

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



PROYECTO FIN DE CARRERA

APLICACIÓN DE ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA A LA SÍNTESIS DE DIAGRAMAS DE RADIACIÓN DE ARRAYS DE ANTENAS

Ingeniería de Telecomunicación

Pablo Asenjo García
Abril 2015

APLICACIÓN DE ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA A LA SÍNTESIS DE DIAGRAMAS DE RADIACIÓN DE ARRAYS DE ANTENAS

AUTOR: Pablo Asenjo García
TUTOR: Juan Córcoles Ortega
PONENTE: José Luis Masa Campos

Grupo de Radiofrecuencia: Circuitos, Antenas y Sistemas
Dpto. de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones
Escuela Politécnica Superior
Universidad Autónoma de Madrid
Abril 2015



Resumen

Resumen

El siguiente Proyecto de Fin de Carrera realiza un estudio de los algoritmos de optimización convexa más novedosos en la actualidad para la síntesis de diagramas de radiación en arrays de antenas. Este tipo de antenas, al poseer un gran número de grados de libertad con los que poder trabajar, tales como el número de antenas, sus excitaciones o pesos (módulo y fase de las alimentaciones de sus elementos) o su geometría, son las más indicadas para conseguir diagramas de radiación que cumplan una amplia gama de requisitos. De este modo, se consigue configurar el array de tal forma que consiga máxima directividad para un determinado punto del espacio y diferentes niveles de lóbulos secundarios y direcciones de apuntamiento nulas según requiera la aplicación para la cual se está implementando.

Para ello, se hace uso de diversos algoritmos que optimizan el módulo y la fase de la alimentación de cada antena que conforma el array. Dichos algoritmos resuelven problemas de optimización convexa. Este tipo de optimización busca minimizar una función convexa sujeta a un conjunto de restricciones que son también convexas.

La resolución de problemas de optimización convexa aplicada a la teoría de antenas y, más específicamente, a las agrupaciones de antenas o arrays, es hoy en día una de las líneas de investigación más prometedoras debido al gran número de posibilidades que ofrece este tipo de antenas.

Palabras clave

Array de antenas, diagrama de radiación, factor de array, directividad, eficiencia, excitaciones o pesos, fases, lóbulo principal, SLL, nulos, optimización convexa, restricciones, formas hermíticas (HF), programación lineal (LP), programación cuadrática (QP), programación en cono de segundo orden (SOCP).

Abstract

The following thesis carries out some research on convex optimization algorithms to obtain radiation patterns of antenna arrays. These kinds of antennas are the most suitable to achieve radiation patterns which must fulfill a wide range of requirements, since they possess a huge variety of features to work with, such as the number of elements of the antenna, its excitations or weights (module and phase of the supply of each element) or its geometry. Thus, it is possible to set the array to obtain a maximum directivity at a specific point in the space and different side-lobe levels and nulls at the same time, depending on the application implemented.

To achieve that, multiple algorithms are used. They optimize the module and phase of the supply of each element that belongs to the array. Such algorithms solve convex optimization problems, which consist of minimizing a convex function subject to a set of convex constraints.

Nowadays, convex optimization algorithms applied to antenna theory and, more specifically, to antenna arrays, are being widely studied and researched, due to the great number of possibilities of these antennas.

Key words

Antenna array, radiation pattern, array factor, directivity, efficiency, excitations or weights, phases, main lobe, SLL, nulls, convex optimization, constraints, hermitian forms (HF), linear programming (LP), quadratic programming (QP), second order cone programming (SOCP).

Agradecimientos

Es mi deseo agradecer en este proyecto de fin de carrera de Ingeniería de Telecomunicación, en lo que parece el final de una extensa educación académica iniciada hace unos veinte años ya, a las personas que me han dado todo el cariño y el apoyo económico y logístico que me han facilitado enormemente la realización de esta larga empresa.

En primer lugar se encuentran mis padres, Rafa y Amaya, que me lo han dado todo y más para que yo pudiera ser una persona formada no sólo como ingeniero sino a nivel global, habiéndome inculcado los valores, la cultura e incluso la religión. Gracias a ellos he tenido todo el tiempo del mundo y todos los recursos a mi alcance, nunca me ha faltado nada y nunca he tenido la necesidad de tener que trabajar para costearme la educación, algo que no les sucedió a ellos. Todo este apoyo va mucho más allá de lo estrictamente necesario, abarcando actividades extraescolares de música, idiomas y deportes y de ocio y tiempo libre, así como en las distintas estancias en el extranjero en las que he tenido la suerte de embarcarme y en las que nunca me ha faltado de nada. Así cualquiera se saca una ingeniería.

Otras personas decisivas en mi formación son mis abuelos Aurelio, Rafa y María, a los que lamentablemente no puedo hoy agradecer personalmente su esfuerzo y cariño, y a mi abuela Maxi, que es eterna. Para que yo ahora pueda disfrutar de mi posición privilegiada ellos se tuvieron que llevar antes todo lo malo. De familias muy humildes, vencieron una guerra y una dictadura a base de trabajo y disciplina espartana. Soy yo el que estoy recogiendo los frutos que tantos días plantaron y en consecuencia suyo es también mi título. Todo el esfuerzo que haya podido realizar yo no supone nada comparado al que en su día hicieron estas personas para que un día como hoy pueda llamarme ingeniero.

Por supuesto, mi vida hubiera sido en blanco y negro de no haberme encontrado en esta vida con mi queridísima hermana y segunda madre Raquel. Ella es la persona que mejor me conoce y a la que yo más quiero, pues siempre ha estado ahí y me ha servido como guía y referente. Mención especial también a mis primos-hermanos Daniel y Paula y a mis tíos Flor y Pepe, que tanto me han aguantado y enseñado y que son las mejores personas que he conocido sobre la faz de la Tierra. Además, agradezco a toda la familia entera, con mayúsculas, el cariño y la atención que siempre me han profesado y la luz que han dado a mi vida mis sobrinos Sofía y Héctor y mis primos Guillermo e Ignacio, amén del resto de tíos y primos que por falta de espacio y no de cariño, me veo obligado a omitir.

Seguidamente, deseo agradecer a todos los amigos y personas maravillosas que me he encontrado en el tiempo que ha durado la carrera a lo largo y ancho del mundo. En especial al grupo inseparable de compañeros de fatigas de la universidad, Pedro, Álex, Javi y Alberto y a los integrantes del magnífico equipo de fútbol de teleco Socelet, cuyo mejor momento coincidió casualmente con mi año de Erasmus. De ese tiempo en Suecia también quiero acordarme de la gente magnífica a la que conocí, especialmente de Carlos, Kike, Dani, Viki y Jaime. También en China, Italia e Islandia tuve el placer de encontrarme con personas de imborrable recuerdo y de los que con gran pena me tuve que separar. Un abrazo a todos, lo pasamos bien.

Académicamente, agradezco a Juan Córcoles la tolerancia y libertad que me ha otorgado para la realización del proyecto, estando siempre disponible e incluso amoldándose a mi horario. Quiero agradecer al profesor Daniel Ortega la ayuda que me ha prestado con la maquetación en latex de la memoria. También quiero tener una mención especial con el profesor Javier Soler, un erudito y gran enseñante que me dio unas clases maestras en física y matemáticas.

Índice general

Índice de figuras	xI
Índice de tablas	xVI
1. Introducción	1
1.1. Motivación del proyecto	1
1.2. Objetivos y enfoque	1
1.3. Organización de la memoria	2
2. Estado del arte	5
2.1. Introducción	5
2.2. Historia y evolución de las antenas	5
2.3. Radiación	7
2.4. Bandas de frecuencia y aplicaciones	10
2.5. Tipos de antenas	11
2.5.1. Antenas de hilo	11
2.5.2. Antenas de apertura	12
2.5.3. Antenas microstrip	13
2.5.4. Antenas reflectoras	14
2.5.5. Antenas de lente	14
2.5.6. Arrays de antenas	15
2.6. Parámetros y conceptos de las antenas	16
2.6.1. Frecuencia y longitud de onda	16
2.6.2. Ancho de banda	17
2.6.3. Potencia y densidad de potencia	17
2.6.4. Intensidad de radiación	19
2.6.5. Diagrama de radiación	19
2.6.6. Antena isotrópica, direccional y omnidireccional	22
2.6.7. Regiones de campo	22

2.6.8.	Lóbulos radiantes	23
2.6.9.	Ancho de haz	24
2.6.10.	Ganancia	25
2.6.11.	Directividad	26
2.6.12.	Polarización	26
2.6.13.	Impedancia de entrada	27
2.7.	Arrays de antenas	28
2.7.1.	Introducción	28
2.7.2.	Fundamentos	28
2.7.3.	Topologías comunes	29
2.7.4.	Excitaciones	31
2.7.5.	Factor de array	32
2.8.	Aplicación de algoritmos de optimización a la síntesis de arrays	37
2.8.1.	Introducción	37
2.8.2.	Historia	38
2.8.3.	Algoritmos	38
3.	Formas hermíticas (HF)	41
3.1.	Introducción	41
3.2.	Fundamentos	42
3.3.	Herramientas	42
3.4.	Maximización de la directividad	43
3.4.1.	Caso general	43
3.4.2.	Casos particulares	56
3.5.	Eficiencia del haz principal	57
3.6.	Análisis de los resultados	59
4.	Programación cuadrática (QP)	61
4.1.	Introducción	61
4.2.	Fundamentos	62
4.3.	Herramientas	62
4.4.	Maximización de la directividad	63
4.4.1.	Caso particular de diagramas de radiación simétricos	63
4.4.2.	Caso general de diagramas de radiación asimétricos	68
4.5.	Restricción de campo nulo	72
4.5.1.	Caso particular de diagramas de radiación simétricos	72
4.5.2.	Caso general de diagramas de radiación asimétricos	74

4.6.	Restricción de los lóbulos secundarios	75
4.6.1.	Caso particular de diagramas de radiación simétricos	76
4.6.2.	Caso general de diagramas de radiación asimétricos	79
4.7.	Restricciones simultáneas de campo nulo y lóbulos secundarios	79
4.7.1.	Caso particular de diagramas de radiación simétricos	79
4.7.2.	Caso general de diagramas de radiación asimétricos	80
4.8.	Análisis de los resultados	81
5.	Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)	85
5.1.	Introducción	85
5.2.	Fundamentos	86
5.3.	Herramientas	87
5.4.	Maximización de la directividad	87
5.5.	Restricción de campo nulo	93
5.6.	Restricción de los lóbulos secundarios	95
5.7.	Restricciones simultáneas de campo nulo y lóbulos secundarios	99
5.8.	Minimización del nivel máximo de los lóbulos secundarios	100
5.9.	Análisis de los resultados	104
6.	Programación lineal (LP)	111
6.1.	Introducción	111
6.2.	Fundamentos	112
6.3.	Herramientas	113
6.4.	Minimización del nivel máximo de los lóbulos secundarios	113
6.5.	Análisis de los resultados	118
7.	Conclusiones y trabajo futuro	121
7.1.	Introducción	121
7.2.	Conclusiones	121
7.3.	Trabajo futuro	122
	Glosario de acrónimos	125
	Bibliografía	126
A.	Conceptos matemáticos	137
A.1.	Vectores y matrices	137
A.2.	Autovectores y autovalores	138
A.3.	Matriz hermítica	138

A.4. Espacios vectoriales	139
A.5. Cuerpos y campos vectoriales	139
A.6. Producto escalar y vectorial	141
A.7. Norma euclídea	144
Anexos	145
B. Presupuesto	145
C. Pliego de condiciones	147

Índice de figuras

2.1. Padres del electromagnetismo y la radiocomunicación (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	6
2.2. Esquema básico de una antena [1]	7
2.3. Configuraciones de radiación en un cable [1]	8
2.4. Proceso de radiación de un dipolo [1]	9
2.5. Espectro electromagnético con sus diferentes bandas de frecuencia (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	11
2.6. Subbandas de SHF (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	11
2.7. Dipolo, antena en bucle y antena en hélice (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	12
2.8. Antena de bocina y algunas de sus formas más comunes (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	13
2.9. Array de doce antenas microstrip y su esquema básico (<i>fuentes: Google Imágenes</i>) .	13
2.10. Radiotelescopio de Arecibo y esquema básico de una antena parabólica (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	14
2.11. Antena de lente (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	15
2.12. Array de antenas parabólicas para observación espacial, phased array a bordo de un avión de combate y estación base de telefonía móvil (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	16
2.13. Longitud de onda [1]	16
2.14. Diagrama de radiación en 2D	20
2.15. Diagrama de radiación polar	21
2.16. Diagrama de radiación en 3D	21
2.17. Antena isotrópica, direccional y omnidireccional [1]	22
2.18. Variaciones en los diagramas de radiación dependiendo de la región de campo donde se mida [1]	23
2.19. Tipos de lóbulos radiantes en (a) 3D (b) 2D [1]	24
2.20. Anchos de haz HPBW y FNBW [1]	25
2.21. Polarización lineal, circular y elíptica (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	27
2.22. Impedancia de una antena conectada a un generador [1]	27
2.23. Esquema simple de una antena inteligente [1]	29
2.24. Disposición de un array lineal	30
2.25. Disposición de un array circular	30

2.26. Disposición de un array plano	31
2.27. Alimentación de un array de antenas (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	32
2.28. Aparición de grating lobes en un array lineal en broadside ($N=5, \theta_0=0^\circ$)	33
2.29. Aparición de grating lobes en un array lineal en endfire ($N=5, \theta_0=90^\circ$)	34
2.30. Comparación de lóbulos radiantes en función de la distancia entre elementos para un array lineal ($N=5, \theta_0=0^\circ$)	35
2.31. Factor de array para cada tipo de configuración ($\theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	36
2.32. Diagramas de radiación asimétricos para cada tipo de array ($\theta_0=-30^\circ, \phi_0=0^\circ$)	37
2.33. Diagrama tipo de los algoritmos evolutivos	39
3.1. Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=13, d_x=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ$)	47
3.2. Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=13, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)	47
3.3. Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=13, d_x=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ$)	48
3.4. Factor de array optimizado para un array lineal en broadside y endfire ($N=10, d_x=0.5\lambda$)	48
3.5. Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=20, r=0.3196\lambda, d_r=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	49
3.6. Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=20, r=1.5981\lambda, d_r=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	50
3.7. Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=20, r=2.8766\lambda, d_r=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	50
3.8. Factor de array optimizado para un array circular en varias direcciones de ϕ_0 ($N=10, r=0.4854\lambda, d_r=0.3\lambda, \theta_0=90^\circ$, eje en ϕ)	51
3.9. Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado ($N=M=8, d_x=d_y=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	52
3.10. Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	52
3.11. Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado ($N=M=8, d_x=d_y=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	53
3.12. Factor de array optimizado para un array cuadrado en broadside y endfire ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \phi_0=0^\circ$)	53
3.13. Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	54
3.14. Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	54
3.15. Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	55

3.16. Factor de array optimizado para un array rectangular en broadside y endfire ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.5\lambda, \phi_0=0^\circ$)	55
3.17. Directividad y eficiencia del haz principal para un array circular ($N=12, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ$)	58
3.18. Máximas directividades en función del número de elementos para varios tipos de arrays	59
4.1. Simetría en un array lineal	64
4.2. Simetría en un array plano	65
4.3. Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=17, d_x=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ$)	66
4.4. Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=17, r=0.3401\lambda, d_r=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	66
4.5. Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado ($N=M=8, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	67
4.6. Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=9, M=7, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	67
4.7. Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=17, d_x=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ$)	70
4.8. Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=17, r=0.3401\lambda, d_r=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ$)	70
4.9. Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado ($N=M=8, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ$)	71
4.10. Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=9, M=7, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ$)	71
4.11. Comparativa con y sin campo nulo en un array lineal ($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=0^\circ$)	73
4.12. Array lineal con restricciones de nulos asimétricas ($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=-30^\circ$)	75
4.13. Comparativa con y sin restricción en los lóbulos secundarios en un array lineal ($N=18, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)	77
4.14. Múltiples restricciones en los lóbulos secundarios en un array lineal ($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=0^\circ$)	77
4.15. Restricción de SLL=25 dB en un array cuadrado para $\theta \in [20, 90]$ $\forall \phi \in [0, 360]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	78
4.16. Representación del diagrama anterior para los planos $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$	78
4.17. Restricciones de nulos en $\theta = 28^\circ, 62^\circ, 90^\circ$ y restricciones de SLL en un array lineal ($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=0^\circ$)	80
5.1. Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=15, d_x=0.15\lambda, \theta_0=0^\circ$)	91
5.2. Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=24, r=1.1492\lambda, d_r=0.3\lambda, \theta_0=-30^\circ, \phi_0=0^\circ$)	91

5.3. Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado ($N=7, d_x=0.4\lambda, d_y=0.2\lambda, \theta_0=50^\circ, \phi_0=0^\circ$)	92
5.4. Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=10, M=50, d_x=0.4\lambda, d_y=0.2\lambda, \theta_0=50^\circ, \phi_0=0^\circ$)	92
5.5. Comparativa con y sin campo nulo en un array lineal ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)	94
5.6. Array lineal con restricciones de nullos asimétricas ($N=11, d_x=0.3\lambda, \theta_0=30^\circ$)	94
5.7. Restricciones simétricas de SLL=50 dB en un array lineal para $\theta \in [15, 90]$ ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)	96
5.8. Restricciones simétricas de SLL=30 dB en un array rectangular para $\theta \in [15, 90]$ $\forall \phi \in [0, 360]$ ($N=8, M=10, d_x=d_y=0.8\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	97
5.9. Representación del diagrama anterior para los planos $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$	97
5.10. Restricciones asimétricas en el SLL de un array lineal ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)	98
5.11. Restricciones asimétricas en los lóbulos secundarios en un array lineal orientado a $\theta_0=15^\circ$ ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=15^\circ$)	98
5.12. Restricciones de nullos en $\theta = -90^\circ, -70^\circ, -45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ y restricciones de SLL en un array lineal ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=15^\circ$)	100
5.13. Minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta \in [30, 90]$ simétrico ($N=13, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)	102
5.14. Restricciones simétricas de SLL=26,6 dB en un array cuadrado para $\theta \in [10, 90]$ $\forall \phi \in [0, 360]$ ($N=M=10, d_x=d_y=0.75\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	102
5.15. Representación del diagrama anterior para los planos $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$	103
5.16. Minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta_1 \in [-90, 0]$ y $\theta_2 \in [40, 90]$ asimétrico ($N=13, d_x=0.425\lambda, \theta_0=20^\circ$)	103
5.17. Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [10, 90]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	107
5.18. Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [15, 90]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	107
5.19. Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [20, 90]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	108
5.20. Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [25, 90]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	108
5.21. Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [30, 90]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	109
6.1. Representación gráfica de un problema de programación lineal (<i>fuentes: Google Imágenes</i>)	112
6.2. Comparativa de minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta \in [10, 90]$ simétrico ($N=15, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	116
6.3. Comparativa de minimización del máximo SLL en un array circular para $\theta \in [10, 90]$ simétrico ($N=28, r=2.2329\lambda, d_r=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	116

6.4. Comparativa de minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [20, 90]$ simétrico ($N=M=6, d_x=d_y=0.2\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)	117
6.5. Comparativa de minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta_1 \in [-90, -20]$ y $\theta_2 \in [50, 90]$ asimétrico ($N=12, d_x=0.3\lambda, \theta_0=12^\circ$)	117
6.6. Comparativa de minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta_1 \in [-90, -30]$ y $\theta_2 \in [10, 90]$ asimétrico ($N=16, d_x=0.5\lambda, \theta_0=-20^\circ$)	118
A.1. Producto vectorial	142
A.2. Base canónica	143

Lista de tablas

3.1. Directividades máximas para arrays lineales según su número de elementos N y la distancia entre ellos d_x según 2.7.3.1	46
3.2. Directividades máximas para arrays circulares según su número de elementos N y la distancia entre ellos d_r según 2.7.3.2	49
3.3. Directividades máximas para arrays cuadrados según su número de elementos $N \times N$ y la distancia entre ellos $d_x = d_y$ según 2.7.3.3	51
3.4. Error en % entre la formulación general y la aproximación lineal	56
3.5. Error en % entre la formulación general y la aproximación circular	57
4.1. Diferencia en dB entre la optimización cuadrática y la hermítica	81
4.2. Diferencia ($\times 10^{-4}$) entre las excitaciones del ejemplo con restricción de SLL 4.13 y su equivalente Dolph-Chebyshev	83
5.1. Diferencia en dB entre la optimización hermítica y SOCP	104
5.2. Diferencia en dB entre la optimización cuadrática y SOCP	105

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación del proyecto

La Radiocomunicación es una ciencia relativamente moderna, cuyos inicios datan de finales del siglo XIX, cuando se asentaron las bases teóricas de la propagación de ondas electromagnéticas, a principios del siglo XX, con las primeras emisiones radioeléctricas. A partir de ese momento, el desarrollo de esta rama de la Telecomunicación fue creciendo más y más, impulsada en gran medida por las dos Guerras Mundiales y la carrera espacial, hasta la actualidad, donde la aparición y auge de la telefonía móvil, cada vez más sofisticada, la hace indispensable.

Debido al ingente número de aplicaciones diferentes como radiodifusión, telefonía móvil, aviación, radioastronomía y un sinnúmero de usos comerciales y militares entre otros, y a su creciente complejidad, surge la necesidad de generar diagramas de radiación muy específicos, los cuales no pueden ser producidos por antenas de un solo elemento. Esto se consigue con agrupaciones de antenas, llamadas *arrays de antenas*, las cuales varían su comportamiento modificando las características de cada elemento que las componen.

Además, con el también gran desarrollo y normalización en paralelo de la ciencia computacional y los lenguajes de programación, se ha empezado a combinar en las últimas décadas la aplicación de algoritmos de optimización con la teoría de antenas, mejorando el rendimiento y escalabilidad de las mismas enormemente.

1.2. Objetivos y enfoque

El objetivo de este Proyecto Final de Carrera es realizar un estudio del estado del arte de los algoritmos de optimización convexos para la síntesis de diagramas de radiación de arrays de antenas para aplicarlos a la teoría de radiación electromagnética, tanto en transmisión como en recepción.

Los pasos del PFC han sido los siguientes:

1. Estudio previo de la teoría de antenas, focalizando las de tipo array, destacando conceptos clave como los diagramas de radiación, el factor de array, la directividad, las excitaciones o

- pesos, el nivel de lóbulos secundarios, etc.
2. Repaso previo de los conceptos generales del álgebra lineal y de su matemática asociada.
 3. Estudio de los procesos de optimización lineales y cuadráticos.
 4. Desarrollo en *MATLAB*[®] de dichos conceptos tanto para un caso general como para casos más particulares, como arrays con elementos uniformemente distribuidos.
 5. Aplicación de algoritmos de formas hermíticas, programación lineal y cuadrática a problemas clásicos como la maximización de la directividad o generación de diagramas de radiación con distintos rangos de SLL y nulos en *MATLAB*[®].
 6. Repaso de *Python* y las librerías matemáticas *numpy* y *scipy* para desarrollar y comparar los conceptos anteriores en dicho lenguaje de programación.
 7. Repaso de la librería de optimización de *Python CVXOPT*, que contiene algoritmos de optimización convexa más avanzados, como la programación en cono de segundo orden (*SOCP*).
 8. Aplicación de algoritmos hermíticos, lineales, cuadráticos y *SOCP* a problemas más complejos.
 9. Iniciación al compilador de documentos \LaTeX en el entorno *TeXworks* y su uso en textos matemáticos, los paquetes *TikZ* y *PGF* para crear figuras y gráficas, y el generador de bibliografía *JabRef*, para el posterior desarrollo de la memoria del proyecto.

1.3. Organización de la memoria

El proyecto se encuentra estructurado en los siguientes capítulos, los cuales se detallan a continuación:

- **Capítulo 1.** Motivación, objetivos y estructura del proyecto.
- **Capítulo 2.** Repaso del estado del arte de la teoría de antenas, su historia, sus conceptos básicos y sus tipos, haciendo especial hincapié en los arrays de antenas, que son las que se analizan en este proyecto. También se echa un vistazo a la aplicación de algoritmos de optimización en dichas antenas.
- **Capítulo 3.** Primera aproximación a la optimización de arrays de antenas expresando la directividad como el cociente de dos formas hermíticas para maximizarla. Estudio tanto del caso general como de casos particulares que simplifican los cálculos y comparación con los arrays sin optimizar. Vistazo a la eficiencia de radiación.
- **Capítulo 4.** Aplicación de las técnicas de programación cuadrática para la maximización de la directividad y comparación con los casos de formas hermíticas y los arrays sin optimizar. Se distinguen dos tipos de problemas: cuando los diagramas de radiación son simétricos, donde sólo entran en juego variables reales, y asimétricos, caso general con variables complejas. Adición de restricciones de campo nulo y en el nivel de lóbulos secundarios, aunque éstas últimas solamente válidas para el caso simétrico.

- **Capítulo 5.** Aplicación de las técnicas de programación en cono de segundo orden (SOCP) a la maximización de la directividad y comparación con todos los casos anteriores. Se engloban los dos tipos de problemas anteriores en el caso general, que da diagramas tanto simétricos como asimétricos. Restricciones de campo nulo y de nivel de lóbulos secundarios también para el caso asimétrico. Nuevo problema de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios.
- **Capítulo 6.** Siguiendo donde se terminó el capítulo anterior, se estudia una aproximación al problema de minimización del nivel máximo de lóbulos secundarios en programación lineal, comparándolo con las técnicas de SOCP.
- **Capítulo 7.** Repaso y conclusiones de todo lo visto en los capítulos anteriores y predicción de futuras líneas de investigación posibles.

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Introducción

En este capítulo se va a realizar un repaso al estado del arte de los diferentes conceptos que constituyen el tema fundamental del proyecto. De este modo, este apartado se centra en la teoría de antenas [1] y la aplicación de algoritmos de optimización a dicha teoría.

Primeramente, es necesario echar la vista atrás en el tiempo para dar al lector un enfoque general de la evolución tan intensa que han sufrido las antenas en su breve período de existencia. A continuación se explica el concepto básico de antena y el fenómeno de la radiación, y se muestran las bandas de frecuencias y usos más comunes así como los tipos de antenas más populares. Seguidamente se procede a explicar los elementos más relevantes de las antenas, centrándose en los arrays de antenas, el tipo de antenas en los que se basa el proyecto. Por último, se hace un repaso a la historia y fundamentos de la aplicación de algoritmos de optimización en la teoría de antenas.

2.2. Historia y evolución de las antenas

La historia de las antenas se remonta al físico británico *James Clerk Maxwell*, quien unificó las teorías de electricidad y magnetismo de anteriores científicos como *Coulomb*, *Gauss*, *Ampère* o *Faraday*, relacionándolas en las famosas *Ecuaciones de Maxwell*, publicadas en 1.873. En 1.886, otro físico, el alemán *Heinrich Rudolf Hertz*, construyó el primer sistema electromagnético sin cables. Éste consistía en un dipolo $\lambda/2$ que actuaba como generador de ondas electromagnéticas de 4 m de longitud, creando una chispa la cual producía otra chispa en un aro situado a 30 m que hacía las veces de receptor. A finales del siglo XIX el ingeniero eléctrico serbio *Nikola Tesla*, desarrollador de la corriente alterna, su homólogo italiano *Guglielmo Marconi* y el físico ruso *Alexander Stepanovich Popov* pugnaron por la invención de la radio como sistema de transmisión de señales, cuya patente le está hoy reconocida al primero. En 1.889, el ingeniero español *Julio Cervera Baviera* desarrolló la transmisión de sonido vía radio y es otro pionero de la radiocomunicación. Unos años más tarde, en 1.901, recién comenzado el siglo XX, Marconi logró transmitir señales a largas distancias. En ese mismo año fue capaz de realizar la primera transmisión transatlántica desde Inglaterra hasta Canadá, enviando la letra "S" en código Morse. Para ello utilizó

un transmisor formado por 50 cables verticales conectados a un generador de chispas a una altura de 60 m. La antena receptora era un cable de 200 m de longitud colgada de una cometa.



Figura 2.1: Padres del electromagnetismo y la radiocomunicación (fuente: Google Imágenes)

Desde los albores de las primeras antenas hasta los años cuarenta, la tecnología predominante en la construcción de éstas eran los cables radiantes que alcanzaban frecuencias de hasta *UHF* (0.3–3 GHz), pudiendo ser usados como elementos singulares o formar arrays. A partir del estallido de la Segunda Guerra Mundial nace la era moderna de la tecnología de antenas, con la introducción de nuevos tipos como las antenas de *apertura*, de *bocina* y *reflectoras*, y con la invención del generador de microondas a frecuencias de más de 1 GHz. En los años cincuenta se consiguió extender el máximo ancho de banda, cuyo ratio hasta entonces era de 2:1, a más de 40:1, abarcando regiones en frecuencia tan grandes como 10 - 10.000 MHz, pudiendo recoger en ellas todo tipo de aplicaciones. Dichas antenas se denominaron *independientes en frecuencia*.

Durante el período comprendido de los años sesenta a los noventa, los grandes avances en arquitectura de computadores y el desarrollo del software abrieron una nueva era en la teoría de antenas que dura hasta la fecha, y que se espera que tengan una influencia aún mayor en el futuro. A principios de 1.960 se introdujeron los métodos numéricos para analizar las configuraciones cada vez más complejas de los sistemas de antenas. El diseño de la antena pasó de jugar un rol secundario a adquirir una importancia vital en el diseño global del sistema hoy en día. Además, se ha avanzado mucho en las simulaciones por ordenador del rendimiento y eficiencia de los nuevos modelos de antenas, pudiendo predecir su comportamiento con una gran precisión, evitando en muchos casos pruebas intermedias de testeo.

Un nuevo elemento radiante, hoy por hoy fundamental, fue introducido en los años setenta: las líneas *microstrip* o *antenas de parche*. Este tipo de antenas son simples, ligeras, muy económicas y no ocupan volumen alguno, sino que conforman la propia superficie a la que van impresas, lo que las hace por ejemplo indispensables en aplicaciones aeronáuticas y aeroespaciales, ya que no interfieren con la aerodinámica de la nave.

Los requerimientos, cada vez más exigentes, de las nuevas aplicaciones en la actualidad hacen necesarios diagramas de radiación cada vez más complejos, con diferentes niveles de ganancia y direcciones de apuntamiento. Es debido a esto por lo que las agrupaciones de antenas o *arrays*

de antenas son inmensamente utilizadas dada su versatilidad y su bajo coste y operatividad, en comparación con las dimensiones que tendría que tener una antena de un solo elemento para tener el mismo funcionamiento. Por otro lado, ajustando las fases de sus elementos es posible apuntar a distintas direcciones del espacio. Por ello, es también de vital importancia el desarrollo de las redes de alimentación que nutren este tipo de antenas.

Por último, gracias a la tecnología del *Procesamiento Digital de Señales* (DSP), se ha empezado a diseñar un tipo de antena capaz de interactuar con el entorno que la rodea según las necesidades de cada momento. Éstas son conocidas como antenas inteligentes o *smart antennas*.

2.3. Radiación

Una antena es un dispositivo encargado de radiar o recibir señales radioeléctricas. Una antena se puede entender también como un elemento intermedio entre el espacio libre y una línea de transmisión. Si actúa como transmisora transportará energía electromagnética desde una fuente emisora a través de la línea de transmisión y si actúa como receptora entregará dicha energía de la línea de transmisión a un receptor final. El esquema básico de una antena se puede ver en la figura 2.2.

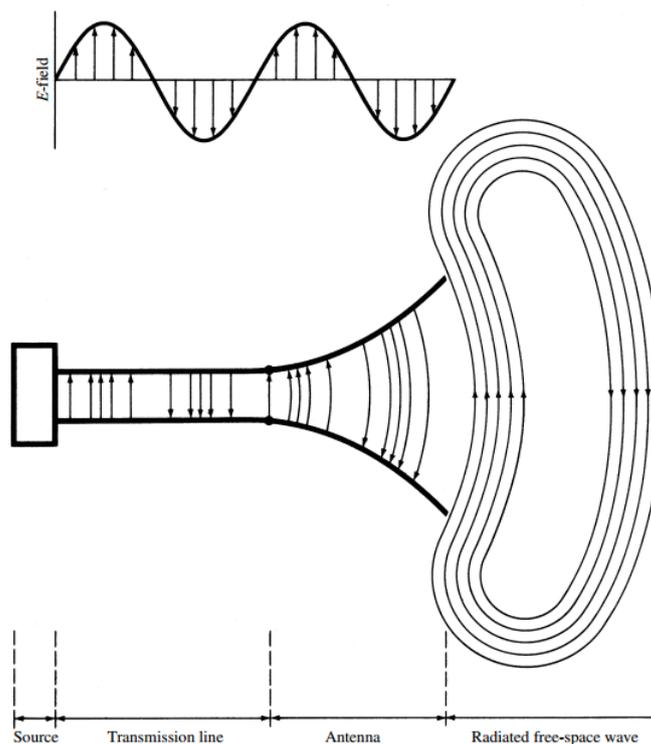


Figura 2.2: Esquema básico de una antena [1]

La radiación de ondas electromagnéticas en un solo cable se consigue cuando existe una corriente igual a la carga por unidad de longitud q_l (C/m²) multiplicada por su velocidad uniforme v_z (m/s), según

$$I_z = q_l v_z \quad (\text{A}) \quad (2.1)$$

que varía con el tiempo o, equivalentemente, una aceleración (o deceleración) de la carga, la cual es la derivada de la velocidad $a_z = dv_z/dt$ (m/s²), según la ecuación

$$l \frac{dI_z}{dt} = l q_l \frac{dv_z}{dt} = l q_l a_z \quad (2.2)$$

Para crear aceleración en las cargas el cable debe ser curvo, discontinuo, estar doblado o terminado. La aceleración de las cargas se consigue por una fuente externa que las pone en marcha y produce un campo electromagnético. Éstas se deceleran cuando el cable sufre alguna de las condiciones previamente nombradas, al ir quedando las cargas concentradas generando fuerzas internas asociadas al campo electromagnético. De este modo, la aceleración de las cargas producida por la fuente externa y su deceleración provocada por alguna discontinuidad o doblez del cable son los responsables de la radiación electromagnética. La figura 2.3 muestra todo esto.

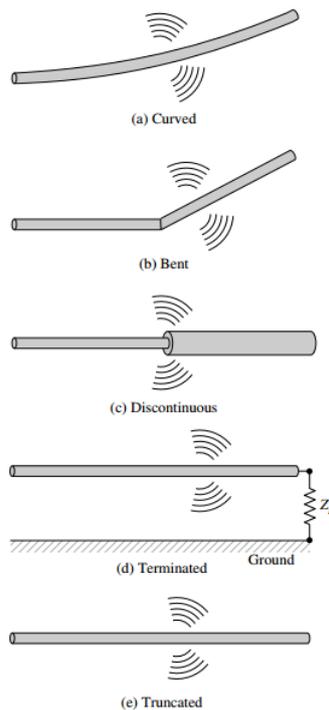


Figura 2.3: Configuraciones de radiación en un cable [1]

Excepcionalmente, si la carga oscila armónicamente se logra una aceleración de la carga periódica (y por tanto radiación) incluso aunque el cable sea recto y continuo. La radiación será mayor y abarcará más ancho de banda si los pulsos son más cortos, mientras que una oscilación continua producirá, idealmente, radiación de una única componente en frecuencia que coincidirá con la frecuencia de oscilación.

La radiación de ondas electromagnéticas entre dos cables se consigue aplicando un voltaje a través de ellos, el cual crea un campo eléctrico entre ambos conductores. El campo eléctrico lleva asociados líneas eléctricas de fuerza que son tangentes a él en cada punto y cuya fuerza es proporcional a su intensidad.

Asumiendo que la fuente generadora es sinusoidal, el campo eléctrico generado también lo será con un período igual al de la fuente. Así, las ondas electromagnéticas entran en la antena después de viajar por la línea de transmisión llevando consigo cargas eléctricas y sus correspondientes corrientes. Al llegar al final de la antena, las ondas son liberadas al espacio al juntarse sus

líneas eléctricas asociadas por sus extremos. Una vez en el espacio libre, las ondas siguen siendo periódicas y viajan a la velocidad de la luz. Este proceso se puede ver en la figura 2.2.

Cabe destacar que si la fuente deja de generar voltaje, las ondas previamente generadas siguen su curso por la línea de transmisión y la antena y más tarde por el espacio libre, una detrás de la otra. Además, es importante resaltar que mientras las ondas electromagnéticas se encuentran dentro de la línea de transmisión y la antena, su existencia está asociada a la presencia de las cargas dentro de los conductores. Sin embargo, una vez en el espacio libre, éstas forman círculos cerrados dejando de depender de dichas cargas. De este modo, se puede afirmar que las cargas eléctricas son necesarias para excitar y generar los campos eléctricos pero éstos pueden existir sin su presencia.

Un *dipolo* es un tipo de antena muy común que consiste en dos conductores idénticos y simétricos con una alimentación entre ambos. A continuación se estudiará cómo las líneas de fuerza del campo eléctrico se separan de la antena para formar ondas en el espacio libre. Para ello se seguirán los pasos de la figura 2.4.

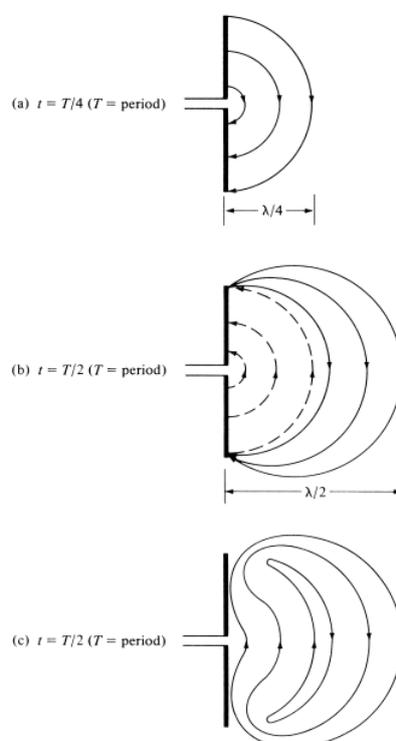


Figura 2.4: Proceso de radiación de un dipolo [1]

En (a) se pueden ver las líneas de fuerza creadas entre los brazos del dipolo para el primer cuarto del período, durante el cual la carga obtiene su valor máximo y las líneas han viajado hacia fuera una distancia radial de $\lambda/4$. En el siguiente cuarto de período estas mismas líneas han viajado otros $\lambda/4$ ($\lambda/2$ desde el origen) y la densidad de carga de los conductores empieza a disminuir. Esto es por la introducción de cargas opuestas al final de la primera mitad del período que neutralizan las cargas en los conductores. Estas cargas opuestas crean nuevas líneas de fuerza invertidas que viajan $\lambda/4$ en el segundo cuarto del período, según (b). Al no haber carga neta en la antena, las líneas de fuerza se ven forzadas a separarse del dipolo y unirse entre sí formando círculos cerrados, como ocurre en (c). En la siguiente mitad del período se producirá el mismo proceso pero en dirección opuesta. Este proceso se repetirá de manera continua indefinidamente.

2.4. Bandas de frecuencia y aplicaciones

Las *bandas de frecuencia* son rangos de frecuencias asignados a diferentes tecnologías y aplicaciones de radiocomunicación. Las diferentes bandas de frecuencia constituyen el *espectro electromagnético*. Sus límites y usos están regulados por la administración del país¹ a nivel nacional y por la *Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU, International Telecommunication Union* en inglés) a nivel internacional. Las diferentes bandas son:

- **Very Low Frequency (VLF)**. Frecuencias de 3 a 30 KHz y longitudes de onda de 10 a 100 km. Escaso ancho de banda, impracticable para la transmisión de audio. Se usa en radionavegación, para señalar la hora y comunicación militar, sobre todo en submarinos, ya que estas ondas son capaces de penetrar a unos 40 metros de profundidad en agua salada.
- **Low Frequency (LF)**. Frecuencias de 30 a 300 KHz y longitudes de onda de 1 a 10 km (onda larga). Baja atenuación, útiles para comunicaciones a larga distancia. Se usa en radio AM, radiobalizas, navegación, información, para señalar la hora y sistemas meteorológicos.
- **Medium Frequency (MF)**. Frecuencias de 300 KHz a 3 MHz y longitudes de onda de 100 m a 1 km (onda media). Se usa en radio AM, radiobalizas y comunicaciones marítimo-terrestres.
- **High Frequency (HF)**. Frecuencias de 3 a 30 MHz y longitudes de onda de 10 a 100 m (onda corta). Las ondas de este tamaño son capaces de reflectarse en la ionosfera, lo que las hace útiles para comunicaciones intercontinentales. Se usa en estaciones de radio, comunicación aérea, estaciones meteorológicas, para marcar la hora y para radioaficionados.
- **Very High Frequency (VHF)**. Frecuencias de 30 a 300 MHz y longitudes de onda de 1 a 10 m. Se usa en radio FM, televisión analógica, telefonía móvil, radiomodems, radioaficionados, comunicaciones marítimas, control del tráfico aéreo y aeronavegación.
- **Ultra High Frequency (UHF)**. Frecuencias de 300 MHz a 3 GHz y longitudes de onda de 1 dm a 1 m. Sirven sólo si existe línea de visión entre el transmisor y el receptor, ya que sus ondas son bloqueadas por montañas y edificios, aunque son suficientes para la recepción en interiores. Se usan para televisión analógica y digital, teléfonos inalámbricos, walkie-talkies, telefonía móvil y satelital.
- **Super High Frequency (SHF)**. Frecuencias de 3 a 30 GHz y longitudes de onda de 1 cm a 1 dm. Es la banda de las microondas, las cuales son muy directivas. Esta banda a su vez se halla dividida en las subbandas: S, C, X, K_u, K, K_a. Se usan para comunicación punto a punto, radioenlaces, radares, hornos microondas, redes inalámbricas de área local (WLANs), bluetooth, telefonía móvil y comunicación salitales.
- **Extremely High Frequency (EHF)**. Frecuencias de 30 a 300 GHz y longitudes de onda de 1 mm a 1 cm. Gran atenuación atmosférica, sus ondas son absorbidas por los gases de la atmósfera. Son por ello de corto alcance, utilizadas para comunicación terrestre a sólo unos pocos kilómetros de distancia e incluso entonces sufren atenuaciones por la lluvia y la humedad. Se usan en investigación, control de la atmósfera, armamento, seguridad, control de velocidad policial y aparatos médicos.

¹En España las regula el *Ministerio de Industria, Energía y Turismo*. Toda la información referente se puede consultar a través del siguiente enlace: <http://www.minetur.gob.es/telecomunicaciones/Espectro/Paginas/CNAF.aspx>

A continuación se muestra la distribución básica de las distintas bandas de frecuencia en el espectro radioeléctrico.

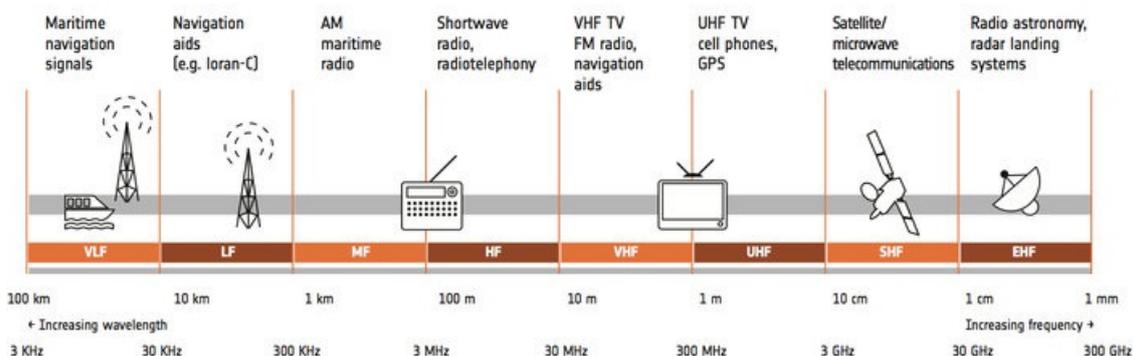


Figura 2.5: Espectro electromagnético con sus diferentes bandas de frecuencia (fuente: Google Imágenes)

Seguidamente se muestra la distribución de las distintas subbandas de frecuencia dentro de la banda de las microondas (SHF).

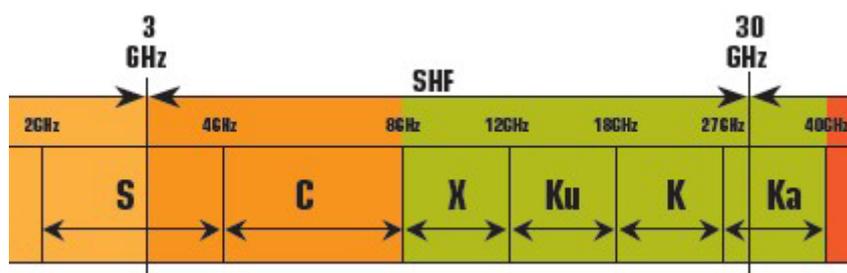


Figura 2.6: Subbandas de SHF (fuente: Google Imágenes)

2.5. Tipos de antenas

En la presente sección se hace un repaso de los tipos de antenas más comunes que existen en la actualidad.

2.5.1. Antenas de hilo

Las **antenas de hilo** son las más comunes y se encuentran por todas partes, como automóviles, teléfonos móviles, radios, electrodomésticos, edificios, etc. Se pueden encontrar en diferentes formas tales como un simple hilo (dipolo), en bucle o en hélice.

Los *dipolos* son antenas formadas por un único cable, recto o curvo, alimentado centralmente, formando dos elementos generalmente simétricos. Son de las antenas más antiguas, simples, baratas y versátiles que existen y, debido a todo esto, constituyen la base de estudio de la teoría de

antenas. También suelen formar parte de antenas más complejas, como por ejemplo la antena Yagi o agrupados en arrays. En la sección anterior se explica el proceso de radiación en una antena de dipolo.

Las antenas de hilo en *bucle* son también simples, económicas y versátiles. Pueden ser a su vez circulares, cuadradas, rectangulares, triangulares, elípticas, etc. Debido a la simpleza de análisis y construcción, las antenas de bucle circulares son las más comunes. Está demostrado que un bucle suficientemente pequeño circular o cuadrado es equivalente a un dipolo infinitesimal magnético cuyo eje sea perpendicular al plano del bucle, en cuanto a sus resultados matemáticos. La mayoría de aplicaciones en las que este tipo de antenas son usadas se encuentran en las bandas HF (3-30 MHz), VHF (30-300 MHz) y UHF (300-3.000 MHz).

Las antenas de hilo en *hélice* constan de un hilo dispuesto en espiral, reduciendo así la longitud de la antena si ésta fuera un cable sin más. Suelen ser de tamaño reducido, operando generalmente en la banda HF (3-30 MHz).

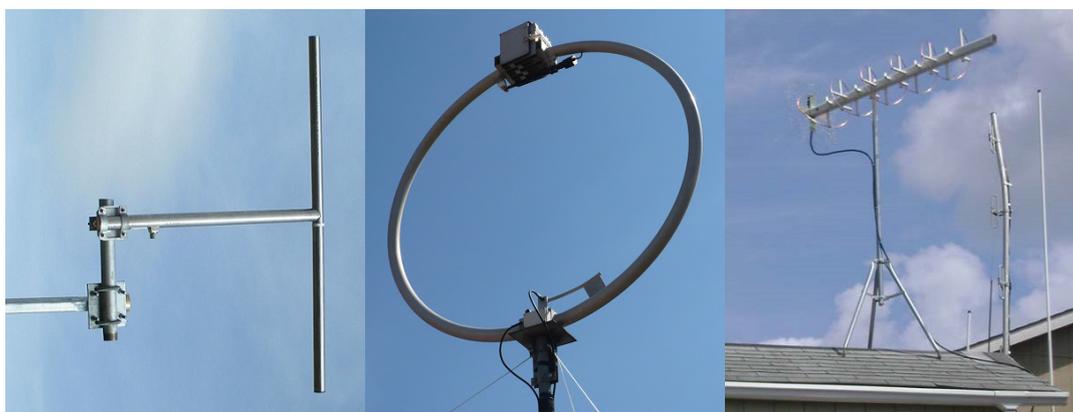


Figura 2.7: Dipolo, antena en bucle y antena en hélice (fuente: Google Imágenes)

2.5.2. Antenas de apertura

Las **antenas de apertura** son antenas que utilizan la forma de su superficie para direccionar su haz de radiación, concentrando así su emisión o recepción. Generalmente están fabricadas de metal y dieléctrico (material que conduce mal la electricidad). Cada vez aumenta más su uso gracias a las nuevas geometrías y a la utilización de más altas frecuencias. Son muy usadas en aeronaves y aplicaciones espaciales debido a que estas antenas pueden ser montadas en la superficie del aparato y cubiertas de aislante para protegerlas de condiciones meteorológicas adversas evitando de paso afectar la aerodinámica de la aeronave. Suelen operar a las frecuencias de microondas (SHF, 3-30 GHz). La antena de apertura más popular es la antena de bocina. Aunque la antena parabólica también puede ser considerada de apertura, se encuentra clasificada en esta sección como antena reflectora.

La *antena de bocina* no es más que una estructura hueca de secciones de tamaño distinto lo cual provoca un ensanchamiento o estrechamiento en el camino que sigue la radiación de transmisión o recepción. Puede poseer diferentes formas como plana, piramidal o cónica. Es una antena antigua, de finales del siglo XIX, aunque cobró gran importancia durante el periodo de la Segunda Guerra Mundial. A partir de ahí, su uso y estudio han ido en aumento. Son sencillas de construir y alimentar, versátiles y de gran ganancia (ver sección 2.6.10). Es utilizada en radioastronomía y seguimiento de satélites, además de poder formar parte en antenas de fase y ser aplicada como

alimentador de otras antenas. También sirve como estándar de calibración y medición de ganancia de antenas de alta ganancia.

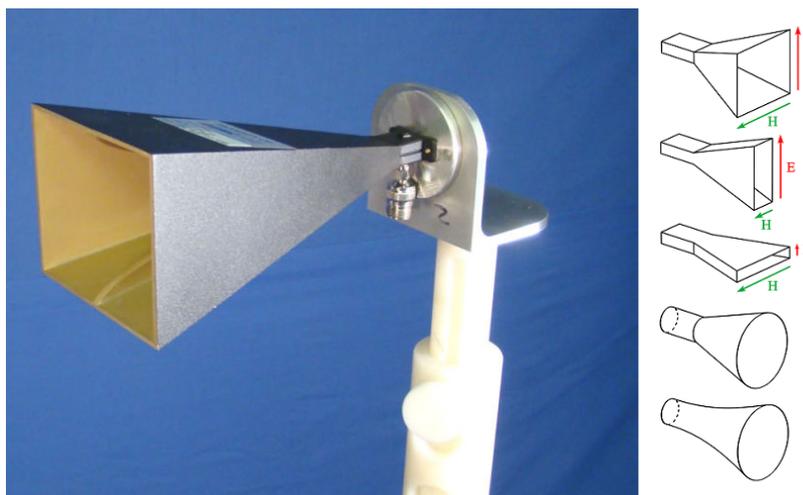


Figura 2.8: Antena de bocina y algunas de sus formas más comunes (fuente: Google Imágenes)

2.5.3. Antenas microstrip

Las **antenas microstrip o de parche** consisten en un parche metálico rodeado de un sustrato que hace la función de tierra. La forma y dimensión del parche metálico, que generalmente es circular o rectangular, define las propiedades de la antena. Su popularidad reside en que son fáciles de estudiar y muy baratas de fabricar mediante tecnología de circuitos impresos, teniendo además unas buenas propiedades radiantes en términos de frecuencia de resonancia, impedancia y polarización. Sin embargo, las microstrips son de perfil bajo y presentan inconvenientes en cuanto a baja potencia y eficiencia, poca capacidad de escaneo y estrecho ancho de banda. Son relativamente modernas, adquirieron una gran importancia a partir de los años setenta debido a su uso en aplicaciones aeronáuticas al ser antenas planas adheridas a la superficie del avión que no modifican en absoluto su aerodinámica y que resisten perfectamente las condiciones adversas. Otros usos comunes de estas antenas son en satélites, misiles, coches y teléfonos móviles, operando comúnmente a partir de UHF.

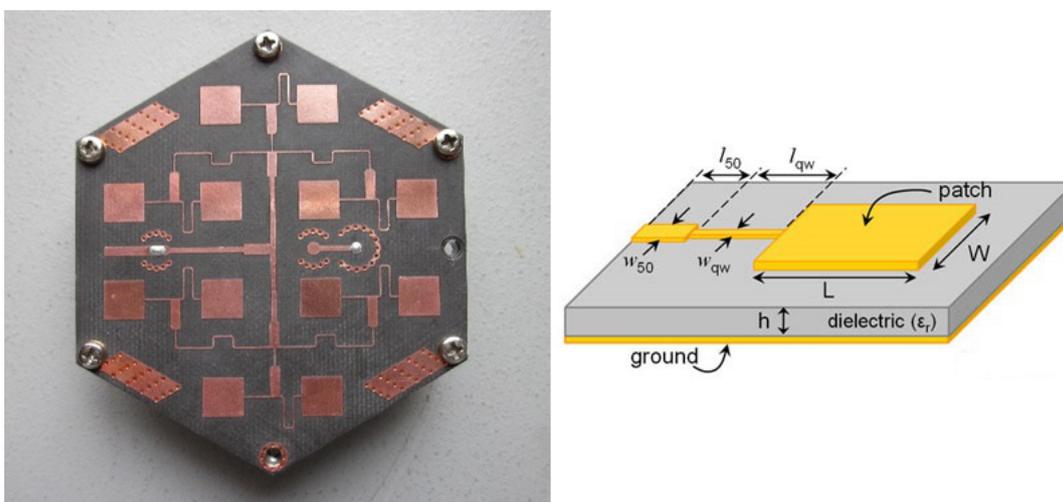


Figura 2.9: Array de doce antenas microstrip y su esquema básico (fuente: Google Imágenes)

2.5.4. Antenas reflectoras

Las **antenas reflectoras** son aquellas antenas que se sirven de un reflector que refleja las ondas electromagnéticas. Pueden ser usadas tanto como transmisoras como receptoras. Aunque el origen de estas antenas data de las primeras antenas, no fue hasta la Segunda Guerra Mundial cuando resurgieron debido a su aplicación en sistemas de radar para detectar aviones enemigos. A partir de ahí siguieron evolucionando y adquirieron un nuevo impulso en los años sesenta como consecuencia del éxito en la exploración espacial, donde se necesitaba establecer comunicaciones a grandes distancias de millones de kilómetros. La antena reflectora más famosa y, en general, la antena más famosa de todas es la antena parabólica, que hace uso de las excelentes propiedades reflectoras de la parábola.

La **antena parabólica** es una antena que consta de un reflector parabólico que hace rebotar las señales electromagnéticas dirigiéndolas hacia su foco, donde se encuentra el transmisor o receptor. Este tipo de antenas poseen una gran directividad (ver sección 2.6.11) y muy alta ganancia, lo que se traduce en que son capaces de generar anchos de haz muy estrechos (directivos). Para esto, las antenas parabólicas utilizan longitudes de onda muy pequeñas en comparación con las dimensiones de su reflector, operando en UHF y SHF (microondas). Estas antenas pueden llegar a ser enormes, como el radiotelescopio de Arecibo, que con sus 305 metros de diámetro y 132 metros de distancia focal es la antena reflectora más grande del mundo en la actualidad. Tiene aplicaciones en televisión, comunicaciones con aeronaves y satélites, radiotelescopios, sistemas radar, etc. Por su forma y estructura, también puede ser considerada como una antena de apertura.

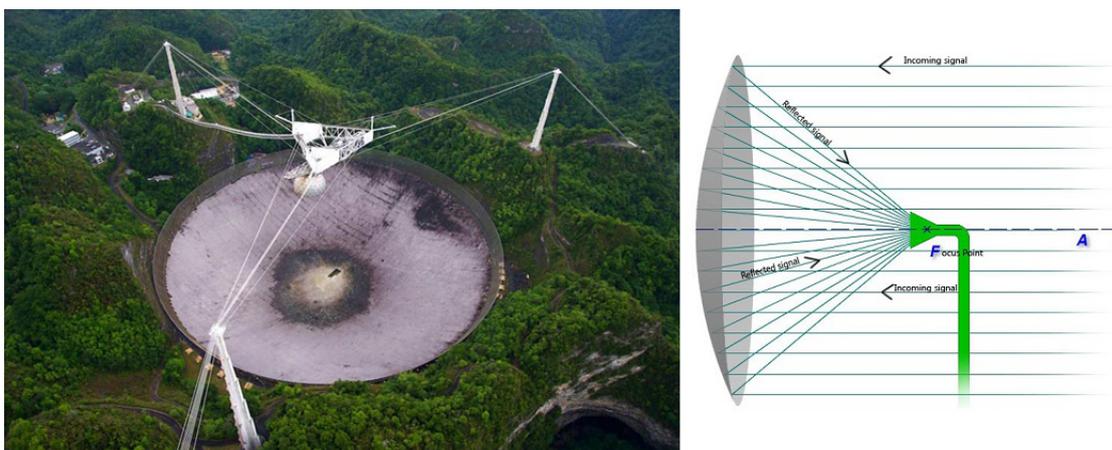


Figura 2.10: Radiotelescopio de Arecibo y esquema básico de una antena parabólica (fuente: Google Imágenes)

2.5.5. Antenas de lente

Las **antenas de lente** son las antenas que utilizan una lente para colimar la energía divergente incidente para evitar que se esparza en direcciones no deseadas. Su precisión viene caracterizada por la forma geométrica y el material de la lente. Sus aplicaciones son las mismas que las de las antenas reflectoras, especialmente las de frecuencias más altas, pues no sería realizables en cuanto a dimensiones y peso para bajas frecuencias.

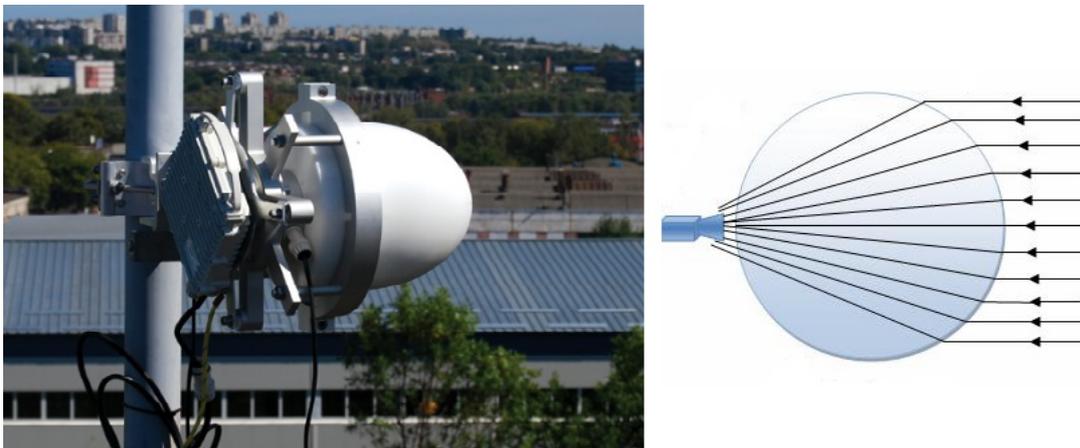


Figura 2.11: Antena de lente (fuente: Google Imágenes)

2.5.6. Arrays de antenas

Los **arrays de antenas** no son un tipo de antenas en sí en cuanto a forma o estructura, sino que hace referencia a la agrupación de cualquiera de los otros tipos de antenas anteriormente nombradas para constituir una “superantena” que poseerá propiedades radiantes inalcanzables para las antenas que la forman por sí solas. Esta agrupación se denomina *array*, pasando a ser cada antena dentro de él un *elemento*. Variando la forma (lineal, circular, triangular, rectangular, hexagonal, etc.) y dimensión del array, el tipo de antena y la posición de sus elementos (a distancias uniformes o no uniformes) y la amplitud y fase de sus excitaciones (ver sección 2.7.4), se pueden conseguir diagramas de radiación muy específicos (máximos, restricción de lóbulos secundarios, introducción de campos nulos) que no se lograrían variando las propiedades de sus elementos individualmente. El rango de frecuencias que utiliza viene marcado por el tipo de antena de sus elementos. Las estaciones base de telefonía móvil son quizás el ejemplo más común de los sistemas de arrays, aunque sus aplicaciones son muy extensas, tanto para uso personal, comercial, espacial y militar. Existen dos casos especiales de arrays de antenas que, debido a su importancia, se muestran a continuación: las antenas en fase y las antenas inteligentes.

Las *antenas en fase o phased/scanning arrays* son una disposición concreta de los arrays de antenas donde mediante la variación en las fases relativas de las excitaciones de sus elementos, se consigue apuntar a una determinada posición y suprimir otras direcciones no deseadas. Estas antenas son especialmente interesantes como sistemas de radar, donde se puede realizar un escaneo de la zona sin tener que resituar físicamente la antena. No por casualidad este tipo de antenas fueron desarrolladas en la Segunda Guerra Mundial. También son usados para retransmisión de radio AM/FM, asistencia en vuelo de aeronaves, en la marina, predicción del tiempo, aplicaciones espaciales, etc.

Las *antenas inteligentes o smart/adaptive antennas* son arrays de antenas configuradas y controladas por algoritmos de *procesamiento digital de señales (DSP, Digital Signal Processing* en inglés) que analizan el espacio que las rodea y lo usan para calcular el diagrama de radiación que mejor se adapta a las necesidades del entorno. Son capaces de identificar y seguir objetivos móviles o radiaciones de otras antenas mediante algoritmos de *DOA o Direction of Arrival* (algoritmos capaces de detectar la dirección de la que proviene una onda electromagnética). Aunque no son nuevas, pues también datan, como muchas otras antenas, de la Segunda Guerra Mundial y su necesidad de detección con radar de amenazas enemigas, su uso ha crecido exponencialmente en las últimas décadas auspiciado por el rápido desarrollo y normalización de los computadores. Una

aplicación muy importante hoy en día es como estación base en telefonía móvil e internet.

Este proyecto aplica todos sus algoritmos de optimización en arrays de antenas, sin importar en un principio el tipo de antena de sus elementos ni la frecuencia a la que operen.



Figura 2.12: Array de antenas parabólicas para observación espacial, phased array a bordo de un avión de combate y estación base de telefonía móvil (fuente: Google Imágenes)

2.6. Parámetros y conceptos de las antenas

En esta sección se explican los conceptos básicos que se encuentran presentes en todas las antenas los cuales son necesarios para la correcta comprensión del proyecto.

2.6.1. Frecuencia y longitud de onda

La *frecuencia* de una onda es el número de repeticiones por unidad de tiempo de dicha onda. La frecuencia es la inversa del período o duración de un ciclo de la onda T , expresado en segundos (s), según

$$f = \frac{1}{T} \quad (Hz \equiv s^{-1}) \quad (2.3)$$

La *longitud de onda* es el período espacial de una onda o, dicho de otro modo, la distancia a la cual la onda se repite, como se muestra en la figura 2.13. La longitud de onda está definida en función del número de onda k , de la forma

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (m) \quad (2.4)$$

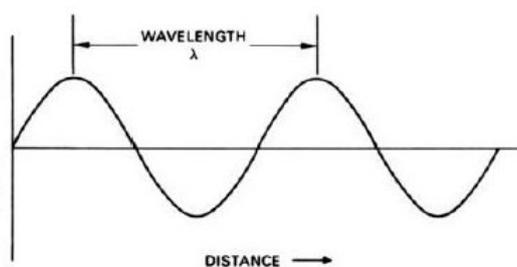


Figura 2.13: Longitud de onda [1]

La expresión que relaciona la frecuencia de una señal con su longitud de onda es de la siguiente forma

$$f = \frac{v}{\lambda} \quad (2.5)$$

donde v es la velocidad de fase de la onda medida en metros por segundo (m/s). Para el caso de radiación electromagnética, que es el tipo de radiación que emiten las antenas, la velocidad de la onda es igual a la velocidad de la luz, cuyo valor aproximado es $c = 2,99 \times 10^8$ m/s. La expresión de la frecuencia se reescribe según

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (2.6)$$

Esta expresión es la que explica las diferentes bandas en las que opera cada tipo de antena y, por tanto, sus aplicaciones. Según la dimensión de la antena, ésta captará un tamaño u otro de longitud de onda y, por tanto, funcionará a una frecuencia u otra.

2.6.2. Ancho de banda

El *ancho de banda* de una antena es el rango de frecuencias dentro del cual el rendimiento de ésta es conforme según a un determinado estándar. El ancho de banda puede ser considerado como el rango de frecuencias, a cada lado de una frecuencia central, donde las características de una antena (como impedancia de entrada, ganancia, polarización, eficiencia, SLL, etc.) tienen un valor aceptable comparadas con aquéllas mismas a la frecuencia central. Todas las antenas poseen un cierto ancho de banda mayor o menor en función de su aplicación. Existe un tipo de antenas con anchos de banda muy grandes, creadas en los últimos años. A éstas se las conoce como *antenas independientes en frecuencia*. El presente proyecto no está orientado a un uso o aplicación específica, con lo que el ancho de banda no desempeña, en principio, ningún papel en su desarrollo.

2.6.3. Potencia y densidad de potencia

La cantidad usada para describir la potencia asociada a una onda electromagnética es el *vector de Poynting instantáneo*, que mide la *densidad de potencia instantánea* y se define como

$$\mathcal{W} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} \quad (\text{W/m}^2) \quad (2.7)$$

donde \mathcal{E} es la intensidad instantánea del campo eléctrico y \mathcal{H} la intensidad instantánea del campo magnético. El tipo de fuente cursiva usada en la fórmula anterior se utiliza para denotar cantidades instantáneas (no confundir con $\Re()$ que es la parte real de una cantidad, usada a continuación).

Como el vector de Poynting es una densidad de potencia, la *potencia total instantánea* que cruza una superficie cerrada puede ser obtenida integrando la componente normal del vector de Poynting sobre la superficie entera, según

$$\mathcal{P} = \oiint_S \mathcal{W} \cdot d\mathbf{s} = \oiint_S \mathcal{W} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (\text{W}) \quad (2.8)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario (ver nota 11 del anexo A) normal a la superficie y da es el área infinitesimal de la superficie cerrada medida en m^2 .

Para aplicaciones en los que el campo varía con el tiempo, suele ser más usual hallar la *densidad de potencia media*, la cual se obtiene integrando el vector de Poynting instantáneo sobre un período y dividiéndolo por él. Para variaciones armónicas en el tiempo de la forma $e^{j\omega t}$, se definen los campos complejos \mathbf{E} y \mathbf{H} los cuales están relacionados a sus equivalentes instantáneos \mathcal{E} y \mathcal{H} respectivamente de la siguiente manera

$$\mathcal{E}(x, y, z; t) = \Re(\mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}) \quad (2.9)$$

$$\mathcal{H}(x, y, z; t) = \Re(\mathbf{H}(x, y, z)e^{j\omega t}) \quad (2.10)$$

A partir de estas definiciones y de la identidad $\Re(\mathbf{E}e^{j\omega t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}e^{j\omega t} + \mathbf{E}^*e^{-j\omega t})$, la expresión del vector de Poynting instantáneo (2.7) se puede escribir como

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) + \frac{1}{2}\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}e^{j2\omega t}) \quad (2.11)$$

El primer término de (2.11) no es función del tiempo, y las variaciones en tiempo del segundo son el doble de la frecuencia dada. Con esto, el *vector de Poynting medio* o, equivalentemente, la *densidad de potencia media*, se puede escribir según

$$\mathbf{W}_{av}(x, y, z) = \mathcal{W}(x, y, z; t)]_{av} = \frac{1}{2}\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (\text{W/m}^2) \quad (2.12)$$

El factor $\frac{1}{2}$ aparece en (2.9) y (2.11) al ser los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} valores pico, los cuales deben ser omitidos para valores RMS².

Basándose en la expresión del vector de Poynting medio (2.12), la *potencia media* radiada por una antena o, sencillamente, la *potencia radiada* se define como

$$P_{rad} \equiv P_{av} = \iint_S \mathbf{W}_{rad} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{W}_{av} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{2} \iint_S \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{W}) \quad (2.13)$$

Para una fuente isotrópica, que radia igual en todas las direcciones, la expresión de su potencia radiada no será función de sus coordenadas esféricas θ y ϕ , sino que sólo tendrá una componente radial, según

$$P_{rad} = \iint_S \mathbf{W}_0 \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\hat{\mathbf{a}}_r W_0(r)] \cdot [\hat{\mathbf{a}}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi] = 4\pi r^2 W_0 \quad (2.14)$$

y la expresión de su densidad de potencia, que estará distribuida uniformemente sobre la superficie de una esfera de radio r , será

$$\mathbf{W}_0 = \hat{\mathbf{a}}_r W_0 = \hat{\mathbf{a}}_r \frac{P_{rad}}{4\pi r^2} \quad (2.15)$$

²El *valor cuadrático medio* (RMS, *Root Mean Square* en inglés) es una medida estadística definida como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las muestras de una cantidad variable. Para una función que varía en el tiempo con período T , su valor RMS se define como

$$f_{RMS} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}$$

2.6.4. Intensidad de radiación

La *intensidad de radiación* en una dirección determinada está definida como la potencia radiada de una antena por unidad de ángulo sólido. La intensidad de radiación es un parámetro de campo lejano y se obtiene multiplicando la densidad de radiación W_{rad} (W/m^2) por el cuadrado de la distancia r (m), según

$$U = r^2 W_{rad} \quad (W/\text{unidad de ángulo}) \quad (2.16)$$

La intensidad de radiación también está relacionada por el campo eléctrico en campo lejano de una antena, con la forma

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2\eta} |E(r, \theta, \phi)|^2 \quad (2.17)$$

donde $E(r, \theta, \phi)$ es la intensidad del campo eléctrico en campo lejano y η la impedancia intrínseca del medio.

La potencia total se obtiene integrando la intensidad de radiación por toda la región angular 4π . Así

$$P_{rad} = \iint_{\Omega} U d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.18)$$

donde el elemento del ángulo sólido $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

Para una fuente isotrópica, la intensidad de radiación U_0 será independiente de los ángulos θ y ϕ , como lo era en la expresión (2.16). De este modo, la ecuación (2.18) se transforma en

$$P_{rad} = \iint_{\Omega} U_0 d\Omega = U_0 \iint_{\Omega} d\Omega = 4\pi U_0 \quad (2.19)$$

y, despejando, la intensidad de radiación de una fuente isotrópica queda según

$$U_0 = \frac{P_{rad}}{4\pi} \quad (2.20)$$

2.6.5. Diagrama de radiación

El *diagrama de radiación* de una antena es una función matemática, usualmente representada gráficamente en dos o tres dimensiones, de las propiedades de radiación de una antena, como la función de campo o de potencia, en función de las coordenadas espaciales. Los diagramas de radiación pueden representarse tanto en escala natural como logarítmica, especialmente en decibelios (dB), ya que esta escala acentúa mejor los valores más pequeños. Además, los diagramas se suelen normalizar con respecto a su máximo valor.

En este proyecto los diagramas de radiación representan el factor de array de las antenas en decibelios y normalizado a su máximo valor (ver sección 2.7.5), con tres tipos de gráficas distintas: bidimensional (ver figura 2.14), polar (ver figura 2.15) y tridimensional (ver figura 2.16). Para las gráficas bidimensionales y polares el factor de array se representa en función del ángulo $\theta \in [-180^\circ, 180^\circ] \equiv [-\pi, \pi]$, para un corte de ϕ determinado (la sección 2.7.3 explica la distribución de distintos tipos de arrays y sus ejes de coordenadas). En las gráficas tridimensionales el factor de array se representa en función de los planos $\theta \in [0^\circ, 180^\circ] \equiv [0, \pi]$ y $\phi \in [0^\circ, 360^\circ] \equiv [0, 2\pi]$.

Cuando un array radia con máxima intensidad hacia la normal de su eje, se dice que apunta a *broadside*. Para este proyecto, dado que el array se configura siguiendo el eje x para arrays lineales

y siguiendo los ejes x e y para los arrays planos y circulares, el apuntamiento en broadside se consigue cuando $\theta_0 = 0^\circ, 180^\circ$, dirigiendo su radiación a través del eje z . De la misma forma, cuando un array dirige su máxima radiación a lo largo del eje del array, éste se dice que apunta a *endfire*. Siguiendo la configuración anterior, el apuntamiento en endfire se logra cuando $\theta_0 = 90^\circ, 270^\circ$, quedando su radiación normal al eje z . Las geometrías y distribuciones de los arrays utilizados en este proyecto se ven en la sección 2.7.3.

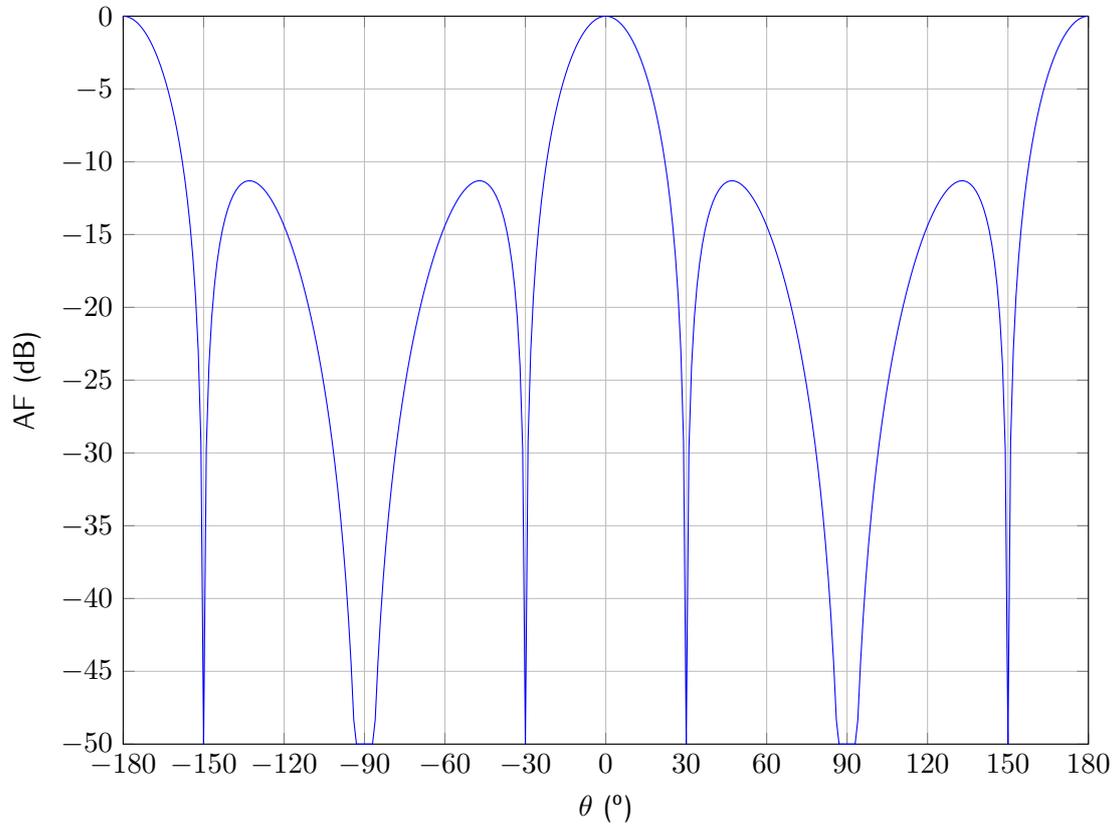


Figura 2.14: Diagrama de radiación en 2D

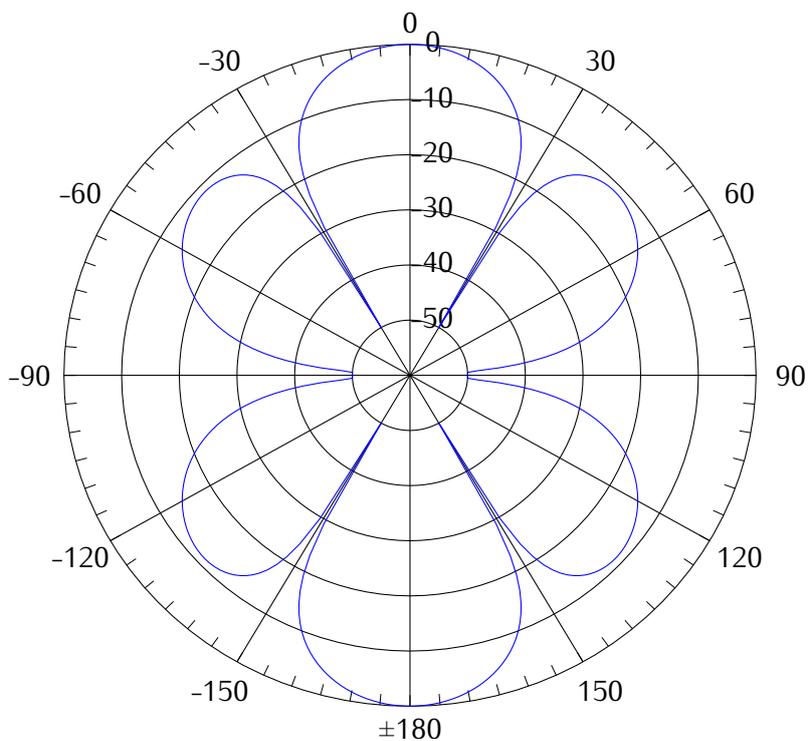


Figura 2.15: Diagrama de radiación polar

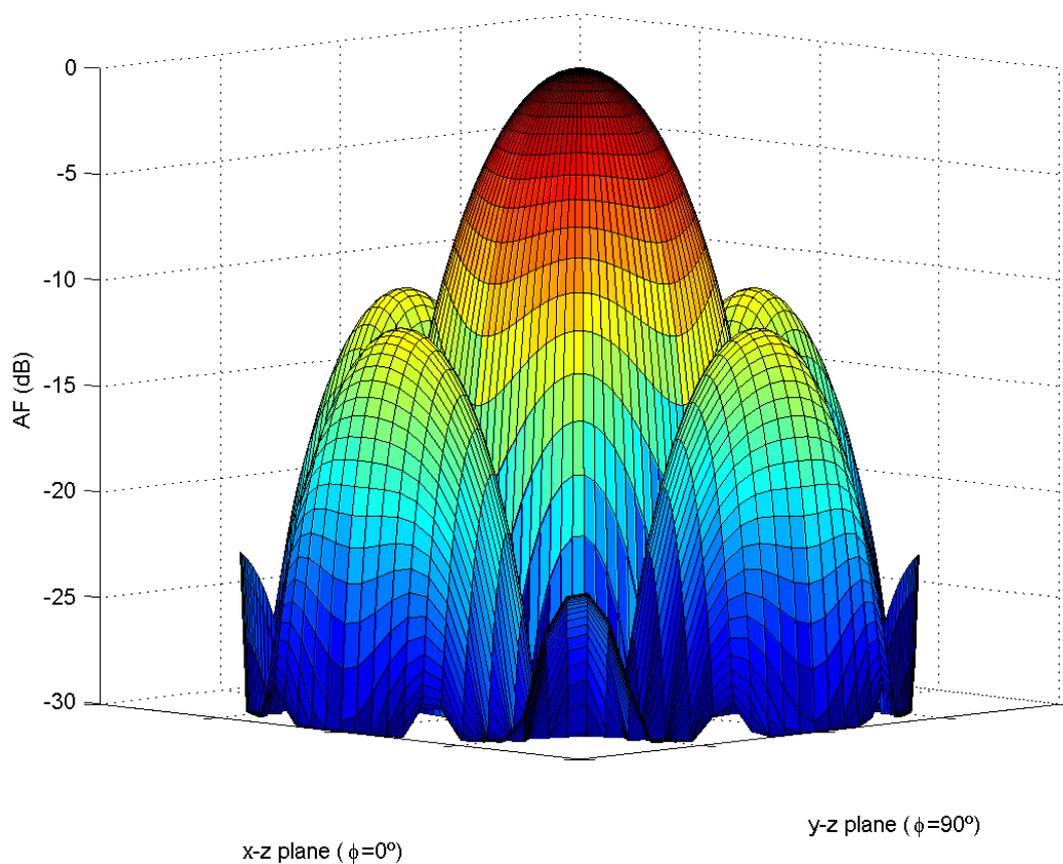


Figura 2.16: Diagrama de radiación en 3D

2.6.6. Antena isotrópica, direccional y omnidireccional

Una *antena isotrópica* es aquella que radia sin pérdidas con la misma intensidad para cualquier punto del espacio. Este tipo de antenas son imposibles de fabricar en la realidad, son ideales y se usan como estudio y referencia de antenas reales. Todos los arrays que se estudian en el proyecto están compuestos de antenas isotrópicas. Una *antena direccional* es aquella antena que radia o recibe radiación electromagnética más eficientemente en unas direcciones que en otras. Como medida de referencia, se suele decir que una antena es directiva cuando su directividad máxima (ver sección 2.6.11) es significativamente mayor que la de un dipolo de media longitud de onda. Una *antena omnidireccional* es una antena que radia con la misma intensidad en un plano determinado y direccionalmente en cualquier otro plano ortogonal.

A continuación se muestra la forma de los diagramas de radiación tridimensionales para cada tipo de antena.

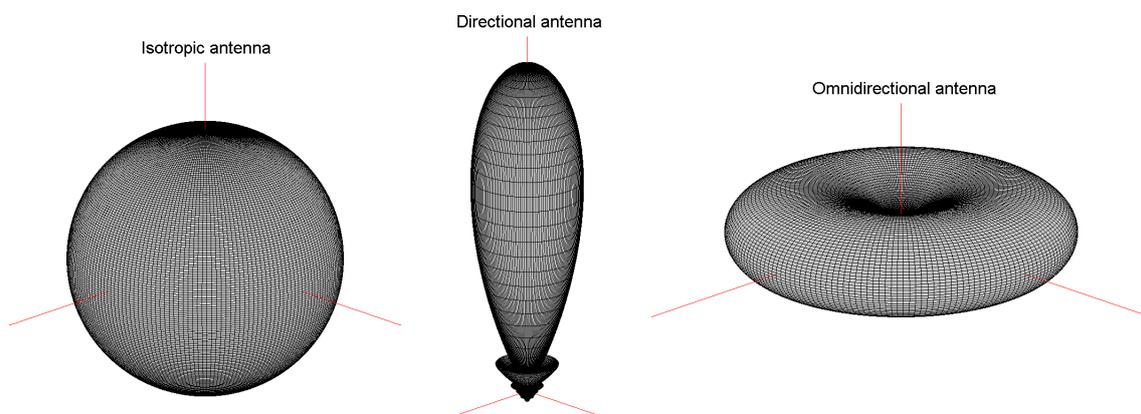


Figura 2.17: Antena isotrópica, direccional y omnidireccional [1]

2.6.7. Regiones de campo

El espacio que rodea a una antena se puede subdividir en tres regiones básicas. Dichas regiones sirven para identificar la estructura del campo de cada una, la cual es diferente. Éstas son:

- Región de campo cercano reactivo*. Es la zona que rodea a la antena donde predomina el campo reactivo. Esta zona empieza en la superficie misma de la antena y su radio es $R < 0,62\sqrt{D^3/\lambda}$, donde λ es la longitud de onda y D es la dimensión de la antena.
- Región de campo cercano radiante (Fresnel)*. Es la zona que se encuentra entre la región de campo cercano reactivo y la región de campo lejano, dentro de la cual el campo radiante predomina y la distribución del campo angular depende de la distancia a la que se encuentra la antena. La corona de acción de esta región es $0,62\sqrt{D^3/\lambda} \leq R < 2D^2/\lambda$, donde, para ser este último límite exterior válido, la dimensión de la antena debe ser grande comparado con la longitud de onda ($D > \lambda$).
- Región de campo lejano (Fraunhofer)*. Es la zona más lejana de la antena donde la distribución del campo angular es independiente de la distancia a la que se encuentra la antena. La región queda delimitada según $2D^2/\lambda \leq R < \infty$. Al no ser el campo interferido por la

cercanía de la antena, ésta es la región ideal para representar los diagramas de radiación que se muestran a lo largo del proyecto.

La siguiente figura muestra los efectos que tienen las distintas regiones de campo previamente descritas en la amplitud de los diagramas de radiación.

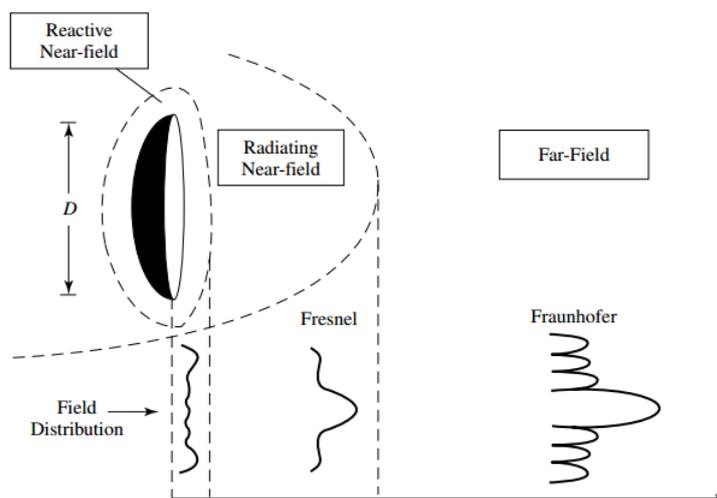


Figura 2.18: Variaciones en los diagramas de radiación dependiendo de la región de campo donde se mida [1]

2.6.8. Lóbulos radiantes

Un *lóbulo radiante* es una porción del diagrama de radiación limitada por regiones de intensidad de radiación relativamente débiles. Según su función, posición y magnitud, los lóbulos radiantes se pueden subclasificar en:

- **Lóbulo principal.** Es el lóbulo radiante que contiene la dirección de máximo apuntamiento, o sea, la de máxima radiación. Como se verá a lo largo del proyecto, cuando el lóbulo principal de una antena apunta principalmente a $\theta = 0$ (para ver los demás casos mirar 2.7.5), el diagrama de radiación será simétrico. Puede existir más de un lóbulo principal, bien porque así se diseña una antena, o bien por máximos indeseados debidos a la separación entre elementos en arrays de antenas, llamados *grating lobes*, cuyos efectos se analizan también en la sección 2.7.5.
- **Lóbulos menores.** Son los demás lóbulos que forman parte del diagrama de radiación. Éstos suelen representar radiaciones en direcciones no deseadas y, por tanto, el objetivo en el diseño de una antena es minimizarlos.
- **Lóbulos secundarios.** Son los lóbulos menores en cualquier dirección distinta a la del lóbulo principal. Usualmente son adyacentes al lóbulo principal y ocupan el hemisferio en la dirección de éste. Los lóbulos secundarios son normalmente los mayores de los lóbulos menores. El nivel de lóbulos secundarios es un parámetro muy importante, expresado en forma de ratio de la densidad de potencia de un determinado lóbulo y la del principal. Dicho nivel está denominado por sus siglas en inglés *SLL (Side-Lobe Level)*. Un valor de $SLL = -20$ dB es más que suficiente para la mayoría de aplicaciones y, para valores menores, se necesitan diseños y construcciones muy precisas. El *SLL* es un parámetro muy importante en

los sistemas de radar, para evitar falsas detecciones. En los procesos de optimización que se estudian en el proyecto aparecerán con frecuencia como un parámetro a minimizar.

- **Lóbulo trasero.** Es el lóbulo menor cuyo eje se encuentra a aproximadamente un ángulo de 180° con respecto al lóbulo principal.

La siguiente figura muestra los distintos tipos de lóbulos de radiación.

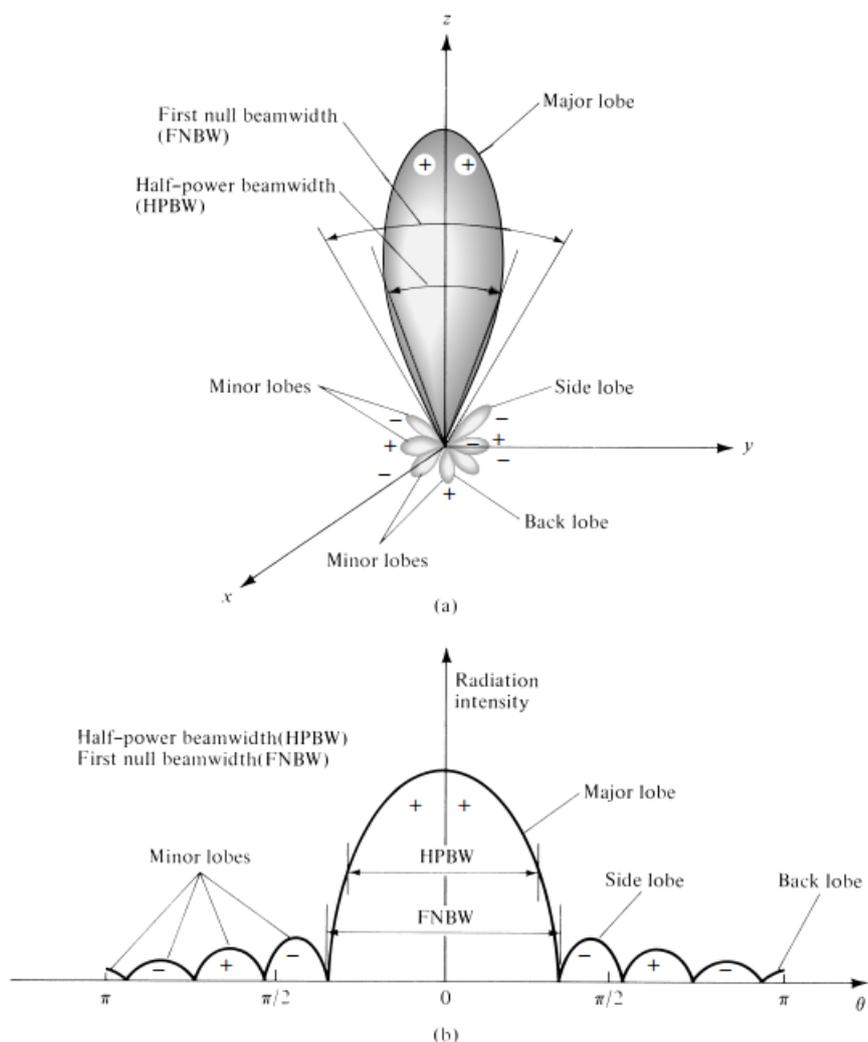


Figura 2.19: Tipos de lóbulos radiantes en (a) 3D (b) 2D [1]

2.6.9. Ancho de haz

El *ancho de haz* en un diagrama está definido como la separación angular entre dos puntos idénticos en los lados opuestos del punto máximo. En un diagrama de radiación existen múltiples anchos radiantes. Hay dos anchos de haz importantes de referencia definidos por la *IEEE*. El primero se llama *Half-Power BeamWidth (HPBW)* y abarca, en el plano que contiene la dirección del máximo de un lóbulo radiante, el ángulo entre las dos direcciones en las cuales la intensidad de radiación es la mitad del valor de dicho máximo. Si no se especifica lo contrario, el ancho de haz sin más identificación suele referirse al HPBW. El segundo se conoce como *First-Null BeamWidth*

(*FNBW*) y comprende la separación angular entre los primeros nulos (puntos del espacio donde no existe radiación) del diagrama.

El ancho de haz es una característica de la antena muy importante y suele ser usado como contraposición al nivel de lóbulos. A mayor ancho de haz el nivel de lóbulos desciende y viceversa. Además, el ancho de haz suele ser también utilizado para describir la capacidad de resolución de una antena en términos de distinguir entre dos fuentes radiantes adyacentes. Convencionalmente, esta resolución se fija a la mitad del *FNBW*, el cual a su vez es aproximado al *HPBW*. Esto significa que dos fuentes separadas por distancias angulares igual o mayores que $\text{FNBW}/2 \approx \text{HPBW}$ de una antena con una distribución uniforme pueden ser identificadas. Si la separación es menor, la antena tenderá a suavizar la distancia de separación angular.

La figura 2.19 muestra los dos tipos de anchos de haz en los diagramas de radiación y en la figura 2.20 se enseñan sus proporciones.

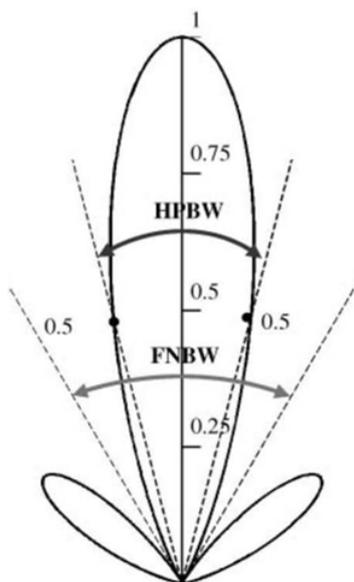


Figura 2.20: Anchos de haz HPBW y FNBW [1]

2.6.10. Ganancia

La ganancia es una medida que tiene en cuenta tanto la eficiencia de la antena como sus capacidades direccionales. La *ganancia* de una antena en una dirección determinada está definida como el ratio entre la intensidad en dicha dirección y la radiación de intensidad que se obtendría si la potencia aceptada por la antena fuera radiada isotrópicamente. La radiación de intensidad correspondiente a la potencia radiada isotrópicamente es igual a la potencia que acepta la antena dividida por 4π . La expresión de la ganancia es

$$G = 4\pi \frac{\text{intensidad de radiación}}{\text{potencia aceptada}} = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (2.21)$$

En la mayoría de los casos se utiliza la *ganancia relativa*, la cual está definida como el ratio entre la ganancia de potencia en una dirección determinada y la ganancia de potencia de una antena de referencia en dicha dirección dada. La potencia de entrada debe ser la misma para ambas antenas. Cuando no se especifica la dirección, la ganancia de potencia es referida en

la dirección de máxima radiación. Además, ésta se suele expresar tanto de manera adimensional como en decibelios (dB). La ganancia de una antena se encuentra estrechamente relacionada con la directividad, como se ve a continuación.

2.6.11. Directividad

La *directividad* de una antena se define como el ratio entre la intensidad de radiación en una dirección determinada y la intensidad de radiación media para todas las direcciones del espacio. Dicha intensidad de radiación media es igual a la potencia total radiada por la antena dividida por 4π . Equivalentemente, la directividad de una antena es el ratio de su intensidad de radiación en una dirección dada sobre aquélla procedente de una fuente isotrópica. La expresión de la directividad es la siguiente

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{U}{\frac{1}{4\pi}P_{rad}} \quad (2.22)$$

Se suele medir tanto en unidades adimensionales como en decibelios isotrópicos (dBi). Cuando se trabaja con antenas sin pérdidas, como es el caso de este proyecto, la directividad es igual a la ganancia, ya que la potencia radiada es igual a la aceptada por la antena, con lo que los decibelios isotrópicos son equivalentes a los decibelios estándar (dBi \equiv dB).

La directividad de una antena isotrópica es la unidad en una escala sin dimensiones (cero en dB), dado que su potencia es radiada igualmente en todas las direcciones. Para las antenas no isotrópicas, la directividad máxima será mayor que uno y proporciona una indicación de las propiedades direccionales de la antena comparada con las de una fuente isotrópica. La directividad puede ser menor que uno e incluso igual a cero para el caso de no apuntamiento. Los valores de directividad están entonces acotados según $0 \leq D \leq D_{max}$.

Este parámetro es de vital importancia y se encuentra presente durante todo el proyecto, pues la maximización de la directividad va a ser el propósito principal en el desarrollo de los algoritmos de optimización, con o sin restricciones adicionales.

2.6.12. Polarización

La *polarización* con la que una antena radia una onda electromagnética está definida como la propiedad de dicha onda electromagnética que describe la dirección variante con el tiempo y la magnitud relativa de un vector de campo eléctrico. La polarización puede ser lineal, circular o elíptica. Si el vector que describe el campo eléctrico en un punto del espacio en función del tiempo está siempre dirigido a través de una línea, se dice que el campo se encuentra *linealmente polarizado*. Si, por otro lado, dicho vector en un punto en función del tiempo describe un círculo, se dice que el campo está *circularmente polarizado*. Usualmente, sin embargo, el campo eléctrico traza elipses, estando el campo *elípticamente polarizado*. Las polarizaciones lineal y circular son casos especiales del caso elíptico, y pueden ser obtenidos cuando la elipse se convierte en una línea o un círculo, respectivamente. La figura descrita por el campo eléctrico puede estar trazada en sentido horario, conocida como *polarización de la mano derecha*, o en sentido antihorario, conocida como *polarización de la mano izquierda*.

A continuación se muestran los trazos que describen cada tipo de polarización.

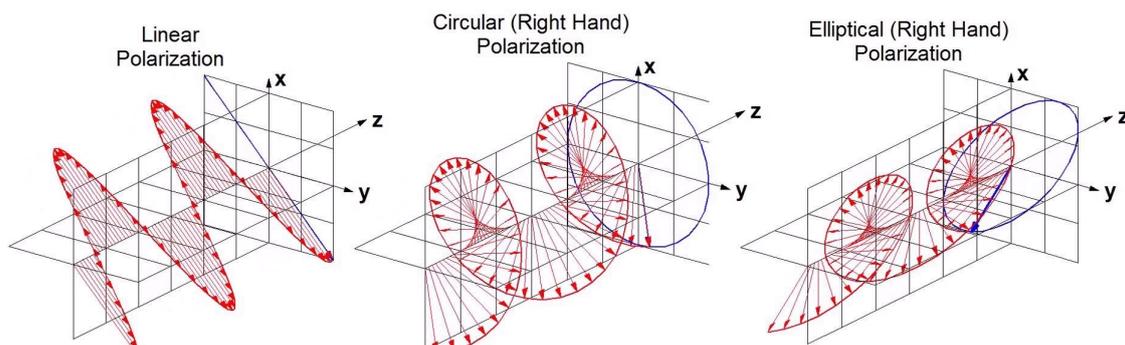


Figura 2.21: Polarización lineal, circular y elíptica (fuente: Google Imágenes)

2.6.13. Impedancia de entrada

La *impedancia de entrada* está definida como la impedancia que presenta una antena en sus terminales o, equivalentemente, el ratio entre el voltaje y la corriente en ese par de terminales. La figura 2.22 muestra una antena caracterizada como una impedancia conectada a un generador.

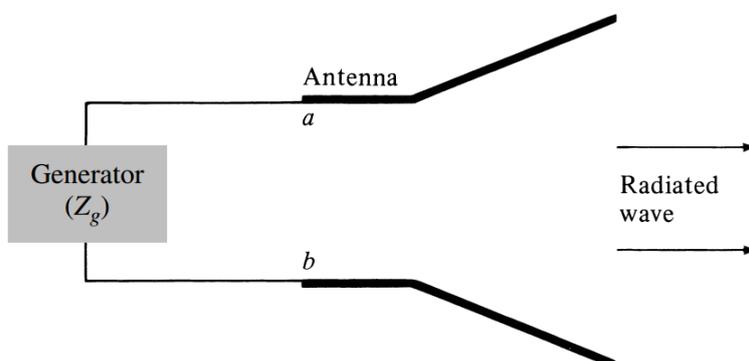


Figura 2.22: Impedancia de una antena conectada a un generador [1]

Si no hay ninguna carga adicional presente en el circuito, la expresión de la impedancia de la antena entre los terminales $a - b$ es

$$Z_A = R_A + jX_A \quad (\Omega) \quad (2.23)$$

donde R_A es la resistencia de la antena y X_A la reactancia de la antena, ambos entre los terminales $a - b$ y ambos medidos en ohmios (Ω); y $j = \sqrt{-1}$ la unidad compleja. La parte resistiva de la impedancia viene dada por

$$R_A = R_r + R_L \quad (\Omega) \quad (2.24)$$

con R_r es la resistencia de radiación de la antena y R_L es la resistencia de pérdidas de la antena. El generador de dicha antena también posee una impedancia propia, según

$$Z_g = R_g + jX_g \quad (\Omega) \quad (2.25)$$

donde R_g es la resistencia del generador y X_g la reactancia del generador, ambos medidos en Ω . La corriente que atraviesa el generador se puede expresar de la siguiente manera

$$I_g = \frac{V_g}{Z_A + Z_g} = \frac{V_g}{(R_r + R_L + R_g) + j(X_A + X_g)} \quad (A) \quad (2.26)$$

y su magnitud

$$|I_g| = \frac{|V_g|}{\sqrt{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2}} \quad (2.27)$$

siendo V_g el voltaje pico del generador. La parte de potencia entregada por la antena para radiar viene entonces dada por

$$P_r = \frac{1}{2}|I_g|^2 R_r = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_r}{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2} \quad (W) \quad (2.28)$$

mientras que la parte de potencia de la antena que se disipa en forma de calor es

$$P_L = \frac{1}{2}|I_g|^2 R_L = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2} \quad (W) \quad (2.29)$$

Para finalizar, queda una última parte de potencia que se disipa en forma de calor en la resistencia interna del generador R_g , la cual se puede expresar como

$$P_g = \frac{1}{2}|I_g|^2 R_g = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_g}{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2} \quad (W) \quad (2.30)$$

2.7. Arrays de antenas

2.7.1. Introducción

Aunque los arrays de antenas ya se vieron en el apartado 2.5.6 de los tipos de antenas, se ha creado una sección aparte donde se profundiza más en sus elementos y propiedades al tratar el presente proyecto sobre esta clase de antenas en exclusividad. De este modo, se recordará brevemente en qué consiste un array de antenas para luego pasar a describir las topologías más comunes a las cuales se les va a aplicar los algoritmos de optimización. Además se verán dos conceptos muy importantes propios de los arrays de antenas: las excitaciones de sus elementos y el factor de array, los cuales están presentes durante todo el proyecto.

2.7.2. Fundamentos

Un *array de antenas* no es más que la agrupación de antenas (llamadas elementos) para formar una antena más grande con mejores características de radiación. Son vitales cuando una antena por sí sola no llega a los requisitos establecidos para una correcta comunicación o cuando las dimensiones de ésta no son realizables (recuérdese la fórmula (2.6) que relaciona frecuencia con longitud de onda). Son las antenas que más grados de libertad poseen a la hora de configurarlas y, por tanto, su uso es muy elevado y sus aplicaciones infinitas, pasando desde sofisticados sistemas de detección de radar y de radioastronomía a estaciones base de telefonía móvil y automoción.

En un array de antenas de elementos idénticos, se pueden modificar al menos tres de sus propiedades generales para conseguir alguna mejora concreta (directividad, potencia, eficiencia, diagrama de radiación, etc.):

1. La configuración geométrica (lineal, circular, cuadrada, rectangular, hexagonal, esférica, etc.) y posición de los elementos (uniforme, no uniforme) del array.

2. La amplitud y la fase de cada una de las excitaciones de los elementos que forman el array.
3. La naturaleza y los tipos de los elementos que componen el array.

Como ya se vio en 2.5.6, los arrays de antena han dado paso a dos tipos especialmente interesantes: los *phased arrays* y las *antenas inteligentes*. Las primeras se consiguen variando las fases relativas de sus excitaciones resultando en un escaneo o barrido en el espacio muy útil para sistemas de radar. Las segundas constituyen la combinación de los arrays de antenas al procesamiento digital de señales (DSP), para crear antenas autónomas que evalúen el entorno y generen el mejor diagrama de radiación según las necesidades que existan a tiempo real. De este modo, este tipo de antena es capaz, por ejemplo, de detectar a una persona en movimiento que está realizando una llamada y seguirle para darle la mayor cobertura posible, mientras a su vez bloquea una señal interferente de otra persona cercana que realiza otra llamada. La siguiente figura muestra la idea básica de una antena inteligente.

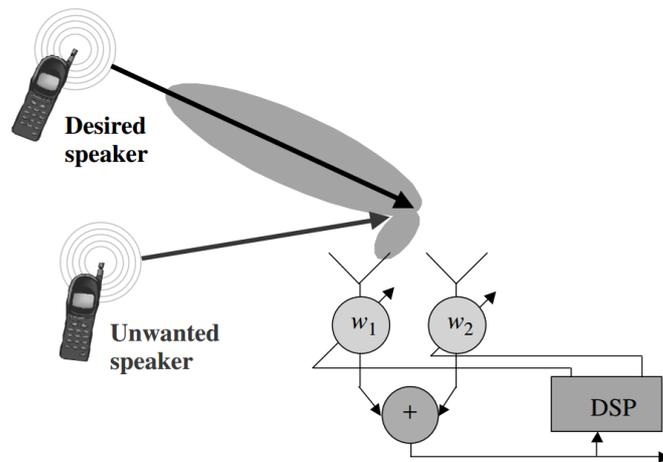


Figura 2.23: Esquema simple de una antena inteligente [1]

2.7.3. Topologías comunes

A continuación se muestran las geometrías de arrays de antenas que se utilizan en el proyecto, especificando su cálculo y distribución en los ejes de coordenadas. Todos los arrays presentes en los diferentes procesos de optimización presentan una distancia uniforme entre elementos contiguos, algo habitual en la práctica.

2.7.3.1. Arrays lineales

Un *array lineal* es aquél cuyos N elementos se encuentran distribuidos a lo largo de un solo eje en una sola dimensión, el cual será el eje x para este proyecto, separados unos de otros por una distancia d_x , la cual es función de la longitud de onda λ . Esto significa que según la banda de frecuencias en la que opere la antena, ésta tendrá una dimensión u otra, según se desprende de la ecuación (2.6). Para direccionar su apuntamiento se varía el ángulo θ . Cuando $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ el array apunta a la normal z de su estructura y se denomina *broadside*, y cuando $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ apunta a lo largo de su propio eje x denominándose *endfire*. Estos casos son especiales y ya se vieron en la sección 2.6.5 de este mismo capítulo. La siguiente figura muestra la disposición que se ha tomado para construir los arrays lineales.

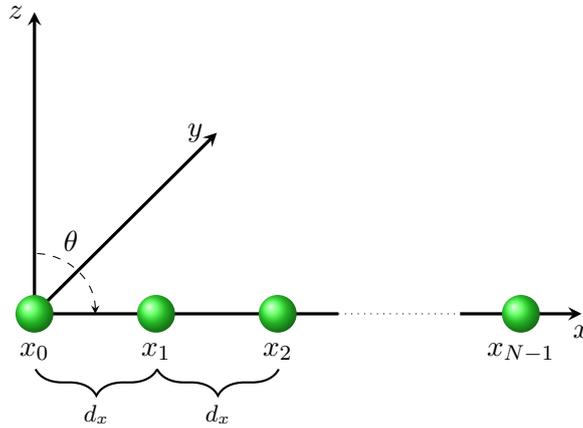


Figura 2.24: Disposición de un array lineal

2.7.3.2. Arrays circulares

Un *array circular* es un array donde sus elementos dibujan una circunferencia sobre un plano, el cual será, para este proyecto, el plano $x - y$. La distancia entre elementos es d_r y es función de la longitud de onda de la antena λ . Para hallar el radio r de la circunferencia que forma el array (el cual también es función de λ) dependiendo del número de elementos N y la distancia entre ellos d_r , se ha despejado la siguiente expresión aplicando identidades trigonométricas

$$r = \frac{d_r}{\sqrt{2(1 - \cos(\frac{2\pi}{N}))}} \quad (2.31)$$

Al haber dos dimensiones, el array circular tendrá dos grados de libertad θ y ϕ para direccionar su radiación, con los mismos dos casos especiales para cualquier ϕ que en los arrays lineales. A continuación se muestra la distribución que toman los arrays circulares en el presente proyecto.

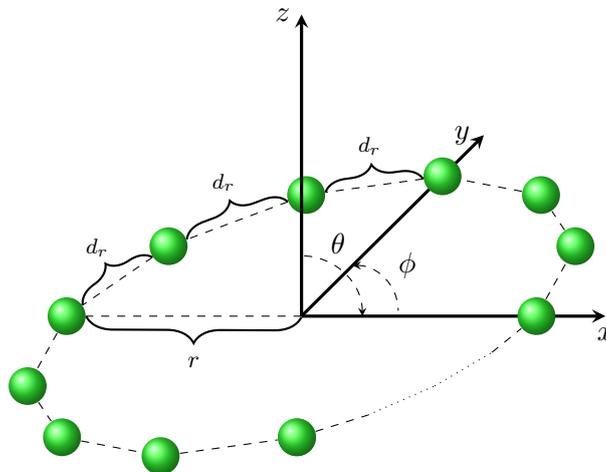


Figura 2.25: Disposición de un array circular

2.7.3.3. Arrays planos

Un *array plano* es aquel array cuyos $N \times M$ elementos constituyen un rectángulo en dos dimensiones, cuyos ejes serán x e y para este proyecto. Si $N = M$ el array será cuadrado. Los elementos del eje x se encuentran separados unos de otros por una distancia d_x y los del eje y por una distancia d_y , siendo ambas función de la longitud de onda λ . Lo más habitual es que $d_x = d_y$. Para direccionar su apuntamiento se varían los ángulos θ y ϕ , igual que en los arrays circulares. La siguiente figura muestra un esquema tipo de un array plano.

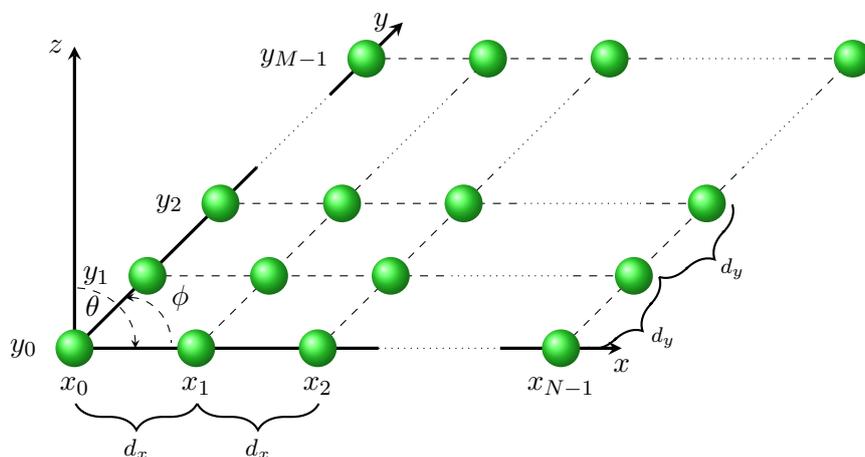


Figura 2.26: Disposición de un array plano

2.7.4. Excitaciones

Las *excitaciones* o *pesos* de un array de antenas hacen referencia a las alimentaciones relativas aplicadas a cada uno de los elementos de la antena. Las excitaciones tienen módulo o amplitud y fase, por tanto son números complejos y se pueden expresar en forma de fasor. De este modo, para un array de N elementos, el peso n -ésimo viene dado por la forma

$$w_n = |w_n| e^{j\psi_n} \quad (2.32)$$

para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, donde $|w_n| = |I_n|$ es la amplitud de la excitación correspondiente al módulo de la intensidad de radiación y ψ_n su fase. Los pesos se suelen normalizar respecto al primer elemento, teniendo

$$\hat{w}_n = \frac{|w_n|}{|w_0|} e^{j\psi_n} \quad (2.33)$$

quedando el primer peso normalizado a la unidad $\hat{w}_0 = 1$. Aunque no se especifique, a lo largo del proyecto las excitaciones de los elementos estarán siempre normalizadas.

Como se analizará en la sección 2.7.5, existen varios casos de apuntamiento, principalmente el de $\theta_0 = 0$, donde los pesos solamente contendrán parte real y sus diagramas de radiación saldrán simétricos respecto a θ_0 . Para otros casos, éstos serán complejos y sus diagramas asociados resultarán asimétricos.

Variando el módulo y/o la fase de cada excitación se consiguen características determinadas en la antena. La opción más económica es modificar únicamente las fases de las excitaciones utilizando para ello desfases, ya que modificar las amplitudes supone añadir amplificadores al circuito, lo cual es más costoso. Sin embargo, esta opción produce soluciones subóptimas en

los diagramas de radiación. En el caso de este proyecto, eminentemente teórico y cuyo objetivo es buscar la mejor solución en términos directivos, los procesos de optimización generarán las excitaciones óptimas tanto en módulo como en fase que maximizarán la directividad y producirán diagramas de radiación también óptimos, pudiendo llevar a su vez restricciones de campo nulo y en el nivel de lóbulos secundarios. La figura 2.27 muestra el esquema básico de la alimentación que genera los pesos de los elementos.

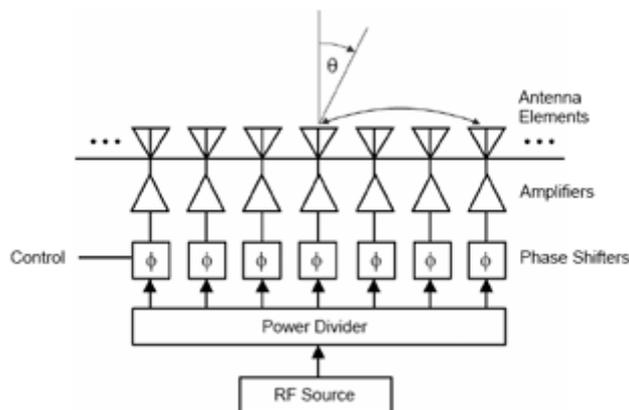


Figura 2.27: Alimentación de un array de antenas (fuente: Google Imágenes)

2.7.5. Factor de array

El *factor de array* es un factor que multiplica el campo eléctrico de un único elemento en un punto de referencia, usualmente el origen, para dar como resultado el campo eléctrico total del array de antenas

$$\mathbf{E}(\text{total}) = \mathbf{E}(\text{elemento en un punto de referencia}) \times \text{factor de array} \quad (2.34)$$

Esto sólo es válido cuando el array posee elementos idénticos aunque no necesariamente con idénticas magnitudes y fases en sus excitaciones y/o distancia entre elementos.

Cada array tiene su propio factor de array. Éste es función del número de elementos, la distancia entre ellos, su geometría y las magnitudes y fases de sus excitaciones. Variando estos parámetros se puede controlar el campo eléctrico total de dicho array. La expresión del factor de array es la siguiente

$$AF(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-jk \sin \theta (x_n \cos \phi + y_n \sin \phi)} \quad (2.35)$$

donde w_n es la excitación n -ésima definida en (2.32), $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda despejado de (2.4), x_n e y_n son las coordenadas del elemento n -ésimo y θ y ϕ los ángulos del espacio vistos en cada topología del array en 2.7.3.

En el proyecto, se representa el factor de array en función de los ángulos θ y ϕ para formar el diagrama de radiación en dos y tres dimensiones, como se vio en 2.6.5. Para los diagramas en dos dimensiones, se fija un ϕ concreto y se varía θ , consiguiendo el factor de array en un plano o corte determinado. Para los diagramas en tres dimensiones, se varían ambos ángulos produciendo un mallado en todo el espacio. El factor de array en ambos casos se encuentra normalizado, según

$$\widetilde{AF}(\theta, \phi) = \frac{|AF(\theta, \phi)|}{AF_{max}(\theta, \phi)} \quad (2.36)$$

cuyo máximo valor será uno en unidades naturales o cero en unidades logarítmicas, que es como se expresa a lo largo de este proyecto

$$\widetilde{AF}_{dB}(\theta, \phi) = 20 \log(\widetilde{AF}(\theta, \phi)) \quad (\text{dB}) \quad (2.37)$$

A continuación se estudian algunas características importantes del factor de array que se han observado antes de llevar a cabo ningún proceso de optimización, lo que es importante a la hora de elegir bien las propiedades del array a optimizar como la topología, el número de elementos o la distancia entre ellos.

El número de máximos de radiación o lóbulos principales depende de la separación entre los elementos del array. Los máximos que aparecen en direcciones distintas a la de máximo apuntamiento se denominan *grating lobes* y, por lo general, no suelen ser deseables. Para evitar grating lobes en arrays lineales y planos, cuando un array apunta a broadside, la distancia máxima entre elementos debe ser menor a una longitud de onda ($d_{max} < \lambda$); cuando apunta a endfire, la distancia máxima entre elementos debe ser menor a media longitud de onda ($d_{max} < \lambda/2$). De este modo, se asegura que el diagrama de radiación del array sólo posea un lóbulo principal localizado en la dirección de máximo apuntamiento.

En la figura 2.28 se puede ver un ejemplo de aparición de grating lobes en un array lineal que apunta a broadside. Se corrobora que para $d_x < \lambda$ no aparecen máximos fuera de la dirección de apuntamiento $\theta_0 = 0^\circ$ y su componente inversa de simetría $\theta_0 = 180^\circ$. Cuando $d_x = n\lambda$ con $n \neq 0 \in \mathbb{N}$, aparecen n máximos radiantes en $\theta \in (0, 90]$ (sin contar el de $\theta_0 = 0^\circ$) y otros tantos para $\theta \in [-90, 0)$ al ser el diagrama de radiación simétrico. En la figura 2.29 se ve el mismo array pero apuntando a endfire. Para $d_x < \lambda/2$ solamente existe un único máximo en $\theta_0 = 90^\circ$, para $d_x = \lambda/2$ aparece un segundo máximo en el inverso simétrico $\theta_0 = -90^\circ$ y para $d_x = n\lambda/2$ con $n \neq 0 \in \mathbb{N}$ aparecen n lóbulos máximos para $\theta \in (-90, 90)$.

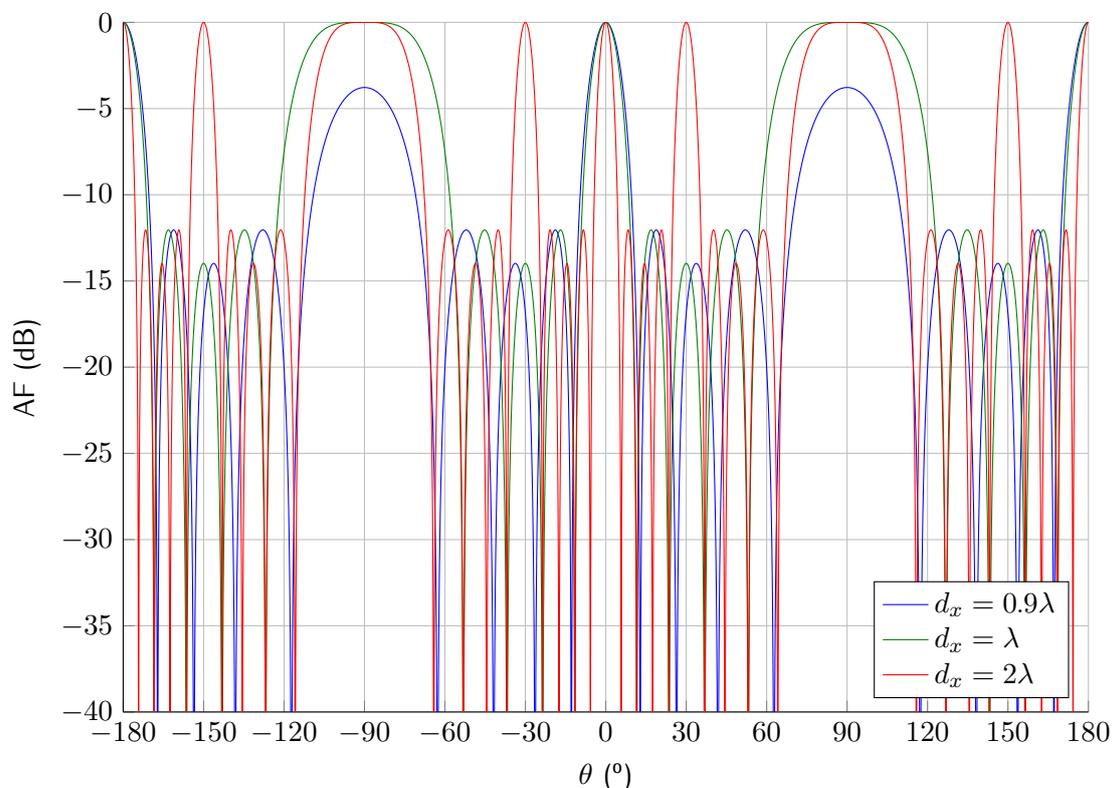


Figura 2.28: Aparición de grating lobes en un array lineal en broadside ($N=5, \theta_0=0^\circ$)

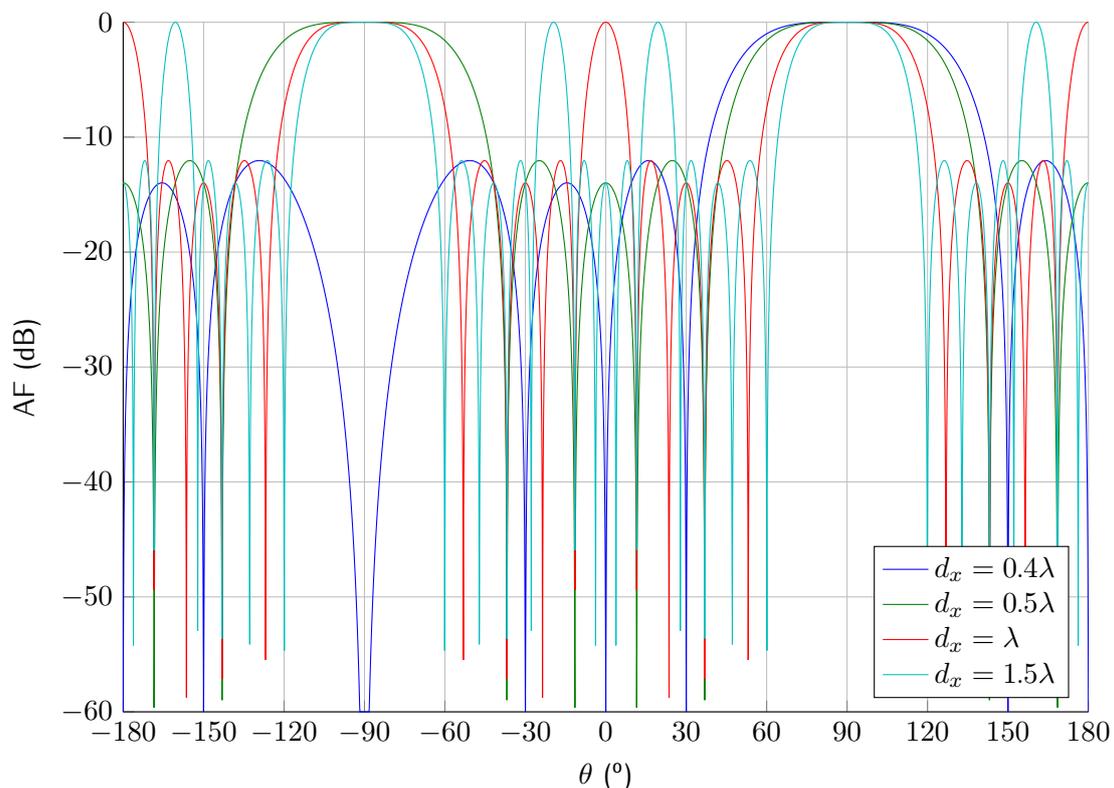


Figura 2.29: Aparición de grating lobes en un array lineal en endfire ($N=5, \theta_0=90^\circ$)

En un array lineal de N elementos separados $\lambda/2$ se puede observar que su diagrama de radiación está formado por N lóbulos radiantes en el rango de $\theta \in [-90, 90]$, correspondientes a cada uno de sus elementos. Para arrays cuadrados de $N \times N$ elementos separados también $\lambda/2$ sus diagramas de radiación para el mismo rango que el anterior contendrán a su vez N lóbulos radiantes. En ambos casos, si por el contrario la distancia entre elementos disminuye de $\lambda/2$ el diagrama tendrá menos lóbulos que N y si es mayor tendrá más. La figura 2.30 muestra un ejemplo de este comportamiento.

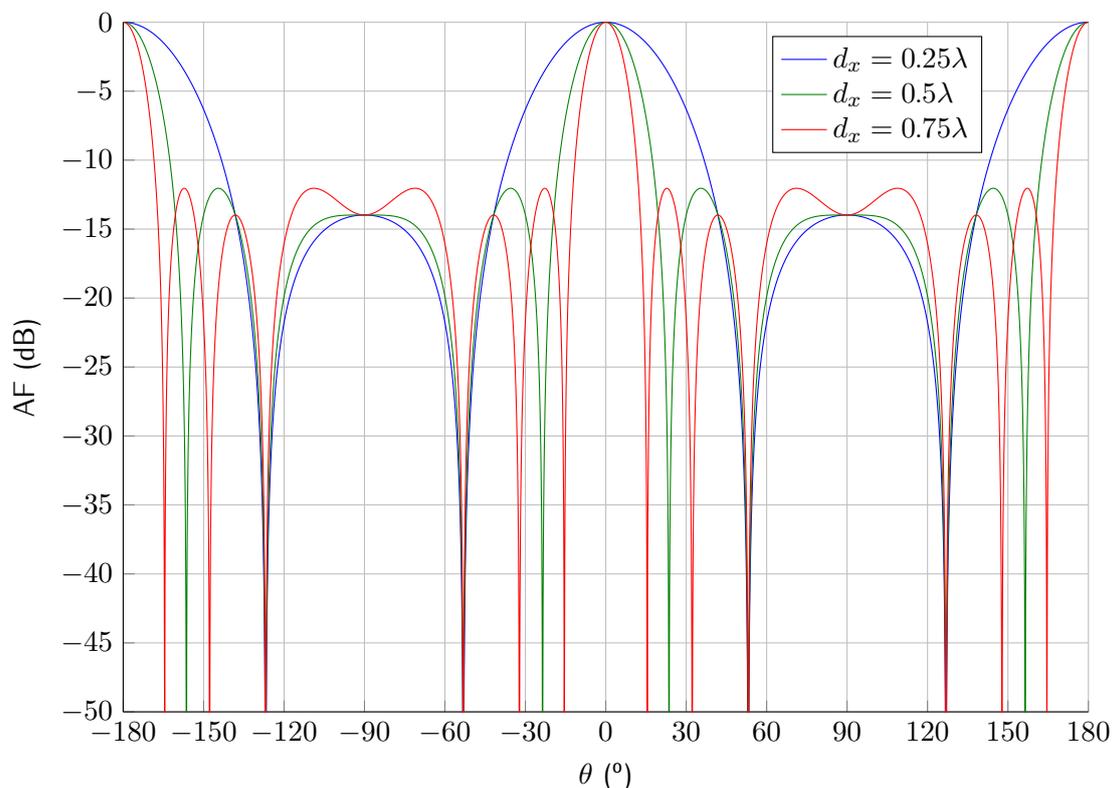
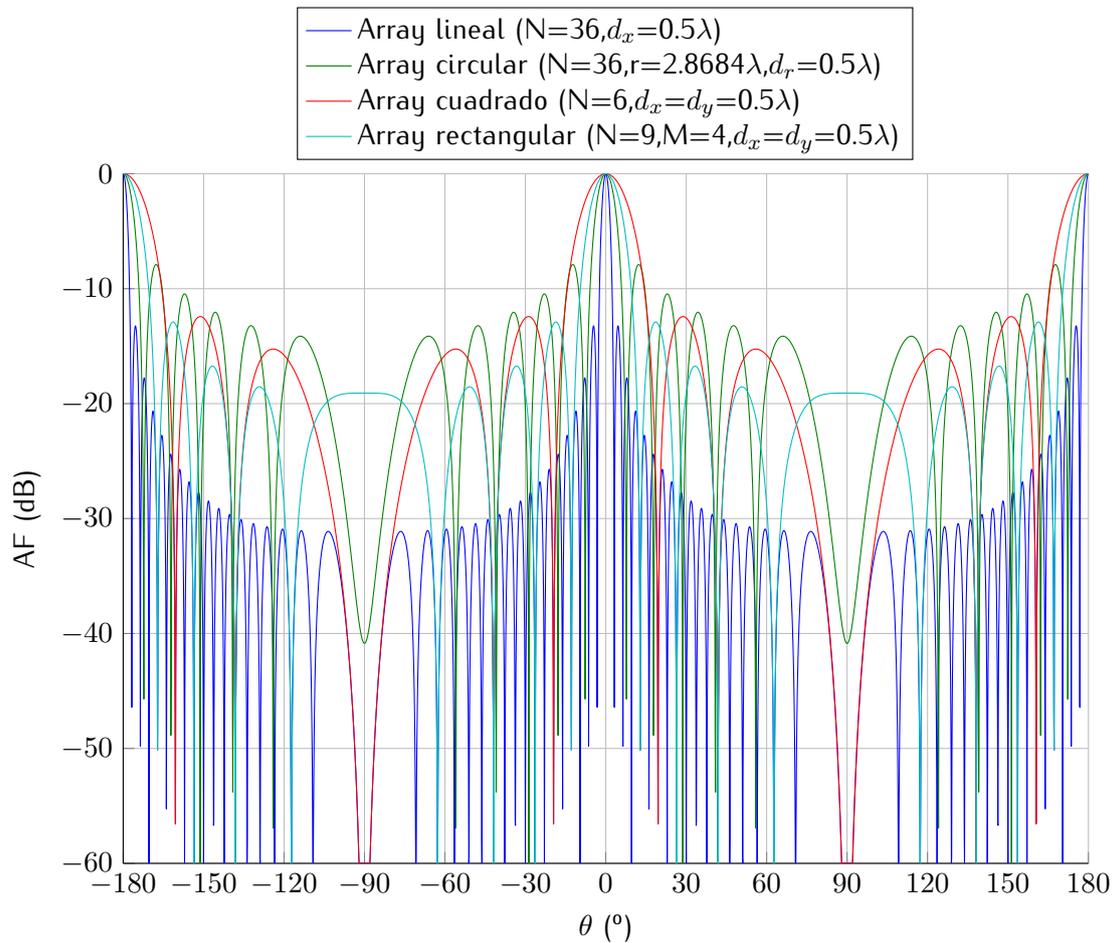


Figura 2.30: Comparación de lóbulos radiantes en función de la distancia entre elementos para un array lineal ($N=5, \theta_0=0^\circ$)

Es lógico pensar que cuantos más elementos componen un array el factor de array resultante será más directivo y sus lóbulos secundarios serán inferiores. En otras palabras, cuantos más elementos componen un array, éste tendrá mejores cualidades pero con el inconveniente de que será más costoso en cuanto a términos de potencia a suministrar.

A continuación se muestra un ejemplo del factor de array de las distintas topologías de array que se estudian en este proyecto con todos ellos el mismo número de elementos y la misma separación entre sus elementos. Se puede ver que el array lineal es el más directivo, seguido del circular y el cuadrado el que menos, resultando algo mejor la distribución rectangular para el mismo número de elementos. El nivel de los lóbulos secundarios es, con diferencia, más bajo en el array lineal, seguido del array cuadrado y rectangular, cuyos lóbulos secundarios se van alternando en altura a lo largo de todo el diagrama de radiación. El peor nivel de lóbulos secundarios lo posee el array circular.


 Figura 2.31: Factor de array para cada tipo de configuración ($\theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

También se puede observar que el diagrama de radiación de un array lineal es simétrico sólo cuando éste apunta en $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ para cualquier distancia entre sus elementos o, a su vez, si $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ siendo la distancia entre sus elementos igual a $d = \lambda n/2$, con $n \neq 0 \in \mathbb{N}$. Los diagramas de los arrays circulares y planos son también simétricos cuando $\theta = 0^\circ, 180^\circ$, cuando $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ y $\phi = 90^\circ, 270^\circ$ ó, cuando $\theta = 90^\circ, 270^\circ$, $\phi = 0^\circ, 180^\circ$ y $d_x = d_y = \lambda n/2$, con $n \neq 0 \in \mathbb{N}$. Esto sucede porque el valor de las excitaciones (ver sección 2.7.4) de sus elementos y del factor de fase (cuya forma se verá en la sección 3.4 del capítulo de formas hermíticas) adquiere valores únicamente reales. Por contra, con cualquier alteración de los valores previamente mencionados los valores de sus excitaciones y su factor de fase pertenecerán al conjunto de los números complejos y el diagrama de radiación del array saldrá asimétrico. Las gráficas anteriores muestran casi todas ellas ejemplos simétricos, salvo la figura 2.29 para el caso de $d_x=0.4\lambda$, el cual es asimétrico. La siguiente gráfica muestra más ejemplos de asimetría.

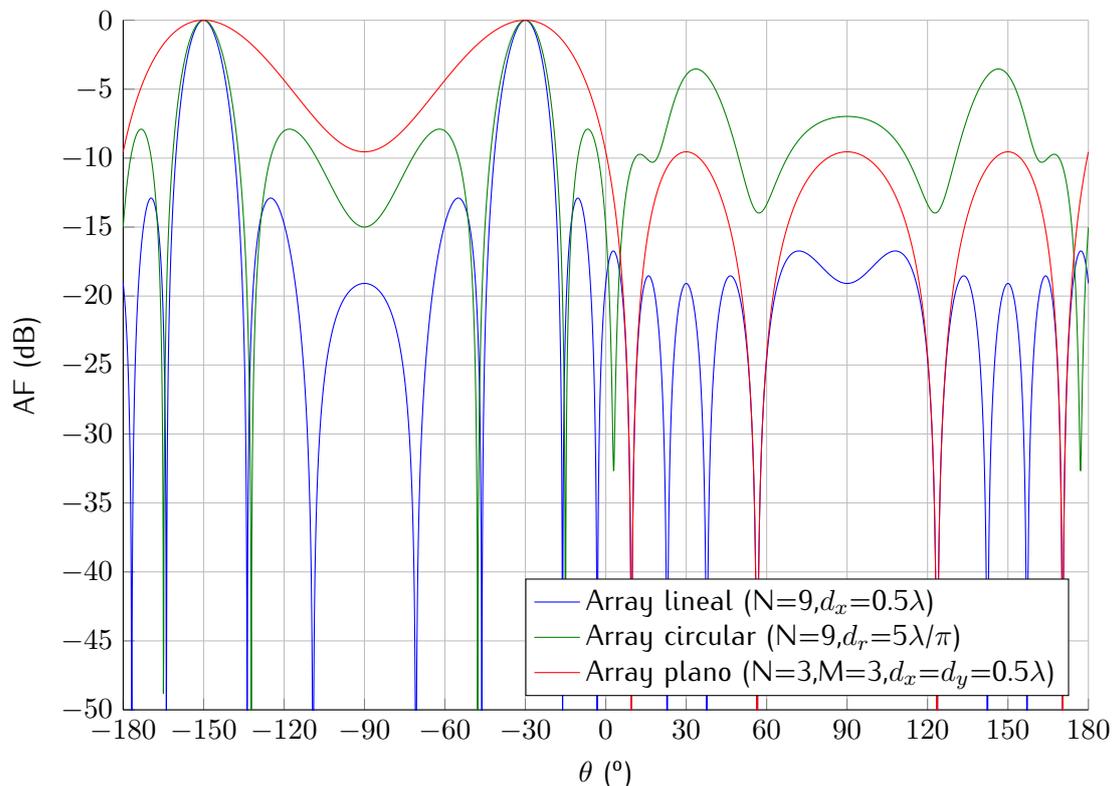


Figura 2.32: Diagramas de radiación asimétricos para cada tipo de array
($\theta_0 = -30^\circ, \phi_0 = 0^\circ$)

2.8. Aplicación de algoritmos de optimización a la síntesis de arrays

2.8.1. Introducción

En esta sección se repasa el estado del arte de la introducción y aplicación de algoritmos de optimización a la síntesis de arrays de antenas, explicando los diferentes tipos que existen y echando un vistazo a su corta pero fructífera historia y mostrando su estado actual y el futuro que se espera de éstos en los próximos años.

Una vez visto el concepto de agrupar antenas con el objetivo de crear una gran antena cuyas características sean una sinergia de todas las que la forman, se encuentra el problema de cómo ajustar sus elementos para radiar con mejores propiedades físicas. En la sección 2.7.2 se enumeraron varios parámetros con los que se puede jugar a la hora de construir un array de antenas, tales como la topología del array, las distancias entre elementos o los valores de sus excitaciones. Así, surge la duda de, por ejemplo, qué forma de antena usar, qué cantidad de elementos la compondrán, cómo distribuir dichos elementos en el array o con qué potencia y fase alimentarlos para que su directividad o ganancia sean máximas, su nivel de lóbulos secundarios se encuentren limitados a un cierto valor o se anule una señal procedente de un cierto punto del espacio. Para ello, a la par que se desarrollaba la teoría de los arrays de antenas se introdujeron los problemas de optimización aplicados a obtener mejoras en sus características mediante una correcta configuración de los mismos. De este modo, los algoritmos que solucionan dichos problemas de optimización persiguen dos objetivos claros: optimizar alguna característica de la antena o, dicho

de otro modo, maximizar o minimizar alguna de sus propiedades con el menor coste posible y/o imponer restricciones en otras propiedades que cumplan con los requerimientos exigidos por el entorno, la aplicación o la legislación vigente.

2.8.2. Historia

El problema de maximización de la directividad en un array lineal con elementos isotrópicos (que radian con la misma intensidad para cualquier punto del espacio) que poseen la misma distancia entre ellos fue estudiado por primera vez por Uzkov en 1946 [2]. Bloch, Medhurst y Pool, en 1953 [3], examinaron la directividad máxima de un array también lineal compuesto de dipolos de media longitud de onda de distancia entre elementos desde el punto de vista de las resistencias propias y mutuas que ofrecen sus elementos. Uzsoky y Solymar [4], y Lo, Lee y Lee [5] separadamente investigaron la optimización de la ganancia bajo ciertas restricciones específicas. En 1964, Tai publicó unas gráficas de curvas [6] que mostraban la directividad óptima de varios tipos de arrays lineales uniformemente espaciados apuntando a broadside. La generalización del problema de optimización de un array de antenas fue llevada a cabo por Cheng y Tseng [7], [8], la cual incluía arrays con elementos no isotrópicos arbitrariamente distribuidos cuya máxima radiación podía apuntar a cualquier punto del espacio. Haciendo uso de un teorema de las propiedades del ratio de dos formas hermíticas (ver sección A.3 del anexo de conceptos matemáticos), el cual se desarrollará en el capítulo 3, se formalizó el proceso de optimización de una manera clara. Krupitskii [9] usó este mismo teorema para probar la existencia de una única solución para excitar un array cuya directividad sea máxima.

2.8.3. Algoritmos

Existen dos tipos básicos de algoritmos de optimización para arrays de antenas, los algoritmos clásicos, algunos de los cuales son los que se estudian en el presente proyecto, y los algoritmos evolutivos, más novedosos pero más costosos en general. A continuación se explican ambos tipos de algoritmos.

Los *algoritmos clásicos* son los algoritmos de optimización generales que se llevan usando desde los tiempos de *Fermat*, *Lagrange*, *Newton* y *Gauss*. Debido a su largo recorrido, existen numerosas clases y tipos. De entre ellos, los que se usan en este proyecto son los *algoritmos iterativos*, los cuales generan una secuencia de aproximación a la solución de un problema determinado. Éstos han de poseer un criterio de terminación para finalizar el algoritmo, haya encontrado o no la solución óptima. Entre los diversos tipos que aquí se encuentran se hallan los usados en este proyecto, que son el del *cociente de formas hermíticas*, *programación lineal*, *programación cuadrática* y *programación en cono de segundo orden*, aunque también existen muchos más, como *programación bicuadrática* o *programación entera*, por ejemplo. Como ya se verá en cada capítulo de cada proceso de optimización, los algoritmos utilizados en el proyecto hacen usos de los métodos iterativos del *punto interior*, del *conjunto activo*, del *gradiente conjugado* o extensiones del *algoritmo simplex* entre otros.

Los *algoritmos evolutivos*, por su parte, son aquéllos que se basan en los principios de la evolución biológica de un grupo o población, como la reproducción, mutación, selección o recombinación, para buscar soluciones óptimas. Éstos generan una serie de posibles soluciones o “soluciones candidatas” que juegan el papel de individuos dentro de una población que se combinan, se mezclan y compiten entre sí, siendo las más aptas las que prevalecen más tiempo evolucionando cada vez a una solución mejor. Existe una función de idoneidad o adecuación que determina la

calidad de las soluciones. Los pasos de un algoritmo evolutivo son los siguientes

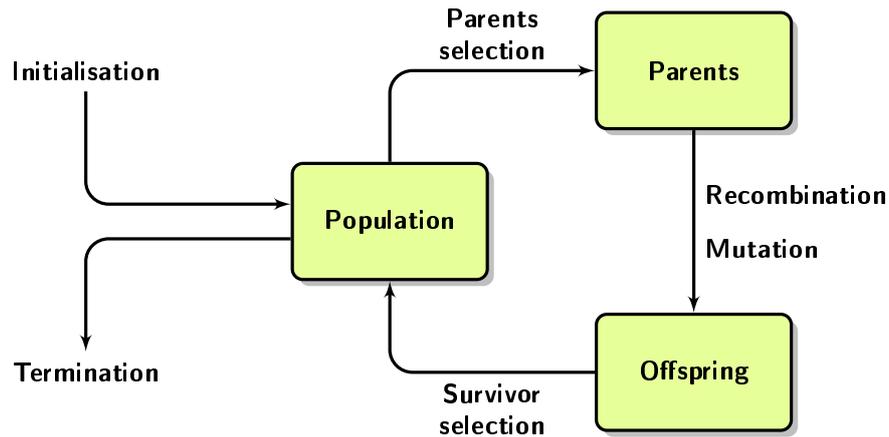


Figura 2.33: Diagrama tipo de los algoritmos evolutivos

Los algoritmos evolutivos son una rama de la *Inteligencia Artificial* y utilizan herramientas de optimización combinatoria³, metaheurística⁴ y estocástica⁵. Suelen ser problemas de cajas negras, donde sólo se conocen sus parámetros de entrada y salida, que involucran gastos considerables. Los algoritmos evolutivos no sólo se aplican a la teoría de arrays de antenas sino a multitud de ciencias de estudio como la robótica, ingeniería en general, biología y genética, economía, marketing, física, química y hasta ciencias sociales y políticas. Los tipos de algoritmos evolutivos más famosos son los *algoritmos genéticos*, *optimización por colonia de hormigas* y *optimización por enjambre de partículas*.

Como se ha dicho, en este proyecto se ha optado por los algoritmos clásicos para optimizar las características de los diagramas de radiación de los arrays de antenas. Esto atiende a varias razones. En primer lugar, muchos de sus algoritmos y, al menos, los aquí tratados, son en un principio bastante más simples y ligeros, además de suficientes para los problemas de optimización que se quieren plantear. Los algoritmos evolutivos son mucho más costosos y lentos, con factores de unas cien o más veces comparados con, por ejemplo, el algoritmo Simplex. Además es poco escalable, cuanto más crece el problema peor se comporta, hasta el punto de saturarse y no encontrar ninguna solución óptima. Dicha solución óptima es por otro lado relativa, ya que en un algoritmo evolutivo, al haber todo un conjunto de soluciones posibles, no existe una solución óptima sino una solución mejor que otra. La determinación de una solución óptima se lleva a cabo mediante algoritmos heurísticos que deciden cuándo parar la optimización, que dura infinitamente, o siendo incluso el propio usuario quien decide el límite temporal de la misma. A pesar de todo ello son algoritmos muy eficientes que se usan para problemas complejos.

³La *optimización combinatoria* consiste en la búsqueda de un objeto óptimo en un grupo finito de objetos.

⁴La *heurística* es una técnica que trata de resolver un problema mediante métodos prácticos que no se garantiza que sean óptimos o perfectos, pero que son suficientes para alcanzar un objetivo inmediato. La heurística es usada para agilizar el proceso de encontrar una solución satisfactoria cuando la solución óptima es imposible o impracticable. La *optimización metaheurística* sigue una serie de procesos heurísticos abstractos y genéricos utilizando unos parámetros dados por un usuario para resolver eficientemente problemas que no tienen un método específico que los solucionen.

⁵La *optimización estocástica* utiliza métodos de optimización que generan y aplican variables aleatorias.

Capítulo 3

Formas hermíticas (HF)

3.1. Introducción

En esta sección se muestra cómo optimizar un array de antenas para conseguir su máxima *directividad*. La directividad de una antena es un parámetro muy importante. Está definida como el ratio de la intensidad de radiación en la dirección del lóbulo principal entre la potencia radiada de una antena dividida entre 4π , que coincide con la intensidad de radiación media. Dicho de otro modo, es el ratio entre la máxima intensidad de radiación entre aquella producida por una fuente isotrópica (omnidireccional) radiando con la misma potencia. Mide la habilidad de una antena de concentrar la energía radiada en el punto del lóbulo principal. Su expresión general se encuentra en la sección 2.6.11 del estado del arte.

El problema de maximización de la directividad de una antena se puede expresar como el cociente de dos formas *hermíticas* o *hermitianas*, definidas en la sección A.3 del anexo matemático, como se verá más adelante en el desarrollo del problema de la maximización de la directividad. Para un array de N elementos fijos, el proceso de optimización consiste en averiguar $2N$ parámetros o incógnitas.

El diagrama de radiación de un array de antenas depende de la geometría de éste y de la naturaleza y las excitaciones de sus elementos (ver sección 2.7.4). En este caso, la optimización se lleva a cabo sobre las amplitudes y fases de las excitaciones de los elementos del array, pues se busca la solución óptima desde el punto de vista tecnológico, siendo la posición de éstos fija. Esto es porque en la práctica es difícil y costoso ajustar la geometría del array.

El capítulo se estructura de la siguiente forma. Seguidamente a la introducción, se destacan los fundamentos principales de la teoría de las formas hermíticas y, a continuación, se repasan las herramientas que se han utilizado, para más adelante adentrarse en el objetivo principal del capítulo, que es la obtención de la máxima directividad. En dicha sección, se enuncian los conceptos básicos que entran en juego no sólo en este capítulo, sino durante todo el proyecto. Ésta, a su vez, se encuentra dividida en el caso general para cualquier tipo de array y los casos particulares cuando los elementos del array tienen una determinada geometría y están separados uniformemente. Después de mostrar algunos diagramas de radiación y algunas tablas de directividades de especial interés, se llega a la sección del estudio de la eficiencia de arrays, mostrando algún ejemplo también.

Durante todo el desarrollo se va a suponer que los elementos del array son isotrópicos. La estructura física de los elementos que conforman el array es irrelevante, pudiendo ser perfectamente dipolos, ranuras, etc. Además es indiferente la banda de frecuencias a la que operan. También se obvian las implicaciones de acoplo mutuo, que son diafonías electromagnéticas entre los elementos cercanos en la antena.

Los cálculos que se describen a continuación se basan en el artículo [10] de *David K. Cheng* de 1971. Para la obtención de la máxima directividad se han desarrollado primeramente varios scripts en *MATLAB*[®] usando para el cálculo final la función *eig*, vista más detalladamente en la siguiente sección. A continuación, como toma de contacto con los paquetes matemáticos y gráficos de *Python*, se han repetido esas funciones mediante la función homónima *eig*, vista también en la siguiente sección, y comparado los resultados, los cuales no se muestran en los ejemplos de este capítulo porque son idénticos a los obtenidos con *MATLAB*[®].

Es conveniente echar un vistazo al anexo de conceptos matemáticos A, donde se repasan los elementos y operaciones más usuales que entran en juego en el proceso de optimización. Además, es especialmente recomendable el apartado A.1 donde se muestra cómo se denotan los diferentes vectores y matrices a lo largo del proyecto.

3.2. Fundamentos

La optimización mediante el *cociente de formas hermíticas* se basa en un teorema [11] que se sirve de éstas para hallar el máximo autovalor, que será la directividad máxima, y su correspondiente autovector, que corresponderá al vector de las excitaciones que maximizan dicha directividad.

La intensidad de radiación de una antena se puede escribir como una expresión hermítica, por lo que la directividad, cuya fórmula se ve en (2.22), puede ser expresada como la división de dos formas hermíticas, según

$$D = \frac{\text{intensidad de radiación en } (\theta_0, \phi_0)}{\text{intensidad de radiación media}} \quad (3.1)$$

3.3. Herramientas

Como se acaba de decir, se ha utilizado tanto *MATLAB*[®] como *Python* para calcular los diagramas de radiación de las formas hermíticas. En ambos casos, la función que halla los autovalores y autovectores necesarios para la obtención de la máxima directividad, como se verá en la siguiente sección, se llama *eig*. Se ha pintado la sintaxis de *MATLAB*[®] de naranja y la de *Python* de azul para evitar confusiones entre los parámetros de uno y otro paquete. La forma es la siguiente

$$\begin{aligned} [V, D] &= \text{eig}(A, B) \quad , \text{ para } \text{MATLAB}^{\text{®}} \\ V, D &= \text{linalg.eig}(A, B) \quad , \text{ para } \text{Python} \end{aligned}$$

donde $[V]$ es la matriz de autovectores y $[D]$ la matriz diagonal con sus correspondientes autovalores resultantes de las matrices cuadradas $[A]$ y $[B]$, tal que $[A][V] = [B][V][D]$.

Además, en ambos entornos, se ha utilizado un malla para los ángulos del espacio θ y ϕ de 1.000 muestras, suficientes para la correcta obtención de los diferentes diagramas de radiación.

3.4. Maximización de la directividad

En esta sección se estudia cómo se maximiza la directividad de un array de antenas mediante el cociente de dos formas hermíticas. Primero se va a enunciar la formulación necesaria para obtener la directividad máxima en cualquier tipo de array. Más adelante, se verán algunos casos de interés concretos, cuando el array es de alguna determinada geometría y posee sus elementos distribuidos de manera uniforme.

3.4.1. Caso general

Se dispone de un array de N elementos fijos e igualmente orientados en cualquier punto del plano $x - y$, localizados por sus coordenadas cartesianas (x_n, y_n) , y caracterizados por sus excitaciones $I_n \exp(j\psi_n)$, para su n -ésimo elemento. La longitud de onda se denota como λ , siendo el número de onda $k = 2\pi/\lambda$. De este modo, se define la intensidad del campo eléctrico como

$$E(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N I_n \exp \left[j(\psi_n + k \sin \theta (x_n \cos \phi + y_n \sin \phi)) \right] \quad (3.2)$$

Como se vio en 2.6.5, el ángulo ϕ , que abarca el plano $x - y$, comprende los 360° del plano (2π), y el ángulo θ , perpendicular al array y que comprende el plano $x - z$, va de 0° a 180° (de 0 a π radianes).

Se define el vector columna $\{g_i\}$ como la función de potencia del elemento en $\theta = \theta_i$ y $\phi = \phi_i$

$$\{g_i\} = g(\theta_i, \phi_i) = \begin{bmatrix} \exp[-jk \sin \theta_i (x_0 \cos \phi_i + y_0 \sin \phi_i)] \\ \exp[-jk \sin \theta_i (x_1 \cos \phi_i + y_1 \sin \phi_i)] \\ \exp[-jk \sin \theta_i (x_2 \cos \phi_i + y_2 \sin \phi_i)] \\ \vdots \\ \exp[-jk \sin \theta_i (x_{N-1} \cos \phi_i + y_{N-1} \sin \phi_i)] \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

y su particularización $\{g_0\}$, llamado factor de fase, normalizado a uno en el origen ($\theta = 0$), que apunta a la dirección del lóbulo principal ($\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$)

$$\{g_0\} = g(\theta_0, \phi_0) = \begin{bmatrix} \exp[-jk \sin \theta_0 (x_0 \cos \phi_0 + y_0 \sin \phi_0)] \\ \exp[-jk \sin \theta_0 (x_1 \cos \phi_0 + y_1 \sin \phi_0)] \\ \exp[-jk \sin \theta_0 (x_2 \cos \phi_0 + y_2 \sin \phi_0)] \\ \vdots \\ \exp[-jk \sin \theta_0 (x_{N-1} \cos \phi_0 + y_{N-1} \sin \phi_0)] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Si se tiene la dirección de apuntamiento (θ_i, ϕ_i) , donde $i = 1, \dots, P$, siendo P el número de puntos totales que constituyen la región total espacial, y $\Delta\theta$ y $\Delta\phi$ los pasos de los ángulos θ y

ϕ respectivamente, la función de potencia para toda la zona del espacio en $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$ se definirá como la matriz $[G]$ que discretiza toda la región de apuntamiento

$$[G] = g(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \langle g_1^\dagger \rangle \\ \langle g_2^\dagger \rangle \\ \langle g_3^\dagger \rangle \\ \vdots \\ \langle g_P^\dagger \rangle \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La directividad, partiendo de la expresión (2.22) de la sección 2.6.11 del estado del arte, se puede expresar como el cociente entre la intensidad de radiación en la dirección del lóbulo principal y la intensidad de radiación media, que a su vez es la potencia radiada entre 4π

$$D = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} P_{rad}} = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |E(\theta, \phi)|^2 g(\theta, \phi) \sin \theta d\theta} \quad (3.6)$$

Se define además el vector columna de N elementos $\{w\}$, que corresponde a los pesos de los elementos, vistos en la sección 2.7.4 del estado del arte

$$\{w\} = \begin{bmatrix} I_0 \exp(j\psi_0) \\ I_1 \exp(j\psi_1) \\ I_2 \exp(j\psi_2) \\ \vdots \\ I_{N-1} \exp(j\psi_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

De las ecuaciones (3.2), (3.4) y (3.6) está comprobado que la directividad se puede escribir como el ratio de dos matrices hermíticas $[A]$ y $[B]$

$$D = \frac{\langle w^\dagger \rangle [A] \{w\}}{\langle w^\dagger \rangle [B] \{w\}} \quad (3.8)$$

Según lo visto en la introducción, $[A]$ y $[B]$, al ser matrices hermíticas, son también matrices cuadradas $N \times N$. $[A]$ es el producto de los factores de fase

$$[A] = \{g_0\} \langle g_0^\dagger \rangle \quad (3.9)$$

y $[B]$

$$\begin{aligned} [B] &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \phi)^\dagger g(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^P g(\theta_i, \phi_i)^\dagger g(\theta_i, \phi_i) \sin \theta \Delta\theta \Delta\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} g(\theta, \phi) g(\theta, \phi)^\dagger \sin \theta \Delta\theta \Delta\phi = g(\theta, \phi) g(\theta, \phi)^\dagger c \equiv [G][G^\dagger]c \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$= \begin{bmatrix} \langle g(\theta_1, \phi_1) \rangle \sqrt{c} \\ \langle g(\theta_2, \phi_2) \rangle \sqrt{c} \\ \vdots \\ \langle g(\theta_P, \phi_P) \rangle \sqrt{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{g(\theta_1, \phi_1)\} \sqrt{c} & \{g(\theta_2, \phi_2)\} \sqrt{c} & \cdots & \{g(\theta_P, \phi_P)\} \sqrt{c} \end{bmatrix}$$

$$, \quad c = \frac{1}{4\pi} \sin\theta \Delta\theta \Delta\phi$$

B es además una matriz definida positiva, lo que implica que $\{w_n\}^\dagger [B_{m,n}] \{w_n\} > 0$ para todo $\{w_n\} \neq 0$. Al ser conocidos todos los elementos de las matrices $[A]$ y $[B]$, el problema de optimización se reduce a determinar los pesos $\{w\}$ tal que D en (3.8) sea máxima. Para ello, se va a enunciar un teorema [11] que se basa en las propiedades del ratio de dos formas hermíticas útil para este fin.

Teorema

Si una cantidad D se puede expresar como el ratio de dos matrices hermíticas como en (3.8) y $[B]$ es una matriz no singular (matriz cuyo determinante es distinto de cero) y definida positiva, entonces el mayor autovalor λ_M del conjunto de matrices $[A] - \lambda[B]$ es el máximo valor obtenible D cuando $\{w\}$ es el autovector (ver A.2) que satisface la ecuación homogénea

$$[A]\{w\} = \lambda_M[B]\{w\} \quad (3.11)$$

Corolario:

Si $[A]$ en (3.8) es expresable en la forma de (3.9), entonces:

1. El autovalor mayor y único distinto de cero del conjunto de matrices $[A] - \lambda[B]$ es

$$\lambda_M = D_M = \langle g_0^\dagger \rangle [B]^{-1} \{g_0\} \quad (3.12)$$

2. El autovector correspondiente a λ_M es

$$\{w_M\} = [B]^{-1} \{g_0\} \quad (3.13)$$

Con el anterior corolario y las ecuaciones (3.12) y (3.13), probado en [7], queda resuelto el problema de optimización por ajustes en las excitaciones para un array arbitrario.

Alternativamente a las fórmulas anteriores, los autovalores y autovectores pueden ser hallados mediante la función *eig* para *MATLAB*[®] y *Python*, según se vio en 3.3. Los valores a introducir serían los siguientes

$$[[w], [\lambda]] = \text{eig}([A], [B]) \quad , \quad \text{para } \text{MATLAB}^{\text{®}}$$

$$[w], [\lambda] = \text{linalg.eig}([A], [B]) \quad , \quad \text{para } \text{Python}$$

donde el autovalor mayor o directividad máxima y el autovector mayor o excitaciones que generan dicha directividad máxima serán los valores máximos de todos los $[\lambda]$ y $[w]$ respectivamente

$$D_M = \lambda_M = \max([\lambda])$$

$$\{w_M\} = \max([w])$$

A continuación se muestran los ejemplos para el caso general, consistentes en tres tablas 3.1, 3.2 y 3.3 y varios diagramas de radiación de factores de array optimizados para distintos tipos de arrays, en función del número de elementos y de la distancia entre ellos. Dichos factores de array se comparan con aquéllos obtenidos mediante excitaciones cofasales, que es la forma más común de excitar los arrays de antenas. Un array posee una *excitación cofasal* cuando las fases relativas de sus componentes están dispuestas de tal manera que las contribuciones de todos los elementos se sumen en fase en la dirección del lóbulo principal, estando todos ellos alimentados con la misma potencia.

Estos factores de arrays que son producto de alimentar el array mediante excitaciones cofasales, que se encuentran por tanto sin optimizar, se denotarán como *SO*, mientras que para los optimizados mediante formas hermíticas se utilizará *HF* por sus siglas en inglés.

3.4.1.1. Arrays lineales

D_{max}	0.1λ	0.2λ	0.25λ	0.3λ	0.5λ	0.6λ	0.75λ	0.8λ	λ
2	3.94	3.62	3.39	3.12	1.99	1.78	2.11	2.22	1.99
3	8.90	8.04	7.39	6.60	2.97	2.57	3.13	3.33	2.99
4	15.93	14.31	13.07	11.52	3.95	3.42	4.22	4.45	3.98
5	25.09	22.47	20.46	17.94	4.93	4.29	5.26	5.62	4.97
6	36.40	32.55	29.58	25.85	5.91	5.12	6.34	6.75	5.96
7	49.94	44.61	40.48	35.31	6.88	5.93	7.38	7.91	6.95
8	65.75	58.68	53.21	46.34	7.85	6.76	8.46	9.07	7.93
9	83.89	74.79	67.78	58.95	8.82	7.61	9.50	10.21	8.92
10	104.61	93.04	84.26	73.21	9.79	8.46	10.57	11.39	9.90
11	144.82	113.42	102.65	89.13	10.76	9.29	11.62	12.54	10.88
12	124.45	136.02	123.04	106.74	11.72	10.12	12.68	13.71	11.86
13	164.71	160.87	145.45	126.10	12.69	10.95	13.73	14.88	12.85

Tabla 3.1: Directividades máximas para arrays lineales según su número de elementos N y la distancia entre ellos d_x según 2.7.3.1

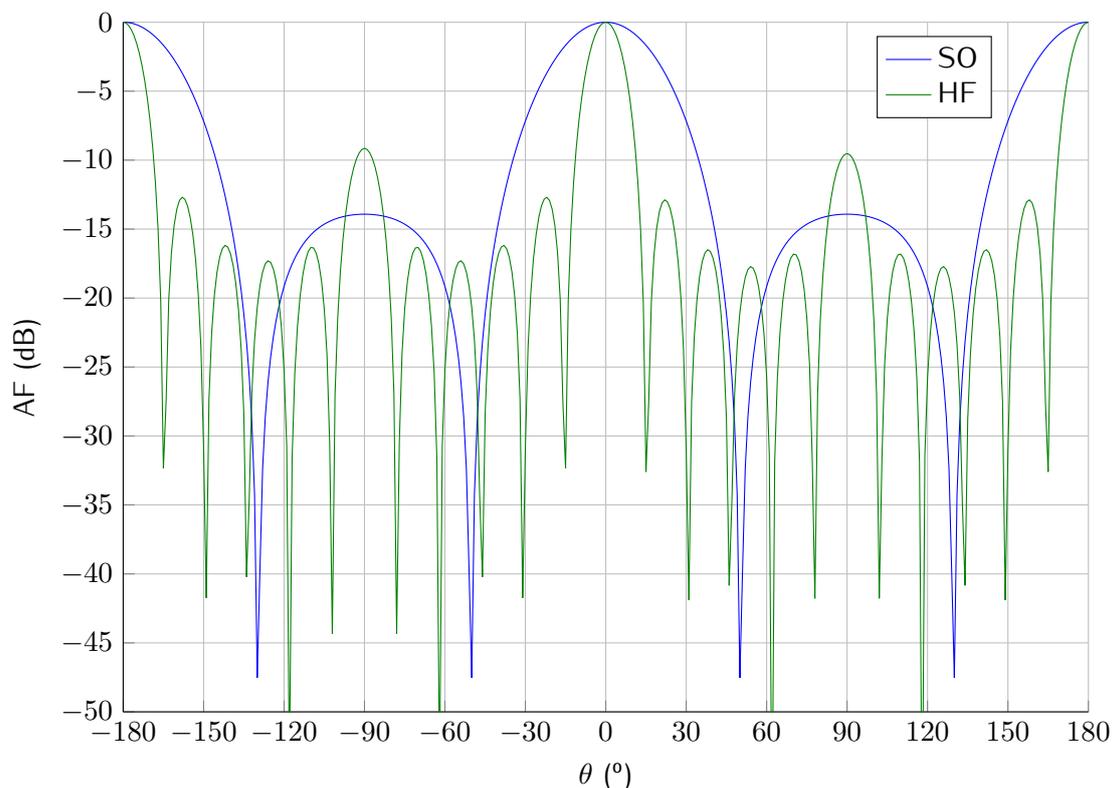


Figura 3.1: Factor de array con y sin optimizar para un array lineal
 $(N=13, d_x=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ)$

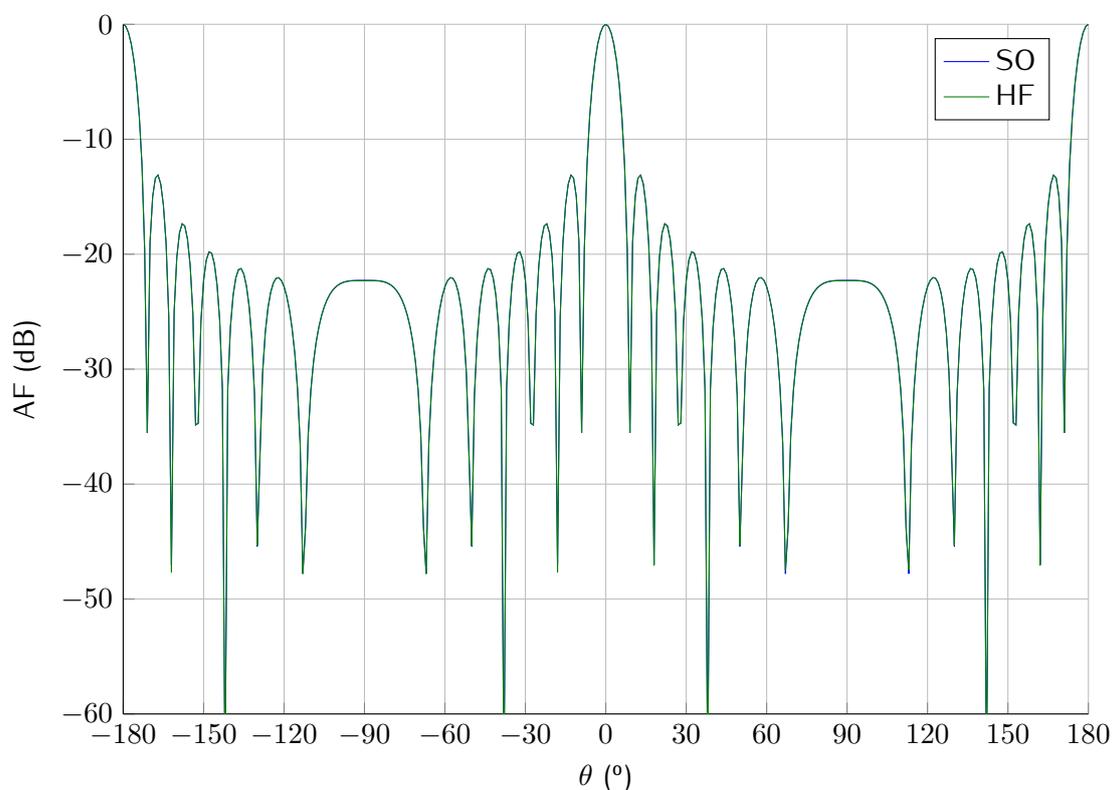


Figura 3.2: Factor de array con y sin optimizar para un array lineal
 $(N=13, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ)$

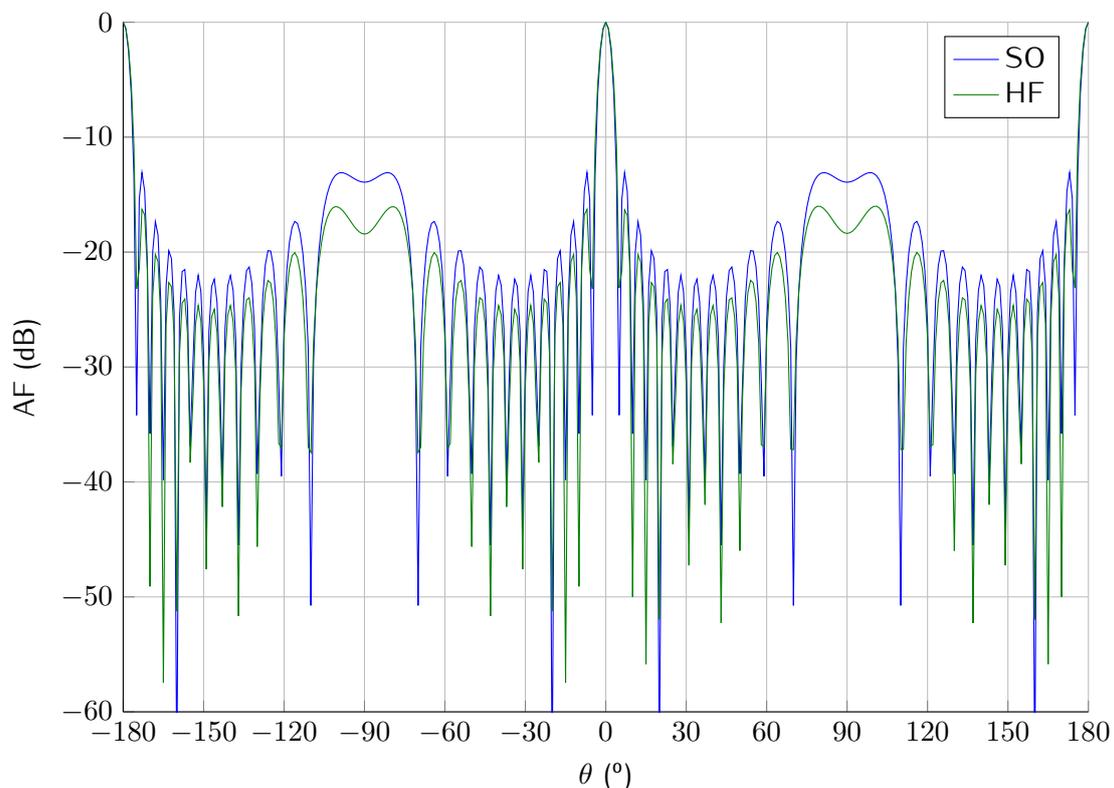


Figura 3.3: Factor de array con y sin optimizar para un array lineal ($N=13, d_x=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ$)

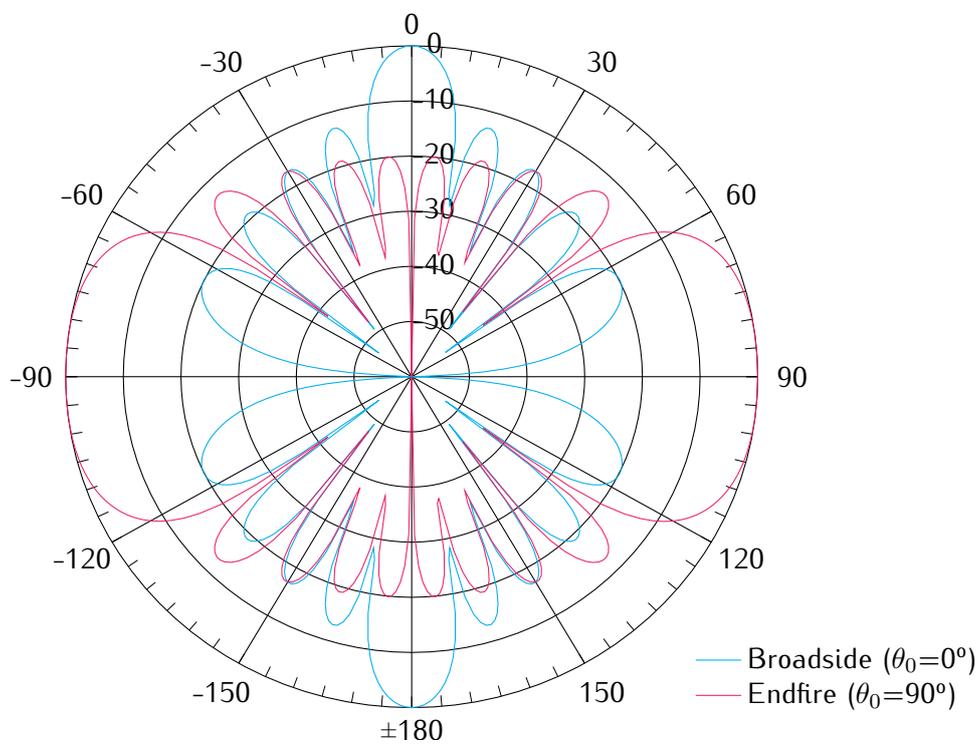


Figura 3.4: Factor de array optimizado para un array lineal en broadside y endfire ($N=10, d_x=0.5\lambda$)

3.4.1.2. Arrays circulares

D_{max}	0.1λ	0.2λ	0.25λ	0.3λ	0.5λ	0.6λ	0.75λ	0.8λ	λ
6	12.11	11.29	10.64	9.83	6.97	5.35	4.81	5.36	5.60
7	12.18	11.56	11.05	10.41	8.13	6.60	6.36	6.44	7.32
8	17.20	16.39	15.74	14.92	11.53	9.25	7.80	7.15	7.76
9	17.25	16.57	16.02	15.33	12.61	10.69	9.04	8.28	8.43
10	22.80	21.96	21.29	20.45	16.99	14.59	11.81	10.62	8.97
11	22.84	22.10	21.51	20.77	17.82	15.72	13.48	12.41	9.93
12	28.91	28.06	27.39	26.54	22.89	20.30	17.39	16.09	12.02
13	28.94	28.17	27.56	26.78	23.57	21.27	18.78	17.59	13.96
14	35.42	34.58	33.89	33.02	29.34	26.74	23.46	21.96	17.37
15	35.77	34.67	34.03	33.22	29.89	27.49	24.67	23.34	19.22
16	63.75	41.58	40.88	39.99	36.16	33.42	30.16	28.68	23.42
17	35.30	41.65	40.99	40.16	36.62	34.09	31.16	29.79	25.15

Tabla 3.2: Directividades máximas para arrays circulares según su número de elementos N y la distancia entre ellos d_r según 2.7.3.2

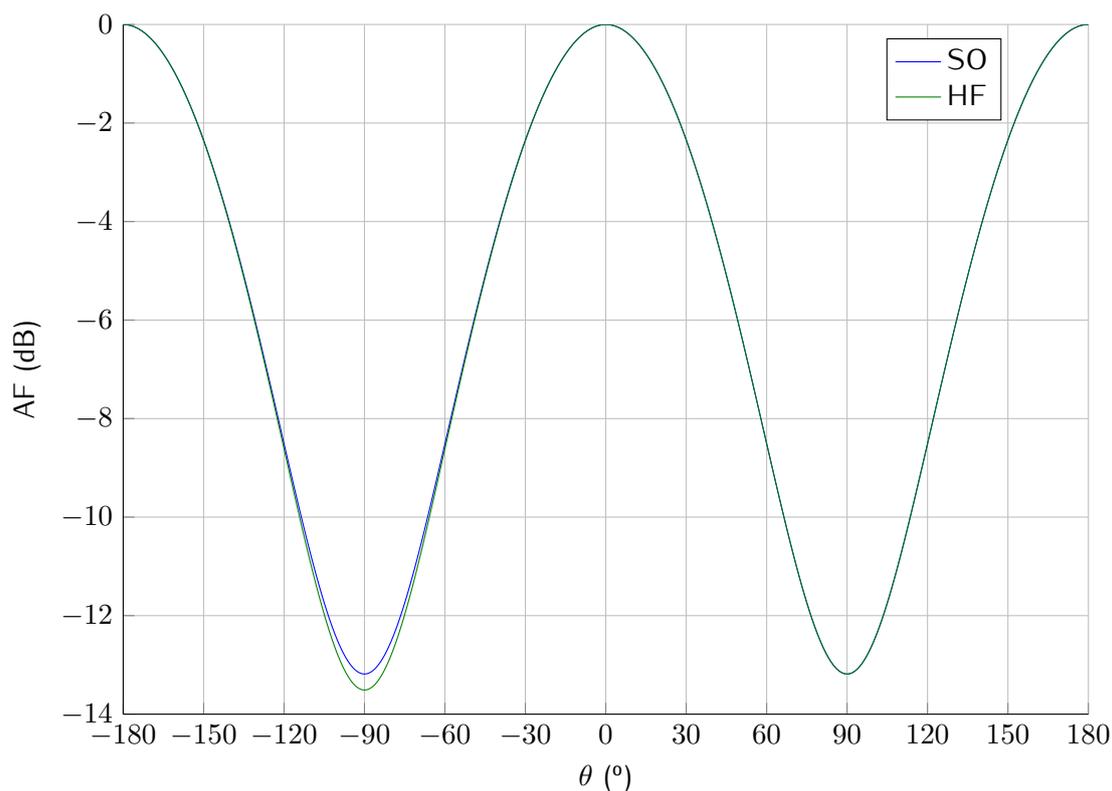


Figura 3.5: Factor de array con y sin optimizar para un array circular ($N=20, r=0.3196\lambda, d_r=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

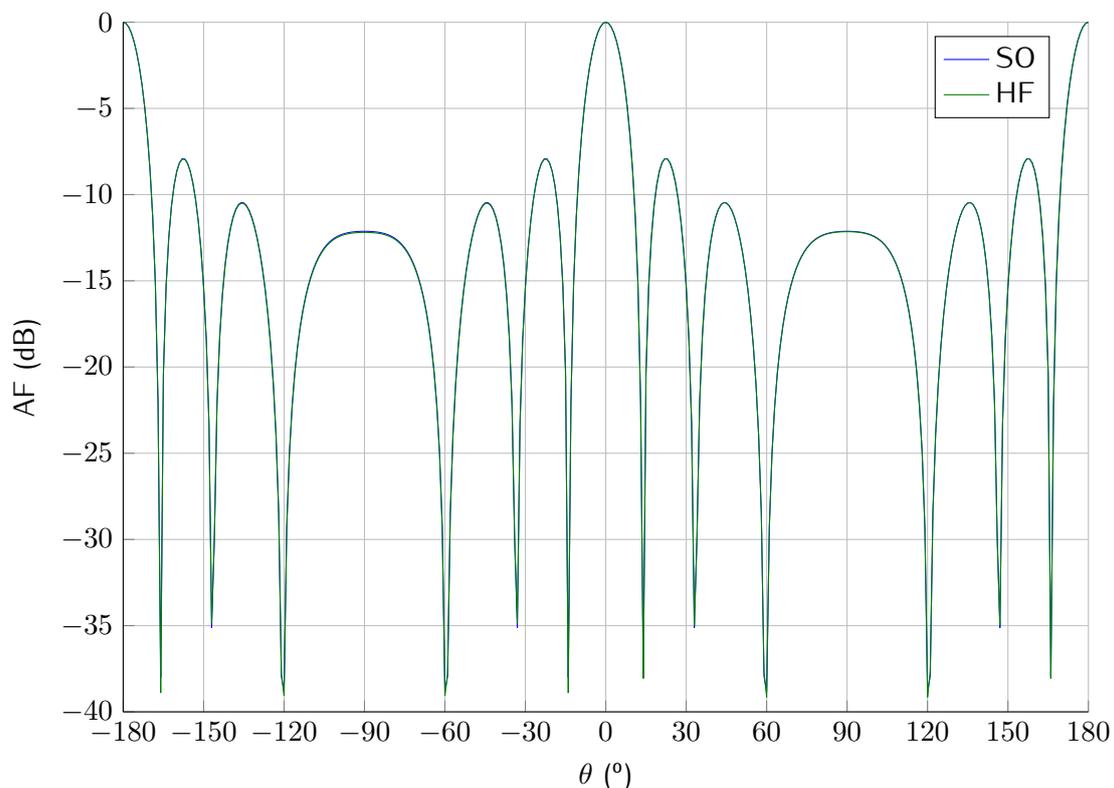


Figura 3.6: Factor de array con y sin optimizar para un array circular
 $(N=20, r=1.5981\lambda, d_r=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

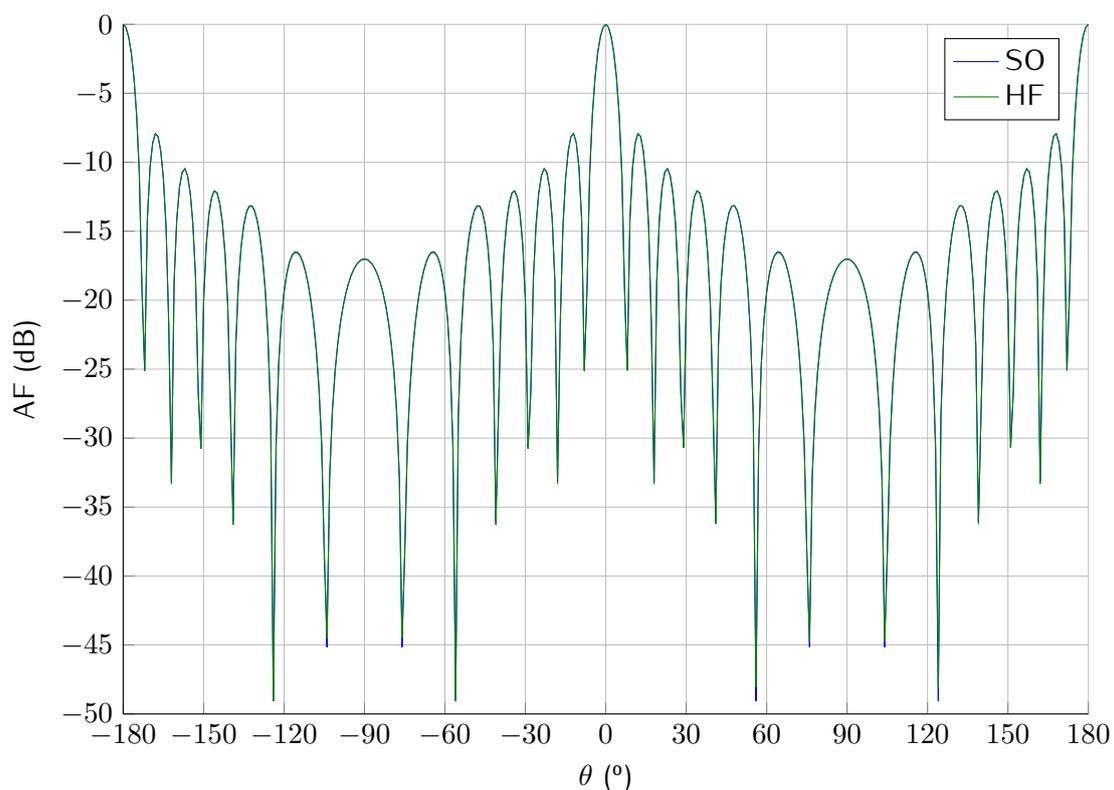


Figura 3.7: Factor de array con y sin optimizar para un array circular
 $(N=20, r=2.8766\lambda, d_r=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

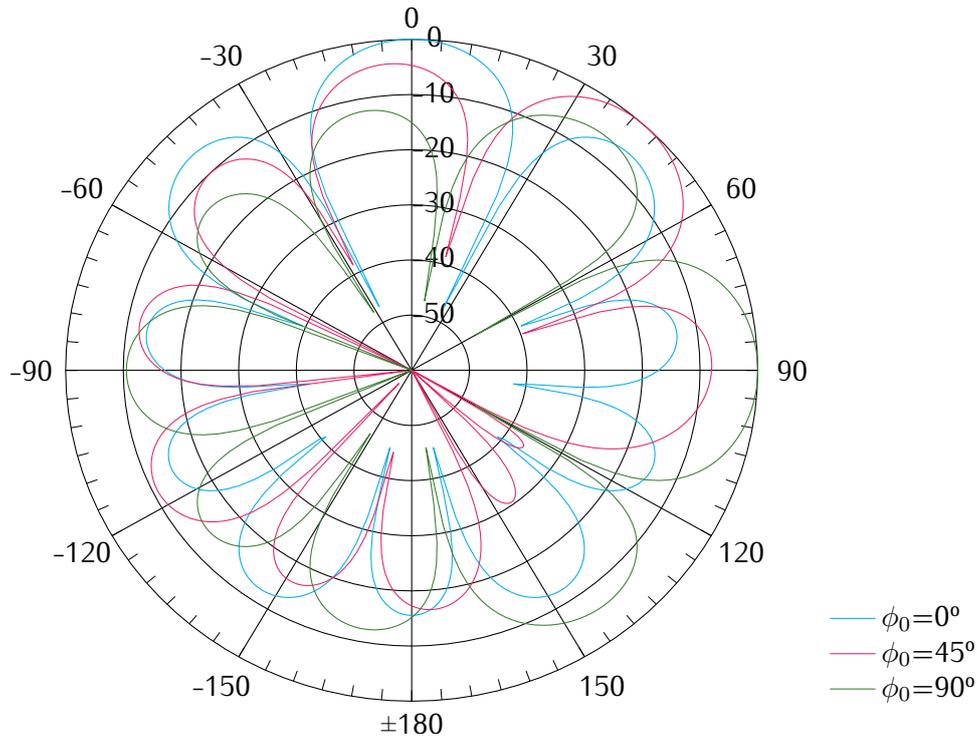


Figura 3.8: Factor de array optimizado para un array circular en varias direcciones de ϕ_0 ($N=10, r=0.4854\lambda, d_r=0.3\lambda, \theta_0=90^\circ$, eje en ϕ)

3.4.1.3. Arrays planos

D_{max}	0.1λ	0.2λ	0.25λ	0.3λ	0.5λ	0.6λ	0.75λ	0.8λ	λ
2×2	4.03	3.96	3.90	3.81	3.23	3.79	5.30	5.16	3.72
3×3	15.60	14.58	13.75	12.69	6.59	8.04	12.61	13.20	7.25
4×4	25.74	24.52	23.47	21.97	9.94	13.78	21.69	23.81	11.49
5×5	49.62	46.55	44.02	40.59	14.28	20.42	31.73	36.17	16.28
6×6	67.12	63.73	60.83	56.76	18.39	27.47	44.36	49.41	21.45
7×7	97.88	97.66	92.49	85.46	23.19	35.96	58.63	64.52	27.04
8×8	112.23	122.52	116.80	108.84	27.80	45.14	73.35	82.98	32.91
9×9	137.18	167.87	160.11	148.09	32.93	55.46	89.77	102.14	39.07
10×10	142.18	201.15	192.33	179.03	37.90	65.45	107.86	121.73	45.43
11×11	168.27	250.87	249.63	229.35	43.28	76.94	127.21	142.99	52.04
12×12	184.85	290.12	288.92	268.25	48.53	88.48	146.63	165.72	58.85
13×13	214.51	337.34	349.33	330.19	54.09	101.76	168.16	190.95	65.67

Tabla 3.3: Directividades máximas para arrays cuadrados según su número de elementos $N \times N$ y la distancia entre ellos $d_x = d_y$ según 2.7.3.3

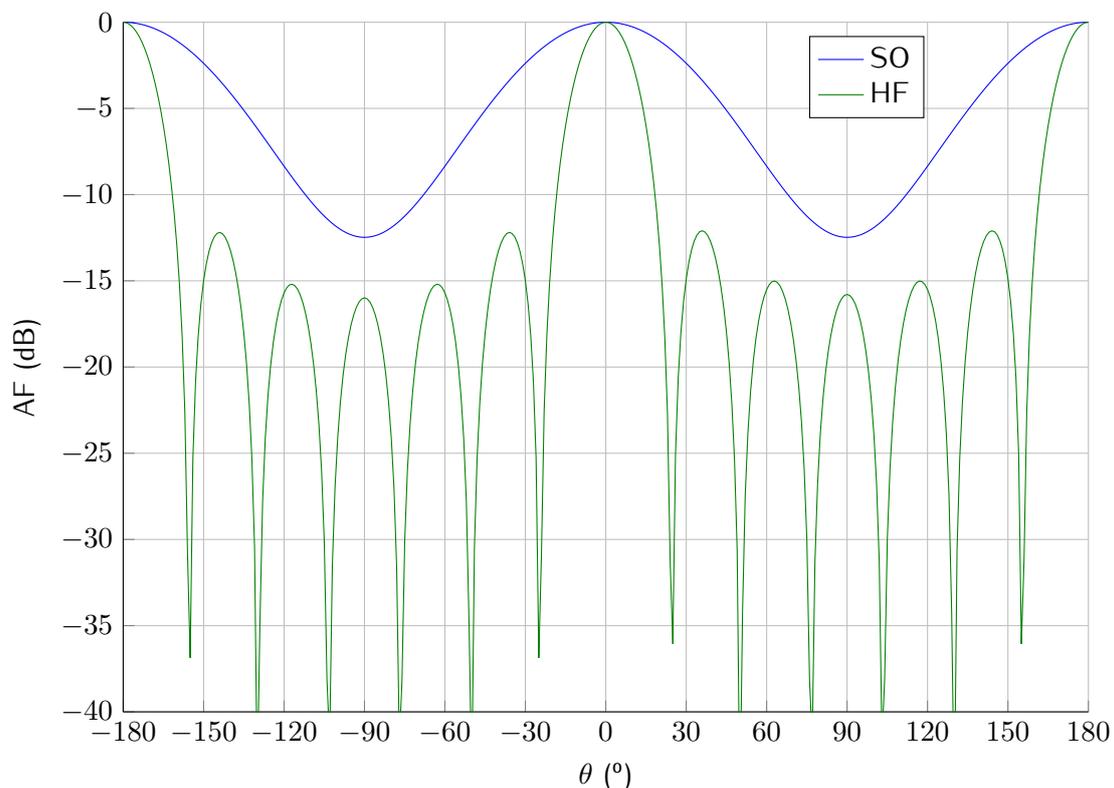


Figura 3.9: Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

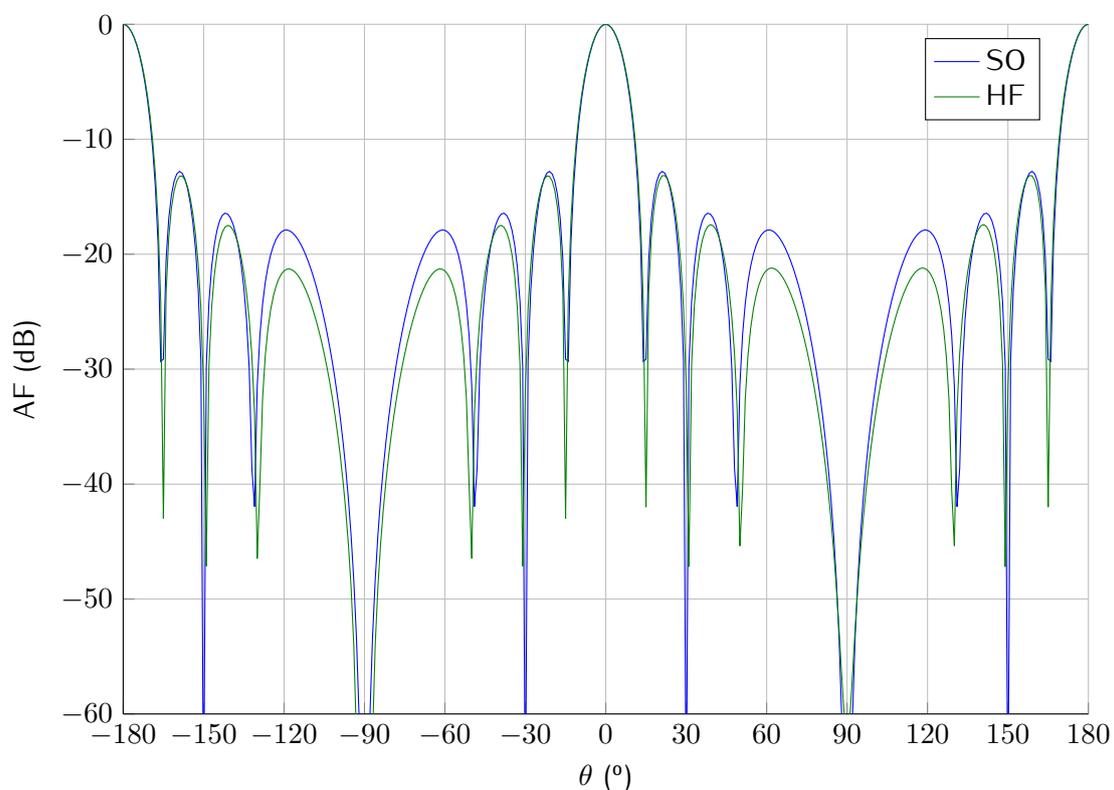


Figura 3.10: Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

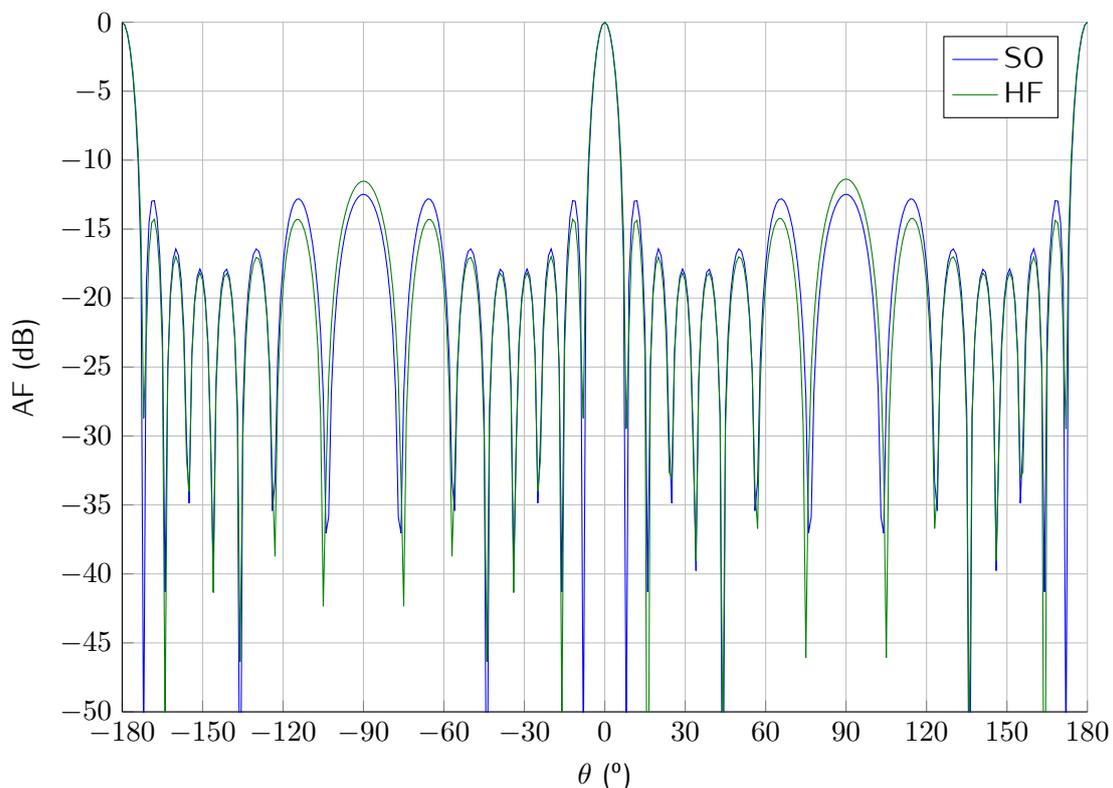


Figura 3.11: Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

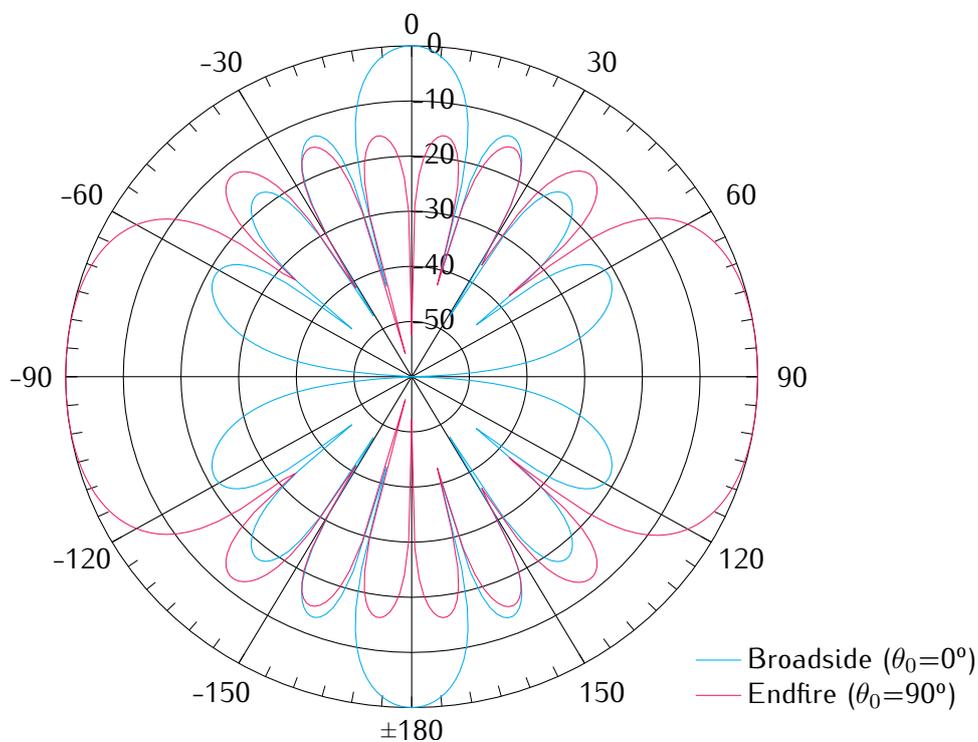


Figura 3.12: Factor de array optimizado para un array cuadrado en broadside y endfire
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \phi_0=0^\circ)$

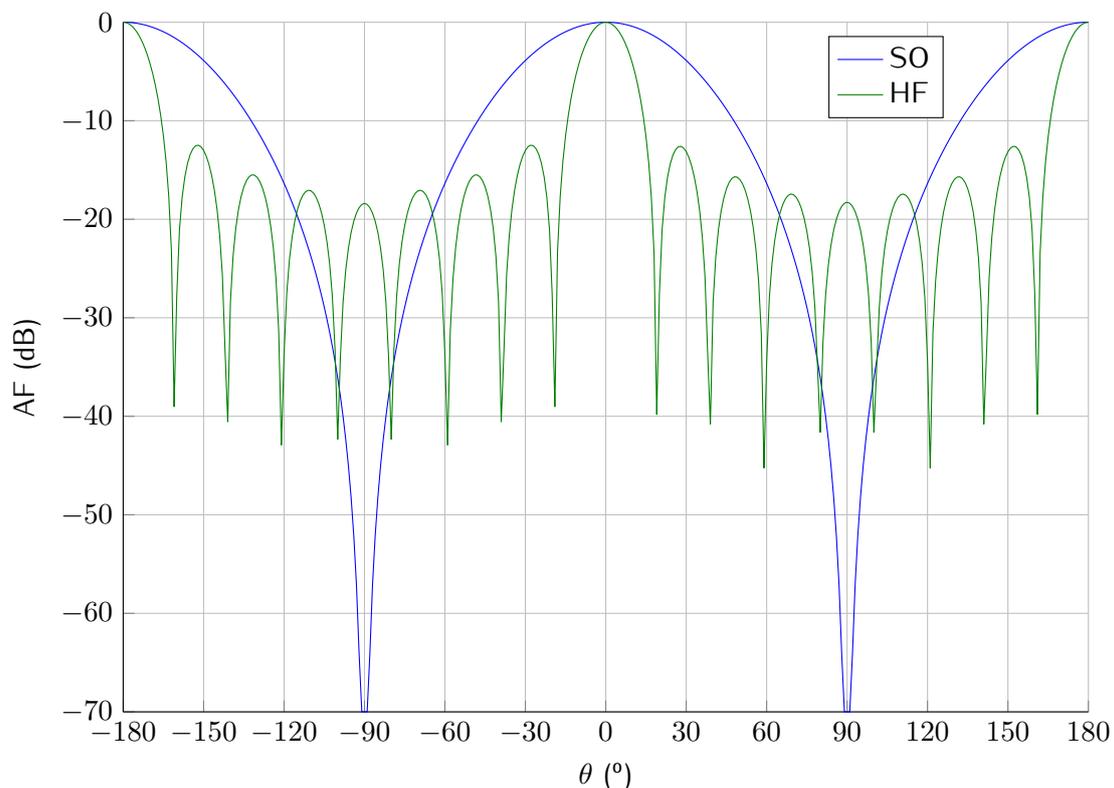


Figura 3.13: Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular
 ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.1\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

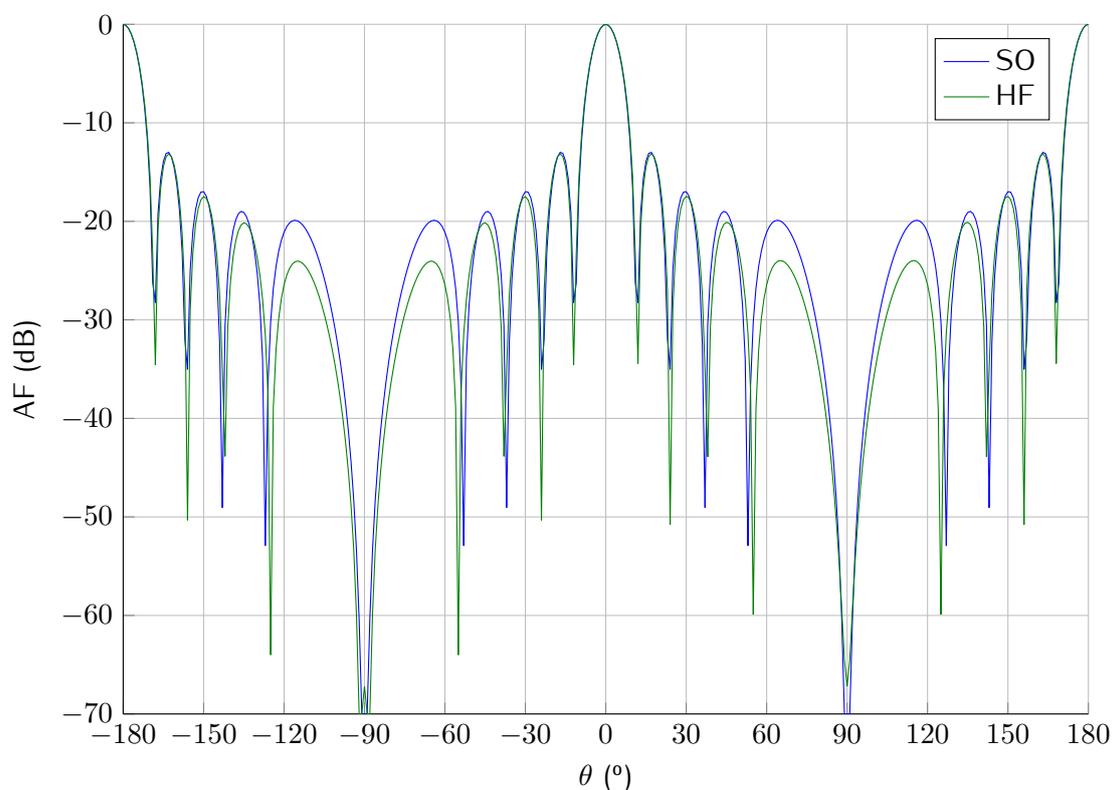


Figura 3.14: Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular
 ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

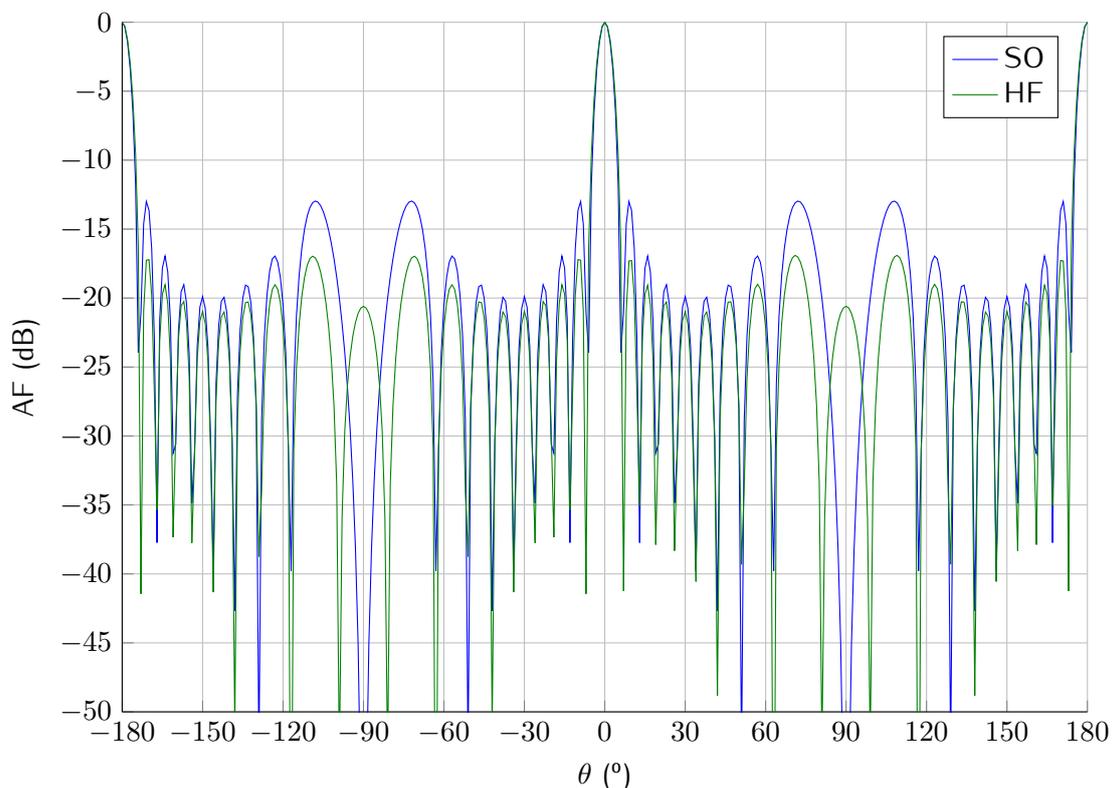


Figura 3.15: Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.9\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

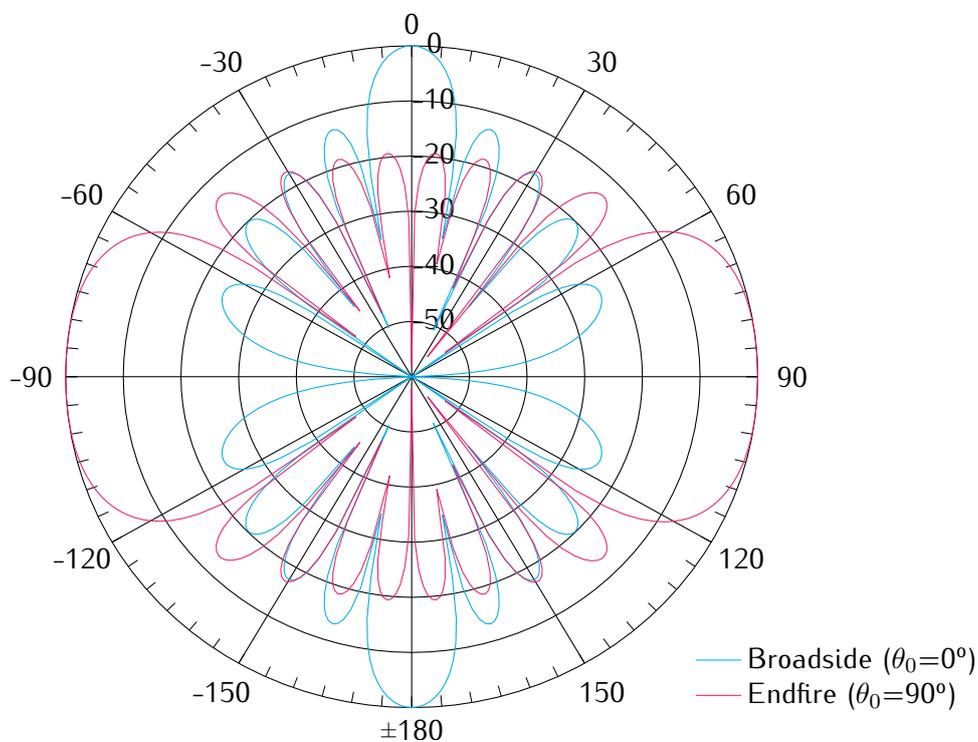


Figura 3.16: Factor de array optimizado para un array rectangular en broadside y endfire ($N=10, M=5, d_x=d_y=0.5\lambda, \phi_0=0^\circ$)

3.4.2. Casos particulares

Cuando el array cumple una serie de particularidades como poseer la misma distancia entre elementos contiguos para una cierta morfología, los cálculos para hallar la directividad máxima previamente descritos se pueden hallar de manera analítica, como se verá en los dos casos especiales siguientes.

3.4.2.1. Arrays lineales con elementos uniformemente distribuidos

Si en un array lineal todos sus elementos se hallan uniformemente distribuidos, esto es, para dos elementos n y m , a distancias del origen d_n y d_m respectivamente, la distancia entre ellos será $d_n - d_m = (n - m)d$, siendo d la distancia entre elementos, las componentes de las matrices $[A]$ y $[B]$ se simplifican considerablemente según

$$a_{m,n} = \exp[jk(m - n)d \sin \theta_0] \quad (3.14)$$

y

$$b_{m,n} = \frac{\sin k(m - n)d}{(m - n)d} \quad (3.15)$$

donde θ_0 denota el ángulo del lóbulo principal desde la normal del array y nótese, que para arrays lineales, no existe componente angular en ϕ .

La tabla 3.4 muestra el porcentaje de error entre los valores generales de la simulación para arrays lineales anterior 3.1, y los obtenidos con las aproximaciones de las fórmulas (3.14) y (3.15). Para hallar el porcentaje de error se ha utilizado la siguiente expresión

$$Error = \frac{|D_{max}(\text{analítica}) - D_{max}(\text{general})|}{|D_{max}(\text{general})|} \times 100\% \quad (3.16)$$

Error	0.1λ	0.2λ	0.25λ	0.3λ	0.5λ	0.6λ	0.75λ	0.8λ	λ
2	1.04	0.85	0.69	0.48	0.68	0.41	0.93	1.00	0.07
3	1.97	1.75	1.57	1.30	0.95	0.42	1.03	1.42	0.27
4	2.73	2.48	2.27	1.96	1.17	0.27	1.29	1.62	0.44
5	3.55	3.28	3.04	2.69	1.39	0.15	1.37	1.95	0.54
6	4.31	4.01	3.74	3.37	1.55	0.12	1.51	2.16	0.64
7	5.09	4.74	4.45	4.04	1.71	0.11	1.54	2.37	0.74
8	5.85	5.48	5.16	4.72	1.87	0.04	1.59	2.59	0.84
9	6.60	6.19	5.84	5.36	1.99	0.05	1.60	2.75	0.91
10	7.33	6.93	6.55	6.03	2.12	0.12	1.62	2.94	0.98
11	7.31	7.64	7.23	6.67	2.24	0.15	1.60	3.09	1.06
12	8.20	8.36	7.92	7.32	2.34	0.18	1.59	3.25	1.13
13	7.16	9.09	8.61	7.97	2.45	0.24	1.57	3.41	1.19

Tabla 3.4: Error en % entre la formulación general y la aproximación lineal

3.4.2.2. Arrays circulares con elementos uniformemente distribuidos

En un array circular de radio ρ cuyos elementos se encuentran uniformemente distribuidos según $\phi_n = 2n\pi/N$, el radio del n -ésimo elemento es

$$\rho_{m,n} = 2\rho |\sin(m-n)\pi/N| \quad (3.17)$$

Los elementos de la matriz $[B]$ se simplifican según

$$b_{m,n} = \frac{\sin(k\rho_{m,n})}{k\rho_{m,n}} \quad (3.18)$$

La siguiente tabla 3.5 muestra el porcentaje de error entre los valores generales de la simulación de la simulación circular anterior 3.2, y los obtenidos con las aproximaciones de las fórmulas (3.17) y (3.18). Se ha utilizado la misma expresión (3.16) que para el caso de los arrays lineales.

Error	0.1 λ	0.2 λ	0.25 λ	0.3 λ	0.5 λ	0.6 λ	0.75 λ	0.8 λ	λ
6	1.95	1.74	1.55	1.28	0.48	0.34	0.90	1.20	1.75
7	1.96	1.79	1.65	1.46	0.86	0.25	0.97	0.73	0.34
8	2.38	2.27	2.19	2.11	1.23	0.27	0.90	0.58	0.81
9	2.38	2.28	2.21	2.12	1.52	0.78	0.19	0.66	0.39
10	2.59	2.49	2.40	2.29	2.09	1.95	0.31	0.72	1.28
11	2.59	2.50	2.43	2.34	2.13	1.84	0.89	0.52	0.79
12	2.91	2.85	2.80	2.75	2.32	1.82	1.67	1.76	0.50
13	2.91	2.85	2.81	2.76	2.40	2.04	1.73	1.61	0.38
14	3.15	3.04	2.99	2.93	2.81	2.70	1.91	1.56	1.36
15	3.94	3.05	3.00	2.94	2.83	2.68	2.10	1.91	1.39
16	4.55	3.33	3.30	3.27	2.99	2.72	2.62	2.64	1.51
17	5.81	3.33	3.30	3.27	3.02	2.80	2.63	2.59	1.86

Tabla 3.5: Error en % entre la formulación general y la aproximación circular

3.5. Eficiencia del haz principal

La *eficiencia del haz* determina la calidad de transmisión o recepción de una antena. La eficiencia del haz principal específica de un array circular de antenas se puede definir según

$$\eta = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{N \sum_{n=1}^N I_n^2} \times 100 \% \quad (3.19)$$

En la gráfica 3.17 se compara la directividad máxima D_M con la directividad con uniforme amplitud y *excitación cofasal*¹ D_u para un array de 12 elementos en función de su diámetro. Es

¹En la sección 3.4.1 se ha visto lo que es una *excitación cofasal*. Para un *end-fire array* con una distancia entre elementos vecinos n y $n+1$ en función de la longitud de onda $d(\lambda)_{n,n+1}$, la diferencia entre sus fases progresivas es $\Delta\psi_{n,n+1} = d(\lambda)_{n,n+1} \times 360^\circ$.

fácilmente observable que D_M siempre es mayor que D_u y que D_M asciende muy rápidamente cuando el diámetro del array es menor que 2λ , esto es, cuando se encuentra en *superdirectividad*². Como los arrays superdirectivos requieren corrientes muy grandes de signos opuestos en elementos cercanos, resultando en excesivas pérdidas de calor y muy poca intensidad de radiación en la dirección del lóbulo principal, la eficiencia baja considerablemente y es necesario controlarla, siendo por ello un parámetro muy importante en el diseño de antenas. Aplicando la desigualdad de Schwarz³, se puede fácilmente demostrar [7] que la eficiencia es del 100% únicamente para arrays cofasales uniformemente excitados y se hace muy pequeña bajo situaciones de superdirectividad.

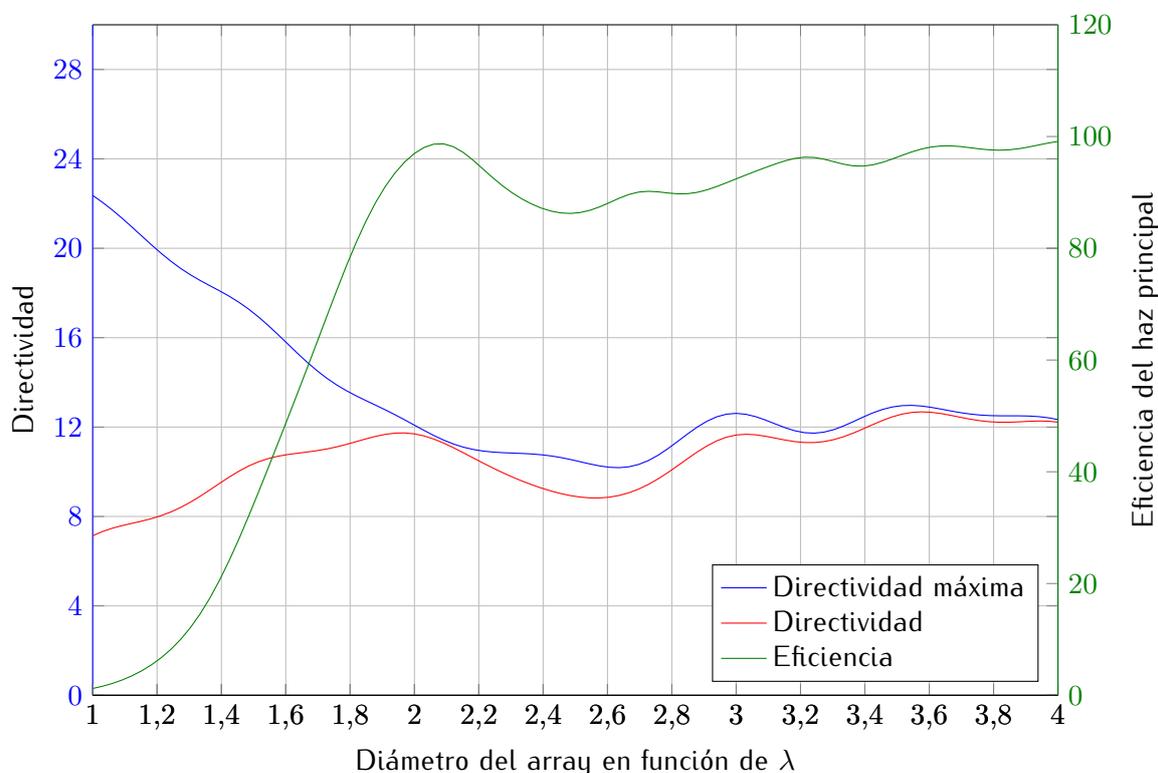


Figura 3.17: Directividad y eficiencia del haz principal para un array circular ($N=12, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ$)

²Una antena es *superdirectiva* o se encuentra en *superdirectividad* cuando su propia directividad es mucho mayor que aquella que obtiene una antena de referencia de su mismo tamaño y geometría. En un array de antenas, la superdirectividad se consigue insertando más elementos sin aumentar sus dimensiones, o lo que es lo mismo, reduciendo la distancia entre sus elementos. Estas antenas requieren grandes magnitudes y cambios muy rápidos en la fase de sus excitaciones, necesitando corrientes muy grandes y opuestas y una gran precisión a la hora de calcular estos valores. Por ello, este tipo de antenas sufren muchas pérdidas y su eficiencia cae abruptamente.

³La *desigualdad de Schwarz* o *desigualdad de Cauchy-Schwarz* [12] establece que el producto escalar (A.6) de dos vectores \vec{x} e \vec{y} de n elementos pertenecientes a un espacio (A.4) *prehilbertiano*⁴ es menor o igual que el producto de sus normas (A.7)

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad , \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}^n$$

Además, ambos lados de la expresión serán iguales si y sólo si \vec{x} e \vec{y} son linealmente dependientes (geoméricamente paralelos o alguno de magnitud cero), siendo uno de los vectores el múltiplo escalar del otro

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \iff \vec{x} = c\vec{y} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

⁴Un espacio *prehilbertiano* es un espacio vectorial V provisto de un producto escalar $|\langle \cdot, \cdot \rangle|$ sobre un cuerpo \mathbb{K} (A.5), el cual puede ser real \mathbb{R} o complejo \mathbb{C} . Dicho producto escalar está definido según

$$|\langle \cdot, \cdot \rangle| : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

3.6. Análisis de los resultados

A lo largo de la maximización de la directividad bajo el cociente de dos *formas hermíticas*, se aprecia claramente en los diagramas de radiación expuestos la mejoría respecto a las propiedades directivas de los distintos arrays sin optimización alguna, siempre que la distancia entre sus elementos sea distinta de $\lambda/2$. Después del proceso de maximización, el ancho del lóbulo principal es notablemente inferior en torno al ángulo en θ al cual se desea radiar. Además sus lóbulos secundarios son bastante menores en magnitud. Cuando los elementos distan entre sí $\lambda/2$ el proceso de optimización no mejora en nada las propiedades del factor del array de los arrays sin optimizar, pues al ser sus excitaciones cofasales, para el caso de $\lambda/2$ éstas son soluciones óptimas de por sí. Todo esto se puede comprobar en los ejemplos de la sección 3.4.

Recordando lo que se dijo en la sección 2.7.5 del estado del arte sobre el número de lóbulos que aparecían en el diagrama de radiación en $\theta \in [-90, 90]$, la conclusión era que influía tanto el número de elementos del array como la distancia entre éstos. Una vez se optimiza el array, sin embargo, el diagrama de radiación obtenido siempre tendrá N lóbulos radiantes, para un array de N elementos lineal o uno cuadrado de $N \times N$, sea cual sea la distancia entre sus elementos. Ejemplos de este comportamiento son los diagramas cuando la distancia entre elementos es pequeña de la sección 3.4.

Por otro lado, al igual que lo que sucede con el factor de array, cuantos más elementos tiene un array, el diagrama de radiación de un array con sus excitaciones optimizadas será más directivo. En la figura 3.18 se muestra un ejemplo del comportamiento de la máxima directividad para varios tipos de arrays en función del número de elementos que los compongan. En este ejemplo se ve cómo en un principio no importa la topología del array plano, mientras que para el mismo número de elementos los arrays lineales y circulares son menos directivos. Esto es porque en los arrays planos los elementos se encuentran más cerca unos de otros y, como se ha visto, cuanto más juntos estén unos de otros mayor directividad obtienen.

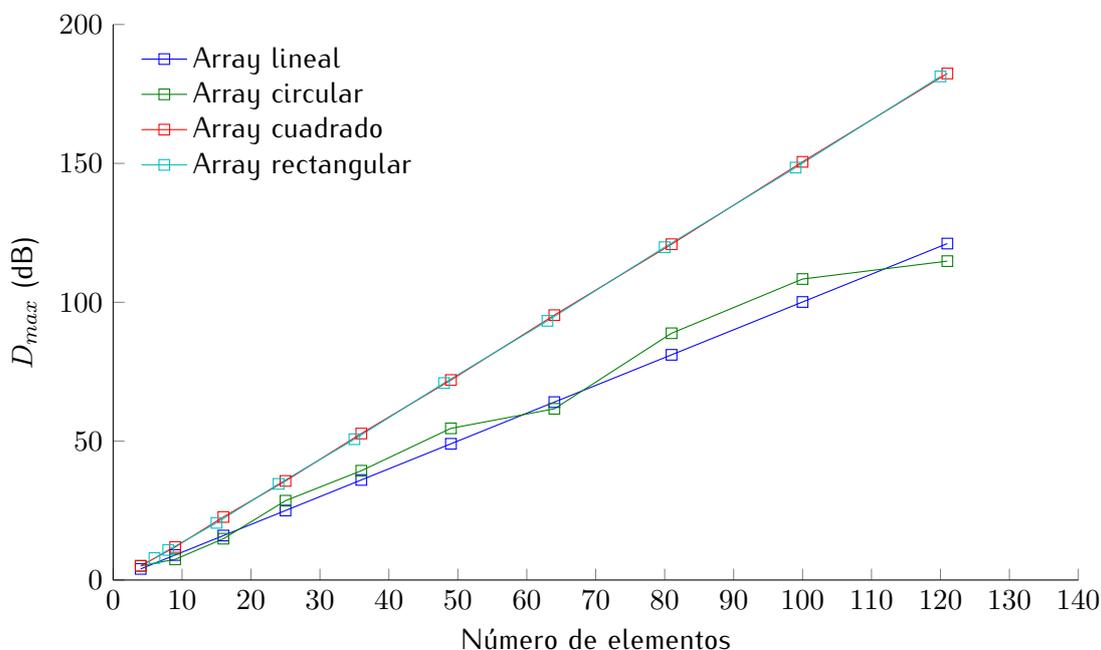


Figura 3.18: Máximas directividades en función del número de elementos para varios tipos de arrays

La simetría de los arrays cuya directividad se encuentra optimizada también es la misma que la del factor de array sin optimizar, al igual que los límites en la distancia de sus elementos para evitar la aparición de *grating lobes*, visto todo ello con ejemplos en la sección 2.7.5 del estado del arte.

En las tablas de directividades máximas 3.1, 3.2 y 3.3 se puede ver que cuanto más se reduce la distancia entre elementos más directivo se vuelve el array. Esto también es equivalente a decir que un array al que se le reduce el número de elementos y la distancia entre ellos mantendrá el valor de su directividad. De hecho, para distancias muy pequeñas se observa que la directividad aumenta drásticamente. Este efecto se llama *superdirectividad* y ya se comentó en la nota 2 de este capítulo. Esto, sin embargo, tiene la gran desventaja de que los elementos muy cercanos entre sí requieren grandes valores de alimentación y alteraciones muy rápidas en su fase provocando muchas pérdidas y baja eficiencia.

Por otro lado, cuando un array es lineal y se halla compuesto de N elementos isotrópicos y equidistantes a una distancia de $\lambda/2$, está demostrado [2] que su máxima directividad es N y que tiende a N^2 según la distancia entre elementos se aproxima a cero. Este comportamiento se puede observar en la tabla 3.1 de la página 46.

En la sección 3.4.2, que analiza desarrollos alternativos cuando se cumple que un array es lineal o circular y que sus elementos son isotrópicos separados a la misma distancia relativa unos de otros, se han calculado las tablas de errores 3.4 y 3.5. Estas tablas sirven para comparar los resultados de las directividades máximas obtenidas mediante el método general del cociente de formas hermíticas con las expresiones analíticas de los casos especiales posteriormente descritos. Aquí también se comprueban los efectos de la superdirectividad, donde los errores entre ambos cálculos son bastante elevados comparados con el resto de valores.

Por último, se ha estudiado la eficiencia del haz principal de un array. Para un array circular uniforme su directividad máxima es siempre mayor a su directividad alimentada con una excitación cofasal, siendo muy elevada la primera cuando el array se encuentra en superdirectividad. Debido a la gran demanda de intensidad que requieren los arrays superdirectivos su eficiencia decae drásticamente. De este modo se enunció que sólo los arrays circulares cofasales uniformemente excitados alcanzan una eficiencia que tiende al 100% y que ésta cae a valores muy bajos cuando el array entra en superdirectividad.

Capítulo 4

Programación cuadrática (QP)

4.1. Introducción

Siguiendo el esquema del capítulo 3, donde se utilizaban formas hermíticas para optimizar los pesos y la directividad máxima, se va a proceder ahora a plantear el mismo sistema como un *problema de programación cuadrática*, cuyos fundamentos se explican a continuación. Después de resolverlo mediante *Programación Cuadrática (QP)*, se compararán los resultados obtenidos con aquéllos logrados en el capítulo anterior, dibujando algunos diagramas de radiación de relevancia. Además, se van a introducir restricciones de campo nulo y de nivel de lóbulos secundarios.

Después de esta introducción, se procede a enunciar los fundamentos de un problema de programación cuadrática general y los elementos que lo componen. Seguidamente se repasan las herramientas utilizadas para su resolución. Más adelante, se aplica la programación cuadrática a la síntesis de diagramas de radiación, creando para ello cuatro grandes bloques, los cuales son el de maximización de la directividad únicamente, con restricciones de campo nulo, con restricciones de lóbulos secundarios y con la combinación de las dos anteriores. Todos estos bloques cuentan con numerosos ejemplos y gráficas para su correcta visualización.

A su vez, el planteamiento del problema de programación cuadrática se puede subdividir en dos casos. El primero, principalmente cuando el sistema apunta a $\theta_0 = 0$ (los demás casos se ven en 2.7.5), donde se obtienen diagramas de radiación simétricos y esto hace que se simplifiquen los cálculos al eliminarse la parte compleja en las operaciones. En el segundo, el caso general, para un apuntamiento en cualquier θ , se obtienen por contra diagramas de radiación asimétricos y el problema sí incluirá variables complejas y necesitará un mayor desarrollo matemático, pues las herramientas de las que se hace uso sólo aceptan variables reales. Para cada caso, se estudiará también cómo afectan las *restricciones de campo nulo* y de *lóbulos secundarios*.

Al igual que en el capítulo anterior, se va a suponer que los elementos del array son isotrópicos, siendo la estructura física de los elementos que conforman el array y la banda a la que operan irrelevante. También se obvian las implicaciones de acoplo mutuo.

Para el desarrollo del problema, se ha hecho uso del paquete de *MATLAB*[®] *quadprog*, visto en profundidad en este capítulo en 4.3, que hace uso del método del *punto interior convexo* para solucionar el problema de programación cuadrática.

4.2. Fundamentos

La *programación cuadrática* busca la solución óptima minimizando una **función cuadrática** sujeta a varias **restricciones lineales**. Si éstas no lo fueran, habría que hacer uso de otras técnicas de optimización como *SOCP*, la cual se ve en el capítulo 5.

La expresión general de un problema de optimización cuadrática es la siguiente

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde, siendo n el número de variables y m el número de restricciones, \mathbf{Q} es una matriz real positiva simétrica $n \times n$ que contiene los coeficientes de los elementos cuadráticos y \mathbf{c} es un vector columna de dimensión n que contiene los coeficientes de los elementos lineales. Las variables de decisión están representadas por el vector n -dimensional \mathbf{x} , las restricciones de desigualdad e igualdad por las matrices $m \times n$ \mathbf{A} y \mathbf{A}_{eq} respectivamente, y los coeficientes del lado derecho por los vectores m -dimensionales \mathbf{b} y \mathbf{b}_{eq} . Además el problema es convexo, esto es, existe una solución factible y la región de restricciones se encuentra acotada.

Se pueden establecer ciertas condiciones necesarias y suficientes para que la solución del problema sea óptima. Estas condiciones son conocidas como las *condiciones de Karush-Kuhn-Tucker*, que no son más que una generalización del *método de los multiplicadores de Lagrange*. Existen numerosos métodos para la resolución de un problema de optimización cuadrática, todos ellos iterativos, de los cuales los más importantes son:

- Método del punto interior [13], [14], [15], [16].
- Método del conjunto activo [17], [18], [19], [20].
- Método del lagrangiano aumentado [21], [22], [23], [24].
- Método del gradiente conjugado [25], [26], [27].
- Método del gradiente proyectado [28], [29], [30].
- Extensiones del algoritmo símplex [31], [32], [33].

4.3. Herramientas

Como se ha dicho en la introducción, el cálculo de los problemas de optimización cuadrática se llevará a cabo mediante la función *quadprog* del programa *MATLAB*[®]. Esta función, por defecto y aquí utilizado, hace uso del método del *punto interior convexo*, aunque también puede usar otros como el del método del *conjunto activo*. Se ha pintado la sintaxis de *MATLAB*[®] de naranja respetando el negro para las expresiones teóricas que se estudian durante todo el capítulo.

Partiendo de la expresión general de un problema de optimización cuadrática enunciada en (4.1), la sintaxis de la función *quadprog* es la siguiente

$$\mathbf{x} = \text{quadprog}(\mathbf{H} \equiv \mathbf{Q}, \mathbf{f} \equiv \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq})$$

donde \mathbf{x} es el vector que optimiza la función $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ sujeta a la restricción de desigualdad $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ y a la restricción de igualdad $\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}$. Todos estos parámetros de entrada deben ser reales, razón por la cual se debe hacer una transformación cuando las variables del problema de optimización son complejas, como se verá en la siguiente sección.

Se ha utilizado un malla para los ángulos del espacio θ y ϕ de 1.000 muestras, mientras que para la restricción del nivel de lóbulos secundarios se ha usado un paso de θ_j y ϕ_j de $0,1^\circ$.

4.4. Maximización de la directividad

En los dos siguientes apartados se procede a realizar los cálculos necesarios para maximizar la directividad para el caso en que el array produce diagramas de radiación simétricos y para el caso general, dibujando algunos ejemplos de relevancia.

4.4.1. Caso particular de diagramas de radiación simétricos

Cuando el array apunta principalmente a $\theta_0 = 0$, los cálculos descritos a continuación se simplifican, al obtenerse valores reales en el factor de fase (3.4) y en las excitaciones de cada uno de los elementos del array 2.7.4. Esto produce diagramas de radiación simétricos respecto a cero.

En el capítulo anterior, se definió la directividad en su forma genérica (3.6) y como el ratio de dos matrices hermíticas (3.8). El proceso aquí es el mismo, y por tanto se vuelve a hacer uso de las dos formas hermíticas $[A]$ y $[B]$, definidas en (3.9) y (3.10) respectivamente. Recordando pues las fórmulas juntas de la directividad

$$D = \frac{|E(\theta_0, \phi_0)|^2}{\frac{1}{4\pi}P_{rad}} = \frac{\langle w^\dagger \rangle [A] \{w\}}{\langle w^\dagger \rangle [B] \{w\}} \quad (4.2)$$

es claro que para una intensidad de radiación (numerador) constante, la máxima directividad se puede conseguir minimizando la potencia de radiación (denominador). Según lo visto en 4.2, el problema de optimización cuadrática se puede plantear como

$$\begin{aligned} \underset{w}{\text{minimize}} \quad & P_{rad} = \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} \\ \text{subject to} \quad & |E(\theta_0, \phi_0)|^2 = \langle w^\dagger \rangle [A] \{w\} = k \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde k es un número real distinto de cero (no confundir con el número de onda) y siendo los valores de *quadprog* que interesan los siguientes

$$\mathbf{w} = \text{quadprog}(\mathbf{H}, [], [], [], \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq})$$

Como la intensidad de radiación tiene que permanecer constante, y recordando el factor de fase definido en (3.4)

$$|E(\theta_0, \phi_0)|^2 = \langle w^\dagger \rangle [A] \{w\} = \langle w^\dagger \rangle \{g_0\} \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k \quad (4.4)$$

tomando la raíz cuadrada

$$E(\theta_0, \phi_0) = \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k' \quad , \quad k' = \sqrt{k} \in \mathbb{R} \neq 0 \quad (4.5)$$

Dicha constante pertenecerá al conjunto de los números reales, al sólo aceptar el problema tipo valores reales. Sin embargo, tanto el factor de fase $\{g_0\}$ como los pesos $\{w\}$ pueden tomar valores complejos

$$\Re(E(\theta_0, \phi_0)) + j\Im(E(\theta_0, \phi_0)) = \Re(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) + j\Im(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = k' \quad (4.6)$$

Recordando de nuevo la expresión del factor de fase del capítulo anterior (3.4), si $\theta=0^\circ$ entonces éste será siempre igual a la unidad independientemente del valor que tome ϕ . Análogamente ocurre con la función de la potencia (3.3), con lo que la matriz $[B]$ definida en (3.10), también será real y no habrá que hacer cálculos adicionales. Los pesos resultantes también tomarán valores reales, con lo que simplemente se puede reescribir el problema de programación cuadrática anterior (4.3) como

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{minimize}} && \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} \\ & \text{subject to} && \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k' \end{aligned} \quad (4.7)$$

Equivalentemente, se puede hallar la función de potencia $\{g_i\}$ vista en (3.3), que a su vez constituye la matriz $[B]$, según su geometría, adaptada de [34]. Como en el caso simétrico sus parámetros son reales, las expresiones cambian de contener funciones exponenciales complejas a senos y cosenos reales.

Para un array lineal de elementos equiespaciados, se divide el array en dos partes simétricas cuyos pesos también lo serán. Esto significa que las excitaciones se encuentran doblemente repetidas a un lado y al otro del punto medio del array, con lo que basta con hallar sólo las de un lado y luego duplicarlas. Para que se cumpla esta simetría, el número de elementos N que posee el array ha de ser par. La siguiente figura muestra esta idea, donde cada elemento del mismo color poseerá la misma excitación en módulo y fase

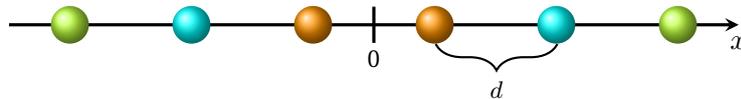


Figura 4.1: Simetría en un array lineal

La fórmula de la función de potencia es

$$\{g_i\} = 2 \sum_{p=1}^{N/2} \cos[\pi u_i (p - \frac{1}{2})] \quad (4.8)$$

con

$$u_i = 2d \sin(\theta_i) / \lambda \quad (4.9)$$

siendo d la distancia en función de λ entre dos elementos cualquiera del array lineal.

Para un array plano de elementos equiespaciados, análogamente éste se divide en cuatro partes simétricas y se optimiza sólo para una de ellas, cuadruplicando al final las excitaciones obtenidas. Los números de elementos N y M han de ser ambos pares. La idea es la siguiente, donde cada elemento del mismo color tendrá el mismo valor en su excitación

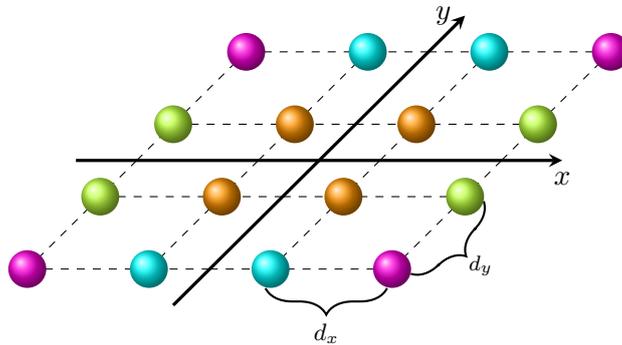


Figura 4.2: Simetría en un array plano

La expresión se extiende según

$$\{g_i\} = 4 \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^{M/2} \cos[\pi u_i(p - \frac{1}{2})] \cos[\pi v_i(q - \frac{1}{2})] \quad (4.10)$$

con

$$\begin{aligned} u_i &= 2d_x \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) / \lambda \\ v_i &= 2d_y \sin(\theta_i) \sin(\phi_i) / \lambda \end{aligned} \quad (4.11)$$

siendo d_x y d_y la distancia en función de λ entre dos elementos cualquiera en los planos x e y respectivamente del array plano.

Sea cual sea la estrategia llevada a cabo, los valores a introducir en *quadprog* son los siguientes

$$H = 2[B], \quad A_{eq} = \langle g_0^\dagger \rangle, \quad b_{eq} = k'$$

A continuación se muestran varios ejemplos de diagramas de radiación donde se ha maximizado la directividad mediante la teoría expuesta anteriormente. Se recuerda que para los factores de array alimentados mediante excitaciones cofasales (sin optimizar) se ha utilizado la notación *SO*, para los optimizados mediante formas hermíticas *HF* y para los optimizados con programación cuadrática *QP*.

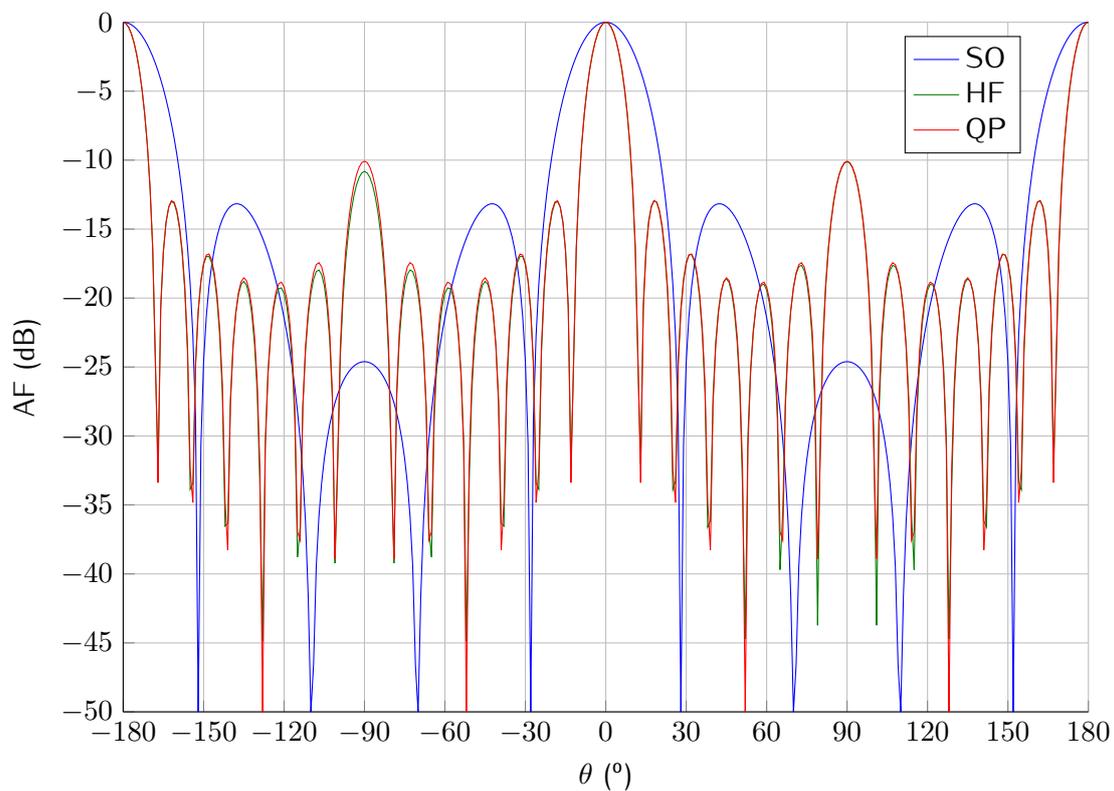


Figura 4.3: Factor de array con y sin optimizar para un array lineal
 ($N=17, d_x=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ$)

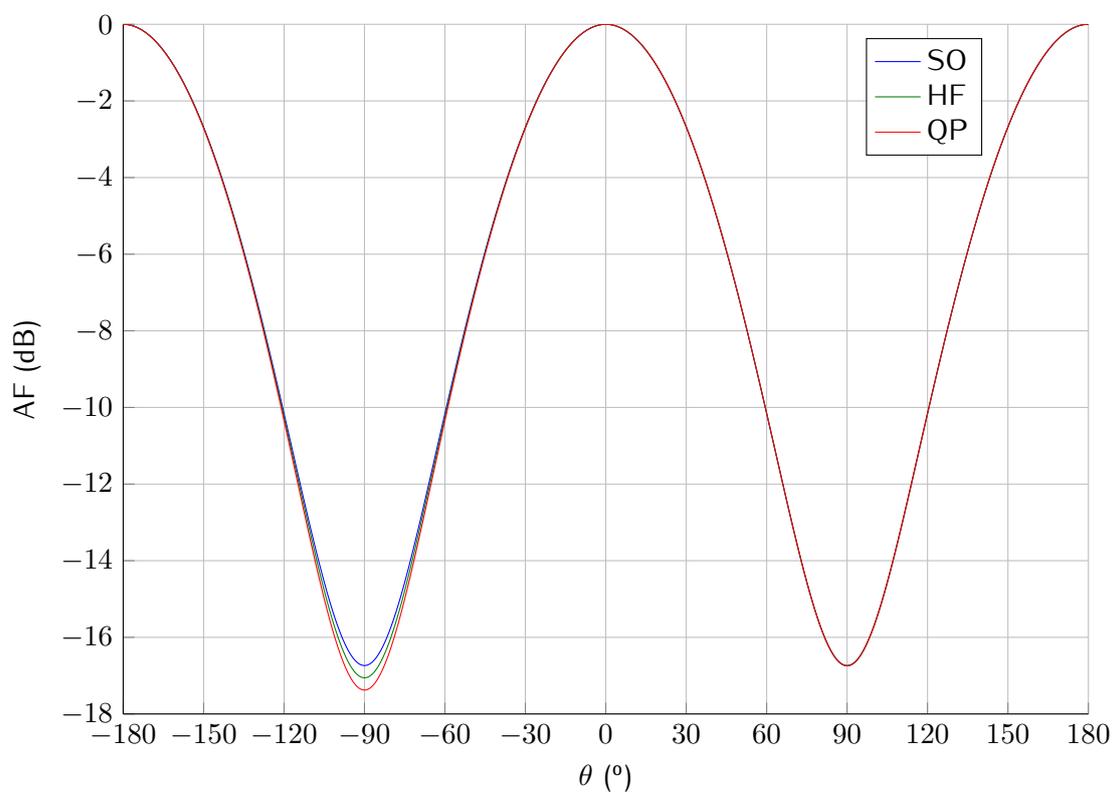


Figura 4.4: Factor de array con y sin optimizar para un array circular
 ($N=17, r=0.3401\lambda, d_r=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

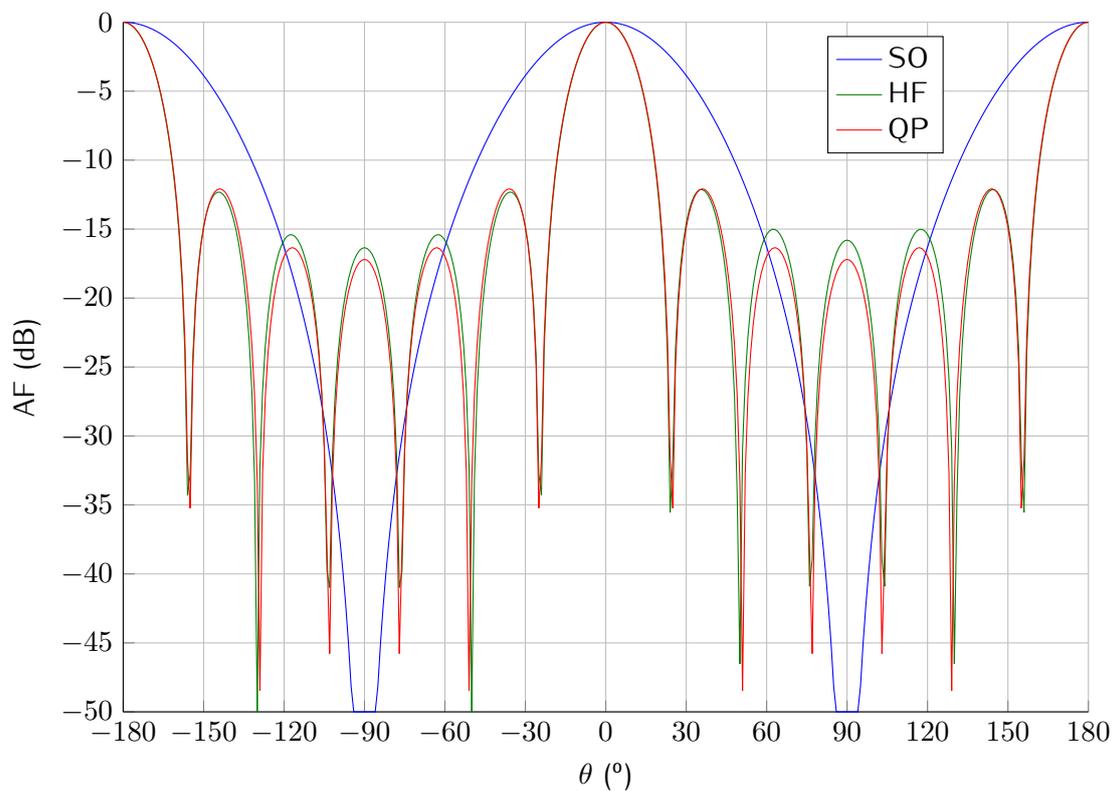


Figura 4.5: Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

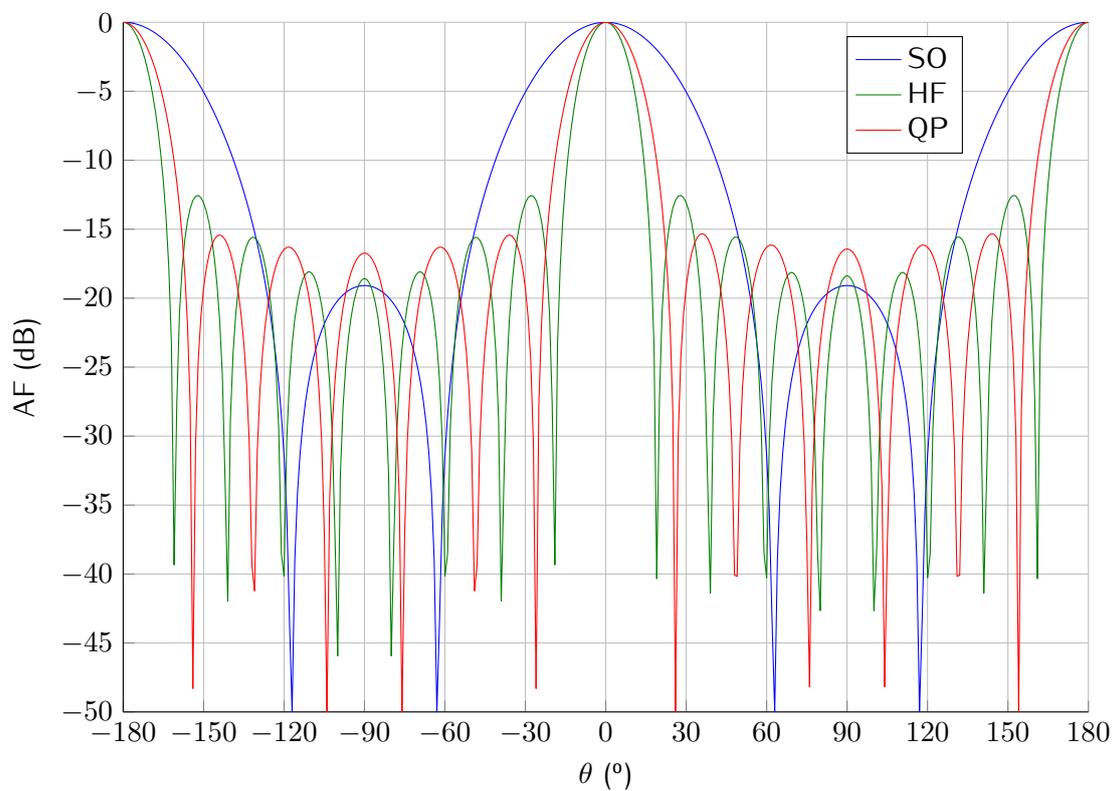


Figura 4.6: Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular
 $(N=9, M=7, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

4.4.2. Caso general de diagramas de radiación asimétricos

Para cualquier dirección de apuntamiento distinta a las enunciadas en 2.7.5, el diagrama de radiación será asimétrico y los valores de $\{g_0\}$ y $\{w\}$ adquirirán valores complejos, con lo que se debe dar otro valor real a la parte imaginaria de su producto para terminar de definir el valor del campo eléctrico, el cual sí puede ser complejo. Así, de la ecuación 4.6 se obtiene el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{cases} \Re(E(\theta_0, \phi_0)) = \Re(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = k' & (4.12a) \\ \Im(E(\theta_0, \phi_0)) = \Im(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = k'' & (4.12b) \end{cases}$$

donde $k'' \in \mathbb{R}$ es otra constante real, la cual puede valer incluso k' o cero.

Desarrollando la multiplicación $\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}$, obtenemos que la parte real del producto de dos números complejos es la diferencia de sus partes reales y sus partes imaginarias, mientras que la parte imaginaria es la suma de los dos productos de la parte real de uno con la imaginaria del otro

$$\begin{aligned} \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} &= \left(\Re(\langle g_0^\dagger \rangle) + j\Im(\langle g_0^\dagger \rangle) \right) \left(\Re(\{w\}) + j\Im(\{w\}) \right) \\ &= \Re(\langle g_0^\dagger \rangle)\Re(\{w\}) - \Im(\langle g_0^\dagger \rangle)\Im(\{w\}) + j \left[\Re(\langle g_0^\dagger \rangle)\Im(\{w\}) + \Im(\langle g_0^\dagger \rangle)\Re(\{w\}) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

De este modo, sustituyendo (4.13) en el par de ecuaciones (4.12a) y (4.12b) se obtiene el sistema final de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \Re(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = \Re(\langle g_0^\dagger \rangle)\Re(\{w\}) - \Im(\langle g_0^\dagger \rangle)\Im(\{w\}) = k' & (4.14a) \\ \Im(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = \Re(\langle g_0^\dagger \rangle)\Im(\{w\}) + \Im(\langle g_0^\dagger \rangle)\Re(\{w\}) = k'' & (4.14b) \end{cases}$$

por lo cual se debe definir la parte real e imaginaria de $\{g_0\}$ que englobe el resultado anterior según

$$\begin{cases} \langle g_{0R}^\dagger \rangle = \left[\Re(\langle g_0^\dagger \rangle) - \Im(\langle g_0^\dagger \rangle) \right] & (4.15a) \\ \langle g_{0I}^\dagger \rangle = \left[\Im(\langle g_0^\dagger \rangle) \Re(\langle g_0^\dagger \rangle) \right] & (4.15b) \end{cases}$$

Lo mismo ocurre con la matriz $[B]$, la cual puede tomar valores complejos para cualquier dirección de apuntamiento. Desarrollando la función a minimizar de (4.3)

$$\begin{aligned} \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} &= \left(\Re(\langle w^\dagger \rangle) + j\Im(\langle w^\dagger \rangle) \right) \left(\Re([B]) + j\Im([B]) \right) \left(\Re(\{w\}) + j\Im(\{w\}) \right) \\ &= \Re(\langle w^\dagger \rangle)\Re([B])\Re(\{w\}) - \Im(\langle w^\dagger \rangle)\Im([B])\Re(\{w\}) - \\ &\quad - \Re(\langle w^\dagger \rangle)\Im([B])\Im(\{w\}) - \Im(\langle w^\dagger \rangle)\Re([B])\Im(\{w\}) + \\ &\quad + j \left[\Re(\langle w^\dagger \rangle)\Re([B])\Im(\{w\}) - \Im(\langle w^\dagger \rangle)\Im([B])\Im(\{w\}) + \right. \\ &\quad \left. + \Re(\langle w^\dagger \rangle)\Im([B])\Re(\{w\}) + \Im(\langle w^\dagger \rangle)\Re([B])\Re(\{w\}) \right] = \\ &= \Re(\langle w^\dagger \rangle)\Re([B])\Re(\{w\}) - \Im(\langle w^\dagger \rangle)\Re([B])\Im(\{w\}) + \\ &\quad + j \left[\Im(\langle w^\dagger \rangle)\Im([B])\Im(\{w\}) + \Re(\langle w^\dagger \rangle)\Im([B])\Re(\{w\}) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

obteniendo igualmente para $[B]$ el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \Re(\langle w^\dagger \rangle [B] \{w\}) = \Re(\langle w^\dagger \rangle) \Re([B]) \Re(\{w\}) - \Im(\langle w^\dagger \rangle) \Re([B]) \Im(\{w\}) & (4.17a) \\ \Im(\langle w^\dagger \rangle [B] \{w\}) = \Im(\langle w^\dagger \rangle) \Im([B]) \Im(\{w\}) + \Re(\langle w^\dagger \rangle) \Im([B]) \Re(\{w\}) & (4.17b) \end{cases}$$

y definiendo igualmente la parte real e imaginaria de la matriz $[B]$ según

$$\begin{cases} [B_R] = [\Re([B]) & -\Im([B])] & (4.18a) \\ [B_I] = [\Im([B]) & \Re([B])] & (4.18b) \end{cases}$$

Todo esto provoca que la variable a optimizar $\{w\}$ quede también desdoblada en su parte real $\Re(\{w\})$ e imaginaria $\Im(\{w\})$. Por esto, se debe realizar el siguiente cambio de variable para englobarlas a las dos

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \Re(\{w\}) \\ \Im(\{w\}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (4.19)$$

Como se puede ver, el número de variables a resolver se ha doblado con el nuevo cambio de variable. Finalmente se puede reescribir el caso general de la ecuación (4.3)

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \langle x^\dagger \rangle \begin{bmatrix} [B_R] \\ [B_I] \end{bmatrix} \{x\} \\ & \text{subject to} && \langle g_{0R}^\dagger \rangle \{x\} = k' \\ & && \langle g_{0I}^\dagger \rangle \{x\} = k'' \end{aligned} \quad (4.20)$$

y los valores de *quadprog* basándose en los pares de ecuaciones (4.14a), (4.14b), (4.17a) y (4.17b)

$$H = 2 \begin{pmatrix} [B_R] \\ [B_I] \end{pmatrix}, \quad A_{eq} = \begin{pmatrix} \langle g_{0R}^\dagger \rangle \\ \langle g_{0I}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad b_{eq} = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}$$

Por último recordar que para obtener las excitaciones de los elementos del array se debe deshacer el cambio de variable realizado en (4.19) según

$$\{w\} = \{x_{0\dots N-1}\} + j\{x_{N\dots 2N-1}\} \in \mathbb{C}^N \quad (4.21)$$

Seguidamente se muestran varios ejemplos para el caso general de maximización de la directividad en programación cuadrática para cualquier apuntamiento.

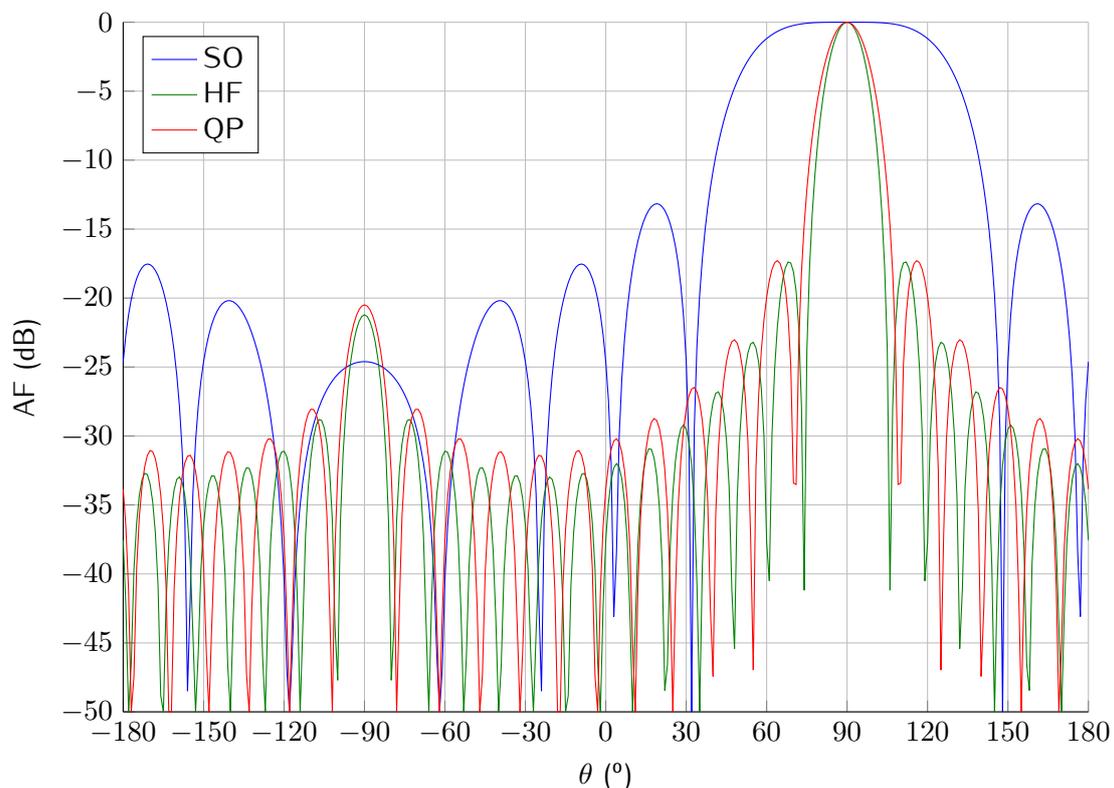


Figura 4.7: Factor de array con y sin optimizar para un array lineal
($N=17, d_x=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ$)

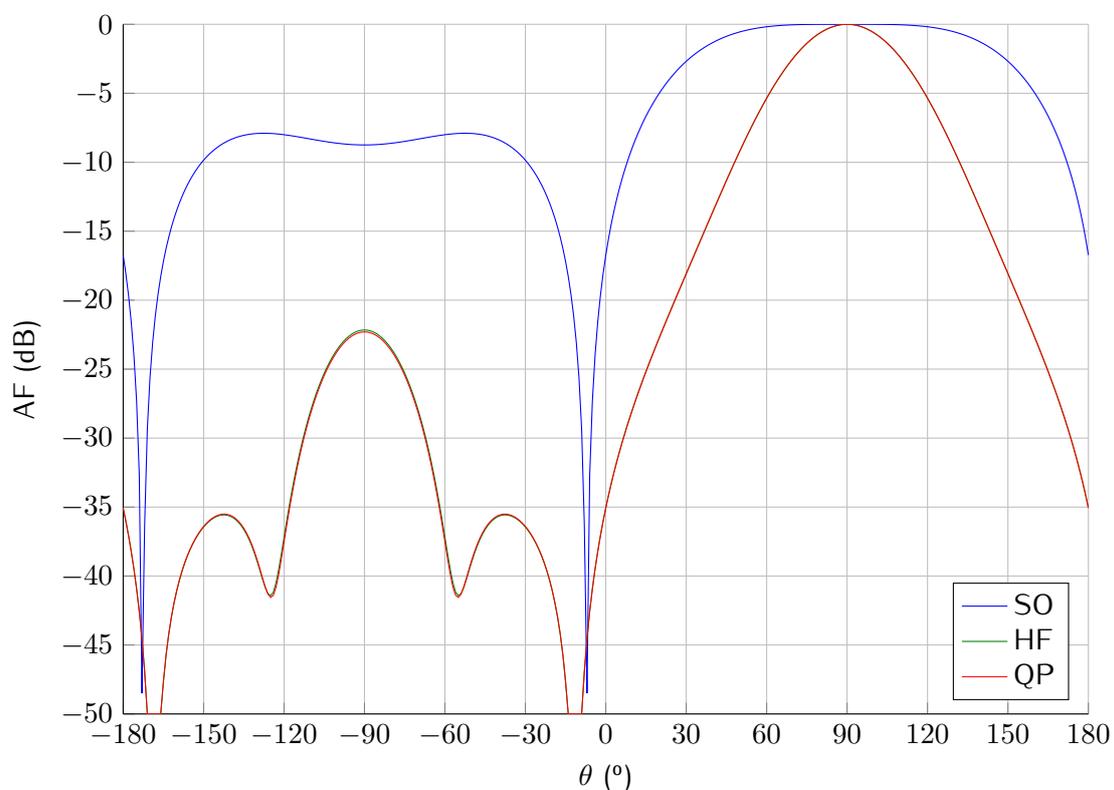


Figura 4.8: Factor de array con y sin optimizar para un array circular
($N=17, r=0.3401\lambda, d_r=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ$)

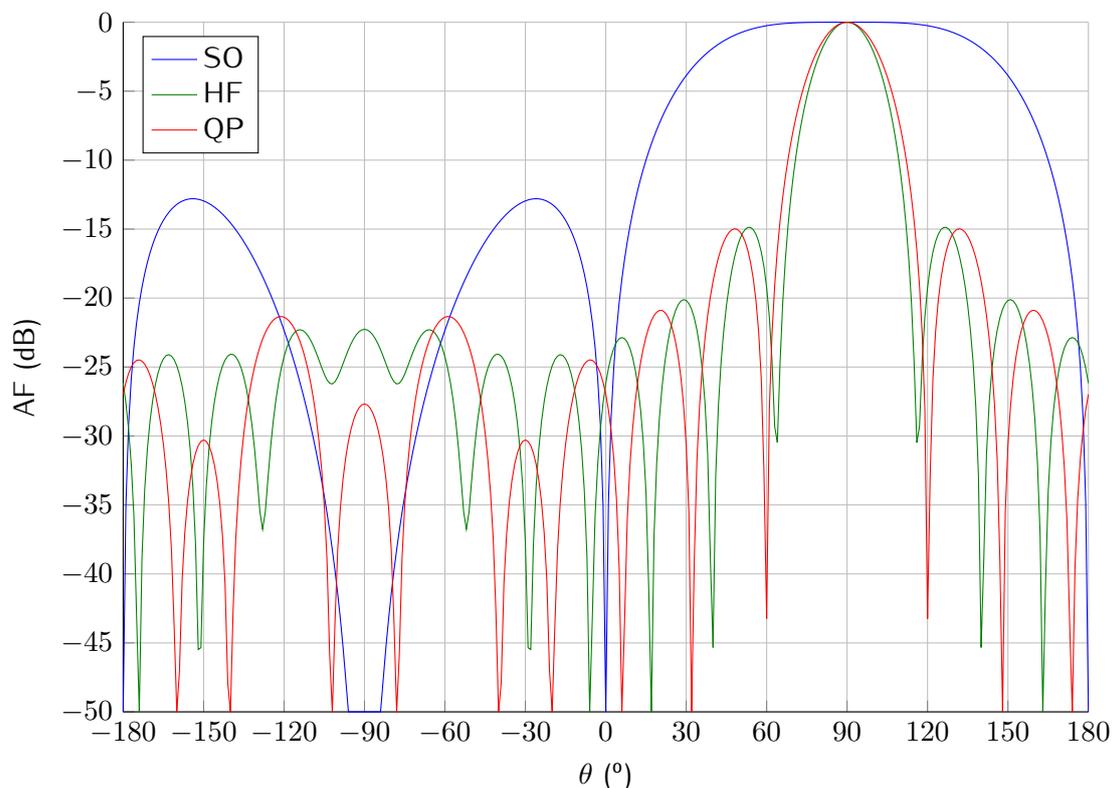


Figura 4.9: Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ)$

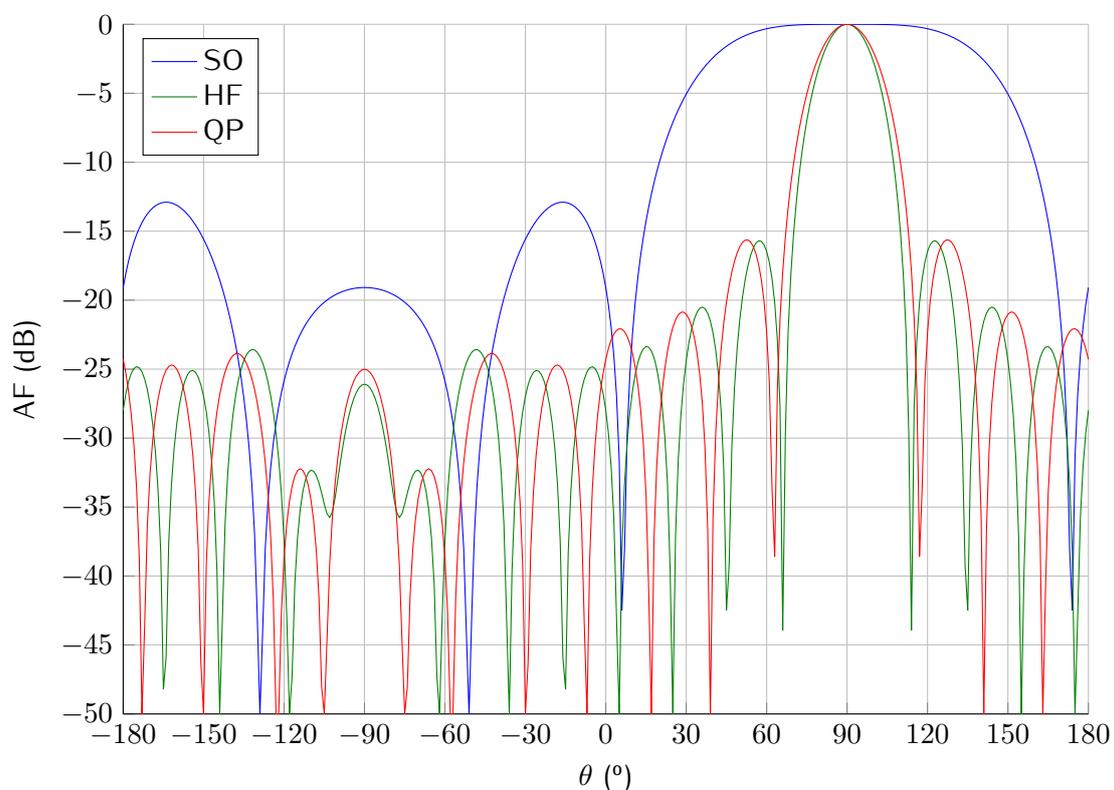


Figura 4.10: Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular
 $(N=9, M=7, d_x=d_y=0.125\lambda, \theta_0=90^\circ, \phi_0=0^\circ)$

4.5. Restricción de campo nulo

Introducir un nulo no es más que dejar de radiar en un punto concreto del espacio o, lo que es lo mismo, que la intensidad de radiación para un determinado ángulo sea cero

$$E(\theta_{nulls_i}, \phi_{nulls_i}) = 0 \quad (4.22)$$

siendo U el número de nulos con $i = 1, \dots, U$ y siendo los ángulos correspondientes a cada nulo θ_{nulls_i} y ϕ_{nulls_i} , donde no se desea radiar.

Esto es altamente deseable cuando existen varios sistemas radiantes y no se quiere interferir entre ellos. En la práctica, la obtención de nulos es irreal, pues siempre hay algún nivel de radiación por mínimo que sea, pero gracias a las constantes mejoras tanto en el diseño y construcción de antenas como en las técnicas de optimización de sus excitaciones, dichos niveles de radiación son cada vez menores.

En la presente sección se muestran las modificaciones en el desarrollo matemático previo para la introducción de nulos y algunos ejemplos de cómo éstos afectan a la maximización de la directividad para los dos casos previamente estudiados.

4.5.1. Caso particular de diagramas de radiación simétricos

Para generar diagramas simétricos en torno a θ_0 simplemente hace falta introducir una restricción adicional por cada nulo según la ecuación previa (4.22) a la fórmula real analizada en (4.3)

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{minimize}} && \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} \\ & \text{subject to} && \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k' \\ & && \langle g_{nulls_i}^\dagger \rangle \{w\} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde $\{g_{nulls_i}\}$ es el vector columna que contiene cada uno de los nulos, que tiene la siguiente forma, similar a la del factor de potencia visto en (3.3)

$$\{g_{nulls_i}\} = g(\theta_{nulls_i}, \phi_{nulls_i}) = \begin{bmatrix} \exp[-jk \sin \theta_{nulls_i} (x_1 \cos \phi_{nulls_i} + y_1 \sin \phi_{nulls_i})] \\ \exp[-jk \sin \theta_{nulls_i} (x_2 \cos \phi_{nulls_i} + y_2 \sin \phi_{nulls_i})] \\ \exp[-jk \sin \theta_{nulls_i} (x_3 \cos \phi_{nulls_i} + y_3 \sin \phi_{nulls_i})] \\ \vdots \\ \exp[-jk \sin \theta_{nulls_i} (x_N \cos \phi_{nulls_i} + y_N \sin \phi_{nulls_i})] \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Del mismo modo que se hizo con la función de potencia en la sección 4.4.1 de maximización de la directividad, también se puede sacar la función de los nulos según su geometría, con expresiones análogas a (4.8) y (4.10). Para un array lineal de elementos equiespaciados, la fórmula de los nulos es

$$\{g_{nulls_i}\} = 2 \sum_{p=1}^{N/2} \cos[\pi u_i (p - \frac{1}{2})] \quad (4.25)$$

con

$$u_i = 2d \sin(\theta_{nulls_i}) / \lambda \quad (4.26)$$

Para un array plano de elementos equiespaciados, la expresión queda según

$$\{g_{nulls_i}\} = 4 \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^{M/2} \cos[\pi u_i(p - \frac{1}{2})] \cos[\pi v_i(q - \frac{1}{2})] \quad (4.27)$$

con

$$\begin{aligned} u_i &= 2d_x \sin(\theta_{nulls_i}) \cos(\phi_{nulls_i})/\lambda \\ v_i &= 2d_y \sin(\theta_{nulls_i}) \sin(\phi_{nulls_i})/\lambda \end{aligned} \quad (4.28)$$

Los valores en *quadprog* se pueden sustituir de manera sencilla según

$$\mathbf{H} = 2[\mathbf{B}], \quad \mathbf{A}_{eq} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_0^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{nulls_i}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{eq} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}' \\ \mathbf{0}_i \end{pmatrix}$$

A continuación se muestra una comparativa entre la maximización de la directividad de un array lineal con y sin restricción de nulos. Al ser diagramas simétricos, los nulos se reflejan también simétricamente.

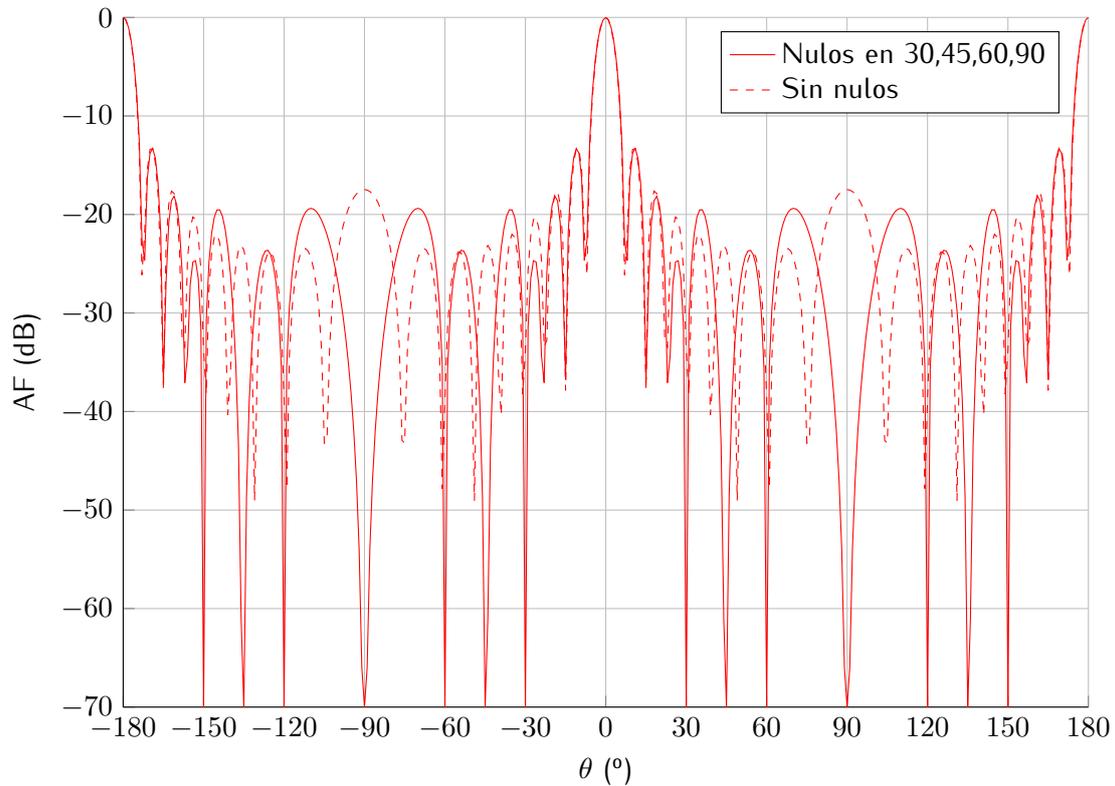


Figura 4.11: Comparativa con y sin campo nulo en un array lineal
($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=0^\circ$)

4.5.2. Caso general de diagramas de radiación asimétricos

Para radiar en cualquier punto del espacio introduciendo además restricciones de campo nulo se introduce simplemente la restricción de los nulos enunciada en (4.22) al problema de optimización cuadrática para todo θ visto en (4.20).

Para ello, primeramente hay que extender la fórmula que contiene los nulos presentada en (4.24) del mismo modo que se hacía en el par de ecuaciones (4.15a) y (4.15b), según

$$\begin{cases} \langle g_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle = [\Re(\langle g_{nulls_i}^\dagger \rangle) - \Im(\langle g_{nulls_i}^\dagger \rangle)] & (4.29a) \\ \langle g_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle = [\Im(\langle g_{nulls_i}^\dagger \rangle) \Re(\langle g_{nulls_i}^\dagger \rangle)] & (4.29b) \end{cases}$$

Seguidamente, este par de ecuaciones se iguala a cero y se añade a la fórmula del caso general de programación cuadrática para cualquier apuntamiento vista en (4.20). Esto queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \langle x^\dagger \rangle \begin{bmatrix} [B_R] \\ [B_I] \end{bmatrix} \{x\} \\ & \text{subject to} && \langle g_{0_R}^\dagger \rangle \{x\} = k' \\ & && \langle g_{0_I}^\dagger \rangle \{x\} = k'' \\ & && \langle g_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \{x\} = 0 \\ & && \langle g_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \{x\} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Los valores que se introducen en *quadprog* son

$$H = 2 \begin{pmatrix} [B_R] \\ [B_I] \end{pmatrix}, \quad A_{eq} = \begin{pmatrix} \langle g_{0_R}^\dagger \rangle \\ \langle g_{0_I}^\dagger \rangle \\ \langle g_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \\ \langle g_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad b_{eq} = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} k' \\ k'' \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \text{length}(nulls) \times 2$$

El siguiente ejemplo muestra un caso de restricción de nulos para un apuntamiento en θ distinto de cero.

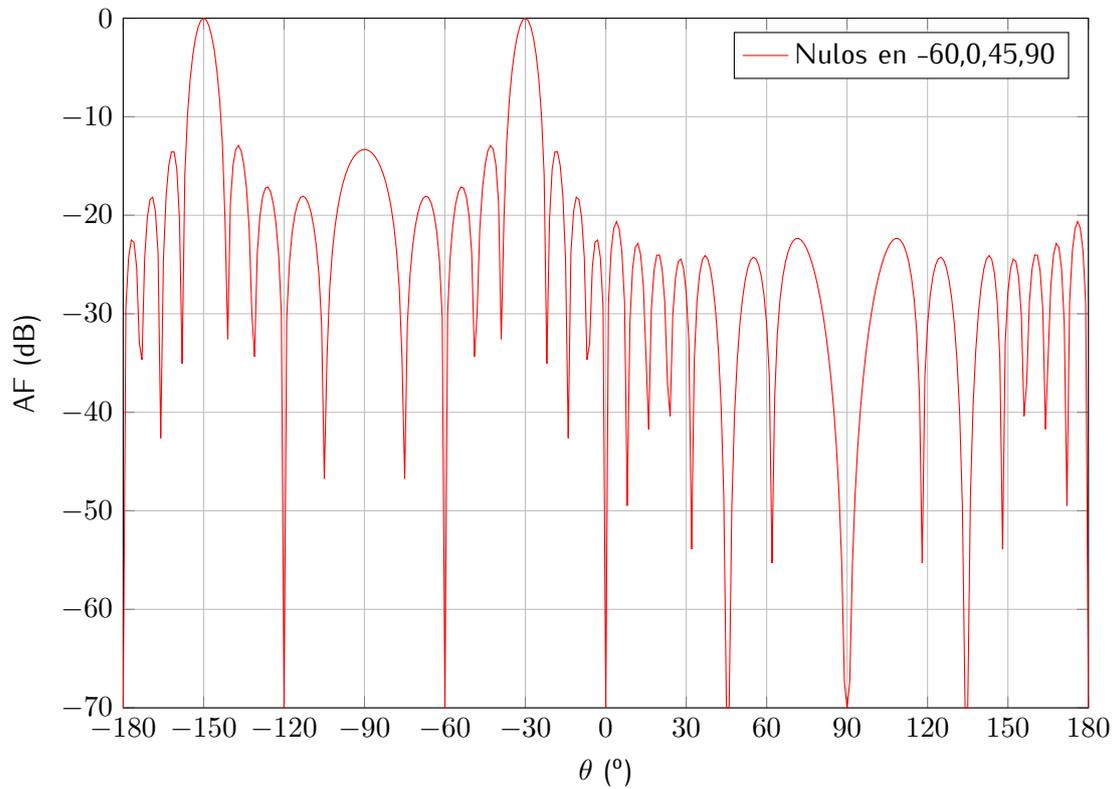


Figura 4.12: Array lineal con restricciones de nulos asimétricas
($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=-30^\circ$)

4.6. Restricción de los lóbulos secundarios

De forma similar a la introducción de nulos, las restricciones en los lóbulos secundarios limitan el valor de la intensidad de radiación a un máximo establecido respecto al nivel del campo en la zona de máximo apuntamiento para una región del espacio determinada. La expresión será

$$|E(\theta_j, \phi_j)| \leq 10^{\frac{-SLL_j}{20}} |E(\theta_0, \phi_0)| \quad (4.31)$$

donde θ_j y ϕ_j son los ángulos del espacio donde se radiará con un nivel máximo de $-SLL_j$ dB ($10^{\frac{-SLL_j}{20}}$ en unidades naturales). Recordar que la región de máximo apuntamiento se encuentra normalizada a 0 dB en el origen (uno en unidades naturales).

Las limitaciones en los lóbulos secundarios son también de gran importancia para no interferir con otros sistemas radiantes o para cumplir ciertos requerimientos o normas en los que se especifique el nivel de potencia radiada según qué zona del espacio apunte una antena.

En esta sección se introducen restricciones en la magnitud de los SLL para ciertos rangos en los ángulos θ y ϕ , lo cual afectará, de igual modo que la introducción de nulos en el apartado anterior, al diagrama de máxima directividad para ambos casos.

4.6.1. Caso particular de diagramas de radiación simétricos

Para este caso, a la fórmula del caso real vista en (4.3) hay que añadir la restricción de desigualdad limitando los lóbulos secundarios para cada rango de θ y ϕ vista en (4.31)

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{minimize}} && \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} \\ & \text{subject to} && \|\langle g_j^\dagger \rangle \{w\}\| \leq 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \|\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}\| \\ & && \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k' \end{aligned} \quad (4.32)$$

Desarrollando la norma y despejando, se obtienen dos restricciones lineales de desigualdad

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{minimize}} && \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} \\ & \text{subject to} && \left(\langle g_j^\dagger \rangle - 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \langle g_0^\dagger \rangle \right) \{w\} \leq 0 \\ & && \left(-\langle g_j^\dagger \rangle - 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \langle g_0^\dagger \rangle \right) \{w\} \leq 0 \\ & && \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k' \end{aligned} \quad (4.33)$$

Análogamente a lo que se hizo con la función de potencia en la sección 4.4.1 de maximización de la directividad y con la introducción de nulos en la sección 4.5.1, se puede hallar también la restricción del SLL según su geometría, con expresiones similares a (4.8),(4.25) y (4.10),(4.25). Para un array lineal de elementos equiespaciados, la fórmula que limita los lóbulos secundarios es

$$\{g_j\} = 2 \sum_{p=1}^{N/2} \cos[\pi u_j (p - \frac{1}{2})] \quad (4.34)$$

con

$$u_j = 2d \sin(\theta_j) / \lambda \quad (4.35)$$

Para un array plano de elementos equiespaciados, la expresión es

$$\{g_j\} = 4 \sum_{p=1}^{N/2} \sum_{q=1}^{M/2} \cos[\pi u_j (p - \frac{1}{2})] \cos[\pi v_j (q - \frac{1}{2})] \quad (4.36)$$

con

$$\begin{aligned} u_i &= 2d_x \sin(\theta_j) \cos(\phi_j) / \lambda \\ v_i &= 2d_y \sin(\theta_j) \sin(\phi_j) / \lambda \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ahora se tienen que añadir los dos nuevos campos \mathbf{A} y \mathbf{b} en la formulación usada por *quadprog* (no confundir con los usados para el desarrollo de la teoría de optimización)

$$\mathbf{w} = \text{quadprog}(\mathbf{H}, [], \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq})$$

siendo sus valores los siguientes

$$\mathbf{H} = 2[B], \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle g_j^\dagger \rangle - 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \langle g_0^\dagger \rangle \\ -\langle g_j^\dagger \rangle - 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \langle g_0^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{length}(\theta_j) \times 2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{eq} = \langle g_0^\dagger \rangle, \quad \mathbf{b}_{eq} = k'$$

Los siguientes ejemplos muestran una comparativa con y sin restricción de lóbulos secundarios y varias restricciones distintas para rangos en θ .

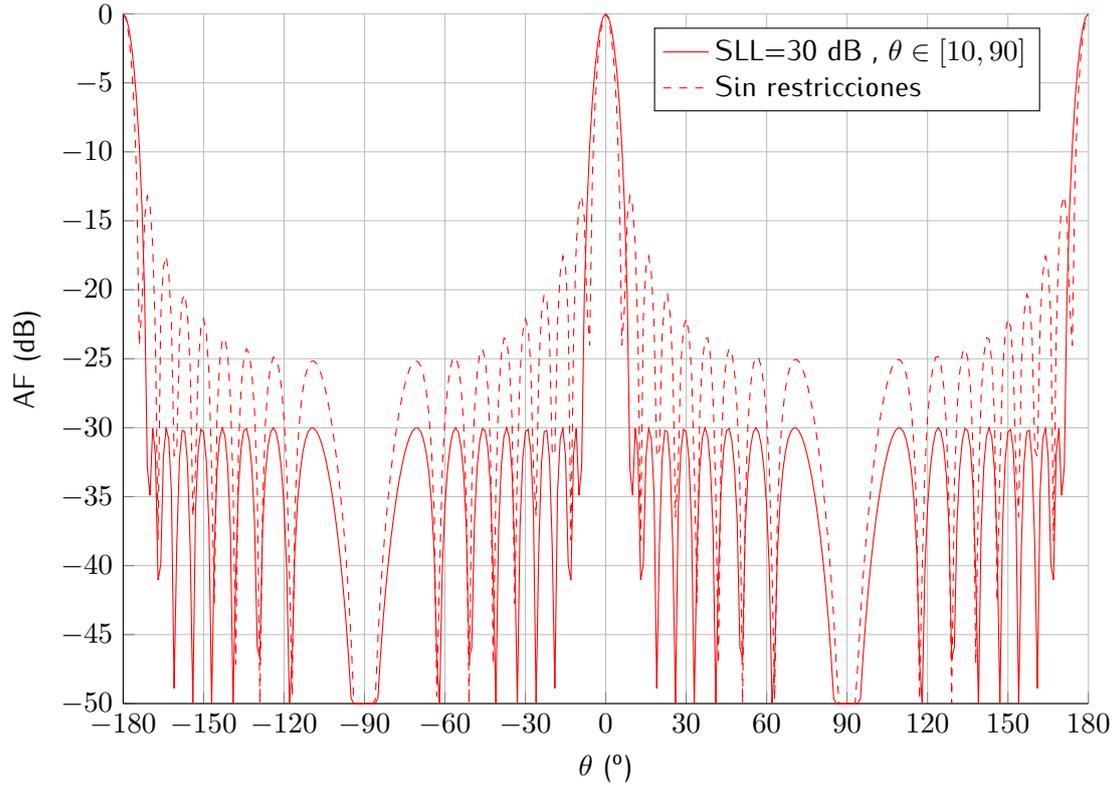


Figura 4.13: Comparativa con y sin restricción en los lóbulos secundarios en un array lineal ($N=18, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)

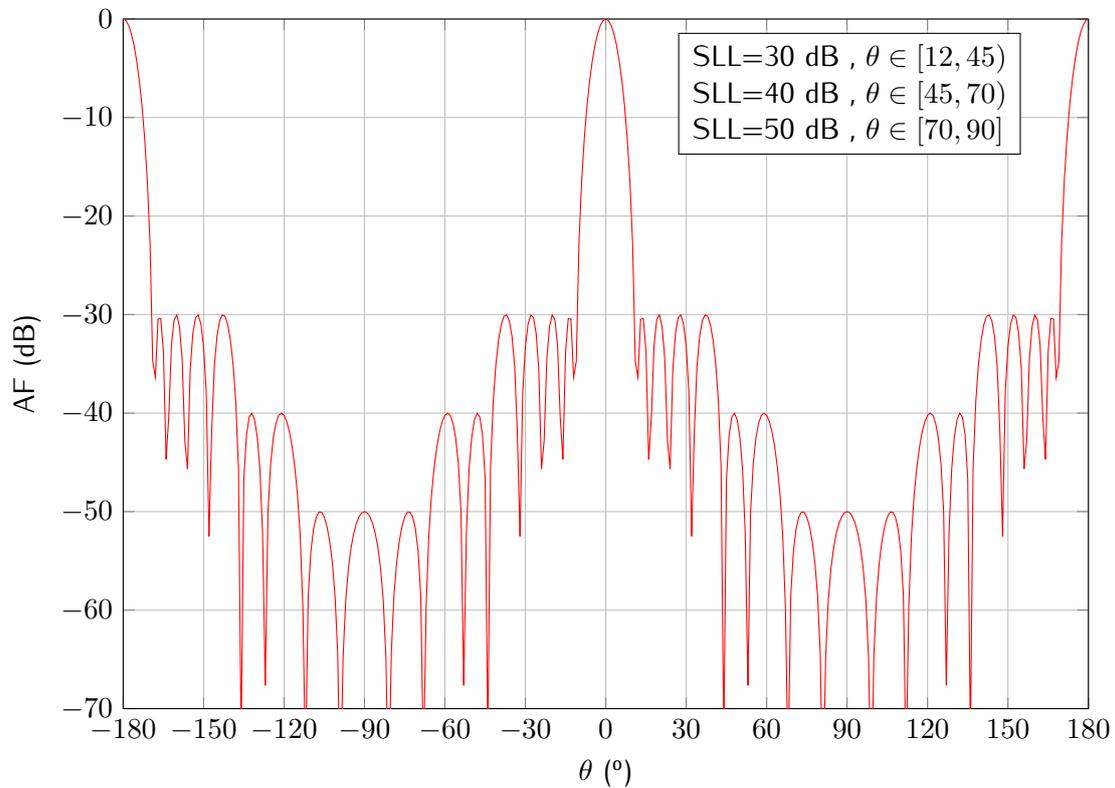


Figura 4.14: Múltiples restricciones en los lóbulos secundarios en un array lineal ($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=0^\circ$)

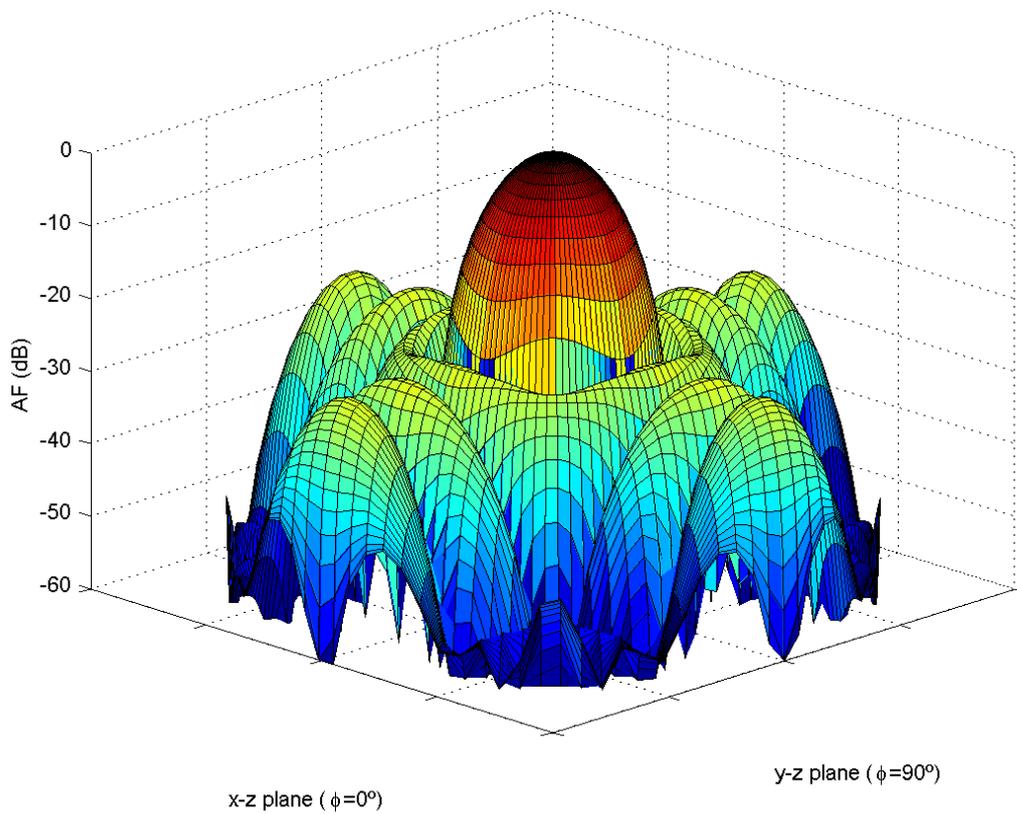


Figura 4.15: Restricción de SLL=25 dB en un array cuadrado para $\theta \in [20, 90]$
 $\forall \phi \in [0, 360]$ ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

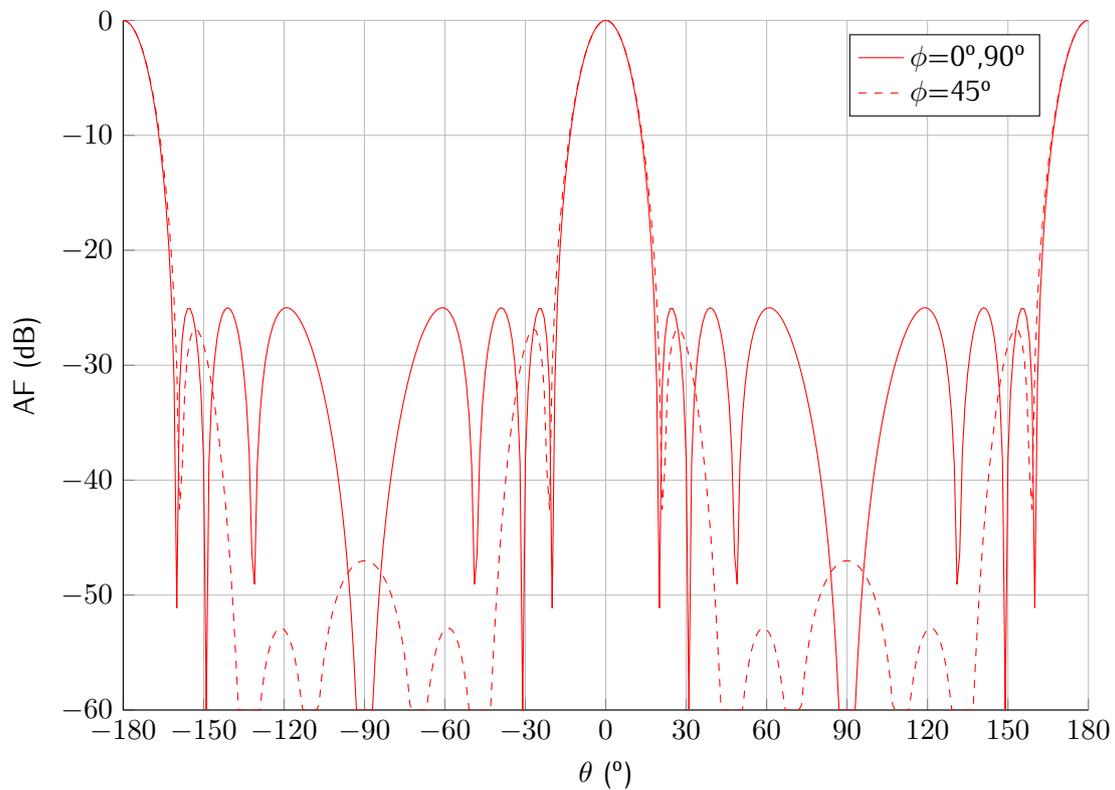


Figura 4.16: Representación del diagrama anterior para los planos $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

4.6.2. Caso general de diagramas de radiación asimétricos

La limitación de los lóbulos secundarios para cualquier apuntamiento en θ no se puede resolver mediante programación cuadrática, pues se plantea un problema de optimización sujeto a **restricciones no lineales** debido a la componente compleja que adquiere. De este modo, se debe hacer uso de modelos que permitan operar con **restricciones cuadráticas**, como la *Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)*, la cual se estudia en la sección 5.6 del capítulo siguiente como un problema general que engloba tanto el caso simétrico como el asimétrico.

4.7. Restricciones simultáneas de campo nulo y lóbulos secundarios

Por último, se procede a juntar las restricciones de campo nulo y de lóbulos secundarios en el mismo problema de optimización de maximización de la directividad, aunando todas las restricciones que se han estudiado a lo largo del capítulo. Al igual que en las secciones previas, después de plantear el problema de optimización completo e introducir los datos en *quadprog*, se dibujará algún ejemplo de sus diagramas de radiación.

Al no poderse limitar los lóbulos secundarios en el caso asimétrico, la suma de ambas restricciones solamente será posible para diagramas de radiación simétricos, como se muestra a continuación.

4.7.1. Caso particular de diagramas de radiación simétricos

Para este caso, como ya se ha visto, hay que añadir al planteamiento general del problema (4.3) las restricciones de campo nulo (4.22) y las de los lóbulos secundarios (4.31), llegando a la expresión global

$$\begin{aligned}
 & \underset{w}{\text{minimize}} && \langle w^\dagger \rangle [B] \{w\} \\
 & \text{subject to} && \|\langle g_j^\dagger \rangle \{w\}\| \leq 10^{\frac{-SLL_j}{20}} \|\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}\| \\
 & && \langle g_0^\dagger \rangle \{w\} = k' \\
 & && \langle g_{nulls_i}^\dagger \rangle \{w\} = 0
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Los campos activos de *quadprog* son los siguientes

$$w = \text{quadprog}(H, [], A, b, A_{eq}, b_{eq})$$

y sus valores son

$$\mathbf{H} = 2[\mathbf{B}]$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_j^\dagger \rangle - 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \langle \mathbf{g}_0^\dagger \rangle \\ -\langle \mathbf{g}_j^\dagger \rangle - 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \langle \mathbf{g}_0^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \\ \text{length}(\theta_j) \times 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_{0_R}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{0_I}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{eq} = \begin{pmatrix} k' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \langle \mathbf{g}_{0_R}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{0_I}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \\ \langle \mathbf{g}_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \end{pmatrix}} \right\} \text{length}(nulls) \times 2$$

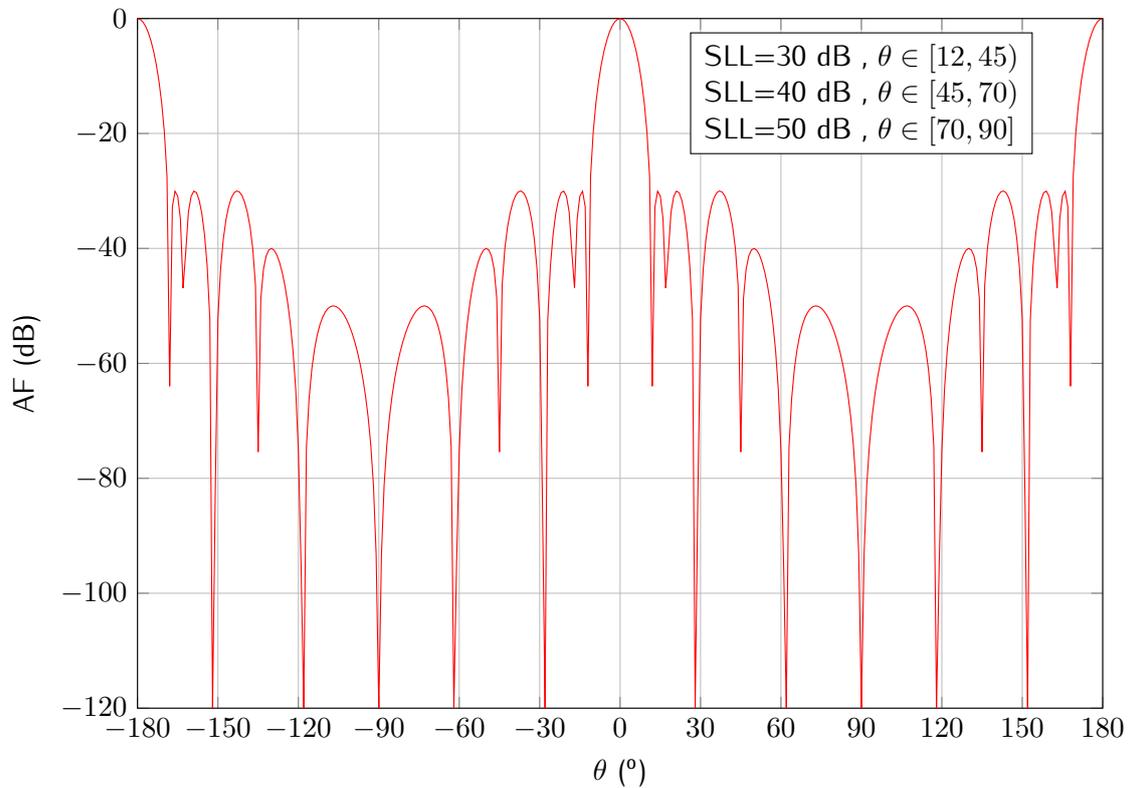


Figura 4.17: Restricciones de nulos en $\theta = 28^\circ, 62^\circ, 90^\circ$ y restricciones de SLL en un array lineal ($N=18, d_x=0.425\lambda, \theta_0=0^\circ$)

4.7.2. Caso general de diagramas de radiación asimétricos

Como ya se ha mencionado anteriormente, hay que hacer uso de técnicas más sofisticadas para obtener diagramas de radiación con las restricciones propuestas para cualquier apuntamiento en θ y ϕ . En el capítulo siguiente se estudiará una de las más importantes, *SOCP*.

4.8. Análisis de los resultados

Con *programación cuadrática* se obtienen resultados muy similares a los obtenidos con el cociente de formas hermíticas cuando se trata de hallar la máxima directividad de un array de antenas. Los diagramas de radiación varían de una optimización a otra en ligeros cambios en magnitudes, anchos y fases de los lóbulos radiantes que apenas modifican el valor absoluto de la directividad máxima. Los ejemplos de diagramas se pueden ver en los ejemplos de la sección 4.4. A continuación, en la tabla 4.1, se muestra la diferencia entre la directividad máxima cuadrática y hermítica según la fórmula (4.39) obtenida gracias a los desarrollos de los capítulos 3 y 4, para varios arrays de cada tipo. Cabe destacar que $d = d_x = d_y = d_r$.

$$Dif_{herm-QP} = |D_{max}(\text{cuadrática}) - D_{max}(\text{hermítica})| \quad (dB) \quad (4.39)$$

<i>Dif</i>	d=0.1λ	d=0.3λ	d=0.5λ	d=0.7λ	d=0.9λ
Array lineal					
N=25	1.1463	0.51448	0.026255	0.037598	0.045222
N=64	0.24524	0.53606	0.074187	0.10939	0.14476
N=100	1.1675	0.78083	0.12537	0.19042	6.3057
Array circular					
N=25	0.00014518	0.00080325	0.0023129	0.0036211	0.0023743
N=64	0.0008243	0.0048686	0.010938	0.020041	0.0243
N=100	0.0015111	0.011035	0.032464	0.049163	0.08817
Array cuadrado					
N=5	0.0066516	0.0012565	0.0011262	0.012624	0.17081
N=8	1.0074	0.011752	0.019769	0.025018	0.60874
N=10	16.1262	0.017767	0.020657	0.0031472	0.41555
Array rectangular					
N=6,M=4	0.0036647	0.0028991	0.0048715	0.0131	0.064913
N=9,M=7	7.3853	0.02666	0.0057165	0.0047749	0.20776
N=11,M=9	23.5931	0.11943	0.015304	0.075906	0.092854

Tabla 4.1: Diferencia en dB entre la optimización cuadrática y la hermítica

Se puede apreciar cómo las diferencias más grandes (algunas de ellas inaceptables, como las marcadas en rojo) aparecen en los casos extremos, tanto cuando el array se encuentra en superdirectividad (distancias entre elementos muy bajas como $d=0.1\lambda$, ver nota 2 del capítulo 3), como cuando la distancia entre elementos se aproxima a λ , lo cual, como se vio en la sección 2.7.5 del estado del arte, produce la aparición de lóbulos radiantes máximos no deseados llamados *grating lobes*. Estos casos provocan que el algoritmo de programación cuadrática no encuentre a veces la solución óptima alcanzando el número máximo de iteraciones posibles. En torno a $\lambda/2$ las diferencias son tan bajas que ambas directividades máximas se pueden considerar iguales.

A lo largo del capítulo se ha distinguido entre dos grandes casos para plantear el desarrollo de la optimización cuadrática. El primero, cuando el array apunta principalmente a $\theta_0 = 0$ (aunque no es el único caso, ver 2.7.5), en el cual la expresión del factor fase, definida en (3.4), es siempre

igual a uno y las excitaciones que minimizan la directividad máxima con o sin restricciones adicionales son reales. El planteamiento y los cálculos son entonces más sencillos, teniendo, en un array de N elementos, N variables (pesos) a resolver. Este caso arroja diagramas de radiación simétricos en torno a $\theta = 0$. Paralelamente, cuando el array apunta a cualquier otro punto del espacio, el factor de fase adquiere parte compleja, así como los pesos hallados mediante la optimización cuadrática. Los desarrollos son más largos debido a que las herramientas utilizadas sólo admiten parámetros reales, teniendo el problema de optimización ahora que resolver $2N$ variables (que son la parte real e imaginaria de cada peso), desdoblándose además en dos la función a minimizar y cada una de las restricciones del problema y conteniendo el doble de valores. Este caso general, que abarca también el caso particular de $\theta_0 = 0$, produce diagramas de radiación simétricos en $\theta = 0$ y asimétricos para cualquier otro θ .

También se ha visto en el apartado 4.6.2 que con las técnicas de programación cuadrática es imposible limitar el nivel de lóbulos secundarios para cualquier apuntamiento en θ . Esto es porque, al adquirir su restricción de desigualdad valores complejos, ésta dejaría de ser lineal y el problema dejaría a su vez de ser un problema de optimización cuadrático, según las bases establecidas en la sección de fundamentos 4.2. Para resolver este nuevo planteamiento se deben recurrir a técnicas más sofisticadas como la *Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)*.

La introducción de nulos en el problema de maximización de la directividad provoca ligeros cambios en la forma del diagrama de radiación de un array, causada por la necesidad de evitar cualquier nivel de radiación sobre un punto preciso del espacio. Alrededor del nulo, se puede ver que los lóbulos secundarios ganan altura con respecto a los generados sin dicho nulo. Este comportamiento se puede comprobar en el ejemplo 4.11 de la página 73.

Echando un vistazo a los diagramas de maximización de la directividad para un array de antenas sin ninguna restricción adicional, se puede comprobar cómo varía la magnitud de sus lóbulos secundarios a lo largo del espacio en θ (ver ejemplos de la sección 4.4). Sin embargo, al imponerles la restricción de un cierto nivel por debajo del lóbulo principal, éstos permanecen constantes en altura durante todo el rango para el cual dicha restricción es válida (ver ejemplos de la sección 4.6). Esto es señal de que se ha alcanzado la solución óptima y esto es una característica típica de los *arrays de Dolph-Chebyshev*.

El array de Dolph-Chebyshev es óptimo si para un cierto nivel de lóbulos secundarios éstos tienen la misma magnitud (o altura en su diagrama de radiación). Con lo cual, esto significa que restringir cierto rango de θ para un SLL dado implica una elevación de aquéllos que se encuentren por debajo de esta limitación. Otra propiedad de este tipo de arrays es que para un cierto nivel de lóbulos secundarios el ancho del lóbulo principal en su diagrama de radiación es mínimo o, lo que es lo mismo, para un ancho dado del lóbulo principal sus lóbulos secundarios serán mínimos y además tendrán la misma altura. Esto último se ve como un caso especial en las secciones 5.8 y 6.4.

En la tabla 4.2 se muestra la diferencia entre las excitaciones resultantes de la optimización cuadrática con restricción del nivel de lóbulos secundarios del ejemplo 4.13 de la página 77 con las calculadas para un array tipo de Dolph-Chebyshev de las mismas características y restricción, según la siguiente fórmula

$$Dif_{QP-DC} = |\{w\}_{QP} - \{w\}_{DC}| \quad (4.40)$$

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.2292	0.1934	0.1275	0.1428	0.0940	0.1724
w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
0.1824	0.0162	0	0	0.0162	0.1824
w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
0.1724	0.0940	0.1428	0.1275	0.1934	0.2292

Tabla 4.2: Diferencia ($\times 10^{-4}$) entre las excitaciones del ejemplo con restricción de SLL 4.13 y su equivalente Dolph-Chebyshev

Como se ve, la diferencia entre el array calculado mediante programación cuadrática con restricciones en sus lóbulos secundarios y el array tipo equivalente de Dolph-Chebyshev es prácticamente inexistente, con lo que se confirma este comportamiento y que, por tanto, la solución encontrada es óptima.

Por último, la figura 4.15 de la página 78 muestra la representación tridimensional para todo ángulo ϕ de la maximización de la directividad con la restricción homogénea del nivel de lóbulos secundarios para un array cuadrado. La figura 4.16 representa los planos en $\phi=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ que no son más que los cortes de la gráfica tridimensional en esos ángulos. Se ve cómo los planos $\phi=0^\circ$ y $\phi=90^\circ$ son iguales. Esto es porque el array es cuadrado y su geometría por tanto es la misma tanto horizontal como verticalmente, generando idénticos diagramas de radiación a lo largo de ambos ejes. Esto no sucederá con arrays rectangulares, como se verá en el siguiente capítulo. El plano $\phi=45^\circ$ representa la diagonal del array y, por tanto, su diagrama de radiación es distinto y bastante inferior en módulo que los otros dos, ya que la separación relativa entre los elementos es mayor en dicha dirección.

Capítulo 5

Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)

5.1. Introducción

En este capítulo se procede a aplicar la técnica de *Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)*, la cual permite resolver problemas convexos lineales bajo restricciones cuadráticas. De este modo, este capítulo supone una continuación del anterior, donde se llegaba a un punto, el de la introducción de un valor límite para los lóbulos secundarios según ciertos rangos de θ , el cual era irresoluble para apuntamientos a cualquier región del espacio con las técnicas del cociente hermítico y programación cuadrática previamente estudiadas.

La programación en cono de segundo orden es, de largo, la técnica de optimización más compleja que se estudia en el presente proyecto, al ser todas sus restricciones funciones cuadráticas. Precisamente gracias a ello es posible resolver problemas que anteriormente no se podían, aunque sujeto a un mayor consumo de recursos de procesamiento y tiempo de ejecución. Sin embargo, para los problemas ya vistos y solucionados supone un gasto muchas veces innecesario, pues se puede echar mano de las técnicas previamente descritas las cuales son bastante más ligeras. No obstante, es bueno partir desde la base para una mejor comprensión del método de optimización.

De este modo, primeramente se enunciará la forma de este nuevo problema de optimización según [35], el cual siempre será convexo. Seguidamente, se hablará de las herramientas que se han utilizado para resolver los problemas de *SOCP*. Después de desarrollarlo teóricamente, se podrán obtener finalmente diagramas de radiación con restricciones de campo nulo y en los lóbulos secundarios para cualquier tipo de apuntamiento y forma del array, siempre que exista una solución factible. Además, se planteará el problema inverso de, dadas las características y la topología del array, hallar el *mínimo máximo SLL* para toda la región en θ . En otras palabras, en vez de imponer manualmente un límite en los lóbulos secundarios del array, la resolución del problema buscará la minimización de éstos respetando el nivel y el ancho del lóbulo principal.

Al igual que en los capítulos anteriores, se supone que los elementos del array son isotrópicos, siendo la estructura física de los elementos que conforman el array y la banda a la que operan irrelevante. También se obvian las implicaciones de acople mutuo.

Para el cálculo de los problemas de *SOCP* y la obtención de sus correspondientes diagramas de array se ha utilizado el módulo de *Python CVXOPT*, visto a continuación en la sección 5.3. Para dibujar los diagramas se ha hecho uso del módulo *matplotlib*.

5.2. Fundamentos

Como se ha visto en el capítulo anterior, las técnicas directas de programación cuadrática cuando se quiere minimizar una función cuadrática sujeta a restricciones no lineales no son suficientes para resolver dicho problema. Para ello, se utiliza la *Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)*, la cual reduce el problema a minimizar una **función lineal sujeta a restricciones cuadráticas**. Seguidamente, gracias a métodos iterativos como el del *punto-interior primal-dual* [13], [15], [16] para optimización no lineal se llega a la solución final.

La expresión de un problema de *SOCP* es de la forma,

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \mathbf{f}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\| \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, N \\ & && \mathbf{F} \mathbf{x} = \mathbf{g} \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de las variables a optimizar, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ la función del problema y el conjunto de parámetros $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$ son los elementos que constituyen las restricciones de desigualdad e igualdad. La norma de la restricción de desigualdad es la norma Euclídea, vista en A.7. Dicha restricción

$$\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\| \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i \quad (5.2)$$

se llama *restricción de cono de segundo orden de dimensión n_i* , debido a lo siguiente. El cono de segundo orden (convexo) estándar o unidad de dimensión k (también llamado cono cuadrático, de helado o de Lorentz) está definido según

$$C_k = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^{k-1}, t \in \mathbb{R}, \|u\| \leq t \right\} \quad (5.3)$$

Para $k = 1$ se define el cono de segundo orden unidad como

$$C_1 = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\} \quad (5.4)$$

El conjunto de puntos que satisfacen una restricción de cono de segundo orden es la imagen inversa del cono de segundo orden unidad bajo un mapeo afín

$$\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\| \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i \iff \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{c}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_{n_i} \quad (5.5)$$

y de este modo es convexa. Así, el *SOCP* [13] es un problema de programación convexo ya que el objetivo es una función convexa y las restricciones definen un conjunto convexo.

Las restricciones de cono de segundo orden pueden ser utilizadas para representar muchas restricciones convexas comunes. Por ejemplo, cuando $n_i = 1$ para $i = 1, \dots, N$, el *SOCP* se reduce a un problema de *programación lineal*

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \mathbf{f}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && 0 \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.6)$$

el cual se estudiará en el capítulo siguiente.

Otro caso especial es cuando $\mathbf{c}_i = 0$, con lo que la i -ésima restricción de cono de segundo orden se reduce a $\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\| \leq d_i$, lo cual es equivalente (asumiendo $d_i \geq 0$) a la restricción cuadrática (y convexa) $\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|^2 \leq d_i^2$. De este modo, cuando todas las \mathbf{c}_i desaparecen, el *SOCP* se simplifica a un problema de programación lineal con restricciones cuadráticas.

5.3. Herramientas

Para llevar a cabo la optimización en cono de segundo orden se ha utilizado el módulo de *Python CVXOPT*. Dicho módulo hace uso, al igual que en programación cuadrática, del método del *punto interior*, para resolver el problema de optimización. Se ha pintado la sintaxis de *Python* de azul respetando el negro para las expresiones teóricas que se estudian durante todo el capítulo.

Partiendo de la expresión general de *SOCP* (5.1), la sintaxis de la función *SOCP* del módulo *CVXOPT* es la siguiente

$$\mathbf{x} = \text{cvxopt.solvers.socp}(\mathbf{c} \equiv \mathbf{f}, \mathbf{G}_q, \mathbf{h}_q, \mathbf{A}, \mathbf{b})$$

donde \mathbf{c} es, en *Python*, una matriz densa¹ real de una sola columna de la función \mathbf{f} que minimiza la variable \mathbf{x} ; \mathbf{G}_q es una lista de N matrices densas o dispersas² $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ y \mathbf{h}_q es otra lista de N matrices densas de una sola columna $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_N$, las cuales constituyen la restricción de desigualdad $\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\| \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + \mathbf{d}_i$, $i = 1, \dots, N$; y donde \mathbf{A} es una matriz densa o dispersa de \mathbf{F} y \mathbf{b} es una matriz densa de una sola columna de \mathbf{g} , las cuales constituyen la restricción de igualdad $\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{g}$.

Se ha utilizado un malla para los ángulos del espacio θ y ϕ de 1.000 muestras y para la restricción del nivel de lóbulos secundarios se ha usado un paso de θ_j y ϕ_j de $0,1^\circ$.

5.4. Maximización de la directividad

Análogamente a lo visto en el capítulo 4, se van a desarrollar los mismos conceptos expuestos en la programación cuadrática para luego aplicarlos a *SOCP*. Con ello se pretende maximizar la directividad de un array cualquiera y comparar sus diagramas con los obtenidos en el capítulo anterior. Cabe destacar que para los siguientes desarrollos no se va a diferenciar más entre los casos de diagramas de radiación simétricos y asimétricos, sino que se estudiará este último caso, el cual engloba al anterior también. Por lo tanto, se asumen valores complejos en el factor de fase (3.4) y en las excitaciones del array 2.7.4.

Como se vio en la fórmula general de la directividad (4.2) del capítulo anterior, el objetivo es minimizar el valor de la potencia radiada manteniendo constante la intensidad de radiación, según (4.3). Realizando de nuevo todo el desarrollo para el caso general de la sección 4.4.2, se llega a la fórmula (4.20), de la cual se partirá en esta sección. Descomponiendo la matriz $[B]$ como el producto de sus submatrices $[G]$ y aplicando la norma vista en A.7, queda

$$\begin{aligned} \underset{w}{\text{minimize}} \quad & \langle w^\dagger [B] w \rangle = \langle w^\dagger [G^\dagger] [G] w \rangle = \|[G] w\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \Re(\langle g_0^\dagger w \rangle) = k' \\ & \Im(\langle g_0^\dagger w \rangle) = k'' \end{aligned} \tag{5.7}$$

¹Una *matriz densa* es una matriz en la cual la mayoría de sus elementos son distintos de cero.

²Una *matriz dispersa* es una matriz en la cual la mayoría de sus elementos son cero.

siendo equivalente minimizar el cuadrado de la norma a simplemente minimizar la norma

$$\begin{aligned} & \underset{w}{\text{minimize}} && \|[G]\{w}\| \\ & \text{subject to} && \Re(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = k' \\ & && \Im(\langle g_0^\dagger \rangle \{w\}) = k'' \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tanto las submatrices $[G]$ como las excitaciones $\{w\}$ están compuestas por números complejos, por lo que se debe realizar el mismo cambio de variable que se hizo para el caso general de cualquier apuntamiento en θ en programación cuadrática, enunciado en la fórmula (4.19), para así trabajar solamente con números reales.

Además, igual que también se hiciera en el capítulo anterior, hay que redefinir las matrices que entran en juego en el problema de optimización separando sus partes real e imaginaria. De este modo, para el vector $\{g_0\}$ se vuelve a utilizar el par de ecuaciones (4.15a) y (4.15b), y se define un par nuevo para la matriz $[G]$, el cual es análogo al que se enunciaba para la matriz $[B]$ en (4.18a) y (4.18b). Éste quedaría según

$$\left\{ \begin{aligned} [G_R] &= [\Re([G]) \quad -\Im([G])] \\ [G_I] &= [\Im([G]) \quad \Re([G])] \end{aligned} \right. \tag{5.9a}$$

$$\tag{5.9b}$$

El nuevo problema de optimización debe ahora hallar $2N$ variables y está constituido sólo por parámetros con valores reales, teniendo la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \left\| \begin{bmatrix} [G_R] \\ [G_I] \end{bmatrix} \{x\} \right\| \\ & \text{subject to} && \langle g_{0_R}^\dagger \rangle \{x\} = k' \\ & && \langle g_{0_I}^\dagger \rangle \{x\} = k'' \end{aligned} \tag{5.10}$$

El paso que sigue es realizar una transformación en dicha función previamente simplificada, según

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \delta \\ & \text{subject to} && \left\| \begin{bmatrix} [G_R] \\ [G_I] \end{bmatrix} \{x\} \right\| \leq \delta \\ & && \langle g_{0_R}^\dagger \rangle \{x\} = k' \\ & && \langle g_{0_I}^\dagger \rangle \{x\} = k'' \end{aligned} \tag{5.11}$$

Este planteamiento es equivalente. En vez de directamente buscar minimizar la norma del producto de la matriz $[G]$ por las excitaciones, se pretende minimizar una variable δ , la cual será el valor máximo que pueda tomar dicha norma. Esto se hace porque, como se vio en 5.2, la función a minimizar en *SOCP* debe ser lineal. De este modo, se consigue linealizar dicha función a costa de crear una nueva restricción de orden cuadrático.

Finalmente, para adecuarse a las dimensiones del problema tipo de *SOCP* planteado en (5.1), hay que realizar otro cambio de variable

$$\delta = \langle f^T \rangle \{y\} \tag{5.12}$$

con

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1} \quad (5.13)$$

e

$$\{y\} = \begin{bmatrix} \{x\} \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1} \quad (5.14)$$

Como se puede ver, se ha pasado de optimizar la variable $\{x\}$, que contiene las partes real e imaginarias de las excitaciones $\{w\}$, a optimizar la variable $\{y\}$, que contiene además la variable δ , teniendo pues un tamaño de $2N + 1$ elementos. Dado que $\{f\}$ es un vector de $2N$ ceros y un uno, el producto con el vector $\{y\}$ encaja perfectamente dando como resultado δ , con lo que el planteamiento de optimización no ha cambiado. Sin embargo, hay que volver a redimensionar todas las matrices como se hizo en el anterior cambio de variable, para que los productos entre matrices sean correctos. Para ello, simplemente basta con añadir una columna de ceros extra a cada matriz y un cero adicional a cada vector planteado, quedando sus versiones extendidas como

$$\begin{cases} [\tilde{G}_R] = [G_R \{0\}] \\ [\tilde{G}_I] = [G_I \{0\}] \end{cases} \quad (5.15a)$$

$$\quad (5.15b)$$

$$\begin{cases} \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle = [\langle g_{0R}^\dagger \rangle \ 0] \\ \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle = [\langle g_{0I}^\dagger \rangle \ 0] \end{cases} \quad (5.16a)$$

$$\quad (5.16b)$$

De este modo, el problema de optimización de la máxima directividad en un array de cualquier geometría en *SOCP* tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \underset{y}{\text{minimize}} && \langle f^T \rangle \{y\} \\ & \text{subject to} && \left\| \begin{bmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & && \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\ & && \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \{y\} = k'' \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para hallar la solución convexa a este problema, se deben introducir los datos en el paquete de *Python CVXOPT* convenientemente adaptados. A continuación se recuerdan los parámetros requeridos por la función de *SOCP*

$$y = \text{cvxopt.solvers.socp}(c, G_q, h_q, A, b)$$

cuyos valores son

$$\mathbf{c} = \{f\}$$

$$\mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} -\left(\langle \mathbf{f}^T \rangle\right) \\ [B_q] \end{bmatrix}, \quad [B_q] = \begin{pmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}_q = \left[\begin{matrix} \left(\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{matrix} \right) \\ \text{length}(\theta) \times 2 + 1 \end{matrix} \right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}$$

Esto dará como solución el vector columna $\{y\}$, el cual no es exactamente la solución deseada, debido al cambio de variable realizado en (5.12). De este modo, se recuerda que para finalizar, los pesos se deben extraer de las fórmulas (4.19) y (5.14) llevando a cabo el proceso inverso

$$\{x\} = \{y_{0...2N-1}\} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (5.18)$$

quedando los pesos otra vez despejados según la fórmula (4.21), vista en el capítulo anterior.

Nótese que después de haber operado con números reales durante todo el proceso, las excitaciones adquieren finalmente valores complejos. Además, se ha pasado de un vector de $2N + 1$ elementos a uno de N .

A continuación se muestran algunas comparativas de la técnica *SOCP* con los demás algoritmos previamente estudiados para cada topología de array. Se recuerda que para los factores de array excitados cofasalmente (sin optimizar) se ha utilizado la notación *SO*, para los optimizados mediante formas hermíticas *HF* y para los optimizados con programación cuadrática *QP*.

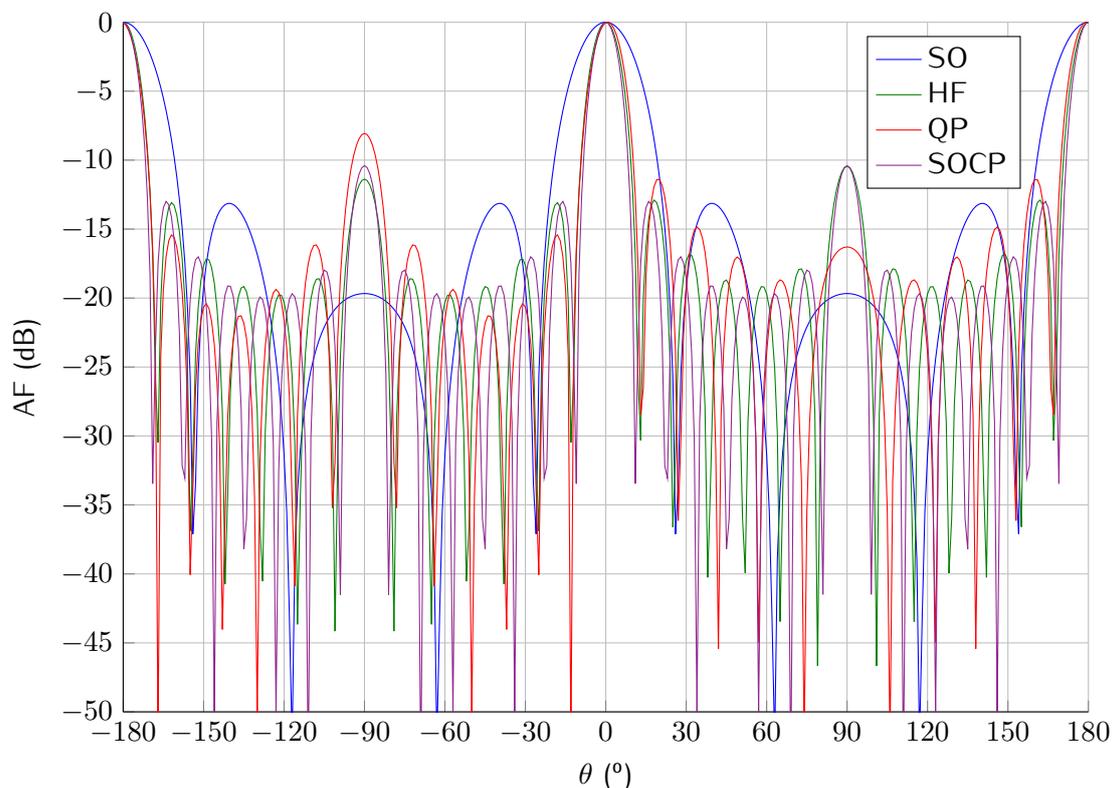


Figura 5.1: Factor de array con y sin optimizar para un array lineal
 $(N=15, d_x=0.15\lambda, \theta_0=0^\circ)$

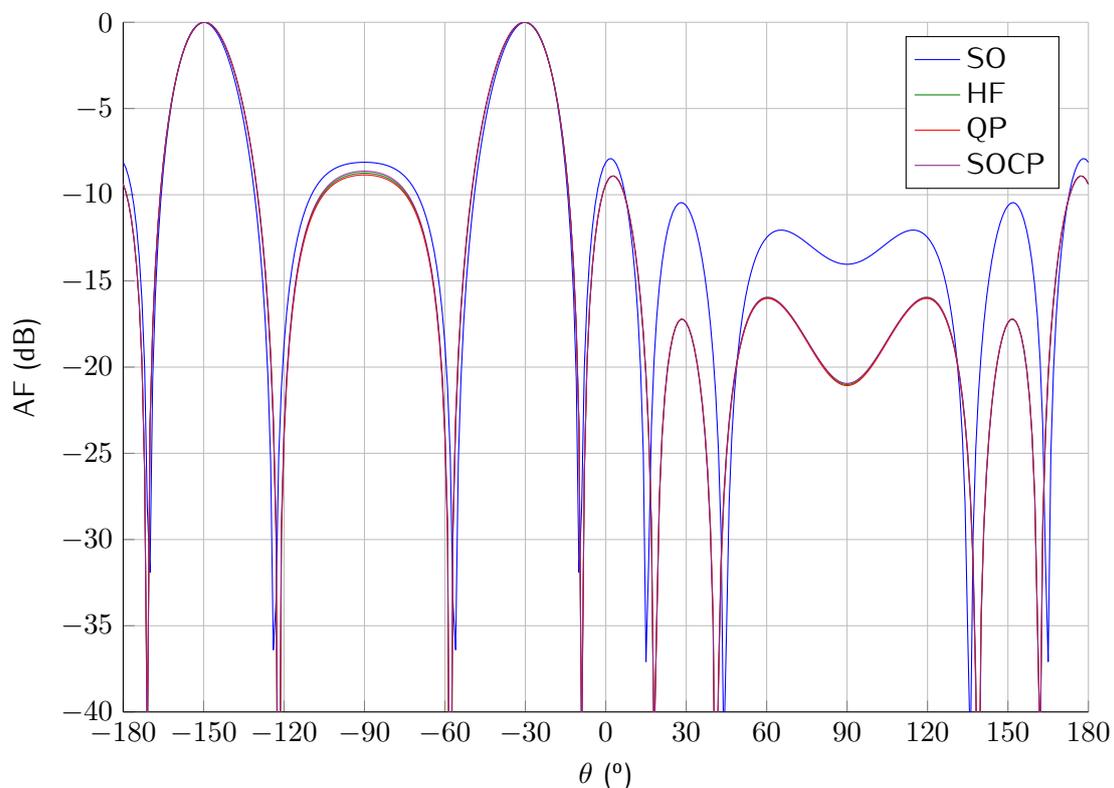


Figura 5.2: Factor de array con y sin optimizar para un array circular
 $(N=24, r=1.1492\lambda, d_r=0.3\lambda, \theta_0=-30^\circ, \phi_0=0^\circ)$

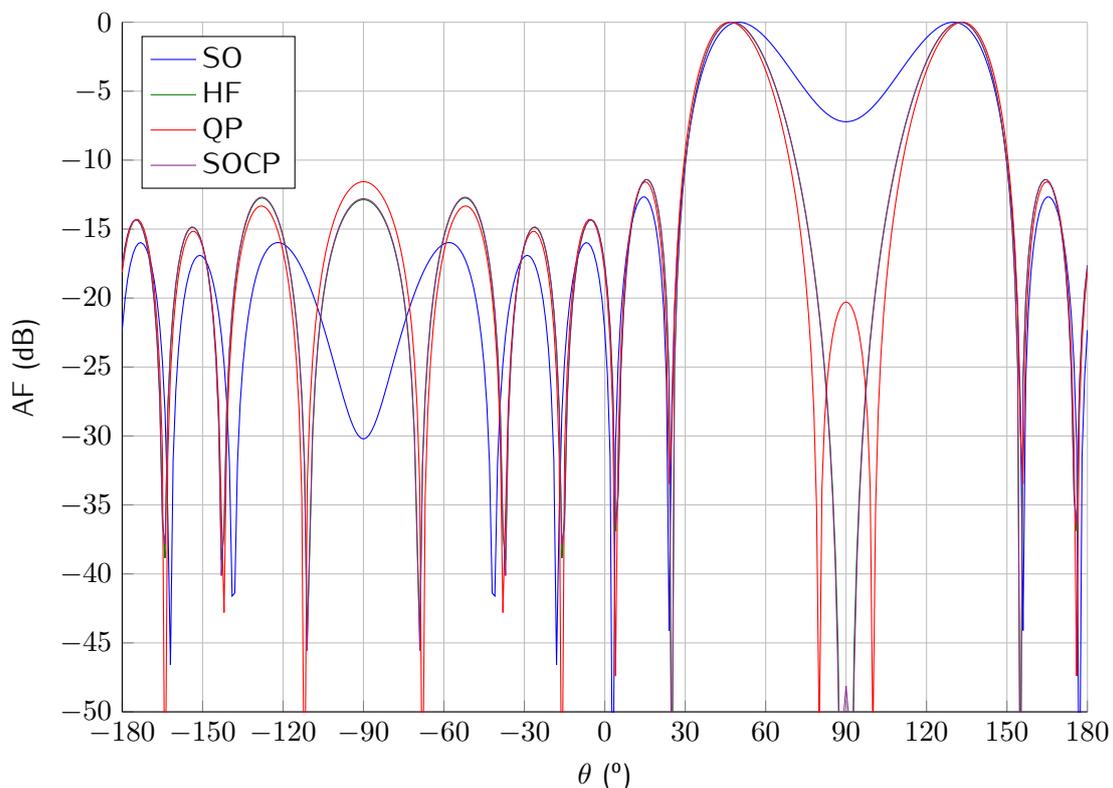


Figura 5.3: Factor de array con y sin optimizar para un array cuadrado
 $(N=7, d_x=0.4\lambda, d_y=0.2\lambda, \theta_0=50^\circ, \phi_0=0^\circ)$

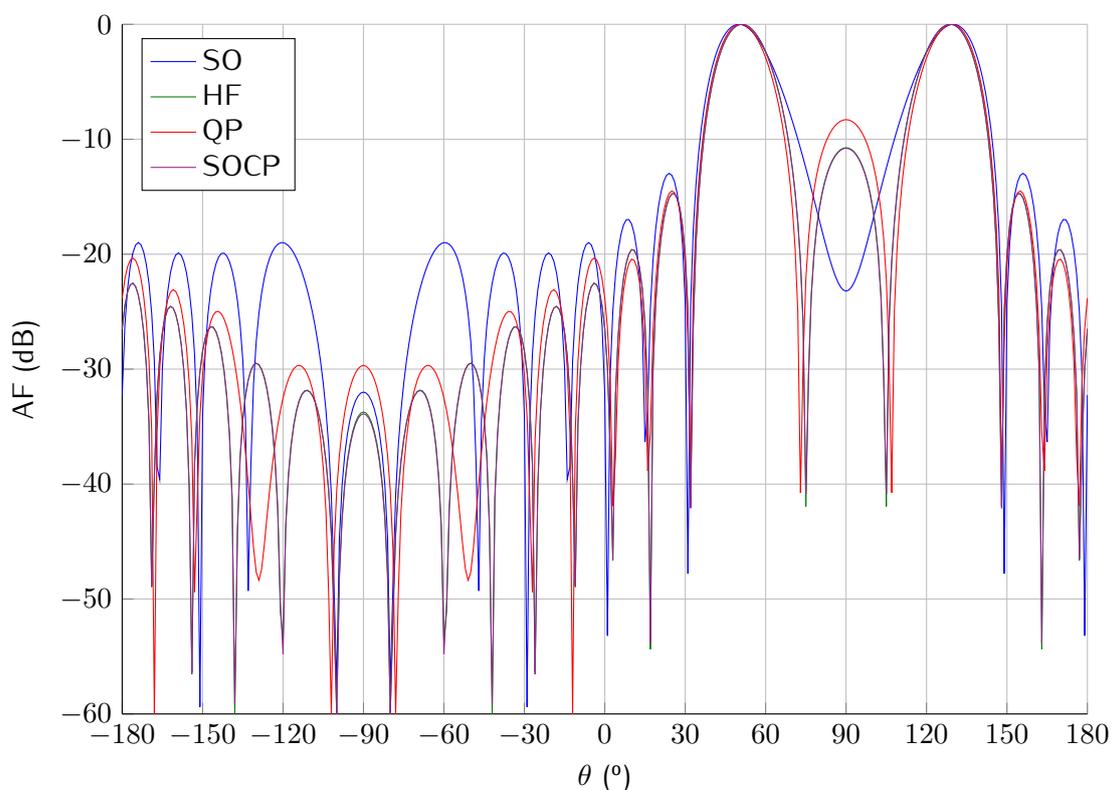


Figura 5.4: Factor de array con y sin optimizar para un array rectangular
 $(N=10, M=50, d_x=0.4\lambda, d_y=0.2\lambda, \theta_0=50^\circ, \phi_0=0^\circ)$

5.5. Restricción de campo nulo

Como ya se dijo en el capítulo anterior, introducir un nulo es equivalente a dejar de radiar en un determinado punto del espacio, según la fórmula (4.22) de la sección 4.5. El vector de nulos quedó definido en (4.24). De este modo, a la expresión general (5.17), se le añaden las restricciones de los nulos del mismo modo que se hacía en (4.23), tomando las expresiones reales e imaginarias de los nulos enunciadas en (4.29a) y (4.29b), extendiéndolas para adaptarlas a la variable y de la misma forma que en los pares de ecuaciones (5.16a) y (5.16b), quedando

$$\begin{cases} \langle \tilde{g}_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle = [\langle g_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \ 0] \\ \langle \tilde{g}_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle = [\langle g_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \ 0] \end{cases} \quad (5.19a)$$

$$\quad (5.19b)$$

El problema de optimización de la directividad con restricciones de campo nulo se plantea entonces como

$$\begin{aligned} & \underset{y}{\text{minimize}} && \langle f^T \rangle \{y\} \\ & \text{subject to} && \left\| \begin{bmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & && \langle \tilde{g}_{0_R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\ & && \langle \tilde{g}_{0_I}^\dagger \rangle \{y\} = k'' \\ & && \langle \tilde{g}_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \{y\} = 0 \\ & && \langle \tilde{g}_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \{y\} = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para traducir la ecuación previa a *CVXOPT* se deberán introducir pares de restricciones adicionales en \mathbf{A} y \mathbf{b} por la parte real e imaginaria de cada nulo

$$\mathbf{c} = \{f\}$$

$$\mathbf{G}_q = \left[- \begin{pmatrix} \langle f^T \rangle \\ [B_q] \end{pmatrix} \right], \quad [B_q] = \begin{pmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{h}_q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \text{length}(\theta) \times 2 + 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{0_R}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{0_I}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{nulls_{i_R}}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{nulls_{i_I}}^\dagger \rangle \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} k' \\ k'' \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \text{length}(\text{nulos}) \times 2$$

Seguidamente se dibujan algunos diagramas de radiación sujetos a estas restricciones de campo nulo.

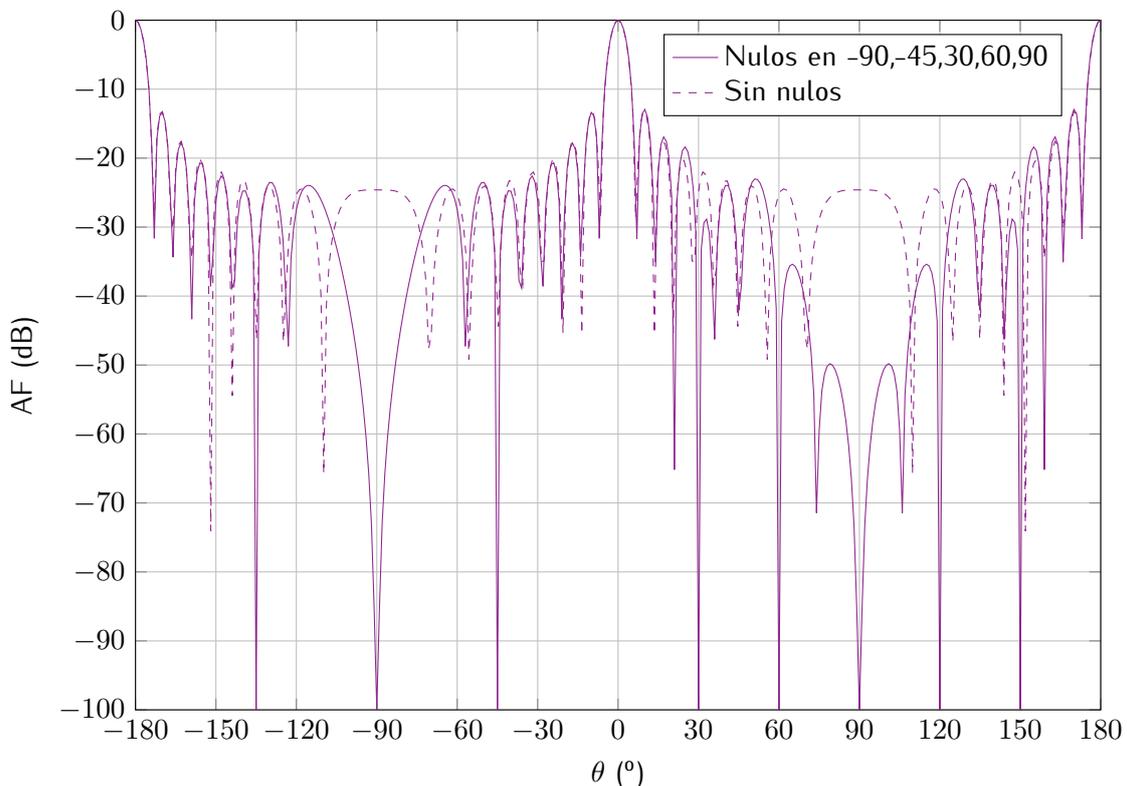


Figura 5.5: Comparativa con y sin campo nulo en un array lineal
($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)

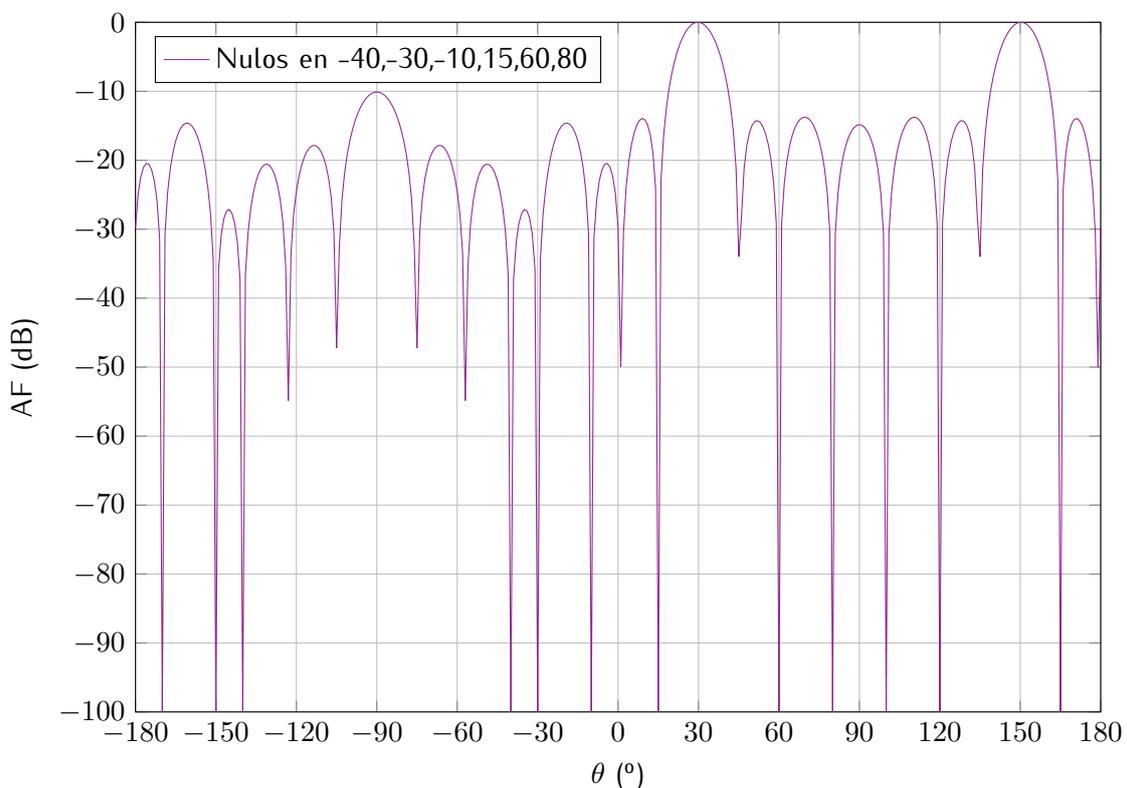


Figura 5.6: Array lineal con restricciones de nulos asimétricas
($N=11, d_x=0.3\lambda, \theta_0=30^\circ$)

5.6. Restricción de los lóbulos secundarios

Análogamente a la sección 4.6 de programación cuadrática, la restricción de los lóbulos secundarios para una cierta zona del espacio en θ y ϕ consiste en limitar a un máximo el valor de la intensidad de radiación generada por una antena. La expresión matemática de esta idea ya se vio en (4.31). Así, en la fórmula general del problema de optimización de *SOCP* (5.17) hay que sumar las restricciones en los lóbulos secundarios como ya se hiciera en (4.32) para el caso de programación cuadrática, redimensionándolas como en el problema anterior

$$\begin{aligned}
 & \underset{y}{\text{minimize}} && \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & \text{subject to} && \left\| \begin{bmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & && \left\| \begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq 10^{\frac{-SLL_j}{20}} k' \\
 & && \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\
 & && \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \{y\} = k''
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

con

$$\begin{cases} \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle = [\langle g_{jR}^\dagger \rangle \ 0] & (5.22a) \\ \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle = [\langle g_{jR}^\dagger \rangle \ 0] & (5.22b) \end{cases}$$

donde

$$\langle g_{jR}^\dagger \rangle = [\Re(\langle g_j^\dagger \rangle) \ -\Im(\langle g_j^\dagger \rangle)] \tag{5.23a}$$

$$\langle g_{jR}^\dagger \rangle = [\Im(\langle g_j^\dagger \rangle) \ \Re(\langle g_j^\dagger \rangle)] \tag{5.23b}$$

En este caso, para tratar con el paquete *CVXOPT*, hay que modificar las variables G_q y h_q , introduciendo una matriz con su correspondiente nivel de lóbulos secundarios por cada punto del espacio donde se quiera restringir dicha radiación

$$\mathbf{c} = \{f\}$$

$$\mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} - \left(\langle \mathbf{f}^T \rangle \right) \\ - \left(\begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}}^{2N+1} \\ [\mathbf{A}_{qj}] \end{array} \right) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{A}_{qj}] = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathbf{g}}_{jR}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{\mathbf{g}}_{jI}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{B}_q] = \begin{pmatrix} [\tilde{\mathbf{G}}_R] \\ [\tilde{\mathbf{G}}_I] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}_q = \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 10^{-\frac{SLL_j}{20}} \mathbf{k}' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \end{array} \right]_{length(\theta) \times 2 + 1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathbf{g}}_{0R}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{\mathbf{g}}_{0I}^\dagger \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}' \\ \mathbf{k}'' \end{pmatrix}$$

Algunos ejemplos de restricciones en los lóbulos secundarios son mostrados a continuación.

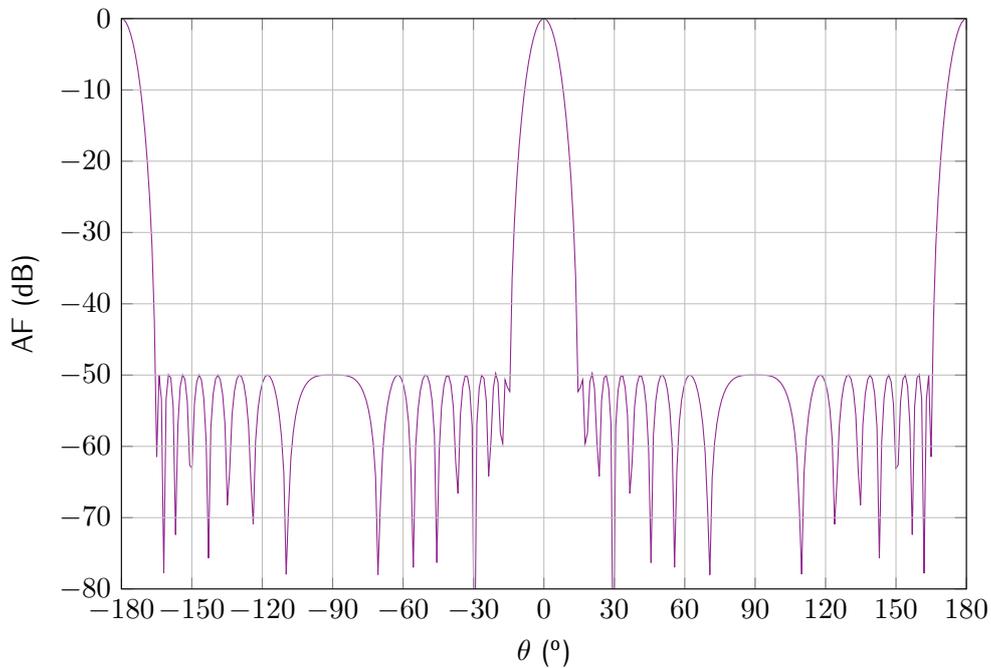


Figura 5.7: Restricciones simétricas de SLL=50 dB en un array lineal para $\theta \in [15, 90]$ ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)

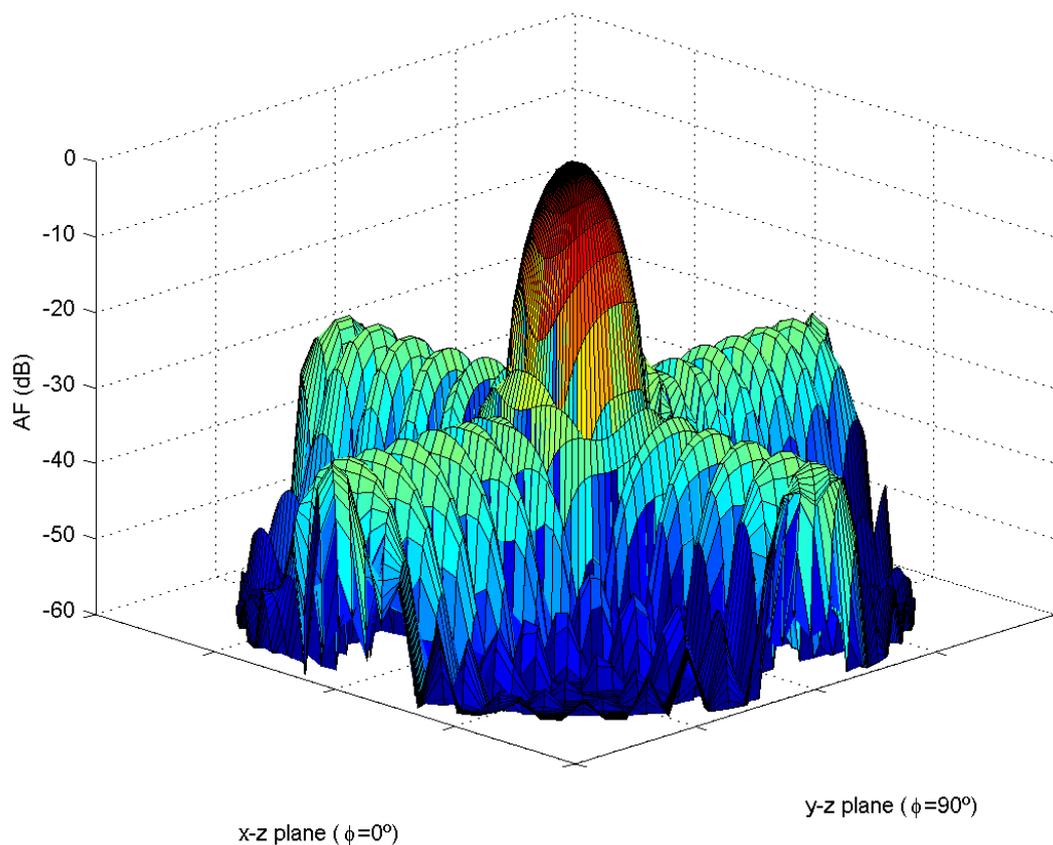


Figura 5.8: Restricciones simétricas de SLL=30 dB en un array rectangular para $\theta \in [15, 90]$
 $\forall \phi \in [0, 360]$ ($N=8, M=10, d_x=d_y=0.8\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

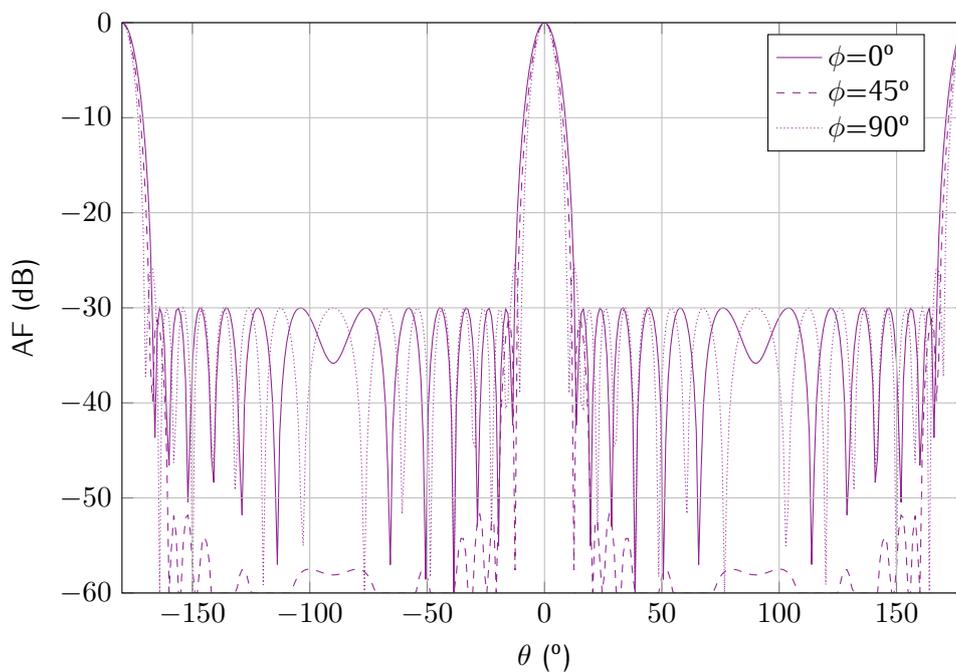


Figura 5.9: Representación del diagrama anterior para los planos $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

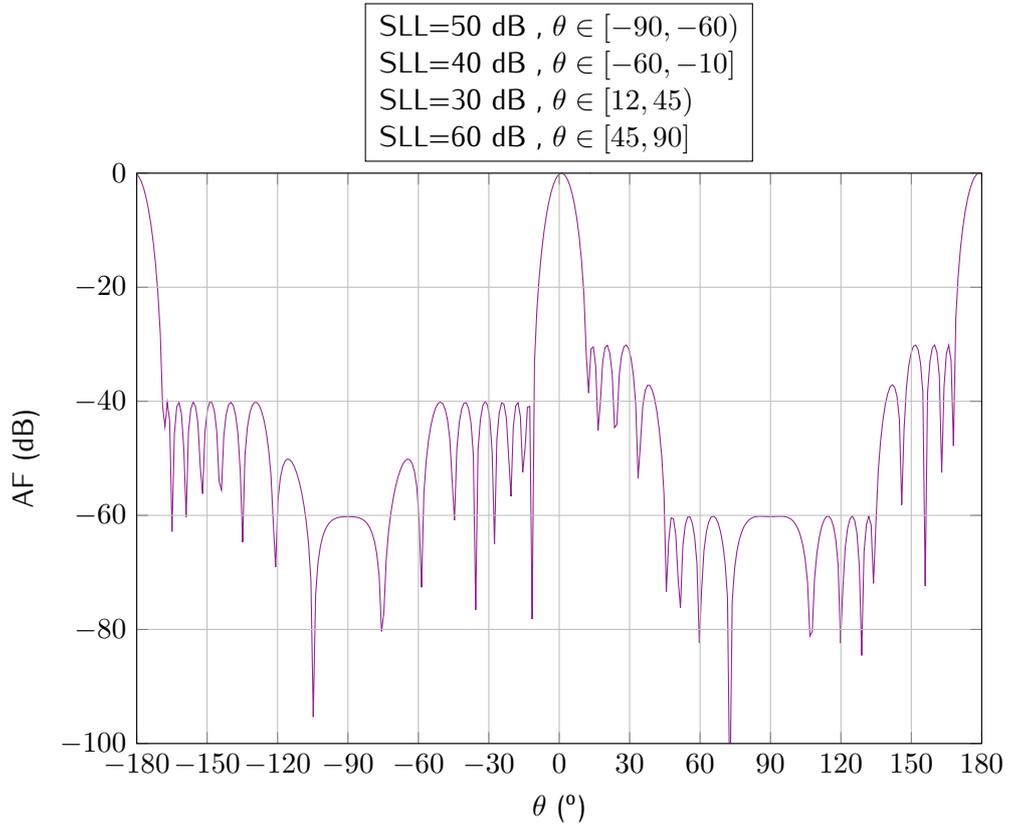


Figura 5.10: Restricciones asimétricas en el SLL de un array lineal ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)

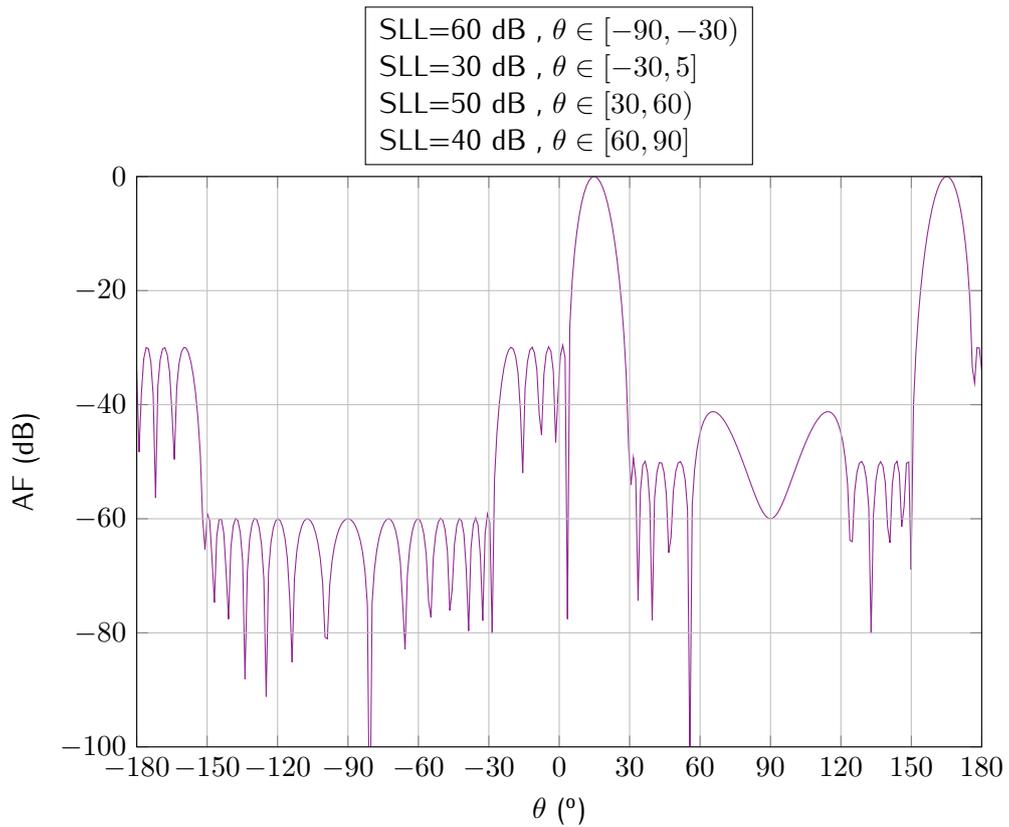


Figura 5.11: Restricciones asimétricas en los lóbulos secundarios en un array lineal orientado a $\theta_0=15^\circ$ ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=15^\circ$)

5.7. Restricciones simultáneas de campo nulo y lóbulos secundarios

Finalmente, en esta sección se unen ambas restricciones al igual que se hiciera en 4.7. Para ello, se toman las fórmulas (5.17), (5.20) y (5.21) para fusionarlas en la siguiente expresión general que abarca todo lo estudiado anteriormente

$$\begin{aligned}
 & \underset{y}{\text{minimize}} && \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & \text{subject to} && \left\| \begin{bmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & && \left\| \begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq 10^{\frac{-SLL_j}{20}} k' \\
 & && \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\
 & && \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \{y\} = k'' \\
 & && \langle \tilde{g}_{nulls_{iR}}^\dagger \rangle \{y\} = 0 \\
 & && \langle \tilde{g}_{nulls_{iI}}^\dagger \rangle \{y\} = 0
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Para introducir correctamente los datos en el paquete *CVXOPT*, simplemente basta con combinar aquéllos ya detallados en las dos secciones anteriores, quedando

$$c = \{f\}$$

$$G_q = \begin{bmatrix} - \begin{pmatrix} \langle f^T \rangle \\ [B_q] \end{pmatrix}, - \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ [A_{qj}] \end{pmatrix}}^{2N+1} \end{bmatrix},$$

$$[A_{qj}] = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad [B_q] = \begin{pmatrix} [\tilde{G}_R] \\ [\tilde{G}_I] \end{pmatrix}$$

$$h_q = \left[\begin{pmatrix} 10^{\frac{-SLL_j}{20}} k' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \text{length}(\theta) \times 2 + 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{nulls_{iR}}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{nulls_{iI}}^\dagger \rangle \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} k' \\ k'' \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}} \right\} \text{length}(\text{nulls}) \times 2$$

A continuación se muestra un ejemplo de un array lineal que engloba ambas restricciones mientras se maximiza su directividad.

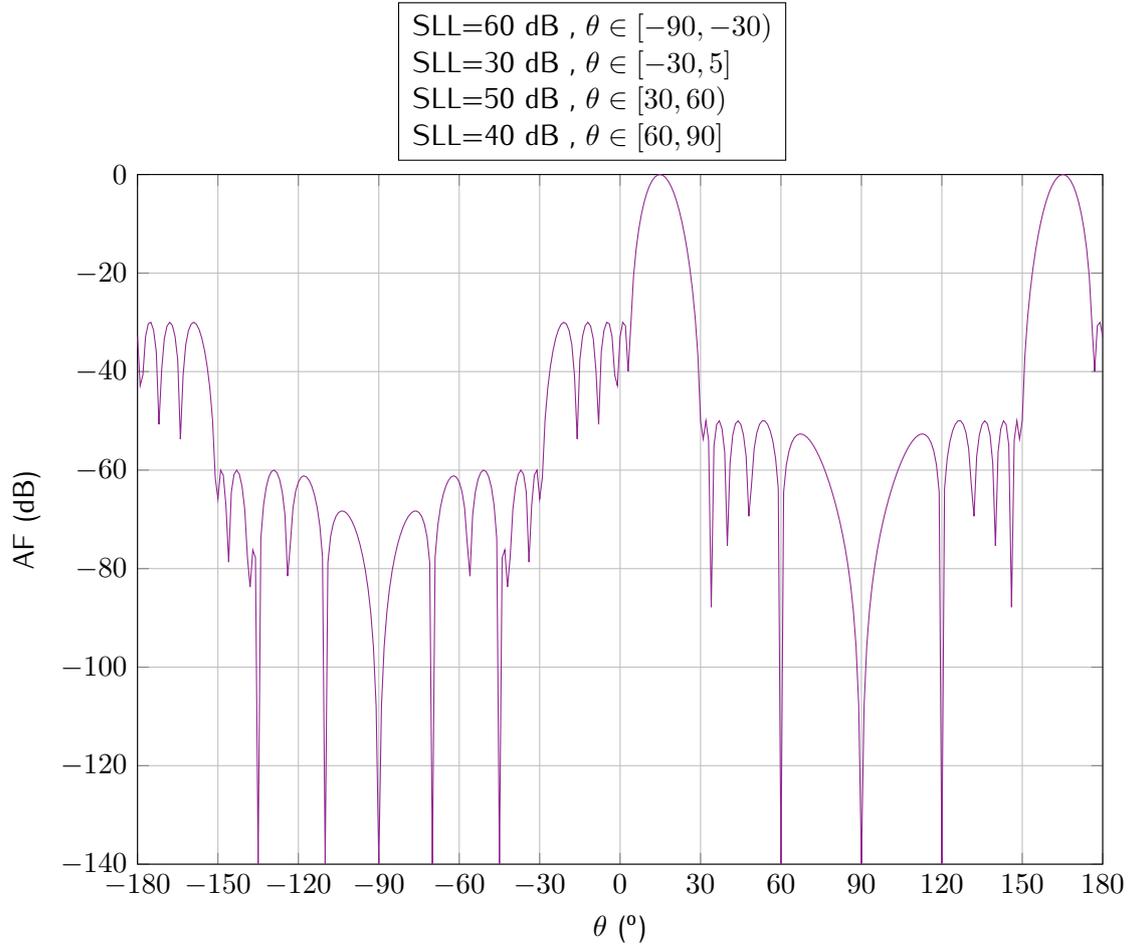


Figura 5.12: Restricciones de nulos en $\theta = -90^\circ, -70^\circ, -45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ y restricciones de SLL en un array lineal ($N=17, d_x=0.5\lambda, \theta_0=15^\circ$)

5.8. Minimización del nivel máximo de los lóbulos secundarios

Por último, mediante *SOCP*, se va a averiguar el nivel máximo que pueden tomar los lóbulos secundarios para unos rangos de θ determinados, siendo éstos lo más bajo posible en el diagrama de radiación. Se trata pues de minimizar el máximo nivel de lóbulos secundarios. Se pueden generar tanto diagramas simétricos como asimétricos.

Ahora se pretende hallar el mínimo valor en la región de θ deseada, con lo que el problema pasará a minimizar solamente dicha región en busca de un máximo global. Desde el punto de vista teórico queda según

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && \delta \\
 &\text{subject to} && |E(\theta, \phi)| \leq \delta \\
 & && \Re(E(\theta_0, \phi_0)) = k' \\
 & && \Im(E(\theta_0, \phi_0)) = k''
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Partiendo de la formulación de (5.21), la forma del problema es la siguiente

$$\begin{aligned}
 & \underset{y}{\text{minimize}} && \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & \text{subject to} && \left\| \begin{bmatrix} \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \end{bmatrix} \{y\} \right\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & && \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\
 & && \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \{y\} = k''
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

En *CVXOPT* hay que modificar, como en la sección de la restricción en los lóbulos secundarios 5.6, las variables \mathbf{G}_q y \mathbf{h}_q , pero de una forma ligeramente distinta según se ve a continuación

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= \{f\} \\
 \mathbf{G}_q &= \begin{bmatrix} - \langle f^T \rangle \\ [A_{qj}] \end{bmatrix}, \quad [A_{qj}] = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \end{pmatrix} \\
 \mathbf{h}_q &= \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}}_{\text{length}(\theta_j)} \\
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \end{pmatrix} \\
 \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Para despejar las excitaciones se sigue echando mano de las fórmulas inversas (5.18) y (4.21). Para extraer el mínimo máximo nivel de lóbulos secundarios se utiliza

$$SLL_{\min-max} = 20 \log_{10} (y_{2N}) \tag{5.27}$$

A continuación se muestran ejemplos simétricos y asimétricos de minimización del máximo SLL.

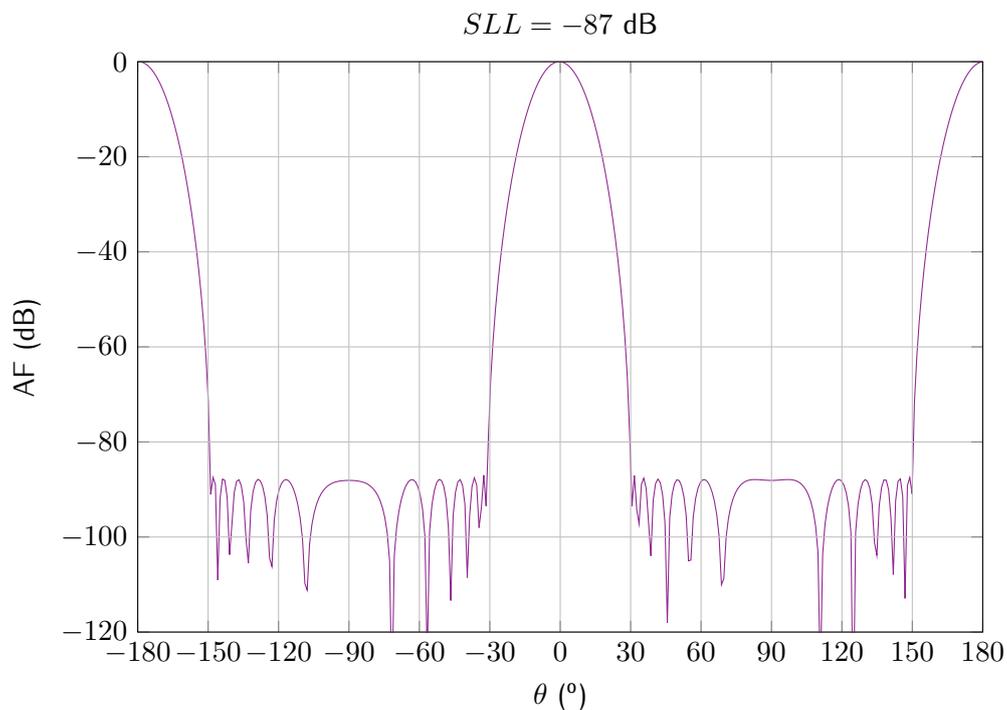


Figura 5.13: Minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta \in [30, 90]$ simétrico ($N=13, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ$)

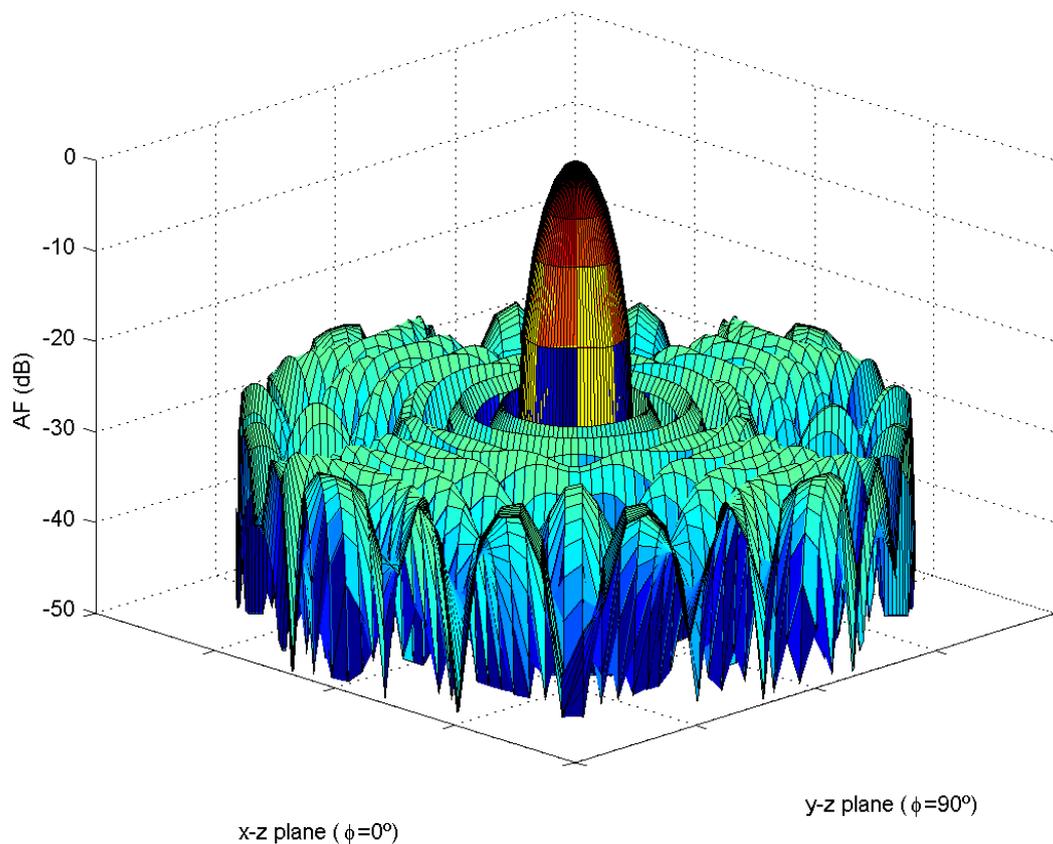


Figura 5.14: Restricciones simétricas de $SLL=26,6$ dB en un array cuadrado para $\theta \in [10, 90]$ $\forall \phi \in [0, 360]$ ($N=M=10, d_x=d_y=0.75\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

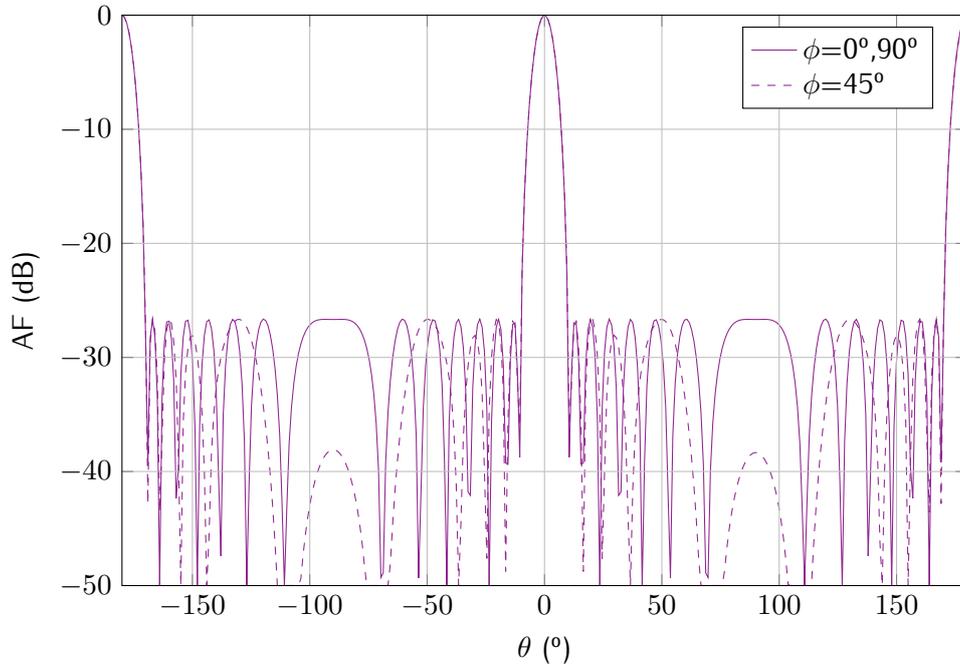


Figura 5.15: Representación del diagrama anterior para los planos $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

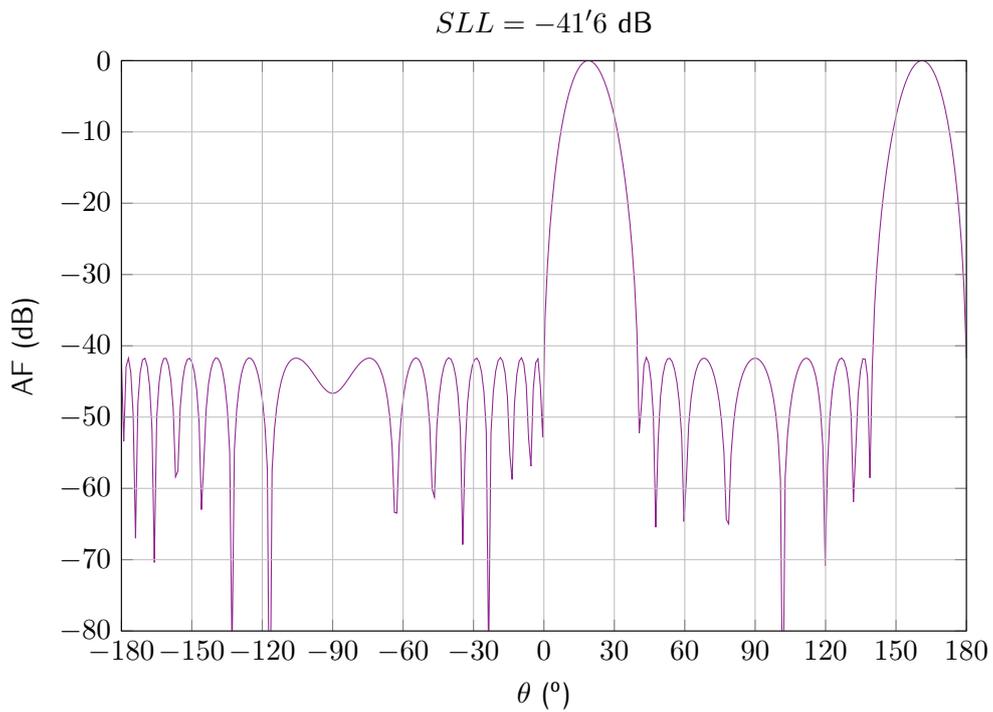


Figura 5.16: Minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta_1 \in [-90, 0]$ y $\theta_2 \in [40, 90]$ asimétrico ($N=13, d_x=0.425\lambda, \theta_0=20^\circ$)

Este mismo problema de minimizar el máximo nivel de lóbulos secundarios en el diagrama de radiación de un array, cuando es simétrico, se puede reducir a un problema de *optimización lineal*, el cual es mucho más sencillo de resolver. En el siguiente capítulo, se estudia este caso especial haciendo uso de técnicas de *programación lineal*.

5.9. Análisis de los resultados

Los diagramas de radiación relativos al problema de maximización de la directividad mediante *SOCP* son bastante parecidos a los generados mediante el cociente de formas hermiticas y asemejándose algo menos a los generados mediante programación cuadrática, aunque a nivel general son similares. Poseen simplemente diferencias menores en los niveles de los lóbulos secundarios, quedando el principal igual en todas las optimizaciones. Se pueden encontrar ejemplos de lo mencionado en la sección 5.4. Lo mismo sucede en la comparación entre programación cuadrática y *SOCP* cuando se introducen restricciones de campo nulo o en el nivel de lóbulos secundarios, o ambas a la vez. Se pueden ver ejemplos en las secciones 5.5, 5.6 y 5.7. A continuación, en las tablas 5.1 y 5.2, se muestra la diferencia entre la directividad máxima hermitica y cuadrática respectivamente y la directividad calculada mediante *SOCP*, completando así el análisis comparativo de máximas directividades iniciado en las conclusiones del capítulo anterior con la tabla 4.1. Se han utilizado las fórmulas (5.28) y (5.29) para hallar la diferencia de directividades. Se recuerda que $d = d_x = d_y = d_r$.

$$Dif_{herm-SOCP} = |D_{max}(SOCP) - D_{max}(hermítica)| \quad (dB) \quad (5.28)$$

<i>Dif</i>	$d=0.1\lambda$	$d=0.3\lambda$	$d=0.5\lambda$	$d=0.7\lambda$	$d=0.9\lambda$
Array lineal					
N=25	-	0.010181	0.02311	0.031531	0.035624
N=64	-	-	0.053621	0.069035	0.078459
N=100	-	-	0.074639	0.089227	6.6383
Array circular					
N=25	0.00011417	0.00014223	0.00010009	0.0002643	0.0021284
N=64	-	0.00040129	0.00051916	0.0008344	0.0065351
N=100	-	0.0069721	0.028047	0.042068	0.083483
Array cuadrado					
N=5	0.0031685	0.0035329	0.0075555	0.033002	0.18447
N=8	0.10661	0.02318	0.065646	0.1833	0.84776
N=10	-	0.046957	0.1345	0.411	1.2249
Array rectangular					
N=6,M=4	0.0030561	0.0016158	0.0012004	0.033338	0.074796
N=9,M=7	-	0.024866	0.049369	0.16157	0.40968
N=11,M=9	-	0.049444	0.12546	0.31863	0.84305

Tabla 5.1: Diferencia en dB entre la optimización hermitica y SOCP

$$Dif_{QP-SOCP} = |D_{max}(SOCP) - D_{max}(QP)| \quad (dB) \quad (5.29)$$

<i>Dif</i>	d=0.1λ	d=0.3λ	d=0.5λ	d=0.7λ	d=0.9λ
Array lineal					
N=25	-	0.5043	0.049365	0.069129	0.080846
N=64	-	-	0.12781	0.17843	0.22322
N=100	-	-	0.20001	0.27965	0.33255
Array circular					
N=25	0.000031004	0.00094548	0.002413	0.0038854	0.00024582
N=64	-	0.0052699	0.011458	0.020875	0.017765
N=100	-	0.0040631	0.0044168	0.0070957	0.0046871
Array cuadrado					
N=5	0.00982	0.0047893	0.0086817	0.045627	0.35528
N=8	1.114	0.034931	0.085415	0.20831	1.4565
N=10	-	0.064724	0.15516	0.40785	1.6404
Array rectangular					
N=6,M=4	0.0067208	0.0045149	0.0036711	0.046438	0.13971
N=9,M=7	-	0.051526	0.055086	0.16634	0.61743
N=11,M=9	-	0.16888	0.14076	0.24273	0.9359

Tabla 5.2: Diferencia en dB entre la optimización cuadrática y SOCP

Para muchos casos en los que el array se encuentra en superdirectividad (ver nota 2 del capítulo 3) y posee un gran número de elementos, el algoritmo de *SOCP* es incapaz de calcular de manera correcta la directividad máxima (celdas en rojo), o bien llegando al máximo de iteraciones posibles dando valores del todo incongruentes o bien, en los casos más extremos, desbordándose. Algo similar ocurría en la tabla 4.1 de las conclusiones del capítulo 4, donde los algoritmos cuadráticos también presentaban algunos problemas en dichos casos. Para el resto de configuraciones, se puede ver que los algoritmos convergen con bastante precisión. Según lo visto en las tres tablas, por lo general, existe una menor diferencia (mayor convergencia) entre las soluciones calculadas por los algoritmos hermíticos y de *SOCP*, quedando algo más distanciadas las de programación cuadrática. Sin embargo, cabe destacar que el algoritmo de *SOCP* es bastante más pesado y lento en términos de ejecución que los otros dos algoritmos, más que el de programación cuadrática y mucho más que el del cociente de formas hermíticas, siendo el más ligero de todos, con lo que sería éste último la mejor herramienta para hallar problemas del cálculo de simplemente directividades máximas.

Por otro lado, a diferencia del capítulo de programación cuadrática, en *SOCP* se ha desarrollado solamente el caso general para cualquier apuntamiento en θ , después de haber mostrado su desarrollo. Este caso, como ya se dijo, engloba diagramas de radiación tanto simétricos como asimétricos. Ahora, para un array de N elementos, el proceso de optimización lleva a cabo la resolución de $2N + 1$ variables. A las $2N$ variables por cada parte real e imaginaria de los pesos hay que añadir una variable más (llamada aquí δ e introducida en (5.11)) necesaria para linealizar la función a minimizar y convertirla en una restricción cuadrática, casando con lo dicho en sus fundamentos en 5.2. Además, todos los elementos que forman parte del problema de optimización contendrán, a la vez que su parte real e imaginaria, un cero extra para que las dimensiones cuadren.

Adicionalmente, gracias a las técnicas de *SOCP* se ha conseguido reproducir diagramas de radiación asimétricos con restricciones en los niveles de los lóbulos secundarios, algo que se vio que era imposible mediante programación cuadrática, con lo que este tipo de problemas son exclusivos de *SOCP*. El desarrollo y ejemplos de este tipo de problemas se encuentran en la sección 5.6.

En la figura 5.8 de dicha sección se ha dibujado un diagrama tridimensional de un array rectangular, similar a lo que se hizo en el capítulo 4 con un array cuadrado, dibujando a continuación en la figura 5.9 los cortes en $\phi=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. En este caso los diagramas de radiación de los cortes en $\phi=0^\circ$ y $\phi=90^\circ$ son distintos, al poseer el array diferentes dimensiones en x e y , en oposición a lo que sucedía con el array cuadrado. El plano para $\phi=45^\circ$ sigue tomando valores ínfimos al ser la distancia entre elementos mayor en la diagonal.

En la sección previa se ha visto el problema inverso de minimizar el máximo nivel de lóbulos secundarios. Los diagramas de radiación resultantes cumplen la propiedad del *array de Dolph-Chebyshev*, mencionado en las conclusiones de programación cuadrática, la cual viene a decir que un array está correctamente optimizado si para una determinada restricción en sus lóbulos secundarios éstos son constantes en altura o, lo que es lo mismo, tienen la misma magnitud. De este modo, el diagrama de radiación de este problema producirá, para un ancho del lóbulo principal determinado, unos lóbulos secundarios mínimos cuyos máximos serán todos de la misma altura. Se pueden ver ejemplos tanto simétricos como asimétricos en la sección 5.8. Sin embargo, generar diagramas simétricos de este tipo de problemas con *SOCP* supone gastar recursos de manera innecesaria, pues como ya se ha dicho multitud de veces, en los diagramas simétricos todos los elementos que intervienen son números reales, reduciéndose en este caso sustancialmente las matemáticas y quedando el problema de optimización como una función lineal sujeta a restricciones también lineales. Por esto, en el capítulo 6 se estudia cómo realizar este mismo problema mediante programación lineal, mucho más económica en cuanto a cálculo y recursos.

Cuando se definen distintos rangos en θ que minimicen el máximo nivel de lóbulos secundarios, dicho mínimo es global a todos los rangos en vez de haber un mínimo por cada rango. Este fenómeno se puede observar en el ejemplo 5.16 de la página 103.

A continuación se muestra una serie de ejemplos de diagramas de radiación en la cual se ha ido aumentando el ancho del lóbulo principal o, equivalentemente, se ha ido estrechando el rango a minimizar el nivel de lóbulos secundarios. Se puede comprobar cómo a medida que se estrecha el rango en θ (o se ensancha el lóbulo radiante principal) el nivel mínimo máximo de los lóbulos secundarios se hace más profundo.

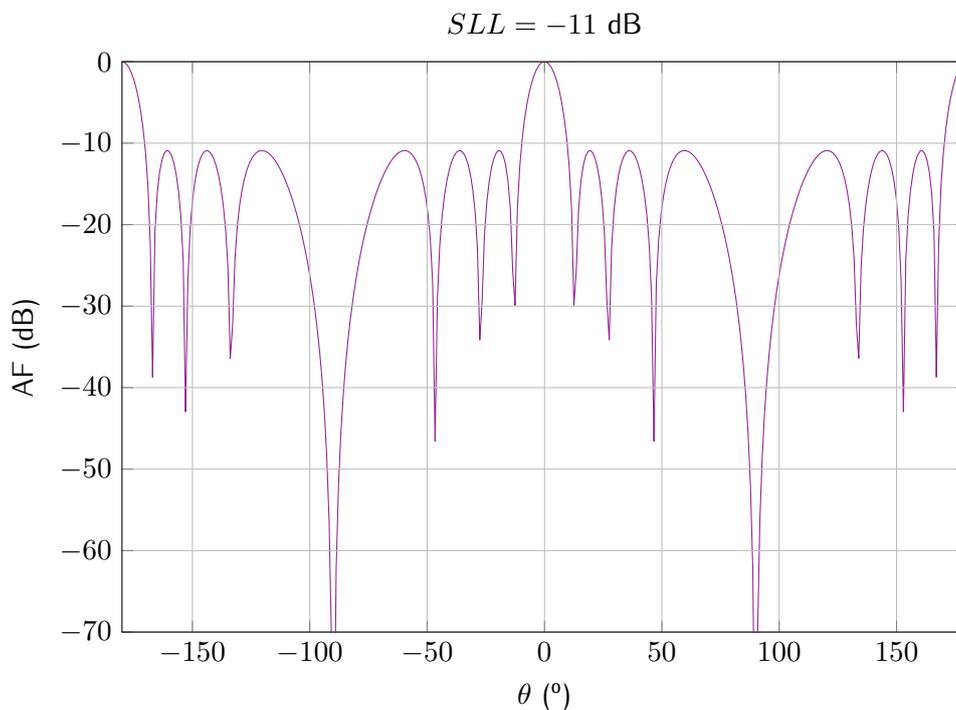


Figura 5.17: Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [10, 90]$
 ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^{\circ}, \phi_0=0^{\circ}$)

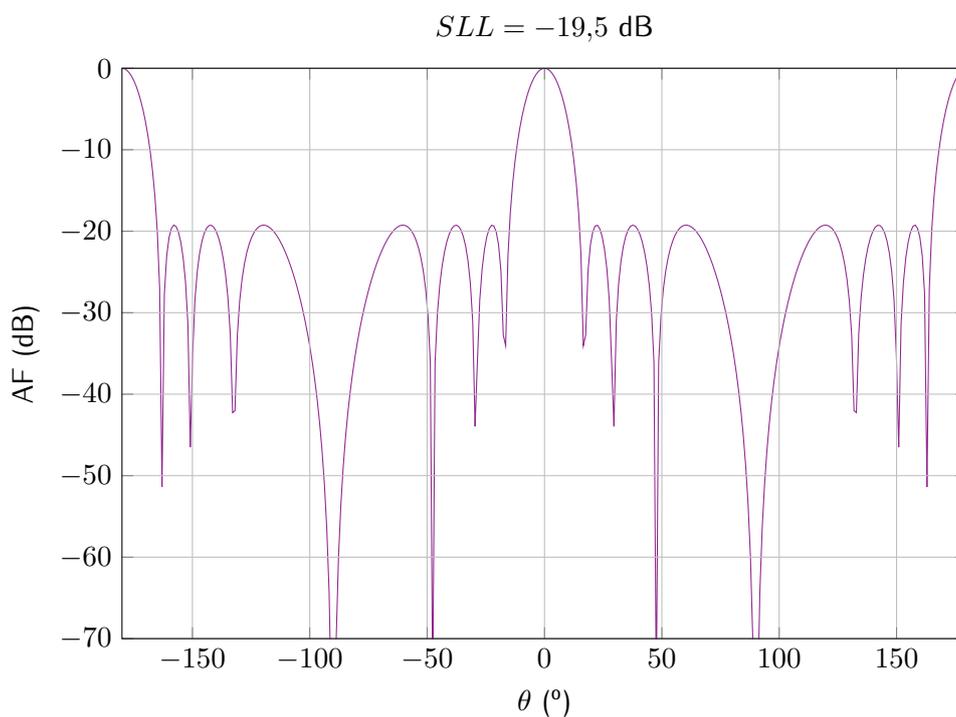


Figura 5.18: Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [15, 90]$
 ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^{\circ}, \phi_0=0^{\circ}$)

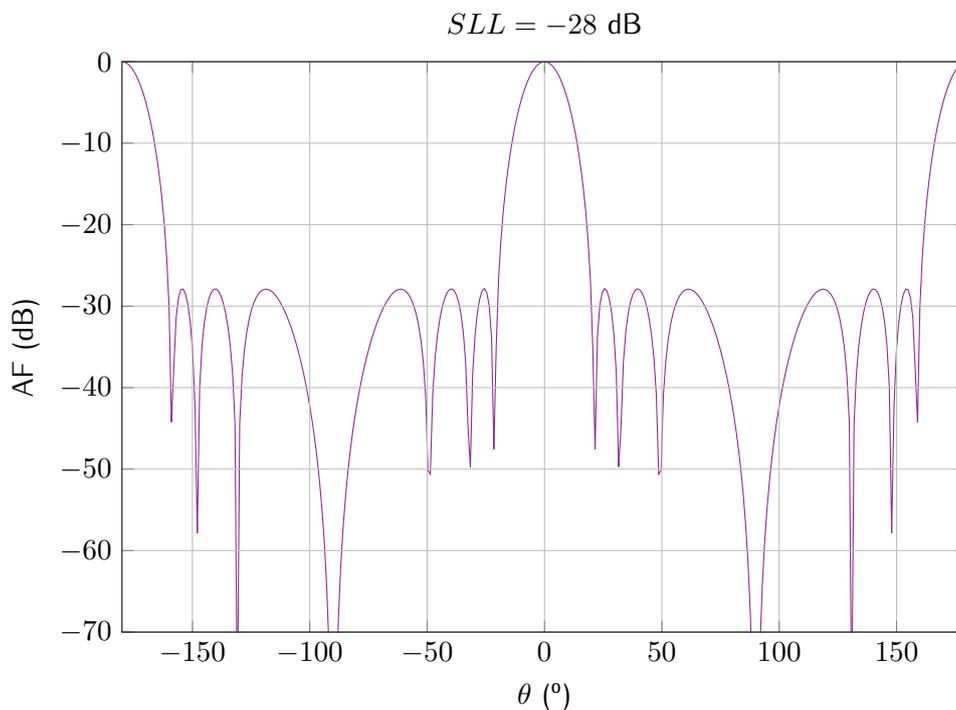


Figura 5.19: Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [20, 90]$
 ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

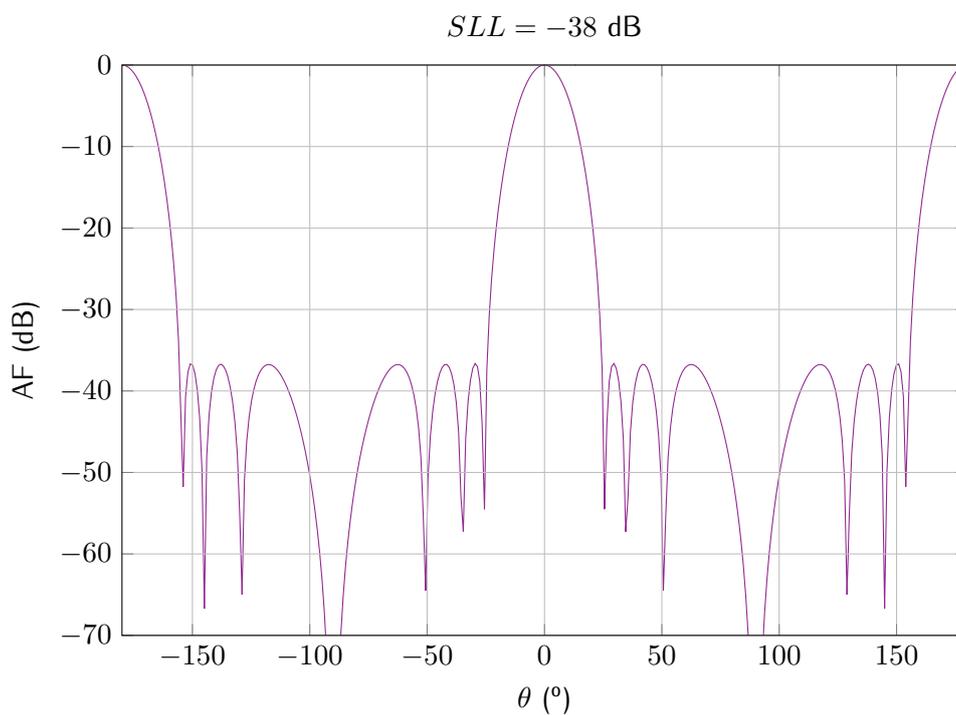


Figura 5.20: Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [25, 90]$
 ($N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

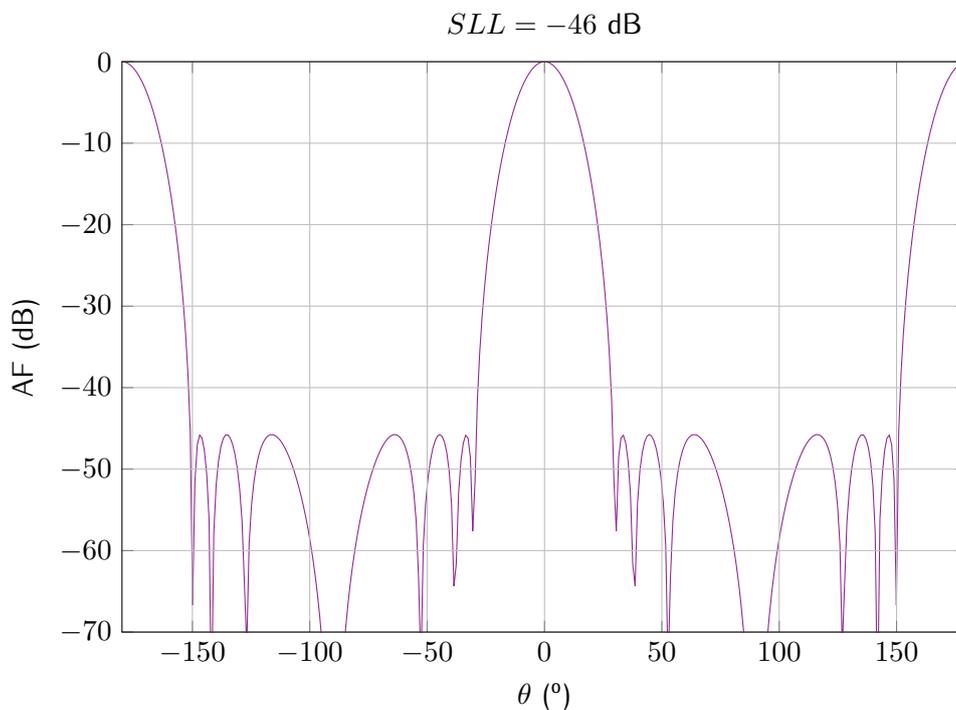


Figura 5.21: Minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [30, 90]$
 $(N=M=8, d_x=d_y=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ)$

Por último, en la figura tridimensional 5.14 y sus correspondientes planos 5.15 se estudia el problema de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios para un array cuadrado. Se puede observar cómo la minimización se cumple en los tres planos $\phi=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Capítulo 6

Programación lineal (LP)

6.1. Introducción

Este último capítulo de algoritmos de optimización trata el problema concreto de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios en cualquier tipo de array. De este modo, este capítulo es una continuación del último apartado 5.8 visto en el capítulo anterior de *SOCP*. Este nuevo estudio es de interés porque, a pesar de que la forma del problema es similar a la ya vista, en *Programación Lineal (LP)* el procesado del problema y los algoritmos utilizados para la resolución del mismo son bastante más sencillos y, por lo tanto, consumen menos tiempo y recursos de CPU.

Así, el capítulo de programación lineal es algo más breve que los anteriores. Como en los anteriores capítulos de optimización, se procede al principio a enunciar las bases de un problema tipo de optimización lineal. También se dedica un apartado a analizar las herramientas usadas para desarrollar estos problemas de programación lineales. Más adelante, se estudia el único caso de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios, dando ejemplos de diagramas de radiación.

Del mismo modo que en los capítulos anteriores, se supone que los elementos del array son isotrópicos, siendo la estructura física de los elementos que conforman el array y la banda a la que operan irrelevante. También se obvian las implicaciones de acoplo mutuo.

El problema se ha desarrollado tanto en *MATLAB*[®] como en *Python*. Para el primer programa se ha echado mano del paquete *linprog* y para el segundo se ha continuado con el módulo *CVXOPT*, los cuales se repasan a continuación en la sección 6.3. Ambos hacen uso del método del *punto interior convexo*.

Los desarrollos expuestos a continuación, igual que ya se hiciera en el capítulo anterior, se han generalizado para cualquier apuntamiento en el ángulo θ , o dicho de otra forma, los desarrollos aúnan diagramas de radiación simétricos y asimétricos, con lo que se asumen valores complejos en el factor de fase y las excitaciones.

A pesar de ello, y como se verá a continuación, el problema teórico de minimización del máximo nivel de SLL es solamente válido para el caso en el que todas las variables estén compuestas únicamente de parte real, resultando en diagramas de radiación simétricos. Sin embargo, como se va a plantear el problema de modo que se abarque también una posible componente compleja

para así generar diagramas asimétricos mediante una suposición geométrica que se enunciará más adelante, la solución no será óptima del todo. Aún así, como ya se verá, los diagramas de radiación resultarán similares a los obtenidos mediante *SOCP*, sobre todo los del caso simétrico, con el beneficio adicional de haber utilizado sensiblemente menos recursos para su obtención.

6.2. Fundamentos

La *programación lineal* implica la minimización de una **función objetivo lineal** sujeta a **restricciones lineales**. Estas restricciones pueden ser de igualdad, desigualdad y/o de límites, pues siempre será convexa. Es el planteamiento más sencillo de entre todas las técnicas que se han estudiado para optimizar los diagramas de radiación de arrays.

La expresión general de un problema de optimización lineal es la que sigue

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{minimize}} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \\ & A_{eq}x = b_{eq} \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde c es un vector columna de dimensión n que contiene los coeficientes de los elementos lineales y x es el vector columna de las n variables de decisión. Las restricciones de desigualdad e igualdad vienen dadas por las matrices de dimensiones $m \times n$ A y A_{eq} respectivamente, y los coeficientes del lado derecho por los vectores m -dimensionales b y b_{eq} . Además el problema es convexo, o lo que es lo mismo, existe una solución factible.

La siguiente figura muestra su equivalente gráfico

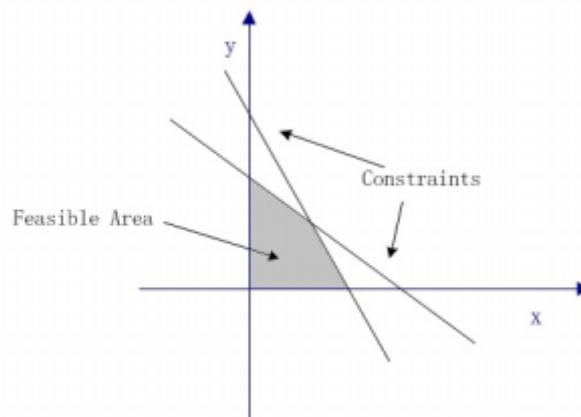


Figura 6.1: Representación gráfica de un problema de programación lineal (fuente: Google Imágenes)

Existen varios algoritmos iterativos comunes a la hora de solucionar problemas de optimización lineal, algunos de los cuales ya se vieron como método para resolver problemas de optimización cuadrática. Los más importantes son:

- Método del punto interior [13], [14], [15], [16].
- Método del conjunto activo [17], [18], [19], [20].
- Método del algoritmo símplex [21], [22], [23], [24].

6.3. Herramientas

Se ha utilizado para la obtención del caso concreto de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios tanto *MATLAB*[®] como *Python*, para de este modo comparar los resultados obtenidos. Para el primer caso se ha usado la función *linprog* y para el segundo la función *LP* del módulo *CVXOPT*, el cual es el mismo módulo que se utilizó para calcular los problemas de optimización de *SOCP*. Ambos utilizan el método del *punto interior*. Se ha pintado la sintaxis de *MATLAB*[®] de naranja y la de *Python* de azul para evitar confusiones entre los campos de uno y otro paquete y las expresiones teóricas, las cuales están enunciadas en negro durante todo el capítulo.

Partiendo de la expresión general del problema de optimización lineal vista anteriormente en (6.1), ambas funciones tendrán las siguientes sintaxis

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \text{linprog}(\mathbf{f} \equiv \mathbf{c}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq}) \quad , \text{ para } \text{MATLAB}^{\text{®}} \\ \mathbf{x} &= \text{cvxopt.solvers.lp}(\mathbf{c}, \mathbf{G} \equiv \mathbf{A}, \mathbf{h} \equiv \mathbf{b}, \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_{eq}) \quad , \text{ para } \text{Python} \end{aligned}$$

donde, tomando como referencia la función *linprog* de *MATLAB*[®], \mathbf{f} (\mathbf{c} en *Python*) es el vector columna \mathbf{c} que minimiza el vector de variables \mathbf{x} ; \mathbf{A} y \mathbf{b} (\mathbf{G} y \mathbf{h}) son las matrices que satisfacen la restricción de desigualdad $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$; y donde \mathbf{A}_{eq} y \mathbf{b}_{eq} (\mathbf{A} y \mathbf{b}) son a su vez las matrices que satisfacen la restricción de igualdad $\mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}$.

Como en los capítulos anteriores, se ha utilizado un mallado para los ángulos del espacio θ y ϕ de 1.000 muestras y para la restricción del nivel de lóbulos secundarios se ha usado un paso de θ_j y ϕ_j de $0,1^\circ$.

6.4. Minimización del nivel máximo de los lóbulos secundarios

Aunque se persigue el mismo objetivo, el planteamiento del problema teórico de la minimización del nivel máximo de los lóbulos secundarios es conceptualmente distinto al visto en el capítulo anterior de *SOCP* en 5.8. Se vuelve a hacer uso de la variable δ , definida en (5.12), que implica una doble transformación de variable para hallar los pesos según las fórmulas (5.18) y (4.21).

Según el teorema de geometría euclidiana de la *desigualdad triangular*, en todo espacio normado V , $\forall u, v \in V : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Con lo cual, la norma del campo eléctrico se puede expresar de la siguiente forma

$$\|E(\theta, \phi)\| = \|\Re(E(\theta, \phi)) + j\Im(E(\theta, \phi))\| \leq \|\Re(E(\theta, \phi))\| + \|\Im(E(\theta, \phi))\| \quad (6.2)$$

Si en el capítulo anterior se imponía que el campo eléctrico total fuera menor o igual a una variable δ a minimizar, según

$$\|E(\theta, \phi)\| \leq \delta \quad (6.3)$$

se propone ahora restringir cada una de sus dos componentes real e imaginaria por separado asumiendo el teorema de desigualdad triangular, del modo

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Re(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \\ \|\Im(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \end{array} \right. \quad (6.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Re(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \\ \|\Im(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \end{array} \right. \quad (6.4b)$$

Nótese que este procedimiento no es del todo riguroso, pues minimizar sendas componentes del lado derecho de la desigualdad triangular por debajo de un valor no asegura en todos los casos minimizar la componente de la izquierda a dicho valor. Es por esto por lo que las soluciones al problema no serán siempre óptimas, aunque sí muy parecidas.

Por otro lado, si se planteara el problema para el caso en el que el campo sólo pudiera tomar variables reales, el lado derecho de la desigualdad sólo poseería una componente y la minimización, por tanto, sí que sería rigurosa al cien por cien, ya que minimizar la parte real del campo supondría minimizar todo el campo eléctrico total

$$\|E(\theta, \phi)\| = \|\Re(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \quad (6.5)$$

El problema teórico con componente compleja queda entonces de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \delta \\ \text{subject to} & \|\Re(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \\ & \|\Im(E(\theta, \phi))\| \leq \delta \\ & \Re(E(\theta_0, \phi_0)) = k' \\ & \Im(E(\theta_0, \phi_0)) = k'' \end{array} \quad (6.6)$$

Utilizando la expresión (5.12) que define δ y la expresión de la función de potencia (3.3) y del factor de fase (3.4), queda

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \langle f^T \rangle \{y\} \\ \text{subject to} & \|\langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \{y\}\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & \|\langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \{y\}\| \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\ & \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \{y\} = k'' \end{array} \quad (6.7)$$

Despejando las normas de las inecuaciones, se obtiene el doble de restricciones de desigualdad

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \langle f^T \rangle \{y\} \\ \text{subject to} & \langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \{y\} \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & -\langle \tilde{g}_{jR}^\dagger \rangle \{y\} \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & \langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \{y\} \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & -\langle \tilde{g}_{jI}^\dagger \rangle \{y\} \leq \langle f^T \rangle \{y\} \\ & \langle \tilde{g}_{0R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\ & \langle \tilde{g}_{0I}^\dagger \rangle \{y\} = k'' \end{array} \quad (6.8)$$

y agrupando finalmente los términos, el planteamiento último es

$$\begin{aligned}
 & \underset{y}{\text{minimize}} && \langle f^T \rangle \{y\} \\
 & \text{subject to} && \left(\langle \tilde{g}_{j_R}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \right) \{y\} \leq 0 \\
 & && \left(-\langle \tilde{g}_{j_R}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \right) \{y\} \leq 0 \\
 & && \left(\langle \tilde{g}_{j_I}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \right) \{y\} \leq 0 \\
 & && \left(-\langle \tilde{g}_{j_I}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \right) \{y\} \leq 0 \\
 & && \langle \tilde{g}_{0_R}^\dagger \rangle \{y\} = k' \\
 & && \langle \tilde{g}_{0_I}^\dagger \rangle \{y\} = k''
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Como se vio en la sección anterior 6.3, la forma de las matrices que hay que introducir tanto en *linprog* de *MATLAB*[®] como en la función *LP* del módulo *CVXOPT* de *Python* es análoga y sólo cambia el nombre que da cada una a los distintos campos que aceptan. De este modo, los valores de las matrices que entran en juego son los siguientes

$$f \equiv c = \{f\}$$

$$A \equiv G = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{j_R}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \\ -\langle \tilde{g}_{j_R}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \\ \langle \tilde{g}_{j_I}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \\ -\langle \tilde{g}_{j_I}^\dagger \rangle - \langle f^T \rangle \end{pmatrix}$$

$$b \equiv h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \text{length}(\theta_j) \times 4$$

$$A_{eq} \equiv A = \begin{pmatrix} \langle \tilde{g}_{0_R}^\dagger \rangle \\ \langle \tilde{g}_{0_I}^\dagger \rangle \end{pmatrix}$$

$$b_{eq} \equiv b = \begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran unos ejemplos de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios para varios tipos de arrays comparando la técnica previamente descrita de programación lineal con la de *SOCP* vista en la sección 5.8 del capítulo anterior. Los arrays hallados mediante optimización lineal se abrevian como *LP*.

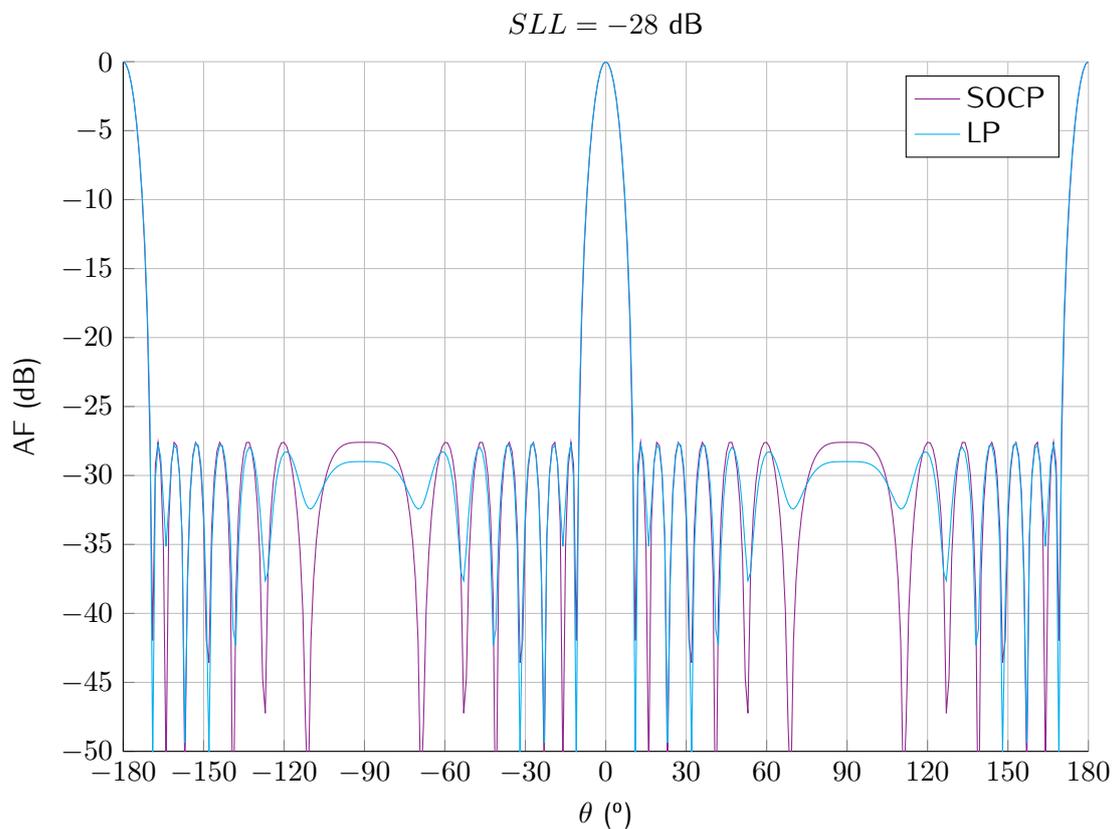


Figura 6.2: Comparativa de minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta \in [10, 90]$ simétrico ($N=15, d_x=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

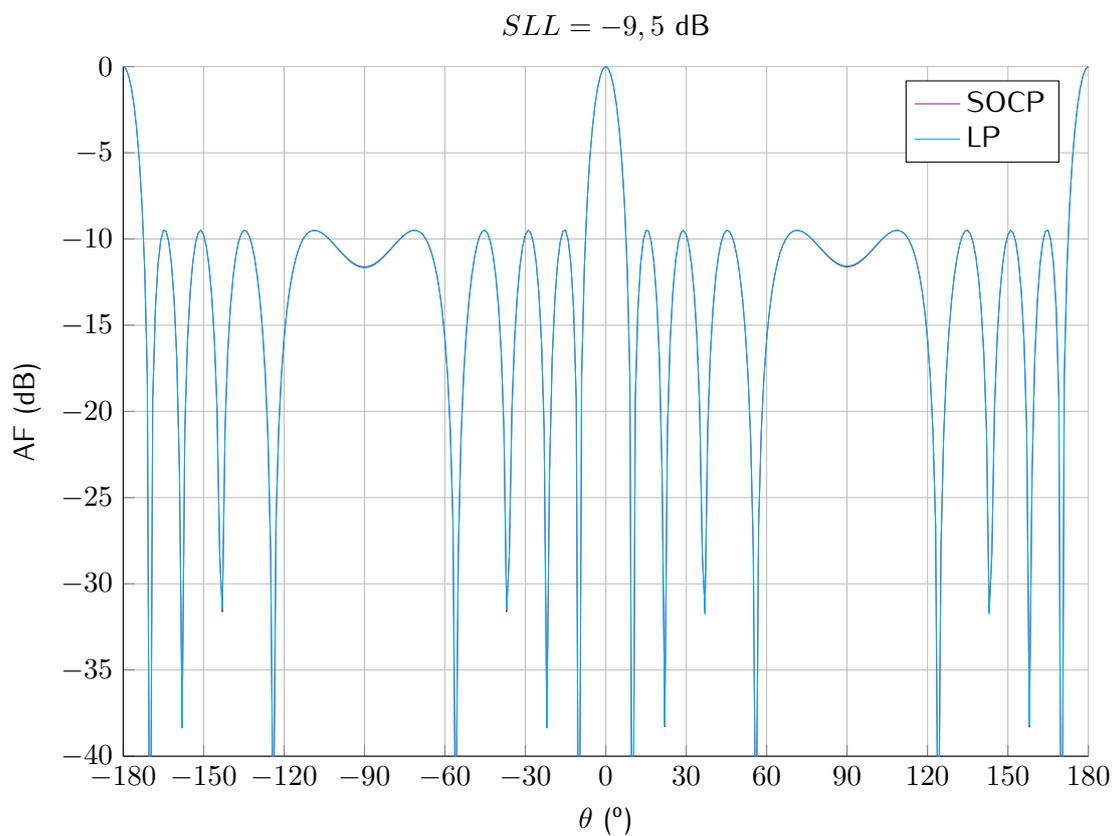


Figura 6.3: Comparativa de minimización del máximo SLL en un array circular para $\theta \in [10, 90]$ simétrico ($N=28, r=2.2329\lambda, d_r=0.5\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

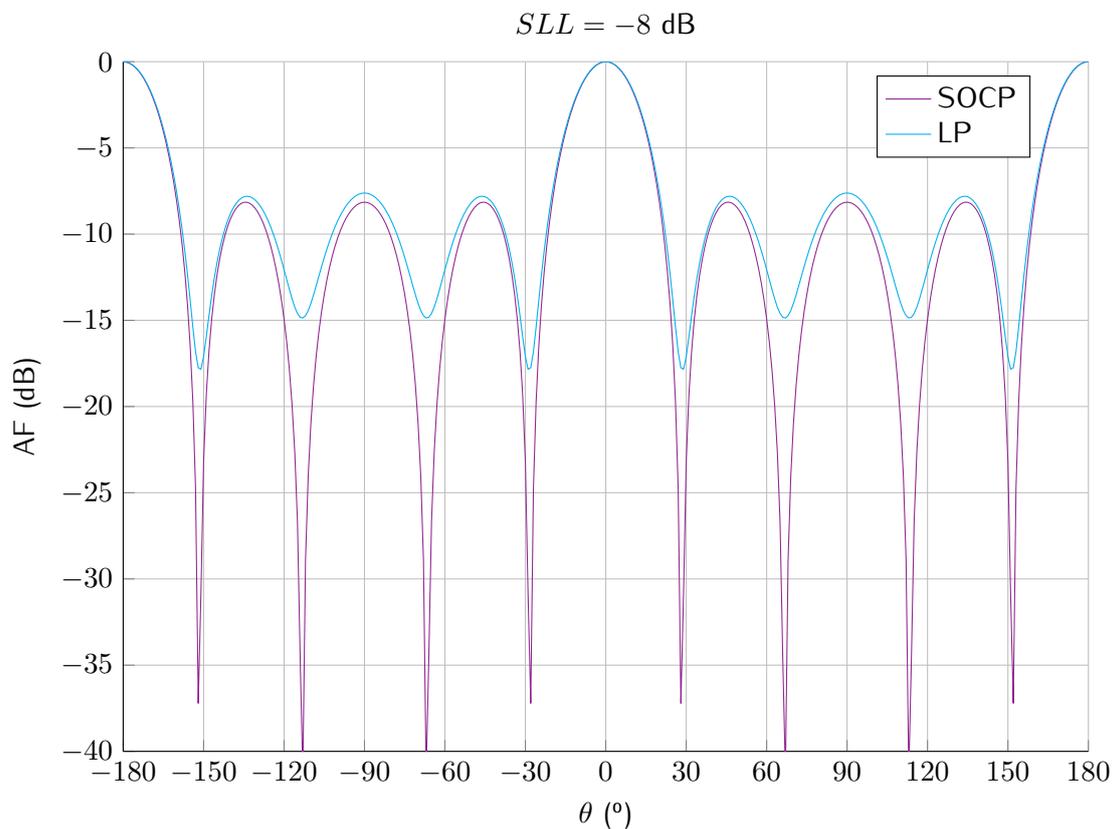


Figura 6.4: Comparativa de minimización del máximo SLL en un array plano para $\theta \in [20, 90]$ simétrico ($N=M=6, d_x=d_y=0.2\lambda, \theta_0=0^\circ, \phi_0=0^\circ$)

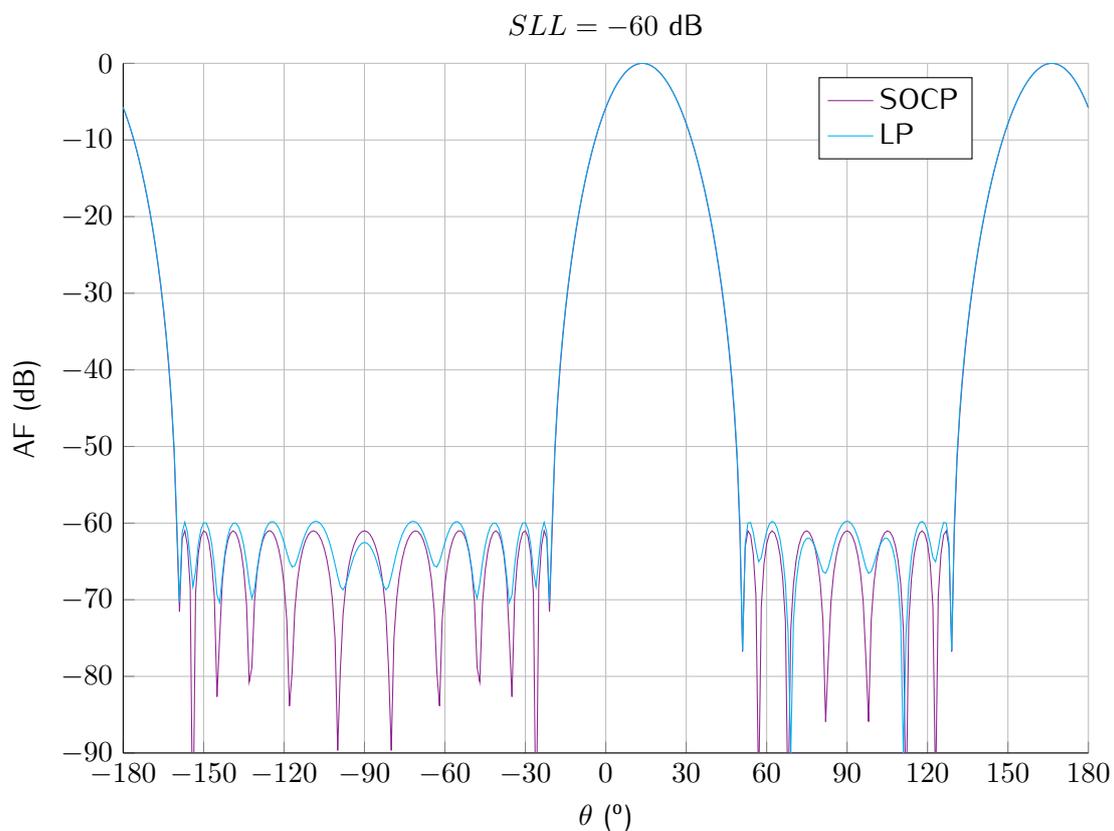


Figura 6.5: Comparativa de minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta_1 \in [-90, -20]$ y $\theta_2 \in [50, 90]$ asimétrico ($N=12, d_x=0.3\lambda, \theta_0=12^\circ$)

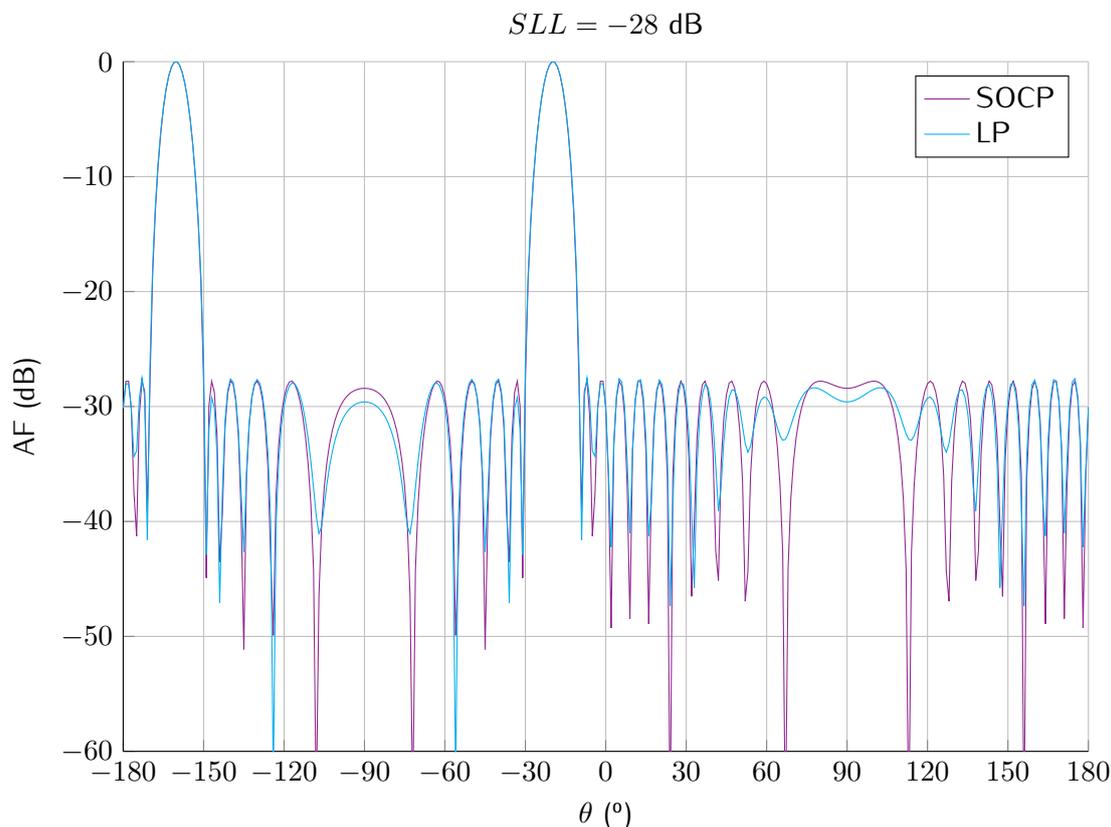


Figura 6.6: Comparativa de minimización del máximo SLL en un array lineal para $\theta_1 \in [-90, -30]$ y $\theta_2 \in [10, 90]$ asimétrico ($N=16, d_x=0.5\lambda, \theta_0=-20^{\circ}$)

6.5. Análisis de los resultados

Los diagramas de radiación expuestos anteriormente muestran la convergencia de los resultados obtenidos con *programación lineal* con los obtenidos en la sección 5.8 de *SOCP* para el problema de minimización del máximo nivel de lóbulos secundarios para arrays con cualquier tipo de apuntamiento en θ , pudiendo por tanto tomar las excitaciones tanto valores reales como complejos, siendo sus diagramas de radiación correspondientes simétricos o asimétricos respectivamente.

Como se vio en las conclusiones de programación cuadrática, para un diagrama de radiación cuyos lóbulos secundarios están restringidos a un cierto nivel y éstos tienen su máximo constante (o dicho de otra forma, todos se encuentran acotados a la misma altura o magnitud), está demostrado que la solución es óptima. A este tipo de arrays se les denomina *arrays de Dolph-Chebyshev*. En los ejemplos de la sección anterior, los diagramas obtenidos mediante programación lineal muestran ligeras variaciones en el módulo de sus lóbulos secundarios, por lo que se puede concluir que no se ha alcanzado la solución óptima. Sin embargo, los resultados que se consiguen son bastante aproximados a los que se obtienen mediante *SOCP*, los cuales ya se ha demostrado que son óptimos. Además, éstos adquieren más valor si se tiene en cuenta que el tiempo de procesamiento y recursos del sistema son mucho menores usando programación lineal.

Los resultados son especialmente buenos para el caso de diagramas de radiación simétricos,

donde el ejemplo del array circular 6.3 de la página 116 llega a converger perfectamente. Esto es porque para los casos de solamente componente real, el problema es teóricamente realizable mediante programación lineal, algo que no sucede cuando entra en juego la componente compleja. Esta es otra ventaja de utilizar este planteamiento no tan riguroso, que se puede implementar, aunque de modo subóptimo, problemas con componente compleja que generen diagramas de radiación para todo θ .

En la figura 6.4 de la página 117, al aplicar programación lineal se puede ver cómo los nulos del diagrama de radiación obtenido se encuentran suavizados y se quedan en valores altos comparados con los obtenidos por *SOCP*. Esto que en un principio puede parecer falta de precisión del algoritmo resulta en un caso de especial interés puesto a debate por la comunidad científica. Existe una técnica llamada *relleno de nulos o null-filling* [36] cuyo objetivo es “rellenar” o suavizar los campos nulos de una antena para evitar diferencias muy grandes en las diferentes magnitudes de las excitaciones de sus elementos, lo que supondría un esfuerzo y consumo muy grande en la alimentación de la antena, a cambio de perder resolución en los nulos que puede llevar en no anular del todo la señal en la dirección de éstos. Por ejemplo, para dicha figura se puede ver que en la optimización llevada a cabo mediante *SOCP* el máximo nivel en sus lóbulos secundarios es de -8 dB mientras que los mínimos bajan de -40 dB, unos 30 dB menos, que en unidades naturales supone unas 1.000 veces menos. Sin embargo, mediante programación lineal el máximo nivel de los SLL es de también aproximadamente -8 dB y el mínimo de unos -18, unos 10 dB de diferencia que a cambio sólo supone un factor entre uno y otro de 10 unidades naturales. La diferencia entre el nivel de potencia del elemento con mayor radiación y del elemento con la menor viene dada por la siguiente expresión

$$Dif_{pot-lem} = 20 \log \left(\frac{\max(|\{w\}|)}{\min(|\{w\}|)} \right) \text{ dB} \quad (6.10)$$

La diferencia de potencia entre el elemento que más radia con el que menos del array optimizado mediante *SOCP* es de unos 46 dB, mientras que mediante programación lineal se obtiene una diferencia entre elementos de aproximadamente 34 dB, lo que supone un ahorro de unos 12 dB o, equivalentemente, radiar con una diferencia de potencia unas 16 veces menor. Esto, a niveles del circuito de alimentación de la antena se traduce en, o bien introducir un amplificador que multiplique por 16 la potencia de radiación del elemento más baja, con el gran coste que ello conlleva, o bien insertar un atenuador que reduzca por 16 la potencia de radiación del elemento más alta y, por tanto, la desperdicie.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Introducción

Para terminar, este capítulo resume todos los resultados llevados a cabo mediante los distintos métodos y problemas de optimización, destacando las conclusiones más importantes. Además, se especulan las posibles vías de estudio a seguir a la finalización del presente proyecto.

7.2. Conclusiones

Durante el proyecto se han seguido una serie de pasos y su orden no es arbitrario sino que responde a un proceso específico. Se comenzó con el único propósito de *maximizar la directividad*, empleando para ello un teorema que optimiza el *cociente de dos formas hermíticas*, gracias a que la directividad se puede expresar como tal. Este método es muy ligero, pero se ha visto que salvo para los casos de superdirectividad, los cuales no son tampoco muy prácticos debido a su alto gasto y poca eficiencia, la maximización de la directividad no supone una mejora considerable respecto a alimentar los arrays de antenas con excitaciones cofasales.

Por ello, y debido al gran número de aplicaciones que existen en la actualidad que requieren máxima precisión con mínimas interferencias, es deseable introducir *restricciones* a la vez que se maximiza la directividad. Esto se logra mediante problemas de optimización lineales y cuadráticos que parten del planteamiento del cociente de dos formas hermíticas. El primero que se ha visto ha sido la *Programación Cuadrática*, que minimiza funciones cuadráticas sujetas a restricciones lineales. Las restricciones implementadas han sido de *campo nulo* y del *nivel de lóbulos secundarios*. Sin embargo, cuando se apunta a una región concreta del espacio donde el diagrama de radiación del array es asimétrico, las restricciones de los lóbulos secundarios pasan a ser cuadráticas debido a su componente compleja y, por lo tanto, se debe utilizar otra técnica que sea capaz de operar con restricciones cuadráticas.

La siguiente técnica elegida se llama *Programación en Cono de Segundo Orden (SOCP)*, la cual, por contra, minimiza funciones lineales sujetas a restricciones cuadráticas. Es posible convertir la función cuadrática que minimiza el denominador de la directividad en una función lineal más una restricción cuadrática. Además se pueden introducir las restricciones de campo nulo y del nivel

de lóbulos secundarios para cualquier región de apuntamiento generando cualquier diagrama de radiación óptimo posible. Aún así, es preferible utilizar, si se puede, programación cuadrática, pues es un algoritmo que consume menos recursos y es por tanto más rápido. Para los demás casos, sólo *SOCP* será capaz de resolverlos. Además, se ha planteado un nuevo problema de optimización: *minimizar el máximo nivel de lóbulos secundarios* dado un ancho de haz principal determinado.

Finalmente, para este último planteamiento de minimizar el máximo nivel de SLL, se puede aplicar también la técnica de *Programación Lineal*, la cual también es más ligera y por tanto preferible que *SOCP*. Sin embargo, esta técnica no cubre el caso en el que los diagramas de radiación son asimétricos. Mediante una interpretación no del todo rigurosa de un teorema geométrico, se puede generalizar el problema para cualquier tipo de diagrama, obteniendo, por contra, soluciones subóptimas. Aún así, dichas soluciones convergen con bastante exactitud, sobre todo en el caso simétrico, con lo que si la resolución que se desea del problema no es muy estricta se puede optar por sacrificar algo de precisión que da *SOCP* por tiempo y recursos que otorga la programación lineal.

7.3. Trabajo futuro

Existen multitud de posibles líneas de estudio para este proyecto de optimización de arrays de antenas. A continuación se nombran las principales.

El más inmediato sería analizar nuevas *topologías* de arrays, tanto planos, como triangulares, hexagonales (el cual se llegó a simular pero no se incluyó en la memoria por falta de relevancia) y demás; como tridimensionales, por ejemplo arrays cúbicos o esféricos. También sería interesante examinar arrays con distancia entre elementos no uniforme e incluso arbitraria. Hay que decir que todas las funciones de optimización presentes en el proyecto aceptarían cualquiera de estas nuevas formas de arrays, ya que se basan en las coordenadas de sus elementos en vez de en la distancia relativa entre ellos. Además, se podría plantear un nuevo tipo de problema de optimización que trate de hallar la posición óptima de cada uno de los elementos de un array para especificaciones determinadas en la dirección de apuntamiento, potencia y fase de sus excitaciones y restricciones de campo nulo y nivel de lóbulos secundarios.

Una opción interesante desde el punto de vista económico es limitar la optimización de las excitaciones a únicamente sus *fases* relativas, ya que variar los módulos conlleva a introducir amplificadores en el circuito de alimentación de la antena siendo mucho más costoso de implementar. Sin embargo, las soluciones que se alcanzarían serían subóptimas con respecto a las halladas en este trabajo.

Durante todo el proyecto se ha supuesto que los elementos de los arrays de antenas eran isotrópicos. Esto, según la sección 2.6.6 del estado del arte, significa que los elementos radian con la misma intensidad para cualquier dirección del espacio. Las antenas isotrópicas suelen ser usadas como caso de estudio pero en la práctica son irrealizables, por lo que si se quiere simular con el máximo realismo posible, se debería cambiar este tipo de antenas por *direccionales*, las cuales radian mejor para ciertos puntos del espacio que para otros, lo cual además ayudaría a direccionar la antena.

El siguiente paso sería introducir el efecto de *acoplos mutuos* entre los elementos de las antenas, que a lo largo del proyecto han sido ideales. Como ya se dijo en la introducción del capítulo 3, los acoplos mutuos son interferencias electromagnéticas entre los elementos próximos

en un array de antenas. Existen métodos en el diseño de los arrays para paliar sus efectos a la par que los obvios, como separar más los elementos o evitar que radien en la dirección del resto, pero aún así éstos no desaparecen del todo.

Aparte del estudio y comparación de nuevos tipos de algoritmos clásicos convexos aplicados a los arrays de antenas no analizados en este proyecto, como *programación bicuadrática* o los *métodos óptimos* H_∞ y L_∞ , sería interesante dar el salto a los *algoritmos evolutivos y heurísticos*, vistos en la sección 2.8 del estado del arte, los cuales ofrecen, mediante una visión radicalmente diferente del problema de optimización basada en la Teoría de la Evolución, nuevas soluciones de gran eficiencia.

Por último, se puede desarrollar la técnica de *Binary Integer Programming*, la cual restringe todas las variables de optimización a números binarios, esto es, a valer 0 ó 1. De este modo, se puede optimizar el array desde el punto de vista del estado de sus elementos, estando cada uno o bien encendido o bien apagado.

Glosario de acrónimos

- **AF:** Array Factor
- **AM:** Amplitude Modulation
- **CPU:** Central Processing Unit
- **DOA:** Direction Of Arrival
- **DSP:** Digital Signal Processing
- **EHF:** Extremely High Frequency
- **FM:** Frequency Modulation
- **FNBW:** First-Null BeamWidth
- **HF:** Hermitian Forms / High Frequency
- **HPBW:** Half-Power BeamWidth
- **IEEE:** Institute of Electrical and Electronics Engineers
- **ITU:** International Telecommunication Union
- **LF:** Low Frequency
- **LP:** Linear Programming
- **MF:** Medium Frequency
- **QP:** Quadratic Programming
- **RMS:** Root Mean Square
- **SHF:** Super High Frequency
- **SLL:** Side-Lobe Level
- **SO:** Sin Optimizar
- **SOCP:** Second-Order Cone Programming
- **UHF:** Ultra High Frequency
- **VHF:** Very High Frequency
- **VLf:** Very Low Frequency
- **WLAN:** Wireless Local Area Network

Bibliografia

- [1] Constantine A. Balanis. *Antenna theory: analysis and design*. John Wiley & sons, INC., 3rd edition edition, May 2005.
- [2] A.I. Uzkov. An approach to the problem of optimum directive antenna design. *C.R. Acad. Sci. USSR*, vol. 35, 1946.
- [3] R. G. Medhurst A. Bloch and S.D. Pool. A new approach to the design of superdirective aerial arrays. *Proc. Inst. Elec. Eng.*, vol. 100:pp. 303–314, September 1953.
- [4] M. Uzsoky and L. Solymar. Theory of superdirective linear arrays. *Acta Phys. (Budapest)*, vol. 6:pp. 185–204, 1.956.
- [5] S. W. Lee Y.T. Lo and Q. H. Lee. Optimization of directivity and signal-to-noise ratio of an arbitrary antenna array. *Proceedings IEEE*, vol. 54:pp. 1033–1045, 1966.
- [6] C. T. Tai. The optimum directivity of uniformly spaced broadside arrays of dipoles. *IEEE Transactions Antennas Propagation*, vol. AP-12:pp. 447–454, July 1964.
- [7] D.K. Cheng and F.I. Tseng. Maximisation of directive gain for circular and elliptical arrays. *Proceedings of IEEE*, vol. 114:p. 589 – 594, May 1967.
- [8] D. K. Cheng and F. I. Tseng. Gain optimization for arbitrary antenna arrays. *IEEE Transactions Antennas Propagation*, vol. AP-13:pp. 973–974, November 1967.
- [9] E. I. Krupitskii. On the maximum directivity of antennas consisting of discrete radiators. *Sov. Phys. - Dokl.*, vol. 7:pp. 257–259, September 1962.
- [10] David K. Cheng. Optimization techniques for antenna arrays. *Proceedings of IEEE*, vol. 59(no. 12), December 1971.
- [11] F.R. Gantmacher. *The theory of matrices*, volume vol. I. Chelsea Publishing Company, 1960.
- [12] Gilbert Strang. *Linear Algebra and its applications*. Cengage Learning, 4th edition edition, July 2005.
- [13] I. Adler and F. Alizadeh. Primal-dual interior point algorithms for convex quadratically constrained and semidefinite optimization problems. *Rutcor Research Report*, (46-95), December 1995.
- [14] Jean-Pierre A. Haeberly Farid Alizadeh and Michael L. Overton. Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: convergence rates, stability and numerical results. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 8(no. 3):pp. 746–768, August 1998.
- [15] L. Vandenberghe. Primal-dual interior-point method. 2013.
- [16] Michel Baes. Primal-dual interior-point methods geometric programming.

- [17] Philip E. Gill and Elizabeth Wong. Methods for convex and general quadratic programming. July 2014.
- [18] Christian Kirches Travis C. Johnson and Andreas Wächter. An active-set quadratic programming method based on sequential hot-starts. October 2013.
- [19] Elizabeth Wong. *Active-Set methods for Quadratic Programming*. PhD thesis, University of California, San Diego, 2011.
- [20] Christopher M. Maes. *A regularized Active-Set method for sparse convex Quadratic Programming*. PhD thesis, Stanford University, November 2010.
- [21] Frédéric Delbos and J. Charles Gilbert. Global linear convergence of an augmented lagrangian algorithm to solve convex quadratic optimization problems. *Journal of Convex Analysis*, vol. 12(no. 1):45–69, 2005.
- [22] Donald Goldfarb Zaiwen Wen and Wotao Yin. Alternating direction augmented lagrangian methods for semidefinite programming. *Math. Prog. Comp.*, (2):203–230, September 2010.
- [23] Philip E. Gill and Daniel P. Robinson. A primal-dual augmented lagrangian. *Oxford University Computing Laboratory*, May 2008.
- [24] Jonathan Eckstein. Augmented lagrangian and alternating direction methods for convex optimization: a tutorial and some illustrative computational results. *Rutcor Research Report*, December 2012.
- [25] Fredrik Carlsson and Anders Forsgren. A conjugate-gradient based approach for approximate solutions of quadratic programs. *Royal Institute of Technology*, February 2008.
- [26] Eiki Yamakawa and Masao Fukushima. A block-parallel conjugate gradient method for separable quadratic programming problems. *Journal of the Operations Research*, vol. 39(no. 3), September 1996.
- [27] Silvia Bonettini. Some preconditioned conjugate gradient algorithms for the solution of equality constrained quadratic programming problems. *Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara*, November 2006.
- [28] Ciyou Zhu and R. T. Rockafellar. Primal-dual projected gradient algorithms for extended linear-quadratic programming. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1992.
- [29] James Costa Roman A. Polyak and Saba Neyshabouri. Dual fast projected gradient method for quadratic programming. *Springer-Verlag*, 2012.
- [30] Jonathan Hogg and Jennifer Scott. A practical dual gradient-projection method for large-scale, strictly-convex quadratic programming. *STFC Rutherford Appleton Laboratory*, 2013.
- [31] Philip Wolfe. The simplex method for quadratic programming. *The Econometric Society*, vol. 27(no. 3):pp. 382–398, July 1959.
- [32] C. van de Panne and Andrew Whinston. Simplicial methods for quadratic programming. *International Center for Management Science*.
- [33] Nejmaddin A. Suleiman and Maher A. Nawkhass. A new modified simplex method to solve quadratic fractional programming problem and compared it to a traditional simplex method by using pseudoaffinity of quadratic fractional functions. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 7(no. 76):3749–3764, 2013.

- [34] Olov Einarsson. Optimization of planar arrays. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-27(no. 1), January 1979.
- [35] Stephen Boyd Miguel Sousa Lobo, Lieven Vandenbergue and Hervé Lebret. Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and its Applications*, (no. 284), January 1998.
- [36] J.A. Rodríguez and F. Ares. Synthesis of shaped beam antenna pattern with null-filling in the sidelobe region. *Electron. Lett.*, vol. 33(no. 24):pp. 2004–2005, November 1997.

Apéndice A

Conceptos matemáticos

A continuación se realiza un pequeño repaso a los conceptos matemáticos principales que aparecen durante el desarrollo del proyecto. Éstos tienen que ver con vectores y matrices, y sus operaciones asociadas, englobándose en la rama del álgebra.

A.1. Vectores y matrices

Durante todo el desarrollo del proyecto, se sigue la notación $\langle a \rangle$ para referirse a vectores fila, $\{b\}$ para vectores columnas y $[C]$ para denotar matrices. Además, los vectores y matrices están indexadas empezando por cero y finalizando en su dimensión menos uno, según

$$\langle a \rangle \equiv a_{0\dots N-1} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{N-1}]$$

$$\{b\} \equiv b_{0\dots M-1} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{bmatrix}$$

$$[C] \equiv C_{0\dots N-1,0\dots M-1} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & \cdots & c_{0,N-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,N-1} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M-1,0} & c_{M-1,1} & c_{M-1,2} & \cdots & c_{M-1,N-1} \end{pmatrix}$$

En algunos casos teóricos, para denotar un vector cualquiera sin especificar si es un vector fila o columna, se utiliza cualquiera de las dos notaciones formales matemáticas \mathbf{u} ó \vec{u} , siendo

$$\mathbf{u} \equiv \vec{u} \equiv u_{0\dots N-1} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$$

A.2. Autovectores y autovalores

Un *autovector*, también llamado *vector propio* o *característico* o *eigenvector*, de una matriz cuadrada¹ $N \times N$ $[A]$, es un vector \mathbf{v} de dimensión N real distinto de cero que, multiplicado por $[A]$, da como resultado un escalar λ múltiplo de sí mismo, el cual es llamado *autovalor*, *valor propio* o *característico* o *eigenvalor*. Todo esto se puede formular como

$$[A]\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^N \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Despejando, se obtiene la ecuación equivalente

$$([A] - \lambda[I])\mathbf{v} = 0$$

donde $[I]$ es la matriz identidad² de dimensiones $N \times N$. De este modo, se puede decir que λ es un autovalor $\Leftrightarrow \det([A] - \lambda[I]) = 0$.

A.3. Matriz hermítica

Una *matriz hermítica* o *hermitiana* es una matriz cuadrada³ y compleja que es igual a su transpuesta⁴ conjugada⁵. Así, cada elemento en la i -ésima fila y j -ésima columna es igual al conjugado del elemento en la j -ésima fila e i -ésima columna

$$[A] = \overline{[A^T]} \quad , \quad a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$$

Una matriz hermítica suele denotarse como $[A^H]$, $[A^*]$ ó $[A^\dagger]$.

¹Una *matriz cuadrada* es una matriz con el mismo número de filas que de columnas, con lo que, si es de dimensión N , tiene N filas y N columnas, tal que

$$[C] \equiv C_{0\dots N-1,0\dots N-1} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,N-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \cdots & c_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

²Una *matriz identidad* es una matriz cuadrada (ver nota 1) de ceros salvo su diagonal principal a uno, según

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

³Ver nota 1.

⁴La *matriz transpuesta* de la matriz $[A]$, representada como $[A^T]$, reposiciona cada elemento de la fila i y columna j en la fila j y la columna i , según

$$[A^T_{ij}] = [A_{ji}]$$

⁵La *matriz conjugada* de la matriz $[A]$, representada como $[\overline{A}]$, conjuga sus elementos, es decir, cambia de signo la parte imaginaria de sus elementos.

A.4. Espacios vectoriales

Un *espacio vectorial* es una estructura matemática formada por una colección de elementos básicos llamados vectores, con los cuales se pueden realizar dos operaciones básicas: la adición y la multiplicación por escalares. Ambas operaciones deben satisfacer ocho axiomas, cuatro cada una, listados a continuación.

Sea un espacio vectorial sobre un cuerpo (ver siguiente sección) \mathbb{K} un conjunto⁶ V no vacío y sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se define la operación de adición o suma como

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

Sea además $\mathbf{w} \in V$, los cuatro axiomas de la operación adición o suma son:

1. Propiedad conmutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
2. Propiedad asociativa: $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
3. Elemento neutro o identidad: $\exists \mathbf{o} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in V$.
4. Elemento opuesto: $\forall \mathbf{u} \in V$, $\exists -\mathbf{u} \in V$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Sea el mismo espacio vectorial V con el vector $\mathbf{u} \in V$ y el escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, se define la operación de multiplicación o producto por escalar como

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, \mathbf{u}) &\mapsto \lambda \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Sea además $\mu \in \mathbb{K}$, los cuatro axiomas de la operación multiplicación o producto por escalar son:

5. Propiedad asociativa: $\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{u}$.
6. Elemento neutro o identidad: sea $1 \in \mathbb{K}$, entonces $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.
7. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de vectores: $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$.
8. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares: $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u}$.

A.5. Cuerpos y campos vectoriales

Un *cuerpo o campo matemático* (no confundir con campo vectorial visto a continuación en esta misma sección) es una estructura algebraica en la cual las operaciones de adición y multiplicación se pueden realizar y además cumplen una serie de propiedades.

⁶Un *conjunto* es una colección de elementos considerada en sí misma como un objeto.

Un cuerpo es un anillo de división conmutativo⁷, es decir, un anillo conmutativo y unitario en el que todo elemento distinto de cero es invertible respecto del producto. Por tanto un cuerpo es un conjunto \mathbb{K} en el que se han definido dos operaciones $+$ y \cdot , llamadas adición y multiplicación respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades:

- \mathbb{K} es cerrado para la adición y la multiplicación: $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $a + b$ y $a \cdot b$ son operaciones matemáticas $\in \mathbb{K}$.
- Conmutatividad de la adición y la multiplicación: $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- Asociatividad de la adición y la multiplicación: $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Existencia de un elemento neutro para la adición y la multiplicación: $\exists 0 \in \mathbb{K}$, tal que $\forall a \in \mathbb{K}$, $a + 0 = a$; $\exists 1 \neq 0 \in \mathbb{K}$, tal que $\forall a \in \mathbb{K}$, $a \cdot 1 = a$.
- Existencia del elemento opuesto y de inversos: para cada $a \in \mathbb{K}$, $\exists -a \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-a) = 0$; para cada $a \neq 0 \in \mathbb{K}$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{K}$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
- Distributividad de la multiplicación respecto de la adición: $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Son ejemplos de cuerpos matemáticos los conjuntos de los números enteros \mathbb{Z} , racionales \mathbb{Q} , reales \mathbb{R} o complejos \mathbb{C} .

Un *campo vectorial* representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Asocia un vector a cada punto en el espacio euclídeo⁸, de la forma $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Su definición es la siguiente.

⁷Un *anillo* es una estructura algebraica formada por un conjunto R no vacío y dos operaciones, que son la adición ($+$) y la multiplicación (\cdot). Se denota por la terna $(R, +, \cdot)$.

Un *anillo de división* es un anillo unitario R (ver nota 11) en el que todo elemento distinto de cero es invertible y por tanto una unidad. Si $U(R)$ es su grupo de unidades, entonces

$$U(R) = R \setminus \{0\}$$

Un *anillo de división conmutativo* es un anillo $(R, +, \cdot)$ en el que la operación de multiplicación (\cdot) es conmutativa, esto es, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$. Todo cuerpo es un anillo de división conmutativo.

⁸Un *espacio euclídeo o euclidiano* es un espacio vectorial (visto en A.4) normado (visto más adelante en A.7) sobre los números reales de dimensión finita, en que la norma es la asociada al producto escalar ordinario. Para cada número entero no negativo n , el espacio euclídeo n -dimensional se representa por el símbolo \mathbb{R}^n y es el conjunto de todas las tuplas ordenadas

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

en donde cada x_i es un número real, junto con la función distancia entre dos puntos $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ e $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ llamada *distancia euclidiana*, definida por la fórmula

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2}$$

Un campo vectorial sobre un subconjunto⁹ del espacio euclídeo $X \subset \mathbb{R}^n$ es una función con valores vectoriales:

$$V : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se dice que V es un campo vectorial C^k si como función es k veces diferenciable con continuidad en X . Un campo vectorial se puede visualizar como un espacio X con un vector n -dimensional unido a cada punto en X .

Dados dos campos vectoriales C^k V y W , definidos sobre X , y una función real C^k f definida también sobre X , las operaciones producto por escalar

$$(fV)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})V(\mathbf{x})$$

y adición

$$(V + W)(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x})$$

definen el módulo de los campos vectoriales C^k sobre el anillo¹⁰ de las funciones C^k .

A.6. Producto escalar y vectorial

El *producto escalar* o *producto punto* es una operación algebraica entre dos vectores de la misma longitud $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ que da como resultado un número o escalar. Queda definido como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_{N-1}v_{N-1}$$

El producto escalar presenta las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- Propiedad distributiva: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- Propiedad asociativa: $(\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real.
- Si $\mathbf{u} = \mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$ es el vector nulo, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$; si $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ es cualquier otro vector, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$.
- Ortogonalidad: si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ entonces $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

⁹Un conjunto (ver nota 6) B es *subconjunto* de un conjunto A si B está contenido dentro de A . Se representa de la siguiente forma

$$B \subset A$$

¹⁰Ver nota 7.

El *producto vectorial* o *producto cruz* es una operación entre dos vectores en un espacio tridimensional. Sean dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ que forman un ángulo θ , se define el producto vectorial como

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta \hat{\mathbf{n}}$$

cuya representación gráfica es

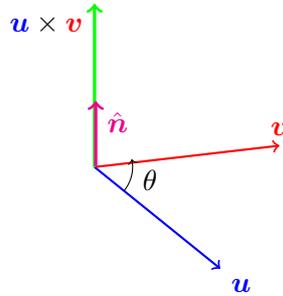


Figura A.1: Producto vectorial

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario¹¹ y ortogonal¹² a los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} con un sentido igual al del avance de un tornillo.

El producto vectorial se puede definir de una manera más desarrollada. Sea la base canónica¹³ de dimensión tres

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

cuya representación gráfica en los ejes de coordenadas es

¹¹Un *vector unitario* es un vector de módulo igual a uno, tal que

$$\mathbf{u} \equiv \hat{\mathbf{u}} \Leftrightarrow |\mathbf{u}| = 1$$

Se puede hallar mediante

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$$

¹²Dos vectores son *ortogonales* o *perpendiculares* si su producto escalar es cero

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

¹³Una *base canónica* es una colección de vectores linealmente independientes cuyo número coincide con la dimensión del propio espacio vectorial. Ésta se encuentra normalizada, esto es, está compuesta de vectores unitarios (ver nota 11). A continuación se muestran brevemente algunas de sus propiedades.

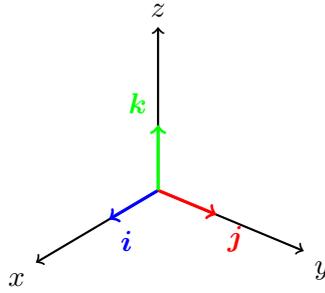


Figura A.2: Base canónica

y que posee las siguientes propiedades

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) \\ \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \end{cases}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

Se definen los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} como

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

El producto vectorial se define según

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \mathbf{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{k}$$

Equivalentemente, usando notación matricial, el producto vectorial también se puede obtener a partir del siguiente determinante

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

El producto vectorial presenta las siguientes propiedades:

- Propiedad anticonmutativa: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.
- Propiedad distributiva: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

- Multiplicación de un escalar: $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ un número real.
- Cancelación por ortogonalidad: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
- Condición de paralelismo: si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ con $\mathbf{u} \neq 0$ y $\mathbf{v} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.
- Doble producto vectorial: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.
- Identidad de Jacobi: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
- Módulo del producto vectorial: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.
- Dirección del producto vectorial: $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$, el cual se ve que es unitario y es normal al plano que contiene los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

A.7. Norma euclídea

La *norma euclídea* de un vector fila $\langle u \rangle = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ se encuentra definida como la raíz cuadrada del producto escalar, visto en el apartado anterior, teniendo la forma

$$\|u\| := \sqrt{\langle u \rangle \{u^*\}}$$

donde $\{u^*\}$ es el vector columna transpuesto conjugado o hermítico (visto en A.3) del vector $\langle u \rangle$.

Apéndice B

Presupuesto

1) Ejecución Material	
▪ Compra de ordenador personal (versión de Windows incluida)	800 €
▪ MATLAB® R2014b (versión estándar)	2.000 €
▪ Monitor adicional	200 €
▪ Cable VGA	6 €
▪ Alquiler de impresora láser durante 9 meses	50 €
▪ Material de oficina	50 €
▪ Total de ejecución material	3.106 €
2) Gastos generales	
▪ 16 % sobre Ejecución Material	496,96 €
3) Beneficio Industrial	
▪ 6 % sobre Ejecución Material	186,36 €
4) Honorarios Proyecto	
▪ 1.800 horas a 16 €/hora	28.800 €
5) Material fungible	
▪ Gastos de impresión	250 €
▪ Encuadernación	20 €
6) Subtotal del presupuesto	
▪ Subtotal Presupuesto	32.859,32 €
7) I.V.A. aplicable	
▪ 21 % Subtotal Presupuesto	6900,46 €
8) Total presupuesto	
▪ Total Presupuesto	39.759,78 €

Madrid, Abril 2015

El Ingeniero Jefe de Proyecto

Fdo.: Pablo Asenjo García

Ingeniero de Telecomunicación

Apéndice C

Pliego de condiciones

Pliego de condiciones

Este documento contiene las condiciones legales que guiarán la realización, en este proyecto, de la *Aplicación de algoritmos de optimización convexa a la síntesis de diagramas de radiación de arrays de antenas*. En lo que sigue, se supondrá que el proyecto ha sido encargado por una empresa cliente a una empresa consultora con la finalidad de realizar dicho sistema. Dicha empresa ha debido desarrollar una línea de investigación con objeto de elaborar el proyecto. Esta línea de investigación, junto con el posterior desarrollo de los programas está amparada por las condiciones particulares del siguiente pliego.

Supuesto que la utilización industrial de los métodos recogidos en el presente proyecto ha sido decidida por parte de la empresa cliente o de otras, la obra a realizar se regulará por las siguientes:

Condiciones generales.

1. La modalidad de contratación será el concurso. La adjudicación se hará, por tanto, a la proposición más favorable sin atender exclusivamente al valor económico, dependiendo de las mayores garantías ofrecidas. La empresa que somete el proyecto a concurso se reserva el derecho a declararlo desierto.
2. El montaje y mecanización completa de los equipos que intervengan será realizado totalmente por la empresa licitadora.
3. En la oferta, se hará constar el precio total por el que se compromete a realizar la obra y el tanto por ciento de baja que supone este precio en relación con un importe límite si este se hubiera fijado.
4. La obra se realizará bajo la dirección técnica de un Ingeniero Superior de Telecomunicación, auxiliado por el número de Ingenieros Técnicos y Programadores que se estime preciso para el desarrollo de la misma.
5. Aparte del Ingeniero Director, el contratista tendrá derecho a contratar al resto del personal, pudiendo ceder esta prerrogativa a favor del Ingeniero Director, quien no estará obligado a aceptarla.

6. El contratista tiene derecho a sacar copias a su costa de los planos, pliego de condiciones y presupuestos. El Ingeniero autor del proyecto autorizará con su firma las copias solicitadas por el contratista después de confrontarlas.
7. Se abonará al contratista la obra que realmente ejecute con sujeción al proyecto que sirvió de base para la contratación, a las modificaciones autorizadas por la superioridad o a las órdenes que con arreglo a sus facultades le hayan comunicado por escrito al Ingeniero Director de obras siempre que dicha obra se haya ajustado a los preceptos de los pliegos de condiciones, con arreglo a los cuales, se harán las modificaciones y la valoración de las diversas unidades sin que el importe total pueda exceder de los presupuestos aprobados. Por consiguiente, el número de unidades que se consignan en el proyecto o en el presupuesto, no podrá servirle de fundamento para entablar reclamaciones de ninguna clase, salvo en los casos de rescisión.
8. Tanto en las certificaciones de obras como en la liquidación final, se abonarán los trabajos realizados por el contratista a los precios de ejecución material que figuran en el presupuesto para cada unidad de la obra.
9. Si excepcionalmente se hubiera ejecutado algún trabajo que no se ajustase a las condiciones de la contrata pero que sin embargo es admisible a juicio del Ingeniero Director de obras, se dará conocimiento a la Dirección, proponiendo a la vez la rebaja de precios que el Ingeniero estime justa y si la Dirección resolviera aceptar la obra, quedará el contratista obligado a conformarse con la rebaja acordada.
10. Cuando se juzgue necesario emplear materiales o ejecutar obras que no figuren en el presupuesto de la contrata, se evaluará su importe a los precios asignados a otras obras o materiales análogos si los hubiere y cuando no, se discutirán entre el Ingeniero Director y el contratista, sometiéndolos a la aprobación de la Dirección. Los nuevos precios convenidos por uno u otro procedimiento, se sujetarán siempre al establecido en el punto anterior.
11. Cuando el contratista, con autorización del Ingeniero Director de obras, emplee materiales de calidad más elevada o de mayores dimensiones de lo estipulado en el proyecto, o sustituya una clase de fabricación por otra que tenga asignado mayor precio o ejecute con mayores dimensiones cualquier otra parte de las obras, o en general, introduzca en ellas cualquier modificación que sea beneficiosa a juicio del Ingeniero Director de obras, no tendrá derecho sin embargo, sino a lo que le correspondería si hubiera realizado la obra con estricta sujeción a lo proyectado y contratado.
12. Las cantidades calculadas para obras accesorias, aunque figuren por partida alzada en el presupuesto final (general), no serán abonadas sino a los precios de la contrata, según las condiciones de la misma y los proyectos particulares que para ellas se formen, o en su defecto, por lo que resulte de su medición final.
13. El contratista queda obligado a abonar al Ingeniero autor del proyecto y director de obras así como a los Ingenieros Técnicos, el importe de sus respectivos honorarios facultativos por formación del proyecto, dirección técnica y administración en su caso, con arreglo a las tarifas y honorarios vigentes.
14. Concluida la ejecución de la obra, será reconocida por el Ingeniero Director que a tal efecto designe la empresa.
15. La garantía definitiva será del 4% del presupuesto y la provisional del 2%.
16. La forma de pago será por certificaciones mensuales de la obra ejecutada, de acuerdo con los precios del presupuesto, deducida la baja si la hubiera.

17. La fecha de comienzo de las obras será a partir de los 15 días naturales del replanteo oficial de las mismas y la definitiva, al año de haber ejecutado la provisional, procediéndose si no existe reclamación alguna, a la reclamación de la fianza.
18. Si el contratista al efectuar el replanteo, observase algún error en el proyecto, deberá comunicarlo en el plazo de quince días al Ingeniero Director de obras, pues transcurrido ese plazo será responsable de la exactitud del proyecto.
19. El contratista está obligado a designar una persona responsable que se entenderá con el Ingeniero Director de obras, o con el delegado que éste designe, para todo relacionado con ella. Al ser el Ingeniero Director de obras el que interpreta el proyecto, el contratista deberá consultarle cualquier duda que surja en su realización.
20. Durante la realización de la obra, se girarán visitas de inspección por personal facultativo de la empresa cliente, para hacer las comprobaciones que se crean oportunas. Es obligación del contratista, la conservación de la obra ya ejecutada hasta la recepción de la misma, por lo que el deterioro parcial o total de ella, aunque sea por agentes atmosféricos u otras causas, deberá ser reparado o reconstruido por su cuenta.
21. El contratista, deberá realizar la obra en el plazo mencionado a partir de la fecha del contrato, incurriendo en multa, por retraso de la ejecución siempre que éste no sea debido a causas de fuerza mayor. A la terminación de la obra, se hará una recepción provisional previo reconocimiento y examen por la dirección técnica, el depositario de efectos, el interventor y el jefe de servicio o un representante, estampando su conformidad el contratista.
22. Hecha la recepción provisional, se certificará al contratista el resto de la obra, reservándose la administración el importe de los gastos de conservación de la misma hasta su recepción definitiva y la fianza durante el tiempo señalado como plazo de garantía. La recepción definitiva se hará en las mismas condiciones que la provisional, extendiéndose el acta correspondiente. El Director Técnico propondrá a la Junta Económica la devolución de la fianza al contratista de acuerdo con las condiciones económicas legales establecidas.
23. Las tarifas para la determinación de honorarios, reguladas por orden de la Presidencia del Gobierno el 19 de Octubre de 1961, se aplicarán sobre el denominado en la actualidad "Presupuesto de Ejecución de Contrata" y anteriormente llamado "Presupuesto de Ejecución Material" que hoy designa otro concepto.

Condiciones particulares.

La empresa consultora, que ha desarrollado el presente proyecto, lo entregará a la empresa cliente bajo las condiciones generales ya formuladas, debiendo añadirse las siguientes condiciones particulares:

1. La propiedad intelectual de los procesos descritos y analizados en el presente trabajo, pertenece por entero a la empresa consultora representada por el Ingeniero Director del Proyecto.
2. La empresa consultora se reserva el derecho a la utilización total o parcial de los resultados de la investigación realizada para desarrollar el siguiente proyecto, bien para su publicación o bien para su uso en trabajos o proyectos posteriores, para la misma empresa cliente o para otra.

3. Cualquier tipo de reproducción aparte de las reseñadas en las condiciones generales, bien sea para uso particular de la empresa cliente, o para cualquier otra aplicación, contará con autorización expresa y por escrito del Ingeniero Director del Proyecto, que actuará en representación de la empresa consultora.
4. En la autorización se ha de hacer constar la aplicación a que se destinan sus reproducciones así como su cantidad.
5. En todas las reproducciones se indicará su procedencia, explicitando el nombre del proyecto, nombre del Ingeniero Director y de la empresa consultora.
6. Si el proyecto pasa la etapa de desarrollo, cualquier modificación que se realice sobre él, deberá ser notificada al Ingeniero Director del Proyecto y a criterio de éste, la empresa consultora decidirá aceptar o no la modificación propuesta.
7. Si la modificación se acepta, la empresa consultora se hará responsable al mismo nivel que el proyecto inicial del que resulta el añadirla.
8. Si la modificación no es aceptada, por el contrario, la empresa consultora declinará toda responsabilidad que se derive de la aplicación o influencia de la misma.
9. Si la empresa cliente decide desarrollar industrialmente uno o varios productos en los que resulte parcial o totalmente aplicable el estudio de este proyecto, deberá comunicarlo a la empresa consultora.
10. La empresa consultora no se responsabiliza de los efectos laterales que se puedan producir en el momento en que se utilice la herramienta objeto del presente proyecto para la realización de otras aplicaciones.
11. La empresa consultora tendrá prioridad respecto a otras en la elaboración de los proyectos auxiliares que fuese necesario desarrollar para dicha aplicación industrial, siempre que no haga explícita renuncia a este hecho. En este caso, deberá autorizar expresamente los proyectos presentados por otros.
12. El Ingeniero Director del presente proyecto, será el responsable de la dirección de la aplicación industrial siempre que la empresa consultora lo estime oportuno. En caso contrario, la persona designada deberá contar con la autorización del mismo, quien delegará en él las responsabilidades que ostente.

