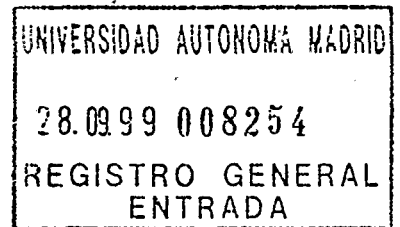


R.2.709

Tesis / I-9



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INFORMÁTICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

**Procesos de Estabilización,
Sincronización y Aprendizaje en
*Redes Neuronales Estocásticas***

Memoria de Tesis Doctoral
presentada por

Francisco de Borja Rodríguez Ortiz

(1)

Dirigida por

Vicente López Martínez

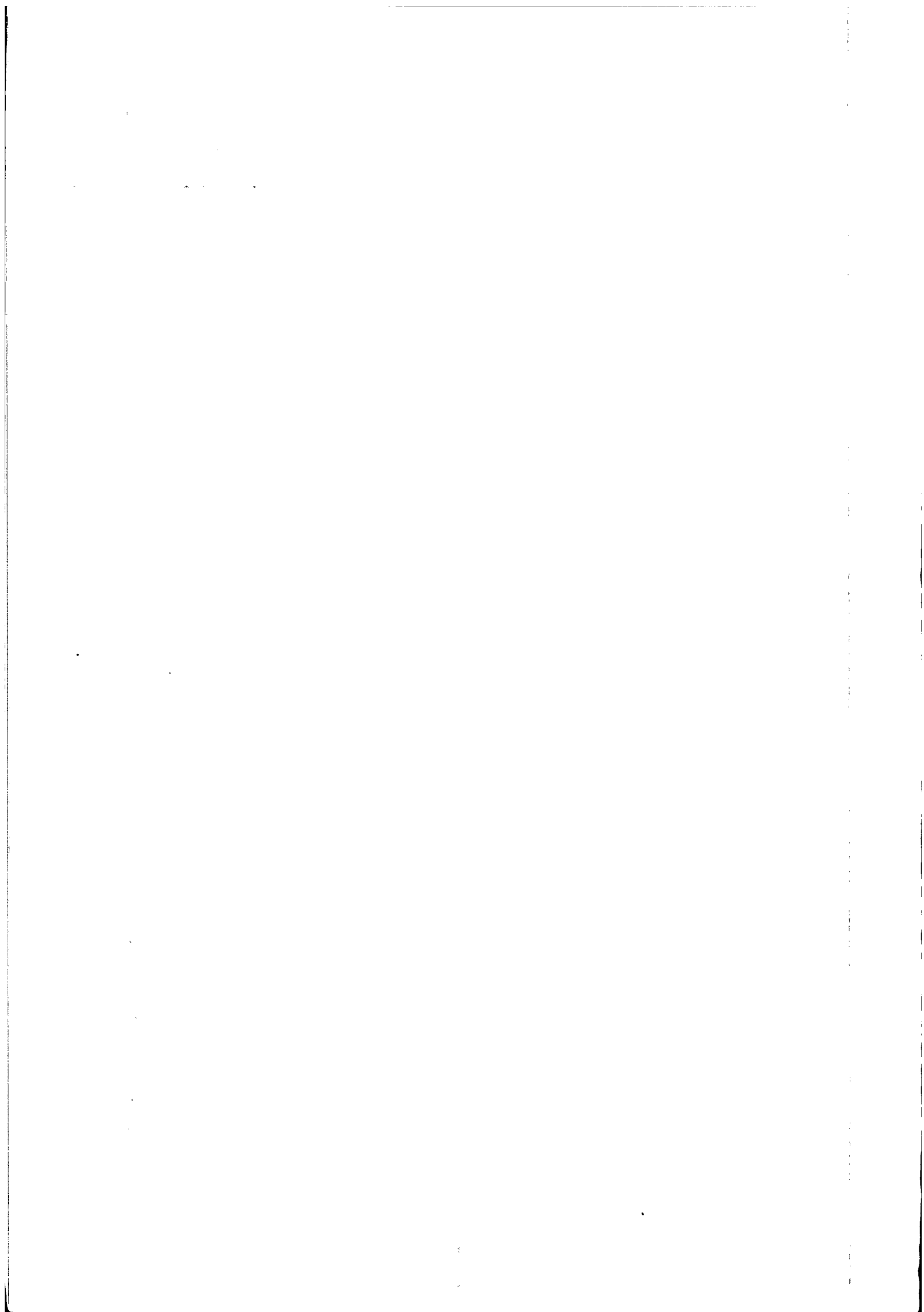
Prof. Titular de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial en la
Escuela Técnica Superior de Informática. Universidad Autónoma de Madrid.

Hilbert Johan Kappen

Associate Prof. at Department of Medical Physics and Biophysics (Neural
Networks Group). Katholieke Universiteit Nijmegen, The Netherlands.

Septiembre 1999

X-54-228622-9



Dedicada a mis padres.

Agradecimientos¹

Me gustaría agradecer especialmente a Vicente López y Bert Kappen su ayuda y sabios consejos en la realización de este trabajo, y además darles las gracias por introducirme en este apasionante campo de investigación.

Agradezco a mis antiguos compañeros del IIC y a mis compañeros del departamento de Ingeniería Informática su amistad y consejos que me han brindado todos estos años de trabajo. También agradezco a mis compañeros que tuve durante mi estancia en Holanda, la hospitalidad y colaboración ofrecida. No puedo evitar agradecer de manera especial el apoyo y amistad recibida por mis primeros compañeros en esta cruzada que son Ana y Pablo. También doy las gracias a Alberto, Fernando y Ramón, por ayudarme a consolidar varias ideas relacionadas con esta tesis, a través de las conversaciones entabladas con ellos.

Muchas gracias a Ana Lozano por su constante ayuda, apoyo y paciencia en los mejores y peores momentos de la realización de este trabajo.

Por último, quiero mostrar mi agradecimiento en general a todas aquellas personas que han estado ayudándome y apoyándome en todo este tiempo.

¹Este trabajo ha sido financiado por el M.E.C a través de la beca de FPU AP94 50835443, y los proyectos de la CICYT TIC95-0965 y TIC98-0247-C02-02.

Índice General

I	Planteamiento del Problema	13
	Introducción	15
II	Un Modelo de Neurona y Redes Estocásticas	19
1	Un Modelo de Neurona Estocástica	21
1.1	Introducción	21
1.2	Modelado Neuronal	22
1.3	Modelo Neuronal Estocástico	23
1.3.1	La Neurona Aislada	24
1.3.2	La Interacción entre Neuronas	28
1.4	Otros Modelos Neuronales Estocásticos	29
2	Oscilación y Sincronización	33
2.1	Introducción	33
2.2	Espacio de Estados, Parámetros de Sincronización y Cadenas de Markov	34
2.2.1	Magnitudes Importantes para Medir la Sincronización . . .	36
2.2.2	Cadenas de Markov y Simulaciones	36
2.3	Varias Configuraciones Interesantes. Escalones de Sincronización.	37
2.3.1	Sincronización de dos Neuronas Iguales	38
2.3.2	Sincronización de una Neurona Lenta y una Neurona Rápida	41
2.4	El Origen de la Especificidad	45
2.5	Regiones de Sincronía y su Cálculo	51

2.6	Producción de ISIH's Multimodales	58
2.6.1	La Generación de ISIH's Mediante Conexiones Inhibitorias	60
2.6.2	Causas de ISIH's Multimodales en el Modelo Estocástico .	61
2.7	Conclusiones	64
3	Estabilidad y Sincronización en Poblaciones Idénticas Cuando N es Grande	65
3.1	Introducción	65
3.2	Algunas Preguntas Básicas	66
3.3	Modelo Neuronal y Dinámica de la Población	67
3.3.1	Unidades	67
3.3.2	Interacción entre las Unidades	67
3.3.3	Conjunto de Unidades y el Parámetro η	67
3.3.4	Descripción de la Población a Nivel Mesoscópico	68
3.4	Simulaciones y Resultados	69
3.4.1	Población Conducida por la Evolución Espontánea. El Rango de η Grande.	69
3.4.2	Población Conducida Principalmente por el Acoplamiento. η Intermedio.	71
3.4.3	Atractores de Sincronización para $\eta = 1$	78
3.5	Discusión y Conclusión	84
III	Máquinas de Boltzman	87
4	Aprendizaje Eficiente con Máquinas de Boltzmann	89
4.1	Introducción	89
4.2	Aprendizaje con las Máquinas de Boltzmann	91
4.2.1	Dinámica General en las Máquinas de Boltzmann	91
4.2.2	Aprendizaje Lento en Máquinas de Boltzmann	92
4.2.3	Máquinas de Boltzmann Deterministas, la Aproximación de Campo Medio	94
4.3	El Método de Campo Medio y la Corrección de Respuesta Lineal .	97
4.3.1	Formulación de Campo Medio	97

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
4.3.2 Derivación de la Corrección de Respuesta Lineal	99
4.4 La corrección TAP a las Ecuaciones de Campo Medio	101
4.5 Respuesta Lineal en una Red sin Neuronas Ocultas	103
4.6 Consecuencias de la Aproximación de Respuesta Lineal	104
4.7 Resultados Utilizando la Divergencia de Kullback	107
4.8 Comparación Mediante Recuperación de Patrones (Pattern Completion)	110
4.9 Comparación Mediante Inferencia Probabilística	113
4.9.1 Problema General de la Inferencia Probabilística	114
4.9.2 Proceso de Inferencia Mediante la Corrección de Respuesta Lineal	115
4.9.3 Resultados	117
4.10 Conclusiones y Discusión	123
Discusión General, Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo	127
Discusión General	127
Conclusiones Finales	131
Futuras Líneas de Trabajo	133
Apéndices	137
A La distribución Binomial Negativa aplicada al modelo neuronal estocástico	137
A.1 Introducción	137
A.2 Los Tiempos de Espera de la Binomial Negativa	137
A.3 Valor Esperado y Varianza de los Tiempos de Espera	138
B Cadenas de Markov en modelos de Sincronización	141
B.1 Introducción	141
B.2 Generalidades sobre Cadenas de Markov	141
B.2.1 Matrices Estocásticas	142
B.2.2 Tipos de Estados y CM's	143

B.2.3	Un Ejemplo del Cálculo de la MTP	144
B.3	Cálculo de los Parámetros de Sincronización a través de CM's . . .	147
B.3.1	Resultados sobre CM's Regulares	147
B.3.2	Matriz Fundamental de una CM ergódica Regular	148
B.3.3	Tiempos de los Primeros Pasos por un Estado determinado	148
B.3.4	Parámetros de Sincronización	149
C	Particiones Restringidas de un Número N	151
C.1	Introducción	151
C.2	Definición del Número de Particiones	151
C.3	Derivación de la Expresión para el Número de Particiones	152
D	Campo Medio y Respuesta Lineal	153
D.1	Introducción	153
D.2	Función de Partición en la Aproximación de Campo Medio	153
D.3	Cálculo de los Valores Esperados en la Aproximación de Campo Medio	154
D.4	Valores Esperados y Correlaciones en Función de Z	154
D.5	Deducción de la Corrección de Respuesta Lineal	155
D.6	Cálculo de la Matriz A_{ij} de Corrección de Respuesta Lineal	156
D.7	Modelo de Probabilidad Factorizado para Campo Medio	157
	Bibliografía	161

Índice de Figuras

1.1	Simulación de la actividad de una neurona aislada.	25
1.2	Distribución de probabilidad del tiempo que transcurre entre dos disparos consecutivos	26
1.3	Simulación de dos neuronas aisladas con diferentes parámetros	27
1.4	Ejemplo de cómo se transmite instantáneamente el disparo de una unidad a otra	29
2.1	Espacio de estados para dos neuronas estocásticas	35
2.2	Simulación mediante CM's para dos neuronas estocásticas con parámetros idénticos	38
2.3	Variación de σ frente al peso sináptico	39
2.4	Variación del tiempo medio de sincronización frente al peso sináptico	42
2.5	Variación del tiempo medio de sincronización frente al peso sináptico para otra configuración de parámetros	43
2.6	Variación de τ frente a los umbrales de las neuronas	45
2.7	Formas características de los escalones formados al variar el umbral de la neurona	46
2.8	Forma de las distribuciones de probabilidad del estado de una unidad cuando el estado de la otra está fijo	48
2.9	Simulaciones de las distribuciones de probabilidad del estado de una unidad cuando el estado de la otra está fijo	50
2.10	Bandas de sincronización, m , para dos neuronas	55
2.11	Bandas de sincronización, $m : n$, para dos neuronas	57
2.12	Periodo de sincronización en las bandas	58
2.13	Dispersión del periodo de sincronización en las bandas	59
2.14	Simulación de ISIH's multimodales para una red formada por dos unidades	61

2.15	Simulación de la evolución de las variables de estado del ISIH . . .	62
2.16	Simulación de diferentes ISIH's multimodales para cuatro configuraciones diferentes	63
3.1	Variación del $V\epsilon^{eff}$, según vamos variando el parámetro efectivo η	71
3.2	Comparación entre los promedios y desviaciones calculados con las simulaciones y las estimaciones teóricas	73
3.3	Número de mensajes por unidad de tiempo y correlaciones de los disparos	75
3.4	Número de mensajes acumulado y cálculo de la distribución de periodos	77
3.5	Evolución de la dispersión del disparo frente al tamaño de la población	78
3.6	Tendencia de decrecimiento de la dispersión del disparo en función del tamaño de la población	79
3.7	Comparación entre los periodos promedios calculados con las simulaciones y las estimaciones teóricas	80
3.8	Ejemplo del patrón de disparo que se forma con 64 neuronas, para $\eta = 1$	81
3.9	Comparación del número de particiones con las simulaciones . . .	83
3.10	Comparación entre los promedios de las dispersiones calculadas a través de las simulaciones, y por medio de las estimaciones teóricas	86
4.1	Aprendizaje mediante descenso por gradiente	95
4.2	Ejemplo del cálculo para la conexión lateral y umbrales obtenidos por el método exacto y el método de respuesta lineal	101
4.3	Distancia de Kullback media sobre cinco conjuntos aleatorios de datos de entrenamiento	103
4.4	Distancia de Kullback relativa al método exacto para la aproximación de campo medio y el método de corrección de respuesta lineal con auto-acople	106
4.5	Variación de la calidad de recuperación de patrones Q con respecto a la divergencia de Kullback	108
4.6	Calidad de recuperación de patrones para 27 tipos diferentes de problemas con diferentes números de neuronas	111
4.7	Variación del tiempo de computación frente al número de neuronas de la red	113

ÍNDICE DE FIGURAS

9

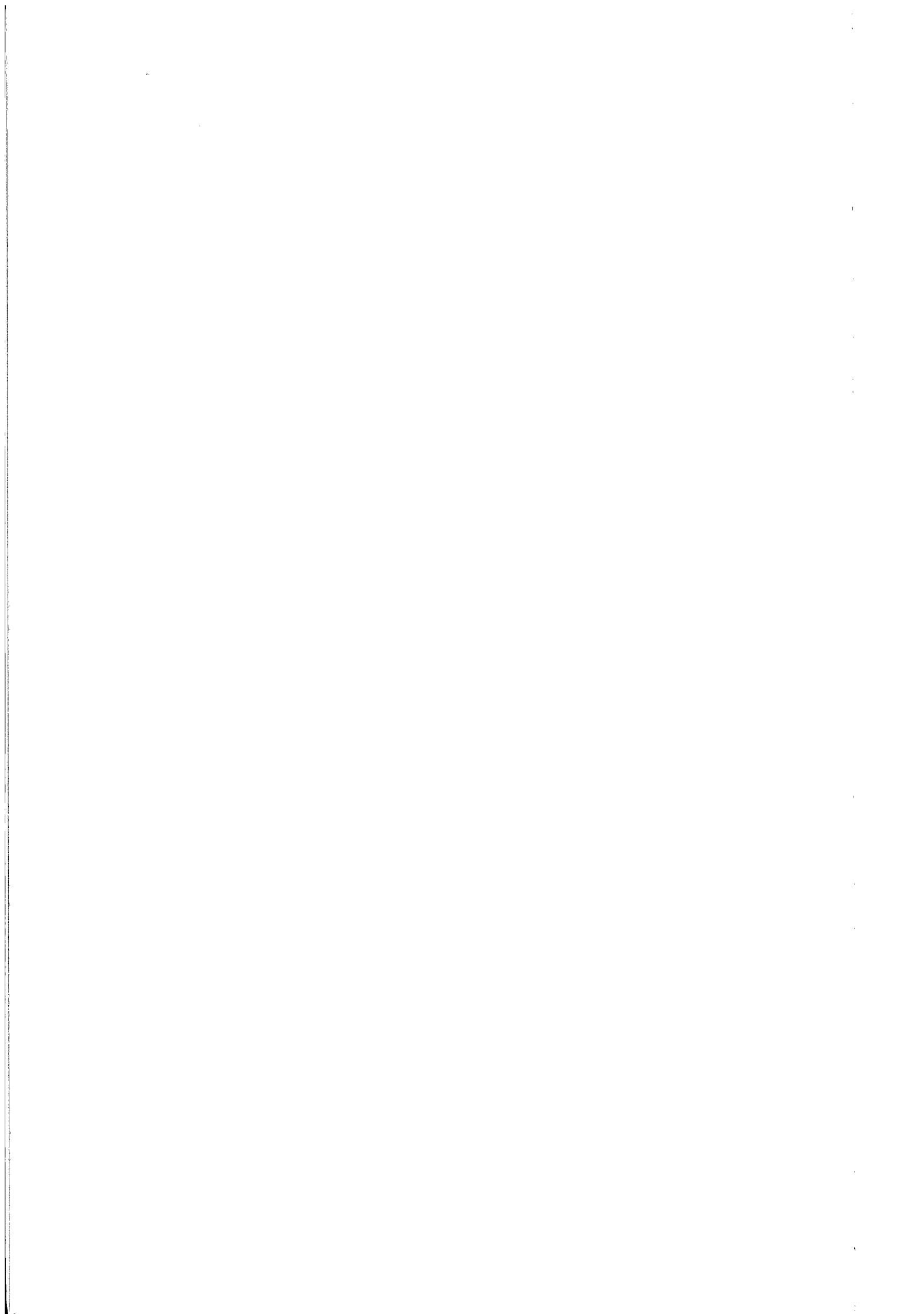
4.8	Histogramas de los cocientes de las distancias de Kullback para aprendizaje de MB's en los métodos exactos y de respuesta lineal	118
4.9	Distancias de Kullback condicionales para dos problemas aleatorios de seis neuronas	120
4.10	Distancias de Kullback condicionales para el método exacto calculadas mediante simulaciones de Monte Carlo, y para la aproximación de respuesta lineal	122
B.1	Espacio "real" de estados para dos neuronas estocásticas	144

Índice de Tablas

2.1	Parámetros de sincronización para dos neuronas estocásticas idénticas	40
2.2	Parámetros de un sistema de dos unidades formado por una neurona de disparo lento y otra de disparo rápido	41
2.3	Otra configuración de parámetros de un sistema de dos unidades formado por una neurona lenta y otra rápida	43
2.4	Dos ejemplos de parámetros de un sistema de dos unidades cuando se varía el umbral	44
2.5	Configuración de parámetros de un sistema de dos unidades para explicar las distribuciones $P_{X_1}(X_2)$	49
3.1	Resultados para η grande	70
3.2	Resultados del número de particiones para diferentes T_i	84
3.3	Valores para \overline{T}_i y $\sigma(t_i)$ para $\eta = 1$	84
4.1	Patrones y correlaciones para una red formada por dos neuronas .	96
4.2	Divergencia de Kullback para el método exacto, respuesta lineal y campo medio, con diferentes patrones y tamaño de la red neuronal	109
B.1	Asociación de los diferentes estados	145

Parte I

Planteamiento del Problema



Introducción

¿Puede el cerebro comprender el cerebro?

(David H. Hubel)

El cerebro es una máquina compleja que es capaz de procesar multitud de información y ejecutar las correspondientes órdenes de acuerdo con esa información recibida. Está compuesto por una serie de unidades fundamentales denominadas neuronas que están interconectadas de una manera altamente compleja. Se sabe razonablemente bien cómo la neurona genera señales eléctricas y de qué manera transporta la señal a otras células, de hecho se entiende y conoce bastante bien el funcionamiento biofísico de estas unidades a nivel individual. Sin embargo, no está claro cómo y por qué se entremezclan las neuronas en los diversos niveles de organización en el cerebro, para llevar a cabo las tareas típicas que involucran el procesamiento de la información que éste recibe del exterior. Estas tareas son de diversos tipos, como por ejemplo las tareas concernientes a los procesos de reconocimiento de patrones, segmentación, aprendizaje, atención, etc. ¿En dónde radica el secreto de realizar todas estas tareas y otras muchas? ¿Funciona el cerebro como una computadora gigante, o es algo más? Extrapolando al caso de las computadoras de hoy en día, ellas también están formadas de unidades simples, transistores, resistencias, chips, etc., que transportan corriente de unos componentes a otros y que además se organizan de una forma compleja para desarrollar tareas realmente complicadas. Pero de lo que no son capaces, por poner un ejemplo entre muchos, es de tener la efectividad que tiene el cerebro a la hora de tratar imágenes para reconocerlas, analizando éstas en décimas de segundo. Es decir, en las computadoras sólo se puede simular una mínima faceta del cerebro, pero no igualarlo. Entonces, ¿qué es lo que tiene de más el cerebro? ¿Cómo lleva a cabo el procesamiento de la información? Es posible que algún día podamos entender y dar una solución a estas preguntas, pero hoy en día el procesamiento de la información cerebral sigue siendo una de las grandes incógnitas de la neurociencia.

Para llevar a cabo el procesamiento de la información que recibe el cerebro, las señales externas deben ser codificadas mediante una representación interna en el mismo. Existe un consenso sobre el hecho de que los sistemas

neuronales utilizan los potenciales de acción que generan las neuronas, para codificar la posible información circundante en el cerebro. Diversos autores han avanzado en esta dirección con sus trabajos [Rieke et al., 1997]. Concretamente, en el citado trabajo se presenta un enfoque de cómo el sistema nervioso representa las señales sensoriales que recibe, formando el llamado código neuronal. Tradicionalmente se ha seguido el criterio de que la tasa media de disparos neuronales (*rate coding*) codificaba de cierta manera la información que llegaba del exterior por estímulos sensoriales [Adrian y Zotterman, 1926a] [Adrian y Zotterman, 1926b] [Adrian y Zotterman, 1926c]. No obstante, ya Von der Malsburg [der Malsburg, 1981] [der Malsburg y Schneide, 1986] [der Malsburg, 1994] postuló la teoría de que había otro tipo de dinámica para la codificación de los disparos de las neuronas. Ésta teoría sugería que el tiempo exacto en el que se producen los disparos de las neuronas, codifica de alguna forma la información que circula por el cerebro (*timing coding*). Este tipo de codificación abre un gran abanico de posibilidades para la representación interna de los disparos neuronales. Una de las formas más interesantes y atractivas de *timing coding* es la sincronización, es decir, las neuronas tienden a disparar en sincronía cuando éstas responden a estímulos cercanos a un mismo objeto. Esta teoría sobre la sincronización fue corroborada experimentalmente primeramente por Eckhorn y colaboradores [Eckhorn et al., 1988], e inmediatamente después por Gray, Singer y sus colaboradores [Gray et al., 1989] [Singer y Gray, 1995], en lo referente a las respuestas oscilatorias y sincronizadas de diferentes microcolumnas en la corteza visual del gato hacia diferentes partes de un mismo campo visual. En general, la codificación mediante *timing coding* equivale a codificación en la fase de los disparos o en las relaciones de fase respecto a los disparos de las diferentes neuronas. Evidencias de codificación de *timing coding* mediante relaciones de fase se encuentran en el hipocampo de la rata. Así, los disparos de las neuronas del hipocampo de la rata que responden a la localización espacial, cambian de fase (pasan de estar retrasados a estar adelantados) respecto al ritmo *theta* cerebral, cuando la rata se mueve a través de una dirección preferente [Burgess et al., 1993]. Además de *rate coding* y *timing coding*, no se descartan otros mecanismos y variantes de codificación neuronal, pero hasta el momento éstos son los dos más estudiados.

Por otro lado, uno de los fenómenos más interesantes y curiosos que tienen lugar en los procesos naturales de información, tales como los que se producen en el cerebro, es la habilidad del sistema para mantener su funcionalidad en entornos ruidosos, incluso con niveles altos de ruido. Hay gran cantidad de pruebas que evidencian los fenómenos estocásticos en neurobiología [Holden, 1976] [Tuckwell, 1989] [Koch y Segev, 1998] [Koch, 1999]. Al principio se pensaba que el ruido era un distorsionante y no era beneficioso para el sistema. En una primera aproximación, el ruido no permitiría el paradigma de codificación cerebral de *timing coding*. Sin embargo, hemos citado anteriormente algunos experimentos en los que se observa este tipo de codificación. Por tanto, pensamos que es importan-

te estudiar por qué y cuál es la base de que estos sistemas naturales mantengan su funcionalidad bajo significativas cantidades de ruido, y qué papel fundamental debe jugar el carácter estocástico en los procesos naturales de información.

Así, dentro de este contexto, estamos interesados en el estudio de sistemas que llevan incorporada una cantidad significativa de ruido formados por unidades fundamentales cuyo funcionamiento aislado no es complejo, pero que cuando se unen e interaccionan son capaces de generar fenómenos singulares y llevar a cabo tareas que por sí solas no realizarían. Dentro de este contexto de trabajo, se han seguido básicamente dos líneas de investigación. Una de ellas referente al estudio de los fenómenos típicos que se observan en la naturaleza, tales como sincronización, oscilación, estabilización, etc., concernientes a los procesos de información que realizan los sistemas biológicos. En el Capítulo 1 se presentará un modelo de neurona estocástica y su interacción con otras unidades del mismo tipo. Este modelo nos dará pie a estudiar en el Capítulo 2 qué fenómenos surgen de la interacción de dos unidades estocásticas en función de los parámetros que tengan. El estudio de estos fenómenos se llevará a cabo tanto analíticamente, como por medio de simulaciones, y se extenderá a poblaciones con más neuronas interaccionando débilmente en el Capítulo 3. En estos capítulos estudiaremos qué tipo de fenómenos se derivan de la interacción de neuronas estocásticas y cómo influye en ellos el ruido.

La otra línea fundamental de trabajo ha sido el estudio del aprendizaje en Máquinas de Boltzmann [Hinton y Sejnowski, 1983] [Ackley et al., 1985], y sus posibles mejoras. Las Máquinas de Boltzmann están formadas por neuronas estocásticas, cuyo estado puede tomar dos valores posibles, uno y menos uno. En una red de Máquinas de Boltzmann, cuando se encuentra en equilibrio, la probabilidad de encontrar la red en un estado determinado viene descrito por la distribución de probabilidad de Boltzmann en sus estados. En redes neuronales o modelos conexionistas, el aprendizaje [Heskes y Kappen, 1991] juega un papel esencial. El aprendizaje o plasticidad en sistemas neuronales es el proceso por el cual éstos ajustan o configuran las sinapsis o pesos, debido a la influencia del medio ambiente, para poder llevar a cabo una determinada tarea específica. Después del aprendizaje, las sinapsis tendrán codificado el conocimiento para manejar la información que fluye a través de éstas, para así realizar una tarea o trabajo específico. Esta configuración se realiza colocando las conexiones entre las neuronas con unos pesos apropiados para realizar ese fin concreto. Una forma es colocar los pesos explícitamente, pero para esto se tiene que usar un conocimiento *a priori*. Otra manera es *entrenar* la red neuronal mediante un conjunto de patrones, y así colocar los pesos apropiadamente según una salida deseada. Una última opción es entrenar la red sin la presencia de una salida deseada, mediante un algoritmo de adaptación de pesos no supervisado.

En general, podemos decir que hay dos categorías de aprendizaje [Kröse y van der Smagt, 1993]:

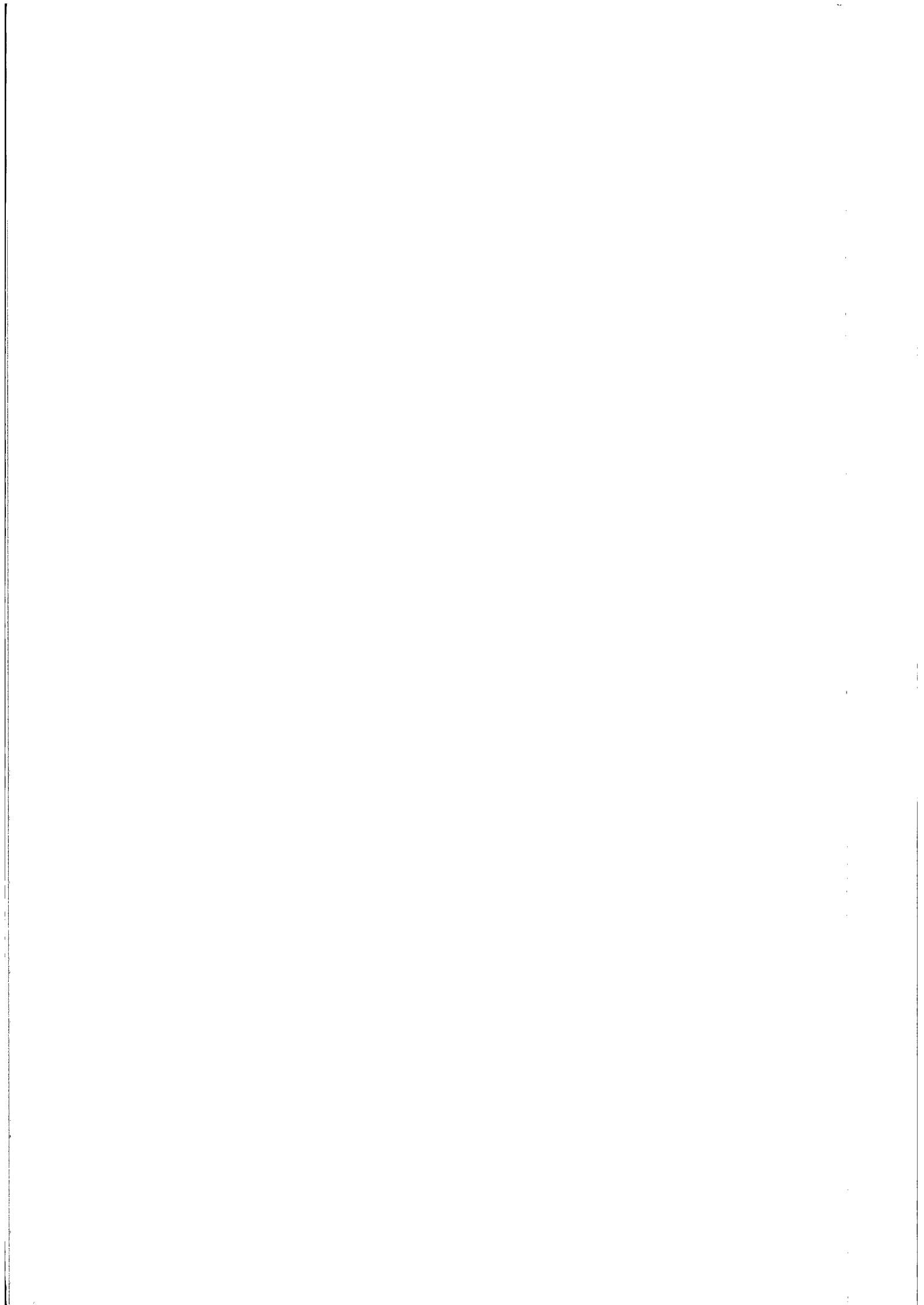
- (i) Aprendizaje supervisado o aprendizaje asociativo, en el cual la red neuronal ajusta sus pesos de acuerdo a una asociación determinada de una entrada y una salida deseada.
- (ii) Aprendizaje no supervisado o auto-organizativo, en el cual la red es entrenada sin ninguna salida específica.

Ambos aprendizajes modifican los pesos de la red neuronal mediante una determinada regla de aprendizaje. Tácitamente muchas de las reglas de aprendizaje pueden ser consideradas como variantes del aprendizaje *hebbiano*, que fue sugerido por Donald Hebb por primera vez en su libro *The Organization of Behavior* [Hebb, 1949]. La idea básica de esta regla es que si dos unidades i y j están activas simultáneamente, su conexión ϵ_{ij} debe reforzarse. También existe la regla *anti-hebbiana*, que dice que si las mismas unidades no están activadas simultáneamente en un tiempo t , entonces su conexión debería ser decrementada o disminuida. El aprendizaje en Máquinas de Boltzmann [Ackley et al., 1985] [Hertz et al., 1991] cae dentro de la primera categoría de aprendizaje (i), siguiendo la regla *hebbiana* y *anti-hebbiana*. En el Capítulo 4 será investigada la eficiencia del aprendizaje en las Máquinas de Boltzmann, y se introducirán mejoras para que éste sea más efectivo.

En resumen, entre los propósitos principales de esta tesis, está esclarecer o vislumbrar cuáles podrían ser los mecanismos cooperativos entre unidades básicas de información estocásticas, que inducen a la sincronización, estabilización y oscilación de dichas unidades, y además estudiar cuál puede ser el papel del carácter estocástico o aleatorio para la formación de todo este tipo de procesos. En otro contexto, respecto al proceso de aprendizaje en redes de neuronas estocásticas, en concreto hemos investigado y mejorado la regla de aprendizaje en Máquinas de Boltzmann, en su versión determinista.

Parte II

Un Modelo de Neurona y Redes Estocásticas



Capítulo 1

Un Modelo de Neurona Estocástica

1.1 Introducción

El cerebro es un sistema biológico complejo que procesa rápidamente multitud de información sensorial. Este sistema está compuesto por una serie de unidades fundamentales que son las responsables del procesamiento de la información cerebral. Fue Santiago Ramón y Cajal en los inicios del siglo XX [Cajal, 1909] quien descubrió que el sistema nervioso central estaba formado por una red de células nerviosas –del orden de un billón de unidades– y no por un continuo, como se pensaba anteriormente. Se han encontrado aproximadamente de mil a diez mil tipos de estas células (según tipo de clasificación), siendo el constituyente básico la neurona [Kandel et al., 1991]. Existe una gran conectividad entre las neuronas –en promedio, cada neurona está conectada con otras diez mil neuronas– formando lo que se conoce como el entramado nervioso. Morfológicamente una neurona consta de cuerpo celular, dendritas y axón. Todas las neuronas están unidas entre sí mediante el axón y las dendritas, formando una interfase que se denomina sinapsis [Sherrington, 1906]. Estas sinapsis son realmente las que se encargan de transmitir el impulso nervioso de una neurona a otra a través del entramado nervioso.

Las neuronas, como otros tipos celulares, presentan una distribución asimétrica de carga a uno y otro lado de la membrana celular. Cuando la neurona está en reposo, su exterior está cargado positivamente, al contrario de lo que sucede en su interior, que está cargado negativamente. Esta diferencia de carga es la que origina el potencial de reposo de la membrana en la neurona, que puede variar entre $-75mV$ y $-45mV$, dependiendo del tipo de neurona. La gran cantidad de los procesos de tratamiento de información que se desencadenan en el cerebro suceden mediante las modificaciones de este potencial de membrana de las neuronas; para ser más concretos, se producen por la generación de impulsos eléctricos (potencia-

les de acción) transmitiéndose éstos a través de su morfología y pasando de unas a otras mediante los ya mencionados puentes de enlace denominados sinapsis. Estos potenciales de acción son los que constituyen el conocido impulso nervioso. Los potenciales de acción presinápticos que llegan a una neurona se integran todos en ella, y en un instante de tiempo se determina si se genera o no otro potencial de acción. En caso de que se genere un potencial de acción, éste se transmitirá a lo largo de la neurona post-sináptica, hacia las terminaciones axónicas. Desde allí la señal se envía a otras neuronas con las que tenga conexión sináptica. Así sucesivamente se va propagando e integrando el impulso eléctrico.

1.2 Modelado Neuronal

Hay diferentes formas de modelar los sistemas dinámicos neuronales [Varona, 1997] dependiendo del nivel de detalle con el que queramos simular el proceso. De esta forma, se pueden aplicar desde los modelos más abstractos, que son aquellos que no simulan ningún parámetro real aunque sí tomen algún aspecto cualitativo del comportamiento cerebral, pasando por los modelos de integración y disparo, hasta los más realistas, que son los modelos multicompartimentales que explican la generación y propagación de los potenciales de acción con toda una variedad de detalles de procesos subcelulares.

Todas estas escalas de modelado tienen sus ventajas y sus inconvenientes. Así, a menor escala, el modelado se puede realizar con modelos sencillos de fácil entendimiento, aunque poco realistas. Sin embargo, cuanto más realismo se quiera obtener, los modelos serán más complicados y más difíciles de analizar debido al gran número de parámetros que tienen.

En concreto, nuestro interés se centra en el procesado neuronal de la información, siendo los disparos neuronales su principal constituyente [Rieke et al., 1997]. Por tanto, para estudiar este singular problema debemos incluir en nuestro modelo neuronal, los disparos como ingrediente principal. Diversos registros de neuronas biológicas han demostrado que la intensidad de estímulos estáticos puede ser codificada en la tasa media de disparo de las neuronas. Los experimentos pioneros de Adrian y Zotterman midieron la relación entre la fuerza aplicada a un músculo y la tasa media de disparos en un receptor elástico embebido en el músculo [Adrian y Zotterman, 1926b], y demostraron que la frecuencia de disparos en estas neuronas aumentaba según lo hacía la fuerza del estímulo. También hay experimentos que evidencian una codificación espacio-temporal de los disparos (por ejemplo la sincronización) [Gray et al., 1989] [Fujii et al., 1996] [Wehr y Laurent, 1996], aunque muchas veces se ve emborronada y camuflada, debido al carácter estocástico de las respuestas de las neuronas. En los modernos experimentos electro-fisiológicos sobre neuronas reales para medir sus respuestas hacia determinados estímulos, el científico repite varias veces la presentación del mismo estímulo y luego promedia sobre todas las veces que se ha re-

petido dicho estímulo. Pero antes de promediar, el neurofisiólogo se da cuenta de que la respuesta neuronal no es la misma cada vez que se presenta el mismo estímulo. Esto supone una de las muchas pruebas que demuestran la cierta aleatoriedad presente en las neuronas y su forma de actuar. Otras pruebas significativas del carácter estocástico en neurobiología, son los registros de electro-encefalogramas que fueron aproximados correctamente por procesos gaussianos de media cero [Jonhson et al., 1979]. También se han observado fluctuaciones en la excitabilidad cuando, con idénticas descargas eléctricas, se provocaban potenciales de acción en los axones de las neuronas de una forma aleatoria [Blair y Erlanger, 1932]. Otra importante muestra de la estocasticidad neuronal es la variabilidad en los intervalos de inter-disparos de los potenciales de acción que se generan en las neuronas [Brink et al., 1946]. Por supuesto hay muchos más ejemplos sobre los procesos estocásticos en neurociencia, y para una lectura más profunda sobre este tema aconsejamos al lector las siguientes referencias: [Holden, 1976] [Tuckwell, 1989] [Koch y Segev, 1998] [Koch, 1999].

Debido a que hay pruebas suficientes, como hemos visto hasta ahora, de que los sistemas biológicos están basados en ciertos componentes estocásticos o de ruido, es necesario incorporarlos a los posibles modelos neuronales que se formulen. Varios autores han avanzado en esta dirección, como los pioneros trabajos de Gerstein y Mandelbrot en los que se considera a la neurona como un caminante aleatorio hacia barreras absorbentes [Gerstein y Mandelbrot, 1964], o trabajos más recientes en los que se postulan modelos físicos que permiten explicar cuáles son las fuerzas causantes del ruido intrínseco que tienen asociados muchos sistemas, como por ejemplo el caso del cerebro [Haken, 1996]. Existen también estudios teóricos en los cuales la actividad de una neurona es vista como un proceso estocástico [Tuckwell, 1989]. En general, nuestro interés se centra en intentar esclarecer cómo se produce el procesamiento de la información, y de forma particular, intentar entender los mecanismos que son utilizados para este procesamiento de información, como puede ser la sincronización, oscilaciones coherentes en poblaciones, plasticidad, etc. Para ello, es fundamental saber qué papel juega el ruido presente en el entorno; es decir, si éste acepta de una manera relevante o no la capacidad de las neuronas y de su conjunto para el procesamiento de la información. Para llevar a cabo este propósito necesitamos estudiar los fenómenos fundamentales que se puedan generar en nuestro modelo neuronal, tales como los procesos oscilatorios y de sincronización que veremos en los próximos capítulos.

1.3 Modelo Neuronal Estocástico

Nuestro modelo deberá tener las características que se han esbozado anteriormente, referentes al ruido que envuelve a los sistemas biológicos. Nosotros, en una primera aproximación, entendemos el sistema nervioso como una población de unidades que envían y reciben mensajes, y partimos de las siguientes hipótesis para formular nuestro modelo:

- Las neuronas son las unidades básicas para el entendimiento del proceso de información en el cerebro.
- Los potenciales de membrana son los encargados de llevar esa información.
- Debido a la asimetría de las neuronas, suponemos un orden temporal en la acción de las mismas.
 - Las dendritas reciben las señales de los alrededores a través de las conexiones sinápticas.
 - La morfología neuronal integra o suma las señales o potenciales de acción.
 - Para unos adecuados potenciales de membrana (superando un cierto umbral) se generan de nuevo potenciales de acción que el axón se encargará de llevar hacia las otras neuronas.
- En general, una neurona aislada también disparará de vez en cuando.
- Debido a la naturaleza de los sistemas biológicos, el proceso de información debe ser robusto ante la presencia de ruido proveniente de diversas fuentes. Por tanto, no debemos olvidar este comportamiento estocástico y de qué forma debería ser incorporado en nuestro modelo neuronal artificial.

Con estas hipótesis podemos ya formular nuestro modelo neuronal de integración y disparo que incorpora intrínsecamente el ruido (o estocasticidad) observado experimentalmente.

1.3.1 La Neurona Aislada

Nuestras neuronas artificiales son modeladas como unidades estocásticas de integración y disparo sin pérdida, con un número discreto de estados en su variable de estado dinámica. El tiempo de evolución también es considerado discreto, y sólo dos parámetros son relevantes para la descripción del comportamiento dinámico de cada unidad aislada: el número de estados L y la probabilidad p de incrementar el estado de cada unidad para cada unidad de tiempo t . Los modelos de integración y disparo [Srinivasan y Bernard, 1976] [Maass, 1996] son todos aquellos en los que existe una variable dinámica que simula el potencial de membrana, evolucionando en función de los estímulos que recibe hasta que supera un umbral (en nuestro caso constante), momento en el que se produce un disparo instantáneo. Posteriormente, se inicia de nuevo el ciclo. Hay diversos autores que han introducido la estocasticidad en los modelos de integración y disparo y su adaptación al ruido [Rudd y Brown, 1997], [Shimokawa et al., 1999]. Debemos tener en cuenta que en nuestro modelo de integración y disparo la forma del potencial de acción no es considerada, ya que estamos interesados solamente en el momento exacto

en el que se genera el disparo de una neurona, y cómo está correlacionado con la generación del mismo en otras neuronas.

Nuestra variable dinámica que representa la actividad de la neurona i (potencial de membrana) a tiempo t será $a_i(t)$. Los posibles estados de la unidad i están en el rango de 0 a $L_i - 1$, donde L_i representa el valor umbral que puede tomar la actividad de la unidad i . El estado 0 es un estado ficticio que corresponde a cualquier valor de la actividad que sea igual o mayor que el umbral. En ausencia de interacción con otras neuronas, la transición entre estados estará gobernada por la siguiente regla probabilística:

$$a_i(t+1) = \begin{cases} a_i(t) + 1 & \text{con probabilidad } p_i \\ a_i(t) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (1.1)$$

para $a_i(t) \in \{1, \dots, L_i - 1\}$. La generación del disparo se representa por la transición del estado $a_i(t) \geq L_i$ (es decir el estado 0) al estado 1 con probabilidad determinista igual a uno, donde el ciclo se reanuda de nuevo. Por tanto, cuando $a_i(t)$ sea mayor o igual a L_i (veremos que con interacción puede ocurrir que la actividad sea mayor que el umbral), la dinámica no es controlada por la Ecuación 1.1 sino que el estado pasa a ser 1 automáticamente.

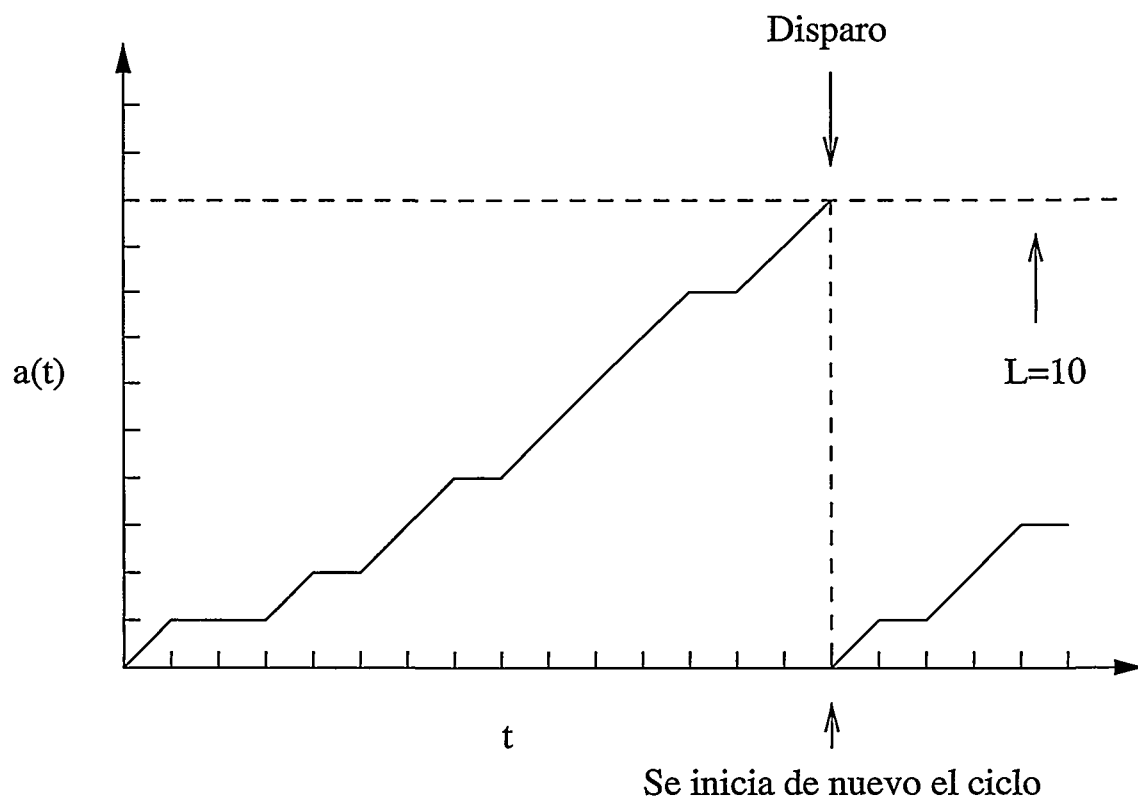


Figura 1.1: Simulación de la actividad de una neurona aislada siguiendo el modelo de la Ecuación 1.1, con parámetros: $L = 10$, $p < 1$.

Un ejemplo que ilustra el comportamiento de esta dinámica mediante una sencilla simulación, viene representado por el gráfico de la Figura 1.1, que muestra cómo evoluciona la variable de estado de una unidad de parámetros $L = 10$ y $p < 1$, en función del tiempo. En este ejemplo, la unidad dispara después de 15 unidades de tiempo.

De acuerdo con el modelo descrito, el comportamiento de una neurona es el de un oscilador estocástico. El tiempo que transcurre entre dos disparos consecutivos para la unidad i , T_i , tiene una probabilidad dada por la distribución binomial negativa $P_{L_i, p_i}(T_i)$ (ver Apéndice A):

$$P_{L_i, p_i}(T_i) = \binom{T_i - 1}{T_i - L_i} p_i^{L_i} (1 - p_i)^{T_i - L_i} \quad (1.2)$$

Podemos ver así en la Figura 1.2 cómo se distribuye la probabilidad anterior de periodos de disparos para una neurona con parámetros $L = 10$ y $p = 0.8$.

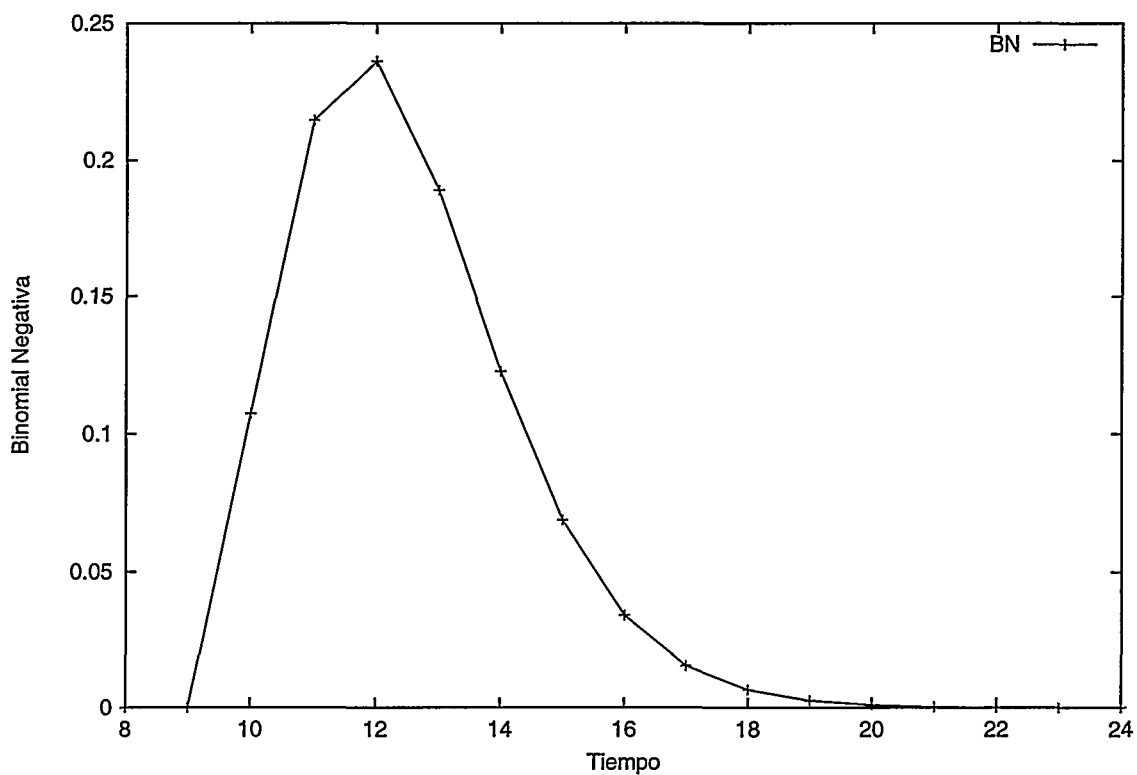


Figura 1.2: Distribución de probabilidad del tiempo que transcurre entre dos disparos consecutivos para una neurona con parámetros: $L = 10$, $p = 0.8$.

Para cada unidad i el intervalo que hay entre disparos consecutivos tiene un valor esperado τ_i , con una desviación estándar σ_i . El valor de ambos parámetros estadísticos puede ser fácilmente derivado de $P_{L_i, p_i}(T_i)$ (ver Apéndice A), y sus

valores son:

$$\tau_i = 1 + \frac{L_i - 1}{p_i}, \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{(L_i - 1)(1 - p_i)}}{p_i}, \quad (1.3)$$

respectivamente. De este modo, podemos calcular los parámetros de la distribución de probabilidad de tiempos entre disparos consecutivos de la Figura 1.2, a través de la Ecuación 1.3, obteniéndose $\tau = 12.25$ y $\sigma = 1.68$. Observemos el hecho de que en el límite determinista ($p_i = 1$), la neurona aislada tiene un periodo igual a su umbral de disparo (L_i).

En las simulaciones podemos cuantificar la probabilidad de que sucesivos disparos estén separados por un determinado intervalo de tiempo, mediante un histograma de intervalos de disparo consecutivos (ISIH, Inter-Spike Interval Histogram). Estos ISIH's coinciden con la distribución de probabilidad dada por la Ecuación 1.2. Dichos histogramas representan cuál es la probabilidad de encontrar una cierta distancia en el tiempo para dos disparos consecutivos. En la Figura 1.3 se muestra el comportamiento de dos unidades aisladas con los parámetros completamente diferentes, mediante sus ISIH's. Una de ellas tiene un disparo regular y más determinista que la otra, cuyos disparos están más deslocalizados y son más ruidosos.

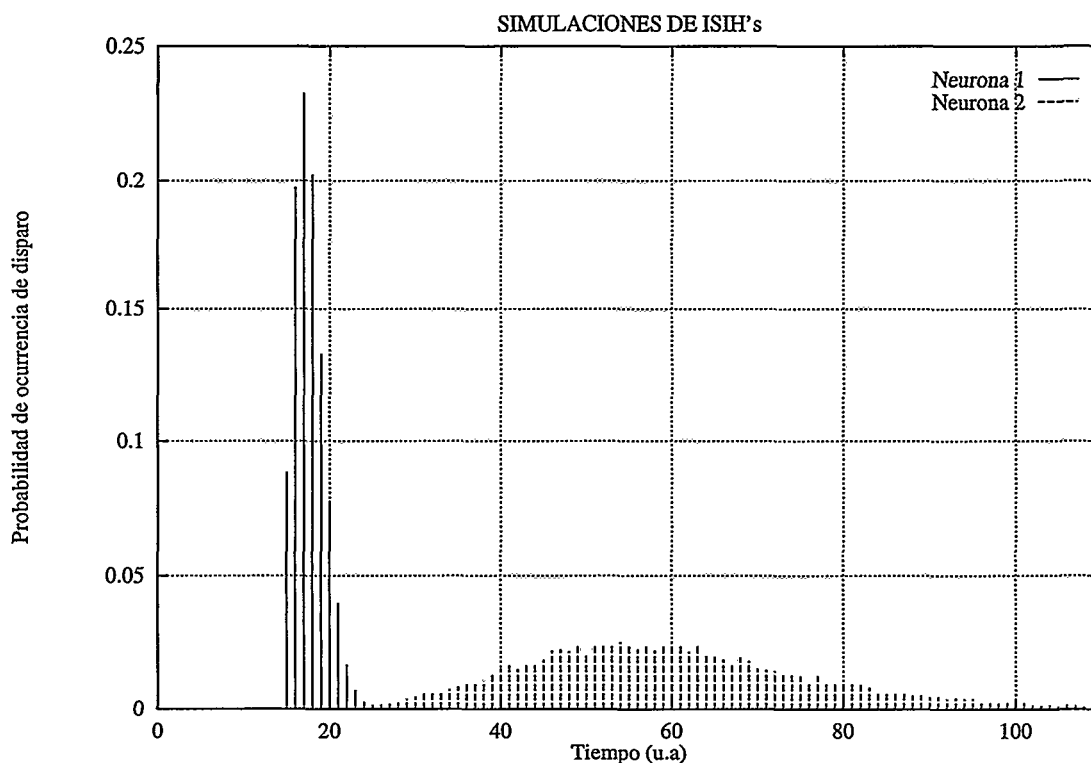


Figura 1.3: Simulación de dos neuronas aisladas con parámetros: $L_1 = 15$, $p_1 = 0.85$, $L_2 = 10$, $p_2 = 0.17$. La neurona 1 dispara rápida y regularmente mientras que la neurona 2 es lenta y con mucho ruido.

Como se puede observar en la Figura 1.3, los intervalos de disparo se distribuyen en torno a los valores medios esperados, $\tau_1 = 17.47$ y $\tau_2 = 53.94$, dados por el modelo de la distribución binomial negativa, siendo más dispersos cuanto mayor es la desviación estándar, $\sigma_1 = 1.70$ y $\sigma_2 = 16.08$, es decir, cuanto menor probabilidad de salto tengan las unidades. Por tanto, los tiempos más probables entre dos disparos consecutivos vendrán determinados por los máximos de los ISIH's. Evidentemente, estas simulaciones se corresponden con los resultados que nos proporciona la Ecuación 1.2. La descripción del modelo mediante simulaciones será el método más conveniente (como veremos en capítulos sucesivos) para el estudio de nuestro sistema de neuronas interaccionando.

1.3.2 La Interacción entre Neuronas

La interacción entre las neuronas se introduce en el modelo mediante la transmisión del disparo de una unidad a otra a través de la sinapsis, produciendo un cambio en la actividad de la unidad que recibe. En nuestro modelo, para cada dos unidades, existe una sinapsis o parámetro de acoplamiento ϵ_{ij} . Ésta representa cómo se modifica la variable de estado de la unidad que recibe j , cuando la otra unidad, i , genera un disparo y, por tanto, envía un mensaje. El signo de ϵ_{ij} representa el tipo de conexión (inhibitoria: $\epsilon_{ij} < 0$, o excitatoria: $\epsilon_{ij} > 0$), y la magnitud de la misma representa la fuerza de la interacción o conexión entre unidades. Ahora bien, podemos considerar que la transmisión del disparo se puede producir instantáneamente, o con un cierto retraso. En general, la neurona j en el tiempo t es afectada por el disparo de la unidad i en un tiempo t_i^d , de acuerdo con la siguiente relación:

$$a_j(t) = a_j(t) + \delta((t - t^r) - t_i^d)\epsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

siendo δ la función delta de Dirac, t^r el retraso en enviar el mensaje de la unidad i a la j , y t_i^d el tiempo en el que se produjo el último disparo de la unidad i . Evidentemente, para el caso de transmisión instantánea $t^r = 0$. Por otra parte, si consideramos un retraso de una unidad de tiempo en la transmisión del disparo, entonces la neurona j en el tiempo t estará afectada únicamente por el disparo de la unidad i en el tiempo $t - 1$, de acuerdo con la Ecuación 1.4, pero con $t^r = 1$. Nosotros vamos a utilizar estos dos modelos de interacción entre unidades, y en cada uno de los casos argumentaremos por qué elegimos uno u otro.

En la Figura 1.4 podemos ver claramente un ejemplo de la transmisión de un disparo de una unidad a otra, con el consecuente aumento de la actividad de la unidad que recibe, para el caso de $t^r = 0$. En concreto, se trata de una red formada por dos unidades, en la que sólo existe una conexión excitatoria de la unidad 2 a la 1 de magnitud ϵ_{21} . Por tanto, siempre que dispare la unidad 2 ésta transmitirá instantáneamente un aumento de actividad a la 1 según una cantidad que es ϵ_{21} . Por supuesto, si la actividad de la unidad j alcanza el umbral ($a_j(t) \geq L_j$) debido a la transmisión del disparo, entonces inmediatamente esta unidad se descargará y colocará su estado a 1.

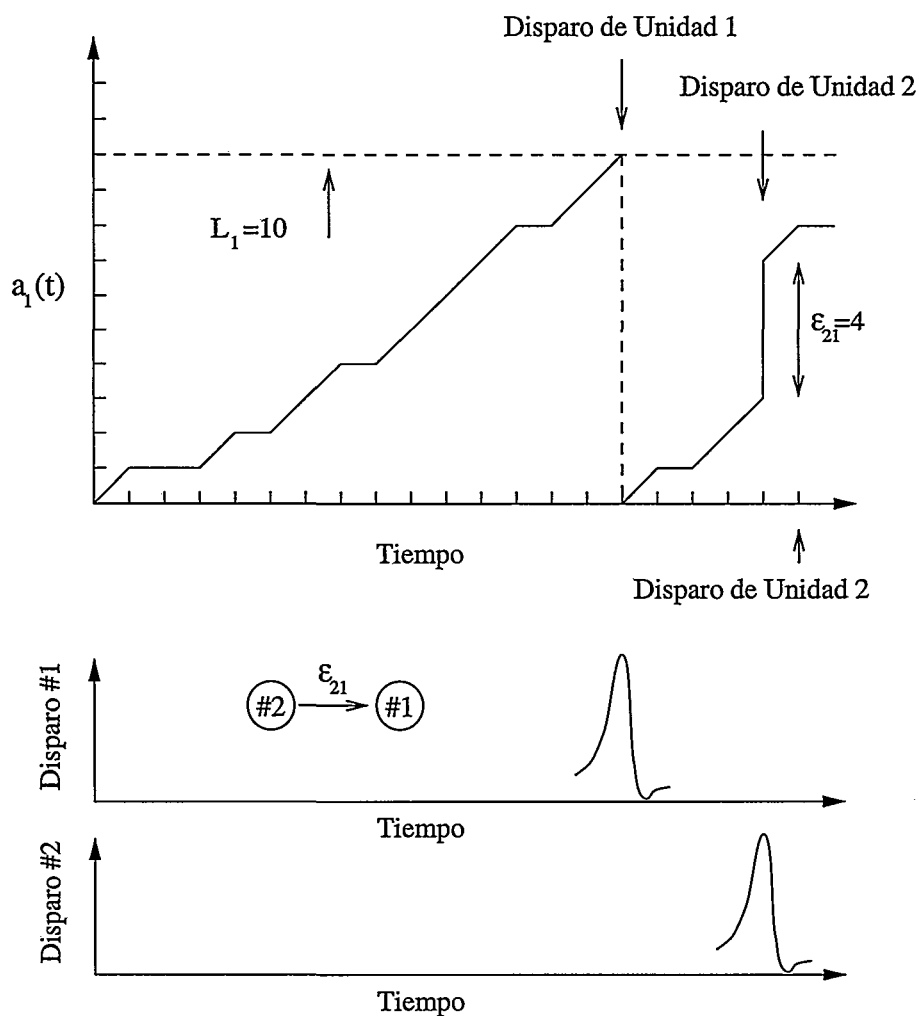


Figura 1.4: Ejemplo de cómo se transmite instantáneamente ($t^r = 0$) el disparo de una unidad a otra. Hemos supuesto que sólo existe una conexión de la unidad 2 a la unidad 1.

Un importante hecho que debemos comentar es el proceso de absorción que sufren nuestras unidades como consecuencia de la transmisión de un disparo. Si la señal o mensaje que recibe una unidad, debido a un disparo producido por otras unidades, es mayor que el que necesita para superar el umbral de disparo, el exceso que supera el umbral es absorbido por la unidad.

1.4 Otros Modelos Neuronales Estocásticos

Como ya habíamos comentado anteriormente, el registro de la actividad neuronal realizado por los neurofisiólogos, evidencia de cierta forma el carácter estocástico de los disparos que ejecutan las neuronas, desde el momento que los resultados

obtenidos son un promedio sobre varios experimentos con las mismas condiciones iniciales. Es decir, la neurona responde de diferentes formas, dentro de un rango, hacia la presentación del mismo estímulo. Éste y muchos más ejemplos (ver Sección 1.2), denotan la necesidad de incorporar este carácter estocástico a los modelos neuronales, como el que presenta nuestro modelo de neurona estocástica. Diversos autores han ideado varias formas de incluir este carácter estocástico de la maquinaria neuronal en sus modelos. Uno de los primeros modelos estocásticos fue el trabajo de [Landahl et al., 1943], derivado directamente del trabajo pionero de [McCulloch y Pitts, 1943] sobre el modelo clásico de *neurona lógica*. Landahl y colaboradores idearon este modelo para moto-neuronas que recibían excitación de receptores elásticos. En este modelo se suponía que una neurona generaba un disparo, cuando al menos un número umbral determinado de entradas excitatorias activaban a ésta, en un determinado intervalo de tiempo (en ese mismo intervalo no llegaba ninguna entrada inhibitoria). Es decir, la neurona actuaba como un detector de coincidencia de señales. La activación de cada entrada sináptica a la neurona se suponía que era gobernada por un proceso estocástico de Poisson, cada una de ellas con una frecuencia de disparo constante. Si se supone que el número de los receptores de la neurona es suficientemente grande, entonces se puede aplicar el teorema central del límite como para que este proceso fuese aproximado por una distribución normal. Este ejemplo nos da una primera idea de cómo incluir el carácter estocástico neuronal por medio de un proceso de Poisson y posteriormente ajustando éste a una distribución normal. Por lo que respecta a los receptores sinápticos de una neurona, no iba tan desencaminada la idea de la distribución de Poisson en la activación de estos. De hecho, uno de los fenómenos mejor estudiado, que es gobernado por un proceso de Poisson, son los tiempos de liberación de neurotransmisores en la unión neuromuscular de la rana [Fatt y Katz, 1952]. Debido a que la liberación de vesículas de estos neurotransmisores puede llegar a generar el potencial de disparo en la neurona postsináptica, no sería descabellado pensar que la generación de disparos en esta neurona sea también de alguna manera estocástica. De hecho, en registros recientes en neuronas *in vivo* se han obtenido disparos irregulares con una gran variabilidad en los intervalos entre disparos [Holt et al., 1996]. Podemos decir, en una primera aproximación, que en algunas neuronas, en particular en las corticales, se observa que los intervalos de disparo son independientes. Es decir, la anchura de cada intervalo de disparo es independiente de si antes éste era igual, más grande, o más pequeño. Así pues, el proceso para modelar este comportamiento, es un proceso en el que las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas. Por tanto, el proceso estocástico más sencillo para modelar este comportamiento es nuevamente el proceso de Poisson. Este proceso es caracterizado por un único parámetro, que es la media de la variable aleatoria.

Supongamos ahora que un modelo de integración y disparo sin pérdida (integrador perfecto [Koch, 1999]), recibe una serie de entradas sinápticas estocásticas. Imponemos que cada sinapsis vierta un cierta carga a la neurona instantáneamente, siendo la probabilidad de ese evento gobernado por la distri-

bución de Poisson. Por tanto, la neurona tiene como entradas unas secuencias de deltas (disparos) que se distribuyen siguiendo una distribución de Poisson. Para formalizar el problema, sean a_e y a_i los pesos sinápticos excitatorios e inhibitorios respectivamente, y N_e y N_i las distribuciones de Poisson para las sinapsis excitatorias e inhibitorias respectivamente, entonces la evolución del potencial de la neurona, $V(t)$, hasta que llega al potencial umbral V_{th} , es modelado según [Koch, 1999]:

$$V(t) = a_e N_e - a_i N_i, \quad (1.5)$$

y cuando $V(t) = V_{th}$ se genera el disparo.

Este modelo es un ejemplo del caminante aleatorio, siendo Stein uno de los primeros en proponer un modelo similar [Stein, 1965]. Previamente, Gerstein propuso su modelo de caminante aleatorio hacia una barrera absorbente, para describir diferentes rangos de la actividad neuronal para una sola neurona [Gerstein y Mandelbrot, 1964].

Si ahora consideramos un integrador con pérdida [Koch, 1999], lo que obtenemos por analogía al problema anterior es un caminante aleatorio con pérdida. Fue Stein quien incorporó por primera vez en los caminantes aleatorios el término de pérdida [Stein, 1965]. Para ver una descripción del modelo y la serie de resultados que se derivan, puede consultarse el Capítulo 4 de [Tuckwell, 1989].

Todos estos modelos son paradigmas para intentar simular la actividad estocástica de una sola neurona. Nuestro modelo tiene cierto parecido al modelo de caminante aleatorio sin pérdida, pero en este caso la distribución que controla la evolución del potencial de la membrana de la neurona viene determinada por la distribución binomial negativa, y no por la distribución de Poisson. Hay muchos más modelos para representar la actividad estocástica neuronal ([Holden, 1976], [Tuckwell, 1989], Capítulos 19 y 21 de [McKenna et al., 1992], Capítulo 9 de [Koch y Segev, 1998] y Capítulo 15 de [Koch, 1999]), pero creemos que los más representativos son los comentados anteriormente, a partir de los cuales se derivan otros modelos más complejos.

Todas estas investigaciones y modelos sobre paradigmas de la actividad estocástica de neuronas, llevan incorporado intrínsecamente el ruido en el modelo en cuestión. Sin embargo, cuando lo que se estudia son redes estocásticas de procesamiento en paralelo, habitualmente se utilizan ecuaciones diferenciales estocásticas. Es decir, en las ecuaciones suele haber un parámetro que representa un ruido aditivo, que es lo que da el carácter estocástico al sistema. Entre estos modelos existe una gran diversidad de combinaciones. Por poner un ejemplo, está el reciente trabajo de Tuckwell [Tuckwell y Rodriguez, 1998] sobre el estudio de una red de neuronas representada por un sistema no lineal ordinario de ecuaciones diferenciales de Fitzhugh–Nagumo [Fitzhugh, 1961] [Nagumo et al., 1962] con ruido blanco Gaussiano. Otro ejemplo puede ser el trabajo de Shimokawa y colaboradores [Shimokawa et al., 1999], en el que estudia la transmisión y propagación de señales periódicas de tipo sinusoidales en una población de neuronas, siguiendo

un modelo de integración y disparo con pérdida y ruido aditivo.

Todos estos modelos tienen una inspiración biológica clara, y conservan algunas características esenciales de sistemas biológicos. Sin embargo, hay otros muchos modelos dentro del campo de las redes neuronales artificiales o modelos conexionistas inspirados en modelos físicos, que incorporan también el carácter o propiedades estocásticas. De entre los modelos más representativos están las Máquinas de Boltzmann, de las que hablaremos en el Capítulo 4, y que se comportan exactamente como los *espines* en el modelo de Ising [Hinton y Sejnowski, 1983].

Capítulo 2

Oscilación y Sincronización

2.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos los fenómenos de cooperación que inducen a la sincronización de neuronas que se rigen por el modelo estocástico que hemos propuesto anteriormente. La estabilidad y sincronización será primero analizada en un conjunto pequeño formado por dos unidades [López et al., 1993], y posteriormente, en el siguiente capítulo, pasaremos a poblaciones de más unidades [Rodríguez y López, 1999]. Estamos interesados especialmente en los procesos de sincronización, debido a que están fuertemente presentes en la naturaleza. Por poner un ejemplo espectacular, mencionamos el de las miles de luciérnagas en el sureste de África que se congregan en árboles destellando sincrónicamente al unísono [Buck, 1988] [Buck y Buck, 1976]. Otros ejemplos de sincronización son los que tienen lugar en las células del corazón [Jalife, 1984], en el hipocampo [R. D. Traub y Wong, 1989], células del páncreas [Sherman et al., 1988], grillos cantando al unísono [Walker, 1969] y grupos de mujeres cuyos periodos de menstruación llegan a sincronizar [Russell et al., 1980].

No obstante nuestro principal interés por la sincronización se debe a la suposición de que juega un papel fundamental en los procesos sensoriales que llevan a cabo las neuronas. Así, por ejemplo, se ha postulado que el disparo coherente efectuado por neuronas es el fundamento de la segmentación de objetos efectuada por el sistema neuronal visual [der Malsburg, 1981] [Abeles, 1982] [der Malsburg y Schneide, 1986] [Gray et al., 1989] [Eckhorn et al., 1988] [Singer y Gray, 1995]. De hecho, un objeto puede ser representado y analizado a través de diferentes regiones del cerebro. Aparte de todos estos experimentos, numerosos hallazgos neurobiológicos demuestran y corroboran en cierta manera este postulado [Kandel et al., 1991] de que la sincronización es un tipo de codificación neuronal. De esta forma, pensamos que para progresar en el entendimiento de la relación que existe entre los disparos sincrónicos de neuronas y el proceso de información cerebral, no se debería dejar

de lado cómo la actividad sincrónica estable puede emerger de la interacción entre las unidades. Ha habido muchos estudios teóricos sobre este problema, como ya hemos apuntado anteriormente, y otros más aplicados, como por ejemplo el trabajo de Wang [Wang, 1995] con sus osciladores localmente acoplados, que resuelven un típico ejemplo de segmentación de patrones mediante la sincronización emergente de la red. En la mayoría de ellos las neuronas son consideradas como osciladores de integración y disparo. Sin embargo, no todos los osciladores considerados en esos estudios tienen las mismas características. En algunos casos los modelos que se han usado han utilizado una dinámica determinista siguiendo los trabajos pioneros de Peskin [Peskin, 1975], Mirollo y Strogatz [Mirollo y Strogatz, 1990]. Otros incluyen el ruido como una corrección cuando describen la evolución de las neuronas. El modelo más conocido es el de Kuramoto [Kuramoto, 1984] que describe la fase de cada oscilador mediante la ecuación de Langevin [Kampen, 1992]. Para profundizar en los diferentes modelos de sincronización, el lector puede revisar los artículos [Afraimovich et al., 1994] [Pérez et al., 1996] [Abarbanel et al., 1996].

A continuación, estudiaremos cuáles son las posibles sincronizaciones de disparos en nuestro modelo estocástico neuronal (Sección 1.3), por qué éstas se producen y qué modificaciones de los parámetros varían las sincronizaciones.

2.2 Espacio de Estados, Parámetros de Sincronización y Cadenas de Markov

En el modelo general de interacción sin retardo en la transmisión del mensaje entre varias unidades (ver Sección 1.4), el disparo de cada unidad depende de los estados de todas las demás unidades que están conectadas con ella (además, por supuesto, de la propia evolución espontánea de la unidad). Es lógico pensar que haya una serie de valores de parámetros de cada unidad (L_i , p_i) y de la eficiencia sináptica (ϵ_{ij}) que favorezcan el disparo de las unidades, y más aún, la sincronización de las mismas. Nuestro objetivo es comprobar este hecho, así como encontrar configuraciones de neuronas interesantes para el estudio de la sincronización. En la Figura 2.1 podemos observar el espacio de estados de dos unidades estocásticas con interacción entre ambas. El gráfico representa en cada instante de tiempo, dónde se encuentra el sistema formado por dos neuronas acopladas. El sistema, al evolucionar, realiza una trayectoria aleatoria por el espacio de estados. El número de posibles estados del sistema está representado por el producto $L_1 \times L_2$ estados. Un estado genérico del sistema sería $E_i\{X_1, X_2\}$, donde X_1 y X_2 representan los estados de las neuronas 1 y 2 respectivamente, en un tiempo t determinado. Por ejemplo, posibles estados del sistema serán: $E_1\{2, 1\}$, $E_2\{5, 2\}$, $E_3\{1, 1\}$ (ver Figura 2.1). En total, el sistema particular dado por la Figura 2.1 tendrá 40 estados posibles, aunque unos estados serán más probables que otros dependiendo de los parámetros y eficiencias sinápticas del sistema. Es decir, el acoplamiento entre las unidades y los parámetros de éstas hacen que un

cierto subconjunto de estados del sistema sea más probable que el resto.

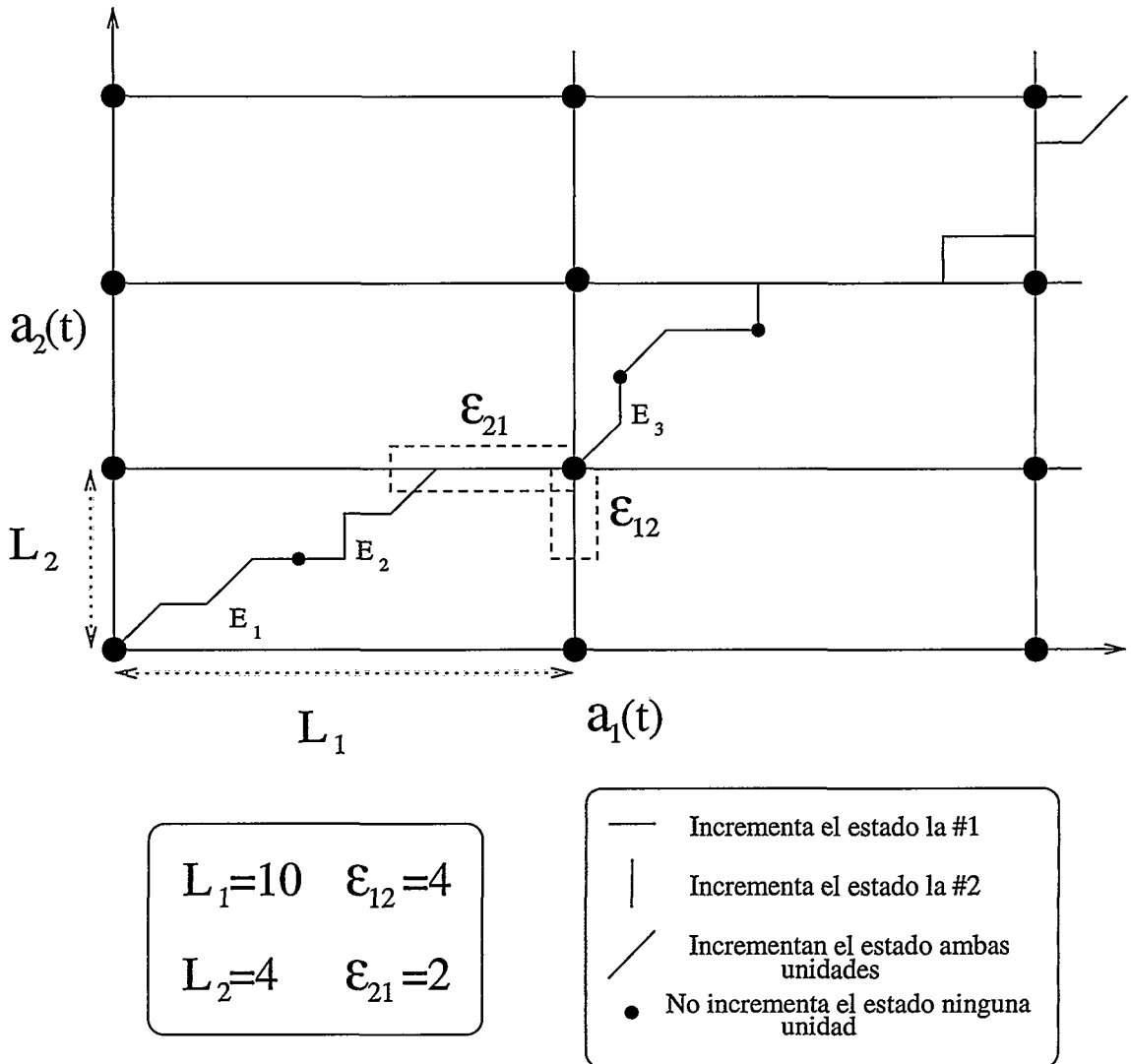


Figura 2.1: *Espacio de estados para dos neuronas estocásticas, con parámetros: $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.6$, $L_1 = 10$, $L_2 = 4$, $\epsilon_{12} = 4$ y $\epsilon_{21} = 2$.*

Es importante observar en la Figura 2.1, que las cajas punteadas demarcan los estados del sistema en los cuales ambas unidades disparan sincrónicamente. Es decir, cuando el estado de cualquiera de las dos unidades llega a una de esas zonas demarcadas, el sistema producirá una sincronización.

Se pueden simular diferentes tipos de poblaciones de neuronas variando:

- (i) El número de unidades.
- (ii) Los parámetros de las unidades, L_i y p_i .
- (iii) La eficiencia sináptica entre las unidades, ϵ_{ij} .

En este capítulo optaremos por utilizar únicamente la variación de los parámetros de las neuronas y eficiencia sináptica entre ellas para nuestras simulaciones, y en el siguiente capítulo variaremos el tamaño de la población de neuronas.

2.2.1 Magnitudes Importantes para Medir la Sincronización

Para estudiar los fenómenos de sincronización, debemos cuantificarlos de alguna manera. Vamos a definir varias magnitudes relevantes para entender mejor estos fenómenos de sincronización:

- τ_0 : Representa el promedio de tiempo de la primera sincronización, cuando se empieza en un estado aleatorio. Da una medida del tiempo transcurrido para la sincronización de un grupo de neuronas.
- σ_0 : Representa la desviación estándar de τ_0 . Este valor indicará la dependencia del estado inicial del sistema.
- τ : Esta magnitud representa el tiempo transcurrido entre disparos sincrónicos, a partir de que se produzca la primera sincronización.
- σ : Análogamente esta cantidad representa la desviación estándar del periodo de sincronización τ . De nuevo, esta magnitud da una estimación de la estabilidad de la sincronización entre unidades, después de alcanzar la primera sincronización.

Estas magnitudes se pueden calcular de varias formas, o bien exactamente mediante técnicas y formalismo de Cadenas de Markov (ver Apéndice B), o bien mediante el promedio y dispersión de los valores alcanzados en diferentes simulaciones. Esto se verá con más detalle en la siguiente sección.

2.2.2 Cadenas de Markov y Simulaciones

Como habíamos dicho anteriormente, una de las formas de calcular los parámetros de la sincronización es mediante técnicas matemáticas derivadas del formalismo de Cadenas de Markov (de aquí en adelante CM's). En la teoría de Markov los resultados de un experimento sólo dependen del resultado del experimento anterior (ver Apéndice B). Obviamente el modelo estocástico neuronal de la Sección 1.4 es un modelo Markoviano, debido a que los estados del sistema a tiempo t dependen única y exclusivamente de los estados del sistema en el tiempo $t - 1$. Solamente debemos tener en cuenta unas consideraciones para convertir nuestro modelo estocástico en una cadena cíclica ergódica de Markov, y así utilizar todo el formalismo y herramientas de las CM's (ver Apéndice B). El punto de arranque

del formalismo de las CM's son las Matrices de Probabilidades de Transición (de aquí en adelante MPT), que contienen todas las probabilidades entre todos los estados accesibles del sistema. Los valores esperados y desviaciones del proceso de sincronización (τ_0 , σ_0 , τ , y σ) pueden ser calculados con operaciones algebraicas de las MPT del sistema. Esas operaciones incluyen tanto inversión como diagonalización. La dimensión de las MPT sólo permite los cálculos para sistemas de dimensión pequeña. Recordemos que la dimensión del sistema formado por n unidades es el producto $L_1 \times L_2 \times L_3 \times \dots \times L_n$ (ver Apéndice B). Entonces, por ejemplo, para un sistema formado solamente por tres neuronas con cien estados cada una, la MPT será de tamaño $10^6 \times 10^6$, cantidad que hace difícil su computación. Sin embargo, para pequeños sistemas podemos conseguir resultados interesantes. Para ver todo el formalismo Markoviano con más detalle se puede consultar el Apéndice B, donde se muestra cómo se pueden calcular las magnitudes de sincronización, y se hace una introducción previa a CM's.

Los valores esperados y desviaciones del proceso de sincronización (τ_0 , σ_0 , τ , y σ) también pueden ser calculados mediante simulaciones. Para realizar las simulaciones se implementaron los osciladores estocásticos y su dinámica de interacción en código de programación C. Para calcular las cantidades relevantes en sincronización, se deja evolucionar el sistema y después de un tiempo suficientemente largo se hacen las estadísticas apropiadas para estimar esas cantidades. Como era de esperar, cuando la simulación transcurre un tiempo suficiente, los resultados de las estadísticas para calcular los parámetros de la sincronización son exactamente iguales a los producidos mediante el cálculo de CM's.

2.3 Varias Configuraciones Interesantes. Escalones de Sincronización.

Las posibles configuraciones y combinaciones de nuestro modelo de neuronas estocásticas son muy amplias. Entre ellas, una trivial es el caso de cuando el peso sináptico es del mismo orden de magnitud que el umbral de las unidades ($\epsilon_{ij} \approx L_j$). Esta configuración producirá un disparo común cuando la neurona más rápida dispare. Pero, ¿qué sucede cuando el peso sináptico es mucho más pequeño que el umbral de la neurona ($\epsilon_{ij} \ll L_j$)? Y ¿qué sucederá si vamos variando el peso sináptico en un determinado rango? ¿Habrá una regularización y coherencia de los disparos del sistema en comparación con las neuronas aisladas? ¿O, por el contrario, el sistema se comportará con aleatoriedad y sin ningún tipo de coherencia en sus disparos? ¿Habrá algún valor de los parámetros específicos del sistema, ϵ , L , p que favorezcan la sincronización? Para esclarecer las respuestas a estas preguntas, veamos los siguientes ejemplos.

2.3.1 Sincronización de dos Neuronas Iguales

Entendemos por neurona de disparo rápido, aquella que aumenta en el tiempo su estado con una probabilidad alta, relativamente cerca del ritmo regular determinista. Lo contrario será una neurona lenta. Consideremos la configuración de la Figura 2.2. Aquí las dos unidades tienen los mismos parámetros. A continuación presentamos dos ejemplos de configuraciones. En uno de ellos, las neuronas tienen una probabilidad baja de aumentar el estado, y en el otro sucede lo contrario, es decir, las neuronas disparan con un ritmo prácticamente determinista.

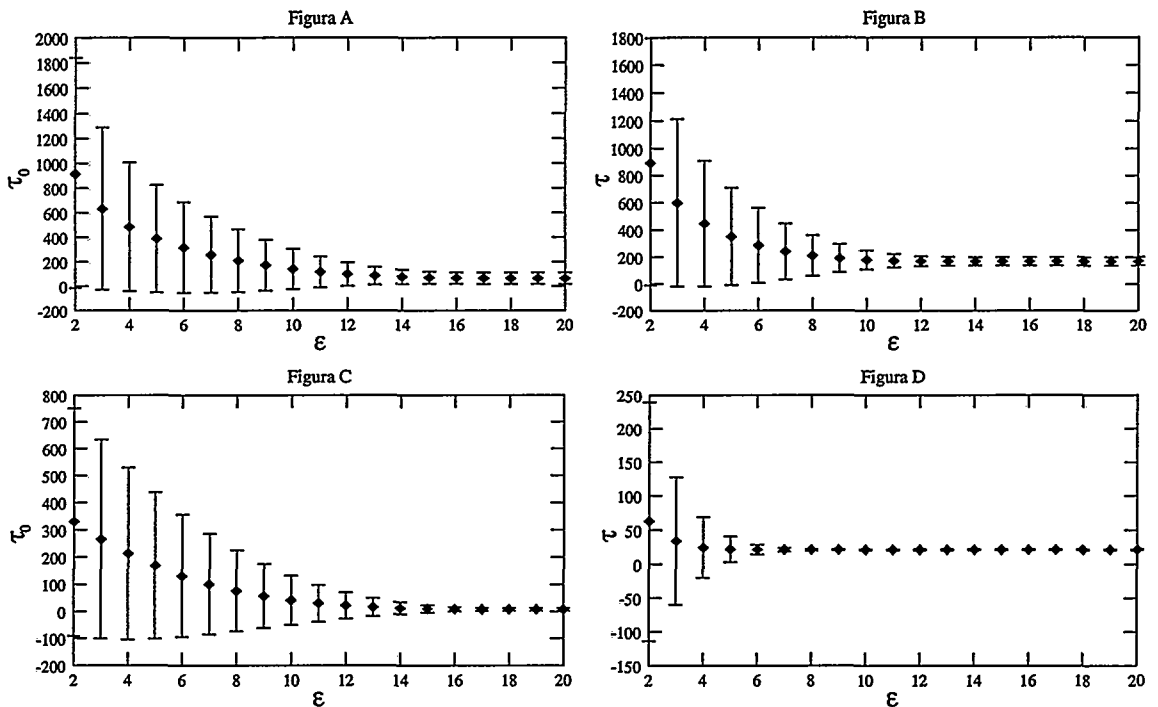


Figura 2.2: Simulación mediante CM's para dos neuronas estocásticas con parámetros idénticos. Los parámetros para los ejemplos A y B son: $p = p_1 = p_2 = 0.1$, $L = L_1 = L_2 = 20$, $\epsilon = \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0 - 20$. Para los ejemplos C y D son: $p = p_1 = p_2 = 0.9$, $L = L_1 = L_2 = 20$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0 - 20$.

Los resultados presentados en esta figura están calculados aplicando el formalismo de CM's explicado en la Sección B.3.4. Podemos observar cómo a medida que vamos aumentando el peso sináptico, las magnitudes τ , σ , τ_0 , y σ_0 van decreciendo. Para las figuras A y B la probabilidad de salto de las unidades vale 0.1, y los valores esperados de los disparos y sus desviaciones para las unidades aisladas sin conexión sináptica son: $\tau_1 = \tau_2 = 191$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 41.3521$ (ver Ecuación 1.3). Para las figuras C y D la probabilidad de salto vale 0.9, y los valores esperados de los disparos y sus desviaciones para las unidades aisladas sin conexión sináptica son: $\tau_1 = \tau_2 = 22.11$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.5316$. Observamos que la diferencia fundamental entre las figuras A y B frente a las figuras C y D, es que estas últimas

tienen un valor más pequeño para las barras de error de la sincronización. Esto se produce porque para una probabilidad de salto de 0.9 los disparos están más localizados que para una de 0.1 y, por tanto, la precisión en el disparo es mayor. También observamos que para valores pequeños del peso sináptico tanto la primera sincronización como las sucesivas tienen valores con una gran dispersión, en comparación con valores mayores de éste. En concreto, en la figura *D* observamos que la dispersión a partir de $\epsilon = 8$ es nula, en contra de lo que sucede en la figura homóloga *B* para una probabilidad de salto más pequeña. En la evolución de los periodos de sincronización, en la Figura 2.2, no se observa ningún cambio abrupto.

El caso más interesante es el decaimiento de σ de acuerdo con el aumento de ϵ . Centrémonos en el caso de $p = 0.9$, y observemos este decrecimiento de σ . En la Figura 2.3 (en escala logarítmica) podemos observar un comportamiento lineal con una gran pendiente hasta $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 8$, donde se pierde la linealidad y el cambio de la desviación no es apenas significativo.

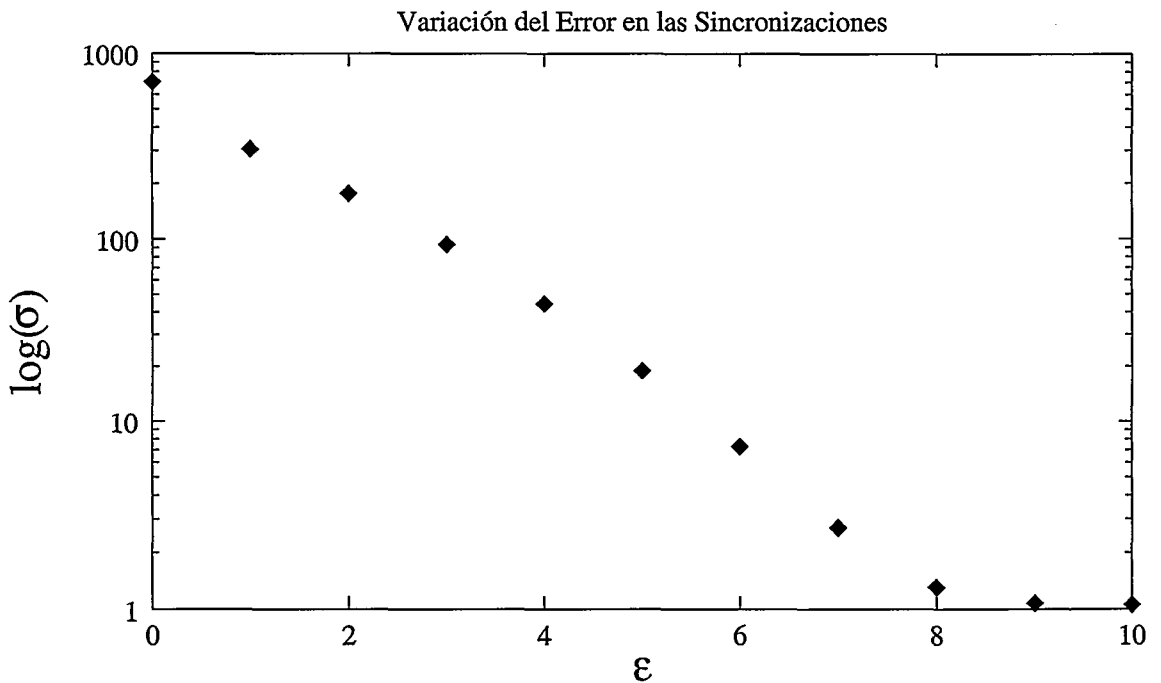


Figura 2.3: Variación de σ frente al peso sináptico del ejemplo *C* y *D* de la Figura 2.2. El eje de abscisas está en escala logarítmica.

A continuación mostramos la tabla con todos los valores numéricos de la Figura 2.2. En ella podemos observar que para $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 10$ el valor de $\sigma = 1.054$ es más pequeño que el valor que tienen las unidades aisladas sin conexión, que es $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.5331$

Este resultado es relevante desde el momento en que el disparo sincrónico de dos neuronas, para unos valores apropiados de la conexión sináptica ($\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 10$), puede ser un sistema más periódico y de comportamiento más regular que las neuronas por separado. Observamos que una dispersión 1.054 para una sinapsis

Parámetros de Sincronización

ϵ_{12}	ϵ_{21}	τ_0	σ_0	τ	σ
0	0	752.536442	790.547251	488.901235	704.430929
1	1	416.609727	489.749031	138.390308	305.307134
2	2	329.937590	421.190096	62.797588	176.515790
3	3	266.275277	367.259298	33.939418	93.691831
4	4	212.771627	316.615689	24.430170	44.373690
5	5	167.878150	269.186050	21.918961	18.875202
6	6	130.651136	225.394287	21.384574	7.292721
7	7	100.201845	185.549672	21.292163	2.708359
8	8	75.687294	149.845742	21.279103	1.309936
9	9	56.311993	118.373895	21.277590	1.075668
10	10	41.329435	91.135036	21.277447	1.054543

Tabla 2.1: Simulación mediante CM's para dos neuronas estocásticas con parámetros: $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.9$, $L_1 = 20$, $L_2 = 20$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0 - 10$.

de 10 es equivalente a la dispersión de una neurona aislada de $p = 0.9$ y $L = 10$. A grandes rasgos, esto sucede porque cuando la primera neurona dispara, induce a modificar el valor umbral de la segunda neurona en $L_2 - \epsilon_{12}$ (lo mismo sucede al contrario). Por tanto, la segunda neurona es como si tuviera un nuevo umbral *virtual*, que es menor respecto al original, produciendo así un decremento en la dispersión del disparo sincrónico. Recordemos que la dispersión (Ecuación 1.3) es proporcional a la raíz cuadrada del umbral ($\sigma \sim \sqrt{L}$).

Otro resultado que es importante resaltar es el hecho de que el periodo de sincronizaciones sucesivas no depende del estado inicial del sistema. Contrariamente, en un sistema determinista $p_1 = p_2 = 1$ con $L = L_1 = L_2$ y sin interacción, solamente tendríamos sincronización de periodo L si el estado inicial de las dos neuronas es el mismo (suponiendo que tienen las dos el mismo umbral). Si por el contrario hubiese la interacción $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 10$, con los parámetros neuronales $p_1 = p_2 = 1$, $L_1 = L_2 = 20$, y además el sistema se inicializara en los estados $a_1(t_0) = 19$, $a_2(t_0) = 4$, entonces nunca se daría la sincronización de las dos unidades. Esto no ocurre si la inicialización es, por ejemplo, $a_1(t_0) = 10$, $a_2(t_0) = 11$, produciéndose una sincronización con un periodo 20. Por tanto, estos simples ejemplos ponen de manifiesto que en un sistema sin ruido formado por dos unidades, la mutua sincronización de éstas depende única y exclusivamente de la fase inicial en la que empezamos, hecho que no ocurre con nuestro modelo estocástico.

2.3.2 Sincronización de una Neurona Lenta y una Neurona Rápida

Consideremos ahora el caso de un sistema formado por la neurona 1 de disparo rápido y ritmo regular, y por la neurona 2 de disparo lento y deslocalizado en el tiempo (es decir $\tau_1 \gg \tau_2$ y $\sigma_1 \ll \sigma_2$). Esta configuración es de especial y relevante importancia desde el momento que podría simular una neurona que es activada por un estímulo externo disparando rápida y regularmente. Así, la unidad 2, aislada o en reposo, tiene un periodo mayor y un disparo más irregular que la neurona 1, de periodo corto con disparo rápido y regular.

Los parámetros escogidos para el sistema formado por dos unidades cumpliendo las características anteriores, se pueden ver en la Tabla 2.2.

Parámetros Neuronales

unidad	ϵ	p_i	L_i	τ_i	σ_i
1	$\epsilon_{12} = 0 - 70$	0.95	5	5.21	0.47
2	$\epsilon_{21} = 2$	0.5	70	139	11.747

Tabla 2.2: Parámetros de un sistema de dos unidades formado por una neurona de disparo lento y otra de disparo rápido.

Podemos hacernos una serie de cuestiones, como por ejemplo: cómo se sincroniza este sistema, cómo la sincronización dependerá de los parámetros neuronales, cómo es esta dependencia, etc. Intentemos responder a estas preguntas analizando cómo se comporta el sistema según variamos o cambiamos los parámetros de las unidades y su interacción.

Utilizando nuevamente el formalismo de CM's descrito en el Apéndice B, el promedio entre disparos sincrónicos y su desviación se puede calcular mediante la matriz de probabilidades de transición de todos los estados accesibles del sistema.

En la Figura 2.4 podemos observar para la configuración anterior cómo varía el tiempo medio entre sincronizaciones sucesivas (τ), conforme vamos variando la conexión sináptica ϵ_{12} , dejando fijo el otro peso sináptico. Rápidamente sobresale en éste gráfico la estructura escalonada del periodo de sincronización. Así, la magnitud τ muestra una *especificidad* hacia ciertos rangos de valores de la transmisión sináptica ϵ_{12} . Dicho en otras palabras, para ciertos valores de ϵ_{12} la unidad rápida conduce a disparar a la unidad lenta de una forma regular y sincrónica, y además los parámetros τ y σ permanecen constantes a lo largo de estos rangos de valores.

Por tanto, de la observación de la Figura 2.4, podemos extraer los siguientes rangos de sincronización:

- (i) Para $\epsilon_{12} = 13$ hay disparo regular a $\tau = 26.2$.
- (ii) Para $\epsilon_{12} \in \{16, 18\}$ hay disparo regular a $\tau \sim 21$.

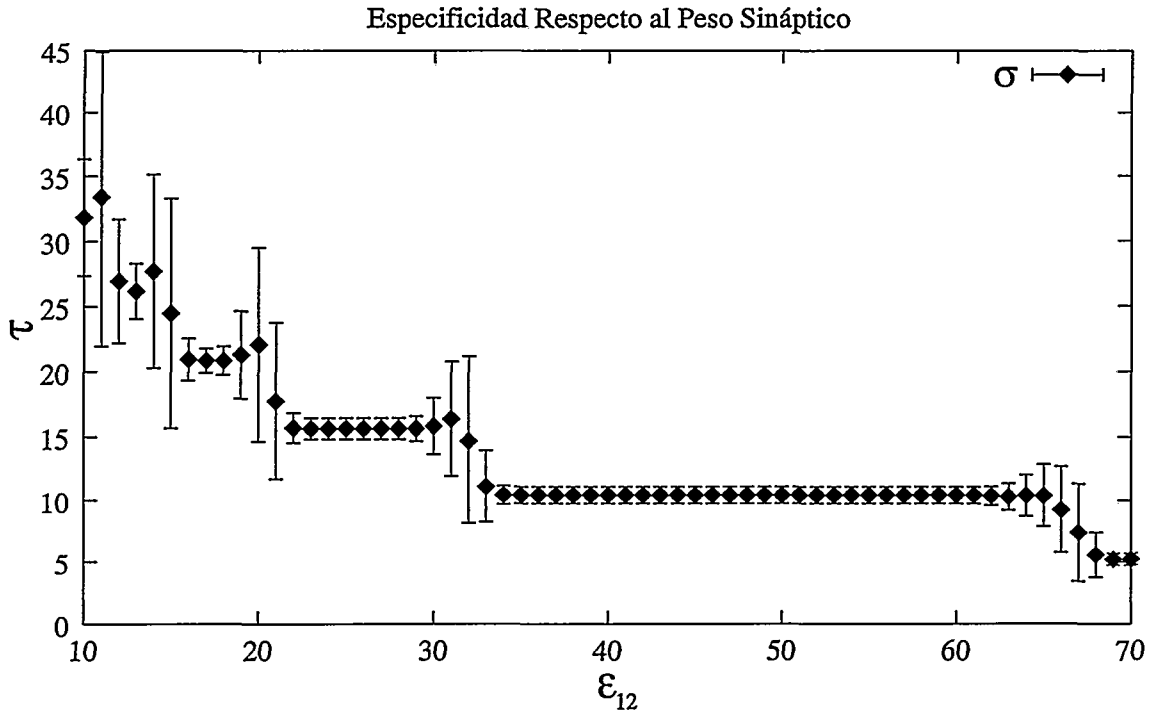


Figura 2.4: Variación del tiempo medio de sincronización frente a ϵ_{12} para la configuración de la Tabla 2.2. Las barras de error de la figura se refieren a la desviación del promedio del tiempo de sincronización.

- (iii) Para $\epsilon_{12} \in \{22, 29\}$ hay disparo regular a $\tau \sim 15$.
- (iv) Para $\epsilon_{12} \in \{35, 61\}$ hay disparo regular a $\tau \sim 10.4$.
- (v) Para $\epsilon_{12} \in \{69, 70\}$ hay disparo regular a $\tau \sim 5.2$.

Podemos observar que el comportamiento del disparo del sistema es consecuente con una neurona aislada con parámetros: de probabilidad de salto $p \approx p_1$ y de umbral efectivo $L \approx mL_1 - (m - 1)$. La cantidad m es un número entero positivo que representa el m -ésimo disparo de la unidad rápida justo antes de que dispare la unidad lenta. Así, por ejemplo, para el rango $\epsilon_{12} \in \{35, 61\}$ hay un disparo regular de la unidad 2 cada dos disparos de la unidad 1. Hablaremos y explicaremos en profundidad el significado del número m en la sección que viene a continuación. Otro hecho que podemos observar en la Figura 2.4, es que el periodo de sincronización del sistema es un múltiplo del periodo de disparo de la unidad rápida, es decir $\tau \approx mL_1$ (teniendo m el mismo significado anterior). Respecto a las desviaciones en los escalones de la misma gráfica, éstas cumplen que $\sigma \approx \sqrt{m}\sigma_1$, lo que se puede deducir fácilmente substituyendo el umbral efectivo en la Ecuación 1.3.

Parámetros Neuronales

unidad	ϵ	p_i	L_i	τ_i	σ_i
1	$\epsilon_{12} = 0 - 35$	0.9	6	6.55	0.78
2	$\epsilon_{21} = 2$	0.1	35	341	55.31

Tabla 2.3: Configuración de parámetros de un sistema de dos unidades formado por una neurona lenta y otra rápida.

Especificidad en la Conexión Sináptica

El ejemplo antes presentado es una muestra de una gran variedad de configuraciones, en las cuales encontramos una cierta especificidad hacia el peso sináptico con respecto a la sincronización del sistema. Así, por ejemplo, podemos observar otra configuración similar dada por la Tabla 2.3.

De nuevo calculamos mediante CM's los parámetros de sincronización y representamos la variación del periodo de sincronización frente a la conexión sináptica, siendo las barras de error la dispersión de este periodo (Figura 2.5) entre sincronías consecutivas.

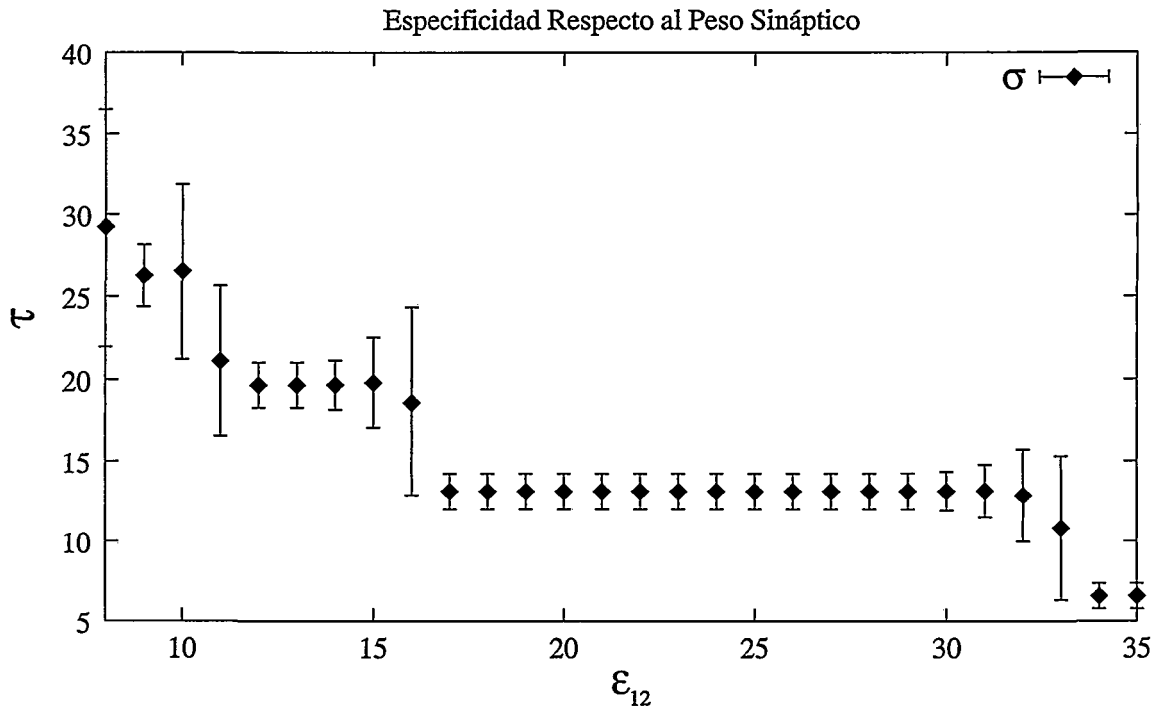


Figura 2.5: Variación del tiempo medio de sincronización frente a ϵ_{12} para la configuración de la Tabla 2.3. Las barras de error de la figura se refieren a la desviación del promedio del tiempo de sincronización.

Nuevamente observamos la estructura escalonada en la Figura 2.5, que denota

la especificidad de la sincronización hacia la conexión sináptica. Encontramos así en la figura los siguientes rangos de sincronización:

- (i) Para $\epsilon_{12} \in \{12, 13\}$ la unidad 2 disparará cada 3 disparos de la unidad 1 ($\tau = 19.667$, $\sigma = 1.36$).
- (ii) Para $\epsilon_{12} \in \{17, 27\}$ la unidad 2 disparará cada 2 disparos de la unidad 1 ($\tau = 13.111$, $\sigma = 1.11$).
- (iii) Para $\epsilon_{12} \in \{34, 35\}$ la unidad 2 disparará cada 1 disparo de la unidad 1 ($\tau = 6.555$, $\sigma = 0.78$).

Hagamos resaltar el hecho de que la dispersión de los diferentes rangos encontrados va disminuyendo según va aumentando el peso sináptico.

Especificidad hacia el Umbral de las Neuronas

Ahora nos cuestionamos si esta especificidad encontrada es sólo para las conexiones sinápticas, o quizá también lo sea hacia el umbral L de las neuronas. La Tabla 2.4 muestra dos posibles configuraciones para comprobar la especificidad respecto a los estados de la unidad lenta y respecto a los estados de la unidad rápida.

Parámetros Neuronales

Configuración A						Configuración B					
i	ϵ_{ij}	p_i	L_i	τ_i	σ_i	i	ϵ_{ij}	p_i	L_i	τ_i	σ_i
1	7	0.95	2 - 12	var	var	1	2	0.9	5	5.44	0.703
2	2	0.5	20	39	6.16	2	11	0.5	10 - 40	var	var

Tabla 2.4: Dos ejemplos de parámetros de un sistema de dos unidades formado por una neurona lenta y otra rápida. La configuración A prueba la especificidad en los estados de la neurona rápida (unidad 1), y la configuración B prueba la especificidad en la neurona lenta (unidad 2). Por último, la abreviación "var" en las tablas significa variable, ya que para cada umbral se obtendrá un valor que se calcula a través de la Ecuación 1.3.

En la Figura 2.6 podemos observar la variación de los periodos de sincronización frente al número de estados de las configuraciones de la Tabla 2.4. El ejemplo A de la Figura 2.6 corresponde a la variación de τ frente a L_1 (neurona rápida), mostrando una estructura similar a la vista anteriormente. De igual forma el ejemplo B de la misma figura representa la variación de τ frente a L_2 (neurona lenta). Volvemos a ver de nuevo, pero en este caso para determinados valores de los umbrales de las unidades, que existen determinados rangos de valores para los cuales la oscilación es más regular y sincrónica.

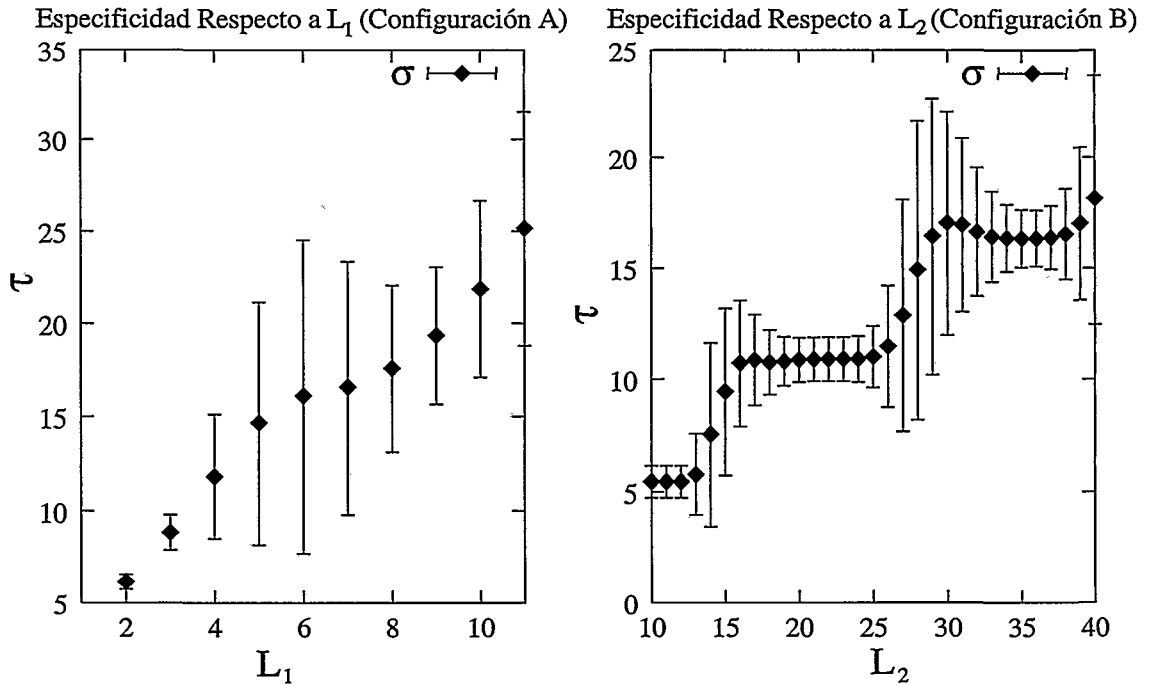


Figura 2.6: Variación de τ frente a L_1 (configuración A en Tabla 2.4) y frente a L_2 (configuración B en Tabla 2.4). Las barras de error de la figura se refieren a la desviación del promedio del tiempo de sincronización.

Un hecho que se debe resaltar es que la dispersión en los escalones va aumentando según aumenta el umbral de las unidades, como se puede observar en la Figura 2.6.

2.4 El Origen de la Especificidad

En esta sección vamos a explicar el mecanismo que da lugar a la especificidad encontrada. *Grosso modo* lo que está sucediendo es que para ciertos valores restringidos de ϵ o L , cada m disparos de la unidad 1 (unidad rápida), la unidad 2 (unidad lenta) es *conducida* a disparar en sincronía y regularmente. Así, el periodo de la unidad 2, y por tanto la sincronización, serán un múltiplo del periodo de disparo de la unidad 1, $\tau = m\tau_1$.

Debido a la combinación formada por una unidad lenta y otra rápida, y para valores restringidos de ϵ o L , la evolución espontánea de la unidad lenta es despreciable en comparación con la evolución de la misma debida a la interacción de ambas unidades. En otras palabras, el estado de la unidad lenta en nuestro sistema sube básicamente en incrementos de ϵ_{12} . Estos argumentos son las principales causas de la formación de esos *escalones* de regularidad para la sincronización del sistema observados en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6. Todos los escalones tienen más o

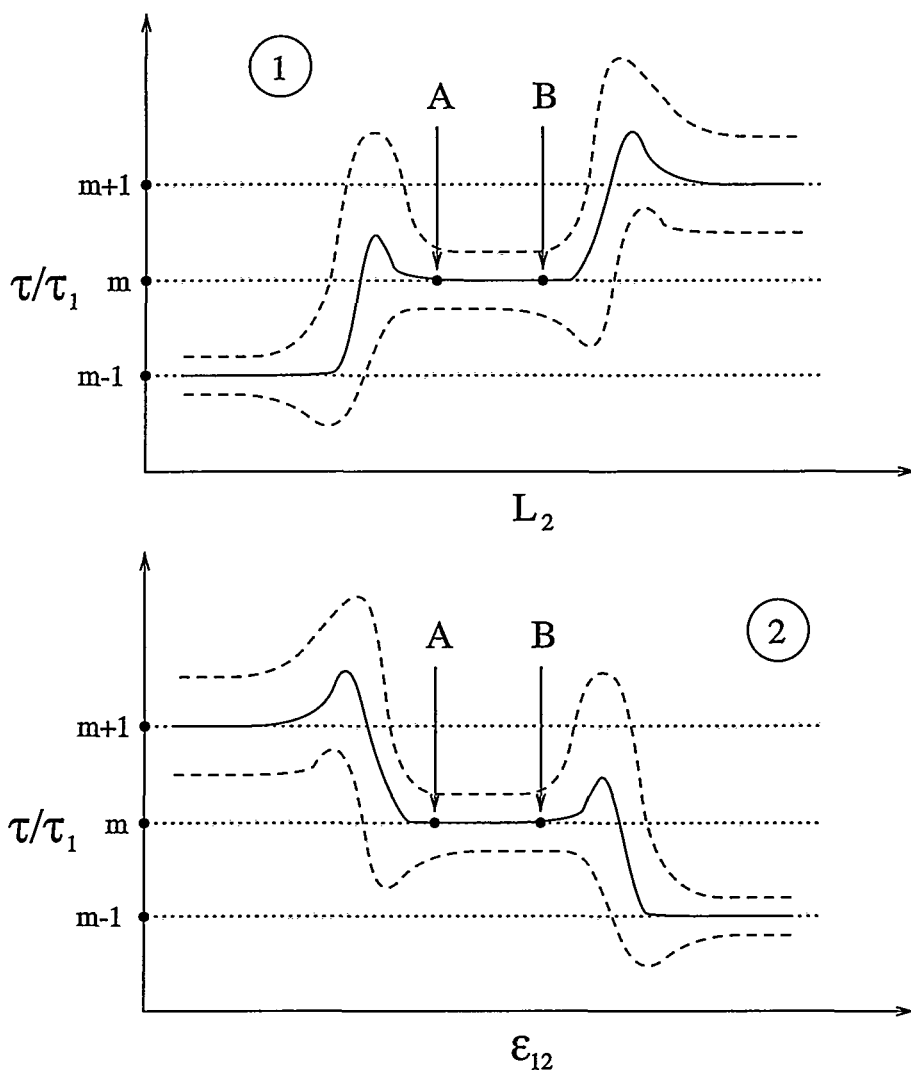


Figura 2.7: Formas características de los escalones formados al variar el umbral de la unidad lenta conectada con otra unidad rápida (Dibujo 1), o el peso sináptico ϵ_{12} (Dibujo 2). La magnitud τ_1 es aproximadamente el umbral de L_1 , ya que consideramos que la unidad 1 dispara en el límite determinista. Los puntos A y B son los valores límites en los cuales el periodo de sincronización permanece constante para un escalón m . Las líneas discontinuas corresponden a la dispersión del periodo de sincronización.

menos la misma forma cualitativa, y éstas se han dibujado en la Figura 2.7. En los ejes de ordenadas se han representado los periodos de sincronización normalizados por el periodo de la unidad 1. De esta forma, se está representando directamente el número de veces que necesita disparar la unidad 1, para hacer disparar a la unidad 2, y de aquí en adelante cuando hablemos del *escalón* m significará que nuestro sistema tiene unos parámetros elegidos de tal forma que la unidad 2 se sincroniza con el m -ésimo disparo de la unidad 1. En la misma figura, el Dibujo 1

representa la forma característica de los escalones cuando el parámetro que se varía es el umbral de la neurona de disparo rápido. Sin embargo, en el Dibujo 2 se presentan los escalones formados al variar el peso sináptico ϵ_{12} . Se puede observar en esta figura que la dispersión en un escalón m (líneas discontinuas en la figura) va aumentando según aumenta el número del escalón en el Dibujo 1, al contrario de lo que sucede en el Dibujo 2. Los puntos A y B de la misma figura representan los valores de L_2 (o ϵ_{12}) entre los cuales la unidad 2 dispara sincrónica y regularmente cuando se produce el m -ésimo disparo de la unidad 1, y además la dispersión de esta sincronización es la misma para todos los valores de L_2 (o ϵ_{12}) comprendidos entre A y B . También es importante resaltar que existen unas regiones de gran dispersión entre escalones adyacentes; más adelante explicaremos por qué tienen lugar.

Centrémonos ahora en el Dibujo 1 de la Figura 2.7, en los escalones formados al variar el umbral de la unidad 1. En este caso, ¿cuáles son las causas de la formación de un rango de sincronización para L_2 , tan estable y regular de un periodo $\tau = m\tau_1$? Estas causas pueden entenderse mejor si consideramos el límite determinista con $p_1 = 1$ y además $\epsilon_{21} = 0$, disparando así la unidad 1 con periodo determinista igual a su umbral. En este caso, el periodo de sincronización de las dos unidades es $\tau = mL_1$. La explicación está en la distribución de probabilidad del estado de la neurona 2, X_2 , para un estado dado de la unidad 1 por X_1 . Para ello, nos preguntamos qué forma tendrá esta distribución en el momento justo antes y justo después del disparo de la unidad 1. Así denotamos a la distribución de probabilidad justo antes del disparo de la unidad 1 por $P'_{X_1}(X_2)$, y a la distribución justo después del disparo de la unidad 1, $P_{X_1}(X_2)$. Debemos hacer notar que el estado X_1 lo definimos como el número de pasos totales que realiza la neurona 1 desde el instante en que ambas unidades dispararon al mismo tiempo por última vez. Por tanto, para nuestros razonamientos, X_1 realmente es un estado acumulado de la unidad 1 que se pone a cero cuando disparan en sincronía las neuronas. En consecuencia, en la Figura 2.8 se muestran cualitativamente las formas de estas distribuciones, cuando el estado de la neurona 1 puede tomar los valores: $(m-1)L_1$ y mL_1 , justamente antes y después del disparo de la neurona 1. En este caso, estamos suponiendo que el umbral de la unidad 2 está situado en el intervalo $mL_1 < L_2 < (m+1)L_1$.

La dispersión de $P_{X_1}(X_2)$ es causada por el ruido que lleva incorporado la unidad 2. Es decir, mientras la unidad 1 no dispara, la unidad 2 incrementa su estado espontáneamente con probabilidad no determinista $p_2 \ll 1$. El ruido que se genera así (anchura de la distribución) dependerá de cuánto tiempo evolucione espontáneamente, y cuanto mayor sea éste, mayor será el ruido. Esto se puede observar en la Figura 2.8, en la que la dispersión de la distribución $P_{(m-1)L_1}(X_2)$ es menor que la de $P'_{mL_1}(X_2)$. Estas dispersiones no difieren mucho, debido a que la unidad 2 tiene un tiempo muy corto para evolucionar espontáneamente hasta el siguiente disparo de la unidad 1 (neurona rápida). Por tanto, podemos observar que para el valor particular de $X_2 = L_2$ en la misma figura, la unidad 2 disparará con el m -ésimo disparo de la unidad 1. Y no sólo eso, sino que en el rango de

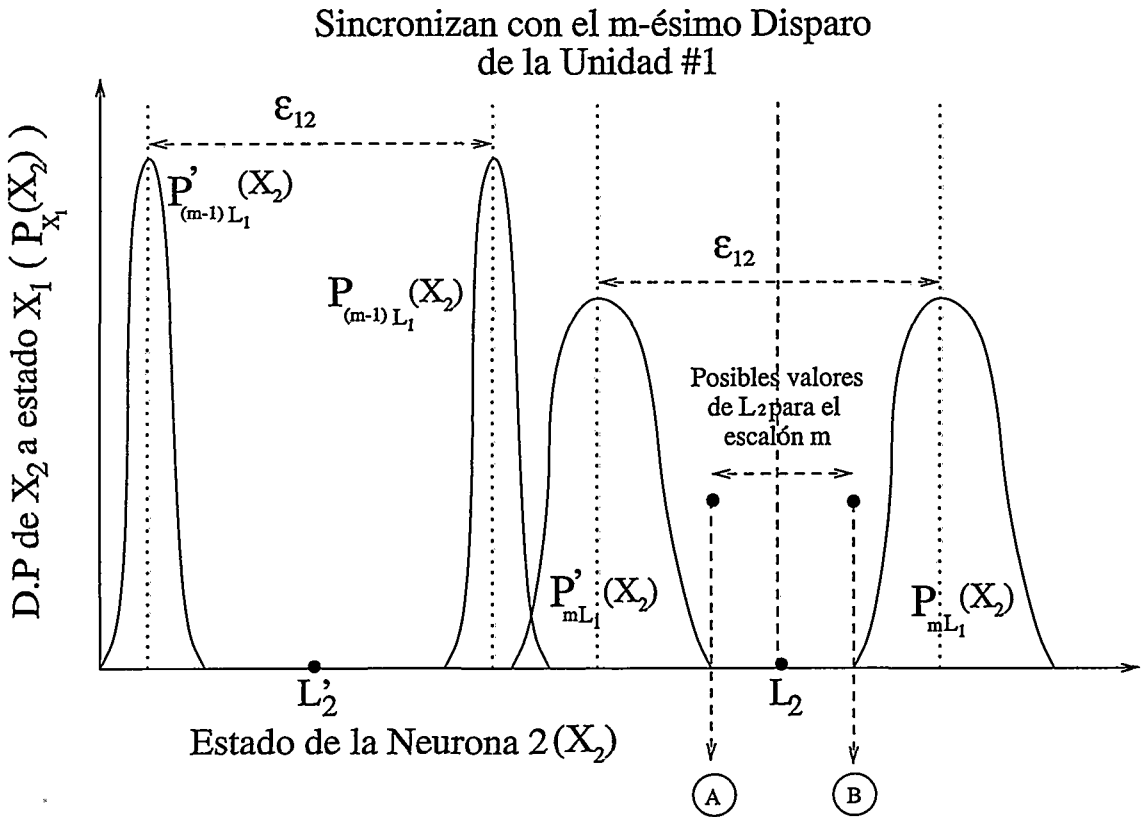


Figura 2.8: Forma de las distribuciones de probabilidad del estado de la unidad 2 cuando el estado de la neurona 1 es igual a $(m - 1)L_1$ y mL_1 , para un sistema que tiene $p_1 = 1$, $p_2 \ll 1$, $\epsilon_{21} = 0$ y $mL_1 < L_2 < (m + 1)L_1$. Los puntos A y B corresponden a los valores de L_2 , principio y final del escalón del Dibujo 1 de la Figura 2.7.

valores para L_2 comprendidos entre los puntos A y B, se formará el característico escalón para el m -ésimo disparo de la unidad 1 del cual venimos hablando hasta ahora. La dispersión en este escalón depende de cómo de grandes sean las colas de las distribuciones $P'_{mL_1}(X_2)$ y $P_{mL_1}(X_2)$, y el posible solapamiento entre ellas. No obstante, si el estado de la neurona 2 es $X_2 = L'_2$ (ver Figura 2.8), aunque estamos en una situación análoga, ahora el disparo de la unidad 2 se sincroniza con el $(m - 1)$ -ésimo disparo de la unidad 1 (escalón $m - 1$). Es fácil entender que los razonamientos son análogos en el caso de que la neurona 1 no dispare exactamente de forma determinista; es decir, si el estado de la neurona 2 cae exactamente entre $P'_{mL_1}(X_2)$ y $P_{mL_1}(X_2)$, de tal forma que las dispersiones de ambas funciones de probabilidad no sean muy grandes y no se solapen mucho, entonces la neurona 1 hará disparar regularmente a la neurona 2 con un periodo $\tau = m\tau_1$. Se debe hacer notar el hecho de que ahora la dispersión de la distribución $P_{X_1}(X_2)$ ya no está solamente generada por el ruido intrínseco de la unidad 2, sino también por el ruido de la unidad 1. Como hemos visto, según variamos L_2 convenientemente

pasaremos de un escalón de disparo a otro. Este paso no es brusco, sino que atraviesa una etapa de transición de gran dispersión en la sincronización (recordemos la forma característica de un escalón en la Figura 2.7). Esta etapa de transición es debida al solapamiento de las colas de las distribuciones $P'_{X_1}(X_2)$ y $P_{X_1}(X_2)$ con el punto $X_2 = L_2$.

Parámetros Neuronales

unidad	ϵ	p_i	L_i	τ_i	σ_i
1	$\epsilon_{12} = 11$	0.9	5	5.44	0.703
2	$\epsilon_{21} = 0$	0.5	2 - 40	var	var

Tabla 2.5: Configuración de parámetros de un sistema de dos unidades formado por una neurona lenta y otra rápida. La abreviación "var" en la tabla significa variable, ya que para cada umbral se obtendrá un valor que se calcula a través de la Ecuación 1.3.

Todo esto se puede corroborar de una forma cuantitativa mediante simulaciones para un caso concreto, como el que se muestra en la Figura 2.9. El Gráfico A de la misma representa la variación de τ con respecto a L_2 para los parámetros de la Tabla 2.5. Vemos que el cálculo de τ mediante CM's forma 3 escalones. En la misma figura, los Gráficos B, C y D muestran las distribuciones de probabilidad del estado de la unidad 2, cuando el estado de la unidad 1 está justo antes y justo después de un disparo, 2 disparos y 3 disparos de la unidad 1, respectivamente. Estos últimos gráficos se han simulado mediante ordenador considerando diez millones de unidades de tiempo en cada una de ellas, y luego generando los correspondientes histogramas de las distribuciones de probabilidad. Como se puede observar en los gráficos, éstas coinciden perfectamente con toda la descripción cualitativa del fenómeno de la especificidad hacia el umbral de la unidad lenta.

A continuación, vamos a explicar la formación de rangos de especificidad hacia el peso sináptico, siendo el caso del Dibujo 2 de la Figura 2.7. Para ello, vamos a observar cómo evolucionan las distribuciones $P_{X_1}(X_2)$, según variamos el peso sináptico. Consideremos de nuevo la Figura 2.8, en ella podemos observar que según disminuimos ϵ_{12} , las distribuciones de probabilidad $P_{X_1}(X_2)$ sufren un desplazamiento hacia la izquierda. Supongamos que disminuimos ϵ_{12} de tal manera que la distribución $P_{mL_1}(X_2)$ ya no cae a la derecha del umbral L_2 , sino que lo hace a la izquierda. De esta forma, el disparo de la unidad 2 ya no está regularizado por el m -ésimo disparo de la unidad 1. Pero para ser más concretos, supongamos que disminuimos ϵ_{12} de manera conveniente para que las distribuciones para el $m + 1$ -ésimo disparo que estarían por la derecha, se coloquen de forma siguiente:

$P'_{(m+1)L_1}(X_2)$: se coloca justo a la izquierda de L_2 .

$P_{(m+1)L_1}(X_2)$: se coloca justo a la derecha de L_2 .

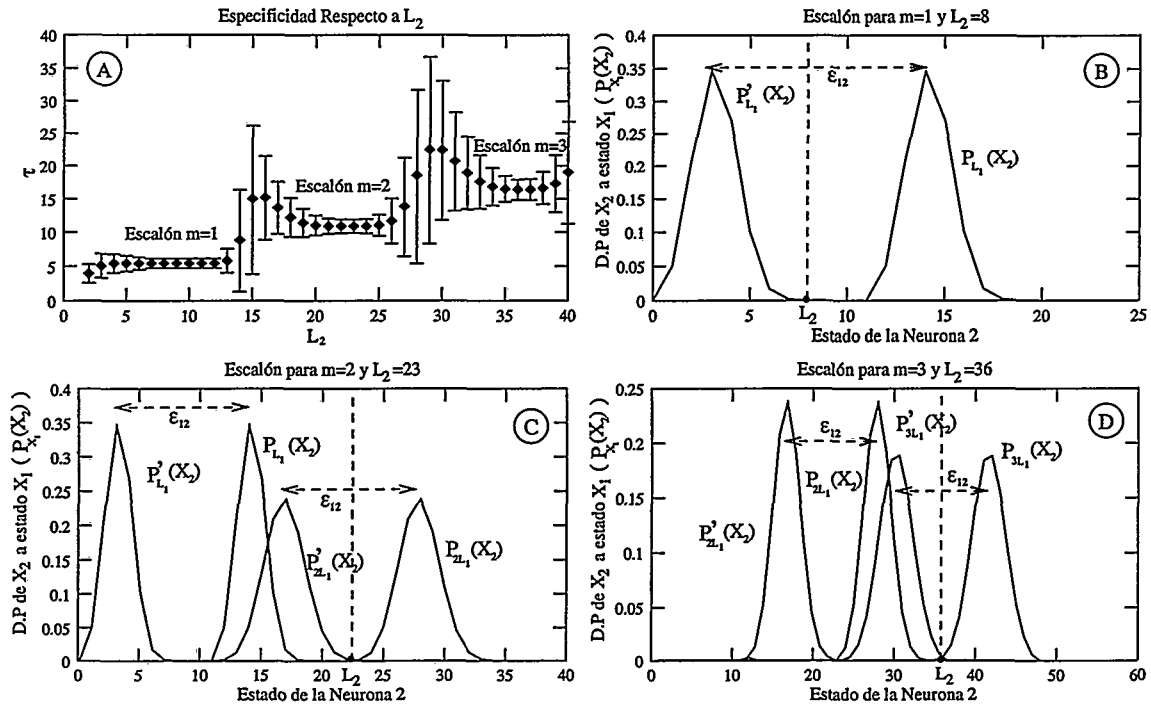


Figura 2.9: El gráfico A muestra el cálculo de τ mediante CM's para los parámetros de la Tabla 2.5. Los gráficos B, C y D muestran las distribuciones de probabilidad del estado de la unidad 2, cuando el estado de la unidad 1 está justo antes y justo después de un disparo, 2 disparos y 3 disparos de la unidad 1, respectivamente.

De esta manera la neurona 2 dispara regularmente cada $(m + 1)$ -ésimo disparo de la neurona 1. Así, vemos que según hemos disminuido ϵ_{12} de forma conveniente, nos hemos encontrado con una regularización del disparo de la unidad 2 con el $(m + 1)$ -ésimo disparo de la neurona 1. Por supuesto, este razonamiento puede seguir aplicándose, y si volvemos a aumentar ϵ_{12} de manera conveniente, la neurona 2 disparará cada $m + 2$ disparo de la 1. Para ϵ_{12} muy pequeños, las distribuciones de probabilidad $P_{X_1}(X_2)$ para el estado de la unidad 1 igual $X_1 = L_1, 2L_1, 3L_1, \dots, mL_1, (m + 1)L_1, \dots$ solaparán todas, y por lo tanto no habrá disparo regular de la neurona lenta inducida por la rápida (esto es lo que se observa en la Figuras 2.4 y 2.5). En el caso de que ϵ_{12} sea muy grande, ocurrirá exactamente lo contrario, todas las distribuciones $P_{X_1}(X_2)$ para $X_1 = L_1, 2L_1, 3L_1, \dots, mL_1, (m + 1)L_1, \dots$ estarán a la derecha de $X_2 = L_2$ y no solaparán, con lo que el disparo de la neurona 2 estará en una gran medida inducida por la generación del disparo de la neurona 1.

2.5 Regiones de Sincronía y su Cálculo

Al igual que en la Sección 2.3, podemos calcular qué aspecto tiene la sincronización variando en vez de un parámetro, dos parámetros. En nuestro caso, variaremos los parámetros de L_1 y L_2 a la vez. Representaremos las sincronizaciones con la dispersión más baja que se produzca al variar un parámetro frente al otro. Así obtendremos una serie de regiones de puntos de sincronización del sistema con la más baja dispersión, en función de los dos parámetros de variación L_1 y L_2 . Supongamos de nuevo una configuración formada por dos neuronas, una rápida (unidad 1) y otra lenta (unidad 2). Vamos a estimar cuál es el valor esperado y la dispersión del estado de la unidad 2, justo antes y justo después del m -ésimo disparo de la unidad 1, con el objetivo de calcular estas regiones de sincronía. Justo después del m -ésimo disparo de la unidad rápida, el valor esperado del estado de la unidad 2 se puede aproximar por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \langle X_2 \rangle_{mL_1} &\approx \text{incremento producido por la unidad 1} + \\
 &+ \text{incremento por evolución espontánea de la unidad 2} = \\
 &\Delta X_2' + \Delta X_2 = \\
 &m\epsilon_{12} + p_2 m \tau_1 = \\
 &m\epsilon_{12} + mL_1 \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

siendo la cantidad $m\tau_1$ el tiempo que tarda en disparar m veces la unidad 1.

Por otro lado, el estado de la unidad 2 justo antes del disparo m -ésimo de la unidad 1, tendrá el siguiente valor esperado:

$$\begin{aligned}
 \langle X_2 \rangle'_{mL_1} &\approx \text{incremento producido por la unidad 1} + \\
 &+ \text{incremento por evolución espontánea de la unidad 2} + \\
 &- \text{incremento por la transmisión del mensaje} = \\
 &\Delta X_2' + \Delta X_2 - \epsilon_{12} = \\
 &\langle X_2 \rangle_{mL_1} - \epsilon_{12} = \\
 &(m-1)\epsilon_{12} + mL_1 \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos calculados los promedios de las distribuciones de estados justo antes y justo después del m -ésimo disparo de la unidad 1. A continuación vamos a calcular las dispersiones de estos promedios.

Recordemos que la distribución $P_{mL_1}(X_2)$ (ver Figura 2.8) es una combinación de una binomial negativa y una binomial normal. La componente binomial negativa es debida al disparo de la unidad 1, y la componente binomial normal es

causada por el número de estados que se incrementa el estado de la unidad 2 en el tiempo que utiliza la unidad 1 para disparar. Por tanto, lo expresaremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P_{mL_1}(X_2) &= \\
 \sum_T (P_{mL_1,p_1}(T) P_{T,p_2}(X_2 - m\epsilon_{12})) &= \\
 \sum_T \left[\binom{T-1}{T_1 - mL_1} p_1^{mL_1} (1-p_1)^{T-mL_1} \times \right. \\
 \left. \times \binom{T}{X_2 - m\epsilon_{12}} p_2^{X_2 - m\epsilon_{12}} (1-p_2)^{T-(X_2 - m\epsilon_{12})} \right] & \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

donde $P_{mL_1,p_1}(T)$ representa la probabilidad de que la neurona 1 con L_1 estados y probabilidad de incremento p_1 dispare m veces en un tiempo T (binomial negativa dada por la Ecuación 1.2). La distribución $P_{T,p_2}(X_2 - m\epsilon_{12})$ es la probabilidad de que el estado de la neurona 2, con parámetros L_2 y p_2 , haya subido exactamente $X_2 - m\epsilon_{12}$ estados en un tiempo T (binomial normal).

Para los casos en que la unidad 1 se encuentra cerca del límite determinista con periodo de disparo $\tau_1 \approx L_1$, la probabilidad $P_{mL_1,p_1}(T)$ se puede aproximar por una delta de Dirac en el tiempo $T = m\tau_1$, y la anterior Ecuación 2.3 toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P_{mL_1}(X_2) &= \\
 \sum_T (P_{mL_1,p_1}(T) P_{T,p_2}(X_2 - m\epsilon_{12})) &\approx \\
 \sum_T (\delta(T - m\tau_1) P_{T,p_2}(X_2 - m\epsilon_{12})) &= \\
 \binom{m\tau_1}{X_2 - m\epsilon_{12}} p_2^{X_2 - m\epsilon_{12}} (1-p_2)^{m\tau_1 - (X_2 - m\epsilon_{12})} & \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Por tanto, para situaciones casi deterministas del disparo de la unidad 1, se puede aproximar la combinación de distribuciones binomial negativa y binomial normal por una distribución normal. Los primeros momentos (media y dispersión) de esta distribución normal son:

$$\langle X_2 - m\epsilon_{12} \rangle_{mL_1} = mL_1 \frac{p_2}{p_1}, \quad \sigma_{\langle X_2 - m\epsilon_{12} \rangle_{mL_1}} = \sqrt{\frac{mL_1 p_2 (1-p_2)}{p_1}} \quad (2.5)$$

Todo este razonamiento anterior se puede aplicar de igual forma a la distribución de probabilidad de los estados de la neurona 2 justo antes del m -ésimo disparo de la neurona 1, $P'_{mL_1}(X_2)$, obteniéndose similarmente:

$$P'_{mL_1}(X_2) \approx \left(X_2 - \epsilon_{12}(m-1) \right)^{m\tau_1} p_2^{X_2 - \epsilon_{12}(m-1)} (1-p_2)^{m\tau_1 - (X_2 - \epsilon_{12}(m-1))}, \quad (2.6)$$

siendo los primeros momentos:

$$\langle X_2 - \epsilon_{12}(m-1) \rangle'_{mL_1} = mL_1 \frac{p_2}{p_1}, \quad \sigma_{\langle X_2 - \epsilon_{12}(m-1) \rangle'_{mL_1}} = \sqrt{\frac{mL_1 p_2 (1-p_2)}{p_1}}. \quad (2.7)$$

Por consiguiente, ahora estamos en posición de estimar el principio y el final de un escalón m , o lo que es lo mismo, los puntos A y B de las Figuras 2.7 y 2.8. Mediante las Ecuaciones 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7, estos puntos se pueden calcular aproximadamente por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} L_{2,A}(L_1) &\approx (m-1)\epsilon_{12} + \frac{mL_1 p_2}{p_1} + \sqrt{\frac{mL_1 p_2 (1-p_2)}{p_1}} \\ L_{2,B}(L_1) &\approx m\epsilon_{12} + \frac{mL_1 p_2}{p_1} - \sqrt{\frac{mL_1 p_2 (1-p_2)}{p_1}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde se ha considerado una estimación oportuna para los límites de las bandas, el sumar y restar al promedio del estado de la unidad 2 su dispersión. Así, estas ecuaciones en el espacio L_1, L_2 variable, delimitarán aproximadamente las bandas de sincronización estable. Para ver cómo funciona esta aproximación, hemos creado varias simulaciones para cada pareja de valores (L_1, L_2) . Cada una de estas simulaciones tiene 100000 pasos de tiempo de evolución. En estas simulaciones, en el momento en el que la configuración de parámetros L_1 y L_2 produce una sincronización de dispersión baja, se representa con un punto en una gráfica de L_1 frente a L_2 . Ahora bien, ¿cómo de baja debe ser la dispersión? El criterio que hemos seguido para elegir la dispersión es que ésta fuese lo suficientemente baja como para que no solapara con la dispersión de otros escalones superiores o inferiores. Con este criterio nos aseguramos de no estar en la región de alta dispersión que existe entre dos escalones (ver Figura 2.7). Sabemos que el número de escalón m para un conjunto de parámetros fijos, viene determinado por:

$$m = \frac{\tau}{\tau_1}, \quad (2.9)$$

y por tanto (regla de estimación de propagación del error, para el cociente de las variables τ y τ_1 [Spiegel y Abellanas, 1988]) su dispersión vendrá dada por:

$$\sigma_m = m \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\tau_1}\right)^2}, \quad (2.10)$$

siendo τ_1 y σ_1 los calculados a través de la Ecuación 1.3, y τ y σ el periodo y desviación de sincronizaciones consecutivas que se miden en la simulación. Así, debemos elegir una dispersión σ_m que no sea mayor que la unidad, para que no se solape con otro escalón superior o inferior. Estas bandas de puntos de sincronización se pueden observar en la Figura 2.10. En esta figura, cada pareja de puntos (L_1 , L_2) se marca con un punto, cuando la dispersión obtenida de la simulación cumple $\sigma_m < 1$. El cálculo teórico de los límites de las bandas de sincronización mediante la Ecuación 2.8, viene representado en la figura por las diferentes rectas que se dibujan, que son las siguientes:

m=1 líneas 1 y 2 respectivamente:

- $L_{2,A}(L_1) = 0.470162 \sqrt{L_1} + 0.315789 L_1$
- $L_{2,B}(L_1) = 50 - 0.470162 \sqrt{L_1} + 0.315789 L_1$

m=2 líneas 3 y 4 respectivamente:

- $L_{2,A}(L_1) = 50 + 0.66491 \sqrt{L_1} + 0.631579 L_1$
- $L_{2,B}(L_1) = 100 - 0.66491 \sqrt{L_1} + 0.631579 L_1$

m=3 líneas 5 y 6 respectivamente:

- $L_{2,A}(L_1) = 100 + 0.814345 \sqrt{L_1} + 0.947368 L_1$
- $L_{2,B}(L_1) = 150 - 0.814345 \sqrt{L_1} + 0.947368 L_1$

m=4 líneas 7 y 8 respectivamente:

- $L_{2,A}(L_1) = 150 + 0.940325 \sqrt{L_1} + 1.26316 L_1$
- $L_{2,B}(L_1) = 200 - 0.940325 \sqrt{L_1} + 1.26316 L_1$

m=5 líneas 9 y 10 respectivamente:

- $L_{2,A}(L_1) = 200 + 1.05131 \sqrt{L_1} + 1.57895 L_1$
- $L_{2,B}(L_1) = 250 - 1.05131 \sqrt{L_1} + 1.57895 L_1$

m=6 línea 11:

- $L_{2,A}(L_1) = 300 - 1.15166 \sqrt{L_1} + 1.89474 L_1$

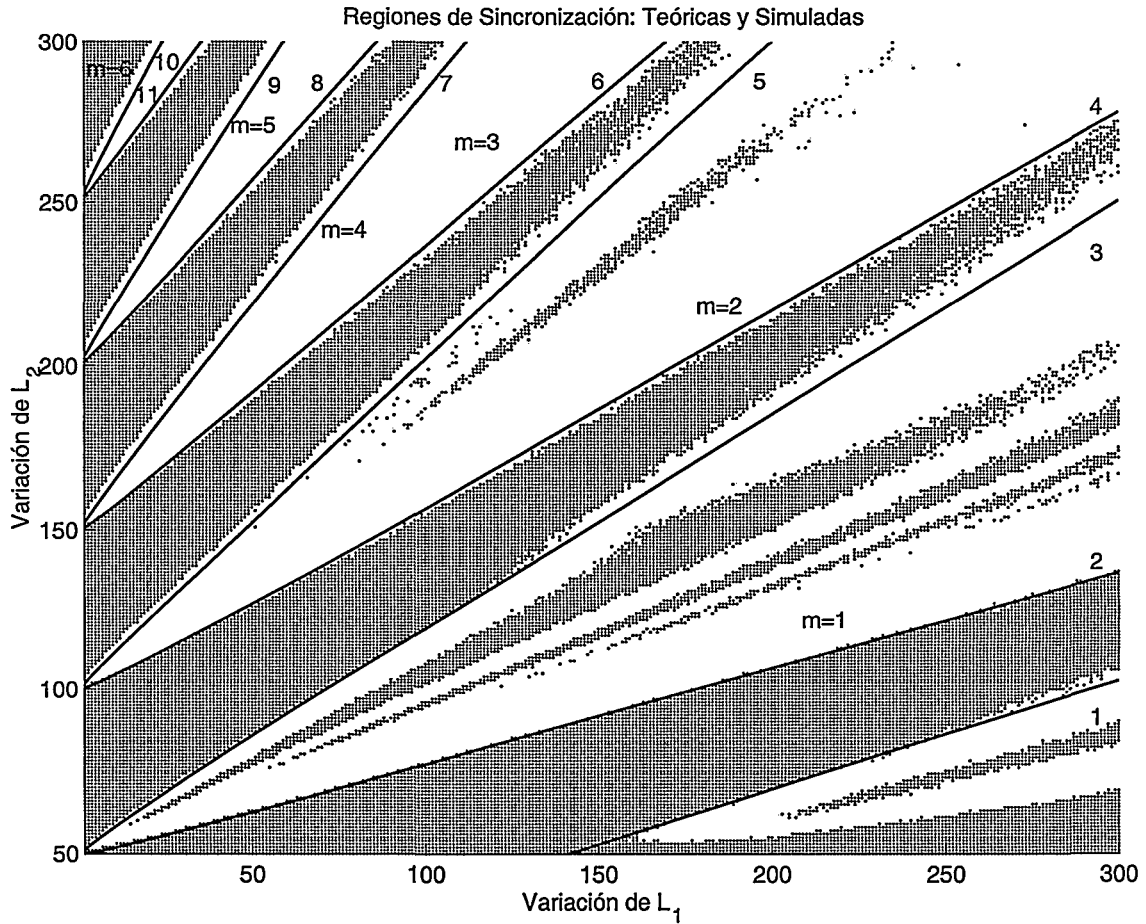


Figura 2.10: *Bandas de sincronización para dos neuronas con $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.3$, $\epsilon_{12} = 50$, $\epsilon_{21} = 0$, $L_1 = 0 - 300$, y $L_2 = 50 - 300$. Los puntos de la gráfica representan una simulación con 100000 pasos de tiempo para una pareja de valores dados L_1 , L_2 , cuya dispersión del periodo de sincronización cumple que $\sigma_m < 1$. Las rectas representan los límites aproximados de las bandas de sincronización calculados analíticamente mediante la Ecuación 2.8.*

En la Figura 2.10 podemos apreciar que los límites teóricos se ajustan a los experimentales. Sin embargo, se observa en la misma figura que aparecen más bandas de las esperadas en una primera aproximación. Estas bandas aparecen debido a que para ciertas configuraciones de las unidades, m disparos de la unidad 1 no tienen por qué corresponder a un único disparo de la unidad lenta, sino en general a n disparos. Así, en general, la Ecuación 2.8 se podrá expresar como:

$$\begin{aligned}
 nL_{2,A}(L_1) &\approx (m - 1)\epsilon_{12} + \frac{mL_1p_2}{p_1} + \sqrt{\frac{mL_1p_2(1 - p_2)}{p_1}} \\
 nL_{2,B}(L_1) &\approx m\epsilon_{12} + \frac{mL_1p_2}{p_1} - \sqrt{\frac{mL_1p_2(1 - p_2)}{p_1}}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

donde el nuevo índice n representa el número de disparos de la unidad 2.

Consecuentemente, en la Figura 2.11 estimamos los límites de algunas de estas bandas, cosa que no hacíamos en la Figura 2.10. Por poner un ejemplo, la banda $n = 2$, $m = 1$ corresponde a la sincronización que se forma cuando un disparo de la unidad 1 se sincroniza con el segundo disparo de la unidad 2 (aquí esta unidad es más rápida que la unidad 1). Similarmente, la banda $n = 2$, $m = 3$ de la misma figura, es correspondiente a las configuraciones en las cuales el segundo disparo de la unidad 1 se sincroniza con el tercer disparo de la unidad 2. En la Figura 2.11 hemos calculado la delimitación teórica de estos dos ejemplos comentados, basándonos en la Ecuación 2.11, obteniendo las rectas:

n=2, m=1 línea 1:

$$\bullet L_{2,B}(L_1) = 25 - 0.235081 \sqrt{L_1} + 0.157895 L_1$$

n=2, m=3 líneas 2, 3 y 4 respectivamente:

$$\bullet L_{2,A}(L_1) = 50 + 0.407173 \sqrt{L_1} + 0.473684 L_1$$

$$\bullet L_{2,B}(L_1) = 75 - 0.407173 \sqrt{L_1} + 0.473684 L_1$$

$$\bullet L_{2,A-}(L_1) = 50 - 0.66491 \sqrt{L_1} + 0.631579 L_1$$

donde $L_{2,A-}(L_1)$ es similar al límite A de la banda $m = 2$ de la Figura 2.10, pero restando el error.

En las Figuras 2.10 y 2.11 sólo representamos las sincronizaciones cuyas dispersiones son menores que un valor umbral ($\sigma_m < 1$), para asegurarnos que estamos en las regiones en las que el sistema se comporta más o menos regularmente. Sin embargo, todavía no conocemos cómo se comporta la magnitud τ ni su dispersión σ . En la Figura 2.12 observamos cómo se comporta el periodo de sincronización según vamos variando los parámetros L_1 y L_2 . Así vemos que a medida que éstos aumentan, los periodos de sincronización de las diferentes configuraciones (τ) también van aumentando, como era de esperar. Esta figura está calculada de nuevo mediante simulación por computador. Para cada pareja de valores (L_1, L_2) se ha creado una simulación con un tiempo suficientemente largo, que en nuestro caso es $t = 100000$, para hacer una estadística razonable y calcular el periodo medio de sincronización y su dispersión. Sólo se ha representado el periodo para las bandas de sincronización de la Figura 2.10.

En la Figura 2.13 vemos cómo se comporta el error del periodo de sincronización σ , para diferentes valores de L_1 y L_2 . De nuevo, sólo hemos representado este error para las bandas de sincronización de la Figura 2.10. Observamos, como era de esperar, que el error va aumentando según aumentamos los umbrales de las neuronas, y que es mayor para las bandas en las que m disparos de la unidad rápida implican n ($n > 1$) disparos de la unidad lenta. También se puede observar que si recorremos el valle en una banda, el error en el periodo de sincronización

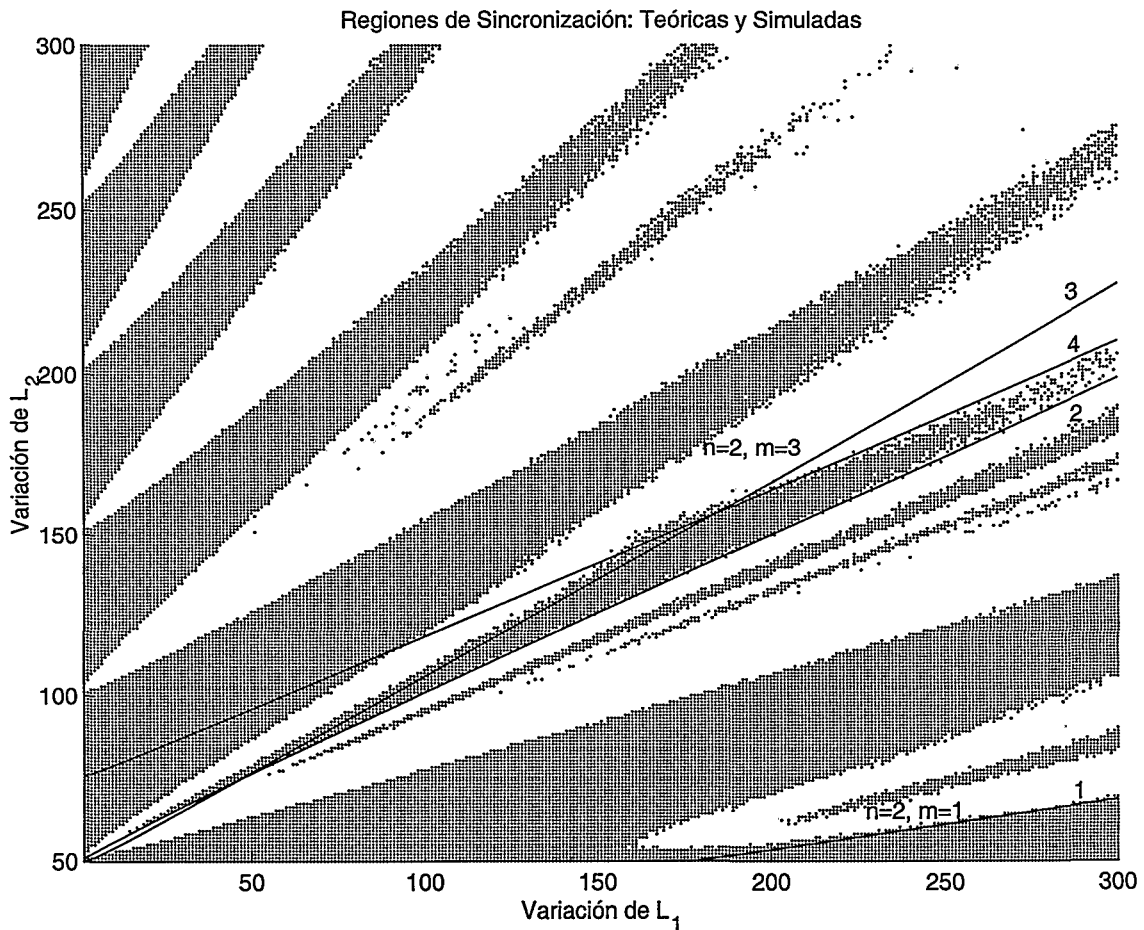


Figura 2.11: *Bandas de sincronización para dos neuronas con $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.3$, $\epsilon_{12} = 50$, $\epsilon_{21} = 0$, $L_1 = 0 - 300$, y $L_2 = 50 - 300$. Los puntos de la gráfica representan una simulación con 100000 pasos de tiempo para una pareja de valores dados L_1 , L_2 , cuya dispersión del periodo de sincronización cumple que $\sigma_m < 1$. Las rectas representan los límites aproximados de las bandas de sincronización calculados analíticamente mediante la Ecuación 2.11.*

va aumentando según aumentamos el valor de los umbrales (recordemos cuál era la forma típica de un escalón en la Figura 2.7).

Otros autores han estudiado también redes formadas únicamente por dos neuronas, pero siendo su dinámica determinista [Budelli et al., 1991] [Leonel y Budelli, 1996]. El modelo propuesto por estos autores obtiene m/n *phase-locking*, y hacen un estudio de cuáles deben ser los parámetros del sistema para obtener este resultado. Su interés en este tipo de redes es debido a que este comportamiento se observa en neuronas reales, para los *Pacemakers* que se encuentran en el ganglio del esófago del caracol *Helix aspersa*. El problema de este modelo propuesto de *Pacemakers* es que al ser determinista, depende de las condiciones iniciales en las que empiece el sistema. Esta dependencia de la fase

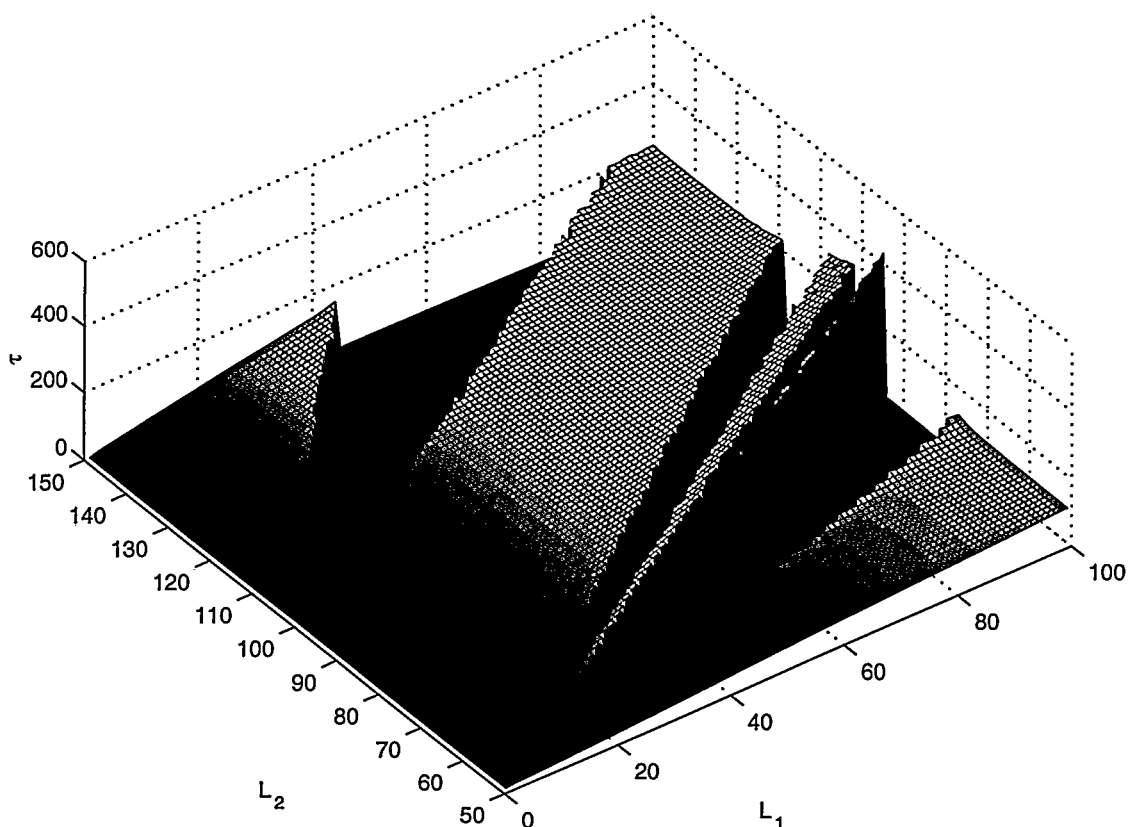


Figura 2.12: *Bandas de sincronización para dos neuronas con $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.3$, $\epsilon_{12} = 50$, $\epsilon_{21} = 0$, $L_1 = 2 - 100$, y $L_2 = 50 - 150$. La gráfica muestra en el eje Z el periodo de las sincronizaciones sucesivas, para valores dados de parejas de (L_1, L_2) .*

inicial no se produce en el modelo que se propone en este trabajo.

2.6 Producción de ISIH's Multimodales

Las distribuciones de intervalos de interdisparos cuantifican la probabilidad de que sucesivos disparos estén separados por un intervalo particular de tiempo. Los histogramas de intervalos de interdisparos (ISIH's, Inter-Spike Interval Histograms) de registros en neuronas, han sido medidos para diferentes tipos de neuronas bajo distintas circunstancias. Se han observado diferentes tipos de ISIH's en registros de diferentes animales y distintas neuronas. Así, hay una división general de estos histogramas en unimodales y multimodales. Se puede consultar el Capítulo 7 de [Tuckwell, 1989] para una descripción general de los posibles tipos de ISIH's que existen dentro de estas dos grandes categorías, y su interpretación. Los ISIH's unimodales obviamente pueden ser obtenidos fácilmente con nuestro modelo probabilístico de neuronas (ver la Sección 1.3), como se puede observar en

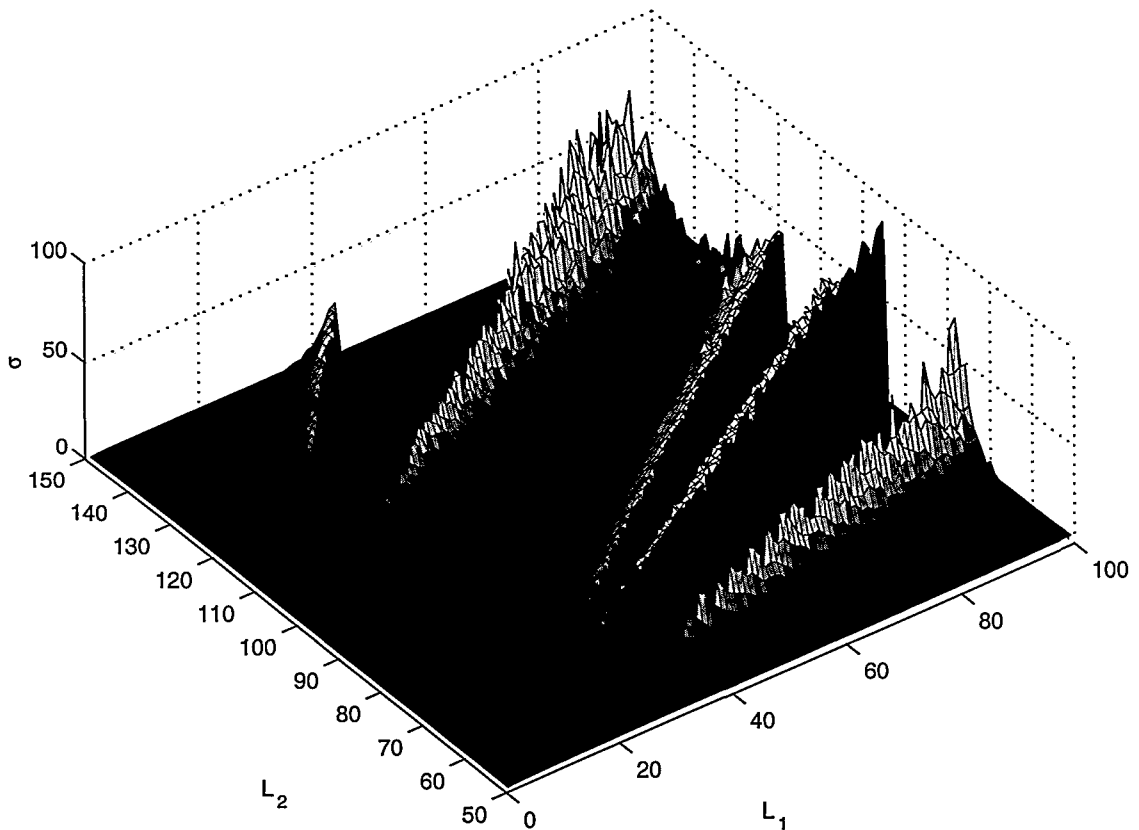


Figura 2.13: *Error de las bandas de sincronización para dos neuronas con $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.3$, $\epsilon_{12} = 50$, $\epsilon_{21} = 0$, $L_1 = 2 - 100$, y $L_2 = 50 - 150$. La simulación muestra en el eje Z el valor absoluto del error en el periodo de las sincronizaciones sucesivas, para valores dados de parejas de (L_1, L_2) .*

la Figura 1.3. En la misma, vemos que el ISIH de una neurona lenta disparando estocásticamente es muy abierto y deslocalizado en el espacio temporal, al contrario del ISIH de una neurona rápida con disparo regular. Lo que ya no resulta tan evidente es cómo podemos obtener ISIH's multimodales con nuestro modelo probabilístico. Los ISIH's multimodales suceden en la naturaleza en muchos casos, y hay numerosos ejemplos que muestran este comportamiento multimodal, como se puede ver por ejemplo en registros en el nervio de la fibra auditiva del mono ardilla [Rose et al., 1967], en el cortex primario visual del gato [Siegel, 1990], en registros en neuronas en el tiburón [Braun et al., 1994], en el lóbulo olfativo de la antena de la langosta [Wehr y Laurent, 1996], etc. Se han considerado diversos modelos, unos más complejos que otros, para intentar explicar esos registros en neuronas reales. Uno de los ejemplos precursores fue el trabajo de Gerstein y Mandelbrot [Gerstein y Mandelbrot, 1964] en el que generan ISIH's multimodales con su modelo del caminante aleatorio, en contraste con una variación periódica del parámetro de pérdida. Otro ejemplo es el trabajo de Longtin, Bulsara y Moss [Longtin et al., 1991], en el que presentan un modelo que consta

de dos estados biestables, y que es estimulado por una función periódica con ruido gaussiano. Este modelo también reproduce los ISIH's multimodales obtenidos experimentalmente. En trabajos posteriores [Longtin et al., 1994], y motivados por el modelo de ISIH's multimodales propuesto por Longtin y colaboradores, se estudiaron las condiciones en que las neuronas estimuladas periódicamente, pueden ser modeladas como sistemas biestables embebidos en ruido. Más recientemente se ha postulado, en las células del tiburón, que el mecanismo que produce estos ISIH's multimodales es una oscilación sub-umbral de disparo [Braun et al., 1994]. En contraste con todas estas propuestas, pretendemos utilizar nuestro modelo de integración y disparo de neuronas estocásticas para el estudio y producción de los complejos ISIH's observados en los registros de neuronas reales. Para investigar las posibilidades del modelo que sugerimos, estudiaremos en qué circunstancias dicho modelo produce estos ISIH's multimodales y por qué los produce.

2.6.1 La Generación de ISIH's Mediante Conexiones Inhibitorias

Para que este complejo patrón de inter-disparo ocurra en nuestro modelo estocástico neuronal, sólo es necesario que la interacción entre las neuronas sea la apropiada. Podemos obtener este patrón de disparo midiendo la salida de una neurona que recibe una interacción inhibitoria de otra neurona, produciendo una secuencia altamente aleatoria de disparos. La red neuronal más sencilla—basándonos siempre en nuestro modelo— que produce ISIH's multimodales, está formada por dos neuronas con esa interacción. Sin embargo, como sucede en los registros medidos en neuronas que están rodeadas por el ruido del medio, pudiera ser que el disparo irregular no viniese solamente de una única neurona, sino de un gran grupo de neuronas, y que su efecto total sea el de un disparo altamente aleatorio hacia la neurona donde se efectúa la medición.

La configuración que hemos estudiado consiste, esencialmente, en una neurona lenta y ruidosa que interacciona, a través de una conexión **inhibitoria** de un apropiado peso, con otra unidad que es rápida y de disparo regular. Un hecho importante que hay que resaltar, es que nuestro modelo neuronal estocástico en presencia de conexiones inhibitorias puede incorporar estados negativos de la variable de estado, $a(t)$. Para nosotros, estos estados negativos tienen una clara semejanza con los decrementos del potencial de reposo de la neuronas biológicas. A partir de ahora, la unidad 1 será una neurona rápida receptora y la unidad 2 será una neurona lenta emisora. De este modo, los ISIH's multimodales pueden ser medidos en la actividad resultante de la unidad 1, para parámetros de las unidades tales que las magnitudes del periodo y dispersión de cada unidad cumplan: $\tau_2 \gg \tau_1$, $\sigma_2 \gg \sigma_1$, y su interacción ϵ_{21} (fuerza de la conexión inhibitoria) sea del orden más o menos del umbral L_1 . La elección de los parámetros del sistema cumpliendo estas condiciones no es nada crítica, y cualquier combinación es válida. Es decir, lo único que varía es la forma y altura de los ISIH's multimoda-

les generados. Por ejemplo, un ISIH multimodal dado por la monitorización de la variable de estado de la unidad 1, se puede producir eligiendo los parámetros siguientes: $L_1 = 15$, $p_1 = 0.85$, $L_2 = 10$, $p_2 = 0.17$ y $\epsilon_{21} = -35$. El resultado de la simulación se puede observar en la Figura 2.14, que tiene un tiempo de simulación de 10^8 para realizar la estadística que calcula el histograma.

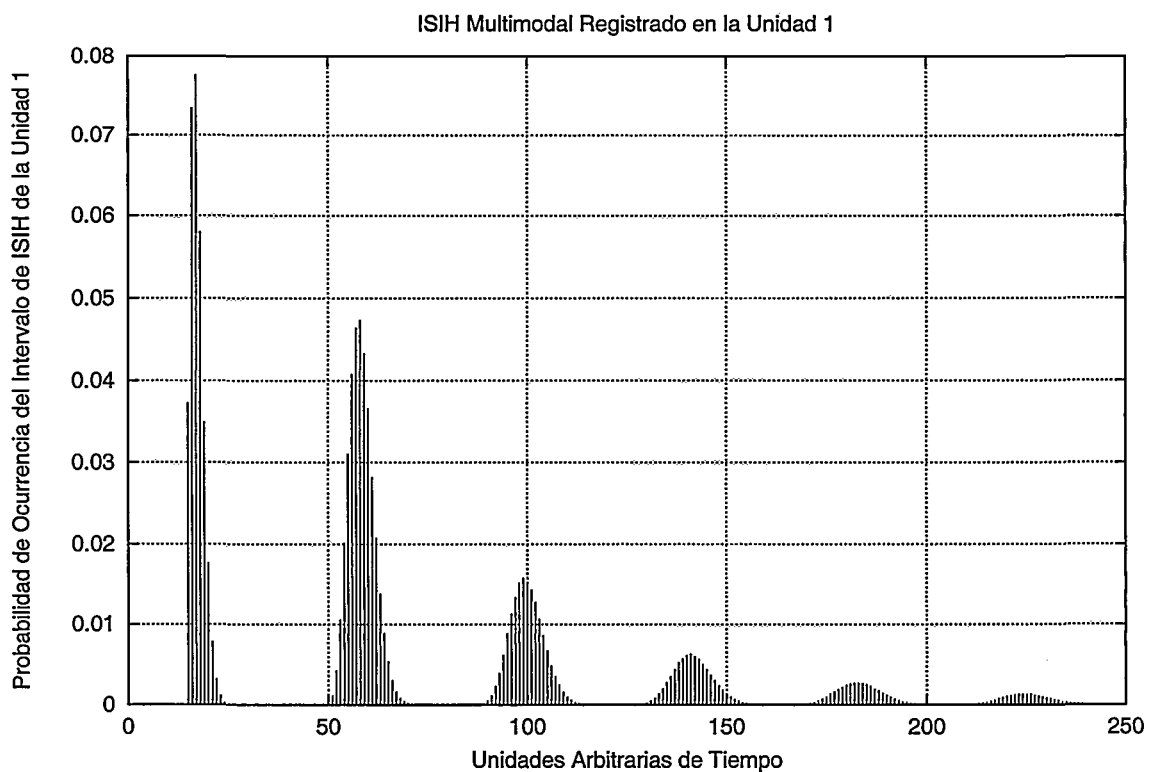


Figura 2.14: Simulación de ISIH's multimodales para una red formada por dos unidades con una configuración: $L_1 = 15$, $p_1 = 0.85$, $L_2 = 10$, $p_2 = 0.17$ y $\epsilon_{21} = -35$. La figura muestra el ISIH multimodal que se registra en la neurona 1.

De esta forma, la neurona 2 lenta y de disparos estocásticos regula los disparos regulares de la unidad 1, a través de la conexión inhibitoria.

Estas dos unidades aisladas (sin conexión) tienen los ISIH's unimodales representados en la Figura 1.3. Sin embargo, el cambio es bastante espectacular en el registro de la actividad de la unidad 1, cuando se permite una conexión inhibitoria de valores apropiados, como podemos observar en la Figura 2.14.

2.6.2 Causas de ISIH's Multimodales en el Modelo Estocástico

La simplicidad de la red y los modelos neuronales usados para la producción de ISIH's multimodales, hacen que el entendimiento de lo que origina este singular

patrón de disparo sea asequible. El tiempo $t = 0$ en el gráfico ISIH es definido como el tiempo que tiene lugar inmediatamente después del último disparo de la unidad 1: la neurona 1 estará así en el estado $x_1 = 1$, y la neurona 2 estará en estado x_2 con probabilidad $\pi(x_2)$. El primer pico de la Figura 2.14 es producido por todos aquellos casos en los que la neurona 1 dispara sin que la neurona 2 dispare, de manera que no retrase el disparo de la unidad 1. Esto se puede observar de una manera más clara en la Figura 2.15, en el inter-disparo numerado con 1.

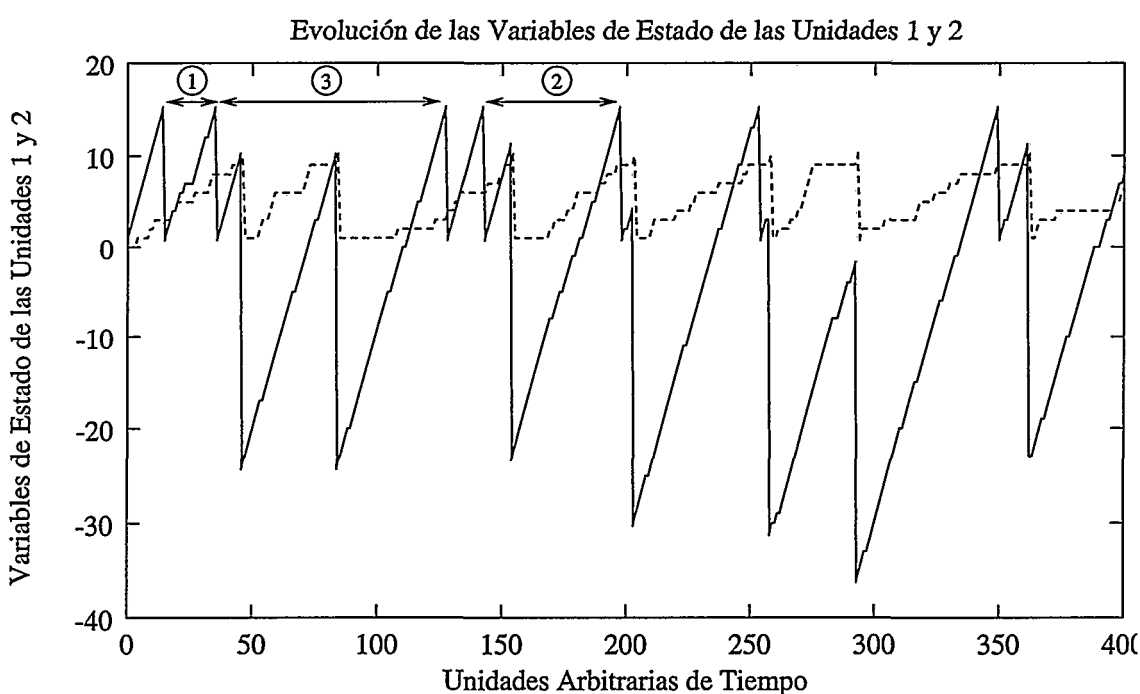


Figura 2.15: Simulación de la evolución de las variables de estado de la red formada por dos neuronas de la Figura 2.14. La figura sirve para explicar cuál es el origen del ISIH multimodal. La distancia 1 contribuye a la formación del primer pico, el inter-disparo 2 contribuye al segundo pico y el inter-disparo 3 a la del tercer pico.

El segundo pico del ISIH multimodal está formado por todos aquellos disparos de la unidad 1, de tal forma que entre ellos hay un disparo de la unidad 2 que retrasa a la 1, como puede verse en el inter-disparo numerado con 2 en la Figura 2.15. Debido a la transmisión del disparo de la unidad 2, la unidad 1 tendrá que superar $|\epsilon_{21}|$ estados más. Así, el número total de estados que tendrá que superar la neurona 1 antes de disparar será $L_1 + |\epsilon_{21}|$. El tiempo en promedio que es retrasada la unidad 1 cuando la neurona 2 ha disparado una vez es $\langle t_{retraso} \rangle_1 = 1 + (|\epsilon_{21}| - 1)/p_1$. Por análogas razones, el $D + 1$ -ésimo pico se produce cuando la neurona 2 dispara D veces antes de que la neurona 1 produzca su disparo. Aquí la neurona 1 disparará antes de que pase como mínimo un tiempo $t = L_1 + D|\epsilon_{21}|$. De nuevo, el tiempo en promedio que es retrasada la neurona 1 por D disparos de la neurona 2 es $\langle t_{retraso} \rangle_D = D(1 + (|\epsilon_{21}| - 1)/p_1)$.

Estos tiempos de retraso coinciden con los que observamos en la simulación de la Figura 2.14.

Este modelo puede producir una amplia y gran diversidad de ISIH's multimodales cuando variamos los parámetros de la red convenientemente. Así, mostramos cuatro ejemplos en la Figura 2.16. Podemos observar cómo variando los parámetros de las neuronas se obtienen los diferentes ISIH's multimodales.

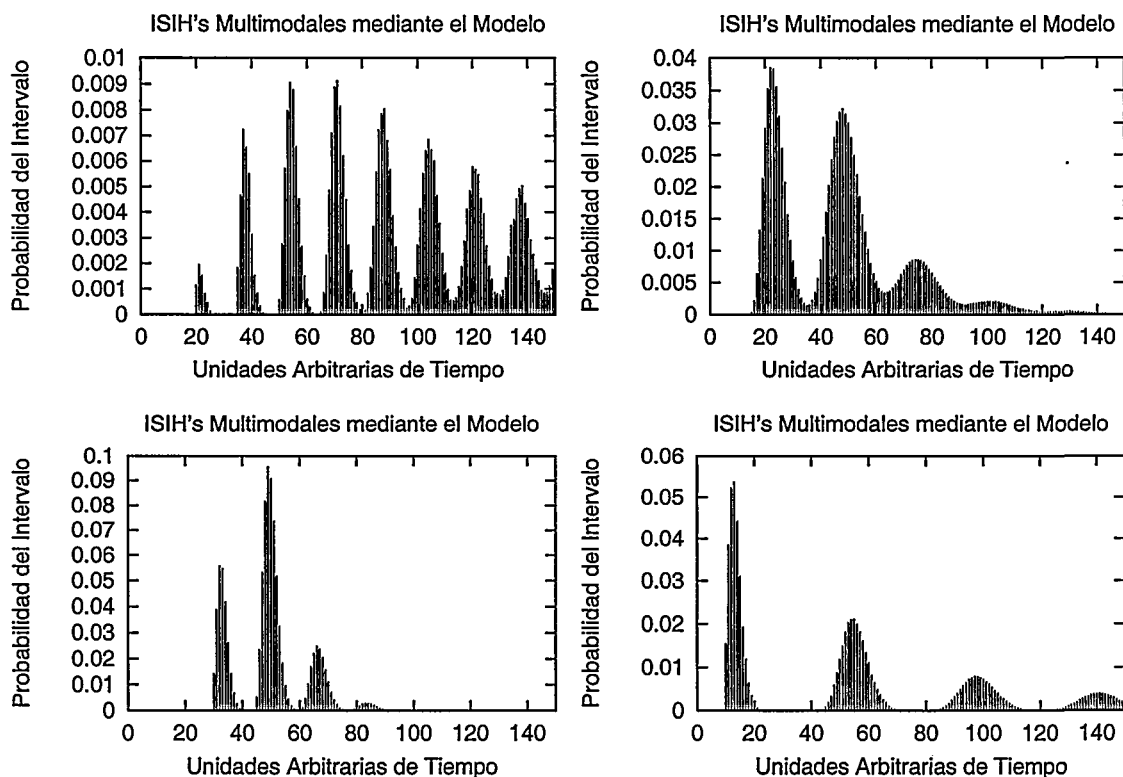


Figura 2.16: Simulación de diferentes ISIH's multimodales para cuatro configuraciones diferentes. La primera con parámetros $L_1 = 20$, $p_1 = 0.9$, $L_2 = 6$, $p_2 = 0.3$ y $\epsilon_{21} = -15$. La segunda tiene $L_1 = 15$, $p_1 = 0.6$, $L_2 = 6$, $p_2 = 0.1$ y $\epsilon_{21} = -15$. La tercera tiene $L_1 = 30$, $p_1 = 0.9$, $L_2 = 6$, $p_2 = 0.1$ y $\epsilon_{21} = -15$. Y, por último, la cuarta tiene $L_1 = 10$, $p_1 = 0.7$, $L_2 = 10$, $p_2 = 0.2$ y $\epsilon_{21} = -30$. Todas las figuras muestran los ISIH's de la neurona 1.

Debido a la simplicidad de la red seleccionada, también es posible calcular analíticamente el histograma de inter-disparos. Éste se calcula a través de la suma de contribuciones identificadas en el análisis de las simulaciones y la distribución $\pi(x_2)$ medida en la simulación. Para una detallada descripción de este cálculo analítico, se puede consultar el artículo [Hoffman et al., 1995].

En resumen, podemos decir que el modelo de integración y disparo estocástico que hemos propuesto es capaz de reproducir características generales de una gran variedad de ISIH's multimodales que son observados en los registros experimen-

tales de neuronas. Aquí podemos ver las ventajas que se derivan de tener un modelo relativamente sencillo, que nos ayuda a comprender fácilmente el proceso subyacente que tenemos en esta singular configuración neuronal. El modelo, por ejemplo, podría ser utilizado para simular neuronas o sitios activos individuales que pueden construir un modelo más complejo. Por ejemplo, este modelo básico que hemos utilizado, podría simular el ruido del medio en el que está embebida una neurona. Evidentemente, una ventaja de este modelo es que nos ofrece una completa identificación de cada pico del ISIH's multimodal mediante análisis teórico, y además nos permite determinar cuál es el origen de los mismos.

2.7 Conclusiones

Pensamos que una conclusión fundamental de este capítulo es que la aleatoriedad en el disparo de las neuronas de nuestro modelo puede actuar como un ruido activo de fondo, permitiendo así una codificación robusta y estable en las secuencias de tiempo de los disparos generados por las neuronas. Los modelos de integración y disparo deterministas producen disparos y sincronización dependiendo del punto de inicio o la fase, problema que se soluciona cuando el oscilador no es determinista. Es decir, la introducción de ruido o aleatoriedad en el disparo, permite una especificidad robusta en las respuestas de las neuronas. Esta regularización en el disparo es importante ya que podría ser un factor determinante para el refuerzo de sinapsis en un aprendizaje *hebbiano*. Otra característica de nuestro modelo, es que debido a su sencillez podemos analizar qué es lo que pasa concretamente cuando variamos los parámetros del mismo. Por tanto, podemos entender cómo se pueden formar una serie de patrones de disparo estables con nuestro modelo. El número de unidades que hemos estudiado es pequeño, sin embargo, en el siguiente capítulo estudiaremos el comportamiento y características de una población de osciladores estocásticos interaccionando.

En este capítulo hemos pretendido dar una visión del comportamiento de nuestro modelo neuronal estocástico, y de su riqueza a la hora de explicar fenómenos típicos que intervienen en el procesamiento de la información cerebral. Nos estamos refiriendo a los fenómenos de regularización y sincronización entre neuronas. También hemos estudiado una posible aplicación de nuestro modelo en la generación de ISHI's multimodales, siendo éstos muy similares a los que se registran en neuronas reales. Con ello, no queremos decir que estos procesos ocurran en la naturaleza exactamente de la forma que contamos, solamente queremos dar nuestro humilde enfoque hacia estos problemas ya planteados.

Capítulo 3

Estabilidad y Sincronización en Poblaciones Idénticas Cuando N es Grande

3.1 Introducción

En esta sección se lleva a cabo el estudio de fenómenos cooperativos en poblaciones de neuronas estocásticas. Basándonos en el modelo neuronal propuesto en la Sección 1.3, estudiamos una población de osciladores de integración–disparo ruidosa con intercambio de mensajes, para encontrar el régimen o regímenes en el cual o los cuales el comportamiento colectivo del sistema es estable o periódico. Hemos encontrado un rango de mensajes para el que el sistema se coloca en un régimen estable de sincronización periódica, que solamente depende de los parámetros estructurales de la red: el número de unidades del conjunto y el tiempo que tarda en llegar el mensaje de la neurona que lo envía, a la unidad que lo recibe. Pensamos que este tipo de patrón de disparo periódico y sincrónico que se obtiene podría ser relevante para los procesos de información desde el momento en que éste es independiente de la dinámica detallada de las unidades que componen el conjunto. Es decir, el patrón periódico se forma por el paso de mensajes de unas unidades a otras, permaneciendo estable incluso bajo grandes cantidades de ruido.

Como ya hemos indicado anteriormente, los procesos de sincronización juegan un papel crucial y se suponen fundamentales en los procesos sensoriales que lleva a cabo el cerebro. La relación entre ambos sucesos no está clara. Nosotros pensamos que para progresar en el entendimiento, y así clarificar las relaciones de estos procesos o sucesos, debemos estudiar cómo se generan los mismos, bajo diversas circunstancias de intercambio de mensajes entre las unidades fundamentales que intervienen en el procesamiento de la información. Para ello, necesitamos un modelo sencillo con el que podamos investigar estos sucesos. Por ello, hemos seleccionado el ya estudiado modelo neuronal de estados y tiempos discretos

(Sección 1.3, [López et al., 1993] [Hoffman et al., 1995] [Rodríguez y López, 1997] [Rodríguez y López, 1999]). Otra de las razones por las que hemos escogido este modelo es porque pensamos que las piezas del *rompecabezas* que faltan para entender el proceso de información que lleva a cabo el cerebro, se deben buscar a gran escala: esto es, estudiando modelos en los que los detalles finos de las unidades o del intercambio del mensaje entre ellas, sean irrelevantes. Por tanto, nos hemos marcado el objetivo de buscar las propiedades emergentes que surgen como consecuencia de la interacción entre un grupo grande de neuronas, que en nuestra opinión podrían depender fuertemente de cualquier dinámica de las neuronas y de cualquier mecanismo que se utilice para el intercambio de mensajes. En nuestro modelo, estudiamos la sincronización y periodicidad de los eventos de disparos para un conjunto de neuronas, donde éstas intercambian mensajes débiles y cada una de ellas interacciona con todas las demás del conjunto. Antes de entrar en los detalles de nuestro estudio, nos gustaría enfatizar el hecho de que hemos elegido un modelo discreto porque nos permite entender fácilmente los patrones de disparo que se forman en el conjunto de neuronas. En nuestra opinión, pensamos, que la identificación y el análisis de estos patrones serían más costosos en un modelo continuo.

3.2 Algunas Preguntas Básicas

Algunas de las preguntas que nos podemos hacer y que intentaremos resolver sobre nuestro modelo de osciladores estocásticos interaccionando, serán:

- ¿Cuál es el comportamiento que desarrolla el sistema debido al acoplamiento o interacción que existe entre las unidades?
 - según vamos variando la fuerza de acoplamiento, ϵ (como una fracción del umbral L),
 - o a medida que vamos variando el número de unidades en la población N .
- ¿Obtendremos en algún momento sincronización global?
- ¿Obtendremos algún tipo de periodicidad?
- ¿Obtendremos algún otro fenómeno (*estabilidad estructural*¹)?

¹Entendemos por estabilidad estructural aquel tipo de estabilidad que se da en un conjunto de unidades interactuando, que sólo depende de parámetros estructurales de la población, y no depende de la dinámica y detalles particulares de cada unidad.

3.3 Modelo Neuronal y Dinámica de la Población

En esta sección recordaremos brevemente el modelo presentado en la Sección 1.3 e introduciremos las nuevas cantidades o magnitudes que nos ayudarán a entender mejor nuestro estudio con poblaciones de neuronas. Estas cantidades cuantifican qué grado de estabilidad o sincronización tiene nuestra población de neuronas según variamos los diferentes parámetros de ésta.

3.3.1 Unidades

Las unidades aisladas siguen la dinámica introducida en la Sección 1.3.

3.3.2 Interacción entre las Unidades

La interacción entre unidades es la estudiada en la Sección 1.3, con un tiempo de retraso² $t^r = 1$. Es decir, la ecuación de acoplamiento entre unidades queda de la siguiente forma: $a_j(t) = a_j(t) + \delta((t-1) - t_i^d) \epsilon_{ij}$. En este capítulo presentamos todos los resultados en el límite de ϵ pequeño. Así, en lo que sigue nos referiremos a $\epsilon \rightarrow 0$, siendo 1 el mínimo al que podemos reducir la interacción en nuestro modelo. Sin embargo, aunque nos refiramos en lo que sigue a $\epsilon = 1$, no eliminaremos de las expresiones el valor de ϵ para que quede constancia de cuál es la dependencia con el acoplamiento. El lector debería tener en cuenta que para esta interacción límite, el tamaño relativo de interacción es $1/L$ con respecto a una unidad.

3.3.3 Conjunto de Unidades y el Parámetro η

En este trabajo presentamos los resultados para un conjunto de N unidades idénticas interaccionando, en el que el número de parámetros libres ha sido reducido al mínimo. Este conjunto de unidades intercambian una cantidad de mensaje que es igual para todas ellas. Por tanto, sólo cuatro parámetros son necesarios para la caracterización del sistema: N , el tamaño del conjunto; ϵ , la cantidad del mensaje intercambiado y L, p describiendo la evolución de la unidad para $\epsilon = 0$. Hemos permitido que la interacción entre las unidades se reparta a todo el conjunto, y que el disparo de una unidad se transmita al resto de las neuronas. De esta forma, en una primera aproximación hemos seleccionado una arquitectura completamente conectada entre todas las unidades (*full-connection*). No obstante, la

²Debemos ser conscientes de que si consideramos la propagación del mensaje entre unidades como instantánea, entonces surge el problema de cuándo debemos parar de propagar el mensaje (posible propagación infinita). Una forma sencilla de salvar este obstáculo, es suponer un cierto retraso en la interacción.

unidad que genera el disparo no recibe su propio disparo como lo hacen las otras. De ahora en adelante simplificaremos un poco la descripción formal definiendo V como el número máximo de unidades del conjunto que son afectadas por la generación de un disparo de cualquier otra unidad. De esta forma, definimos la cantidad $V = N - 1$, como el número de vecinos o de neuronas que reciben los mensajes de cualquier otra unidad, y $V\epsilon$ es la cantidad de mensaje total que es repartido por una unidad sobre el resto del conjunto de neuronas. Una magnitud que resulta relevante para caracterizar el intercambio de mensajes entre unidades es el cociente:

$$\eta = \frac{L}{V\epsilon + 1}. \quad (3.1)$$

Esta nueva cantidad puede ser entendida como el número de veces que el conjunto completo de la vecindad de neuronas a una dada tiene que disparar un mensaje para inducir a disparar a ésta, sin necesidad de la evolución espontánea de los estados de la misma. En el modelo que utilizamos para nuestro estudio, no hacemos ninguna suposición con respecto al mecanismo subyacente en el que la interacción se construye para la formación y generación del disparo. Esto es consecuente con varias situaciones y particularmente con el enfoque de paradigma neuronal en el que la amplitud del disparo no es importante [Rieke et al., 1997], sino que lo importante en sí son los disparos neuronales por ellos mismos, siendo la fuerza de la interacción determinada por las sinapsis de las neuronas. Pero también es consecuente con más situaciones generales en las que la fuerza del mensaje es determinada por la fuente o por ambas: la unidad emisora y la que recibe. Ejemplos de tales sistemas son comunes en el comportamiento de poblaciones de animales intercambiando mensajes visuales [Buck, 1988] y mensajes sonoros [Walker, 1969].

3.3.4 Descripción de la Población a Nivel Mesoscópico

El conjunto de unidades estudiado en nuestro trabajo evoluciona en el tiempo de una manera compleja, que puede ser descrita a nivel microscópico con la evolución temporal en un espacio N -dimensional de estados, dado por un conjunto de variables $a_i(t)$. Dentro del campo de los sistemas neuronales, el tamaño de N es lo suficientemente grande como para utilizar una detallada descripción macroscópica, e incluso admitir varios tratamientos derivados de la mecánica estadística. Sin embargo, una descripción más razonable puede ser dada a un nivel intermedio (nivel mesoscópico) usando los eventos relacionados con la generación de los disparos neuronales. De hecho, éstos son los eventos que pensamos que son relevantes para los mecanismos [Rieke et al., 1997] [Fujii et al., 1996], cualquiera que ellos sean, que las células utilizan en el sistema nervioso para llevar a cabo el proceso de información cerebral. Así, en nuestro intento de entender este proceso de información en el sistema nervioso, hemos estudiado la evolución temporal de la generación

de disparos. En concreto, el tiempo transcurrido entre dos mensajes consecutivos generados por cada unidad. Denominaremos con T_i a este intervalo de tiempo para la unidad i y utilizaremos una serie de cantidades promedio, que definiremos a continuación, para estudiar las características y propiedades del conjunto de la población. Un tipo de promedio será el que calcularemos sobre el tiempo. El valor medio de T_i promediado sobre el tiempo lo nombraremos τ_i^t , y σ_i^t representará el valor de su desviación estándar. La correlación conjunta entre las unidades en la población será descrita utilizando la cantidad τ^e . Esta cantidad es el valor medio de τ_i^t sobre la población de N unidades, y σ^e será utilizado para el valor de su desviación estándar. Necesitamos un tercer tipo de promedio en nuestros estudios debido a que las simulaciones empiezan con unas condiciones iniciales determinadas $\{a_i(t=0)\}$. La sensibilidad de los resultados a las fases iniciales del sistema se deducirá del estudio de τ_ϕ^e , siendo éste el promedio de τ^e para un conjunto de diferentes simulaciones. Su desviación estándar será σ_ϕ^e . Necesitamos dos cantidades más para nuestro análisis: $\langle \sigma_i^t \rangle_{\phi e}$ que es el promedio de σ_i^t sobre el conjunto de unidades y sobre diferentes fases iniciales, y $\sigma(\sigma^e)_\phi$ que será su desviación estándar. En cada simulación las fases iniciales son seleccionadas aleatoriamente de una distribución uniforme de $a_i(t) \in \{1, \dots, L_i - 1\}$.

3.4 Simulaciones y Resultados

Hemos explorado el comportamiento del sistema descrito anteriormente utilizando simulaciones numéricas sobre un amplio rango de parámetros. Los resultados son presentados separadamente para diferentes rangos del parámetro η definido en la Ecuación 3.1, dado que el comportamiento es cualitativamente distinto para diferentes rangos de este parámetro.

3.4.1 Población Conducida por la Evolución Espontánea. El Rango de η Grande.

La situación más simple que podemos analizar es el caso límite donde η es grande, en el que la evolución del conjunto está determinada principalmente por la evolución espontánea de cada unidad, aunque veremos que η deberá ser muy elevada para que el efecto cooperativo del intercambio de mensajes deje de ser importante. Se han realizado varias simulaciones con nuestro modelo para diferentes conjuntos de unidades, con V comprendido aproximadamente entre 10 y 100 y η entre 5 y 100.

Los resultados de las simulaciones muestran que en este límite el sistema evoluciona en el tiempo a un patrón estable. En este patrón estable, toda unidad durante el tiempo que transcurre entre dos disparos consecutivos de la misma, recibe del conjunto (en promedio) un número de mensajes aproximadamente igual a $V\epsilon$. En este límite, toda unidad i tiene un tiempo de intervalo entre dispa-

Parámetros			Simulación				Aproximación	
η	L	N	τ_ϕ^e	σ_ϕ^e	$\langle \sigma_i^t \rangle_{\phi e}$	$\sigma(\sigma^e)_\phi$	τ_i^t	σ_i^t
90.90	1000	11	1099.9	≤ 0.11	10.9	≤ 0.08	1099.99	11.05
45.45	500	11	544.3	≤ 0.08	7.6	≤ 0.07	544.33	7.77
9.90	1000	101	1000.0	≤ 0.03	9.5	≤ 0.03	999.89	10.53
4.95	500	101	444.56	≤ 0.02	5.7	≤ 0.02	444.33	7.02

Tabla 3.1: *Resultados para η grande. Los promedios han sido medidos sobre 100 estados iniciales, el tiempo de evolución de la simulación ha sido $1000L$. Se ha escogido el valor de $p = 0.9$ en todos los casos.*

ros T_i que se promedia sobre el tiempo a un valor τ_i^t , que puede ser estimado aproximadamente como el valor esperado de una unidad aislada con el umbral decrementado por el valor $V\epsilon$, y por tanto los parámetros estadísticos τ_i^t y σ_i^t se pueden aproximar (ver Ecuación 1.3) mediante:

$$\tau_i^t \approx 1 + \frac{L - 1 - V\epsilon}{p}, \quad \sigma_i^t \approx \frac{\sqrt{(L - 1 - V\epsilon)(1 - p)}}{p}. \quad (3.2)$$

Debido a que la evolución de todas las unidades es afectada por el mismo tipo de mensaje perturbativo generado por el resto del conjunto, τ_i^t es casi constante para cada una de las N unidades del sistema. En la Tabla 3.1 presentamos los resultados para diferentes simulaciones. Las estimaciones teóricas (ver la Ecuación 3.2) se incluyen en la misma tabla para que sean comparadas. Se puede observar que las estimaciones teóricas son bastante buenas para el periodo, sin embargo no pasa lo mismo para la dispersión. La dispersión se aproxima bastante bien para valores de η muy grandes, pero no para valores intermedios. Daremos una descripción cualitativa de este fenómeno en la siguiente sección. Los grandes valores de los cocientes $\langle \sigma_i^t \rangle_{\phi e} / \sigma_\phi^e$ y $\langle \sigma_i^t \rangle_{\phi e} / \sigma(\sigma^e)_\phi$, indican que τ_ϕ^e es una excelente estimación del promedio del periodo para la generación de disparos, τ_i^t , siendo válido para todas las unidades del conjunto, sin ser relevante la dependencia de la fase inicial o condiciones iniciales.

El comportamiento observado se puede entender fácilmente considerando el hecho de que en el límite de pequeños ϵ ($\epsilon = 1$ en nuestras simulaciones) L es aproximadamente η veces más grande que N , y es más probable que los estados iniciales de las unidades estén uniformemente repartidos en la fase sobre el rango completo de 1 a L . Este razonamiento es cierto durante la evolución temporal del sistema si el disparo es alcanzado principalmente a través del incremento espontáneo de todas las unidades. Las situaciones en las que dos unidades disparan cerca del punto de sincronización son raras, debido al hecho de la presencia de ruido y la consecuente dispersión de T_i . Consideremos, por ejemplo, la situación en la que todas las unidades menos una están disparando con un periodo similar

$T_i \approx \tau^e$, y que una unidad (supongamos que es la unidad 1) está disparando con un periodo T_1 que es del orden de $\tau^e/2$. Esta situación será transitoria debido a que la unidad 1 recibirá del orden de $V/2$ menos mensajes que el resto de unidades, y así la próxima vez ésta podría disparar con un periodo más grande que antes (aproximadamente el periodo anterior T_1 más $V\epsilon/2$). Este incremento del periodo, conducido por el conjunto, llevará a la unidad 1 a disparar con un periodo T_1 más cercano a τ^e , y así la continua corrección suministrada por la población conducirá a T_1 a tener un tiempo promedio τ_1^t similar a τ^e . Un razonamiento parecido se podría utilizar para entender el mecanismo por el cual las unidades que se salen de la población con un periodo más grande, son aproximadas de nuevo al valor común τ^e por el incremento del mensaje que una unidad más lenta recibe de la población.

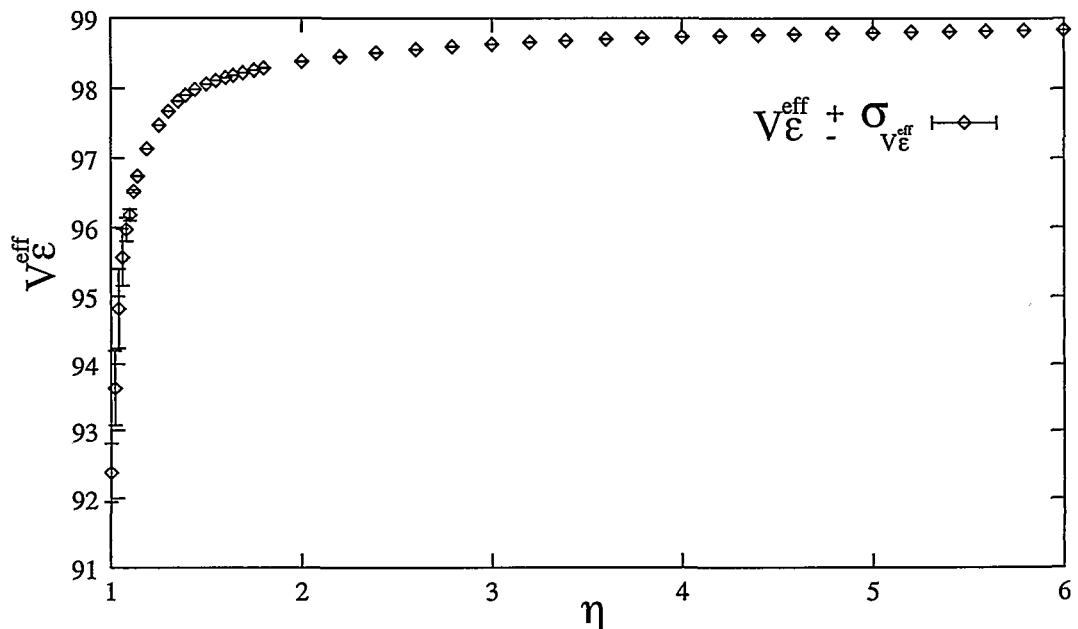


Figura 3.1: En esta figura se presenta la variación del $V\epsilon^{eff}$, según vamos variando el parámetro efectivo η . El conjunto de unidades con las que hemos realizado las mediciones es una población formada por 100 neuronas, cada una de ellas con una probabilidad de evolución $p = 0.9$ y un tamaño de acoplamiento de $\epsilon = 1$. Se representa el valor promedio de $V\epsilon^{eff}$ para 50 realizaciones junto con su dispersión como barras de error.

3.4.2 Población Conducida Principalmente por el Acoplamiento. η Intermedio.

En esta sección vamos a estudiar, por un lado, cuál es el comportamiento de nuestro sistema según vamos variando el acoplamiento como una fracción del umbral de las unidades, de tal forma que η se vaya aproximando al valor singular

de 1. Por otro lado, estudiaremos cómo, manteniendo prácticamente constante el periodo de las unidades, el sistema evoluciona hacia un estado estable según vamos aumentando el número de neuronas en la población. Un hecho que debemos resaltar es que el número de mensajes que recibe una unidad entre dos disparos consecutivos realmente es igual o menor que $V\epsilon$. A esta cantidad es a la que llamamos $V\epsilon^{eff}$, y tendrá un valor medio y una dispersión. Esta diferencia se produce debido a que la cantidad de mensaje que una unidad absorbe por encima del umbral no es siempre la misma, y depende de cuándo recibe un mensaje y de que éste sea justamente el apropiado para disparar, o sea mayor que el que necesita la unidad para disparar. En la Figura 3.1 podemos observar cómo varía esta cantidad efectiva en nuestras simulaciones en el caso de una población de 100 unidades y con una probabilidad de evolución espontánea de $p = 0.9$. Podemos observar que según el parámetro η va aumentando, la cantidad $V\epsilon^{eff}$ va tendiendo a $V\epsilon$ (en este caso al valor de 99). Esto se debe a que según vamos aumentando el umbral de disparo, L , es más probable que $N - 1$ unidades disparen equidistribuidamente en el tiempo que transcurre entre dos disparos consecutivos de una unidad. Como consecuencia, la mayoría de las neuronas llegan a su umbral por evolución espontánea, y no porque otras les hagan disparar. Estas dos razones hacen que la absorción sea mínima, ya que la probabilidad de que disparen una o varias unidades justo antes de que otra dispare es más baja cuanto mayor sea el umbral. No obstante, si se diese el caso de que justo antes del disparo de la unidad dispararan otras unidades, el número de ellas sería muy bajo y, por tanto, la absorción también lo sería.

Variación del Acoplamiento en Función del Umbral de las Neuronas hasta $\eta \approx 1$

Podemos observar en la Tabla 3.1 que para η no muy grandes, por ejemplo $\eta = 5$, los periodos calculados por las simulaciones y por las aproximaciones de la Ecuación 3.2 no difieren mucho, pero sí lo hacen las desviaciones. Esto significa que para este rango de η la población neuronal no es únicamente conducida por la evolución espontánea, sino que también lo es por el acoplamiento entre las unidades. Podemos observar mejor este fenómeno en la Figura 3.2, para una población de 11 unidades. En esta figura vemos que para η intermedios las dispersiones teóricas y simuladas difieren en una cierta cantidad. Las dispersiones de las simulaciones son más pequeñas que las teóricas. ¿Cuál es la razón de que se produzca este fenómeno si realmente el número de mensajes que recibe la unidad hasta que dispara es $V\epsilon^{eff}$, y por tanto la dispersión de la neurona debería ir controlada por la dispersión de una unidad aislada con su umbral decrecido en la cantidad $V\epsilon^{eff}$? Para entender bien este proceso hemos medido en nuestras simulaciones el número de mensajes acumulado por unidad de tiempo hasta que dispara, $\Theta(t)$. Así, definiremos una nueva cantidad $\Theta(t)$ según la siguiente expresión:

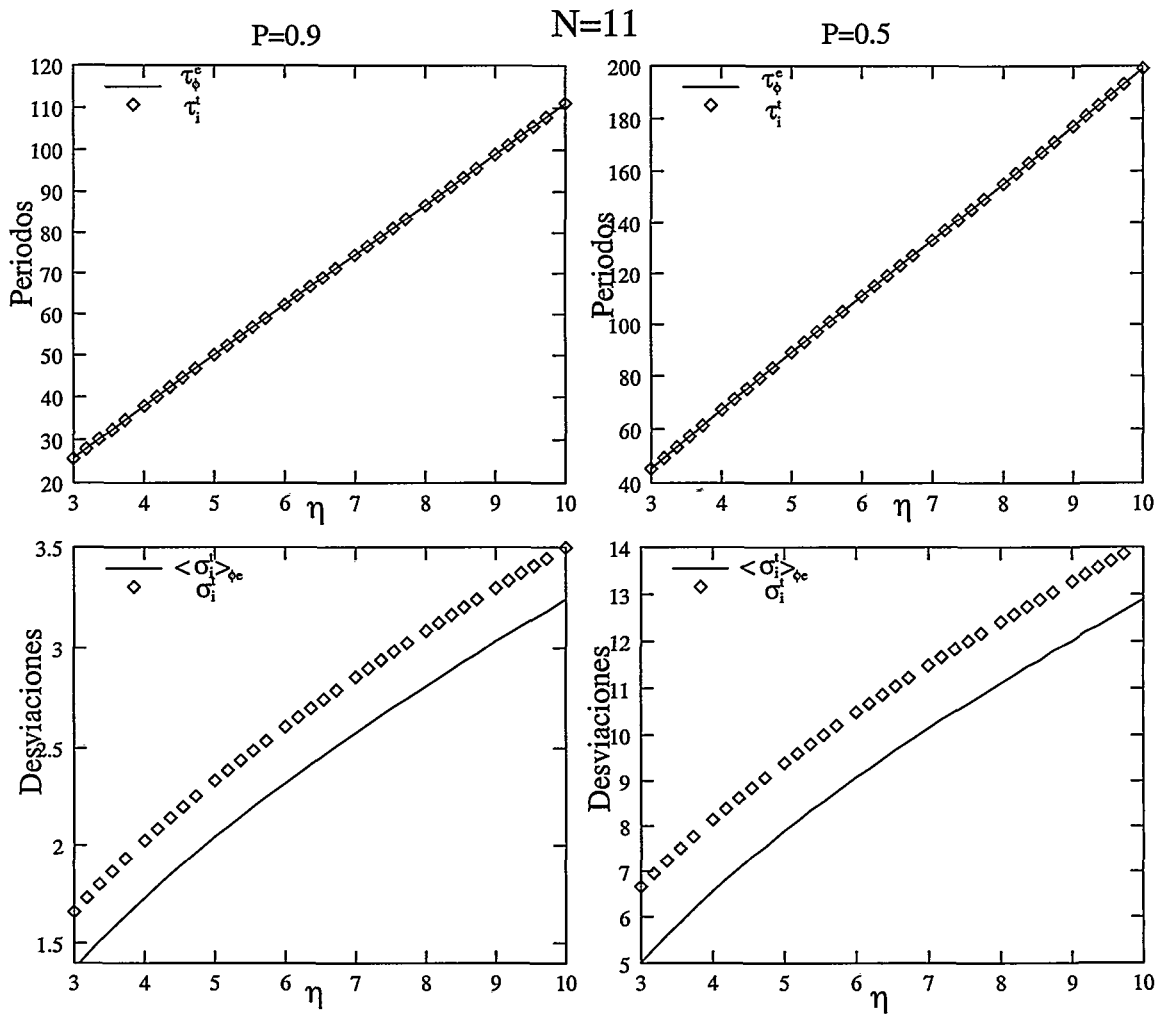


Figura 3.2: Comparación entre los promedios y desviaciones calculados con las simulaciones y las estimaciones teóricas dadas por la Ecuación 3.2. Se muestran dibujados los resultados para un conjunto con $V = 10$ y $p = 0.9$ (gráficos de la izquierda) y $p = 0.5$ (gráficos de la derecha). Los promedios han sido calculados sobre $1000L$ unidades de tiempo con 50 diferentes condiciones iniciales.

$$\Theta(t) = \sum_{t'=0}^{t'=t} \theta(t') \tag{3.3}$$

siendo $\theta(t')$ el número de mensajes que recibe una unidad de todo el conjunto de neuronas, en un instante de tiempo t' . De esta forma, es lógico suponer que para el periodo de la unidad i se cumple la relación $\theta(t = \tau_i^t) = V\epsilon^{eff}$. A continuación vamos a estudiar los comportamientos de estas magnitudes, y qué relación tienen con la pregunta que hemos formulado. Para ello, observamos las magnitudes $\theta(t)$ y $\Theta(t)$, por medio de diferentes simulaciones. En la Figura 3.2 (gráficos superiores), observamos cómo evoluciona el número de mensajes que recibe una neurona por

unidad de tiempo, para dos probabilidades de salto ($p = 0.5, 0.9$). El pico inicial se debe a que existe una correlación entre los disparos de las diferentes unidades. Es decir, cuando una unidad produce un disparo, se envía un mensaje a todas las demás. Alguna de las unidades que reciben este mensaje, puede llegar a disparar inmediatamente mandando un nuevo mensaje a la unidad inicial que acababa de disparar. Después de este pico, el número de disparos recibidos, por unidad de tiempo, es más o menos constante hasta que la unidad está a punto de disparar de nuevo. Consecuentemente, podemos decir que la cantidad de mensajes por unidad de tiempo que recibe la unidad, no es un proceso markoviano. Ésta es una de las razones, junto a la de la dinámica que sigue el descenso del umbral de la neurona debido a los mensajes enviados del resto, por la que las desviaciones teóricas y los resultados de las simulaciones no coinciden. Estas correlaciones las podemos observar cuantitativamente en las gráficas inferiores de la Figura 3.3. Estas dos gráficas muestran los resultados, para $\eta = 4.6$ en la Figura 3.2, de la correlación de $\theta(t)$ a un tiempo determinado. La correlación está calculada mediante la siguiente expresión:

$$C_{\theta}(\tau; t_0) = \overline{(\theta(t_0) - \overline{\theta(t_0)})(\theta(t_0 + \tau) - \overline{\theta(t_0 + \tau)})}, \quad (3.4)$$

donde los promedios son realizados sobre el número de experimentos que se realizan en la simulación.

En la Figura 3.3, presentamos el cálculo de la correlación para el caso particular $t_0 = 10$ en función del retraso τ . Podemos observar en la misma que existe una correlación no nula del número de mensajes que recibe una neurona por unidad de tiempo, y que la diferencia entre los dos picos más importantes es igual al periodo de disparo de la unidad en cuestión. También se observan correlaciones negativas. Debido a todas estas correlaciones, el fenómeno subyacente no es markoviano y por tanto, aunque en promedio el número de mensajes totales que recibe una unidad es $V\epsilon^{eff}$, la dispersión del disparo de la unidad está controlada por la dispersión de $\Theta(t)$.

Así, $\Theta(t)$ tiene una distribución de probabilidad para cada unidad de tiempo, que interviene de forma activa en la formación de la distribución de periodos para cada neurona. Por tanto, podemos calcular la distribución de periodos de disparos, $P(T_i)$, de una unidad por medio de la siguiente expresión:

$$P(T_i) = \frac{1}{K} \sum_{\Theta(T_i)} P_{L_i^{ef}, p}(T_i | \Theta(T_i)) P(\Theta(T_i)) \quad (3.5)$$

siendo $P_{L_i^{ef}, p}(T_i | \Theta(T_i))$ la distribución binomial negativa (ver Ecuación 1.2) condicionada a que se conoce un umbral efectivo $L_i^{ef} = L_i - \Theta(T_i)$, y siendo K una constante de normalización que vale:

$$K = \sum_{T_i} \sum_{\Theta(T_i)} P_{L_i^{ef}, p}(T_i | \Theta(T_i)) P(\Theta(T_i)).$$

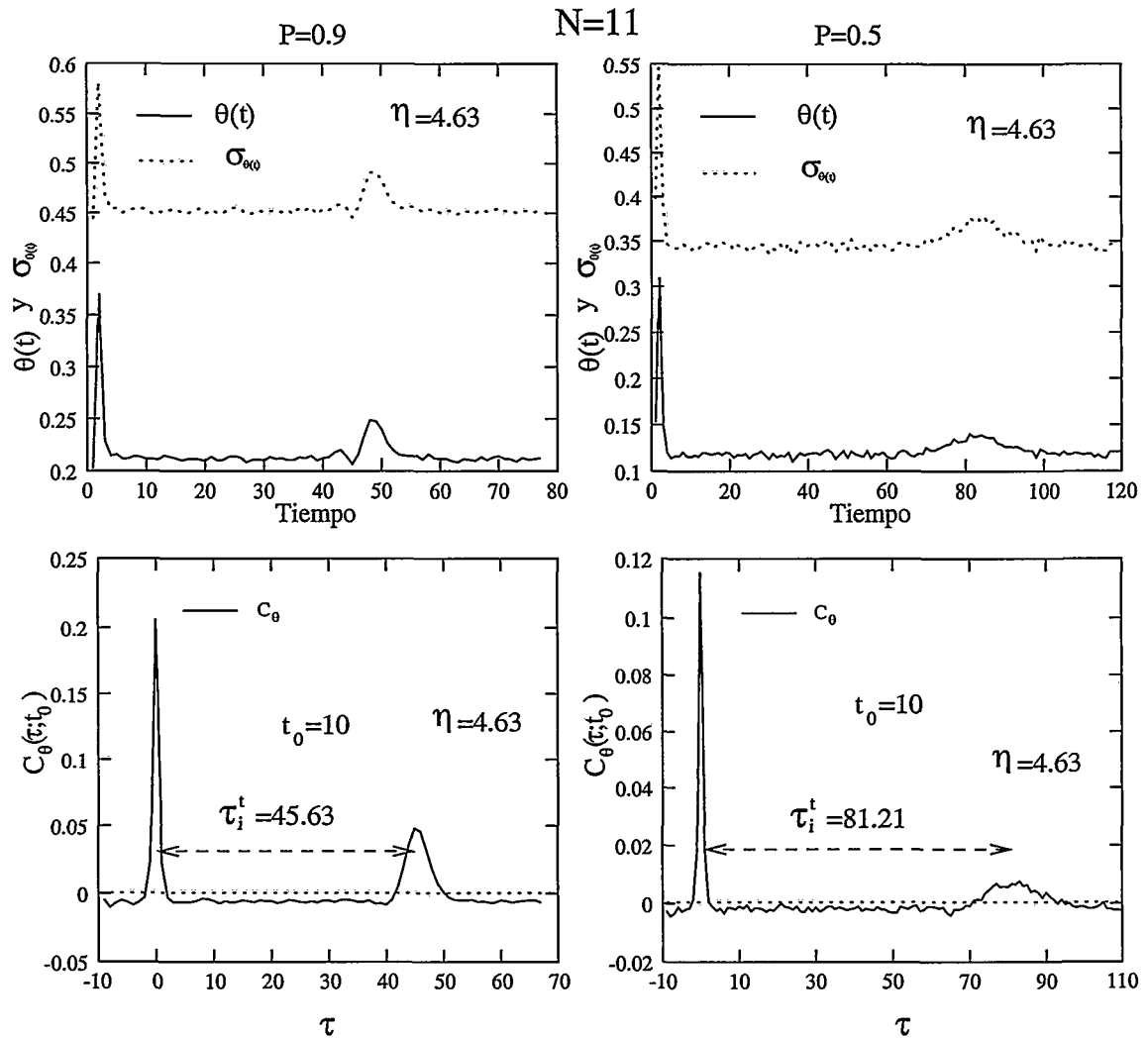


Figura 3.3: Se presentan los siguientes resultados de las simulaciones para un conjunto de once unidades, donde el parámetro es $\eta = 4.634$. Las figuras superiores representan el número de mensajes que recibe una neurona por unidad de tiempo, $\theta(t)$, en función del tiempo que transcurre. En las figuras de la parte inferior se muestra el valor que toma la correlación $C_{\theta}(\tau; t = t_0)$ para $t_0 = 10$ en función del retraso τ . Se presentan los resultados para dos probabilidades distintas ($p = 0.5, 0.9$), y los promedios han sido calculados sobre 1000L unidades de tiempo con 50 diferentes condiciones iniciales.

En la Figura 3.4 mostramos el valor del número de los mensajes acumulados $\Theta(t)$ en función de cómo va aumentando el tiempo, junto con su dispersión asociada representada con barras de error. La forma característica de *huso* que tiene la dispersión se debe a que las correlaciones cruzadas son distintas de cero. Vamos a ver esto de una forma más clara, y para ello observemos cómo se modifican la media y la dispersión de la variable aleatoria Θ , que es suma de variables aleatorias θ . Supongamos que tenemos una sucesión de n variables θ_n en el tiempo y que

su suma es $\Theta = \sum_n \theta_n$. Podemos aproximar θ_n por su media $\bar{\theta}$, y así obtener que $\Theta = n\bar{\theta}$. Esto queda patente si comparamos las Figuras 3.3 y 3.4, donde $\theta_n \approx 0.2$ y para $t_0 = 10$ el valor de la variable acumulada es $\Theta \approx 2$. La dispersión de Θ vendrá dada por $\langle (\Theta - \bar{\Theta})^2 \rangle$ o, lo que es lo mismo, $\langle ((\sum_n \theta_n) - \bar{\theta})^2 \rangle$. Si definimos una nueva variable $\hat{\theta}_n = \theta_n - \bar{\theta}$, entonces la dispersión de la suma viene dada por la expresión $\sum_n \sum_m \langle \hat{\theta}_n \hat{\theta}_m \rangle$. Como ya sabemos, estas correlaciones cruzadas son distintas de cero (ver Figura 3.3), y son las que dan esta forma característica de *huso* a la dispersión del número de mensajes acumulados en una neurona antes de que dispare. En la Figura 3.4 (gráficas inferiores) mostramos también que la expresión de la dispersión de periodos para una unidad embebida en la población de neuronas, es calculada correctamente a través de la Ecuación 3.5, y que como se puede observar, se ajusta perfectamente a la distribución obtenida en las simulaciones.

Comportamiento de la Población en función de N para $T_i \approx \text{cte}$

Ahora vamos a analizar el comportamiento del sistema según aumentamos el tamaño de la población, pero manteniendo el periodo más o menos constante a través de la Ecuación 3.2. Así, tenemos que variar L y V a través de esta ecuación, de tal forma que el periodo permanezca constante. Esto equivale a mantener constante la cantidad $L - V\epsilon = \text{cte}$. Por tanto, lo que realmente mantenemos constante es el espacio que la actividad de una neurona recorre debido a la evolución espontánea de la misma, sea cual sea el tamaño de la población. Recordemos que la Ecuación 3.2 para el periodo de disparo es sólo una aproximación, y por lo tanto el periodo variará en un cierto rango, aunque su variación sea pequeña. Podemos observar en la Figura 3.5 cómo la dispersión relativa del periodo de disparo va decreciendo según vamos aumentando el tamaño de la población. El tamaño de la población se ha ido aumentando de diez en diez neuronas hasta una población máxima de 1000 neuronas. El periodo ha variado en ese rango de 111 a 117. Se puede observar en la figura cómo la dispersión relativa del periodo de disparo va decreciendo, haciéndose más preciso el disparo de cada unidad en la población de neuronas. Por tanto, con un conjunto de osciladores ruidosos, y debido a la cooperación entre ellos, se obtienen unidades que tienen muy localizado el disparo en el espacio temporal.

También se puede observar en la misma figura cómo evoluciona la dispersión relativa dada por la aproximación de la Ecuación 3.2, y además la variación del parámetro η . El mejor ajuste que hemos encontrado para indicar de una manera clara la tendencia decreciente de la dispersión relativa del periodo, viene dado por un polinomio de primer grado. Hagamos la equivalencia de variable dependiente del ajuste por $y = \langle \sigma_i^2 \rangle_{\phi_e} / \tau_{\phi}^e$, y la variable independiente por $x = N$. En consecuencia, el ajuste que hacemos es:

$$\log y = a + b \log x \Leftrightarrow y = e^a x^b.$$

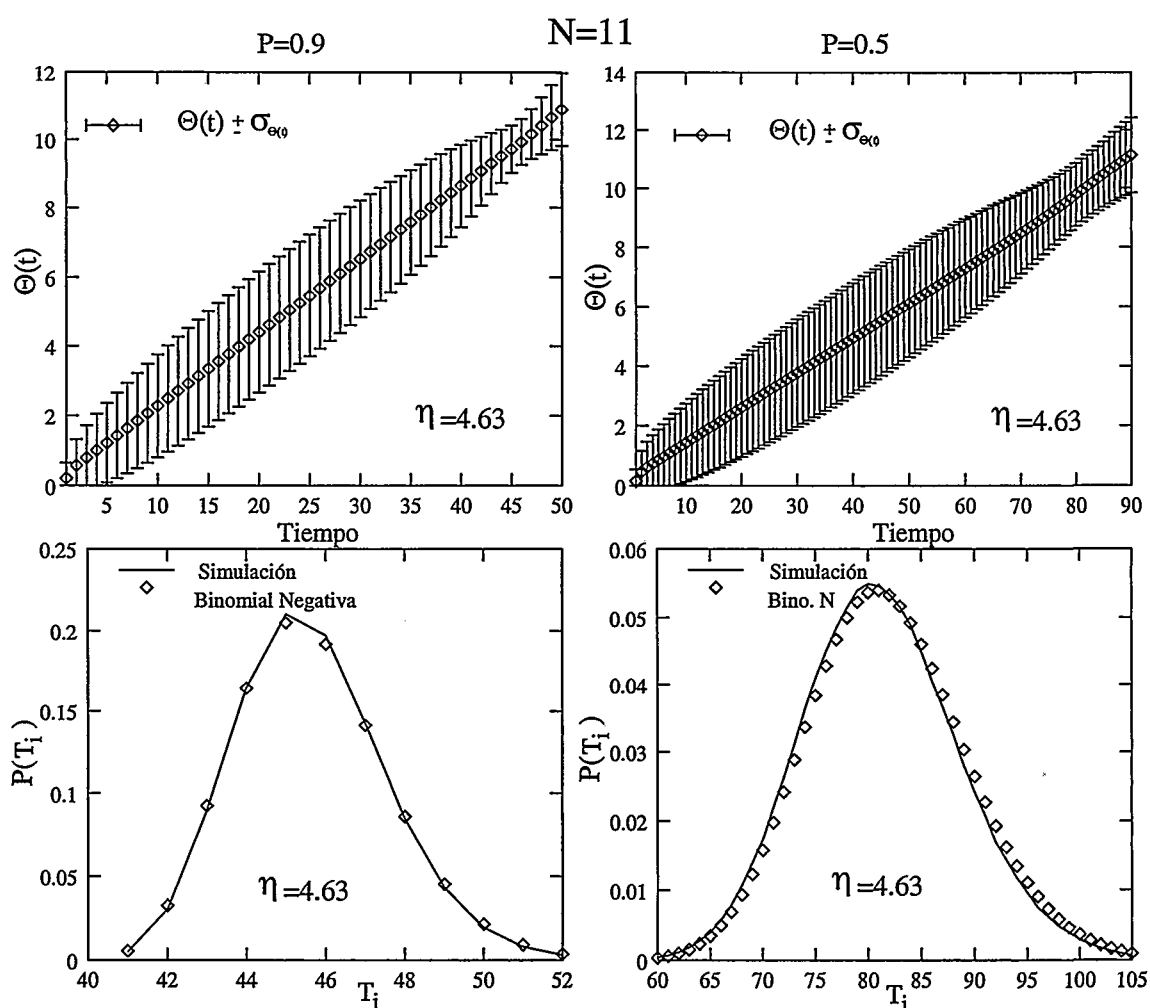


Figura 3.4: Se presentan los siguientes resultados de las simulaciones para un conjunto de once unidades, donde el parámetro es $\eta = 4.634$. Las figuras superiores muestran el número de mensajes acumulado en el tiempo que recibe una neurona, $\Theta(t > t')$, en función del tiempo. En las figuras de la parte inferior mostramos la comparación de los resultados mediante simulación de la distribución de periodos para el disparo de una unidad dentro de la población, frente al calculado mediante la Ecuación 3.5. Se presentan los resultados para dos probabilidades distintas ($p = 0.5, 0.9$), y los promedios han sido calculados sobre 1000L unidades de tiempo con 50 diferentes condiciones iniciales.

Los parámetros de este ajuste que se obtienen son:

- Para el parámetro de estocasticidad $p = 0.9$

$$a = -0.8259, b = -0.6437$$

- Para el parámetro de estocasticidad $p = 0.5$

$$a = -0.6052, b = -0.5476$$

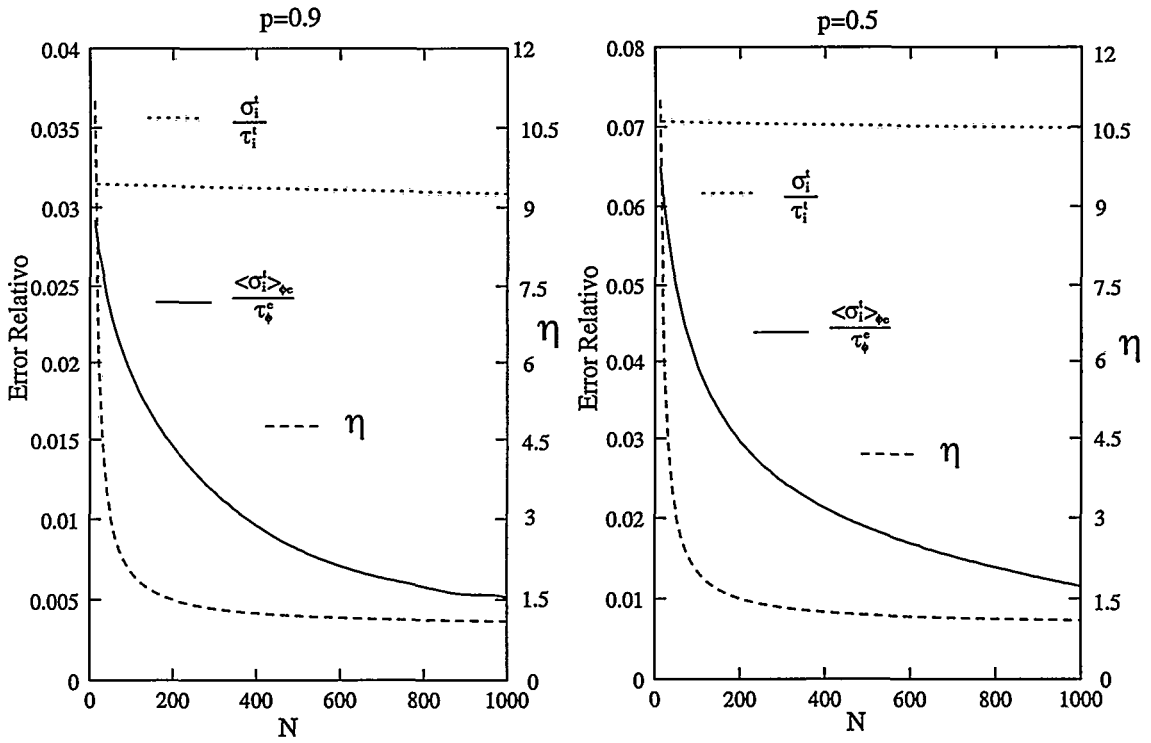


Figura 3.5: Ilustración del decrecimiento del error relativo del periodo de disparo, frente al aumento del tamaño de la población. En todas las simulaciones se ha mantenido T_i más o menos constante, variando entre 111 y 117. El valor del parámetro η está siempre por encima de 1. El valor del parámetro de estocasticidad es $p = 0.9$ en el gráfico de la izquierda y $p = 0.5$ en el gráfico de la derecha.

Por tanto, la tendencia decreciente de la dispersión del disparo neuronal según aumentamos el tamaño de la población, va como un término dominante

$$\frac{\langle \sigma_i^t \rangle_{\phi e}}{\tau_\phi^e} \sim N^b \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

En la Figura 3.6 podemos observar el ajuste polinómico que hemos realizado.

3.4.3 Atractores de Sincronización para $\eta = 1$

El periodo uniforme (cuando promediamos sobre el tiempo) para cada unidad que hemos observado en nuestro modelo de N neuronas interaccionando en el límite de η grande, pudiera sugerir un comportamiento casi periódico para valores más pequeños de η . Esta periodicidad podría tener su origen en la reducción de la dispersión a la que el sistema llega cuando se aumenta el número de mensajes que le llegan a una neurona. Sin embargo, esta estabilidad debe ir acompañada de un decrecimiento del periodo, según la aproximación dada por la Ecuación 3.2.

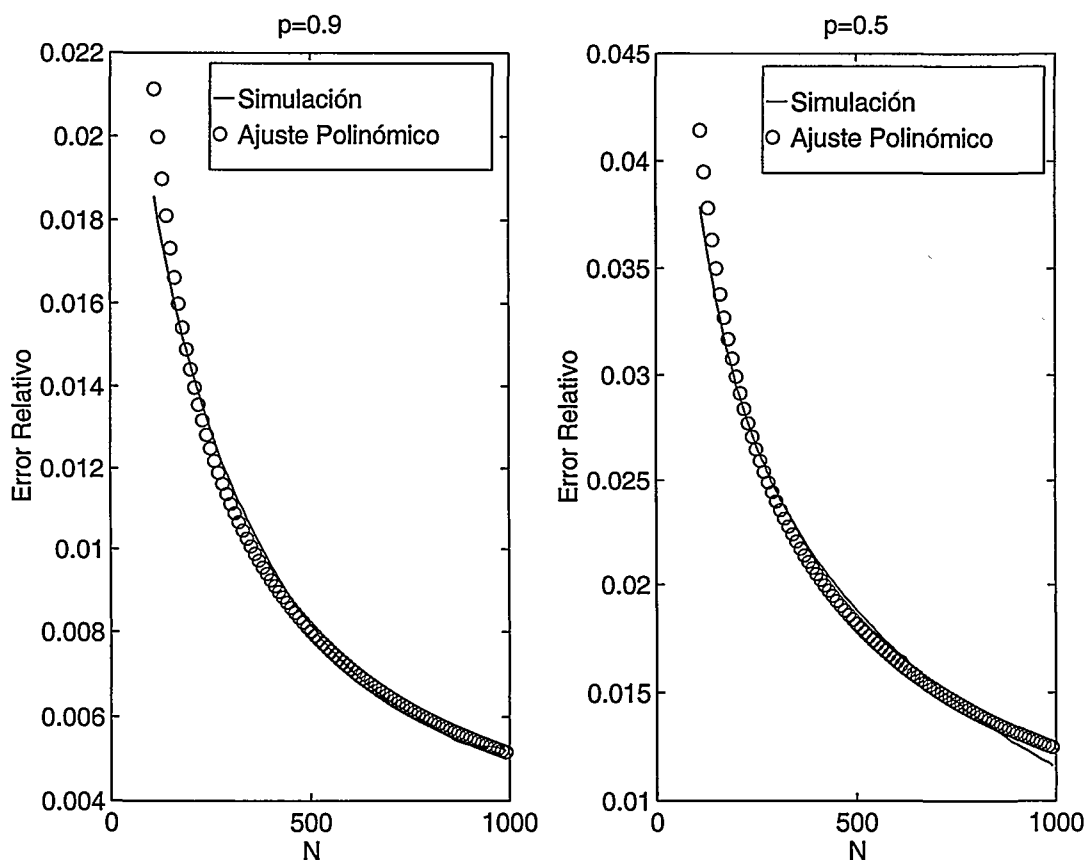


Figura 3.6: Ilustración del ajuste polinómico realizado para la tendencia del decrecimiento de la dispersión del disparo (ver Figura 3.5) de una neurona embebida en una población de unidades idénticas. El ajuste se ha realizado para los valores parámetro de estocasticidad de $p = 0.9$ y $p = 0.5$.

De hecho, la periodicidad completa (dispersión cero) podría ser alcanzada para el límite de $\eta = 1$ con periodo 1. Este caso trivial se caracterizaría por el hecho de que cada neurona dispararía cada intervalo de tiempo como resultado de los mensajes recibidos del entorno. Sin embargo, éste **no** es el resultado que obtenemos en nuestras simulaciones. En la Figura 3.7 mostramos los resultados de nuestras simulaciones en el rango de $\eta = 2$ a $\eta = 1$ para una población de 101 neuronas, y para dos diferentes probabilidades $p = 0.9$ y $p = 0.5$. En la misma figura podemos observar que aunque los valores de la estimación aproximada, τ_i^t , son bastante parecidos a los que obtenemos de las simulaciones, τ_ϕ^e (ver gráficas de arriba), éstos tienen un límite bastante diferente del valor trivial del periodo para $\eta = 1$ (ver figuras de abajo).

Hemos encontrado que cuando la población tiene un valor del parámetro η cercano a 1, toda unidad produce mensajes con casi el mismo periodo, independientemente del tiempo o de las condiciones iniciales. No obstante, para entender bien qué es lo que está pasando con los valores cercanos a 1 de η , estudiemos

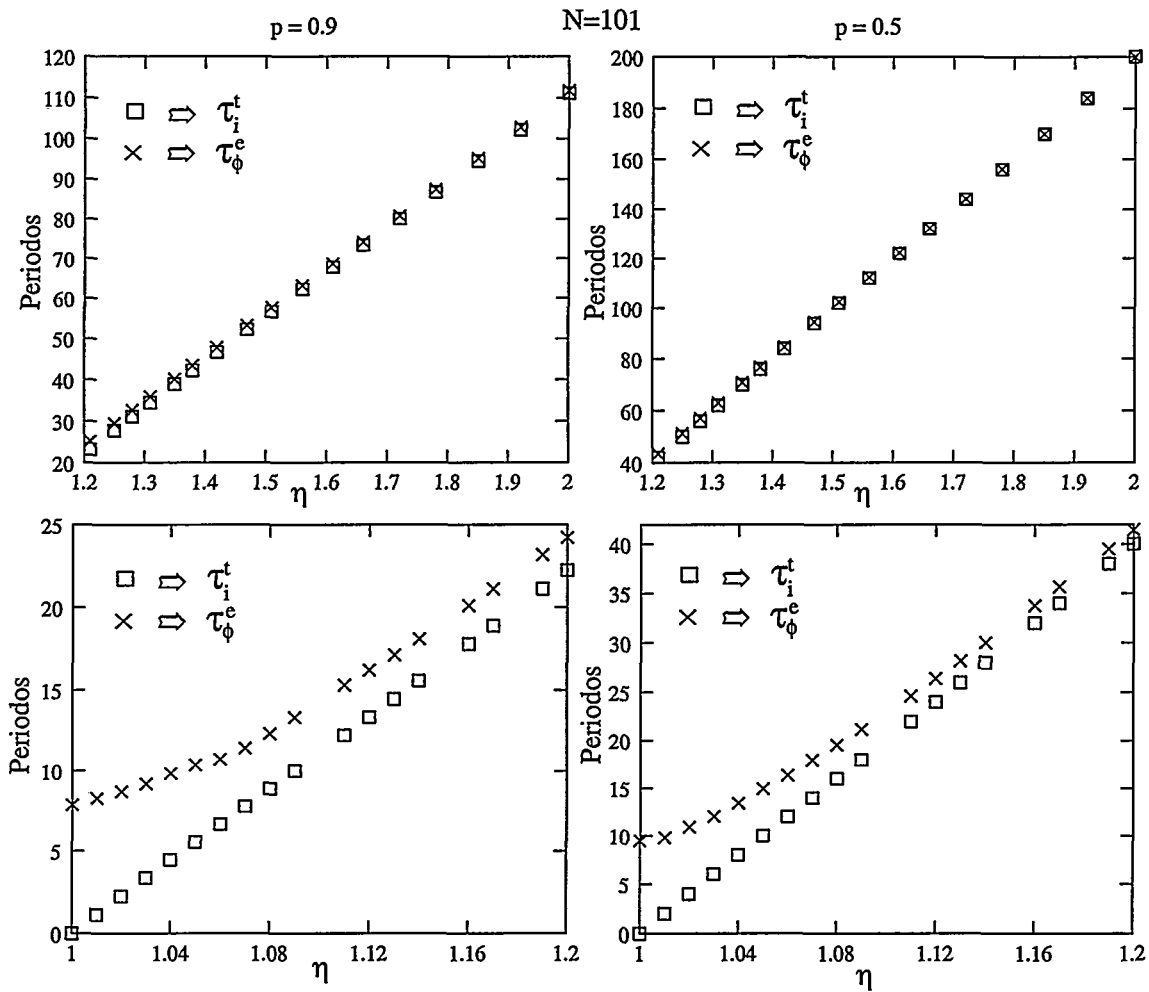


Figura 3.7: Comparación entre los periodos promedios calculados con las simulaciones y las estimaciones teóricas dadas por la Ecuación 3.2. Se muestran dibujados los resultados para un conjunto con $V = 100$ y $p = 0.9$ (gráficos de la izquierda) y $p = 0.5$ (gráficos de la derecha). Los promedios han sido calculados sobre $1000L$ unidades de tiempo con 1000 diferentes condiciones iniciales.

primero el límite de $\eta = 1$.

Para $\eta = 1$, si los mensajes fuesen enviados enseguida por toda la vecindad de unidades a una neurona dada, serían suficientes para producir el disparo de cualquier unidad en el conjunto. Sin embargo, esto no es lo que sucede, el conjunto de neuronas no envía los mensajes enseguida o a la vez. El sistema evoluciona con el tiempo a un estado asintótico, donde k diferentes grupos de neuronas disparan en orden y periódicamente. El periodo de toda unidad en el conjunto es el mismo, y es igual al número de grupos que se forman ($k = T_i$). En este estado el disparo de cada unidad es regular ($\sigma_i^t = 0$ e independiente de p) y las mismas unidades permanecen para siempre en el mismo grupo. Este resultado se puede ver de una manera más ilustrativa en la Figura 3.8, donde observamos el ejemplo de una

población formada por 64 neuronas, qué aspecto tienen los diferentes grupos que se forman y cuál es el límite cíclico y periódico derivado de esta situación. En este ejemplo al periodo que llega el sistema es $k = T_i = 6$.

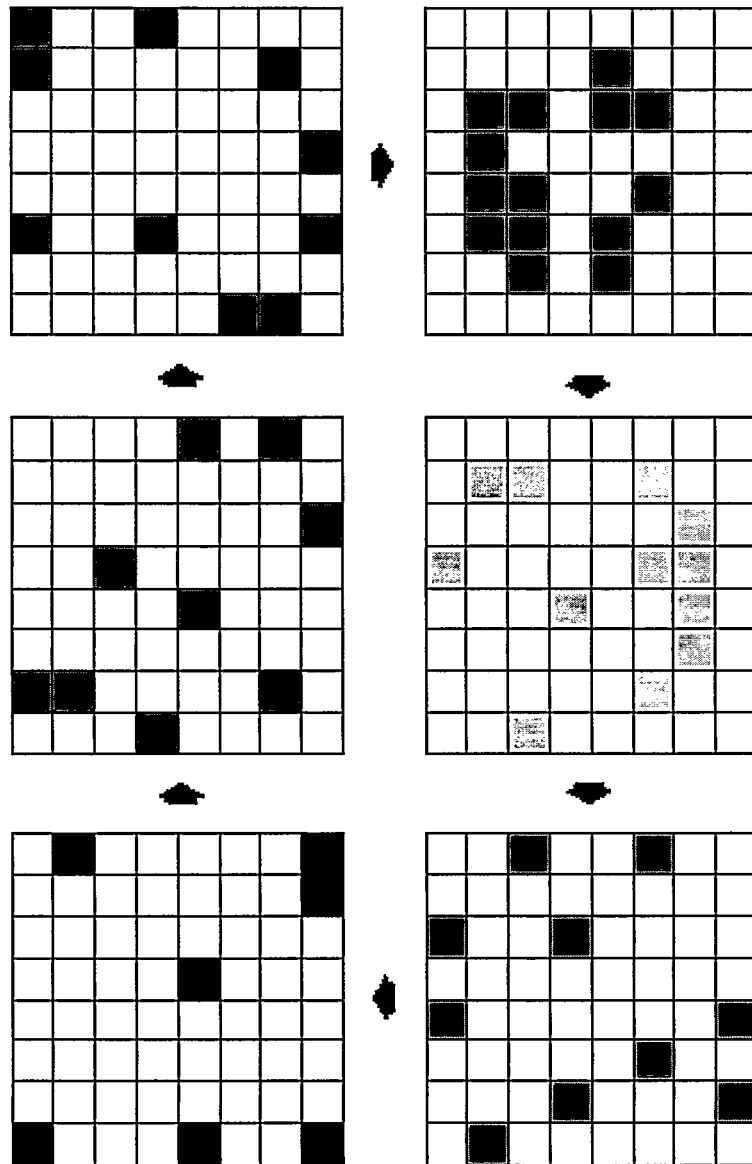


Figura 3.8: Patrón de disparo que se forma con 64 neuronas, para $\eta = 1$. En este caso el periodo de disparo de toda neurona es $T_i = 6$.

Vamos a explicar ahora cuáles son las causas de este característico comportamiento y cómo podemos cuantificarlo. Esta estabilidad en el disparo de las unidades se alcanza debido a que para varios grupos, que denotaremos por $\{n_1^s, n_2^s, \dots, n_k^s\}$, el disparo de toda unidad en el grupo es inducido por el conjunto sin necesidad de utilizar la evolución espontánea. Los grupos estables son aquellos para los cuales el tamaño de $n_i \epsilon$ es más grande que los pasos de tiempo que quedan para alcanzar

el umbral L después de haber recibido la neurona los mensajes del resto de los grupos. Supongamos que han disparado previamente $T_i - 1$ grupos (siendo T_i el periodo de disparo de toda unidad perteneciente al grupo n_i), entonces los mensajes recibidos por una unidad perteneciente al grupo n_i hasta el momento son iguales a la cantidad $(V - n_i)\epsilon$. Por otra parte, la evolución espontánea de una neurona perteneciente al grupo n_i , es como máximo $T_i - 1$ (límite determinista), más un estado de comienzo del ciclo. Así, podemos concluir que la condición límite para que una unidad en un grupo n_i permanezca para siempre en el mismo ciclo periódico, con periodo T_i es:

$$(V - n_i)\epsilon + T_i < L, \quad (3.6)$$

y los grupos estables $\{n_1^s, n_2^s, \dots, n_{T_i}^s\}$ son aquéllos para los cuales n_i satisface esta desigualdad para $i = 1 \dots T_i$. Pueden aparecer grupos no estables para algún tiempo, sin embargo cuando el sistema cae en uno de estos ciclos particulares y estables, éste permanecerá en él para siempre, sea cual sea, en ese momento p . La probabilidad de evolución espontánea de cada unidad contribuye en el papel de dirigir de alguna manera los ciclos estables a los que va a llegar el sistema. Pero una vez en este ciclo límite, la evolución espontánea de cada unidad es irrelevante para la dinámica de la población neuronal. En el límite de $t \rightarrow \infty$ toda población con $\eta = 1$ alcanzará un ciclo estable formado por k grupos, $\{n_1^s, n_2^s, \dots, n_k^s\}$, y toda unidad en el conjunto disparará con un periodo constante $T_i = k$ (ver Figura 3.8). El tiempo que tarde en alcanzar este ciclo periódico dependerá de p y del número de neuronas de la población.

Dejando de lado el caso de N pequeños, es bastante grande el número de grupos que satisfacen la Ecuación 3.6 y va aumentando según aumentamos N . Hacia qué combinación de grupos evoluciona en el tiempo el sistema, dependerá de en qué condiciones iniciales empieza el sistema (estado en el que se encuentran la neuronas inicialmente). Sin embargo, la mayoría de los grupos estables que obtenemos en nuestras simulaciones corresponden a unos pocos valores de T_i . Si asumimos que todos los posibles conjuntos de grupos estables $\{n_1^s, n_2^s, \dots, n_k^s\}$ serán alcanzados con la misma probabilidad, entonces la probabilidad de encontrar la población con periodo T_i a $t \rightarrow \infty$ vendrá dada por el número de particiones de N con las restricciones impuestas por la Ecuación 3.6 (ver Apéndice C). Esto es:

$$P_N^{>\tilde{k}}(T_i) = \frac{(T_i + N - T_i(\tilde{k} + 1) - 1)!}{(T_i - 1)!(N - T_i(\tilde{k} + 1))!} \quad (3.7)$$

donde \tilde{k} es el tamaño de grupo mínimo, n_i , que se puede formar para un determinado periodo T_i .

Con el fin de calcular esta cota para el tamaño de grupo en función del periodo, sustituimos el acoplamiento por un valor particular en la Ecuación 3.6 (en nuestro caso $\epsilon = 1$) para el régimen que estamos trabajando $\eta = 1$, y así obtenemos:

$$\tilde{k} > T - 1. \quad (3.8)$$

Por tanto, observamos que el tamaño de los grupos de neuronas sincronizadas que se forman en este singular régimen no puede ser cualquiera, sino que tiene que ser siempre por lo menos mayor que el periodo de cada unidad.

En la Figura 3.9 presentamos el número de sucesos para un determinado T_i y para una familia de simulaciones que parten de diferentes condiciones iniciales. En la misma figura, también se presentan los resultados que se derivan de la aproximación dada por la Ecuación 3.7, con la restricción para los tamaños de los grupos dada por la Ecuación 3.8. Podemos observar en la figura, que el número de particiones dados por la Ecuación 3.7 explican de manera fundamental las probabilidades que obtenemos en nuestras simulaciones. No obstante, observamos también que las dos gráficas, simulación y estimación por particiones, no se ajustan de forma exacta, debido a que no se alcanzan todas las particiones con la misma probabilidad exactamente.

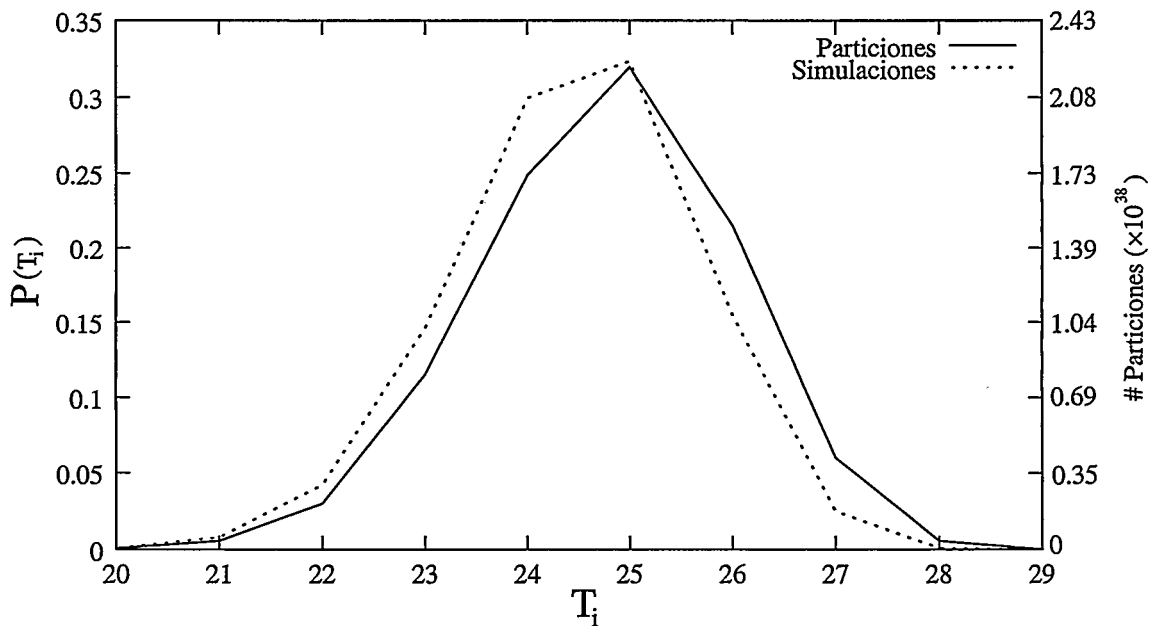


Figura 3.9: Gráfico de la probabilidad de encontrar T_i en 1000 simulaciones cuando el sistema alcanza el límite $t \rightarrow \infty$, y para $\eta = 1$. También se ha dibujado con una línea punteada el número de particiones que se obtienen utilizando la Ecuación 3.7. En este caso $V = 1000$ y $p = 0.9$.

En la Tabla 3.2 presentamos los valores numéricos de las particiones de la Figura 3.9, y en ella podemos observar que aunque en la Figura 3.9 para $T_i = 20$ y 29 el número de particiones parece ser cero, en realidad, como vemos en la tabla, no lo es. Sin embargo, los valores en el máximo son del orden de 10^4 veces más probables que los situados fuera del rango dibujado.

T_i	# Particiones	T_i	# Particiones	T_i	# Particiones	T_i	# Particiones
12	4.953714e+24	17	2.519892e+32	22	2.926635e+37	27	1.722825e+37
13	2.521480e+26	18	4.637171e+33	23	1.011889e+38	28	5.941117e+35
14	1.071243e+28	19	6.604415e+34	24	2.076957e+38	29	1.875328e+33
15	3.767534e+29	20	7.068980e+35	25	2.244005e+38	30	7.759420e+28
16	1.084720e+31	21	5.477023e+36	26	1.071025e+38	31	5.534774e+19

Tabla 3.2: *Resultados del número de particiones para diferentes T_i calculados a través de la Ecuación 3.7, correspondientes a la Figura 3.9.*

En la Tabla 3.3 se presentan los promedios del periodo y las dispersiones para diferentes tamaños de la población. Los valores han sido calculados usando la Ecuación 3.7, siendo éstos independientes de cualquier otro parámetro. El parámetro de estocasticidad no interviene, desde el momento que para $t \rightarrow \infty$ los ciclos estables no dependen de p , como ya sabíamos. El parámetro L queda biunívocamente fijado, habiendo tomado en nuestro estudio $\epsilon = 1$ y el régimen de $\eta = 1$. En la misma tabla podemos observar que tanto la media como la dispersión del disparo de las neuronas se comportan cuantitativamente como \sqrt{N} .

N	\bar{T}_i	$\sigma(\tau_i)$	N	\bar{T}_i	$\sigma(\tau_i)$	N	\bar{T}_i	$\sigma(\tau_i)$
500	16.99	1.09	5000	56.56	2.39	50000	185.80	5.31
1000	24.44	1.38	10000	81.02	3.05	100000	265.25	7.06

Tabla 3.3: *Valores para \bar{T}_i y $\sigma(\tau_i)$ para $\eta = 1$, usando la Ecuación 3.7.*

3.5 Discusión y Conclusión

La dinámica de la población de N unidades idénticas para η grande se caracteriza por la ausencia de patrones espaciales de sincronización. En este rango, el disparo de cada unidad es estable, teniendo el mismo periodo y dispersión en todas las unidades. El periodo y dispersión de cada unidad se puede calcular aproximadamente a través de la Ecuación 3.2. En esta ecuación se observa que el umbral de cada unidad es disminuido en una cantidad efectiva igual al número de mensajes que la misma recibe entre disparos consecutivos. Debido a que la evolución de todas la unidades es perturbada por el mismo tipo de mensaje, el periodo de cada unidad en el conjunto es casi el mismo.

La dinámica de un conjunto de N unidades idénticas interaccionando para el parámetro $\eta = 1$ cambia drásticamente en relación a lo comentado anteriormente. Esta dinámica es caracterizada por un conjunto de atractores, $\{n_1^s, n_2^s, \dots, n_k^s\}$, a los

que el sistema evoluciona con el tiempo. Una vez que el atractor es alcanzado por el sistema, éste permanece con un patrón de disparo de periodo k para siempre. Antes de que el atractor sea alcanzado, la población explora varios grupos de disparo no estables, $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$, en los que el sistema permanece en intervalos de tiempo que dependen del parámetro de estocasticidad p de cada neurona. Mientras este estado transitorio tiene lugar, toda unidad en el conjunto dispara con un periodo m , siendo éste también el número de grupos que se forman disparando en sincronía uno detrás de otro. En estos estados transitorios una unidad dada podría unirse a diferentes grupos de sincronización.

Según nos vamos aproximando al límite de $\eta = 1$ desde valores mayores, el comportamiento y evolución del sistema es idéntico, pero sin la aparición de atractores estables; esto es, m grupos de unidades $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ disparan en sincronía, y todas las unidades en la población tienen el mismo periodo m en esa configuración. Pero esa configuración no es estable en el tiempo, es un estado transitorio que evoluciona a otras configuraciones igualmente no estables. Este comportamiento explica la dispersión tan baja que encontramos en $\eta \approx 1$ en la Figura 3.10. En esta figura se pueden observar las dispersiones obtenidas para los periodos de la Figura 3.7, que se obtienen de las simulaciones y su estimación teórica (ver Ecuación 3.2).

En nuestras simulaciones de poblaciones con unidades iguales no se han encontrado otro tipo de acompasamiento asimétrico en el disparo de las unidades.

Resumiendo, podemos decir que nuestra población de N unidades de integración y disparo idénticas con ruido, interaccionando entre ellas para un rango de mensajes dado ($\eta \approx 1$), tiene un patrón de disparo que es estable a un nivel de estudio del sistema intermedio mesoscópico. Este patrón es tal, que toda neurona en la población dispara con el mismo periodo $k = T_i$, y las N unidades se distribuyen en k grupos disparando en sincronía. Las características de este singular patrón dependen únicamente del número total de unidades que integran la población y del tiempo que tarda cada mensaje en llegar a la unidad destino. Una vez que se ha alcanzado la estabilidad en la oscilación, la cantidad de ruido que afecta a cada unidad no influye en las características del patrón de disparo del sistema. Pensamos que este tipo de patrón podría ser relevante en las tareas llevadas a cabo en los procesos de información, debido a que tiene una *estabilidad estructural*: el periodo de disparo sólo depende de dos parámetros estructurales que son el número de unidades en el conjunto y el retraso para el mensaje que va de la unidad que dispara a las unidades que reciben.

Otro fenómeno que merece la pena resaltar es el hecho de que si mantenemos el periodo más o menos constante en la población de neuronas y vamos aumentando el número de unidades, entonces se observa un decrecimiento de la dispersión del disparo de las unidades (ver Figura 3.5). Es decir, el conjunto de neuronas, sólo por el hecho de interaccionar con un cierto rango de acoplamiento, se comporta de una manera más estable y menos ruidosa en el patrón de disparo de cada unidad. Cuanto más unidades haya en la población, menor desviación se obtendrá en el

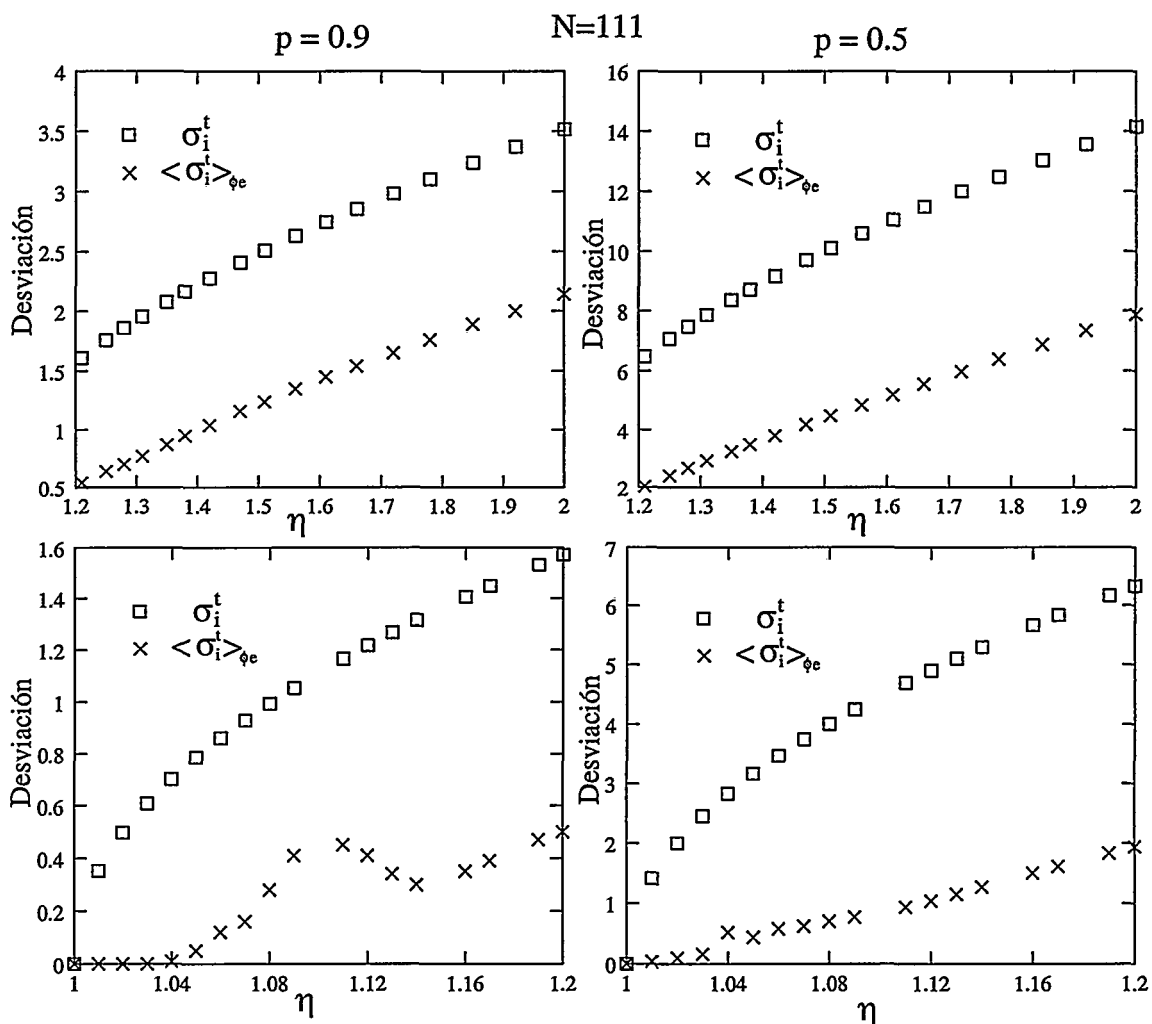
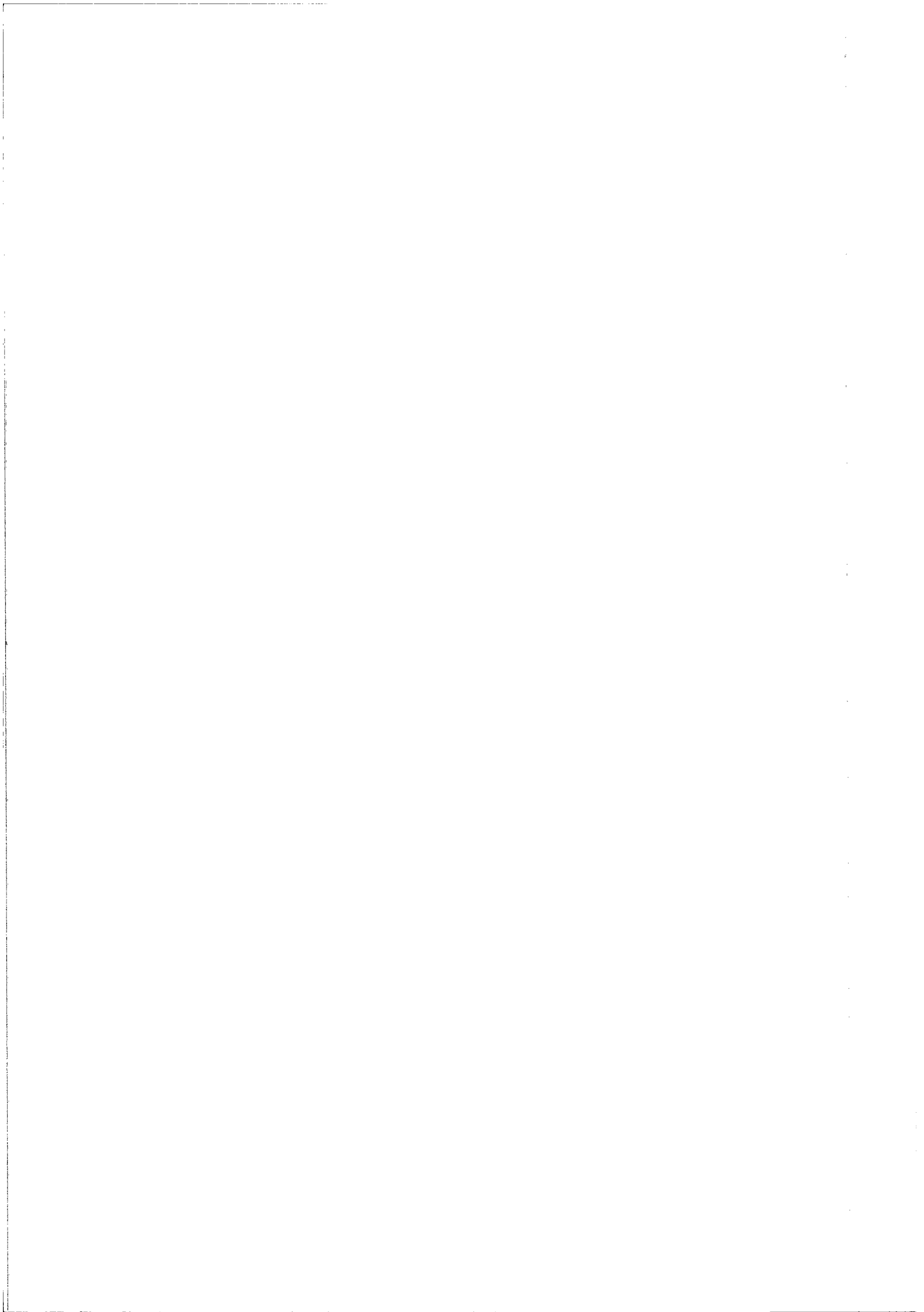


Figura 3.10: Comparación entre los promedios de las dispersiones calculadas a través de las simulaciones, y por medio de las estimaciones teóricas dadas por la Ecuación 3.2. Se muestran dibujados los resultados para un conjunto con $V = 100$ y $p = 0.9$ (gráficos de la izquierda) y $p = 0.5$ (gráficos de la derecha). Los promedios han sido calculados sobre $1000L$ unidades de tiempo con 1000 diferentes condiciones iniciales.

patrón de disparo y, por tanto, pensamos que es un fenómeno cooperativo que merece la pena recalcar.

Parte III

Máquinas de Boltzman



Capítulo 4

Aprendizaje Eficiente con Máquinas de Boltzmann

4.1 Introducción

Las Máquinas de Boltzmann, [Hinton y Sejnowski, 1983] [Ackley et al., 1985] (MB's), son redes de neuronas binarias que siguen una dinámica estocástica o probabilística, conocida por la dinámica de Glauber. Las MB's se pueden ver como una extensión de las redes de Hopfield [Hopfield, 1982], que incluyen unidades ocultas y con dinámica estocástica en vez de determinista. Supongamos que definimos el vector \vec{s} para un instante determinado, como aquel cuyas componentes representan el estado en el que se encuentra cada unidad. Si tomamos las conexiones simétricas entre las neuronas, la distribución de probabilidad sobre los estados de las neuronas \vec{s} llegará a ser estacionaria, y está dada por la distribución de Boltzmann–Gibbs $P(\vec{s})$. La distribución de Boltzmann es una función conocida de los pesos y umbrales de la red neuronal. Sin embargo, el cálculo exacto de $P(\vec{s})$ o alguna estadística que envuelva a $P(\vec{s})$, tal como los promedios de disparo o el cálculo de las correlaciones de red, es exponencial en el número de unidades de la misma. Esto es debido a que el cálculo de la distribución $P(\vec{s})$ involucra un factor de normalización Z , que contiene una suma de todos los posibles estados del sistema neuronal. El número de estados posible de una red formada por MB's, aumenta exponencialmente según aumenta el número de neuronas. Este problema es particularmente importante en el proceso de aprendizaje de MB's, debido a que la regla de aprendizaje necesita del cálculo de las correlaciones entre neuronas. De esta forma, el aprendizaje en MB's requiere un tiempo de computación exponencial. Para arquitecturas específicas, el aprendizaje puede ser drásticamente acelerado. Por ejemplo, Saul y Jordan [Saul y Jordan, 1994] discuten sobre cómo los tiempos de aprendizaje pueden llegar a ser lineales en el número de neuronas. Kappen [Kappen, 1995] muestra que la fuerte inhibición entre neuronas ocultas reduce el tiempo de computación a polinomial en el número de neuronas.

Un método numérico aproximado, bien conocido para calcular las correlaciones entre neuronas, es el método de Monte Carlo [Itzykson y Drouffe, 1989]. Este método realiza un muestreo estocástico del espacio de estados. La dinámica de Glauber es un ejemplo de este método (*Gibbs Sampling*). Los términos en el sumatorio sobre todos los estados, son proporcionales al *factor de Boltzmann* $\exp(-E)$. Los métodos de Monte Carlo pueden ser más efectivos que cuando sumamos a todos los estados, ya que el muestreo está sesgado hacia los términos con mayor E , y esos términos darán la contribución dominante de la suma sobre todos los estados. Éste es el planteamiento elegido para el aprendizaje en las originales MB's [Ackley et al., 1985]. El uso práctico de este método requiere que los procesos de Markov converjan suficientemente rápido (en tiempo polinomial) a la distribución de equilibrio. Esta propiedad, conocida por el término de *rapid mixing*, probablemente no se mantiene en general para la dinámica de Glauber [Sinclair, 1993]. Sin embargo, se pueden obtener resultados satisfactorios cuando el tamaño de la red no es muy grande y los pesos son pequeños. Nosotros utilizaremos los métodos de Monte Carlo en la última sección, para comparar nuestro modelo de aprendizaje de MB's con el método *exacto* (Monte Carlo) a través de un problema de inferencia probabilística.

Peterson y Anderson [Peterson y Anderson, 1987] propusieron un método para acelerar el aprendizaje en MB's. Ellos sugirieron remplazar las correlaciones en los algoritmos de aprendizaje en MB's por la sencilla aproximación del *campo medio*: $\langle s_i s_j \rangle = m_i m_j$, donde m_i es la actividad de campo medio de la neurona i . Los campos medios vienen dados por la solución de un conjunto de n ecuaciones acopladas de campo medio, con n número de neuronas. La solución puede ser obtenida eficientemente por un método iterativo que converge hacia ésta. Este método fue más tarde elaborado y depurado por Hinton [Hinton, 1989]. Estos métodos son conocidos como la versión determinista de las MB's, ya que se calculan mediante promedios temporales.

Nuestro objetivo en la próxima sección es mostrar que esta aproximación de campo medio en las reglas de aprendizaje de MB's, en general converge hacia una solución. También explicaremos por qué no se produce esta convergencia. Argumentaremos y explicaremos que, para un correcto tratamiento de la teoría de campo medio para MB's, las correlaciones pueden ser calculadas mediante el teorema de respuesta lineal [Parisi, 1988]. En el contexto de redes neuronales, este planteamiento fue introducido primeramente por Ginzburg y Sompolinsky [Ginzburg y Sompolinsky, 1994] para el cálculo del tiempo de retraso de las correlaciones, más tarde por Kappen [Kappen, 1997] para el cálculo de las correlaciones de las dependencias de estímulos y, últimamente, por Kappen y Rodríguez ([Kappen y Rodríguez, 1998b, Kappen y Rodríguez, 1998a, Kappen y Rodríguez, 1997a, Kappen y Rodríguez, 1997b]) aplicándolo directamente al aprendizaje en redes neuronales de MB's. Ésta es nuestra principal aportación al aprendizaje en redes neuronales con MB's, la cual explicaremos en este capítulo. Para ver la bondad de nuestro método aproximativo, compararemos

nuestro método de aprendizaje con el método exacto en redes de pequeño número de unidades, a través de la divergencia de Kullback-Leibler [Kullback, 1959]. Para conjuntos de unidades superiores, no se puede utilizar este criterio debido a que utiliza un tiempo exponencial de computación. Así, proponemos varios criterios aproximados, para redes de neuronas grandes, que cuantifican la calidad del aprendizaje usando la corrección de respuesta lineal. Estos criterios se correlacionan correctamente con la distancia de Kullback en redes pequeñas de neuronas. Uno de estos criterios será la calidad de recuperación de patrones para una red de MB's. El otro criterio es la calidad del proceso de inferencia en una red de MB's, que será cuantificado a través de la distancia de Kullback condicional (ver Capítulo 2 de [Deco y Obradovic, 1996]).

4.2 Aprendizaje con las Máquinas de Boltzmann

En la primera parte de esta sección hablaremos sobre la dinámica general de máquinas de Boltzmann. En la segunda parte mostraremos que este tipo de redes neuronales sufre de una extremada lentitud en su algoritmo de aprendizaje, y veremos por qué se produce esto. Por último, en la tercera parte de esta sección, introduciremos las MB's deterministas (aproximación de campo medio), que surgen como contrarréplica al problema de la extrema lentitud en el aprendizaje de las MB's originales. También daremos ejemplos en los que la aproximación de campo medio en las MB's no funciona bien, argumentando por qué falla y en qué casos.

4.2.1 Dinámica General en las Máquinas de Boltzmann

Las MB's son un tipo de redes estocásticas con conexiones simétricas, que se pueden definir como mostramos a continuación. Las posibles configuraciones de la red se pueden caracterizar por un vector de estado $\vec{s} = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, donde s_i es el estado de la neurona i , y n el número total de neuronas del sistema. Cada neurona puede estar en dos estados posibles ($s_i = \pm 1$) y su dinámica es gobernada por la siguiente regla estocástica. A cada tiempo t seleccionamos una neurona aleatoriamente (dinámica asíncrona), su nuevo valor viene determinado por:

$$s_i = \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } g(h_i) \\ -1 & \text{con probabilidad } 1 - g(h_i) \end{cases}, \quad (4.1)$$

siendo $g(h_i)$ y h_i (campo local) definido por:

$$g(h_i) = \frac{1}{1 + \exp\{-2\beta h_i\}}, \quad h_i = \sum_{j \neq i} w_{ij} s_j + \theta_i. \quad (4.2)$$

La magnitud w_{ij} (peso) se refiere a la fuerza de conexión entre la neurona i y la neurona j , y θ_i es el umbral de la neurona i . Como ya apuntamos anteriormente, los pesos se eligen simétricamente, $w_{ij} = w_{ji}$. El parámetro β controla el ruido en la dinámica de la neurona, y frecuentemente se suele interpretar como $\beta = 1/T$, donde T hace el papel de la temperatura de un sistema físico. Debido a que la misión de β es escalar los pesos y umbrales, y que éstos serán optimizados más tarde por medio del aprendizaje, nosotros pondremos en todo caso $\beta = 1$ sin pérdida de generalidad.

Definamos para una cierta configuración \vec{s} la *energía* del sistema como sigue:

$$-E(\vec{s}) = \sum_{i < j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \theta_i. \quad (4.3)$$

Después de tiempos lo suficientemente largos aplicando la dinámica de Glauber, la probabilidad de encontrar la red neuronal en el estado \vec{s} llega a ser independiente del tiempo (*equilibrio térmico*) y será dado por la distribución de Boltzmann :

$$P(\vec{s}) = \frac{1}{Z} \exp\{-E(\vec{s})\}, \quad (4.4)$$

siendo Z la función de partición que normaliza la distribución de probabilidad y que viene determinada por:

$$Z = \sum_{\vec{s}} \exp\{-E(\vec{s})\}. \quad (4.5)$$

4.2.2 Aprendizaje Lento en Máquinas de Boltzmann

La regla de aprendizaje para MB's fue presentada e introducida por primera vez por Ackley [Ackley et al., 1985], y ahora esbozaremos sus principales características. Dividamos el conjunto de nuestras neuronas en una partición de n_v unidades visibles y n_h unidades ocultas ($n_v + n_h = n$). Etiquetaremos a los 2^{n_v} estados posibles con el subíndice α , y a los 2^{n_h} ocultos con el subíndice β . Así, cada estado \vec{s} quedará determinado unívocamente por la pareja $\alpha\beta$. En este tipo de modelos conexionistas el aprendizaje consiste en ajustar los pesos y umbrales de la red, de tal forma que la distribución de las unidades visibles $p_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta}$ se aproxime tan bien como pueda a una distribución objetivo que denominaremos q_α .

Ahora bien, necesitamos una medida que nos estime cómo de cercanas están las distribuciones p_α y q_α . Para ello, la teoría de información sugiere la *entropía relativa*, también llamada *divergencia de Kullback*, de esas distribuciones de probabilidad como una medida natural de la diferencia entre ambas [Kullback, 1959]:

$$K = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \log \frac{q_{\alpha}}{p_{\alpha}}. \quad (4.6)$$

Cuanto más cerca esté la divergencia de Kullback de cero, más cercanas estarán las distribuciones p_{α} y q_{α} , y en caso de que la divergencia de Kullback sea igual a cero, entonces $p_{\alpha} = q_{\alpha}$.

Por tanto, la regla de aprendizaje consistirá en minimizar esta divergencia de Kullback, para lo que utilizaremos descenso por gradiente¹. Las reglas de aprendizaje para las MB's quedan de la siguiente manera [Ackley et al., 1985] [Hertz et al., 1991]:

$$\Delta \theta_i = \eta (\langle s_i \rangle_c - \langle s_i \rangle), \quad \Delta w_{ij} = \eta (\langle s_i s_j \rangle_c - \langle s_i s_j \rangle) \quad i \neq j. \quad (4.7)$$

El parámetro η representa de alguna forma la fuerza de variación de los parámetros en el aprendizaje. Los símbolos $\langle \cdot \rangle$ y $\langle \cdot \rangle_c$ representan los valores esperados *libre* y *fijo*, respectivamente. El valor *libre* esperado es definido según:

$$\begin{aligned} \langle s_i \rangle &= \sum_{\alpha\beta} s_i^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} \\ \langle s_i s_j \rangle &= \sum_{\alpha\beta} s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

El valor *fijo* esperado se obtiene fijando las unidades visibles en un estado α y, posteriormente, tomando el valor esperado con respecto a q_{α} :

$$\begin{aligned} \langle s_i \rangle_c &= \sum_{\alpha\beta} s_i^{\alpha\beta} q_{\alpha} p_{\beta|\alpha} \\ \langle s_i s_j \rangle_c &= \sum_{\alpha\beta} s_i^{\alpha\beta} s_j^{\alpha\beta} q_{\alpha} p_{\beta|\alpha}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

siendo $s_i^{\alpha\beta}$ el valor de la neurona i cuando la red está en el estado $\alpha\beta$. La distribución de probabilidad $p_{\beta|\alpha}$ es la probabilidad condicional de observar el estado oculto β , dado un estado visible α :

$$p_{\alpha\beta} = p_{\beta|\alpha} p_{\alpha}. \quad (4.10)$$

¹En aprendizaje mediante descenso por gradiente, normalmente suele haber definida, en el problema en cuestión, una función de error o de coste que depende exclusivamente de los parámetros y patrones de aprendizaje del sistema. En MB's la función de coste es la divergencia de Kullback, los parámetros del sistema son los pesos y umbrales, y los patrones de aprendizaje es la distribución objetivo q_{α} . La técnica de aprendizaje de descenso por gradiente [Rumelhart et al.,] [Widrow y Hoff, 1960] sugiere cambiar los parámetros que hay que determinar por una cantidad que es proporcional al gradiente de la función error o de coste.

Es preciso hacer notar que en las Ecuaciones 4.7–4.9, i y j varían sobre las unidades visibles y las ocultas.

Así, nos damos cuenta de que las reglas de aprendizaje de las MB's contienen los valores esperados *libre* y *fijo* respecto a la distribución de Boltzmann. Pero el cálculo de esos valores esperados se hace imposible desde el momento en que la suma en la Ecuación 4.8 consta de 2^n términos, siendo n el número de neuronas. Si q_α contiene un conjunto de entrenamiento de p patrones, la computación de los valores esperados *fijos* (ver Ecuación 4.9) contiene $p2^n$ términos. Este cálculo es también computacionalmente intratable, aunque menos costoso que el cálculo de los valores *libres* esperados. Como resultado claro, de todo esto se desprende que el algoritmo de aprendizaje para MB's no puede ser aplicado a problemas prácticos.

4.2.3 Máquinas de Boltzmann Deterministas, la Aproximación de Campo Medio

Debido al problema presentado anteriormente sobre el aprendizaje en MB's, Peterson y Anderson [Peterson y Anderson, 1987] propusieron una aproximación para calcular los valores esperados basándose en la teoría de campo medio. En la próxima sección daremos más detalles sobre la formulación y teoría de campo medio. En el inicial planteamiento de Peterson y Anderson, los valores esperados *libre* y *fijo* de la Ecuación 4.7 son aproximados por sus valores de campo medio según sigue:

$$\langle s_i \rangle \approx m_i, \quad \langle s_i s_j \rangle \approx m_i m_j, \quad i \neq j, \quad (4.11)$$

donde m_i es la solución del conjunto de ecuaciones acopladas de campo medio:

$$m_i = \tanh \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} m_j + \theta_i \right). \quad (4.12)$$

Así, en cada paso del procedimiento de descenso por gradiente, debemos resolver el sistema de ecuaciones de campo medio dado por la Ecuación 4.12.

Peterson y Anderson encontraron que su método era del orden de 10 a 30 veces más rápido que el método de Monte Carlo. Sin embargo, hay muchos conjuntos de datos para los que este método por aproximación a campo medio no funciona bien. Ahora mostraremos las consecuencias de este planteamiento para el caso de una red sin unidades ocultas, y argumentaremos para qué conjuntos de datos no funciona y por qué.

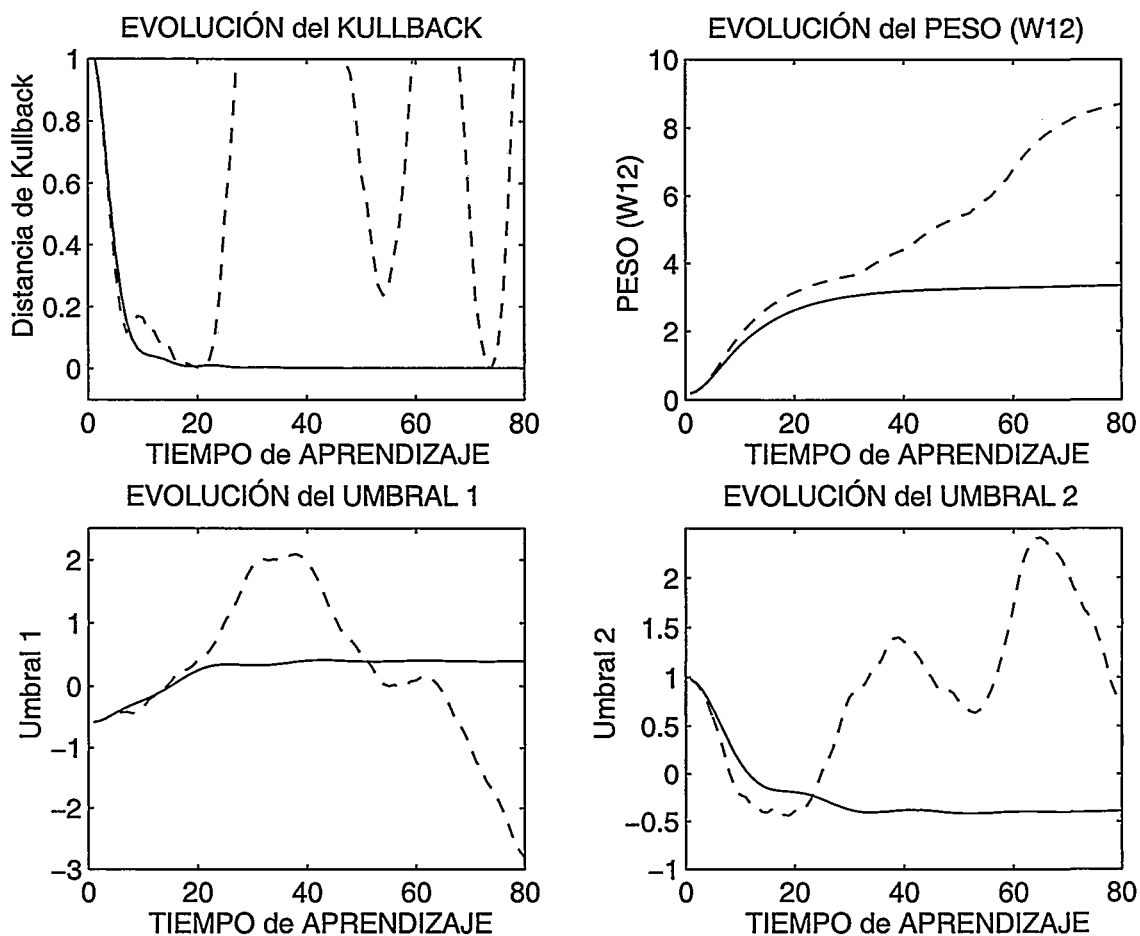


Figura 4.1: Aprendizaje mediante descenso por gradiente. La distribución objetivo q_α es dada por los dos patrones $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ con igual probabilidad. La línea continua representa la evolución de la divergencia de Kullback frente a los diferentes parámetros de la red, cuando utilizamos el proceso de descenso por gradiente calculando exactamente los valores libres y fijos esperados. La línea entrecortada representa la evolución de la divergencia de Kullback frente a los diferentes parámetros de la red, cuando utilizamos el proceso de descenso por gradiente con la aproximación de campo medio.

Problemas con la Aproximación de Campo Medio

Para ilustrar estos problemas consideremos un ejemplo de una red formada por dos neuronas, en la que no hay unidades ocultas. Con esta red queremos aprender la distribución de probabilidad dada por dos patrones en la Tabla 4.1. En la misma tabla podemos observar cuáles son las correlaciones fijas.

En este problema particular, el procedimiento de descenso por gradiente, combinado con la aproximación de campo medio, no converge. La razón es bastante simple. Si suponemos que el proceso de aprendizaje converge a un punto fijo

Patrones				Correlaciones fijas			
\vec{s}_α	s_1	s_2	q_α	$\langle s_1 \rangle_c$	$\langle s_2 \rangle_c$	$\langle s_1 s_2 \rangle_c$	$\langle s_2 s_1 \rangle_c$
\vec{s}_1	1	1	0.5	0	0	1	1
\vec{s}_2	-1	-1	0.5				

Tabla 4.1: Patrones y correlaciones para una red formada por dos neuronas.

($\Delta w_{ij} = 0$ y $\Delta \theta_i = 0$ para la Ecuación 4.1), entonces obtenemos de las Ecuaciones 4.7 y 4.12:

$$\langle s_i \rangle_c = m_i, \quad \langle s_i s_j \rangle_c = m_i m_j, \quad i \neq j.$$

Así, las ecuaciones del proceso de aprendizaje (ver Ecuación 4.7), en combinación con las aproximaciones de campo medio, implican que el conjunto de datos a aprender no tiene correlaciones. En nuestro ejemplo, esta condición es claramente incumplida debido a que

$$0 = \langle s_1 \rangle_c \langle s_2 \rangle_c \neq \langle s_1 s_2 \rangle_c = 1.$$

Por tanto, si utilizamos la aproximación de campo medio para el proceso de aprendizaje de descenso por gradiente, éste no convergerá. Todo esto se halla ilustrado en la Figura 4.1, en la que comparamos el método de descenso por gradiente exacto, donde las correlaciones son calculadas usando la Ecuación 4.8, y el aprendizaje de descenso por gradiente aplicando la aproximación de campo medio. Aunque en la gráfica el método de campo medio algunas veces alcanza valores óptimos a la solución que se busca (distancia de Kullback igual a cero), los gradientes en la Ecuación 4.7 no son cero en esos puntos, y por eso la solución no permanece allí.

De este ejemplo que presentamos se puede concluir que la aproximación de campo medio conduce a una convergencia en el algoritmo de aprendizaje mediante descenso por gradiente, solamente cuando los datos que queremos ajustar cumplen que:

$$\langle s_i s_j \rangle_c = \langle s_i \rangle_c \langle s_j \rangle_c, \quad i \neq j. \quad (4.13)$$

En el caso de que i y j etiqueten a unidades visibles, la condición 4.13 sólo es una propiedad de los datos que se pretenden ajustar. Esta condición equivale a que la distribución objetivo q_α pueda ser factorizada en todas sus variables, o lo que es lo mismo:

$$q(\vec{s}) = \prod_i q_i(s_i)$$

Así, la calidad de la aproximación de campo medio dependerá de hasta que punto sea incumplida la condición 4.13. Por supuesto esta conclusión se mantiene en el caso de que la red tenga unidades ocultas.

4.3 El Método de Campo Medio y la Corrección de Respuesta Lineal

En esta sección introduciremos un método mejorado para calcular las correlaciones dentro del marco de la aproximación de campo medio. En la primera parte, consideraremos la aproximación de campo medio y su formulación. Posteriormente, derivaremos nuestro principal resultado basado en la teoría de respuesta lineal. Por último, introduciremos en nuestro método la corrección de TAP, y diremos cómo se pueden calcular los pesos y los umbrales, en el caso particular de que no haya unidades ocultas, y sin utilizar un proceso de aprendizaje de descenso por gradiente.

4.3.1 Formulación de Campo Medio

La idea básica de la teoría de campo medio es reemplazar el término cuadrático de la energía $w_{ij}s_i s_j$ en la Ecuación 4.3, por un término lineal s_i .

Esta linealidad nos permite calcular de una forma eficiente la suma de todos los estados del sistema de las Ecuaciones 4.8 y 4.9, y la función de partición Z . Definimos la energía de campo medio como:

$$-E_{mf}(\vec{s}) = \sum_i s_i \{W_i + \theta_i\}, \quad (4.14)$$

donde introducimos n campos medios W_i . Los campos medios aproximan la interacción lateral entre neuronas. Los valores de W_i deben ser elegidos de tal forma que la aproximación sea tan buena como sea posible. A continuación veremos cómo se hace esto.

Definimos la distribución de probabilidad de campo medio como

$$P_{mf}(\vec{s}) = \frac{\exp\{-E_{mf}(\vec{s})\}}{Z_{mf}}, \quad (4.15)$$

siendo la función de partición de campo medio (ver Apéndice D):

$$Z_{mf} = \sum_{\vec{s}} \exp\{-E_{mf}(\vec{s})\} = \prod_i 2 \cosh(\theta_i + W_i). \quad (4.16)$$

Los valores esperados para s_i y $s_i s_j$ en la aproximación de campo medio son dados por (ver Apéndice D):

$$\langle s_i \rangle_{mf} \equiv \sum_{\vec{s}} s_i P_{mf}(\vec{s}) = \tanh(W_i + \theta_i) \equiv m_i, \quad (4.17)$$

$$\langle s_i s_j \rangle_{mf} \equiv \sum_{\vec{s}} s_i s_j P_{mf}(\vec{s}) = m_i m_j, \quad i \neq j, \quad (4.18)$$

donde hemos introducido los parámetros m_i , los cuales todavía no han sido fijados debido a su dependencia con W_i .

La función de partición real Z , Ecuación 4.4, puede ser calculada en función de la aproximación de campo medio [Itzykson y Drouffe, 1989]:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\vec{s}} \exp(-E) = \sum_{\vec{s}} \exp(-E_{mf} + E_{mf} - E) \\ &= Z_{mf} \langle \exp(E_{mf} - E) \rangle_{mf} \approx Z_{mf} \exp(\langle E_{mf} - E \rangle_{mf}) = Z'. \end{aligned} \quad (4.19)$$

La aproximación de campo medio se realiza en el último paso y es relativa a la convexidad de la función exponencial $\langle \exp f \rangle \geq \exp \langle f \rangle$ [Itzykson y Drouffe, 1989]. Es preciso hacer notar el hecho de que $\langle \cdot \rangle_{mf}$ es el valor esperado respecto a la distribución de campo medio, Ecuación 4.15, y no respecto a la distribución de Boltzmann, Ecuación 4.4. Así, la energía libre en la aproximación de campo medio puede ser calculada fácilmente, y es dada por la siguiente expresión:

$$-F = \log Z' = \sum_i \log(2 \cosh(\theta_i + W_i)) - \sum_i W_i m_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij} m_i m_j \quad (4.20)$$

Por tanto, podemos calcular los campos medios W_i mediante minimización de la energía libre. Minimizar la energía libre F es lo mismo que maximizar la función de partición Z' , y así obtendremos la Z' más cercana como sea posible a Z , ya que $Z \geq Z'$. Recordemos en la Ecuación 4.19 que la aproximación de campo medio consiste en despreciar las diferencias para:

$$\langle \exp(E_{mf} - E) \rangle_{mf} \approx \exp(\langle E_{mf} - E \rangle_{mf}),$$

siendo realmente:

$$\langle \exp(E_{mf} - E) \rangle_{mf} \geq \exp(\langle E_{mf} - E \rangle_{mf}).$$

La expresión final para la minimización de la energía libre puede ser puesta como (derivando respecto de W_i la Ecuación 4.20):

$$\frac{\partial F}{\partial W_i} = (1 - m_i^2)(W_i - \sum_{i \neq j} w_{ij} m_j) = 0. \quad (4.21)$$

A esta última expresión la nombraremos como las ecuaciones de campo medio. Vemos que las soluciones $m_i^2 = 1$ maximizan la energía libre F . En el régimen, donde los valores esperados neuronales no se saturan ($m_i \neq \pm 1$) podemos sustituir $W_i = \sum_{i \neq j} w_{ij} m_j$ en la Ecuación 4.17 y obtener las ecuaciones de campo medio (ver Ecuación 4.12). Esas ecuaciones pueden ser resueltas para m_i en función de w_{ij} y θ_i , usando el método del punto fijo. Los campos medios W_i entonces pueden ser calculados usando directamente la Ecuación 4.21.

4.3.2 Derivación de la Corrección de Respuesta Lineal

En esta sección es donde hacemos nuestra principal aportación al aprendizaje en MB's, mediante la corrección de respuesta lineal a la aproximación de campo medio. Así, podemos ir más allá en la predicción del campo medio $\langle s_i s_j \rangle_{mf} = m_i m_j$ de la Ecuación 4.18, de la siguiente forma. Primero debemos observar que los disparos medios exactos y sus correlaciones se pueden expresar de la siguiente forma (ver Apéndice D):

$$\langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\theta_j} \approx \frac{1}{Z'} \frac{dZ'}{d\theta_j}, \quad \langle s_i s_j \rangle \approx \frac{1}{Z'} \frac{d^2 Z'}{d\theta_i d\theta_j} \quad (4.22)$$

La aproximación en las expresiones anteriores, se debe a la aproximación de la función de partición real en función de Z_{mf} dada por la Ecuación 4.19. Si ahora calculamos $\frac{dZ'}{d\theta_j}$, usando la Ecuación 4.20, debemos ser conscientes de que los campos medios W_i dependen de θ_i a través de las Ecuaciones 4.12 y 4.21. En consecuencia, teniendo en cuenta esta dependencia explícita, los cálculos de las correlaciones se realizarán de la siguiente forma:

$$\langle s_i \rangle \approx \frac{d}{d\theta_i} \log Z' = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} + \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial W_j} \right) \log Z' = m_i \quad (4.23)$$

$$\langle s_i s_j \rangle \approx \frac{1}{Z'} \frac{d}{d\theta_j} (Z' m_i) = m_i m_j + A_{ij} \quad (4.24)$$

siendo $A_{ij} = \frac{dm_i}{d\theta_j}$. El último paso en la Ecuación 4.23 se obtiene cuando usamos las ecuaciones de campo medio 4.21 (ver Apéndice D). Por tanto, no existe corrección de respuesta lineal para el disparo medio de las neuronas, hecho que

no pasa para las correlaciones entre disparos. La Ecuación 4.24 es conocida por el teorema de respuesta lineal [Parisi, 1988]. La inversa de la matriz A se puede calcular directamente por diferenciación de la Ecuación 4.12 con respecto a θ_i (ver Apéndice D). El resultado es:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 - m_i^2} - w_{ij} \quad (4.25)$$

Supongamos que V y H denotan los subconjuntos de neuronas visibles y ocultas, respectivamente. Cuando la red es dividida en unidades visibles y unidades ocultas, la aproximación anterior se puede utilizar para el cálculo de los valores esperados *libres* de la Ecuación 4.8.

Cuando las unidades visibles son fijadas, la deducción anterior puede ser repetida para calcular los valores esperados de las unidades ocultas. La única diferencia sería que los umbrales θ_i para las unidades ocultas recibirían una contribución extra de las neuronas visibles fijadas. Supongamos así que las unidades visibles son fijadas en el estado α . Los disparos medios para las neuronas ocultas se denotarán entonces $\langle s_i \rangle_\alpha = m_{i,\alpha}$, $i \in H$, donde $m_{i,\alpha}$ satisface las siguientes ecuaciones de campo medio.

$$m_{i,\alpha} = \tanh\left(\sum_{j \in H} w_{ij} m_{j,\alpha} + \sum_{j \in V} w_{ij} s_j^\alpha + \theta_i\right), i \in H. \quad (4.26)$$

Hay que tener en cuenta que $m_{i,\alpha}$ depende de los estados α fijados para el sistema. Así, las correlaciones $\langle s_i s_j \rangle_\alpha$ se calcularán de la siguiente forma:

$$i, j \in H : \langle s_i s_j \rangle_\alpha = m_{i,\alpha} m_{j,\alpha} + A_{ij,\alpha} \quad (4.27)$$

$$i \in V, j \in H : \langle s_i s_j \rangle_\alpha = s_i^\alpha m_{j,\alpha} \quad (4.28)$$

$$i, j \in V : \langle s_i s_j \rangle_\alpha = s_i^\alpha s_j^\alpha \quad (4.29)$$

$$(A_\alpha^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 - m_{i,\alpha}^2} - w_{ij} \quad (4.30)$$

Finalmente, los valores esperados *fijos* serán calculados cogiendo los valores esperados sobre la distribución q_α : $\langle s_i \rangle_c = \sum_\alpha \langle s_i \rangle_\alpha q_\alpha$ y $\langle s_i s_j \rangle_c = \sum_\alpha \langle s_i s_j \rangle_\alpha q_\alpha$.

Resumiendo, nuestra aproximación consiste en reemplazar los valores esperados *libres* y *fijos* en la Ecuación 4.7, por sus aproximaciones de respuesta lineal. El cálculo de las correlaciones a través de respuesta lineal implica la inversión de las matrices A y A_α , para lo cual se requieren del orden de $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones. El cálculo de los disparos medios a través del método del punto fijo de la Ecuación 4.26 requiere $\mathcal{O}(n^2)$ o $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ operaciones, dependiendo de si se requiere la precisión en m_i o en el vector norma $\sum_i m_i^2$. Así, el cálculo completo de la aproximación de campo medio, incluyendo la corrección de respuesta lineal, calcula los gradientes en $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones.

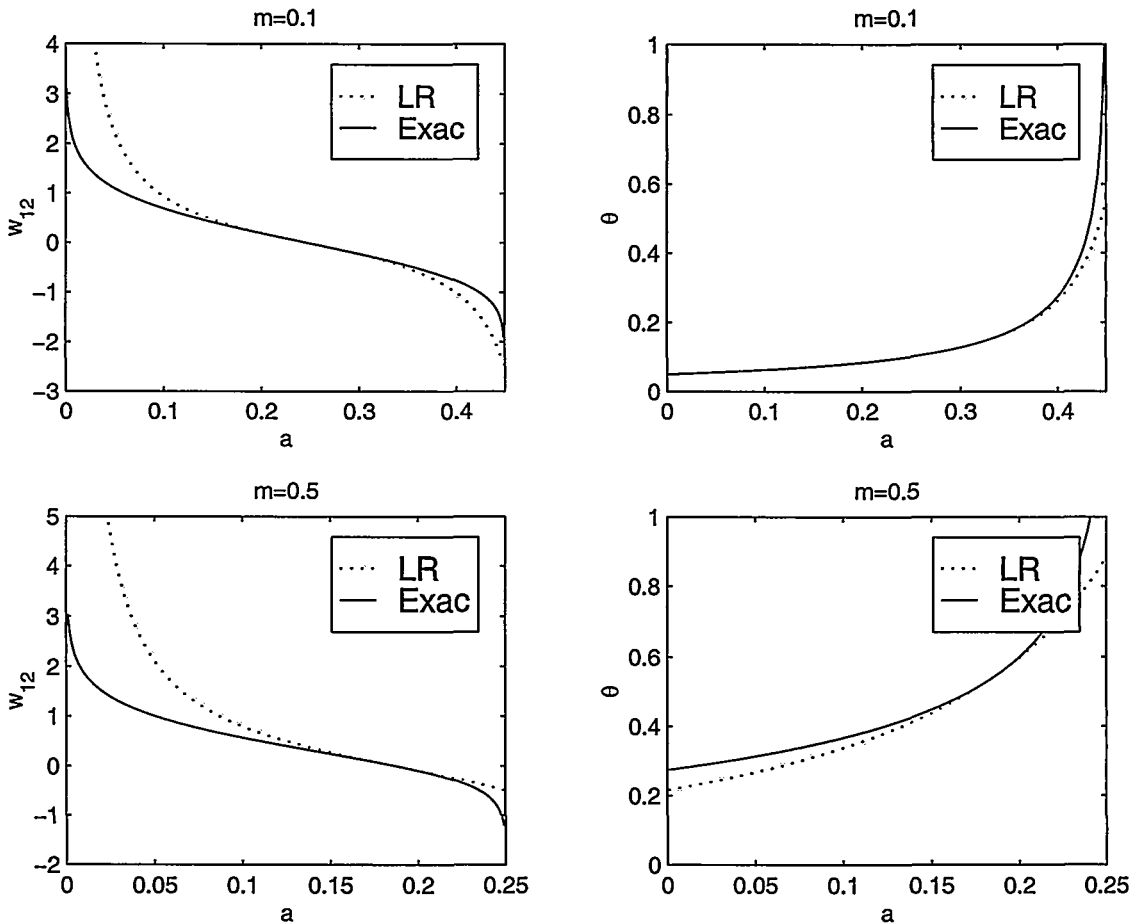


Figura 4.2: Ejemplo del cálculo para la conexión lateral y umbrales obtenidos por el método exacto y el método de respuesta lineal. El sistema está formado por dos neuronas, en el que suponemos que $\theta_1 = \theta_2$ y $w_{12} = w_{21}$. Se han calculado los parámetros del sistema para dos valores del disparo medio, $m = 0.1$ y $m = 0.5$.

4.4 La corrección TAP a las Ecuaciones de Campo Medio

Es bien conocido que la descripción estándar de campo medio (ver Ecuación 4.20) no es adecuada para sistemas frustrados². En general, para solucionar estos problemas se necesita involucrar potencias mayores de la matriz de acoplamiento w_{ij} . Por ejemplo, para el modelo de Sherington-Kirkpatrick (SK), la energía libre en la aproximación de campo medio se convierte en [Thouless et al., 1977]:

²La frustración se da en sistemas en los que hay conexiones con diferentes signos. El término de frustración, se refiere a la incapacidad del sistema para satisfacer el signo de todas las conexiones al mismo tiempo.

$$-F = \sum_i \log(2 \cosh(\theta_i + W_i)) - \sum_i W_i m_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij} m_i m_j + \frac{1}{4} \sum_{i,j} w_{ij}^2 (1 - m_i^2)(1 - m_j^2), \quad (4.31)$$

y las correspondientes ecuaciones de campo medio se transforman en las ecuaciones TAP:

$$m_i = \tanh \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} m_j + \theta_i - m_i \sum_{j \neq i} w_{ij}^2 (1 - m_j^2) \right). \quad (4.32)$$

El término adicional es llamado *término de reacción de Osanger* [Osanger, 1936]. Esta contribución explica cómo el disparo medio de la neurona i afecta a la polarización de los alrededores de la misma, afectando al campo local de dicha neurona. El efecto de este término adicional fue estudiado por [Galland, 1993], pero en ausencia del término de corrección de respuesta lineal. En general, hay una suma infinita de términos, cada uno de ellos involucrando potencias de la matriz de pesos w_{ij} [Fischer y Hertz, 1991]. Es interesante hacer notar que todos los términos de alto orden en las ecuaciones de punto fijo son proporcionales a m_i , así representan correcciones al término de auto-acoplamiento. En el caso del modelo SK, se puede demostrar que todos los términos más allá del término de Osanger son despreciables [Plefka, 1982], y para sistemas que no están frustrados, este término también es despreciable.

Podemos obtener las correcciones de respuesta lineal para TAP y altos órdenes de las correcciones de campo medio, de forma similar (por variación alrededor de las ecuaciones de TAP). Esto será explorado y estudiado en el futuro. Aquí nos limitaremos a las correcciones de respuesta lineal a los órdenes bajos de las ecuaciones de campo medio, e ignoraremos las correcciones a alto orden. Sin embargo, consideraremos el efecto de un término *efectivo* de auto-acople $w_{ii} m_i$. Así, las ecuaciones de campo medio (ver Ecuación 4.12) se transformarán en:

$$m_i = \tanh \left(\sum_j w_{ij} m_j + \theta_i \right), \quad (4.33)$$

en la que hemos introducido el término de auto-acople en la diagonal. La derivación de la corrección de respuesta lineal no se verá modificada, salvo que w_{ij} tome una diagonal distinta de cero. De esta forma, proponemos fijar los valores de w_{ii} a través del aprendizaje. Más adelante demostraremos que la inclusión de este término de auto-acople es:

- (i) beneficioso para la obtención de una solución para el problema de aprendizaje en ausencia de unidades ocultas,

(ii) y da significativamente mejores resultados que en ausencia de este término.

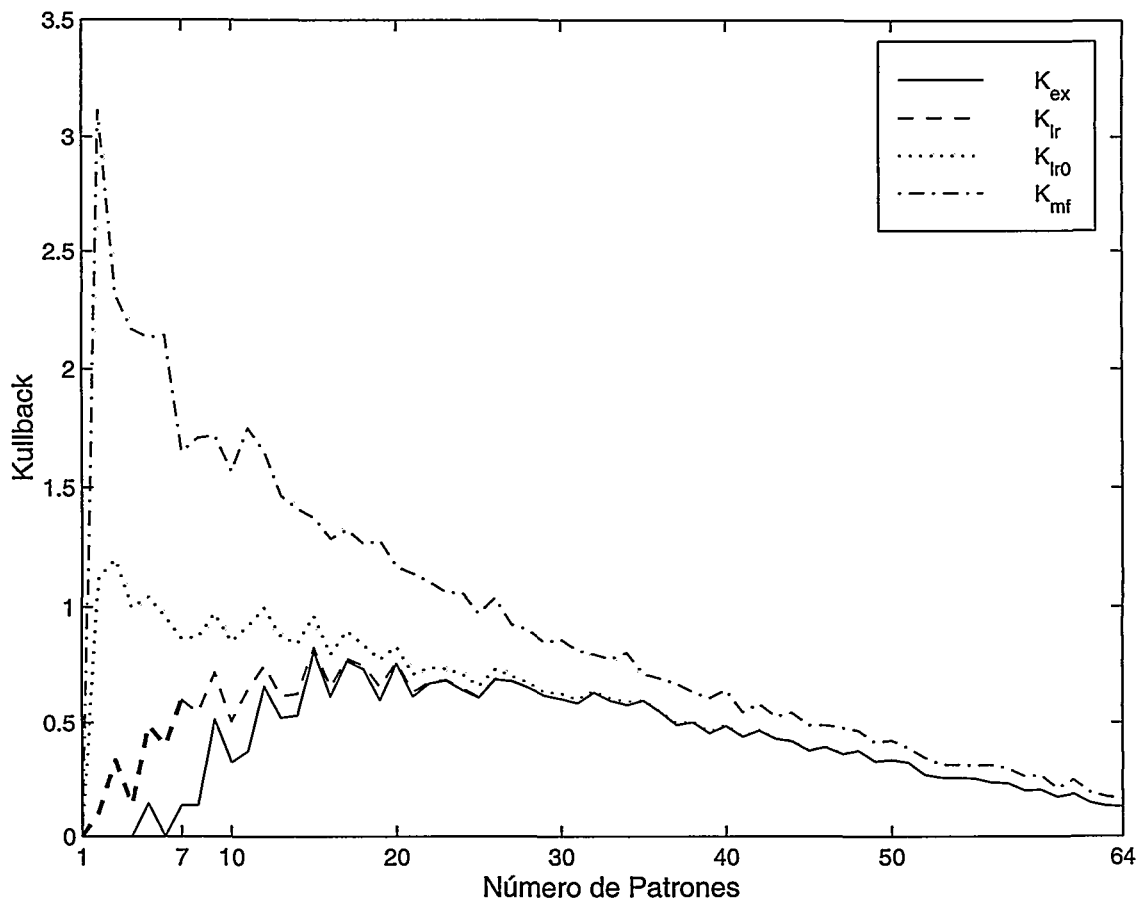


Figura 4.3: Distancia de Kullback media sobre cinco conjuntos aleatorios de datos de entrenamiento. La red está formada por seis neuronas.

4.5 Respuesta Lineal en una Red sin Neuronas Ocultas

Para el caso especial de una red sin unidades ocultas, se pueden hacer simplificaciones significativas. En este caso, los gradientes de la Ecuación 4.7 pueden ser igualados a cero y resolverse directamente en términos de los pesos y umbrales; es decir, no se necesita un aprendizaje basado en el técnicas de descenso por gradiente. Primero haremos notar que $\langle s_i \rangle_c$ y $\langle s_i s_j \rangle_c$ se pueden calcular exactamente para todos los i y j . Así, definimos $C_{ij} = \langle s_i s_j \rangle_c - \langle s_i \rangle_c \langle s_j \rangle_c$.

Las ecuaciones de punto fijo para $\Delta\theta_i$ dan como resultado:

$$\Delta\theta_i = 0 \Leftrightarrow m_i = \langle s_i \rangle_c. \quad (4.34)$$

La ecuación de punto fijo para Δw_{ij} , usando la Ecuación 4.34, da:

$$\Delta w_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ij} = C_{ij}, i \neq j. \quad (4.35)$$

Debido a que hemos introducido n parámetros de auto-acople, debemos especificar n condiciones adicionales. Una elección obvia es asegurarnos de que $\langle s_i^2 \rangle = 1$ sea también cierto en la aproximación de respuesta lineal: $1 = \langle s_i^2 \rangle_{lr} = m_i^2 + A_{ii} \Leftrightarrow A_{ii} = C_{ii}$. Entonces, la Ecuación 4.35 es equivalente a $(A^{-1})_{ij} = (C^{-1})_{ij}$, si C es invertible. Usando la Ecuación 4.25 obtenemos:

$$w_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 - (\langle s_i \rangle_c)^2} - (C^{-1})_{ij} \quad (4.36)$$

De esta manera, resolvemos m_i y w_{ij} directamente de las ecuaciones de punto fijo. Los umbrales θ_i se calculan ahora mediante la siguiente expresión, a través de la Ecuación 4.12:

$$\theta_i = \tanh^{-1}(m_i) - \sum_j w_{ij} m_j \quad (4.37)$$

Hay que tener en cuenta que mediante este método no se requiere iterar las ecuaciones de punto fijo en función de w_{ij} y θ_i , sino que necesitamos realizar el cálculo *inverso* de θ_i , dados m_i y w_{ij} en la Ecuación 4.37. También debemos tener en cuenta que los umbrales dependen igualmente de la diagonal de pesos que hemos introducido en nuestra aproximación. Para ver esto de una manera más clara, en la sección que veremos a continuación aplicaremos nuestra aproximación de respuesta lineal al ejemplo discutido de la Sección 4.2.3.

Sólo nos falta señalar que aunque la elección de los nuevos parámetros fijos es conveniente, se podrían realizar otras elecciones, conduciendo a otras soluciones. La única justificación de nuestra elección es que nos ofrece una solución directa de gran calidad, como mostraremos más adelante en este capítulo.

4.6 Consecuencias de la Aproximación de Respuesta Lineal

En esta sección aplicaremos la aproximación de respuesta lineal a un ejemplo práctico (ejemplo de la Sección 4.2.3), y veremos las consecuencias que se derivan de ello. Así, consideraremos una red formada por dos neuronas. La distribución de probabilidad general para dos neuronas es parametrizada por tres números.

Consideremos el caso simétrico donde $\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle$. Entonces, sólo se necesitan dos parámetros, que podemos elegir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p(+, +) &= \frac{1}{2}(1 + m) - a \\ p(+, -) &= p(-, +) = a \\ p(-, -) &= \frac{1}{2}(1 - m) - a \end{aligned}$$

Los valores m y a están acotados entre los siguientes valores: $0 < a < \frac{1}{2}$ y $2a - 1 < m < 1 - 2a$, asegurándonos así de que todas las probabilidades son positivas. Evidentemente, en esta parametrización del sistema, los valores esperados de los disparos y correlaciones son: $\langle s_1 s_2 \rangle = 1 - 4a$ y $\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle = m$. Así, para el caso especial discutido en la Sección 4.2.3, los valores de estos parámetros son $m = a = 0$. Por tanto, la matriz C que definimos en la sección anterior quedará de la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} 1 - m^2 & 1 - 4a - m^2 \\ 1 - 4a - m^2 & 1 - m^2 \end{pmatrix}$$

De la Ecuación 4.36, aplicando la corrección de respuesta lineal, podemos sacar directamente los pesos para ajustar la distribución objetivo de nuestro problema:

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-m^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-m^2} \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} m^2 - 1 & 1 - 4a - m^2 \\ 1 - 4a - m^2 & m^2 - 1 \end{pmatrix}}{(1 - 4a - m^2)^2 - (1 - m^2)^2} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-m^2} - \frac{m^2-1}{(1-4a-m^2)^2-(1-m^2)^2} & -\frac{1-4a-m^2}{(1-4a-m^2)^2-(1-m^2)^2} \\ -\frac{1-4a-m^2}{(1-4a-m^2)^2-(1-m^2)^2} & \frac{1}{1-m^2} - \frac{m^2-1}{(1-4a-m^2)^2-(1-m^2)^2} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{8a-1+2a+m^2} \begin{pmatrix} \frac{-1+4a+m^2}{m^2-1} & 1 \\ 1 & \frac{-1+4a+m^2}{m^2-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los umbrales se calculan mediante la Ecuación 4.37 en función de los pesos que hemos obtenido.

Por otra parte, podemos calcular los pesos y umbrales óptimos, usando el método exacto, para el caso de dos neuronas con $w_{12} = w_{21} = w$ y $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Así, colocando $\Delta w_{ij} = y$ y $\Delta \theta_i = 0$ en la Ecuación 4.7, obtenemos mediante las Ecuaciones 4.8, 4.4, 4.5:

$$\langle s_i \rangle_c = \langle s_i \rangle = m = \frac{e^{w+2\theta} - e^{w-2\theta}}{e^{w+2\theta} + 2e^{-w} + e^{w-2\theta}}$$

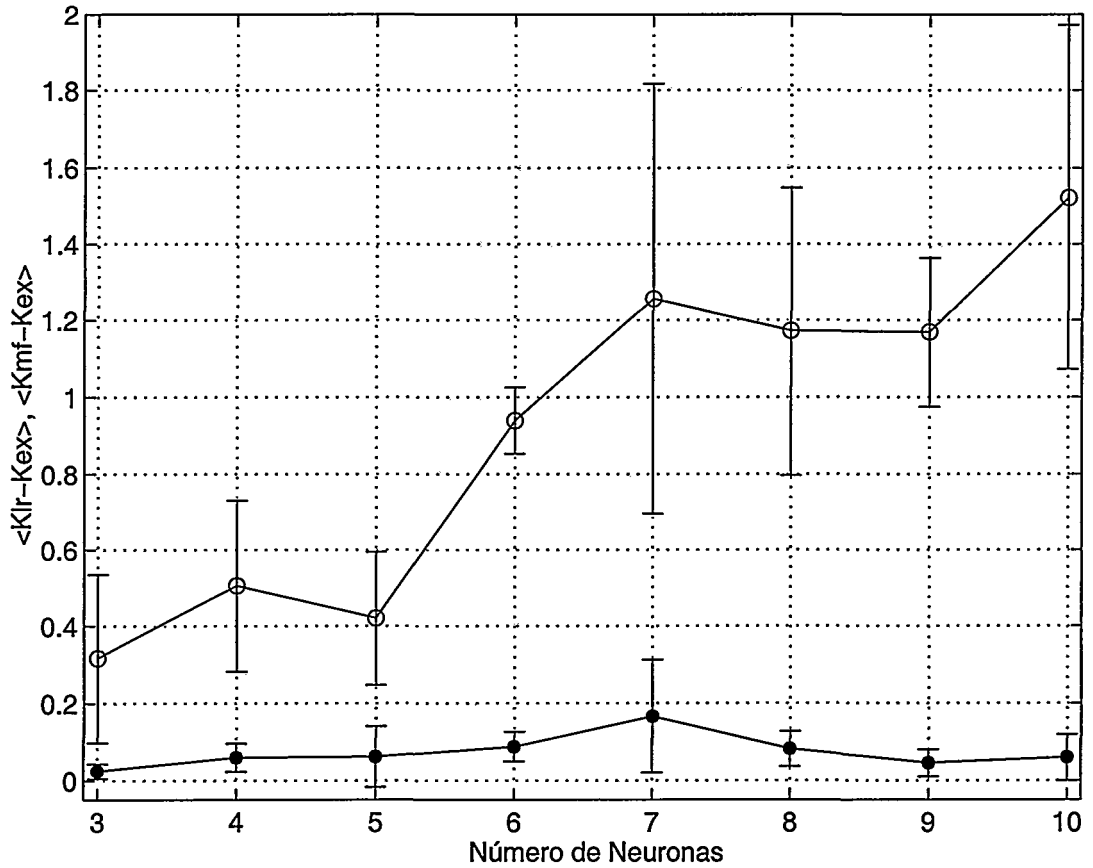


Figura 4.4: Distancia de Kullback relativa al método exacto para la aproximación de campo medio (circunferencias) y el método de corrección de respuesta lineal con auto-acople (círculos). El número de patrones es $p = 2n$. Los resultados son los promedios de las distancias de Kullback sobre cuatro conjuntos de datos escogidos aleatoriamente. Las barras de error representan la varianza o dispersión de esos conjuntos de datos.

$$\langle s_i s_j \rangle_c = \langle s_i s_j \rangle = 1 - 4a = \frac{e^{w+2\theta} - 2e^{-w} + e^{w-2\theta}}{e^{w+2\theta} + 2e^{-w} + e^{w-2\theta}} \quad (4.38)$$

y, por consiguiente, los pesos y umbrales calculados por el método exacto serán la solución del sistema de ecuaciones anterior, que da las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4} \log \frac{a^2}{(-1 + 2a)^2 - m^2} \\ \theta &= \frac{1}{4} \log \frac{-1 - m + 2a}{-1 + m + 2a} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Las diferencias del método exacto con nuestro método de respuesta lineal son

ilustradas en la Figura 4.2, para $m = 0.1$ y $m = 0.5$. Se puede observar en dicha figura que la aproximación de respuesta lineal es muy buena cuando los pesos óptimos son pequeños. Para pesos grandes, la distancia entre los dos métodos se incrementa.

4.7 Resultados Utilizando la Divergencia de Kullback

En esta sección compararemos la precisión de la corrección de respuesta lineal, con y sin el término de auto-acople, con el método exacto y con el modelo factorizado que ignora las correlaciones (aproximación de campo medio). Nos limitaremos a redes que no tienen unidades ocultas. Por supuesto, sabemos que existen muchos problemas de estimación de probabilidades, para los que las MB's sin unidades ocultas son una pobre estimación. Sin embargo, nuestro objetivo es saber si la corrección de respuesta lineal da una buena aproximación a la solución óptima, y si la solución óptima es buena o mala.

La forma correcta de comparar nuestro método con el método exacto es por medio de la divergencia de Kullback. No obstante, esta comparación sólo puede establecerse para redes neuronales de pocas unidades. La razón de esto es que el cálculo de la divergencia de Kullback requiere que computemos la distribución de Boltzmann (ver Ecuación 4.4) que, como ya sabemos, necesita un tiempo exponencial debido a la computación de la función de partición Z . Así, como ya habíamos comentado anteriormente, el método exacto de aprendizaje requiere un tiempo exponencial, computacionalmente hablando, en el número de unidades n . La comparación de problemas mediante la divergencia o distancia de Kullback, es nuestro objetivo en esta sección.

Para la computación del método exacto (*ex*) hemos utilizado los métodos de gradientes conjugados [Hertz et al., 1991] y [Press et al., 1992] para el proceso de aprendizaje. El cálculo de los disparos medios y correlaciones es efectuado siguiendo las Ecuaciones 4.8. Para el método de respuesta lineal sin el término de auto-acople (*lr0*), hemos resuelto las Ecuaciones 4.35 de punto fijo, para $i \neq j$, utilizando el método de resolución de ecuaciones de Levenberg-Marquardt [Levenberg, 1944], [Marquardt, 1963] y [Press et al., 1992]. La matriz A se calcula mediante la Ecuación 4.25 con $w_{ii} = 0$. Sin embargo, para el método de respuesta lineal con el término de auto-acople (*lr*), hemos utilizado las Ecuaciones 4.36 y 4.37 para calcular los pesos y umbrales, respectivamente. Este método se puede aplicar cuando el determinante de la matriz C es mayor que cero. Pero cuando $\det(C) = 0$ hemos resuelto las Ecuaciones 4.35 de punto fijo, para todo i y j , utilizando el método de resolución de ecuaciones de Levenberg-Marquardt. La matriz A es calculada mediante la Ecuación 4.25 con w_{ii} como parámetros libres.

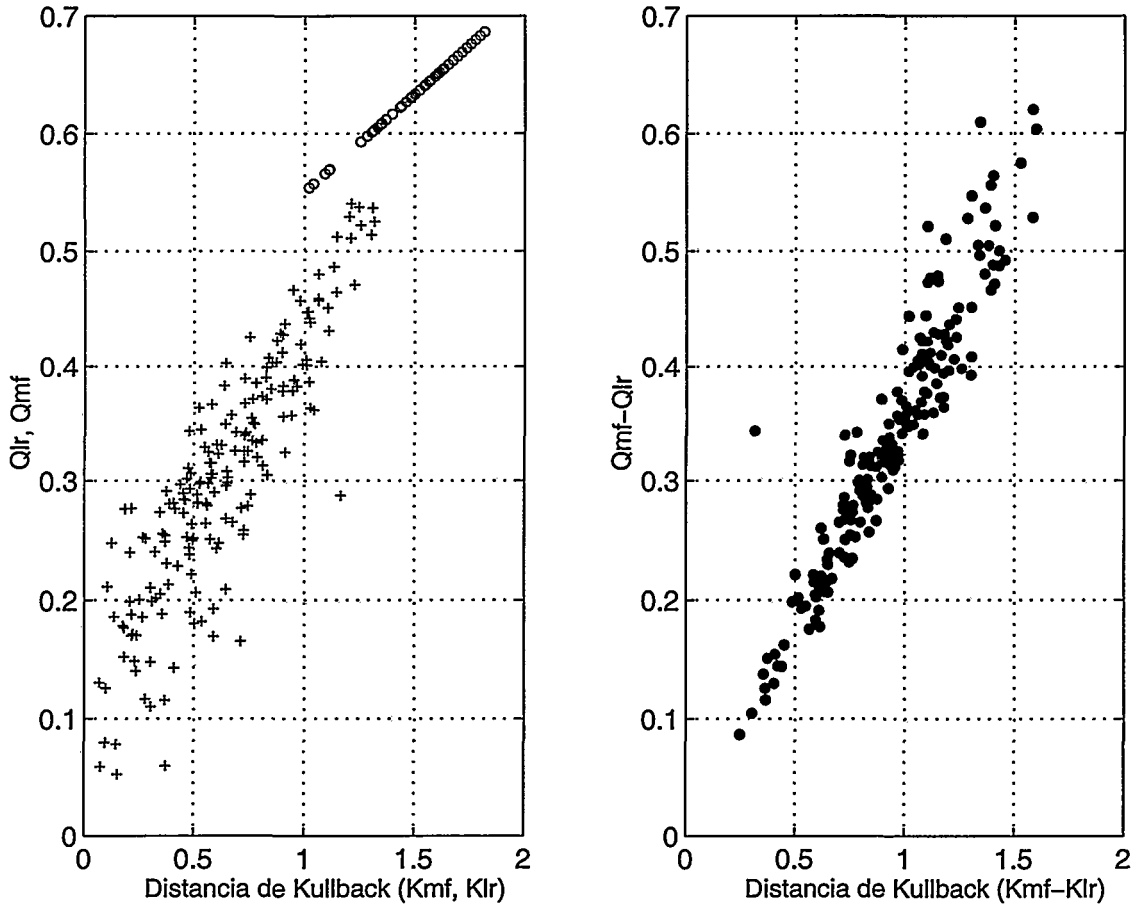


Figura 4.5: Variación de la calidad de recuperación de patrones Q con respecto a la divergencia de Kullback, para 200 conjuntos de datos de 6 neuronas. Cada conjunto de datos tiene 10 patrones. En el gráfico de la izquierda los signos “+” representan los resultados por el método de respuesta lineal, y los símbolos “o” son los cálculos para la aproximación de campo medio. En el gráfico de la derecha se presentan las diferencias relativas de las dos calidades de respuesta lineal y campo medio ($Q_{mf} - Q_{lr}$), frente a las diferencias de las dos distancias de Kullback ($K_{mf} - K_{lr}$), para los mismos conjuntos de datos.

En el caso del modelo factorizado, asumimos que es de la siguiente forma (ver Apéndice D):

$$p_{mf}(\vec{s}) = \prod_i \frac{1}{2} (1 + s_i m_i), \quad (4.40)$$

siendo los disparos medios dados por $m_i = \langle s_i \rangle_c$. Los cuatro métodos son comparados entre ellos mediante la divergencia de Kullback a través de la Ecuación 4.6.

Podemos observar en la Tabla 4.2 el resultado de la distancia de Kullback

Divergencia de Kullback

p	n	K_{ex}	K_{lr}	K_{mf}
12	4	0.0258	0.0880	0.2853
8	4	0.0918	0.1471	0.6014
7	4	0.0013	0.0785	0.6164
5	4	0.0001	0.0288	0.8903
25	5	0.18908	0.18909	0.2601
11	5	0.3007	0.3536	0.8841
8	5	0.2104	0.2699	0.9265
9	5	0.1774	0.1914	0.7904
38	6	0.0311	0.0754	0.4584
12	6	0.0000	0.0216	1.4474
12	6	0.0000	0.0173	1.6573
10	6	0.0000	0.0474	1.8563

Tabla 4.2: Divergencia de Kullback para el método exacto, respuesta lineal y campo medio, con diferentes patrones y tamaño de la red neuronal.

para algunos conjuntos de datos generados aleatoriamente, variando el número de patrones y tamaño de la red. Claramente se desprende de dicha tabla, que el método que se aproxima mejor a la solución exacta es la corrección de respuesta lineal. Debemos hacer notar que para el método exacto hay problemas en los que la distancia de Kullback no es cero, debido a que las redes que elegimos no tienen unidades ocultas, pero como ya apuntamos anteriormente, estamos interesados en cómo de cercanas resultan nuestras soluciones respecto al método exacto, y no si éste aproxima bien la distribución de probabilidad objetivo. De la diferencia entre K_{ex} y K_{mf} podemos ver que para todos los conjuntos de datos elegidos, la suposición de campo medio (ver Ecuación 4.13) es claramente incumplida.

En la Figura 4.3 presentamos los resultados para los cuatro métodos comentados anteriormente, para una red de seis neuronas. El número de patrones va variando de $p = 1$ a $p = 64$. Para cada p se generaron cinco conjuntos de patrones aleatorios. A cada uno de los p patrones del conjunto de datos de aprendizaje, se le ha asignado una probabilidad aleatoria, de tal forma que la probabilidad total de los patrones suma 1. El método lr utiliza minimización mediante Levenberg-Marquardt para el número de patrones comprendido en el rango $2 \leq p \leq 6$. Para los métodos $lr0$ y lr , en el rango $2 \leq p \leq 6$, observamos que aproximadamente en un 10% de los casos en los que generamos los conjuntos de patrones, las ecuaciones de punto fijo no podían ser resueltas. Esto puede suceder debido a que las ecuaciones son aproximaciones a los verdaderos gradientes, y no tienen por qué tener soluciones de punto fijo. Esos casos fueron eliminados del cálculo del promedio de la divergencia de Kullback en la Figura 4.3. En la misma figura podemos observar que el método exacto aproxima bastante bien ($K = 0$) la distribución objetivo, para pocos patrones y para $p \rightarrow 2^n$. Para $p = 1$, las correlaciones para la

distribución objetivo están ausentes y, por tanto, todos los métodos producen una distancia de Kullback de cero. Para $p \rightarrow 2^n$, el modelo factorizado se aproxima al modelo exacto. Esto se produce porque la distribución objetivo llega a ser más o menos constante sobre todos los patrones y, por tanto, las correlaciones desaparecen en una distribución de probabilidad constante. Las tareas más difíciles de aprendizaje se presentan para números de patrones (p) bajos e intermedios. La diferencia entre K_{mf} y K_{ex} demuestra claramente que las correlaciones juegan un papel importante, y no se pueden despreciar como hace el modelo factorizado. Las soluciones de respuesta lineal con y sin el término de auto-acople ofrecen una mejora significativa. No obstante la corrección de respuesta lineal con el término de auto-acople da una mejor aproximación. En el resto de nuestros estudios sólo consideraremos respuesta lineal con el término de auto-acople.

En la Figura 4.4 comparamos la calidad de los diferentes métodos respecto al método exacto, cuando vamos variando el número de neuronas de la red, de tres a diez neuronas. Para cada tamaño de red, el conjunto de datos de entrenamiento ha sido generado aleatoriamente con un número de patrones $p = 2n$. Cada valor de la neurona $s_i^\mu = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, p$, es generado aleatoriamente e independientemente con igual probabilidad. Para cada conjunto de datos calculamos $K_{lr} - K_{ex}$ y $K_{mf} - K_{ex}$. En la figura, mostramos esos valores promediados sobre todos los conjuntos de datos, así como su dispersión. En ella vemos claramente que de la diferencia de K_{ex} y K_{mf} se vuelve a desprender que las correlaciones juegan un papel bastante importante. El método de respuesta lineal a menudo es bastante cercano al resultado exacto, y la calidad de la aproximación no se deteriora con el incremento del número de neuronas.

4.8 Comparación Mediante Recuperación de Patrones (Pattern Completion)

En la sección anterior hemos estudiado la precisión de nuestro método en problemas de pocas unidades mediante la divergencia de Kullback. En esta sección nos proponemos extender la comprobación de nuestro modelo a más unidades. En este caso, ya no podemos utilizar la misma medida de la distancia de Kullback, por los problemas que ello conlleva (ver sección anterior). No obstante, podemos aplicar nuestro modelo a un típico problema de recuperación de patrones (*Pattern Completion*) [Hertz et al., 1991]. Ahora la red debe ser capaz de generar el resto de un patrón, cuando sólo se muestra parte de él.

De esta forma, primero entrenamos las redes como lo hemos hecho en el capítulo anterior, como si se tratara de un problema de estimación de probabilidad conjunta (sin distinguir entre salida y entrada). A continuación, medimos la calidad de las diferentes soluciones mediante el cálculo de la cantidad:

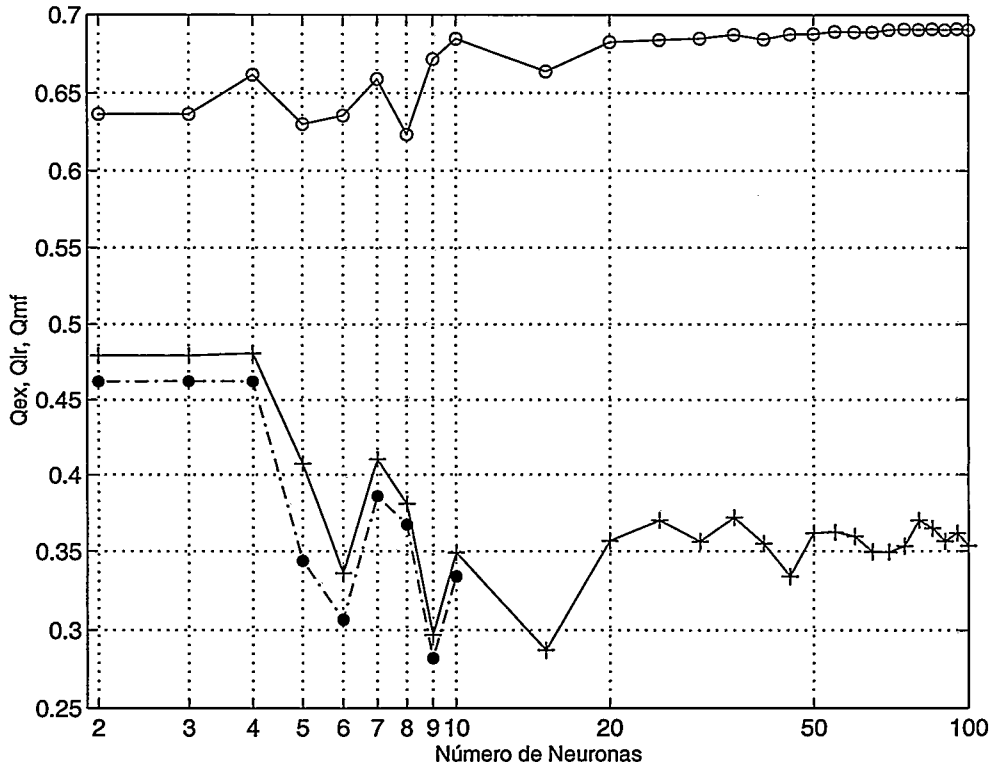


Figura 4.6: Calidad de recuperación de patrones para 27 tipos diferentes de problemas con diferentes números de neuronas. En todos los problemas, el número de patrones es $p = 2n$. Los signos “+” representan la corrección de respuesta lineal (Q_{lr}). Las circunferencias muestran el modelo factorizado de probabilidad (Q_{mf}). Por último, los círculos representan el modelo exacto (Q_{ex}).

$$Q = -\frac{1}{np} \sum_{i\mu} \log(p(s_i^\mu | \tilde{s}_i^\mu)), \quad \tilde{s}_i^\mu = (s_1^\mu, \dots, s_{i-1}^\mu, s_{i+1}^\mu, \dots, s_n^\mu) \quad (4.41)$$

La cantidad $p(s_i^\mu | \tilde{s}_i^\mu)$ es la probabilidad condicional de encontrar la neurona i en el estado s_i^μ , dado que el resto de estados es \tilde{s}_i^μ . Así, podemos medir esta cantidad siguiendo el método exacto (para grupos de pocas unidades), mediante la corrección de respuesta lineal y en la aproximación de campo medio. Es preciso hacer notar que el cálculo de Q es rápido porque no requiere la computación de la función de partición. La probabilidad condicional $p(s_i^\mu | \tilde{s}_i^\mu)$ se calculará de forma diferente dependiendo de con qué método estemos trabajando. Así, con el método exacto y con el de respuesta lineal, se calculará mediante la dinámica de Glauber (ver Ecuaciones 4.1 y 4.2):

$$p(s_i^\mu | \tilde{s}_i^\mu) = \frac{1}{1 + \exp\{-2s_i^\mu h_i^\mu\}}, \quad h_i^\mu = \sum_{j \neq i} w_{ij} s_j^\mu + \theta_i, \quad s_j^\mu = \tilde{s}_j^\mu, \quad (4.42)$$

sustituyendo los pesos y umbrales obtenidos mediante la utilización del método de gradiente conjugado en el método exacto, y los obtenidos mediante el método de Levenberg–Marquardt para respuesta lineal.

En cambio, en la aproximación de campo medio utilizaremos el modelo factorizado de probabilidad, para el cálculo de la probabilidad condicional:

$$p(s_i^\mu | \tilde{s}_i^\mu) = \frac{1}{2}(1 + s_i^\mu \langle s_i^\mu \rangle_c) \quad (4.43)$$

La cantidad Q valorará la calidad de aprendizaje de los tres métodos. Por tanto, debemos decir que valores bajos de Q implican valores bajos de la distancia de Kullback, y valores altos de Q implican valores altos para distancia de Kullback.

Esta relación entre la calidad de recuperación de patrones Q y la distancia Kullback K se muestra en la Figura 4.5. Así, en el gráfico de la izquierda, mostramos que para la aproximación de respuesta lineal y el modelo factorizado por separado, hay una cierta dependencia lineal entre la calidad de recuperación de patrones Q y la distancia de Kullback K . En el gráfico de la derecha, en la misma figura, mostramos para los mismos conjuntos de datos las diferencias de la calidad de recuperación de patrones $Q_{mf} - Q_{lr}$, frente a las diferencias de las distancias de Kullback $K_{mf} - K_{lr}$. De lo expuesto hasta ahora, podemos deducir que si con un método obtenemos una cantidad Q más baja que con otro método, entonces podemos esperar que la divergencia de Kullback también sea más baja.

Por consiguiente, podemos utilizar la relación lineal entre Q y la distancia de Kullback, para testear la corrección de respuesta lineal en redes neuronales con números grandes de neuronas. En la Figura 4.6 mostramos la calidad de recuperación de patrones para los diferentes métodos en función del número de neuronas. El método exacto sólo fue calculado hasta 10 neuronas, debido a los ya conocidos problemas de computación (dependiendo del criterio de parada para el aprendizaje, el método exacto necesita de 10 a 30 minutos en una SPARC 5 para un conjunto de 10 neuronas). Podemos ver que el método de respuesta lineal está muy cercano al método exacto. El valor mucho más alto para la aproximación de campo medio, indica el hecho obvio de que las correlaciones juegan un papel importante en esta tarea de recuperación de patrones. Debemos hacer notar el hecho de que el método de campo medio se aproxima a $Q = \log 2$ para un número elevado de neuronas. Esto es debido a que el método de campo medio asigna a $p(s_i^\mu) \approx \frac{1}{2}$ ($m_i \approx 0$) para todo i y μ .

En la Figura 4.7 se pueden observar las diferencias de tiempo de computación entre el método exacto y el de respuesta lineal. De aquí podemos deducir la eficiencia en computación de nuestro método.

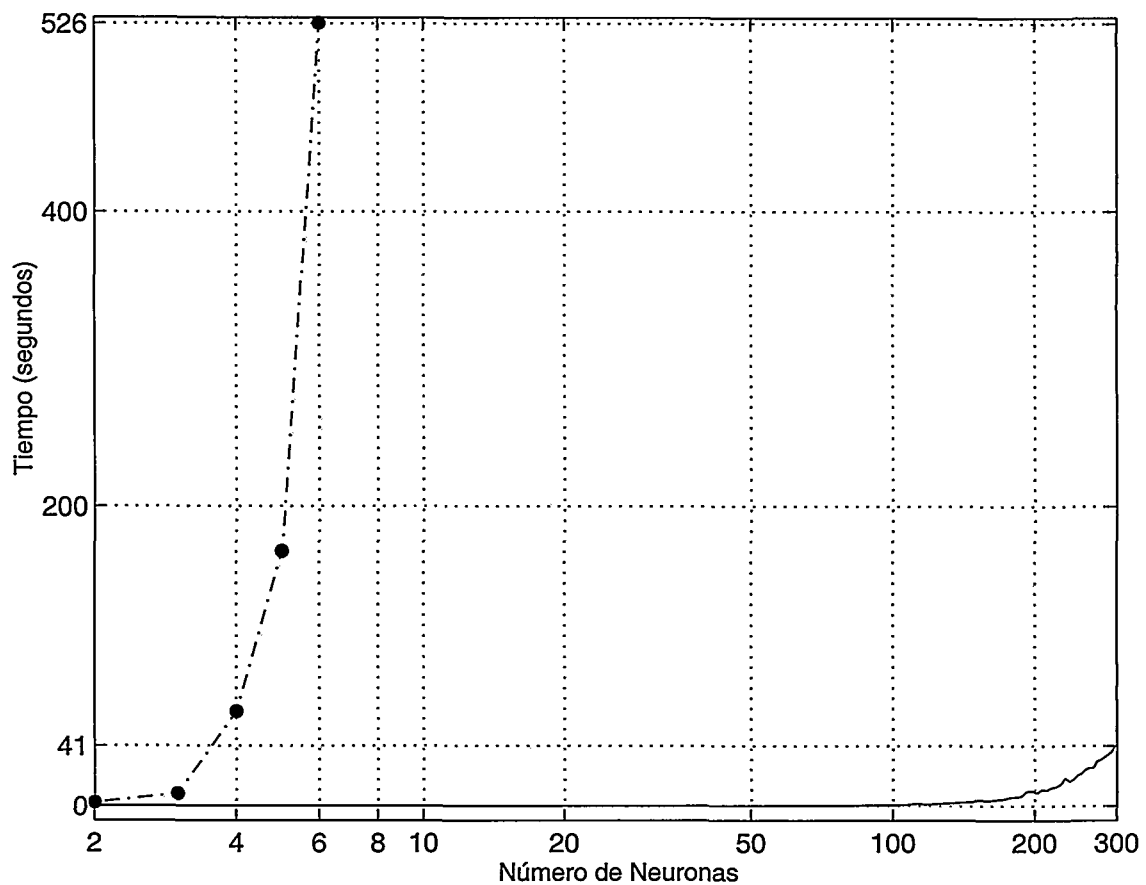


Figura 4.7: Variación del tiempo de computación frente al número de neuronas de la red. El número de neuronas está en escala logarítmica para apreciar mejor las diferencias entre el tiempo de computación por el método exacto (línea entrecortada), y por el método de respuesta lineal (línea continua).

4.9 Comparación Mediante Inferencia Probabilística

En esta sección se presentará un nuevo criterio, basado en procesos de inferencia probabilística aproximada, para probar de nuevo la calidad del aprendizaje mediante la corrección de respuesta lineal.

Las redes neuronales pueden ser entendidas como modelos probabilísticos. Este punto de vista nos conduce a considerar las unidades de la red como variables aleatorias. El formalismo de las MB's es apropiado para esta semántica probabilística. Como ya discutimos anteriormente, el aprendizaje exacto en MB's es impracticable cuando el número de unidades es elevado, pero ya vimos que aplicando la corrección de respuesta lineal a la teoría de campo medio en MB's, se

puede practicar de una forma eficiente el aprendizaje. Este hecho lo podemos aprovechar para realizar procesos de inferencia probabilística, y a través de ella comprobar cuál es la calidad del proceso de aprendizaje mediante la corrección de respuesta lineal.

En la primera sección se introducirá el problema general sobre la inferencia. En la segunda sección se explicará cómo realizar este proceso a través de una red de MB's. En la última sección se presentarán los resultados obtenidos.

4.9.1 Problema General de la Inferencia Probabilística

En el problema general de la inferencia, el objetivo que perseguimos es calcular la distribución de probabilidad de un conjunto de variables, dado que conocemos la distribución de otro conjunto de variables. Para ver esto de una manera más clara, definamos la distribución de probabilidad conjunta siguiente:

$$P(\vec{s}_c, \vec{s}_f, \vec{s}_q)$$

donde \vec{s}_c representa el conjunto de variables que nosotros conocemos (variables fijas), \vec{s}_f es el conjunto de variables que no están fijadas y que no nos interesan (variables libres) y, por último, \vec{s}_q es el conjunto de variables por las que nos preguntamos y queremos calcular su distribución de probabilidad teniendo fijadas las variables \vec{s}_c . Así, nuestra pregunta consistirá en calcular $p(\vec{s}_q|\vec{s}_c)$, que usando la inferencia Bayesiana clásica [Pearl, 1988], se calcula de la siguiente forma:

$$p(\vec{s}_q|\vec{s}_c) = \frac{p(\vec{s}_q, \vec{s}_c)}{p(\vec{s}_c)} \quad (4.44)$$

Para llevar a cabo el proceso de inferencia aproximada mediante la corrección de respuesta lineal, aplicaremos la corrección de respuesta lineal [Kappen y Rodríguez, 1998a], [Kappen y Rodríguez, 1998b] a las MB's para *aprender* una distribución de probabilidad objetivo $q(\vec{s})$ y, posteriormente, usaremos la computación mediante la aproximación de campo medio³, para realizar la inferencia probabilística. Utilizaremos redes neuronales sin unidades ocultas

³Realmente no se realiza la computación estándar dentro del formalismo de campo medio. Esto se debe a que consideramos un término *efectivo* de auto-acople $w_{ii}m_i$. Con la inclusión de este término, se obtiene una solución cerrada para el caso de aprendizaje con MB's sin unidades ocultas, y mejora significativamente los resultados que se obtendrían en ausencia de este término de auto-acople. Así, en este marco, el disparo medio de la unidad i es aproximado por la cantidad m_i ($\langle s_i \rangle \approx m_i$), que es solución de las ecuaciones acopladas $m_i = \tanh \left(\sum_{j \neq i} w_{ij}m_j + w_{ii}m_i + \theta_i \right) = \tanh \left(\sum_j w_{ij}m_j + \theta_i \right)$. Para un mayor detalle, se sugiere al lector que vea las Secciones 4.4, 4.5, y 4.7 de este mismo capítulo. De aquí en adelante, a no ser que se especifique lo contrario, la computación mediante campo medio se realizará mediante esta forma descrita.

y el tamaño del conjunto de variables \vec{s}_q será uno ($|\vec{s}_q| = 1$, $\vec{s}_q = s_q$), por lo tanto siempre nos preguntaremos por una variable conociendo otras variables. La causa de realizar el proceso de inferencia sobre una sola variable utilizando la computación mediante campo medio, se debe a que la corrección de respuesta lineal al disparo medio de una unidad es nula (como vimos anteriormente). Aunque únicamente mostraremos resultados de procesos de inferencia sobre una sola variable, más adelante esbozaremos cómo se podría realizar con dos variables ($|\vec{s}_q| = 2$), y mencionaremos qué tipos de MB's necesitaremos para realizar este proceso de inferencia sobre más variables ($|\vec{s}_q| > 2$).

4.9.2 Proceso de Inferencia Mediante la Corrección de Respuesta Lineal

Como ya hemos indicado anteriormente, para realizar el proceso de inferencia probabilística, en primer lugar debemos ajustar los pesos (w_{ij}) y los umbrales (θ_i) de la red a través del aprendizaje mediante la corrección de respuesta lineal a la aproximación de campo medio ([Kappen y Rodríguez, 1998a], [Kappen y Rodríguez, 1998b]) para aproximar la distribución de probabilidad objetivo $q_{dat}(\vec{s})$. Posteriormente, una vez ajustados los parámetros a través del aprendizaje, estamos dispuestos para realizar el proceso de inferencia. Así, calculamos por medio de la computación de campo medio los disparos medios de la neurona s_q , cuando fijamos el estado de un conjunto de neuronas \vec{s}_c o, lo que es lo mismo, la probabilidad condicional $p(s_q|\vec{s}_c)$. Ahora bien, cuando en la red el conjunto de unidades \vec{s}_c es fijado, los valores esperados de los disparos del resto de las unidades pueden ser recalculados resolviendo el sistema de ecuaciones acopladas de campo medio. La única diferencia es que los umbrales θ_i para el conjunto de unidades \vec{s}_f, s_q reciben una contribución extra de las neuronas fijadas \vec{s}_c . Asumamos que las unidades \vec{s}_c están fijadas en un estado arbitrario α , que denominaremos \vec{s}_c^α . Si además denotamos los disparos medios para el conjunto de unidades \vec{s}_f, s_q por $\langle s_i \rangle_\alpha = m_{i\alpha}$, $i \in (\vec{s}_f, s_q)$, entonces éstos satisfacen las siguientes ecuaciones acopladas de campo medio:

$$m_{i\alpha} = \tanh\left(\sum_{j \in (\vec{s}_f, s_q)} w_{ij} m_{j\alpha} + \sum_{j \in (\vec{s}_c)} w_{ij} s_j^\alpha + \theta_i\right), \quad i \in (\vec{s}_f, s_q) \quad (4.45)$$

Por tanto, debemos resolver el sistema de $|\vec{s}_f| + 1$ ecuaciones de campo medio para calcular las probabilidades condicionales, $p(s_q^\alpha|\vec{s}_c^\alpha)$, que buscamos, y éstas vendrán dadas mediante:

$$p(s_q^\alpha = 1|\vec{s}_c^\alpha) = \frac{1 + m_{i\alpha}}{2}, \quad p(s_q^\alpha = -1|\vec{s}_c^\alpha) = \frac{1 - m_{i\alpha}}{2}, \quad i \in s_q. \quad (4.46)$$

Debemos hacer notar que de la resolución del sistema de ecuaciones acopladas 4.45 sale información que no nos sirve para estimar las probabilidades condicionales por las cuales nos preguntamos, esta información inservible es la dada por todos los $m_{i\alpha}, i \in s_f$.

Proceso de Inferencia con dos Variables

Para realizar la inferencia sobre dos variables ($|\vec{s}_q| = 2$) mediante MB's, necesitamos calcular las correlaciones entre unidades. Evidentemente, para ello utilizaremos la corrección de respuesta lineal al campo medio que ha sido estudiada anteriormente. Así, en la teoría de respuesta lineal (ver [Kappen y Rodríguez, 1998a], [Kappen y Rodríguez, 1998b]) las correlaciones entre unidades se pueden aproximar mediante:

$$\langle s_i s_j \rangle \approx m_i m_j + A_{ij}, \quad A_{ij} = \frac{dm_i}{d\theta_j} = \left(\frac{\delta_{ij}}{1 - m_i^2} - w_{ij} \right)^{-1} \quad (4.47)$$

De nuevo, si fijamos las unidades \vec{s}_c en un estado arbitrario α , y denotamos las correlaciones entre el conjunto de unidades \vec{s}_f, \vec{s}_q por $\langle s_i s_j \rangle_\alpha, i, j \in (\vec{s}_f, \vec{s}_q)$, éstas vendrán determinadas por la siguiente expresión:

$$\langle s_i s_j \rangle_\alpha = m_{i\alpha} m_{j\alpha} + A_{ij\alpha}, \quad (A_\alpha^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 - (m_{i\alpha})^2} - w_{ij}, \quad (4.48)$$

siendo los $m_{i\alpha}$ calculados mediante la Ecuación 4.45, cuando $|\vec{s}_q| = 2$. Así, esta vez debemos resolver un sistema de $|\vec{s}_f| + 2$ ecuaciones, del que nuevamente se obtendrá información que no nos sirve, $m_{i\alpha}, i \in s_f$.

Una vez que tenemos calculados los disparos medios y las correlaciones en el conjunto de neuronas \vec{s}_f y \vec{s}_q , el proceso inferencial viene determinado por:

$$\begin{aligned} p(\vec{s}_q^\alpha = 1, 1 | \vec{s}_c^\alpha) &= \frac{1 - \alpha_1 + \alpha_2 + \beta}{4}, \\ p(\vec{s}_q^\alpha = 1, -1 | \vec{s}_c^\alpha) &= \frac{1 + \alpha_1 - \alpha_2 - \beta}{4}, \\ p(\vec{s}_q^\alpha = -1, 1 | \vec{s}_c^\alpha) &= \frac{1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \beta}{4}, \\ p(\vec{s}_q^\alpha = -1, -1 | \vec{s}_c^\alpha) &= \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta}{4}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Los valores α_1 y α_2 son los disparos medios del conjunto de neuronas \vec{s}_q dados por la Ecuación 4.45. Y la cantidad β es la correlación entre las dos variables sobre la que se realiza el proceso inferencial, \vec{s}_q , que se calcula mediante la Ecuación 4.48.

Proceso de Inferencia para más de dos Variables

Podemos ir incluso más lejos en el proceso de inferencia con MB's sobre conjuntos de variables mayores que dos. Para ello, una primera solución sería recurrir a las Máquinas de Boltzmann de alto orden⁴, debido a que en éstas tenemos correlaciones de alto orden. Evidentemente, se puede aplicar la teoría de respuesta lineal para el cálculo de estas correlaciones [Leisink y Kappen, 1998], y así realizar el proceso de inferencia. No obstante, el recurso de las Máquinas de Boltzmann de alto orden, no tiene por qué ser la única solución para realizar la inferencia probabilística sobre más de dos variables.

4.9.3 Resultados

Podemos aproximar dos modelos de probabilidad para la probabilidad condicional $p(s_q|\vec{s}_c)$. Uno de esos modelos será calculado por el método de inferencia explicado anteriormente. El otro será calculado por el modelo de probabilidad que se obtiene de una Máquina de Boltzmann. Estos dos modelos se compararán con el modelo de probabilidad condicional de los datos que estamos ajustando. Recordemos que el modelo de probabilidad de una Máquina de Boltzmann está determinado por las Ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5. Así, para este caso, ajustaremos los pesos (w_{ij}) y umbrales (θ_i) de la red utilizando el método exacto de aprendizaje, minimizando la energía mediante la técnica de gradientes conjugados [Hertz et al., 1991, Press et al., 1992], para poblaciones pequeñas de neuronas. Evidentemente, como ya sabemos, el método exacto se puede calcular sólo para pequeños números de neuronas, debido a la complejidad computacional que éste involucra (ver Sección 4.2.2). Sin embargo, cuando el número de unidades es elevado, para calcular el aprendizaje podemos recurrir a las conocidas técnicas estadísticas de Monte Carlo. En nuestro modelo, la variedad más apropiada del método de Monte Carlo es la conocida técnica de *Gibbs sampling* [Neal, 1993]. El hecho de estudiar otra vez los problemas de conjuntos pequeños de unidades, en los que sí es efectivo el aprendizaje exacto, es para tener una idea de cómo depende la distancia de Kullback respecto al proceso de inferencia. Así, podemos esperar que se mantenga esta relación o dependencia en redes de más unidades, cuando nos es imposible calcular la distancia de Kullback.

Cuantificación de los resultados

Como es habitual, utilizaremos la distancia de Kullback para medir la calidad del aprendizaje, $K(p_{ex}, q_{dat})$ para el método exacto y $K(p_{tr}, q_{dat})$ para la corrección de respuesta lineal.

⁴Las máquinas de Boltzmann de alto orden son aquéllas en las que no solamente se considera el primer y segundo orden de interacción, $\langle s_i \rangle$ y $\langle s_i s_j \rangle$, sino también se tienen en cuenta el tercer y más altos ordenes de interacción, $\langle s_i s_j s_k \rangle \dots$ etc.

Viendo la naturaleza del problema de probabilidades condicionales, optamos por utilizar una cantidad que denominamos *distancia de Kullback condicional* (ver Capítulo 2 de [Deco y Obradovic, 1996]), que mide la diferencia o distancia entre las distribuciones $p(s_q|\vec{s}_c)$ y $q(s_q|\vec{s}_c)$:

$$K_c(p(s_q|\vec{s}_c), q(s_q|\vec{s}_c)) = K_c(p^c, q^c) = \sum_{\vec{s}_c} q(\vec{s}_c) \sum_{s_q} q(s_q|\vec{s}_c) \log \frac{q(s_q|\vec{s}_c)}{p(s_q|\vec{s}_c)}, \quad (4.50)$$

siendo esta cantidad el criterio para cuantificar la calidad del proceso de inferencia.

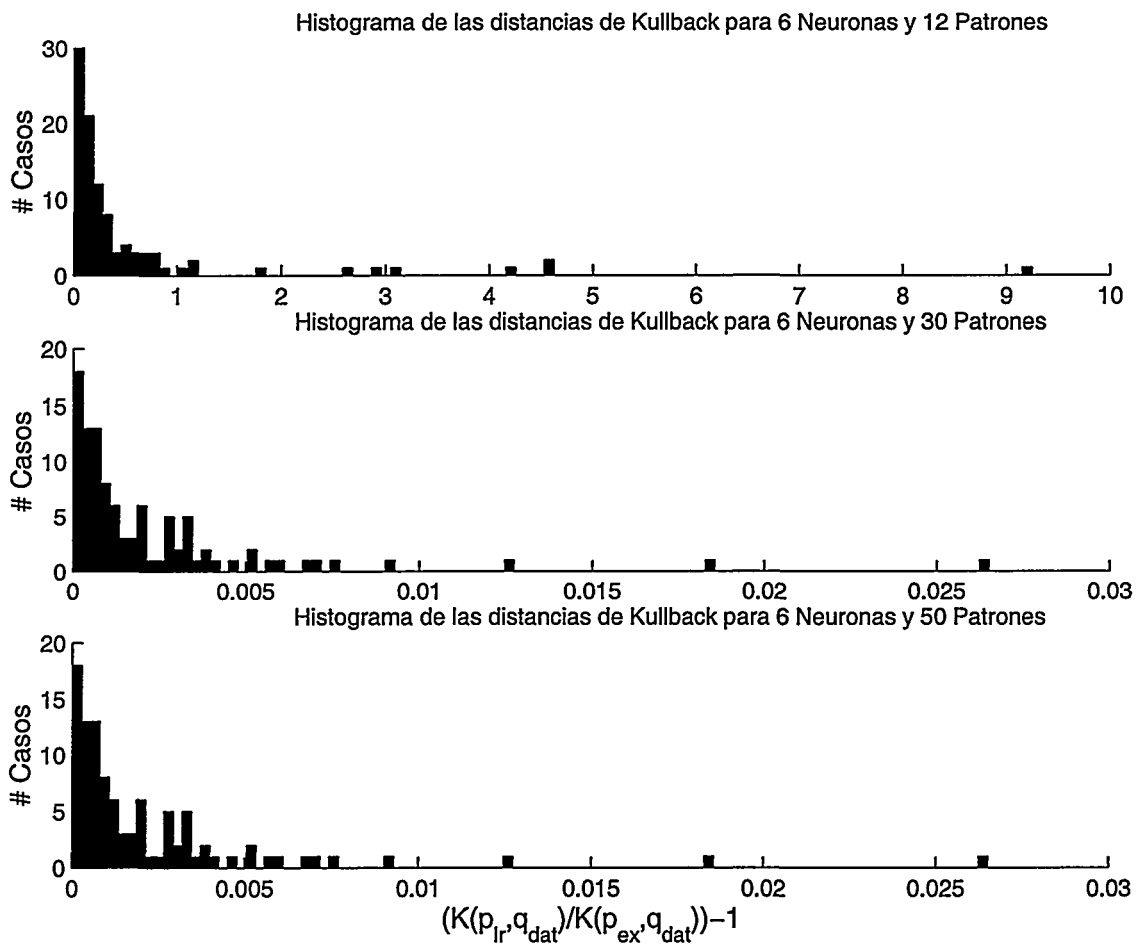


Figura 4.8: Histogramas de los cocientes de las distancias de Kullback para aprendizaje de MB's en los métodos exactos y de respuesta lineal. Cada histograma es calculado para cien conjuntos de datos aleatorios, en una red de seis neuronas conectadas totalmente y variando el tamaño de los datos (número de patrones de aprendizaje). A cada patrón de aprendizaje se le asigna una probabilidad aleatoriamente, de tal forma que la suma de todas las probabilidades en el conjunto de datos sea uno.

Como ya habíamos comentado, el proceso de inferencia puede ser calculado exactamente mediante el modelo de probabilidad de una MB para s_q , dado que conocemos el vector de variables \vec{s}_c (lo denominaremos p_{ex}^c), y mediante la aproximación de respuesta lineal a través de la Ecuación 4.46 (lo denominaremos p_{lr}^c). Así, la Ecuación 4.50 nos dará una medida de cuál es la calidad en el proceso de inferencia, midiendo las diferencias de las distribuciones de probabilidad condicionales del modelo exacto y de respuesta lineal p_{ex}^c y p_{lr}^c , frente a la distribución condicional objetivo q_{dat}^c .

Es importante hacer notar el hecho de que la calidad del proceso de inferencia depende directamente de la calidad del proceso de aprendizaje. Por esta razón, primero queremos enfatizar que la distribución de densidad de la magnitud $(K(p_{ex}, q_{dat})/K(p_{lr}, q_{dat}) - 1)$ para problemas de probabilidad escogidos al azar, está muy cercana al valor cero y depende del tamaño de nuestros datos (número de patrones). En la Figura 4.8 representamos histogramas de esta cantidad para redes de seis neuronas y para diferentes números de patrones. Cada histograma se formó con cien conjuntos de datos aleatorios, a los que se les asoció una probabilidad aleatoria, de tal forma que la suma de todo el conjunto de datos estuviese normalizada. Se puede observar en esta figura que los histogramas de la distribución de los cocientes de las distancias de Kullback se sitúan preferentemente alrededor de cero, cuanto mayor es el número de patrones para el aprendizaje. Como ya sabemos, esto se debe al hecho de que según el número de patrones se acerca a la cantidad 2^n (siendo n el número de neuronas), entonces la distribución objetivo se hace constante sobre el número de patrones. En consecuencia, cuando la distribución de probabilidad es constante, las correlaciones se hacen nulas.

Comparación para Poblaciones Pequeñas de Neuronas

En esta sección vamos a ver cuáles son los resultados derivados del método de inferencia propuesto para redes de MB's con las que se puede calcular la inferencia exactamente (pocas neuronas), en relación al proceso de aprendizaje. Así, en la Figura 4.9 comparamos la ejecución de los dos métodos de inferencia mediante las distancias de Kullback condicionales para ambos.

Debemos hacer notar el hecho de que en el caso de $|s_c| = 0, 1$, las distancias Kullback condicionales para los dos métodos deben ser cero. Esto se debe a que el proceso de aprendizaje sin unidades ocultas de MB's alcanza la convergencia cuando las correlaciones libres son iguales a las correlaciones de la distribución objetivo. Sin embargo, en el segundo problema de la Figura 4.9 se observa que $K^c(p_{lr}^c, q_{dat}^c) \neq 0$. Esto es así porque hemos computado esta distancia de Kullback condicional mediante las Ecuaciones 4.45 y 4.46, en vez de con las correlaciones exactas que obtenemos con el proceso de aprendizaje. Este hecho nos puede dar una idea de cómo de exacto es nuestro método de inferencia. Como era de esperar, uno se da cuenta observando la misma figura, que la calidad del proceso de inferencia depende de cómo de óptimo es el proceso de aprendizaje, tanto en

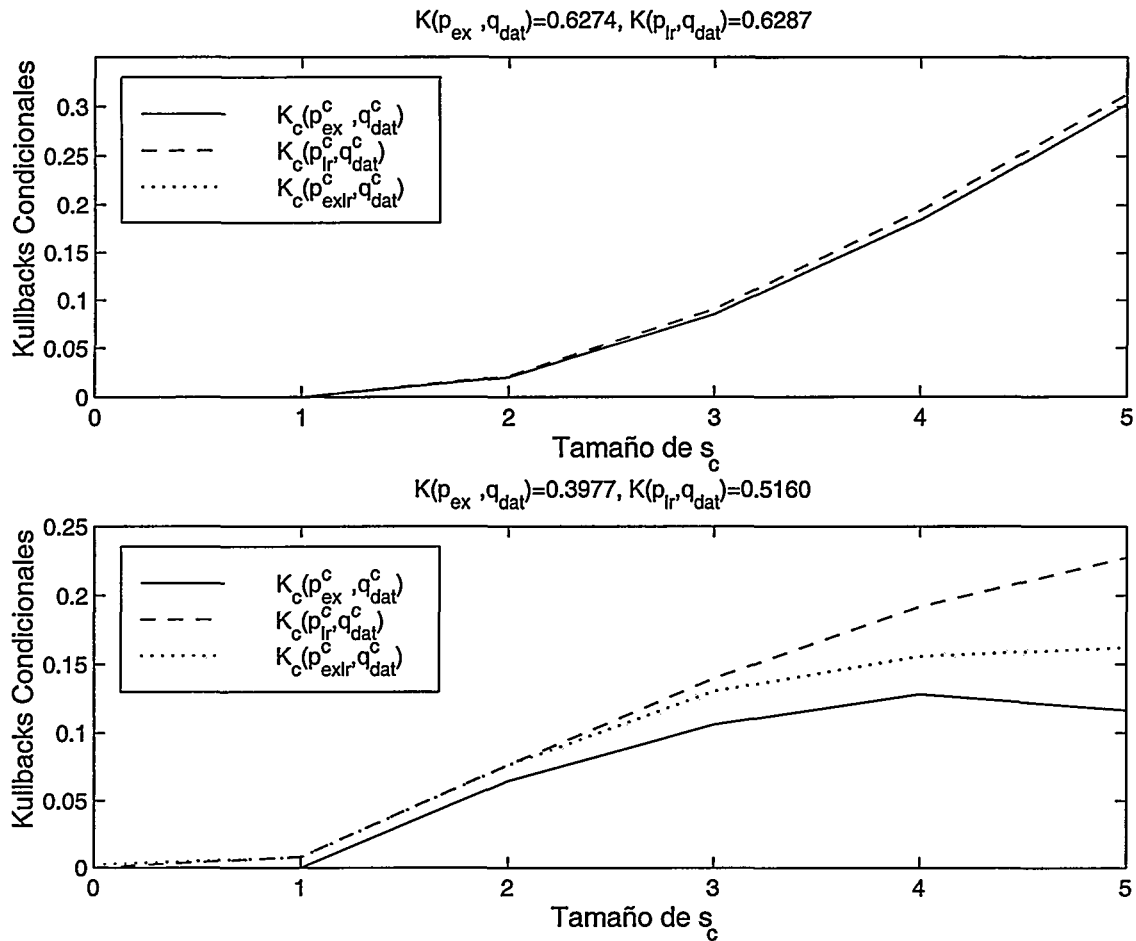


Figura 4.9: Distancias de Kullback condicionales para dos problemas aleatorios de seis neuronas. El primer problema se ha escogido de tal forma que la calidad de aprendizaje es similar tanto para el aprendizaje exacto como para el aprendizaje con la aproximación de respuesta lineal. Sin embargo, para el segundo problema seleccionado esta diferencia es bastante notable. En los dos problemas hemos realizado veinte inferencias aleatorias, mostrando únicamente el promedio de las mismas.

el método exacto como en la aproximación de respuesta lineal. También se puede observar en la Figura 4.9 que, según vamos aumentando el tamaño de s_c , la calidad de la inferencia se va deteriorando debido a que va aumentando la importancia de las correlaciones de orden más alto en MB's [Leisink y Kappen, 1998].

Las diferencias entre $K^c(p_{ex}^c, q_{dat}^c)$ y $K^c(p_{lr}^c, q_{dat}^c)$ se deben a dos contribuciones: una de ellas es la propia aproximación de respuesta lineal, que se utiliza en el proceso de aprendizaje previo al método de inferencia; la otra es el propio método que se utiliza para realizar el proceso de inferencia explicado anteriormente. Podemos darnos cuenta de que esta diferencia se acrecienta cuanto mayor es la diferencia de calidades en los procesos de aprendizaje.

Las dos contribuciones de las diferencias entre $K^c(p_{ex}^c, q_{dat}^c)$ y $K^c(p_{lr}^c, q_{dat}^c)$ quedan vigentes mediante lo que explicamos a continuación. Podemos utilizar los pesos y umbrales que obtenemos del aprendizaje por medio de respuesta lineal, meterlos en el modelo de probabilidad dado por una MB, y ejecutar el proceso de inferencia mediante este modelo de probabilidad. De esta forma, deberíamos eliminar el error debido al método de inferencia. Mostramos estos resultados también en la Figura 4.9, y lo denominamos $K^c(p_{lrex}^c, q_{dat}^c)$. Podemos observar que esta cantidad no se diferencia de la distancia Kullback condicional dada por el método exacto, cuando las calidades de los dos aprendizajes son iguales (primer problema de la Figura 4.9). Sin embargo, no pasa lo mismo cuando la calidad de los dos aprendizajes difiere (segundo problema de la Figura 4.9).

La Figura 4.9 es representativa de otras muchas simulaciones que se realizaron. De todos estos resultados se desprende que cuando las distancias de Kullback para el modelo exacto de probabilidad y para la corrección de respuesta lineal no difieran, las distancias de Kullback condicional tampoco lo harán. Por tanto, podemos utilizar la distancia de Kullback condicional para medir la calidad de proceso de aprendizaje.

Por último, sólo destacar en la misma figura, que el primer problema es un caso típico de cuando el número de patrones está cercano a 2^n (siendo n el número de neuronas), donde las distancias de Kullback para los procesos de aprendizaje tanto exacto como de respuesta lineal son similares. Sin embargo, no pasa lo mismo con el segundo problema, en el que la diferencia de las dos distancias de Kullback es notable.

Comparación para Poblaciones Grandes de Neuronas

En esta sección, para calcular el proceso de inferencia por el método exacto utilizamos técnicas estadísticas de Monte Carlo (*Gibbs Sampling*), combinadas con procesos de *Annealing*, para calcular las correlaciones libres en el procedimiento de descenso por gradiente, que utilizamos para el aprendizaje. Así, para cada paso del procedimiento de descenso por gradiente, necesitamos calcular las correlaciones libres y compararlas con las correlaciones de los datos, haciendo la variación adecuada en los parámetros de la red para ajustar éstas y así llevar a cabo el aprendizaje.

En este caso, debido al tamaño del conjunto de neuronas, no se puede calcular la distancia de Kullback para medir la calidad del proceso de aprendizaje. Esto es debido a que para calcular esta magnitud, se debe hacer un sumatorio de todos los estados del sistema. Lo que sí se puede hacer es calcular la distancia de Kullback condicional para procesos de inferencia, ya que los sumatorios se realizan sobre el tamaño de \vec{s}_c (ver Ecuación 4.50). También utilizamos técnicas estadísticas de Monte Carlo para calcular $p(s_q|\vec{s}_c)$ por el método exacto. Después del proceso de aprendizaje mediante *Gibbs Sampling*, lo que hacemos es fijar el sistema con el vector \vec{s}_c y calcular estadísticamente en qué estado se encuentra s_q , de nuevo a

través de la dinámica de Glauber.

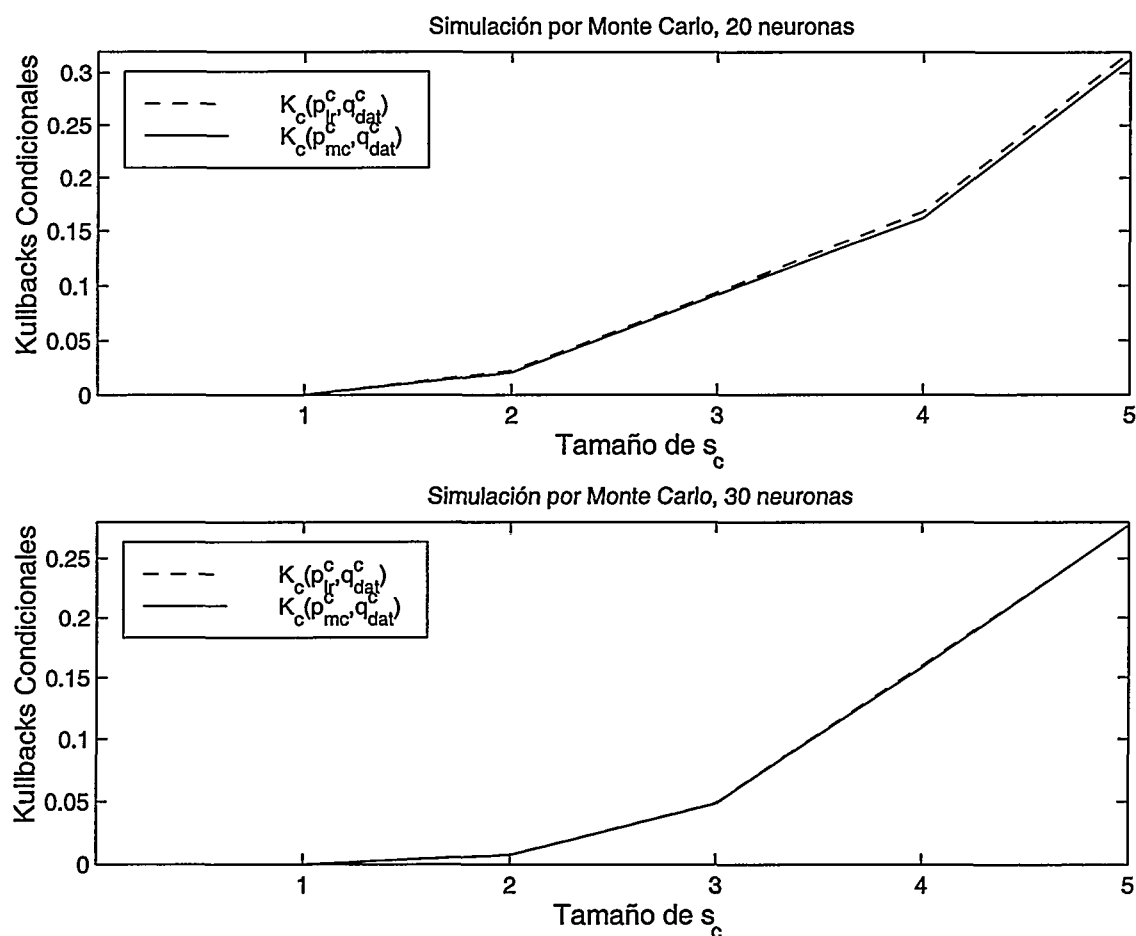


Figura 4.10: Distancias de Kullback condicionales para el método exacto calculados mediante simulaciones de Monte Carlo, y para la aproximación de respuesta lineal. Se han elegido dos problemas aleatorios de veinte y treinta neuronas, siendo el número de patrones el doble que el de neuronas en ambos problemas. En ambos ejemplos el número de inferencias realizadas son diez seleccionadas aleatoriamente, mostrándose en los gráficos únicamente el promedio de las mismas.

En la Figura 4.10 mostramos el proceso de inferencia para dos conjuntos diferentes de neuronas, tanto por medio del método exacto como por medio de la aproximación de respuesta lineal. Podemos ver en ambos ejemplos que los dos procesos de inferencia están bastante cercanos. Esto es una prueba más de la efectividad del método de aprendizaje a través de la corrección de respuesta lineal. No obstante, debemos hacer notar el hecho de que el cálculo por medio del método exacto tiene error en este tipo de problema, ya que los parámetros calculados mediante el proceso de aprendizaje tienen el error que se deriva de las simulaciones de Monte Carlo. El error que hemos elegido para calcular las correlaciones libres es del orden de 10^3 , esto significa que al menos debemos dejar

10^6 pasos de evolución en la dinámica de Glauber de las MB's, multiplicado por el intervalo de muestreo, para que las muestras sean independientes y podamos hacer la estadística correctamente. Esto lo debemos hacer para cada paso del descenso por gradiente. Así, podemos deducir que el tiempo necesario es muy grande. A este problema del tiempo de computación se le añade el problema de que cuando los gradientes de la regla de aprendizaje alcanzan este orden de error, la convergencia es extremadamente lenta. A este error también se le suma el de la realización de la inferencia utilizando *Gibbs Sampling*. Utilizamos alrededor de cuatro días en una computadora SUN Ultra SPARC 3000 para llevar a cabo el proceso de aprendizaje, y el proceso de inferencia correspondiente para obtener la distancia de Kullback condicional, en el problema de treinta neuronas que mostramos en la Figura 4.10. Hemos verificado que si dejamos evolucionar más tiempo la simulación, el proceso de inferencia con el método exacto mejora, como es de esperar, pero debemos dejar evolucionar una gran cantidad de tiempo este proceso. tenemos que dejar evolucionar mucho la simulación para ello. Los resultados obtenidos por el método exacto dependen por supuesto del tiempo que dejemos evolucionar la simulación, pero llega un momento en el que la convergencia es extremadamente lenta, como ya hemos comentado anteriormente, debido al error de la propia simulación. Sin embargo, lo realmente significativo es el hecho de que para la aproximación de respuesta lineal obtenemos más o menos los mismos resultados en un tiempo notablemente inferior. En el problema de treinta neuronas, hemos utilizado unos pocos segundos en invertir una matriz (proceso de aprendizaje con respuesta lineal), y sobre unos ocho segundos en cada inferencia (resolución de la Ecuación 4.45). En concreto, en el segundo ejemplo de la Figura 4.10, tardamos unos ochenta minutos para llevar a cabo el aprendizaje y todas las inferencias, para todos los tamaños de s_c .

4.10 Conclusiones y Discusión

Hemos propuesto un nuevo y eficiente método para el aprendizaje en Máquinas de Boltzmann. El método se puede aplicar generalmente a redes neuronales con y sin unidades ocultas. Este método hace uso del teorema de respuesta lineal, para calcular las correlaciones dentro del marco de la aproximación de campo medio.

En nuestras simulaciones numéricas nos restringimos a redes neuronales sin unidades ocultas. Creemos que es suficiente para mostrar la ventaja de nuestro método, debido a que los valores esperados *libres* son los que consumen una gran cantidad de tiempo de computación.

Hemos observado numéricamente que la inclusión de un apropiado término de auto-acople es necesario para obtener buenos resultados. Esto posiblemente se mantenga en presencia de unidades ocultas. En ese caso, se necesita un procedimiento de descenso por gradiente, y ya no tenemos una solución directa. La presencia del término de auto-acople fue motivado por las ecuaciones de TAP.

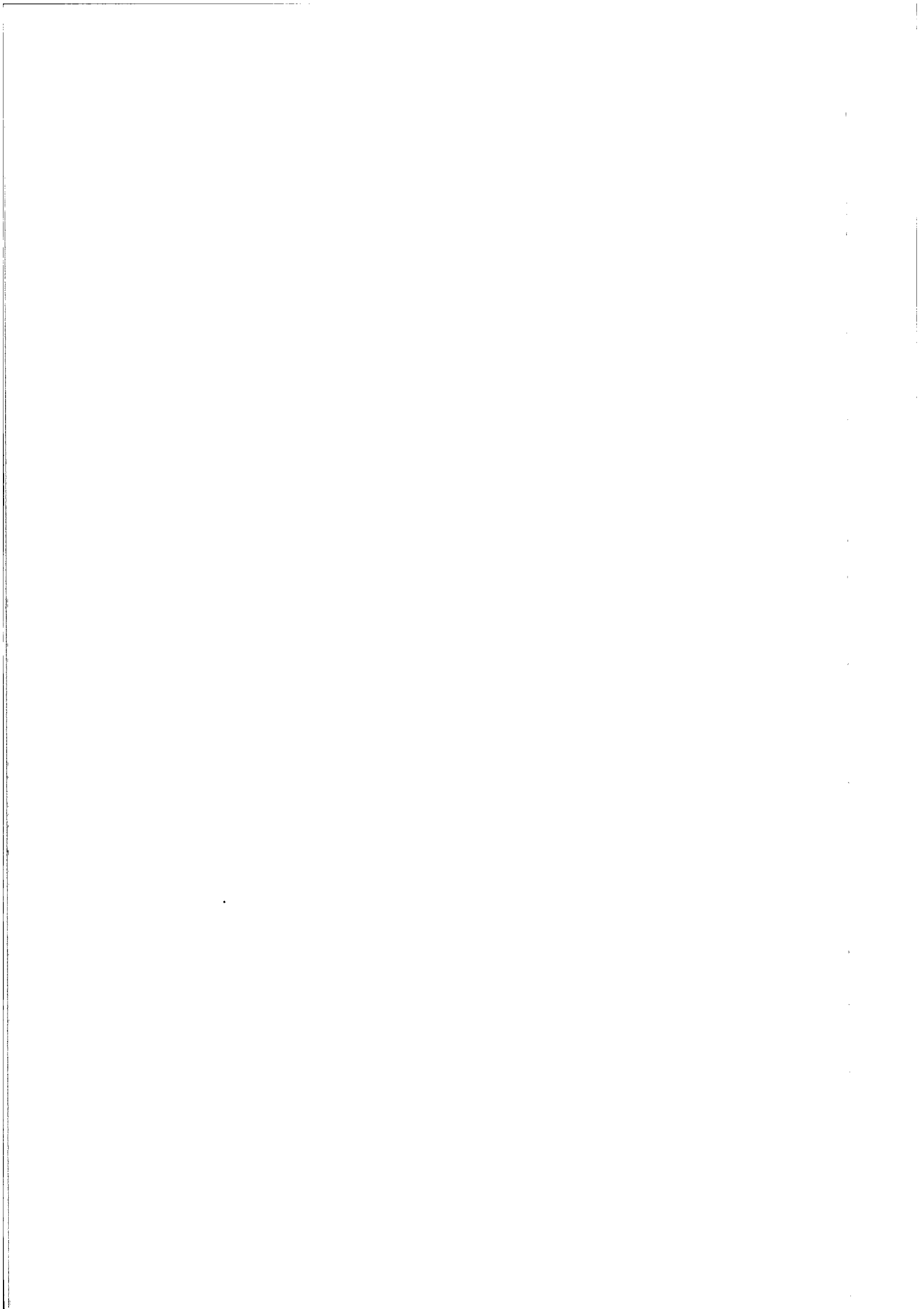
Hemos comparado este método de aprendizaje de respuesta lineal con el método exacto, utilizando las distancias de Kullback, para conjuntos de unidades pequeños. Para poblaciones grandes, validamos nuestro método mediante la recuperación de patrones y mediante procesos de inferencias probabilísticas. Los resultados de estos métodos de comparación son satisfactorios, como hemos mostrado.

En presencia de unidades ocultas, el método exacto y el de respuesta lineal necesitan un algoritmo de descenso por gradiente. Sin embargo, la ventaja de nuestro método es que los gradientes pueden ser computados en un tiempo de $\mathcal{O}(n^3)$ en vez de $\mathcal{O}(2^n)$. El número de iteraciones podría ser mayor para el método de respuesta lineal, debido a que los gradientes son calculados solamente de forma aproximada. Esto nos lleva a preguntarnos cuál es la convergencia del procedimiento de descenso por gradiente para el método de respuesta lineal. La convergencia requiere de la existencia de una función de Lyapunov de energía, también llamada *función de coste*. La divergencia de Kullback es claramente la función de Lyapunov para el método exacto, pero no somos capaces de encontrar la función de Lyapunov para la aproximación de respuesta lineal. De hecho, nos gustaría construir una función de coste, de tal forma que sus gradientes fueran iguales a los gradientes de K en la aproximación de respuesta lineal. Si tal función existe, se escapa a nuestro conocimiento.

Como método de estimación de probabilidades, las Máquinas de Boltzmann han sido propuestas para la optimización combinatoria ([Hopfield, 1982], [Durbin y Willshaw, 1987], [Yuille y Kosowsky, 1994]). Para problemas de optimización combinatorial, el marco de la aproximación de campo medio puede ser aplicado satisfactoriamente ([Yuille et al., 1991], [Kosowsky y Yuille, 1994]). Este método es conocido como *enfriamiento determinista*. La solución del problema al final del proceso de enfriamiento ($T \rightarrow 0$), determina en el sistema que desaparezcan las correlaciones. Por tanto, la situación aquí es diferente, y por esta razón funciona satisfactoriamente la aproximación de campo medio. Las correlaciones desaparecen en este límite de sistemas sin frustración, pero pueden ser bastante complejas en *spin glasses* (ver, por ejemplo [Young, 1983], para resultados numéricos). Ahora bien, si la corrección de respuesta lineal puede mejorar el problema de enfriamiento determinista, es una cuestión abierta que debería ser investigada.

El enfoque de la aproximación de campo medio surge como un caso especial de las técnicas variacionales, que han sido propuestas recientemente. Si la respuesta lineal puede ser aplicada en este contexto, es algo que también debería ser investigado.

Discusión General, Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo



Discusión General, Conclusiones y Futuras Líneas de Trabajo

Discusión General

Cuando observamos algún objeto, nuestro cerebro no está interpretando cuál es el patrón de intensidad que está llegando a la retina, sino que interpreta la secuencia de disparos neuronales que envía el nervio óptico al cerebro. De forma similar ocurre con el resto de los sentidos, tacto, gusto, olfato, oído. Por tanto, la generación de disparos por las neuronas es el lenguaje que utiliza el cerebro para procesar la información, al igual que el código o lenguaje que utiliza una computadora es el código binario. Ahora bien, ¿cómo se organiza todo ese código de disparos neuronales para llevar a cabo el procesamiento de la información que llega al cerebro? Como ya sabemos, hay dos teorías sobre quién lleva la información en el cerebro; una es la tasa media de disparos (*mean firing rate*) y la otra es el tiempo exacto en el que se producen los disparos (*timing of spikes*). No se descartan otros tipos de codificación, pero por el momento los hallazgos experimentales llevan a estas dos vertientes. Por otro lado, diversos análisis estadísticos de los disparos generados en registros de neuronas evidencian el carácter estocástico de la respuesta neuronal. Hoy en día no está del todo claro cómo afecta el carácter estocástico, inherente a los sistemas biológicos, a los procesos de información propios de ellos. De hecho, el segundo paradigma de codificación que se piensa que tiene el cerebro (*timing of spikes*), se vería un poco enturbiado por este carácter estocástico neuronal. Por esa razón, pensamos que es importante estudiar e investigar el porqué de la gran eficiencia en procesos de información, a pesar de que esté por medio el componente estocástico intrínseco al propio sistema. Se han realizado ya varios avances en esta dirección. Por ejemplo Buhmann [Buhmann y Schulten, 1987] demostró que las fluctuaciones aleatorias en el potencial de membrana de su modelo de neurona estocástica, mejoraba el rendimiento de su red de neuronas. Otro ejemplo puede ser que la introducción de ruido en un modelo de la corteza olfativa reduce los tiempos en tareas de memoria asociativa [Liljenström y Wu, 1995]. Más referencias sobre este tema se pueden encontrar en la introducción de este trabajo y en el Capítulo 1.

En el Capítulo 1, hemos propuesto un modelo simple de neurona estocástica

que puede interaccionar con otras unidades a través de un determinado peso sináptico. La ventaja de utilizar este sencillo modelo es que nos permite entender mejor cómo se producen los fenómenos que estamos interesados en estudiar, tales como la sincronización y estabilización en el disparo neuronal. Este modelo tiene incorporado un parámetro de estocasticidad, que representa el comportamiento aleatorio de la respuesta neuronal. Por tanto, el ruido en este paradigma juega un papel fundamental. Hemos elegido este sencillo modelo, porque pensamos que para investigar e intentar encontrar las piezas que faltan en el estudio del procesamiento de información cerebral, debemos buscarlas en la mayor parte de los casos, mediante modelos en los que los detalles finos y minuciosos referentes a las unidades y a los mensajes que se intercambian sean irrelevantes.

En el Capítulo 2 estudiamos un modelo de una red formada por dos neuronas estocásticas, que interaccionan a través de determinadas conexiones. Otros autores han estudiado estos mismos sistemas, pero en el ámbito determinista [Budelli et al., 1991] [Leonel y Budelli, 1996]. La importancia del estudio de estos modelos por parte de estos autores, es debida a que su modelo es capaz de generar *m/n phase-locking* al igual que las neuronas reales llamadas *Pacemakers* que se encuentran en el ganglio del esófago de un tipo de caracoles específico. Los resultados de estos trabajos muestran las relaciones entre los parámetros del modelo para que se obtenga *m/n phase-locking*. Pero estos sistemas no llevan incorporado el carácter estocástico natural que tienen los sistemas biológicos. Nosotros encontramos en el estudio de nuestras unidades estocásticas que la aleatoriedad intrínseca que llevan asociada, hace el papel de un estabilizador en la relación de las actividades de ambas neuronas. Dependiendo del rango en que elijamos los parámetros de nuestro sistema, éste produce una sincronización estable para $m : n$; es decir, cada m disparos de una unidad se producen n disparos de la otra, con una dispersión muy pequeña. Estos resultados se han obtenido mediante simulaciones, o mediante el enfoque matemático de Cadenas de Markov para analizar la sincronización. Una característica importante para nuestro sistema formado por dos unidades estocásticas interaccionando, es que los resultados obtenidos no dependen de la fase en las que empiecen las neuronas. Esto no ocurre en el caso determinista, y en concreto en el sistema de dos neuronas deterministas interaccionando propuesto por [Budelli et al., 1991] [Leonel y Budelli, 1996]. Así, en un sistema determinista la propiedad emergente del *phase-locking* derivada de la interacción, depende fuertemente de la fase inicial del sistema. Con nuestro modelo este problema de la fase queda eliminado. Una reflexión importante sobre el modelo que proponemos es que la estocasticidad del sistema no impide la posible codificación de la información en la sincronización de ambas unidades. Así, mostramos que para el caso de una neurona que dispara irregularmente, ésta puede ser inducida a disparar regularmente por otra unidad que dispara más regularmente. Este caso podría simular la situación de una neurona que dispara regularmente inducida por un estímulo u otra neurona interna. Por tanto, el carácter estocástico de las unidades de nuestro modelo, puede comportarse como un mecanismo estabilizador para el proceso de información codificado en una secuencia temporal de

disparos.

Un segundo resultado importante sobre nuestro modelo, que presentamos al final del Capítulo 2, es la posibilidad de reproducir una gran variedad de ISIH's que son observados en los experimentos de neuronas reales. En concreto, la red está formada por dos unidades, una de disparo irregular y otra de disparo más regular. Estas unidades están conectadas por medio de una conexión inhibitoria. Debido a la sencillez del modelo, podemos hacer un análisis teórico de lo que está sucediendo, y determinar cuáles son los orígenes de los diferentes picos observados en los ISIH's que obtenemos mediante simulación.

En el Capítulo 3 hemos hecho la lógica extensión de nuestro modelo de red de dos neuronas a una población de varias neuronas. Estudiamos los regímenes en los cuales el comportamiento colectivo de la población de unidades es estable a un nivel mesoscópico. Un resultado fundamental es que encontramos en la población una combinación de parámetros para el cual el comportamiento del sistema es completamente periódico, sincronizando las unidades en diferentes grupos de neuronas. Este resultado solamente depende de dos parámetros estructurales de la red; es decir, del número de unidades en la red, y del tiempo que tarda un mensaje en llegar desde la unidad que envía a la unidad que recibe. Pensamos que este tipo de disparo periódico y sincrónico podría ser relevante en los procesos de información, debido a que el comportamiento que alcanza el sistema no depende de los detalles de la dinámica de cada unidad en la población. Es más, el patrón periódico se forma por el paso de mensajes de unas unidades a otras, e incluso permanece estable bajo significativas cantidades de ruido afectando a la evolución individual de cada unidad.

Respecto a las dispersiones de los disparos de las unidades, éstas son más bajas de lo que cabría esperar para una unidad cuyo umbral efectivo es disminuido por los mensajes que envía la población. La causa fundamental de este hecho, es la dinámica de descenso que sigue el umbral de una unidad dentro de la población, y las correlaciones entre los disparos. Según se va aumentando el número de unidades de la red, manteniendo el periodo más o menos constante, la dispersión relativa del disparo va decreciendo. Es decir, por el mero hecho de interaccionar las unidades en la población, éstas adquieren un comportamiento más estable, o con menor dispersión de disparo, que el comportamiento que tendría una unidad aislada.

En el Capítulo 4 nos hemos centrado en una tarea típica del procesamiento de información cerebral. Nos estamos refiriendo en concreto a la plasticidad sináptica o aprendizaje. Para ello, utilizamos una red estocástica de Máquinas de Boltzmann. Hemos estudiado la forma que hay de mejorar las reglas de aprendizaje, en su versión determinista, que existen para este tipo de modelos conexionistas. Nuestra principal aportación al aprendizaje en Máquinas de Boltzmann, es la corrección que hacemos a la aproximación de campo medio a través del teorema de respuesta lineal. Es decir, proponemos utilizar el teorema de respuesta lineal para calcular las correlaciones de la red dentro del marco de la aproximación de campo

medio. En este capítulo hemos demostrado que esta corrección es más eficiente y precisa que la propia aproximación de campo medio. Este método de respuesta lineal lo hemos comparado con el método de campo medio y el método exacto por medio de la distancia de Kullback, mediante un problema típico de recuperación de patrones y, por último, a través de procesos de inferencia probabilística en Máquinas de Boltzmann. En los tres casos la corrección de respuesta lineal nos dio resultados más satisfactorios que la propia aproximación de campo medio.

Conclusiones Finales

Las conclusiones de este trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

- (i) Hemos propuesto un sencillo modelo de neurona estocástica cuyas variables de tiempo, actividad, e interacción son discretas. Este modelo es capaz de producir una rica y gran variedad de comportamientos. El carácter estocástico que se incluye dentro de nuestro modelo neuronal actúa claramente como un estabilizador, permitiendo una robusta y precisa sincronización entre las actividades de una red compuesta de dos neuronas. Por tanto, la estocasticidad o aleatoriedad en nuestro modelo no excluye la posibilidad de codificación de información en la sincronización de las dos neuronas. Este mismo carácter aleatorio actúa de tal forma que las diferentes sincronizaciones que se originan (según los parámetros que escojamos) en nuestro sistema, sean independientes del estado inicial con el que empieza el mismo. Así, eliminamos el problema de la fase inicial que existe en sistemas deterministas.
- (ii) Cambiando el ritmo de disparo, la interacción, o el ruido de las neuronas, se pueden obtener sincronizaciones $m : n$ estables. Es decir, que el n -ésimo disparo de una unidad sincronice con el m -ésimo disparo de la otra, de una forma estable, regular, e independiente de la fase en la que se inicien las dos unidades.
- (iii) Este simple modelo de integración y disparo estocástico es capaz de reproducir un gran variedad de ISIH's no triviales, similares a los que se observan en los registros de neuronas reales. La combinación más simple de neuronas que generan estos ISIH's en nuestro modelo, está compuesto por una unidad de disparo irregular inhibiendo a otra unidad de disparo más regular.
- (iv) La dinámica de N unidades estocásticas idénticas interaccionando entre ellas para el valor del parámetro $\eta = 1$ (ver Capítulo 3), es caracterizada por un conjunto de atractores a los cuales el sistema evoluciona con el tiempo. Cada atractor está formado por varios grupos de unidades, donde todas las neuronas dentro de un mismo grupo disparan a la vez. Cada grupo de sincronización induce el disparo en otro grupo, que a su vez hace lo mismo en el siguiente, y así sucesivamente hasta volver a disparar el grupo inicial de nuevo. Una vez que se alcanza el atractor, el sistema permanece en él para siempre, siendo el periodo de disparo de cada unidad el número de grupos de sincronización que se forman, y siendo nula la dispersión del disparo de cada unidad. Cuando es alcanzado el atractor, la dinámica del sistema es independiente de la evolución espontánea de cada unidad.
- (v) Este tipo de patrón periódico y sincrónico que se forma en este rango de interacción podría ser importante para el procesamiento de información desde el momento en que es independiente de los detalles finos de las unidades, dependiendo únicamente de los parámetros estructurales de la red, del número

de unidades de la población, y del tiempo que cada unidad tarda en transmitir el mensaje. Este patrón es estable incluso con un nivel de ruido alto afectando a la evolución espontánea de cada unidad.

- (vi) En una población de N neuronas, si fijamos el número de pasos que debe dar cada unidad por evolución espontánea para cualquier tamaño de población, entonces la dispersión relativa del periodo para el disparo en las unidades va disminuyendo según aumente el número de neuronas en el conjunto. Es decir, que una neurona por el hecho de interactuar en el seno de una población tendrá una dispersión menor para el disparo, cuanto mayor sea el número de unidades en la población. La tendencia de disminución de la dispersión del disparo ha sido medida en diferentes condiciones siendo su tendencia como $1/N^b$, con $b \sim 0.5$ (ver Figura 3.6).
- (vii) Hemos propuesto un nuevo método para el aprendizaje de redes de Máquinas de Boltzmann, utilizando el teorema de respuesta lineal. La corrección de respuesta lineal dentro de la computación de campo medio para el aprendizaje en Máquinas de Boltzmann, es eficiente y da mejores resultados que utilizando únicamente la aproximación de campo medio. Para testear la bondad de este método propuesto para el aprendizaje en Máquinas de Boltzmann, hemos utilizado la distancia de Kullback, un problema de recuperación de patrones y problemas de inferencia probabilística. Los tres métodos dan resultados satisfactorios.

Futuras Líneas de Trabajo

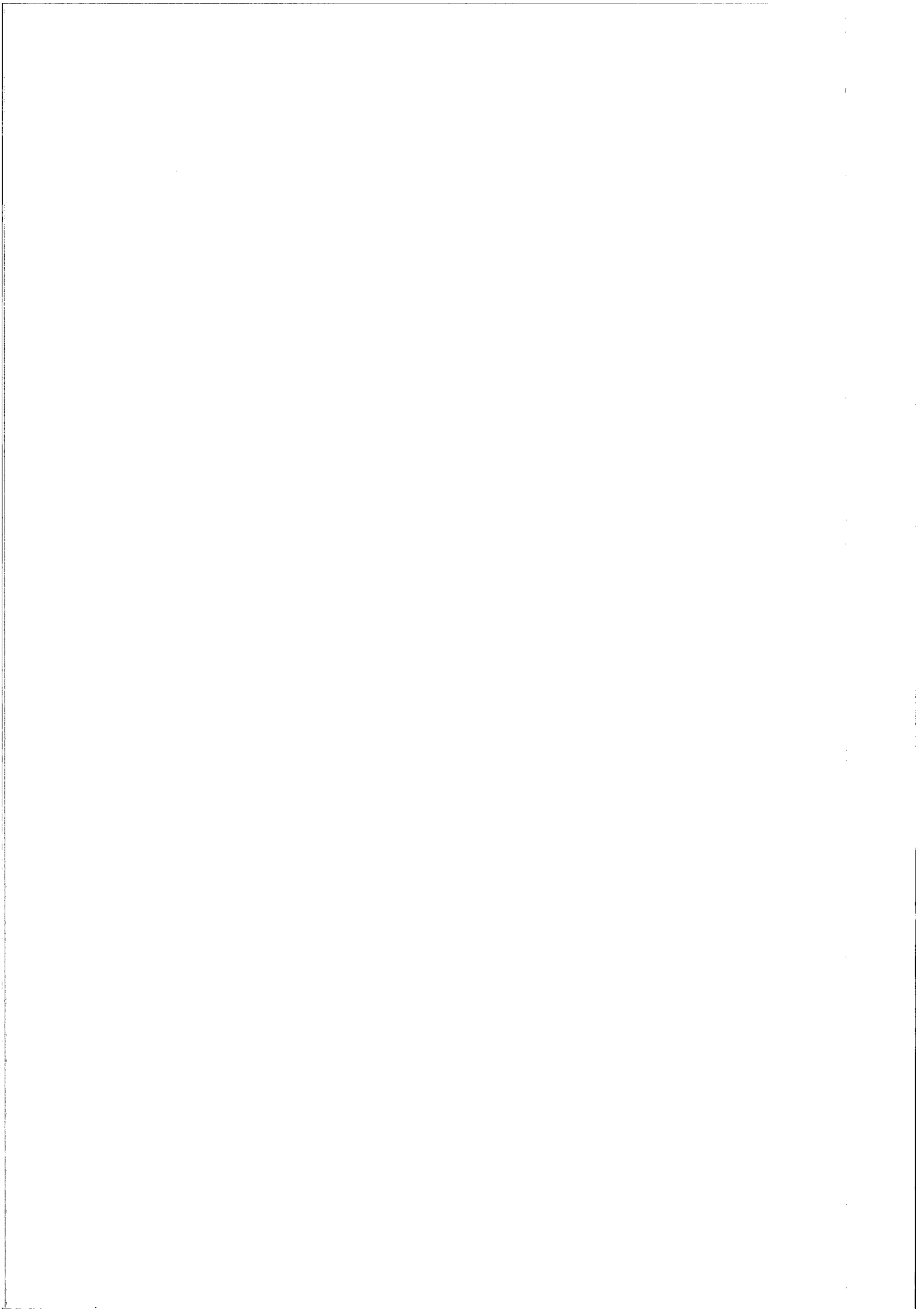
Nuestra sencilla neurona es un modelo de integración y disparo probabilístico sin pérdida. Una extensión del modelo es que la variable de estado que simula el potencial de membrana fuese modelada con pérdidas ante la ausencia de estímulo. Evidentemente este modelo es más realista biológicamente hablando, pero tiene el inconveniente del incremento de la complejidad de su análisis teórico. No obstante es una línea de investigación que hay que mantener abierta.

En el caso de la población de N unidades del Capítulo 3, estamos trabajando, en el momento de la presentación de este trabajo, en una aproximación de campo medio para la dinámica del descenso del umbral de las unidades, debida a los mensajes que envían las demás neuronas en la población. Esta aproximación parece ofrecer unos resultados más satisfactorios para los periodos y dispersiones del disparo de las neuronas, que la aproximación dada por la Ecuación 3.2. Una clara y lógica continuidad del trabajo para la población formada por N unidades estocásticas idénticas interaccionando, es el estudio del comportamiento de poblaciones en las que los parámetros de las unidades son diferentes y, por tanto, su dinámica también lo será. Qué tipo de patrones de disparo se formarían, qué estabilidad en el disparo tendríamos, cómo variaría el comportamiento del sistema en función del grado de interacción, etc., son algunas de las preguntas que nos hacemos en esta situación y que pretendemos resolver en un futuro.

Otro problema en el que se está trabajando actualmente, es en un algoritmo de aprendizaje de refuerzo *hebbiano* y *anti-hebbiano* aplicado al modelo probabilístico de neurona que hemos estudiado [Rodríguez y López, 1997]. Pretendemos desarrollar un algoritmo de aprendizaje que consiga almacenar los estímulos externos en forma de atractores para $\eta = 1$, de tal forma que cuando se le presente un estímulo se recupere el atractor que corresponde a ese estímulo. El aprendizaje tendrá como resultado una variación de las conexiones sinápticas orientadas a una mayor y efectiva sincronización de las neuronas en la región que nos interesa de $\eta = 1$. Así, de alguna forma *codificaremos* en las sinapsis los valores apropiados para que el sistema tenga un patrón de sincronización característico en función de los estímulos que se le presenten.

En el aprendizaje con la corrección de respuesta lineal en Máquinas de Boltzmann se podría utilizar este nuevo paradigma para realizar procesos de inferencia probabilística. El método a seguir sería similar al método que utilizamos al final del Capítulo 4 para examinar la bondad de nuestro método propuesto en aprendizaje de Máquinas de Boltzmann. Si la corrección de respuesta lineal a la teoría de campo medio es útil para realizar procesos de inferencia, es una cuestión abierta que debería ser investigada.

Apéndices



Apéndice A

La distribución Binomial Negativa aplicada al modelo neuronal estocástico

A.1 Introducción

En este apéndice introduciremos el significado de la distribución de probabilidad de la binomial negativa, así como los valores esperados y desviaciones de la misma. Ya hemos comentado anteriormente que nuestro modelo de neurona estocástica aislada se puede aproximar por una binomial negativa.

A.2 Los Tiempos de Espera de la Binomial Negativa

Según el texto clásico de Feller [Feller, 1993], para una sucesión de n ensayos de Bernoulli¹, la distribución binomial negativa calcula cuál es la probabilidad de que el r -ésimo éxito ocurra en el ensayo $r + k$ -ésimo, donde k obviamente es el número de fallos que ha habido en los n ensayos de Bernoulli. Esa distribución de probabilidad viene representada por:

¹Una sucesión de n ensayos repetidos e independientes se denomina sucesión de ensayos de Bernoulli, cuando en cada ensayo sólo hay dos posibles resultados (suelen denominarse a los posibles resultados como “éxito” y “fracaso”) y, además, sus probabilidades son las mismas en todos los ensayos. Evidentemente, nuestro modelo de neurona estocástica cumple esta propiedad, ya que en cada instante de tiempo la variable dinámica $a_i(t)$ tiene probabilidad p de pasar a $a_i(t) + 1$, o probabilidad $1 - p$ de quedarse en el mismo estado.

$$f(k; r, p) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k, \quad (\text{A.1})$$

donde $q = 1 - p$. Esta binomial negativa la podemos trasladar a nuestro modelo de neurona estocástica, para ello tenemos que hacer un pequeño cambio, y además asociar los ensayos de Bernoulli a los intervalos de tiempo en el modelo de neurona estocástica. Es decir, lo que nos interesa es cómo se distribuye la probabilidad de que una neurona alcance su umbral L , con una probabilidad de salto igual a p en un tiempo T , por lo que es más interesante redefinir las variables:

Periodo de disparo $k + r = T$.

Número de éxitos $r = L$.

Número de fallos $k = T - L$.

Así, tenemos que la Ecuación A.1 se transforma en la siguiente expresión:

$$P_{L,p}(T) = f(T; L, p) = \binom{T-1}{T-L} p^L q^{(T-L)}. \quad (\text{A.2})$$

La expresión anterior representa la distribución de la probabilidad de que una neurona de L estados con probabilidad p de salto dispare en un tiempo T .

A.3 Valor Esperado y Varianza de los Tiempos de Espera

Siendo X una variable aleatoria con probabilidades $f(x_1), f(x_2), \dots$, se define la media o valor esperado de la variable aleatoria X como sigue:

$$E(X) = \sum x_k f(x_k). \quad (\text{A.3})$$

De esta forma, la esperanza del tiempo de espera T para la distribución de probabilidad representada por la Ecuación A.2, vendrá determinada por la aplicación directa de la Ecuación A.3:

$$\begin{aligned} E(T) &= \\ E(k+r) &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) f(k; r, p) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) \binom{r+k-1}{k} p^r q^k = \\
& p^r q^{1-r} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (k+r) q^{k+r-1} = \\
& p^r q^{1-r} \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^{k+r-1} \right) = \\
& p^r q^{1-r} \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^{k+r} \right) = \\
& p^r q^{1-r} \frac{d}{dq} \left(q^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k \right) = \\
& p^r q^{1-r} \frac{d}{dq} \left(q^r (1-q)^{-r} \right) = \\
& p^r q^{1-r} \left(r q^{r-1} (1-q)^{-r} + r q^r (1-q)^{-r-1} \right) = \\
& r p^r q^{1-r} \left(q^{r-1} p^{-r} + q^r p^{-r-1} \right) = \\
& r \left(1 + \frac{q}{p} \right) = r \left(1 + \frac{1}{p} - 1 \right) = \\
& = \frac{r}{p}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

En este resultado hemos aplicado el teorema binomial (ver Capítulo 7 de [Feller, 1993]):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k = (1-q)^{-r}.$$

En el caso del modelo de la neurona estocástica, existen $L-1$ estados antes de que la unidad dispare, asociados a los r ensayos. Y además, el paso del umbral al estado 1 es siempre determinista (generación del disparo), por tanto la Ecuación A.4 queda de la siguiente forma:

$$E(T) = \tau_i = 1 + \frac{L-1}{p}. \tag{A.5}$$

Ahora vamos a calcular la varianza, para ello definamos primero lo que es varianza de una variable aleatoria. Si tenemos que X es una variable aleatoria con probabilidades $f(x_1), f(x_2), \dots$, se define la varianza de la variable aleatoria X de la siguiente forma:

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2, \tag{A.6}$$

siendo $\mu = E(X)$ la media de la variable aleatoria X .

Por tanto, basándonos en la Ecuación A.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 Var(T) &= \\
 E(T^2) - E^2(T) &= \\
 E((k+r)^2) - E^2((k+r)) &= \\
 \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)^2 f(k; r, p) - \left(\frac{r}{p}\right)^2 &= \\
 \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)^2 \binom{r+k-1}{k} p^r q^k - \left(\frac{r}{p}\right)^2 &= \\
 p^r q^{1-r} \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k}{k} (k+r) q^{k+r-1} \right) - \left(\frac{r}{p}\right)^2 &= \\
 p^r q^{1-r} \frac{d}{dq} \left(q \frac{d}{dq} (q^r (1-q)^{-r}) \right) - \left(\frac{r}{p}\right)^2 &= \\
 r q \left(r q^{-1} + (2r+1) \frac{q}{p} + (r+1) \frac{q^2}{p^2} \right) - \left(\frac{r}{p}\right)^2 &= \\
 r \left(\frac{r+1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) - \left(\frac{r}{p}\right)^2 &= \\
 = \frac{r(1-p)}{p^2}. & \quad (A.7)
 \end{aligned}$$

Al igual que anteriormente hemos vuelto a aplicar el teorema binomial.

De nuevo, asociamos los $L-1$ estados de la neurona estocástica con los r éxitos y obtenemos de la Ecuación A.7:

$$Var(T) = \sigma^2 = \frac{(L-1)(1-p)}{p^2}. \quad (A.8)$$

Apéndice B

Cadenas de Markov en modelos de Sincronización

B.1 Introducción

En este apéndice se tratará de hacer una introducción a las Cadenas de Markov (CM's) para su uso con el cálculo de las magnitudes fundamentales, y así medir la sincronización entre el modelo de neuronas estocásticas explicado en la Sección 1.3. Sólo aplicaremos este cálculo de CM's a un conjunto de dos unidades, ya que para más unidades el número de los posibles estados del sistema hace intratable el cálculo de la Matriz de Probabilidades de Transición (MPT) y sus operaciones con ella. Así, por ejemplo, para un sistema formado solamente por tres neuronas, cada una con cien estados, la MPT será de dimensión $10^6 \times 10^6$. Para profundizar en CM's se puede consultar las referencias [Feller, 1993] [Turner, 1979] [Shamblin y Stevens, 1979], y para una mayor especialización [Kemeny y Snell, 1976]. En este apéndice se enunciarán una serie de teoremas que no se demostrarán (no es el propósito de este apéndice), y si el lector estuviese interesado en ellos puede consultar las referencias anteriores. No es nuestra intención profundizar en el formalismo de las CM's, sino en la aplicación directa de este formalismo matemático a la resolución de nuestro problema particular.

B.2 Generalidades sobre Cadenas de Markov

En muchos experimentos o procesos en ciencias, ingeniería, etc., es más fácil pensar en ellos como cadenas de sucesos de un estado a otro mediante un paso al que se le asocia una determinada probabilidad. Los modelos de procesos en los que cada paso viene determinado por una probabilidad de transición, se llaman procesos estocásticos (la palabra estocástico es sinónimo de probabilidad). Supongamos que

tenemos una serie de ensayos E_0, E_1, E_2, \dots , en la teoría de CM's el resultado de cualquier ensayo depende sólo del resultado del ensayo anterior. Así, cada pareja (E_i, E_j) tiene asociada una probabilidad condicional p_{ij} de forma que:

$$P\{(E_i, E_j)\} = a_i p_{ij} \quad (\text{B.1})$$

donde a_i es la probabilidad de obtener el resultado E_i en el ensayo inicial.

En general, podemos hacer la siguiente extensión para la probabilidad de una secuencia arbitraria de cadenas de sucesos:

$$P\{(E_i, E_j, \dots, E_k E_m)\} = a_i p_{ij} \dots p_{km} \quad (\text{B.2})$$

Se define la sucesión de ensayos E_0, E_1, E_2, \dots , como una CM cuando cumple la Ecuación B.2, y será finita si el espacio de estados lo es (que es nuestro caso).

B.2.1 Matrices Estocásticas

En realidad, la probabilidad condicional p_{ij} se puede entender como una probabilidad de transición de E_i a E_j . Todas las posibles probabilidades de transición en un sistema se pueden ordenar en una matriz, como aparece a continuación:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_0 & E_1 & E_2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (\text{B.3})$$

y, en consecuencia, ésta es la denominada matriz estocástica o MPT de los posible estados accesibles del sistema. Evidentemente, cada fila de la MPT tiene que sumar uno, o lo que es lo mismo $\sum_j p_{ij} = 1$, y los elementos de esta matriz estocástica deben ser mayores o iguales a cero (recordemos que los elementos representan probabilidades). La matriz P es una matriz cuadrada y de dimensión el número de estados accesibles del sistema. Esta matriz representa la probabilidad de transición del sistema en un solo paso. Pero también nos podemos preguntar por las probabilidades de transición superiores a n pasos. Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso pase de E_i a E_j en n pasos exactamente? A esta probabilidad la denominaremos $p_{ij}^{(n)}$. Pues bien, existe un teorema que dice que si P es la MPT de un sistema de posibles estados en un solo paso, la n -ésima potencia de la matriz P será la MPT entre los estados accesibles del sistema, pero en n pasos exactamente. Este teorema será fundamental para el cálculo de nuestros parámetros de sincronización.

B.2.2 Tipos de Estados y CM's

Existen diferentes tipos de CM's con diferentes propiedades y formas de trabajar. Por tanto, primero debemos saber en qué tipo de CM podemos transformar nuestro modelo estocástico neuronal. Vamos a ver a continuación un rápido resumen de los tipos de estados y CM's que existen.

Teniendo en cuenta la posibilidad de paso de estado a otro, los estados se pueden clasificar en:

Estados Ergódicos: Supongamos que dividimos los estados totales del sistema en dos subconjuntos **E** y **T** (complementario uno del otro), si cualquier estado de **E** puede alcanzarse desde cualquier otro estado de **E**, pero ninguno de **T** puede alcanzarse desde **E**, entonces **E** se define como un conjunto ergódico. Un estado ergódico será cualquier estado del conjunto **E**.

Estados transitorios: Si por el contrario todos los estados de **E** pueden ser alcanzados desde estados de **E**, y al menos un estado de **T** puede ser alcanzado desde algún estado de **E**, entonces **E** es un conjunto transitorio. Un estado transitorio será cualquier estado del conjunto **E**.

Estados absorbentes: Si **E** es un conjunto ergódico con un solo estado, éste será definido como un estado absorbente. Se puede demostrar que si un estado E_i es absorbente, entonces $p_{ii} = 1$.

Así, de acuerdo con la anterior clasificación de estados, podemos dividir las CM's en:

- (I) **CM's absorbentes:** Son las cadenas cuyos estados que no son transitorios son absorbentes.
- (II) **CM's Ergódicas:** Son las cadenas que están formadas por un único conjunto ergódico. Éstas, a su vez, se dividen en:
 - (i) **CM's Ergódicas cíclicas:** Son aquéllas en las cuales se alcanzan los estados a intervalos periódicos fijos.
 - (ii) **CM's Ergódicas regulares:** Son aquéllas que no son cíclicas.

Con esta clasificación nuestro modelo de unidades estocásticas ¹ se puede clasificar y se comporta como una CM Ergódica regular.

Referente al cálculo de la MPT, recordemos (Sección 1.3) que todos los estados del sistema en los cuales las actividades de las neuronas son mayores o iguales que

¹Hagamos notar el hecho de que si fuese determinista (siempre sube su estado, es decir $p = 1$) el modelo encajaría en una CM Ergódica cíclica, ya que todos los estados del sistema se alcanzan con un período N .

el umbral, realmente son englobados en el mismo estado (estado ficticio 0). También debemos recordar que la probabilidad de transición de este estado al estado 1 es determinista ($p_{01} = 1$). Veamos un ejemplo para aclarar esto. Supongamos que tenemos dos unidades con los parámetros como los de la Figura B.1, entonces eliminaremos todos los estados que no pertenezcan al intervalo $\{0, \dots, N_i - 1\}$, y pasarán a ser estados en los que se producirá inmediatamente un disparo. Esa región que eliminamos es la que está rayada en la Figura B.1. Así, todas las probabilidades de transición a esa región rayada, pasan a sumarse a las probabilidades de transición de los estados iniciales o estado cero. Esta consideración va implícita en el modelo que ya formulamos anteriormente en la Sección 1.3, y la recalcamos únicamente para aclarar el cálculo de la MTP de nuestro sistema.

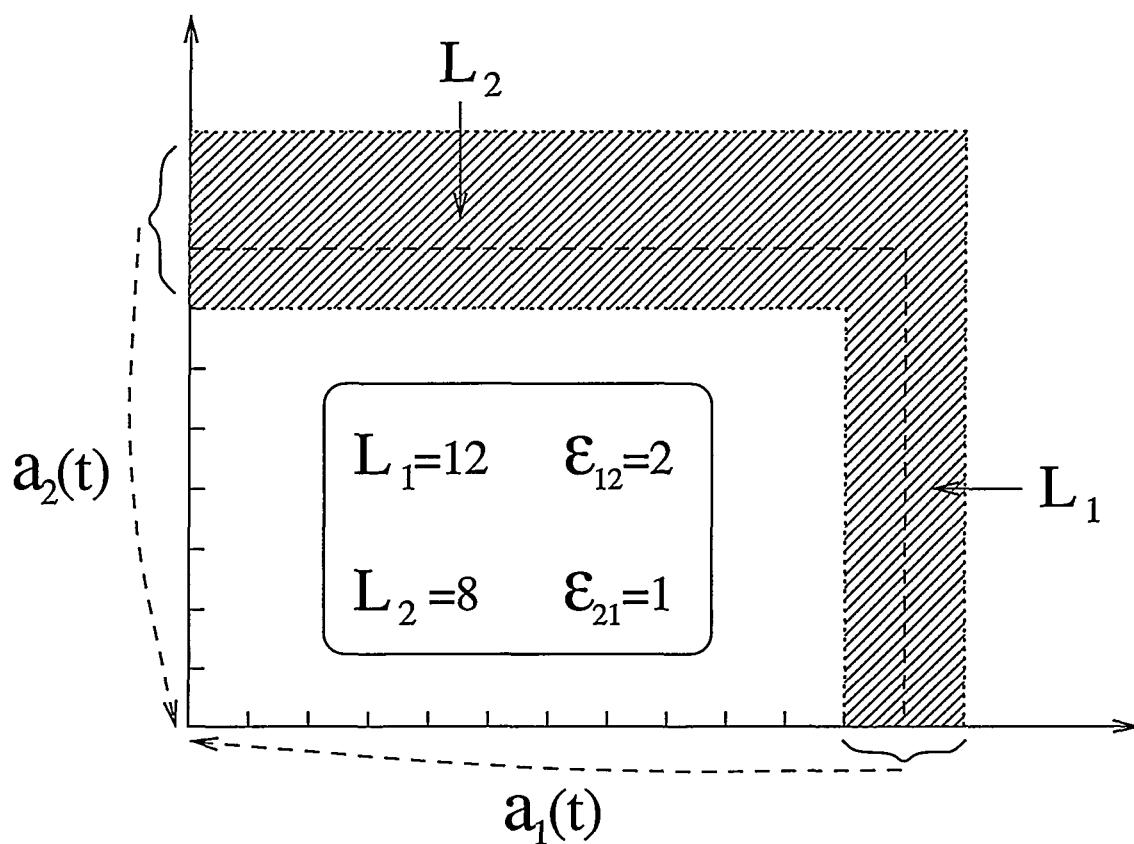


Figura B.1: Espacio "real" de estados para dos neuronas estocásticas con parámetros $L_1 = 12$, $L_2 = 8$, $\epsilon_{12} = 2$ y $\epsilon_{21} = 1$.

B.2.3 Un Ejemplo del Cálculo de la MTP

Veamos ahora un ejemplo de cómo afecta el englobamiento de estados en el estado 0, cuando queremos calcular la MPT del sistema. Consideremos un sistema de dos unidades con parámetros: $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.5$, $N_1 = 3$, $N_2 = 2$, $\epsilon_{12} = 1$ y

Estados del Sistema

Estados	$a_1(t)$	$a_2(t)$
E_0	0	0
E_1	0	1
E_2	0	2
E_3	0	3
E_4	1	0
E_5	1	1
E_6	1	2
E_7	1	3
E_8	2	0
E_9	2	1
E_{10}	2	2
E_{11}	2	3
E_{12}	3	0
E_{13}	3	1
E_{14}	3	2
E_{15}	3	3

Tabla B.1: Asociación de los diferentes estados.

$\epsilon_{21} = 0$. Los estados en los cuales podría estar el sistema antes de eliminar los estados que no son relevantes se presentan en la Tabla B.1.

Nótese que la unidad 2 tiene un estado “extendido” $a_2(t) = 3$, debido a que por la interacción, $\epsilon_{12} = 1$, puede llegar a él. Las probabilidades de transición con los estados extendidos, sin incluir la interacción entre las dos unidades, vendrán dadas por la matriz B.4.

$$\begin{pmatrix}
 E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 & E_9 & E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\
 E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0.45 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\
 E_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0.45 & 0.45 \\
 E_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

(B.4)

A continuación presentamos la matriz de probabilidades de transición, pero ya

teniendo en cuenta la interacción sináptica, (matriz B.5).

$$\begin{pmatrix}
 & E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 & E_9 & E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\
 E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0.45 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\
 E_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.45 & 0.45 \\
 E_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

(B.5)

Vemos que la única diferencia entre las matrices B.5 y B.4 está en las filas de la transición de los estados E_8 y E_9 , que ahora, debido a la transmisión instantánea del disparo, pasan a estados superiores (E_{14} o E_{15}). A continuación, es cuando englobamos las probabilidades de transición de los estados que no pertenecen al intervalo $\{0, \dots, N_i - 1\}$, en el estado 0. Para ello, se suman las probabilidades de los estados fuera del rango a las probabilidades del estado 0. Seguidamente se presenta la MPT B.6, de tal forma que los estados pertenecen al intervalo $\{0, \dots, N_i - 1\}$.

$$\begin{pmatrix}
 & E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 & E_9 & E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\
 E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0.45 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_8 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_9 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 E_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

(B.6)

Podemos observar en la matriz B.6 los siguientes desplazamientos de probabilidades de transición respecto de la matriz B.5:

- $P(E_1 \rightarrow E_4) = P(E_1 \rightarrow E_4) + P(E_1 \rightarrow E_6)$,
pasando a ser $P(E_1 \rightarrow E_6) = 0$

- $P(E_5 \rightarrow E_4) = P(E_5 \rightarrow E_4) + P(E_5 \rightarrow E_6)$,
pasando a ser $P(E_5 \rightarrow E_6) = 0$
- $P(E_8 \rightarrow E_0) = P(E_8 \rightarrow E_0) + P(E_8 \rightarrow E_{14})$,
pasando a ser $P(E_8 \rightarrow E_{14}) = 0$
- $P(E_9 \rightarrow E_0) = P(E_9 \rightarrow E_0) + P(E_{10} \rightarrow E_{14}) + P(E_{10} \rightarrow E_{15})$,
pasando a ser $P(E_{10} \rightarrow E_{14}) = P(E_{10} \rightarrow E_{15}) = 0$

siendo $P(E_i \rightarrow E_j)$ la probabilidad de transición del estado E_i al estado E_j , en una unidad de tiempo.

Por último, de la matriz B.6 ya podemos sacar la MPT de nuestro ejemplo formado por dos neuronas, eliminando los estados en los que nunca va a estar el sistema:

$$\begin{pmatrix} & E_0 & E_4 & E_5 & E_8 & E_9 \\ E_0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.9 \\ E_5 & 0 & 0.05 & 0.05 & 0.45 & 0.45 \\ E_8 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ E_9 & 0.9 & 0 & 0 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Aunque el cálculo de las MPT se hace computacionalmente, este ejemplo pretende dar una visión de cómo se realiza este cálculo con nuestra implementación del mismo en código *C*.

B.3 Cálculo de los Parámetros de Sincronización a través de CM's

En esta sección vamos a enunciar una serie de resultados sobre las CM's ergódicas regulares, que utilizaremos para calcular los parámetros de sincronización de nuestro modelo. De nuevo, se recuerda al lector que si quiere profundizar más en los resultados que se enunciarán, puede consultar las referencias que se indican al principio del apéndice.

B.3.1 Resultados sobre CM's Regulares

Hay un teorema fundamental en CM's regulares que dice que siendo cualquiera el estado inicial del proceso, la probabilidad de estar en un estado cualquiera de la CM tiende a un valor constante, según el número de pasos n tiende a infinito. Podemos expresar este teorema de una manera más formal, como sigue:

Teorema B.1 Si P es la MTP de una CM ergódica regular, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = A$$

siendo A una matriz cuyas filas son unitarias, y de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

con m la dimensión de la MTP de la CM ergódica regular.

Se define como distribución estacionaria de la anterior CM ergódica regular, al vector $\vec{\Lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, cumpliéndose la condición $\sum_i \lambda_i = 1$. El siguiente teorema nos permite calcular la distribución estacionaria de una CM ergódica regular, sin calcular las potencias sucesivas de la matriz P .

Teorema B.2 Si P es una MTP de una CM ergódica regular y $\vec{\Lambda}$ es su distribución estacionaria asociada, entonces ésta cumple que:

$$\vec{\Lambda}P = \vec{\Lambda}$$

B.3.2 Matriz Fundamental de una CM ergódica Regular

La matriz fundamental de una CM ergódica regular es la unidad básica para computar las cantidades más importantes que muestran de alguna forma el comportamiento de la CM. Esta matriz fundamental, que denotaremos Z , se define de la siguiente forma:

$$Z = (I - (P - A))^{-1} \tag{B.8}$$

siendo I la matriz identidad, P la MTP de la CM ergódica regular y A la matriz definida en el Teorema B.1.

B.3.3 Tiempos de los Primeros Pasos por un Estado determinado

En esta sección expondremos las expresiones para calcular las medias y las desviaciones de los primeros pasos desde un cierto estado a otro. El tiempo del primer paso por un estado E_j lo denominaremos Γ_j , y es una función que toma los valores del número de pasos que transcurren desde un estado inicial determinado

hasta que se alcanza por primera vez el estado E_j . Definiremos $M_i[\Gamma_j]$ como el valor esperado del número de pasos desde el estado E_i hasta que se alcanza por primera vez el estado E_j . El siguiente teorema nos dice cómo calcular la matriz $M = M_i[\Gamma_j] = m_{ij}$, que representa la matriz de todos los posibles tiempos de primeros pasos de una CM ergódica regular.

Teorema B.3 *Si P es una MTP de una CM ergódica regular con una distribución estacionaria $\vec{\lambda}$, entonces la matriz del número de pasos medio que se necesita para alcanzar el estado E_j la primera vez desde el estado E_i viene determinada por:*

$$M = (I - Z + EZ_{dg})D$$

siendo D una matriz diagonal con $d_{ii} = 1/\lambda_i$, Z_{dg} una matriz cuya diagonal es la diagonal de la matriz fundamental Z , y E es una matriz con la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, vamos a enunciar un teorema para calcular la varianza de los primeros tiempos de paso por un determinado estado partiendo de un estado inicial, que denotaremos por $M_2 = Var_i[\Gamma_j] = m_{2ij}$.

Teorema B.4 *Si P es una MTP de una CM ergódica regular con una distribución estacionaria $\vec{\lambda}$, entonces la matriz de la varianza del número de pasos para alcanzar el estado E_j la primera vez desde el estado E_i viene determinada por la expresión matricial:*

$$M_2 = Var_i[\Gamma_j] = M_i[\Gamma_j^2] - (M_i[\Gamma_j])^2 = W - M^2$$

pudiéndose calcular W de la siguiente forma:

$$W = M(2Z_{dg}D - I) + 2(ZM - E(ZM)_{dg})$$

B.3.4 Parámetros de Sincronización

El tiempo τ_0 es el número de pasos que transcurren hasta la primera sincronización, cuando el estado inicial es cualquiera de los posibles estados del sistema. Por tanto, esta cantidad se puede calcular a partir de lo expuesto en la sección

anterior, mediante los cálculos de los tiempos de los primeros pasos por un estado determinado de la siguiente forma:

$$\tau_0 = \frac{m_{00} + m_{10} + \dots + m_{n0}}{n} \quad (\text{B.9})$$

siendo m_{ij} la matriz calculada mediante lo expuesto en el Teorema B.3, y n su dimensión.

La desviación de esa cantidad se calcula a través del Teorema B.4, mediante la matriz m_{2ij} :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{m_{200} + m_{210} + \dots + m_{2n0}}{n}} \quad (\text{B.10})$$

De forma análoga, el periodo τ es el tiempo transcurrido entre sincronías consecutivas, es decir, el tiempo que tarda el sistema en volver al estado E_0 desde el propio estado, que podemos calcular de la siguiente forma:

$$\tau = m_{00} \quad (\text{B.11})$$

siendo m_{ij} la matriz calculada mediante lo expuesto en el Teorema B.3.

La desviación se calcula de forma similar a través del Teorema B.4, mediante la matriz m_{2ij} :

$$\sigma = \sqrt{m_{200}} \quad (\text{B.12})$$

Apéndice C

Particiones Restringidas de un Número N

C.1 Introducción

En este apéndice vamos a derivar la expresión del número de particiones de un número N , pero con la restricción de que los sumandos que den el número N sean mayor o igual que cierta cantidad. En particular, esta expresión nos será útil para calcular la distribución de periodos de una población neuronal en el límite de $\eta = 1$ (ver Capítulo 3).

C.2 Definición del Número de Particiones

Definimos la cantidad $P_N^{\geq k}(T)$ como el número de los diferentes sumandos en que podemos descomponer el número N , de tal forma que cada uno de los sumandos siempre sea mayor o igual que k . Así, por ejemplo $P_{10}^{\geq 3}(2) = 5$, siendo las particiones:

$$\{(3 + 7), (4 + 6), (5 + 5), (6 + 4), (7 + 3)\},$$

de las cuales hemos quitado las que no cumplían la condición de que alguno de los sumandos fuera mayor o igual que 3:

$$\{(1 + 9), (2 + 8), (8 + 2), (9 + 1)\}.$$

C.3 Derivación de la Expresión para el Número de Particiones

Para calcular la expresión que da el número de particiones, vamos a utilizar el conocido método de inducción. De esta forma, tenemos que:

$$\boxed{\mathbf{T} = 1}$$

$$P_N^{\geq k}(1) = 1$$

$$\boxed{\mathbf{T} = 2}$$

$$P_N^{\geq k}(2) = \sum_{i=k}^{N-k} P_i^{\geq k}(1) = N - 2k + 1$$

$$\boxed{\mathbf{T} = 3}$$

$$P_N^{\geq k}(3) = \sum_{i=2k}^{N-k} P_i^{\geq k}(2) = \frac{(1 - 3k + N)(2 - 3k + N)}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{T} = 4}$$

$$P_N^{\geq k}(4) = \sum_{i=3k}^{N-k} P_i^{\geq k}(3) = \frac{(1 - 4k + N)(2 - 4k + N)(3 - 4k + N)}{3}$$

.....

Así, por inducción podemos llegar a la siguiente expresión para un T genérico:

$$P_N^{\geq k}(T) = \frac{(1 - Tk + N)(2 - Tk + N) \dots ((T - 1) - Tk + N)}{(T - 1)!}$$

que, poniéndola sólo en función de factoriales, queda de la siguiente forma:

$$P_N^{\geq k}(T) = \frac{(T + N - Tk - 1)!}{(T - 1)!(N - Tk)!} \quad (\text{C.1})$$

Es fácil observar que de la ecuación anterior se puede deducir que si tomamos mayor que k en vez de mayor o igual, la fórmula de las particiones queda de la siguiente forma:

$$P_N^{\geq k}(T) = \frac{(T + N - T(k + 1) - 1)!}{(T - 1)!(N - T(k + 1))!} \quad (\text{C.2})$$

Apéndice D

Campo Medio y Respuesta Lineal

D.1 Introducción

En este apéndice nos encargaremos de desarrollar una serie de resultados sobre Máquinas de Boltzmann que se dan por hecho en el Capítulo 4.

D.2 Función de Partición en la Aproximación de Campo Medio

La obtención de la función de partición en la aproximación de campo medio se puede calcular de la siguiente forma, basándonos en la definición de la Ecuación 4.14:

$$\begin{aligned} Z_{mf} &= \\ \sum_{\vec{s}} \exp\{-E_{mf}(\vec{s})\} &= \\ \sum_{s_1=\pm 1} \dots \sum_{s_n=\pm 1} \exp\{s_1(W_1 + \theta_1)\} + \dots + \exp\{s_n(W_n + \theta_n)\} &= \\ \exp\{(W_1 + \theta_1)\} + \exp\{-(W_1 + \theta_1)\} \times \dots & \\ \times \exp\{(W_n + \theta_n)\} + \exp\{-(W_n + \theta_n)\} &= \\ = \prod_{i=1}^n 2 \cosh(\theta_i + W_i) & \quad (D.1) \end{aligned}$$

El subíndice n denota el número de neuronas.

D.3 Cálculo de los Valores Esperados en la Aproximación de Campo Medio

Calculemos primero el valor promedio de s_i respecto a la distribución de probabilidad de campo medio (ver Ecuación 4.15). Así, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \langle s_i \rangle_{mf} &\equiv \sum_{\vec{s}} s_i P_{mf}(\vec{s}) = \\
 &\sum_{\vec{s}} s_i \frac{\exp\{-E_{mf}(\vec{s})\}}{Z_{mf}} = \\
 \frac{1}{Z_{mf}} \sum_{s_j \neq s_i} s_j \exp\left\{\sum_{j \neq i} s_j (W_j + \theta_j)\right\} \times \sum_{s_i} s_i \exp\{s_i (W_i + \theta_i)\} &= \\
 \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n 2 \cosh(\theta_k + W_k)}{\prod_{j=1}^n 2 \cosh(\theta_j + W_j)} \times 2 \sinh(\theta_i + W_i) &= \\
 \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n 2 \cosh(\theta_k + W_k)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n 2 \cosh(\theta_j + W_j)} \times \frac{2 \sinh(\theta_i + W_i)}{2 \cosh(\theta_i + W_i)} &= \\
 = \tanh(W_i + \theta_i) \equiv m_i. &\quad (D.2)
 \end{aligned}$$

De forma análoga, se puede calcular el valor esperado de $s_i s_j$ respecto a la distribución de campo medio:

$$\begin{aligned}
 \langle s_i s_j \rangle_{mf} &\equiv \sum_{\vec{s}} s_i s_j P_{mf}(\vec{s}) = \\
 &\sum_{\vec{s}} s_i s_j \frac{\exp\{-E_{mf}(\vec{s})\}}{Z_{mf}} = \\
 \frac{1}{Z_{mf}} \sum_{s_m \neq s_i, s_j} s_m \exp\left\{\sum_{m \neq i, j} s_m (W_m + \theta_m)\right\} \times & \\
 \sum_{s_i, s_j} s_i s_j \exp\left\{\sum_{m=i, j} s_m (W_m + \theta_m)\right\} &= \\
 \frac{\prod_{k=1, k \neq i, j}^n 2 \cosh(\theta_k + W_k)}{\prod_{l=1}^n 2 \cosh(\theta_l + W_l)} \times 2 \sinh(\theta_i + W_i) \times 2 \sinh(\theta_j + W_j) &= \\
 = \tanh(W_i + \theta_i) \tanh(W_j + \theta_j) \equiv m_i m_j. &\quad (D.3)
 \end{aligned}$$

D.4 Valores Esperados y Correlaciones en Función de Z

En esta sección veremos cómo podemos expresar los valores esperados y las correlaciones de las MB's, dependiendo de expresiones que contienen la derivada de la

función de partición Z .

$$\begin{aligned}
 \langle s_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\vec{s}} s_i \exp\{-E(\vec{s})\} = \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_{\vec{s}} s_i \exp\left\{\sum_{i<j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \theta_i\right\} = \\
 &= \frac{1}{Z} \frac{d}{d\theta_i} \left(\sum_{\vec{s}} \exp\left\{\sum_{i<j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \theta_i\right\} \right) = \\
 &= \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\theta_i} \quad (D.4)
 \end{aligned}$$

Evidentemente, el cálculo para las correlaciones se realiza de forma análoga:

$$\begin{aligned}
 \langle s_i s_j \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\vec{s}} s_i s_j \exp\{-E(\vec{s})\} = \\
 &= \frac{1}{Z} \sum_{\vec{s}} s_i s_j \exp\left\{\sum_{i<j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \theta_i\right\} = \\
 &= \frac{1}{Z} \frac{d^2}{d\theta_i d\theta_j} \left(\sum_{\vec{s}} \exp\left\{\sum_{i<j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \theta_i\right\} \right) = \\
 &= \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\theta_i d\theta_j} \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

Claramente, en el contexto de la aproximación de campo medio las Ecuaciones D.4 y D.5 se pueden aproximar por:

$$\frac{1}{Z'} \frac{dZ'}{d\theta_i} \quad y \quad \frac{1}{Z'} \frac{d^2 Z'}{d\theta_i d\theta_j},$$

respectivamente, siendo Z' dada por la Ecuación 4.19.

D.5 Deducción de la Corrección de Respuesta Lineal

En esta sección derivaremos los valores esperados para s_i y $s_i s_j$ en la aproximación de campo medio, pero cuando imponemos la dependencia explícita de θ_i en los campos medios W_i . Esta dependencia puede ser observada en las Ecuaciones 4.12 y 4.21. Recordemos que según la Sección D.4 anterior, los valores esperados para

s_i y $s_i s_j$ se pueden expresar en función de derivadas de la energía libre respecto los umbrales. Así, el valor medio de s_i , si aplicamos la regla de la cadena para derivar $\log Z'$ dado por la Ecuación 4.20, queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \langle s_i \rangle &\approx \frac{d}{d\theta_i} \log Z' = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} + \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial W_j} \right) \log Z' = \\
 &= \frac{\partial \log Z'}{\partial \theta_i} + \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log Z'}{\partial W_j} = \\
 &= \frac{2 \sinh(\theta_i + W_i)}{2 \cosh(\theta_i + W_i)} + \\
 &= \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \theta_i} \left(\frac{2 \sinh(\theta_j + W_j)}{2 \cosh(\theta_j + W_j)} - m_j \right) = \\
 &= \tanh \left(\sum_{i \neq j} w_{ij} m_j + \theta_i \right) + \\
 &= \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \theta_i} \left(\tanh \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} m_i + \theta_j \right) - m_j \right) = \\
 &= m_i + \sum_j \frac{\partial W_j}{\partial \theta_i} (m_j - m_j) = m_i \quad (D.6)
 \end{aligned}$$

Podemos observar, que la contribución proporcional al término $\frac{\partial W_j}{\partial \theta_i}$, se anula en la expresión anterior. En la misma expresión, hemos utilizado la solución $W_i = \sum_{i \neq j} w_{ij} m_j$ dada por el sistema de ecuaciones de campo medio (ver la Ecuación 4.21).

Basándonos en la deducción anterior, en la que obtuvimos $\frac{dZ'}{d\theta_i} = Z' m_i$, el valor medio de $s_i s_j$ vendrá expresado por:

$$\begin{aligned}
 \langle s_i s_j \rangle &\approx \frac{1}{Z'} \frac{d^2 Z'}{d\theta_i d\theta_j} = \frac{1}{Z'} \frac{d}{d\theta_j} \left(\frac{dZ'}{d\theta_i} \right) = \\
 &= \frac{1}{Z'} \frac{d}{d\theta_j} (Z' m_i) = m_i m_j + \frac{dm_i}{dm_j} = m_i m_j + A_{ij} \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

D.6 Cálculo de la Matriz A_{ij} de Corrección de Respuesta Lineal

En esta sección pretendemos deducir la corrección de respuesta lineal $A_{ij} = \frac{dm_i}{dm_j}$ para MB's.

Así, sabiendo que:

$$[\tanh(\alpha)]' = \alpha' - \alpha' \tanh^2(\alpha) = \frac{\alpha'}{\cosh^2(\alpha)}$$

podemos introducir variaciones en la Ecuación 4.12, quedando de la forma:

$$\delta m_i = \frac{\sum_{j \neq i} w_{ij} \delta m_j + \delta \theta_i}{\cosh^2\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} m_j + \theta_i\right)} = (1 - m_i^2) \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} \delta m_j + \delta \theta_i\right) \quad (\text{D.8})$$

De este modo, reunificando términos, las variaciones del umbral quedan de la siguiente manera:

$$\delta \theta_i = \sum_j \delta m_j \left(\frac{\delta_{ij}}{1 - m_i^2} - w_{ij} \right) \quad (\text{D.9})$$

Haciendo la suposición de la dependencia explícita $m_i(\theta_1 \dots \theta_n)$ (respuesta lineal), entonces la diferencial de la función m_i de θ_n variables (n es el número de neuronas) vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\delta m_i = \sum_j^n \frac{dm_i}{d\theta_j} \delta \theta_j$$

y, por tanto, de la Ecuación D.9 podemos sacar $\frac{d\theta_j}{dm_i}$ como:

$$(A^{-1})_{ij} \equiv \frac{d\theta_j}{dm_i} = \frac{\delta_{ij}}{1 - m_i^2} - w_{ij} \quad (\text{D.10})$$

siendo éste el resultado principal para la aproximación de respuesta lineal en Máquinas de Boltzmann.

D.7 Modelo de Probabilidad Factorizado para Campo Medio

En esta sección vamos a deducir cuál es la distribución de probabilidad de la aproximación de campo medio. En las Ecuaciones 4.15 y 4.16 podemos expresar la distribución de probabilidad en la aproximación de campo medio como:

$$\begin{aligned}
p_{mf}(\vec{s}) &= \frac{\exp\{\sum_i s_i(W_i + \theta_i)\}}{\prod_i 2 \cosh(W_i + \theta_i)} = \\
&= \frac{\prod_i \exp\{s_i(W_i + \theta_i)\}}{\prod_i 2 \cosh(W_i + \theta_i)} = \\
&= \prod_i \frac{\exp\{s_i(W_i + \theta_i)\}}{\exp\{(W_i + \theta_i)\} + \exp\{-(W_i + \theta_i)\}} \quad (D.11)
\end{aligned}$$

Ahora, podemos observar que si en la expresión anterior sustituimos $s_i = \pm 1$, obtenemos:

$$p_{mf} = \begin{cases} \text{Si } s_i = +1 & \text{entonces } \prod_i \frac{1}{1+e^{-2(W_i+\theta_i)}} \\ \text{Si } s_i = -1 & \text{entonces } \prod_i \frac{1}{e^{2(W_i+\theta_i)}+1} \end{cases} \quad (D.12)$$

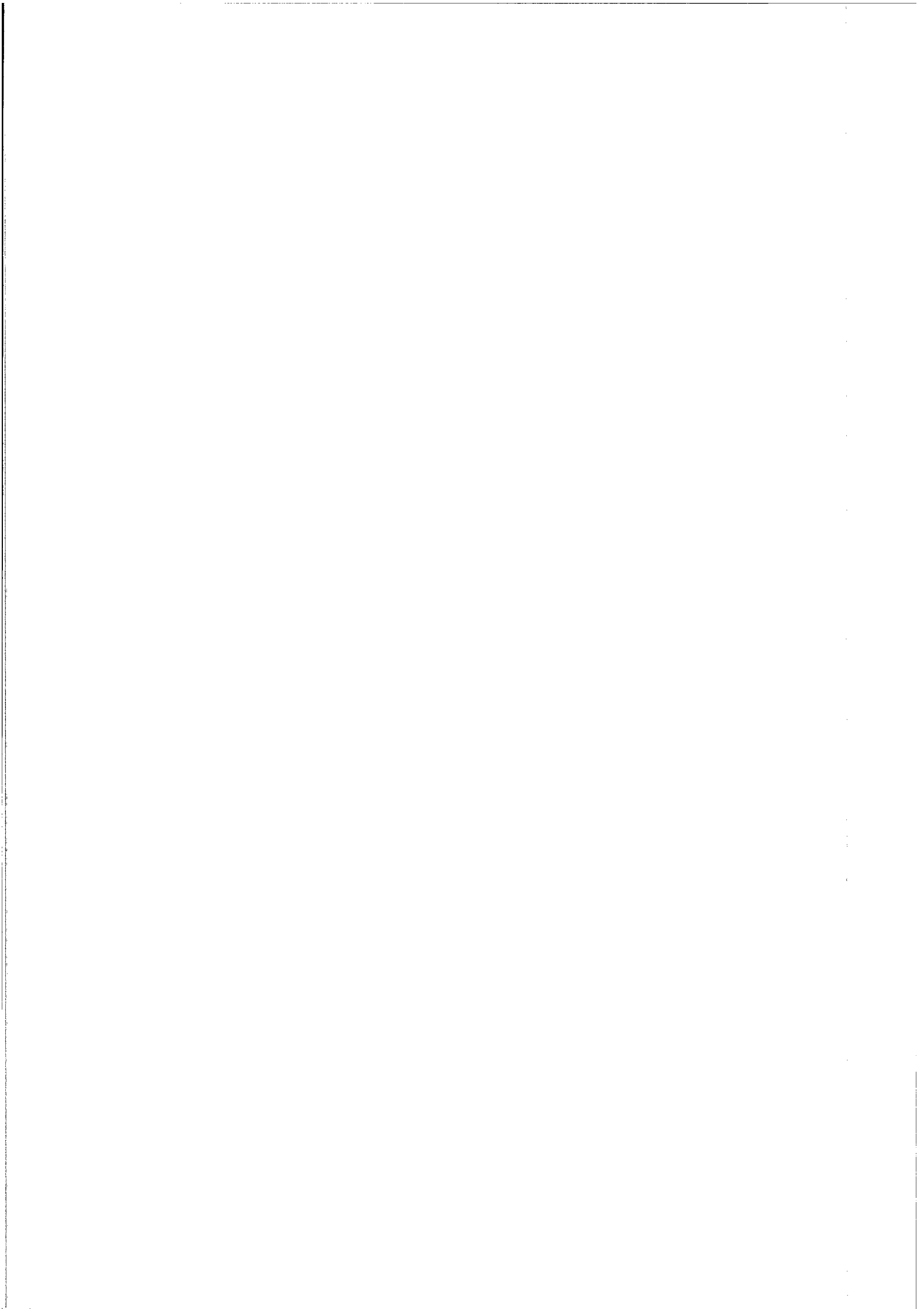
Por tanto, podemos expresar la distribución de probabilidad para la aproximación de campo medio de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
p_{mf} &= \prod_i \frac{1}{1 + e^{-2s_i(W_i+\theta_i)}} = \\
&= \prod_i \frac{1}{2} (1 + \tanh(s_i(W_i + \theta_i))) = \\
&= \prod_i \frac{1}{2} (1 + s_i \tanh((W_i + \theta_i))) = \\
&= \prod_i \frac{1}{2} (1 + s_i m_i). \quad (D.13)
\end{aligned}$$

En este último paso se han utilizado las propiedades:

$$\frac{1}{1 + e^{-2\alpha}} = \frac{1}{2} (1 + \tanh \alpha), \quad \tanh(-\alpha) = -\tanh \alpha.$$

Referencias



Bibliografía

- [Abarbanel et al., 1996] Abarbanel, H. D. I., Rabinovich, M. I., Selverston, A., Bazhenov, M. V., Huerta, R., Rubchinsky, L. L., y Sushchik, M. M. (1996). The synchronization of neural assemblies. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 166:1–28.
- [Abeles, 1982] Abeles, M. (1982). Local cortical circuits. New York: Springer.
- [Ackley et al., 1985] Ackley, D., Hinton, G., y Sejnowski, T. (1985). A learning algorithm for boltzmann machines. *Cognitive Science*, 9:147–169.
- [Adrian y Zotterman, 1926a] Adrian, E. D. y Zotterman, Y. (1926a). The impulses produced by sensory nerve endings: Part i. *J. Physiol. (Lond.)*, 61:49–72.
- [Adrian y Zotterman, 1926b] Adrian, E. D. y Zotterman, Y. (1926b). The impulses produced by sensory nerve endings: Part ii: The response of a single end organ. *J. Physiol. (Lond.)*, 61:151–171.
- [Adrian y Zotterman, 1926c] Adrian, E. D. y Zotterman, Y. (1926c). The impulses produced by sensory nerve endings: Part iii: Impulses set up by touch and pressure. *J. Physiol. (Lond.)*, 61:465–483.
- [Afraimovich et al., 1994] Afraimovich, V. S., Nekorkin, V. I., Osipov, G. V., y Shalfeev, V. D. (1994). *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*, volumen 6 de *World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. Series Editor: Leon O. Chua*. World Scientific. Singapore – New Jersey – London – Hong Kong.
- [Blair y Erlanger, 1932] Blair, E. A. y Erlanger, J. (1932). Responses of axons to brief shocks. *Proc. Soc. Exper. Biol. Med.*, 29:926–927.
- [Braun et al., 1994] Braun, H. A., H. Wissing, K. S., y Hirsch, M. C. (1994). Oscillation and noise determine signal transduction in shark multimodal sensory cells. *Letters to Nature, Nature*, 367.
- [Brink et al., 1946] Brink, F., Bronk, D. W., y Larrabee, M. (1946). Chemical excitation of nerve. *Ann. New York Acad. Sci.*, 47:457–485.
- [Buck, 1988] Buck, J. (1988). Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II, *Quart. Rev. Biol.*, 63:265–289.

- [Buck y Buck, 1976] Buck, J. y Buck, E. (1976). Synchronous fireflies. *Scientific American*, 243:74–85.
- [Budelli et al., 1991] Budelli, R., Torres, J., Castigeras, E., y Enrich, H. (1991). Two-neurons network. i. integrate and fire pacemaker models. *Biological Cybernetics*, 66:95–101.
- [Buhmann y Schulten, 1987] Buhmann, J. y Schulten, K. (1987). Influence of noise on the function of a "physiological" neural network. *Biological Cybernetics*, 56(5–6):313–27.
- [Burgess et al., 1993] Burgess, N., O'Keefe, J., y Recce, M. (1993). Using hippocampal 'place cells' for navigation, exploiting phase coding. En *Advances in Neural Information Processing Systems 5*, (S.J. Hanson J.D. Cowan C.L. Giles, eds.), págs. 929–936. Morgan Kaufmann, San Mateo.
- [Cajal, 1909] Cajal, S. R. (1909). *Histologie du système nerveux de l'homme et des vertébrés*. A. Maloine, Paris.
- [Deco y Obradovic, 1996] Deco, G. y Obradovic, D. (1996). *An Information-Theoretic Approach to Neural Computing*. Springer.
- [der Malsburg, 1981] der Malsburg, C. V. (1981). *The Correlation Theory of Brain Function*. Internal Report, Max-Planck-Institute of Biophysical Chemistry Gottingen, West Germany.
- [der Malsburg, 1994] der Malsburg, C. V. (1994). The correlation theory of brain function. En Domany, E., van Hemmen, J. L., y Schulten, K., editores, *Models of neural networks II*. Springer Verlag.
- [der Malsburg y Schneide, 1986] der Malsburg, C. V. y Schneide, W. (1986). A neural cocktail-party processor. *Biol. Cybern.*, 54:29–40.
- [Durbin y Willshaw, 1987] Durbin, R. y Willshaw, D. (1987). An analogue approach to the traveling salesman problem using an elastic net method. *Nature*, 326:689–691.
- [Eckhorn et al., 1988] Eckhorn, R., Bauer, R., Jordan, W., Brosch, M., Kruse, W., Munk, M., y Reitboeck, H. J. (1988). Coherent oscillations: A mechanism of feature linking in the visual cortex? *Biological Cybernetics*, 60:121–130.
- [Fatt y Katz, 1952] Fatt, P. y Katz, B. (1952). Spontaneous subthreshold activity at motor nerve endings. *J. Physiol.*, 117:109–128.
- [Feller, 1993] Feller, W. (1993). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volumen I. J. Wiley an Sons.
- [Fischer y Hertz, 1991] Fischer, K. y Hertz, J. (1991). *Spin Glasses*, volumen I. Cambridge: Cambridge University Press.

- [Fitzhugh, 1961] Fitzhugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, 1:445–466.
- [Fujii et al., 1996] Fujii, H., Ito, H., Aihara, K., Ichinose, N., y Tsukada, M. (1996). Dynamical cell assembly hypothesis – theoretical possibility of spatio-temporal coding in the cortex. *Neural Networks*, 9(8):1303–1350.
- [Galland, 1993] Galland, C. (1993). The limitations of deterministic boltzmann machine learning. *Network*, (4):355–380.
- [Gerstein y Mandelbrot, 1964] Gerstein, G. y Mandelbrot, B. (1964). Random walk models for the spike activity of single neuron. *Biophys. J.*, 4:41–68.
- [Ginzburg y Sompolinsky, 1994] Ginzburg, I. y Sompolinsky, H. (1994). Theory of correlations in stochastic neural networks. *Physical Review E*, (50):3171–3191.
- [Gray et al., 1989] Gray, C. M., König, P., Engel, A. K., y Singer, W. (1989). Stimulus-specific neuronal oscillations in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. *Nature*, 338:334–337.
- [Haken, 1996] Haken, H. (1996). Noise in the brain: A physical network model. *Int. J. Neural Syst*, 7(4):551–557.
- [Hebb, 1949] Hebb, D. O. (1949). *The Organization of Behavior*. John Wiley & Sons, New York.
- [Hertz et al., 1991] Hertz, J., Krogh, A., y Palmer, R. G. (1991). *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [Heskes y Kappen, 1991] Heskes, T. y Kappen, B. (1991). Learning processes in neural networks. *Physical Review A*, 44(4):2718–2726.
- [Hinton, 1989] Hinton, G. (1989). Deterministic boltzmann learning performs steepest descent in weight-space. *Neural Computation*, (1):143–150.
- [Hinton y Sejnowski, 1983] Hinton, G. E. y Sejnowski, T. J. (Washington 1983). Optimal perceptual inference. En *In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, págs. 448–453. New York: IEEE.
- [Hoffman et al., 1995] Hoffman, P. M., Rodríguez, F. B., J. A. Sigüenza, V. L., y Carrillo-Menéndez, S. (1995). A simple probabilistic neural model producing multimodal ISHS. En Mira y Sandoval, editores, *Lecture Notes in Computer Science (From Natural to Artificial Neural Computation)*, volumen 930 de LNCS, págs. 163–173. Springer Verlag.
- [Holden, 1976] Holden, A. V. (1976). *Models of Stochastic Activity of Neurons*. Lecture Notes in Biomathematics. S. Levin, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York.

- [Holt et al., 1996] Holt, G., Softky, W., Kock, C., y Douglas, R. J. (1996). A comparison of discharge variability *in vitro* and *in vivo* in cat visual cortex neurons. *J. Neurophysiol.*, 75:1806–1814.
- [Hopfield, 1982] Hopfield, J. J. (USA 1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. En *Proceedings of National Academy of Sciences*, número 81, págs. 2554–2558. Reprinted in Anderson and Rosenfeld (1988).
- [Itzykson y Drouffe, 1989] Itzykson, C. y Drouffe, J. (1989). *Statistical Field Theory*. Cambridge University Press.
- [Jalife, 1984] Jalife, J. (1984). Mutual entrainment and electrical coupling as mechanisms for synchronous firing of rabbit sinoatrial pacemaker cells. *J. Physiol.*, 356:221–243.
- [Jonhson et al., 1979] Jonhson, T. L., Wright, S. C., y Segall, A. (1979). Filtering of muscle artifact from the eeg. *IEEE Trans. Biomed. Engrg.*, BME-26:556–563.
- [Kampen, 1992] Kampen, N. G. V. (1992). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland.
- [Kandel et al., 1991] Kandel, E. R., Schwartz, J. M., y Jessell, T. M. (1991). *Principles of Neural Science*. New York: Elsevier, 3rd ed. edición.
- [Kappen, 1997] Kappen, B. (1997). Stimulus dependent correlations in stochastic networks. *Physical Review E*, 44:5849–5858.
- [Kappen, 1995] Kappen, H. (1995). Deterministic learning rules for boltzmann machines. *Networks*, (8):537–548.
- [Kappen y Rodríguez, 1997a] Kappen, H. J. y Rodríguez, F. B. (1997a). Accelerated learning in boltzmann machines using mean field theory. En *7th International Conference of Artificial Neural Networks-ICANN97*, págs. 301–306. Springer-Verlag.
- [Kappen y Rodríguez, 1997b] Kappen, H. J. y Rodríguez, F. B. (1997b). Mean field approach to learning in boltzmann machines. *Pattern Recognition Letters*, 18(11-13):1317–1322.
- [Kappen y Rodríguez, 1998a] Kappen, H. J. y Rodríguez, F. B. (1998a). Boltzmann machine learning using mean field theory and linear response correction. En *Advances in Neural Information Processing Systems 10 (NIPS 97)*, (M. I. Jordan, M. J. Kearns, S. A. Solla, eds.), págs. 280–286. MIT Press.
- [Kappen y Rodríguez, 1998b] Kappen, H. J. y Rodríguez, F. B. (1998b). Efficient learning in boltzmann machines using linear response theory. *Neural Computation*, 10:1137–1156.

- [Kemeny y Snell, 1976] Kemeny, J. G. y Snell, J. L. (1976). *Finite Markov Chains*. Springer-Verlag, New York Berlín Heidelberg Tokyo.
- [Koch, 1999] Koch, C. (1999). *Biophysics of Computation. Information Processing in Single Neurons*. Oxford University Press: New York, Oxford.
- [Koch y Segev, 1998] Koch, C. y Segev, I., editores (1998). *Methods in Neuronal Modeling. From Synapses to Networks*. MIT Press: Cambridge, Massachusetts, second edición.
- [Kosowsky y Yuille, 1994] Kosowsky, J. y Yuille, A. (1994). The invisible hand algorithm: Solving the assignment problem with statistical physics. *Neural Networks*, 3:477-490.
- [Kröse y van der Smagt, 1993] Kröse, B. J. A. y van der Smagt, P. P. (1993). *An Introduction to Neural Networks*. Quinta edición.
- [Kullback, 1959] Kullback, S. (1959). *Information Theory and Statistics*.
- [Kuramoto, 1984] Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, Berlin.
- [Landahl et al., 1943] Landahl, H., McCulloch, W. S., y Pitts, W. (1943). A statistical consequence of the logical calculus of nervous nets. *Bull. Math. Biophysics*, 5:135-137.
- [Leisink y Kappen, 1998] Leisink, M. A. R. y Kappen, H. J. (1998). Learning higher order boltzmann machines using linear response. En *8th International Conference of Artificial Neural Networks-ICANN98*, volumen 2, págs. 511-516. Springer-Verlag.
- [Leonel y Budelli, 1996] Leonel, G. y Budelli, R. (1996). Two-neurons network. ii. leaky integrator pacemaker models. *Biological Cybernetics*, 74:131-137.
- [Levenberg, 1944] Levenberg, K. (1944). A method for the solution of certain problems in least-squares. *Quart. Appl. Math*, 2:164-168.
- [Liljenström y Wu, 1995] Liljenström, H. y Wu, X. (1995). Noise-enhanced performance in a cortical associative memory mode. *Intl. J. Neural Systems.*, 6:19-29.
- [Longtin et al., 1991] Longtin, A., Bulsara, A., y Moss, F. (1991). Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Physical Review Letters*, 67(5):656-659.
- [Longtin et al., 1994] Longtin, A., Bulsara, A., Pierson, D., y Moss, F. (1994). Bistability and the dynamics of periodically forced sensory neurons. *Biological Cybernetics*, 70:569-578.

- [López et al., 1993] López, V., Sigüenza, J. A., Dorronsoro, J. R., y Carrillo-Menendez, S. (1993). Stochastic specificity in neural interaction. En Gielen, S. y Kappen, B., editores, *ICANN 93*. Springer Verlag.
- [Maass, 1996] Maass, W. (1996). Lower bounds for the computational power of networks of spiking neurons. *Neural Computation*, 8(1):1–40.
- [Marquardt, 1963] Marquardt, D. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11:431–441.
- [McCulloch y Pitts, 1943] McCulloch, W. S. y Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophysics*, 5:115–133.
- [McKenna et al., 1992] McKenna, T., Davis, J., y Zornetzer, S., editores (1992). *Single Neuron Computation*. Academic Press, INC. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.
- [Mirollo y Strogatz, 1990] Mirollo, R. E. y Strogatz, S. H. (1990). Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(6):1645–1662.
- [Nagumo et al., 1962] Nagumo, J. S., Arimoto, S., y Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50:2061–2070.
- [Neal, 1993] Neal, R. M. (1993). *Probabilistic Inference Using Markov Chain Monte Carlo Methods*. Technical Report CRG-TR-93-1, Department of Computer Science, University of Toronto.
- [Osanger, 1936] Osanger, L. (1936). Electric moments of molecules in liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 58:1486–1493.
- [Parisi, 1988] Parisi, G. (1988). *Statistical Field Theory*. Addison-Wesley.
- [Pearl, 1988] Pearl, J. (1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann.
- [Peskin, 1975] Peskin, C. S. (1975). Mathematical aspects of heart physiology. *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York*, págs. 268–278.
- [Peterson y Anderson, 1987] Peterson, C. y Anderson, J. R. (1987). A mean field theory learning algorithm for neural networks. *Complex Systems*, (1):995–1019.
- [Plefka, 1982] Plefka, T. (1982). Convergence condition of the tap equation for the infinite range ising spin glass model. *Journal of Physics A: Math. Gen.*, 15:1971–1978.
- [Press et al., 1992] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., y Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C, Second Edition*. Cambridge University Press.

- [Pérez et al., 1996] Pérez, C. J., A. Corral, A. D.-G., Chistensen, K., y Arenas, A. (1996). On self-organized criticality and synchronization in lattice models of coupled dynamical systems. *Int. J. Mod. Phys*, 10:1111–1151.
- [R. D. Traub y Wong, 1989] R. D. Traub, R. M. y Wong, R. K. S. (1989). Model of origin of rhythmic population oscillations in the hippocampal slice. *Science*, 243:1319–1325.
- [Rieke et al., 1997] Rieke, F., Warland, D., de Ruyter van Steveninck, R., y Bialek, W. (1997). *Spikes: Exploring the Neuronal Code*. A Bradford Book. MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England.
- [Rodríguez y López, 1997] Rodríguez, F. B. y López, V. (1997). Stability and hebbian learning in populations of probabilistic neurons. En Mira, Moreno-Díaz, y Cabestany, editores, *Biological and Artificial Computation: From Neuroscience to Technology*, volumen 1240 de *Lecture Notes in Computer Science*, págs. 433–442. Springer Verlag.
- [Rodríguez y López, 1999] Rodríguez, F. B. y López, V. (1999). Periodic and synchronous firing in an ensemble of identical stochastic units: Structural stability. En Mira, J. y Sánchez-Andres, J. V., editores, *Foundations and Tools for Neural Modeling*, volumen 1606 de *Lecture Notes in Computer Science*, págs. 367–376. Springer Verlag.
- [Rose et al., 1967] Rose, J. E., Brugge, J. F., y Hind, J. E. (1967). Phase-locked response to low-frequency tones in single auditory nerve fibers of the squirrel monkey. *J. Neurophysiol.*, 30:769–793.
- [Rudd y Brown, 1997] Rudd, M. E. y Brown, L. G. (1997). Noise adaptation in integrate-and fire neurons. *Neural Computation*, 9(5):1047–1069.
- [Rumelhart et al.,] Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., y Group, P. R. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Volume 1: Foundations*. Cambridge: MIT Press.
- [Russell et al., 1980] Russell, M. J., Switz, G. M., y Thompson, K. (1980). Olfactory influences on the human menstrual cycle. *Pharmacol. Biochem. Behav*, 13:737–738.
- [Saul y Jordan, 1994] Saul, L. y Jordan, M. (1994). Learning in boltzmann trees. *Neural Computation*, (6):1174–1184.
- [Shamblin y Stevens, 1979] Shamblin, J. E. y Stevens, G. T. J. (1979). *Investigación de Operaciones, un Enfoque Fundamental*. McGraw-Hill.
- [Sherman et al., 1988] Sherman, A., Rinzel, J., y Keizer, J. (1988). Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing. *Biophys. J.*, 54:411–425.

- [Sherrington, 1906] Sherrington, C. (1906). *The Integrative Action on the Nervous System (Reimpresión, 1947)*. New Haven, Yale University Press.
- [Shimokawa et al., 1999] Shimokawa, T., Rogel, A., Pakdaman, K., y Sato, S. (1999). Stochastic resonance a spike-timing precision in an ensemble of leaky integrate and fire neuron models. *Physical Review E*, 59(3):3461–3470.
- [Siegel, 1990] Siegel, R. M. (1990). Non-linear dynamical system theory and primary visual cortical processing. *Physica (Amsterdam) D*, (42):385–395.
- [Sinclair, 1993] Sinclair, A. (1993). *Algorithms for Random Generation and Counting: A Markov Chain Approach*. Boston: Birkhäuser.
- [Singer y Gray, 1995] Singer, W. y Gray, C. M. (1995). Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis. *Annu Rev Neurosci*, 18:555–586.
- [Spiegel y Abellanas, 1988] Spiegel, M. R. y Abellanas, L. (1988). *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*. Serie de Compendios Schaum. McGraw-Hill.
- [Srinivasan y Bernard, 1976] Srinivasan, M. V. y Bernard, G. D. (1976). A proposed mechanism for multiplication of neural signals. *Biol. Cybernet.*, 21:227–236.
- [Stein, 1965] Stein, R. B. (1965). A theoretical analysis of neuronal variability. *Biophysics J.*, 5:173–194.
- [Thouless et al., 1977] Thouless, D., Anderson, P., y Palmer, R. (1977). Solution of solvable model of a spin glass. *Philosophical Magazine*, 35:593–601.
- [Tuckwell, 1989] Tuckwell, H. C. (1989). *Stochastic Processes in Neurosciences*, volumen CBMS 56. SIAM.
- [Tuckwell y Rodriguez, 1998] Tuckwell, H. C. y Rodriguez, R. (1998). Analytical and simulation results for stochastic fitzhugh-nagumo neurons and neural networks. *J. Comput. Neurosci.*, 5(1):91–113.
- [Turner, 1979] Turner, J. C. (1979). *Matemática Moderna Aplicada. Probabilidades, Estadística e Investigación Operativa*, volumen 92. Alianza Universal.
- [Varona, 1997] Varona, P. (1997). *Escalas Modelos y Técnicas de Simulación en Neurociencia Computacional*. Ph. D tesis doctoral.
- [Walker, 1969] Walker, T. J. (1969). Acoustic synchrony: Two mechanisms in the snowy tree cricket. *Science*, 166:891–894.
- [Wang, 1995] Wang, D. L. (1995). Emergent synchrony in locally coupled neural oscillators. *IEEE transactions on Neural Networks*, 6(4):941–948.
- [Wehr y Laurent, 1996] Wehr, M. y Laurent, G. (1996). Odour encoding by temporal sequences of firing in oscillating neural assemblies. *Nature*, 384:162–166.

- [Widrow y Hoff, 1960] Widrow, B. y Hoff, M. E. (1960). Adaptive switching circuits. En *In 1960 IRE WESCON Convention Record*, volumen part 4, págs. 96–104. New York: IRE. Reprinted in Anderson and Rosenfeld (1988).
- [Young, 1983] Young, A. (1983). Direct determination of the probability distribution for the spin-glass order parameter. *Physical Review Letters*, 51:1206–1209.
- [Yuille et al., 1991] Yuille, A., Geiger, D., y Bülthoff, H. (1991). Stereo integration, mean field theory and psychophysics. *Network*, 2:423–442.
- [Yuille y Kosowsky, 1994] Yuille, A. y Kosowsky, J. (1994). Statistical physics algorithms that converge. *Neural Computation*, 6:341–356.

100

Reunido el tribunal que suscribe en el día
de la fecha, acordó calificar la presente Tesis
doctoral con Sobresaliente "cum laude" por unanimidad
Madrid, 21 de Noviembre de 1998

Victor Fairén

A. Suárez

