com el treball dins el model matemàtic permet construir respostes provisionals a les qüestions plantejades.

• Però, normalment, cadascuna de les respostes provisionals provoca l'emergència de noves qüestions que, al seu torn, requereixen de respostes i així successivament.

• D'aquesta manera un procés de MM es podrà descriure com una **arborescència o xarxa (o graf) de qüestions i respostes** (sempre provisionals).

• De vegades, les noves qüestions requereixen fer hipòtesis complementàries sobre el sistema (modificar el sistema). Si aquestes **hipòtesis són més dèbils**, llavors el **model serà més complex i més general.**

5

3. Recursivitat i reflexivitat

• La modelització matemàtica és un **procés recursiu** ja que, en moltes ocasions, és necessari prendre un model de un sistema com a sistema de un nou procés de modelització i així sucessivament.

• Anàlogament, el procés de MM conté etapes en les quals la **modelització és reflexiva**, és a dir, el sistema fa el paper de model del seu model. Exemple paradigmàtic: la geometria euclidiana.

• És important subratllar que malgrat que un procés de MM parteixi d'un sistema extra-matemàtic, la recursivitat del procés provocarà ràpidament la necessitat de modelitzar un sistema matemàtic (**modelització intra-matemàtica**).

6

4. Quatre estadis del procés de modelització

- En resum la MM, com a activitat recursiva i reflexiva, aplicable a sistemes matemàtics i extra-matemàtics, cobreix tota l'activitat matemàtica**, articulant-la** i donant-li un caràcter **funcional i flexible**.

- L'activitat de MM es pot esquematitzar mitjançant quatre estadis, sense entrar en detalls i sense voler prejutjar una successió temporal lineal entre ells.

7

1r estadi de la MM:
Delimitació del sistema a modelitzar

- El primer estadi d'aquest procés consisteix en la **delimitació d'un sistema** o àmbit de la "realitat" en el que apareix l'esmentada situació problemàtica.
- Aquesta delimitació (o "construcció") del sistema comporta **l'elecció de certs aspectes del sistema** que es fan operatius per mitjà de variables.
- Aquesta elecció és relativament arbitraria (està guiada per les qüestions a respondre) i sempre és **incompleta**.
- En cap cas podem pretendre **modelitzar integrament** un sistema. Això és obvi si el sistema és extra-matemàtic, però continua sent cert per a sistemes matemàtics.

8

Exemple de sistema modelitzable

- Podem considerar la situació problemàtica determinada per un mòbil la trajectòria del qual està formada per quatre trams: A, B, B' i A. Es suposa que el mòbil té velocitat constant en cada un d'ells, i que els trams B i B' tenen la mateixa longitud però són recorreguts en sentit contrari.

- **DELIMITACIÓ DEL SISTEMA:** Prendrem com a variables "rellevants" del sistema: el temps total t, la longitud x de tot el trajecte, les velocitats en els diferents trams u (en B), v (en B') i w (en ambdós trams designats per A) i la longitud y de cada un dels trams B i B'.

9

2n estadi de la MM: Construcció del model i reformulació de les qüestions

- S'estableix un cert número de **relacions M entre les variables** considerades. Aquest estadi es considera, normalment, com **l'elaboració del model M**.

- Si escrivim de **dues maneres diferents** el temps que triga el mòbil en recórrer els dos trams plans s'obté el següent model **M**:

$$\frac{x-2y}{w} = t - \left(\frac{y}{u} + \frac{y}{v}\right)$$

10

2n estadi de la MM:
Construcció del model i reformulació de les qüestions

[1] Un mòbil triga t hores en realitzar un determinat trajecte. Comença recorrent un tram pla a una velocitat de w Km/h i continua pujant un pendent a una velocitat de u Km/h. A continuació canvia el sentit de la marxa i baixa el mateixa pendent a una velocitat de v Km/h. Per fi recorre de nou el tram pla a una velocitat de w km/h. Sabent que la longitud del pendent és y km, calcula la longitud x de tot el trajecte.

11

2. Models matemàtics i respostes provisionals

• Veurem com el treball dins el model matemàtic permet construir respostes provisionals a les qüestions plantejades.

• Però, normalment, cadascuna de les respostes provisionals provoca l'emergència de noves qüestions que, al seu torn, requereixen de respostes i així successivament.

• D'aquesta manera un procés de MM es podrà descriure com una **arborescència o xarxa (o graf) de qüestions i respostes** (sempre provisionals).

• De vegades, les noves qüestions requereixen fer hipòtesis complementàries sobre el sistema (modificar el sistema). Si aquestes **hipòtesis són més dèbils**, llavors el **model serà més complex i més general.**

12

3. Recursivitat i reflexivitat

- La modelització matemàtica és un **procés recursiu** ja que, en moltes ocasions, és necessari prendre un model de un sistema com a sistema de un nou procés de modelització i així successivament.

- Anàlogament, el procés de MM conté etapes en les quals la **modelització és reflexiva**, és a dir, el sistema fa el paper de model del seu model. Exemple paradigmàtic: la geometria euclidiana.

- És important subratllar que malgrat que un procés de MM parteixi d'un sistema extra-matemàtic, la recursivitat del procés provocarà ràpidament la necessitat de modelitzar un sistema matemàtic (**modelització intra-matemàtica**).

13

4. Quatre estadis del procés de modelització

- En resum la MM, com a activitat recursiva i reflexiva, aplicable a sistemes matemàtics i extra-matemàtics, cobreix tota l'activitat matemàtica**, articulant-la** i donant-li un caràcter **funcional i flexible**.

- L'activitat de MM es pot esquematitzar mitjançant quatre estadis, sense entrar en detalls i sense voler prejutjar una successió temporal lineal entre ells.

14

1r estadi de la MM: Delimitació del sistema a modelitzar

- El primer estadi d'aquest procés consisteix en la **delimitació d'un sistema** o àmbit de la "realitat" en el que apareix l'esmentada situació problemàtica.
- Aquesta delimitació (o "construcció") del sistema comporta **l'elecció de certs aspectes del sistema** que es fan operatius per mitjà de variables.
- Aquesta elecció és relativament arbitraria (està guiada per les qüestions a respondre) i sempre és **incompleta**.
- En cap cas podem pretendre **modelitzar integrament** un sistema. Això és obvi si el sistema és extra-matemàtic, però continua sent cert per a sistemes matemàtics.

15

Exemple de sistema modelitzable

- Podem considerar la situació problemàtica determinada per un mòbil la trajectòria del qual està formada per quatre trams: A, B, B' i A. Es suposa que el mòbil té velocitat constant en cada un d'ells, i que els trams B i B' tenen la mateixa longitud però són recorreguts en sentit contrari.
- **DELIMITACIÓ DEL SISTEMA:** Prendrem com a variables "rellevants" del sistema: el temps total t, la longitud x de tot el trajecte, les velocitats en els diferents trams u (en B), v (en B') i w (en ambdós trams designats per A) i la longitud y de cada un dels trams B i B'.

16

2n estadi de la MM:
Construcció del model i reformulació de les qüestions

[1] Un mòbil triga t hores en realitzar un determinat trajecte. Comença recorrent un tram pla a una velocitat de w Km/h i continua pujant un pendent a una velocitat de u Km/h. A continuació canvia el sentit de la marxa i baixa el mateixa pendent a una velocitat de v Km/h. Per fi recorre de nou el tram pla a una velocitat de w km/h. Sabent que la longitud del pendent és y km, calcula la longitud x de tot el trajecte.

17

3r estadi de la MM
Treball dins el model i interpretació en l'àmbit del sistema

- Inclou, a més del treball tècnic dins el model, la interpretació d'aquest treball i dels seus resultats dins el sistema modelitzat.
- En aquesta etapa es decideix si el model és interessant, fecund i pertinent, en la mesura que permet generar coneixements relatius al sistema.
- En el nostre exemple el treball tècnic dins del model proporciona el següent resultat:

$$x = w\left[t - y\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{2}{w}\right)\right]$$

18

3r estadi de la MM:
Treball dins el model i interpretació en l'àmbit del sistema

- Aquest resultat accepta diverses **interpretacions** entre les que destaquem la següent: en el cas en que la velocitat w en el tram pla sigui la **mitjana harmònica** de les velocitats u, v de pujada i baixada, és a dir:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w}=0 \Leftrightarrow w=\frac{2uv}{u+v}$$

Aleshores **el temps** t que triga en fer el trajecte complet és independent de les velocitats $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ de pujada i baixada.

$$\boldsymbol{x=w\,t}$$

19

4t estadi de la MM:
Formulació de noves qüestions: el model s'independitza del sistema

- En aquest últim estadi de l'activitat de MM es poden **enunciar problemes nous** la resolució dels quals permetria respondre a qüestions, relatives al sistema, que no es podien formular fàcilment abans de l'elaboració del model.

- A més, en aquest estadi el model **M** es pot independitzar del sistema inicial i generar noves qüestions i nous processos de MM.

- Exemple de la teoria de Galois.

20

4t estadi de la MM
Formulació de noves qüestions: el model s'independitza del sistema

[2] En quins casos les magnituds x i t seran proporcionals? Existeix algun cas, encara que sigui un cas límit, en el qual y i t siguin proporcionals?

[3] Si suposem que $x = n\,y \quad (n > 2)$, quina relació s'hauria de donar entre les velocitats per tal que el temps emprat en recórrer el tram pla sigui igual a la suma dels temps emprats en recórrer els trams amb pendent?

[4] ¿Quins altres tipus de sistemes (físics, biològics, econòmics, etc.) accepten un model matemàtic amb una estructura anàloga?

21

3r estadi de la MM
Treball dins el model i interpretació en l'àmbit del sistema

- Inclou, a més del treball tècnic dins el model, la interpretació d'aquest treball i dels seus resultats dins el sistema modelitzat.
- En aquesta etapa es decideix si el model és interessant, fecund i pertinent, en la mesura que permet generar coneixements relatius al sistema.
- En el nostre exemple el treball tècnic dins del model proporciona el següent resultat:

$$x = w\left[t - y\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{2}{w}\right)\right]$$

22

3r estadi de la MM:
Treball dins el model i interpretació en l'àmbit del sistema

- Aquest resultat accepta diverses **interpretacions** entre les que destaquem la següent: en el cas en que la velocitat w en el tram pla sigui la **mitjana harmònica** de les velocitats u, v de pujada i baixada, és a dir:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w}=0 \Leftrightarrow w=\frac{2uv}{u+v}$$

Aleshores **el temps** t que triga en fer el trajecte complet és independent de les velocitats $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ de pujada i baixada.

$$\boldsymbol{x = w\, t}$$

23

4t estadi de la MM:
Formulació de noves qüestions: el model s'independitza del sistema

- En aquest últim estadi de l'activitat de MM es poden **enunciar problemes nous** la resolució dels quals permetria respondre a qüestions, relatives al sistema, que no es podien formular fàcilment abans de l'elaboració del model.

- A més, en aquest estadi el model **M** es pot independitzar del sistema inicial i generar noves qüestions i nous processos de MM.

- Exemple de la teoria de Galois.

24

4t estadi de la MM
Formulació de noves qüestions: el model s'independitza del sistema

[2] En quins casos les magnituds x i t seran proporcionals? Existeix algun cas, encara que sigui un cas límit, en el qual y i t siguin proporcionals?

[3] Si suposem que $\boldsymbol{x} = n\,\boldsymbol{y}$ $(n > 2)$, quina relació s'hauria de donar entre les velocitats per tal que el temps emprat en recórrer el tram pla sigui igual a la suma dels temps emprats en recórrer els trams amb pendent?

[4] ¿Quins altres tipus de sistemes (físics, biològics, econòmics, etc.) accepten un model matemàtic amb una estructura anàloga?

25

Anexo 5

Diseño de un REI-FP en torno a la actividad de modelización funcional elemental

1. Exploración de algunas respuestas a un problema de la profesión docente

Proponemos un dispositivo didáctico con estructura de REI[15] enfocado a la formación del profesorado, que denominamos *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP).

Como todo REI, un REI-FP parte de una cuestión generatriz que designaremos mediante **Q_0-FP**. Debe tratarse de una cuestión nuclear, viva, que refleje lo que denominamos un verdadero *problema de la profesión* docente. El estudio de esta cuestión inicial debe poder formularse en términos propios a la problemática docente y hacer referencia al entorno institucional del profesorado. En nuestro caso empezaremos planteando la siguiente cuestión problemática en torno a la modelización funcional elemental en la ESO.

> **Q_0-FP**: *¿Qué características presenta en la ESO la organización matemática curricular en torno a la modelización funcional*? *¿Qué tipos de modelos funcionales aparecen*? *¿Cómo se relacionan entre sí*? *¿A qué cuestiones viene a responder la modelización funcional en la ESO*? *¿Por qué y para qué se introducen los modelos funcionales en la ESO*? *Esto es, ¿cuál es la razón de ser que la matemática escolar (el currículo y los libros de texto) asigna a los modelos funcionales que aparecen en la ESO*? *¿Qué papel desempeña la proporcionalidad con relación al conjunto de modelos funcionales elementales que aparecen en la ESO*?
>
> *Aparte de la respuesta del sistema escolar, ¿qué otras propuestas didácticas alternativas existen (en las propuestas de innovación didáctica, en los artículos de investigación, en los materiales de formación del profesorado, etc.) para organizar la enseñanza de los modelos funcionales en la ESO*?

[15] Un recorrido de estudio e investigación (REI) se inicia con el estudio de una cuestión con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones. La propuesta de los REI pretende recuperar la relación genuina entre *cuestiones* y *respuestas* que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general y de la actividad matemática en particular. Una de las características esenciales de los REI consiste en que constituyen un dispositivo didáctico privilegiado para dar cabida a la actividad de modelización en la enseñanza actual de las matemáticas.

A fin de empezar a responder a estas cuestiones los profesores en formación deberán explorar respuestas ya disponibles en cualquiera de los documentos que tengan a su disposición: libros de texto, currículo oficial de la ESO, artículos de investigación e innovación didáctica, materiales de formación del profesorado, producciones de la noosfera, su propia experiencia como alumnos, etc.

En nuestro caso empezaremos por tomar en consideración el currículo oficial de la ESO y los libros de texto más utilizados, aunque los grupos tienen libertad para acudir a todo tipo de documentos para responder a la última de las preguntas de **Q_0-FP.**

La recopilación y análisis preliminar de las respuestas que aportan estos materiales a la cuestión **Q_0-FP** provocará la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas. En particular, la discusión dentro de los grupos de trabajo debería hacer surgir cuestiones relativas al problema de la fundamentación y validación de dichas respuestas y a la propia noción de *modelización funcional*, así como a las posibles incoherencias e incompletitudes que aparecen en los libros de texto.

Tarea (1): **Exploración de algunas respuestas a la cuestión Q_0-FP**

A cada uno de los grupos de trabajo se le asigna uno de los cuatro cursos de la ESO y al quinto grupo el currículo oficial de matemáticas. Todos ellos podrán utilizar, además, y en la medida que sea necesario, otros materiales que hayan sido elaborados con el objetivo de responder a alguna de las cuestiones que forman parte de **Q_0-FP** o a cuestiones similares. La tarea encomendada a cada grupo de trabajo es la de *sintetizar en un informe breve, por escrito*, las respuestas que proporcionan los libros de texto, el currículo y "la innovación" a las cuestiones que forman parte de **Q_0-FP**.

Cada grupo incluirá en el informe todas aquellas cuestiones que, previsiblemente, habrán surgido a consecuencia de la exploración de los diversos materiales.

Los grupos de trabajo enviarán su informe por correo electrónico el día **27 ENERO** a: **gascon@mat.uab.cat** y a los **4 grupos de trabajo restantes.**

En coherencia con el espíritu de la asignatura, nos proponemos *cuestionar las organizaciones matemáticas escolares* como punto de partida para analizar las organizaciones didácticas asociadas. Pretendemos así superar la tendencia a identificar cualquier ámbito matemático (en este caso, la modelización funcional elemental) con los contenidos escolares que aparecen habitualmente en los libros de texto.

Fecha de entrega:
15 de enero de 2014

Anexo 6

REI-FP en torno a la actividad de modelización funcional elemental

2. Vivir un REI en posición de estudiante

Tarea (2): Exposición por grupos y síntesis en gran grupo (60 minutos) Por medio de un Secretario del grupo de trabajo, que deberá ser diferente para cada uno de los sucesivos informes, cada grupo expondrá brevemente (unos 5 minutos por grupo) sus conclusiones provisionales al gran grupo con relación a su estudio de la cuestión Q0-FP

En gran grupo se discutirán y articularán las diferentes respuestas que proporcionan los libros de texto y el currículum y se elaborará una caracterización provisional de la organización matemática de la ESO en torno a la modelización funcional. En este punto es previsible que surjan nuevas cuestiones por parte de los grupos de trabajo y por parte de los formadores como, por ejemplo:

¿Es necesario modificar esta organización curricular en torno a la modelización funcional elemental? *¿En qué sentido*? *¿Por qué*? *¿Qué dificultades es previsible que aparezcan en el proceso de estudio de los modelos funcionales elementales tal como aparecen en los libros de texto de la ESO*?

Esta tarea se llevará a cabo el miércoles 29 de enero de 18:30 h a 19:30 h

Presentación (por parte de los formadores) del REI de los planes de ahorro, propuesta de la cuestión Q1 y primer encuentro breve (60 minutos) Los formadores presentan el REI sobre los Planes de Ahorro (García 2005) como un dispositivo para construir una posible respuesta a la cuestión generatriz Q0-FP surgida en el marco de la investigación didáctica. Se trata de un dispositivo didáctico que tiene por objetivo que los propios profesores en formación construyan una respuesta alternativa a la que proporcionan el currículum, los libros de texto y determinadas propuestas de innovación didáctica.

Para finalizar la sesión, los profesores en formación tomarán un primer contacto con la cuestión Q1 y, en pequeño grupo, empezarán a estudiarla.

Esta tarea se llevará a cabo el miércoles 29 de enero de 19:30 h a 20:30 h

La situación de partida es la organización de un viaje de fin de curso por parte de un grupo de alumnos de la ESO. Tradicionalmente este viaje tiene lugar al final del curso académico y se financia con el dinero que los alumnos van consiguiendo poco a poco a lo largo de cierto periodo de tiempo. Establecer programas o planes de ahorro, con el fin de que todos los alumnos tengan el dinero necesario cuando el viaje llegue, resulta una iniciativa lógica y hasta recomendable. Nótese que hablamos de planes (en plural), porque se trata de diseñar diferentes tipos de planes de ahorro potencialmente adaptables a las necesidades y deseos de cada grupo de alumnos-ahorradores. No vamos, en estos momentos, a entrar en maneras de conseguir dinero por otros medios, como venta de camisetas, loterías, etc. que suponen entradas de dinero que no podemos controlar completamente. Formularemos como sigue la citada cuestión generatriz del primer módulo de formación:

Q_1: Deseamos planear con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un plan de ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación de la cantidad de dinero que necesitamos, y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades que deberían aportarse en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar ni cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos al final de curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje. El objetivo final es preparar un informe, que podamos presentar a la dirección del centro, y que ayude, en los años sucesivos, a planificar el ahorro de dinero a vuestros compañeros. Este informe debería dar respuesta a cuestiones tales como: ¿Qué posibles planes o estrategias de ahorro se pueden considerar? ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene cada uno? ¿Cómo decidir los plazos, las cantidades a dar en cada plazo, la duración del ahorro, etc.?

Proponemos la siguiente organización didáctica para desarrollar el proceso de estudio de la cuestión Q1:

(a) Los estudiantes trabajan en pequeños grupos de 4 o 5 miembros. Se repartirá un cuaderno a cada grupo que deberán entregar al final del recorrido.

(b) El proceso de estudio está dirigido por dos investigadores. Su función se limitará esencialmente a determinar la organización temporal de las etapas del proceso, a fijar las respectivas responsabilidades tanto individuales como de los grupos de trabajo y, sobre todo, a plantear cuestiones sobre las propuestas y respuestas de los grupos de estudiantes: ¿De dónde sale? ¿Cómo se puede validar? etc.

(c) Entre los medios que se facilitan o sugieren a los profesores en formación están el uso de una hoja de cálculo, como Excel, porque puede ser útil para simular la dinámica de algunos planes de ahorro.

29 de enero de 2014

Anexo 7

REI-FP en torno a la actividad de modelización funcional elemental

2. Vivir un REI en posición de estudiante (2)

Tarea (3): **Primer encuentro con los «Planes de ahorro»** (60 minutos)

Se propone que los profesores en formación continúen el estudio de la cuestión Q1 analizando la evolución de planes elementales donde las imposiciones, los plazos y la duración total del ahorro vengan dados, inicialmente, por cantidades concretas.

Los profesores en formación deben describir con todo detalle los ejemplos de planes de ahorro desarrollados y hacer una propuesta de cómo proseguir el estudio.

Esta tarea se llevará a cabo el miércoles, 5 de febrero, de 16:00 h a 17:00 h

Tarea (4): **Exposición por grupos y síntesis en gran grupo** (60 minutos)

Por medio del Secretario de turno, cada grupo de trabajo expondrá brevemente sus conclusiones provisionales al gran grupo después del primer encuentro con los planes de ahorro. En gran grupo, y como síntesis de las aportaciones de los diferentes grupos de trabajo, la comunidad de estudio dirigida por los formadores elaborará una propuesta global de cómo avanzar en el proceso de estudio de la cuestión planteada. Esta propuesta puede contener objetivos diferentes para los diferentes grupos de trabajo, esto es, los grupos de trabajo no tienen que trabajar necesariamente en los mismos tipos de planes de ahorro.

Esta tarea se llevará a cabo el miércoles, 5 de febrero, de 17:00 h a 18:00 h

Tras la primera sesión de trabajo, en las propuestas de posibles tipos de planes de ahorro a estudiar, es previsible que aparezcan algunos elementos que determinan la naturaleza y la evolución temporal de un plan de ahorro. Los principales elementos son los siguientes:

- El número de cuotas y su distribución temporal.
- La posibilidad de fijar una cuota inicial.
- La cantidad de dinero que se entregará en cada cuota.
- Las posibles relaciones entre dichos elementos.

Tarea (5): **Explorando nuevos tipos de planes de ahorro** (60 minutos)

En este momento cada grupo puede explorar nuevos tipos de planes de ahorro.

Si suponemos que se mantiene una distribución temporal uniforme de los plazos, cada tipo de plan de ahorro vendrá caracterizado por una ley que determine la variación de la cuota que se entrega en cada plazo.

Proponemos, por ejemplo, empezar a trabajar en planes de ahorro en los que la cuota sea creciente, esto es, en los que la cuota de ahorro sea cada vez mayor. Algunos de los grupos, si lo desean, pueden estudiar otro tipo de planes de ahorro (por ejemplo, los de cuota decreciente u otros cualesquiera).

Esta tarea se llevará a cabo el miércoles, 5 de febrero, de 18:30 h a 19:30 h

Tarea (6): ***Exposición por grupos y síntesis en gran grupo*** (60 minutos)

Por medio del Secretario de turno, cada grupo de trabajo elaborará un resumen por escrito de la respuesta que propone a la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q}_1$ (podéis incluir tablas, gráficas, fórmulas para poder calcular las cantidades ahorradas según las cuotas y los plazos, etc.).

Es importante tener en cuenta que este informe debería ser útil para los años sucesivos. No se trata de dar una respuesta puntual para un plan de ahorro concreto, sino un estudio general en función de las posibles “condiciones iniciales”, esto es, en función de las diversas hipótesis que se propongan para caracterizar el sistema modelizado que, a su vez, dependerán de las necesidades y de las posibilidades de ahorro.

Esta tarea se llevará a cabo el miércoles, 5 de febrero, de 19:30 h a 20:30 h

5 de febrero de 2014