



Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

**Análisis de ecuaciones elípticas
completamente no lineales, impropias
respecto a términos de orden cero.**

Memoria presentada para optar al grado de

**Doctor en Matemáticas
con Mención Europea**

por

Fernando Charro Caballero

Dirigido por

D. Ireneo Peral Alonso

Madrid, 2009

Índice general

Notaciones	VII
Precedents, summary of contents and conclusions	IX
0.1. Historical precedents and aims	IX
0.2. Some models	X
0.3. Summary of contents and conclusions	XVII
Introducción y preliminares	1
0.4. Antecedentes históricos y objetivos	1
0.5. Algunos modelos	2
0.6. Preliminares sobre soluciones de viscosidad	10
0.7. Estructura de la memoria y resumen de contenidos	17
1. Problemas con segundo miembro cóncavo y cóncavo-convexo	33
1.1. Introducción	33
1.2. Resultados de comparación en el caso cóncavo. Unicidad	37
1.3. Existencia de solución para ecuaciones con segundo miembro cóncavo	44
1.4. Existencia y no existencia de soluciones para el problema cóncavo-convexo	46
1.4.1. Existencia de soluciones para λ pequeño	47
1.4.2. No existencia para λ grande	50
1.4.3. Existencia de un $\lambda_{\text{máx}}$ maximal y una solución minimal para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$	52
1.5. Ejemplos de aplicación	52
1.5.1. Ecuaciones uniformemente elípticas completamente no lineales	53
1.5.2. El problema lineal con coeficientes variables	57
1.5.3. El p -laplaciano, $p < \infty$	60
1.5.4. El infinito laplaciano 3-homogéneo	65
1.5.5. El infinito laplaciano 1-homogéneo	67
1.5.6. Ecuaciones de tipo Monge-Ampère	70
2. Multiplicidad de soluciones de ecuaciones completamente no lineales uniformemente elípticas con un lado derecho cóncavo-convexo	77
2.1. Introducción	77
2.2. Una propiedad de monotonía en el semiespacio	82

2.3.	Estimaciones L^∞ uniformes: el argumento de <i>blow-up</i>	87
2.4.	Prueba del resultado de multiplicidad	91
2.4.1.	Un Principio de Comparación	91
2.4.2.	Existencia de solución para $0 < \lambda \leq \lambda_{\text{máx}}$ y no existencia para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$	93
2.4.3.	Existencia de una segunda solución en $(0, \lambda_{\text{máx}})$ mediante argumentos de Teoría del Grado	94
2.5.	Ejemplos de aplicación	101
2.5.1.	Operadores extremales de Pucci	101
2.5.2.	Operadores cóncavos y convexos	104
2.5.3.	Una clase de operadores de Isaacs	104
3.	Límite cuando $p \rightarrow \infty$ de p-Laplacianos con un lado derecho cóncavo y cóncavo-convexo	107
3.1.	Introducción	107
3.2.	Preliminares	113
3.3.	El problema límite	115
3.4.	Comparación y unicidad para el problema límite cóncavo	118
3.5.	Existencia de soluciones para el problema límite cóncavo. Soluciones límite	124
3.5.1.	Cotas a priori. Existencia de solución límite	124
3.5.2.	Estimaciones L^∞ de las soluciones del problema límite cóncavo	127
3.5.3.	Soluciones explícitas del problema límite en dominios especiales	129
3.6.	Existencia de soluciones para el problema límite cóncavo-convexo. Soluciones límite	130
3.6.1.	Resultados de no existencia para el problema límite	130
3.6.2.	Existencia de una curva de soluciones minimales para el problema límite	134
3.6.3.	Obtención de la curva de soluciones minimales como límite de soluciones minimales con $p < \infty$	137
3.6.4.	Multiplicidad de soluciones para el problema límite en dominios especiales.	139
3.7.	Apéndice: Una desigualdad de Morrey asintóticamente óptima	141

Índice de figuras

3.6.1. Zona de no existencia de soluciones para el problema cóncavo-convexo (3.6.2) dada por las Propositiones 3.6.1 y 3.6.2	131
3.6.2. Curva de soluciones minimales del problema (3.6.2) y zonas de no existencia dadas por las Propositiones 3.6.1, 3.6.2, 3.6.4 y 3.6.6.	136
3.6.3. Problema límite cóncavo-convexo: rama de soluciones dadas por conos cuando $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$	139
3.6.4. Número de raíces de la ecuación $\Phi_\Lambda(t) = 1$ en función de Λ	140

Agradecimientos

Hay muchas personas que me han acompañado a lo largo de estos años y a las que me gustaría agradecer su parte en lo que hoy es esta tesis, porque sin ellos, no hubiera sido lo mismo. ¡No es la meta, es el camino y quienes caminan a nuestro lado!

En primer lugar, a Ireneo Peral, mi director, por lo que me ha ayudado a crecer como investigador y como persona. A Magdalena Walias, por su apoyo y su ayuda desde el primer momento.

A Jesús García Azorero y Julio D. Rossi, porque siempre he podido contar con ellos.

A Boumediene Abdellaoui, Eduardo Colorado, Luigi Montoro y Ana Primo, mis hermanos académicos.

A Daniel Faraco, Giuseppe Mingione, Augusto Ponce y María Jesús Esteban, por leerse este manuscrito.

Durante la tesis, he disfrutado de sendas estancias breves de tres meses de duración en la *University of Pittsburgh* (USA) y en el *Politecnico di Milano* (Italia). Querría agradecer a los profesores Juan J. Manfredi y Sandro Salsa su magnífica hospitalidad, siempre me sentí en casa cuando estaba tan lejos de ella.

En estos años he tenido una Beca FPU y posteriormente una plaza de profesor ayudante en la UAM, que me dieron la tranquilidad necesaria y que quiero agradecer.

Al Departamento de Matemáticas de la UAM, por el gran ambiente de trabajo.

A mis compañeros en el despacho 513, Adrián, Elías, José Antonio, Mari Luz, Nati y Paloma. ¡Qué decir! Verdaderamente no tengo palabras para vosotros.

A Elena, Angélica, Manuel, Javi, David, Ana Jiménez y tantos otros... ¡gracias!

Y por supuesto, a mi familia, mi hermano y mis padres, esta tesis es también vuestro éxito.

Notaciones

	Descripción	Pág.
$ x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$	Norma Euclídea de un vector en \mathbb{R}^n	1
∇u	Vector gradiente de la función u	1
$D^2 u$	Matriz Hessiana de la función u	1
n	Dimensión del espacio ambiente \mathbb{R}^n	2
$n(x)$	Vector normal a una superficie en un punto x	2
\mathcal{S}^n	Espacio de matrices reales simétricas $n \times n$	11
$X \leq 0$	Matriz semidefinida negativa	11
$X \leq Y$	Relación de orden entre matrices	11
$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^{\pm}(\cdot)$	Operadores extremales de Pucci	11
$J_{\Omega}^{2, \pm} u(x), \bar{J}_{\Omega}^{2, \pm} u(x)$	Semijets de u en el punto x y sus cierres	14
$\lambda_1 \equiv \lambda_1(\Omega)$	Primer autovalor para un operador general	35
$p \otimes q = (p_i q_j)_{1 \leq i, j \leq n}$	Producto tensorial de $p, q \in \mathbb{R}^n$	39
$d(x)$	Distancia normalizada de x a $\partial\Omega$	45
λ_0	Umbral de existencia para λ pequeño en el problema cóncavo-convexo	47
$\hat{\lambda}$	Umbral de no existencia del cóncavo-convexo	50
λ_{\max}	Valor maximal para el intervalo de existencia en el problema cóncavo-convexo	52
Δ_p	p -Laplaciano, $1 < p < \infty$	60
$\lambda_1(p; \Omega)$	Primer autovalor del p -Laplaciano	62
Δ_{∞}	∞ -Laplaciano 3-homogéneo	65
$\tilde{\Delta}_{\infty}$	∞ -Laplaciano 1-homogéneo	67
\mathbb{R}_+^n	Semiespacio $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_n > 0$	79
$G(X) = F(0, X)$	Operador de <i>blow-up</i>	79
\mathcal{O}^n	Matrices ortogonales $Q \in \mathcal{S}^n$ tales que $Q \cdot Q^t = Id$	79
\hat{r}	Exponente crítico del problema cóncavo-convexo	80
$\Lambda_1(\Omega)$	Primer autovalor del ∞ -Laplaciano límite	109
Λ	Parámetro en los problemas límite	110
$\hat{\Lambda}$	Umbral de no existencia del cóncavo-convexo límite	112

\mathcal{R}	Conjunto arista.....	129
\mathcal{M}	Conjunto de máxima distancia al borde.....	129

Precedents, summary of contents and conclusions

0.1. Historical precedents and aims

The modern theory of Partial Differential Equations is constructed around the natural notion of solution associated to each precise kind of problem.

In the classical theory it is assumed that the solutions satisfy the equation pointwise since they are regular enough to allow all the required derivatives.

When trying to find solutions, it is sometimes better to enlarge the class of functions where we look for the solution, interpreting the equation in some generalized or *weak* sense. In a second step, it is studied if the generalized solution we have found is more regular, desirably classical, often as a consequence of the fact that it is a solution of the equation.

This strategy of dividing the problem has a long tradition; for example, it was necessary in the classical Dirichlet's work on his variational principle and it gave rise to Weirstrass' and then Hilbert's works and the theory of weak solutions with the notion of weak solution as is known nowadays, mainly based on integration by parts. We will not make much use of this kind of solutions along this work.

Another classical example is the *eikonal equation* $|\nabla u|^2 = 1$ which appears in *geometric optics*. The structure of the equation itself makes it impossible to use integration by parts in a sensible way. For this example, it is well known the Monge's method of characteristics, which yields local solutions, and more recently, in the decade of 1980, the notion of *viscosity solution* introduced by P. L. Lions and M. Crandall.

The notion of viscosity solution has its origin, in some sense, in other classical method: Perron's method. The results of existence constituting *Perron's method* are based on ideas in works by H. Poincaré in 1887 and 1890 which were developed and simplified by O. Perron in 1923.

Informally, this method consist of constructing the solution of $-\Delta v = 0$ as the supremum of functions which only satisfy the inequality $-\Delta v \leq 0$ and the boundary data.

Implicit in the notion of solution in Perron's method is the *Maximum Principle*:

Suppose that $u \in \mathcal{C}^2$ is subharmonic, that is, $-\Delta u \leq 0$. If $\phi \in \mathcal{C}^2$ is a function such that $u - \phi$ has a maximum at x_0 , then $D^2(u - \phi)(x_0) \leq 0$ in the sense of symmetric matrices. In particular, $-\Delta\phi(x_0) \leq -\Delta u(x_0) \leq 0$. Note that replacing subsolution with supersolution and maximum with minimum we

obtain corresponding inequalities for the *test function* ϕ . The key observation is that the condition

$$u - \phi \text{ has a maximum in } x_0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta\phi(x_0) \leq 0,$$

does not assume any regularity in u , hence we can define the following:

$u \in \mathcal{C}$ is *subharmonic in the viscosity sense* if it satisfies: for any $\phi \in \mathcal{C}^2$ such that $u - \phi$ has a maximum at x_0 , we have $-\Delta\phi(x_0) \leq 0$.

Notice that the previous definition only depends on the *ellipticity* of the Laplacian operator and not on the linearity. This is a key point which allows to extend this definition to much more general contexts. Incidentally, this is a way to overcome the impossibility of integrating by parts.

The name *viscosity solutions*, has its origin in the works by P. Lax on conservation laws and equations such as the eikonal mentioned above, where a perturbation of the form $\epsilon\Delta u$ is used in order to regularize the equation. The parameter ϵ plays the role of a fluid's viscosity in Fluid Mechanics, although in this context is just a theoretic tool without physical meaning. Lax's idea was to recover the original equation letting $\epsilon \rightarrow 0$, this is the reason why this method is known as the *vanishing viscosity method*. In particular, solutions obtained in this way are also solutions in the more general sense explained above, but the converse is not true in general.

In this work we intend to study a class of problems for which the natural notion of generalized solution is that of *viscosity solutions* in a sense inspired in the concept of subharmonic function in the viscosity sense as explained above in a heuristic way (see Definition 0.6.9).

We aim to understand *fully nonlinear elliptic equations, non-proper with respect to the zero order terms* (see Definition 0.6.2). To be precise, we will consider aspects related to existence uniqueness and multiplicity of positive solutions.

0.2. Some models

We present some situations in which *fully nonlinear equations* arise.

Geometry: curvatures

Let $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ be a hypersurface of class \mathcal{C}^2 . Suppose that in some coordinate system (x_1, \dots, x_n) such hypersurface S is given by a graph

$$x_{n+1} = u(x) \quad \text{for } x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n,$$

where \mathcal{U} is a neighborhood of a point x_0 and $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$.

The unit normal at $p_0 = (x_0, u(x_0))$ (oriented towards $x_{n+1} > u(x)$) is given by

$$n(x_0, u(x_0)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}}(-\nabla u(x_0), 1).$$

Differentiating, we obtain

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{-\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \right) &= \\ &= \frac{-D^2 u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \left(Id - \frac{\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \otimes \frac{\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \right). \end{aligned} \quad (0.2.1)$$

By means of an axis rotation, we can suppose that $e_{n+1} = n(p_0)$. Note that in the new coordinates $\nabla u(x_0) = 0$. Using another rotation of axis affecting only the first n variables we can suppose that the matrix $D^2 u(x_0)$ is diagonal in our coordinates:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \kappa_i \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

The numbers $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ are the *principal curvatures* of S in p_0 .

In these coordinates,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right) = -\kappa_i \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

From the above computation we deduce that the eigenvalues of the matrix

$$\nabla \left(\frac{-\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \right)$$

in the *original coordinates* are $(-\kappa_1, \dots, -\kappa_n)$.

We define the *mean curvature* at x_0 ,

$$H(x_0) = \frac{1}{n} (\kappa_1 + \dots + \kappa_n),$$

from which we deduce that

$$\begin{aligned} H(x_0) &= -\frac{1}{n} \text{trace} \left(\nabla \left(\frac{-\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \right)_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{n} \text{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right)_{x=x_0}. \end{aligned}$$

We say that S is a minimal surface in \mathcal{U} if $H(x) = 0$ for all $x \in \Omega$.

On the other hand, we can define the *Gauss curvature*

$$K(x_0) = \kappa_1 \dots \kappa_n = (-1)^n \det \left(\nabla \left(\frac{-\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \right)_{x=x_0}.$$

Using the expression (0.2.1) we obtain

$$K(x_0) = \frac{\det(D^2 u(x_0))}{(1 + |\nabla u(x_0)|^2)^{\frac{n+2}{2}}},$$

where we have used that for every $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\det(Id - \xi \otimes \xi) = 1 - |\xi|^2.$$

Moreover, if $n \geq 3$, we have other functions of the principal curvatures given by the elementary symmetric polynomials, which are called *higher order mean curvatures*. We denote by H_j the j th mean curvature which, properly normalized, is given by the j th symmetric polynomial in n variables:

$$H_j = S_j(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_k}.$$

In particular, $H_1 = H$ is the mean curvature, H_n is the Gauss curvature and H_2 (properly normalized) is the *scalar curvature*.

More information on partial differential equations arising in connection with geometry can be found in [2, 124, 125].

Stochastic control and Differential games

Let us consider a dynamic system whose state in time $y(t) \in \mathbb{R}^n$ is given by the following stochastic differential equation

$$\begin{cases} dy = \sigma(y(t), \alpha) dw(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (0.2.2)$$

where t_1 is the horizon time, $w(t)$ is a Wiener n -dimensional process, σ is the diffusion matrix and α is a constant control chosen in a set \mathcal{A} . The initial state $x \in \mathbb{R}^n$ is deterministic.

Informally, equation (0.2.2) says that if at time t the system state is $y(t)$, during the period $(t, t + \Delta t)$ (with Δt a small increment), the variation of the state $\Delta y(t)$ is a Gaussian random variable with mean 0 and variance matrix $\sigma(y(t), \alpha)\sigma'(y(t), \alpha)\Delta t$, where σ' denotes the transpose of σ .

Consider a set of admissible states $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ which we will suppose to be a bounded domain with smooth boundary. Define the *exit time* from Ω ,

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : y(t) \notin \Omega\} \quad (0.2.3)$$

(note that τ depends on the initial state x). Thus, the stopping time is $T = \min\{t_1, \tau\}$.

We will suppose that for every $\alpha \in \mathcal{A}$, the matrix $\sigma(\cdot, \alpha)\sigma'(\cdot, \alpha)$ is uniformly elliptic, always with the same ellipticity constants $0 < \theta < \Theta$, that is, we will suppose that there exist constants $0 < \theta < \Theta$ such that

$$\theta|\xi|^2 \leq \langle \sigma(y, \alpha)\sigma'(y, \alpha)\xi, \xi \rangle \leq \Theta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

uniformly in y, α . Then $\tau < \infty$ with probability 1 (see for instance [20, Proposition 8.2]).

A process starting at x has an *expected cost* given by a *cost function* $J(x, \alpha)$ which involves a *running cost* during the process and a *terminal cost* (the process stops if either the system state exits from Ω or if the horizon time is reached). In order to simplify the model, we will suppose that there is no stopping cost:

$$J(x, \alpha) = \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^T f_\alpha(y(t)) dt \right\}.$$

Then, the *optimal cost* from the initial state x will be given by the expression

$$u(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x, \alpha).$$

Using tools from Dynamic Programming, it can be shown that u satisfies a *Bellman equation* of the type

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \{ \text{trace}(A_\alpha(x)D^2u) - f_\alpha(x) \} = 0,$$

where $A_\alpha(x) = \frac{1}{2}\sigma(x, \alpha)\sigma'(x, \alpha)$.

In general, Bellman equations are of the type

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_\alpha u(x) - f_\alpha(x)) = 0, \quad \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_\alpha u(x) - f_\alpha(x)) = 0,$$

with \mathcal{A} an arbitrary set of indices and $L_\alpha u(x) = -\text{trace}(A_\alpha(x)D^2u)$ uniformly elliptic with constants $0 < \theta < \Theta$ (notice that we are writing the equation with a different sign from that obtained above in order to follow the convention used later on).

An important point is that, being an infimum (respectively, a supremum) of linear operators, the operator giving rise to Bellman's equations is a concave operator (respectively convex).

In the particular case where the set of indices is

$$\mathcal{A}_{\theta, \Theta} = \{ A \in S^n : \theta|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \Theta|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \}$$

we obtain the extremal Pucci operators

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{ -\text{trace}(AX) \}, \quad \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{ -\text{trace}(AX) \},$$

which play a major role from the theoretical point of view in the analysis of general uniformly elliptic fully nonlinear equations. Being extremal in the class of uniformly elliptic equations, Pucci's operators allow avoiding linearization of the equation and study general equations given by operators F not necessarily smooth, for example those giving rise to Bellman equations or, more generally, equations of Isaacs type.

Isaacs equations arise in connection with differential games. In a differential game we consider a dynamical system as in Bellman's equations case; the main difference is that, instead of having a single controller, we are allowing two players (controllers) to choose a control at each time t . Player I will pick a control $\alpha(t)$ in the class \mathcal{A} , and Player II will pick $\beta(t)$ in the class \mathcal{B} .

The election of this controls at every time, gives rise to *strategies* used by the players.

In analogy with the case of a single controller, it is possible to define an expected payoff function (or cost function) $J(x, \alpha, \beta)$. Both players aim for the maximum benefit, but, in such a way that both have different interests, that is the earnings of one are the losses of the other (we say that the game is *zero-sum*).

Then, we define the *game value* for Player I

$$u_I(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\beta \in \mathcal{B}} J(x, \alpha, \beta),$$

and for Player II

$$u_{II}(x) = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x, \alpha, \beta).$$

For each player, his game value represents the maximum expected benefit when his opponent plays optimally. We say that the game has a value or saddle point if $u_I = u_{II}$. This does not happen in general.

Using arguments from Dynamic Programming, it is possible to show that the game values satisfy the Isaacs equations:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\beta \in \mathcal{B}} (L_{\alpha\beta} u_I(x) - f_{\alpha\beta}(x)) = 0 \quad \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_{\alpha\beta} u_{II}(x) - f_{\alpha\beta}(x)) = 0,$$

for $L_{\alpha\beta}$ a family of linear operators with bounded measurable coefficients, uniformly elliptic with constants $0 < \theta \leq \Theta$. See [16, 22, 71, 72] for more information.

Concerning Isaacs operators, there are two important observations to be made; first that they are uniformly elliptic but not necessarily concave or convex with respect to the matrix argument; second, it is important to mention that every uniformly elliptic operator can be written as a Isaacs operator. Indeed, an operator $F : \Omega \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is uniformly elliptic if and only if,

$$\begin{aligned} F(x, X) - F(x, Y) &\leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) \\ &= \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{-\text{trace}(A(X - Y))\}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{S}^n \end{aligned}$$

(see Lemma 0.6.8). Since we have an equality when $X = Y$, in particular,

$$F(x, X) = \inf_{Y \in \mathcal{S}^n} \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{-\text{trace}(AX) + (F(x, Y) + \text{trace}(AY))\},$$

which is an Isaacs type operator associated with the family

$$L_A u(x) = -\text{trace}(AD^2 u)$$

of linear operators with constant coefficients.

Random Tug-of-War games

A Tug-of-War is a two-person, zero-sum game, that is, two players are in contest and the total earnings of one are the losses of the other. Hence, one of them, say Player I, plays trying to maximize his expected outcome, while Player II is trying to minimize Player I's outcome (or, since the game is zero-sum, to maximize his own).

These type of random Tug-of-War games have been used in connection with some PDE problems, see [19, 49, 113]. Other games related to the study of nonlinear degenerate PDE can be found in [96, 114].

Next, we briefly describe the game. Consider a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, and take $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ (which can be the whole $\partial\Omega$) and $\Gamma_N \equiv \partial\Omega \setminus \Gamma_D$.

Let $F : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ be a Lipschitz continuous function. At an initial time, a token is placed at a point $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_D$. Then, a (fair) coin is tossed and the winner of the toss is allowed to move the game position to any $x_1 \in \overline{B_\epsilon(x_0)} \cap \overline{\Omega}$. At each turn, the coin is tossed again, and the winner chooses a new game state $x_k \in \overline{B_\epsilon(x_{k-1})} \cap \overline{\Omega}$. Once the token has reached some $x_\tau \in \Gamma_D$, the game ends

and Player I earns $F(x_\tau)$ (while Player II earns $-F(x_\tau)$). This is the reason why we will refer to F as the *terminal payoff function*. In more general models, it is considered also a *running payoff* $f(x)$ defined in Ω , which represents the reward (respectively, the cost) at each intermediate state x , and gives rise to non-homogeneous problems. We will assume throughout the paper that $f \equiv 0$.

This procedure yields a sequence of game states $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\tau$, where every x_k except x_0 are random variables, depending on the coin tosses and the strategies adopted by the players.

If S_I and S_{II} denote the strategies adopted by Player I and II respectively, we define the ϵ -value of the game for Player I as

$$u_I^\epsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F(x_\tau)],$$

while the ϵ -value of the game for Player II is defined as

$$u_{II}^\epsilon(x_0) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F(x_\tau)].$$

In some sense, $u_I^\epsilon(x_0), u_{II}^\epsilon(x_0)$ are the least possible outcomes that each player expects to get when the ϵ -game starts at x_0 , assuming that the opponent plays optimally.

If $u_I^\epsilon = u_{II}^\epsilon := u_\epsilon$, we say that *the game has a value*. In [113] this fact is shown in our case. Moreover, it is proved that $u_\epsilon \rightarrow u$ uniformly as $\epsilon \rightarrow 0$. We call u the *continuous value of the game*. In fact, according to [49], u is a viscosity solution of the mixed problem

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty u(x) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u(x) = F(x) & \text{en } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (0.2.4)$$

where $\tilde{\Delta}_\infty u = |\nabla u|^{-2} \sum_{ij} u_{x_i} u_{x_i x_j} u_{x_j}$ is the normalized infinity Laplacian.

The connection of the game with equation (0.2.4) comes, again, through the *Dynamic Programming Principle* of the game

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{y \in B_\epsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u_\epsilon(y) + \min_{y \in B_\epsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u_\epsilon(y) \right\} \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_D, \quad (0.2.5)$$

which is also satisfied by $u_I^\epsilon, u_{II}^\epsilon$.

The key idea is that, if u_ϵ were regular enough, a Taylor expansion near x , would yield

$$u_\epsilon(y) = u_\epsilon(x) + \nabla u_\epsilon(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2} \langle D^2 u_\epsilon(x)(y - x), (y - x) \rangle + o(|y - x|^2)$$

as $|y - x| \rightarrow 0$. Evaluating this expression in

$$x_{\max} = x + \epsilon \left[\frac{\nabla u_\epsilon(x)}{|\nabla u_\epsilon(x)|} + o(1) \right], \quad \text{and} \quad x_{\min} = x - \epsilon \left[\frac{\nabla u_\epsilon(x)}{|\nabla u_\epsilon(x)|} + o(1) \right]$$

and summing up, we obtain

$$2u_\epsilon(x_\epsilon) - \max_{y \in B_\epsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u_\epsilon(y) - \min_{y \in B_\epsilon(x) \cap \bar{\Omega}} u_\epsilon(y) = -\tilde{\Delta}_\infty u_\epsilon(x) + o(\epsilon^2)$$

as $\epsilon \rightarrow 0$. Using (0.2.5) and letting $\epsilon \rightarrow 0$ we formally obtain $-\tilde{\Delta}_\infty u(x) = 0$.

In order to prove rigorously that u verifies (0.2.4), the viscosity setting becomes crucial.

Optimal transport and construction of antennas

Let us consider now the problem of optimal mass transportation of Monge-Kantorovich going back to the works by Monge in 1781. The problem can be stated as follows: let f^+ be a non-negative mass density which we want to transport to fill an excavation or hole with mass density f^- with the least cost.

A basic condition is the mass conservation during the transport:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx.$$

That is, we are considering the corresponding measures $\mu^+ = f^+ dx$ and $\mu^- = f^- dy$ and we ask how we can optimally rearrange μ^+ into μ^- .

To this aim, we consider a transport plan $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, which is a regular injective function which transports μ^+ into μ^- , namely

$$f^+(x) = f^-(r(x)) |\det(Dr(x))| \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (0.2.6)$$

If we denote \mathcal{A} the class of admissible functions r , regular, injective and satisfying (0.2.6), we are looking an *optimal transport plan* $S \in \mathcal{A}$ in the sense

$$J(s) = \min_{r \in \mathcal{A}} J(r),$$

where $J(r)$ is the cost function given by

$$J(r) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - r(x)| f^+(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x - r(x)| d\mu^+.$$

The interpretation of the cost functional is immediate, the transport from x to $r(x)$ of a mass $f^+(x)$ is more expensive the longer the distance $|x - r(x)|$ is.

Monge considered that the optimal transport plan $s(x)$ should be determined by a potential u . By means of heuristic geometric arguments he deduced that if an optimal plan s exists, then there exists a scalar potential function u such that

$$\frac{s(x) - x}{|s(x) - x|} = -\nabla u(x) \quad x \in \text{supp}(f^+).$$

Then, in the decade of 1940, Kantorovich interpreted the optimal transport problem as an infinite dimensional linear programming minimization problem, which has a *dual maximization problem*.

For more information, see [68] and the references therein.

In connection with the mentioned geometric problems, more precisely with the Monge-Ampère equation, and with the Monge-Kantorovich mass transport problem, we can also consider the design of reflectors and antennas.

We can consider systems with a single reflector (see for instance [46, 79]) or two (see [80]). For simplicity, we will consider the single reflector model.

Consider the unit sphere $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ centered at the origin \mathcal{O} and with cartesian coordinates. Let $\Omega, T \subset \mathbb{S}^n$ non-empty sets.

Suppose that a point source of light is situated at \mathcal{O} and emits a beam of rays in directions defined by the input aperture $\overline{\Omega}$. Suppose that the intensity of the source is $I(m)$, $m \in \Omega$

Our problem is to find the shape of the reflector $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in such a way that the rays, once reflected in R , cover T with a given intensity $L(y)$, $y \in T$.

Rays emitted from \mathcal{O} with the direction $m \in \overline{\Omega}$ are reflected off R with a direction $y = y(m)$, $|y| = 1$. Fermat's Principle and Snell's Law imply that, if R is a regular hypersurface, we are defining the application

$$\begin{aligned} \gamma : \overline{\Omega} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ m &\mapsto y(m) = m - 2\langle m, n(m) \rangle n(m) \end{aligned}$$

which takes the incident direction into the reflected one. The outgoing direction follows the normal to the surface at the incidence point, which we denote $n(m)$.

A necessary condition which the data must satisfy is the following energy balance condition

$$\int_{\Omega} I(m) d\sigma(m) = \int_T L(y) d\sigma(y), \quad (0.2.7)$$

where $d\sigma$ is the volume element in \mathbb{S}^n . We can rewrite (0.2.7) using $y = \gamma(m)$ as

$$\int_{\Omega} I(m) d\sigma(m) = \int_{\Omega} L(\gamma(m)) |\det(D\gamma(m))| d\sigma(m).$$

In particular, we have

$$I(m) = L(\gamma(m)) |\det(D\gamma(m))|, \quad (0.2.8)$$

an equation for R which enters implicitly through the mapping γ .

Observe the analogy between (0.2.6) and (0.2.8). In fact, expression (0.2.7) is an equation of Monge-Ampère type written in its weak form according to Aleksandrov (see [81, Section 1.2], [3, 15, 42, 112] and also Remark 1.5.36).

Moreover, in [79, 80] the single reflector model is interpreted in terms of the Monge-Kantorovich mass transfer problem. In this case, incoming and outgoing intensities are read as mass densities. It is proved that the single reflector problem is equivalent to the optimal mass transfer problem which cost function

$$K(m, y) = -\log [1 - \cos(\text{dist}_{\mathbb{S}^n}(m, y))]$$

for $m, y \in \mathbb{S}^n$.

This approach allows us to use Kantorovich's ideas and pose the dual maximization problem, which is variational. This is an advantage, for example numerically, since once discretized, the dual problem is a linear programming problem.

0.3. Summary of contents and conclusions

In general, along this work, we will consider partial differential equations of the type

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u, \nabla u, D^2u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a degenerate elliptic operator (see Definition 0.6.1) and non-proper with respect to the zeroth order terms (see Definition

0.6.2). Hence, all the equations we will consider are not under the general framework of [58].

In particular, in Chapters 1 and 2, we consider equations of the type

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2u) = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.3.1)$$

and in Chapter 3, equations of the type

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - f(u), -\Delta_\infty u\} = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

which are obtained as a limit of p -Laplacian type equations as $p \rightarrow \infty$.

Next, we provide a detailed description of the results obtained in this work.

Chapter 1

It essentially **corresponds to the paper [53]**.

In this chapter we study existence, non existence and possible uniqueness of *positive solutions* of problems of the form (0.3.1), where $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the following hypotheses:

(F1) *Degenerate ellipticity*: For every $p \in \mathbb{R}^n$ and $X, Y \in \mathcal{S}^n$ we have

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad F(p, X) \leq F(p, Y).$$

(F2) *Homogeneity of degree m* : $F(tp, tX) = t^m \cdot F(p, X)$ for all $t > 0$. We will assume $F(0, 0) = 0$.

(F3) There exists $v_1 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, viscosity solution of the following *auxiliary problem*

$$\begin{cases} F(\nabla v_1, D^2v_1) = 1 & \text{in } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.3.2)$$

(F4) *Existence of a principal eigenvalue*: We will suppose that the operator F has a first eigenvalue and that it is isolated.

(F5) *Hopf's Lemma* holds in a suitable sense.

(F6) For every continuous viscosity solution u of

$$\begin{cases} F(\nabla u(x), D^2u(x)) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

there exist $\alpha \in (0, 1)$ and $C = C(\|f\|_\infty) > 0$ such that

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

We will make precise in every case which set of hypotheses among the above is required to prove the results.

Concerning the right hand side f , we are interested in the model problems

$$f_1(u) = \lambda u^q \quad \text{and} \quad f_2(u) = \lambda u^q + u^r$$

where $0 < q < m < r$, with m the homogeneity of F , and $\lambda > 0$. We will say that the problem with right side f_1 is concave, since the power t^q is concave with respect to the homogeneity m . Analogously, the problem with right hand side f_2 will be referred to as concave-convex, since the non-linearity combines a concave and a convex power (always with respect to the homogeneity m).

In order to avoid any ambiguity, it is important to stress that we are not assuming any concavity or convexity property on the operator F .

Observe that problems of the form (0.3.1) with right hand sides given by f_1 y f_2 are non-proper (see Definition 0.6.2) and consequently are not under the scope of [58].

Concerning the concave problem

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = \lambda u^q, & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

the key result is a global Comparison Principle, **Theorem 1.2.1**. We show comparison between *positive* sub- and supersolutions (in the viscosity sense) of the problem

$$F(\nabla w, D^2 w) = f(w) \quad \text{in } \Omega,$$

where $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies (F1) and (F2) for some m , and $f(\cdot)$ satisfies

$$\frac{f(t)}{t^q} > 0 \quad \text{is non-increasing for every } t > 0 \text{ and some } 0 < q < m. \quad (0.3.3)$$

Some remarks are of use here:

- The comparison result is quite general since only requires (F1) y (F2).
- It is used extensively in the proofs of existence in Chapters 1 and 2.
- In Chapter 3 we find an analogous result (**Theorem 3.4.1**) for equations of the form

$$\min \{ |\nabla u| - f(u), -\Delta_\infty u \} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

clearly outside the framework in this chapter, for f satisfying (0.3.3) for $m = 1$. The key ideas in the proof are the same.

- The condition on the right hand side is natural in our arguments and includes the problem with a concave power λu^q , $0 < q < m$ and $\lambda > 0$.

As a consequence of the Comparison Principle, we deduce that the Dirichlet problem with homogeneous boundary data

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and f satisfying (0.3.3) has a unique (in case it exists) positive solution (**Corollary 1.2.2**).

This is an important characteristic of our comparison result. The change of variables $\tilde{w} = \log w$ has been used in the literature (see for instance [87, 90]) to show Comparison Principles *for the logarithms* of a sub- and supersolution for certain equations. This argument could also be used in our case (see page 39) but it does not allow to conclude uniqueness of the original Dirichlet problem whenever the boundary data is 0, since $\log u - \log v$ is undetermined on the boundary. This is an advantage of our argument.

In the proof of Comparison we only need hypotheses (F1), (F2), however, in order to prove existence of solutions, it will be necessary to precise a little further the structure of the operator F with some extra hypotheses.

In **Theorem 1.3.1** we prove the existence of a unique positive solution of the concave problem for every $\lambda > 0$ under hypotheses (F1), (F2), (F3) and (F5). The proof is based on the construction of a sub- and supersolution with 0 boundary data and the Perron method in [58].

Observe that in this construction, we can replace hypothesis (F5) by (F4) (Remark 1.3.6). This is useful in applications, for instance in Subsection 1.5.1, where using one of the other means more or less restrictive hypothesis on the regularity of $\partial\Omega$.

In Section 1.4 we study existence and non-existence of positive solutions of the concave-convex problem depending on the parameter $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2u) = \lambda u^q + u^r & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.3.4)$$

where $0 < q < m < r$.

In **Theorem 1.4.1**, under hypotheses (F1) – (F4) and (F6), (hypothesis (F5) is not necessary), we prove the existence of a value $0 < \lambda_{\max} < \infty$ such that there exists at least one *minimal positive solution* for every $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$, and no positive solution for $\lambda > \lambda_{\max}$.

The proof is based on the construction in [33]:

- First, construct a solution to the problem with $\lambda \leq \lambda_0$ small enough (**Theorem 1.4.2**) using the monotonicity method.
 - Construction of a supersolution with homogeneous boundary data (**Lemma 1.4.3**). The condition $\lambda \leq \lambda_0$ is needed here.
 - As a subsolution, we use the solution to the concave problem (**Lemma 1.4.5**).
 - By concave comparison, the sub- and supersolution are ordered (**Lemma 1.4.7**).
 - We construct the solution iterating between the sub- and supersolution. Hypothesis (F6) is used here in order to get the necessary relative compactness.
- Non existence of solutions for $\lambda > \hat{\lambda}$ large enough (**Theorem 1.4.8**). Here we use the existence of a principal eigenvalue and that it is isolated (hypothesis (F4)).

- Existence of a maximal λ_{\max} such that there exists a positive minimal solution of (0.3.4) for each $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$ (**Theorem 1.4.10**). It is deduced from Theorems 1.4.2 and 1.4.8.

Notice that, in order to get the results in Section 1.4, no restriction on the size of the convex exponent r is required. In Chapter 2, a second positive solution of problem (0.3.4) is found for r subcritical in a sense to be made precise.

It is worth mentioning that explicit expressions of λ_0 and $\hat{\lambda}$ are provided (equations (1.4.2) and (1.4.5)). From the relation $\lambda_0 \leq \hat{\lambda}$, in **Corollary 1.4.9**, a lower bound for the first eigenvalue of F is deduced

$$\lambda_1(\Omega) \geq \|v_1\|_{\infty}^{-m}$$

where v_1 is the solution of (0.3.2).

Finally, in Section 1.5 we study in detail some examples of applications of the above results. All through the chapter we explicitly require $\partial\Omega$ to be as regular as necessary in order to have (F3) – (F6). In the applications considered in this section we study sufficient conditions on the regularity of $\partial\Omega$ in order to have the hypothesis on F . In the proofs of existence it is sometimes possible to choose either (F4) or (F5) (Remark 1.3.6), we will always choose in the examples the one requiring less regularity from $\partial\Omega$.

The examples considered are:

- **Uniformly elliptic equations** (Subsection 1.5.1): We study in detail equations of this type, its study will continue in Chapter 2.
- **The linear problem with variable coefficients** (Subsection 1.5.2): In this subsection we adapt the results we obtained to the linear problem with variable coefficients. We do not aim for optimal results but rather to make clear the technical difficulties arising due to the presence of variable coefficients. In particular, we provide the proof of the Comparison Principle for the concave problem, where these difficulties are handled using the regularity of the coefficients
- **The p -Laplacian, $p < \infty$** (Subsection 1.5.3): In this case, the results are well known, see [33]. However, we give a detailed presentation which has several advantages:
 - The arguments have been simplified and adapted to follow the presentation in this chapter.
 - We have set the optimal regularity of $\partial\Omega$ (in [33] the regularity of $\partial\Omega$ is not taken into account and it is required that $\partial\Omega$ be smooth).
 - We have carefully tracked down the dependence on p of the constants involved.

These facts will be used in Chapter 3.

- **The 3 homogeneous ∞ -Laplacian** (Subsection 1.5.4): It is important to make clear that equations of the type

$$-\Delta_{\infty} u = f(x, u),$$

are not obtained as limits of p -Laplacian equations. The study of this type of equations is very recent and, consequently, our results in this context are new.

- **The 1-homogeneous ∞ -Laplacian** (Subsection 1.5.5): The same comments to the 3-homogeneous infinity Laplacian apply here.
- **Equations of Monge-Ampère type** (Subsection 1.5.6): We adapt the results to Monge-Ampère type equations.

For what concerns applications, we find important to mention that our work [53] has been cited in [65], where equations of concave type for the Monge-Ampère operator studied here are used in connection with the study of a physical model of surface growth.

Chapter 2

Corresponds to the work [50].

In this chapter, we consider a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ with \mathcal{C}^2 boundary, $0 < q < 1 < r$ and $\lambda > 0$. Our aim is to obtain conditions for the multiplicity of positive solutions to the concave-convex problem already studied in Chapter 1:

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.3.5)$$

Due to the complexity of the problem it is reasonable to expect stronger assumptions. We will suppose that $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the following structural hypotheses:

- (F1) *Uniform ellipticity*: There exist constants $0 < \theta \leq \Theta$ such that for every $X, Y \in \mathcal{S}^n$ with $Y \geq 0$,

$$-\Theta \cdot \text{trace}(Y) \leq F(\xi, X + Y) - F(\xi, X) \leq -\theta \cdot \text{trace}(Y)$$

for all $\xi \in \mathbb{R}^n$.

- (F2) *Homogeneity*: $F(t\xi, tX) = t \cdot F(\xi, X)$ for all $t > 0$. We will further suppose that $F(0, 0) = 0$.

- (F3) *Structure condition*: There exists $\gamma > 0$ such that for all $X, Y \in \mathcal{S}^n$, and $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, we have

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X - Y) - \gamma |\xi_1 - \xi_2| \leq F(\xi_1, X) - F(\xi_2, Y) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) + \gamma |\xi_1 - \xi_2|,$$

where $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm$ are the extremal Pucci operators (see Definition 0.6.6). Notice that (F3) is equivalent to the uniform ellipticity when $\xi_1 = \xi_2$ (see Lemma 0.6.8).

- (F4) *Orthogonal matrices invariance*: For every $Q \in \mathcal{S}^n$ verifying $Q \cdot Q^t = Id$, we have

$$G(Q^t X Q) = G(X), \quad \text{were } G(X) \equiv F(0, X). \quad (0.3.6)$$

The operator G appears in a natural way in the *blow-up* argument in Section 2.3, this is the reason why we will refer to it as *blow-up operator*.

Under hypothesis (F1), (F2) and (F3), we have proved in Subsection 1.5.1 that there exists a number $0 < \lambda_{\max} < \infty$ such that problem (0.3.5) has at least one (minimal) solution for every $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$ and no solution for $\lambda > \lambda_{\max}$. This results hold with no restriction on the size of r .

In this chapter, we will study the existence of a second positive solution for every $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$ when $r < \hat{r}$, where \hat{r} is the *critical exponent*.

Notice that we must give a precise notion of critical exponent since it is unclear that the concept of Sobolev critical exponent is reasonable in the fully nonlinear setting. In this sense, **we propose a definition of critical exponent in this context (Definition 2.1.2)**.

Once the notion of critical exponent in the fully nonlinear framework is set up, we can state the main result of this chapter **Theorem 2.1.4**, a multiplicity result which can be considered the analogous in this framework of the results in [5] and [6, 75]. To be more precise, our result is the following:

Let $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy hypotheses (F1) – (F4), and $0 < q < 1 < r < \hat{r}$ where \hat{r} is the critical exponent given by Definition 2.1.2. Then, there exists $\lambda_{\max} \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_{\max} < \infty$ such that the problem:

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{in } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{in } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

- (i) has no solution for $\lambda > \lambda_{\max}$,
- (ii) has at least one solution for $\lambda = \lambda_{\max}$,
- (iii) has at least two solutions for every $\lambda \in (0, \lambda_{\max})$.

The proof of Theorem 2.1.4 (Section 2.4) follows the arguments in [6], with the difficulties associated to adapting the arguments to the viscosity framework, and it is based in two other important results: **Theorem 2.2.1** (a monotonicity result in the half space) and **Proposition 2.3.1** (L^∞ uniform bounds).

Section 2.2 is devoted to the proof of Theorem 2.2.1 whose statement is the following:

Let v be a nontrivial viscosity solution, non-negative and bounded of the problem

$$\begin{cases} G(D^2 v) = f(v), & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ v \geq 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ v = 0, & \text{on } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (0.3.7)$$

where f is locally Lipschitz, $f(0) \geq 0$ and $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is uniformly elliptic with constants $0 < \theta < \Theta$ and 1-homogeneous. Moreover, suppose that

$$\begin{aligned} G(Q^t X Q) &= G(X) \text{ for } Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ a matrix with} \\ q_{ij} &= -\delta_{ij} \text{ if either } i \text{ or } j = n, \text{ and } q_{ij} = \delta_{ij} \text{ otherwise.} \end{aligned} \quad (0.3.8)$$

Then v is monotonically increasing in the x_n variable:

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+^n.$$

The proof is based in the *Moving Planes* method (see [25]). There are technical difficulties following from the fact that we are working in an unbounded domain \mathbb{R}_+^n and also difficulties coming from the viscosity setting.

This result generalizes Corollary 1.3 in [24] (for the Laplacian) and Theorem 3.1 in [115] (Pucci's operators). However, in those cases solutions are classical and no technical difficulties come from the viscosity setting.

Some remarks:

- Notice that the Theorem holds for f locally Lipschitz, and in particular for $f(v) = v^r$ as long as $r > 1$.
- We will be interested in the case $G = F(0, X)$, the blow-up operator.
- This result will be used in Section 2.3 to finish the blow-up argument in the case of the half-space .

In Section 2.3 we prove Proposition 2.3.1:

Let $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ under hypotheses (F1) – (F4) and u a non-trivial solution of problem (0.7.5) with $0 < q < 1 < r < \hat{r}$. Then, there exists a constant $C > 0$ independent of λ and u such that $\|u\|_{L^\infty} \leq C$.

The proof is based on the *Blow-up* method (see [77]) adapted to the viscosity setting. The proof, by contradiction, assumes in order to reach a contradiction that there exists a sequence $\{u_k\}_k$ of positive solutions of (0.3.5) and a sequence of points $\{z_k\}_k \subset \Omega$ such that

$$M_k = \sup_{\Omega} u_k = u_k(z_k) \longrightarrow \infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

Without loss of generality, we can suppose $z_k \rightarrow \hat{z} \in \bar{\Omega}$ when $k \rightarrow \infty$.

Consider v_k , an appropriate rescaling of the functions u_k . Then, it will be proved that such v_k converge uniformly in compact sets to some v . There are two cases to be considered:

- **Case 1:** $\hat{z} \in \Omega$ The limit $v(y)$ is a viscosity solution of

$$\begin{cases} G(D_y^2 v(y)) = v^r(y), & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq v(y) \leq v(0) = 1, & \text{in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where $G(X) = F(0, X)$ (see **Lemma 2.3.3**). This is in contradiction with the definition of critical exponent.

- **Case 2:** $\hat{z} \in \partial\Omega$ The limit $v(y)$ is a viscosity solution of

$$\begin{cases} G(D_y^2 v(y)) = v^r(y), & v \geq 0, & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ 0 \leq v(y) \leq v(0, \dots, 0, s) = 1, & & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ v(x', 0) = 0, & x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

By construction, v has a maximum at $(0, \dots, 0, z)$. This implies

$$\nabla v(0, \dots, 0, z) = 0$$

and, in particular, by the $C^{1,\alpha}$ regularity of v ,

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(0, \dots, 0, z) = 0,$$

which contradicts Theorem 2.2.1 (Monotonicity).

The observation which allows to conclude the blow-up method in the case of the half-space directly from the monotonicity result is a contribution of this work. It is important from the conceptual point of view since it implies that the case of the half-space should not be taken into account in the definition of critical exponent in this context. This is the main motivation for Definition 2.1.2, as it is explained in the introduction to Chapter 2.

Finally, in Section 2.5 we consider examples of application of the multiplicity result, Theorem 2.1.4.

First, we will consider the case when G is a Pucci's extremal operator, which includes the Laplacian as a particular case (subsection 2.5.1). In subsections 2.5.2, and 2.5.3 we will treat concave (convex) operators and, respectively, a class of Isaacs operators which are neither concave nor convex. We will always assume that the invariance hypothesis ($F4$) is satisfied. Indeed, this condition is naturally satisfied in the case of Pucci's operators.

Moreover, in Subsection 2.5.1 we survey the results on critical exponents for Pucci's operators known in the literature in order to give an idea of the state of the art in the area.

It is worth mentioning that, as stressed in Remark 2.1.5, hypothesis ($F4$) is only used in the proof of the uniform L^∞ estimates, Proposition 2.3.1, in order to be able to carry out a *blow-up* argument as in [77].

From the technical point of view, this is the most difficult chapter, in this work. We use a broad range of techniques:

- “Viscosity” techniques:
 - Doubling variables and Maximum Principle for semicontinuous functions.
 - Regularizations by inf- and sup-convolution.
 - Convex analysis, lower contact set, etc. . .
- “Classical” techniques adapted to the viscosity setting:
 - Blow-up method.
 - Moving planes method.
 - Topological Degree theory.

Chapter 3

The concave part **corresponds to the work [52]** and the part concerning the limit concave-convex problem corresponds to the work in preparation [54]. The asymptotically optimal Morrey inequality in Section 3.7 corresponds to the work [51].

In this chapter we will always consider a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and $p > n$. We are interested in studying the behavior as $p \rightarrow \infty$ of the sequence of solutions of the problems

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} & \text{in } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{in } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.3.9)$$

and

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} + u_{\lambda_p, p}^{r(p)} & \text{in } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{in } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.3.10)$$

where

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{q(p)}{p-1} = Q, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{r(p)}{p-1} = R, \quad \text{with } 0 < Q < 1 < R. \quad (0.3.11)$$

It is in this sense that we will say that the problem with right hand side $f_p(u) = \lambda u^{q(p)}$ is concave and the problem with right hand side $f_p = \lambda u^{q(p)} + u^{r(p)}$ is concave-convex. We observe that, since $p > n$, the critical exponent is $p^* = \infty$ (see [7]) and consequently, there is no restriction in the size of $r(p)$.

In general, along this chapter, we will assume the normalization

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda > 0.$$

In Section 3.3, **Proposition 3.3.1 and 3.3.2** we present the limit problems under the assumption that the sequence $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$ converge uniformly, whose proof is deferred. In this way, we introduce the limit fully nonlinear problems in Proposition 3.3.1 (concave case) and Proposition 3.3.2 (concave-convex case) which we summarize as follows:

Suppose that $\{\lambda_p\}_p$ satisfies $\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p}$ and let $q(p)$, $r(p)$ and $0 < Q < 1 < R$ be as in (0.3.11). Suppose that $u_{\lambda_p, p}$ are the solutions of the concave problem (0.3.9) for each p and that $u_{\lambda_p, p} \rightarrow u_\Lambda > 0$ uniformly when $p \rightarrow \infty$. Then, u_Λ is a viscosity solution of the following limit concave problem

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_\Lambda = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.3.12)$$

In the case when $u_{\lambda_p, p}$ are solutions of the concave-convex problem (0.3.10) and $u_{\lambda_p, p} \rightarrow u_\Lambda > 0$ uniformly as $p \rightarrow \infty$, the function u_Λ is a viscosity solution of the concave-convex limit problem

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \max \{ \Lambda u_\Lambda^Q, u_\Lambda^R \}, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_\Lambda = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.3.13)$$

Notice that the limit problems (0.3.12) and (0.3.13) are *non-proper* (see Definition 0.6.2) and are not covered by the theory in Chapter 1 since they cannot be expressed in the form $F(\nabla u, D^2 u) = f(u)$.

In Section 3.4 we prove analogues of Theorem 1.2.1 and Corollary 1.2.2 in Chapter 1. First, the global Comparison Principle for the limit concave problem, **Theorem 3.4.1**:

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain and let u be a subsolution and v a supersolution in the viscosity sense of

$$\min \{ |\nabla w(x)| - w^Q(x), -\Delta_\infty w(x) \} = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (0.3.14)$$

Suppose that both u and v are strictly positive in Ω , continuous up to the boundary and satisfy $u \leq v$ on $\partial\Omega$. Then, $u \leq v$ in $\bar{\Omega}$.

For simplicity, we prove the result for the problem with right hand side w^Q with $Q < 1$. Furthermore, as explained in Remark 3.4.3, it is possible to prove comparison for equations of the type

$$\min \{ |\nabla w| - f(w), -\Delta_\infty w \} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

where f satisfies hypothesis (0.3.3) with $m = 1$. The proof adapts that of Theorem 3.4.1 following the arguments in the proof of Theorem 1.2.1.

It is remarkable that the key ideas in the proof of are the same as in the case of Theorem 1.2.1. In Remark 3.4.7 we analyze a common setting for both results, Theorems 1.2.1 and 3.4.1, in order to understand better the underlying idea.

As a consequence of the global comparison result, we deduce uniqueness of positive solutions for the limit concave problem with homogeneous Dirichlet data, **Corollary 3.4.4**. Comments following Corollary 1.2.2 in this introduction, also apply here.

In Section 3.5 we study existence of limit solutions for the problem (0.7.9). By this reason, we establish in Subsection 3.5.1, some *a priori* bounds, uniform in p , which will allow us to pass to the limit $p \rightarrow \infty$ in the viscosity sense. The key result in subsection 3.5.1 is **Theorem 3.5.1**:

Let $\Lambda > 0$ and a sequence $\{\lambda_p\}_p$ such that $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$ as $p \rightarrow \infty$. Then, the sequence $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$ of solutions of (0.3.9) converge uniformly to

$$u_\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} u_1, \quad (0.3.15)$$

the unique positive solution of the limit problem (0.3.12) associated to Λ .

In the proof of the result, we use Morrey's estimates in Section 3.7 to obtain C^α estimates uniformly in p which will allow us to take limits for a subsequence. As the limit is positive, and hence solution of the limit problem (0.3.12), it is unique (Corollary 3.4.4) and consequently, not only a subsequence but the whole sequence converges.

In Subsection 3.5.2 we establish optimal L^∞ estimates for solutions of the concave limit problem. The main result, **Proposition 3.5.5**, is a consequence of the Comparison Principle (Theorem 3.4.1):

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a bounded domain and $0 < Q < 1$. Consider $\Lambda > 0$ and u_Λ the positive solution of (0.3.12). Then, we have

$$\left(\Lambda \| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} v(x) \leq u_\Lambda(x) \leq \left(\Lambda \| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} d(x), \quad (0.3.16)$$

for every $x \in \Omega$, where $v(x)$ is the maximal first ∞ -eigenfunction normalized so that $\|v\|_{L^\infty} = 1$ and $d(x)$ given by

$$d(x) = \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty}.$$

Moreover,

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\right)^{\frac{1}{1-Q}}. \quad (0.3.17)$$

In Remark 3.5.6 we stress the close relation between these bounds and the construction of solutions of the concave problem in Chapter 1.

In Subsection 3.5.3 we show explicit solutions of the concave limit problem in domains satisfying the geometric condition $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, where \mathcal{R} is the *ridge set* of Ω defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \text{ is not differentiable at } x\} \\ &= \{x \in \Omega : \exists x_1, x_2 \in \partial\Omega, x_1 \neq x_2, \text{ s.t. } |x - x_1| = |x - x_2| = \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \end{aligned}$$

and $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$, the set of maximal distance to the boundary

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\}.$$

Some domains satisfying this geometric condition are the ball, annulus and stadium (convex hull of two balls of the same radius). A square or an ellipse, for instance, do not satisfy the condition. This is a standard condition in the literature, see [86, 90, 91, 127].

The main result, **Proposition 3.5.9** says that if Ω is a bounded domain such that $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$ then, for every $\Lambda > 0$,

$$u_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} \cdot \left(\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\right)^{\frac{Q}{1-Q}} \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega),$$

is the unique positive viscosity solution of (0.7.12).

Then, in Section 3.6 we study existence, non-existence and possible multiplicity of solutions for the concave-convex limit problem (0.3.13).

First, in Subsection 3.6.1, we study some results on non-existence of solutions for problem (0.3.13).

As a consequence of the Comparison Principle for the concave problem, Theorem 3.4.1, we prove in **Proposition 3.6.1** that there are no positive solutions of problem (0.3.13) below those of the concave limit problem (0.3.12). In particular, as a consequence of the estimates in Proposition 3.5.5, we have that for each $\Lambda > 0$ every positive solution u_Λ of problem (0.3.13) satisfies:

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\right)^{\frac{1}{1-Q}}. \quad (0.3.18)$$

In **Proposition 3.6.2** we prove that the concave-convex structure of the limit problem (0.3.13) implies non-existence of positive solutions for

$$\Lambda > \hat{\Lambda} = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R-Q}{R-1}},$$

where $\Lambda_1(\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^{-1}$ is the ∞ -eigenvalue (see for instance [90]). The proof follows the arguments in Section 1.4.2 adapted to this kind of equations.

Results in Propositions 3.6.1 and 3.6.2 are summarized in Figure 3.6.1.

In Subsection 3.6.2, we show that the problem (0.3.13) has a minimal positive solution for every $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$ satisfying

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}}.$$

We conclude that bounds obtained in Subsection 3.6.1, Propositions 3.6.1 and 3.6.2, are optimal.

In fact, the result we are proving is stronger and, in some sense, surprising. In **Proposition 3.6.4**, we show that for every $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda}]$, the minimal solution of the limit concave-convex problem is given by the unique positive solution of the concave problem (0.3.12).

The reason is that there is a critical size of solutions under which the limit concave-convex problem does not see the convex power. From this remark and as a consequence of the Comparison Principle for the concave problem (Theorem 3.4.1), we deduce that the minimal solution is the unique solution of problem (0.3.13) with $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$.

We feed back this information in **Proposition 3.6.6** and show that, in fact, there exists no positive solution of problem (0.3.13) with $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$ and

$$\Lambda^{\frac{1}{R-Q}} < \|u_\Lambda\|_\infty < \Lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{R-1}}.$$

The information in this Subsection is represented in Figure 3.6.2.

In Subsection 3.6.3 we show that the curve of minimal solutions obtained in Subsection 3.6.2 for the concave-convex limit problem (0.3.13) can be obtained as a limit as $p \rightarrow \infty$ of minimal solutions of the concave-convex problem with $p < \infty$, that is, (0.7.10). The main result is **Proposition 3.6.7**:

Fixed $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$, let $\{\lambda_p\}_p$ be a sequence satisfying $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$. We consider $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$, the sequence of minimal solutions of (0.3.10) corresponding to such λ_p . Then,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_{\lambda_p, p} = w_\Lambda, \quad \text{uniformly in } p,$$

with $w_\Lambda(x)$ the unique positive viscosity solution of the limit concave problem (0.3.12) and minimal solution of the concave-convex problem (0.3.13).

The result follows from Morrey's estimates (Lemma 3.7.2) and a careful analysis of the construction of the minimal solution when $p < \infty$ (Subsection 1.5.3).

In Subsection 3.6.4, we establish a multiplicity result in domains satisfying the condition $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, **Theorem 3.6.9**. This result is related to Theorem 2.1.4 and the results in [5, 6, 75], however the techniques are different.

In Proposition 3.6.4, we have proved the existence of a curve of minimal positive solutions of the limit problem (0.3.13) in general bounded domains.

In Theorem 3.6.9, we prove that in domains such that $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, it is possible to find a curve of positive *explicit* solutions which contains the mentioned minimal curve, reaches $\hat{\Lambda}$ and turns back reaching $\Lambda = 0$ and, furthermore, avoiding

the zones of non-existence already found in Propositions 3.6.1, 3.6.2, 3.6.4 and 3.6.6.

Finally, in Section 3.7 we include a Morrey estimate with an explicit expression of the constant, **Proposition 3.7.1**, which we will use in this chapter in order to get convergence. This Morrey estimate will appear in [51]. To be more precise, the result is the following:

Suppose $n < p < \infty$ and $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Then,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_p \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

is satisfied for

$$C_p = p |B_1(0)|^{-\frac{1}{p}} n^{-\frac{n(p+1)}{p^2}} (p-1)^{\frac{n(p-1)}{p^2}} (p-n)^{\frac{n}{p^2}-1} \lambda_1(p; \Omega)^{\frac{n-p}{p^2}},$$

where $|B_1(0)| = \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\Gamma(1 + \frac{n}{2})\right)^{-1}$. Notice that $\lim_{p \rightarrow \infty} C_p = \Lambda_1(\Omega)^{-1}$.

It is worth mentioning that in [117, Theorem 2.E], we find the Morrey estimate with constant

$$C_{T,p} = n^{-\frac{1}{p}} |B_1(0)|^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}},$$

which is optimal in general, since for $\Omega = B_R(x_0)$, the functions

$$u_a(x) = a \cdot \left(R^{\frac{p-n}{p-1}} - |x-x_0|^{\frac{p-n}{p-1}} \right), \quad a \in \mathbb{R}$$

satisfy $\|u_a\|_{L^\infty(\Omega)} = C_{T,p} \cdot \|\nabla u_a\|_{L^p(\Omega)}$. However, if $\Omega \neq B_R(x_0)$ it can be checked that C_p (the expression of the Morrey constant in the proposition) is sharper than $C_{T,p}$ for p large enough, since

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C_p < \lim_{p \rightarrow \infty} C_{T,p}$$

(see Remark 3.7.4).

Open problems

We conclude collecting some open problems which we think are of some interest.

1. It would be interesting to extend both, methods and results in this work, to operators with variable coefficients. In this sense, it could be convenient to use the L^p -viscosity setting (see [41]) since, as we try to emphasize in Subsection 1.5.2, the theory of \mathcal{C} -viscosity solutions impose technical restrictions to the regularity of the coefficients.
2. Concerning the results in Chapter 2, it could be of independent interest to obtain results of Liouville type in \mathbb{R}^n for solutions instead of just supersolutions as in [61]. This fact would imply better information about the critical exponents.

As far as we know, the only results in this direction are the classical results of the variational framework, the results of Felmer and Quaas [70] for radial Pucci's operators (see Subsection 2.5.1) and the results of Tso for radial k -hessian equations [123].

3. It would also be of interest to extend the results in Chapter 2 to non-uniformly elliptic equations for which the structure of Pucci's operators is not available.
4. Finally, the study of the solvability of problems of the type

$$F(D^2u) + |\nabla u|^2 = \lambda g(x, u) + f(x)$$

with F elliptic in a sense to be made precise could be an interesting open problem.

Introducción y preliminares

0.4. Antecedentes históricos y objetivos

La moderna teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales gira en torno al concepto natural de solución asociado a un problema determinado.

La teoría clásica presupone que las soluciones verifican la ecuación punto a punto porque tienen la suficiente regularidad como para realizar las derivaciones indicadas.

Cuando uno intenta buscar soluciones es mejor ampliar la clase de funciones candidatas a solución, entendiendo que la ecuación se verifica en algún sentido generalizado, o *sentido débil*, a precisar. Posteriormente se estudia si es posible concluir que la solución en sentido débil que hemos encontrado, por el hecho de ser solución de la ecuación, es más regular, es decir, clásica.

Esta estrategia de fraccionar el problema tiene una larga historia; por ejemplo fue necesaria en los trabajos clásicos de Dirichlet sobre su principio variacional y dio lugar a los trabajos de Weierstrass, Hilbert y la teoría de soluciones débiles, con el concepto de solución débil que hoy conocemos, basado fundamentalmente en la integración por partes. En este trabajo, no nos ocuparemos demasiado de las soluciones en este marco.

Otro ejemplo clásico es la *ecuación eikonal*, $|\nabla u|^2 = 1$ que aparece en *óptica geométrica*. La propia estructura de la ecuación hace que sea imposible *integrar por partes*. En este ejemplo es conocido el *método de características* de Monge, que da soluciones locales, y más modernamente el de *solución de viscosidad* que introdujeron P.L. Lions y M. Crandall en los años 80.

El origen del concepto de solución de viscosidad podemos encontrarlo, en un sentido, en otro método clásico: el método de Perron. Los resultados de existencia que constituyen el *método de Perron* están basados en ideas de sendos trabajos de H. Poincaré en 1887 y 1890 que fueron desarrolladas y simplificadas por O. Perron en 1923.

De una manera informal, tales ideas pueden resumirse diciendo que se trata de construir la solución de $-\Delta v = 0$ como el *supremo* de funciones que verifican la desigualdad $-\Delta v \leq 0$ y los datos de contorno.

Implícitamente se ve que la idea de solución en Perron, está asociada al *Principio del Máximo*:

Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2$ es subarmónica, es decir, $-\Delta u \leq 0$. Si $\phi \in \mathcal{C}^2$ es una función tal que $u - \phi$ tiene un máximo en x_0 , entonces $D^2(u - \phi)(x_0) \leq 0$ en el sentido de las matrices simétricas. En particular, $-\Delta\phi(x_0) \leq -\Delta u(x_0) \leq 0$. Obsérvese que cambiando subsolución por supersolución y máximo por mínimo se obtiene las desigualdades correspondientes. La observación fundamental es

que la condición sobre la *función test* ϕ , no presupone regularidad en la u , es en este sentido que formulamos la siguiente definición:

$u \in \mathcal{C}$ es subarmónica en sentido de viscosidad si verifica que para cualquier $\phi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo en x_0 , entonces $-\Delta\phi(x_0) \leq 0$.

Nótese que la anterior definición depende solamente de la *elipticidad* del operador de Laplace y realmente la linealidad es accesoria. Esta observación es la que hace útil esta definición de solución en contextos mucho más generales. De otra parte, esta es la forma de soslayar la imposibilidad de integrar por partes y de dar un marco amplio para buscar soluciones.

Respecto al nombre de *solución de viscosidad* tiene su origen en los trabajos de P. Lax sobre leyes de conservación, y ecuaciones como la eikonal, donde se regulariza la ecuación añadiendo una perturbación de la forma $\epsilon\Delta u$. El término ϵ representa la viscosidad en mecánica de fluidos, aunque en este contexto es un artificio teórico sin sentido físico. La idea de P. Lax consiste en recuperar la ecuación original haciendo tender ϵ a cero, de ahí que se conozca este método como *método de viscosidad evanescente* (del inglés *vanishing viscosity*). En particular, las soluciones obtenidas por este método son soluciones de viscosidad en el sentido más general indicado arriba.

En este trabajo tratamos algunos problemas en los que el concepto natural de *solución débil* es el de *solución de viscosidad* en el sentido que se precisará en breve (ver Definición 0.6.9) y que está inspirado en el concepto de función subarmónica en sentido de viscosidad que hemos comentado más arriba de forma heurística.

Nuestros objetivos son entender *ecuaciones elípticas completamente no lineales, con términos de orden cero que las hacen no propias* (ver Definición 0.6.2). Concretamente se analizarán algunos aspectos relacionados con la existencia, unicidad o, al contrario, multiplicidad de soluciones positivas.

0.5. Algunos modelos

Para comenzar, presentamos algunas situaciones en las que aparecen *ecuaciones completamente no lineales*.

Geometría: curvaturas

Sea una hipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de clase \mathcal{C}^2 . Supongamos que en unas ciertas coordenadas (x_1, \dots, x_n) la hipersuperficie S viene dada por

$$x_{n+1} = u(x) \quad \text{para } x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n,$$

donde \mathcal{U} es un entorno de un punto x_0 y $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$.

La normal unitaria en $p_0 = (x_0, u(x_0))$ (orientada hacia $x_{n+1} > u(x)$) viene dada por

$$n(x_0, u(x_0)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} (-\nabla u(x_0), 1).$$

Diferenciando, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{-\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \right) &= \\ &= \frac{-D^2 u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \left(Id - \frac{\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \otimes \frac{\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \right). \end{aligned} \quad (0.5.1)$$

Mediante una rotación de los ejes, podemos suponer que $e_{n+1} = n(p_0)$. Nótese que en las nuevas coordenadas $\nabla u(x_0) = 0$. Otra rotación de los ejes que sólo afecta a las n primeras variables, permite además suponer que la matriz $D^2 u(x_0)$ es diagonal en nuestras coordenadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \kappa_i \delta_{ij} \quad i, j=1, \dots, n.$$

Los números $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ son las *curvaturas principales* de S en p_0 .

En estas coordenadas,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right) = -\kappa_i \delta_{ij} \quad i, j=1, \dots, n.$$

Del cálculo anterior se deduce que, en las coordenadas originales, los autovalores de la matriz

$$\nabla \left(\frac{-\nabla u(x_0)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x_0)|^2}} \right)$$

son $(-\kappa_1, \dots, -\kappa_n)$.

Definimos la *curvatura media* en x_0 ,

$$H(x_0) = \frac{1}{n}(\kappa_1 + \dots + \kappa_n),$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} H(x_0) &= -\frac{1}{n} \text{traza} \left(\nabla \left(\frac{-\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \right)_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{n} \text{div} \left(\frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right)_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Se dice que S es una superficie mínima en \mathcal{U} si $H(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Por otra parte, se define la *curvatura de Gauss*

$$K(x_0) = \kappa_1 \dots \kappa_n = (-1)^n \det \left(\nabla \left(\frac{-\nabla u(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \right)_{x=x_0}.$$

Utilizando la expresión (0.5.1) se obtiene

$$K(x_0) = \frac{\det(D^2 u(x_0))}{(1 + |\nabla u(x_0)|^2)^{\frac{n+2}{2}}},$$

donde hemos utilizado que para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\det(Id - \xi \otimes \xi) = 1 - |\xi|^2.$$

Además, si $n \geq 3$, tenemos otras funciones de las curvaturas principales dadas por los polinomios simétricos elementales, llamadas *curvaturas medias de orden superior*. Denotamos por H_j la j -ésima *curvatura media* que, salvo una normalización, viene dada por el j -ésimo polinomio simétrico elemental en n variables:

$$H_j = S_j(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_k}.$$

En particular, $H_1 = H$ es la curvatura media, H_n es la curvatura de Gauss y H_2 (normalizada adecuadamente) es la *curvatura escalar*.

Para más información sobre problemas de ecuaciones en derivadas parciales en geometría, véanse por ejemplo [2, 124, 125].

Control estocástico y Teoría de juegos diferenciales

Consideremos un sistema dinámico cuyo estado en el tiempo $y(t) \in \mathbb{R}^n$ viene dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dy = \sigma(y(t), \alpha) dw(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (0.5.2)$$

donde t_1 es el tiempo horizonte, $w(t)$ es un proceso de Wiener n -dimensional, σ es la matriz de difusión y α es un control constante elegido en un conjunto \mathcal{A} . El estado inicial $x \in \mathbb{R}^n$ es determinista.

Informalmente, la ecuación (0.5.2) nos dice que si en el instante t el estado del sistema es $y(t)$, durante el período $(t, t + \Delta t)$ (con Δt un incremento pequeño), la variación $\Delta y(t)$ del estado es una variable aleatoria Gaussiana con media 0 y varianza $\sigma(y(t), \alpha)\sigma'(y(t), \alpha)\Delta t$ donde σ' denota la traspuesta de σ .

Consideramos un conjunto de estados admisibles $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que supondremos un dominio acotado con frontera lisa. Definimos el *tiempo de salida de Ω* ,

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : y(t) \notin \Omega\} \quad (0.5.3)$$

(nótese que τ depende del estado inicial x). El tiempo de parada del sistema es $T = \min\{t_1, \tau\}$.

Supondremos que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, la matriz $\sigma(\cdot, \alpha)\sigma'(\cdot, \alpha)$ es uniformemente elíptica siempre con las mismas constantes de elipticidad $0 < \theta < \Theta$, es decir, supondremos que existen constantes $0 < \theta < \Theta$ tales que

$$\theta|\xi|^2 \leq \langle \sigma(y, \alpha)\sigma'(y, \alpha)\xi, \xi \rangle \leq \Theta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

uniformemente en y, α . Entonces $\tau < \infty$ con probabilidad 1 (ver por ejemplo [20, Proposición 8.2]).

Un proceso que comienza en x tiene un coste esperado, que viene dado por una *función de coste* $J(x, \alpha)$ la cual involucra un *coste acumulado* durante el proceso, que denotamos $f_\alpha(y)$ y un coste de parada (la parada puede deberse

a que el proceso ha salido de Ω , o a que se ha alcanzado el tiempo horizonte). Para hacer el modelo más sencillo, supongamos que no hay coste de parada:

$$J(x, \alpha) = \mathbb{E}_x \left\{ \int_0^T f_\alpha(y(t)) dt \right\}.$$

Entonces, el *coste óptimo* desde el estado inicial x vendrá dado por

$$u(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x, \alpha).$$

Utilizando herramientas de Programación Dinámica, se demuestra que u satisface una *ecuación de Bellman* del tipo

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \{ \text{traza}(A_\alpha(x)D^2u) - f_\alpha(x) \} = 0,$$

donde $A_\alpha(x) = \frac{1}{2}\sigma(x, \alpha)\sigma'(x, \alpha)$.

En general, las ecuaciones de Bellman son ecuaciones del tipo

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_\alpha u(x) - f_\alpha(x)) = 0, \quad \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_\alpha u(x) - f_\alpha(x)) = 0,$$

donde \mathcal{A} es un conjunto arbitrario de índices y $L_\alpha u(x) = -\text{traza}(A_\alpha(x)D^2u)$ es uniformemente elíptico con constantes de elipticidad $0 < \theta < \Theta$ (obsérvese que escribimos la ecuación con distinto signo al obtenido arriba para adecuarla a la notación que utilizaremos a lo largo de esta memoria).

Una observación importante, es que al ser un ínfimo (supremo) de operadores lineales, el operador que da lugar a la ecuación de Bellman es un operador cóncavo (respectivamente convexo).

En el caso particular en el que el conjunto de índices es

$$\mathcal{A}_{\theta, \Theta} = \{ A \in S^n : \theta|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \Theta|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \}$$

obtenemos los operadores extremales de Pucci

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{ -\text{traza}(AX) \}, \quad \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{ -\text{traza}(AX) \},$$

de una gran importancia como herramienta teórica en el estudio de las ecuaciones uniformemente elípticas completamente no lineales, dado su carácter extremal, que permite evitar la linealización de la ecuación y estudiar ecuaciones generales dadas por operadores F no diferenciables, por ejemplo, los que dan lugar a las ecuaciones de Bellman, o más en general, las ecuaciones de Isaacs.

Las ecuaciones de Isaacs surgen en teoría de juegos diferenciales. En un juego diferencial se considera un sistema dinámico como en el caso de las ecuaciones de Bellman; la diferencia es que, en lugar de un sólo controlador, se da la oportunidad a dos jugadores (controladores) de elegir cada uno un control en cada instante t ; el jugador I elige un control $\alpha(t)$ en una clase \mathcal{A} y el jugador II elige un control $\beta(t)$ en la clase \mathcal{B} .

La elección de estos controles en cada tiempo, da lugar a las *estrategias* de los jugadores.

De manera análoga, al caso de un sólo control se puede definir una función de pagos (o de coste) esperados $J(x, \alpha, \beta)$. El objetivo de los jugadores es obtener

el máximo beneficio posible, pero de manera que las ganancias de un jugador son las pérdidas del oponente (el juego es de suma nula). Se define el valor del juego para el jugador I

$$u_I(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\beta \in \mathcal{B}} J(x, \alpha, \beta),$$

y para el jugador II

$$u_{II}(x) = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} J(x, \alpha, \beta).$$

En cada caso, el valor del juego representa el máximo beneficio esperado por el jugador cuando su oponente juega de manera óptima. Se dice que el juego tiene un valor o punto de silla si $u_I = u_{II}$. Esto no sucede en general.

Utilizando argumentos de Programación Dinámica, se puede demostrar que los valores del juego satisfacen las ecuaciones de Isaacs:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \inf_{\beta \in \mathcal{B}} (L_{\alpha\beta} u_I(x) - f_{\alpha\beta}(x)) = 0 \quad \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} (L_{\alpha\beta} u_{II}(x) - f_{\alpha\beta}(x)) = 0,$$

para $L_{\alpha\beta}$ es una familia de operadores lineales con coeficientes medibles y acotados y uniformemente elípticos con constantes de elipticidad $0 < \theta \leq \Theta$. Para más información, véanse [16, 22, 71, 72].

Hay dos observaciones importantes respecto a esta clase de operadores, en primer lugar, que son uniformemente elípticos, pero no necesariamente cóncavos o convexos respecto a la matriz.

Y en segundo lugar, hay que señalar que cualquier operador uniformemente elíptico puede escribirse como un operador de Isaacs. En efecto, un operador $F : \Omega \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente elíptico si y sólo si para todo $X, Y \in \mathcal{S}^n$,

$$\begin{aligned} F(x, X) - F(x, Y) &\leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) \\ &= \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{-\text{traza}(A(X - Y))\} \end{aligned}$$

(ver Lema 0.6.8). Como se tiene la igualdad cuando $X = Y$, en particular,

$$F(x, X) = \inf_{Y \in \mathcal{S}^n} \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{-\text{traza}(AX) + (F(x, Y) + \text{traza}(AY))\},$$

que es un operador de tipo Isaacs asociado a la familia

$$L_A u(x) = -\text{traza}(AD^2 u)$$

de operadores lineales con coeficientes constantes.

Juegos de tira y afloja aleatorios

Un juego de tira y afloja (en inglés *Tug-of-War*) es un juego de suma nula para dos jugadores, es decir, hay dos competidores y las ganancias totales de cada uno de ellos suponen las pérdidas de su oponente. Por tanto uno de ellos, por ejemplo el jugador I, jugará tratando de obtener el máximo beneficio mientras que el jugador II intentará minimizar el beneficio del jugador I (o, dado que el juego es de suma nula, maximizar el suyo propio).

Este tipo de juegos de tira y afloja aleatorios han sido estudiados en conexión con algunos problemas de EDP, ver [19, 49, 113]. Pueden encontrarse otros juegos en relación con el estudio de ecuaciones degeneradas en [96, 114].

Describimos a continuación la dinámica del juego. Se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y se toman $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ (que puede ser el total de la frontera) y $\Gamma_N \equiv \partial\Omega \setminus \Gamma_D$.

Sea $F : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua. Al principio del juego se sitúa una ficha en un punto $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_D$. Entonces se decide el jugador que inicia el juego mediante una tirada de moneda (equilibrada). El ganador puede mover la ficha (posición del juego) a un punto $x_1 \in \overline{B_\epsilon(x_0)} \cap \bar{\Omega}$ de su elección. A partir de ese momento, se repite la tirada de moneda en cada turno para decidir el siguiente jugador en mover y el ganador elige un nuevo estado del juego $x_k \in \overline{B_\epsilon(x_{k-1})} \cap \bar{\Omega}$. Una vez que el juego alcanza algún $x_\tau \in \Gamma_D$, el juego termina y el jugador I cobra o paga la cantidad $F(x_\tau)$ mientras que el jugador II cobra o paga $-F(x_\tau)$.

Por este motivo, a la función F se la denomina *función de pagos*. Es posible considerar modelos más generales en los que se consideran pagos intermedios dados por una función $f(x)$ definida en Ω , pero por simplicidad no lo haremos.

De esta manera se obtiene una sucesión de estados del juego x_0, x_1, \dots, x_τ , donde cada x_k excepto x_0 son variables aleatorias, dependientes de la sucesión de tiradas de moneda y las estrategias adoptadas por los jugadores.

Si denotamos por S_I y S_{II} las estrategias adoptadas por los jugadores I y II respectivamente, se define el *valor del juego- ϵ* para el jugador I como

$$u_I^\epsilon(x_0) = \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F(x_\tau)],$$

y para el jugador II

$$u_{II}^\epsilon(x_0) = \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F(x_\tau)],$$

Los valores del juego $u_I^\epsilon(x_0), u_{II}^\epsilon(x_0)$, representan la ganancia mínima esperada por los jugadores para un juego que comience en el punto x_0 , suponiendo que el oponente juega de manera óptima.

Si $u_I^\epsilon = u_{II}^\epsilon := u_\epsilon$, se dice que el juego tiene un valor. En [113] se prueba este hecho para nuestro caso. Además se prueba que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $u_\epsilon \rightarrow u$ uniformemente. Llamamos a u el *valor continuo del juego*. De hecho, según [49], u es una solución de viscosidad del problema mixto

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty u(x) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u(x) = F(x) & \text{en } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (0.5.4)$$

donde $\tilde{\Delta}_\infty u = |\nabla u|^{-2} \sum_{ij} u_{x_i} u_{x_i x_j} u_{x_j}$ es el infinito Laplaciano normalizado.

La conexión del juego con la ecuación (0.5.4) es, otra vez, a través del *Principio de Programación Dinámica* del juego:

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{y \in \overline{B_\epsilon(x)} \cap \bar{\Omega}} u_\epsilon(y) + \min_{y \in \overline{B_\epsilon(x)} \cap \bar{\Omega}} u_\epsilon(y) \right\} \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \Gamma_D, \quad (0.5.5)$$

que se verifica también para $u_I^\epsilon, u_{II}^\epsilon$. La idea fundamental es que si u_ϵ fuera suficientemente regular, un desarrollo de Taylor alrededor de x , nos daría

$$u_\epsilon(y) = u_\epsilon(x) + \nabla u_\epsilon(x) \cdot (y - x) + \frac{1}{2} \langle D^2 u_\epsilon(x)(y - x), (y - x) \rangle + o(|y - x|^2)$$

cuando $|y - x| \rightarrow 0$. Evaluando la expresión anterior en

$$x_{\max} = x + \epsilon \left[\frac{\nabla u_\epsilon(x)}{|\nabla u_\epsilon(x)|} + o(1) \right], \quad y \quad x_{\min} = x - \epsilon \left[\frac{\nabla u_\epsilon(x)}{|\nabla u_\epsilon(x)|} + o(1) \right]$$

y sumando, se obtiene

$$2u_\epsilon(x_\epsilon) - \frac{\max_{y \in B_\epsilon(x) \cap \Omega}}{u_\epsilon(y)} - \frac{\min_{y \in B_\epsilon(x) \cap \Omega}}{u_\epsilon(y)} = -\tilde{\Delta}_\infty u_\epsilon(x) + o(\epsilon^2)$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Utilizando (0.5.5) y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ formalmente, obtenemos $-\tilde{\Delta}_\infty u(x) = 0$.

Para probar que u verifica (0.5.4), es crucial utilizar el marco de viscosidad.

Transporte óptimo y construcción de antenas

Consideramos ahora el problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich, que data de los trabajos de Monge en 1781. El problema puede enunciarse de la siguiente manera: Se tiene una densidad de masa positiva f^+ , que queremos transportar para rellenar un hueco de densidad f^- con el menor coste posible.

Una condición básica, es la conservación de la masa durante el transporte:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx.$$

Es decir, consideramos las medidas correspondientes $\mu^+ = f^+ dx$ y $\mu^- = f^- dy$ y nos preguntamos como podemos reorganizar μ^+ en μ^- de manera óptima.

Para ello consideramos un plan de transporte $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que es una función regular e inyectiva y que además transporta μ^+ en μ^- , es decir

$$f^+(x) = f^-(r(x)) |\det(Dr(x))| \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (0.5.6)$$

Si denotamos por \mathcal{A} la clase de funciones admisibles r , regulares e inyectivas y que satisfacen (0.5.6), buscamos un *plan de transporte óptimo* $S \in \mathcal{A}$ en el sentido

$$J(s) = \min_{r \in \mathcal{A}} J(r),$$

donde $J(r)$ es la función de coste dada por

$$J(r) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - r(x)| f^+(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x - r(x)| d\mu^+.$$

La interpretación de la función de coste es inmediata, el transporte desde x hasta $r(x)$ de una masa $f^+(x)$ es tanto más costoso cuánto mayor sea la distancia a recorrer.

En sus trabajos, Monge consideró que el plan de transporte óptimo $s(x)$ debía estar determinado por un potencial u . Mediante argumentos geométricos heurísticos dedujo que, si existía un plan de transporte óptimo, entonces existiría un potencial escalar u tal que

$$\frac{s(x) - x}{|s(x) - x|} = -\nabla u(x) \quad x \in \text{soporte}(f^+).$$

Posteriormente, en la década de 1940, Kantorovich interpretó el problema de transporte como un problema de programación lineal infinito dimensional, e introdujo el *problema dual de maximización*.

Para más información ver [68] y las referencias allí citadas.

En conexión con los problemas geométricos ya mencionados, en concreto con la ecuación de Monge-Ampère, y con los problemas de transporte de Monge-Kantorovich, podemos también señalar el diseño de antenas y reflectores.

Se pueden considerar sistemas con un reflector (ver por ejemplo [46, 79]) o con dos (ver [80]). Por simplicidad, analizaremos el modelo con un sólo reflector.

Consideremos la esfera unidad $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ centrada en el origen \mathcal{O} y con coordenadas cartesianas. Sean $\Omega, T \subset \mathbb{S}^n$ no vacíos.

Supongamos que hay una fuente de luz en \mathcal{O} , que ilumina a través de una abertura dada por $\overline{\Omega}$ un reflector R con una intensidad $I(m)$, $m \in \Omega$ (intensidad saliente). Nuestro problema es encontrar la forma del reflector R para que la luz, una vez reflejada en R , ilumine T con una intensidad prefijada $L(y)$, $y \in T$.

El rayo emitido desde \mathcal{O} con dirección $m \in \overline{\Omega}$ se refleja en R con una dirección $y = y(m)$, $|y| = 1$. El Principio de Fermat y la Ley de reflexión de Snell nos dicen que, si R es una hipersuperficie regular, se define una aplicación

$$\begin{aligned} \gamma : \overline{\Omega} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ m &\mapsto y(m) = m - 2\langle m, n(m) \rangle n(m) \end{aligned}$$

que lleva la dirección incidente en la reflejada. La dirección saliente sigue la dirección normal a la superficie del reflector en el punto de incidencia, que denotamos $n(m)$.

Una condición necesaria que deben satisfacer los datos es la siguiente ecuación de balance energético

$$\int_{\Omega} I(m) d\sigma(m) = \int_T L(y) d\sigma(y), \quad (0.5.7)$$

donde $d\sigma$ es el elemento de volumen de \mathbb{S}^n . Podemos reescribir (0.5.7) utilizando $y = \gamma(m)$ como

$$\int_{\Omega} I(m) d\sigma(m) = \int_{\Omega} L(\gamma(m)) |\det(D\gamma(m))| d\sigma(m).$$

En particular, se tiene

$$I(m) = L(\gamma(m)) |\det(D\gamma(m))|, \quad (0.5.8)$$

una ecuación para R que entra implícitamente a través de la aplicación γ .

Observamos la analogía entre (0.5.6) y (0.5.8). De hecho, la expresión (0.5.7) es una ecuación de tipo Monge-Ampère escrita en forma débil según Aleksandrov (ver [81, Sección 1.2], [3, 15, 42, 112] y también la Observación 1.5.36).

De hecho en [79, 80] se interpreta este modelo para un sólo reflector en términos del problema de transporte de Monge-Kantorovich. En este caso, las distribuciones de masa son las intensidades saliente y entrante. Se prueba que el problema del reflector es equivalente al problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich con función de coste

$$K(m, y) = -\log [1 - \cos(\text{dist}_{\mathbb{S}^n}(m, y))]$$

para $m, y \in \mathbb{S}^n$.

Esta aproximación permite usar las ideas de Kantorovich y plantear el problema de optimización dual, que es variacional. Esto supone una ventaja, por ejemplo numéricamente, ya que una vez discretizado el problema dual es un problema de programación lineal.

0.6. Preliminares sobre soluciones de viscosidad

Consideremos el siguiente problema con condiciones Dirichlet homogéneas:

$$\begin{cases} (u')^2 - 1 = 0 & \text{en } (-1, 1) \\ u(1) = u(-1) = 0. \end{cases} \quad (0.6.1)$$

Dicho problema no tiene solución en sentido clásico es decir, en el espacio $\mathcal{C}^1(-1, 1) \cap \mathcal{C}([-1, 1])$ ya que las únicas funciones que verifican la ecuación son $u(x) = x$ y $v(x) = -x$ que no verifican las condiciones de contorno. Sin embargo, $u(x) = 1 - |x|$ y $v(x) = |x| - 1$, son funciones Lipschitz que verifican la ecuación puntualmente salvo en $x = 0$ (y por tanto en casi en todo punto).

A la vista del ejemplo anterior, parece razonable modificar el concepto de solución de manera que funciones como las anteriores puedan considerarse soluciones en algún sentido.

El concepto de solución de viscosidad fue introducido a principios de la década de 1980 por P. L. Lions y M. G. Crandall para ecuaciones de Hamilton-Jacobi, basándose en ideas previas de L. C. Evans. Posteriormente, P.L. Lions extendió estas ideas a ecuaciones de segundo orden, demostrando además resultados de existencia y unicidad para ecuaciones convexas utilizando métodos estocásticos. Posteriormente los trabajos de R. Jensen permitieron abordar ecuaciones no necesariamente convexas mediante un procedimiento completamente distinto basado en la regularización (en un sentido adecuado) de las ecuaciones. Para una referencia detallada del desarrollo de la teoría, puede consultarse la introducción y las referencias en [83].

La noción de solución de viscosidad basa su potencia en la existencia de un Principio del Máximo en un sentido conveniente, con contribuciones de M. G. Crandall, H. Ishii, R. Jensen, P. L. Lions, y N. S. Trudinger entre otros, y en el uso de un método de tipo Perron, introducido en este ámbito por H. Ishii.

Por otra parte, encontramos el problema fundamental (y difícil) de la regularidad de las soluciones, es decir, de saber bajo qué condiciones puede asegurarse una mayor regularidad, incluso clásica, de las soluciones de viscosidad de ecuaciones elípticas. Son destacables las contribuciones pioneras de L.C. Evans [66] y N.V. Krylov [97, 98] para ecuaciones con F convexa y los trabajos de L.A. Caffarelli, véase [39] y las referencias allí citadas.

Esta noción de solución es consistente con el marco clásico; no es difícil demostrar que una solución de viscosidad con una regularidad del orden de la ecuación, es una solución clásica, ver la introducción al Capítulo 2 de [39].

En esta sección, vamos a introducir las definiciones y herramientas básicas en lo referente a soluciones de viscosidad para tratar ecuaciones completamente no lineales del tipo:

$$\mathcal{F}(u, \nabla u, D^2 u) = 0 \quad \text{en } \Omega$$

donde $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ (donde S^n denota el espacio de matrices reales simétricas). Se recomiendan como referencias generales [39], y [58].

La relación de orden usual en S^n viene dada por: $A \leq B$ si y sólo si $A - B$ es semidefinida negativa. Dotamos el espacio S^n con la norma $\|X\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |X\xi| = \max_{i=1\dots n} |\lambda_i(X)|$ donde $\lambda_i(X)$ son los autovalores de X .

Elipticidad uniforme y degenerada. Operadores propios. Operadores extremales de Pucci

En lo sucesivo, la elipticidad será una hipótesis básica. Más precisamente, requeriremos según los casos, bien elipticidad degenerada o bien elipticidad uniforme (más fuerte).

Definición 0.6.1. Sea el operador $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que \mathcal{F} es *elíptico degenerado*, si es decreciente en el argumento matricial. Más concretamente, si

$$X \leq Y \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(u, \xi, Y) \leq \mathcal{F}(u, \xi, X) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Para probar los Principios de Comparación, es básico el siguiente concepto:

Definición 0.6.2. Sea el operador $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que \mathcal{F} es *propio* si es elíptico degenerado y $u \mapsto \mathcal{F}(u, \xi, X)$ es una función no decreciente, es decir,

$$\mathcal{F}(u, \xi, Y) \leq \mathcal{F}(v, \xi, X) \quad \text{si } X \leq Y \text{ y } u \leq v,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo 0.6.3. Algunos ejemplos de operadores elípticos degenerados:

1. $\mathcal{F}(u, \xi, X) = -\text{traza}(AX) + \langle b, \xi \rangle - f(u)$ donde $A \in S^n$, $A \geq 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Si $A > 0$, es uniformemente elíptico.
2. $\mathcal{F}(u, \xi, X) = -\text{traza} \left(\left(Id + (p-2) \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) X \right) \cdot |\xi|^{p-2} - f(u)$ para $p > 1$.
3. $\mathcal{F}(u, \xi, X) = -\langle X\xi, \xi \rangle - f(u)$.
4. $\mathcal{F}(u, \xi, X) = \min \{ |\xi| - f(u), -\langle X\xi, \xi \rangle \}$.

Definición 0.6.4. Diremos que un operador $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ es *uniformemente elíptico* con constantes $0 < \theta \leq \Theta$ si para todo $X, Y \in S^n$ con $Y \geq 0$,

$$-\Theta \cdot \text{traza}(Y) \leq \mathcal{F}(u, \xi, X + Y) - \mathcal{F}(u, \xi, X) \leq -\theta \cdot \text{traza}(Y) \quad (0.6.2)$$

para cada $u \in \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observación 0.6.5. La elipticidad uniforme implica la elipticidad degenerada. Efectivamente, sean $X, Y \in S^n$ tales que $X \leq Y$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, \xi, Y) - \mathcal{F}(u, \xi, X) &= \mathcal{F}(u, \xi, X + (Y - X)) - \mathcal{F}(u, \xi, X) \\ &\leq -\theta \cdot \text{traza}(Y - X) \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

A continuación definiremos los operadores extremales de Pucci, ejemplos modelo de operador uniformemente elíptico, y claves en la teoría de ecuaciones uniformemente elípticas.

Definición 0.6.6. Se definen los *operadores extremales de Pucci* $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^{\pm} : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X) &= -\theta \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(X) - \Theta \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(X), \\ \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X) &= -\Theta \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(X) - \theta \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(X),\end{aligned}$$

con $\lambda_i(X)$, $i = 1, \dots, n$, los autovalores de X .

A lo largo de esta memoria citaremos varios resultados de [39]. En [39], los operadores de Pucci se definen con una convención de signos diferente. Ambas definiciones están relacionadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}^-(M, \theta, \Theta) = -\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(M), \quad \mathcal{M}^+(M, \theta, \Theta) = -\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(M),$$

donde $\mathcal{M}^{\pm}(M, \theta, \Theta)$ es la notación utilizada en [39].

Una caracterización alternativa de los operadores de Pucci es la siguiente:

Lema 0.6.7. Sea $\mathcal{A}_{\theta, \Theta} = \{A \in S^n : \theta|\xi|^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \Theta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\}$. Se tiene,

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X) = \inf_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{-\text{traza}(AX)\}, \quad \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X) = \sup_{A \in \mathcal{A}_{\theta, \Theta}} \{-\text{traza}(AX)\}.$$

En el siguiente lema queda claro por qué se conocen como operadores extremales.

Lema 0.6.8. Sea el operador $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, \mathcal{F} es uniformemente elíptico con constantes $0 < \theta \leq \Theta$ si y sólo si

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X - Y) \leq \mathcal{F}(u, \xi, X) - \mathcal{F}(u, \xi, Y) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y). \quad (0.6.3)$$

para $X, Y \in S^n$, $u \in \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera.

Demostración. En la prueba utilizaremos que cualquier matriz $Q \in S^n$ se puede descomponer de manera única en la forma $Q = Q^+ - Q^-$ donde $Q^+, Q^- \geq 0$ y $Q^+Q^- = 0$.

1. Supondremos (0.6.2) y querremos probar (0.6.3). Sean $P, Q \in S^n$, entonces, (0.6.2) implica

$$-\Theta \cdot \text{traza}(Q^+) \leq \mathcal{F}(u, \xi, P + Q) - \mathcal{F}(u, \xi, P - Q^-) \leq -\theta \cdot \text{traza}(Q^+). \quad (0.6.4)$$

Por otro lado, también a partir de (0.6.2), deducimos que

$$-\Theta \cdot \text{traza}(Q^-) \leq \mathcal{F}(u, \xi, P) - \mathcal{F}(u, \xi, P - Q^-) \leq -\theta \cdot \text{traza}(Q^-). \quad (0.6.5)$$

Restando (0.6.5) de (0.6.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\theta \cdot \text{traza}(Q^-) - \Theta \cdot \text{traza}(Q^+) &\leq \mathcal{F}(u, \xi, P + Q) - \mathcal{F}(u, \xi, P) \\ &\leq \Theta \cdot \text{traza}(Q^-) - \theta \cdot \text{traza}(Q^+),\end{aligned}$$

que, de acuerdo con la definición 0.6.6, implica

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(Q) \leq \mathcal{F}(u, \xi, P + Q) - \mathcal{F}(u, \xi, P) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(Q).$$

Tomando $P = Y$, $Q = X - Y$, obtenemos (0.6.3).

2. Recíprocamente, si $Q \geq 0$, tomando $X = P + Q$ e $Y = P$ en (0.6.3) tendremos

$$\begin{aligned} -\Theta \cdot \text{traza}(Q) &= \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(Q) \leq \mathcal{F}(u, \xi, P + Q) - \mathcal{F}(u, \xi, P) \\ &\leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(Q) = -\theta \cdot \text{traza}(Q). \end{aligned} \quad \square$$

Definición de solución de viscosidad

Sea $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ elíptica degenerada, es decir, decreciente en el argumento matricial. Supongamos que $u \in C^2$ es una subsolución en sentido clásico de

$$\mathcal{F}(u, \nabla u, D^2u) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (0.6.6)$$

es decir, satisface la desigualdad

$$\mathcal{F}(u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (0.6.7)$$

Sean $\varphi \in C^2$ y sea $\hat{x} \in \Omega$ un punto de máximo local de $u - \varphi$. Entonces ha de verificarse $Du(\hat{x}) = D\varphi(\hat{x})$ y $D^2u(\hat{x}) \leq D^2\varphi(\hat{x})$. Por la elipticidad de \mathcal{F} , se tiene

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq \mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla u(\hat{x}), D^2u(\hat{x}))$$

y de ahí, por ser u subsolución clásica de (0.6.6) se tiene

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0.$$

Observamos que en esta desigualdad no intervienen derivadas de u . Esto motiva la siguiente definición:

Definición 0.6.9. Diremos que $u \in C(\Omega)$ es *subsolución de viscosidad* de (0.6.6) si para toda $\varphi \in C^2$ y $\hat{x} \in \Omega$ tales que $u - \varphi$ alcanza un máximo local en \hat{x} , se tiene que

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0.$$

De manera análoga diremos que $u \in C(\Omega)$ es una *supersolución de viscosidad* de (0.6.6) si para toda $\varphi \in C^2$ y $\hat{x} \in \Omega$ tales que $u - \varphi$ alcanza un mínimo local en \hat{x} , se tiene que

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \geq 0.$$

Finalmente, $u \in C(\Omega)$ es *solución de viscosidad* de (0.6.6) en Ω si es a la vez subsolución y supersolución de viscosidad.

Observación 0.6.10. En la Definición 0.6.9 podemos suponer, tal vez sumando una constante a la función test φ , que $(u - \varphi)(\hat{x}) = 0$, de manera que

$$\mathcal{F}(\varphi(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0$$

(respectivamente $\mathcal{F}(\varphi(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \geq 0$). Entonces, diremos que φ *toca a u por arriba en x_0* (cuando $u - \varphi$ tenga un máximo en x_0) o que φ *toca a u por abajo en x_0* (cuando $u - \varphi$ tenga un mínimo en x_0).

Observación 0.6.11. Si en la Definición 0.6.9 suponemos que el máximo de $u - \varphi$ es *estricto* obtenemos una definición alternativa de subsolución de viscosidad. Es evidente que la Definición 0.6.9 implica la nueva definición. Para comprobar que la nueva definición implica la Definición 0.6.9, basta observar que si \hat{x} es tal que $u - \varphi$ tiene un máximo en \hat{x} , entonces $u - \hat{\varphi}$ con $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) + |x - \hat{x}|^4$ tiene un máximo local estricto en \hat{x} y además

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) = \mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\hat{\varphi}(\hat{x}), D^2\hat{\varphi}(\hat{x})) \leq 0.$$

En el caso de las supersoluciones se tienen conclusiones análogas.

Dado que estamos tratando con ecuaciones elípticas de segundo orden, toda la información relevante sobre las funciones test $\varphi \in \mathcal{C}^2$ en la Definición 0.6.9 está codificada en las dos primeras derivadas de φ en los puntos de contacto con la solución u .

Por ello, puede darse una definición alternativa de subsolución y supersolución de viscosidad en términos de polinomios de grado 2. Para ello, definiremos los *semijets*, superior e inferior, de orden 2 de la función u en el punto \hat{x} que son conjuntos de polinomios de grado 2 que tocan respectivamente por arriba y por abajo a u en el punto \hat{x} .

Definición 0.6.12. Dada $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \Omega$, podemos definir los *semijets*:

$$\begin{aligned} J_{\Omega}^{2,+}u(\hat{x}) &= \{(p, X) \in \mathbb{R}^n \times S^n : \varphi(x) = u(\hat{x}) + \langle p, (x - \hat{x}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), (x - \hat{x}) \rangle \text{ toca a } u \text{ por arriba en } \hat{x}, \\ &\quad \forall x \in B_r(\hat{x}) \cap \Omega \text{ con } r > 0 \text{ suficientemente pequeño}\}, \\ J_{\Omega}^{2,-}u(\hat{x}) &= \{(p, X) \in \mathbb{R}^n \times S^n : \varphi(x) = u(\hat{x}) + \langle p, (x - \hat{x}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), (x - \hat{x}) \rangle \text{ toca a } u \text{ por debajo en } \hat{x} \\ &\quad \forall x \in B_r(\hat{x}) \cap \Omega \text{ con } r > 0 \text{ suficientemente pequeño}\}, \end{aligned}$$

y sus cierres,

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\Omega}^{2,+}u(\hat{x}) &= \{(p, X) \in \mathbb{R}^n \times S^n : \exists x_n \in B_r(\hat{x}), (p_n, X_n) \in J^{2,+}u(x_n) \\ &\quad \text{t.q. } (x_n, p_n, X_n) \rightarrow (\hat{x}, p, X) \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}, \\ \bar{J}_{\Omega}^{2,-}u(\hat{x}) &= \{(p, X) \in \mathbb{R}^n \times S^n : \exists x_n \in B_r(\hat{x}), (p_n, X_n) \in J^{2,-}u(x_n) \\ &\quad \text{t.q. } (x_n, p_n, X_n) \rightarrow (\hat{x}, p, X) \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Como veremos en el siguiente ejemplo, los semijets dependen de la elección de Ω . Además, para todo $A \subset \Omega$ y todo $x \in A$ se verifica $J_{\Omega}^{2,\pm}u(x) = J_A^{2,\pm}u(x)$. Por este motivo, a menudo escribiremos $J^{2,\pm}u(x)$.

Ejemplo 0.6.13. Sea la función $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax + \frac{b}{2}x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces $J_{[-1,0]}^{2,+}u(0) = ((-\infty, 0) \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times [0, \infty))$, mientras que

$$J_{\mathbb{R}}^{2,+}u(0) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } a > 0 \\ \{0\} \times [\text{máx}\{0, b\}, \infty), & \text{si } a = 0 \\ ((a, 0) \times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times [0, \infty)), & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

◇

Veamos ahora que la Definición 0.6.9 puede escribirse en términos de semi-jets.

Definición 0.6.14. 1. Diremos que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ es *subsolución de viscosidad* de (0.6.6) en Ω si para todo $\hat{x} \in \Omega$ tal que $J^{2,+}u(\hat{x}) \neq \emptyset$ se tiene

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), p, X) \leq 0 \quad \forall (p, X) \in J^{2,+}u(\hat{x}).$$

2. Análogamente, una *supersolución de viscosidad* de (0.6.6) en Ω es una función $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que para todo $\hat{x} \in \Omega$ tal que $J^{2,-}u(\hat{x}) \neq \emptyset$ se tiene

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), p, X) \geq 0 \quad \forall (p, X) \in J^{2,-}u(\hat{x}).$$

3. Finalmente, u es *solución de viscosidad* de (0.6.6) en Ω si es a la vez subsolución y supersolución de viscosidad.

Observación 0.6.15. Las definiciones anteriores también son válidas si consideramos $\overline{J}^{2,\pm}u(x)$ en lugar de $J^{2,\pm}u(x)$.

Observación 0.6.16. Las definiciones 0.6.9 y 0.6.14 son equivalentes. Veámoslo para el caso de la subsolución. Comprobamos primero que la Definición 0.6.9 implica 0.6.14. Sea \hat{x} tal que $J^{2,+}u(\hat{x}) \neq \emptyset$. Tomamos $(p, X) \in J^{2,+}u(\hat{x})$ y definimos

$$\varphi(x) = u(\hat{x}) + \langle p, (x - \hat{x}) \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), (x - \hat{x}) \rangle.$$

Por definición de $J^{2,+}u(\hat{x})$, se tiene que φ toca a u por arriba en \hat{x} , es decir, $u - \varphi$ tiene un máximo en \hat{x} . Por la definición 0.6.9, se tiene

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), p, X) = \mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0,$$

que es lo que queríamos comprobar.

Para comprobar que la Definición 0.6.14 implica la 0.6.9 tomemos \hat{x} y $\varphi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo en \hat{x} . Por la Observación 0.6.11 podemos suponer que el máximo es estricto. Haciendo el desarrollo de Taylor hasta orden dos de φ alrededor de \hat{x} se tiene que para todo $x \neq \hat{x}$

$$\begin{aligned} u(x) &< u(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) + \varphi(x) \\ &= u(\hat{x}) + \langle D\varphi(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2\varphi(\hat{x})(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2). \end{aligned}$$

En particular, si $x \in B_r(\hat{x})$ para r suficientemente pequeño, $x \neq \hat{x}$, se tiene

$$u(x) < u(\hat{x}) + \langle D\varphi(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2\varphi(\hat{x})(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle.$$

Se deduce que $(\nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \in J^{2,+}u(\hat{x})$ y por tanto, por la Definición 0.6.14, se tiene

$$\mathcal{F}(u(\hat{x}), \nabla\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0,$$

que permite concluir

Diferenciabilidad puntual de orden 2

Definición 0.6.17. Sea una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, y un punto $\hat{x} \in \Omega$. Si existe algún par $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times S^n$ tal que

$$u(x) = u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), (x - \hat{x}) \rangle + o(|x - \hat{x}|^2) \quad \text{para } x \rightarrow \hat{x},$$

diremos que u es puntualmente dos veces diferenciable en \hat{x} .

Lema 0.6.18. En caso de existir, p y X como en la definición 0.6.17, son únicos. Denotaremos $p = Du(\hat{x})$ y $X = D^2u(\hat{x})$.

Demostración. Sean $(q, Y) \in \mathbb{R}^n \times S^n$ tales que se verifica

$$u(x) = u(\hat{x}) + \langle q, (x - \hat{x}) \rangle + \frac{1}{2} \langle Y(x - \hat{x}), (x - \hat{x}) \rangle + o(|x - \hat{x}|^2),$$

para $x \rightarrow \hat{x}$. Entonces, escribiendo el desarrollo de $u(x)$ en términos de (p, X) como en la definición 0.6.17 se tiene

$$\langle (p - q), (x - \hat{x}) \rangle + \frac{1}{2} \langle (X - Y)(x - \hat{x}), (x - \hat{x}) \rangle = o(|x - \hat{x}|^2).$$

Como lo anterior es cierto para todo x en un entorno de \hat{x} , podemos escribir $x = \hat{x} + \epsilon \cdot \xi$ donde $|\xi| = 1$. Obtenemos

$$\langle (p - q), \xi \rangle + \frac{\epsilon}{2} \langle (X - Y)\xi, \xi \rangle = o(\epsilon). \quad (0.6.8)$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos $\langle (p - q), \xi \rangle = 0$. Como esto es cierto para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| = 1$, necesariamente $p = q$.

Con esta nueva información (0.6.8) queda: $\langle (X - Y)\xi, \xi \rangle = o(1)$. Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos $\langle (X - Y)\xi, \xi \rangle = 0$. Dado que esto es cierto para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ con $|\xi| = 1$, necesariamente $X = Y$. \square

Observación 0.6.19. Podemos caracterizar la diferenciabilidad puntual hasta orden dos de una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en \hat{x} en términos de jets. Definiendo

$$J^2u(\hat{x}) = J^{2+}u(\hat{x}) \cap J^{2-}u(\hat{x}),$$

se tiene que u es diferenciable hasta orden dos en \hat{x} si y sólo si $J^2u(\hat{x}) \neq \emptyset$. En tal caso $J^2u(\hat{x}) = \{(Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x}))\}$.

El Principio del Máximo de Crandall-Ishii.

En las pruebas de comparación será fundamental el Principio del Máximo para funciones semicontinuas debido a Crandall-Ishii, cuya prueba puede encontrarse en [57] y [58].

Lema 0.6.20. Sea $\tau > 0$. Sean $u, v \in \mathcal{C}(\Omega)$ y sea $(x_\tau, y_\tau) \in \Omega \times \Omega$ un punto de máximo local de la función $u(x) - v(y) - \frac{\tau}{2}|x - y|^2$. Entonces, existen matrices simétricas X_τ e Y_τ tales que

$$-3\tau \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\tau & 0 \\ 0 & -Y_\tau \end{pmatrix} \leq 3\tau \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad (0.6.9)$$

y además

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{J}^{2+}u(x_\tau) \quad y \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{J}^{2-}v(y_\tau).$$

Observación 0.6.21. El resultado es cierto para $u, -v$ funciones con valores reales en Ω semicontinuas superiores.

Un lema de penalización de Jensen.

Necesitaremos el siguiente lema de penalización, cuya prueba puede encontrarse en [58, Proposición 3.7].

Lema 0.6.22. *Supongamos que tanto u como $-v$ toman valores reales y son semicontinuas superiores en $\overline{\Omega}$. Para cada $\tau > 0$, denotamos*

$$M_\tau = \sup_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} \left(u(x) - v(y) - \frac{\tau}{2} |x - y|^2 \right).$$

Si $(x_\tau, y_\tau) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ es tal que $M_\tau = u(x_\tau) - v(y_\tau) - \frac{\tau}{2} |x_\tau - y_\tau|^2$, entonces

1. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau |x_\tau - y_\tau|^2 = 0$.
2. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} M_\tau = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} (u(x) - v(x))$ siempre y cuando \hat{x} es un punto de acumulación de x_τ .

0.7. Estructura de la memoria y resumen de contenidos

En general, a lo largo de esta memoria, se consideran ecuaciones en derivadas parciales del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u, \nabla u, D^2 u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un operador elíptico degenerado (ver Definición 0.6.1) e impropio respecto a los términos de orden cero (ver Definición 0.6.2). Por tanto, las ecuaciones que consideramos no se encuentran en el marco general de [58].

En particular, en los Capítulos 1 y 2 consideraremos ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.7.1)$$

mientras que en el capítulo 3 estudiaremos ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u| - f(u), -\Delta_\infty u\} = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

que se obtienen como límite de ecuaciones p -Laplacianas cuando $p \rightarrow \infty$.

A continuación ofrecemos una descripción detallada de los contenidos de la memoria.

Capítulo 1

Esencialmente, **corresponde al artículo [53]**.

En este capítulo se estudia la existencia, no existencia y posible unicidad de soluciones *positivas* a problemas de la forma (0.7.1) donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisfará las siguientes hipótesis:

(F1) *Elípticidad degenerada*: Para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y $X, Y \in \mathcal{S}^n$ se tiene

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad F(p, X) \leq F(p, Y).$$

(F2) *Homogeneidad de grado m* : $F(tp, tX) = t^m \cdot F(p, X)$ para todo $t > 0$. Supondremos que $F(0, 0) = 0$.

(F3) Existe $v_1 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solución en sentido de viscosidad del *problema auxiliar*

$$\begin{cases} F(\nabla v_1, D^2 v_1) = 1 & \text{en } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.7.2)$$

(F4) *Existencia del autovalor principal*: Supondremos que el operador F tiene un primer autovalor y que este es aislado.

(F5) Se verifica el *Lema de Hopf* en un sentido adecuado.

(F6) Para toda $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solución de viscosidad de

$$\begin{cases} F(\nabla u(x), D^2 u(x)) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

existen $\alpha \in (0, 1)$ y $C = C(\|f\|_\infty) > 0$ tales que

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

En cada caso, se precisarán las hipótesis entre las anteriores, necesarias para probar los resultados.

Respecto al lado derecho f , estamos interesados en los problemas modelo:

$$f_1(u) = \lambda u^q \quad \text{y} \quad f_2(u) = \lambda u^q + u^r$$

donde $0 < q < m < r$, con m la homogeneidad de F y $\lambda > 0$. Diremos que el problema con lado derecho f_1 es cóncavo por ser la potencia t^q cóncava respecto a la homogeneidad y que el problema con lado derecho f_2 es cóncavo-convexo por ser la no linealidad una combinación de una potencia cóncava y una potencia convexa (siempre respecto a la homogeneidad).

Para evitar cualquier ambigüedad, es conveniente resaltar que no estamos suponiendo ninguna propiedad de concavidad o convexidad sobre el operador F .

Obsérvese que los problemas de la forma (0.7.1) con lados derechos f_1 y f_2 no son propios y por tanto están fuera de la teoría general en [58].

En lo que concierne al problema cóncavo

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = \lambda u^q, & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

el resultado fundamental es un Principio de Comparación global, el **Teorema 1.2.1**. Se prueba la comparación entre sub- y supersoluciones (en sentido de viscosidad) *positivas* del problema

$$F(\nabla w, D^2 w) = f(w) \quad \text{en } \Omega,$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface (F1) y (F2) para algún m , y $f(\cdot)$ verifica

$$\frac{f(t)}{t^q} > 0 \quad \text{es no creciente para todo } t > 0 \text{ y algún } 0 < q < m. \quad (0.7.3)$$

Son pertinentes algunas observaciones:

- El resultado es muy general, solamente requiere (F1) y (F2).
- Se utiliza extensivamente en las pruebas de existencia de los Capítulos 1 y 2.
- En el Capítulo 3 encontramos el análogo (**Teorema 3.4.1**) para ecuaciones que no están en el marco de este capítulo del tipo

$$\min\{|\nabla u| - f(u), -\Delta_\infty u\} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

con f que satisface (0.7.3) para $m = 1$. Las ideas clave de la demostración son las mismas.

- La condición sobre el lado derecho es la natural para los argumentos que usamos. Incluye al problema con potencia cóncava λu^q con $0 < q < m$ y $\lambda > 0$.

Como consecuencia del Principio de Comparación, se deduce que el problema de Dirichlet con dato cero

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y f satisfaciendo (0.7.3) tiene (de existir) una única solución positiva (**Corolario 1.2.2**).

Esta es una característica importante de nuestro resultado de comparación. En la bibliografía se ha utilizado el cambio de variable $\tilde{w} = \log w$ (por ejemplo en [87, 90]) para probar Principios de Comparación *para los logaritmos* de una subsolución y una supersolución. Este argumento también puede usarse en nuestro caso (ver página 39) pero no permite concluir unicidad en el problema original cuando el dato de borde es cero ya que entonces $\log u - \log v$ está indeterminado sobre la frontera.

Esta es una ventaja de nuestro argumento.

La comparación se prueba simplemente bajo las hipótesis $(F1)$, $(F2)$, sin embargo, para demostrar la existencia de solución, debemos precisar más la estructura del operador F con hipótesis adicionales. En el **Teorema 1.3.1** se prueba la existencia de una única solución positiva del problema cóncavo para cada $\lambda > 0$ bajo las hipótesis $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$ y $(F5)$. La demostración se basa en la construcción de una sub- y supersolución con dato de borde 0 y el método de Perron en [58].

Observamos que en esta construcción se puede reemplazar la hipótesis $(F5)$ por $(F4)$ (Observación 1.3.6). Esto es de utilidad en las aplicaciones, por ejemplo en la Subsección 1.5.1, donde usar una u otra se traduce en hipótesis más o menos restrictivas sobre la regularidad de $\partial\Omega$.

En la Sección 1.4 se estudia la existencia y no-existencia de soluciones en función del parámetro $\lambda > 0$ del problema cóncavo-convexo:

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2u) = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.7.4)$$

donde $0 < q < m < r$.

En el **Teorema 1.4.1**, bajo las hipótesis $(F1) - (F4)$ y $(F6)$, (la hipótesis $(F5)$ no es necesaria), probamos la existencia de un valor $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que existe al menos una solución *minimal positiva* para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$, y no existe solución no trivial para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$.

La prueba se basa en la construcción en [33]:

- Construcción de una solución del problema para $\lambda \leq \lambda_0$ pequeño (**Teorema 1.4.2**). Sigue el método de monotonía.
 - Construcción de la supersolución con dato 0 (**Lema 1.4.3**). Aquí aparece la condición $\lambda \leq \lambda_0$.
 - Como subsolución se utiliza la solución del problema cóncavo (**Lema 1.4.5**).
 - Por comparación cóncava la sub- y la supersolución están ordenadas (**Lema 1.4.7**).
 - Se utiliza un método de iteración para construir la solución. La hipótesis $(F6)$ se utiliza aquí para obtener compacidad relativa.
- No existencia de solución para $\lambda > \hat{\lambda}$ grande (**Teorema 1.4.8**). Aquí se utiliza que existe primer autovalor y que es aislado (hipótesis $(F4)$).
- Existencia de $\lambda_{\text{máx}}$ tal que existe solución minimal para todo $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ (**Teorema 1.4.10**). Se deduce de los Teoremas 1.4.2 y 1.4.8.

Observamos que para obtener los resultados de la Sección 1.4 no es necesaria ninguna restricción en el tamaño de r . En el Capítulo 2 se obtendrá una segunda solución positiva del problema (0.7.4) en el caso uniformemente elíptico cuando r es subcrítico en un sentido a definir.

Cabe mencionar que se dan expresiones explícitas de λ_0 y $\hat{\lambda}$ (ecuaciones (1.4.2) y (1.4.5)). De la relación $\lambda_0 \leq \hat{\lambda}$, en el **Corolario 1.4.9**, se deduce indirectamente una cota inferior para el primer autovalor de F

$$\lambda_1(\Omega) \geq \|v_1\|_{\infty}^{-m}$$

donde v_1 es la solución de (0.7.2).

Finalmente, en la Sección 1.5 se estudian ejemplos de aplicación de los resultados. A lo largo del capítulo se pide explícitamente que $\partial\Omega$ sea tan regular como sea necesario para tener (F3) – (F6). En las aplicaciones consideradas en esta sección se estudian condiciones suficientes de regularidad de $\partial\Omega$ para tener cada una de las hipótesis sobre F . En las partes de las demostraciones de existencia donde se pueden utilizar indistintamente (F4) y (F5) (Observación 1.3.6) se elegirá siempre la que menos regularidad de $\partial\Omega$ requiera.

Los ejemplos considerados son:

- **Ecuaciones uniformemente elípticas** (Subsección 1.5.1): Se hace un estudio detallado de las ecuaciones de este tipo que se continuará en el Capítulo 2.
- **Problema lineal con coeficientes variables** (Subsección 1.5.2): En esta sección se adaptan al caso con coeficientes variables los resultados obtenidos, sobre todo la prueba del Principio de Comparación para el problema cóncavo. Se pretende poner de manifiesto las dificultades técnicas que surgen debido a los coeficientes variables más que conseguir resultados óptimos.
- **El p -Laplaciano, $p < \infty$** (Subsección 1.5.3): En este caso los resultados ya son conocidos, véase [33]. Sin embargo, hemos simplificado y adaptado los argumentos de [33] en la línea de esta memoria y ofrecemos una presentación detallada que tiene algunas ventajas:
 - Se ha buscado la regularidad óptima de $\partial\Omega$ (en [33] no se tiene en cuenta la regularidad del dominio y se pide $\partial\Omega$ suave).
 - Se ha prestado especial atención a la *dependencia en p de las constantes*.

Estos hechos serán muy importantes en el Capítulo 3.

- **El ∞ -Laplaciano, 3 homogéneo** (Subsección 1.5.4): Es importante señalar que las ecuaciones de la forma

$$-\Delta_\infty u = f(x, u),$$

no se obtienen como límites de ecuaciones p -Laplacianas. El estudio de este tipo de ecuaciones es muy reciente y, por tanto, nuestros resultados en este contexto son novedosos.

- **El ∞ -Laplaciano 1-homogéneo** (Subsección 1.5.5): Aplican los mismos comentarios que al infinito Laplaciano 3-homogéneo.
- **Ecuaciones de tipo Monge-Ampère** (Subsección 1.5.6): Se adaptan los resultados a ecuaciones de Monge-Ampère.

Por cuanto concierne a las aplicaciones, creemos que es importante señalar que nuestro artículo [53] ha sido citado en [65], donde las ecuaciones de tipo cóncavo para el operador de Monge-Ampère aquí consideradas se utilizan en el estudio de un modelo físico de crecimiento de superficies.

Capítulo 2

Corresponde al artículo [50].

En este capítulo se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ con frontera \mathcal{C}^2 , $0 < q < 1 < r$ y $\lambda > 0$. El objetivo es obtener condiciones para la multiplicidad de soluciones positivas del problema cóncavo-convexo ya estudiado en el Capítulo 1:

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.7.5)$$

Por ser el resultado más complejo, cabe esperar hipótesis más restrictivas. Supondremos que $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes hipótesis estructurales:

(F1) *Elipticidad uniforme*: Existen constantes $0 < \theta \leq \Theta$ tales que para todo $X, Y \in \mathcal{S}^n$ con $Y \geq 0$,

$$-\Theta \cdot \text{traza}(Y) \leq F(\xi, X + Y) - F(\xi, X) \leq -\theta \cdot \text{traza}(Y)$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(F2) *Homogeneidad*: $F(t\xi, tX) = t \cdot F(\xi, X)$ para todo $t > 0$. Supondremos además que $F(0, 0) = 0$.

(F3) *Condición de estructura*: Existe $\gamma > 0$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{S}^n$ y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X - Y) - \gamma |\xi_1 - \xi_2| \leq F(\xi_1, X) - F(\xi_2, Y) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) + \gamma |\xi_1 - \xi_2|,$$

donde $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm$ son los operadores extremales de *Pucci* (ver Definición 0.6.6). Nótese que (F3) equivale a la elipticidad uniforme cuando $\xi_1 = \xi_2$ (ver Lema (0.6.8)).

(F4) *Invariancia por matrices ortogonales*: Para toda $Q \in \mathcal{S}^n$ que verifique $Q \cdot Q^t = Id$ se tiene

$$G(Q^t X Q) = G(X), \quad \text{donde } G(X) \equiv F(0, X). \quad (0.7.6)$$

El operador G aparece de manera natural en el argumento de *blow-up* en la Sección 2.3, por lo que nos referiremos a él como el *operador de blow-up*.

Bajo las hipótesis (F1), (F2) y (F3), hemos probado en la Subsección 1.5.1 que existe un número $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema (0.7.5) tiene al menos una solución minimal para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ y ninguna solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$. Estos resultados se tienen sin ninguna restricción en el tamaño de r .

En este capítulo estudiaremos la existencia de una segunda solución positiva para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ cuando $r < \hat{r}$, donde \hat{r} es el *exponente crítico*. Nótese que debemos precisar la noción de exponente crítico, ya que no resulta claro a priori que el concepto de exponente crítico de Sobolev sea adecuado en el marco completamente no lineal. En este sentido, **proponemos una definición de exponente crítico en este contexto (Definición 2.1.2)**.

Una vez definido el concepto de exponente crítico en el contexto completamente no lineal, enunciaremos el resultado principal de este capítulo, el **Teorema**

2.1.4, un resultado de multiplicidad que puede considerarse un análogo en el marco completamente no lineal de los resultados en [5] y [6, 75]. Más concretamente, nuestro resultado es el siguiente:

Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bajo las hipótesis (F1) – (F4), y $0 < q < 1 < r < \hat{r}$ donde \hat{r} es el exponente crítico dado por la Definición 2.1.2. Entonces, existe $\lambda_{\text{máx}} \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema:

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

- (i) No tiene ninguna solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$,
- (ii) Tiene al menos una solución para $\lambda = \lambda_{\text{máx}}$,
- (iii) Tiene al menos dos soluciones para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$.

La prueba del Teorema 2.1.4 (Sección 2.4) sigue los argumentos de [6], con las dificultades propias de adaptar los argumentos al contexto viscoso, y se basa en otros dos resultados importantes, el **Teorema 2.2.1** (resultado de monotonía en el semiespacio) y la **Proposición 2.3.1** (cotas uniformes L^∞).

La Sección 2.2 está dedicada a la prueba del Teorema 2.2.1 cuyo enunciado es el siguiente:

Sea v una solución de viscosidad, no trivial, no negativa y acotada de

$$\begin{cases} G(D^2 v) = f(v), & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v \geq 0, & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v = 0, & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (0.7.7)$$

donde f es localmente Lipschitz, $f(0) \geq 0$ y $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente elíptico con constantes $0 < \theta < \Theta$ y 1-homogéneo. Más aún, supongamos que

$$G(Q^t X Q) = G(X) \text{ para } Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ una matriz con } q_{ij} = -\delta_{ij} \quad (0.7.8)$$

si ó bien i ó bien j son iguales a n , y $q_{ij} = \delta_{ij}$ en otro caso.

Entonces v es monótona en la variable x_n :

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+^n.$$

La prueba se basa en el método de *Moving Planes* (ver [25]). Hay dificultades técnicas por trabajar en \mathbb{R}_+^n que no está acotado y también hay dificultades derivadas del marco de viscosidad.

Este resultado generaliza el Corolario 1.3 en [24] (para el Laplaciano) y el Teorema 3.1 en [115] (operadores de Pucci). Sin embargo, en esos casos las soluciones son clásicas, lo que elimina los problemas técnicos derivados de la teoría de viscosidad.

Algunas observaciones:

- Nótese que f es localmente Lipschitz, por lo que en particular, el teorema aplica a $f(v) = v^r$ para cualquier $r > 1$.
- El caso que nos interesará en lo sucesivo es $G = F(0, X)$, el operador de blow-up.
- Este teorema será necesario en la Sección 2.3 para terminar el argumento de blow-up en el caso del semiespacio.

En la Sección 2.3 se prueba la Proposición 2.3.1:

Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1)–(F4) y sea u una solución no trivial del problema (0.7.5) con $0 < q < 1 < r < \hat{r}$. Entonces, existe una constante $C > 0$ independiente de λ y u tal que $\|u\|_{L^\infty} \leq C$.

La demostración se basa en el método de *Blow-up* (ver [77]) adaptado al marco de viscosidad. El argumento, por reducción al absurdo, supone para llegar a una contradicción que existe una sucesión $\{u_k\}_k$ de soluciones positivas de (0.7.5) y una sucesión de puntos $\{z_k\}_k \subset \Omega$ tales que

$$M_k = \sup_{\Omega} u_k = u_k(z_k) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_k \rightarrow \hat{z} \in \overline{\Omega}$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Consideramos v_k , un reescale adecuado de las funciones u_k . Entonces, se prueba que las v_k convergen uniformemente en compactos a una función v . Hay dos casos a considerar:

- **Caso 1:** $\hat{z} \in \Omega$. El límite $v(y)$ es una solución de viscosidad de

$$\begin{cases} G(D_y^2 v(y)) = v^r(y), & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq v(y) \leq v(0) = 1, & \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $G(X) = F(0, X)$ (ver **Lema 2.3.3**). Esto supone una contradicción con la definición de exponente crítico.

- **Caso 2:** $\hat{z} \in \partial\Omega$. El límite $v(y)$ es una solución de viscosidad de

$$\begin{cases} G(D_y^2 v(y)) = v^r(y), \quad v \geq 0, & \text{en } \mathbb{R}_+^n, \\ 0 \leq v(y) \leq v(0, \dots, 0, s) = 1, & \text{en } \mathbb{R}_+^n, \\ v(x', 0) = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Por construcción, v tiene un máximo en $(0, \dots, 0, z)$. Esto implica

$$\nabla v(0, \dots, 0, z) = 0$$

y, en particular, por la regularidad $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de v ,

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(0, \dots, 0, z) = 0,$$

que contradice el Teorema 2.2.1 (Monotonía).

La observación que permite concluir el método de blow-up en el caso del semiespacio directamente del Teorema de monotonía es una aportación de esta memoria. Es importante desde un punto de vista conceptual, ya que implica que el caso del semiespacio no debe influir en la definición de exponente crítico. Esta es la motivación principal que ha conducido a la Definición 2.1.2, como se explica en la introducción del Capítulo 2.

Finalmente, en la Sección 2.5 se consideran ejemplos de aplicación del resultado de multiplicidad global, el Teorema 2.1.4.

En primer lugar tratamos el caso en el que G es un operador extremal de Pucci, que incluye al Laplaciano como caso particular (subsección 2.5.1). En las subsecciones 2.5.2, y 2.5.3 trataremos operadores cóncavos (convexos) y, respectivamente, una clase de operadores de Isaacs que no son ni cóncavos ni convexos. Siempre supondremos que los operadores considerados satisfacen la hipótesis de invariancia (F4) que, de hecho, se verifica de manera natural en el caso de los operadores extremales de Pucci.

Además, en la Subsección 2.5.1 se han recopilado los resultados conocidos en la bibliografía sobre los exponentes críticos para los operadores de Pucci.

Como se indica en la Observación 2.1.5, la hipótesis (F4) se utiliza únicamente en la prueba de las estimaciones uniformes L^∞ , Proposición 2.3.1, para poder llevar a cabo un argumento de *blow-up* (ver [77]).

Este es el capítulo técnicamente más complejo de la memoria. Las técnicas utilizadas abarcan un amplio rango:

- Técnicas “de viscosidad”:
 - Duplicación de variables y Principio del Máximo para funciones semicontinuas.
 - Regularizaciones por ínf- y sup-convolución.
 - Análisis convexo, conjunto de contacto inferior, etc...
- Técnicas “clásicas” adaptadas al marco de viscosidad:
 - Método de Blow-up.
 - Método de Moving Planes.
 - Teoría del Grado topológico.

Capítulo 3

La parte cóncava **corresponde al artículo [52]** y lo referente al problema límite cóncavo-convexo corresponde al trabajo en preparación [54]. La desigualdad de Morrey asintóticamente óptima en la Sección 3.7 corresponde al artículo [51].

A lo largo del capítulo consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $p > n$. Estamos interesados en estudiar el comportamiento cuando $p \rightarrow \infty$ de la sucesión de soluciones positivas a los problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.7.9)$$

y

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} + u_{\lambda_p, p}^{r(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.7.10)$$

donde

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{q(p)}{p-1} = Q, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{r(p)}{p-1} = R, \quad \text{con } 0 < Q < 1 < R. \quad (0.7.11)$$

En este sentido diremos que el problema con lado derecho $f_p(u) = \lambda u^{q(p)}$ es cóncavo y el problema con lado derecho $f_p = \lambda u^{q(p)} + u^{r(p)}$ es cóncavo-convexo. Observamos que al ser $p > n$, el exponente crítico es $p^* = \infty$ (ver [7]) por lo que no hay restricción en el tamaño de $r(p)$.

En general, a lo largo de este capítulo, supondremos la normalización

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda > 0.$$

En la Sección 3.3, **Proposición 3.3.1 y 3.3.2** se presentan los problemas límite suponiendo la convergencia uniforme de la sucesión $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$ que se propone. De esta manera se motivan los problemas completamente no lineales que aparecen en el límite y se pueden estudiar sus propiedades.

En primer lugar, el resultado para el problema cóncavo, Proposición 3.3.1:

Supongamos que $\{\lambda_p\}_p$ verifica $\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p}$ y sean $q(p)$ y $0 < Q < 1$ como en (0.7.11). Supongamos que $u_{\lambda_p, p}$ es solución de (0.7.9) y que $u_{\lambda_p, p} \rightarrow u_\Lambda > 0$ uniformemente cuando $p \rightarrow \infty$. Entonces, u_Λ es una solución de viscosidad del problema límite cóncavo

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.7.12)$$

En el caso, cóncavo-convexo, se tiene el siguiente resultado (Proposición 3.3.2):

Supongamos que $\{\lambda_p\}_p$ verifica $\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p}$ y sean $q(p)$, $r(p)$ y $0 < Q < 1 < R$ como en (0.7.11). Supongamos que $u_{\lambda_p, p}$ es solución de (0.7.10) y que $u_{\lambda_p, p} \rightarrow u_\Lambda > 0$ uniformemente cuando $p \rightarrow \infty$. Entonces, u_Λ es una solución de viscosidad del problema límite cóncavo-convexo

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \max \{ \Lambda u_\Lambda^Q, u_\Lambda^R \}, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.7.13)$$

Nótese que los problemas límite (0.7.12) y (0.7.13) *no son propios* (ver Definición 0.6.2) y no están cubiertos por la teoría del Capítulo 1 ya que no pueden expresarse en la forma $F(\nabla u, D^2 u) = f(u)$.

En la Sección 3.4 se prueban los análogos al Teorema 1.2.1 y Corolario 1.2.2 en el Capítulo 1. En primer lugar, el Principio de Comparación global para el problema límite cóncavo, **Teorema 3.4.1:**

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sean u una subsolución y v una supersolución de viscosidad de

$$\min \{ |\nabla w(x)| - w^Q(x), -\Delta_\infty w(x) \} = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (0.7.14)$$

Supongamos que tanto u como v son estrictamente positivas en Ω , continuas hasta la frontera y que satisfacen $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces, $u \leq v$ en $\bar{\Omega}$.

Por simplicidad, se prueba el resultado para el problema con lado derecho w^Q con $Q < 1$. Sin embargo, según se indica en la Observación 3.4.3, se puede probar el Principio de Comparación para ecuaciones más generales, del tipo

$$\min \{ |\nabla w| - f(w), -\Delta_\infty w \} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

donde f satisface la hipótesis (0.7.3) con $m = 1$. Para ello, basta adaptar la prueba del Teorema 3.4.1 siguiendo los argumentos de la prueba del Teorema 1.2.1.

Es destacable que las ideas fundamentales de la prueba son las mismas que para el Teorema 1.2.1. En la Observación 3.4.7 se analiza un marco común para los Teoremas 1.2.1 y 3.4.1 para así comprender mejor el fenómeno de fondo.

Como consecuencia del Principio de Comparación global, se deduce unicidad de soluciones positivas para el problema límite cóncavo con dato de borde Dirichlet homogéneo, **Corolario 3.4.4**. Los comentarios al Corolario 1.2.2 en esta introducción, se aplican también aquí.

En la Sección 3.5 se estudia la existencia de soluciones límite para el problema (0.7.9). Para ello se establecen, en la Subsección 3.5.1, cotas a priori uniformes en p que nos permitan pasar al límite en sentido de viscosidad. El resultado principal de la Subsección 3.5.1 es el **Teorema 3.5.1**:

Sea $\Lambda > 0$ y una sucesión $\{\lambda_p\}_p$ tal que $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$ cuando $p \rightarrow \infty$. Entonces, la sucesión $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$ de soluciones de (0.7.9) converge uniformemente a

$$u_\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} u_1, \quad (0.7.15)$$

la única solución positiva del problema límite (0.7.12) asociada a Λ .

En la prueba del resultado se utilizan las estimaciones de Morrey en la Sección 3.7 para obtener cotas C^α uniformes en p que permiten pasar al límite a través de una subsucesión. Entonces el Corolario 3.4.4 juega un papel importante ya que, por ser el límite una solución positiva del problema (0.7.12), es único y por tanto converge toda la sucesión y no sólo una subsucesión.

En la Subsección 3.5.2 se establecen estimaciones óptimas L^∞ para las soluciones del problema límite cóncavo. El resultado principal, consecuencia del Principio de Comparación (Teorema 3.4.1), es la **Proposición 3.5.5**:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $0 < Q < 1$. Consideramos $\Lambda > 0$ y u_Λ la solución positiva de (0.7.12). Entonces tendremos

$$\left(\Lambda \| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} v(x) \leq u_\Lambda(x) \leq \left(\Lambda \| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} d(x), \quad (0.7.16)$$

para cada $x \in \Omega$, donde $v(x)$ es la primera ∞ -autofunción maximal normalizada con $\|v\|_{L^\infty} = 1$ y $d(x)$ viene dada por

$$d(x) = \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty}.$$

De hecho

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\right)^{\frac{1}{1-Q}}. \quad (0.7.17)$$

En la Observación 3.5.6 tratamos de poner de manifiesto la estrecha relación entre estas cotas y la construcción de las soluciones del problema cóncavo en el Capítulo 1.

En la Subsección 3.5.3 se muestran soluciones explícitas del problema límite cóncavo para dominios que satisfagan la condición geométrica $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, donde \mathcal{R} es el *conjunto arista* de Ω definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \text{ no es diferenciable en } x\} \\ &= \{x \in \Omega : \exists x_1, x_2 \in \partial\Omega, x_1 \neq x_2, \text{ t.q. } |x - x_1| = |x - x_2| = \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \end{aligned}$$

y $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ es el conjunto de máxima distancia a la frontera

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\}.$$

Algunos dominios que satisfacen esta condición geométrica son la bola, el anillo o el estadio (envoltura convexa de dos bolas del mismo radio). Por ejemplo un cuadrado o una elipse no la verifican.

Esta es una condición estándar en la bibliografía, véanse [86, 90, 91, 127].

El resultado principal, la **Proposición 3.5.9**, nos dice que si Ω es un dominio acotado tal que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$ entonces, para cada $\Lambda > 0$,

$$u_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} \cdot (\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty)^{\frac{Q}{1-Q}} \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega),$$

es la única solución de viscosidad positiva de (0.7.12).

En la Sección 3.6 se estudia la existencia, no existencia y posible multiplicidad de soluciones para el problema límite cóncavo-convexo (0.7.13).

En primer lugar, en la Subsección 3.6.1, se estudian zonas de no existencia de solución del problema (0.7.13).

Como consecuencia del Principio de Comparación para el problema cóncavo, Teorema 3.4.1, se demuestra en la **Proposición 3.6.1** que no existen soluciones del problema límite cóncavo-convexo (0.7.13) por debajo de la rama de soluciones correspondiente al problema límite cóncavo (0.7.12). En particular, como consecuencia de las estimaciones en la Proposición 3.5.5, se tiene que para cada $\Lambda > 0$ toda solución positiva u_Λ del problema (0.7.13) verifica:

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\right)^{\frac{1}{1-Q}}. \quad (0.7.18)$$

En la **Proposición 3.6.2** se prueba que la estructura de cóncavo-convexo del problema límite (0.7.13) implica la no existencia de soluciones positivas para

$$\Lambda > \hat{\Lambda} = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R-Q}{R-1}},$$

donde $\Lambda_1(\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^{-1}$ es el ∞ -autovalor (ver por ejemplo [90]). La prueba sigue los argumentos de la Sección 1.4.2 adaptados a este tipo de ecuaciones.

Los resultados en las Proposiciones 3.6.1 y 3.6.2 se recogen en la Figura 3.6.1.

En la Subsección 3.6.2, demostramos que el problema (0.7.13) tiene una solución minimal positiva para cada $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$ que verifica

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}}.$$

Se concluye que las cotas obtenidas en la Subsección 3.6.1, Proposiciones 3.6.1 y 3.6.2, son óptimas.

De hecho, el resultado que probamos es más fuerte, y en cierto sentido sorprendente. En la **Proposición 3.6.4**, probamos que para cada $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda}]$, la solución minimal del problema límite cóncavo-convexo viene dada por la única solución positiva del problema cóncavo (0.7.12).

El motivo es que hay un tamaño crítico de las soluciones por debajo del cual el problema límite cóncavo-convexo no ve la potencia convexa. De esta observación y basándonos en el Principio de Comparación para el problema cóncavo (Teorema 3.4.1), deduciremos que la solución minimal es la única solución del problema (0.7.13) que verifica $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$.

Con esta nueva información sobre el tamaño de las soluciones podemos extender el resultado en la **Proposición 3.6.6** y demostrar que no existe solución positiva del problema (0.7.13) con $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$ y

$$\Lambda^{\frac{1}{R-Q}} < \|u_\Lambda\|_\infty < \Lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{R-1}}.$$

En la Figura 3.6.2 se representa toda la información en esta Subsección.

En la Subsección 3.6.3 se demuestra que la rama de soluciones minimales obtenida en la Subsección 3.6.2 para el problema límite cóncavo-convexo (0.7.13) puede obtenerse como límite cuando $p \rightarrow \infty$ de las soluciones minimales del problema cóncavo-convexo a nivel $p < \infty$, es decir, (0.7.10). El resultado principal es la **Proposición 3.6.7**:

Fijado $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$, sea una sucesión $\{\lambda_p\}_p$ que verifica $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$. Consideramos $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$, la sucesión de soluciones minimales de (0.7.10) correspondientes. Entonces,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_{\lambda_p, p} = w_\Lambda, \quad \text{uniformemente en } p,$$

con $w_\Lambda(x)$ la única solución positiva del problema límite cóncavo (0.7.12) y solución minimal del problema cóncavo-convexo (0.7.13).

El resultado se sigue de las estimaciones de Morrey (Lema 3.7.2) y un análisis cuidadoso de la construcción de la solución minimal a nivel $p < \infty$ (Subsección 1.5.3).

En la Subsección 3.6.4, establecemos un resultado de multiplicidad de soluciones positivas en dominios que satisfagan la condición $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, el **Teorema 3.6.9**. Este resultado está relacionado con el Teorema 2.1.4 y los resultados en [5, 6, 75], aunque las técnicas de demostración son diferentes.

En la Proposición 3.6.4 hemos probado la existencia de una curva minimal de soluciones para el problema límite (0.7.13) en dominios acotados generales. En el Teorema 3.6.9 se demuestra que, en dominios tales que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, podemos encontrar una curva de soluciones no triviales *explícitas* que contiene a la rama minimal ya mencionada, alcanza $\hat{\Lambda}$ y vuelve al eje $\Lambda = 0$ respetando las zonas de no existencia dadas por las Proposiciones 3.6.1, 3.6.2, 3.6.4 y 3.6.6.

Finalmente, en la Sección 3.7 se incluye una desigualdad de Morrey con una expresión explícita de la constante, **Proposición 3.7.1**, que hemos utilizado a lo largo del capítulo para obtener convergencia y que aparecerá en [51]. Más concretamente, el resultado es el siguiente:

Supongamos $n < p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_p \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

se verifica para

$$C_p = p |B_1(0)|^{-\frac{1}{p}} n^{-\frac{n(p+1)}{p^2}} (p-1)^{\frac{n(p-1)}{p^2}} (p-n)^{\frac{n}{p^2}-1} \lambda_1(p; \Omega)^{\frac{n-p}{p^2}},$$

donde $|B_1(0)| = \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\Gamma(1 + \frac{n}{2})\right)^{-1}$. Nótese que $\lim_{p \rightarrow \infty} C_p = \Lambda_1(\Omega)^{-1}$.

Es interesante señalar que en [117, Teorema 2.E], encontramos la desigualdad de Morrey con constante

$$C_{T,p} = n^{-\frac{1}{p}} |B_1(0)|^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}},$$

que es óptima en general, ya que para $\Omega = B_R(x_0)$, las funciones

$$u_a(x) = a \cdot \left(R^{\frac{p-n}{p-1}} - |x-x_0|^{\frac{p-n}{p-1}} \right), \quad a \in \mathbb{R}$$

verifican $\|u_a\|_{L^\infty(\Omega)} = C_{T,p} \cdot \|\nabla u_a\|_{L^p(\Omega)}$. Sin embargo, si $\Omega \neq B_R(x_0)$ es fácil comprobar que C_p (la expresión de la constante de Morrey en la Proposición) mejora $C_{T,p}$ para p suficientemente grande, ya que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C_p < \lim_{p \rightarrow \infty} C_{T,p}$$

(ver Observación 3.7.4).

Problemas abiertos

Incluimos a continuación algunos problemas abiertos que creemos interesantes.

1. Sería interesante extender los métodos y resultados en esta memoria a operadores con coeficientes variables. En este sentido sería conveniente utilizar el marco de las soluciones L^p -viscosas (ver [41]) dado que, como se pone de manifiesto en la Subsección 1.5.2, la teoría de las soluciones \mathcal{C} -viscosas impone limitaciones técnicas a la regularidad de los coeficientes.

2. En relación con los resultados del Capítulo 2, es interesante en si mismo obtener resultados de tipo Liouville en \mathbb{R}^n para soluciones en lugar de para supersoluciones como en [61]. Esto permitiría mejorar la información sobre los exponentes críticos.

Hasta donde sabemos, los únicos resultados en este sentido son los clásicos en el marco variacional, los debidos a Felmer y Quaas [70] para los operadores de Pucci radiales (ver la Subsección 2.5.1) y los de Tso para las ecuaciones k -hessianas radiales [123].

3. También sería de interés extender los resultados del Capítulo 2 a otras ecuaciones que no sean uniformemente elípticas, para las cuales no se tenga la estructura que aportan los operadores de Pucci.
4. Es interesante el estudio de la solubilidad de problemas de la forma

$$F(D^2u) + |\nabla u|^2 = \lambda g(x, u) + f(x)$$

con F elíptico a precisar.

Capítulo 1

Problemas con segundo miembro cóncavo y cóncavo-convexo

1.1. Introducción

En el artículo [36], Brezis y Oswald probaron la unicidad de soluciones positivas del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.1)$$

para un lado derecho f tal que

$$\frac{f(t)}{t} \text{ es decreciente para } t > 0. \quad (1.1.2)$$

Un ejemplo importante de lado derecho que satisface la condición (1.1.2) es $f(t) = \lambda t^q$ con $0 < q < 1$ y $\lambda > 0$. Dada la geometría de la función f en este caso, el problema (1.1.1) para esta potencia se conoce como *problema cóncavo*, sublineal o subdifusivo.

También se conocen resultados de unicidad análogos para otros operadores no lineales, como son el p -Laplaciano en el marco variacional (véanse por ejemplo [1, 21] y las referencias allí incluidas) y, en el marco de viscosidad, ecuaciones completamente no lineales obtenidas como límite de ecuaciones de tipo p -Laplaciano (véase [52]).

Por otra parte, en [33] (ver también [5]) se considera el problema *cóncavo-convexo* para el p -Laplaciano,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ y $0 < q < p - 1 < r$. Se prueba la existencia de un valor $\lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que existe una rama de soluciones minimales (positivas) para $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$

y no existe solución no trivial para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$. La prueba sigue el método de sub- y supersoluciones, que es notable al tener un término convexo, y se tiene el resultado sin restricción en el tamaño de r . En [6, 75] se estudia la multiplicidad de soluciones positivas para $r < p^* - 1$ y $\lambda < \lambda_{\text{máx}}$ (ver la introducción al Capítulo 2).

En el caso de los operadores de Pucci encontramos resultados relacionados en [37], donde se estudia mediante técnicas de bifurcación (desde autovalores) el problema con lado derecho de la forma $f(\lambda, u) = \lambda u + g(\lambda, u)$ con g continua y $g(\lambda, s) = o(|s|)$ cuando $s \rightarrow 0$. Sin embargo, en nuestro caso, el conjunto de soluciones parte desde $(0, 0)$ ya que la no linealidad que consideramos tiene una parte cóncava no diferenciable en 0. En el caso del p -Laplaciano este tipo de comportamiento ha sido estudiado en [7].

Estudiaremos problemas elípticos del tipo

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = f(\lambda, u_\lambda), & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, en general satisface las hipótesis

(F1) *Elípticidad degenerada*: Para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y $X, Y \in \mathcal{S}^n$ se tiene

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad F(p, X) \leq F(p, Y).$$

(F2) *Homogeneidad de grado m* : $F(tp, tX) = t^m \cdot F(p, X)$ para todo $t > 0$. Asumiremos que $F(0, 0) = 0$.

Nos centraremos en el estudio de los problemas con lados derechos dados por

$$f_1(\lambda, u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q, \quad \text{y} \quad f_2(\lambda, u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r$$

donde $0 < q < m < r$ y m es el grado de homogeneidad de F . Como $f_1^{\frac{1}{m}}$ es una potencia cóncava, denotaremos el problema con lado derecho f_1 como problema *cóncavo*. De manera similar, nos referiremos al caso con lado derecho f_2 como problema *cóncavo-convexo*. Es importante señalar para evitar ambigüedades que no estamos suponiendo ninguna propiedad de concavidad en F .

Nuestro objetivo es demostrar que la unicidad de soluciones para problemas cóncavos es un principio general para ecuaciones cuyo lado izquierdo viene dado por un funcional homogéneo F . Nótese el marcado carácter variacional de las pruebas del caso del Laplaciano, donde la integración por partes juega un papel central, hace que no se pueda extender al marco de soluciones viscosas. Esto supone una dificultad añadida dado que el concepto natural de solución en este marco es el concepto de solución de viscosidad.

Hay que hacer notar que los resultados de comparación y unicidad (Teorema 1.2.1 y Corolario 1.2.2) solamente requieren las hipótesis (F1) y (F2). Sin embargo, para demostrar resultados de existencia, en general, será necesario precisar un poco más la estructura del operador F con hipótesis adicionales. Concretamente, necesitaremos las siguientes hipótesis:

(F3) Existe $v_1 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solución en sentido de viscosidad del *problema auxiliar*

$$\begin{cases} F(\nabla v_1, D^2 v_1) = 1 & \text{en } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Observamos que $v_1 > 0$ en Ω . Para probarlo, supongamos que $m = \min_{\overline{\Omega}}(v_1) = v_1(x_0) \leq 0$ con $x_0 \in \Omega$. Como $v_1 \geq m$, en particular m toca a v_1 por debajo en x_0 . Por definición de supersolución de viscosidad, $0 = F(\nabla m, D^2 m) \geq 1 > 0$, que es una contradicción.

Nótese que, por homogeneidad, $v_\lambda(x) = \lambda^{1/m} \cdot v_1(x)$ es solución de

$$\begin{cases} F(\nabla v_\lambda, D^2 v_\lambda) = \lambda & \text{en } \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

(F4) Existencia del *autovalor principal*: Supondremos que el operador F tiene un primer autovalor y que este es aislado, es decir, supondremos que el problema

$$\begin{cases} F(\nabla v, D^2 v) = \lambda v^m & \text{en } \Omega \\ v > 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

tiene una solución positiva si y sólo si $\lambda = \lambda_1$. Siguiendo las ideas de Berestycki, Nirenberg y Varadhan en el caso lineal en forma no divergencia, ver [26], y a la vista de los resultados en [30, 37, 116] la definición más razonable para el autovalor principal es la siguiente:

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda > 0 \mid \exists v > 0 \text{ en } \Omega \text{ tal que } F(\nabla v, D^2 v) \geq \lambda v^m\}. \quad (1.1.6)$$

Nótese que con esta definición, λ_1 es aislado en el sentido indicado arriba. Alguna bibliografía relevante en lo concerniente a problemas de autovalores no lineales es [30, 37, 74, 84, 105, 116].

Resaltamos que en [32, 87] se demuestra la existencia de un primer autovalor, respectivamente para ecuaciones uniformemente elípticas en dominios poco regulares y para el infinito laplaciano normalizado; sin embargo, las definiciones utilizadas en ambos casos no permiten deducir que el autovalor sea aislado.

La hipótesis (F4) se usa de dos maneras según los casos, para construir subsoluciones en las pruebas de existencia y para probar por contradicción la no existencia de soluciones positivas del problema cóncavo-convexo con λ grande.

Cuando se utiliza para construir subsoluciones, se puede reemplazar por la hipótesis siguiente (ver Observación 1.3.6):

(F5) Se verifica el *Lema de Hopf*: Sea Ω un dominio acotado y $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ una solución de viscosidad de

$$F(\nabla u, D^2 u) \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Sea además $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

- i) $u(x_0) < u(x)$ para todo $x \in \Omega$.

ii) $\partial\Omega$ satisface una condición de esfera interior en x_0 , es decir, existe una bola $B_r(z) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial B_r$.

Entonces, para toda dirección no tangencial ξ que apunte hacia dentro del dominio Ω se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} > 0.$$

Además, requeriremos la siguiente hipótesis, necesaria para obtener estimaciones \mathcal{C}^α :

(F6) Para toda $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solución de viscosidad de

$$\begin{cases} F(\nabla u(x), D^2 u(x)) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

existen $\alpha \in (0, 1)$ y $C = C(\|f\|_\infty) > 0$ tales que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Finalmente, supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y suficientemente regular como para que se verifiquen las hipótesis (F3) – (F6) (véanse a este respecto los ejemplos en la Sección 1.5).

A continuación, discutiremos los resultados más relevantes de este capítulo. En lo que concierne al problema cóncavo, el resultado fundamental es un principio de comparación hasta la frontera (Teorema 1.2.1) para el problema (1.1.3) donde f satisface la condición

$$\frac{f(t)}{t^q} > 0 \quad \text{es no creciente para todo } t > 0 \text{ y algún } 0 < q < m. \quad (1.1.7)$$

Como consecuencia, se deduce que el problema

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con f satisfaciendo (1.1.7) tiene una única solución positiva (Corolario 1.2.2).

Es importante señalar que el resultado de comparación se tiene simplemente bajo las hipótesis de elipticidad degenerada (F1) y homogeneidad (F2).

Sin embargo, para demostrar la existencia de solución, debemos precisar más la estructura del operador F con hipótesis adicionales. En el Teorema 1.3.1, bajo las hipótesis (F3) y (F5), probaremos que para cada $\lambda > 0$ existe una única solución del problema

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

dada por

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{m-q}} u_1(x) \quad (1.1.8)$$

con u_1 la solución correspondiente a $\lambda = 1$. Nótese que (1.1.8) define una curva regular de soluciones con respecto al parámetro λ .

Por métodos distintos en el caso de las ecuaciones k -hessianas el resultado de unicidad puede verse en [84] pero no se obtiene el resultado global de comparación que, a la vista de nuestros resultados, es un principio general.

En el caso cóncavo-convexo, el resultado principal (Teorema 1.4.1), precisa que existe $\lambda_{\text{máx}} > 0$ tal que

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene al menos una solución para todo $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ y no tiene ninguna para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$.

Para las pruebas de existencia en ambos casos, f_1 y f_2 , nos basaremos en la construcción en [33].

Para finalizar el capítulo, en la Sección 1.5 se darán ejemplos concretos de aplicación, como las ecuaciones uniformemente elípticas ($m = 1$), que incluyen a los operadores de Pucci (y en particular al laplaciano), el infinito laplaciano (con ambas normalizaciones, $m = 1$ y $m = 3$), un contexto en el que estos resultados son completamente nuevos, y ecuaciones de Monge-Ampère ($m = n$), en el que también se obtienen extensiones de resultados ya conocidos (véase [84], donde se utilizan métodos diferentes). Otros ejemplos considerados son el problema lineal con coeficientes variables o el p -laplaciano ($m = p - 1$).

1.2. Resultados de comparación en el caso cóncavo. Unicidad

En [36], Brezis y Oswald probaron la unicidad de soluciones positivas del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.1)$$

para un lado derecho f tal que

$$\frac{f(t)}{t} \text{ es decreciente para } t > 0. \quad (1.2.2)$$

La prueba en [36], es como sigue. Sean u_1 y u_2 dos soluciones positivas de (1.2.1). Se tiene

$$-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} = \frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2}.$$

Multiplicando por $u_1^2 - u_2^2$ e integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \left| \nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2} \nabla u_2 \right|^2 + \left| \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1} \nabla u_1 \right|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{f(u_1)}{u_1} - \frac{f(u_2)}{u_2} \right] (u_1^2 - u_2^2) dx. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Ahora bien, como $t^{-1}f(t)$ es decreciente y t^2 creciente,

$$\left[\frac{f(u_1(x))}{u_1(x)} - \frac{f(u_2(x))}{u_2(x)} \right] \cdot (u_1^2(x) - u_2^2(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

con desigualdad estricta si $u_1(x) \neq u_2(x)$. Entonces, (1.2.3) implica $u_1 \equiv u_2$.

En [5] y [34] encontramos otras pruebas de este resultado de unicidad, por ejemplo, en forma de Principio de Comparación:

Sea $f(t)$ que verifica (1.2.2). Sean u y v tales que

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta v \geq f(v) & \text{en } \Omega \\ v > 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Entonces, $u \leq v$ en Ω .

Demostración. Utilizando (1.2.4) se deduce que

$$-u \Delta v + v \Delta u \geq uv \left(\frac{f(v)}{v} - \frac{f(u)}{u} \right). \quad (1.2.5)$$

Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$ tiene medida positiva.

Veamos la demostración en el caso particular en el que la frontera del conjunto $\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$ es suficientemente regular como para integrar por partes (lo cual no es cierto en general). Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\{u>v\}} uv \left(\frac{f(v)}{v} - \frac{f(u)}{u} \right) dx &\leq \int_{\{u>v\}} (-u \Delta v + v \Delta u) dx \\ &= \int_{\{u=v\}} (-u \nabla v + v \nabla u) \cdot n \, d\sigma. \end{aligned}$$

Ahora bien, por ser u, v funciones positivas y $t^{-1}f(t)$ decreciente, tenemos

$$\int_{\{u>v\}} uv \left(\frac{f(v)}{v} - \frac{f(u)}{u} \right) dx > 0$$

mientras que, por estar las derivadas normales ordenadas, se tiene

$$\int_{\{u=v\}} (-u \nabla v + v \nabla u) \cdot n \, d\sigma = \int_{\{u=v\}} u \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma \leq 0.$$

con lo que hemos llegado a una contradicción. Por tanto,

$$|\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}| = 0.$$

Cuando el conjunto $\{u > v\}$ no tiene la regularidad necesaria y el cálculo anterior es puramente formal utilizamos un argumento de regularización (véase [5]). \square

En esta prueba se usa de manera fundamental que en las ecuaciones en forma divergencia es posible integrar por partes contra una función test.

En las ecuaciones en forma no divergencia y más generalmente en las ecuaciones completamente no lineales no es siempre posible integrar por partes y el concepto de solución natural es el de viscosidad.

En este contexto, probamos el siguiente Principio de Comparación global, resultado principal de esta sección:

Teorema 1.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y considérese una subsolución u y una supersolución v (en sentido de viscosidad) del problema*

$$F(\nabla w, D^2 w) = f(w) \quad \text{en } \Omega, \quad (1.2.6)$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface (F1), (F2) para algún m , y $f(\cdot)$ satisface que

$$\frac{f(t)}{t^q} > 0 \quad \text{es no creciente para todo } t > 0 \text{ y algún } 0 < q < m. \quad (1.2.7)$$

Supongamos que tanto u como v son estrictamente positivas en Ω , continuas hasta el borde y satisfacen $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces, $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

Observamos que el resultado de comparación se tiene con una gran generalidad, simplemente bajo las hipótesis de elipticidad degenerada (F1) y homogeneidad (F2).

Como consecuencia del Teorema 1.2.1, el problema (1.1.3) con lado derecho que satisfaga la condición (1.2.6) tiene una única solución positiva. Nótese que en particular $f_1(t) = \lambda t^q$ con $q < m$ verifica la condición (1.2.6).

Corolario 1.2.2. *El problema*

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

con F que verifica (F1) y (F2) para algún m , y f tal que se verifica (1.2.7), tiene como mucho una solución positiva.

Hay que hacer notar que la ecuación escrita en la forma $\mathcal{F}(w, \nabla w, D^2 w) = 0$ con

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, p, X) &\longrightarrow F(p, X) - f(u), \end{aligned}$$

no es *propia* (en el sentido de la Definición 0.6.2) ya que f puede no ser creciente en u y estaría por tanto fuera de la teoría general en [58].

Cabe señalar que un cambio de variable logarítmico $\tilde{w} = \log(w)$ transforma la ecuación en

$$F(\nabla \tilde{w}, D^2 \tilde{w} + \nabla \tilde{w} \otimes \nabla \tilde{w}) = e^{-m \tilde{w}} \cdot f(e^{\tilde{w}}) \quad \text{en } \Omega,$$

que es propia siempre y cuando f verifique o bien

$$\frac{f(t)}{t^q} \quad \text{es estrictamente decreciente } \forall t > 0 \text{ y algún } 0 < q < m,$$

o bien

$$\frac{f(t)}{t^m} \text{ es estrictamente decreciente } \forall t > 0,$$

que es la hipótesis análoga a (1.1.2) cuando la homogeneidad $m \neq 1$ (ver también [1, 21] para el caso del p -laplaciano).

Entonces, puede probarse el principio de comparación para $\log u$ y $\log v$ mediante argumentos estándar (ver [58], [87], y [90]). Sin embargo, para probar el principio de comparación entre u y v es necesario que al menos la supersolución v sea estrictamente positiva en todo $\bar{\Omega}$. Por tanto, de este argumento no podemos concluir unicidad de solución positiva del problema (1.2.8).

Como estamos interesados en probar unicidad para el problema con dato Dirichlet homogéneo, en su lugar, aplicaremos el cambio de variables e ideas subsiguientes en [52] para probar comparación hasta la frontera incluso con dato de borde cero.

Lema 1.2.3. *Sea $w > 0$ una supersolución (subsolución) del problema (1.2.6) en Ω y sea $q < m$ para el que se verifica (1.2.7). Entonces,*

$$\tilde{w}(x) = \frac{1}{1 - \frac{q}{m}} \cdot w^{1 - \frac{q}{m}}(x)$$

es una supersolución (subsolución) de viscosidad de

$$F\left(\nabla\tilde{w}, D^2\tilde{w} + \frac{q}{m-q} \frac{\nabla\tilde{w} \otimes \nabla\tilde{w}}{\tilde{w}}\right) = \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{w}(x)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{w}(x)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}}, \quad (1.2.9)$$

para cualquier Ω^* tal que $\bar{\Omega}^* \subset \Omega$.

Demostración. Por simplicidad, denotaremos $\tilde{q} = q/m$. Sea $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, una función que toca a $\tilde{w}(x)$ desde abajo en $x_0 \in \Omega$. Definamos

$$\phi(x) = \left[(1 - \tilde{q})\tilde{\phi}(x)\right]^{\frac{1}{1-\tilde{q}}},$$

que toca a $w(x)$ desde abajo en x_0 . Nótese que $\phi(x)$ es \mathcal{C}^2 en un entorno de x_0 ya que $w > 0$ en Ω implica $\tilde{\phi}(x) > 0$ cerca de x_0 . Entonces, podemos calcular las derivadas de $\phi(x)$ en términos de las de $\tilde{\phi}(x)$:

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x_0) &= \left[(1 - \tilde{q})\tilde{\phi}(x_0)\right]^{\frac{\tilde{q}}{1-\tilde{q}}} \nabla\tilde{\phi}(x_0), \\ D^2\phi(x_0) &= \left[(1 - \tilde{q})\tilde{\phi}(x_0)\right]^{\frac{\tilde{q}}{1-\tilde{q}}} \left(D^2\tilde{\phi}(x_0) + \frac{\tilde{q}}{1-\tilde{q}} \frac{\nabla\tilde{\phi}(x_0) \otimes \nabla\tilde{\phi}(x_0)}{\tilde{\phi}(x_0)}\right). \end{aligned}$$

Como w es una solución de viscosidad de (1.2.6), se tiene por homogeneidad que

$$\begin{aligned} f\left(\left[(1 - \tilde{q})\tilde{w}(x_0)\right]^{\frac{1}{1-\tilde{q}}}\right) &= f(w(x_0)) \leq F(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \\ &= \left[(1 - \tilde{q})\tilde{\phi}(x_0)\right]^{\frac{\tilde{q}m}{1-\tilde{q}}} \cdot F\left(\nabla\tilde{\phi}(x_0), D^2\tilde{\phi}(x_0) + \frac{\tilde{q}}{1-\tilde{q}} \frac{\nabla\tilde{\phi}(x_0) \otimes \nabla\tilde{\phi}(x_0)}{\tilde{\phi}(x_0)}\right). \end{aligned}$$

Como $\tilde{w}(x_0) = \tilde{\phi}(x_0)$, se concluye que \tilde{u} es una supersolución de viscosidad de (1.2.9). El caso de la subsolución es análogo. \square

La función que da lugar a la ecuación (1.2.9), es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, p, X) &\longrightarrow F\left(p, X + \frac{q}{m-q} \frac{p \otimes p}{u}\right) - \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)u\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)u\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}}, \end{aligned}$$

es degenerada elíptica y no decreciente en u , por tanto propia. A continuación, probaremos que es posible construir una supersolución estricta a partir de cualquier supersolución positiva.

Lema 1.2.4. *Sea $\tilde{v}(x) > 0$ una supersolución de viscosidad de (1.2.9) en Ω^* tal que $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, se tiene que*

$$\tilde{v}_\epsilon(x) = (1 + \epsilon) \cdot (\tilde{v}(x) + \epsilon),$$

es una supersolución estricta de la misma ecuación, es decir,

$$F\left(\nabla \tilde{v}_\epsilon, D^2 \tilde{v}_\epsilon + \frac{q}{m-q} \frac{\nabla \tilde{v}_\epsilon \otimes \nabla \tilde{v}_\epsilon}{\tilde{v}_\epsilon}\right) \geq (1 + \epsilon)^m \cdot \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}_\epsilon(x)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}_\epsilon(x)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}}. \quad (1.2.10)$$

Además, $\tilde{v}_\epsilon \rightarrow \tilde{v}$ uniformemente en $\overline{\Omega^*}$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{C}^2$ una función que toca a $\tilde{v}_\epsilon(x)$ por debajo en algún $x_0 \in \Omega^*$. Definamos

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + \epsilon} \phi(x) - \epsilon,$$

que claramente toca a $\tilde{v}(x)$ por debajo en x_0 . Calculamos las derivadas de $\Phi(x)$ en términos de las de $\phi(x)$, es decir,

$$\nabla \Phi(x_0) = (1 + \epsilon)^{-1} \nabla \phi(x_0) \quad \text{y} \quad D^2 \Phi(x_0) = (1 + \epsilon)^{-1} D^2 \phi(x_0).$$

Como $\tilde{v}(x)$ es una supersolución de viscosidad de (1.2.9) en Ω^* , se deduce

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}(x_0)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}(x_0)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}} &\leq F\left(\nabla \Phi(x_0), D^2 \Phi(x_0) + \frac{q}{m-q} \frac{\nabla \Phi(x_0) \otimes \nabla \Phi(x_0)}{\tilde{v}(x_0)}\right) \\ &= \frac{1}{(1 + \epsilon)^m} F\left(\nabla \phi(x_0), D^2 \phi(x_0) + \frac{q}{m-q} \frac{\nabla \phi(x_0) \otimes \nabla \phi(x_0)}{(\tilde{v}_\epsilon(x_0) - \epsilon(1 + \epsilon))}\right). \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que (1.2.7) implica

$$\frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}(x_0)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}(x_0)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}} \geq \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}_\epsilon(x_0)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right)\tilde{v}_\epsilon(x_0)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}}.$$

Como en el sentido matricial se tiene

$$D^2 \phi(x_0) + \frac{q}{m-q} \frac{\nabla \phi(x_0) \otimes \nabla \phi(x_0)}{(\tilde{v}_\epsilon(x_0) - \epsilon(1 + \epsilon))} \geq D^2 \phi(x_0) + \frac{q}{m-q} \frac{\nabla \phi(x_0) \otimes \nabla \phi(x_0)}{\tilde{v}_\epsilon(x_0)}$$

obtenemos (1.2.10) por elipticidad degenerada. En cuanto a la segunda parte, basta notar que

$$\|\tilde{v}_\epsilon - v\|_{L^\infty(\overline{\Omega^*})} \leq \epsilon \|\tilde{v}\|_{L^\infty(\Omega)} + \epsilon(1 + \epsilon). \quad \square$$

Prueba del Teorema 1.2.1. Como $u - v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y $\overline{\Omega}$ es compacto, $u - v$ alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$. Procedemos por contradicción. Para ello, supongamos que $\max_{\overline{\Omega}}(u - v) > 0$. Se consideran

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x)^{1-\frac{q}{m}}}{1-\frac{q}{m}} \quad \text{y} \quad \tilde{v}(x) = \frac{v(x)^{1-\frac{q}{m}}}{1-\frac{q}{m}}, \quad (1.2.11)$$

y definimos

$$\tilde{v}_\epsilon(x) = (1 + \epsilon) \cdot (\tilde{v}(x) + \epsilon). \quad (1.2.12)$$

Nótese que, al ser $(u - v)|_{\partial\Omega} \leq 0$, se tiene

$$\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon = \tilde{u} - (1 + \epsilon)\tilde{v} - (1 + \epsilon)\epsilon < 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Por convergencia uniforme, se tiene $\max_{\overline{\Omega}}(\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon) > 0$ para ϵ suficientemente pequeño. Por tanto, fijaremos $\epsilon > 0$ para el resto de la prueba y tomaremos Ω^* con $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$ que contiene todos los puntos de máximo de $\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon$. Hemos probado en los lemas 1.2.3 y 1.2.4 que \tilde{u} y \tilde{v}_ϵ son respectivamente una subsolución y una supersolución estricta de (1.2.9) en Ω^* .

Para cada $\tau > 0$, sea (x_τ, y_τ) un punto de máximo de $\tilde{u}(x) - \tilde{v}_\epsilon(y) - \frac{\tau}{2}|x - y|^2$ en $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Por la compacidad de $\overline{\Omega}$, podemos suponer que $x_\tau \rightarrow \hat{x}$ cuando $\tau \rightarrow \infty$ para algún $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ (nótese que también $y_\tau \rightarrow \hat{x}$). Entonces, el Lema 0.6.22 implica que \hat{x} es un punto de máximo de $\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon$ y, por tanto, es un punto interior de Ω^* . También tendremos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\tilde{u}(x_\tau) - \tilde{v}_\epsilon(y_\tau) - \frac{\tau}{2}|x_\tau - y_\tau|^2 \right) = \tilde{u}(\hat{x}) - \tilde{v}_\epsilon(\hat{x}) > 0,$$

y entonces, para τ suficientemente grande tanto x_τ como y_τ son puntos interiores de Ω^* y además

$$\tilde{u}(x_\tau) - \tilde{v}_\epsilon(y_\tau) - \frac{\tau}{2}|x_\tau - y_\tau|^2 > 0. \quad (1.2.13)$$

Aplicando el principio del máximo para funciones semicontinuas, Lema 0.6.20, sabemos que existen matrices simétricas X_τ, Y_τ tales que

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,+} \tilde{u}(x_\tau), \quad \text{y} \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,-} \tilde{v}_\epsilon(y_\tau),$$

(ver Definición 0.6.12) y

$$\langle X_\tau \xi, \xi \rangle - \langle Y_\tau \eta, \eta \rangle \leq 3\tau |\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.14)$$

Por definición de sub- y supersolución de viscosidad (ver [58]), tenemos

$$\begin{aligned} F \left(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau + \frac{q}{m-q} \frac{\tau^2(x_\tau - y_\tau) \otimes (x_\tau - y_\tau)}{\tilde{u}(x_\tau)} \right) \\ \leq \frac{f \left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{u}(x_\tau) \right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}} \right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{u}(x_\tau) \right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}}, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

y

$$\begin{aligned}
F\left(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau + \frac{q}{m-q} \frac{\tau^2(x_\tau - y_\tau) \otimes (x_\tau - y_\tau)}{\tilde{v}_\epsilon(y_\tau)}\right) \\
\geq (1 + \epsilon)^m \cdot \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}}. \quad (1.2.16)
\end{aligned}$$

Como (1.2.13) y (1.2.14) implican $\tilde{v}_\epsilon(y_\tau) < \tilde{u}(x_\tau)$ y $X_\tau \leq Y_\tau$ respectivamente, obtenemos la relación matricial

$$X_\tau + \frac{q}{m-q} \frac{\tau^2(x_\tau - y_\tau) \otimes (x_\tau - y_\tau)}{\tilde{u}(x_\tau)} \leq Y_\tau + \frac{q}{m-q} \frac{\tau^2(x_\tau - y_\tau) \otimes (x_\tau - y_\tau)}{\tilde{v}_\epsilon(y_\tau)}.$$

Restando (1.2.15) de (1.2.16), por la hipótesis (1.2.7) y la elipticidad degenerada, se tiene

$$\begin{aligned}
0 &< [(1 + \epsilon)^m - 1] \cdot \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}} \\
&\leq (1 + \epsilon)^m \cdot \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}} - \frac{f\left(\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{u}(x_\tau)\right]^{\frac{1}{1-\frac{q}{m}}}\right)}{\left[\left(1 - \frac{q}{m}\right) \tilde{u}(x_\tau)\right]^{\frac{q}{1-\frac{q}{m}}}} \\
&\leq F\left(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau + \frac{q}{m-q} \frac{\tau^2(x_\tau - y_\tau) \otimes (x_\tau - y_\tau)}{\tilde{v}_\epsilon(y_\tau)}\right) \\
&\quad - F\left(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau + \frac{q}{m-q} \frac{\tau^2(x_\tau - y_\tau) \otimes (x_\tau - y_\tau)}{\tilde{u}(x_\tau)}\right) \leq 0,
\end{aligned}$$

una contradicción. \square

El siguiente resultado, más simple, será útil a la hora de probar la existencia de soluciones.

Teorema 1.2.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y considérese una función $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ con $f > 0$ en Ω , y $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface (F1) y (F2) para algún m . Sean $u, v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, respectivamente una sub- y supersolución de viscosidad de*

$$F(\nabla w, D^2 w) = f(x), \quad \text{en } \Omega.$$

Supongamos $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $v \geq 0$ in $\overline{\Omega}$, ya que sumar una constante tanto a u como a v no afecta al problema. Definamos $v_\epsilon(x) = (1 + \epsilon)v(x)$. Por homogeneidad, v_ϵ es una supersolución estricta, de hecho

$$F(\nabla v_\epsilon, D^2 v_\epsilon) \geq (1 + \epsilon)^m f(x) > f(x), \quad \text{y } u - v_\epsilon \leq 0 \text{ en } \partial\Omega. \quad (1.2.17)$$

Argumentamos por contradicción. Supongamos que existe un $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$(u - v_\epsilon)(x_0) = \max_{\overline{\Omega}}(u - v_\epsilon) > 0.$$

Entonces, (1.2.17) implica $x_0 \notin \partial\Omega$. Argumentando como en la prueba del Teorema 1.2.1, deducimos que $x_\tau, y_\tau \rightarrow x_0$ y que existen matrices simétricas X_τ, Y_τ tales que

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2+} u(x_\tau), \quad y \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2-} v_\epsilon(y_\tau),$$

con $X_\tau \leq Y_\tau$. Entonces, por definición de solución de sub- y supersolución de viscosidad, tenemos

$$F(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \leq f(x_\tau),$$

y

$$F(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \geq (1 + \epsilon)^m f(y_\tau).$$

Por elipticidad degenerada, tendremos

$$(1 + \epsilon)^m f(y_\tau) - f(x_\tau) \leq F(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) - F(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \leq 0.$$

Haciendo $\tau \rightarrow \infty$, por continuidad, llegamos a

$$0 < ((1 + \epsilon)^m - 1) f(x_0) \leq 0,$$

que es una contradicción. Por tanto, $u \leq v_\epsilon$ en Ω , y, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos $u \leq v$ en Ω . \square

1.3. Existencia de solución para ecuaciones con segundo miembro cóncavo

Sean $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que se verifica (F1) y (F2) para algún m . Sean $q \in (0, m)$ y $\lambda > 0$. Queremos estudiar la existencia de soluciones no triviales de

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q & \text{en } \Omega \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Aplicando el Corolario 1.2.2, se sabe que para cada $\lambda > 0$, el problema tiene como mucho una solución. Sin embargo, para demostrar la existencia de solución, debemos precisar más la estructura del operador F con hipótesis adicionales. Concretamente, necesitaremos que se verifiquen las hipótesis (F3) y (F5).

Supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado y tan regular como sea necesario para que se verifiquen las hipótesis (F3) y (F5) (ver a este respecto la Sección 1.5).

El objetivo principal de esta sección es probar el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1. *Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface (F1), (F2) para algún m , (F3) y (F5), y sea $q \in (0, m)$. Entonces, para cada $\lambda > 0$ el problema (1.3.1) tiene una única solución positiva dada por*

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{m-q}} u_1(x) \quad (1.3.2)$$

con u_1 la solución correspondiente a $\lambda = 1$.

Observación 1.3.2. En el resultado anterior se puede reemplazar la hipótesis (F5) por (F4).

Nótese que (1.3.2) define una curva regular de soluciones con respecto al parámetro λ . Por homogeneidad, será suficiente probar el resultado para $\lambda = 1$, es decir,

$$\begin{cases} F(\nabla u_1, D^2 u_1) = u_1^q & \text{en } \Omega \\ u_1 > 0 & \text{en } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Dado que en este caso se cumple el Principio de Comparación (Teorema 1.2.1), basamos la prueba del Teorema 1.3.1 en el método de Perron. Para ello, construiremos una subsolución y una supersolución adecuadas de (1.3.3).

Lema 1.3.3. *Para v_1 solución al problema auxiliar (1.1.4), entonces*

$$\bar{u}(x) = \|v_1\|_{\infty}^{\frac{q}{m-q}} \cdot v_1(x)$$

es una supersolución de viscosidad de (1.3.3).

Demostración. Por la homogeneidad de F y la definición de v , tenemos

$$F(\nabla \bar{u}, D^2 \bar{u}) = \|v_1\|_{\infty}^{\frac{mq}{m-q}} \cdot F(\nabla v_1, D^2 v_1) = \|v_1\|_{\infty}^{\frac{mq}{m-q}} = \left(\|v_1\|_{\infty}^{\frac{q}{m-q}} \|v_1\|_{\infty} \right)^q \geq \bar{u}^q$$

en sentido de viscosidad. \square

A continuación vamos a construir una subsolución de (1.3.3). Para ello, consideramos el problema auxiliar:

$$\begin{cases} F(\nabla w_1, D^2 w_1) = (d(x))^m & \text{en } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

donde $d(x)$ es la distancia a la frontera normalizada, es decir,

$$d(x) = \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_{\infty}}.$$

Se tiene el siguiente resultado de existencia para este problema.

Lema 1.3.4. *El problema (1.3.4) tiene una solución $w_1 > 0$ en Ω . Dicha solución es única y $w_{\lambda}(x) = \lambda^{1/m} \cdot w_1(x)$ es solución de*

$$\begin{cases} F(\nabla w_{\lambda}, D^2 w_{\lambda}) = \lambda \cdot (d(x))^m & \text{en } \Omega \\ w_{\lambda} > 0 & \text{en } \Omega \\ w_{\lambda} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Demostración. Para la existencia de solución de (1.3.4), basta tomar v_1 (la solución al problema auxiliar (1.1.4)) como supersolución y 0 como subsolución y, utilizando el Principio de Comparación (Teorema 1.2.5), aplicar el método de Perron (Teorema 4.1 en [58]). Por construcción $0 \leq w_1 \leq v_1$ en Ω ; por comparación w_1 es única.

Para demostrar que $w_1 > 0$ en Ω procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $w_1(x_0) = 0$. Como $w_1 \geq 0$ en Ω , en particular 0 toca a w_1 por debajo en x_0 . Por definición de supersolución de viscosidad,

$$0 = F(0, 0) \geq (d(x_0))^m > 0,$$

que es una contradicción. \square

Reescalando adecuadamente w_1 obtenemos una subsolución de (1.3.3).

Lema 1.3.5. *Existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que*

$$\underline{u}(x) = t \cdot w_1(x)$$

es una subsolución de viscosidad de (1.3.3) para cada $t \in (0, \delta)$.

Demostración. Por definición, se tiene

$$F(\nabla \underline{u}, D^2 \underline{u}) = t^m \cdot F(\nabla w_1, D^2 w_1) = t^m \cdot d^m(x).$$

De hecho, $t^m d^m(x) \leq \underline{u}^q(x)$ ya que esto equivale a

$$t^{1-\frac{q}{m}} \cdot d(x) \leq w_1^{\frac{q}{m}}(x),$$

que se verifica para todo $t < \delta$ suficientemente pequeño por el Lema de Hopf (hipótesis (F5)). \square

Hemos construido una subsolución (Lema 1.3.5) y una supersolución (Lema 1.3.3) que verifican el dato de borde correcto. El Principio de Comparación (Teorema 1.2.1) nos permite concluir aplicando el método de Perron (Teorema 4.1 en [58]).

Observación 1.3.6. Para construir la subsolución en el Lema 1.3.5, es posible utilizar la hipótesis (F4) en lugar de (F5); esto permite elegir las hipótesis menos restrictivas sobre el dominio Ω entre las necesarias para probar (F4) y las necesarias para tener (F5), usualmente una condición de esfera interior (véanse los ejemplos en la Sección 1.5). Para construir una subsolución de (1.3.3) mediante autofunciones, considérese $v(x)$, una solución de (1.1.5) con $\|v\|_\infty = 1$. Entonces, $\underline{u}(x) = t v(x)$, con $t \leq \lambda_1^{-1/(m-q)}$ es una subsolución de (1.3.3) para $\lambda = 1$. De hecho, $\underline{u} = 0$ en $\partial\Omega$, y

$$F(\nabla \underline{u}, D^2 \underline{u}) = \lambda_1 \underline{u}^m = \lambda_1 \underline{u}^{m-q} \underline{u}^q \leq \lambda_1 t^{m-q} \underline{u}^q \leq \underline{u}^q \quad \text{en } \Omega.$$

1.4. Existencia y no existencia de soluciones para el problema cóncavo-convexo

Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las hipótesis (F1) – (F6). Supongamos además que Ω es un dominio suficientemente regular como para que se verifiquen las hipótesis (F3) – (F5).

Se consideran $0 < q < m < r$, $\lambda > 0$ y el problema

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Probaremos la existencia de un valor $\lambda_{\text{máx}} > 0$ tal que existe al menos una solución para cada $0 < \lambda < \lambda_{\text{máx}}$, y no existe en caso contrario. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 1.4.1. Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1), (F2), (F3), (F4) y (F6), y sea $0 < q < m < r$. Entonces, existe $\lambda_{\text{máx}} \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

(i) no tiene solución si $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$,

(ii) tiene al menos una solución para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$.

La prueba se divide en varias etapas organizadas como subsecciones.

1.4.1. Existencia de soluciones para λ pequeño

En esta sección probaremos el siguiente resultado que extiende los argumentos en [33] al marco de viscosidad.

Teorema 1.4.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y suficientemente regular y sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1) – (F4) y (F6). Entonces, existe una constante $\lambda_0 > 0$ (dada por la expresión (1.4.2)) tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, el problema (1.4.1) tiene al menos una solución no trivial en el sentido de viscosidad.

Vamos a construir una supersolución de (1.4.1).

Lema 1.4.3. Sea v_1 la solución al problema auxiliar (1.1.4). La función

$$\bar{u}_\lambda(x) = T(\lambda) \cdot v_1(x)$$

con

$$T(\lambda) = \|v_1\|_\infty^{-1} \left(\frac{m-q}{r-m} \right)^{\frac{1}{r-q}} \lambda^{\frac{1}{r-q}}.$$

es una supersolución de viscosidad de (1.4.1) para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ donde

$$\lambda_0 = (\|v_1\|_\infty^{-m})^{\frac{r-q}{r-m}} (r-m) \left(\frac{(m-q)^{m-q}}{(r-q)^{r-q}} \right)^{\frac{1}{r-m}}. \quad (1.4.2)$$

Observación 1.4.4. En la prueba de este resultado sólo se utilizan las hipótesis (F1) – (F3).

Demostración. Por homogeneidad y la definición de v_1 , tenemos

$$F(\nabla \bar{u}_\lambda, D^2 \bar{u}_\lambda) = T^m \cdot F(\nabla v_1, D^2 v_1) = T^m.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\lambda(\bar{u}_\lambda)^q + (\bar{u}_\lambda)^r \leq \lambda T^q \|v_1\|_\infty^q + T^r \|v_1\|_\infty^r.$$

Por tanto, bastará con que se verifique

$$\lambda T^q \|v_1\|_\infty^q + T^r \|v_1\|_\infty^r \leq T^m. \quad (1.4.3)$$

Probar (1.4.3) es equivalente a demostrar que existe $T = T(\lambda)$ tal que

$$\Phi_\lambda(T) \leq 1, \quad \text{para } \Phi_\lambda(T) = \lambda \|v_1\|_\infty^q T^{q-m} + \|v_1\|_\infty^r T^{r-m}.$$

En particular, demostraremos que el mínimo de Φ_λ es menor que 1 para $\lambda \leq \lambda_0$ suficientemente pequeño. Es fácil comprobar que

$$\frac{d}{dT} \Phi_\lambda(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(\lambda) = \|v_1\|_\infty^{-1} \left(\frac{m-q}{r-m} \right)^{\frac{1}{r-q}} \lambda^{\frac{1}{r-q}},$$

que, de hecho, es el mínimo global de Φ_λ . Para concluir basta que

$$\min_{T>0} \Phi_\lambda(T) = \Phi_\lambda(T(\lambda)) = \lambda^{\frac{r-m}{r-q}} \|v_1\|_\infty^m \left(\frac{r-q}{r-m} \right) \left(\frac{m-q}{r-m} \right)^{\frac{q-m}{r-q}} \leq 1,$$

lo cual es cierto siempre y cuando $\lambda \leq \lambda_0$ con λ_0 dado por (1.4.2). \square

Es evidente que para cada λ , la solución del problema cóncavo construida en el Teorema 1.3.1 es una subsolución del problema (1.4.1):

Lema 1.4.5. *Para todo $\lambda > 0$, \underline{u}_λ la única solución del problema cóncavo*

$$\begin{cases} F(\nabla \underline{u}_\lambda, D^2 \underline{u}_\lambda) = \lambda \underline{u}_\lambda^q & \text{en } \Omega \\ \underline{u}_\lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ \underline{u}_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

es una subsolución de viscosidad de (1.4.1).

Observación 1.4.6. Para la construcción de la solución del problema cóncavo se utilizan las hipótesis (F1) – (F3) y o bien (F4) o bien (F5) según convenga (véase la Observación 1.3.6).

El siguiente resultado es una consecuencia del Principio de Comparación para el problema cóncavo, Teorema 1.2.1.

Lema 1.4.7. *Para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$ se tiene $\underline{u}_\lambda \leq \bar{u}_\lambda$ en Ω .*

Demostración. Por definición, $\underline{u}_\lambda, \bar{u}_\lambda > 0$ y $\underline{u}_\lambda = \bar{u}_\lambda = 0$ en $\partial\Omega$. Además, se tiene:

$$F(\nabla \bar{u}_\lambda, D^2 \bar{u}_\lambda) \geq \lambda \bar{u}_\lambda^q + \bar{u}_\lambda^r \geq \lambda \bar{u}_\lambda^q,$$

mientras que

$$F(\nabla \underline{u}_\lambda, D^2 \underline{u}_\lambda) = \lambda \underline{u}_\lambda^q.$$

Por comparación para el problema cóncavo (Teorema 1.2.1), se tiene el resultado. \square

Ahora, podemos concluir la demostración del Teorema 1.4.2.

Demostración del Teorema 1.4.2. Sea λ_0 como en el Lema 1.4.3, y fijemos $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Aplicando los Lemas 1.4.3, 1.4.5, y 1.4.7 obtenemos una subsolución \underline{u}_λ y una supersolución \bar{u}_λ del problema (1.4.1), tales que $\underline{u}_\lambda = \bar{u}_\lambda = 0$ en $\partial\Omega$ y que además verifican $\underline{u}_\lambda \leq \bar{u}_\lambda$ en el interior de Ω .

Primero, sea $w_1(x)$, la solución del problema

$$\begin{cases} F(\nabla w_1, D^2 w_1) = \lambda \underline{u}_\lambda^q + \underline{u}_\lambda^r & \text{en } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

es sentido de viscosidad. Para mayor brevedad, todas las ecuaciones y desigualdades se entenderán en sentido de viscosidad.

Para probar que dicha w_1 existe, notamos que \underline{u}_λ es una subsolución del problema y que \bar{u}_λ es una supersolución, ya que, por monotonía,

$$F(\nabla \bar{u}_\lambda, D^2 \bar{u}_\lambda) \geq \lambda \bar{u}_\lambda^q + \bar{u}_\lambda^r \geq \lambda \underline{u}_\lambda^q + \underline{u}_\lambda^r.$$

El Principio de Comparación, Teorema 1.2.5, y el método de Perron (Teorema 4.1 en [58]), nos dan la existencia de una única w_1 tal que

$$\underline{u}_\lambda \leq w_1 \leq \bar{u}_\lambda \quad \text{en } \Omega.$$

A continuación, definimos w_2 , la solución del problema

$$\begin{cases} F(\nabla w_2, D^2 w_2) = \lambda w_1^q + w_1^r & \text{en } \Omega \\ w_2 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En este caso, w_1 es una subsolución y \bar{u}_λ una supersolución, ya que por monotonía,

$$F(\nabla w_1, D^2 w_1) = \lambda \underline{u}_\lambda^q + \underline{u}_\lambda^r \leq \lambda w_1^q + w_1^r,$$

mientras que

$$F(\nabla \bar{u}_\lambda, D^2 \bar{u}_\lambda) \geq \lambda \bar{u}_\lambda^q + \bar{u}_\lambda^r \geq \lambda w_1^q + w_1^r.$$

Como $w_1 = \bar{u}_\lambda = 0$ en $\partial\Omega$, por comparación (Teorema 1.2.5) y el método de Perron, obtenemos que existe w_2 que verifica

$$\underline{u}_\lambda \leq w_1 \leq w_2 \leq \bar{u}_\lambda \quad \text{en } \Omega.$$

Iterando este procedimiento, se construye una sucesión $\{w_k\}_{k \geq 1}$ de soluciones a los problemas

$$\begin{cases} F(\nabla w_k, D^2 w_k) = \lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r & \text{en } \Omega \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

tal que

$$\underline{u}_\lambda \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq \bar{u}_\lambda \quad \text{en } \Omega.$$

En particular, para cada $x \in \Omega$, la sucesión $\{w_k(x)\}_{k \geq 1}$ está acotada y es no decreciente, por tanto, convergente. Denotamos por $u(x)$ el límite puntual de las w_k . Entonces, por la hipótesis (F6), existe una subsucesión $k' \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} w_{k'} = u \quad \text{uniformemente.}$$

Como la sucesión w_k es monótona creciente, se tiene que toda la sucesión converge uniformemente a u .

Para finalizar, probaremos que el límite uniforme u es una solución de viscosidad de (1.4.1). En primer lugar, observamos que

$$u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Por otra parte, sean $\phi \in \mathcal{C}^2$ y $x_0 \in \Omega$ tales que $u - \phi$ tiene un máximo local estricto en x_0 , esto es,

$$(u - \phi)(x) < (u - \phi)(x_0),$$

para todo $x \neq x_0$ en un entorno de x_0 . Por la convergencia uniforme deducimos que $w_k - \phi$ tiene un máximo local en algún punto x_k , es decir,

$$(w_k - \phi)(x) \leq (w_k - \phi)(x_k),$$

para todo $x \neq x_k$ en un entorno de x_k . Además, $x_k \rightarrow x_0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Como v_k es una solución de viscosidad de (1.4.4), tenemos

$$F(\nabla\phi(x_k), D^2\phi(x_k)) \leq \lambda w_{k-1}^q(x_k) + w_{k-1}^r(x_k).$$

Tomando límites $k \rightarrow \infty$, llegamos a

$$F(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq \lambda u^q(x_0) + u^r(x_0).$$

Análogamente se demuestra que u es una supersolución de viscosidad. \square

1.4.2. No existencia para λ grande

Se trata de probar que existe $\hat{\lambda} > 0$ tal que el problema (1.4.1) no tiene solución positiva para $\lambda > \hat{\lambda}$.

Para ello, necesitaremos que el operador F tenga primer autovalor y que este sea aislado, es decir, que no existan autovalores asociados a autofunciones positivas arbitrariamente cercanos a λ_1 . Aquí entra en juego la hipótesis (F4) de una manera fundamental.

Teorema 1.4.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y suficientemente regular y sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1), (F2), (F4) y (F6). Entonces, El problema (1.4.1) no tiene solución positiva para $\lambda > \hat{\lambda}$ con*

$$\hat{\lambda} = \lambda_1^{\frac{r-q}{r-m}} (r-m) \left(\frac{(m-q)^{m-q}}{(r-q)^{r-q}} \right)^{\frac{1}{r-m}}. \quad (1.4.5)$$

Demostración. Sea $\mu = \lambda_1 + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$. Para llegar a una contradicción, supongamos que el problema

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4.6)$$

tiene una solución no trivial u_λ para algún

$$\lambda > \mu^{\frac{r-q}{r-m}} (r-m) \left(\frac{(m-q)^{m-q}}{(r-q)^{r-q}} \right)^{\frac{1}{r-m}}.$$

Vamos a ver que entonces se tiene

$$F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r > \mu u_\lambda^m \quad \text{en } \Omega.$$

De hecho, basta ver que

$$\min_{t>0} \Phi_\lambda(t) > \mu \quad \text{donde} \quad \Phi_\lambda(t) = \lambda t^{q-m} + t^{r-m}.$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{d}{dt} \Phi_\lambda(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_\lambda = \left(\frac{\lambda(m-q)}{(r-m)} \right)^{\frac{1}{r-q}},$$

que es un mínimo. Como $\Phi_\lambda(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$ y cuando $t \rightarrow \infty$, es un mínimo global. Entonces,

$$\min_{t>0} \Phi_\lambda(t) = \Phi_\lambda(t_\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{r-m}{r-q}} (r-q)}{(m-q)^{\frac{m-q}{r-q}} (r-m)^{\frac{r-m}{r-q}}} > \mu$$

por la elección de λ .

Por otra parte, sea ϕ_1 una solución de (1.1.5) normalizada de manera que $\|\phi_1\|_\infty < 1$. Para

$$\delta < \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{m-q}},$$

definamos $\psi = \delta \phi_1$; entonces

$$F(\nabla \psi, D^2 \psi) = \lambda_1 \psi^m < \mu \delta^m \phi_1^m < \mu \delta^{m-q} \psi^q < \lambda \psi^q \quad \text{en } \Omega.$$

Además, se tiene

$$F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r > \lambda u_\lambda^q \quad \text{en } \Omega,$$

mientras que $\psi = u_\lambda = 0$ en $\partial\Omega$. Por comparación para el problema cóncavo (Teorema 1.2.1) tenemos $0 < \psi \leq u_\lambda$.

Tenemos una subsolución ψ y una supersolución u_λ del problema

$$F(\nabla v, D^2 v) = \mu v^m.$$

que verifican $0 < \psi \leq u_\lambda$. Entonces, podemos aplicar el método de iteración como en la prueba del Teorema 1.4.2 y obtener $\psi \leq v \leq u_\lambda$, solución positiva de (1.1.5) asociada a $\mu = \lambda_1 + \epsilon$, lo cual es una contradicción con el hecho de que λ_1 es aislado.

Como este argumento se puede aplicar para todo $\epsilon > 0$, concluimos que no existe solución positiva de (1.4.1) para $\lambda > \hat{\lambda}$. \square

Como consecuencia de los Teoremas 1.4.2 y 1.4.8 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.4.9. *Supongamos que el operador F verifica (F1) – (F6) y que el dominio Ω es suficientemente regular como para que F verifique las hipótesis (F3) – (F6). Sea $\lambda_1(\Omega)$ el primer autovalor asociado al operador F . Entonces se tiene*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \|v_1\|_\infty^{-m}.$$

donde v_1 es la solución al problema auxiliar (1.1.4).

Demostración. Basta observar que $\lambda_0 \leq \hat{\lambda}$ y tener en cuenta las expresiones explícitas en (1.4.2) y (1.4.5). \square

1.4.3. Existencia de un $\lambda_{\text{máx}}$ maximal y una solución minimal para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$

Definamos

$$\lambda_{\text{máx}} = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ : \text{el problema (1.4.1) tiene solución} \}.$$

El valor $\lambda_{\text{máx}}$ está bien definido, ya que se tiene $\lambda_{\text{máx}} > 0$ como consecuencia del Teorema 1.4.2 y $\lambda_{\text{máx}} < \infty$ como consecuencia del Teorema 1.4.8. Además:

Teorema 1.4.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y suficientemente regular y sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1) – (F4) y (F6). Entonces, para todo $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$, el problema (1.4.1) tiene al menos una solución de viscosidad positiva u_λ . De hecho, dicha solución es minimal, en el sentido de que cualquier otra solución positiva v de (1.4.1), verifica $u_\lambda \leq v$.*

Demostración. Por definición de $\lambda_{\text{máx}}$, existe λ_M próximo a $\lambda_{\text{máx}}$ tal que existe al menos una solución positiva \bar{u} del problema

$$\begin{cases} F(\nabla \bar{u}, D^2 \bar{u}) = \lambda_M \bar{u}^q + \bar{u}^r & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} > 0 & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Fijado $0 < \lambda < \lambda_M$, sea \underline{u} la única solución del problema cóncavo (ver Observación 1.3.6)

$$\begin{cases} F(\nabla \underline{u}, D^2 \underline{u}) = \lambda \underline{u}^q & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} > 0 & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Obviamente, \underline{u} y \bar{u} son una sub- y supersolución de (1.4.1). Dado que \bar{u} es también una supersolución del problema cóncavo, por comparación (Teorema 1.2.1) se tiene $\underline{u} \leq \bar{u}$ en Ω .

Argumentando como en la prueba del Teorema 1.4.2, se construye una sucesión $\{w_k\}_{k \geq 1}$ de soluciones a los problemas

$$\begin{cases} F(\nabla w_k, D^2 w_k) = \lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r & \text{en } \Omega \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

tal que

$$\underline{u} = w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq \bar{u} \quad \text{en } \Omega.$$

Tomando el límite en sentido de viscosidad de la sucesión w_k se obtiene u_λ una solución positiva del problema (1.4.1) con parámetro λ .

Finalmente, demostramos que cualquier otra solución positiva v de (1.4.1), verifica $u_\lambda \leq v$. Para ello, basta repetir el argumento de iteración utilizando v como supersolución. Asimismo obtenemos inductivamente $w_k \leq v$ para todo k (donde w_k son las mismas que en (1.4.7)) y por tanto $u_\lambda \leq v$. \square

1.5. Ejemplos de aplicación

Esta sección está dedicada a mostrar ejemplos de aplicación de los resultados abstractos probados en las secciones anteriores. En todos estos ejemplos, se verifican los ingredientes fundamentales de las pruebas, las hipótesis (F1)–(F6).

1.5.1. Ecuaciones uniformemente elípticas completamente no lineales

Vamos a mostrar aquí un ejemplo fundamental de aplicación de los resultados anteriores. En lugar de (F1), supongamos que $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la hipótesis de elipticidad uniforme (ver Definición 0.6.4)

(F1') Existen constantes $0 < \theta \leq \Theta$ tales que para todo par de matrices $X, Y \in \mathcal{S}^n$ con $Y \geq 0$ se tiene,

$$-\Theta \cdot \text{traza}(Y) \leq F(p, X + Y) - F(p, X) \leq -\theta \cdot \text{traza}(Y)$$

para cada $p \in \mathbb{R}^n$.

Supongamos además que se satisface la condición (F2). Hay que hacer notar que la elipticidad uniforme implica $m = 1$ ya que así todos los términos en la definición tienen la misma homogeneidad.

Supondremos además la siguiente condición de estructura:

(E) Existe $\gamma > 0$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{S}^n$, y $p, q \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X - Y) - \gamma |p - q| \leq F(p, X) - F(q, Y) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) + \gamma |p - q|,$$

donde $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm$ son los operadores extremales de Pucci (ver Definición 0.6.6).

Nótese que la condición (E) es equivalente a la elipticidad uniforme cuando $p = q$ (ver Lema 0.6.8).

En este contexto los resultados de existencia para el problema cóncavo y cóncavo-convexo quedan como sigue:

Teorema 1.5.1. *Sea Ω un dominio acotado tal que $\partial\Omega$ verifica una condición de cono exterior uniforme y una condición de esfera interior. Consideramos $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1'), (F2) con $m = 1$ y (E). Entonces, para cada $\lambda > 0$ el problema*

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una única solución positiva dada por $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{1-q}} \cdot u_1(x)$ con u_1 la solución correspondiente a $\lambda = 1$.

El resultado se deduce del Teorema 1.3.1 tras comprobar las hipótesis (F3) y (F5).

El Teorema 1.5.1 está relacionado con [31, Teorema 6], donde se demuestra el resultado para operadores más generales por un método distinto. Sin embargo, hay que señalar que nuestro método requiere menos regularidad de la frontera, que en [31] es \mathcal{C}^2 .

Teorema 1.5.2. *Sea Ω un dominio acotado de clase \mathcal{C}^2 . Consideramos $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1'), (F2) con $m = 1$ y (E). Tomamos $0 < q < 1 < r$. Entonces, existe $\lambda_{\text{máx}} \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema*

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

(i) No tiene solución si $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$,

(ii) Tiene al menos una solución (minimal) para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$.

En este caso, el resultado se sigue del Teorema 1.4.1 una vez que se comprueba que se verifican las hipótesis (F3), (F4) y (F6).

Observación 1.5.3. La existencia de solución para λ suficientemente pequeño en el Teorema 1.5.2 se tiene para dominios menos regulares, concretamente, para dominios en las mismas hipótesis del Teorema 1.5.1. Esto es así porque, según la Observación 1.4.6, el Teorema 1.4.2 se puede probar reemplazando la hipótesis (F4) por la (F5).

Hipótesis (F3): Estudio del problema auxiliar (1.1.4)

En primer lugar, probaremos que los problemas auxiliares tienen solución, es decir, la hipótesis (F3).

Proposición 1.5.4. *Sea Ω un dominio acotado y que satisface una condición de cono exterior uniforme. Entonces, existe una única solución del problema auxiliar (1.1.4), que, recordemos, es*

$$\begin{cases} F(\nabla v_1, D^2 v_1) = 1 & \text{en } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que 0 es una subsolución de nuestro problema. Construiremos una supersolución con la ayuda de la Proposición 3.2 en [59]. Sea U la única solución de viscosidad de

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 U) - \gamma |\nabla U| = 1 & \text{en } \Omega, \\ U = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Hay que hacer notar que es en este punto donde se utiliza la condición de cono exterior uniforme sobre Ω . La condición de estructura (E) implica

$$F(\nabla U, D^2 U) \geq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 U) - \gamma |\nabla U| = 1 \quad \text{en } \Omega$$

en sentido de viscosidad. Por comparación $0 \leq v_1 \leq U$ (Teorema 1.2.5) y podemos aplicar el método de Perron (véase el Teorema 4.1 in [58]) para obtener que existe una única v_1 tal que

$$\begin{cases} F(\nabla v_1, D^2 v_1) = 1 & \text{en } \Omega \\ v_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad \square$$

Hipótesis (F4): Existencia de Autovalores

Probaremos ahora que se verifica la hipótesis (F4) sobre la existencia de un autovalor principal. Bajo las hipótesis (F1'), (F2) y la condición de estructura (E), se verifica el Teorema 8 en [30] (aquí se utiliza la regularidad C^2 de $\partial\Omega$). Por tanto, se deduce que existe un autovalor principal λ_1 para el operador F definido como

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda \mid \exists v > 0 \text{ en } \Omega \text{ tal que } F(\nabla v, D^2 v) \geq \lambda v\}. \quad (1.5.1)$$

en el sentido de que $\lambda_1 < \infty$ y que existe una solución no trivial (autofunción) del problema de autovalores

$$\begin{cases} F(\nabla v, D^2 v) = \lambda_1 v, & \text{en } \Omega, \\ v > 0, & \text{en } \Omega, \\ v = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Además, por definición de λ_1 , sabemos que para cada $\lambda > \lambda_1$ el problema (1.5.2) no tiene soluciones estrictamente positivas.

En [32] se prueba la existencia de un autovalor principal en dominios menos regulares, concretamente, dominios acotados que satisfacen una condición de cono exterior uniforme. Sin embargo, la definición de autovalor utilizada en este caso es diferente de (1.5.1) y no permite deducir que el autovalor sea aislado.

Otras referencias para la existencia de autovalores en este marco son [26, 37, 116] y las referencias allí citadas.

Es interesante señalar que para estos operadores existen dos semi-autovalores (*half-eigenvalues*), λ_1^+ y λ_1^- , asociados a una solución positiva y negativa respectivamente, véanse por ejemplo [37, 116] y las referencias allí citadas. Este tipo de comportamiento fue observado por H. Berestycki en relación con problemas de bifurcación para problemas de Sturm-Liouville no lineales, ver [23].

Hipótesis (F5): Lema de Hopf para ecuaciones uniformemente elípticas

A continuación, adaptamos la prueba del Lema de Hopf en [78, Sección 3.2] a este contexto. Pueden encontrarse otras versiones en [17, 93, 119].

Proposición 1.5.5 (Lema de Hopf). *Sea Ω un dominio acotado y $u \in C(\bar{\Omega})$ una solución de viscosidad de*

$$F(\nabla u, D^2 u) \leq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde F satisface (F1'), (F2) y (E). Sea además $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

i) $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$.

ii) $\partial\Omega$ satisface una condición de esfera interior en x_0 .

Entonces, para toda dirección no tangencial ξ que apunte hacia dentro de Ω ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} < 0.$$

Demostración. Como Ω satisface una condición de esfera interior en x_0 , existe una bola $B = B_R(y) \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B$. Para $0 < \rho < R$, tomamos $A = \{x \in \Omega : \rho < |x - y| < R\}$ y se definen

$$v(x) = e^{-\frac{\alpha|x-y|^2}{2}} - e^{-\frac{\alpha R^2}{2}},$$

y

$$w(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x),$$

para $x \in A$, donde $\alpha, \epsilon > 0$ son constantes por determinar. Entonces:

1. $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 w) - \gamma |\nabla w| \leq 0$ en A para α suficientemente grande.

Sea $\phi \in \mathcal{C}^2$ y $\hat{x} \in A$ tales que $w - \phi$ tiene un máximo local en \hat{x} . Es fácil ver que $u - \Phi$ tiene un máximo local en \hat{x} , con $\Phi(x) = \phi(x) - \epsilon v(x)$. Dado que $v \in \mathcal{C}^2$, también Φ , y entonces la definición de u y la condición de estructura (E) implican

$$\begin{aligned} 0 &\geq F(\nabla \Phi(\hat{x}), D^2 \Phi(\hat{x})) = F(\nabla \phi(\hat{x}) - \epsilon \nabla v(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x}) - \epsilon D^2 v(\hat{x})) \\ &\geq F(\nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x})) + \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(-\epsilon D^2 v(\hat{x})) - \gamma \epsilon |\nabla v(\hat{x})| \\ &\geq F(0, 0) + \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 \phi(\hat{x})) - \gamma |\nabla \phi(\hat{x})| - \epsilon \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 v(\hat{x})) - \gamma \epsilon |\nabla v(\hat{x})|. \end{aligned}$$

Por cálculo directo, se tiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 v(\hat{x})) &= e^{-\frac{\alpha|x-y|^2}{2}} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(\alpha^2(x-y) \otimes (x-y) - \alpha I) \\ &\leq e^{-\frac{\alpha|x-y|^2}{2}} (-\alpha^2 \rho^2 \theta + \alpha n \Theta), \\ |\nabla v(\hat{x})| &\leq \alpha R e^{-\frac{\alpha|x-y|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Combinando estas dos expresiones,

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 \phi(\hat{x})) - \gamma |\nabla \phi(\hat{x})| \leq \epsilon e^{-\frac{\alpha|x-y|^2}{2}} (-\alpha^2 \rho^2 \theta + \alpha(n \Theta - \gamma R)) \leq 0,$$

para α suficientemente grande.

2. $w \leq 0$ en ∂A para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Como $u - u(x_0) < 0$ en $\partial B_\rho(y)$, podemos elegir $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$(u - u(x_0) + \epsilon v) \leq 0 \quad (1.5.3)$$

en $\partial B_\rho(y)$. Además, dado que $v = 0$ en $\partial B_R(y)$, (1.5.3) también se verifica en la frontera exterior. Por tanto, la estimación ABP, (véase [41, Proposición 2.12]) implica $w \leq 0$ en todo A . De ahí se tiene que para cada dirección no tangencial ξ que apunte hacia el interior del dominio Ω ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} \leq -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \xi}(x_0) = \epsilon \alpha e^{-\frac{\alpha R^2}{2}} \langle (x_0 - y), \xi \rangle < 0. \quad \square$$

Hipótesis (F6): Convergencia

A continuación vamos a probar que se verifica la hipótesis (F6) que, recordamos, es necesaria para concluir la existencia de solución minimal en el problema cóncavo-convexo (1.4.1). Para ello, debemos probar que, dada la sucesión $\{w_k\}_{k \geq 1}$ de soluciones a los problemas

$$\begin{cases} F(\nabla w_k, D^2 w_k) = \lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r & \text{en } \Omega \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

tales que

$$\underline{u} = w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq \bar{u} \quad \text{en } \Omega,$$

con $\underline{u}, \bar{u} \in \mathcal{C}(\Omega)$, existe una subsucesión $k' \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} w_{k'} = u \quad \text{uniformemente.}$$

Nótese que en particular, para cada $x \in \Omega$, la sucesión $\{w_k(x)\}_{k \geq 1}$ es acotada y no creciente, por tanto, convergente. Denotamos por $u(x)$ el límite puntual de la sucesión w_k .

Por la condición de estructura (E) y la definición de w_k en la frontera se tiene

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 w_k) + \gamma |\nabla w_k| \geq \lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r, \\ w_k = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 w_k) - \gamma |\nabla w_k| \leq \lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r, \\ w_k = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por construcción,

$$\|\lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r\|_{L^n(\Omega)} \leq \|\lambda \bar{u}^q + \bar{u}^r\|_{L^n(\Omega)}, \quad \forall k \geq 1.$$

Por tanto, podemos adaptar la Proposición 4.14 y la Observación 6 en [39] utilizando la estimación ABP en [41] y, entonces, deducir que existe un módulo de continuidad ρ^* independiente de k tal que

$$|w_k(x) - w_k(y)| \leq \rho^*(|x - y|), \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{w_k\}$ está uniformemente acotada y es equicontinua. Por el Teorema de Ascoli-Arzelà, sabemos que existe una subsucesión w_{k_j} tal que w_{k_j} converge uniformemente a u en $\bar{\Omega}$. Como la sucesión es monótona, converge toda la sucesión $\{w_k\}$ y no sólo una subsucesión.

1.5.2. El problema lineal con coeficientes variables

Consideramos el problema lineal

$$\begin{cases} -\text{traza}(A(x)D^2 u_\lambda) + \langle b(x), \nabla u_\lambda \rangle = \lambda u_\lambda^q & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.4)$$

con $\lambda > 0$ y $0 < q < 1$. Supondremos que $A(x)$ es una matriz simétrica y uniformemente elíptica, es decir, que existen constantes $0 < \theta < \Theta$ tales que

$$\theta |\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq \Theta |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

y que los coeficientes $A(x), b(x)$ son, por ejemplo, Lipschitz continuos. Entonces, es posible adaptar los argumentos en la prueba del Teorema 1.2.1.

Es importante señalar que las hipótesis no son óptimas (véase por ejemplo la Sección 5.A de [58]); con este ejemplo sólo pretendemos ilustrar las dificultades técnicas que aparecen en la prueba del Principio de Comparación cuando manejamos coeficientes variables, ya que el argumento es esencialmente el mismo. Para superar estas dificultades técnicas utilizaremos la regularidad de los coeficientes.

Teorema 1.5.6. *Sea $0 < q < 1$, $\lambda = 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Consideramos $u, v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ respectivamente una subsolución y una supersolución del problema (1.5.4) con los coeficientes $A(x), b(x)$ bajo las hipótesis mencionadas. Finalmente, supongamos que tanto u como v son estrictamente positivas en Ω , que al menos una de ellas es $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ para $\alpha > 1/2$, y que $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces, $u \leq v$ en $\bar{\Omega}$.*

La prueba es una adaptación de la del Teorema 1.2.1.

Demostración. La prueba es por contradicción. Como $u - v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y $\overline{\Omega}$ es compacto, $u - v$ alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$. Para llegar a una contradicción, supondremos que $\max_{\overline{\Omega}}(u - v) > 0$. Tomamos las funciones \tilde{u} y \tilde{v}_ϵ como en la prueba del Teorema 1.2.1. Argumentando como antes, podemos fijar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y suponer que existe Ω^* con $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$ que contiene todos los puntos de máximo de $\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon$ y

$$-\text{traza}(A(x)D^2\tilde{u}) - \frac{q}{1-q} \frac{\langle A(x)\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{u} \rangle}{\tilde{u}} + \langle b(x), \nabla\tilde{u} \rangle \leq 1 \quad \text{en } \Omega^*,$$

y

$$-\text{traza}(A(x)D^2\tilde{v}_\epsilon) - \frac{q}{1-q} \frac{\langle A(x)\nabla\tilde{v}_\epsilon, \nabla\tilde{v}_\epsilon \rangle}{\tilde{v}_\epsilon} + \langle b(x), \nabla\tilde{v}_\epsilon \rangle \geq (1 + \epsilon) \quad \text{en } \Omega^*,$$

es sentido de viscosidad. Tomaremos $w(x, y) = \tilde{u}(x) - \tilde{v}_\epsilon(y) - \frac{\tau}{2}|x - y|^2$ para cada $\tau > 0$, y sea (x_τ, y_τ) un punto de máximo de w en $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Los argumentos en la prueba del Teorema 1.2.1 muestran que, para τ suficientemente grande, $x_\tau, y_\tau \in \Omega^*$ y $\tilde{u}(x_\tau) > \tilde{v}_\epsilon(y_\tau)$. Además, el Principio del Máximo para funciones semicontinuas (Lema 0.6.20) implica la existencia de dos matrices simétricas X_τ, Y_τ tales que

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{J}^{2,+}\tilde{u}(x_\tau) \quad \text{y} \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{J}^{2,-}\tilde{v}_\epsilon(y_\tau),$$

y

$$-3\tau \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\tau & 0 \\ 0 & -Y_\tau \end{pmatrix} \leq 3\tau \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \quad (1.5.5)$$

Por tanto, tenemos

$$-\text{traza}(A(x_\tau)X_\tau) - \frac{q}{1-q} \frac{\tau^2 \langle A(x_\tau)(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle}{\tilde{u}(x_\tau)} + \tau \langle b(x_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle \leq 1,$$

y

$$-\text{traza}(A(y_\tau)Y_\tau) - \frac{q}{1-q} \frac{\tau^2 \langle A(y_\tau)(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle}{\tilde{v}_\epsilon(y_\tau)} + \tau \langle b(y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle \geq 1 + \epsilon,$$

y, restando la primera ecuación de la segunda, llegamos a

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon &\leq -\text{traza}(A(y_\tau)Y_\tau - A(x_\tau)X_\tau) - \frac{q}{1-q} \left\{ \frac{\tau^2 \langle A(y_\tau)(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle}{\tilde{v}_\epsilon(y_\tau)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^2 \langle A(x_\tau)(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle}{\tilde{u}(x_\tau)} \right\} - \tau \langle b(x_\tau) - b(y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle \\ &\leq -\text{traza}(A(y_\tau)Y_\tau - A(x_\tau)X_\tau) \\ &\quad + \frac{q}{1-q} \frac{\tau^2 \langle (A(x_\tau) - A(y_\tau))(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle}{\tilde{u}(x_\tau)} \\ &\quad - \tau \langle b(x_\tau) - b(y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle, \end{aligned}$$

ya que $\tilde{v}_\epsilon(y_\tau) \leq \tilde{u}(x_\tau)$. Ahora estimaremos cada término en el lado derecho de la expresión anterior separadamente. Seguiremos el Ejemplo 3.6 en [58]. Para el primer término, multiplicamos el lado derecho de la desigualdad (1.5.5) por la siguiente matriz simétrica, no negativa,

$$\begin{pmatrix} A(x_\tau)^{1/2}A(x_\tau)^{1/2} & A(y_\tau)^{1/2}A(x_\tau)^{1/2} \\ A(x_\tau)^{1/2}A(y_\tau)^{1/2} & A(y_\tau)^{1/2}A(y_\tau)^{1/2} \end{pmatrix},$$

donde $A(x)^{1/2}$ está bien definida ya que $A(x)$ es uniformemente elíptica. Tomamos trazas en los dos miembros de la desigualdad y llegamos a

$$-\text{traza}(A(y_\tau)Y_\tau - A(x_\tau)X_\tau) \leq 3\tau \cdot \text{traza} \left[(A(y_\tau)^{1/2} - A(x_\tau)^{1/2})^2 \right].$$

Como la matriz $A(x)$ es Lipschitz continua y verifica $A(x) \geq \theta I$ uniformemente, se tiene que también $A(x)^{1/2}$ es Lipschitz. Entonces,

$$-\text{traza}(A(y_\tau)Y_\tau - A(x_\tau)X_\tau) \leq C\tau |x_\tau - y_\tau|^2.$$

Para el segundo y tercer término, usaremos que $A(\cdot), b(\cdot)$ son Lipschitz; de hecho

$$\tau^2 \langle (A(x_\tau) - A(y_\tau))(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle \leq C\tau^2 |x_\tau - y_\tau|^3,$$

y

$$-\tau \langle b(x_\tau) - b(y_\tau), x_\tau - y_\tau \rangle \leq c\tau |x_\tau - y_\tau|^2.$$

Juntando todas las estimaciones anteriores, llegamos a

$$0 < \epsilon \leq C \cdot (\tau |x_\tau - y_\tau|^2 + \tau^2 |x_\tau - y_\tau|^3). \quad (1.5.6)$$

Falta probar que el lado derecho de (1.5.6) converge a 0 cuando $\tau \rightarrow \infty$. Seguiremos las observaciones en la Sección 5.A de [58]. Por definición de x_τ, y_τ , tenemos

$$\tilde{u}(x) - \tilde{v}_\epsilon(y) - \frac{\tau}{2}|x - y|^2 \leq \tilde{u}(x_\tau) - \tilde{v}_\epsilon(y_\tau) - \frac{\tau}{2}|x_\tau - y_\tau|^2,$$

para todo (x, y) cerca de (x_τ, y_τ) . Como u o v son Hölder continuas, por ejemplo $u \in C^\alpha(\Omega^*)$, tenemos que también $\tilde{u} \in C^\alpha(\Omega^*)$ y entonces, fijando $x = y = y_\tau$, obtenemos

$$\frac{\tau}{2}|x_\tau - y_\tau|^2 \leq \tilde{u}(x_\tau) - \tilde{u}(y_\tau) \leq C|x_\tau - y_\tau|^\alpha.$$

Por tanto

$$\tau |x_\tau - y_\tau|^\sigma \rightarrow 0 \quad \text{as } \tau \rightarrow \infty \quad \forall \sigma > 2 - \alpha.$$

Como $\alpha > 1/2$, el lado derecho de (1.5.6) tiende a 0 cuando $\tau \rightarrow \infty$, que es una contradicción. \square

Observación 1.5.7. Nótese el papel fundamental que juega la expresión (1.5.5) en la estimación final en la prueba anterior.

Para las pruebas de existencia, mencionar que en [26] encontramos el problema de autovalores para estos operadores. Por otra parte, en [78] encontramos la existencia de solución para el problema auxiliar y el Lema de Hopf, elementos con los que se puede probar el análogo del Teorema 1.3.1 en este contexto.

Finalmente, cabe resaltar que conocida una solución, por regularidad elíptica esta es $C^{2,\alpha}$.

1.5.3. El p -laplaciano, $p < \infty$

Para $p > 1$, el p -laplaciano se define como

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = \operatorname{traza}\left(\left(\operatorname{Id} + (p-2) \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2}\right) D^2 u\right) \cdot |\nabla u|^{p-2}.$$

La forma divergencia es útil cuando se estudian problemas variacionales, mientras que la forma desarrollada es más útil cuando se trabaja en el marco de viscosidad.

Es inmediato comprobar las hipótesis (F1) y (F2), ya que el operador es elíptico degenerado y homogéneo de grado $p - 1$.

Es bien conocido que toda solución débil (variacional) continua de este tipo de problemas es de viscosidad (ver Lema 3.2.4). Esto se tiene en general por la teoría de regularidad para el p -Laplaciano, véanse [64] y [118] y, si $p > n$, como una consecuencia inmediata de la estimación de Morrey (Lema 3.7.2).

A continuación presentaremos los Teoremas 1.2.1, 1.3.1 y 1.4.1 en el marco variacional en lugar del marco viscoso, ya que es en el marco variacional como serán utilizados posteriormente.

Dichos resultados son conocidos, véase [33] y las referencias subsiguientes (ver también [1]). Sin embargo, ofrecemos una presentación detallada adaptando la notación y los argumentos y prestando especial atención a la regularidad de $\partial\Omega$ y dependencia en p de las constantes de manera que se adapten mejor a nuestros propósitos en el Capítulo 3.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Se dice que un punto $x_0 \in \partial\Omega$ es *regular* si dada $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, la solución $u \in W_0^{1,p}$ del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{en } \Omega \\ u - f \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

verifica $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = f(x_0)$. Los puntos regulares pueden caracterizarse mediante una versión del criterio de Wiener formulada por Maz'ja [109] en el marco no lineal (véase [76, 94, 95] y también [69, 108]).

Proposición 1.5.8 ([95]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $p \in (1, n]$. Un punto $x_0 \in \partial\Omega$ es regular si y sólo si*

$$\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_p(B_t(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega), B_{2t}(x_0))}{\operatorname{cap}_p(B_t(x_0), B_{2t}(x_0))} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} = \infty, \quad (1.5.7)$$

donde $\operatorname{cap}_p(E, \Omega)$ es la p -capacidad de E con respecto a Ω , es decir:

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}_p(E, \Omega) &= \\ &= \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \geq 1 \text{ en un entorno abierto de } E \right\}. \end{aligned}$$

Observación 1.5.9. 1. Observamos que, para $p > n$ los puntos tienen p -capacidad positiva (ver [82, Capítulos 6 y 9]), por tanto, la integral de Wiener (1.5.7) diverge y deducimos que todos los puntos de $\partial\Omega$ son regulares. Por tanto, para $p > n$ todos los puntos de $\partial\Omega$ son regulares dado que toda función en $W_0^{1,p}(\Omega)$

puede considerarse continua en $\overline{\Omega}$ (ver Lema 3.7.2) y 0 en el borde en sentido clásico.

2. Una observación interesante que se deduce del criterio de Wiener es que si x_0 es p_0 -regular, entonces también es p -regular para todo $p \geq p_0$ (ver [102, Capítulo 6]).

El problema auxiliar (1.1.4). Hipótesis (F3)

En [92] se estudia el problema auxiliar (1.1.4) para el p -Laplaciano en relación con problemas de torsión. En particular, se prueba el siguiente resultado de existencia en dominios acotados generales.

Proposición 1.5.10 ([92]). *Sea Ω un dominio acotado y $1 < p < \infty$. Entonces el problema auxiliar*

$$\begin{cases} -\Delta_p v = 1 & \text{en } \Omega \\ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \quad (1.5.8)$$

tiene una única solución $v_{1,p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Además, $\lim_{p \rightarrow \infty} v_{1,p} = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ uniformemente en Ω .

En el resultado anterior no se supone regularidad en $\partial\Omega$. Sin embargo, en general el dato de borde no se verifica en sentido clásico, es decir, dado $x_0 \in \partial\Omega$ no se tiene necesariamente que $\lim_{x \rightarrow x_0} v_{1,p}(x) = 0$. No obstante, tal y como se señala en [94], las consideraciones sobre dominios regulares ya explicadas se aplican igualmente a este caso. Es decir, diremos que un dominio Ω es regular si para todo $x_0 \in \partial\Omega$ tenemos $\lim_{x \rightarrow x_0} v_{1,p}(x) = 0$. Además, los puntos regulares de la frontera quedan caracterizados por el criterio de tipo Wiener (1.5.7).

Proposición 1.5.11 ([94]). *Sea $1 < p < \infty$ y consideramos $x_0 \in \partial\Omega$. Entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} v_{1,p}(x) = 0$ si y sólo si se verifica (1.5.7).*

Nótese que para $p > n$ la frontera de cualquier dominio acotado es siempre regular, como ya se ha mencionado.

El problema de autovalores. Hipótesis (F4)

En [99] (ver también [100]) se demuestra que el primer autovalor del p -Laplaciano es simple (es decir, que la autofunción es única salvo multiplicación por constantes) en un dominio acotado Ω . Otros resultados previos requieren $\partial\Omega$ con regularidad \mathcal{C}^2 , véase por ejemplo [8, 74, 111] y las referencias en [99].

Asimismo se prueba en [99] que para un dominio acotado general sólo la primera autofunción es positiva y que el primer autovalor es aislado.

Recordemos que en este caso, el primer autovalor $\lambda_1(p; \Omega)$ queda caracterizado en términos del cociente de Rayleigh:

$$\lambda_1(p; \Omega) = \inf_{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx}{\int_{\Omega} |\phi|^p dx}.$$

Proposición 1.5.12 ([99]). *Sea Ω un dominio acotado y $1 < p < \infty$. Entonces, existe una solución $\phi_{1,p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no trivial de*

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{1,p} = \lambda_1(p; \Omega) |\phi_{1,p}|^{p-2} \phi_{1,p} & \text{en } \Omega \\ \phi_{1,p} > 0 & \text{en } \Omega \\ \phi_{1,p} \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Además, $\lambda_1(p; \Omega)$ es simple (es decir, la autofunción es única salvo multiplicación por constantes) y aislado (no existen otros autovalores infinitamente próximos a $\lambda_1(p; \Omega)$).

Aquí son también pertinentes los comentarios a la Proposición 1.5.10, ya que, aunque en la Proposición 1.5.12 se consideran dominios acotados generales, para que se verifique el dato de borde en sentido clásico necesitaremos $\partial\Omega$ regular. En [94] se demuestra el siguiente resultado análogo a la Proposición 1.5.11.

Proposición 1.5.13 ([94]). *Sea $1 < p < \infty$ y consideramos $x_0 \in \partial\Omega$. Entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi_{1,p}(x) = 0$ si y sólo si se verifica (1.5.7).*

Como antes, si $p > n$ la frontera de cualquier dominio acotado es siempre regular.

El problema cóncavo

Tomamos $0 < q < p - 1$ y $\lambda > 0$, y consideramos el problema cóncavo:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\lambda = \lambda u_\lambda^q, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (1.5.9)$$

La unicidad de solución positiva para el problema (1.5.9) es un resultado ya conocido, véase por ejemplo [1], utilizando argumentos variacionales. En el Teorema 1.2.1 aportamos una prueba alternativa de este hecho. Como ya se ha mencionado, toda solución débil continua es de viscosidad (ver [28, 90] y Proposición 3.2.4); por tanto, el Teorema 1.2.1 implica unicidad de soluciones de (1.5.9) en $W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Cuando $p > n$ esto es una consecuencia inmediata del Lema 3.7.2.

En la Sección 3.5 consideraremos el paso al límite $p \rightarrow \infty$ del problema (1.5.9), por tanto, por conveniencia para la exposición, estableceremos los resultados en el rango $p > n$ y con Ω acotado (que es regular en este rango de p). Sin embargo, los argumentos pueden adaptarse fácilmente al caso $p \in (1, n]$.

El Teorema 1.3.1 queda como sigue.

Proposición 1.5.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, $p > n$ y $0 < q < p - 1$. Entonces, para cada $\lambda > 0$, el problema (1.5.9) tiene una única solución $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Además*

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{(p-1)-q}} u_1(x),$$

donde u_1 es la solución del problema con $\lambda = 1$.

Para la prueba, construimos una supersolución reescalando la solución de (1.5.8) (ver Lema 1.3.3) y una subsolución mediante un reescale adecuado de una autofunción positiva (ver Proposición 1.5.12 y Observación 1.3.6). Entonces podemos concluir como en la prueba del Teorema 1.3.1.

Construcción de la rama de soluciones minimales del problema cóncavo-convexo

Tomamos $0 < q < p - 1 < r$ y $\lambda > 0$, y el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\lambda = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (1.5.10)$$

A continuación, mostramos la construcción de la rama de soluciones minimales de (1.5.10) en el caso $p > n$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, ya que es esta la manera en que se utilizarán en el Capítulo 3. Como ya se ha mencionado, estos resultados son conocidos (ver [33], donde se hace $1 < p < \infty$ con $\partial\Omega$ suave). Aquí además, damos expresiones explícitas de las constantes en términos de p , un hecho que será relevante en el Capítulo 3.

Proposición 1.5.15 (Existencia de soluciones para λ pequeño). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $p > n$. Entonces, el problema (1.5.10) tiene al menos una solución no trivial $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para cada $\lambda \in (0, \lambda_{0,p}]$ con*

$$\lambda_{0,p} = (\|v_{1,p}\|_\infty^{1-p})^{\frac{r-q}{r-(p-1)}} (r-(p-1)) \left(\frac{((p-1)-q)^{(p-1)-q}}{(r-q)^{r-q}} \right)^{\frac{1}{r-(p-1)}}, \quad (1.5.11)$$

donde $v_{1,p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es la solución del problema auxiliar (1.5.8).

Para la prueba, seguimos la construcción de sub- y supersolución y el método de iteración como en la Sección 1.4.

Lema 1.5.16. *Sean Ω un dominio acotado, $p > n$ y $\lambda_{0,p}$ como en la Proposición 1.5.15. Consideramos $v_{1,p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como en la Proposición 1.5.10. Entonces,*

$$\bar{u}_\lambda(x) = T_p(\lambda) \cdot v_{1,p}(x)$$

es una supersolución débil de (1.5.10) para cada $\lambda \in (0, \lambda_{0,p}]$, donde

$$T_p(\lambda) = \|v_{1,p}\|_\infty^{-1} \left(\frac{(p-1)-q}{r-(p-1)} \right)^{\frac{1}{r-q}} \lambda^{\frac{1}{r-q}}.$$

La prueba se basa en la homogeneidad del operador y sigue la del Lema 1.4.3. A continuación construimos la subsolución.

Lema 1.5.17. *Sean Ω un dominio acotado y $p > n$. Entonces, para cada $\lambda > 0$, la función $\underline{u}_\lambda = w_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solución de (1.5.9) es una subsolución débil de (1.5.10). Además, se tiene que $\underline{u}_\lambda \leq \bar{u}_\lambda$ in Ω .*

Demostración. Obviamente, $\underline{u}_\lambda^q > 0$ implica $-\Delta_p \underline{u}_\lambda = \lambda \underline{u}_\lambda^q < \lambda \underline{u}_\lambda^q + \underline{u}_\lambda^r$ in Ω . La segunda parte del enunciado se obtiene por comparación en el problema cóncavo. \square

Una vez construidas una sub- y una supersolución ordenadas en el borde, \underline{u}_λ y \bar{u}_λ , terminamos la prueba del Teorema 1.5.15 utilizando el método de iteración como en [33].

Proposición 1.5.18 (No existencia para λ grande). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $p > n$. Entonces, el problema (1.5.10) no tiene solución no trivial en $W_0^{1,p}(\Omega)$ cuando $\lambda > \hat{\lambda}_p$, con*

$$\hat{\lambda}_p = \lambda_1(p; \Omega)^{\frac{r-q}{r-(p-1)}} (r - (p-1)) \left(\frac{((p-1) - q)^{(p-1)-q}}{(r-q)^{r-q}} \right)^{\frac{1}{r-(p-1)}}. \quad (1.5.12)$$

Demostración. Sea $\mu = \lambda_1(p; \Omega) + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$. Para llegar a una contradicción, supongamos que el problema (1.5.10) tiene una solución no trivial $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algún

$$\lambda > \mu^{\frac{r-q}{r-(p-1)}} (r - (p-1)) \left(\frac{((p-1) - q)^{(p-1)-q}}{(r-q)^{r-q}} \right)^{\frac{1}{r-(p-1)}}.$$

Vamos a ver que entonces se tiene

$$-\Delta_p u_\lambda = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r > \mu u_\lambda^{p-1} \quad \text{en } \Omega, \quad (1.5.13)$$

en sentido débil. De hecho, para tener la desigualdad anterior basta ver que

$$\min_{t>0} \Phi_\lambda(t) > \mu \quad \text{donde} \quad \Phi_\lambda(t) = \lambda t^{q-(p-1)} + t^{r-(p-1)}.$$

Es elemental comprobar que

$$\frac{d}{dt} \Phi_\lambda(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_\lambda = \left(\frac{\lambda((p-1) - q)}{(r - (p-1))} \right)^{\frac{1}{r-q}},$$

que es un mínimo. Como $\Phi_\lambda(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$ y cuando $t \rightarrow \infty$, es un mínimo global. Entonces,

$$\min_{t>0} \Phi_\lambda(t) = \Phi_\lambda(t_\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{r-(p-1)}{r-q}} (r-q)}{((p-1) - q)^{\frac{(p-1)-q}{r-q}} (r - (p-1))^{\frac{r-(p-1)}{r-q}}} > \mu$$

por nuestra elección de λ .

Como consecuencia de la regularidad $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de las soluciones (ver [64] y [118]) y el hecho de que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se tiene, por el Principio del Máximo fuerte que $\partial u / \partial n < 0$ en $\partial\Omega$. Por tanto, podemos encontrar una constante positiva $\delta > 0$ suficientemente pequeña tal que

$$\psi = \delta^{1/(p-1)} \varphi_1 \leq u_\lambda, \quad \text{en } \Omega,$$

donde φ_1 es una primera autofunción del p -Laplaciano. De hecho,

$$-\Delta_p \psi < \mu \psi^{p-1} \quad \text{en } \Omega. \quad (1.5.14)$$

Por construcción, tenemos $0 < \psi \leq u_\lambda$, donde ψ y u_λ satisfacen (1.5.13) y (1.5.14). Por tanto, podemos aplicar el método de iteración y obtener v , que verifica $\psi \leq v \leq u_\lambda$, una autofunción positiva asociada a μ , lo cual es imposible ya que $\lambda_1(p, \Omega)$ es aislado (ver [8]).

Como este argumento se puede aplicar para todo $\epsilon > 0$, concluimos que no existe solución positiva de (1.4.1) para $\lambda > \hat{\lambda}$. \square

Corolario 1.5.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $p > n$. Existe $\lambda_{\max,p} \in \mathbb{R}^+$ con $0 < \lambda_{\max,p} < \infty$ tal que (1.5.10) tiene una solución débil positiva para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\max,p})$.

Demostración. Definamos

$$\lambda_{\max,p} = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ : (1.5.10) \text{ tiene solución no trivial} \}.$$

El Teorema 1.5.15 implica $\lambda_{\max,p} > 0$, mientras que el Teorema 1.5.18 nos dice $\lambda_{\max,p} < \infty$. De hecho, existen λ_M cerca de $\lambda_{\max,p}$ y u_M , tales que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_M = \lambda_M u_M^q + u_M^r & \text{en } \Omega, \\ u_M > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_M = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Fijado $0 < \lambda < \lambda_M$, sea \underline{u} la única solución del problema cóncavo

$$\begin{cases} -\Delta_p \underline{u} = \lambda \underline{u}^q & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} > 0 & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.15)$$

Obviamente, u_M es una supersolución de (1.5.15) y, por comparación (ver [1]) $\underline{u} \leq u_M$. Como,

$$-\Delta_p \underline{u} = \lambda \underline{u}^q < \lambda \underline{u}^q + \underline{u}^r,$$

y

$$-\Delta_p u_M = \lambda_M u_M^q + u_M^r > \lambda u_M^q + u_M^r,$$

obtenemos que existe $u_\lambda > 0$ por iteración. \square

Tenemos la siguiente consecuencia que será relevante en el Capítulo 3.

Corolario 1.5.20. $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{\max,p}^{1/p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{0,p}^{1/p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_p^{1/p} = (\| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_\infty^{-1})^{\frac{R-Q}{R-1}}$.

Demostración. La Proposición 1.5.10 implica $\lim_{p \rightarrow \infty} \|v_{1,p}\|_\infty = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty$. Por otra parte, se sabe que $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_1(p; \Omega)^{1/p} = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^{-1}$ (ver [90]). Claramente se tiene $\lambda_{0,p} \leq \lambda_{\max,p} \leq \hat{\lambda}_p$. De las expresiones explícitas de $\lambda_{0,p}$ y $\hat{\lambda}_p$ se obtiene el resultado. \square

1.5.4. El infinito laplaciano 3-homogéneo

Considérese el operador infinito laplaciano,

$$\Delta_\infty u = \langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} u_{x_i} u_{x_j}.$$

Claramente, es un operador homogéneo de grado 3 y elíptico degenerado.

Los métodos anteriormente explicados pueden aplicarse para producir los siguientes resultados de existencia para el problema cóncavo y cóncavo-convexo.

Teorema 1.5.21. *Sea $0 < q < 3$ y Ω un dominio acotado tal que $\partial\Omega$ verifica una condición de esfera interior. Entonces, para cada $\lambda > 0$ el problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\infty u = \lambda u_\lambda^q, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.16)$$

tiene una única solución positiva dada por $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{3-q}} \cdot u_1(x)$ con u_1 la solución correspondiente a $\lambda = 1$.

El resultado se deduce del Teorema 1.3.1, basta comprobar las hipótesis (F3) y (F5).

Teorema 1.5.22. *Sean $0 < q < 3 < r$ y Ω un dominio acotado tal que $\partial\Omega$ verifica una condición de esfera interior. Entonces, existe al menos una solución no trivial de*

$$\begin{cases} -\Delta_\infty u_\lambda = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.17)$$

para λ suficientemente pequeño.

En este caso, el resultado se sigue del Teorema 1.4.1; hay que comprobar que se verifican las hipótesis (F3) y (F6).

Observación 1.5.23. Las ecuaciones (1.5.16) y (1.5.17) no se obtienen como límites cuando $p \rightarrow \infty$ de p -Laplacianos. Los problemas cóncavo y cóncavo-convexo para el ∞ -Laplaciano obtenidos como límites, se estudiarán en el Capítulo 3.

Hipótesis (F3): Estudio del problema auxiliar (1.1.4)

Para comprobar la hipótesis (F3), necesitaremos probar la existencia de solución para el problema auxiliar (1.1.4). En [106] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.5.24 ([106, Teorema 2]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $f > 0$ en Ω . Entonces existe una única $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solución (viscosa) del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\infty u(x) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.18)$$

Observación 1.5.25. En realidad, los resultados en [106] se prueban bajo la hipótesis $\inf_\Omega f > 0$, más restrictiva. Posteriormente en [107], los propios autores han advertido que esta condición puede relajarse a $f > 0$ en Ω . Es un hecho notable, que si esta última condición falla el problema 1.5.18 no tiene unicidad en general (ver el contraejemplo en el Apéndice de [106]). Estos hechos son consistentes con nuestro Teorema 1.2.5.

Como consecuencia se tiene la existencia de soluciones del problema auxiliar:

Proposición 1.5.26. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Entonces existe una única solución del problema auxiliar*

$$\begin{cases} -\Delta_\infty v_1 = 1 & \text{en } \Omega, \\ v_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.19)$$

Hipótesis (F5): Lema de Hopf

Enunciamos a continuación el Lema de Hopf, cuya prueba puede encontrarse en [27]. Con esto queda comprobada la hipótesis (F5).

Lema 1.5.27 ([27, Observación 4]). *Sea Ω un dominio acotado y $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ una solución de viscosidad de*

$$-\Delta_\infty u \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Sea además $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

- i) $u(x_0) < u(x)$ para todo $x \in \Omega$.*
- ii) $\partial\Omega$ satisface una condición de esfera interior en x_0 , es decir, existe una bola $B_r(z) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial B_r$.*

Entonces, para toda dirección no tangencial ξ que apunte hacia dentro del dominio Ω se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t\xi) - u(x_0)}{t} > 0.$$

Hipótesis (F6): Convergencia

En el problema cóncavo-convexo (1.5.17), construimos una sub- y supersolución $\underline{u}_\lambda, \overline{u}_\lambda$ siguiendo los Lemas 1.4.3 y 1.4.5. Siguiendo el procedimiento iterativo descrito, obtenemos una sucesión

$$\underline{u}_\lambda \equiv w_0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq \dots \leq \overline{u}_\lambda \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\begin{cases} -\Delta_\infty w_k = \lambda w_{k-1}^q + w_{k-1}^r & \text{en } \Omega, \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

para $k \geq 1$. Nótese que, dado que $-\Delta_\infty w_k > 0$ en Ω , se tiene (ver [103] y [104]) que

$$|\nabla w_k(x)| \leq \frac{w_k(x)}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \leq \frac{\overline{u}_\lambda(x)}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

para todo $k > 1$. De ahí, que tanto $\|w_k\|_\infty$ como $\|\nabla w_k\|_\infty$ están uniformemente acotados en subconjuntos compactos de Ω . Dado que $w_k = 0$ en $\partial\Omega$ para todo k , por el Teorema de compacidad de Ascoli-Arzelà y la monotonía de la sucesión $\{w_k\}$, toda la sucesión converge uniformemente en Ω a algún $u_\lambda \in \mathcal{C}(\Omega)$ que es una solución de (1.5.17) en el sentido de viscosidad.

1.5.5. El infinito laplaciano 1-homogéneo

En el apartado anterior, hemos considerado el infinito Laplaciano con grado de homogeneidad 3. También puede considerarse la siguiente versión normalizada

$$\tilde{\Delta}_\infty u = \left\langle D^2 u \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle.$$

Este operador surge de manera natural en ecuaciones obtenidas como límite de p -laplacianos; basta adaptar los argumentos en [90] y [52] para obtener un ejemplo de este hecho. Además, al estudiar ecuaciones de evolución gobernadas

por el infinito laplaciano, es natural considerar su versión normalizada (ver [88] y las referencias allí descritas) en lugar de la versión 3-homogénea (ver [60]), ya que entonces la homogeneidad del infinito laplaciano es la misma que la de la derivada temporal.

El problema de Poisson para el infinito laplaciano normalizado puede interpretarse en términos de juegos de *tira-y-afloja* (*Tug-of-War games*) tal y como se muestra en [113]. En [107] también se estudia este problema desde otro punto de vista más convencional.

Finalmente, en [87], se estudia el problema de autovalores para este operador. Nuestro objetivo es estudiar los problemas cóncavo y cóncavo-convexo:

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty u_\lambda = \lambda u_\lambda^q & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.20)$$

y

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty u_\lambda = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.21)$$

con $\lambda > 0$ y $0 < q < 1 < r$.

Dado que el operador es singular cuando $\nabla u = 0$, es necesario precisar la definición de solución (respectivamente sub- y supersolución) de viscosidad en este contexto.

Dada una matriz $A \in \mathcal{S}^n$, denotaremos por $M(A)$ y $m(A)$ el mayor y menor autovalor respectivamente, es decir,

$$M(A) = \max_{|\xi|=1} \langle A\xi, \xi \rangle, \quad m(A) = \min_{|\xi|=1} \langle A\xi, \xi \rangle.$$

Se tiene la siguiente definición:

Definición 1.5.28. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Una función continua $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de (1.5.20) en Ω si, para todo $\hat{x} \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $(v - \phi)(x) < (v - \phi)(\hat{x}) = 0$ en un entorno de \hat{x} se tiene

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty \phi(\hat{x}) \leq \lambda \phi^q(\hat{x}), & \text{si } \nabla \phi(\hat{x}) \neq 0, \\ -M(D^2 \phi(\hat{x})) \leq \lambda \phi^q(\hat{x}), & \text{si } \nabla \phi(\hat{x}) = 0. \end{cases}$$

Una función continua $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una supersolución de viscosidad de (1.5.20) en Ω si, para todo $\hat{x} \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $(w - \phi)(x) > (w - \phi)(\hat{x}) = 0$ en un entorno de \hat{x} , entonces

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty \phi(\hat{x}) \geq \lambda \phi^q(\hat{x}), & \text{si } \nabla \phi(\hat{x}) \neq 0, \\ -m(D^2 \phi(\hat{x})) \geq \lambda \phi^q(\hat{x}), & \text{si } \nabla \phi(\hat{x}) = 0. \end{cases}$$

Finalmente, una función continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad de (1.5.20) si es a la vez una subsolución y una supersolución de viscosidad en Ω .

Nótese que esta definición es ligeramente diferente de las dadas en [107, 113]; sin embargo, es fácil comprobar que estas definiciones son equivalentes.

Si u satisface $-\tilde{\Delta}_\infty u \geq 0$ en Ω en el sentido de viscosidad, entonces $-\Delta_\infty u \geq 0$ en Ω . Por tanto, el Lema de Hopf utilizado en el apartado anterior también es válido para el operador $\tilde{\Delta}_\infty$ (ver [27], [103] y [104]).

Respecto a la existencia de solución para el problema auxiliar, los resultados en [113] y [107] implican el siguiente resultado.

Proposición 1.5.29 ([113, 107]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Entonces, existe una única v_1 solución de viscosidad de*

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty v_1 = 1 & \text{en } \Omega, \\ v_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En lo que concierne a la existencia de autovalores, en [87] se prueba el siguiente resultado

Proposición 1.5.30 ([87]). *Sea Ω un dominio acotado y definamos*

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda > 0 \mid \exists v > 0 \text{ en } \bar{\Omega} \text{ tal que } -\tilde{\Delta}_\infty v \geq \lambda v\}. \quad (1.5.22)$$

Entonces λ_1 es un autovalor que tiene asociada una autofunción positiva, es decir, una solución positiva del problema de autovalores

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty w = \lambda w & \text{en } \Omega, \\ w > 0 & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.23)$$

Además el problema (1.5.23) no tiene solución no trivial para $\lambda < \lambda_1$.

Observación 1.5.31. Obsérvese la diferencia entre las definiciones (1.1.6) y (1.5.22). Mientras que de (1.1.6) se deduce trivialmente que no hay autovalores asociados a autofunciones positivas arbitrariamente cercanos a λ_1 no sucede así con (1.5.22). Por tanto, la hipótesis (F4) no se deduce de la Proposición 1.5.30. Por lo que nosotros sabemos, probar que λ_1 definido por (1.5.22) es aislado (y por tanto que se verifica la hipótesis (F4)) es un problema abierto.

Siguiendo las ideas anteriormente expuestas, y completando los detalles como en el caso del infinito laplaciano 3-homogéneo, obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.5.32. *Sea $0 < q < 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Entonces, para cada $\lambda > 0$ el problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\infty u = \lambda u_\lambda^q, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una única solución positiva dada por $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{1-q}} \cdot u_1(x)$ con u_1 la solución correspondiente a $\lambda = 1$.

El resultado se deduce del Teorema 1.3.1 ya que la Proposición 1.5.29 implica las hipótesis (F3) mientras que la Proposición 1.5.30 nos permite construir una subsolución (ver Observación 1.3.6) con hipótesis sobre Ω más débiles que si utilizáramos el Lema de Hopf.

Como se ha señalado en la Observación 1.5.31 no se sabe si el autovalor definido en (1.5.22) es aislado ni, por tanto, si se verifica (F4). Tenemos el siguiente resultado parcial de existencia para el problema cóncavo-convexo.

Teorema 1.5.33. Sean $0 < q < 1 < r$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Entonces, existe al menos una solución no trivial de

$$\begin{cases} -\tilde{\Delta}_\infty u_\lambda = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

para λ suficientemente pequeño.

En este caso, el resultado se sigue del Teorema 1.4.1; utilizando la Proposición 1.5.29 (que implica las hipótesis (F3)) y el Teorema 1.5.32 (que permite construir una subsucesión). Para comprobar (F6) actuamos como en el caso del infinito laplaciano 3-homogéneo.

1.5.6. Ecuaciones de tipo Monge-Ampère

Los métodos expuestos también pueden aplicarse a ecuaciones de tipo Monge-Ampère. Es bien sabido (ver por ejemplo [39] y [58]) que el operador de Monge-Ampère

$$\begin{aligned} F : \mathcal{S}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\rightarrow \det(M), \end{aligned}$$

es elíptico sólo en el cono de matrices definidas positivas. Por tanto, es natural buscar soluciones estrictamente convexas. Nótese que $\partial\Omega$ es el conjunto de nivel cero de la función u , estrictamente convexa; por tanto, es natural requerir que Ω sea estrictamente convexo. Además, supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, es un dominio acotado con frontera lisa.

Además, será necesario adaptar la definición de solución de viscosidad (ver [42, 81] y también [43, 44, 45, 120, 121]).

Definición 1.5.34. Sea $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ una función convexa y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $f \geq 0$. La función u es una subsolución (supersolución) de viscosidad de la ecuación

$$\det(D^2 u) = f \quad \text{en } \Omega, \quad (1.5.24)$$

si para toda función convexa $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $u - \phi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$ (respectivamente mínimo local) se tiene

$$\det(D^2 \phi(x_0)) \geq (\leq) f(x_0).$$

Observación 1.5.35. Nótese que si $u - \phi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$, necesariamente $D^2 \phi(x_0) \geq 0$. Para comprobarlo, hacemos un desarrollo de Taylor de ϕ en un entorno de x_0 :

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \phi(x) + u(x_0) - \phi(x_0) \\ &= u(x_0) + \langle \nabla \phi(x_0), (x - x_0) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle D^2 \phi(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|^2). \end{aligned}$$

Dado que u es convexa, existe p tal que $u(x) \geq u(x_0) + \langle p, (x - x_0) \rangle$ para todo $x \in \Omega$. Se deduce

$$0 \leq \langle (\nabla \phi(x_0) - p), (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 \phi(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|^2).$$

Podemos escribir $x = x_0 + \epsilon w$ con $|w| = 1$, $\epsilon > 0$ pequeño. Entonces, dividiendo la expresión anterior por ϵ y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos

$$0 \leq \langle (\nabla\phi(x_0) - p), w \rangle \quad \forall w \text{ tal que } |w| = 1,$$

de donde se deduce $p = \nabla\phi(x_0)$ y por tanto $\langle D^2\phi(x_0)w, w \rangle \geq 0$ para todo w con $|w| = 1$, es decir $D^2\phi(x_0) \geq 0$.

Observación 1.5.36. En la bibliografía hay otros conceptos de solución generalizada de la ecuación (1.5.24). El concepto de *solución débil admisible* (ver [121]) es equivalente al concepto de *solución generalizada en el sentido de Aleksandrov* (ver [81, Sección 1.2] y también [3, 15, 42, 112]). Cuando $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, una función convexa $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solución de (1.5.24) en el sentido de Aleksandrov (o débil admisible) es solución de viscosidad; el recíproco es cierto si $f > 0$ en $\overline{\Omega}$ (véanse [42, Sección 2] y [81, Proposiciones 1.3.4 y 1.7.1]).

Consideramos $0 < q < n < r$ y $\lambda > 0$. En este caso el problema cóncavo es

$$\begin{cases} \det(D^2u) = \lambda |u|^q & \text{en } \Omega, \\ u & \text{convexa en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.25)$$

y en el caso cóncavo-convexo:

$$\begin{cases} \det(D^2u) = \lambda |u|^q + |u|^r & \text{en } \Omega, \\ u & \text{convexa en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.26)$$

Como estamos buscando soluciones negativas, deberemos adaptar los argumentos en la prueba del Teorema 1.2.1 que, en este contexto queda como sigue.

Teorema 1.5.37. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado estrictamente convexo. Consideramos una subsolución u y una supersolución v en sentido de viscosidad del problema*

$$\det(D^2w) = \lambda |w|^q \quad \text{en } \Omega, \quad (1.5.27)$$

donde $0 < q < n$. Supongamos que tanto u como v son convexas, estrictamente negativas en Ω , continuas hasta la frontera y satisfacen $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces, $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

Para la prueba, como antes, tomamos $\lambda = 1$ por homogeneidad. Debemos reemplazar (1.2.11) por

$$\tilde{u}(x) = \frac{-1}{1 - \frac{q}{n}} (-u(x))^{1 - \frac{q}{n}} \quad \text{y} \quad \tilde{v}(x) = \frac{-1}{1 - \frac{q}{n}} (-v(x))^{1 - \frac{q}{n}},$$

y (1.2.12) por

$$\tilde{v}_\epsilon(x) = (1 - \epsilon) \cdot (\tilde{v}(x) + \epsilon).$$

Entonces, como $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ en $\partial\Omega$, se tiene

$$\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon = \tilde{u} - (1 - \epsilon)\tilde{v} - (1 - \epsilon)\epsilon < 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Continuando con los argumentos en la prueba del Teorema 1.2.1, podemos suponer que existe Ω^* tal que $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$ contiene todos los puntos de máximo de $\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon$ para ϵ suficientemente pequeño. Las funciones $\tilde{u}, \tilde{v}_\epsilon$ satisfacen

$$\det \left(D^2 \tilde{u} + \frac{q}{n-q} \frac{\nabla \tilde{u} \otimes \nabla \tilde{u}}{\tilde{u}} \right) \geq 1 \quad \text{en } \Omega^*$$

y

$$\det \left(D^2 \tilde{v}_\epsilon + \frac{q}{n-q} \frac{\nabla \tilde{v}_\epsilon \otimes \nabla \tilde{v}_\epsilon}{\tilde{v}_\epsilon} \right) \leq (1-\epsilon)^n \quad \text{en } \Omega^*,$$

y la prueba se completa como en el Teorema 1.2.1.

El Principio de Comparación en el Teorema 1.2.5 puede adaptarse también a este marco de una manera similar:

Proposición 1.5.38. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y estrictamente convexo. Considérese una función $f \in C(\overline{\Omega})$ con $f > 0$ en Ω . Sean u, v convexas, respectivamente una sub- y supersolución de viscosidad de*

$$\det(D^2 w) = f(x), \quad \text{en } \Omega.$$

Supongamos $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

En lo que concierne a la existencia de soluciones de (1.5.25) y (1.5.26), se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.5.39. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, estrictamente convexo y con frontera lisa. Se considera $0 < q < n < r$ y $\lambda > 0$. Entonces,*

1. *Existe una única solución de viscosidad (convexa) del problema (1.5.25) para cada $\lambda > 0$ que satisface*

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{1}{n-q}} u_1(x),$$

donde u_1 es la solución con $\lambda = 1$.

2. *Existe $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que, existe al menos una solución de viscosidad (convexa) no trivial de (1.5.26) para cada $\lambda < \lambda_{\text{máx}}$, y no existe ninguna solución no trivial para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$.*

Aunque este resultado ya es conocido (véase por ejemplo [84] donde se da una prueba basada en el grado de Leray-Schauder) nuestra prueba sigue un método diferente y constructivo.

Para la prueba del Teorema, debemos adaptar el método iterativo anteriormente descrito. En primer lugar, veamos la existencia de soluciones para el problema auxiliar.

Teorema 1.5.40 ([47, Teorema 1.1]). *El problema auxiliar*

$$\begin{cases} \det(D^2 v) = 1 & \text{en } \Omega, \\ v \text{ convexa} & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

tiene una única solución estrictamente convexa $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. De hecho, $v < 0$ en $\overline{\Omega}$ por la convexidad estricta.

Se tiene el siguiente resultado para el problema de autovalores, estudiado por P. L. Lions en [105]

Teorema 1.5.41 ([105, Teorema 1]). *Existe un número $\lambda_1 > 0$ tal que el problema*

$$\begin{cases} \det(D^2\psi_1) = \lambda_1(-\psi_1)^n & \text{en } \Omega, \\ \psi_1 \text{ convexa en } \overline{\Omega}, \\ \psi_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

tiene una solución $\psi_1 \in C^{1,1}(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ con $\psi_1 < 0$ en Ω . Además, si $(\mu, \psi) \in (0, \infty) \times C^{1,1}(\overline{\Omega})$ verifica

$$\begin{cases} \det(D^2\psi) = \mu(-\psi)^n & \text{c.t. } x \in \Omega, \\ \psi \text{ convexa en } \overline{\Omega}, \\ \psi = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \psi \neq 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

entonces, necesariamente, $\mu = \lambda_1$ y $\psi = t\psi_1$ para algún $t > 0$.

Estudio del problema cóncavo

Para probar que existe una solución del problema cóncavo (1.5.25), construiremos una subsolución y una supersolución y procederemos por iteración.

En primer lugar, construimos la subsolución siguiendo la construcción en el Lema 1.3.3.

Lema 1.5.42. $\underline{u}(x) = \|v\|_\infty^{\frac{q}{n-q}} \cdot v(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ es una subsolución clásica de (1.5.25) con $\lambda = 1$.

A continuación se construye la supersolución siguiendo la Observación 1.3.6.

Lema 1.5.43. $\overline{u}(x) = t \cdot \psi_1(x) \in C^{1,1}(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ con $t \leq \lambda_1^{\frac{-1}{n-q}}$ es una supersolución clásica de (1.5.25) con $\lambda = 1$.

Observación 1.5.44. Por comparación (Teorema 1.5.37) se tiene $\underline{u} \leq \overline{u} < 0$.

Para concluir, seguiremos un método de iteración como en la prueba del Teorema 1.4.2. Para ello, tomemos w_1 , la solución de

$$\begin{cases} \det(D^2w_1) = |\underline{u}|^q & \text{en } \Omega \\ w_1 \text{ convexa en } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.28)$$

Aplicando el Teorema 1.1 en [121] obtenemos que existe una única solución débil admisible $w_1 \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ (ver Observación 1.5.36). En particular, w_1 es una solución de viscosidad de (1.5.28) y, por comparación (Proposición 1.5.38),

$$\underline{u} \leq w_1 \leq \overline{u} \quad \text{en } \Omega.$$

A continuación, consideremos

$$\begin{cases} \det(D^2w_2) = |w_1|^q & \text{en } \Omega, \\ w_2 \text{ convexa en } \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Otra vez, el Teorema 1.1 en [121] implica que existe una única solución débil admisible $w_2 \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Como antes, por comparación,

$$\underline{u} \leq w_1 \leq w_2 \leq \overline{u} \quad \text{en } \Omega.$$

Iterando este procedimiento, obtenemos

$$\begin{cases} \det(D^2 w_k) = |w_{k-1}|^q & \text{en } \Omega, \\ w_k \text{ convexa en } \Omega, \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.29)$$

Cada $w_k \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, es la única solución débil admisible del problema (1.5.29) y además

$$\underline{u} \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq \overline{u} \quad \text{en } \Omega.$$

La estimación Hölder local en el Teorema 4.1 en [121] nos da la compacidad relativa necesaria. El Teorema de Ascoli-Arzelà y la monotonía de la sucesión, nos dan la convergencia uniforme de la sucesión a alguna $u \in C(\Omega)$. Como \underline{u} , \overline{u} actúan como barreras en el borde, tenemos además $u = 0$ en $\partial\Omega$.

Por último, utilizando las estimaciones locales podemos pasar al límite en sentido de viscosidad en (1.5.29) y obtener

$$\begin{cases} \det(D^2 u_1) = |u_1|^q & \text{en } \Omega, \\ u_1 \text{ convexa en } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Estudio del problema cóncavo-convexo

En cuanto al problema (1.5.26), procedemos siguiendo el método iterativo anteriormente descrito.

Obtenemos una subsolución clásica y estrictamente convexa de manera similar al Lema 1.4.3.

Lema 1.5.45. *Existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0]$, podemos encontrar una constante $T(\lambda) > 0$ tal que*

$$\underline{u}_\lambda(x) = T(\lambda) v(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

es una subsolución clásica de (1.5.26).

Como supersolución consideramos la única solución del problema cóncavo, es decir:

$$\begin{cases} \det(D^2 \overline{u}_\lambda) = \lambda |\overline{u}_\lambda|^q \leq \lambda |\overline{u}_\lambda|^q + |\overline{u}_\lambda|^r & \text{en } \Omega, \\ \overline{u}_\lambda \text{ convexa en } \Omega, \\ \overline{u}_\lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por comparación para el problema cóncavo (Teorema 1.5.37), se tiene $\underline{u}_\lambda \leq \overline{u}_\lambda$. Entonces, tomemos w_1 , la solución de

$$\begin{cases} \det(D^2 w_1) = \lambda |\underline{u}_\lambda|^q + |\underline{u}_\lambda|^r & \text{en } \Omega \\ w_1 \text{ convexa en } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Procediendo como en el caso convexo, obtenemos una sucesión

$$\underline{u}_\lambda \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq \bar{u}_\lambda$$

de soluciones de

$$\begin{cases} \det(D^2 w_k) = \lambda |w_{k-1}|^q + |w_{k-1}|^r & \text{en } \Omega, \\ w_k \text{ convexa en } \Omega, \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pasando al límite en sentido de viscosidad como en el caso cóncavo, obtenemos que existe $u_\lambda \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ solución de viscosidad de

$$\det(D^2 u_\lambda) = \lambda |u_\lambda|^q + |u_\lambda|^r \quad \text{en } \Omega.$$

Además, u_λ es convexa (es límite uniforme de funciones estrictamente convexas) y verifica $u_\lambda = 0$ en $\partial\Omega$ por construcción.

Observación 1.5.46. Es posible adaptar los argumentos descritos al caso de las ecuaciones k -hessianas (ver [48, 120, 121, 122] y también [84]). El operador k -hessiano viene dado por el k -ésimo polinomio simétrico elemental en n variables y se define como

$$S_k(X) = S_k(\lambda[X]) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k},$$

donde $\lambda[X] = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ denota los autovalores de la matriz $X \in \mathcal{S}^n$. Nótese que $S_1(D^2 u) = \Delta u$ y que $S_n(D^2 u) = \det(D^2 u)$, respectivamente el Laplaciano y el operador de Monge-Ampère.

Para que el operador k -hessiano sea elíptico debemos restringirnos a las funciones k -convexas, es decir, aquellas tales que $S_j(D^2 u) \geq 0$ en Ω para todo $j = 1, \dots, k$.

De la misma manera que la convexidad de Ω es natural para las ecuaciones de Monge-Ampère, hay una noción correspondiente de k -convexidad. Diremos que un dominio Ω es k -convexo si para cada $x \in \partial\Omega$ se tiene

$$S_j(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

donde κ_i , ($i = 1, \dots, n-1$) son las curvaturas principales de $\partial\Omega$ en x . En otras palabras, dado que $S_j(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ es la j -ésima curvatura media de $\partial\Omega$ en x , diremos que Ω es k -convexo si las curvaturas medias j -ésimas en $x \in \partial\Omega$ para cada $j = 1, \dots, k$ y cada $x \in \partial\Omega$ son no negativas.

Capítulo 2

Multiplicidad de soluciones de ecuaciones completamente no lineales uniformemente elípticas con un lado derecho cóncavo-convexo

2.1. Introducción

Dado el problema *cóncavo-convexo*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ y $0 < q < 1 < r$, en [33] se obtiene la existencia de un valor crítico del parámetro, $\lambda_{\text{máx}}$, tal que el problema no tiene solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$ y existe una solución minimal para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$. Este resultado se tiene sin restricción del exponente r .

En [5] se estudia la multiplicidad de soluciones en función del parámetro λ cuando además suponemos

$$1 < r < 2^* - 1,$$

donde $2^* = 2n/(n-2)$ es el exponente crítico de Sobolev (si $n \leq 2$, entonces, $2^* = \infty$). Se demuestra que existe al menos una solución asociada a $\lambda_{\text{máx}}$ y que existe una segunda solución para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$. Las pruebas se basan fundamentalmente en métodos variacionales y el estudio del funcional de energía asociado al problema.

De hecho, el resultado en [33] es más general, se estudia el problema cóncavo

convexo para el p -Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde $0 < q < p - 1 < r$ y $\lambda > 0$. Se prueba la existencia de una rama de soluciones minimales hasta un cierto $\lambda_{\text{máx}}$ y la no existencia de solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$. La prueba sigue el método de monotonía y se tiene sin restricción en el tamaño de r .

En [6] se estudia la posible multiplicidad de soluciones radiales positivas del problema (2.1.1) cuando $\Omega \equiv B_1(0)$. Se prueba que para

$$1 < r < p^* - 1, \quad \text{donde } p^* = \frac{np}{n-p} \text{ si } p < n, \text{ y } p^* = \infty \text{ en caso contrario}$$

existe una segunda solución radial del problema (2.1.1) para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$. La prueba involucra argumentos topológicos (teoría del grado) y estimaciones a priori de las soluciones del problema (2.1.1) independientes del parámetro λ .

Es en la obtención de estas cotas a priori donde se utiliza de manera fundamental el hecho de que Ω sea una bola. En el caso $p = 2$, los métodos en [6] dan una prueba alternativa de los resultados en [5] comentados anteriormente, ya que se tienen dichas cotas a priori en cualquier dominio acotado con frontera \mathcal{C}^1 por los resultados de Gidas-Spruck [77] (véase también [63], donde se obtienen cotas L^∞ uniformes utilizando técnicas diferentes que involucran argumentos topológicos y variacionales). Para $p \neq 2$ y dominios generales, obtener cotas a priori independientes del lado derecho de la ecuación es, hasta el momento, un problema abierto.

En [75], siguiendo una aproximación diferente basada en las ideas de [35], se prueba la existencia de una segunda solución de (2.1.1) en el caso no radial cuando $r < p^* - 1$ y $\lambda < \lambda_{\text{máx}}$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un dominio acotado con frontera \mathcal{C}^2 , $0 < q < 1 < r$ y $\lambda > 0$. Nuestro objetivo en el presente capítulo es obtener condiciones para la existencia de una segunda solución positiva del problema cóncavo-convexo

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Supondremos que $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfará las siguientes hipótesis estructurales:

(F1) *Elipticidad uniforme*: Existen constantes $0 < \theta \leq \Theta$ tales que para todo $X, Y \in \mathcal{S}^n$ con $Y \geq 0$,

$$-\Theta \cdot \text{traza}(Y) \leq F(\xi, X + Y) - F(\xi, X) \leq -\theta \cdot \text{traza}(Y)$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(F2) *Homogeneidad*: $F(t\xi, tX) = t \cdot F(\xi, X)$ para todo $t > 0$. Supondremos además que $F(0, 0) = 0$.

(F3) *Condición de estructura:* Existe $\gamma > 0$ tal que para todo $X, Y \in \mathcal{S}^n$, y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(X - Y) - \gamma |\xi_1 - \xi_2| \leq F(\xi_1, X) - F(\xi_2, Y) \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(X - Y) + \gamma |\xi_1 - \xi_2|,$$

donde $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm$ son los operadores extremales de *Pucci* (ver Definición 0.6.6). Nótese que (F3) equivale a la elipticidad uniforme cuando $\xi_1 = \xi_2$ (ver Lema 0.6.8).

(F4) *Invariancia por matrices ortogonales:* Para toda $Q \in \mathcal{S}^n$ que verifique $Q \cdot Q^t = Id$ se tiene

$$G(Q^t X Q) = G(X), \quad \text{donde } G(X) \equiv F(0, X). \quad (2.1.3)$$

Nótese que (F1) y (F2) implican que G es uniformemente elíptico con constantes $0 < \theta < \Theta$ y 1-homogéneo. El operador G aparece de manera natural en el argumento de *blow-up* en la Sección 2.3, por lo que nos referiremos a él como el *operador de blow-up*.

Observación 2.1.1. Los resultados de [39] que citaremos en lo sucesivo, se pueden aplicar en este marco sin cambiar las pruebas, ya que están basados en la estimación ABP (Aleksandrov-Bakelman-Pucci), que se tiene bajo las hipótesis (F1) y (F3), véase por ejemplo [41].

Suponiendo (F1), (F2), y (F3), hemos probado en la Sección 1.5.1 que existe un número $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema (2.1.2) tiene al menos una solución minimal para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ y ninguna solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$. Nótese que estos resultados se tienen sin ninguna restricción en el tamaño de r .

Nuestro objetivo principal en este capítulo será estudiar la existencia de una segunda solución positiva para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ cuando $r < \hat{r}$, donde \hat{r} es el *exponente crítico*. Nótese que debemos precisar la noción de exponente crítico en este contexto, ya que no resulta claro *a priori* que el concepto de exponente crítico de Sobolev sea adecuado en el marco completamente no lineal.

Para motivar la definición de exponente crítico, Definición 2.1.2, es conveniente bosquejar la demostración del Teorema de multiplicidad.

La prueba del resultado se basa en el uso de estimaciones L^∞ uniformes y argumentos topológicos como en [6]. Como veremos, la noción de exponente crítico surge de manera natural en la obtención de las cotas L^∞ .

Las estimaciones uniformes L^∞ (Proposición 2.3.1) se consiguen por el método de *blow-up* de Gidas-Spruck en [77], el cual nos dice que existen cotas L^∞ uniformes de las soluciones de (2.1.2) siempre y cuando no existan soluciones de los problemas

$$G(D^2 v) = v^r \quad \text{y} \quad 0 \leq v(x) \leq v(0) = 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \quad (2.1.4)$$

y

$$\begin{cases} G(D^2 v) = v^r, & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ 0 \leq v(x) \leq v(0, \dots, 0, z) = 1, & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v = 0, & \text{en } \partial \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

donde $z > 0$, $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ y G es el operador de *blow-up* en (2.1.3).

Por tanto, para concluir el argumento de *blow-up* y deducir la existencia de las cotas a priori, será necesario demostrar que existe $1 < s \leq \infty$ tal que, para cada $r \in (1, s)$, los problemas (2.1.4) y (2.1.5) no tienen solución.

En general, los resultados de no existencia de soluciones no triviales para (2.1.4) y (2.1.5) son difíciles de demostrar.

En este sentido, hacemos una aportación importante en el caso del semiespacio. Siguiendo las ideas de [24, 115], probamos en el Teorema 2.2.1 que si v es una solución de viscosidad no trivial, no negativa y acotada de

$$\begin{cases} G(D^2v) = f(v), & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v \geq 0, & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v = 0, & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

con f localmente Lipschitz, $f(0) \geq 0$ y $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con una cierta simetría (ver la condición (2.2.2)), entonces v es monótona creciente en la variable x_n , es decir,

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+^n. \quad (2.1.6)$$

Se deduce entonces la no existencia de soluciones para el problema (2.1.5) ya que toda solución no trivial de (2.1.5) tiene un máximo en un cierto punto $(0, \dots, 0, z) \in \mathbb{R}^+$ lo que en particular (por la regularidad $\mathcal{C}^{1,\alpha}$) implica

$$\nabla v(0, \dots, 0, z) = 0,$$

que contradice (2.1.6).

El punto importante en el argumento anterior es que la propiedad de monotonía (2.1.6) se verifica para el problema (2.1.5) con independencia del exponente $r > 1$, por tanto, sin restricción alguna en el tamaño de r . Por todo ello, proponemos la siguiente definición de exponente crítico:

Definición 2.1.2. Diremos que el operador $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface un resultado de tipo Liouville en \mathbb{R}^n hasta s siempre que $v \equiv 0$ sea la única solución de viscosidad no negativa de

$$G(D^2v) = v^r \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \quad (2.1.7)$$

para todo $1 < r < s$. Entonces, se define el *exponente crítico* para el problema (2.1.2) como

$$\hat{r} = \sup\{s : s \in \mathbb{R} \text{ y } G \text{ satisface un resultado de tipo Liouville en } \mathbb{R}^n \forall r \in (1, s)\}.$$

En base al siguiente resultado, probado en [61] (ver también [29]) se deduce que \hat{r} está bien definido. De hecho, se tiene una cota inferior no trivial para el exponente crítico \hat{r} , válida en toda la clase de operadores uniformemente elípticos:

$$\hat{r} \geq \frac{\Theta(n-1) + \theta}{\Theta(n-1) - \theta} > 1 \quad \text{si } n > \frac{\theta}{\Theta} + 1 > 1. \quad (2.1.8)$$

Si $n = \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$, entonces, $\hat{r} = \infty$ (nótese que en este caso se tiene necesariamente $\Theta = \theta$ y $n = 2$).

Teorema 2.1.3 (Teorema 4.1 en [61]). *Sea $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un operador uniformemente elíptico, es decir, que verifica (F1). Supongamos $G(0) = 0$, $\beta = \frac{\Theta}{\theta}(n-1) + 1 > 2$ y sea $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ una solución de viscosidad de*

$$\begin{cases} G(D^2v) \geq v^r, & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ v \geq 0, & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Entonces, si $0 < r \leq \beta/(\beta-2)$, necesariamente $v \equiv 0$. Cuando $\beta = 2$, se obtiene la misma conclusión para todo $0 < r < \infty$, nótese que entonces $\Theta = \theta$ y $n = 2$.

El exponente $\beta/(\beta-2)$ que proporciona el Teorema 2.1.3 es óptimo en la clase de los operadores elípticos con constantes $0 < \theta \leq \Theta$, ya que, según [61, Observación 7] cuando $r > \beta/(\beta-2)$ pueden elegirse constantes $\delta, C_\delta > 0$ tales que la función $v_\delta(x) = C_\delta \cdot (1 + |x|^2)^{-\delta}$ verifica

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2v_\delta) \geq v_\delta^r \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \quad v_\delta \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

Nótese sin embargo que el exponente $\beta/(\beta-2)$ puede no ser óptimo para una no linealidad concreta G . Por ejemplo, según [61, Observación 8], en el caso particular $G = \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-$, el rango de exponentes en el Teorema 2.1.3 se puede mejorar hasta

$$1 < r \leq \frac{\alpha}{\alpha-2}, \quad \alpha = \frac{\theta}{\Theta}(n-1) + 1.$$

Cabe señalar que, considerando soluciones del problema (2.1.9) en lugar de meras supersoluciones, podría mejorarse aún más el rango de exponentes para los que se verifican resultados de tipo Liouville en \mathbb{R}^n . En este sentido, por ejemplo, se sabe que el exponente crítico para el operador de Laplace (y más en general para ecuaciones lineales en forma no divergencia) es

$$\hat{r} = 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2},$$

donde $2^* = 2n/(n-2)$ es el exponente de Sobolev (ver [77]). Obtener resultados de tipo Liouville en \mathbb{R}^n para soluciones que permitan mejorar la información sobre los exponentes críticos es, hasta el momento, un problema abierto en general (ver la discusión a este respecto en la Sección 2.5.1).

Una vez definido el concepto de exponente crítico en el contexto completamente no lineal, enunciamos el resultado principal de este capítulo, un resultado de multiplicidad, que demostramos en la Sección 2.4, y que trae al marco completamente no lineal los resultados ya mencionados de [5] y [6, 75].

Teorema 2.1.4. *Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1) – (F4), y $0 < q < 1 < r < \hat{r}$. Entonces, existe $\lambda_{\text{máx}} \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema*

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2u_\lambda) = \lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda > 0, & \text{en } \Omega, \\ u_\lambda = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

- (i) *no tiene ninguna solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$,*
- (ii) *tiene al menos una solución para $\lambda = \lambda_{\text{máx}}$,*

(iii) tiene al menos dos soluciones para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$.

La prueba sigue las ideas de [6] e involucra las estimaciones L^∞ ya mencionadas, así como argumentos de Teoría del Grado topológico.

Observación 2.1.5. Es interesante señalar que la hipótesis (F4) se utiliza únicamente en la prueba de las estimaciones uniformes L^∞ , Proposición 2.3.1, para poder llevar a cabo el argumento de blow-up.

El capítulo está organizado como sigue. En la Sección 2.2 probaremos el resultado de monotónia, Teorema 2.2.1, siguiendo las ideas de [24] y [115] que, como ya se ha dicho, nos permitirá concluir el argumento de blow-up en el caso del semiespacio.

En la Sección 2.3 se desarrolla el argumento de blow-up y se obtendrán las cotas uniformes L^∞ bajo las hipótesis (F1) – (F4).

En la Sección 2.4, demostramos el resultado principal de multiplicidad, Teorema 2.1.4. En la Subsección 2.4.1 presentaremos un Principio de Comparación en este contexto que será necesario en las pruebas.

Finalmente dedicaremos la Sección 2.5 a ejemplos de aplicación del Teorema 2.1.4. Los ejemplos considerados satisfacen (F1) – (F4) e incluyen el caso modelo donde G es un operador extremal de Pucci (subsección 2.5.1) –que incluye el Laplaciano como caso particular–, operadores cóncavos (convexos) (subsección 2.5.2) y una clase de operadores de Isaacs que no son ni cóncavos ni convexos (subsección 2.5.3).

Es importante señalar que en este último caso no se conoce la regularidad clásica de las soluciones en general, por lo que el marco de viscosidad es fundamental.

Por último, decir que impondremos la hipótesis de invariancia (F4) en todos los ejemplos salvo cuando G es un operador de Pucci, donde la hipótesis se satisface de manera natural.

2.2. Una propiedad de monotónia en el semiespacio

Probaremos en esta sección un resultado de monotónia en el espíritu del Teorema 3.1 en [115] y el Corolario 1.3 en [24].

Teorema 2.2.1. *Sea v una solución de viscosidad, no trivial, no negativa y acotada de*

$$\begin{cases} G(D^2v) = f(v), & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v \geq 0, & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v = 0, & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

donde f es localmente Lipschitz, $f(0) \geq 0$ y $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente elíptico con constantes $0 < \theta < \Theta$ y 1-homogéneo. Más aún, supongamos que

$$G(Q^t X Q) = G(X) \text{ para } Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ una matriz con } q_{ij} = -\delta_{ij} \quad (2.2.2)$$

si ó bien i ó bien j son iguales a n , y $q_{ij} = \delta_{ij}$ en otro caso.

Entonces v es monótona en la variable x_n :

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+^n.$$

Hay que señalar que la condición de simetría (2.2.2) se necesita en la prueba del Teorema 2.2.1 para poder aplicar el método de *moving planes* (ver [25]). Sin embargo, al ser el dominio \mathbb{R}_+^n no acotado, el argumento no es el estándar.

En particular, utilizaremos el Principio del Máximo en dominios estrechos (en lugar del Principio del Máximo en dominios con medida pequeña), que nos dice que el Principio del Máximo se verifica siempre y cuando el dominio se encuentre entre dos hiperplanos paralelos separados una distancia pequeña. Otra diferencia con el argumento estándar es la manera en que se obtiene la contradicción final, siguiendo las ideas de [24].

Antes de comenzar con la prueba, enunciaremos algunos resultados bien conocidos en la forma en la que se usarán en lo sucesivo (véase por ejemplo [38]).

Proposición 2.2.2 (Principio del Máximo Fuerte). *Sea Ω un dominio C^2 y sea v una solución de viscosidad no negativa de $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2v) \geq c(x)v$ en Ω con $c(x) \in L^\infty$. Entonces, o bien v se anula en Ω o bien $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Además, en este último caso, para todo $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $v(x_0) = 0$,*

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 - tv) - v(x_0)}{t} < 0,$$

donde ν es la normal exterior unitaria de $\partial\Omega$.

Proposición 2.2.3 (Principio del Máximo en dominios estrechos). *Supongamos que Ω se encuentra entre dos hiperplanos paralelos a distancia d . Si v es una solución de viscosidad de $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2v) \geq c(x)v$, $\liminf_{x \rightarrow \partial\Omega} v(x) \geq 0$, y d es suficientemente pequeña, dependiendo sólo en las cotas para el coeficiente c , entonces se tiene $v \geq 0$ en Ω .*

Demostración del Teorema 2.2.1. Sea v una solución no trivial de (2.2.1). Por hipótesis, $0 \leq v \leq M$ para alguna constante M . Podemos reescribir la ecuación en la forma

$$G(D^2v) - c(x)v = f(0) \geq 0, \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f(v(x)) - f(0)}{v(x)}, & \text{si } v(x) \neq 0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como v está acotada, y f es localmente Lipschitz entonces $c(x) \in L^\infty$. Como consecuencia, el Principio del Máximo Fuerte, (Proposición 2.2.2) asegura $v > 0$.

Utilizaremos el método de *moving plane* en una manera similar a [115]. Para cada β , definimos, como es habitual,

$$T_\beta = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_n = \beta\}, \quad \Sigma_\beta = \{x \in \mathbb{R}_+^n : 0 < x_n < \beta\},$$

y las funciones

$$v_\beta(x) = v(y, 2\beta - x_n), \quad w_\beta(x) = v_\beta(x) - v(x), \quad x = (y, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+,$$

definidas en Σ_β .

1. En primer lugar, probaremos que v_β es solución de viscosidad de

$$G(D^2v_\beta(x)) = f(v_\beta(x)) \quad \text{en } \Sigma_\beta.$$

Probémoslo por ejemplo el caso de las subsoluciones. Sean $\phi \in \mathcal{C}^2$ y $x_0 = (y_0, x_n^0) \in \Sigma_\beta$ tales que $v_\beta - \phi$ tiene un máximo local en x_0 . Definimos

$$\phi_\beta(x) = \phi(y, 2\beta - x_n).$$

Es fácil comprobar que $v - \phi_\beta$ tiene un máximo local en $(y_0, 2\beta - x_n^0)$. Entonces, $D^2\phi_\beta(y, x_n) = QD^2\phi(y, 2\beta - x_n)Q$ donde Q es una matriz con elementos $q_{ij} = \delta_{ij}$ si $i, j \neq n$ y $q_{ij} = -\delta_{ij}$ en caso contrario. Finalmente, por la definición de v , obtenemos

$$\begin{aligned} f(v_\beta(y_0, x_0)) &\geq G(D^2\phi_\beta(y_0, 2\beta - x_n^0)) \\ &= G(QD^2\phi(y_0, x_n^0)Q) = G(D^2\phi(y_0, x_n^0)) \quad \text{en } \Sigma_\beta, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos.

2. Veamos a continuación que $w_\beta = v_\beta - v$ es solución de viscosidad de

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2w_\beta(x)) \geq c_\beta(x)w_\beta(x), \quad (2.2.3)$$

donde

$$c_\beta(x) = \begin{cases} \frac{f(v_\beta(x)) - f(v(x))}{v_\beta(x) - v(x)}, & \text{si } v_\beta(x) \neq v(x) \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

(nótese que de nuevo, se tiene $c_\beta(x) \in L^\infty$ por ser f Lipschitz). La prueba sigue las ideas en [62].

Consideremos $\phi \in \mathcal{C}^2$ tal que $w_\beta - \phi$ tiene un mínimo local en algún punto $x_0 \in \Sigma_\beta$. En otras palabras, x_0 es un máximo local de $v - v_\beta + \phi$. Como es habitual en la teoría de las soluciones de viscosidad, introducimos

$$\Phi_\epsilon(x, y) = v(x) - v_\beta(y) + \phi(x) - \frac{|x - y|^2}{\epsilon^2} - |x - x_0|^4.$$

para cada $\epsilon > 0$. Para ϵ suficientemente pequeño, Φ_ϵ alcanza un máximo en $\Sigma_\beta \times \Sigma_\beta$ en algún punto $(x_\epsilon, y_\epsilon) \in B_r(x_0) \times B_r(x_0)$ para algún $r > 0$. Como x_0 es un máximo local estricto de

$$x \mapsto v(x) - v_\beta(x) + \phi(x) - |x - x_0|^4$$

resultados estándar de la teoría de soluciones de viscosidad (ver [58]) implican $x_\epsilon, y_\epsilon \rightarrow x_0$ y $\frac{|x_\epsilon - y_\epsilon|^2}{\epsilon^2} \rightarrow 0$ conforme $\epsilon \rightarrow 0$.

Además, si definimos $\psi(x, y) = -\phi(x) + \frac{|x - y|^2}{\epsilon^2} + |x - x_0|^4$, los resultados en [58] implican que para cada $\alpha > 0$ dado, existen matrices $X, Y \in \mathcal{S}^n$ tales que

$$\begin{aligned} (\nabla_x \psi(x_\epsilon, y_\epsilon), X) &\in \bar{J}^{2,+} v(x_\epsilon) \\ (-\nabla_y \psi(x_\epsilon, y_\epsilon), Y) &\in \bar{J}^{2,-} v_\beta(y_\epsilon), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

y

$$-\left(\frac{1}{\alpha} + \|A\|\right)I \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq A + \alpha A^2,$$

donde $A = D^2\psi(x_\epsilon, y_\epsilon)$. Haciendo $\alpha = \epsilon^2$ en las desigualdades anteriores, es fácil comprobar que

$$X - Y \leq -D^2\phi(x_\epsilon) + O(\epsilon^2 + |x_\epsilon - x_0|^2).$$

Por definición (ver [58]) de solución de viscosidad y (2.2.4), llegamos a

$$G(X) \leq f(v(x_\epsilon)) \quad \text{y} \quad G(Y) \geq f(v_\beta(y_\epsilon)),$$

y, restando, obtenemos

$$\begin{aligned} f(v_\beta(y_\epsilon)) - f(v(x_\epsilon)) &\leq G(Y) - G(X) \\ &\leq G(X + D^2\phi(x_\epsilon) + O(\epsilon^2 + |x_\epsilon - x_0|^2)) - G(X) \\ &\leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2\phi(x_\epsilon)) + O(\epsilon^2 + |x_\epsilon - x_0|^2). \end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, se obtiene (2.2.3).

3. Tenemos $w_\beta \geq 0$ en $\partial\Sigma_\beta$. Tomando β suficientemente pequeño, podemos aplicar el Principio del Máximo en dominios estrechos (Proposición 2.2.3) y obtener $w_\beta \geq 0$ en Σ_β . Si definimos,

$$\beta^* = \sup\{\beta : w_\mu \geq 0 \text{ en } \Sigma_\mu \text{ para todo } \mu < \beta\},$$

hemos probado que $\beta^* > 0$.

Por el Lema de Hopf, deducimos que para cada $0 < \beta \leq \beta^*$, se tiene $w_\beta > 0$ en Σ_β y además

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} = -\frac{1}{2} \frac{\partial w_\beta}{\partial x_n} > 0 \quad \text{en } T_\beta.$$

Basta probar que $\beta^* = \infty$ para concluir.

Para llegar a una contracción, supongamos que $\beta^* < \infty$. Podemos fijar ϵ_0 pequeño de manera que se verifica el Principio del Máximo para $G(\cdot) - c_\mu(x)$ en $\Sigma_{\beta^* + \epsilon_0} \setminus \Sigma_{\beta^* - \epsilon_0}$. Queremos probar:

$$\exists \delta_0 \in (0, \epsilon_0] \text{ t.q. para cada } \delta \in (0, \delta_0), w_{\beta^* + \delta} \geq 0 \text{ en } \Sigma_{\beta^* - \epsilon_0} \setminus \Sigma_{\epsilon_0}. \quad (2.2.5)$$

Una vez probado (2.2.5), podremos aplicar el Principio del Máximo en dominios estrechos a

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 w_\beta(x)) \geq c_\beta(x) w_\beta(x) \quad \text{en } \Sigma_{\beta^* + \delta} \setminus \Sigma_{\beta^* - \epsilon_0} \cup \Sigma_{\epsilon_0},$$

con c_β como antes y concluir que $w_{\beta^* + \delta} \geq 0$ en $\Sigma_{\beta^* + \delta}$, contradiciendo la maximalidad de β^* .

4. Por tanto, sólo falta probar (2.2.5). La prueba es similar a la del Lema 3.1 en [115].

Supongamos que (2.2.5) fuera falsa, es decir, que existen sucesiones $\delta_m \rightarrow 0$ y $x^{(m)} = (y^{(m)}, x_n^{(m)}) \in \Sigma_{\beta^* - \epsilon_0} \setminus \Sigma_{\epsilon_0}$ tales que

$$w_{\beta^* + \delta_m}(x^{(m)}) < 0. \quad (2.2.6)$$

Podemos suponer que $x_n^{(m)} \rightarrow x_n^0 \in [\epsilon_0, \beta^* - \epsilon_0]$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Definimos las funciones

$$v^{(m)}(y, x_n) = v(y + y^{(m)}, x_n)$$

y respectivamente

$$w_\beta^{(m)}(y, x_n) = v^{(m)}(y, 2\beta - x_n) - v^{(m)}(y, x_n).$$

Nótese que

$$G(D^2v^{(m)}) = f(v^{(m)}(x)).$$

en sentido de viscosidad. Entonces, es estándar (véase por ejemplo la Proposición 4.11 en [39]) demostrar que existe una subsucesión y un límite $\tilde{v} \in \mathcal{C}$ tales que $v^{(m)} \rightarrow \tilde{v}$ uniformemente en compactos cuando $m \rightarrow \infty$ y

$$G(D^2\tilde{v}) = f(\tilde{v}(x))$$

en sentido de viscosidad.

Por el Principio del Máximo Fuerte (Proposición 2.2.2), se tiene que o bien \tilde{v} es estrictamente positiva en \mathbb{R}_+^n o bien $\tilde{v} \equiv 0$ en \mathbb{R}_+^n .

Supongamos en primer lugar que $\tilde{v} > 0$ en \mathbb{R}_+^n . Por lo que ya hemos probado, sabemos que $w_\beta^{(m)}(y, x_n) = w_\beta(y + y^{(m)}, x_n) > 0$ en Σ_β para todo $\beta \leq \beta^*$. Por tanto la función límite $\tilde{w}^\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} w_\beta^{(m)}$ es no-negativa en Σ_β para todo $\beta \leq \beta^*$.

Por tanto, podemos repetir el argumento del *moving plane* para \tilde{v} y obtener $\tilde{\beta}^* \geq \beta^*$, donde $\tilde{\beta}^*$ es a \tilde{v} lo que β^* es a v . Como \tilde{w}^β satisface

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2\tilde{w}_\beta(x)) \geq \tilde{c}_\beta(x)\tilde{w}_\beta(x)$$

podemos aplicar el Principio del Máximo Fuerte y obtener, como antes, $\tilde{w}_\beta > 0$ en Σ_β para todo $\beta \leq \tilde{\beta}^*$. Por otra parte por la continuidad y (2.2.6), tenemos $\tilde{w}^{\beta^*}(0, x_n^0) = 0$ y $x_n^0 \in (0, \beta^* - \epsilon_0]$, una contradicción.

Supongamos ahora que $\tilde{v} \equiv 0$ en \mathbb{R}_+^n . Fijamos los dominios rectangulares

$$Q_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : -1 < x_1 < 1, \dots, -1 < x_{n-1} < 1, \epsilon_0 < x_n < 2\beta^* + 1\},$$

$$Q_2 = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : -2 < x_1 < 2, \dots, -2 < x_{n-1} < 2, \frac{\epsilon_0}{2} < x_n < 2\beta^* + 2\right\}.$$

Como $v^{(m)}$ converge uniformemente a cero en Q_2 , podemos suponer que $v^{(m)} \leq 1$ en Q_2 para m suficientemente pequeño. Fijemos

$$\alpha_m = v^{(m)}(0, x_n^{(m)}) \quad \text{y} \quad \bar{v}^{(m)} = \frac{v^{(m)}}{\alpha_m}.$$

La función $\bar{v}^{(m)}$ satisface

$$G(D^2\bar{v}^{(m)}(x)) = \frac{f(v^{(m)}(x))}{v^{(m)}(x)}\bar{v}^{(m)}(x), \quad x \in Q_2. \quad (2.2.7)$$

La desigualdad de Harnack (ver Capítulo 4 en [39]) implica

$$\sup_{Q_1} \bar{v}^{(m)} \leq C_1 \inf_{Q_1} \bar{v}^{(m)} \leq C_1.$$

Nótese que $w^{\beta^*} \geq 0$ en Σ_{β^*} , lo cual implica

$$\bar{v}^{(m)}(y, x_n) \leq \bar{v}^{(m)}(y, 2\beta^* - x_n) \leq C_1, \quad \text{para } (y, x_n) \in \Sigma_{\beta^*}.$$

Por tanto, $\|\bar{v}^{(m)}\|_{L^\infty(Q)} \leq C_1$, donde

$$Q = \{x \in \mathbb{R}_+^n : -1 < x_1 < 1, \dots, -1 < x_{n-1} < 1, 0 < x_n < 2\beta^* + 1\}.$$

Por tanto, las estimaciones \mathcal{C}^α implican que $\bar{v}^{(m)} \rightarrow \bar{v} \in \mathcal{C}$ uniformemente en compactos (salvo una subsucesión) y \bar{v} es una solución de viscosidad de

$$G(D^2\bar{v}) \geq l\bar{v},$$

donde $l = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)/t$. Por el Principio del Máximo Fuerte, o bien $\bar{v} \equiv 0$ en Q o bien $\bar{v} > 0$ en Q . La primera posibilidad queda excluida ya que $\bar{v}(0, x_n^0) = 1$.

Introducimos las funciones

$$z^\beta(y, x_n) = \bar{v}(y, 2\beta - x_n) - \bar{v}(y, x_n)$$

definidas en $\Sigma_\beta \cap \bar{Q}$ para todo $\beta \leq \beta^* + 1/2$. Tenemos, por continuidad,

$$z^{\beta^*} \geq 0 \quad \text{y} \quad z^{\beta^*}(0, x_n^0) = 0.$$

Como

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 z^\beta(x)) \geq l z^\beta(x),$$

el principio del máximo fuerte implica $z^{\beta^*} \equiv 0$ en $\Sigma_{\beta^*} \cap \bar{Q}$. Esto contradice que $\bar{v} = 0$ en $\{x_n = 0\}$ y $\bar{v} > 0$ en $\{x_n = 2\beta^*\}$. \square

2.3. Estimaciones L^∞ uniformes: el argumento de *blow-up*

Presentamos a continuación el método de *blow-up* en [77] adaptado al marco de viscosidad. Mediante este argumento, suponiendo las hipótesis (F1) – (F4), probaremos que las soluciones del problema (2.1.2) están uniformemente acotadas independientemente del lado derecho de la ecuación.

El resultado principal de la sección es el siguiente:

Proposición 2.3.1. *Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1) – (F4) y sea u una solución no trivial del problema (2.1.2) con $0 < q < 1 < r < \hat{r}$. Entonces, existe una constante $C > 0$ independiente de λ y u tal que $\|u\|_{L^\infty} \leq C$.*

La prueba es por reducción al absurdo. Dado que queremos probar que $u(x) \leq C$ con $C = C(r, \Omega)$ independiente de u , supongamos que existe una sucesión $\{u_k\}_k$ de soluciones positivas de

$$\begin{cases} F(\nabla u_k, D^2 u_k) = \lambda u_k^q + u_k^r, & \text{en } \Omega, \\ u_k(x) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

y una sucesión de puntos $\{z_k\}_k \subset \Omega$ tales que

$$M_k = \sup_{\Omega} u_k = u_k(z_k) \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_k \rightarrow \hat{z} \in \bar{\Omega}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Hay dos casos a considerar, cuando $\hat{z} \in \Omega$ y cuando $\hat{z} \in \partial\Omega$.

CASO 1: $\hat{z} \in \Omega$. Sea $2d = \text{dist}(z, \partial\Omega)$ en lo sucesivo. Definimos

$$y = \frac{x - z_k}{\mu_k}, \quad x = z_k + \mu_k y,$$

donde

$$\mu_k^{\frac{2}{r-1}} M_k = 1.$$

Asimismo, definimos

$$v_k(y) = \mu_k^{\frac{2}{r-1}} u_k(x). \quad (2.3.2)$$

Lema 2.3.2. *Para k suficientemente grande, la función $v_k(y)$ definida en (2.3.2) es una solución de viscosidad de*

$$F(\mu_k \nabla_y v_k(y), D_y^2 v_k(y)) = \lambda \mu_k^{\frac{2(r-q)}{r-1}} v_k^q(y) + v_k^r(y) \quad \text{en } B_{d/\mu_k}(0). \quad (2.3.3)$$

Demostración. Para probar que v_k es una solución de viscosidad de (2.3.3), trataremos primero el caso de la subsolución.

Consideramos $\phi \in \mathcal{C}^2$, $y_0 \in B_{d/\mu_k}(0)$ tal que $v_k - \phi$ tiene un máximo local en y_0 . De hecho, podemos suponer sin pérdida de generalidad que ϕ toca a v_k por arriba en y_0 , es decir,

$$(v_k - \phi)(y) \leq (v_k - \phi)(y_0) = 0,$$

para todo y en un entorno de y_0 . Definimos

$$\Phi(x) = \mu_k^{\frac{-2}{r-1}} \cdot \phi\left(\frac{x - z_k}{\mu_k}\right).$$

Entonces, Φ toca a u_k por arriba en $x_0 = z_k + \mu_k y_0 \in \Omega$ (aquí se utiliza que $y_0 \in B_{d/\mu_k}(0)$), es decir,

$$u_k(x_0) = u_k(z_k + \mu_k y_0) = \mu_k^{\frac{-2}{r-1}} v_k(y_0) = \mu_k^{\frac{-2}{r-1}} \phi(y_0) = \Phi(x_0),$$

y

$$u_k(x) = u_k(z_k + \mu_k y) = \mu_k^{\frac{-2}{r-1}} v_k(y) \leq \mu_k^{\frac{-2}{r-1}} \phi(y) = \Phi(x),$$

para todo x en un entorno de x_0 .

Podemos escribir las derivadas de $\Phi(x)$ en términos de las de $\phi(y)$:

$$\begin{aligned} \nabla_x \Phi(x_0) &= \mu_k^{\frac{-r-1}{r-1}} \nabla_y \phi(y_0), \\ D_x^2 \Phi(x_0) &= \mu_k^{\frac{-2r}{r-1}} D_y^2 \phi(y_0). \end{aligned}$$

Como u_k es una subsolución de viscosidad de (2.3.1), por homogeneidad, obtenemos

$$F(\mu_k \nabla_y \phi(y_0), D_y^2 \phi(y_0)) \leq \lambda \mu_k^{\frac{2(r-q)}{r-1}} v_k^q(y_0) + v_k^r(y_0),$$

que es lo que buscábamos. El caso de la supersolución es análogo. \square

Podemos fijar $R > 0$ y suponer sin pérdida de generalidad (tomando k suficientemente grande) que $B_R(0) \subset B_{d/\mu_k}(0)$.

Las hipótesis sobre la elipticidad uniforme y la estructura de F implican

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 v_k) - \gamma \mu_k |\nabla v_k| \leq \lambda \mu_k^{\frac{2(r-q)}{r-1}} v_k^q(y) + v_k^r(y), \quad \text{en } B_{d/\mu_k}(0),$$

y

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 v_k) + \gamma \mu_k |\nabla v_k| \geq \lambda \mu_k^{\frac{2(r-q)}{r-1}} v_k^q(y) + v_k^r(y), \quad \text{en } B_{d/\mu_k}(0).$$

En particular, como $\|v_k\|_{L^\infty(B_R)} = 1$ por construcción, y $\mu_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, podemos fijar $\epsilon > 0$ y encontrar que para k suficientemente grande

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 v_k) - \gamma |\nabla v_k| \leq 1 + \epsilon, \quad \text{en } B_{d/\mu_k}(0),$$

y

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2 v_k) + \gamma |\nabla v_k| \geq -(1 + \epsilon), \quad \text{en } B_{d/\mu_k}(0).$$

Por tanto, de la desigualdad de Harnack (que se sigue de la estimación ABP, disponible por (F3), ver [39] y [41]), obtenemos cotas \mathcal{C}^β uniformes (ver [39]),

$$\|v_k\|_{\mathcal{C}^\beta(\overline{B}_{R/2})} \leq C(n, R, \beta, \gamma, 1 + \epsilon), \quad (2.3.4)$$

para algún $0 < \beta < 1$.

Podemos aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà y concluir que existe una subsucesión v_{k_j} y una función límite v tales que

$$\lim_{k_j \rightarrow \infty} v_{k_j} = v, \quad \text{uniformemente en } B_R(0), \text{ y } v(0) = 1.$$

De hecho, podemos considerar cualquier otro $R_1 > R$ y aplicar los mismos argumentos a la subsucesión v_{k_j} en $B_{R_1}(0)$. Obtenemos así una nueva subsucesión $v_{k_{j_1}}$ tal que

$$\lim_{k_{j_1} \rightarrow \infty} v_{k_{j_1}} = v, \quad \text{uniformemente en } B_{R_1}(0), \text{ y } v(0) = 1.$$

Nótese que, como $\{v_{k_{j_1}}\}_{k_{j_1}} \subset \{v_{k_j}\}_{k_j}$, los límites de ambas subsucesiones coinciden en $B_R(0)$.

Podemos tomar una sucesión creciente de radios $\{R_j\}_j$ e iterar este procedimiento para obtener una sucesión diagonal v_k tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v, \quad \text{uniformemente en } B_R(0) \forall R > 0, \text{ y } v(0) = 1. \quad (2.3.5)$$

Finalmente, tomamos límites en sentido de viscosidad en (2.3.3), que es el contenido del siguiente lema.

Lema 2.3.3. *El límite $v(y)$ en (2.3.5) es una solución de viscosidad de*

$$\begin{cases} G(D_y^2 v(y)) = v^r(y), & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq v(y) \leq v(0) = 1, & \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $G(X) = F(0, X)$.

Demostración. Sean $\phi \in \mathcal{C}^2$ e y_0 tales que $v - \phi$ tiene un máximo local estricto en y_0 , es decir,

$$(v - \phi)(y) < (v - \phi)(y_0),$$

para todo $y \neq y_0$ en un entorno de y_0 .

Fijemos $R > 0$ tal que $y_0 \in B_R(0)$. Por convergencia uniforme en compactos, deducimos que existe una sucesión de puntos $y_k \rightarrow y_0$ cuando $k \rightarrow \infty$ tal que $v_k - \phi$ tiene un máximo local en y_k , es decir,

$$(v_k - \phi)(y) \leq (v_k - \phi)(y_k),$$

para todo $y \neq y_k$ cerca de y_k . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $y_k \in B_R(0) \subset B_{d/\mu_k}(0)$ para cada $k > k_0$.

Entonces, dado que v_k es una solución de viscosidad de (2.3.3), tendremos

$$F(\mu_k \nabla \phi(y_k), D^2 \phi(y_k)) \leq \lambda \mu_k^{\frac{2(r-q)}{r-1}} v_k^q(y_k) + v_k^r(y_k). \quad (2.3.6)$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$ en (2.3.6) obtenemos

$$F(0, D^2 \phi(y_0)) \leq v^r(y_0),$$

y hemos probado que v es una subsolución de viscosidad. El caso de la supersolución es análogo. \square

Hemos obtenido una contradicción con la definición de \hat{r} , luego concluimos el argumento en este caso.

CASE 2: $\hat{z} \in \partial\Omega$. En este caso el argumento de reducción lleva, bien a un problema en todo el espacio \mathbb{R}^n o bien a un problema en el semiespacio \mathbb{R}_+^n .

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\hat{z} = 0$. De esta manera, el espacio tangente a $\partial\Omega$ en el origen vendrá dado por $\langle x, \xi \rangle = 0$, para algún $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo. De hecho, después de una rotación, podemos suponer $\xi = (0, \dots, 0, 1)$. Sea μ_k como en el Caso 1, ver (2.3.2), y definamos la función reescalada

$$v_k(y) = \mu_k^{\frac{2}{r-1}} \cdot u(z'_k + \mu_k y', z_k^{(n)} + \mu_k y^{(n)})$$

donde $z_k = (z'_k, z_k^{(n)})$, $y = (y', y^{(n)})$, con $z'_k, y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $z_k^{(n)}, y^{(n)} \in \mathbb{R}$.

Sea $d_k = |z_k^{(n)}/\mu_k| + o(1)$ cuando $k \rightarrow \infty$, que corresponde a la distancia del máximo de v_k a la frontera de $\Omega_k = \mu_k^{-1} \cdot (\Omega - z_k)$.

Consideramos las siguientes posibilidades en función del comportamiento de la sucesión d_k :

1. $\{d_k\}$ no está acotada. En este caso, pasando al límite de una manera similar al Caso 1, llegamos a la ecuación $G(D_y^2 v(y)) = v^r(y)$ en \mathbb{R}^n , con $0 \leq v(y) \leq v(0) = 1$, y obtenemos una contradicción como en el Caso 1.
2. $\{d_k\}$ está acotada. Podemos tomar una subsucesión, si es necesario, tal que $d_k \rightarrow s$ para algún $s \geq 0$.

En el segundo caso, debemos considerar dos alternativas. Si $s = 0$ obtenemos una contradicción con la continuidad de la función límite v , ya que, por una parte, $v(0) = 1$, y por otra $v(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ que verifique $\langle y, \xi \rangle = 0$, en particular para $y = 0$.

Si $s > 0$, llegamos al problema

$$\begin{cases} G(D_y^2 v(y)) = v^r(y), & v \geq 0, & \text{en } \mathbb{R}_+^n, \\ 0 \leq v(y) \leq v(0, \dots, 0, s) = 1, & & \text{en } \mathbb{R}_+^n, \\ v(x', 0) = 0, & x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Entonces, por construcción, v en (2.3.7) tiene un máximo en $(0, \dots, 0, z)$. Esto implica $\nabla v(0, \dots, 0, z) = 0$ y, en particular, por la regularidad $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de v ,

$$\frac{\partial v}{\partial x_n}(0, \dots, 0, z) = 0,$$

que contradice el Teorema 2.2.1 y concluye la prueba de la Proposición 2.3.1.

Observación 2.3.4. En el Caso 2 del argumento anterior es necesaria la regularidad \mathcal{C}^1 de la frontera $\partial\Omega$ para obtener un semiespacio tras el *blow-up*

2.4. Prueba del resultado de multiplicidad

Como ya se ha señalado en la Sección 1.5.1, bajo las hipótesis (F1), (F2) y (F3), se verifica el Teorema 8 en [30] (aquí es necesaria la regularidad \mathcal{C}^2 del dominio $\partial\Omega$) y por tanto, existe un autovalor principal λ_1 , es decir, un valor λ para el cual el problema

$$\begin{cases} F(\nabla v, D^2 v) = \lambda v, & \text{en } \Omega, \\ v > 0, & \text{en } \Omega, \\ v = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

tiene solución estrictamente positiva. Además, sabemos que (2.4.1) no tiene soluciones estrictamente positivas para $\lambda > \lambda_1$.

La existencia del primer autovalor y autofunción se utiliza en la prueba del Teorema 2.1.4. la cual se divide en etapas organizadas como subsecciones.

2.4.1. Un Principio de Comparación

El siguiente resultado es un Principio de Comparación que será necesario en lo sucesivo. La característica principal es que una vez probada la comparación estándar, la nueva información se reutiliza para probar comparación estricta.

Proposición 2.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $f, g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ con $0 < f \leq g$ en Ω . Consideramos $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1), (F2) y (F3). Finalmente, sean $u, v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ tales que*

$$F(\nabla u, D^2 u) \leq f(x), \quad \text{y} \quad F(\nabla v, D^2 v) \geq g(x), \quad \text{en } \Omega,$$

en sentido de viscosidad. Supongamos $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en $\bar{\Omega}$. Además, si $f < g$ en Ω , se tiene $u < v$ en Ω .

Demostración. 1. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v > 0$ en Ω , ya que añadir una constante tanto a u como a v no cambia el problema. Sea entonces

$$v_\epsilon(x) = (1 + \epsilon)v(x).$$

De hecho, por homogeneidad,

$$F(\nabla v_\epsilon, D^2 v_\epsilon) \geq (1 + \epsilon)g(x), \quad \text{y} \quad u - v_\epsilon \leq 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad (2.4.2)$$

para ϵ suficientemente pequeño. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$(u - v_\epsilon)(x_0) = \max_{\overline{\Omega}}(u - v_\epsilon) > 0.$$

Entonces, (2.4.2) implica $x_0 \notin \partial\Omega$. Definimos:

$$w(x, y) = u(x) - v_\epsilon(y) - \frac{\tau}{2}|x - y|^2$$

y denotamos (x_τ, y_τ) tales que $w(x_\tau, y_\tau) = \max_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} w(x, y)$. Por el Lema 0.6.22, estos pares (x_τ, y_τ) satisfacen:

1. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau |x_\tau - y_\tau|^2 = 0$.
2. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} w(x_\tau, y_\tau) = w(\hat{x}, \hat{x}) = \max_{\overline{\Omega}}(u - v)$, para cualquier (\hat{x}, \hat{x}) punto de acumulación de (x_τ, y_τ) .

Por tanto, podemos suponer que $x_\tau, y_\tau \rightarrow x_0$ as $\tau \rightarrow \infty$ en lo sucesivo sin pérdida de generalidad. Consecuentemente $x_\tau, y_\tau \in \Omega$ para todo τ suficientemente grande; aplicando el Principio del Máximo para funciones semicontinuas (Lema 0.6.20), existen dos matrices simétricas X_τ, Y_τ tales que

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2+} u(x_\tau), \quad y \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2-} v_\epsilon(y_\tau),$$

y $X_\tau \leq Y_\tau$ en sentido de matrices. Por definición de sub- y supersolución de viscosidad (ver [58]), tenemos

$$F(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \leq f(x_\tau),$$

y

$$F(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \geq (1 + \epsilon)g(y_\tau) \geq (1 + \epsilon)f(y_\tau).$$

Por elipticidad degenerada, se tiene,

$$(1 + \epsilon)f(y_\tau) - f(x_\tau) \leq F(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) - F(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \leq 0.$$

Haciendo $\tau \rightarrow \infty$, por continuidad, obtenemos

$$0 < \epsilon \cdot f(x_0) \leq 0,$$

una contradicción. Por tanto, $u \leq v_\epsilon$ en Ω , y, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, llegamos a $u \leq v$ en Ω .

2. Supondremos en lo sucesivo que $f < g$ en Ω . Si no se verifica $u \equiv v$ entonces tenemos que probar $u < v$ en Ω . Dado que ya hemos probado $u \leq v$ en Ω , supongamos para llegar a una contradicción que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = v(x_0)$, es decir, x_0 es un punto de máximo de $u - v$. Consecuentemente, x_0 será el único punto de máximo de $u(x) - v(x) - |x - x_0|^4$.

Consideramos

$$w(x, y) = u(x) - v(y) - |x - x_0|^4 - \frac{\tau}{2}|x - y|^2$$

y (x_τ, y_τ) tal que $w(x_\tau, y_\tau) = \max_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} w(x, y)$ como antes. Por las propiedades 1 y 2 más arriba, tenemos $x_\tau, y_\tau \rightarrow x_0$ cuando $\tau \rightarrow \infty$. Consecuentemente, $x_\tau, y_\tau \in \Omega$ para cada τ suficientemente grande. Aplicando el Principio del Máximo para funciones semicontinuas (Lema 0.6.20), encontramos dos matrices simétricas X_τ, Y_τ tales que

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2+}(u(x_\tau) - |x_\tau - x_0|^4), \quad y \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2-}v(y_\tau),$$

y $X_\tau \leq Y_\tau$ en el sentido de las matrices. En consecuencia

$$\begin{aligned} & (\tau(x_\tau - y_\tau) + 4|x_\tau - x_0|^2(x_\tau - x_0), \\ & X_\tau + 4|x_\tau - x_0|^2 Id + 4(x_\tau - x_0) \otimes (x_\tau - x_0)) \in \overline{\mathcal{J}}^{2+}u(x_\tau), \end{aligned}$$

Por definición de sub- y supersolución, se tiene

$$\begin{aligned} g(x_\tau) - f(y_\tau) & \leq F(\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \\ & \quad - F(\tau(x_\tau - y_\tau) + 4|x_\tau - x_0|^2(x_\tau - x_0), \\ & \quad X_\tau + 4|x_\tau - x_0|^2 Id + 4(x_\tau - x_0) \otimes (x_\tau - x_0)) \\ & \leq \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(Y_\tau - X_\tau) + O(|x_\tau - x_0|^2) \leq O(|x_\tau - x_0|^2). \end{aligned}$$

cuando $\tau \rightarrow 0$. Haciendo $\tau \rightarrow 0$ obtenemos $0 < g(x_0) - f(x_0) \leq 0$ por hipótesis y hemos terminado. \square

2.4.2. Existencia de solución para $0 < \lambda \leq \lambda_{\text{máx}}$ y no existencia para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$

En el Capítulo 1, Teorema 1.4.1 y Sección 1.5.1, hemos probado que existe un valor $\lambda_{\text{máx}} > 0$ tal que el problema (2.1.2) tiene al menos una solución positiva para $0 < \lambda < \lambda_{\text{máx}}$ y ninguna solución no trivial para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$. Vamos a extender el resultado de existencia hasta el valor crítico $\lambda = \lambda_{\text{máx}}$.

Proposición 2.4.2. *Sean $0 < q < 1 < r < \hat{r}$ y supongamos que $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface (F1), (F2), (F3) y (F4). Entonces existe un número $\lambda_{\text{máx}} > 0$ tal que el problema (2.1.2) tiene al menos una solución positiva para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}}]$ y ninguna para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$.*

Demostración. Para cada $\lambda < \lambda_{\text{máx}}$, sea $u_\lambda > 0$ la solución minimal del problema (2.1.2) encontrada en el Teorema 1.4.1 (ver también la Sección 1.5.1). Como el lado derecho de la ecuación (2.1.2) está uniformemente acotado debido a la Proposición 2.3.1, es decir,

$$\lambda u_\lambda^q + u_\lambda^r \leq \lambda_{\text{máx}} \|u_\lambda\|_\infty^q + \|u_\lambda\|_\infty^r \leq C,$$

por las estimaciones \mathcal{C}^α de Krylov-Safonov se tiene que existe una constante positiva C tal que

$$\|u_\lambda\|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} \leq C, \quad \text{uniformemente en } \lambda,$$

Consecuentemente, podemos aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelá para encontrar una sucesión $\{u_{\lambda_j}\}$ con $\lambda_j \rightarrow \lambda_{\text{máx}}$ cuando $j \rightarrow \infty$ que converge uniformemente a algún $u_{\lambda_{\text{máx}}}$. Cada u_{λ_j} es solución de viscosidad del problema (2.1.2) con

$\lambda = \lambda_j$. Por tanto, podemos pasar al límite en sentido de viscosidad y encontrar que $u_{\lambda_{\text{máx}}}$ es una solución del problema (2.1.2) con $\lambda = \lambda_{\text{máx}}$.

Para comprobar que $u_{\lambda_{\text{máx}}} > 0$, notamos que, por construcción $\|u_{\lambda_j}\|_\infty > c > 0$ uniformemente en j (por ejemplo, comparando con la solución del problema cóncavo para λ_j), por tanto $\|u_{\lambda_{\text{máx}}}\|_\infty > 0$. De ahí, se tiene $u_{\lambda_{\text{máx}}} > 0$ usando la desigualdad de Harnack débil (ver [39]). \square

2.4.3. Existencia de una segunda solución en $(0, \lambda_{\text{máx}})$ mediante argumentos de Teoría del Grado

Hemos probado los puntos (i) y (ii) del Teorema 2.1.4. A continuación probaremos que efectivamente, existe una segunda solución para $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$. Utilizaremos las estimaciones L^∞ que ya hemos probado y argumentos de Teoría del Grado.

Fijemos $\mu \in (0, \lambda_{\text{máx}})$ y consideramos $0 < \lambda_m < \mu < \lambda_M < \lambda_{\text{máx}}$. Según la Proposición 1.5.4 y el Lema 1.3.4 existen $v_{\lambda_M}, w_{\lambda_m}$ soluciones de viscosidad de

$$\begin{cases} F(\nabla v_{\lambda_M}, D^2 v_{\lambda_M}) = \lambda_M \\ v_{\lambda_M} > 0 & \text{en } \Omega, \\ v_{\lambda_M} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad \begin{cases} F(\nabla w_{\lambda_m}, D^2 w_{\lambda_m}) = \lambda_m d(x) \\ w_{\lambda_m} > 0, & \text{en } \Omega, \\ w_{\lambda_m} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

respectivamente, donde $d(x)$ es la distancia al borde normalizada, es decir,

$$d(x) = \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty}.$$

Es fácil comprobar (ver el Capítulo 1) que, para $t > 0$ suficientemente pequeño, la función

$$\underline{u} = t w_{\lambda_m}$$

es una solución de viscosidad de

$$\begin{cases} F(\nabla \underline{u}, D^2 \underline{u}) \leq \lambda_m \underline{u}^q + \underline{u}^r, & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} > 0, & \text{en } \Omega, \\ \underline{u} = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Además, existe $T(\lambda_M) > 0$ tal que

$$\bar{u} = T(\lambda_M) v_{\lambda_M},$$

es una solución de viscosidad de

$$\begin{cases} F(\nabla \bar{u}, D^2 \bar{u}) \geq \lambda_M \bar{u}^q + \bar{u}^r, & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} > 0, & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $t < T(\lambda_M)$. De hecho, como en sentido de viscosidad se tiene

$$F(\nabla \underline{u}, D^2 \underline{u}) \leq t \lambda_m < T(\lambda_M) \lambda_M = F(\nabla \bar{u}, D^2 \bar{u}),$$

podemos aplicar la Proposición 2.4.1 para obtener $\underline{u} < \bar{u}$ en Ω .

Definimos

$$X := \{v \in \mathcal{C}^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \partial\Omega, v > 0 \text{ en } \Omega\}$$

dotado con la topología de \mathcal{C}^1 , y

$$K_\mu(v) := F^{-1}(\mu v^q + v^r).$$

Los resultados en [39] y la Observación 2.1.1 implican que K_μ lleva X en si mismo, es decir, $K_\mu : X \rightarrow X$.

Definamos ahora $\chi \subset X$ como

$$\chi = \{v \in X : \underline{u} \leq v \leq \bar{u}\}.$$

Entonces, se tiene $K_\mu : \chi \rightarrow \chi$. Para comprobarlo, sea $v \in \chi$, es decir, $v \in X$ tal que $\underline{u} \leq v \leq \bar{u}$. Vamos a demostrar que $\underline{u} < K_\mu(v) < \bar{u}$. Sea $w = K_\mu(v)$; entonces,

$$F(\nabla \underline{u}, D^2 \underline{u}) \leq \lambda_m \underline{u}^q + \underline{u}^r < \mu v^q + v^r = F(\nabla w, D^2 w).$$

Otra vez, la Proposición 2.4.1 implica $\underline{u} < w$ en Ω y por tanto $\underline{u} < K_\mu(v)$. La otra desigualdad se obtiene de manera similar.

Por las estimaciones $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ en [39] (ver también la Observación 2.1.1) y los cálculos anteriores se tiene que K_μ es compacto. Además, $\overline{K_\mu(\chi)} \subset \chi$ es un conjunto compacto en X . Por tanto, el Teorema del punto fijo de Schauder implica que existe $u_\mu \in \chi$ tal que $K_\mu(u_\mu) = u_\mu$, es decir, una solución del problema (2.1.2) con $\lambda = \mu$.

Si u_μ no es el único punto fijo en χ hemos terminado. En caso contrario, por la Proposición 2.4.1, es fácil demostrar que $\underline{u} < u_\mu < \bar{u}$ en Ω . De hecho, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.4.3. *Existe $\epsilon > 0$ tal que $u_\mu + \epsilon \mathcal{B}_1(0) \subset \chi$, donde $\mathcal{B}_1(0)$ denota la bola unidad con centro en 0 de X .*

Demostración. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, definimos

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Previamente, hemos probado que $\underline{u} < u_\mu < \bar{u}$; entonces, usando las estimaciones $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ en [39], existe una constante $C > 0$ tal que $\bar{u}(x) < C \text{dist}(x, \partial\Omega)$ para todo $x \in \Omega_\delta$. Por el Lema de Hopf (Proposición 1.5.5) es fácil comprobar que existe una constante $c > 0$ tal que $c \text{dist}(x, \partial\Omega) < \underline{u}(x)$ para cada $x \in \Omega_\delta$ (para $\delta > 0$ posiblemente más pequeño que antes, dependiendo de las propiedades geométricas del dominio).

Sean $x_0 \in \partial\Omega$ y $\nu_{x_0} = \nu(x_0)$ la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ en x_0 . Por las mencionadas estimaciones $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, obtenemos que existe $t_0 = t_{x_0} > 0$ tal que

$$\bar{u}(x_0 - t\nu_{x_0}) < C \text{dist}(x_0 - t\nu_{x_0}, \partial\Omega), \quad \forall 0 < t < t_0. \quad (2.4.5)$$

Observemos que $x_0 \in \partial\Omega$ es arbitrario, así que podemos cubrir $\partial\Omega$ mediante $\bigcup_{x \in \partial\Omega} B_{t_x}(x)$, para t_x definido como en (2.4.5). Por la compacidad de $\partial\Omega$, existe $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in \partial\Omega$ y $t_j = t_{x_j}$, para $j = 1, \dots, m$, que verifican (2.4.5) y tales que

$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^m B_{t_j}(x_j)$. Como consecuencia, existe $\tilde{t} > 0$ tal que para todo $x \in \partial\Omega$, se tiene

$$\bar{u}(x - t\nu_x) < C \cdot \text{dist}(x - t\nu_x, \partial\Omega), \quad \forall 0 < t < \tilde{t} \leq \min_{j=1, \dots, m} t_j. \quad (2.4.6)$$

Por tanto, hemos probado que $\bar{u}(x) < C \text{dist}(x, \partial\Omega)$ para cualquier $x \in \Omega_{\tilde{t}}$. No es difícil comprobar que $\bar{u}(x) < C \text{dist}(x, \partial\Omega)$ para cada $x \in \Omega \setminus \Omega_{\tilde{t}}$ con C más grande que antes si fuera necesario. Estos argumentos prueban que existe una constante positiva C que verifica

$$\bar{u}(x) < C \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.4.7)$$

Argumentando de manera similar pero utilizando el Lema de Hopf en lugar de las estimaciones para el gradiente, se obtiene que existe una constante $c > 0$ tal que

$$c \text{dist}(x, \partial\Omega) < \underline{u}(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.4.8)$$

Utilizando (2.4.7), (2.4.8) y las estimaciones $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, podemos interpolar la función distancia al borde (multiplicada por una constante suficientemente pequeña) en las desigualdades $\underline{u} < u_\mu < \bar{u}$ en el sentido siguiente: existe $0 < \epsilon \ll 1$ tal que

$$\underline{u}(x) + \epsilon \text{dist}(x, \partial\Omega) < u_\mu(x) < \bar{u}(x) - \epsilon \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.4.9)$$

Probaremos, por ejemplo, la primera desigualdad: $\underline{u}(x) + \epsilon \text{dist}(x, \partial\Omega) < u_\mu(x)$ para todo $x \in \Omega$. Sea $x_0 \in \partial\Omega$, t_0 y ν_{x_0} como antes, y definamos $w = \underline{u} - u_\mu$.

Entonces, se tiene:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 w) - \gamma |\nabla w| \leq 0, & \text{en } \Omega, \\ w(x) < 0 = w(x_0), & \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Pospondremos momentáneamente la prueba del hecho anterior. Por el Lema de Hopf (Proposición 1.5.5), existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$w(x_0 - t\nu_{x_0}) < -\epsilon_0 \text{dist}(x_0 - t\nu_{x_0}, \partial\Omega)$$

para cualquier $0 < t < t_0$, así que, por continuidad podemos tomar $\delta_0 > 0$ tal que $w(x) < -\epsilon_0 \text{dist}(x, \partial\Omega)$ para todo $x \in B_{\delta_0}(x_0) \cap \Omega$. Utilizando que $x_0 \in \partial\Omega$ es arbitrario y un argumento de compacidad como antes, concluimos que $w(x) < -\epsilon \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega)$ para todo $x \in \Omega$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. La segunda desigualdad en (2.4.9) se prueba de manera similar.

Para concluir, sólo falta probar que $\underline{u} - u_\mu$ satisface (2.4.10). Nótese que si $\underline{u} - u_\mu \in \mathcal{C}^2$, entonces (2.4.10) es una consecuencia inmediata de la hipótesis de estructura (F3). Como esta regularidad no se tiene en general, probaremos (2.4.10) adaptando el método de la prueba del Teorema 5.3 en [39].

Fijemos subdominios H y H_1 tales que $\overline{H}_1 \subset H \subset \overline{H} \subset \Omega$. Por simplicidad denotamos

$$u(x) = \underline{u}(x) \quad \text{y} \quad v(x) = u_\mu(x).$$

Tomamos su sup- e inf-convolución (véase por ejemplo el capítulo 5 en [39]), respectivamente,

$$u^\epsilon(x) = \sup_{y \in \overline{H}} \left\{ u(y) + \epsilon - \frac{1}{\epsilon} |y - x|^2 \right\}, \quad \text{para } x \in H,$$

y

$$v_\epsilon(x) = \inf_{y \in \overline{H}} \left\{ v(y) - \epsilon + \frac{1}{\epsilon} |y - x|^2 \right\}, \quad \text{para } x \in H.$$

De hecho, u^ϵ, v_ϵ son, respectivamente, soluciones de viscosidad de

$$F(\nabla u^\epsilon, D^2 u^\epsilon) \leq f_{\lambda_m}(u + c^2 \epsilon + o(\epsilon)) \quad \text{en } H_1 \quad (2.4.11)$$

y

$$F(\nabla v_\epsilon, D^2 v_\epsilon) \geq f_\mu(v - c^2 \epsilon + o(\epsilon)) \quad \text{en } H_1 \quad (2.4.12)$$

donde $c = \max\{\|\nabla u\|_\infty, \|\nabla v\|_\infty\}$ (nótese que $u, v \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$). Veamos la demostración en el caso de u^ϵ .

Sean $\phi \in \mathcal{C}^2$, y $\hat{x} \in H$ tales que $(u^\epsilon - \phi)(x) \leq (u^\epsilon - \phi)(\hat{x}) = 0$ para todo $x \in B = \{y \in H : |y - \hat{x}| < \text{dist}(\hat{x}^*, \partial H)\}$, con $\hat{x}^* \in \overline{H}$ de modo que

$$u^\epsilon(\hat{x}) = \sup_{y \in \overline{H}} \left\{ u(y) + \epsilon - \frac{1}{\epsilon} |y - \hat{x}|^2 \right\} = u(\hat{x}^*) + \epsilon - \frac{1}{\epsilon} |\hat{x}^* - \hat{x}|^2.$$

Definamos $\Phi(y) = \phi(y + \hat{x} - \hat{x}^*) + \frac{1}{\epsilon} |\hat{x}^* - \hat{x}|^2 - \epsilon$. Entonces, $u - \Phi$ tiene un máximo local en \hat{x}^* , es decir, $(u - \Phi)(y) \leq (u - \Phi)(\hat{x}^*) = 0$. Nótese que

$$|\hat{x}^* - \hat{x}| \leq \|\nabla u\|_\infty \cdot \epsilon \quad (2.4.13)$$

y, consecuentemente, $\hat{x}^* \in H$ para ϵ suficientemente pequeño. Como $x \in B$, tendremos $y = x - \hat{x} + \hat{x}^* \in H$.

Por tanto, como u satisface $F(\nabla u, D^2 u) \leq f_{\lambda_m}(u)$ en sentido de viscosidad, tenemos por la definición de solución de viscosidad que

$$F(\nabla \Phi(\hat{x}^*), D^2 \Phi(\hat{x}^*)) \leq f_{\lambda_m}(u(\hat{x}^*))$$

y, por la definición de Φ ,

$$F(\nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x})) \leq f_{\lambda_m}(u(\hat{x}^*)).$$

Finalmente, como $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$, su desarrollo de Taylor y (2.4.13) nos dan

$$u(\hat{x}^*) \leq u(\hat{x}) + \|\nabla u\|_\infty \cdot |\hat{x}^* - \hat{x}| + o(|\hat{x}^* - \hat{x}|) \leq u(\hat{x}) + c^2 \epsilon + o(\epsilon).$$

Entonces, se tiene

$$F(\nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x})) \leq f_{\lambda_m}(u(\hat{x}) + c^2 \epsilon + o(\epsilon)).$$

y hemos probado (2.4.11).

Continuando con la prueba de (2.4.10), necesitamos probar que para ϵ suficientemente pequeño,

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2(u^\epsilon - v_\epsilon)) - \gamma |\nabla(u^\epsilon - v_\epsilon)| \leq 0 \quad \text{en } H_1, \quad (2.4.14)$$

en sentido de viscosidad. Entonces, dado que $H_1 \subset \Omega$ es arbitrario y $u^\epsilon - v_\epsilon$ converge uniformemente a $u - v$ (ver [39]), podemos pasar al límite en el sentido de viscosidad en (2.4.14) para obtener (2.4.10).

Para $\eta > 0$ suficientemente pequeño, podemos fijar $\epsilon_0 > 0$ pequeño de forma que para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$f_{\lambda_m}(u(x) + c^2 \epsilon + o(\epsilon)) - f_{\mu}(v(x) - c^2 \epsilon + o(\epsilon)) \leq -\eta, \quad \forall x \in \overline{H} \quad (2.4.15)$$

donde $f_{\lambda}(t) = \lambda t^q + t^r$. Claramente, ϵ_0 depende de $u, v, \nabla u, \nabla v$ y H .

Ahora, para $\epsilon < \epsilon_0$ podemos considerar un paraboloide P que toque a $u^\epsilon - v_\epsilon$ por arriba en $x_0 \in H_1$. Más precisamente, consideramos P que verifique

$$((u^\epsilon - v_\epsilon) - P)(x) \leq ((u^\epsilon - v_\epsilon) - P)(x_0) = 0, \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

para $r > 0$ todavía por fijar. Queremos probar que

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2 P(x_0)) - \gamma |\nabla P(x_0)| \leq 0.$$

Para ello, tomamos $\delta > 0$ y definimos

$$w(x) = v_\epsilon(x) - u^\epsilon(x) + P(x) + \delta |x - x_0|^2 - \delta r^2.$$

La regularidad de u, v , implica

$$|\nabla w(x)| = |\nabla w(x) - \nabla w(x_0)| \leq C \cdot |x - x_0|^\alpha < C \cdot r^\alpha \quad \forall x \in B_r(x_0) \quad (2.4.16)$$

para ciertas constantes positivas α y C que dependen de u, v, ϵ^{-1} y P . Por tanto, dado que P está fijo, podemos suponer que r es suficientemente pequeño como para que

$$\gamma \|D^2 P\| r < \frac{\eta}{2}, \quad \text{y} \quad \gamma C r^\alpha < \frac{\eta}{2}. \quad (2.4.17)$$

y además $B_{2r}(x_0) \subset H$.

Utilizando (b) en el Teorema 5.1 en [39], sabemos que para todo $x \in \overline{B}_r(x_0)$ existe un paraboloide convexo P^x de abertura K independiente de x que toca a w por arriba en el punto x localmente en $B_r(x)$, es decir

$$(w - P^x)(y) < (w - P^x)(x) = 0 \quad \forall y \in B_r(x) \setminus \{x\}.$$

Definamos la envolvente convexa de w en $B_r(x_0)$ como

$$\Gamma_w(x) = \sup_g \{g(x) : g \leq w \text{ en } B_r(x_0), \text{ y } g \text{ convexa en } B_r(x_0)\}.$$

El conjunto $\{w = \Gamma_w\}$ se conoce como el conjunto de contacto inferior de w . Por construcción, tenemos $w \geq 0$ en $\partial B_r(x_0)$ y $w(x_0) < 0$. Por tanto podemos aplicar el Lema 3.5 en [39] a w en $B_r(x_0)$ para mostrar que si $x \in \overline{B}_r(x_0) \cap \{w = \Gamma_w\}$, entonces P^x también toca a Γ_w por arriba en x localmente en $B_r(x)$. De hecho, como $w(x_0) < 0$, el susodicho lema implica

$$0 < \sup_{B_r(x_0)} w^- \leq C(n) r \left(\int_{B_r(x_0) \cap \{w = \Gamma_w\}} \det(D^2 \Gamma_w) dy \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.4.18)$$

Obsérvese que necesariamente $|B_r(x_0) \cap \{w = \Gamma_w\}| > 0$.

Por (b) en el Teorema 5.1 en [39], sabemos que existe $A \subset B_r(x_0)$ tal que $|B_r(x_0) \setminus A| = 0$, y u^ϵ, v_ϵ (y por tanto w) son puntualmente diferenciables hasta

el segundo orden en A . En efecto, por (c) en el Teorema 5.1 en [39], las ecuaciones (2.4.11) y (2.4.12) se satisfacen puntualmente en A .

Como Γ_w es convexo y $\Gamma_w \leq w$, se tiene que $D^2w(x) \geq 0$ para $x \in A \cap \{w = \Gamma_w\}$. Se deduce de (2.4.18) y $|B_r(x_0) \setminus A| = 0$ que

$$|\{w = \Gamma_w\} \cap A| > 0,$$

y por tanto, que existe al menos un punto $x_1 \in \{w = \Gamma_w\} \cap A$. En dicho punto, se tiene

$$F(\nabla u^\epsilon(x_1), D^2u^\epsilon(x_1)) \leq f_{\lambda_m}(u(x_1) + c^2\epsilon + o(\epsilon)),$$

$$F(\nabla v_\epsilon(x_1), D^2v_\epsilon(x_1)) \geq f_\mu(v(x_1) - c^2\epsilon + o(\epsilon)),$$

y $D^2w(x_1) \geq 0$. Deducimos que

$$\begin{aligned} F(\nabla u^\epsilon(x_1), D^2u^\epsilon(x_1)) &= \\ &= F(\nabla v_\epsilon(x_1) - \nabla w(x_1) + \nabla P(x_1) + 2\delta(x_1 - x_0), \\ &\quad D^2v_\epsilon(x_1) - D^2w(x_1) + D^2P + 2\delta I) \\ &\geq F(\nabla v_\epsilon(x_1) + \nabla P(x_1) + 2\delta(x_1 - x_0), \\ &\quad D^2v_\epsilon(x_1) + D^2P + 2\delta I) - \gamma|\nabla w(x_1)| \\ &\geq F(\nabla v_\epsilon(x_1), D^2v_\epsilon(x_1)) - \gamma|\nabla w(x_1)| \\ &\quad + \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2P) - \gamma|\nabla P(x_1)| + \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(2\delta I) - 2\gamma\delta|x_1 - x_0| \\ &\geq F(\nabla v_\epsilon(x_1), D^2v_\epsilon(x_1)) - \gamma|\nabla w(x_1)| \\ &\quad + \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2P) - \gamma|\nabla P(x_1)| - 2\delta(n\Theta + \gamma r). \end{aligned}$$

Nótese que

$$|\nabla P(x_1)| = \left| \nabla P(x_0) + D^2P \frac{x_1 - x_0}{|x_1 - x_0|} |x_1 - x_0| \right| \leq |\nabla P(x_0)| + \|D^2P\| r$$

Las desigualdades anteriores, juntamente con (2.4.15), (2.4.16) y (2.4.17) implican

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2P) - \gamma|\nabla P(x_0)| &\leq f_{\lambda_0}(u(x_1) + c^2\epsilon + o(\epsilon)) - f_\mu(v(x_1) - c^2\epsilon + o(\epsilon)) \\ &\quad + 2\delta(n\Theta + \gamma r) + \gamma\|D^2P\| r + \gamma Cr^\alpha \\ &\leq 2\delta(n\Theta + \gamma r). \end{aligned}$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$, terminamos la prueba de (2.4.10) y, por tanto, del Lema 2.4.3. \square

Para completar la prueba de la existencia de un segundo punto fijo en X , seguimos los argumentos en [4] y, más precisamente, en [6].

Por las propiedades de permanencia y escisión del grado topológico, tenemos

$$\begin{aligned} \deg(I - K_\mu, u_\mu + \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) \\ = i(K_\mu, u_\mu + \epsilon\mathcal{B}_1(0), \chi) = i(K_\mu, \chi, \chi) = 1. \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

donde la última igualdad se tiene por ser u_μ un punto fijo de K_μ (ver la prueba del Teorema del Punto Fijo de Schauder en [4, Página 660]).

Por otra parte, notamos que el problema (2.1.2) no tiene solución positiva para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$. Como la Proposición 2.3.1 nos da cotas uniformes L^∞ , los resultados en [39] proporcionan cotas uniformes en $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, véase la Observación 2.1.1. En particular, existe $C > 0$ independiente de λ tal que cada $u > 0$ solución del problema (2.1.2) satisface

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1} \leq C.$$

Tomamos $\rho > C$. Entonces, por la invariancia del grado de Leray-Schauder por homotopías (nótese que la homotopía es admisible porque no hay soluciones u del problema (2.1.2) con $\|u\|_{\mathcal{C}^1} = \rho$), se tiene

$$\deg(I - K_\mu, \rho\mathcal{B}_1(0), 0) = \deg(I - K_{\lambda_{\text{máx}} + \delta}, \rho\mathcal{B}_1(0), 0) = 0.$$

Entonces, de la propiedad de escisión del grado topológico y (2.4.19) se deduce

$$\begin{aligned} \deg(I - K_\mu, \rho\mathcal{B}_1(0) \setminus \{u_\mu + \epsilon\mathcal{B}_1(0)\}, 0) \\ = \deg(I - K_\mu, \rho\mathcal{B}_1(0), 0) - \deg(I - K_\mu, u_\mu + \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = -1. \end{aligned}$$

Por tanto, K_μ tiene otro punto fijo $\hat{u}_\mu \in \rho\mathcal{B}_1(0) \setminus \{u_\mu + \epsilon\mathcal{B}_1(0)\}$.

Falta probar que la solución no trivial $u = 0$ tiene grado 0, es decir, $\deg(I - K_\mu, \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = 0$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Para ello, nótese que existe $\tilde{\lambda}$ tal que para todo $\tau > 0$ el problema

$$\begin{cases} F(\nabla u, D^2 u) = \tilde{\lambda}u^q + u^r + \tau & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.20)$$

no tiene ninguna solución positiva. De hecho, argumentando como en la prueba del Teorema 1.4.8, para un $\delta > 0$ dado es fácil encontrar $\tilde{\lambda} > 0$ tal que

$$\tilde{\lambda}u^q + u^r > (\lambda_1 + \delta)u,$$

y por tanto, obviamente,

$$\tilde{\lambda}u^q + u^r + \tau > (\lambda_1 + \delta)u,$$

para todo $\tau > 0$. Siguiendo los argumentos en la prueba del Teorema 1.4.8, obtenemos una autofunción positiva asociada a $\lambda_1 + \delta$, una contradicción con los resultados de existencia de autovalores en [30], ya mencionados al principio de esta sección.

Se deduce que la homotopía

$$H(\tau, u) = u - F^{-1}(\tilde{\lambda}u^q + u^r + \tau)$$

es admisible y por tanto

$$\deg(I - K_{\tilde{\lambda}}, \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = \deg(H(0, \cdot), \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = \deg(H(1, \cdot), \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = 0$$

para todo $\epsilon > 0$. Entonces, para ϵ pequeño, otra vez por homotopía, deducimos

$$\deg(I - K_\mu, \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = \deg(I - K_{\tilde{\lambda}}, \epsilon\mathcal{B}_1(0), 0) = 0.$$

Como consecuencia, existe $\epsilon > 0$ tal que $u = 0$ es la única solución no negativa de (2.1.2) en $\epsilon\mathcal{B}_1(0)$, lo que concluye la prueba del Teorema 2.1.4. \square

2.5. Ejemplos de aplicación

Esta sección está dedicada a ejemplos de aplicación del resultado de multiplicidad global, el Teorema 2.1.4

En primer lugar tratamos el caso en el que G es un operador extremal de Pucci, que incluye al Laplaciano como caso particular (subsección 2.5.1). En las subsecciones 2.5.2, y 2.5.3 trataremos operadores cóncavos (convexos) y, respectivamente, una clase de operadores de Isaacs que no son ni cóncavos ni convexos. Siempre supondremos que los operadores considerados satisfacen la hipótesis de invariancia (F4) que, de hecho, se verifica de manera natural en el caso de los operadores extremales de Pucci.

Merece la pena comparar estos ejemplos con los resultados en [5] donde se estudia el problema (2.1.2) para el Laplaciano mediante métodos variacionales.

Los resultados en [5] son óptimos, dado que el rango maximal de exponentes, $1 < r < 2^* - 1$, es conocido gracias a los resultados en [77]. Sin embargo, los argumentos (en particular aquellos que conducen a las estimaciones L^∞) dependen fuertemente de la estructura del Laplaciano.

Los ejemplos siguientes no tienen características importantes del Laplaciano como son la estructura variacional o la regularidad clásica de las soluciones (que no se conoce en todos los casos), lo cual hace necesario el marco de viscosidad establecido en las Secciones 2.2 – 2.4.

2.5.1. Operadores extremales de Pucci

Cuando F involucra un operador extremal de Pucci, es decir,

$$F(\xi, X) = \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm(X) + H(\xi),$$

con $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ homogéneo y Lipschitz continuo y tal que $H(0) = 0$, es claro que se satisfacen las hipótesis (F1)–(F4).

Obsérvese que $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm$ admiten estimaciones $\mathcal{C}^{2, \alpha}$, en el sentido siguiente: si la función u es una solución de viscosidad de $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^\pm(D^2 u) = g(x)$ en una bola B_{2R} y $g \in \mathcal{C}^\alpha$ para algún $\alpha \in (0, 1)$, entonces $u \in \mathcal{C}^{2, \alpha}$ y además,

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2, \alpha}(B_R)} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_{2R})} + \|g\|_{\mathcal{C}^\alpha(B_{2R})})$$

para alguna constante $C > 0$. Gracias a estas estimaciones $\mathcal{C}^{2, \alpha}$ es posible simplificar notablemente la prueba del resultado de monotonía, Teorema 2.2.1.

El Teorema de monotonía 2.2.1 fue probado en el contexto de los operadores extremales de Pucci por Quaas y Sirakov [115] siguiendo las ideas de [24].

Además, Quaas y Sirakov (ver [115]) obtienen el siguiente resultado de tipo Liouville en \mathbb{R}_+^n para los operadores de Pucci como consecuencia del resultado de monotonía, Teorema 2.2.1. La prueba se basa en un argumento de reducción de dimensión en [24] y el resultado de tipo Liouville de Cutrì-Leoni (Teorema 2.1.3) aplicado en \mathbb{R}^{n-1} .

Teorema 2.5.1 ([115, Teorema 1.5]). *Supongamos $n \geq 3$ y sea*

$$1 < r \leq \frac{\Theta(n-2) + \theta}{\Theta(n-2) - \theta}$$

(ó $1 < r < \infty$ si $n \leq \theta \cdot \Theta^{-1} + 2$, en este caso necesariamente $n = 3$ y $\Theta = \theta$). Entonces, la única solución no negativa y acotada del problema

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^{\pm}(D^2 v) = v^r, & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ v = 0, & \text{en } \partial \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (2.5.1)$$

es la solución trivial $v = 0$.

Es importante señalar que el rango de exponentes en el Teorema 2.5.1 es mayor que el correspondiente al Teorema 2.1.3. Por tanto, es este último el que da lugar al exponente crítico \hat{r} en el Teorema 2.1.4. Este hecho es coherente con la información obtenida del Teorema 2.2.1 en el argumento de *blow-up*, es decir, que la propiedad de monotonía impide que el problema en el semiespacio tenga una solución acotada y no negativa distinta de la trivial, independientemente del exponente $r > 1$.

En el caso particular $G = \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-$ el rango de exponentes en el Teorema 2.1.3 se puede mejorar hasta

$$1 < r \leq \frac{\theta(n-1) + \Theta}{\theta(n-1) - \Theta}$$

(ver la Observación 2.5.3). Consecuentemente, también puede mejorarse el Teorema 2.5.1 para este operador.

El resultado de multiplicidad, Teorema 2.1.4, se verifica en este contexto y queda como sigue:

Teorema 2.5.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un dominio acotado con frontera C^2 . Consideramos $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 1-homogéneo y Lipschitz continuo. Sea \hat{r}_+ el exponente crítico para el operador $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+$ (respectivamente \hat{r}_- para $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-$). Entonces, para $0 < q < 1 < r < \hat{r}_{\pm}$, existe $0 < \lambda_{\text{máx}} < \infty$ tal que el problema:*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{\theta, \Theta}^{\pm}(D^2 u) + H(\nabla u) = \lambda u^q + u^r, & \text{en } \Omega, \\ u > 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.5.2)$$

(i) No tiene ninguna solución positiva para $\lambda > \lambda_{\text{máx}}$.

(ii) Tiene al menos una solución positiva para $\lambda = \lambda_{\text{máx}}$.

(iii) Tiene al menos dos soluciones positivas para cada $\lambda \in (0, \lambda_{\text{máx}})$.

Observación 2.5.3. Los operadores $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-$ y $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+$ tienen un comportamiento similar pero no son intercambiables. Aplicando el resultado de Cutrì-Leoni (Teorema 2.1.3), se sabe que para el operador $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+$ se tiene

$$\hat{r}_+ \geq \frac{\Theta(n-1) + \theta}{\Theta(n-1) - \theta}, \quad \text{si } n > \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$$

($\hat{r}_+ = \infty$ si $n \leq \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$, que sólo se verifica si $n = 2$ y $\Theta = \theta$). Sin embargo, según [61, Observación 8]), para el operador $\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-$ se tiene

$$\hat{r}_- \geq \frac{\theta(n-1) + \Theta}{\theta(n-1) - \Theta}, \quad \text{si } n > \Theta \cdot \theta^{-1} + 1$$

($\hat{r}_- = \infty$ si $n \leq \Theta \cdot \theta^{-1} + 1$). Nótese que si $\theta < \Theta$, se tiene

$$\frac{\Theta(n-1) + \theta}{\Theta(n-1) - \theta} < \frac{\theta(n-1) + \Theta}{\theta(n-1) - \Theta}.$$

Considerando soluciones del problema (2.1.9) en lugar de meras supersoluciones, es posible mejorar el rango de exponentes para los que se verifican los resultados de tipo Liouville en \mathbb{R}^n . De hecho, el exponente crítico para el Laplaciano (el operador de Pucci con $\theta = \Theta = 1$) es

$$\hat{r} = 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2},$$

donde $2^* = 2n/(n-2)$ es el exponente de Sobolev (ver [77]).

En el caso radial, Felmer y Quaas [70] prueban resultados de tipo Liouville para soluciones, en lugar de simplemente supersoluciones como en [61], que dan lugar a los exponentes críticos para los operadores de Pucci radiales.

Teorema 2.5.4 ([70, Teorema 1.1]). *Sea $\Omega = B_1(0)$, $n \geq 3$. Definamos*

$$\tilde{n}_- = \frac{\theta}{\Theta}(n-1) + 1.$$

Entonces, la ecuación

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^-(D^2v) = v^r, \quad v \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \quad (2.5.3)$$

no tiene soluciones radiales no triviales para $1 < r < \hat{r}_-$, donde

$$\max \left\{ \frac{\tilde{n}_-}{\tilde{n}_- - 2}, \frac{n+2}{n-2} \right\} < \hat{r}_- < \frac{\tilde{n}_- + 2}{\tilde{n}_- - 2}, \quad \text{para } \tilde{n}_- > 2 \quad \text{y } \theta < \Theta,$$

$\hat{r}_- = 2^* - 1 = (n+2)/(n-2)$ si $\tilde{n}_- > 2$ y $\theta = \Theta$ y $\hat{r}_- = \infty$ si $\tilde{n}_- \leq 2$. Además, para cada $r \geq \hat{r}_-$, el problema (2.5.3) tiene soluciones radiales no triviales.

Teorema 2.5.5 ([70, Teorema 1.2]). *Sea $\Omega = B_1(0)$, $n \geq 3$. Definamos*

$$\tilde{n}_+ = \frac{\Theta}{\theta}(n-1) + 1.$$

Entonces, la ecuación

$$\mathcal{P}_{\theta, \Theta}^+(D^2v) = v^r, \quad v \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \quad (2.5.4)$$

no tiene soluciones radiales no triviales para $1 < r < \hat{r}_+$, donde

$$\frac{\tilde{n}_+ + 2}{\tilde{n}_+ - 2} < \hat{r}_+ < \frac{n+2}{n-2}, \quad \text{si } \theta < \Theta,$$

y $\hat{r}_+ = 2^* - 1 = (n+2)/(n-2)$ si $\theta = \Theta$. Además, para cada $r \geq \hat{r}_+$, el problema (2.5.4) tiene soluciones radiales no triviales.

Observación 2.5.6. Nótese que $\tilde{n}_+ \geq n \geq 3$ y por tanto $\tilde{n}_+ - 2 > 0$.

Es interesante señalar que no se conocen expresiones explícitas de los exponentes críticos radiales \hat{r}_\pm , en términos de θ, Θ, n . Sin embargo, cuando $\theta = \Theta$ se tiene $\hat{r}_+ = \hat{r}_- = 2^* - 1$, el exponente en [77] que, como ya hemos dicho, es óptimo también en el caso no radial. Establecer resultados de tipo Liouville en dominios generales para los rangos

$$\frac{\tilde{n}_+}{\tilde{n}_+ - 2} = \frac{\Theta(n-1) + \theta}{\Theta(n-1) - \theta} < r < \hat{r}_+, \quad \text{y} \quad \frac{\tilde{n}_-}{\tilde{n}_- - 2} = \frac{\theta(n-1) + \Theta}{\theta(n-1) - \Theta} < r < \hat{r}_-,$$

así como la caracterización de \hat{r}_\pm en términos de θ, Θ, n , son, hasta donde sabemos, problemas abiertos.

2.5.2. Operadores cóncavos y convexos

Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis (F1)-(F4), y supongamos que el operador de *blow-up* $G(X) = F(0, X)$ es cóncavo (o convexo).

Cuando el operador G es cóncavo (o convexo) se tiene el siguiente resultado de regularidad de Evans-Krylov (ver [66, 97, 98] y también [39, Sección 8.1]).

Teorema 2.5.7. *Sea $G : \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente elíptico con constantes $0 < \theta < \Theta$ y cóncavo (convexo). Si la función u es una solución de viscosidad de la ecuación*

$$G(D^2u) = g(x) \tag{2.5.5}$$

en una bola B_{2R} y $g \in C^\alpha$ para algún $\alpha \in (0, 1)$, entonces $u \in C^{2,\alpha}$ y además,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_R)} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_{2R})} + \|g\|_{C^\alpha(B_{2R})}).$$

Si además (2.5.5) se satisface en un dominio regular y $u = 0$ en la frontera del dominio, entonces u satisface una estimación C^α hasta la frontera.

Al igual que en el caso de los operadores extremales de Pucci, la regularidad clásica de las soluciones (Teorema 2.5.7) simplifica las pruebas.

El resultado de multiplicidad, Teorema 2.1.4 es válido en este caso con

$$\hat{r} \geq \frac{\Theta(n-1) + \theta}{\Theta(n-1) - \theta}, \quad \text{si} \quad n > \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$$

($\hat{r} = \infty$ si $n \leq \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$, que sólo se verifica si $n = 2$ y $\Theta = \theta$).

2.5.3. Una clase de operadores de Isaacs

Finalmente, aplicamos el análisis anterior a una clase de operadores que no son ni cóncavos ni convexos y para los que la regularidad clásica de las soluciones no se conoce en general. En este caso, el marco de viscosidad es fundamental.

Consideramos la clase de operadores de Isaacs

$$F(\xi, X) = \sup_{l \in \mathcal{L}} \inf_{k \in \mathcal{K}} \{L_{k,l}(\xi, X)\}, \tag{2.5.6}$$

donde \mathcal{K} y \mathcal{L} son conjuntos arbitrarios de índices y $L_{k,l}$ son de la forma

$$L_{k,l}(\xi, X) = -\text{traza}(A_{k,l}X) + H_{k,l}(\xi)$$

para $H_{k,l} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 1-homogéneo y Lipschitz continuo (todos con la misma constante), tales que $H_{k,l}(0) = 0$ y $A_{k,l}$ una familia de matrices con las mismas constantes de elipticidad.

Supongamos además que la hipótesis de simetría (F4) se verifica para el operador $G(X) = F(0, X)$. Más precisamente, supondremos que para cada $Q \in \mathcal{O}^n$, siempre que $A_{k,l} \in \mathcal{S}^n$ dé lugar a un operador $L_{k,l}$, con $(k, l) \in \mathcal{K} \times \mathcal{L}$, la matriz $QA_{k,l}Q^t$ da lugar a $L_{\tilde{k}, \tilde{l}}$ para algún otro par $(\tilde{k}, \tilde{l}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{L}$.

Entonces, el resultado de multiplicidad, Teorema 2.1.4 se tiene para el operador (2.5.6) con

$$\hat{r} \geq \frac{\Theta(n-1) + \theta}{\Theta(n-1) - \theta}, \quad \text{si } n > \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$$

($\hat{r} = \infty$ si $n \leq \theta \cdot \Theta^{-1} + 1$, que sólo se verifica si $n = 2$ y $\Theta = \theta$).

Es pertinente señalar que la regularidad clásica de las soluciones no se conoce en general para el problema (2.5.6). Sin embargo hay algunos resultados en este sentido; en [40] se prueba regularidad clásica para operadores de Isaacs de la forma particular

$$F(\xi, X) = \min \{ F^\cap(\xi, X), F^\cup(\xi, X) \}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ y } X \in \mathcal{S}^n \quad (2.5.7)$$

con $F^\cup : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $F^\cap : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ operadores uniformemente elípticos, convexo y cóncavo en el argumento matricial respectivamente (claramente F en (2.5.7) no es ni cóncavo ni convexo). Como antes, el operador modelo en las hipótesis anteriores es

$$F(\nabla u, D^2 u) = \min \left\{ \inf_{k \in \mathcal{K}} L_k u, \sup_{l \in \mathcal{L}} L_l u \right\}$$

donde

$$L_k u = -\text{traza}(A_k D^2 u) + H_k(\nabla u).$$

Para operadores de Isaacs de la forma particular (2.5.7) la prueba del resultado de multiplicidad, se simplificaría notablemente.

Capítulo 3

Límite cuando $p \rightarrow \infty$ de p -Laplacianos con un lado derecho cóncavo y cóncavo-convexo

3.1. Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Sea $L_f(\partial\Omega)$ su constante de Lipschitz, es decir, la mínima constante L tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \partial\Omega.$$

Se considera entonces el siguiente problema de extensión:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitz tal que } u = f \text{ en } \partial\Omega \text{ y,} \\ L_u(\Omega) < \infty \text{ sea tan pequeña como sea posible.} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Como u debe ser continua en $\bar{\Omega}$ y $u = f$ en $\partial\Omega$, necesariamente $L_u(\Omega) \geq L_f(\partial\Omega)$.

La solución del problema de extensión (3.1.1) no es única, de hecho, se tiene $L_u(\Omega) = L_f(\partial\Omega)$ para las extensiones explícitas

$$\Psi(f)(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} (f(y) + L_f(\partial\Omega) \cdot |x - y|),$$

$$\Lambda(f)(x) = \sup_{y \in \partial\Omega} (f(y) - L_f(\partial\Omega) \cdot |x - y|),$$

dadas por envolventes de familias de conos, conocidas como las extensiones de McShane [110] y Whitney [126] (ver también [14]). Nótese que cualquier u solución del problema de extensión, verifica $\Psi(f) \leq u \leq \Lambda(f)$, es decir, $\Psi(f)$ y $\Lambda(f)$ son respectivamente la extensión minimal y maximal de f a Ω .

De hecho, dada una solución del problema de extensión (3.1.1), por ejemplo, $\Psi(f)$, podría existir un subconjunto $V \subset \Omega$ tal que $L_{\Psi(f)}(\partial V) < L_{\Psi(f)}(V)$. Por tanto, la aplicación del operador Ψ en V “mejoraría” la extensión. Este hecho se debe a que la constante de Lipschitz no es una cantidad local.

G. Aronsson en [9, 11] plantea la cuestión de definir algún tipo de extensión de Lipschitz “canónica” o estable. Siguiendo a Aronsson y en vista de lo ya mencionado, deberemos requerir

$$L_u(\partial V) = L_u(V) \quad \text{para todo conjunto abierto } V \subset\subset \Omega. \quad (3.1.2)$$

Aronsson denota estas extensiones como AMLE acrónimo de *absolutely minimizing Lipschitz extensions*. Utilizando las extensiones de McShane y Whitney para mejorar la constante de Lipschitz en los subdominios donde ésta no es óptima, Aronsson dio la primera prueba de existencia de AMLE en [11]. Más recientemente, se ha abordado esta cuestión en términos de comparación con conos (ver [14, 55] y las referencias allí incluidas).

En este punto se plantea una segunda cuestión, dado que el problema de extensión Lipschitz no tiene unicidad en general, nos preguntamos si es posible que la extensión AMLE sea única.

En (3.1.2) hemos reformulado el problema de extensión (3.1.1) como un problema de minimización. De hecho, siguiendo a Aronsson [11] puede reescribirse el problema en la forma

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ t.q. } \|\nabla u\|_{L^\infty(V)} \leq \|\nabla v\|_{L^\infty(V)} \\ \forall V \subset\subset \Omega \text{ abierto y } \forall v \text{ tal que } (u-v) \in W_0^{1,\infty}(V), \end{cases} \quad (3.1.3)$$

un problema de minimización en L^∞ . En [9, 10, 11, 12, 13] G. Aronsson estudió problemas de minimización en L^∞ .

Al menos formalmente, una aproximación al problema sería pasar al límite en el siguiente problema variacional en L^p :

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ t.q. } \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\ \forall v \text{ tal que } (u-v) \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Nótese que en este caso $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$ implica $\|\nabla u\|_{L^p(V)} \leq \|\nabla v\|_{L^p(V)}$ para todo abierto $V \subset\subset \Omega$ y para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $(u-v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, hecho que no sucede en el problema (3.1.3).

Como estamos interesados en valores grandes de p , podemos suponer $p > n$. Es bien conocido que el problema (3.1.4) puede estudiarse a través de su ecuación de Euler-Lagrange,

$$\begin{cases} -\Delta_p u_p = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_p = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ es el operador p -Laplaciano. Si las funciones u_p fueran suficientemente regulares, podríamos desarrollar el p -Laplaciano y obtener:

$$-(p-2)|\nabla u_p(x)|^{p-4} \left\{ \frac{|\nabla u_p(x)|^2}{p-2} \Delta u_p(x) + \langle D^2 u_p(x) \nabla u_p(x), \nabla u_p(x) \rangle \right\} = 0.$$

Suponiendo que existe $\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = u$ y tomando límites en la expresión anterior, llegamos a

$$\begin{cases} -\Delta_\infty u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

donde $\Delta_\infty u = \langle D^2 u \nabla u, \nabla u \rangle = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ es conocido como el infinito Laplaciano.

Por tanto, al menos formalmente, podemos considerar (3.1.5) como la ecuación de Euler Lagrange del problema (3.1.3). De hecho, Aronsson [11] prueba que todo AMLE de clase C^2 , es decir, toda solución regular de (3.1.3), es solución clásica de la ecuación de Euler-Lagrange (3.1.5).

Posteriormente, R. Jensen en [85] introduce el concepto de solución de viscosidad en el estudio de esta ecuación, lo cual le permite extender los resultados de Aronsson y demostrar que todo AMLE, solución de (3.1.3), es solución de viscosidad de la ecuación de Euler-Lagrange (3.1.5). Además, lo que es más importante, valiéndose de la ecuación (3.1.5), Jensen es capaz de probar la unicidad de los AMLE (posteriormente se han encontrado otras pruebas de unicidad para (3.1.5), ver [18, 56]).

En [28, 73, 90] se consideran argumentos similares a los anteriores, donde se pasa al límite $p \rightarrow \infty$ en problemas involucrando el p -Laplaciano que son la ecuación de Euler-Lagrange de un cierto problema variacional en L^p . En [28] se considera el paso al límite cuando $p \rightarrow \infty$ en un problema variacional relacionado con problemas de torsión

$$\min_{u \in W_0^{1,p}} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\nabla u|^p - fu \right) dx$$

y su ecuación de Euler-Lagrange asociada:

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = f(x) & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Por otro lado, en [73, 90] se considera el límite cuando $p \rightarrow \infty$ en el cociente de Rayleigh, que caracteriza el primer autovalor del p -Laplaciano,

$$\lambda_1(p; \Omega) = \inf_{\phi \in W_0^{1,p}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx}{\int_{\Omega} |\phi|^p dx}$$

y el paso al límite en la ecuación de Euler asociada, el problema de autovalores para el p -laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_p = \lambda_1(p; \Omega) |u_p|^{p-2} u_p & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Lema 3.1.1 ([90]). $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_1(p; \Omega)^{\frac{1}{p}} \equiv \Lambda_1(\Omega) = (\| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_{\infty})^{-1}$.

Se demuestra en [73, 90] que $u_p \rightarrow u$ uniformemente y que dicha u es solución de viscosidad de

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u| - \Lambda_1(\Omega) u, -\Delta_\infty u \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u > 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Lambda_1(\Omega) = \| \text{dist}(\cdot, \partial\Omega) \|_{\infty}$ es el primer autovalor del infinito laplaciano.

En lo sucesivo consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $p > n$. Nuestro interés principal en este capítulo es estudiar el comportamiento cuando $p \rightarrow \infty$ de la sucesión de soluciones positivas a los problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q(p)} + u^{r(p)} & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

donde $\lambda > 0$ y

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{q(p)}{p-1} = Q, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{r(p)}{p-1} = R, \quad \text{con } 0 < Q < 1 < R. \quad (3.1.8)$$

En este sentido diremos que el problema con lado derecho $f_p(u) = \lambda u^{q(p)}$ es cóncavo y el problema con lado derecho $f_p = \lambda u^{q(p)} + u^{r(p)}$ es cóncavo-convexo. Nótese que no hay restricción en el tamaño de $r(p)$, ya que al ser $p > n$, el exponente crítico es $p^* = \infty$ (ver [7]).

A continuación describiremos los resultados más importantes de este capítulo. Observamos que para cada p fijo, la expresión

$$u_{\lambda,p}(x) = \lambda^{\frac{1}{p-1-q(p)}} u_{1,p}(x) \quad (3.1.9)$$

relaciona las soluciones de los problemas cóncavos:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{1,p} = u_{1,p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{1,p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{1,p} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda,p} = \lambda u_{\lambda,p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda,p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda,p} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $q(p) < p-1$ para p suficientemente grande, el problema tiene una única solución para cada λ fijo, véase el Teorema 1.2.1. La existencia de soluciones se estudia en la Subsección 1.5.3. En el marco variacional, la prueba de unicidad es una adaptación del resultado de Brezis-Oswald en [36] para el caso $p = 2$, véase por ejemplo [1] y las referencias allí descritas.

La unicidad de solución positiva, implica que (3.1.9) es una curva suave de soluciones. Supongamos que $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$ y que existe $u_\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{\lambda_p,p}$ y observemos que, pasando al límite formalmente en (3.1.9) se obtiene

$$u_\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{\lambda_p,p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\lambda_p^{\frac{1}{p-1-q(p)}} u_{1,p}(x) \right) = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} u_1. \quad (3.1.10)$$

Por tanto, al menos formalmente, el problema límite debería satisfacer una propiedad de reescale análoga a (3.1.9).

Para hacer riguroso este argumento formal, probaremos (ver la Sección 3.5.1) que existe una subsucesión $\{u_{1,p_i}\}_i$ que converge uniformemente a una función límite $u_1 > 0$. Entonces, usaremos dicha subsucesión (ver la Sección 3.3) para deducir que u_1 es una solución de viscosidad del problema límite

$$\begin{cases} \min \left\{ |\nabla u_1(x)| - u_1^Q(x), -\Delta_\infty u_1(x) \right\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_1 > 0 & \text{en } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Probaremos en la Sección 3.4 el resultado principal, un Principio de Comparación hasta la frontera para el problema (3.1.11) análogo al Teorema 1.2.1. Nótese que la ecuación (3.1.11), no está en el marco del Capítulo 1 ya que no puede expresarse en la forma

$$F(\nabla u, D^2 u) = f(u),$$

aunque, como veremos, los argumentos son similares.

Como consecuencia, obtendremos unicidad de soluciones positivas del problema (3.1.11). Obsérvese que los resultados de unicidad y comparación se extienden inmediatamente a

$$\begin{cases} \min \left\{ |\nabla u_\Lambda(x)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x), -\Delta_\infty u_\Lambda(x) \right\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.12)$$

a través del reescale sugerido por (3.1.10) que define una curva suave de soluciones. Además, se demuestra que las soluciones de (3.1.12) verifican la estimación

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = (\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty)^{\frac{1}{1-Q}},$$

ver la Sección 3.5.2.

Finalmente, mostraremos en la Sección 3.5.3 soluciones explícitas del problema (3.1.11) para dominios que satisfagan la condición geométrica $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ donde \mathcal{R} es el *conjunto arista* de Ω , definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \text{ no es diferenciable en } x\} \\ &= \{x \in \Omega : \exists x_1, x_2 \in \partial\Omega, x_1 \neq x_2, \text{ t.q. } |x - x_1| = |x - x_2| = \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \end{aligned}$$

y $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ es el conjunto de máxima distancia a la frontera

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\}.$$

Algunos dominios que satisfacen esta condición geométrica son la bola, el anillo o el estadio (envoltura convexa de dos bolas del radio). Por ejemplo, un cuadrado o una elipse no la verifican.

En el caso cóncavo-convexo, en [33] se estudia el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^q + u^r & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.13)$$

donde $1 < p < \infty$, $0 < q < p - 1 < r$ y $\lambda > 0$. Se prueba la existencia de una rama minimal de soluciones positivas hasta un cierto valor crítico $\lambda_{\text{máx},p}$ y la no existencia de solución para $\lambda > \lambda_{\text{máx},p}$. Resaltamos que estos resultados se tienen sin restricción en el tamaño de r .

En [6, 75] se estudia la existencia de una segunda solución si $\lambda < \lambda_{\text{máx},p}$ cuando $r < p^* - 1$. Nótese que cuando $p > n$, el exponente crítico es $p^* = \infty$. En el Capítulo 2 hemos obtenido resultados relacionados para ecuaciones uniformemente elípticas combinando argumentos de viscosidad y topológicos.

En la Subsección 1.5.3 hemos presentado la construcción detallada de la rama de soluciones minimales hasta el $\lambda_{\max,p}$ maximal y la no existencia de solución no trivial a partir del mismo. En nuestra presentación la construcción de la subsolución en la prueba de existencia para λ pequeño y la prueba de no existencia para λ grande son diferentes respecto a [33]. Los argumentos siguen los de la Sección 1.4 y permiten una estimación del tamaño de $\lambda_{\max,p}$ en términos de los parámetros p, q, r y n . Asimismo en la Subsección 1.5.3 obtenemos los resultados para dominios acotados sin requerir regularidad de la frontera $\partial\Omega$.

En lo sucesivo siempre supondremos que los exponentes q, r verifican (3.1.8). Dado que estamos interesados en valores grandes de p , podemos también suponer que $0 < q(p) < p - 1 < r(p)$.

Veremos en la Sección 3.3 que, suponiendo $\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p}$, cualquier límite uniforme $u_\Lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} u_{\lambda_p, p}$ es solución de viscosidad de

$$\begin{cases} \min \left\{ |\nabla u_\Lambda| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q, u_\Lambda^R\}, -\Delta_\infty u_\Lambda \right\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

En la Sección 3.6 estudiaremos la existencia y multiplicidad de soluciones del problema (3.1.14) en función del parámetro Λ .

En primer lugar, en la Subsección 3.6.1 demostraremos que no existe ninguna solución positiva del problema límite (3.1.14) para $\Lambda > \hat{\Lambda} = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R-Q}{R-1}}$. Nótese que, en virtud del Corolario 1.5.20, se tiene

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_{\max,p}^{1/p} = \hat{\Lambda}.$$

También demostraremos que toda solución u_Λ del problema (3.1.14) verifica $w_\Lambda \leq u_\Lambda$, donde w_Λ es la única solución del problema cóncavo (3.1.12).

En la Subsección 3.6.2 estudiaremos la existencia de una curva de soluciones minimales del problema (3.1.14). Un hecho notable es que, para cada $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$, la única solución del problema límite cóncavo (3.1.12) es también solución del problema cóncavo-convexo (3.1.14). Esto se debe a que hay un tamaño crítico de las soluciones por debajo del cual la potencia convexa no influye en el problema (3.1.14) ya que

$$\max\{\Lambda t^Q, t^R\} = \Lambda t^Q \quad \Leftrightarrow \quad t \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}.$$

El Principio de Comparación para el problema límite cóncavo (Teorema 3.4.1) nos permitirá demostrar que para cada $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$ existe una única solución del problema (3.1.14) con $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$ (el tamaño crítico). Nótese que las estimaciones L^∞ para las soluciones del problema cóncavo obtenidas en la Subsección 3.5.2 implican que las soluciones del problema cóncavo están por debajo de este tamaño crítico cuando $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$.

En virtud de las cotas en la Subsección 3.6.1, tendremos entonces que las soluciones del problema cóncavo dan lugar a una curva de soluciones minimales del problema (3.1.14) para $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$.

En la Sección 3.6.3, suponiendo $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$ cuando $p \rightarrow \infty$, justificaremos la convergencia uniforme de subsucesiones de soluciones minimales del problema (3.1.13) con λ_p a soluciones positivas del problema límite (3.1.14) con Λ . Para

obtener estimaciones, utilizaremos la construcción de la rama minimal en la Subsección 1.5.3. Comprobaremos que dichos límites uniformes están por debajo de la curva crítica $\Lambda^{\frac{1}{p-q}}$. Por unicidad, deduciremos que dicho límite uniforme es único para cada Λ y que, por tanto, converge no sólo una sucesión sino toda la sucesión de soluciones de (3.1.13). Deducimos además que las soluciones minimales del problema (3.1.13) convergen a soluciones minimales del problema (3.1.14).

Utilizando que la única solución con $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{p-q}}$ es la minimal, demostraremos en la Proposición 3.6.6 que cualquier otra solución positiva, de existir, debe verificar $\|u_\Lambda\|_\infty \geq \Lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{p-1}}$.

Finalmente, en la Subsección 3.6.4 demostraremos un resultado de multiplicidad similar al Teorema 2.1.4 y los resultados en [6, 75] en dominios que satisfagan la condición $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$. Cabe señalar que, si bien el resultado es análogo al Teorema 2.1.4 y los resultados en [6, 75], las técnicas de la demostración son diferentes.

En particular demostraremos que para cada $\Lambda < \hat{\Lambda}$ existen dos soluciones explícitas de tipo cono, una para $\Lambda = \hat{\Lambda}$ y $\Lambda = 0$ y ninguna para $\Lambda > \hat{\Lambda}$. No se descarta la existencia de otras soluciones no cónicas, con $\|u_\Lambda\|_\infty > \Lambda_1(\Omega)$ y $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$.

3.2. Preliminares

Presentaremos a continuación algunos resultados que utilizaremos en lo sucesivo.

En primer lugar, veamos la relación entre las dos nociones de solución naturales en este tipo de problemas, soluciones débiles y de viscosidad.

Definición 3.2.1 (Solución débil). Una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ es subsolución (supersolución) débil de

$$-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u) \quad \text{en } \Omega,$$

si

$$\int_{\Omega} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx \leq (\geq) \int_{\Omega} f(x, u) \varphi(x) dx$$

para toda $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Observación 3.2.2. Esta definición tiene sentido si, por ejemplo, $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Definición 3.2.3 (Solución de viscosidad). Sea $u \in C(\Omega)$. Decimos que u es una subsolución (supersolución) de viscosidad de $-\Delta_p u = f(x, u)$ en Ω si para todo $\phi \in C^2(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tales que $(u - \phi)(x) \leq (\geq) (u - \phi)(x_0)$ para todo x en un entorno de x_0 , entonces

$$-\Delta_p \phi(x_0) = F_p(\nabla \phi(x_0), D^2 \phi(x_0)) \geq (\leq) f(x_0, u(x_0)).$$

donde

$$F_p(\xi, X) = -\operatorname{traza} \left(\left(Id + (p-2) \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) X \right) \cdot |\xi|^{p-2}.$$

Queremos establecer el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4. *Si $u \in C(\Omega)$ es solución débil de $-\Delta_p u = f(x, u)$ en Ω ($p \geq 2$), entonces u es una solución de viscosidad de $-\Delta_p u = f(x, u)$ en Ω .*

Demostración. Supongamos por contradicción que u no es una subsolución de viscosidad. Por tanto, existe $\phi \in C^2(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ tales que $(u - \phi)(x) < (u - \phi)(x_0) = 0$ para todo x en un entorno de x_0 y además

$$F_p(\nabla\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) > f(x_0, u(x_0)).$$

Por continuidad, para r suficientemente pequeño se tiene

$$F_p(\nabla\phi(x), D^2\phi(x)) > f(x, u(x)) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

que, por ser $\phi \in C^2$, se puede reescribir como

$$-\operatorname{div}(|\nabla\phi(x)|^{p-2}\nabla\phi(x)) > f(x, u(x)) \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

Definamos

$$M = \max_{|x-x_0|=r} (u(x) - \phi(x)) < 0.$$

Sea $\Phi(x) = \phi(x) + M/2$, tenemos que Φ es una supersolución clásica de

$$-\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = f(x, u(x)) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

u es en particular una subsolución débil de la misma ecuación y además

$$(\Phi - u)(x) = \frac{M}{2} - (u - \phi)(x) \geq -\frac{M}{2} > 0 \quad \text{en } \partial B_r(x_0).$$

Por el Principio de Comparación débil concluimos que

$$\Phi(x) \geq u(x) \quad \text{en } B_r(x_0),$$

y en particular, $\Phi(x_0) \geq u(x_0)$, es decir $M \geq 0$, que es una contradicción. \square

En lo sucesivo, elegiremos en cada caso el concepto de solución más conveniente entre débil y viscosa, aunque en general consideraremos soluciones viscosas.

Finalmente, utilizaremos el siguiente resultado que puede comprobarse por cálculo directo.

Lema 3.2.5 ([86, Teorema 3.11]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Entonces, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ es la única solución de viscosidad de*

$$\begin{cases} \min\{|\nabla v| - 1, -\Delta_\infty v\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

3.3. El problema límite

Presentaremos en primer lugar los problemas límites de (3.1.7) suponiendo la convergencia uniforme, que probaremos en las Secciones 3.5 y 3.6.

Proposición 3.3.1. *Supongamos que $\{\lambda_p\}_p$ verifica $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$ y sean $q(p)$ y $0 < Q < 1$ como en (3.1.8). Supongamos que $u_{\lambda_p, p}$ es solución de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

y que $u_{\lambda_p, p} \rightarrow u_\Lambda > 0$ uniformemente cuando $p \rightarrow \infty$. Entonces, u_Λ es una solución de viscosidad del problema límite cóncavo

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Proposición 3.3.2. *Supongamos que $\{\lambda_p\}_p$ verifica $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$ y sean $q(p), r(p)$ y $0 < Q < 1 < R$ como en (3.1.8). Supongamos que $u_{\lambda_p, p}$ es solución de*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} + u_{\lambda_p, p}^{r(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

y que $u_{\lambda_p, p} \rightarrow u_\Lambda > 0$ uniformemente cuando $p \rightarrow \infty$. Entonces, u_Λ es una solución de viscosidad del problema límite cóncavo-convexo

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \max \{ \Lambda u_\Lambda^Q, u_\Lambda^R \}, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Dada la similitud de los argumentos, probaremos ambas Proposiciones simultáneamente. Véanse [73] y [90] para argumentos relacionados en el caso del problema de autovalores.

Demostración de las Proposiciones 3.3.1 y 3.3.2. Por simplicidad de escritura, denotemos

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}) & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

donde

$$f_p(\lambda, u) = \lambda u^{q(p)}, \quad \text{ó} \quad f_p(\lambda, u) = \lambda u^{q(p)} + u^{r(p)}.$$

Sea un punto $x_0 \in \Omega$ y una función $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tales que $u_\Lambda - \phi$ tiene un mínimo local estricto en x_0 . Por hipótesis u_Λ es el límite uniforme de una sucesión $u_{\lambda_p, p}$. Por tanto existe una sucesión de puntos $x_p \rightarrow x_0$ cuando $p \rightarrow \infty$

tal que $(u_{\lambda_p, p} - \phi)(x_p)$ es un mínimo local para cada p en la sucesión. Entonces, como $u_{\lambda_p, p}$ es una solución de viscosidad y por tanto una supersolución, se tiene

$$\begin{aligned} -(p-2)|\nabla\phi(x_p)|^{p-4} \left\{ \frac{|\nabla\phi(x_p)|^2}{p-2} \Delta\phi(x_p) + \langle D^2\phi(x_p)\nabla\phi(x_p), \nabla\phi(x_p) \rangle \right\} \\ = -\Delta_p\phi(x_p) \geq f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}). \end{aligned}$$

Reescribiendo la desigualdad, se obtiene,

$$\begin{aligned} -(p-2) \left[\frac{|\nabla\phi(x_p)|}{(f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}))^{\frac{1}{p-4}}} \right]^{p-4} \left\{ \frac{|\nabla\phi(x_p)|^2}{p-2} \Delta\phi(x_p) \right. \\ \left. + \langle D^2\phi(x_p)\nabla\phi(x_p), \nabla\phi(x_p) \rangle \right\} \geq 1. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Observamos a continuación que en el caso cóncavo

$$f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)) := \lim_{p \rightarrow \infty} (f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}(x_p)))^{\frac{1}{p-4}} = \Lambda u_\Lambda^Q(x_0).$$

Por otra parte, en el caso cóncavo-convexo,

$$\begin{aligned} \max \left\{ \lambda^{\frac{1}{p-4}} u_{\lambda, p}^{\frac{q(p)}{p-4}}(x_p), u_{\lambda, p}^{\frac{r(p)}{p-4}}(x_p) \right\} \leq (f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}))^{\frac{1}{p-4}} \\ \leq 2^{\frac{1}{p-4}} \max \left\{ \lambda^{\frac{1}{p-4}} u_{\lambda, p}^{\frac{q(p)}{p-4}}(x_p), u_{\lambda, p}^{\frac{r(p)}{p-4}}(x_p) \right\}, \end{aligned}$$

lo cual implica,

$$f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)) := \lim_{p \rightarrow \infty} (f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}(x_p)))^{\frac{1}{p-4}} = \max \{ \Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0) \}.$$

Nótese que $u_\Lambda > 0$ por hipótesis y entonces $f_\infty(\Lambda, u_\Lambda) > 0$. Entonces, si suponemos que

$$|\nabla\phi(x_0)| < f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)),$$

llegamos a una contradicción haciendo $p \rightarrow \infty$ en (3.3.6). Por tanto, se tiene que

$$|\nabla\phi(x_0)| - f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)) \geq 0. \quad (3.3.7)$$

Además, tenemos

$$-\Delta_\infty\phi(x_0) = -\langle D^2\phi(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0) \rangle \geq 0, \quad (3.3.8)$$

ya que también alcanzaríamos una contradicción con (3.3.6) en caso contrario. Por tanto, podemos escribir (3.3.7) y (3.3.8) de la siguiente manera

$$\min \{ |\nabla\phi(x_0)| - f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)), -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \geq 0,$$

y concluir que u_Λ es una supersolución de viscosidad de las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.4) según corresponda.

Falta comprobar que u_Λ es una subsolución de viscosidad de la ecuación límite (3.3.2), es decir, tenemos que probar que para todo $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tales que $u_\Lambda - \phi$ alcanza un máximo local estricto en x_0 tendremos

$$\min \{ |\nabla\phi(x_0)| - f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)), -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \leq 0.$$

Podemos suponer que

$$|\nabla\phi(x_0)| > f_\infty(\Lambda, u_\Lambda(x_0)),$$

ya que si no habríamos terminado. Como antes, la convergencia uniforme de $u_{\lambda_p, p}$ a u_Λ nos da una sucesión de puntos $x_p \rightarrow x_0$ que son máximos locales de $u_{\lambda_p, p} - \phi$. Teniendo en cuenta la definición de subsolución de viscosidad, tenemos

$$-(p-2) \left[\frac{|\nabla\phi(x_p)|}{(f_p(\lambda_p, u_{\lambda_p, p}))^{\frac{1}{p-4}}} \right]^{p-4} \left\{ \frac{|\nabla\phi(x_p)|^2}{p-2} \Delta\phi(x_p) + \langle D^2\phi(x_p) \nabla\phi(x_p), \nabla\phi(x_p) \rangle \right\} \leq 1.$$

para cada p fijo. Haciendo $p \rightarrow \infty$ obtenemos $-\Delta_\infty\phi(x_0) \leq 0$ ya que en otro caso tendríamos una contradicción. \square

Observación 3.3.3. Los problemas límite heredan las propiedades de reescale de los problemas con p finito. Para el problema cóncavo sabemos que

$$u_{\lambda, p}(x) = \lambda^{\frac{1}{p-1-q(p)}} u_{1, p}(x) \quad (3.3.9)$$

relaciona soluciones del problema (3.3.1) con soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{1, p} = u_{1, p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{1, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{1, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.10)$$

El problema límite asociado a (3.3.10) es

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_1(x)| - u_1^Q(x), -\Delta_\infty u_1(x) \} = 0 & \text{en } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3.11)$$

Es fácil comprobar que dada una solución de (3.3.11), $u_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} u_1(x)$ es solución de (3.3.2) y viceversa. Nótese que este reescale es, al menos formalmente, límite de (3.3.9). Análogamente, los problemas (3.3.3) y

$$\begin{cases} -\Delta_p \hat{u}_{\lambda, p} = \lambda^{\frac{r-(p-1)}{r-q}} (\hat{u}_{\lambda, p}^q + \hat{u}_{\lambda, p}^r) & \text{en } \Omega, \\ \hat{u}_{\lambda, p} > 0 & \text{en } \Omega, \\ \hat{u}_{\lambda, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.12)$$

están relacionados a través de la expresión

$$u_{\lambda, p}(x) = \lambda^{\frac{1}{r-q}} \hat{u}_{\lambda, p}(x). \quad (3.3.13)$$

El problema límite asociado a (3.3.12) es

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla \hat{u}_\Lambda| - \Lambda^{\frac{R-1}{R-Q}} \max \{ \hat{u}_\Lambda^Q, \hat{u}_\Lambda^R \}, -\Delta_\infty \hat{u}_\Lambda \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \hat{u}_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ \hat{u}_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.14)$$

Señalamos que (3.3.4) y (3.3.14) están relacionados a través de

$$u_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{R-Q}} \hat{u}_\Lambda(x),$$

el límite de (3.3.13).

3.4. Comparación y unicidad para el problema límite cóncavo

El resultado principal de esta sección es un Principio de Comparación hasta la frontera, en el espíritu del Teorema 1.2.1, para la ecuación (3.3.2). De este Principio de Comparación se deduce la unicidad de soluciones positivas del problema límite (3.3.11).

La ecuación límite (3.3.11) puede escribirse como $\mathcal{F}(u, \nabla u, D^2u) = 0$, donde \mathcal{F} está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, p, X) &\longrightarrow \min \{|p| - \Lambda u^Q, -\langle Xp, p \rangle\} \end{aligned}$$

que es elíptico degenerado (Definición 0.6.1) pero no propio (Definición 0.6.2) ya que es decreciente en u . Por tanto, la ecuación (3.3.11) no está en las hipótesis de [58].

Observamos que la ecuación límite (3.3.11) no está en el marco del Capítulo 1 ya que no puede expresarse en la forma

$$F(\nabla u, D^2u) = f(u).$$

Sin embargo, podemos aplicar el cambio de variable (1.2.11) como en la prueba del Teorema 1.2.1 y obtener una ecuación propia.

En [90] podemos encontrar argumentos relacionados para la ecuación de autovalores del infinito laplaciano. La diferencia fundamental con nuestro caso es que el cambio de variables logarítmico allí utilizado induce un Principio de Comparación local que, en general, no permite deducir unicidad para el problema con dato Dirichlet homogéneo.

En virtud de la Observación 3.3.3, probaremos el Principio de Comparación para $\Lambda = 1$.

Teorema 3.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sean u una subsolución y v una supersolución de viscosidad de*

$$\min \{|\nabla w(x)| - w^Q(x), -\Delta_\infty w(x)\} = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.4.1)$$

Supongamos que tanto u como v son estrictamente positivas en Ω , continuas hasta la frontera y que satisfacen $u \leq v$ en $\partial\Omega$. Entonces, $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.

Observación 3.4.2. Cada solución no trivial u de (3.3.11) es ∞ -superarmónica (en el sentido de [104]). La desigualdad de Harnack para funciones ∞ -superarmónicas (ver [103] y [104]) implica $u > 0$ en Ω .

Observación 3.4.3. Se puede probar el Principio de Comparación para ecuaciones más generales, del tipo

$$\min \{|\nabla w| - f(w), -\Delta_\infty w\} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

donde f satisface la hipótesis (1.2.7) con $m = 1$. Para ello, basta adaptar la prueba del Teorema 3.4.1 siguiendo los argumentos de la prueba del Teorema 1.2.1.

Una vez probado el Principio de Comparación, se deduce de las Observaciones 3.3.3 y 3.4.2 el siguiente resultado de unicidad para el problema cóncavo.

Corolario 3.4.4. *Para cada $\Lambda > 0$, de existir solución no trivial (en sentido de viscosidad) del problema límite*

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

esta es única.

A continuación presentamos una serie de lemas necesarios para la prueba del Teorema 3.4.1. En el primero de ellos, aplicamos el cambio de variable (1.2.11) a nuestra ecuación para obtener una ecuación propia.

Lema 3.4.5. *Sea v una supersolución (subsolución) de viscosidad estrictamente positiva del problema (3.4.1) en Ω . Entonces, $\tilde{v}(x) = (1 - Q)^{-1}v^{1-Q}(x)$ es una supersolución (subsolución) de viscosidad de*

$$\min \left\{ |\nabla w(x)| - 1, -\Delta_\infty w(x) - \frac{Q}{1-Q} \left(\frac{|\nabla w(x)|^4}{w(x)} \right) \right\} = 0, \quad (3.4.2)$$

para cada Ω^* tal que $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una función que toca a \tilde{v} por abajo en $x_0 \in \Omega$. Definimos $\Phi(x) = \left((1 - Q) \phi(x) \right)^{\frac{1}{1-Q}}$ que toca a v por abajo en x_0 . Nótese que $\Phi(x)$ es \mathcal{C}^2 en un entorno de x_0 , ya que $v > 0$ en Ω implica $\phi(x) > 0$ cerca de x_0 . Podemos escribir las derivadas de $\Phi(x)$ en términos de las de $\phi(x)$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(x_0) &= \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{Q}{1-Q}} \nabla \phi(x_0), \\ D^2 \Phi(x_0) &= \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{Q}{1-Q}} D^2 \phi(x_0) \\ &\quad + Q \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{2Q-1}{1-Q}} \nabla \phi(x_0) \otimes \nabla \phi(x_0), \end{aligned}$$

Como v es una solución de viscosidad de (3.3.11), se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min \{ |\nabla \Phi(x_0)| - \Phi^Q(x_0), -\langle D^2 \Phi(x_0) \nabla \Phi(x_0), \nabla \Phi(x_0) \rangle \} \\ &\leq \min \left\{ \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{Q}{1-Q}} (|\nabla \phi(x_0)| - 1), \right. \\ &\quad \left. - \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{3Q}{1-Q}} \left(\Delta_\infty \phi(x_0) + \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla \phi(x_0)|^4}{\phi(x_0)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que $\phi(x_0) = v(x_0) > 0$. Se deduce que

$$\begin{aligned} \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{Q}{1-Q}} (|\nabla \phi(x_0)| - 1) &\geq 0, \quad y \\ - \left((1 - Q) \phi(x_0) \right)^{\frac{3Q}{1-Q}} \left(\Delta_\infty \phi(x_0) + \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla \phi(x_0)|^4}{\phi(x_0)} \right) &\geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\min \left\{ |\nabla\phi(x_0)| - 1, -\Delta_\infty\phi(x_0) - \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla\phi(x_0)|^4}{\phi(x_0)} \right\} \geq 0.$$

Hemos probado que \tilde{v} es una supersolución de viscosidad de (3.4.2). El caso de la subsolución es análogo. \square

La ecuación (3.4.2) está dada por el funcional

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, p, X) &\longrightarrow \min \left\{ |p| - 1, -\langle Xp, p \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{|p|^4}{u} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

que es propio, ya que es elíptico degenerado y creciente en u .

Tal y como se observa en [58, Sección 5.C], es posible establecer el Principio de Comparación cuando bien la subsolución, bien la supersolución son estrictas. Este no es nuestro caso. Sin embargo, vamos a demostrar que es posible construir supersoluciones estrictas de (3.4.2) a partir de cualquier supersolución positiva. En [86] y [90] encontramos construcciones similares en el caso de los autovalores.

Lema 3.4.6. *Sea $\tilde{v}(x)$ una supersolución de viscosidad estrictamente positiva de (3.4.2) en Ω^* tal que $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene que*

$$\tilde{v}_\epsilon(x) = (1 + \epsilon) \cdot (\tilde{v}(x) + \epsilon), \quad (3.4.4)$$

es una supersolución estricta de la misma ecuación. Además, $\tilde{v}_\epsilon \rightarrow \tilde{v}$ uniformemente en $\overline{\Omega^*}$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{C}^2$ una función que toca a $\tilde{v}_\epsilon(x)$ por debajo en $x_0 \in \Omega^*$. Definamos

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + \epsilon} \phi(x) - \epsilon,$$

que claramente toca a $\tilde{v}(x)$ desde abajo en x_0 . Calculamos las derivadas de $\Phi(x)$ en términos de las de $\phi(x)$, es decir,

$$\nabla\Phi(x_0) = (1 + \epsilon)^{-1} \nabla\phi(x_0) \quad \text{y} \quad D^2\Phi(x_0) = (1 + \epsilon)^{-1} D^2\phi(x_0). \quad (3.4.5)$$

Como $\tilde{v}(x)$ es una supersolución de viscosidad de (3.4.2) en Ω^* , se deduce que

$$|\nabla\Phi(x_0)| - 1 \geq 0, \quad (3.4.6)$$

y

$$-\langle D^2\Phi(x_0)\nabla\Phi(x_0), \nabla\Phi(x_0) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla\Phi(x_0)|^4}{\tilde{v}(x_0)} \geq 0. \quad (3.4.7)$$

De (3.4.5) y (3.4.6), se tiene

$$|\nabla\phi(x_0)| - 1 = (1 + \epsilon) |\nabla\Phi(x_0)| - 1 \geq \epsilon, \quad (3.4.8)$$

y de (3.4.5) y (3.4.7) llegamos a

$$\begin{aligned} &-\langle D^2\phi(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla\phi(x_0)|^4}{\tilde{v}_\epsilon(x_0)} \geq \\ &\geq (1 + \epsilon)^3 \frac{Q}{1-Q} |\nabla\Phi(x_0)|^4 \left(\frac{1}{\tilde{v}(x_0)} - \frac{1}{\tilde{v}(x_0) + \epsilon} \right) \end{aligned}$$

Todos los términos en el lado derecho de última expresión son positivos. De (3.4.6) se deduce

$$\begin{aligned} & -\langle D^2\phi(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla\phi(x_0)|^4}{\tilde{v}_\epsilon(x_0)} \\ & \geq \frac{Q}{1-Q} \left(\frac{\epsilon}{\|\tilde{v}\|_\infty (\|\tilde{v}\|_\infty + \epsilon)} \right). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Finalmente, podemos escribir (3.4.8) y (3.4.9) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \min \left\{ |\nabla\phi(x_0)| - 1, -\langle D^2\phi(x_0)\nabla\phi(x_0), \nabla\phi(x_0) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{|\nabla\phi(x_0)|^4}{\tilde{v}_\epsilon(x_0)} \right\} \\ & \geq \min \left\{ \epsilon, \frac{Q}{1-Q} \left(\frac{\epsilon}{\|\tilde{v}\|_\infty (\|\tilde{v}\|_\infty + \epsilon)} \right) \right\} = \mu(\epsilon, Q, \|\tilde{v}\|_\infty) > 0. \quad \square \end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones para comenzar con la prueba del Principio de Comparación.

Demostración del Teorema 3.4.1. Como $u - v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y $\overline{\Omega}$ es compacto, $u - v$ alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$. Procedemos por contradicción. Para ello, supongamos que $\max_{\overline{\Omega}}(u - v) > 0$. Consideramos

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x)^{1-Q}}{1-Q} \quad \text{y} \quad \tilde{v}(x) = \frac{v(x)^{1-Q}}{1-Q}, \quad (3.4.10)$$

y definimos

$$\tilde{v}_\epsilon(x) = (1 + \epsilon) \cdot (\tilde{v}(x) + \epsilon). \quad (3.4.11)$$

Nótese que, al ser $(u - v)|_{\partial\Omega} \leq 0$, se tiene

$$\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon = \tilde{u} - (1 + \epsilon)\tilde{v} - (1 + \epsilon)\epsilon < 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Por convergencia uniforme, se tiene $\max_{\overline{\Omega}}(\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon) > 0$ para ϵ suficientemente pequeño. Por tanto, fijaremos $\epsilon > 0$ para el resto de la prueba y supondremos que existe Ω^* con $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$ que contiene todos los puntos de máximo de $\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon$. Hemos probado en los Lemas 3.4.5 y 3.4.6 que \tilde{u} y \tilde{v}_ϵ son respectivamente una subsolución y una supersolución estricta de (3.4.2) en Ω^* .

Para cada $\tau > 0$, sea (x_τ, y_τ) un punto de máximo de $\tilde{u}(x) - \tilde{v}_\epsilon(y) - \frac{\tau}{2}|x - y|^2$ en $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Por la compacidad de $\overline{\Omega}$, podemos suponer que $x_\tau \rightarrow \hat{x}$ cuando $\tau \rightarrow \infty$ para algún $\hat{x} \in \overline{\Omega}$ (nótese que también $y_\tau \rightarrow \hat{x}$). Entonces, el Lema 0.6.22 implica que \hat{x} es un punto de máximo de $\tilde{u} - \tilde{v}_\epsilon$ y, por tanto, es un punto interior de Ω^* . También tendremos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\tilde{u}(x_\tau) - \tilde{v}_\epsilon(y_\tau) - \frac{\tau}{2}|x_\tau - y_\tau|^2 \right) = \tilde{u}(\hat{x}) - \tilde{v}_\epsilon(\hat{x}) > 0,$$

y entonces, para τ suficientemente grande tanto x_τ como y_τ son puntos interiores de Ω^* y además

$$\tilde{u}(x_\tau) - \tilde{v}_\epsilon(y_\tau) - \frac{\tau}{2}|x_\tau - y_\tau|^2 > 0. \quad (3.4.12)$$

Aplicamos el Principio del Máximo para funciones semicontinuas, Lema 0.6.20 y deducimos que existen matrices simétricas X_τ, Y_τ tales que

$$(\tau(x_\tau - y_\tau), X_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,+} \tilde{u}(x_\tau), \quad \text{y} \quad (\tau(x_\tau - y_\tau), Y_\tau) \in \overline{\mathcal{J}}^{2,-} \tilde{v}_\epsilon(y_\tau),$$

y

$$\langle X_\tau \xi, \xi \rangle - \langle Y_\tau \eta, \eta \rangle \leq 3\tau |\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4.13)$$

Aplicando la definición de subsolución y supersolución de viscosidad (Definición 0.6.14) se tiene que,

$$\min \left\{ \tau |x_\tau - y_\tau| - 1, -\tau^2 \langle X_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{u}(x_\tau)} \right\} \leq 0.$$

y

$$\begin{aligned} \min \left\{ \tau |x_\tau - y_\tau| - 1, -\tau^2 \langle Y_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)} \right\} \\ \geq \min \left\{ \varepsilon, \frac{Q}{1-Q} \left(\frac{\varepsilon}{\|\tilde{v}\|_\infty (\|\tilde{v}\|_\infty + \varepsilon)} \right) \right\} = \mu(\varepsilon, Q, \|\tilde{v}\|_\infty) > 0. \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la segunda se tiene,

$$\begin{aligned} 0 < \mu(\varepsilon, Q, \|\tilde{v}\|_\infty) \leq \min \left\{ \tau |x_\tau - y_\tau| - 1, \right. \\ \left. -\tau^2 \langle Y_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)} \right\} \quad (3.4.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \min \left\{ \tau |x_\tau - y_\tau| - 1, \right. \\ \left. -\tau^2 \langle X_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{u}(x_\tau)} \right\}. \quad (3.4.15) \end{aligned}$$

Se consideran cuatro casos, dependiendo de los valores para los que se alcanzan los mínimos en (3.4.14) y (3.4.15). El punto esencial en lo sucesivo es que se tiene $\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau) \leq \tilde{u}(x_\tau)$ y $X_\tau \leq Y_\tau$ como consecuencia de (3.4.12) y (3.4.13) respectivamente.

1. Ambos mínimos son iguales a $\tau |x_\tau - y_\tau| - 1$ y la diferencia es cero.
2. El mínimo en (3.4.15) es $-\tau^2 \langle X_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{u}(x_\tau)}$ mientras que el mínimo en (3.4.14) es $\tau |x_\tau - y_\tau| - 1$. En realidad, esta alternativa no puede darse salvo que ambas cantidades sean iguales, ya que

$$\begin{aligned} \tau |x_\tau - y_\tau| - 1 &= \min(3.4.14) \leq \\ &\leq -\tau^2 \langle Y_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)} \\ &\leq -\tau^2 \langle X_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{u}(x_\tau)} \\ &= \min(3.4.15) \leq \tau |x_\tau - y_\tau| - 1. \end{aligned}$$

3. El mínimo en (3.4.14) es $-\tau^2 \langle Y_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)}$ y el mínimo en (3.4.15) es $\tau |x_\tau - y_\tau| - 1$. Usando el hecho de que

$$-\tau^2 \langle Y_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)} \leq \tau |x_\tau - y_\tau| - 1,$$

llegamos a que $\min(3.4.14) - \min(3.4.15) \leq 0$.

4. El mínimo en (3.4.14) es $-\tau^2 \langle Y_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)}$ mientras que el mínimo en (3.4.15) es $-\tau^2 \langle X_\tau(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle - \frac{Q}{1-Q} \frac{\tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4}{\tilde{u}(x_\tau)}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \text{mín (3.4.14)} - \text{mín (3.4.15)} &= -\tau^2 \langle (Y_\tau - X_\tau)(x_\tau - y_\tau), (x_\tau - y_\tau) \rangle \\ &\quad - \frac{Q}{1-Q} \tau^4 |x_\tau - y_\tau|^4 \left(\frac{1}{\tilde{v}_\varepsilon(y_\tau)} - \frac{1}{\tilde{u}(x_\tau)} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Concluimos que todas las alternativas conducen a

$$0 < \mu(\varepsilon, Q, \|\tilde{v}\|_\infty) \leq \text{mín (3.4.14)} - \text{mín (3.4.15)} \leq 0$$

lo cual es una contradicción. \square

Observación 3.4.7. Es conveniente señalar que, aunque la ecuación límite (3.4.1) no es de la forma (1.2.6), los resultados de comparación Teorema 1.2.1 (con $m=1$) y 3.4.1 están estrechamente relacionados. El Principio de Comparación se puede probar en el siguiente marco, ligeramente más general, común a ambos tipos de problema: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\mathcal{F}(ts, t\xi, tX) = t \cdot \mathcal{F}(s, \xi, X)$ para cada $t > 0$, y $\mathcal{F}(0, 0, 0) = 0$.
2. $\mathcal{F}(s, \xi, X) \leq \mathcal{F}(s, \xi, Y)$ cuando $Y \leq X$.
3. Fijados $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $X \in \mathcal{S}^n$, la función $\mathcal{F}(\cdot, \xi, X)$ es estrictamente decreciente.

Sean $u, v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ una subsolución y una supersolución de viscosidad estrictamente positivas de

$$\mathcal{F}(f(w), \nabla w, D^2 w) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.4.16)$$

donde $f(\cdot)$ satisface

$$\frac{f(t)}{t^q} > 0 \quad \text{es no creciente para todo } t > 0 \text{ y algún } 0 < q < 1. \quad (3.4.17)$$

Entonces, $u \leq v$ en $\partial\Omega$ implica $u \leq v$ en $\bar{\Omega}$.

La prueba del Principio de Comparación en este contexto sigue la del Teorema 1.2.1. El hecho fundamental es que, aunque nuestras hipótesis no implican que \mathcal{F} sea propio (ver Definición 0.6.2), el cambio de variables (1.2.11) permite obtener un problema que sí lo es:

$$\mathcal{F} \left(\frac{f \left(\left[(1-q) \tilde{w}(x) \right]^{\frac{1}{1-q}} \right)}{\left[(1-q) \tilde{w}(x) \right]^{\frac{q}{1-q}}}, \nabla \tilde{w}, D^2 \tilde{w} + \frac{q}{1-q} \frac{\nabla \tilde{w} \otimes \nabla \tilde{w}}{\tilde{w}} \right) = 0.$$

Entonces, el resto de la prueba del Teorema 1.2.1 se sigue con modificaciones menores.

3.5. Existencia de soluciones para el problema límite cóncavo. Soluciones límite

Sea $\Lambda > 0$ y una sucesión $\{\lambda_p\}_p$ tal que $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$ cuando $p \rightarrow \infty$. Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que la sucesión $\{u_{\lambda_p,p}\}_p$ de soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p,p} = \lambda_p u_{\lambda_p,p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p,p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p,p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

converge uniformemente a algún $u_\Lambda > 0$ cuando $p \rightarrow \infty$. La Proposición 3.3.1 implica entonces que dicho u_Λ es una solución de viscosidad del problema límite cóncavo

$$\begin{cases} \text{mín} \{|\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Nótese que, en virtud de la unicidad de solución del problema (3.5.2) (ver Corolario 3.4.4) basta probar la convergencia para una subsucesión, ya que, por unicidad del límite, se tendrá entonces para toda la sucesión.

Por tanto, en primer lugar probaremos las cotas a priori necesarias para justificar el paso al límite (Subsección 3.5.1). A continuación, en la Subsección 3.5.2, probaremos estimaciones óptimas L^∞ de las soluciones del problema (3.5.2). Finalmente, en la Subsección 3.5.3, mostraremos soluciones explícitas en dominios que verifiquen la condición $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$.

3.5.1. Cotas a priori. Existencia de solución límite

Por la propiedad de reescale (3.3.9) del problema (3.5.1), bastará probar estimaciones C^α uniformes (en p) para la sucesión $\{u_{1,p}\}_p$ de soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{1,p} = u_{1,p}^{q(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{1,p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{1,p} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Entonces, por el Teorema de Ascoli-Arzelá, obtendremos convergencia uniforme a través de una subsucesión a una cierta función $u_1 > 0$. La Proposición 3.3.1 implica que u_1 es solución de

$$\begin{cases} \text{mín} \{|\nabla u_1| - u_1^Q, -\Delta_\infty u_1\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_1 > 0 & \text{en } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.4)$$

Por la unicidad de solución del problema (3.5.4), deducimos que toda la sucesión $\{u_{1,p}\}_p$ converge a u_1 cuando $p \rightarrow \infty$ (Proposición 3.5.3).

Una vez probado que $u_{1,p} \rightarrow u_1$ uniformemente, y suponiendo que $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$, se deduce de (3.3.9) que la sucesión $\{u_{\lambda_p,p}\}_p$ de soluciones de (3.5.1) converge uniformemente a una función u_Λ que verifica

$$u_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} u_1(x),$$

véase el Teorema 3.5.1. Según la Observación 3.3.3, u_Λ es la única solución del problema (3.5.2).

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 3.5.1. *Sea $\Lambda > 0$ y una sucesión $\{\lambda_p\}_p$ tal que $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$ cuando $p \rightarrow \infty$. Entonces, la sucesión $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$ de soluciones de (3.5.1) converge uniformemente a*

$$u_\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} u_1, \quad (3.5.5)$$

la única solución positiva del problema límite (3.5.2) asociada a Λ .

Dividiremos la prueba del Teorema en varios resultados parciales. A continuación obtenemos las estimaciones C^α uniformes de la sucesión $u_{1,p}$ como consecuencia de las estimaciones de Morrey (Corolario 3.7.3).

Lema 3.5.2. *Sea $p > n$ fijo. Entonces, existen constantes C_1, C_2 independientes de p tales que la solución $u_{1,p}$ de (3.5.3) satisface*

$$\|u_{1,p}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1, \quad (3.5.6)$$

y para todo $m > n$,

$$\frac{|u_{1,p}(x) - u_{1,p}(y)|}{|x - y|^{1-\frac{n}{m}}} \leq C_2 \quad \forall x, y \in \Omega \quad (3.5.7)$$

si $p > m$.

Demostración. 1. Multiplicando (3.5.3) por $u_{1,p}$ e integrando por partes, se obtiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{1,p}|^p dx = \int_{\Omega} |u_{1,p}|^{q+1} dx.$$

La estimación de Morrey (Corolario 3.7.3) implica que existe una constante $C > 0$ independiente de p tal que

$$\|u_{1,p}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{1,p}|^p dx \right)^{1/p}$$

Combinando ambas expresiones, se tiene

$$\|u_{1,p}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Omega} |u_{1,p}|^{q+1} dx \right)^{1/p} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u_{1,p}\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{q+1}{p}},$$

de donde se deduce (3.5.6).

2. Como $p > m$, combinando la desigualdad de Hölder y las estimaciones de Morrey obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{|u_{1,p}(x) - u_{1,p}(y)|}{|x - y|^{1-\frac{n}{m}}} &\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{1,p}|^m dx \right)^{1/m} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{1,p}|^p dx \right)^{1/p} \\ &= C |\Omega|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |u_{1,p}|^{q+1} dx \right)^{1/p} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{m}} \|u_{1,p}\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{q+1}{p}}, \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de m y de p . Entonces, deducimos (3.5.7) de (3.5.6). \square

Tenemos el siguiente resultado de convergencia que justifica el paso al límite en la Proposición 3.3.1.

Proposición 3.5.3. *Sea la sucesión $\{u_{1,p}\}_p$ de soluciones de (3.5.3). Entonces, existe una función límite u_1 tal que*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_{1,p} = u_1$$

uniformemente. Además, $u_1(x) > 0$ en Ω .

Demostración. Como consecuencia del Lema 3.5.2 y del Teorema de Ascoli-Arzelá se tiene que existe una subsucesión $p_i \rightarrow \infty$ y una función límite u_1 tales que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_{1,p_i} = u_1$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$.

Para probar $u_1 > 0$, la idea es buscar una subsolución positiva para el problema (3.5.3) estable para p grande.

Consideremos el problema de autovalores para el p -laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_{1,p} = \lambda_1(p; \Omega) |\varphi_{1,p}|^{p-2} \varphi_{1,p} & \text{en } \Omega \\ \varphi_{1,p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\lambda_1(p; \Omega)$ y $\varphi_{1,p}$ son respectivamente el primer autovalor y autofunción, normalizada de manera que $\|\varphi_{1,p}\|_\infty = 1$.

De [73] y [90] sabemos que existe un ∞ -autovalor $\Lambda_1(\Omega)$ tal que

$$\Lambda_1(\Omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\lambda_1(p; \Omega))^{1/p} = \left(\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{-1}, \quad (3.5.8)$$

y que existe una sucesión de autofunciones $\{\varphi_{1,p}\}_p$ con $\|\varphi_{1,p}\|_\infty = 1$ que converge a una autofunción $\varphi_{1,\infty}$ que es solución del problema

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla \varphi_{1,\infty}| - \Lambda_1(\Omega) \varphi_{1,\infty}, -\Delta_\infty \varphi_{1,\infty} \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \varphi_{1,\infty} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

en sentido de viscosidad. Además, se sabe que $\varphi_{1,\infty} > 0$ en Ω .

Fijemos $\varepsilon > 0$ y definamos $\phi_{1,p} = t \varphi_{1,p}$, con $t = \min \{ 1, \Lambda_1(\Omega)^{\frac{-1}{1-q}} - \varepsilon \}$. Entonces, se tiene $\|\phi_{1,p}\|_\infty = t \|\varphi_{1,p}\|_\infty \leq 1$ y, de (3.5.8),

$$t \leq \Lambda_1(\Omega)^{\frac{-1}{1-q}} - \varepsilon < \lambda_1(p; \Omega)^{\frac{-1}{p-1-q(p)}}$$

para p suficientemente grande. Por tanto, para este rango de p ,

$$-\Delta_p \phi_{1,p} = \lambda_1(p; \Omega) \phi_{1,p}^{p-1} \leq \lambda_1(p; \Omega) t^{p-1-q(p)} \phi_{1,p}^{q(p)} < \phi_{1,p}^{q(p)},$$

y por [34] concluimos que $\phi_{1,p} \leq u_{1,p}$. Pasando al límite (tal vez tomando una subsucesión) se tiene

$$u_1(x) \geq t \varphi_{1,\infty} > 0.$$

Finalmente señalamos que, dado que el límite u_1 es positivo, es solución del problema límite por la Proposición 3.3.1. Teniendo en cuenta el resultado de unicidad para soluciones positivas, Corolario 3.4.4, se tiene que converge toda la sucesión $\{u_p\}_p$ y no sólo la subsucesión $\{u_{p_i}\}_i$. \square

Observación 3.5.4. La función límite u_1 es Lipschitz continua ya que, haciendo $p \rightarrow \infty$ y a continuación $m \rightarrow \infty$ en (3.5.7), obtenemos

$$\frac{|u_1(x) - u_1(y)|}{|x - y|} \leq C_2.$$

Como consecuencia de la Proposición 3.5.3 y la propiedad de reescale del problema cóncavo (3.3.9) se tiene el Teorema 3.5.1.

3.5.2. Estimaciones L^∞ de las soluciones del problema límite cóncavo

El objetivo de esta sección es probar estimaciones para la función límite u_Λ . Estas estimaciones se utilizarán en la Sección 3.6 en el estudio del problema cóncavo-convexo (3.1.14). En particular, estas estimaciones tienen relación con un hecho sorprendente, que para cada $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$ (donde $\hat{\Lambda}$ es el valor maximal del parámetro para el cual existen soluciones positivas del problema cóncavo-convexo) la solución minimal del problema cóncavo-convexo viene dada por la única solución positiva del problema cóncavo (Proposición 3.6.4).

El motivo es que hay un tamaño crítico para las soluciones del problema cóncavo-convexo por debajo del cual el problema (3.1.14) no ve la potencia convexa. Nuestras estimaciones demuestran que las soluciones del problema cóncavo con $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$ están por debajo de este tamaño crítico.

Se considera la familia de problemas

$$\begin{cases} \text{mín} \{ |\nabla u(x)| - \Lambda_1(\Omega) u^Q(x), -\Delta_\infty u(x) \} = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5.9)$$

para $Q \in [0, 1]$, donde

$$\Lambda_1(\Omega) = (\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty)^{-1} \quad (3.5.10)$$

es el autovalor principal del infinito laplaciano (ver [90]). Es bien conocido (ver [85] y [86, Lema 6.10]) que la única solución del problema (3.5.9) cuando $Q = 0$ es

$$d(x) = \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty}. \quad (3.5.11)$$

Para $Q = 1$, se considera la primera ∞ -autofunción maximal v , normalizada con $\|v\|_{L^\infty} = 1$. Es importante señalar que, hasta donde sabemos, la simplicidad del primer autovalor del infinito laplaciano no es conocida en general, sólo para dominios tales que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$ y además \mathcal{M} es *Lipschitz conexo*, ver [127].

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.5.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $0 < Q < 1$. Consideramos $\Lambda > 0$ y u_Λ la solución positiva de*

$$\begin{cases} \text{mín} \{ |\nabla u_\Lambda(x)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x), -\Delta_\infty u_\Lambda(x) \} = 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces tendremos

$$\left(\Lambda \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} v(x) \leq u_\Lambda(x) \leq \left(\Lambda \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} d(x), \quad (3.5.12)$$

para cada $x \in \Omega$, donde $v(x)$ es la primera ∞ -autofunción maximal normalizada con $\|v\|_{L^\infty} = 1$ y $d(x)$ viene dada por (3.5.11). De hecho

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}}. \quad (3.5.13)$$

Observación 3.5.6. Nótese la relación entre la estimación (3.5.12) y la construcción de la solución del problema cóncavo para $p < \infty$ en la Sección 1.5.3. Tomando límites en la subsolución y la supersolución entre las cuales se construye la solución del problema cóncavo a nivel $p < \infty$, se obtiene la estimación (3.5.12).

La Proposición 3.5.5 se deduce del siguiente lema.

Lema 3.5.7. *Para cada $Q \in (0, 1)$, las funciones $v(x)$ y $d(x)$ son respectivamente una subsolución y una supersolución del problema (3.5.9).*

Una vez probado el Lema 3.5.7, la Proposición 3.5.5 se deduce fácilmente del Principio de Comparación. En efecto, por comparación, se tiene para cada $Q \in (0, 1)$ que

$$v(x) \leq u_{\Lambda_1}(x) \leq d(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

donde u_{Λ_1} es la solución de (3.5.9). La fórmula (3.5.5) implica

$$u_\Lambda(x) = \left(\Lambda \cdot \Lambda_1(\Omega)^{-1} \right)^{\frac{1}{1-Q}} u_{\Lambda_1}(x), \quad (3.5.14)$$

y entonces podemos combinar las dos expresiones y (3.5.10) para obtener (3.5.12), de donde se deduce (3.5.13) ya que $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|d\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

Demostración del Lema 3.5.7. 1. Sean $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $(v - \phi)$ tiene un punto de máximo en x_0 . Como v es una ∞ -autofunción, satisface

$$\text{mín} \{ |\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega)v(x_0), -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Podemos considerar $-\Delta_\infty\phi(x_0) > 0$ y $|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega)v(x_0) \leq 0$ ya que si no habríamos terminado. Claramente

$$|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega)v(x_0)^Q \leq \Lambda_1(\Omega)(v(x_0) - v(x_0)^Q) \leq 0,$$

ya que $\|v\|_\infty = 1$, y por tanto

$$\text{mín} \{ |\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega)v(x_0)^Q, -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

2. Sean ahora $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $(d - \phi)$ tiene un mínimo en x_0 . Como $d(x)$ es una solución del problema (3.5.9) para $Q = 0$, en particular

$$\text{mín} \{ |\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega), -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Se deduce que $-\Delta_\infty\phi(x_0) \geq 0$ y $|\nabla\phi(x_0)| \geq \Lambda_1(\Omega)$ y por tanto

$$|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega)d(x_0)^Q \geq \Lambda_1(\Omega)(1 - d(x_0)^Q) \geq 0$$

por ser $\|d\|_\infty = 1$. Se deduce

$$\text{mín} \{ |\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega)d(x_0)^Q, -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \geq 0 \quad \text{en } \Omega. \quad \square$$

Observación 3.5.8. Sea $u_{\Lambda_1, Q}$ la única solución del problema (3.5.9) para cada $Q \in [0, 1)$. Puede probarse que $u_{\Lambda_1, Q} \rightarrow v$ uniformemente cuando $Q \rightarrow 1$, donde v es la primera autofunción maximal del ∞ -Laplaciano. Además, de la estimación (3.5.12) se deduce que si $\Lambda < \Lambda_1(\Omega)$, entonces $u_{\Lambda, Q} \rightarrow 0$ uniformemente cuando $Q \rightarrow 1$ y si $\Lambda > \Lambda_1(\Omega)$, entonces $\|u_{\Lambda, Q}\|_\infty \rightarrow \infty$ cuando $Q \rightarrow 1$.

3.5.3. Soluciones explícitas del problema límite en dominios especiales

En esta sección vamos a calcular soluciones explícitas del problema límite cóncavo en dominios que satisfagan una cierta condición geométrica.

Como es habitual (ver [86]), definiremos el *conjunto arista* como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \text{ no es diferenciable en } x\} \\ &= \{x \in \Omega : \exists x_1, x_2 \in \partial\Omega, x_1 \neq x_2, \text{ t.q.} \\ &\quad |x - x_1| = |x - x_2| = \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

y el *conjunto de máxima distancia a la frontera* $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ como

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\}. \quad (3.5.16)$$

Proposición 3.5.9. *Sea $Q \in (0, 1)$ y $\Lambda > 0$. Supongamos que Ω es un dominio acotado tal que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$. Entonces,*

$$u_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} \cdot (\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty)^{\frac{Q}{1-Q}} \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad (3.5.17)$$

es la única solución de viscosidad positiva de

$$\begin{cases} \min \left\{ |\nabla u_\Lambda(x)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x), -\Delta_\infty u_\Lambda(x) \right\} = 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.18)$$

Algunos ejemplos de dominios que satisfacen la condición $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$ son la bola, el anillo o el estadio (envoltura convexa de dos bolas del mismo radio).

Demostración. De la Proposición 3.5.5, se tiene que

$$\left(\Lambda \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} v(x) \leq u_\Lambda(x) \leq \left(\Lambda \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}} d(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

donde $v(x)$ y $d(x)$ están definidas como en la subsección anterior. Nótese que la desigualdad se verifica sin la hipótesis $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$.

Es bien conocido (ver por ejemplo [86] y [91]) que si $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$, entonces $v(x) = d(x)$ es la ∞ -autofunción maximal (positiva), normalizada con $\|v\|_{L^\infty} = 1$. De ahí se deduce inmediatamente (3.5.17). \square

Observación 3.5.10. De hecho, (3.5.17) define una curva de soluciones de (3.5.18) también cuando $Q > 1$ siempre y cuando $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$. Como consecuencia de [86, Lema 6.10], tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \min \left\{ |\nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)| - 1, -\Delta_\infty \text{dist}(x, \partial\Omega) \right\} \\ &= \min \left\{ \Lambda^{\frac{1}{1-Q}} \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^{\frac{Q}{1-Q}} \cdot (|\nabla \text{dist}(x, \partial\Omega)| - 1), \right. \\ &\quad \left. \Lambda^{\frac{3}{1-Q}} \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^{\frac{3Q}{1-Q}} \cdot (-\Delta_\infty \text{dist}(x, \partial\Omega)) \right\} \\ &= \min \left\{ |\nabla u_\Lambda(x)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x), -\Delta_\infty u_\Lambda(x) \right\} \quad \forall x \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

Por otra parte, fuera de $\mathcal{R}(\equiv \mathcal{M})$ el cono es diferenciable. Por cálculo directo se comprueba que u es ∞ -armónica y satisface $|\nabla u| - \Lambda u^Q > 0$ fuera de \mathcal{R} .

3.6. Existencia de soluciones para el problema límite cóncavo-convexo. Soluciones límite

Sea $\Lambda > 0$ y una sucesión $\{\lambda_p\}_p$ tal que $\lambda_p^{1/p} \rightarrow \Lambda$ cuando $p \rightarrow \infty$. Nuestro objetivo en esta sección es demostrar la convergencia uniforme de sucesiones $\{u_{\lambda_p,p}\}_p$ de soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p,p} = \lambda_p u_{\lambda_p,p}^{q(p)} + u_{\lambda_p,p}^{r(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p,p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p,p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.6.1)$$

tal vez a través de una subsucesión, a algún $u_\Lambda > 0$ cuando $p \rightarrow \infty$. La Proposición 3.3.2 implica entonces que dicho u_Λ es una solución de viscosidad del problema límite cóncavo-convexo

$$\begin{cases} \min\{|\nabla u_\Lambda| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q, u_\Lambda^R\}, -\Delta_\infty u_\Lambda\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.2)$$

3.6.1. Resultados de no existencia para el problema límite

Presentamos a continuación algunos resultados de no existencia de solución positiva del problema (3.6.2) que se obtienen a partir de la estructura del problema cóncavo-convexo.

En la Figura 3.6.1 se han representado los resultados de esta subsección.

No existencia de soluciones por debajo de la rama cóncava

Vamos a probar que no existen soluciones del problema límite cóncavo-convexo (3.6.2) por debajo de la rama de soluciones del problema límite cóncavo:

$$\begin{cases} \min\{|\nabla w_\Lambda| - \Lambda w_\Lambda^Q, -\Delta_\infty w_\Lambda\} = 0 & \text{en } \Omega, \\ w_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ w_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.6.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y w_Λ la única solución positiva del problema cóncavo (3.6.3) para cada $\Lambda > 0$. Entonces, cualquier otra solución positiva u_Λ de (3.6.2) satisface $u_\Lambda \geq w_\Lambda$. En particular,*

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty\right)^{\frac{1}{1-Q}}. \quad (3.6.4)$$

Demostración. Sea u_Λ una solución no trivial de (3.6.2). Probaremos que

$$\min\{|\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda\} \geq 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.6.5)$$

ya que entonces, dado que w_Λ es una solución del problema cóncavo (3.6.3), se sigue $w_\Lambda \leq u_\Lambda$ por comparación (Teorema 3.4.1). La estimación (3.6.4) es consecuencia de este hecho y de la Proposición 3.5.5.

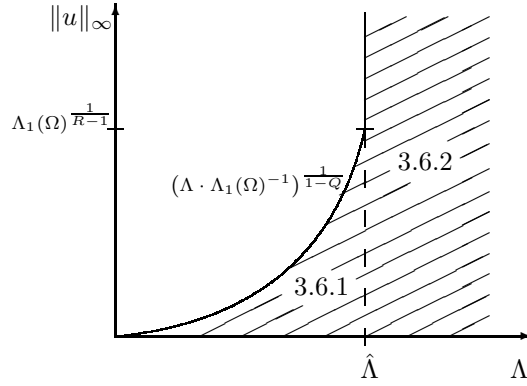


Figura 3.6.1: Zona de no existencia de soluciones para el problema cóncavo-convexo (3.6.2) dada por las Proposiciones 3.6.1 y 3.6.2

Probemos ahora (3.6.5). Sean $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $u_\Lambda - \phi$ tiene un mínimo en x_0 . Como $u_\Lambda(x)$ es una solución del problema (3.6.2) se tiene

$$\min \left\{ |\nabla \phi(x_0)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\}, -\Delta_\infty \phi(x_0) \right\} \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Se deduce que $-\Delta_\infty \phi(x_0) \geq 0$ y $|\nabla \phi(x_0)| \geq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\}$. Por tanto

$$|\nabla \phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0) \geq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0) \geq 0.$$

Entonces, obtenemos

$$\min \left\{ |\nabla \phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0), -\Delta_\infty \phi(x_0) \right\} \geq 0 \quad \text{en } \Omega$$

y por tanto (3.6.5) en sentido de viscosidad. \square

No existencia de soluciones para Λ grande

Demostremos a continuación que la estructura de cóncavo-convexo del problema implica la existencia de un valor umbral $\hat{\Lambda}$ a partir del cual no hay soluciones no triviales de (3.6.2). Nótese el paralelismo con los argumentos en la Sección 1.4.2.

Proposición 3.6.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. El problema (3.6.2) no tiene solución positiva para $\Lambda > \hat{\Lambda}$ con*

$$\hat{\Lambda} = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R-Q}{R-1}}. \quad (3.6.6)$$

donde $\Lambda_1(\Omega) = \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty$ es el primer autovalor del infinito laplaciano.

Demostración. Sea $\mu = \Lambda_1(\Omega) + \epsilon$ donde $\epsilon > 0$. Para llegar a una contradicción, supongamos que el problema (3.6.2) tiene una solución no trivial u_Λ para algún $\Lambda > \mu^{\frac{R-Q}{R-1}}$. Vamos a ver que entonces se tiene

$$\min \left\{ |\nabla u_\Lambda| - \mu u_\Lambda, -\Delta_\infty u_\Lambda \right\} > 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.6.7)$$

Sean $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $u_\Lambda - \phi$ tiene un mínimo en x_0 . Como $u_\Lambda(x)$ es una solución del problema (3.6.2) se tiene

$$\min \left\{ |\nabla\phi(x_0)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\}, -\Delta_\infty\phi(x_0) \right\} \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Se deduce que $-\Delta_\infty\phi(x_0) \geq 0$ y $|\nabla\phi(x_0)| \geq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\}$. Por tanto

$$|\nabla\phi(x_0)| - \mu u_\Lambda(x_0) \geq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} - \mu u_\Lambda(x_0).$$

Para concluir (3.6.7) basta ver que

$$\min_{t>0} \Phi_\Lambda(t) > \mu \quad \text{donde} \quad \Phi_\Lambda(t) = \max\{\Lambda t^{Q-1}, t^{R-1}\}.$$

Es elemental comprobar que la función Φ_Λ es convexa y tiene un único punto de mínimo en $t_{\min} = \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$ (donde la función no es diferenciable). Notamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_\Lambda(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_\Lambda(t) = \infty$, luego es un mínimo global. Un cálculo sencillo permite comprobar que $\Lambda > \mu^{\frac{R-Q}{R-1}}$ implica $\Phi_\Lambda(t_{\min}) > \mu$.

Por otra parte, sea v una primera autofunción, es decir, una solución de

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla v| - \Lambda_1(\Omega) v, -\Delta_\infty v \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ v > 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.8)$$

normalizada de manera que $\|v\|_\infty < (\Lambda\mu^{-1})^{\frac{1}{1-Q}}$. Entonces,

$$\min \{ |\nabla v| - \Lambda v^Q, -\Delta_\infty v \} \leq 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (3.6.9)$$

Para comprobarlo, sean $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $v - \phi$ tiene un punto de máximo en x_0 . Como v es una ∞ -autofunción, satisface

$$\min \{ |\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega) v(x_0), -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Podemos considerar $-\Delta_\infty\phi(x_0) > 0$ y $|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda_1(\Omega) v(x_0) \leq 0$ ya que si no habríamos terminado. Claramente, como $\Lambda_1(\Omega) < \mu$, se tiene

$$|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda v^Q(x_0) \leq (\Lambda_1(\Omega) \|v\|_\infty^{1-Q} - \Lambda) v(x_0)^Q \leq 0,$$

por la normalización de v y por tanto

$$\min \{ |\nabla\phi(x_0)| - \Lambda v^Q(x_0), -\Delta_\infty\phi(x_0) \} \leq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

es decir, (3.6.9).

Finalmente se prueba como en la Proposición 3.6.1 que

$$\min \{ |\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda \} \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Como $v = u_\Lambda = 0$ en $\partial\Omega$, por comparación para el problema cóncavo (Teorema 3.4.1) tenemos $0 < v \leq u_\Lambda$.

Luego tenemos una subsolución v y una supersolución u_Λ del problema

$$\min \{ |\nabla w| - \mu w, -\Delta_\infty w \} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.6.10)$$

que verifican $0 < v \leq u_\Lambda$. Construiremos una solución de (3.6.10) por iteración de manera análoga a la prueba del Teorema 1.4.2.

En primer lugar, sea $w_1(x)$, la solución del problema

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla w_1| - \mu v, -\Delta_\infty w_1 \} = 0 & \text{en } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

es sentido de viscosidad. Para probar que dicha w_1 existe, notamos que v es una subsolución del problema y que u_Λ es una supersolución, ya que, de (3.6.7) y $v \leq u_\Lambda$ se deduce

$$\min \{ |\nabla u_\Lambda| - \mu v, -\Delta_\infty u_\Lambda \} \geq 0.$$

Podemos aplicar el Principio de Comparación en [86, Teorema 4.18 y Observación 4.23] (ver también [85]) ya que toda función ∞ -superarmónica es Lipschitz continua, ver [104]. Entonces, el método de Perron (Teorema 4.1 en [58]), nos da la existencia de una única w_1 tal que

$$v \leq w_1 \leq u_\Lambda \quad \text{en } \Omega.$$

A continuación, definimos w_2 , la solución del problema

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla w_2| - \mu w_1, -\Delta_\infty w_2 \} = 0 & \text{en } \Omega \\ w_2 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En este caso, w_1 es una subsolución y u_Λ una supersolución:

$$\min \{ |\nabla w_1| - \mu v, -\Delta_\infty w_1 \} = 0 \quad \Rightarrow \quad \min \{ |\nabla w_1| - \mu w_1, -\Delta_\infty w_1 \} \leq 0,$$

mientras que

$$\min \{ |\nabla u_\Lambda| - \mu u_\Lambda, -\Delta_\infty u_\Lambda \} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \min \{ |\nabla u_\Lambda| - \mu w_1, -\Delta_\infty u_\Lambda \} \geq 0.$$

Como $w_1 = u_\Lambda = 0$ en $\partial\Omega$, por comparación y el método de Perron, obtenemos que existe w_2 que verifica

$$v \leq w_1 \leq w_2 \leq u_\Lambda \quad \text{en } \Omega.$$

Iterando este procedimiento, se construye una sucesión $\{w_k\}_{k \geq 1}$ de soluciones a los problemas

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla w_k| - \mu w_{k-1}, -\Delta_\infty w_k \} = 0 & \text{en } \Omega \\ w_k = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.11)$$

tal que

$$v \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1} \leq w_k \leq u_\Lambda \quad \text{en } \Omega.$$

Nótese que, por construcción, $\|w_k\|_\infty$ está uniformemente acotada. Por otra parte, dado que $-\Delta_\infty w_k \geq 0$ en Ω , se tiene (ver [103] y [104] y también [87] para una construcción relacionada) que

$$|\nabla w_k(x)| \leq \frac{w_k(x)}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \leq \frac{u_\Lambda(x)}{\text{dist}(x, \partial\Omega)} \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

para todo $k > 1$. De ahí, tanto $\|w_k\|_\infty$ como $\|\nabla w_k\|_\infty$ están uniformemente acotados en subconjuntos compactos de Ω . Observamos que v, u_Λ actúan como barreras en $\partial\Omega$ para cada w_k . Por tanto, por el Teorema de Ascoli-Arzelà y la monotonía de la sucesión $\{w_k\}$, toda la sucesión converge uniformemente en Ω a alguna $w \in \mathcal{C}(\Omega)$ que verifica $w = 0$ en $\partial\Omega$. Podemos pasar al límite en sentido de viscosidad en (3.6.11) y obtener que el límite w es solución de viscosidad de (3.6.10).

Hemos obtenido una autofunción positiva w asociada a $\mu = \Lambda_1 + \epsilon$, lo cual es una contradicción con el hecho de que Λ_1 es aislado (ver [89, Teorema 8.1] y [90, Teorema 3.1]).

Como este argumento se puede aplicar para todo $\epsilon > 0$, concluimos que no existe solución positiva de (3.6.2) para $\Lambda > \hat{\Lambda}$. \square

Observación 3.6.3. Es fácil comprobar directamente que para $\Lambda > \hat{\Lambda}$ no existen soluciones no triviales de (3.6.2) *obtenidas como límite*. Fijemos $\Lambda > \hat{\Lambda}$ y supongamos que existe u_Λ , solución de (3.6.2), que se alcanza como límite uniforme de una sucesión $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$ de soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\lambda_p, p} = \lambda_p u_{\lambda_p, p}^{q(p)} + u_{\lambda_p, p}^{r(p)} & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} > 0 & \text{en } \Omega \\ u_{\lambda_p, p} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\{\lambda_p\}_p$ una sucesión tal que $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$. La Proposición 1.5.18 nos dice que el problema anterior no tiene solución si $\lambda_p > \hat{\lambda}_p$ donde $\hat{\lambda}_p$ viene dado por (1.5.12). Como

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda > \hat{\Lambda} = \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_p^{1/p},$$

existe p_0 tal que para todo $p \geq p_0$ se tiene $\lambda_p > \hat{\lambda}_p$, lo que supone una contradicción con la existencia de u_Λ .

3.6.2. Existencia de una curva de soluciones minimales para el problema límite

En el siguiente teorema demostramos que el problema (3.6.2) tiene una solución minimal positiva para cada $\Lambda \leq \hat{\Lambda}$ que verifica

$$\|u_\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\Lambda \cdot \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty \right)^{\frac{1}{1-Q}}.$$

Se concluye que las cotas obtenidas en la Subsección 3.6.1 (Proposiciones 3.6.1 y 3.6.2) son óptimas.

Probaremos un hecho notable, que para cada $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda}]$, la solución minimal del problema cóncavo-convexo viene dada por la única solución positiva del problema cóncavo (3.6.3).

Como veremos, el motivo es que hay un tamaño crítico de las soluciones por debajo del cual el problema (3.1.14) no ve la potencia convexa. De esta observación, y basándonos en el Principio de Comparación para el problema cóncavo (Teorema 3.4.1) deduciremos que la solución minimal es la única solución con $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$.

Con esta nueva información sobre el tamaño de las soluciones, podremos extender el resultado y demostrar que no existe solución con

$$\Lambda^{\frac{1}{R-Q}} < \|u_\Lambda\|_\infty < \Lambda_1^{\frac{1}{R-1}}.$$

En la Sección 3.6.3 demostraremos que las soluciones minimales se obtienen como límite de las soluciones minimales de los problemas con $p < \infty$, es decir, (3.6.1).

En la Figura 3.6.2 se representa toda la información en esta Subsección.

Proposición 3.6.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda}]$. Sea w_Λ la única solución positiva del problema cóncavo (3.6.3). Entonces, si u_Λ es una solución positiva de (3.6.2) tal que $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$, necesariamente $u_\Lambda \equiv w_\Lambda$.*

Observación 3.6.5. 1. Nótese que por la Proposición 3.5.5 se tiene

$$\|w_\Lambda\|_\infty = (\Lambda \cdot \Lambda_1(\Omega)^{-1})^{\frac{1}{R-Q}} \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$$

cuando $\Lambda < \hat{\Lambda} = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R-Q}{R-1}}$.

2. Dado que $w_\Lambda(x) = \Lambda^{\frac{1}{R-Q}} \cdot w_1(x)$, las soluciones minimales de (3.3.4) forman una curva para $\Lambda < \hat{\Lambda}$.

Demostración. Vamos a comprobar que

$$\min\{|\nabla u_\Lambda| - \Lambda u_\Lambda^Q, -\Delta_\infty u_\Lambda\} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.6.12)$$

de donde, por unicidad (ver Corolario 3.4.4), se concluye $u_\Lambda \equiv w_\Lambda$.

Probamos en primer lugar que u_Λ es una subsolución del problema cóncavo (3.6.12). Sea $\phi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u_\Lambda - \phi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$. Entonces, por ser u_Λ una solución de viscosidad de (3.6.2), tenemos que, o bien

$$-\Delta_\infty \phi(x_0) \leq 0,$$

o bien

$$|\nabla \phi(x_0)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} \leq 0.$$

En el primer caso no hay nada que probar, por tanto, supongamos que $-\Delta_\infty \phi(x_0) > 0$ y se verifica la segunda opción. Entonces,

$$|\nabla \phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0) \leq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0).$$

Nótese que $\|u_\Lambda\|_\infty \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$ implica

$$\max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x), u_\Lambda^R(x)\} = \Lambda u_\Lambda^Q(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.6.13)$$

Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe $z \in \Omega$ tal que

$$\max\{\Lambda u_\Lambda^Q(z), u_\Lambda^R(z)\} = u_\Lambda^R(z).$$

Entonces, $\Lambda u_\Lambda^Q(z) \leq u_\Lambda^R(z)$ y obtenemos una contradicción a menos que $z \in \Omega$ verifique $u_\Lambda(z) = \|u_\Lambda\|_\infty = \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$. En este último caso,

$$\max\{\Lambda u_\Lambda^Q(z), u_\Lambda^R(z)\} = u_\Lambda^R(z) = \Lambda u_\Lambda^Q(z),$$

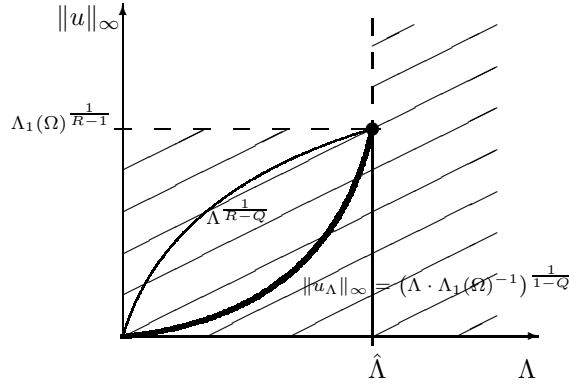


Figura 3.6.2: Curva de soluciones minimales del problema (3.6.2) y zonas de no existencia dadas por las Proposiciones 3.6.1, 3.6.2, 3.6.4 y 3.6.6.

y (3.6.13) queda probado. De (3.6.13), se obtiene $|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0) \leq 0$, y por tanto,

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0), -\Delta_\infty\phi(x_0)\} \leq 0.$$

Concluimos que u_Λ es una subsolución de (3.6.12).

Comprobar que es una supersolución se sigue como en la Proposición 3.6.1. Incluimos los detalles por conveniencia para el lector. Sea $\phi \in \mathcal{C}^2$ tal que $u_\Lambda - \phi$ tiene un mínimo local en $x_0 \in \Omega$. Entonces, por definición de solución de viscosidad de (3.6.2), tenemos que

$$-\Delta_\infty\phi(x_0) \geq 0,$$

y

$$|\nabla\phi(x_0)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} \geq 0.$$

Entonces, de manera obvia,

$$|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0) \geq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0) \geq 0,$$

y tenemos

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \Lambda u_\Lambda^Q(x_0), -\Delta_\infty\phi(x_0)\} \geq 0.$$

Por tanto, u_Λ es una supersolución de (3.6.12) y hemos terminado. \square

Proposición 3.6.6. *Sea Ω un dominio acotado y sea $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$ fijo. Entonces, toda u_Λ , solución no trivial de (3.6.2) con $\|u_\Lambda\|_\infty > \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$, verifica*

$$\|u_\Lambda\|_\infty \geq \Lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{R-1}}.$$

Demostración. Si $\|u_\Lambda\|_\infty > \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$, entonces

$$\max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x), u_\Lambda^R(x)\} \leq \max\{\Lambda \|u_\Lambda\|_\infty^Q, \|u_\Lambda\|_\infty^R\} \leq \|u_\Lambda\|_\infty^R. \quad (3.6.14)$$

Entonces se tiene que u_Λ es una subsolución de viscosidad de

$$\begin{cases} \min\{|\nabla v(x)| - \|u_\Lambda\|_\infty^R, -\Delta_\infty v(x)\} = 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.6.15)$$

Para comprobarlo, sean $x_0 \in \Omega$ y $\phi \in C^2$ tales que $u_\Lambda - \phi$ tiene un máximo en x_0 . Por definición de subsolución de viscosidad, tenemos

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\}, -\Delta_\infty\phi(x_0)\} \leq 0$$

Podemos suponer

$$|\nabla\phi(x_0)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} \leq 0 \quad \text{y} \quad -\Delta_\infty\phi(x_0) > 0,$$

ya que en otro caso habremos terminado. De (3.6.14) deducimos que,

$$|\nabla\phi(x_0)| - \|u_\Lambda\|^R \leq \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x_0), u_\Lambda^R(x_0)\} - \|u_\Lambda\|^R \leq 0,$$

y entonces

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \|u_\Lambda\|^R, -\Delta_\infty\phi(x_0)\} \leq 0.$$

Queda comprobado que u_Λ es subsolución de viscosidad de (3.6.15). Como

$$C(x) = \|u_\Lambda\|_\infty^R \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega)$$

es la única solución de (3.6.15) (ver [86]), se tiene, por comparación que

$$u_\Lambda(x) \leq C(x) = \|u_\Lambda\|_\infty^R \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega) \quad \forall x \in \Omega,$$

de donde se deduce $\|u_\Lambda\|_\infty \geq \Lambda_1(\Omega)^{\frac{1}{R-1}}$. □

3.6.3. Obtención de la curva de soluciones minimales como límite de soluciones minimales con $p < \infty$.

Nuestro objetivo en esta subsección es demostrar que la rama de soluciones minimales obtenida en la Subsección 3.6.2 para el problema límite cóncavo-convexo (3.6.2) puede obtenerse como límite cuando $p \rightarrow \infty$ de las soluciones minimales del problema cóncavo-convexo a nivel $p < \infty$, es decir, (3.6.1).

Proposición 3.6.7. *Fijado $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$, sea una sucesión $\{\lambda_p\}_p$ que verifica $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p^{1/p} = \Lambda$. Consideramos $\{u_{\lambda_p, p}\}_p$, la sucesión de soluciones minimales de (3.3.3) correspondientes. Entonces,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_{\lambda_p, p} = w_\Lambda, \quad \text{uniformemente en } p,$$

con $w_\Lambda(x)$ la única solución positiva del problema límite cóncavo (3.6.3) y solución minimal del problema (3.6.2).

Antes de probar la Proposición 3.6.7, presentaremos algunas consecuencias de las estimaciones de Morrey (Corolario 3.7.3) que serán necesarias en la prueba para conseguir estimaciones uniformes en p .

Lema 3.6.8. *Fijemos $p > n$. Entonces, para cada $m \in (n, p)$, existe una constante C independiente de p tal que cada solución $u_{\lambda, p}$ de (3.3.3) satisface*

$$\frac{|u_{\lambda, p}(x) - u_{\lambda, p}(y)|}{|x - y|^{1 - \frac{n}{m}}} \leq C \max\left\{\lambda^{\frac{1}{p}} \|u_{\lambda, p}\|_\infty^{\frac{q+1}{p}}, \|u_{\lambda, p}\|_\infty^{\frac{r+1}{p}}\right\} \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (3.6.16)$$

Demostración. Multiplicando (3.3.3) por $u_{\lambda,p}$ e integrando por partes, tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda,p}|^p dx = \lambda \int_{\Omega} |u_{\lambda,p}|^{q+1} dx + \int_{\Omega} |u_{\lambda,p}|^{r+1} dx. \quad (3.6.17)$$

Como $p > m$, combinando (3.6.17), la desigualdad de Hölder y la estimación de Morrey (Corolario 3.7.3) implican

$$\begin{aligned} \frac{|u_{\lambda,p}(x) - u_{\lambda,p}(y)|}{|x - y|^{1 - \frac{p}{m}}} &\leq \tilde{C} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda,p}|^m dx \right)^{1/m} \leq \tilde{C} |\Omega|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{\lambda,p}|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \tilde{C} |\Omega|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{p}} \left(\lambda \int_{\Omega} |u_{\lambda,p}|^{q+1} dx + \int_{\Omega} |u_{\lambda,p}|^{r+1} dx \right)^{1/p} \\ &\leq \tilde{C} |\Omega|^{\frac{1}{m}} \left(\lambda \|u_{\lambda,p}\|_{\infty}^{q+1} + \|u_{\lambda,p}\|_{\infty}^{r+1} \right)^{1/p} \leq C \max \left\{ \lambda^{\frac{1}{p}} \|u_{\lambda,p}\|_{\infty}^{\frac{q+1}{p}}, \|u_{\lambda,p}\|_{\infty}^{\frac{r+1}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es independiente de m y p . \square

Demostración de la Proposición 3.6.7. Sea $\lambda_{0,p}$ definida en (1.5.11). Como $\lambda_{0,p}^{1/p} \rightarrow \hat{\Lambda} > \Lambda$ cuando $p \rightarrow \infty$ (ver Corolario 1.5.20), podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe p_0 suficientemente grande de manera que $\lambda_{0,p}^{1/p} > \Lambda$ para todo $p \geq p_0$.

Entonces, sabemos por la Proposición 1.5.15 que $u_{\lambda_p,p}$ se construye por iteración monótona entre

$$\underline{u}_{\lambda_p,p}(x) = w_{\lambda_p,p}(x),$$

y

$$\bar{u}_{\lambda_p,p}(x) = \left(\frac{(p-1) - q}{r - (p-1)} \right)^{\frac{1}{r-q}} \lambda_p^{\frac{1}{r-q}} \frac{v_{1,p}(x)}{\|v_{1,p}\|_{\infty}}.$$

El Teorema 3.5.1 implica $\underline{u}_{\lambda_p,p} = w_{\lambda_p,p} \rightarrow w_{\Lambda}$ uniformemente cuando $p \rightarrow \infty$. Por otra parte sabemos de la Proposición 1.5.10 que $v_{1,p} \rightarrow \text{dist}(x, \partial\Omega)$, y en consecuencia,

$$\bar{u}_{\lambda_p,p} \rightarrow \Lambda^{\frac{1}{R-Q}} \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_{\infty}} \quad \text{uniformemente cuando } p \rightarrow \infty.$$

Se deduce que $\|u_{\lambda_p,p}\|_{\infty} \leq \|\bar{u}_{\lambda_p,p}\|_{\infty} \leq C$ donde la constante es independiente de p .

Entonces, obtenemos del Lema 3.6.8 y el Teorema de Ascoli-Arzelà que existe una subsucesión p' y una función límite $u_{\Lambda}(x)$ tales que $\lim_{p' \rightarrow \infty} u_{\lambda_{p'},p'} = u_{\Lambda}$, uniformemente en p . Nótese que, tomando límites en

$$\underline{u}_{\lambda_{p'},p'} \leq u_{\lambda_{p'},p'} \leq \bar{u}_{\lambda_{p'},p'}$$

obtenemos

$$0 < w_{\Lambda} \leq u_{\Lambda} \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}} \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_{\infty}}.$$

Esto implica $\|u_{\Lambda}\|_{\infty} \leq \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$.

Como $u_{\Lambda} > 0$, por la Proposición 3.3.2 u_{Λ} es una solución del problema límite cóncavo-convexo (3.6.2).

Entonces, de la Proposición 3.6.4 se deduce $u_{\Lambda} = w_{\Lambda}$. Como para cada $\Lambda < \hat{\Lambda}$ el límite es único, se concluye que converge toda la sucesión $u_{\lambda_p,p}$ y no sólo una subsucesión. \square

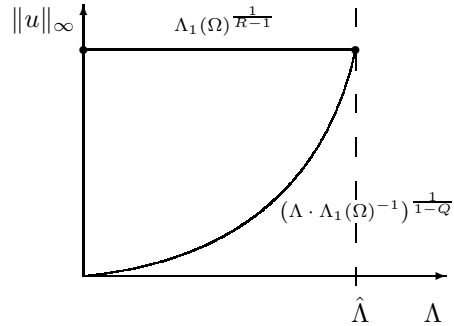


Figura 3.6.3: Problema límite cóncavo-convexo: rama de soluciones dadas por conos cuando $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$.

3.6.4. Multiplicidad de soluciones para el problema límite en dominios especiales.

En la Proposición 3.6.4 hemos probado la existencia de una curva minimal de soluciones para el problema límite (3.3.4) en dominios acotados generales.

Vamos a demostrar un resultado de multiplicidad relacionado con los del Capítulo 2. Probaremos que en dominios tales que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$ (ver (3.5.15) y (3.5.16)), por ejemplo la bola, el estadio (envolvente convexa de dos bolas del mismo tamaño) o el anillo, podemos encontrar una curva de soluciones no triviales explícitas que contiene a la rama minimal ya mencionada, alcanza $\hat{\Lambda}$ y vuelve al eje $\Lambda = 0$.

El siguiente es el resultado central de esta sección.

Teorema 3.6.9. *Supongamos que Ω satisface $\mathcal{M} \equiv \mathcal{R}$ y sean $\Lambda > 0$, $0 < Q < 1 < R$ y $\hat{\Lambda} = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R-Q}{R-1}}$ como antes. Consideremos el problema cóncavo-convexo,*

$$\begin{cases} \min \{ |\nabla u_\Lambda(x)| - \max\{\Lambda u_\Lambda^Q(x), u_\Lambda^R(x)\}, -\Delta_\infty u_\Lambda(x) \} = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_\Lambda > 0 & \text{en } \Omega \\ u_\Lambda = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6.18)$$

y soluciones de la forma

$$u(x) = a \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad a > 0. \quad (3.6.19)$$

Entonces, el problema (3.6.18),

- i) Tiene dos soluciones no triviales de la forma (3.6.19) para cada $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$, con $a_1(\Lambda) = (\Lambda \Lambda_1(\Omega)^{-Q})^{\frac{1}{1-Q}}$, y $a_2(\Lambda) = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R}{R-1}}$.
- ii) Tiene una solución no trivial de la forma (3.6.19) para $\Lambda = 0$ y $\Lambda = \hat{\Lambda}$, ambas con $a = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R}{R-1}}$.
- iii) No tiene soluciones de la forma (3.6.19) si $\Lambda > \hat{\Lambda}$.

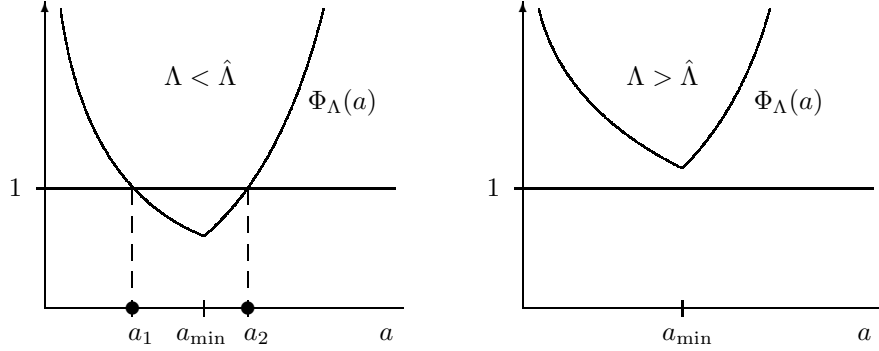


Figura 3.6.4: Cuando $\Lambda < \hat{\Lambda}$ la ecuación $\Phi_\Lambda(t) = 1$ tiene exactamente dos raíces t_1, t_2 , una sola raíz si $\Lambda = \hat{\Lambda}$ y ninguna si $\Lambda > \hat{\Lambda}$.

Demostración. En primer lugar, dado que (3.6.19) es regular fuera de $\mathcal{R} \equiv \mathcal{M}$ se comprueba por cálculo directo que

$$-\Delta_\infty u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \mathcal{R},$$

y

$$|\nabla u(x)| - \max\{\Lambda u^Q(x), u^R(x)\} > 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \mathcal{R},$$

en sentido clásico. De hecho, introduciendo (3.6.19) en la expresión anterior y teniendo en cuenta que $x \notin \mathcal{R}$, descubrimos

$$|\nabla u(x)| - \max\{\Lambda u^Q(x), u^R(x)\} = a - \max\{\Lambda a^Q \text{dist}(x, \partial\Omega)^Q, a^R \text{dist}(x, \partial\Omega)^R\}.$$

Dado que podemos tomar puntos $x \notin \mathcal{R} \equiv \mathcal{M}$ arbitrariamente próximos a \mathcal{M} , llegamos a la siguiente condición necesaria para a ,

$$a - \max\{\Lambda a^Q \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^Q, a^R \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty^R\} \geq 0. \quad (3.6.20)$$

Notamos que, en efecto, a_1 verifica la condición cuando $0 < \Lambda < \hat{\Lambda}$, y a_2 la verifica para $0 \leq \Lambda \leq \hat{\Lambda}$. Por tanto, hemos demostrado que $u(x) = a \cdot \text{dist}(x, \partial\Omega)$ es solución de (3.6.18) fuera del conjunto arista \mathcal{R} con $a = a_1$ y $a = a_2$ si $\Lambda \in (0, \hat{\Lambda})$ y con $a = a_2$ si $\Lambda = 0$ ó $\Lambda = \hat{\Lambda}$.

Ahora, sean $x_0 \in \mathcal{R}$ y $\phi \in \mathcal{C}^2$ tales que $u - \phi$ tiene un máximo local en x_0 . Queremos probar que

$$\min\{|\nabla\phi(x_0)| - \max\{\Lambda u^Q(x_0), u^R(x_0)\}, -\Delta_\infty\phi(x_0)\} \leq 0. \quad (3.6.21)$$

Es bien sabido (véase por ejemplo [86, Lema 6.10]) que

$$\min\{|\nabla u(x)| - a, -\Delta_\infty u(x)\} = 0.$$

Entonces, por definición de subsolución de viscosidad tenemos que, o bien, $|\nabla\phi(x_0)| \leq a$ o bien $-\Delta_\infty\phi(x_0) \leq 0$. En este último caso se verifica (3.6.21)

y no hay nada que probar. Por tanto, podemos suponer en lo sucesivo que $-\Delta_\infty \phi(x_0) > 0$ y $|\nabla \phi(x_0)| \leq a$. Como $x_0 \in \mathcal{R} \equiv \mathcal{M}$, deducimos que $u(x_0) = a \Lambda_1(\Omega)^{-1}$ y

$$|\nabla \phi(x_0)| - \max\{\Lambda u^Q(x_0), u^R(x_0)\} \leq a - \max\{\Lambda a^Q \Lambda_1(\Omega)^{-Q}, a^R \Lambda_1(\Omega)^{-R}\}.$$

Teniendo en cuenta (3.6.20), el lado derecho de la desigualdad es no negativo. Por tanto, la única posibilidad es que

$$a - \max\{\Lambda a^Q \Lambda_1(\Omega)^{-Q}, a^R \Lambda_1(\Omega)^{-R}\} = 0. \quad (3.6.22)$$

El resto de la prueba está dedicada a estudiar el número de soluciones reales de esta ecuación en función de Λ .

Reescribimos (3.6.22) como $\Phi_\Lambda(a) = 1$ donde $\Phi_\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ está dada por

$$\Phi_\Lambda(a) = \max\{\Lambda \Lambda_1^{-Q} a^{Q-1}, \Lambda_1^{-R} a^{R-1}\}.$$

Es elemental comprobar que la función Φ_Λ es positiva, convexa y tiene un único punto de mínimo en $a_{\min} = \Lambda_1 \Lambda^{\frac{1}{R-Q}}$ (donde la función no es diferenciable). Notamos que $\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi_\Lambda(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \Phi_\Lambda(a) = \infty$, luego es un mínimo global (ver Figura 3.6.4). Dicho valor mínimo es

$$\min_{a>0} \Phi_\Lambda(a) = \Phi(a_{\min}) = \Lambda_1^{-1} \Lambda^{\frac{R-1}{R-Q}}.$$

Por la geometría de la función Φ_Λ , la ecuación $\Phi_\Lambda(a) = 1$ no tendrá ninguna raíz si

$$\Phi(a_{\min}) = \Lambda_1^{-1} \Lambda^{\frac{R-1}{R-Q}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda > \hat{\Lambda},$$

como ya sabíamos por la Proposición 3.6.2. Si $\Lambda = \hat{\Lambda}$, se tiene $\Phi(a_{\min}) = 1$ y la ecuación tiene una sólo raíz, $a = \Lambda_1^{\frac{R}{R-1}}$. Finalmente, si $0 < \Lambda \leq \hat{\Lambda}$ la ecuación $\Phi_\Lambda(a) = 1$ tendrá dos raíces distintas, que son

$$a_1 = (\Lambda \cdot \Lambda_1(\Omega)^{-Q})^{\frac{1}{1-Q}}, \quad a_2 = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R}{R-1}}.$$

En el caso $\Lambda = 0$, se obtiene fácilmente que existe una única raíz que coincide con $a_2 = \Lambda_1(\Omega)^{\frac{R}{R-1}}$. \square

3.7. Apéndice: Una desigualdad de Morrey asintóticamente óptima

Presentamos a continuación una desigualdad de Morrey con una expresión explícita de la constante que ha sido utilizada a lo largo del Capítulo para obtener convergencia (ver [51]).

Proposición 3.7.1. *Supongamos $n < p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces,*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_p \cdot \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

se verifica para

$$C_p = p |B_1(0)|^{-\frac{1}{p}} n^{-\frac{n(p+1)}{p^2}} (p-1)^{\frac{n(p-1)}{p^2}} (p-n)^{\frac{n}{p^2}-1} \lambda_1(p; \Omega)^{\frac{n-p}{p^2}},$$

donde $|B_1(0)| = \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\Gamma(1 + \frac{n}{2})\right)^{-1}$. Nótese que $\lim_{p \rightarrow \infty} C_p = \Lambda_1(\Omega)^{-1}$.

Es interesante señalar que en [117, Teorema 2.E] encontramos la desigualdad de Morrey con constante

$$C_{T,p} = n^{-\frac{1}{p}} |B_1(0)|^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}},$$

que es óptima en general, ya que cuando $\Omega = B_R(x_0)$, las funciones

$$u_a(x) = a \cdot \left(R^{\frac{p-n}{p-1}} - |x-x_0|^{\frac{p-n}{p-1}} \right), \quad a \in \mathbb{R}$$

verifican $\|u_a\|_{L^\infty(\Omega)} = C_{T,p} \cdot \|\nabla u_a\|_{L^p(\Omega)}$. Sin embargo, siempre que $\Omega \neq B_R(x_0)$ es fácil comprobar que C_p (la expresión de la constante de Morrey en la Proposición 3.7.1) mejora $C_{T,p}$ para p suficientemente grande, ya que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C_p < \lim_{p \rightarrow \infty} C_{T,p}$$

(ver Observación 3.7.4).

Como primer paso en la prueba de la Proposición 3.7.1, revisaremos la demostración de las estimaciones de Morrey en [67] poniendo atención a la dependencia en p de las constantes.

Lema 3.7.2. *Supongamos $n < p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces u tiene un representante $\mathcal{C}^\gamma(\Omega)$, para $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Además, se tienen las siguientes estimaciones:*

1. *Estimación L^∞ :*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_p^* \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.7.1)$$

con

$$C_p^* = \frac{1}{|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} + \lambda_1(p, \Omega)^{-\frac{1}{p}} \right].$$

2. *Hölder continuidad:*

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \leq \tilde{C}_p \cdot \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.7.2)$$

donde

$$\tilde{C}_p = \frac{2C}{|\partial B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

y C es una constante que depende solamente de n .

Demostración. Supondremos en lo sucesivo que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ ya que nuestras conclusiones se aplican a $W_0^{1,p}(\Omega)$ por densidad. Supondremos además, la función u extendida por cero a todo el espacio \mathbb{R}^n .

1. Fijamos $s \in [0, r]$ y $w \in \partial B_1(0)$. Entonces

$$\begin{aligned} |u(x+sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw) dt \right| \\ &= \left| \int_0^s \nabla u(x+tw) \cdot w dt \right| \leq \int_0^s |\nabla u(x+tw)| dt. \end{aligned}$$

Integramos sobre $\partial B_1(0)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw) - u(x)| d\sigma &\leq \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+tw)| d\sigma dt \\ &= \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+tw)| t^{n-1} d\sigma \frac{1}{t^{n-1}} dt \\ &\leq \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy. \end{aligned}$$

Multiplicamos por s^{n-1} e integramos sobre $[0, r]$; se obtiene

$$\frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{1}{n|B_1(0)|} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy. \quad (3.7.3)$$

2. A continuación, estimaremos $|u(x)|$ para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. De la estimación (3.7.3)

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(x)| dy \\ &\leq \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(x) - u(y)| dy + \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{n|B_1(0)|} \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy + \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{n|B_1(0)|} \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{\frac{p(n-1)}{p-1}}} dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_1(x)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{1}{|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{B_1(x)} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{n|B_1(0)|} \left(|\partial B_1(0)| \left(\frac{p-1}{p-n} \right) \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{1}{|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left(\int_{\Omega} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Nótese que, del cociente de Rayleigh

$$\lambda_1(p; \Omega) = \min_{u \in W_0^{1,p}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx}, \quad (3.7.5)$$

se deduce que la constante óptima en la desigualdad de Poincaré es $\lambda_1(p, \Omega)^{-1/p}$. Así, aplicando la desigualdad de Poincaré en (3.7.4), obtenemos

$$|u(x)| \leq \left[\frac{1}{n|B_1(0)|} \left(|\partial B_1(0)| \left(\frac{p-1}{p-n} \right) \right)^{1-\frac{1}{p}} + \frac{\lambda_1(p, \Omega)^{-\frac{1}{p}}}{|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \right] \left(\int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

y llegamos a (3.7.1), utilizando $|\partial B_1(0)| = n|B_1(0)|$.

3. Sea $\gamma = 1 - n/p$ y consideramos $x, y \in \Omega$. Definimos $W = B_r(x) \cap B_r(y)$, donde $r = |x - y|$. Entonces

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \frac{1}{|W|} \int_W |u(x) - u(y)| dz \\ &\leq \frac{1}{|W|} \int_W |u(x) - u(z)| dz + \frac{1}{|W|} \int_W |u(z) - u(y)| dz. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

A continuación, tomamos $C > 0$ tal que $|B_r(x)| \leq C|W|$ y calculamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|W|} \int_W |u(x) - u(z)| dz &\leq \frac{|B_r(x)|}{|W|} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| dz \\ &\leq \frac{C}{n|B_1(0)|} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} dy \\ &\leq \frac{C}{n|B_1(0)|} \left(\int_{B_r(x)} \frac{1}{|x - y|^{\frac{p(n-1)}{p-1}}} dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_{B_r(x)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{C}{n|B_1(0)|} \left(|\partial B_1(0)| r^{\frac{p-n}{p-1}} \frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{C}{|\partial B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} r^\gamma. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Combinando esta estimación con (3.7.6) se obtiene (3.7.2). \square

Obsérvese que cuando $p \rightarrow \infty$, $C_p^* \rightarrow 1 + \Lambda_1(\Omega)^{-1} = 1 + \|\text{dist}(\cdot, \partial\Omega)\|_\infty$ y $\tilde{C}_p \rightarrow 2C$ donde C_p^* , \tilde{C}_p y C son las constantes en el Lema 3.7.2. Obtenemos la siguiente consecuencia del Lema 3.7.2:

Corolario 3.7.3. *Supongamos $n < p < \infty$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces u tiene un representante $C^\gamma(\Omega)$, para $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Además, se verifican las estimaciones (3.7.1) y (3.7.2) con constantes independientes de p .*

A continuación, mejoramos la constante en la estimación (3.7.1) por medio de un argumento de *scaling*. Como motivación, observamos que (3.7.1) es tanto más precisa cuanto más grande es el dominio Ω , ya que $\lambda_1(p; \Omega)$ es decreciente con respecto a Ω (ver (3.7.5)).

Demostración de la Proposición 3.7.1. 1. Fijamos $\eta > 0$. En primer lugar, probamos que se verifica la estimación, (3.7.1) con constante

$$C_p^*(\eta) = \frac{\eta^{-\frac{n}{p}}}{|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} \eta + \lambda_1(p, \Omega)^{-\frac{1}{p}} \right].$$

Para ello, consideramos el dominio reescalado

$$\Omega_\eta = \eta^{-1}\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : y = \eta x \in \Omega\}$$

y la función $v : \Omega_\eta \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) = u(\eta x)$.

Nótese que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ implica $v \in W_0^{1,p}(\Omega_\eta)$. Por tanto, podemos aplicar la estimación (3.7.1) a v :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega_\eta)} \leq \frac{1}{|B_1(0)|^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{1}{\eta^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} + \lambda_1(p, \Omega_\eta)^{-\frac{1}{p}} \right] \left(\int_{\Omega_\eta} |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, analizamos por separado la dependencia en η de cada término en la expresión anterior. De la caracterización de $\lambda_1(p; \Omega)$ como cociente de Rayleigh, ver (3.7.5), se deduce

$$\lambda_1(p; \Omega_\eta) = \eta^p \cdot \lambda_1(p; \Omega).$$

Además, $\|v\|_{L^\infty(\Omega_\eta)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_\eta)} = \eta^{1-\frac{n}{p}} \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Combinando estos hechos, obtenemos el resultado.

2. A continuación refinaremos la constante en el paso anterior, encontrando el valor de η que da el valor mínimo de la constante. Del paso anterior, tenemos que para cada $\eta > 0$, se verifica la estimación (3.7.1) con constante $C_p^*(\eta)$. Es fácil comprobar que el único punto crítico de $C_p^*(\eta)$ como función de η es

$$\eta^* = \frac{n^{1+\frac{1}{p}}}{(p-n)^{\frac{1}{p}} (p-1)^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \lambda_1(p; \Omega)^{-\frac{1}{p}}.$$

Como $C_p^*(\eta) \rightarrow \infty$ cuando $\eta \rightarrow 0$ y $\eta \rightarrow \infty$, η^* es un mínimo global. Entonces es trivial comprobar que $C_p^*(\eta^*) = C_p$. \square

Observación 3.7.4. Siguiendo la notación de la Proposición 3.7.1, observamos que $C_p \leq C_p^*(\eta)$ para todo $\eta > 0$; en particular $C_p \leq C_p^*(1) = C_p^*$, la constante en la estimación (3.7.1). Además, observamos que en [117, Teorema 2.E], se demuestra que la desigualdad de Morrey se verifica con constante

$$C_{T,p} = n^{-\frac{1}{p}} |B_1(0)|^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$$

y que esta es óptima en general. De hecho, se comprueba que es óptima si $\Omega = B_R(x_0)$, ya que las funciones

$$u_a(x) = a \cdot \left(R^{\frac{p-n}{p-1}} - |x - x_0|^{\frac{p-n}{p-1}} \right), \quad a \in \mathbb{R}$$

verifican

$$\|u_a\|_{L^\infty(\Omega)} = C_{T,p} \cdot \|\nabla u_a\|_{L^p(\Omega)}.$$

Para $n = 1$ se conoce una expresión explícita del primer autovalor del p -Laplaciano (ver [101] y las referencias subsiguientes), a saber,

$$\lambda_1(p; (a, b)) = (p-1) \cdot \left(\frac{2\pi}{p \cdot (b-a) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \right)^p,$$

encontramos $C_{T,p} < C_p$ para $n = 1$. Sin embargo, las cosas son diferentes si Ω es diferente de una bola; en ese caso es fácil comprobar que $C_p < C_{T,p}$ para p suficientemente grande. De hecho, sea $R > 0$ el radio de la mayor bola inscrita en el dominio Ω ; entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C_{T,p} = \left(\frac{|\Omega|}{|B_1(0)|} \right)^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{|B_R(0)|}{|B_1(0)|} \right)^{\frac{1}{n}} = R = \Lambda_1(\Omega)^{-1} = \lim_{p \rightarrow \infty} C_p.$$

Bibliografía

- [1] B. Abdellaoui, I. Peral; *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p -Laplacian with a critical potential*, Annali di Matematica Pura e Applicata, Vol 182, No 3 (2003), 247-270.
- [2] T. Aubin; *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xviii+395 pp.
- [3] A. D. Aleksandrov; *Dirichlet's problem for the equation $\text{Det} ||z_{ij}|| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. I.* (Russian) Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. 13 1958 no. 1, 5–24
- [4] H. Amann; *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. 18, no. 4 (1976), 620-709.
- [5] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami; *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122, no. 2 (1994), 519-543.
- [6] A. Ambrosetti, J. García Azorero, I. Peral; *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. 137 (1996), 29-242.
- [7] A. Ambrosetti, J. García Azorero, I. Peral; *Quasilinear Equations with a Multiple Bifurcation* Diff. and Integral Equations, Vol. 10 (1997) no. 1, 37-50.
- [8] A. Anane; *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p -laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305 (1987), no. 16, 725–728.
- [9] G. Aronsson; *Minimization problems for the functional $\sup_x F(x, f(x), f'(x))$* , Ark. Mat. 6 (1965) 33–53.
- [10] G. Aronsson; *Minimization problems for the functional $\sup_x F(x, f(x), f'(x))$. II*, Ark. Mat. 6 (1966) 409–431.
- [11] G. Aronsson; *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Ark. Mat. 6 (1967) 551–561.
- [12] G. Aronsson; *On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$* , Ark. Mat. 7 (1968) 395–425.
- [13] G. Aronsson; *Minimization problems for the functional $\sup_x F(x, f(x), f'(x))$. III*, Ark. Mat. 7 (1969) 509–512.

- [14] G. Aronsson, M.G. Crandall, P. Juutinen, *A tour of the theory of absolutely minimizing functions*. Bull. Amer. Math. Soc., 41 (2004), 439–505.
- [15] I. Ya. Bakelman; *On the theory of Monge-Ampère's equations*, (Russian) Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. 13 1958 no. 1, 25–38.
- [16] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta; *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. xviii+570 pp.
- [17] M. Bardi, F. Da Lio; *On the strong maximum principle for fully nonlinear degenerate elliptic equations*, Arch. Math. (Basel) 73 (1999), no. 4, 276–285.
- [18] G. Barles, J. Busca, *Existence and comparison results for fully nonlinear degenerate elliptic equations without zeroth-order terms*. Comm. Partial Diff. Eq., 26 (2001), 2323–2337.
- [19] E.N. Barron, L.C. Evans and R. Jensen, *The infinity laplacian, Aronsson's equation and their generalizations*. Trans. Amer. Math. Soc. 360, (2008), 77–101.
- [20] R. Bass; *Diffusions and elliptic operators*, Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1998. xiv+232 pp.
- [21] M. Belloni, B. Kawohl; *A direct uniqueness proof for equations involving the p -Laplace operator*, Manuscripta mathematica 109 (2002), 229–231.
- [22] A. Bensoussan, J. L. Lions; *Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control*, Studies in Mathematics and Its Applications. 12. Amsterdam-NewYork: North-Holland Publishing Co. (1982).
- [23] H. Berestycki; *On some nonlinear Sturm-Liouville problems*, J. Differential Equations 26 (1977), no. 3, 375–390.
- [24] H. Berestycki, L. Caffarelli, L. Nirenberg; *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains (Dedicated to Ennio De Giorgi)*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25 (1997), no. 1-2, 69-94.
- [25] H. Berestycki, L. Nirenberg; *On the method of moving planes and the sliding method*, Bull. Soc. Br. Mat. Nova Ser. 22: 1–37.
- [26] H. Berestycki, L. Nirenberg, S.R.S. Varadhan; *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), no. 1, 47–92.
- [27] T. Bhattacharya; *An elementary proof of the Harnack inequality for non-negative infinity-superharmonic functions*, Electron. J. Differential Equations, No. 44, 8 (2001).
- [28] T. Bhattacharya, E. DiBenedetto, J. Manfredi; *Limit as $p \rightarrow \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and related extremal problems*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino (1989), 15-68.
- [29] I. Birindelli, F. Demengel; *Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 13 (2004), no. 2, 261–287.

- [30] I. Birindelli, F. Demengel; *Eigenvalue, maximum principle and regularity for fully nonlinear homogeneous operators*, Comm. on Pure and Appl. Analysis, Vol. 6, (2007) no 2, 335-366.
- [31] I. Birindelli, F. Demengel; *The Dirichlet problem for singular fully nonlinear operators*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (2007) Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., ISBN: 978-1-60133-010-9; 1-60133-010-3, 110–121.
- [32] I. Birindelli, F. Demengel; *Eigenvalue and Dirichlet problem for fully-nonlinear operators in non-smooth domains*, J. Math. Anal. and Appl., Vol. 352 (2009) no. 2, 822-835.
- [33] L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral; *A Dirichlet Problem Involving Critical Exponents*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 24 (1995), no. 11, 1639-1648.
- [34] H. Brezis, S. Kamin; *Sublinear elliptic equations in \mathbb{R}^N* , Manuscripta Math. 74, (1992), 87-106.
- [35] H. Brezis, L. Nirenberg; *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 5, 465–472.
- [36] H. Brezis, L. Oswald; *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 10 (1986), no. 1, 55-64.
- [37] J. Busca, M. J. Esteban, A. Quaas; *Nonlinear eigenvalues and bifurcation problems for Pucci's operators*, Ann. I. H. Poincaré, Vol 22, (2005) 187-206.
- [38] X. Cabré; *Nondivergent elliptic equations on manifolds with nonnegative curvature*. Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), no. 7, 623-665.
- [39] X. Cabré, L.A. Caffarelli; *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc., Colloquium publications, Vol. 43 (1995).
- [40] X. Cabré, L.A. Caffarelli; *Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of non-convex fully nonlinear elliptic equation*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués, 82 (2003), no. 5, 573-612
- [41] L.A. Caffarelli, M.G. Crandall, M. Kocan, A. Świech; *On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 49 (1996), 365-397.
- [42] L. Caffarelli; *Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation*, Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 135–150.
- [43] L. Caffarelli; *A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity*, Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 129–134.
- [44] L. Caffarelli; *Some regularity properties of solutions of Monge Ampère equation* Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), no. 8-9, 965–969.
- [45] L. Caffarelli; *A note on the degeneracy of convex solutions to Monge Ampère equation* Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), no. 7-8, 1213–1217.

- [46] L. A. Caffarelli, C. Gutiérrez, Q. Huang; *On the regularity of reflector antennas*, Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 1, 299–323.
- [47] L.A. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck; *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampere equation*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), no. 3, 369–402.
- [48] L.A. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck; *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. 155 (1985), no. 3-4, 261–301.
- [49] F. Charro, J. García Azorero, J. D. Rossi; *A mixed problem for the infinity laplacian via Tug-of-War games*, Calc. Var. and PDE, vol. 34 (2009), no. 3, pp. 307.
- [50] F. Charro, E. Colorado, I. Peral; *Multiplicity of solutions to uniformly elliptic Fully Nonlinear equations with concave-convex right hand side* J. Differential Equations 246 (2009), 4221–4248.
- [51] F. Charro, E. Parini; *Limits as $p \rightarrow \infty$ of p -laplacian problems with a superdiffusive power-type nonlinearity: positive and sign-changing solutions* (preprint).
- [52] F. Charro, I. Peral; *Limit branch of solutions as $p \rightarrow \infty$ for a family of sub-diffusive problems related to the p -laplacian* Comm. Partial Differential Equations, vol. 32 (2007), no. 12, 1965 - 1981.
- [53] F. Charro, I. Peral; *Zero Order Perturbations to Fully Nonlinear equations: Comparison, existence and uniqueness*, Commun. Contemp. Math. 11 (1) (2009) 131-164.
- [54] F. Charro, I. Peral; *Limits as $p \rightarrow \infty$ of p -laplacian concave-convex problems* (preprint).
- [55] M. G. Crandall, L. C. Evans, R. F. Gariepy; *Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian*, Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001), no. 2, 123–139.
- [56] M. G. Crandall, G. Gunnarsson, P. Wang, *Uniqueness of ∞ -harmonic functions and the eikonal equation*, Comm. Partial Diff. Eq., 32 (2007) , 1587 – 1615 .
- [57] M. G. Crandall, H. Ishii; *The Maximum Principle for Semicontinuous Functions*, Differential and Integral Equations 3 (1990), no. 6, 1001-1014.
- [58] M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions; *User’s Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), no. 1, 1-67.
- [59] M.G. Crandall, M. Kocan, P.L. Lions, A. Świech; *Existence results for boundary problems for uniformly elliptic and parabolic fully nonlinear equations*, Electron. J. Differential Equations 1999, No. 24, 22 (electronic).
- [60] M.G. Crandall, P.Y. Wang; *Another way to say caloric* J. Evol. Equ. 3 (2003), no. 4, 653-672.

- [61] A. Cutri, F. Leoni; *On the Liouville Property for Fully Nonlinear Equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire 17 (2000), no. 2, 29-245.
- [62] F. Da Lio, B. Sirakov; *Symmetry results for viscosity solutions of fully nonlinear uniformly elliptic equations* (preprint, 2007).
- [63] D. G. De Figueiredo, P.L. Lions, R. D. Nussbaum; *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. 61 (1982), no. 1, 41-63.
- [64] E. DiBenedetto; *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 7 (1983), no. 8, 827–850.
- [65] C. Escudero; *Geometric Principles of Surface Growth*, Phys. Rev. Lett. 101, 196102 (2008).
- [66] L.C. Evans; *Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), no. 3, 333–363.
- [67] L.C. Evans; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS (1998).
- [68] L.C. Evans, W. Gangbo; *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Amer. Math. Soc. 137 (1999), no. 653, viii+66 pp.
- [69] L.C. Evans, R. F. Gariepy; *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp.
- [70] P. Felmer, A. Quaas; *On critical exponents for the Pucci's extremal operators*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003), no. 5, 843-865.
- [71] W. H. Fleming H. M. Soner; *Controlled Markov processes and viscosity solutions, Second edition*, Stochastic Modelling and Applied Probability, 25. Springer, New York, 2006. xviii+429 pp.
- [72] A. Friedman; *Differential games*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XXV. Wiley-Interscience [A division of John Wiley & Sons, Inc.], New York-London, 1971. xii+350 pp.
- [73] N. Fukagai, M. Ito, K. Narukawa; *Limit as $p \rightarrow \infty$ of p -Laplace eigenvalue problems and L^∞ -inequality of the Poincare type*. Differential Integral Equations 12 (1999), no. 2, 183–206.
- [74] J. García Azorero, I. Peral; *Existence and nonuniqueness for the p -laplacian: Nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations, vol 12, no. 12 (1987) 1389-1430.
- [75] J. P. García Azorero, J.J. Manfredi, I. Peral Alonso ; *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*. Commun. Contemp. Math. 2 (2000), no. 3, 385-404.
- [76] R.Gariepy,W. Ziemer, P. William; *A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 67 (1977), no. 1, 25–39.

- [77] B. Gidas, J. Spruck; *A Priori Bounds for Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*, Comm. Partial Differential Equations 6 (1981), no. 8, 883-901.
- [78] D. Gilbarg, N. S. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [79] T. Glimm, V. Olikier; *Optical design of single reflector systems and the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Nonlinear problems and function theory. J. Math. Sci. (N. Y.) 117 (2003), no. 3, 4096-4108.
- [80] T. Glimm, V. Olikier *Optical design of two-reflector systems, the Monge-Kantorovich mass transfer problem and Fermat's principle*, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), no. 5, 1255-1277.
- [81] C. Gutiérrez; *The Monge-Ampère equation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 44. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. xii+127 pp.
- [82] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio; *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Unabridged republication of the 1993 original. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. xii+404
- [83] H. Ishii; *On Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second-Order Elliptic PDE's*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLII, 15-45, pág. 15-45 (1989).
- [84] J. Jacobsen; *Global bifurcation problems associated with k -hessian operators*, Ph.D. thesis, University of Utah, 1999.
- [85] R. Jensen; *Uniqueness of Lipschitz extensions: Minimizing the sup norm of the gradient*, Arch. Rational Mech. Anal. 123 (1993), 51-74.
- [86] P. Juutinen; *Minimization problems for Lipschitz functions via viscosity solutions*. Dissertation, University of Jyväskylä, Jyväskylä, 1998. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. No. 115 (1998), 53
- [87] P. Juutinen; *Principal eigenvalue of a badly degenerate operator*, J. Differential Equations 236 (2007), no. 2, 532-550.
- [88] P. Juutinen, B. Kawohl; *On the evolution governed by the infinity Laplacian*, Math. Ann. 335 (2006), no. 4, 819-851.
- [89] P. Juutinen, P. Lindqvist; *On the higher eigenvalues for the ∞ -eigenvalue problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations 23 (2005), no. 2, 169-192.
- [90] P. Juutinen, P. Lindqvist, J. J. Manfredi ; *The ∞ -eigenvalue problem*, Arch. Ration. Mech. Anal. 148 (1999), no. 2, 89-105.
- [91] P. Juutinen, P. Lindqvist, J. J. Manfredi ; *The infinity Laplacian: examples and observations*, Papers on analysis, 207-217, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., 83, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä (2001).
- [92] B. Kawohl; *On a family of torsional creep problems*, J. Reine Angew. Math. 410 (1990), 1-22.

- [93] B. Kawohl, N. Kutev; *Strong Maximum Principle for Semicontinuous Viscosity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, Arch. Math. 70 (1998), 470-478.
- [94] T. Kilpeläinen, P. Lindqvist; *Nonlinear ground states in irregular domains*, Indiana Univ. Math. J. 49 (2000), no. 1, 325–331.
- [95] T. Kilpeläinen, J. Malý; *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations*, Acta Math. 172 (1994), no. 1, 137–161.
- [96] R.V. Kohn and S. Serfaty, *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*, Comm. Pure Appl. Math. 59(3) (2006), 344–407.
- [97] N. V. Krylov; *Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (1982), no. 3, 487–523, 670.
- [98] N. V. Krylov; *Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 47 (1983), no. 1, 75–108.
- [99] P. Lindqvist; *On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$* , Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 1, 157–164.
- [100] P. Lindqvist; *Addendum: “On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$ ”* [Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 1, 157–164; MR1007505 (90h:35088)], Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), no. 2, 583–584.
- [101] P. Lindqvist; *On a nonlinear eigenvalue problem*, Fall School in Analysis (Jyväskylä, 1994), 33–54, Report, 68, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 1995.
- [102] P. Lindqvist; *Notes on the p -Laplace equation*, Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics, 102. University of Jyväskylä, Jyväskylä, 2006. ii+80
- [103] P. Lindqvist, J. Manfredi; *The Harnack inequality for ∞ -harmonic functions*, Elec. J. Diff. Eqs. 5 (1995), 1-5.
- [104] P. Lindqvist, J. Manfredi; *Note on ∞ -superharmonic functions*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid 10 (1997), 1-9.
- [105] P.-L. Lions; *Two remarks on Monge - Ampere equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 142 (1985), 263-275.
- [106] G. Lu, P. Wang; *Inhomogeneous infinity Laplace equation*, Adv. Math. 217 (2008), no. 4, 1838–1868.
- [107] G. Lu, P. Wang; *A PDE perspective of the normalized infinity Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations, to appear.
- [108] J. Malý, W. P. Ziemer; *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, 51. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. xiv+291 pp.
- [109] V. G. Maz'ja; *The continuity at a boundary point of the solutions of quasilinear elliptic equations (Russian. English summary)*, Vestnik Leningrad. Univ. 25 1970 no. 13, 42–55.

- [110] E.J. McShane; *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 837-842.
- [111] I. Peral *Some results on Quasilinear Elliptic Equations: Growth versus Shape*, 153-202, *Proceedings of the Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations* I.C.T.P. Trieste, Italy, A. Ambrosetti and it alter editors. World Scientific, 1998.
- [112] A. V. Pogorelov; *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 35. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973. vi+669 pp.
- [113] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield, D. Wilson; *Tug-of-war and the infinity Laplacian*, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), no. 1, 167–210.
- [114] Y. Peres, S. Sheffield; *Tug-of-war with noise: a game theoretic view of the p -Laplacian*, Duke Math. J. Volume 145, Number 1 (2008), 91-120.
- [115] A. Quaas, B. Sirakov; *Existence Results for Nonproper Elliptic Equations Involving the Pucci Operator*, Comm. in Partial Differential Equations, 31 (2006), no. 7, 987-1003.
- [116] A. Quaas, B. Sirakov; *On the Principal Eigenvalues and the Dirichlet Problem for Fully Nonlinear Operators*, CR Math. Acad. Sci. Paris, (2006).
- [117] G. Talenti; *Inequalities in rearrangement invariant function spaces*, Nonlinear analysis, function spaces and applications, Vol. 5 (Prague, 1994), 177–230, Prometheus, Prague, 1994.
- [118] P. Tolksdorf; *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations 51 (1984), no. 1, 126–150.
- [119] N. Trudinger; *Comparison Principles and Pointwise Estimates for Viscosity Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*, Revista Matemática Iberoamericana Vol. 4 (1988), 453-468.
- [120] N. Trudinger; *On the Dirichlet problem for Hessian equations*, Acta Math. 175 (1995), no. 2, 151–164.
- [121] N. Trudinger; *Weak solutions of Hessian equations*, Comm. Partial Differential Equations 22 (1997), no. 7-8, 1251–1261.
- [122] N. Trudinger, X. J. Wang; *Hessian measures. I*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 10 (1997), no. 2, 225–239.
- [123] K. Tso; *Remarks on critical exponents for hessian operators*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire, 7 no. 2 (1990), p. 113–122.
- [124] J. Viaclovsky; *Conformal geometry and fully nonlinear equations*, 435–460, Nankai Tracts Math., 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [125] X. J. Wang; *A priori estimates and existence for a class of fully nonlinear elliptic equations in conformal geometry*, Chinese Ann. Math. Ser. B 27 (2006), no. 2, 169–178.

- [126] H. Whitney; *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), no. 1, 63–89.
- [127] Y. Yu; *Some properties of the ground states of the infinity Laplacian*, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 2, 947–964.