



FACULTAD DE CIENCIAS  
ECONÓMICAS y EMPRESARIALES

*Equilibrio General en Economías con  
Externalidades y Conjuntos de Producción no  
Convexos en un Espacio de Bienes de  
Infinitas Dimensiones*

Matías Nicolás Fuentes

2012



*Equilibrio General en Economías con  
Externalidades y Conjuntos de Producción no  
Convexos en un Espacio de Bienes de  
Infinitas Dimensiones*

Autor:

Matías N. Fuentes

Director:

Dr. Julio H. G. Olivera

Tesis enviada al Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid para optar al grado de Doctor en Economía Teórica.

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Julio H. G. Olivera por el estímulo, la guía y las recomendaciones brindadas durante la elaboración de la presente tesis. En un momento crítico de esta etapa, su aceptación y apoyo a dirigir este trabajo fueron fundamentales para que el mismo siguiera adelante, lo mismo que su lectura crítica de los borradores que redundaron en un trabajo mucho mejor. Extiendo también mi gratitud al tutor de la tesis en la Universidad Autónoma de Madrid, el Dr. Joan Crespo Fernández, por la disposición que tuvo hacia la lectura de la misma y por el informe realizado.

Agradezco especialmente a mis profesores del programa de Doctorado en Economía Teórica de la UAM. En particular a los Dres. Rafael Rubio de Urquía, Paloma Sanz Álvaro, Richard Watt, Rosa Barbolla García y Francisco Vázquez Hernández por sus enseñanzas, estímulos y por haberme conducido hacia la investigación científica de frontera. En el caso de Francisco Vázquez, mi agradecimiento se extiende también a su ayuda en cuestiones de gestión dado que más de una vez me dirigí a él por algún trámite administrativo. Dada mi residencia en Argentina, su prestancia y celeridad fueron fundamentales.

Parte de los resultados de esta tesis fueron presentados en varios congresos, workshops, conferencias y reuniones científicas. Agradezco a los participantes de dichos encuentros por sus sugerencias y recomendaciones, muy en especial al profesor Jean-Marc Bonnisseau de la Université Paris I, Sorbonne. Mi deuda con él también se hace evidente en el tema escogido para mi investigación. También deseo expresar mi agradecimiento a los profesores Tomoyuki Kamo, Fernando Tohmé y Eduardo Rodríguez por sus lecturas, recomendaciones y estimulantes conversaciones sobre algunos de los resultados de la tesis.

Expreso mi reconocimiento y especial agradecimiento a la Universidad Nacional de San Martín por el apoyo brindado a mi familia y a mí tanto para viajar a España a cursar el doctorado como para poder culminar este trabajo. En particular la Escuela de Economía y Negocios ha sido el ámbito donde se gestó este proyecto, el que me acogió en mi vuelta y donde encontré el lugar y el estímulo necesario para desarrollar ideas y trabajar. Como decano de dicha Escuela, el Lic. Horacio Val ha sido clave en todo este proceso hasta el día de su fallecimiento. Desde su estímulo y compromiso para estudiar en el exterior hasta su apoyo a desarrollar investigación en economía matemática y teórica que involucra esta tesis. Debo mencionar que el tramo final de este trabajo se hizo bajo la gestión del nuevo decano, el Contador Marcelo Paz, quien desde un primer momento me brindó todo su apoyo para que pudiera finalizar este proyecto. También a él deseo expresar mi gratitud.

Quiero agradecer especialmente a mis padres. A mi madre, quien hoy ya no está físicamente pero que en su momento ha hecho frente a mi ausencia con gran paciencia y valor y me apoyó en todos mis esfuerzos. A mi padre, quien junto con mi madre, siempre se esforzó para que yo pudiera estudiar.

Agradezco a mis amigos que acompañaron toda esta carrera y siempre estuvieron al tanto del avance del trabajo aún desde otro lugar. Mi gran amigo Martín en Argentina y

Miguel, Delia, Mariela, Miguel Ángel y Natalia en España, han estado siempre con nosotros.

Agradezco a mi familia: mi esposa Débora y mi hija Lara. *Debby* me acompañó incondicionalmente desde el primer momento aún a costa de que ello ha implicado que tenga que renunciar a proyectos personales. Veinte días después de habernos casado viajamos a España porque yo debía comenzar el doctorado. Sin ella yo no habría completado esta tesis. *Larita* nació en la última parte de la elaboración de esta tesis, cuando ya estábamos de vuelta en Argentina. Desde entonces la vida ha sido más feliz para nosotros.

Finalmente deseo expresar mi total y perpetuo agradecimiento al Dios Trino, Creador, Soberano y Salvador, porque *en Él vivimos, nos movemos y existimos*.

Matías Nicolás Fuentes

## Resumen

En el presente trabajo demostramos ciertos teoremas de existencia de equilibrio general en economías donde existen infinitos bienes, donde los conjuntos de producción son no convexos y cuya frontera es no diferenciable y donde existen externalidades en el sentido de que las acciones de cada individuo condiciona o puede condicionar el comportamiento del resto de los agentes. Siguiendo la tradición de Laffont (1976 y 1977), Laffont y Laroque (1972) y Bonnisseau (1997) formalizamos dichas externalidades a través de correspondencias de producción, consumo y preferencias. Por otro lado, los conjuntos de producción adoptan la forma más general posible siendo el caso de los rendimientos crecientes a escala un caso particular, pero sumamente importante. Los productores siguen reglas generales de comportamiento y la maximización de beneficios es un caso particular cuando las correspondencias son valoradas convexas. Finalmente modelizamos la economía con infinitos bienes a través del espacio  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$  de las funciones  $\mathcal{M}$ -medibles y  $\mu$ -esencialmente acotadas.

El método de demostración es el utilizado por Bewley (1972) de economías finitas. Sin embargo, como se demuestra en la tesis, no podemos hacer una aplicación directa de esta técnica debido a que existen al menos cuatro inconvenientes. Por el contrario, debemos hacer un tratamiento minucioso de la subeconomías o economías truncadas y de algunos supuestos asociados. Como resultado tenemos dos teoremas de existencia de equilibrio general y dos corolarios. En el primer teorema se obtiene un vector de precios en el espacio  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el dual topológico de  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , mientras que en el segundo los precios pertenecen a  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ , que tiene una mejor interpretación económica. Luego los dos corolarios tratan los casos de conjuntos convexos y precios generales y conjuntos convexos y precios significativos respectivamente. Los resultados son lo suficientemente general y extienden a aquellos trabajos que incorporan externalidades y rendimientos crecientes pero con finitos bienes (Bonnisseau (1997)) y a los que tienen rendimientos crecientes e infinitos bienes pero no contemplan externalidades (Bonnisseau y Meddeb (1999))

La presente tesis se divide en tres capítulos. El primero de ellos aborda los principales conceptos, teoremas, lemas y demás resultados económicos y matemáticos que se utilizan en los restantes capítulos. La primera sección incorpora el herramental matemático mientras que el segundo se avoca al instrumental teórico económico. En ambos se enuncian los conceptos y resultados elementales y solo se prueban aquellos teoremas que no están explicitados en la bibliografía consultada. El segundo capítulo está dedicado completamente al *estado del arte*. El objetivo es doble: por un lado exponer el estado de la literatura moderna del equilibrio general con espacios de dimensión infinita, tecnologías no convexas y efectos externos, llegando así a la “frontera” del conocimiento en estas áreas; por el otro, mostrar los temas no contemplados por la teoría. Sobre esta base se erige el tercer capítulo que consiste en el desarrollo de los resultados especificados en los dos párrafos anteriores. Es precisamente este capítulo donde se exponen los aportes originales del tesista a la teoría del equilibrio general.

## ÍNDICE

<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	iv
<b>RESUMEN</b> .....	vi
<b>ÍNDICE</b> .....	vii
<b>CAPÍTULO PRIMERO: CONCEPTOS y RESULTADOS BÁSICOS</b> .....	11
Sección I. Elementos de Matemáticas.....	11
1. Espacios topológicos.....	11
2. Redes y sucesiones.....	13
3. Topología débil.....	15
4. Espacios métricos.....	15
5. Espacios normados.....	16
6. Espacios de Hilbert.....	17
7. Espacios producto y topología producto.....	18
8. Espacios compactos.....	19
9. Aplicaciones lineales.....	20
10. Espacios vectoriales topológicos.....	22
11. Espacios vectoriales topológicos localmente convexos.....	23
12. Espacios de Riesz.....	25
13. Dualidad y topologías consistentes.....	27
14. Espacios medibles y espacios de medida.....	29
15. Espacios $L_p$ .....	32
16. Correspondencias.....	33
17. Teoremas de punto fijo.....	36
18. Particularidades de los espacios de dimensión finita.....	37
19. Conos.....	38
20. Convexidad generalizada: conjuntos estrellados.....	42
21. Distribuciones de Schwartz.....	42
Sección II. Elementos de Teoría Económica.....	44
1. Espacio de bienes de dimensión infinita.....	44
2. Conjuntos de producción no convexos.....	46
3. Tarificación al costo marginal.....	51
4. Conceptos, teoremas, proposiciones y resultados varios en la teoría del equilibrio general, en la economía del bienestar y en el equilibrio social...	52
5. Externalidades.....	58
6. Externalidades y tecnologías no convexas.....	60

<b>CAPÍTULO SEGUNDO: EL ESTADO DEL ARTE.....</b>	<b>63</b>
1. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con espacios de dimensión infinita.....	63
1.1 Espacios considerados.....	63
1.1.1 Espacios de sucesiones.....	63
1.1.2 Espacios de funciones.....	64
1.1.3 Espacios de medidas.....	65
1.1.4 Espacios vectoriales topológicos de Riesz.....	65
1.1.5 Espacio de distribuciones.....	65
1.2 Los primeros trabajos.....	65
1.2.1 Debreu (1954) .....	66
1.2.2 Gabszewicz (1968) .....	67
1.2.3 Peleg y Yaari (1970) .....	68
1.2.4 Lucas y Prescott (1972).....	69
1.2.5 Bewley (1972).....	70
1.3 Sobre la necesidad de los espacios de dimensión infinita y su interpretación económica.....	71
1.3.1 Horizonte temporal infinito.....	71
1.3.2 Bienes diferenciados.....	72
1.3.3 Modelos de equilibrio general con incertidumbre e infinitos estados de la naturaleza.....	74
1.3.3.1 Hervés-Beloso, Martins da Rocha y Monteiro (2009).....	75
1.4 Tipos de estrategias en la demostración de existencia de equilibrio general.....	76
1.4.1 Aproximaciones finitas.....	76
1.4.1.1 Bewley (1972).....	76
1.4.1.2 Podczeck y Yannelis (2008).....	78
1.4.2 El método de Negishi.....	83
1.4.3 El método de equivalencia del núcleo.....	83
1.4.4 El método del exceso de demanda.....	83
1.5 Principales problemas matemáticos al considerar espacios de dimensión infinita.....	84
1.5.1 No compacidad del conjunto de asignaciones factibles.....	84
1.5.1.1 Espacios de bienes que son duales topológicos de otros espacios.....	85
1.5.1.2 Espacios reflexivos.....	86
1.5.1.3 Los espacios $L = L_1$ o $l_1$ .....	86
1.5.1.4 Espacios reticulados de Banach.....	86
1.5.1.5 Espacio de distribuciones.....	87
1.5.2 Interior vacío del cono positivo.....	87
1.5.3 Continuidad conjunta.....	90
1.5.3.1 Noguchi (1997b).....	91



1.5.3.2 Bonnisseau y Meddeb (1999).....	91
1.5.3.3 Jones (1984).....	92
1.5.3.4 Olivera (1997).....	92
2. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con conjuntos de producción no convexos.....	93
2.1 Modelos de equilibrio general con distintas conductas de los productores ante la presencia de tecnologías no convexas.....	93
2.1.1 Tarificación al costo marginal.....	93
2.1.1.1 Mantel (1979).....	93
2.1.1.2 Beato (1982).....	95
2.1.1.3 Bonnisseau y Cornet (1990b).....	101
2.1.1.4 Bonnisseau y Cornet (2008).....	105
2.1.2 Formas generales de tarificación.....	107
2.1.2.1 Beato y Mas-Colell (1985).....	107
2.1.2.2 Bonnisseau y Cornet (1988).....	109
2.1.3 Otras formas de tarificación y equilibrio general...	111
2.1.3.1 Tarificación al costo medio .....	111
2.1.3.2 Comercio voluntario (Dehez y Dréze (1988a y b)).....	111
2.1.3.3 Tarificación según cantidad guiada (Dierker y Neufeind (1988)).....	111
3. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con externalidades.....	112
3.1 del Mercato (2006) .....	113
3.2 Bonnisseau y del Mercato (2008 y 2010) .....	116
4. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con distintas combinaciones de espacios de dimensión infinita, no convexidades y externalidades.....	117
4.1 Modelos de equilibrio general con espacios de dimensión infinita y conjuntos de producción no convexos.....	118
4.1.1 Bonnisseau y Meddeb (1999).....	118
4.1.2 Bonnisseau (2002) .....	119
4.2 Modelos de equilibrio general con externalidades y conjuntos de producción no convexos.....	121
4.2.1 Bonnisseau (1997).....	121
4.2.2 Bonnisseau y Médecin (2001).....	123
5. Comentarios finales del capítulo.....	124
<b>CAPÍTULO TERCERO: TEOREMAS DE EXISTENCIA.....</b>	<b>125</b>
1. Introducción.....	125
2. Descripción de la economía.....	129

3. Supuestos básicos.....	132
4. Subeconomías, limitaciones en el enfoque de Bewley y supuestos adicionales.....	135
4.1 Las subeconomías y el supuesto de continuidad sobre la conducta de los productores.....	135
4.2 Limitación del enfoque de Bewley en el actual modelo y supuestos de hemi-continuidad inferior.....	138
5. Teorema de existencia con precios en el espacio $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ .....	140
6. Demostración del Teorema 5.1.....	140
6.1 Existencia de equilibrio en las subeconomías.....	140
6.2 De las subeconomías de dimensión finita a la economía original..	142
7. Existencia de equilibrio con precios en el espacio $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ .....	148
8. Casos particulares.....	150
8.1 Espacio de bienes de dimensión finita.....	150
8.2 Inexistencia de externalidades.....	150
8.3 Correspondencias de producción valoradas convexas.....	150
<b>Apéndice A.....</b>	<b>153</b>
Demostración del Hecho 1.....	153
Demostración del Hecho 2.....	158
Demostración de la Proposición 6.1.....	160
<b>Apéndice B. Análisis de los problemas clásicos en dimensión infinita en el actual modelo.....</b>	<b>173</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>175</b>

## CAPÍTULO PRIMERO: CONCEPTOS y RESULTADOS BÁSICOS

El presente capítulo incluye buena parte de los conceptos matemáticos y económicos que haremos uso a lo largo de la tesis. También incorpora la discusión y demostración de algunas afirmaciones que son comunes en economía matemática, así como ejemplos y contraejemplos, todo lo cual pretende ser la base teórico-formal de los Capítulos Segundo y Tercero. Huelga decir que cada tópico tratado aquí está desarrollado con mayor profundidad en la bibliografía. Sin embargo, debemos manifestar que varias demostraciones de resultados matemáticos y/o económicos no la hemos tomado de ninguna fuente. En efecto, en general hemos probado aquellos resultados cuya demostración no se encuentra en la literatura consultada. Por el contrario, cuando la demostración sí estaba explicitada en la bibliografía hemos remitido al lector directamente a la misma.

El Capítulo Primero esta compuesto de dos secciones. La primera trata de las definiciones, conceptos, teoremas, lemas, proposiciones, y corolarios matemáticos que más utilizamos en la tesis, como así también varios ejemplos y contraejemplos. Debemos resaltar que una buena presentación de dichas definiciones, conceptos, etc. exige el enunciado de ciertas definiciones y resultados previos. En nuestro caso, se trata de definiciones y resultados previos que no necesariamente son utilizados en la tesis, pero los exponemos a los efectos de presentar adecuadamente todo el aparato matemático efectivamente usado en la misma. Por último, a lo largo de la Sección I, y salvo indicación, el cuerpo de los escalares se restringirá a los números reales.

La sección segunda aborda los principales conceptos económicos que tienen que ver con infinitos bienes, rendimientos crecientes a escala, formas generales de conjuntos de producción, equilibrio, óptimo de Pareto, tarificación al costo marginal, externalidades y la relación de estas últimas con las tecnologías no convexas. Se trata no solo de una sección dedicada a los conceptos y a las definiciones en sí, sino también a las relaciones entre ellos y a las implicancias de los mismos, las cuales las exponemos a través de proposiciones, resultados, ejemplos y contraejemplos.

### Sección I Elementos de Matemáticas

#### 1. Espacios topológicos

1.1 *Definición - topología y espacios topológicos*: Sea  $X$  un conjunto cualquiera y  $2^X$  el conjunto de sus partes. Una topología sobre  $X$  es un conjunto  $\mathcal{T} \subset 2^X$  que cumple con:

- (i)  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
- (ii) La unión de los miembros de cualquier subfamilia de  $\mathcal{T}$  es miembro de  $\mathcal{T}$ .
- (iii) La intersección de dos miembros cualesquiera de  $\mathcal{T}$  es un miembro de  $\mathcal{T}$ .

A los elementos de  $\mathcal{T}$  se los denomina conjuntos abiertos respecto a la topología  $\mathcal{T}$ , y el par  $(X, \mathcal{T})$  se llama espacio topológico.

1.2 *Definición - conjuntos abiertos y cerrados*: Ligado al concepto de conjunto abierto está el de conjunto cerrado. Un conjunto  $F \subset X$  se dice que es cerrado (abierto) con

respecto a la topología  $\mathcal{T}$  si su complemento relativo es un conjunto abierto (cerrado). Nótese que  $X$  y  $\emptyset$  son, simultáneamente, conjuntos cerrados y abiertos.

**1.3 Definición-entorno; punto interior; punto adherente; punto de acumulación; punto frontera.** Se dice que  $U^x \subset X$  es entorno de  $x$  ( $\mathcal{T}$ -entorno) si contiene un conjunto abierto al cual  $x$  pertenece. Un entorno de un punto no es forzosamente abierto, pero todo conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos.

Al conjunto de todos los entornos de un punto  $x$  se le denomina sistema de entornos de  $x$ . Se dice que  $x \in X$  es un punto interior de  $U$  ( $x \in \text{int}U$  o  $x \in \mathcal{T}$ -interior de  $U$ ) si  $U$  es entorno de  $x$ , es decir  $U = U^x$ . Resulta evidente entonces que para que un punto sea interior debe pertenecer al conjunto, o sea  $\text{int}U \subset U$ . Se desprende también que el conjunto de los puntos interiores a  $U$  es un conjunto abierto, denominado  $\text{int}U$ . Es el mayor conjunto abierto incluido en  $U$ . Como consecuencia tenemos que  $U$  es un conjunto abierto si y solamente si  $U = \text{int}U$ .

Sea  $A \subset X$ , un punto  $x \in X$  es un punto de adherencia del subconjunto  $A$  si para todo entorno  $U^x$  de  $x$ ,  $A \cap U^x \neq \emptyset$ . Escribimos como  $\bar{A}$  o  $clA$ , según convenga, al conjunto de puntos de adherencia de  $A$ .  $\bar{A}$  o  $clA$  también recibe el nombre de clausura de  $A$  de un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ .  $x \in X$  es un punto de acumulación de  $A$  si y solamente si cada entorno de  $x$  contiene puntos de  $A$  diferentes de  $x$ . El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto  $A \subset X$  se llama a veces el conjunto *derivado* de  $A$ ,  $acA$ , de un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ . Un punto  $x \in X$  se dice que es un punto frontera de  $A$  si todo entorno  $U^x$  de  $x$  corta a  $A$  y a su complemento relativo. Al conjunto de los puntos frontera de  $A$  se le denomina frontera de  $A$  y se denota por  $\partial A$ . La frontera de  $A$  es un conjunto cerrado. Un conjunto es cerrado si y solamente si contiene a su frontera, y es abierto si y solamente si es disjunto con su frontera.

**1.4 Caracterización de conjuntos cerrados.** De las definiciones vistas en 1.3 podemos decir que un conjunto  $A \subset X$  es cerrado con respecto a la topología  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}$ -cerrado) si y solamente si  $A = \bar{A}$  si y solamente si  $acA \subset A$  si y solamente si  $\partial A \subset A$ .

**1.5 Definición-base de una topología.** Una familia  $\mathcal{B}$  de conjuntos es una base de una topología  $\mathcal{T}$  si y solamente si  $\mathcal{B}$  es una subfamilia de  $\mathcal{T}$  y para cada punto  $x$  del espacio  $X$ , y cada entorno  $U$  de  $x$ , hay un miembro  $V$  de  $\mathcal{B}$  tal que  $x \in V \subset U$ .

**1.6 Definición-subbase de una topología.** Una familia  $\mathcal{S}$  de conjuntos es una sub-base de una topología  $\mathcal{T}$  si y solo si la familia de todas las intersecciones finitas de miembros de  $\mathcal{S}$  es base de  $\mathcal{T}$ .

**1.7 Definición-conjunto denso.** Un conjunto  $A$  es denso ( $\mathcal{T}$ -denso) en un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  si y solo si  $\bar{A} = X$ .

**1.8 Definición-espacio separable.** Un espacio topológico  $X$  es separable si y solo si hay un subconjunto numerable que es denso en  $X$ .

**1.9 Teorema.** Un espacio cuya topología tiene una base numerable es separable.

1.10 *Definición-topología relativa.* Si  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico e  $Y$  es parte de  $X$ , podemos construir una topología  $\mathcal{U}$  de  $Y$  que se llama topología relativa (inducida) o la relativización de  $\mathcal{T}$  a  $X$ . La topología relativa  $\mathcal{U}$  se define como la familia de todas las intersecciones de miembros de  $\mathcal{T}$  con  $Y$ .

1.11 *Definición-subespacio (topológico).* Un espacio topológico arbitrario  $(Y, \mathcal{U})$  es un subespacio de otro  $(X, \mathcal{T})$  si y solamente si  $Y \subset X$  y  $\mathcal{U}$  es la relativización de  $\mathcal{T}$ .

1.12 *Definición-función continua.* Sea  $f : (X, \mathcal{T}) \mapsto (Y, \mathcal{V})$  una función y  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{V})$  espacios topológicos.  $f$  es continua con respecto a  $\mathcal{T}$  y a  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{T}$ - $\mathcal{V}$ -continua o simplemente continua) si y solo si  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  para cada  $U \in \mathcal{V}$ . Nótese que el concepto de continuidad depende de las topologías del dominio y el rango.

1.13 *Definición-homeomorfismo; espacios homeomorfos.* Sea  $f : (X, \mathcal{T}) \mapsto (Y, \mathcal{V})$  una función biunívoca tal que  $f$  y  $f^{-1}$  son ambas continuas. En ese caso decimos que  $f$  es un homeomorfismo o transformación topológica y que  $X$  e  $Y$  son homeomorfos o topológicamente equivalentes.

## 2. Redes y sucesiones

2.1 *Definición-relación.* Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Una relación binaria  $\mathfrak{R}$  entre  $A$  y  $B$  es todo subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ . Cuando un par ordenado  $(a, b) \in A \times B$  pertenece a la relación  $\mathfrak{R}$  ( $(a, b) \in \mathfrak{R}$ ) se dice que  $a$  está  $\mathfrak{R}$ -relacionado con  $b$  y se escribe  $a\mathfrak{R}b$ .

El *dominio* de una relación  $\mathfrak{R}$  es el conjunto de todas las primeras coordenadas de elementos de  $\mathfrak{R}$ , y su *rango* es el conjunto de todas las segundas coordenadas.

2.2 *Definición.* Sea  $D$  un conjunto cualquiera. Una relación  $\mathfrak{R}$  es *reflexiva* si y solo si cada punto  $d \in D$  está  $\mathfrak{R}$ -relacionado consigo mismo. Esto equivale a requerir que la identidad  $(d, d)$  es parte de  $\mathfrak{R}$  para todo  $d \in D$ . La relación es *transitiva* si y solamente si cada vez que  $a\mathfrak{R}b$  y  $b\mathfrak{R}c$  entonces  $a\mathfrak{R}c$ .

2.3 *Definición.* Una relación binaria  $\geq$  dirige a un conjunto  $D$  si  $D$  no es vacío y

- (a) si  $m, n$  y  $p$  son puntos de  $D$  tales que  $m \geq n$  y  $n \geq p$ , entonces  $m \geq p$  (transitividad)
- (b) si  $m \in D$ , entonces  $m \geq m$  (reflexividad)
- (c) si  $m$  y  $n$  están en  $D$ , entonces existe  $p$  en  $D$  tal que  $p \geq m$  y  $p \geq n$ .

2.4 *Definición.* Un *conjunto dirigido* es un par  $(D, \geq)$  tal que  $\geq$  dirige a  $D$ . Una *red* es un par  $(f, \geq)$  tal que  $f$  es una función, y  $\geq$  dirige a su dominio. Si  $f$  es una función cuyo dominio contiene a  $D$  y  $D$  está dirigido por  $\geq$ , entonces  $\{f(d), d \in D\} = \{x_d, d \in D\}$  es la red  $(f|_D, \geq)$  donde  $f|_D$  es  $f$  restringida a  $D$ .

2.5 *Propiedad.* Una red  $\{x_d, d \in D\}$  está en un conjunto  $G$  si y solo si  $x_d \in G$  para todo  $d \in D$ ; está *eventualmente* en  $G$  si y solo si hay un punto  $d_0$  en  $D$  tal que, si  $d \in D$  y  $d \geq$

$d_0$ , entonces  $x_d \in G$ . La red  $\{x_d, d \in D\}$  en un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  converge al punto  $x$  respecto a  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{T}$ -converge) si y solo si está eventualmente en cada  $\mathcal{T}$ -entorno de  $x$ . Notemos que la noción de convergencia depende de la función  $f$ , la topología  $\mathcal{T}$  y el orden  $\geq$ .

**2.6 Corolario.** Una red  $\{x_d, d \in D\}$  en un espacio topológico puede converger a varios puntos diferentes. Por caso, si  $X$  es indiscreto (los únicos abiertos son  $X$  y el vacío), entonces toda red en  $X$  converge a todo punto de  $X$ .

**2.7 Definición.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico.  $(X, \mathcal{T})$  es un *espacio de Hausdorff* o *separado* si para cada par de puntos distintos,  $x$  e  $y$ , hay  $\mathcal{T}$ -entornos respectivos  $U^x$  y  $U^y$  tales que  $U^x \cap U^y = \emptyset$ .

**2.8 Teorema.** Un espacio topológico es de Hausdorff si y solo si cada red en el espacio converge, cuanto más, a un punto.

**2.9 Caracterización mediante Redes.** Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Entonces:

- (a) Un punto  $s$  es de acumulación de un conjunto  $A$  de  $X$  si y solo si hay una red en  $A \setminus \{s\}$  que converge a  $s$
- (b) Un punto  $s$  está en la clausura de una parte  $A$  de  $X$  si y solo si hay una red en  $A$  que converge a  $s$
- (c) Un subconjunto  $A$  de  $X$  es cerrado si y solo si ninguna red en  $A$  converge a un punto de  $X \setminus A$ .

**2.10 Definición-subred.** Una red  $\{y_e: e \in E\}$  es una subred de una red  $\{x_d: d \in D\}$  si existe una función  $f: E \mapsto D$  que satisface

- (a)  $y_e = x_{f(e)}$  para cada  $e \in E$ , y
- (b) Para todo  $d_0 \in D$  existe un  $e_0 \in E$  tal que  $e \geq e_0$  implica  $f(e) \geq d_0$

**2.11 Teorema.** Sea  $\{x_d: d \in D\} = \{x_d\}$  una red en un espacio topológico  $X$ .  $x \in X$  es un punto límite de la red  $\{x_d\}$  si y solo si hay una subred  $\{y_e: e \in E\}$  que converge a  $x$ .

**2.12 Lema.** Una red converge a un punto si y solo si toda subred converge al mismo punto.

**2.13 Definición-sucesión.** Una *sucesión* en el espacio topológico  $X$  es una función del conjunto de los números enteros no negativos en  $X$ . Denotamos a esta sucesión por  $\{f(n): n \in \mathbb{N}\} = \{x_n: n \in \mathbb{N}\}$  o simplemente por  $\{x_n\}$ . Claramente el concepto de red extiende al de sucesión en el sentido que el conjunto dirigido va más allá de los números naturales. Es importante observar que una sucesión puede tener subredes que no son subsucesiones.

**2.14 Observación.** La clase más importante de espacios para los cuales la convergencia secuencial es adecuada son aquellos que satisfacen el primer axioma de numerabilidad: el sistema de entornos de cada punto tiene una base numerable. Es decir, para cada punto  $x$  del espacio  $X$  hay una familia numerable de entornos de  $x$  tal que todo entorno

de  $x$  contiene algún miembro de la familia. De allí se desprende que en los espacios donde el sistema de entornos de cada punto tiene una base numerable, podemos remplazar el término “red” por “sucesión” en los puntos 2.5 – 2.12 anteriores.

### 3. Topología débil

3.1 *Comparación de topologías.* Si  $X$  es un conjunto y  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  son topologías en  $X$ , diremos que  $\mathcal{T}_2$  es *más fina* que  $\mathcal{T}_1$  (o  $\mathcal{T}_1$  *menos fina* que  $\mathcal{T}_2$ ) si todo  $\mathcal{T}_1$ -abierto es  $\mathcal{T}_2$ -abierto (equivalentemente, si todo  $\mathcal{T}_1$ -cerrado es  $\mathcal{T}_2$ -cerrado)

3.2 *Definición-topología débil.* Sea  $\{f_i: X \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$  una colección de funciones del conjunto no vacío  $X$  en los espacios topológicos  $Y_i$ . La topología débil en  $X$  generada por la familia de funciones  $\{f_i\}_{i \in I}$  es la topología menos fina en  $X$  que hace que todas las funciones  $f_i$  sean continuas. Denotamos a la topología débil por  $\sigma$ . Dicha topología está generada por la familia de conjuntos.

$$\{f_i^{-1}(V) : i \in I \text{ y } V \in \mathcal{T}_i\}$$

3.3 *Lema-convergencia débil.* Una red satisface  $x^\alpha \rightarrow x$  en la topología débil  $\sigma$  (también denotado como  $x^\alpha \xrightarrow{\sigma} x$  o  $x^\alpha$   $\sigma$ -converge a  $x$ ) si y solo si  $f_i(x^\alpha) \xrightarrow{\mathcal{T}_i} f_i(x)$  para todo  $i \in I$ .

3.4 *Observación-topología débil generada por una familia de funciones reales.* Sea una familia  $F$  de funciones de valor real sobre  $X$ . La topología débil generada por  $F$  se denota  $\sigma(X, F)$ . Una subbase para esta topología está dada por el siguiente conjunto

$$U(f, x, \varepsilon) = \{y \in X : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$$

donde  $f \in F$ ,  $x \in X$ , y  $\varepsilon > 0$ .

3.5 *Definición-espacio total.* Decimos que una familia  $F$  de funciones reales en  $X$  es total si  $f(x) = f(y)$  para toda  $f$  en  $F$  implica  $x = y$ . Otra manera de decir lo mismo es que  $F$  separa puntos en  $X$  si por cada  $x \neq y$  existe una función  $f$  en  $F$  que satisface  $f(x) \neq f(y)$ . La topología débil  $\sigma(X, F)$  es Hausdorff si y solo si  $F$  es total.

3.6 *Lema-topología débil relativa.* Sea una familia  $F$  de funciones de valor real sobre  $X$ , y sea  $A$  un subconjunto de  $X$ . La topología débil  $\sigma(A, F|_A)$  en  $A$  es la topología relativa en  $A$  inducida por  $\sigma(X, F)$

### 4. Espacios métricos

4.1 *Definición-métrica.* Una métrica o distancia sobre un conjunto  $X$  es una función  $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$  que verifica las siguientes propiedades

- (i)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetría)
- (ii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdad triangular)

(iii) si  $x = y$  entonces  $d(x, y) = 0$

(iv) si  $d(x, y) = 0$  entonces  $x = y$

cualesquiera que sean  $x, y, z \in X$ . Una función  $d$  que satisface sólo (i), (ii) y (iii) se llama una sudométrica o semimétrica.

**4.2 Definición-espacio métrico.** Si tenemos definida una métrica (seudométrica) sobre  $X$ , diremos que la pareja  $(X, d)$  es un espacio métrico (espacio seudométrico).

**4.3 Definición-bola abierta, bola cerrada.** Sea  $x_0 \in X$  y sea  $\varepsilon > 0$  un número real cualquiera. Definimos a la bola abierta de centro  $x_0$  y radio  $\varepsilon$  como al conjunto cuyos elementos pertenecen a  $X$  y se encuentran a una distancia menor que  $\varepsilon$  del punto  $x_0$ . Formalmente,  $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ . Análogamente, la bola cerrada de centro  $x_0$  y radio  $\varepsilon$  será el conjunto cuyos elementos pertenecen a  $X$  y se encuentran a una distancia del punto  $x_0$  menor o igual que  $\varepsilon$ , es decir  $\bar{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$

**4.4 Propiedad-topología métrica o seudométrica.** La familia de todas las bolas abiertas es una base de una topología de  $X$ . Esta topología es la topología métrica (respectivamente seudométrica) de  $X$ . Así, dada una métrica (o seudométrica), esta siempre engendra una topología. El recíproco no es cierto en general.

**4.5 Teorema.** En todo espacio métrico el sistema de entornos de cada punto tiene una base numerable de entornos, que además están encajados, es decir, están dirigidos por inclusión.

**4.6 Corolario.** Podemos caracterizar a la topología métrica en términos de convergencia de sucesiones como en 2.9 cambiando el término “red” por “sucesión”

**4.7 Definición-espacio metrizable (seudometrizable).** Sea el espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$ . Este espacio se dice metrizable (seudometrizable) si y solamente si hay una métrica (seudométrica) tal que la topología  $\mathcal{T}$  es la topología métrica (seudométrica).

**4.8 Definición-distancia de un punto a un conjunto.** Sea  $x$  un punto del espacio métrico  $X$  y  $S$  un subconjunto de  $X$ . La distancia de  $x$  a  $S$ ,  $d_s(x)$ , está definida por:

$$d_s(x) = \inf \{d(x, s) : s \in S\}$$

## 5. Espacios normados

**5.1 Definición-norma.** Una función  $\|\cdot\|$  en un espacio vectorial  $X$  sobre un cuerpo  $K$  es una *norma* si y solo si

(i)  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in X$  y  $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = 0$

(ii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  ( $x, y \in X$ )

(iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  ( $x \in X, \lambda \in K$ )



**5.2 Definición-espacio normado.** Un espacio normado es el par  $(X, \|\cdot\|)$ . Toda norma define una métrica, ya que  $d(x, y) = \|x - y\|$  cumple con las condiciones (i)-(iv) de 4.1; el recíproco no es cierto. Tenemos por tanto, que toda norma genera un espacio topológico con la topología inducida por dicha norma. A esta topología se la llama la topología de la norma.

**5.3 Definición-bola unitaria abierta, bola unitaria cerrada.** La bola unitaria abierta,  $B(0, 1)$ , de un espacio normado  $X$  se define como:

$$B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

Por su parte la bola unitaria cerrada,  $\bar{B}(0, 1)$ , de un espacio normado  $X$  está dada por:

$$\bar{B}(0, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

**5.4 Definición-espacio normable.** Un espacio normable es un espacio topológico cuya topología puede obtenerse de una norma  $\|\cdot\|$  en  $X$  vía la métrica  $(x, y) \rightarrow \|x - y\|$ .

**5.5 Caracterización.** En un espacio normado una sucesión de vectores  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  se dice que *converge* a  $x$  si la sucesión  $\{\|x_n - x\| : n \in \mathbb{N}\}$  converge a cero. En este caso escribimos  $x_n \rightarrow x$ .

**5.6 Proposición.** Si una sucesión converge, su límite es único.

**5.7 Definición-sucesión de Cauchy en espacios normados.** Una sucesión  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  en un espacio normado  $X$  se dice que es de Cauchy si dado  $\varepsilon > 0$  existe un número  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\varepsilon$ ) tal que  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$  para todo  $n, m \geq n_0$ .

**5.8 Definición-espacio normado completo.** Un espacio normado  $X$  es completo si toda sucesión de Cauchy en  $X$  converge en  $X$ .

**5.9 Definición-espacio de Banach.** Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo en la topología de la norma.

## 6. Espacios de Hilbert

**6.1 Definición-producto interno.** Sea  $X$  un espacio vectorial real. Sea la función producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades: para todo par  $(x, y) \in X \times X$

- (a)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (b)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  para todo  $z \in X$
- (c)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

(d)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  si y solo si  $x = 0$

En ocasiones representaremos, principalmente en dimensión finita, al producto interior  $\langle x, y \rangle$  en  $X$  como  $\langle x, y \rangle_x$  o simplemente como  $x.y$

**6.2 Definición-espacio de Hilbert.** Un espacio de Hilbert (real)  $H$  es un espacio normado y completo, donde la norma está generada por el producto interior, i.e.  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$

**6.3 Definición-espacio pre-Hilbert.** Si  $H$  no es completo entonces se dice que es un espacio pre-Hilbert.

**6.4 Definición-vector ortogonal.** Dos elementos  $x$  e  $y$  de un espacio de Hilbert se dicen que son ortogonales (lo cual se denota como  $x \perp y$ ) si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Un elemento  $x$  es ortogonal a un conjunto  $S$  si es ortogonal a todo elemento de  $S$ .

**6.5 Definición-complemento ortogonal.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $S$  un subespacio de  $H$ . El complemento ortogonal de  $S$ , denotado por  $S^\perp$ , es el conjunto de vectores de  $H$  ortogonales a  $S$ . Formalmente

$$S^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle_H = 0 \ \forall \ y \in S\}$$

**6.6 Teorema.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $S$  un subespacio de  $H$ , y  $x$  un vector arbitrario de  $H$ . Entonces  $x$  puede representarse de una única manera como  $x = y + z$ , donde  $y \in S$  y  $z \perp S$ .

**6.7 Teorema de la proyección.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $S$  un subespacio de  $H$  y  $x \in H$  un vector arbitrario. Si existe un vector  $s_0 \in S$  tal que  $\|x - s_0\| \leq \|x - s\|$  para todo  $s \in S$ , entonces  $s_0$  es único. Una condición necesaria y suficiente para que  $s_0 \in S$  sea el único vector que minimiza  $\|x - s\|$  en  $s \in S$ , es que  $x - s_0 \perp S$ . Si  $S$  es completo, entonces existe un único vector que minimiza  $\|x - s\|$  para  $s \in S$ .

Las definiciones y resultados de los puntos 6.4 a 6.7 se mantienen si en lugar de espacios de Hilbert consideramos espacios pre-Hilbert.

## 7. Espacios producto y topología producto

**7.1 Definición-espacio producto.** Sea  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  una familia de espacios topológicos y sea  $X = \prod_{i \in I} X_i$  su producto cartesiano. Para cada  $i \in I$ , la proyección  $P_i : \prod_{i \in I} X_i \mapsto X_i$  está definida por  $P_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$ . La topología producto, denotada  $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ , es la topología débil en  $X$  generada por la familia de proyecciones  $\{P_i : i \in I\}$ . O sea,  $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$  es la topología menos fina en  $X$  que hace que todas las proyecciones  $P_i$

sean continuas. En general denotamos por  $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i) = (X, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$  al espacio producto topológico.

**7.2 Base y subbase de una topología producto.** Una base de la topología producto  $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$  está dada por el conjunto  $\{\prod_{i \in I} V_i : V_i \in \mathcal{T}_i\}$ . Una subbase para dicha topología consiste en todos los conjuntos de la forma  $P_j^{-1}(V_j) = \prod_{i \in I} V_i$  donde  $V_i = X_i$  para todo  $i \neq j$  y  $V_j$  es abierto en  $X_j$ .

**7.3 Teorema.** Una red  $(x^\alpha)$  en un espacio producto converge a  $x$  si y solo si su proyección en cada espacio coordenado converge a la proyección de  $x$ .

## 8. Espacios compactos

**8.1 Definición-espacio compacto.** El espacio topológico  $X$  es compacto si y solo si todo cubrimiento por abiertos de  $X$  tiene un subcubrimiento finito. Una parte  $A$  de un espacio topológico es compacta si y solo si es un espacio compacto con la topología relativa.

**8.2 Teorema.** Si  $X$  es un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $X$  es compacto;
- (b) Toda familia de cerrados que tiene la propiedad de intersección finita tiene una intersección no vacía.
- (c) Toda red en  $X$  tiene un punto límite o, equivalentemente, toda red en  $X$  tiene una subred convergente a un punto de  $X$ .

**8.3. Teorema.** Sea  $f : X \mapsto Y$  continua y  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Sea  $K \subset X$  compacto, entonces  $f(K)$  es un subconjunto compacto en  $Y$ . Si  $X$  es compacto entonces  $Y$  es compacto, y si  $Y$  es de Hausdorff y  $f$  es biunívoca, entonces  $f$  es un homeomorfismo.

**8.4 Teorema.** Si  $A$  y  $B$  son partes disjuntas compactas de un espacio de Hausdorff  $X$ , entonces hay entornos de  $A$  y  $B$  disjuntos.

**8.5 Teorema.** Si  $A$  es una parte compacta de un espacio de Hausdorff  $X$  y  $x$  está en el complemento relativo de  $A$ , entonces hay entornos de  $A$  y de  $x$  disjuntos. Por consiguiente, en un espacio de Hausdorff todo compacto es cerrado.

**8.6 Teorema.** Un subconjunto cerrado  $F$  de un espacio compacto  $X$  es compacto.

**8.7 Teorema.** Una función continua de valores reales definida en un espacio compacto alcanza el supremo y el ínfimo o sea, tiene un máximo y un mínimo.

**8.8 Teorema (Gottschalk y Hedlund)** Si  $X$  e  $Y$  son espacios compactos,  $A$  y  $B$  son partes compactas de  $X$  e  $Y$  respectivamente, y  $W$  es un entorno de  $A \times B$  en el espacio producto  $X \times Y$ , entonces hay entornos  $U$  de  $A$  y  $V$  de  $B$  tales que  $U \times V \subset W$ .

8.9 *Teorema de Tychonoff*. El producto cartesiano de una colección de espacios topológicos compactos es compacto con respecto a la topología producto.

8.10 *Definición, espacio localmente compacto*. Un espacio de Hausdorff se dice localmente compacto si y solo si cada  $x \in X$  tiene un entorno compacto.

## 9. Aplicaciones lineales

9.1 *Definición-aplicación lineal; funcional lineal*. Una función  $f : X \mapsto Y$  entre dos espacios vectoriales es una aplicación lineal si

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

para todo  $x, y \in X$  y todo par de escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Cuando  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f$  suele llamarse funcional lineal.

9.2 *Lema*. Si  $f : X \mapsto Y$  es una aplicación lineal entre espacios normados, entonces

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \min \{M \geq 0 : \|f(x)\| \leq M \|x\| \forall x \in X\}$$

9.3 *Corolario*. Si el espacio normado  $X$  es no trivial (es decir  $X \neq \{0\}$ ), entonces tenemos que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

9.4 *Definición*. La norma de una aplicación lineal  $f : X \rightarrow Y$  en espacios normados está dada por

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

si  $\|f\| = \infty$  decimos que  $f$  es no acotada, mientras que si  $\|f\| < \infty$  decimos que es una aplicación acotada.

9.5 *Lema*. Sea  $f : X \mapsto Y$  una aplicación lineal acotada. Para cada  $x \in X$  tenemos:

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$$

En particular, esta desigualdad implica que una aplicación  $f$  entre espacios normados es continua si y solo si es acotada.

9.6 *Lema*. Sea  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  una funcional y  $X$  un espacio normado. Si  $f$  es continua en  $x_0 \in X$ , entonces  $f$  es continua en todo  $x \in X$ .

9.7 *Teorema de la aplicación abierta.* Una aplicación lineal, acotada y sobreyectiva del espacio de Banach  $X$  en el espacio de Banach  $Y$  es una aplicación abierta. Consecuentemente, si dicha aplicación también es uno a uno, entonces es un homeomorfismo.

9.8 *Definición-dual topológico.* Sea  $X$  un espacio vectorial topológico,  $X^*$  es el espacio de las funcionales lineales continuas en  $X$ .  $X^*$  recibe el nombre de espacio dual o dual topológico de  $X$  y es un espacio vectorial.

9.9 *Teorema del grafo cerrado.* Una aplicación lineal del espacio de Banach  $X$  en el espacio de Banach  $Y$  es continua si y solo si su grafo es un subespacio vectorial cerrado de  $X \times Y$ .

9.10 *Definición-aplicación lineal positiva.* Una aplicación lineal positiva  $f: E \rightarrow F$  entre espacios vectoriales ordenados es una aplicación lineal tal que  $x \geq 0$  en  $E$  implica  $f(x) \geq 0$  en  $F$ .

9.11 *Definición-aplicación bilineal.* Sean  $E, F$  y  $G$  espacios vectoriales sobre el cuerpo  $K$ . Una aplicación inyectiva  $f: E \times F \mapsto G$  se llama bilineal si para cada  $x \in E$  y cada  $y \in F$ , las aplicaciones parciales  $f_x: y \mapsto f(x, y)$  y  $f_y: x \mapsto f(x, y)$  son lineales.

9.12 *Definición.* Una aplicación bilineal  $f: E \times F \mapsto G$  es separadamente continua si toda aplicación parcial  $f_x$  y  $f_y$  es continua.

9.13 *Definición-equicontinuidad.* Sea  $F$  la familia de funciones de un espacio topológico  $X$  en un espacio uniforme  $(Y, \mathcal{U})$ <sup>1</sup>. La familia  $F$  es equicontinua en un punto  $y$  si y sólo si para cada miembro  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$  hay un entorno  $U$  de  $y$  tal que  $f(U) \subset \mathcal{V}[f(x)] = \{f(x) : (f(y), f(x)) \in \mathcal{V}\}$  para toda  $f$  de  $F$ .

9.14 *Definición-espacios de Banach reflexivos.* Un espacio de Banach  $X$  se dice reflexivo si  $X = X^{**}$ .

---

<sup>1</sup> Una uniformidad de un conjunto  $Y$  es una familia no vacía  $\mathcal{U}$  de partes de  $Y \times Y$  tales que:

- a) cada miembro de  $\mathcal{U}$  contiene a la diagonal  $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$
- b) Si  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ , entonces  $\mathcal{V}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$
- c) Si  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ , entonces  $\mathcal{V}' \circ \mathcal{V}' = \{(y, z) \in \mathcal{V}' : \exists x, (y, x) \in \mathcal{V}', (x, z) \in \mathcal{V}'\} \subset \mathcal{V}$  para algún  $\mathcal{V}' \in \mathcal{U}$
- d) Si  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}' \in \mathcal{U}$ , entonces  $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' \in \mathcal{U}$
- e) Si  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$  y  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset Y \times Y$ , entonces  $\mathcal{V}' \in \mathcal{U}$ .

El par  $(Y, \mathcal{U})$  es un espacio uniforme. La topología  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  de la uniformidad  $\mathcal{U}$ , o la topología uniforme, es la familia de todas las partes  $T$  de  $Y$  tales que para cada  $y \in T$  hay un  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$  tal que  $\mathcal{V}[y] = \{x : (y, x) \in \mathcal{V}\} \subset T$ .

## 10. Espacios vectoriales topológicos

10.1 *Definición.* Sea el espacio vectorial  $X$  sobre un cuerpo valorado no discreto  $K$ , y sean los subconjuntos  $A, B$  y  $C$  de  $X$ .

- Decimos que  $A$  absorbe a  $B$  si existe  $\lambda_0 \in K$  tal que  $B \subset \lambda A$  para todo  $|\lambda| \geq |\lambda_0|$ .  
Un subconjunto  $C$  de  $X$  se dice absorbente si  $C$  absorbe todo subconjunto finito de  $X$ .
- Un subconjunto  $C$  de  $X$  es balanceado (o circulado) si  $\lambda C \subset C$  para todo  $\lambda \in K$  tal que  $|\lambda| \leq 1$ .

10.2 *Definición-espacio vectorial topológico.* Dado un espacio vectorial  $X$  sobre un cuerpo valorado no discreto  $K$  (no necesariamente conmutativo) y una topología  $\mathcal{T}$  en  $X$ , se dice que  $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$  es un espacio vectorial topológico (e.v.t.) sobre  $K$  si:

- (i)  $(x, y) \rightarrow x + y$  es continua de  $X \times X$  en  $X$ ;
- (ii)  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  es continua de  $K \times X$  en  $X$ .

10.3 *Teorema.* El producto de una familia de espacios vectoriales topológicos es un e.v.t. con la topología producto.

10.4 *Lema.* En un e.v.t. se tiene que:

- (a) La suma algebraica de un conjunto abierto y un conjunto arbitrario es abierto
- (b) Múltiplos no nulos de conjuntos abiertos son abiertos
- (c) La suma algebraica de un conjunto compacto y un conjunto cerrado es un conjunto cerrado (sin embargo, la suma algebraica de dos conjuntos cerrados no necesariamente es un conjunto cerrado)
- (d) La suma algebraica de dos conjuntos compactos es un conjunto compacto.
- (e) Múltiplos escalares de un conjunto cerrado es un conjunto cerrado.
- (f) Múltiplos escalares de un conjunto compacto es un conjunto compacto

10.5 *Definición-conjuntos acotados.* Un subconjunto  $A$  de un e.v.t.  $X$  se dice acotado si para cada entorno del cero  $U$  en  $X$ , existe un escalar  $\lambda \in K$  tal que  $A \subset \lambda U$ .

10.6 *Teorema.* Sean  $X$  e  $Y$  espacios vectoriales topológicos sobre  $K$  y sea  $f : X \mapsto Y$  una función continua. Si  $A$  es un subconjunto acotado de  $X$ ,  $f(A)$  es acotado en  $Y$ .

10.7 *Definición-hiperplano real de  $X$ ; hiperplano soporte.* Un subconjunto  $H \subset X$  es un hiperplano real sobre  $X$  si y solo si y solo si  $H = \{x : f(x) = \alpha\}$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f \in H^*$  y  $f \neq 0$ . Si  $C$  es un subconjunto del e.v.t.  $X$ , se dice que un hiperplano real cerrado  $H$  es un hiperplano soporte de  $C$  si  $C \cap H \neq \emptyset$  y si  $C$  está contenido en alguno de los conjuntos  $\{x : f(x) \geq \alpha\}$  o  $\{x : f(x) \leq \alpha\}$  determinados por  $H$ .

10.8 *Definición-conjunto acotado.* Un subconjunto  $A$  de un e.v.t.  $X$  se dice acotado si para cada entorno del cero  $U$  en  $X$ , existe un escalar  $\lambda$  en el cuerpo  $K$  tal que  $A \subset \lambda U$ .

10.9 *Teorema.* Un e.v.t.  $X$  de Hausdorff es normable si y solo si  $X$  posee un entorno de 0 convexo y acotado.

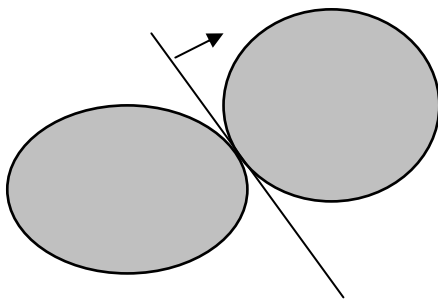
## 11. Espacios vectoriales topológicos localmente convexos.

11.1 *Definición-conjuntos convexos.* Un subconjunto  $A$  de un espacio vectorial  $X$  es convexo si  $x, y \in A$  implica que  $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Los conjuntos  $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$  y  $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in (0, 1)\}$  se denominan segmentos cerrado y abierto respectivamente, que unen  $x$  e  $y$ .

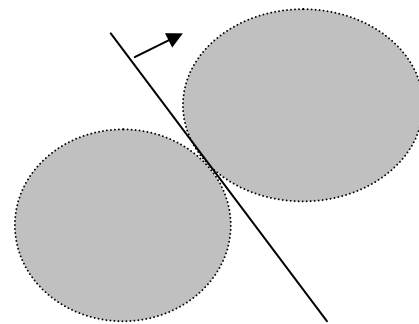
11.2 *Definición-espacio vectorial topológico localmente convexo; topología localmente convexa.* Un e.v.t.  $X$  sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  se dirá localmente convexo si es de Hausdorff y todo entorno de un elemento cualquiera  $x \in X$  contiene un entorno convexo de  $x$ . Equivalentemente,  $X$  es un e.v.t. localmente convexo si los entornos convexos de 0 forman una base en 0, con intersección  $\{0\}$ . Una topología en un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , no necesariamente de Hausdorff, pero verificando (i) y (ii) de 10.2 y con una base de entornos de 0 convexos, se denomina topología localmente convexa.

11.3 *Teorema.* Sea  $X$  un e.v.t. cuya topología es localmente convexa. Si  $f$  es una aplicación lineal, continua y definida en un subespacio  $Y$  de  $X$ , entonces  $f$  admite una extensión lineal continua a  $X$ .

11.4 *Teorema de separación en espacios vectoriales topológicos.* Sea  $C_1$  un subconjunto convexo de un e.v.t.  $X$ , tal que  $\text{int} C_1 \neq \emptyset$  y sea  $C_2$  un subconjunto convexo no vacío de  $X$  disjunto con  $\text{int} C_1$ . Existe entonces un hiperplano real cerrado  $H$  que separa  $C_1$  y  $C_2$ ; si  $C_1$  y  $C_2$  son abiertos,  $H$  separa  $C_1$  y  $C_2$  estrictamente.



Separación no estricta

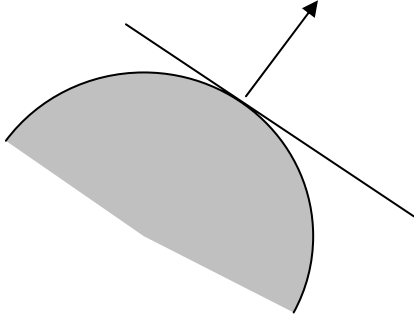


Separación estricta (conjuntos abiertos)

11.5 *Teorema de separación en espacios localmente convexos.* Sean  $C^*$  y  $C^{**}$  subconjuntos convexos no vacíos y disjuntos de un espacio localmente convexo  $X$ , con  $C^*$  cerrado y  $C^{**}$  compacto. Existe un hiperplano real cerrado en  $X$  que separa estrictamente  $C^*$  y  $C^{**}$ .

11.6 *Corolario.* En todo espacio localmente convexo la  $\mathcal{T}$ -clausura y la  $\sigma$ -clausura de cualquier conjunto convexo son iguales.

11.7 *Teorema-puntos extremos*. Si  $C$  es un subconjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo, todo hiperplano soporte de  $C$  contiene al menos un punto extremo de  $C$ .



$f(x) \geq f(y)$  para todo  $y$  en el conjunto sombreado.  
 $x$  es el elemento ubicado en la frontera del conjunto  
 desde donde parte la flecha perpendicular al hiperplano

11.8 *Teorema (Krein-Melman)*. Todo subconjunto convexo compacto de un espacio localmente convexo es la cápsula cerrada y convexa del conjunto de sus puntos extremos.

11.9 *Definición-isomorfismo; isomorfismo isométrico; espacios equivalentes*. Un isomorfismo entre dos espacios normados lineales  $X$  e  $Y$  es una funcional lineal uno a uno  $f: X \rightarrow Y$  con  $f(X) = Y$ . Cuando tal  $f$  existe, los espacios  $X$  e  $Y$  se dicen equivalentes. Un isomorfismo isométrico entre dos espacios lineales normados  $X$  e  $Y$  es un isomorfismo  $f$  entre  $X$  e  $Y$  respecto del cual  $\|f(x)\| = \|x\|$ . Cuando tal  $f$  existe, los espacios  $X$  e  $Y$  se dicen isometricamente equivalentes o isometricamente isomórficos.

11.10 *Definición-inmersión canónica*. La aplicación  $f: X \rightarrow Y$  donde  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos, se dice que es una inmersión canónica si  $f$  es una función inyectiva y continua que genera un homeomorfismo entre  $X$  y  $f(X)$  (la topología de  $f(X)$  es la inducida por  $Y$ ). De modo intuitivo, la inmersión canónica permite tratar a  $X$  como subespacio de  $Y$

11.11 *Definición-topología inductiva*. Sean  $X$  y  $X_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) espacios vectoriales sobre  $K$ , sean  $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$  funciones lineales y sean  $\mathcal{T}_\alpha$  topologías localmente convexas sobre  $X_\alpha$ . La topología inductiva en  $X$  con relación a la familia  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, f_\alpha): \alpha \in A\}$  es la topología más fina entre las topologías localmente convexas respecto de las cuales cada  $f_\alpha$  es continua.

11.12 *Definición-límite inductivo*. Sea  $\{F_\alpha: \alpha \in A\}$  una familia de subespacios de un espacio vectorial  $X$  tal que  $F_\alpha \neq F_\beta$  si  $\alpha \neq \beta$ , dirigida por inclusión ( $F_\alpha \subset F_\beta$  si  $\alpha \leq \beta$ ) y satisfaciendo  $X = \bigcup_\alpha F_\alpha$ . Sea una topología de Hausdorff localmente convexa  $\mathcal{T}_\alpha$  en  $F_\alpha$  tal que, si  $\alpha \leq \beta$ , la topología inducida por  $\mathcal{T}_\beta$  en  $F_\alpha$  es más gruesa que  $\mathcal{T}_\alpha$ . Sea



$g_\alpha$  una inmersión canónica de  $F_\alpha$  en  $X$  y para  $\alpha \leq \beta$  sea  $h_{\beta\alpha}$  la inmersión canónica de  $F_\alpha$  en  $F_\beta$ . Si la topología inductiva  $\mathcal{T}$  en  $X$  con relación a la familia  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha, f_\alpha) : \alpha \in A\}$  es Hausdorff, entonces  $(X, \mathcal{T})$  es el límite inductivo de la familia de subespacios  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ . El límite inductivo es estricto si  $\mathcal{T}_\beta$  induce  $\mathcal{T}_\alpha$  en  $F_\alpha$  si  $\alpha \leq \beta$ .

## 12 Espacios de Riesz

12.1 *Definición-órdenes*. Un orden parcial es una relación binaria reflexiva, transitiva y antisimétrica denotada por  $\geq$ . Un conjunto  $X$  equipado con el orden parcial es un conjunto parcialmente ordenado. Un orden total o lineal  $\geq$  es un orden parcial con la propiedad de que si  $x \neq y$ , entonces  $x \geq y$  o  $y \geq x$ .

12.2 *Definición-cota inferior y superior*. Sea  $X$  un conjunto parcialmente ordenado. Una cota superior (inferior) para el conjunto  $A \subset X$  es un elemento  $x$  de  $X$  tal que  $x \geq y$  ( $y \geq x$ ) para todo  $y \in A$ .

12.3 *Definición-elemento maximal y minimal*. Un elemento  $x$  es un elemento maximal (minimal) de  $X$  si no existe  $y \neq x$  en  $X$  que verifique  $x \geq y$  ( $y \leq x$ ).

12.4 *Definición-elemento máximo y mínimo*. Un elemento máximo (mínimo) de  $A$  es un  $x \in A$  que satisface  $x \geq y$  ( $y \leq x$ ) para todo  $y \in A$ .

12.5 *Corolario*. Todo elemento máximo (mínimo) es un elemento maximal (minimal), y si  $\geq$  es completo, entonces todo elemento maximal (minimal) es máximo (mínimo).

12.6 *Definición-supremo e ínfimo*. El supremo,  $\sup$ , (ínfimo,  $\inf$ ), de un conjunto es la menor (mayor) cota superior (inferior). Tanto el supremo como el ínfimo no tienen por qué existir en un conjunto.

12.7 *Definición-reticulado; subreticulado*. Un reticulado es un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo par de elementos tiene un supremo y un ínfimo. Un subreticulado es un subconjunto  $A$  de un reticulado, en el cual todo par de elementos en  $A$  tiene un supremo y un ínfimo en  $A$ .

12.8 *Definición- espacio de Riesz*. Un espacio de Riesz  $X$  es un espacio vectorial parcialmente ordenado que además es reticulado.

12.9 *Definición-subespacio de Riesz*. Un subespacio de Riesz  $M$  de un espacio de Riesz  $X$ , es un subespacio vectorial de  $X$  tal que  $x \in M$ ,  $y \in M$  implica que tanto  $\sup(x, y)$  como  $\inf(x, y)$  pertenecen a  $M$ .

12.10 *Definición-intervalo de orden*. Un intervalo de orden en el espacio  $X$  es cualquier conjunto de la forma

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$$

12.11 *Definición-parte positiva, parte negativa y valor absoluto.* Sea  $x$  un vector en un espacio de Riesz, la parte positiva  $x^+$ , la negativa  $x^-$ , y el valor absoluto  $|x|$  se definen por

$$x^+ = \sup\{x, 0\}, x^- = \sup\{-x, 0\}, \text{ y } |x| = \sup\{x, -x\}$$

12.12 *Propiedades.*

$$x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^- \text{ y } |x| = 0 \text{ si y solo si } x = 0.$$

12.13 *Propiedad de descomposición de Riesz.* Si en un espacio de Riesz  $|y| \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i \right|$ , entonces existen vectores  $y_1, \dots, y_n$  que satisfacen  $|y_i| \leq |x_i|$  para todo  $i$  e  $y = \sum_{i=1}^n y_i$ . Si  $y$  es positivo, entonces cada  $y_i$  puede escogerse para que sea positivo también.

12.14 *Definición-sólidos e ideales.* Un subconjunto  $S$  de un espacio de Riesz se llama sólido si  $|y| \leq |x|$  y  $x \in S$  implica  $y \in S$ . Si  $S$  es un subespacio de Riesz entonces se llama ideal.

12.15 *Definición-unidad de orden.* Un elemento  $x > 0$  en un espacio de Riesz  $X$  es una unidad de orden o simplemente una unidad si para cada  $x' \in X$  existe un  $\lambda > 0$  tal que  $|x'| < \lambda x$ .

12.16 *Definición-cápsula sólida.* La cápsula sólida de un subconjunto  $B$  de un espacio de Riesz  $X$ , denotada por  $\text{sol}(B)$ , es el conjunto sólido más pequeño que contiene a  $B$ . Formalmente:

$$\text{Sol}(B) = \{y \in X : \exists x \in B \text{ con } |y| \leq |x|\}$$

12.17 *Definición-topología localmente sólida.* Una topología lineal  $\mathcal{T}$  en un espacio de Riesz  $X$  es localmente sólida si  $\mathcal{T}$  tiene una base de entornos del cero que consiste en entornos sólidos.

12.18 *Definición-espacio de Riesz localmente sólido.* El espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  donde  $\mathcal{T}$  es la topología de 12.17, es un espacio de Riesz localmente sólido.

12.19 *Teorema.* Una topología lineal  $\mathcal{T}$  (es decir, aquella que define un e.v.t.) en un espacio de Riesz  $X$  es localmente sólida si y solo si las operaciones de: supremo, ínfimo, parte positiva, parte negativa y valor absoluto son uniformemente continuas con respecto a  $\mathcal{T}$ .

12.20 *Teorema.* Sea  $X_+$  el cono positivo de  $X$  tal que  $x \in X_+$  si  $x \in X$  y  $x \geq 0$ . Sea  $\mathcal{T}$  una topología lineal en un espacio de Riesz  $X$  y sea  $x \in X_+$  un elemento arbitrario. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (a) El vector  $x$  está en el  $\mathcal{T}$ -interior de  $X_+$ .
- (b) El intervalo de orden  $[-x, x]$  es un  $\mathcal{T}$ -entorno del cero.

En particular, los puntos interiores de  $X_+$  son unidades de orden de  $X$ .

12.21 *Corolario*. Si un espacio de Riesz  $X$  no tiene una unidad de orden, entonces su cono positivo  $X_+$  tiene interior vacío en cualquier topología lineal sobre  $X$ .

12.22 *Definición*. Un espacio de Riesz  $X$  es Arquimediano si  $0 \leq nx \leq y$  para todo  $n = 1, 2, \dots$  y algún  $y \in X_+$  implica  $x = 0$ . Equivalentemente  $X$  es Arquimediano si  $\frac{x}{n} \downarrow 0$  para cada  $x \in X_+$ .

12.23 *Teorema*. Si el cono positivo de un espacio de Riesz Arquimediano  $X$  tiene interior no vacío en alguna topología de Hausdorff, entonces  $X$  es reticulado isomórfico<sup>2</sup> a un subespacio de Riesz de  $C(K)$ , el espacio de las funciones continuas sobre un compacto  $K$ .

12.24 *Corolario*. Si un espacio de Riesz  $X$  no es reticulado isomórfico a un subespacio de Riesz de cualquier espacio  $C(K)$ , entonces el cono positivo  $X_+$  tiene interior vacío con relación a cualquier topología lineal sobre  $X$ .

### 13. Dualidad y topologías consistentes

13.1 *Definición-sistema dual*. Un sistema dual es un par  $(X, X^*)$  de espacios vectoriales junto a una funcional bilineal de  $X \times X^*$  en  $\mathbb{R}$  que satisface:

- (a) La aplicación  $x^* \mapsto x(x^*)$  es lineal para cada  $x \in X$ .
- (b) La aplicación  $x \mapsto x^*(x)$  es lineal para cada  $x^* \in X^*$ .
- (c) Si  $x(x^*) = 0$  para todo  $x^* \in X^*$  entonces  $x = 0$ .
- (d) Si  $x^*(x) = 0$  para todo  $x \in X$  entonces  $x^* = 0$ .

Cada espacio del sistema dual puede interpretarse como un conjunto de funcionales lineales en el otro. Las condiciones (c) y (d) requieren que cada espacio separe los puntos del otro

13.2 *Teorema*. El dual topológico de  $(X, \sigma(X, X^*))$  es  $X^*$ . Esto es, si  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  es una funcional lineal  $\sigma(X, X^*)$ -continua, entonces existe una  $x^* \in X^*$  única tal que  $f(x) = x^*(x)$  para cada  $x \in X$ . De la misma manera, tenemos  $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X$ .

13.3 *Definición-topologías consistentes*. Una topología localmente convexa  $\mathcal{T}$  en  $X$  es consistente o compatible con el sistema dual  $(X, X^*)$  si  $(X, \mathcal{T})^* = X^*$ . Las topologías consistentes en  $X^*$  se definen de igual modo.

<sup>2</sup> Dos espacios de Riesz  $X$  e  $Y$  son reticulado isomórficos si existe una función uno a uno y suryectiva  $f: X \rightarrow Y$  que satisface:

$f(\sup \{x, y\}) = \sup \{f(x), f(y)\}$  y  $f(\inf \{x, y\}) = \inf \{f(x), f(y)\}$  para todo  $x, y \in X$

13.4 *Teorema-conjuntos cerrados y convexos.* Sea  $(X, X^*)$  una dualidad. La clausura de un subconjunto convexo  $A \subset X$  es la misma para todas las topologías localmente convexas en  $X$  consistentes con  $(X, X^*)$  (y por lo tanto, igual a la  $\sigma(X, X^*)$ -clausura de  $A$ )

13.5 *Definición –topología Mackey.* Dado un sistema dual  $(X, X^*)$  existe una topología que es la más fina en  $X$  entre todas las topologías localmente convexas y consistentes con  $(X, X^*)$ . Denotamos a esta topología como  $\tau(X, X^*)$  y consiste en la topología de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos  $\sigma(X^*, X)$ -compactos, convexos y circulados de  $X^*$ . Esta topología recibe el nombre de topología Mackey en  $X$  con relación a  $(X, X^*)$  (de igual modo se define la topología Mackey en  $X^*$ )

13.6 *Propiedad-convergencia en la topología Mackey.* Sea  $x^\alpha$  una red en  $X$ .  $x^\alpha$  converge a  $x$  en la  $\tau(X, X^*)$ -topología si  $x^*(x^\alpha) \rightarrow x^*(x)$  uniformemente para  $x^*$  en cualquier subconjunto  $\sigma(X^*, X)$ -compacto de  $X^*$ . De manera análoga definimos la  $\tau(X^*, X)$ -convergencia en  $X^*$ .

13.7 *Corolario.* Todo subconjunto  $\sigma(X, X^*)$ -acotado de  $X$  es acotado en  $\tau(X, X^*)$ ; consecuentemente, las respectivas familias de conjuntos acotados son idénticas para todas las topologías localmente convexas de  $X$ , consistentes con  $(X, X^*)$ .

13.8 *Teorema.* Sea  $(X, X^*)$  una dualidad. Una topología localmente convexa  $\tau$  en  $X$  es compatible (o consistente) con  $X^*$  si y solo si  $\tau$  es más fina que  $\sigma(X, X^*)$  y menos fina que  $\tau(X, X^*)$ ; si  $\tau$  es tal topología, un subconjunto convexo de  $X$  es  $\tau$ -cerrado si es  $\tau(X, X^*)$ -cerrado, y un subconjunto de  $X$  es  $\tau$ -acotado si es  $\sigma(X, X^*)$ -acotado.

13.9 *Definición-compacidad débil.* Sea  $(X, X^*)$  una dualidad y  $F$  un subconjunto cerrado de  $X$ , entonces  $F$  es débilmente compacto si y solo si  $F$  es compacto en la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

13.10 *Teorema de Alaoglu.* Sea  $X$  un e.v.t. localmente convexo y sea  $B = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, \forall x \in X\}$  un subconjunto de  $X^*$ , entonces  $B$  es  $\sigma(X^*, X)$ -compacto.

13.11 *Definición-Polar absoluto.* Sea la dualidad  $(X, X^*)$ . El polar absoluto  $A^\circ$  de un subconjunto  $A$  de  $X$ , es el subconjunto de  $X^*$  definido por

$$A^\circ = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, \forall x \in X\}$$

Es evidente por 13.10 que  $A^\circ$  es débilmente\* compacto.

13.12 *Definición-Conjunto Bipolar.* El bipolar de un subconjunto  $A$  de  $X$  es el conjunto  $(A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ}$ .

#### 14. Espacios medibles y espacios de medida

14.1 *Definición-anillo.* Un anillo  $\mathcal{R}$  de subconjuntos de un conjunto  $M$  es una colección no vacía de subconjuntos de  $M$  que es cerrada bajo uniones dos a dos y complementación relativa. Esto es

- (a) Si  $A, B \in \mathcal{R}$ , entonces  $A \cup B \in \mathcal{R}$
- (b) Si  $A, B \in \mathcal{R}$ , entonces  $A \setminus B \in \mathcal{R}$

14.2 *Definición-álgebra.* Una álgebra de subconjuntos de  $M$  es un anillo que contiene a  $M$ .

14.3 *Definición- $\sigma$ -anillo.* Un  $\sigma$ -anillo de subconjuntos de  $M$  es un anillo que es cerrado bajo unión numerable. Esto es, si  $\{A_n\} \subset \mathcal{R}$  entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ .

14.4 *Definición- $\sigma$ -álgebra.* Una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos es un  $\sigma$ -anillo que contiene al espacio  $M$ .

14.5 *Definición- $\sigma$ -álgebra de Borel.* Los conjuntos de Borel de un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  son los miembros de la  $\sigma$ -álgebra generada por la familia de conjuntos  $\mathcal{T}$ -abiertos. Denotamos a esta  $\sigma$ -álgebra como  $\mathcal{B}_X$  o simplemente como  $\mathcal{B}$  cuando no exista riesgo de confusión.

14.6 *Definición- $\sigma$ -sub-álgebra.* Una  $\sigma$ -sub-álgebra es un subconjunto de una  $\sigma$ -álgebra que comparte todas las propiedades de esta última.

14.7 *Definición-semianillo.* Un semianillo de subconjuntos de  $M$  es una colección  $\mathcal{S}$  no vacía que satisface:

- (a) Si  $A, B \in \mathcal{S}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{S}$ ,
- (b) Si  $A, B \in \mathcal{S}$ ,  $B \subset A$ , entonces existen conjuntos disjuntos dos a dos  $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{S}$  tales que  $A \setminus B \in \bigcup_{i=1}^n C_i$

14.8 *Lema.* Si  $\mathcal{S}$  es un semianillo de conjuntos, entonces la colección  $\mathcal{R}$  de todas las uniones finitas de miembros de  $\mathcal{S}$  es el anillo generado por  $\mathcal{S}$ . Consecuentemente, un semianillo cerrado bajo uniones finitas es un anillo.

14.9 *Definición.* Una función de conjunto  $\mu: \mathcal{S} \mapsto [-\infty, \infty]$  definida en el semianillo  $\mathcal{S}$  es:

- (a) *monótona* si  $A \subset B$  y  $A, B \in \mathcal{S}$  implican  $\mu(A) \leq \mu(B)$

- (b) *aditiva* o *finitamente aditiva* si para cada familia finita  $A_1, \dots, A_n$  de subconjuntos disjuntos dos a dos en  $S$  con  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$ , tenemos que  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$
- (c)  $\sigma$ -*aditiva* o *numerablemente aditiva* si para toda sucesión  $\{A_n\}$  de subconjuntos disjuntos dos a dos en  $S$  con  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ , tenemos  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- (d) *subaditiva* si  $\{A_1, \dots, A_n\} \subset S$  y  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$  implican  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$
- (e)  $\sigma$ -*subaditiva* si  $\{A_n\} \subset S$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$  implican  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

14.10 *Definición-medida*. Sea la función de conjunto  $\mu: S \rightarrow [-\infty, \infty]$  en el semianillo  $S$ . Esta función es:

- (a) Una medida signada si  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, asume a lo sumo uno de los valores  $-\infty, \infty$ , y  $\mu(\emptyset) = 0$
- (b) Una medida si  $\mu$  toma solamente números no negativos.

14.11 *Lema*. Toda medida es monótona, subaditiva y  $\sigma$ -subaditiva.

14.12 *Definición-medida exterior*. Una medida exterior  $\mu$  en un conjunto  $M$  es una función de conjunto de valor real extendido definida en el conjunto de partes de  $M$ ,  $2^M$ , que es monótona, subaditiva y satisface  $\mu(\emptyset) = 0$

14.13 *Definición-conjunto medible*. Sea  $\mu$  una medida exterior en el conjunto  $M$ . Entonces un subconjunto  $A$  de  $M$  se llama medible o  $\mu$ -medible si

$$\mu(N) = \mu(N \cap A) + \mu(N \cap (M \setminus A))$$

para cada subconjunto  $N$  de  $M$ . La colección de subconjuntos  $\mu$ -medibles se denota por  $\mathcal{M}_\mu$  o, si no hay posibilidad de confusión, simplemente por  $\mathcal{M}$ . Así,

$$\mathcal{M}_\mu = \left\{ A \subset M : \mu(N) = \mu(N \cap A) + \mu(N \cap (M \setminus A)) \text{ para cada subconjunto } N \text{ de } M \right\}$$

14.14 *Teorema (Carathéodory)*. Si  $\mu$  es una medida exterior en el conjunto  $M$ , entonces la colección de todos los conjuntos  $\mu$ -medibles es una  $\sigma$ -álgebra, y  $\mu$  restringida a  $\mathcal{M}_\mu$  es una medida.

14.15 *Teorema de extensión de Carathéodory*. Sea  $S$  un semianillo de subconjuntos de  $M$  y sea  $\mu: S \rightarrow [-\infty, \infty]$  una medida en  $S$ . Entonces  $\mu$  genera una función de conjunto  $\mu^*: 2^M \rightarrow [-\infty, \infty]$  que satisface

- (a)  $\mu^*$  es una medida exterior en  $M$ .
- (b)  $\mu^*$  es una extensión de  $\mu$ , o sea  $\mu^*(A) = \mu(A)$  para todo  $A$  que pertenece a  $S$ .
- (c) La colección  $\mathcal{M}_\mu$  de subconjuntos  $\mu$ -medibles de  $M$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu^*$  es una medida cuando está restringida a  $\mathcal{M}_\mu$ .

14.16 *Definición-medida de Lebesgue.* Sea la medida  $\sigma$ -finita en  $\mathcal{S}$ ,  $\mu: \mathcal{S} \mapsto [0, \infty)$  definida por

$$\mu([a, b)) = b - a$$

Entonces  $\mu$  tiene una única extensión a  $\mathcal{M}_\mu$ . Dicha extensión es la medida de Lebesgue en la recta real y los miembros de  $\mathcal{M}_\mu$  se llaman conjuntos Lebesgue-medibles.

14.17 *Definición-medida finita y  $\sigma$ -finita.* Una medida  $\mu$  en un semianillo  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de  $M$  es  $\sigma$ -finita si existe una sucesión  $\{A_n\} \subset \mathcal{S}$  (la cual puede ser escogida tal que la intersección dos a dos de sus elementos sea disjunta) tal que  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  y  $\mu(A_n) < \infty$  para cada  $n$ . Es una medida finita en el semianillo  $\mathcal{S}$  si  $\mu^*(M) < \infty$

14.18 *Definición-medida absolutamente continua.* Sea  $(M, \mathcal{M})$  un espacio medible y sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas sobre dicho espacio. Decimos que  $\nu$  es absolutamente continua respecto de  $\mu$ , si  $A \in \mathcal{M}$ , y  $\mu(A) = 0$  entonces  $\nu(A) = 0$ .

14.19 *Definición-medida puramente finitamente aditiva.* Sea  $\mu$  una medida en  $(M, \mathcal{M})$  tal que  $\mu \geq 0$ . Si para toda medida numerablemente aditiva  $\nu$ , se tiene que  $0 \leq \nu \leq \mu$  implica  $\nu = 0$ , entonces se dice que  $\mu$  es puramente finitamente aditiva.

14.20 *Teorema (Yosida-Hewitt).* Sea  $\mu$  cualquier medida en  $(M, \mathcal{M})$ . Entonces  $\mu$  puede escribirse de manera única como la suma de una medida numerablemente aditiva  $\mu_c$  y una medida puramente finitamente aditiva  $\mu_p$

14.21 *Definición-espacio de medida.* Un espacio de medida es una terna  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ , donde  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $M$  y  $\mu: \mathcal{M} \mapsto [0, \infty]$  es una medida.

14.22 *Definición-espacio de probabilidad.* Sea  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida. Si  $\mu: \mathcal{M} \mapsto [0, 1]$  y  $\mu(M) = 1$ , entonces decimos que  $\mu$  es una medida probabilista, y  $(M, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de probabilidad.

14.23 *Definición-espacio medible.* Un espacio medible es un par  $(M, \mathcal{M})$  en el que  $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $M$ .

14.24 *Definición-función medible.* Sea la función  $f: (M_1, \mathcal{M}_1) \mapsto (M_2, \mathcal{M}_2)$ . Decimos que  $f$  es medible, mas precisamente  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -medible, si  $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1$  para todo conjunto  $A$  en  $\mathcal{M}_2$ . Si  $f$  es de valor real, se suele tomar en el rango la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

14.25 *Definición-conjunto de medida nula.* Sea  $E \subset M$  un conjunto medible tal que  $\mu(E) = 0$  donde  $\mu$  es una medida sobre  $M$ . Decimos que  $E$  es un conjunto de medida  $\mu$ -nula o simplemente un conjunto de medida nula.

14.26 *Definición-casi en todo punto.* Supóngase que para cada  $x \in X$  existe una proposición  $P(x)$ . Se dice que  $P(x)$  es cierta casi en todo punto (c.t.p. o a.e.) si existe un conjunto de medida nula  $E$  tal que  $x \in X \setminus E$  implica que  $P(x)$  es cierta. Ello significa que  $\{x \in X : P(x) \text{ es falso}\}$  es un subconjunto de un conjunto de medida nula.

## 15. Espacios $L_p$ .

15.1 *Definición.* Sea el espacio de medida  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Sea  $1 \leq p < \infty$ . Definimos al espacio  $L_p(M, \mathcal{M}, \mu)$  como el conjunto de funciones medibles  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ , para las cuales la  $p$ -norma (o simplemente norma)  $\|f\|_p = \left( \int_M |f(m)|^p d\mu(m) \right)^{\frac{1}{p}}$  es finita. Ello significa que estos espacios están considerados funciones acotadas.

15.2 *Definición.* Sea el espacio de medida  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Sea  $p = \infty$ . Definimos al espacio  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$  como al conjunto de funciones medibles  $f : M \mapsto \mathbb{R}$ , para las cuales la norma  $\|f\|_\infty = \inf \{ \alpha \geq 0 : \mu(m \in M : f(m) \geq \alpha) = 0 \}$  es finita.

Esta última es la norma del supremo esencial, y lo que define es el menor número  $\alpha$  tal que  $f(m) \leq \alpha$  excepto en un conjunto de medida nula. Evidentemente el supremo esencial es menor o igual que el supremo.

15.3 *Teorema.* Si  $1 < p, q < \infty$  son exponentes conjugados, es decir  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , entonces cada  $g \in L_q(M, \mathcal{M}, \mu)$  define una funcional lineal continua  $F_g$  en  $L_p(M, \mathcal{M}, \mu)$  a través de la fórmula:

$$F_g(f) = \int_M f(m) g(m) d\mu(m)$$

donde  $f \in L_p(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Es decir, existe un isomorfismo isométrico entre el dual topológico de  $L_p(M, \mathcal{M}, \mu)$  y  $L_q(M, \mathcal{M}, \mu)$

15.4 *Relaciones importantes.* Por 15.3 el dual de  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$  es  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Por su parte, el dual de  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$  (que no se deriva del Teorema 15.3) se puede demostrar que es  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el espacio de las medidas finitamente aditivas, acotadas y absolutamente continuas con respecto a  $\mu$ . Si  $f \in L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$  y  $\pi \in ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , entonces  $\pi(f) = \int_M f(m) d\pi(m)$



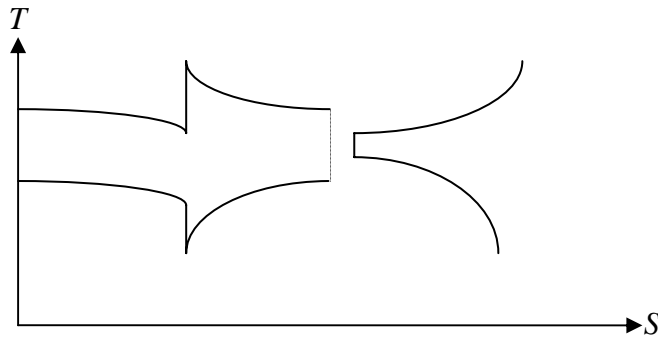
15.5 *Corolario*. Cada  $\mu$  en  $ba_+(M, \mathcal{M}, \mu)$  puede descomponerse como  $\mu = \mu_c + \mu_p$  donde  $\mu_c$  es un elemento de  $L_1^+(M, \mathcal{M}, \mu)$  y  $\mu_p$  es positiva y puramente finitamente aditiva

## 16. Correspondencias

16.1 *Definición-correspondencias*. Una correspondencia  $\varphi$  de un conjunto  $X$  en un conjunto  $Y$ , es una regla que asocia a cada  $x \in X$  un subconjunto no vacío  $\varphi(x)$  de  $Y$ .

16.2 *Definición-hemicontinuidad superior*. La correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$  es hemicontinua superiormente (h.c.s) en  $x$  si para cada entorno abierto que contiene a  $\varphi(x)$ ,  $U^{\varphi(x)}$ , existe un entorno de  $x$ ,  $V^x$ , tal que  $\varphi(x') \subset U^{\varphi(x)}$  para todo  $x' \in V^x$ . La correspondencia es h.c.s. en  $X$  si es h.c.s. en todo  $x \in X$ . La idea intuitiva de hemicontinuidad superior es que el conjunto  $\varphi(x)$  no se hace “mucho más grande” con un “pequeño cambio en  $x$ ”.

*Ejemplo gráfico.*



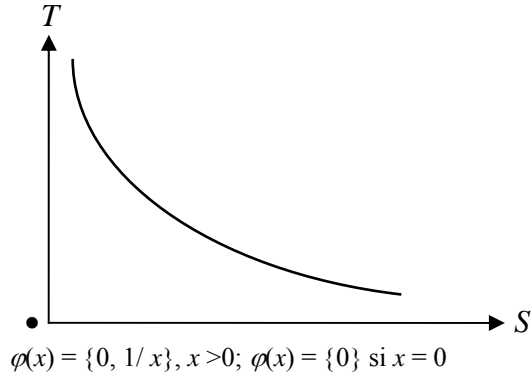
$\varphi$  es h.c.s. en  $x_1, x_2$  y  $x_4$  pero no en  $x_3$ .

16.3 *Proposición*. Sea la correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- (a)  $\varphi$  es h.c.s.;
- (b) el conjunto  $\{x \in X / \varphi(x) \subset U\}$  es abierto para todo conjunto abierto  $U \subset Y$ ;
- (c) el conjunto  $\{x \in X / \varphi(x) \cap F \neq \emptyset\}$  es cerrado para todo conjunto cerrado  $F$  en  $Y$ .

16.4 *Definición-correspondencia cerrada*. La correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$  se dice cerrada o que tiene un grafo cerrado, si el grafo  $G_\varphi = \{(x, y) / y \in \varphi(x)\}$  es un subconjunto cerrado de  $X \times Y$ . Toda correspondencia cerrada es valorada cerrada. El recíproco es falso.

16.5 *Teorema del grafo cerrado*. Una correspondencia valorada cerrada cuyo rango es un conjunto compacto y de Hausdorff, es cerrada si y solo si es h.c.s.

*Ejemplo gráfico*

La correspondencia es cerrada en  $x = 0$  pero no h.c.s en ese punto.

16.6 *Proposición*. La imagen de un conjunto compacto bajo una correspondencia valorada compacta y h.c.s es compacta.

16.7 *Teorema (caracterización por redes)*. Sea una correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$  entre espacios topológicos y sea  $x$  un punto de  $X$ . Consideremos la siguiente propiedad

(\*) Si  $x^d \rightarrow x$  e  $y^d \in \varphi(x^d)$  para cada  $d \in D$ , entonces la red  $(y^d)_{d \in D}$  tiene un punto límite en  $\varphi(x)$

(a) Si  $\varphi$  satisface (\*), entonces  $\varphi$  es h.c.s en  $x$ .

(b) Si  $\varphi$  es valorada cerrada y h.c.s. en  $x$ , e  $Y$  es un espacio de Hausdorff y compacto, entonces  $\varphi$  satisface (\*).

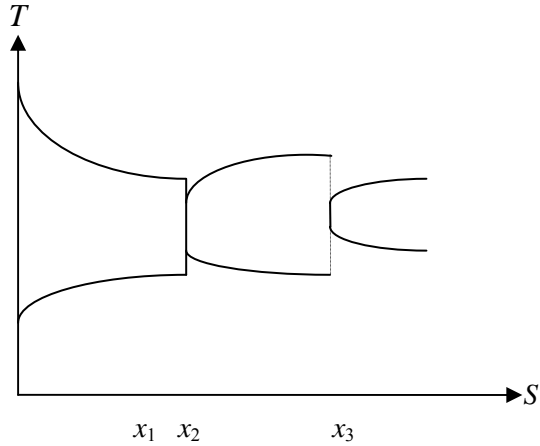
16.8 *Caracterización-correspondencia cerrada*. La correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$  es cerrada en  $x$  si para toda red  $(x^d, y^d)_{d \in D}$  en  $X \times Y$  tal que  $(x^d, y^d) \rightarrow (x, y)$  e  $y^d \in \varphi(x^d)$  para todo  $d$ , se sigue que  $y \in \varphi(x)$ .

16.9 *Teorema-producto de correspondencias*. El producto de una familia de correspondencias h.c.s. valoradas compactas es h.c.s. y valorada compacta.

16.10 *Proposición*. Sea  $Y$  un espacio lineal métrico y sean las relaciones  $\varphi_i: X \mapsto Y$  ( $i = 1, \dots, k$ ) valoradas compactas y h.c.s. en  $x$ . Entonces la relación  $x \mapsto \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)$  de  $X$  en  $Y$  es valorada compacta y h.c.s. en  $x$ .

16.11 *Definición-hemicontinuidad inferior*. La correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$  es hemicontinua inferiormente (h.c.i) en  $x$  si para cada conjunto abierto en  $Y$ ,  $U$ , con  $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$ , existe un entorno de  $x$ ,  $V^x$ , tal que  $\varphi(x') \cap U \neq \emptyset$  para todo  $x' \in V^x$ . La correspondencia es h.c.i. en  $X$  si es h.c.i. en todo  $x \in X$ . Intuitivamente una correspondencia es h.c.i en un punto  $x$  de  $X$  si el conjunto  $\varphi(x)$  no se hace “demasiado pequeño” cuando  $x$  varía “levemente”.

*Ejemplo gráfico.*



$\varphi$  es h.c.i. en  $x_1$  y  $x_3$  pero no en  $x_2$ .

**16.12 Proposición.** Sea la correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$ . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- (a)  $\varphi$  es h.c.i.;
- (b) el conjunto  $\{x \in X / \varphi(x) \subset F\}$  es cerrado para todo conjunto cerrado  $F$  en  $Y$ ;
- (c) el conjunto  $\{x \in X / \varphi(x) \cap G \neq \emptyset\}$  es abierto para todo conjunto abierto  $G$  en  $Y$ .

**16.13 Teorema (caracterización de la h.c.i. por redes).** Sea la correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (a) La correspondencia es h.c.i. en  $x$
- (b) Si  $x^d \rightarrow x$ , entonces para cada  $y \in \varphi(x)$  existe una subred de índices  $\{d_k\}_{k \in D}$  y elementos  $y^k \in \varphi(x^{d_k})$  para cada  $k \in D$  tal que  $y^k \rightarrow y$ .

**16.14 Teorema-producto de correspondencias.** El producto de una familia finita de correspondencias h.c.i. es h.c.i.

**16.15 Proposición.** Sea  $Y$  un espacio lineal métrico y sean las relaciones  $\varphi_i: X \mapsto Y$  ( $i = 1, \dots, k$ ) h.c.i. en  $x$ . Entonces la relación  $x \mapsto \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)$  de  $X$  en  $Y$  es h.c.i. en  $x$ .

**16.16 Proposición.** Sea la relación  $\varphi: X \mapsto Y$ . La correspondencia  $\bar{\varphi}$ , definida como  $\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$  para todo  $x \in X$ , es h.c.i. si y solo si  $\varphi$  es h.c.i.

**16.17 Proposición.** Sean dos correspondencias  $\varphi, \psi: X \mapsto Y$  donde  $X$  es un espacio topológico e  $Y$  un e.v.t. Entonces:

- (a) Si  $\varphi$  es valorada cerrada y  $\psi$  es valorada compacta, entonces  $\varphi + \psi$  es valorada cerrada.
- (b) Si  $\varphi$  y  $\psi$  son valoradas compacta, entonces  $\varphi + \psi$  es valorada compacta.

- (c) Si  $\varphi$  y  $\psi$  son valoradas compacta y h.c.s. en un punto, entonces  $\varphi + \psi$  es h.c.s. en ese punto.  
 (d) Si  $\varphi$  y  $\psi$  son h.c.i. en un punto, entonces  $\varphi + \psi$  es h.c.i. en ese punto.

#### 16.18 Teorema. (Unión de correspondencias)

- (a) La unión de una familia de correspondencias h.c.i. es h.c.i.  
 (b) La unión de una familia finita de correspondencias h.c.s. es h.c.s.

16.19 *Definición.* La correspondencia  $\varphi: X \mapsto Y$  es *continua* en  $x$  si es h.c.s y h.c.i en ese punto. Dicha correspondencia es continua en  $X$  si es continua en todo  $x \in X$ .

16.20 *Teorema del Máximo (Berge)* Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Sean  $f: Y \mapsto \mathbb{R}$  una función continua y  $\varphi: X \mapsto Y$  una correspondencia no vacía. Entonces, la función  $m: X \mapsto \mathbb{R}$ , definida como  $m(x) = \max\{f(y) : y \in \varphi(x)\}$  es continua y la correspondencia  $\Theta: X \mapsto Y$ , definida como  $\Theta(x) = \{y : y \in \varphi(x), f(y) = m(x)\}$  es h.c.s.

### 17. Teoremas de punto fijo

17.1 *Definición-punto fijo.* Un espacio topológico  $X$  se dice que tiene la propiedad de punto fijo si para toda aplicación continua  $f: X \mapsto X$  existe un vector  $x$  en  $X$  tal que  $f(x) = x$

17.2 *Teorema-Brouwer.* Si  $f$  es una aplicación continua de una esfera unitaria cerrada  $\bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces hay un punto  $x$  en  $\bar{B}(0,1)$  tal que  $f(x) = x$ .

17.3 *Definición-cubo de Hilbert.* El cubo de Hilbert  $C$  es el conjunto en el espacio  $l_2$  consistente en aquellas sucesiones  $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$  con  $\|x^n\| \leq \frac{1}{n}$ .  $C$  es un subconjunto compacto de  $l_2$ .

17.4 *Lema.* El cubo de Hilbert posee la propiedad de punto fijo

17.5 *Lema.* Cualquier subconjunto cerrado y convexo  $K$  del cubo de Hilbert  $C$  tiene la propiedad de punto fijo.

17.6 *Lema.* Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo de un e.v.t. localmente convexo  $X$ . Sea  $f: K \mapsto K$  continua. Si  $K$  contiene al menos dos puntos, entonces existe un subconjunto convexo y cerrado  $K_1 \subseteq K$  tal que  $f(K_1) \subseteq K_1$ .

17.7 *Teorema (Schauder-Tychonoff).* Un subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio vectorial topológico localmente convexo posee la propiedad de punto fijo. Este teorema tiene la siguiente generalización

17.8 *Teorema (Tychonoff-Kakutani-Ky Fan).* Sea  $X$  un e.v.t. de Hausdorff localmente convexo. Sea  $K$  un subconjunto no vacío, convexo y compacto de  $X$  y sea  $\Xi: K \mapsto 2^K$

una correspondencia h.c.s. tal que para todo  $k$  en  $K$  el conjunto  $\Xi(k)$  es convexo y no vacío. Entonces existe un punto  $\bar{k}$  en  $K$  tal que  $\bar{k} \in \Xi(\bar{k})$ .

**17.9 Definición-equicontinuidad.** Una familia  $\mathcal{f}$  de aplicaciones lineales en un e.v.t.  $X$  se dice que es equicontinua en un subconjunto  $K$  de  $V$  si para todo entorno  $V$  de 0 hay un entorno  $U$  de 0 tal que si  $k_1, k_2 \in K$  y  $k_1 - k_2 \in U$  entonces  $\mathcal{f}(k_1 - k_2) \subseteq V$ ; esto es,  $f(k_1 - k_2) \in V$  para cada  $f \in \mathcal{f}$ .

**17.10 Teorema de punto fijo de Kakutani.** Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo de un e.v.t. localmente convexo  $X$ , y sea  $\mathcal{f}$  un grupo de aplicaciones lineales equicontinuas en  $K$  tales que  $\mathcal{f}(K) \subseteq K$ . Entonces, existe un punto  $k$  en  $K$  tal que  $\mathcal{f}(k) = k$ .

**17.11 Corolario (Kakutani-Fan-Glicksberg)** Sea  $K$  un subconjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Hausdorff localmente convexo, y sea la correspondencia  $\varphi: K \mapsto K$  cerrada, no vacía y valorada convexa. Entonces, el conjunto de puntos fijos de  $\varphi$  es compacto y no vacío.

## 18. Particularidades de los espacios de dimensión finita

**18.1 Lema.** Un espacio normado lineal de dimensión finita es completo; luego es un espacio de Banach.

**18.2 Corolario.** Todo subespacio de dimensión finita de un espacio de Banach es cerrado.

**18.3 Lema.** Un espacio de Banach de dimensión  $n$  es equivalente al espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $E^n$  (definido sobre el cuerpo  $K$ ). Esto significa que si  $B$  es tal espacio de Banach  $n$ -dimensional, entonces existe una función lineal continua inyectiva  $f$  tal que  $f(B) = E^n$ .

**18.4 Corolario.** Toda función lineal definida en un espacio normado de dimensión finita es continua.

**18.5 Corolario.** Un espacio lineal normado tiene dimensión finita si y solo si su esfera unitaria cerrada es compacta.

**18.6 Lema.** Un espacio normado tiene dimensión finita  $n$  si y solo si su dual tiene dimensión  $n$ .

**18.7 Corolario.** Si  $\{b_1, \dots, b_n\}$  es una base de Hamel (o simplemente una base) para el espacio normado  $X$ , entonces las funcionales  $b_1^*, \dots, b_n^*$  definidas por las ecuaciones  $x = \sum_{i=1}^n b_i^*(x) b_i$  con  $x \in X$ , forman una base de Hamel para el espacio dual  $X^*$ .

18.8 *Propiedad*. En un espacio vectorial de dimensión finita, dos conjuntos convexos y disjuntos pueden siempre separarse por una funcional lineal no nula.

18.9 *Propiedad*. Sea  $F$  la familia de las funciones lineales (continuas) de un espacio normado  $X$  en  $\mathbb{R}$ , es decir  $F = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ lineal y continua}\}$ . Si  $X$  es de dimensión finita, entonces la función  $F \times X$  en  $Y$  que transforma  $(f, x)$  en  $f(x)$  es continua siendo la topología de  $F$  la topología producto.

18.10 *Teorema de Heine-Borel*. Un subconjunto de un espacio euclídeo  $n$ -dimensional es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

18.11 *Teorema*. Todo e.v.t. de dimensión finita admite una única topología lineal, a saber, la topología euclídea.

18.12 *Teorema*. Todo espacio vectorial topológico localmente compacto es de dimensión finita.

18.13 *Teorema de punto fijo de Kakutani*. Cuando estamos en  $\mathbb{R}^n$ , el teorema 17.10 (y su generalización 17.11) puede adaptarse y enunciarse de la siguiente manera: Si  $K$  es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$  y si  $\varphi: K \mapsto 2^K$  es una correspondencia h.c.s., no vacía y valorada convexa, entonces  $\varphi$  tiene un punto fijo.

## 19. Conos

19.1 *Definición-cono*. Si  $X$  es un espacio vectorial, un conjunto  $C \subset X$  es un cono con vértice  $c$ , si  $c + x \in C$  implica que  $c + \alpha x \in C$  para todo  $\alpha \geq 0$ . El cono  $C$  de vértice  $c$  generado por  $A$  es la intersección de todos los conos con vértice  $c$  que contienen al conjunto  $A$ .

19.2 *Definición-cono convexo de vértice cero y punteado*. Sea  $C$  el cono de 19.1. Si  $C$  es convexo y  $c = 0$ , entonces  $C$  se llama cono convexo de vértice 0. Así, un cono convexo de vértice 0 es un subconjunto de  $X$  tal que  $C + C \subset C$  y  $\alpha C \subset C$  para todo  $\alpha \geq 0$ . Si además  $C \cap (-C) = \{0\}$ , entonces  $C$  es un cono punteado.

19.3. *Corolario*. El conjunto vacío, el espacio vectorial  $X$ , todo subespacio vectorial de  $X$  (incluyendo a  $\{0\}$ ), el conjunto de los múltiplos positivos de cualquier vector  $x$  de  $X$  y el conjunto de todos los vectores positivos, son ejemplos de conos convexos. Por otra parte, tanto el interior como la clausura de un cono (convexo) de vértice 0 en un e.v.t.  $X$  es un cono (convexo) de vértice 0 en  $X$ .

19.4 *Definición-condición de Lipschitz*. Sea  $Y$  un subconjunto de  $X$ . Una función  $f: Y \mapsto \mathbb{R}$  se dice que satisface la condición de Lipschitz en  $Y$  (más precisamente condición de Lipschitz de rango  $K$ ), si para algún escalar no negativo  $K$ , se tiene

$$|f(y) - f(y')| \leq K \|y - y'\| \text{ para todo par de puntos } y, y' \text{ en } Y.$$

19.5 *Definición.* Decimos que la función  $f : Y \mapsto \mathbb{R}$  es Lipschitz *cerca* de  $y$  si, para algún  $\varepsilon > 0$ ,  $f$  es Lipschitz (de rango  $K$ ) en el conjunto  $y + \varepsilon B(0,1)$  (o sea, dentro de un  $\varepsilon$ -entorno de  $y$ )

19.6 *Definición-derivada direccional generalizada.* Sea la función  $f$  que satisface la condición de Lipschitz cerca de un punto  $x$ , y sea  $v$  cualquier otro vector en  $X$ . La derivada direccional generalizada (unilateral) de  $f$  en  $x$  en la dirección  $v$ , denotada por  $f^0(x; v)$ , está definida por:

$$f^0(x; v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

donde  $y$  es un vector en  $X$  y  $t$  son escalares positivos.

19.7 *Definición-gradiente generalizado.* El gradiente generalizado de  $f$  en  $x$ , denotado por  $\partial f(x)$ , es el subconjunto de  $X^*$  dado por

$$\{\zeta \in X^* : f^0(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle_x \text{ para todo } v \text{ en } X\}$$

19.8 *Proposición.* Sea  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  Lipschitz cerca de  $x$  donde  $x$  es un punto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $S$  un conjunto de medida de Lebesgue nula en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\partial f(x) = co \left\{ \lim \nabla f(x^\alpha) : x^\alpha \rightarrow x, x^\alpha \notin S, x^\alpha \notin \Omega_f \right\}$$

donde  $\Omega_f$  es el conjunto de medida nula (en el sentido de Lebesgue) en donde  $f$  no es diferenciable y  $\nabla f(\cdot)$  es el gradiente de  $f$ .

19.9 *Definición.* Sea  $C$  un subconjunto no vacío de  $X$ . La función distancia  $d_C(\cdot) : X \mapsto \mathbb{R}$  se define como:

$$d_C(x) = \inf \{\|x - c\| : c \in C\}$$

19.10 *Proposición.* La función  $d_C$  satisface la condición de Lipschitz en  $X$ , esto es:

$$|d_C(x) - d_C(y)| \leq \|x - y\|$$

19.11 *Definición-cono tangente de Clarke.* Sea  $x$  un punto en  $C$ . Un vector  $v$  en  $X$  es tangente a  $C$  en  $x$  si  $d_C^0(x; v) = 0$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $C$  en  $x$  se denota por  $T_C(x)$  y es llamado el cono tangente a  $C$  en  $x$  o simplemente el cono tangente de Clarke. Formalmente

$$T_C(x) = \{v \in X : d_C^0(x; v) = 0\}$$

19.12 *Proposición.*  $T_C(x)$  es un cono convexo y cerrado en  $X$  que además contiene al 0.

19.13 *Definición.* El cono normal a  $C$  en  $x$  o cono normal de Clarke, lo definimos como el polar de  $T_C(x)$ :

$$N_C(x) = \{ \zeta \in X^* : \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \text{ para todo } v \text{ en } T_C(x) \}$$

19.14 *Caracterización.* Se puede definir alternativamente a  $N_C(x)$  de la siguiente manera

$$N_C(x) = cl \left\{ \bigcap_{\lambda \geq 0} \lambda \partial f(x) \right\}$$

donde  $cl$  denota la clausura en la topología débil\*

19.15 *Proposición.* Si  $C$  es convexo,  $N_C(x)$  coincide con el cono de las normales en el sentido del análisis convexo.

19.16 *Teorema.* Un elemento  $v$  de  $X$  es tangente a  $C$  en  $x$  si y solo si, para toda sucesión  $x^\alpha$  en  $C$  convergente a  $x$  y una sucesión  $t^\alpha$  en  $(0, \infty)$  decreciente a 0, existe una sucesión  $v^\alpha$  en  $X$  convergente a  $v$  tal que  $x^\alpha + t^\alpha v^\alpha \in C$  para todo  $\alpha$ .

Este concepto de tangencia es independiente de la norma usada en  $X$ . Así, podemos escoger en circunstancias particulares una función distancia que hace el cálculo de tangentes (o normales) más conveniente.

19.17 *Definición.* Un vector  $v$  en  $X$  se dice hipertangente al conjunto  $C$  en el punto  $x$  en  $C$  si, para algún  $\varepsilon > 0$ ,

$$y + tw \in C \text{ para todo } y \in (x + \varepsilon B(0,1)) \cap C, w \in \{v\} + \varepsilon B(0,1), t \in (0, \varepsilon)$$

19.18 *Corolario.* Se tiene que todo vector  $v$  hipertangente a  $C$  en  $x$  pertenece a  $T_C(x)$ . Es posible, sin embargo, que no existan hipertangentes a un conjunto en un punto.

19.19 *Corolario.* Sea  $x \in C$ , y supongamos que existe un vector hipertangente a  $C$  en  $x$ . Entonces la correspondencia  $N_C$  es cerrada en  $x$ ; esto es, si  $\zeta^\alpha \in N_C(x^\alpha)$ ,  $\zeta^\alpha \rightarrow \zeta$  débilmente\* y  $x^\alpha \rightarrow x$ , entonces  $\zeta \in N_C(x)$ .

19.20 *Teorema.* Sea  $X = \mathbb{R}^l$ , si  $x$  está en la frontera de  $clC$  entonces  $0 \notin N_C(x)$ .

19.21 *Proposición.* Sea  $X = \mathbb{R}^l$ , si  $x$  pertenece a  $clC$  entonces  $N_C(x)$  es un cono convexo generado por el origen y por el conjunto



$$\left\{ v = \lim \frac{v^\alpha}{\|v^\alpha\|} : v^\alpha \perp C \text{ en } x^\alpha, x^\alpha \rightarrow x, v^\alpha \rightarrow 0 \right\}$$

$v^\alpha \perp C$  en  $x^\alpha$  se refiere a que  $\langle v^\alpha, c - x^\alpha \rangle_c \leq \frac{1}{2} \|x - c\|^2$  para todo  $c \in clC$ .

19.22 *Proposición.* Sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^l$  que contiene a  $x$ . Supongamos que  $\text{int}T_C(x) \neq \emptyset$ . Entonces la correspondencia  $N_C$  es cerrada en  $x$ .

19.23 *Proposición.* Sea el siguiente conjunto

$$C = \{y \in X : f_i(y) \leq 0, i = 1, \dots, n\} \text{ y sea } x \text{ tal que } f_i(x) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Entonces, si cada  $f_i$  es estrictamente diferenciable en  $x$ , y si  $\nabla f_i(x) \geq 0$  son linealmente independientes se sigue que

$$N_C(x) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla f_i(x) : \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

19.24 *Definición-Cono de desplazamientos interiores.* Sea  $Y$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^l$  tal que  $\text{int}Y \neq \emptyset$ . Sea  $y \in Y$ . Denotamos por  $k[Y, y]$  al cono de desplazamientos interiores de  $Y$  en  $y$ .  $z \in k[Y, y]$  si y solo si existe un conjunto abierto conteniendo a  $z$ ,  $B(z, \varepsilon)$ , y  $\eta > 0$  tal que para todo  $\alpha, 0 < \alpha < \eta$ , se tiene que  $\{y\} + \alpha B(z, \varepsilon) \subset Y$ .

19.25 *Propiedades.*

- (i)  $k[Y, y]$  es un cono abierto de vértice 0.
- (ii)  $k[Y, y] = k[Y + \{a\}, y + a]$

*Demostración.*

(i) Demostremos en primer lugar que se trata de un cono de vértice 0. Sea  $z \in k[Y, y]$  y probemos que  $tz \in k[Y, y]$  para todo  $t > 0$ . Sea  $B(tz, t\varepsilon)$  un entorno abierto de  $tz$ . Sea además el escalar  $\eta/t > 0$ . Entonces para todo  $\alpha', 0 < \alpha' < \eta/t$ , se tiene que  $\{y\} + \alpha' B(tz, t\varepsilon) = \{y\} + \alpha' t B(z, \varepsilon) \subset Y$ , puesto que  $\alpha' t < \eta$  y  $z \in k[Y, y]$ .

Ahora probamos que  $k[Y, y]$  es abierto. Sea  $z \in k[Y, y]$ . Mostraremos que la bola abierta de centro  $z$  y radio  $\varepsilon/2$  está contenida en  $k[Y, y]$ . Como  $z \in k[Y, y]$ ,  $\{y\} + \alpha B(z, \varepsilon) \subset Y$ . Sea  $z' \in B(z, \varepsilon/2)$  y sea la bola abierta  $B(z', \varepsilon/2)$  un entorno abierto de  $z'$ . Claramente  $B(z', \varepsilon/2) \subset B(z, \varepsilon)$  y, en consecuencia,  $\{y\} + \alpha B(z', \varepsilon/2) \subset Y$ , por lo que  $z' \in k[Y, y]$ . Luego  $k[Y, y]$  es abierto.

(ii) Sea  $z \in k[Y + \{a\}, y + a]$ , entonces  $\{y + a\} + \alpha B(z, \varepsilon) \subset Y + \{a\}$  para todo  $0 < \alpha < \eta$ . Pero ello implica que  $\{y\} + \alpha B(z, \varepsilon) \subset Y$  para todo  $0 < \alpha < \eta$ . En consecuencia  $k[Y + \{a\}, y + a] \subseteq k[Y, y]$ .

La demostración de que  $k[Y, y] \subseteq k[Y + \{a\}, y + a]$  es directa. Luego tenemos el resultado buscado. ■

**19.26 Definición-Cono Polar Positivo.** Sea  $X$  un espacio vectorial topológico y sea  $S$  un subconjunto de  $X$ . El cono polar positivo  $S_+^0$  de  $S$  está dado por  $S_+^0 = \{f \in X^* : f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0\}$

## 20. Convexidad generalizada: conjuntos estrellados

**20.1 Definiciones.** Sea  $X$  un espacio vectorial real y  $S \subset X$

- (a) Se dice que  $x$  ve a  $y$  por vía de  $S$  si  $[x, y] = \{z : x \leq z \leq y\} \subset S$
- (b) La estrella de un punto  $x \in S$  es el conjunto  $st(x, S)$  de todos los puntos de  $S$  que  $x$  ve por vía de  $S$ . Es decir  $st(x, S) = \{y \in S : [x, y] \subset S\}$
- (c)  $S$  es estrellado si existe  $x \in S$  tal que  $st(x, S) = S$
- (d)  $S$  es finitamente estrellado si, dado cualquier conjunto finito  $F \subset S$ , existe  $x \in S$  tal que  $F \subset st(x, S)$

**20.2 Proposición.** Todo conjunto convexo es estrellado, y todo conjunto estrellado es finitamente estrellado, pero las proposiciones recíprocas no son ciertas.

## 21. Distribuciones de Schwartz

**21.1 Definición.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^l$  y sea la función  $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$ . Se define al soporte de esta función,  $sop\psi$ , como  $\overline{\{x \in \Omega : \psi(x) \neq 0\}}$ . Decimos que la función  $\psi$  tiene soporte compacto si dicho conjunto es compacto.

Denotamos por  $D(\Omega)$  al espacio vectorial de funciones de clase  $C^\infty(\Omega)$  con soporte compacto en  $\Omega$ . La topología en  $D(\Omega)$  se define tal que  $\{\psi_j\} \subset D(\Omega)$  converge a cero conforme  $j \rightarrow \infty$  si existe un conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que  $sop\psi_j \subset K$  para toda  $\psi_j \in \{\psi_j : j \in \mathbb{N}\}$  y toda derivada parcial

$$D^p \psi_j(x) = D_{x_1, \dots, x_n}^{p_1 + \dots + p_n} \psi_j(x) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty \text{ uniformemente en } x \in K,$$

donde  $p \in (\mathbb{N} \cup 0)^n$

21.2 *Definición-distribuciones.* El espacio de las distribuciones  $D'(\Omega)$  es el dual topológico de  $D(\Omega)$ , es decir, los elementos de  $D'(\Omega)$  son funcionales lineales continuas definidas en  $D(\Omega)$ . Escribimos cada distribución  $f \in D'(\Omega)$  como  $\psi \mapsto \langle f, \psi \rangle$

21.3 *Definición-función localmente integrable.* Una función  $g$  es localmente integrable,  $L_{loc}$ , en  $\mathbb{R}^l$  si  $\int_A |g(x)| dx$  existe para cada región acotada  $A$  de  $\mathbb{R}^l$ . Las funciones  $L_{loc}$  son bastante amplias; por caso todas las funciones continuas a trozos son  $L_{loc}$

21.4 *Propiedades.*

- (a)  $L_{loc} \subset D'(\Omega)$  y de ahí  $D'(\Omega) \neq \emptyset$
- (b) Si  $\psi \in C^\infty$  y  $f \in D'$ , entonces el producto  $\psi f : \varphi \mapsto \langle \psi f, \varphi \rangle$  para toda  $\varphi \in D$  se define por  $\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi \varphi \rangle$ .
- (c) Toda distribución tiene todas sus derivadas y todas son continuas. Estas pueden definirse por:  $\langle D^p f, \psi \rangle = \langle f, D^p \psi \rangle$

Los siguientes resultados sobre distribuciones, desarrollados por Olivera (2008), son fundamentales en el proceso de formalización de la teoría económica con estos espacios

21.5 *Teorema.* Existe un conjunto  $I$  tal que  $D'(\Omega)$  es linealmente homeomorfo al espacio  $(C^\infty[-1,1])^I$ .

21.6 *Teorema.* El conjunto de índices  $I$  satisface las relaciones numéricas<sup>3</sup>

$$Card \mathbb{N} < Card I \leq Card \mathbb{R}$$

21.7 *Teorema.*  $D'(\Omega)$  con la multiplicación inducida por  $(C^\infty[-1,1])^I$  es un álgebra<sup>4</sup> funcionalmente continua.

21.8 *Corolario.* El conjunto de homomorfismos<sup>5</sup> complejos del álgebra está contenido en ella.

<sup>3</sup>  $Card$  denota la cardinalidad. Si  $A$  es un conjunto finito, se denomina cardinalidad de  $A$ ,  $Card A$ , al número de elementos del conjunto  $A$ . Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos con infinitos elementos entonces la cardinalidad de  $A$  es menor o igual que la cardinalidad de  $B$ ,  $Card A \leq Card B$ , si y solo si existe una función inyectiva de  $A$  en  $B$ .

<sup>4</sup> Un álgebra topológica es un par  $(A, \tau)$  donde  $A = (A, f_i^A)$  es un espacio vectorial y cada  $f_i^A$  es continua en la topología producto.

<sup>5</sup> Una función  $f$  de un grupo  $G$  en un grupo  $H$  es un homomorfismo si y solo si  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  para todos los puntos  $x, y$  de  $G$ .

21.9 *Observaciones.* a) Olivera (2008) prueba los tres teoremas para el caso más general de distribuciones con soporte libre. b) La multiplicación inducida en  $D'(\Omega)$  por el álgebra topológica  $(C^\infty[-1,1])^I$  satisface los criterios conceptuales de una buena multiplicación de distribuciones: 1) la operación está definida para dos distribuciones cualesquiera; 2) el resultado es siempre una distribución.

La bibliografía sobre la cual se basó el autor para esta primera sección ha sido: Aliprantis y Border (1994), Aliprantis y Burkinshaw (2006), Baum (1964), Barbolla (1981), Beer (1993), Berge (1959), Border (1985), Choquet (1966), Clarke (1983), Dunford y Schwartz (1958), Halmos (1974), Hildebrand (1974), Kelley (1962), Kelley y Namioka (1982), Kolmogorov y Fomin (1957) y (1961), Luenberger (1969), Olivera (2008), Rockafellar (1970), Rodríguez y Toranzos (1999), Schaefer (1971), Schwartz (1966), Stankovic (1998), Sutherland (1975) y Vulikh (1963)

## Sección II Elementos de Teoría Económica

En este apartado tenemos por finalidad estudiar los conceptos de dimensión infinita, no convexidad y externalidad desde una óptica estrictamente de la economía teórica. Esto es, nuestra intención es analizar que implica que el espacio de bienes sea de dimensión infinita, que los conjuntos de producción de cada oferente admitan la calidad de convexo sólo como una posibilidad entre varias y cuánto agrega al análisis el hecho de que los agentes económicos, al tomar sus decisiones, se vean condicionados directamente<sup>6</sup> por las acciones del resto de los individuos. Desarrollamos estos tópicos a continuación, junto a otros conceptos económicos que también usaremos a lo largo de los Capítulos Segundo y Tercero.

### 1. Espacios de bienes de dimensión infinita

En muchas aplicaciones se necesitan construcciones teóricas dotadas de distintos espacios de dimensión infinita. Entre los estudios más conocidos señalamos a aquellos que conciernen a la asignación temporal de recursos según los estados de la naturaleza, a los que tratan con la diferenciación de bienes y también cuando nos adentramos en la economía financiera. En este tipo de problemas, los bienes no pueden ser representados como combinación lineal de ninguna base con una cantidad finita de vectores. Por ejemplo, si en una aplicación particular el consumo se proyecta de acuerdo a ciertas circunstancias o estados de la naturaleza, y estas no son finitas, no habrá sustento para argumentar que un espacio de dimensión finita sería el idóneo para representar a dichos bienes. Lo mismo ocurre en los modelos dinámicos estocásticos con los que suelen trabajar los teóricos de la economía financiera, donde los precios de ciertos títulos evolucionan a lo largo del tiempo perturbados por ciertos shocks. En este caso, ni el tiempo ni la perturbación son fenómenos que quepa definirlos en algún conjunto finito por lo que la evolución de aquel título solo podrá tener lugar en un espacio de dimensión infinita apropiado.

Así, resulta evidente que los espacios de dimensión finita no nos son útiles para formalizar matemáticamente estas ideas. A continuación mostramos algunos de los

---

<sup>6</sup> Cuando decimos “directamente” nos referimos a que este efecto no surge a través del sistema de precios, o sea, ocurre al margen del mecanismo de mercado.

estudios que hemos señalado, y los espacios de dimensión infinita que comúnmente se han utilizado.

1.1 *Problemas de asignación intertemporal*, o sea, cuando consideramos bienes a lo largo de un período no acotado. Aún si se tratase de consumos y producciones de un mismo bien  $x$ , el hecho de tener que asignar el consumo y la producción de este a lo largo del tiempo necesita de un espacio de dimensión infinita. Si, como es usual, admitimos que los consumos y las producciones convergen a determinados valores, el espacio  $l_\infty$  de las sucesiones acotadas, sería un instrumento conveniente para expresar una cierta cantidad de consumo o producción en cada instante del tiempo, cuando el tiempo no está acotado y está expresado, además, como una variable discreta. En este caso,  $x$  da cuenta de un plan de consumo y  $x(t)$  es el consumo del bien  $x$  en  $t$ . Existen más ejemplos considerando otros espacios, pero lo cierto es que si el análisis obliga planear producciones y consumos a lo largo de un período indefinido, necesitamos un espacio de dimensión infinita donde ubicar a los distintos flujos de bienes en cada instante  $t$ .

1.2 *Problemas de asignación con incertidumbre*. En este caso tenemos, en general, que los planes de consumo obedecen a patrones que dependen del estado de la naturaleza. Aquellos suelen modelarse como variables estocásticas (o sea, funciones medibles) sobre algún espacio de probabilidad  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Si tomamos, por ejemplo, al espacio  $L_2(M, \mathcal{M}, \mu)$  como espacio de bienes (con media y variancia finita) entonces para un elemento  $x$  del mismo, definimos a  $x(m)$  como el consumo si ocurre el estado de la naturaleza  $m$ .

Resulta claro que cuando consideramos incertidumbre y los posibles estados de la naturaleza son infinitos, no podemos restringir la cantidad de bienes a una cantidad finita. Por este motivo se hace evidente la importancia, en este contexto, de considerar espacios de dimensión infinita.

1.3 *Modelos con bienes diferenciados*. En los trabajos más conocidos sobre bienes diferenciados se ha hecho extenso el uso de ciertos espacios de dimensión infinita a fin de dar cuenta de las diferencias físicas de dichos bienes. Esto es, si admitimos que las diferencias son infinitas dentro de distintas clasificaciones (finitas o infinitas) de bienes, entonces también necesitamos espacios de dimensión infinita.

1.4 *Modelos con una o varias de las combinaciones anteriores*. Resulta evidente que estudiar, por caso, una situación con bienes diferenciados e incertidumbre requeriría de un espacio de dimensión infinita, lo mismo que analizar un problema de asignación intertemporal entre bienes diferentes con incertidumbre, etc.

Vemos así interesante que la teoría contemple circunstancias que van más allá de una cantidad finita de bienes. En el Capítulo Segundo profundizaremos el análisis de estos espacios y su conexión con la teoría económica. En el Capítulo Tercero probaremos los resultados centrales de esta tesis en el espacio  $L_\infty$ .

## 2 Conjuntos de producción no convexos

Más allá de la definición matemática de conjunto convexo, la cual expusimos en la Sección I, 11.1, el concepto de convexidad engloba dos ideas muy importantes acerca de las posibilidades de producción. Una es la de rendimientos no crecientes, esto es cualquier vector input-output puede disminuirse. En particular, si existe la posibilidad de inacción ( $0 \in Y$ ), la convexidad implica que  $Y$  tiene rendimientos no crecientes a escala. En segundo lugar, la convexidad captura la idea de que combinaciones de insumos “desbalanceados” no son más productivos que cuando están “balanceados” (o simétricamente, las combinaciones de outputs “desbalanceados” no son menos costosos de producir que lo que son los “balanceados”). A continuación representamos gráficamente un caso de conjunto de producción convexo

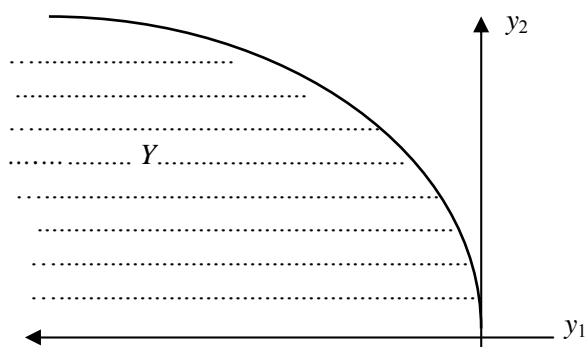


Gráfico II.2.1

De lo anterior se deduce que la no convexidad puede implicar la negación de estas dos ideas, o sea, rendimientos crecientes, y que una combinación lineal convexa de insumos correspondiente a dos producciones diferentes puede generar un output aún mayor. Además, la no convexidad puede verse en los siguientes casos:

(i) *Rendimientos no decrecientes a escala*, o sea, una situación en la que  $y \in Y$  implica que  $\alpha y \in Y$  para cualquier escalar  $\alpha \geq 1$ . Es decir, cualquier vector input-output,  $y$ , puede aumentarse y ser factible para el productor. Notemos que la presencia de tramos de costos fijos implica también la existencia de rendimientos no decrecientes a escala, como en el Gráfico II.2.3.

(ii) *Rendimientos constantes a escala*. Esta es la conjunción de rendimientos crecientes y rendimientos no decrecientes que vimos anteriormente. Así la producción  $Y$  exhibe rendimientos constantes a escala si  $y \in Y$  implica  $\alpha y \in Y$  para cualquier escalar  $\alpha \geq 0$ .

(iii) La propiedad anterior también permite esta otra, la de *aditividad o libre entrada*, que dice que si  $y, y' \in Y$  entonces  $y + y' \in Y$  (más sucintamente puede formularse como  $Y + Y \subset Y$ ), esto implica, por ejemplo, que  $ky \in Y$  para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ . La interpretación económica de la condición de aditividad es que si  $y$  e  $y'$  son ambas posibles, entonces se pueden llevar adelante dos procesos de producción simultáneamente y que no interfieren entre sí.

El concepto de aditividad también está relacionado con la idea de entrada. Si  $y \in Y$  está siendo producida por una firma y otra empresa ingresa en el mercado y produce  $y' \in Y$ , entonces el resultado neto es el vector  $y + y'$ . Así, el conjunto de producción agregado

debe satisfacer la condición de aditividad si la entrada irrestricta (o libre entrada) se asume como posible.

Exponemos a continuación algunos gráficos ilustrativos en  $\mathbb{R}^2$  de las situaciones mencionadas previamente.

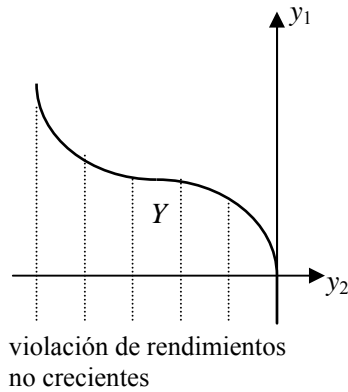


Gráfico II.2.2

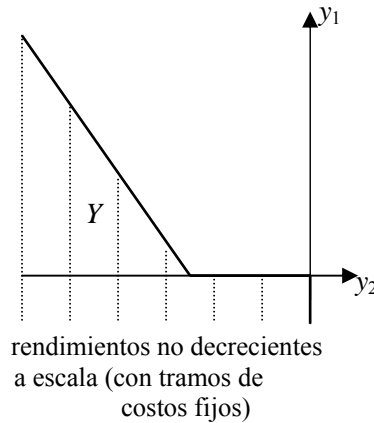


Gráfico II.2.3

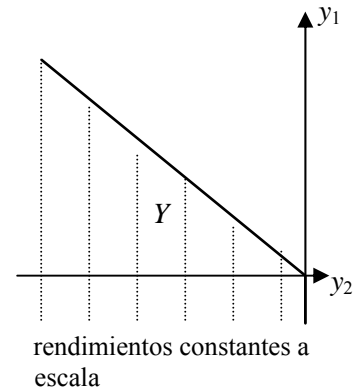


Gráfico II.2.4

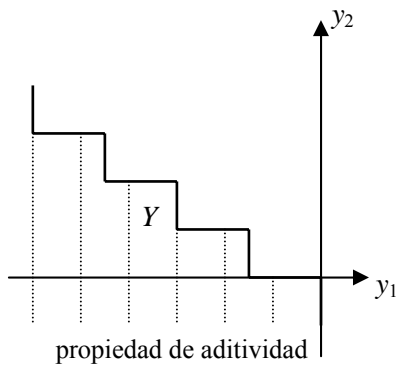


Gráfico II.2.5

Así, el hecho de asumir que las correspondencias de producción tienen un grafo no convexo nos permite estudiar casos que no podríamos si tal convexidad existiera. Olivera (2002), aplicando la teoría expuesta en la Sección I, 20., muestra que una forma de convexidad débil, la de los conjuntos de producción finitamente estrellados, es compatible con efectos de escala de cualquier orden de magnitud.

Exponemos a continuación los conceptos de eficiencia en  $\mathbb{R}^l$ .

**2.1 Definición-producción eficiente.** Un vector  $y \in Y$  es eficiente si no hay otro  $y' \in Y$  tal que  $y' \geq y$  e  $y' \neq y$ . Es decir, un vector de producción es eficiente si no hay otro vector factible que genere tanto producto como  $y$  sin usar insumos adicionales, y que actualmente produce más de algún producto o usa menos de algún insumo.

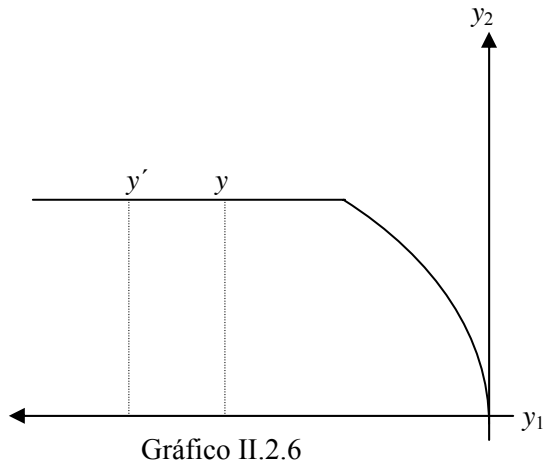
**2.2 Definición-producción débilmente eficiente.** Un vector  $y \in Y$  es débilmente eficiente si no hay otro vector  $y' \in Y$  tal que  $y' \gg y$  es decir,  $y'_h > y_h$  para todo  $h = 1, \dots, l$ .

**2.3 Proposición.** Todo punto eficiente  $y$  debe pertenecer a la frontera de  $Y$ , pero el recíproco no es cierto.

*Demostración*

Probamos en primer lugar que si  $y$  es un punto eficiente entonces debe pertenecer a la frontera del conjunto. En efecto supongamos  $y \notin \partial Y$ ; como  $y \in Y$ , entonces estamos afirmando que  $y \in \text{int}Y$ , en cuyo caso existe una bola de radio  $\varepsilon > 0$ ,  $B(y, \varepsilon)$ , que está contenida en  $Y$ . Sea  $y' = y + \frac{\varepsilon}{2}u$  con  $\|u\| = 1$ . Claramente  $y' \in B(y, \varepsilon) \subset Y$  e  $y' \gg y$ . Pero esto último es una contradicción con el hecho de que  $y$  es eficiente. Luego  $y \in \partial Y$ .

Mostramos que el recíproco no es cierto con un contraejemplo. Sea el siguiente grafo del conjunto de producción



$y' \in \partial Y$  y sin embargo no es eficiente. ■

**2.4 Proposición.** Si el conjunto de producción  $Y$  es cerrado y además satisface  $Y - \mathbb{R}_+^l \subset Y$ , entonces todo punto  $y$  es débilmente eficiente si y solo si pertenece a la frontera de  $Y$ .

*Demostración*

La demostración de que si  $y$  es débilmente eficiente implica que está en la frontera de  $Y$  es similar a la demostración de la Proposición 2.3. Probamos ahora que si  $y$  está en la frontera de  $Y$ , entonces es débilmente eficiente. Supongamos lo contrario, entonces existirá algún  $y' \in Y$  tal que  $y' \gg y$ , de donde se tiene que  $y \in \text{int}Y$ <sup>7</sup>, lo cual es una contradicción. ■

<sup>7</sup> Sea  $0 < \varepsilon = \min_h \{y'_h - y_h\}$ . Si  $y'' \in B(y, \varepsilon)$  entonces por la condición de eliminación libre  $y'' \in Y$ .



**2.5 Proposición.** Toda producción eficiente es débilmente eficiente. El recíproco no es cierto.

*Demostración.*

Sea  $y \in Y$  una producción eficiente, entonces no existe  $y' \in Y$  tal que  $y' \geq y$  e  $y' \neq y$ . Evidentemente  $y$  es débilmente eficiente. Que el recíproco no se cumple lo mostramos con un contraejemplo en  $\mathbb{R}^2$ .

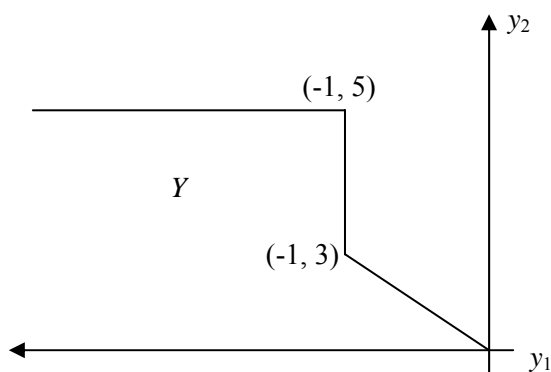


Gráfico II.2.7.

Vemos que no existe  $y' \in Y$  tal que  $y' \gg (-1, 3)$  pero si existe  $y'' = (-1, 5) \geq (-1, 3)$ . Por lo tanto  $(-1, 3)$  es débilmente eficiente pero no eficiente. ■

**2.6 Proposición.** Si  $y \in Y$  es un vector maximizador de beneficios para algún vector de precios con todas sus componentes positivas ( $p \gg 0$ ) entonces  $y$  es eficiente (y por tanto débilmente eficiente).

*Demostración.*

Véase Mas Colell et al. pg. 150. ■

**2.7 Proposición.** Supongamos que  $Y$  es convexo. Entonces toda producción eficiente (incluso débilmente)  $y \in Y$  es una producción maximizadora de beneficios para algún vector de precios  $p \geq 0$

*Demostración.*

Véase Mas Colell et al. pg. 151. ■

En el caso de que  $y$  sea débilmente eficiente, la demostración se sigue idénticamente a la anterior mostrando, primero, que el conjunto  $\{y' \in \mathbb{R}^l : y' \gg y\}$  tiene intersección vacía con el conjunto de producción  $Y$ . ■

A continuación exponemos los conceptos de eficiencia y eficiencia débil en la producción cuando consideramos al espacio  $L_\infty$ . Presentamos y demostramos algunas proposiciones vinculadas a dichos conceptos.

**2.8 Definición-producción eficiente.** Un vector  $y \in Y$  es eficiente si no hay otro  $y' \in Y$  tal que  $y' - y \gg 0$ , es decir  $y'(m) > y(m)$   $\mu$ -a.e. en  $M$ .

**2.9 Definición-producción débilmente eficiente.** Un vector  $y \in Y$  es débilmente eficiente si no hay otro vector  $y' \in Y$  tal que  $y' - y \in \text{int } L_\infty^+$ .

**2.10 Proposición.** Esta última definición es equivalente a decir que no existe un vector  $y' \in Y$  tal que  $y' \geq y + c\chi_M$  para ningún  $c > 0$ .

*Demostración.*

Por el contrarrecíproco, sea  $y' \in Y$  tal que  $y' \geq y + c\chi_M$  para algún  $c > 0$ . Sea  $\xi \in B(y' - y, c/2)$ , de modo que  $0 < y' - y - c/2\chi_M < \xi < y' - y + c/2\chi_M$ . Consecuentemente,  $y' - y \in \text{int } L_\infty^+$ .

A la inversa, supongamos que no existe un vector  $y' \in Y$  tal que  $y' \geq y + c\chi_M$  para ningún  $c > 0$  y asumamos que hay un vector  $y' \in Y$  con  $y' - y \in \text{int } L_\infty^+$ . Existe entonces un número real  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(y' - y, \varepsilon) \subset L_\infty^+$ . Consecuentemente  $y' - y - c\chi_M \in B(y' - y, \varepsilon)$  para  $0 < c < \varepsilon$ , lo cual es una contradicción. Luego no existe un vector  $y' \in Y$  con  $y' - y \in \text{int } L_\infty^+$ . ■

Los siguientes dos resultados se enuncian sin demostración.

**2.11 Proposición.** Toda producción eficiente es débilmente eficiente en dimensión infinita. El recíproco no es cierto.

**2.12 Proposición.** Cuando estamos en dimensión finita, ambos conceptos de producción eficiente coinciden.

**2.13 Definición-eliminación libre.** El conjunto de producción  $Y$  satisface la propiedad de eliminación libre si  $Y - L_\infty^+ \subset Y$ .

**2.14** Si  $Y$  cumple con la propiedad de eliminación libre entonces  $y \in \partial_\infty Y$  (en la topología de la norma) si y solo si  $(\{y\} + \text{int } L_\infty^+) \cap Y = \emptyset$

*Demostración*

Supongamos que  $y \in \partial_\infty Y$  y que  $(\{y\} + \text{int } L_\infty^+) \cap Y \neq \emptyset$ . Entonces existen  $u \in \text{int } L_\infty^+$  e  $y' \in Y$  tales que  $y + u = y'$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon \chi_M < u$ , entonces si  $\xi \in B(y, \varepsilon)$ , tendremos que  $\xi < y + \varepsilon \chi_M < y'$ . Por el supuesto de eliminación libre,  $\xi \in Y$ . Luego  $y \in \text{int } Y$ , una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $(\{y\} + \text{int } L_\infty^+) \cap Y = \emptyset$  y que  $y \notin \partial_\infty Y$ . En consecuencia existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(y, \varepsilon) \subset Y$ . Claramente  $y' = y + \frac{\varepsilon}{2} \chi_M \in B(y, \varepsilon)$ . Pero ello contradice que  $(\{y\} + \text{int } L_\infty^+) \cap Y = \emptyset$ . Luego  $y \in \partial_\infty Y$ . ■

3. Tarificación al costo marginal

**3.1 Definición-función de transformación.** La función de transformación  $F(\cdot)$  tiene la propiedad que  $Y = \{y \in \mathbb{R}^l : F(y) \leq 0\}$  y  $F(y) = 0$  si y solo si  $y$  es un elemento de la frontera de  $Y$ . En efecto  $\partial Y = \{y \in \mathbb{R}^l : F(y) = 0\}$  es la frontera de transformación.

**3.2 Propiedad.** Por la Proposición 19.23 de la Sección I del presente capítulo, si  $\pi > 0$  y  $\pi \in N_Y(\bar{y})$  entonces  $\pi = \lambda \nabla F(\bar{y})$  con  $\lambda > 0$ .

**3.3 Aplicación-tarificación al costo marginal.** Consideremos el caso de una firma que produce un solo bien. Usando la función de costos  $c(w, q)$ , donde  $w$  es el costo de mano de obra y  $q$  es la cantidad de producto, el problema de maximización de beneficios es

$$\text{Max}_{q \geq 0} \pi \cdot q - c(w, q)$$

La condición necesaria de primer orden es

$$\pi' - c'(w, \bar{q}) \leq 0 \text{ y } \pi' - c'(w, \bar{q}) = 0 \text{ si } \bar{q} > 0$$

Así, en un óptimo interior los precios igualan al costo marginal. De esta manera, si la firma produce un único bien tendremos que  $\bar{\pi} = \lambda \nabla F(\bar{y}) = c'(w, \bar{q}) = 0$ , por lo que  $\bar{\pi} = \lambda \nabla F(\bar{y})$  será equivalente a decir que es un precio proporcional al costo marginal para una solución interior.

*Observación.* Notemos que en la condición de primer orden en el problema de maximización de beneficios es apropiado usar el término “tarificación o precio al costo marginal” cuando consideramos el caso de un solo producto (incluso, un solo insumo). Si son más productos ya no tenemos la igualdad  $\bar{\pi} = \lambda \nabla F(\bar{y}) = c'(w, \bar{q}) = 0$  por lo que la terminología resultaría inapropiada. No obstante, dado que esta definición es estándar, la seguiremos usando (Mas Colell et al. pg. 571, nota al pie 25).

3.4 *Definición-equilibrio con tarificación al costo marginal.* La asignación  $\left((x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n\right) \in L^{m+n}$  y el vector de precios  $\bar{\pi} \in \mathbb{R}^l$  constituyen un equilibrio con tarificación al costo marginal si

(a) Para toda empresa  $j = 1, \dots, n$

$$\bar{\pi} = \lambda \nabla F(\bar{y})$$

(b) Para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $\bar{x}_i$  es  $\succsim_i$ -maximal en el conjunto presupuestario  $\{x_i \in X_i : \pi \cdot x_i \leq \pi \cdot \omega_i\}$

$$(c) \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \sum_{i=1}^m \bar{\omega}_i$$

Equivalentemente podemos reescribir al punto (a) como

$$\pi \in N_Y(\bar{y}) \text{ (Quinzii, (1992), pgs. 24 y 40)}$$

#### 4. Conceptos, teoremas, proposiciones y resultados varios en la teoría del equilibrio general, en la economía del bienestar y en el equilibrio social.

4.1 *Definición-óptimo de Pareto.* Una asignación factible  $\left((x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n\right) = (x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$  es un óptimo de Pareto si no existe otra asignación factible  $\left((x'_i)_{i=1}^m, (y'_j)_{j=1}^n\right)$  tal que  $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$  para todo  $i = 1, \dots, m$  y  $u_i(x'_i) > u_i(x_i)$  para algún  $i$ .

4.2 *Definición-equilibrio competitivo; cuasi-equilibrio.* La asignación factible  $(x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$  y el vector de precios  $p \in \mathbb{R}^l$  constituyen un equilibrio competitivo o walrasiano si se cumple con<sup>8</sup> (a) la maximización de la utilidad de cada consumidor (b) la maximización de beneficios por parte de cada productor, y (c) la demanda total es igual a la oferta total más la suma total de los recursos iniciales. Si en la definición anterior sustituimos (a) por (a'): Para todo  $i$ , si  $x_i \succ_i x_i^*$  entonces  $p \cdot x_i \geq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ , donde  $p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot y_j^*$  es el presupuesto total del  $i$ -ésimo consumidor, entonces tenemos la definición de cuasi-equilibrio.

4.3 *Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar.* Si las preferencias de los consumidores son localmente no saciadas, y si el precio  $p^*$  y la asignación  $\left((x_i^*)_{i=1}^m, (y_j^*)_{j=1}^n\right)$  constituyen un equilibrio competitivo, entonces esta asignación es un óptimo de Pareto.

<sup>8</sup> En (a) y en (b) tengamos presente que dichas maximizaciones son sujetas a las restricciones presupuestarias y tecnológicas del consumidor y productor respectivamente.

**4.4 Segundo Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar.** Sea una economía especificada por  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, (\omega)_{i=1}^m \right)$ . Supongamos que todo conjunto  $Y_j$  es convexo y que toda relación de preferencias  $\succsim_i$  es convexa y localmente no saciada. Entonces para toda asignación Pareto óptima  $\left( (x_i^*)_{i=1}^m, (y_j^*)_{j=1}^n \right)$ , hay un vector de precios  $p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$  distinto de cero, tal que  $\left( (x_i^*)_{i=1}^m, (y_j^*)_{j=1}^n, p \right)$  representa un cuasi-equilibrio.

A continuación veamos estos conceptos en espacios de dimensión infinita  $L$ . Nos basamos en Becker (1991) quien a su vez extiende algunos resultados de Debreu (1954)

**4.5 Definición-óptimo de Pareto.** Una asignación factible  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  es un óptimo de Pareto si no existe otra asignación factible  $\left( (x'_i)_{i=1}^m, (y'_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  tal que  $x'_i \succsim_i x_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$  y  $x'_i \succ_i x_i$  para algún  $i$ .

**4.6 Definición-óptimo débil de Pareto.** Una asignación factible  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  es un óptimo débil de Pareto si no existe otra asignación factible  $\left( (x'_i)_{i=1}^m, (y'_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  tal que  $x'_i \succ_i x_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

**4.7 Proposición.** Si la asignación factible  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  es un óptimo de Pareto entonces es un óptimo de Pareto débil. El recíproco no es cierto.

La demostración de la anterior proposición es inmediata.

**4.8 Definición-valoración del equilibrio.** Una asignación factible  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  es una valoración del equilibrio con respecto a  $\pi$  si (a) para todo  $i$ ,  $x_i \in X_i$ ,  $\pi(x_i) \geq \pi(x'_i)$  implica que  $x_i \succsim_i x'_i$  y (b) cada productor maximiza beneficios al precio  $\pi$ .

**4.9 Definición-precios soporte.** Una asignación factible  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  se dice soportada por un vector de precios  $\pi \in L^*$  si (a) a ese nivel de precios, cada productor maximiza sus beneficios y (b)  $x_i \succsim_i x'_i$  implica  $\pi(x_i) \geq \pi(x'_i)$ .

**4.10 Teorema.** Sea la asignación factible  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$  que es, además, una valoración del equilibrio con respecto a  $\pi$ . Si para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $X_i$  es convexo y las preferencias son estrictamente convexas, entonces dicha asignación constituye un óptimo de Pareto si ningún  $x_i$  es un punto de saturación.

*Demostración.*

Véase Debreu (1954) pgs. 589-590. ■

4.11 *Teorema.* Sea la asignación factible  $\left((x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n\right) \in L^{m+n}$  que es un óptimo de Pareto. Si alguna  $x_i$  no es un punto de saturación y se cumple que (a) para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $X_i$  es convexa, (b) las preferencias cumplen con el axioma débil de continuidad<sup>9</sup>, (c)  $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$  es un conjunto convexo y (d)  $Y$  tiene un punto interior, entonces existe una funcional  $\pi \in L^*$  que es soporte de la anterior asignación.

*Demostración.*

Véase Debreu (1954) pgs. 590-591. ■

*Observaciones.* Notemos que el supuesto (c) es más débil que suponer que cada conjunto  $Y_j$  es convexo. Si  $L$  es de dimensión finita entonces el supuesto (d) se cumple automáticamente. En algunos espacios lineales apropiadamente escogidos, el supuesto de eliminación libre implica que se cumpla el supuesto (d), como demuestra Debreu (1954) pg. 591 (véase el Capítulo Segundo, Subsecciones 1.2.1 y 1.5.2)

Pasamos de los resultados principales de la economía del bienestar en dimensión infinita a conceptos vinculados con las preferencias

4.12 *Definición-preferencias propias.* La relación de preferencias es propia en  $x \in L_+$  si existe un vector  $v \geq 0$  y un entorno abierto del origen  $V$  tal que para  $\alpha > 0$ ,  $z \in L$  y  $x - \alpha v + z \succsim x$ , implica  $z \notin \varepsilon V$ <sup>10</sup>

En palabras: la condición de preferencias propias sobre  $x$  dice que  $v$  es deseable en el sentido de que no es posible compensar una caída de  $\alpha v$  con una cantidad  $z$  que es demasiado pequeña. En otros términos, la tasa marginal de sustitución entre  $z$  y  $v$  es acotada y mayor que cero. Una demostración rigurosa de esta última afirmación puede encontrarse en Besada y Vázquez (1999).

4.13 *Definición-preferencias uniformemente propias.* Diremos que  $\succsim$  es uniformemente propia si  $\succsim$  es propia en todo  $x \in L_+$  y  $v, \varepsilon$  y  $V$  pueden escogerse independientemente de  $x$ .

A continuación veamos los significados geométricos de las definiciones anteriores

---

<sup>9</sup> Sean  $x', x''$  puntos de  $X$ ; y definase al conjunto  $I(x', x'') = \{t : [(1-t)x' + tx''] \in X\}$ . El concepto de continuidad débil es el siguiente: para todo  $x, x', x''$  en  $X$ , los conjuntos  $\{t \in I(x', x'') : (1-t)x' + tx'' \succsim x\}$  y  $\{t \in I(x', x'') : x \succsim (1-t)x' + tx''\}$  son cerrados en  $I(x', x'')$ .

<sup>10</sup> Cabe aclarar que  $\varepsilon$  depende de  $\alpha$  y  $V$  de  $x$ .

4.14 *Definición-preferencias propias (versión geométrica)*. La relación de preferencias es propia en  $x \in L_+$  con relación al vector  $v \geq 0$  si existe un cono abierto en cero  $C$  que contiene a  $v$  tal que  $(x - C) \cap \{x' \in L_+ : x' \succsim x\} = \emptyset$

4.15 *Definición-preferencias uniformemente propias (versión geométrica)*. Diremos que  $\succsim$  es uniformemente propia con relación a  $v \geq 0$  si  $\succsim$  es propia para todo  $x \in L_+$  y  $C$  no depende de  $x$ .

4.16 *Resultado 1*. Las definiciones 14.12 y 14.14 son equivalentes.

#### *Demostración*

La demostración de que la Definición 14.12 implica la Definición 14.14 puede verse en Chichilnisky (1993) página 180, nota 9. Veamos a continuación el recíproco. Como  $v \in C$  entonces  $\alpha v \in C, \alpha > 0$ , de modo que  $x - \alpha v \notin \{x' \in L_+ : x' \succsim x\}$ . Como  $x - C$  es abierto, entonces existe un entorno abierto  $V$  de cero apropiadamente escogido y un número real  $\varepsilon > 0$  (el cual depende de  $\alpha$ ) tal que

$$\{(x - \alpha v) + \varepsilon V\} \cap \{x' \in L_+ : x' \succsim x\} = \emptyset.$$

Luego si  $z \in \varepsilon V$  entonces  $x - \alpha v + z \not\succsim x$  o lo que es equivalente, si  $x - \alpha v + z \succsim x$  entonces  $z \notin \varepsilon V$ . ■

4.17 *Resultado 2*. Las definiciones 14.13 y 14.15 son equivalentes.

*Demostración*. Consiste una aplicación directa de la demostración del Resultado 1.

Estos conceptos, introducidos primariamente por Mas Colell (1986a y 1986b) y refinados por otros autores, han tenido el objeto de que una asignación factible, que sea Pareto óptima, e incluso débilmente óptima, garantice la existencia de precios soporte, cuando el cono positivo tiene interior vacío en la topología de la norma (véase Capítulo Segundo, Subsección 1.5.2). ■

4.18 *Segundo Teorema de la Economía del Bienestar*. Sea una economía definida en el sistema de Riesz dual  $(E, E^*)$ . Si asumimos que la topología  $\tau$  (o sea, aquella para la cual  $E^*$  es el dual topológico de  $E$ ) es localmente convexa y sólida y que las preferencias son uniformemente  $\tau$ -propias, monótonas y convexas, entonces para toda asignación factible que es un óptimo débil de Pareto existirá un funcional  $\pi \in E^*$  que es soporte de dicha asignación.

*Demostración*: Véase Mas Colell (1986b pg. 1048), Aliprantis, Brown y Burkinshaw (1989 pgs. 220-223), Becker (1991 pgs. 147 y 148). ■

El teorema anterior resulta válido para el caso de una economía de intercambio puro. En el caso de una economía con producción, si el interior del cono positivo de un espacio lineal es vacío también lo será el interior del conjunto de producción de manera que no podrán aplicarse los teoremas de separación necesarios para demostrar la maximización de beneficios. Por este motivo se necesita introducir nuevamente algún tipo de condición de propiedad en los conjuntos de producción. Antes de ello veremos una variante de la misma en el caso de las preferencias completas, convexas y transitivas.

**4.19 Resultado 3.** La condición de preferencias uniformemente propias es equivalente a que existe un vector deseable  $v \geq 0$  y un entorno abierto del cero  $V$ , tal que si  $x, x' \in L_+$  pero  $x' \notin \{w : w \succsim x\}$  entonces  $x' - \varepsilon v + z \succsim x$  implica  $z \notin \varepsilon V$  para todo  $\varepsilon > 0$ <sup>11</sup>.

*Demostración.*

Primero mostraremos que la Definición 4.13 implica esta última. Supongamos que  $x' - \varepsilon v + z \succsim x$  y  $z \in \varepsilon V$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Como las preferencias son completas tendremos que  $x \succ x'$ . Consecuentemente, por transitividad,  $x' - \varepsilon v + z \succ x'$  y  $z \in \varepsilon V$  lo cual contradice la Definición 4.13.

Recíprocamente, sea  $x' \notin \{w : w \succsim x\}$  tal que si  $x' - \varepsilon v + z \succsim x$  entonces  $z \notin \varepsilon V$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Supongamos que  $x - \varepsilon v + z \succsim x$  y  $z \in \varepsilon V$  para algún  $\varepsilon > 0$  o sea, no se cumple la Definición 4.13. Dado que  $V$  es abierto, tendremos que  $\|z\| < \varepsilon \|V\|$ . Ahora bien, para todo  $n \in \mathbb{N}$   $\varepsilon v = \frac{1}{n} \varepsilon v + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon v$  y además tenemos que  $x - \frac{1}{n} \varepsilon v \notin \{w : w \succsim x\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  ya que  $v$  es un bien deseable. De allí se sigue que  $\left(x - \frac{1}{n} \varepsilon v\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon v + z \succsim x$  implica  $z \notin \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon V$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  o sea  $\|z\| > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon \|V\|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando límites  $\|z\| \geq \varepsilon \|V\|$ , lo cual es una contradicción con lo que habíamos obtenido previamente. ■

A partir de esta versión modificada de la condición de preferencias uniformemente propias, reemplazamos  $L_+$  por  $Z$  y  $\{w : w \succsim x\}$  por  $Y$  de modo que tenemos la siguiente definición para el sector productivo

**4.20 Definición.** Sea  $Z \subset L$  una *pre-tecnología*, el cual es un conjunto cerrado, convexo, conteniendo al origen y satisfaciendo la condición de eliminación libre, además de ser un subreticulado. Sea  $Y \subset Z$  el conjunto de producción que es cerrado, convexo, contiene al 0 y satisface también el supuesto de eliminación libre. Diremos que el par  $(Z, Y)$  es *uniformemente propio* si existe un vector  $v \geq 0$  y un entorno abierto del cero,  $V$ , tal que si  $y \in Z$  e  $y \notin Y$  se tiene que, para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $y + \varepsilon v + z \in Y$  solo si  $z \notin \varepsilon V$ .

<sup>11</sup> Aquí estamos usando una versión ligeramente diferente de preferencias propias y uniformemente propias a las dadas en 4.12 y 4.13 respectivamente. Concretamente la definición toma  $\alpha = \varepsilon$ .



En palabras: si y no es producible (pero es una combinación input-output concebible) y le sustraemos una cantidad significativa de insumos, entonces no podrá producirse si se le agrega un vector que es comparativamente muy pequeño. En otros términos, para que y sea producible se requiere que la tasa marginal de sustitución técnica de  $v$  por  $z$  sea acotada y mayor que cero.

Con este supuesto aplicado a todas las empresas, junto con el referido a las preferencias de cada consumidor, Mas-Colell prueba la existencia de un vector de precios no nulo que soporta una asignación débilmente Pareto óptima en el caso de una economía con producción (Mas-Colell (1986a) pg. 324; véase también Becker (1991), pg. 149)

4.21 *Equilibrio social y espacio de distribuciones.* Consideremos como espacio de dimensión infinita al estudiado por Olivera (1994) tratando el problema más general del equilibrio social<sup>12</sup>. El autor utiliza al espacio de las distribuciones definido en la Sección I, 21. Los conceptos allí giran a los de acciones, acciones técnicamente posibles, acciones económicamente factibles, preferencias, etc. En este trabajo, similar en cuanto a estructura a una economía de intercambio, pero más extensivo desde el punto de vista conceptual, el equilibrio social es un elemento  $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$  tal que para cada  $i \in I$  vale

$$(1) \bar{x}_i \in clA_i(\bar{x})$$

$$(2) P_i(\bar{x}) \cap A_i(\bar{x}) = \emptyset$$

Donde  $X_i$  es el conjunto de acciones técnicamente posibles para  $i$ ;  $A_i$  es el subconjunto de acciones económicamente factibles para  $i$ ;  $P_i$  es el subconjunto de acciones estrictamente preferidas por  $i$  y  $x_i^*$  es la acción óptima para  $i$ , en el sentido de que  $i$  no tiene ninguna alternativa preferida y factible.

Además de tratarse de un espacio infinito-dimensional, las distribuciones tienen la ventaja de contemplar trayectorias discontinuas, es decir, aquellas vinculadas en el largo plazo, donde los ajustes estructurales predominan sobre los marginales. En el Capítulo Segundo, cuando estudiemos los espacios de dimensión infinita, volveremos sobre el espacio de las distribuciones.

Finalizamos esta subsección con algunos conceptos usuales en la teoría del equilibrio general y el núcleo. En los ítems 4.22-4.26 de abajo, asumimos que el espacio de bienes es  $\mathbb{R}^I$ .

4.22 *Definición-coalición.* Sea  $I$  el conjunto de  $m$  consumidores. Cualquier subconjunto no vacío de consumidores  $E \subset I$  es una coalición. El conjunto de todas las coaliciones lo denotamos por  $\mathcal{E}$ .

4.23 *Definición.* Una coalición  $E \subset I$  puede mejorar una asignación  $(\tilde{x}_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}_+^{lm}$  si, para cada  $i \in E$ , podemos encontrar un consumo  $x_i \geq 0$  que satisface:

<sup>12</sup> La noción de equilibrio social comprende tanto las operaciones de mercado como las no mercantiles.

- (i)  $x_i \succ_i \tilde{x}_i$  para cada  $i \in E$   
(ii)  $\sum_{i \in E} x_i \in Y + \left\{ \sum_{i \in E} \omega_i \right\}$

4.24 *Definición-núcleo.* El núcleo de una economía es el conjunto de todas las asignaciones de dicha economía que no pueden ser mejoradas por ninguna coalición de  $E$ .

4.25 *Proposición.* Cualquier asignación que sea un equilibrio walrasiano satisface la propiedad del núcleo.

*Demostración.* Véase Mas-Colell et al. (1995) pgs. 654-655.

4.26 *Definición-réplica de una economía.* Sea el conjunto  $\{1, \dots, R\}$  que indexa a los tipos de consumidores. Cada tipo  $r$  tiene una relación de preferencias  $\succsim_r$  y una dotación inicial igual a  $\omega_r$  ( $r=1, \dots, R$ ). Para cada entero  $n > 0$ , se define la  $n$ -réplica de la economía como una economía compuesta de  $n$  consumidores de cada tipo. En este caso, el total de consumidores será  $nR$ .

Gabszewicz (1968) obtiene resultados interesantes que relacionan al núcleo de una economía con el equilibrio competitivo cuando el espacio de bienes tiene dimensión infinita. Mertens (1991) y Hildenbrand (1974) hacen lo propio considerando un continuo de agentes aunque solo el primero considera infinitos bienes.

## 5 Externalidades

5.1 *Definición-externalidad.* Una externalidad está presente si la *buena conducta* de un consumidor o la posibilidad de producción de una firma está directamente afectada por las acciones de otros agentes en la economía. Al decir *directamente* excluimos todas aquellas actividades en las que median los precios<sup>13</sup>. Ello permite estudiar, en el marco de la teoría económica, situaciones en las que el comportamiento de un agente se ve afectado por la conducta del resto, incluido el gobierno. Esto es, *per se*, un aspecto de suma importancia.

A continuación veamos como funciona el fenómeno de la externalidad en el comportamiento de un consumidor y una empresa. A tales efectos, sea  $h \in \mathbb{R}_+^l$  una acción tomada por el agente 1 que afecta al buen comportamiento del agente 2, tenemos así que  $h$  genera una externalidad. Sea entonces

$$\begin{aligned} v_i(p, w_i, h) &= \max_{x_i \geq 0} u_i(x_i, h) \\ &\text{s.a } p \cdot x_i \leq w_i \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

Supongamos que la función de utilidad toma la siguiente forma respecto del bien numerario:  $v_i(p, w_i, h) = \phi_i(p, h) + w_i$ . Dado que la externalidad no afecta directamente

<sup>13</sup> Mas-Colell et al. (1995) definición 11.B.1 pp. 352-353.

a los precios relativos sino que solamente a la conducta del agente, podemos escribir a la utilidad en términos solamente de dicha externalidad como  $\phi_i(h)$ . A los fines del análisis asumiremos que  $\phi_i(h)$  es dos veces diferenciable y que  $\phi_i''(h) < 0$ . Análogamente, en el caso del productor podemos obtener una función de beneficios derivada  $\pi_j(h)$ .

**5.2 Proposición.** Las posiciones de equilibrio ante la presencia de externalidades no son necesariamente óptimas.

Sigamos con el ejemplo anterior con una economía con dos consumidores concretamente<sup>14</sup>. Supongamos que nos encontramos en una situación de equilibrio competitivo, de modo que nuestros dos consumidores maximizan su utilidad limitada solo a sus niveles de riqueza y a los precios de los bienes. Sea entonces  $h \geq 0$  la acción que emprende el consumidor 1 de modo que maximiza  $\phi_1(h)$ . Así, el nivel de equilibrio de  $h$ ,  $\bar{h}$ , satisface la condición necesaria y suficiente de primer orden

$$\phi_1'(\bar{h}) \leq 0 \text{ con igualdad si } \bar{h} > 0$$

para una solución interior tenemos por tanto que  $\phi_1'(\bar{h}) = 0$ .

En contraste, en una asignación Pareto óptima, el nivel de equilibrio de  $h$ ,  $h^0$ , debe maximizar el excedente conjunto de los dos consumidores. Por tanto,  $h^0$  debe resolver<sup>15</sup>

$$\max_{h \geq 0} \phi_1(h) + \phi_2(h)$$

la condición necesaria y suficiente para  $h^0$  será

$$\phi_1'(h^0) \leq -\phi_2'(h^0), \text{ con igualdad si } h^0 > 0.$$

de allí, para una solución interior al problema de optimalidad de Pareto,  $\phi_1'(h^0) = -\phi_2'(h^0)$ .

Cuando los efectos externos están presentes, tal que  $\phi_2'(h) \neq 0$  para todo  $h$ , el nivel de equilibrio de  $h$  no es óptimo a menos que  $h^0 = \bar{h} = 0$ . Veamos por qué; consideremos, por ejemplo, el caso en que existen soluciones interiores, esto es, donde  $(h^0, \bar{h}) > (0, 0)$ .

Si  $\phi_2'(\cdot) < 0$  tal que  $h$  genera una externalidad negativa, entonces tenemos que  $\phi_1'(h^0) = -\phi_2'(h^0) > 0$ ; dado que  $\phi_1'(\cdot)$  es decreciente y  $\phi_1'(\bar{h}) = 0$ , esto implica que  $h^0 < \bar{h}$ , y viceversa si  $\phi_2'(\cdot) > 0$ . Así tenemos que en  $h^0$ , el agente 1 no está maximizando su utilidad (pues  $h^0 \neq \bar{h}$ ), de allí que con externalidades no existe, en general, un equilibrio óptimo. A una conclusión similar arribamos si en lugar de consumidores tratamos con productores y en lugar de funciones de utilidades

<sup>14</sup> *Ibid*, pgs. 353-354.

<sup>15</sup> *Ibid* pg. 353 nota 4.

consideramos funciones de beneficios. Por otro lado, si bien aquí lo hemos tratado para dos consumidores, las conclusiones se mantienen en el caso general de  $n$  agentes.

## 6. Externalidades y tecnologías no convexas.

Veamos algunos ejemplos que muestran como las externalidades pueden ser causa de rendimientos crecientes y de tipos más generales de no convexidad

### Ejemplo II.6.1

Sea una firma que produce un solo bien,  $y_2$ , y utiliza un solo insumo variable  $y_1$ . El conjunto de producción está dado por

$$Y = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0, y_2 \leq \sqrt{-y_1} \right\}$$

Supongamos que en los insumos se detectó la presencia de un cierto factor  $x$  con una concentración media  $\varsigma$  que afecta al rendimiento medio de aquellos. No obstante, los técnicos de producción advierten que el impacto que tiene dicho factor disminuye conforme la producción se hace más intensiva en la utilización del insumo  $y_1$ . La conclusión a la que arriban es la siguiente: Si  $y_1 \in (y_{1a}, 0]$  entonces  $y_2 \leq \sqrt{-y_1(1-\varsigma)}$ , si  $y_1 \in (y_{1b}, y_{1a}]$  entonces  $y_2 \leq \sqrt{-y_1(1-\varsigma)^2}$ , si  $y_1 \in (y_{1c}, y_{1b}]$  entonces  $y_2 \leq \sqrt{-y_1(1-\varsigma)^4}$  y si  $y_1 \leq y_{1c}$  entonces  $y_2 \leq \sqrt{-y_1}$ , es decir el insumo deja de estar prácticamente afectado con el factor  $x$ . En este caso, el conjunto de producción será

$$Y(\varsigma) = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq 0, y_2 \leq \sqrt{-f(\varsigma, y_1)} \right\}$$

donde

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$  está dada por

$$f(\varsigma, y_1) = \begin{cases} y_1(1-\varsigma) & \text{si } y_1 \in (y_{1a}, 0] \\ y_1(1-\varsigma)^2 & \text{si } y_1 \in (y_{1b}, y_{1a}] \\ y_1(1-\varsigma)^4 & \text{si } y_1 \in (y_{1c}, y_{1b}] \\ y_1 & \text{si } y_1 \leq y_{1c} \end{cases}$$

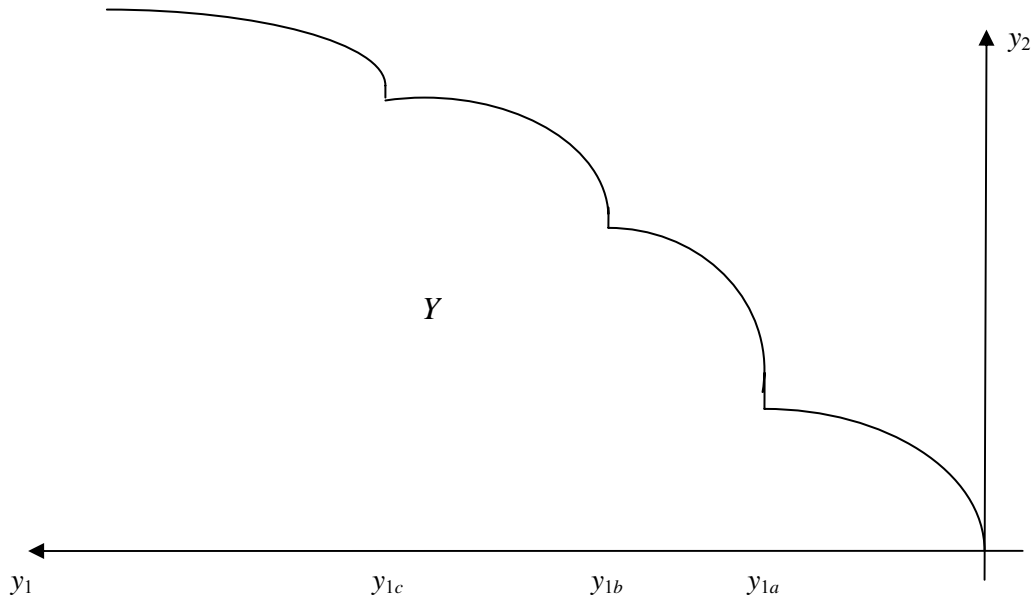


Gráfico II.6.1

Notemos que si  $\varsigma = 0$  es decir, si no hay externalidades, entonces el conjunto de producción es convexo, con rendimientos decrecientes, como se ilustra abajo

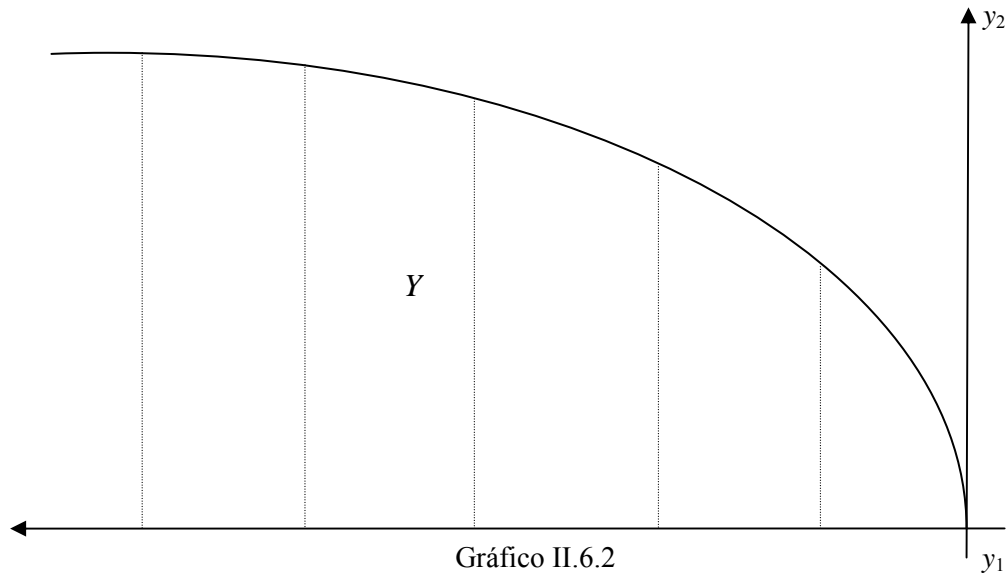


Gráfico II.6.2

*Ejemplo II.6.2.* Externalidades y rendimientos crecientes.

Sea la función de producción de Cobb-Douglas

$$y = AL^{\alpha(h)}K^{\beta}$$

El producto marginal del capital,  $\beta$ , pertenece al intervalo abierto  $(0, 1)$  en tanto que el correspondiente al trabajo está dado por la función

$$\alpha : [0, 1] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

definida por

$$h \mapsto \alpha(h) = 1 - \beta + h/10$$

Notemos que si  $h = 0$ , es decir, si no existen externalidades, entonces la función de producción tiene rendimientos constantes a escala. Pero tan pronto como aparezcan las externalidades, o sea si  $h > 0$ , entonces la empresa tiene rendimientos crecientes a escala.

El ejemplo II.6.2 podría ser el caso de una medida gubernamental de incentivos a los trabajadores que trae como resultado una expansión del 10% ( $\alpha'(h) = 1/10$ ) en el producto marginal del trabajo.

## CAPÍTULO SEGUNDO: EL ESTADO DEL ARTE

Nos proponemos en este capítulo analizar el estado de la teoría del equilibrio general con relación a 1. los espacios de dimensión infinita, 2. las tecnologías no convexas, 3. la presencia de externalidades y 4. los modelos que combinan varios de los puntos anteriores. El propósito del análisis es estudiar profundamente estas áreas de la teoría a fin de vislumbrar tanto los avances que se han hecho como los tópicos que aún han quedado sin explorar. Particularmente interesante es este último aspecto puesto que tiene conexión directa con el Capítulo Tercero de la presente tesis.

Aunque mencionamos que haremos un estudio profundo de las diferentes aportaciones realizadas en las cuatro áreas indicadas anteriormente, el análisis no será lo suficientemente exhaustivo como para ver *todos* los modelos propuestos. En su lugar, nos concentramos en aquellos que han sido los más relevantes<sup>16</sup> desde el punto de vista de que han sido papers seminales y/o han impulsado investigaciones ulteriores y/o constituyen la frontera del conocimiento en determinada área de la teoría del equilibrio general. En algunos modelos hemos dejado la notación original del/la autor/a o de los autores, mientras que en otros la hemos cambiado por cuestiones de conveniencia. Al igual que lo dicho en el Capítulo Primero, en general solo demostramos los lemas, proposiciones, teoremas, corolarios, etc. que los autores de los trabajos considerados no hayan hecho. Si tales demostraciones ya se encuentran en el paper original remitiremos al lector a dicha fuente.

### 1. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con espacios de dimensión infinita

Repasamos en este apartado las principales contribuciones a la teoría del equilibrio general con infinitos bienes. Veremos, entre otros, cuáles han sido los trabajos pioneros, por qué son tan importantes estos espacios en la economía teórica, qué métodos se han seguido para probar la existencia, qué limitaciones presentan y cuáles han sido los intentos por remediar dichas deficiencias.

#### 1.1 Espacios considerados<sup>17</sup>

Los espacios que generalmente se han utilizado para modelizar al espacio de bienes o de precios han sido los siguientes

##### 1.1.1 Espacios de sucesiones

- El espacio de las sucesiones absolutamente sumables  $l_1$

$$x \in l_1 \text{ si } \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \text{ donde } x = (x_1, x_2, \dots)$$

Por caso Zame (1987), ejemplos 1-4, utiliza este espacio para los bienes.

---

<sup>16</sup> También comentaremos trabajos y publicaciones que, a criterio del tesista, han sido importantes en su proceso de formación.

<sup>17</sup> En este capítulo y en el siguiente, el cuerpo de los escalares estará restringido a los números reales.

- El espacio de las sucesiones reales sumables al cuadrado  $l_2$

$$x \in l_2 \text{ si } \|x\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ donde } x = (x_1, x_2, \dots)$$

- Más generalmente, los espacios  $l_p$ ,  $0 < p < \infty$

$$x \in l_p \text{ si } \|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Véase Jones (1984) ejemplo 9 y Más-Colell-Zame (1991) ejemplo 6.5.

- El espacio de las funciones esencialmente acotadas  $l_{\infty}$

$$x \in l_{\infty} \text{ si } \|x\|_{\infty} = \sup_t \text{esen } x < \infty$$

donde  $\sup \text{esen } x = \inf \{M > 0 : |x_t| \leq M \text{ c.t.p.}\}$

Noguchi (1997b) utiliza este espacio de sucesiones como espacio de bienes

### 1.1.2 Espacios de funciones

- El espacio de clases de equivalencia de funciones medibles e integrables sobre un espacio de medida  $\sigma$  – finito  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

Yannelis (1991) usa este espacio en el capítulo sobre integración de correspondencias.

- El espacio de clases de equivalencia de funciones medibles e integrables al cuadrado sobre un espacio de medida  $\sigma$  – finito  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $L_2(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

Espacio muy usado en economía financiera y/o con incertidumbre (Duffie y Huang (1985))

- Más generalmente, el espacio de clases de equivalencia de funciones medibles y  $p$ - integrables sobre un espacio de medida  $\sigma$  – finito  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $L_p(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

Cuong Le Van y Duc Ha Truong Xuan (2001), R. A. Dana y C. Le Van (1996) y Le Van (1996) son ejemplos de usos de estos espacios.

- El espacio de clases de equivalencia de funciones medibles esencialmente acotadas sobre un espacio de medida  $\sigma$  – finito  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $L_{\infty}(M, \mathcal{M}, \mu)$

El paper seminal de Bewley (1972), Magill (1981) y Bonnisseau y Meddeb (1999), entre otros, utilizan este espacio.

- El espacio de las funciones reales y continuas sobre un conjunto compacto en la topología métrica



$x \in C(K)$  si  $x: K \mapsto \mathbb{R}$  y  $K$  es un conjunto compacto en la topología métrica

Es el espacio donde se hallan los precios en economías que formalizan bienes altamente diferenciados como veremos más adelante

### 1.1.3 Espacios de medidas

- El espacio de medidas de Borel numerablemente aditivas y finitas sobre un espacio métrico y compacto  $ca(K)$

$x \in ca(K)$  si  $x: \mathcal{B}_K \mapsto \mathbb{R}$  y  $x$  es una medida signada y  $\sigma$ -finita.

Este espacio es utilizado en modelos con diferenciación de bienes tal como Mas-Colell (1975) y Jones (1984)

### 1.1.4 Espacios vectoriales topológicos de Riesz

Con la topología de la norma, los anteriores espacios son casos especiales de espacios vectoriales de Riesz (en realidad reticulados de Banach ya que además son completos en la topología inducida por la norma). Por ese motivo, varios papers han tratado de generalizar los resultados de esos espacios a reticulados de Banach. Algunos ejemplos son Aliprantis y Brown (1983), Khan (1984), Yannelis y Zame (1986), Mas Colell (1986a y b), Zame (1987), Jones (1987), Richard (1989), Araujo y Monteiro (1989), Podczeck (1996) y (2005), Aliprantis, Border y Burkinshaw (1997), Besada et al. (2002), Aliprantis, Florenzano y Tourky (2004) y (2006), Araujo, Martins da Rocha y Monteiro (2004) entre otros.

### 1.1.5 Espacio de distribuciones

Otro espacio de dimensión infinita que se ha utilizado en la teoría económica es el espacio de las distribuciones (Capítulo Primero, Sección I, 21). Fundamental ha sido el aporte del profesor Olivera (1984), (1986), (1988), (1990a y b), (1992), (1993), (1994) y (1997). La importancia de estos espacios es tanto económica como matemática. Desde el punto de vista económico, las distribuciones o funciones generalizadas permiten tener en cuenta los cambios graduales combinados con trayectorias discontinuas. Tengamos presente que los ajustes marginales predominan en períodos breves, pero a largo plazo los ajustes estructurales son la fuerza motriz que impulsa la expansión (Olivera (1993)). Por el lado estrictamente matemático, estos espacios contienen<sup>18</sup>, como espacios vectoriales, a los espacios  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $L_2(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $C(K)$  y  $ca(K)$  (Olivera (1997)). Además de ello, las distribuciones poseen características y propiedades deseables frente a problemas típicos de la teoría del equilibrio general en espacios infinito-dimensionales como veremos más adelante.

## 1.2 Los primeros trabajos

Entre los primeros trabajos académicos que incorporan espacios de dimensión infinita tenemos a Debreu (1954), Gabszewicz (1968), Peleg y Yaari (1970), Bewley (1972) y

<sup>18</sup> En el caso de distribuciones de Schwartz con soporte arbitrario.

Lucas y Prescott (1972). Dejaremos el trabajo de Bewley para una ulterior sección y analizaremos brevemente los otros trabajos mencionados

### 1.2.1 Debreu (1954)

En este trabajo, titulado *Valuation Equilibrium and Pareto Optimum*, Debreu trabaja con un espacio vectorial topológico  $L$ .

- \_ Existen  $i = 1, \dots, m$  consumidores y cada uno tiene un conjunto de consumo  $X_i \subset L$
- \_ Una corriente de consumo es un vector  $x_i \in X_i$  donde  $x_i$  describe completamente las cantidades (positivas) de bienes que el agente consume y las cantidades (negativas) de los varios tipos de trabajos que el consumidor produce.
- \_ Existe sobre  $X_i$  un orden de preferencias denotado por  $\succsim_i$
- \_ Existen  $j = 1, \dots, n$  productores y cada uno tiene un conjunto de producción  $Y_j \subset L$ . Dicho conjunto está determinado por las limitaciones tecnológicas.
- \_ El  $j$ -ésimo productor escoge el vector  $y_j \in Y_j$  que denota la producción (describe completamente todos sus outputs –positivos- y todos sus inputs –negativos-)
- \_ Sea  $\omega \in L$  los recursos exógenos totales disponibles (incluyendo el capital al momento inicial). Sea  $\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j = \omega$  el consumo neto de todos los consumidores y productores juntamente. Si la asignación  $\left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right)$  satisface la igualdad anterior, entonces se dice que es factible.
- \_ Los precios  $p$  son funcionales lineales definidas sobre  $L$ , es decir  $p \in L^*$ .

En este trabajo Debreu analiza las condiciones bajo las cuales se cumplen los dos teoremas de la economía del bienestar. La demostración del primero de estos utiliza un argumento idéntico al caso finito dimensional de, por ejemplo, Arrow (1951). El segundo teorema de la economía del bienestar es probado por Debreu en el Teorema 2.2. Además de las hipótesis de convexidad, el hecho fundamental es que el conjunto agregado de producción tiene interior no vacío. A partir de allí una variante del teorema de Hahn-Banach es la herramienta matemática principal usada en la prueba de este autor. Concretamente, se llega a que  $\xi \notin Z = \overset{0}{X}_{i'(x_i^0)} + \sum_{i \neq i'} \overset{0}{X}_{i(x_i^0)} - \sum_j Y_j$ , donde  $\overset{0}{X}_{i'(x_i^0)} = \{x_{i'} \in X_{i'} : x_{i'} \succ x_{i'}^0\}$  y  $\overset{0}{X}_{i(x_i^0)} = \{x_i \in X_i : x_i \succsim x_i^0\}$ . Ambos conjuntos son convexos lo mismo que  $Y_j$ , por lo tanto  $Z$  es convexo. Además, como por hipótesis  $\sum_j Y_j$  tiene interior no vacío, lo mismo ocurrirá con  $Z$ . Por tanto  $\xi \notin Z$ ,  $\text{int} Z \neq \emptyset$ , y  $Z$  es convexo. Por el teorema de separación existe  $p \in L^*$  tal que  $p(\xi) \leq p(z)$  para todo  $z \in Z$ . A partir de allí Debreu prueba que

$p(x_i^0) \leq p(x_i)$  para todo  $x_i \in X_{(x_i^0)}$  o bien  $p(y_j^0) \geq p(y_j)$  para todo  $y_j \in Y_j$  lo cual constituye el segundo teorema de su trabajo.

En determinados espacios lineales topológicos el supuesto de eliminación libre garantiza que la producción agregada tenga interior no vacío. Por ejemplo, sea el espacio de sucesiones infinitas de números reales  $\{s_n\}$  donde la norma está dada por  $\|s\| = \sup |s_n| < +\infty$ . De esta manera, si  $Y \neq \emptyset$  entonces  $\text{int } Y \neq \emptyset$ : sea  $\varepsilon > 0$  y considérese al vector  $y'$  definido por  $y'_h = y_h - \varepsilon$  para todo  $h$ . Si  $\zeta \in B(y', \varepsilon)$  entonces  $\zeta < y' + \varepsilon e = y \in Y$ , donde  $e = (1, 1, 1, \dots)$ . Por eliminación libre  $\zeta \in Y$ , luego  $\sum_j Y_j$  tiene interior no vacío.

Como veremos en próximos apartados, no en cualquier espacio vectorial topológico el supuesto de eliminación libre garantiza que el interior de la producción agregada sea no vacío.

### 1.2.2 Gabszewicz (1968)

El trabajo de Jean Jaskold Gabszewicz, *A limit Theorem on the Core of an Economy with a Continuum of Commodities*, consiste en una extensión del teorema de Edgeworth-Scarf (Debreu-Scarf (1963)) al caso de una economía de intercambio donde existe un continuo de bienes. El autor utiliza el espacio  $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ , el conjunto de las funciones de valor real  $\mu$ -esencialmente acotadas,  $\Sigma$ -medibles, definidas sobre  $S$  y con la norma del supremo esencial, para modelizar distintas situaciones de la economía. Un caso es cuando las asignaciones se distribuyen a lo largo del tiempo, considerado este como una variable continua; otro ejemplo es cuando existe una variación continua en la calidad de los bienes o en la asignación espacial, cuando el espacio geográfico también es visto como una variable continua.

Sea el caso particular de elección bajo incertidumbre: Sea  $S$  el conjunto de datos. Un evento es un subconjunto de  $S$ , que está en  $\Sigma$ , sobre los cuales puede asignarse una probabilidad a través de la medida  $\mu$ . En este caso el espacio puede ser  $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ . En esta economía existen  $m$  agentes, indexados por  $i=1, \dots, m$ . Un programa de consumo es un punto en  $L_\infty^+$  y cada agente dispone de una dotación inicial  $\omega_i \in L_\infty^{++}$ . Con esta información, definimos una asignación factible simplemente como una  $m$ -tupla de vectores  $(x_1, \dots, x_m) \in (L_\infty^+)^m$  donde  $\sum_{i=1}^m (x_i(s) - \omega_i(s)) \leq 0$   $\mu$ -c.t.p.

Por su parte los precios están representados por  $p \in ba(S, \Sigma, \mu)$  tal que  $p > 0$ . El valor de una corriente de bienes y servicios  $x \in L_\infty(S, \Sigma, \mu)$  a dichos precios  $p$  vendrá dado por  $\int_S x(s) dp(s)$ . Así, en el caso del agente  $i$ -ésimo su restricción presupuestaria será:

$$B_i = \left\{ x \in L_\infty^+ : \int_S x(s) dp(s) \leq \int_S \omega_i(s) dp(s) \right\}$$

Mientras que un equilibrio competitivo es un par  $(\bar{p}, \bar{x})$  tal que para todo  $i=1, \dots, m$ ,  $x_i \in B_i$  y  $B_i \cap \{x : x \succ_i x_i\} = \emptyset$ . Una asignación competitiva es una asignación  $\bar{x}$  junto con la cual existe un vector de precios  $\bar{p}$  tal que  $(\bar{p}, \bar{x})$  es un equilibrio competitivo.

Tres teoremas constituyen los resultados principales de este paper.

**Teorema 1.** *Una asignación competitiva se encuentra en el núcleo.*

**Teorema 2.** *Una asignación en el núcleo asigna el mismo programa de consumo a todos los agentes del mismo tipo.*

**Teorema 3.** *Si  $(x_1, \dots, x_m)$  está en el núcleo para todo  $n$ , donde  $n$  es la cantidad de agentes de cada tipo (Capítulo Primero, Sección II, 4.26), entonces  $(x_1, \dots, x_m)$  es un equilibrio competitivo.*

### 1.2.3 Peleg y Yaari (1970)

El trabajo, titulado *Markets with countably many commodities*, prueba la existencia de equilibrio competitivo en un mercado con un número finito de agentes y una cantidad infinita (y numerable) de bienes. El modelo considera una economía de intercambio puro, es decir, sin producción y el espacio de bienes está dado por el espacio de las sucesiones reales  $c$ . Como el dual topológico de  $c$  consiste en el espacio de las sucesiones reales iguales a cero excepto finitos términos, los autores introducen un supuesto de deseabilidad que hace que los precios sean una sucesión real con términos estrictamente positivos. Peleg y Yaari añaden a  $c$  la topología producto.

En esta economía el sistema de precios se define como una sucesión real  $p > 0$  que satisface  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k \omega_{ik} < \infty$  para  $i=1, \dots, m$ .

$\omega_i$  es la dotación inicial del  $i$ -ésimo consumidor. En particular, se considera el conjunto normalizado de precios

$$S = \left\{ p : p \in c_+, \sum_{k=0}^{\infty} p_k \omega_k = 1 \right\}$$

Mientras que la restricción presupuestaria, al vector de precios  $p$ , está dada por

$$B(i, p) = \left\{ x \in c_+ : \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k \omega_{ik} \right\}$$

Un equilibrio competitivo para esta economía es una  $m+1$ -tupla  $((\bar{x}_i)_{i=1}^m, \bar{p})$  tal que, para todo  $i$ , (a)  $\bar{x}_i \in B(i, \bar{p})$  y  $\bar{x}_i \succsim x_i$  si  $x_i \in B(i, \bar{p})$ , (b)  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \omega$  y (c)  $\bar{p} \in S$

Bajo los supuestos introducidos, los autores demuestran que existe un equilibrio competitivo en esta economía.

## 1.2.4 Lucas y Prescott (1972)

Edward Prescott y Robert Lucas escribieron *A note on price Systems in infinite dimensional space*, donde desarrollaron representaciones para el producto interior de esquemas de precios y bienes en dos casos particulares: cuando la actividad económica toma lugar a lo largo de infinitos y discretos períodos de tiempo y cuando existe incertidumbre.

Al igual que en la terminología previa,  $X_i$  e  $Y_j$  son los conjuntos de consumo y producción del  $i$ -ésimo consumidor y del  $j$ -ésimo productor respectivamente. Ambos conjuntos pertenecen al espacio vectorial topológico real  $L$ .  $x_i \in X_i$  describe completamente las cantidades de bienes que el agente consume (positivos) y las cantidades de inputs que el mismo provee (negativos). De la misma manera  $y_j \in Y_j$  es una descripción completa de los bienes finales (positivos) y de sus inputs (negativos). Sobre cada conjunto de consumo hay un orden completo de preferencias.

*Economías con horizonte temporal infinito*

Sea  $z = (z_0, z_1, \dots)$  una sucesión infinita de elementos tal que  $z_t \in L_t$ , donde  $(L_t, \|\cdot\|_t)$  es un espacio lineal normado. Si definimos la multiplicación escalar y la suma componente a componente, el espacio de sucesiones  $z$  también es un espacio normado si la norma está dada por

$$\|z\| = \sup_t \|z_t\|_t < \infty$$

Un resultado importante que estos autores prueban es que si  $z \in L$  y  $v \in L^*$  entonces  $p(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(z^n)$ . Junto a ciertos supuestos sobre el espacio  $L$  y los conjuntos  $X_i$  e  $Y_j$  tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.** Supongamos que  $\left((x_i^0)_{i=1}^m, (y_j^0)_{j=1}^n\right)$  es una valoración del equilibrio con relación a una forma lineal continua  $v(z)$ , y que  $x_i^0$  no es un punto de saturación para ningún consumidor  $i$ . Entonces  $\left((x_i^0)_{i=1}^m, (y_j^0)_{j=1}^n\right)$  satisface:

- (a) Para todo  $i$ , si  $x_i \in X_i$  y  $x_i \succsim x_i^0$  entonces  $p(x_i) \geq p(x_i^0)$
- (b) Para todo  $j$ ,  $y_j \in Y_j$  implica  $p(y_j) \leq p(y_j^0)$

con  $p \neq 0$

*Economías con incertidumbre*

El otro caso particular es el de un modelo de asignación intertemporal con incertidumbre. Sea  $(S_t, \Sigma_t, \mu_t)$  un espacio de probabilidad donde  $S_t$  es el conjunto de los

estados de la naturaleza posibles hasta el período  $t$  inclusive,  $\Sigma_t$  son los eventos asociados con dichos estados y  $\mu_t$  mide la probabilidad de los mismos. El espacio de bienes del período  $t$ ,  $L_t$ , es el espacio de las  $K_t$ -tuplas  $(z_{t1}(s), \dots, z_{tK_t}(s)) = z_t(s)$  de funciones reales,  $\mu_t$ -medibles en  $S_t$  tales que

$$\|z_t\|_t = \sup_{s \in S_t, k} |z_{tk}(s)| < \infty$$

La expresión  $z_{tk}(s)$  se interpreta como la cantidad de bien  $k$  en el período  $t$ , si tiene lugar el estado  $s$ . Cabe notar que  $L = \prod_t L_t$  y que se asume que se satisfacen las condiciones del Teorema 1 de modo que  $p(z) = \sum_t p_t(z_t) = \sum_{t,k} p_{t,k}(z_{t,k})$  es un precio de equilibrio donde  $p_{t,k}(\cdot)$  son funcionales continuas.

El resultado siguiente es el prerrequisito para la existencia de precios de equilibrio.

**Lema.** Para cada  $t$  y  $k$  fijos, existe una sucesión  $A_n \downarrow 0$  y una función  $\mu_t$ -medible  $\tilde{q}_{tk}$  tal que

$$q_{tk}(z_{tk}) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{tk}(z_{tk}(A_n)) = \int \tilde{q}_{tk}(s) z_{tk}(s) d\mu_t$$

**Teorema 2.** Supongamos que  $\left((x_i^0)_{i=1}^m, (y_j^0)_{j=1}^n\right)$  es una valoración del equilibrio con relación a una funcional lineal continua  $v(z)$  sobre  $L$ , y que  $x_i^0$  no es un punto de saturación para ningún  $i$ . Entonces bajo los supuestos introducidos  $\left((x_i^0)_{i=1}^m, (y_j^0)_{j=1}^n\right)$  satisface:

- (a) Para todo  $i$ , si  $x_i \in X_i$  y  $x_i \succsim x_i^0$  entonces  $q(x_i) \geq q(x_i^0)$
- (b) Para todo  $j$ ,  $y_j \in Y_j$  implica  $q(y_j) \leq q(y_j^0)$

donde  $q(z) = \sum_{t,k} \int_{S_t} \tilde{q}_{tk}(s) z_{tk}(s) d\mu_t$  es un sistema de precios de equilibrio no trivial

### 1.2.5 Bewley (1972)

El trabajo de Truman Bewley es el primer trabajo publicado sobre la existencia de equilibrio general con producción en espacios de dimensión infinita. En este modelo el espacio de bienes está representado por  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el espacio de las funciones reales esencialmente acotadas y medibles en  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Los conjuntos de consumo  $X$  están representados por  $L_\infty^+(M, \mathcal{M}, \mu)$  mientras que los de producción son un subconjunto de  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Los precios pertenecen al dual topológico de  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , esto es,

$ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Se prueba que bajo condiciones bastante generales esta economía tiene un equilibrio. Posteriormente el autor demuestra que con el agregado de supuestos adicionales el equilibrio se alcanza con los precios en  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ . En las siguientes secciones detallaremos más este modelo.

Estos han sido los primeros trabajos que consideraron espacios de dimensión infinita. Sin embargo, a lo largo de la década de los 80 y sobre todo en los 90 el uso de estos espacios ha crecido significativamente. En la sección siguiente veremos la necesidad de los mismos.

### 1.3 Sobre la necesidad de los espacios de dimensión infinita y su interpretación económica

Ya hemos mencionado en el capítulo anterior que hay circunstancias económicas cuya formalización matemática no puede llevarse a cabo si utilizamos el espacio euclídeo  $l$  dimensional. Los casos más salientes en que ello ocurre tienen que ver con: asignación finita durante un horizonte temporal infinito, modelos de bienes diferenciados y economías con incertidumbre cuando existen infinitos estados de la naturaleza

Veremos estos casos en detalle y expondremos algunos trabajos que han tratado con estos tópicos.

#### 1.3.1 Horizonte temporal infinito

Sean  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  los períodos de la economía. Supongamos que en cada instante existen finitos bienes los cuales pertenecen al conjunto  $M_t$ . Si el horizonte es infinito entonces  $M = \bigcup_{t=0}^{\infty} M_t$ , de modo que  $\mathcal{M}$  es el conjunto de todos los subconjuntos de  $M$  y  $\mu$  sería la medida de conteo.

La interpretación económica es la siguiente: si  $X \subset L_{\infty}^+$  entonces  $x \in X$  es una corriente de consumo<sup>19</sup> en el sentido de que dado  $x: M \mapsto \mathbb{R}$ ,  $x(m)$  indica la cantidad del bien  $m$  que consume el agente. En nuestro caso, como  $m \in M_t$  para algún  $t$ , es la cantidad que se consume de ese bien en el instante  $t$ . Lo mismo ocurre con la producción. Si  $Y \subset L_{\infty}$ , entonces  $y \in Y$  indicará todo un programa de producción a lo largo del tiempo. Si  $y(m) < 0$ , de modo que  $m$  es un insumo, con  $m \in M_t$ , sabremos las cantidades de insumo  $m$  que el productor usará en  $t$  para producir las cantidades  $y(m') > 0$  del bien  $m'$  en  $t$  ( $m' \in M_t$ )

En otras palabras,  $m \in M_t$  es el bien  $m$  en  $t$  y  $x(m)$  es la cantidad a consumir o consumida de ese bien en ese período. Si  $m' \in M_t$ , con  $y(m') > 0$ , entonces el productor está fabricando  $y(m')$  unidades físicas del bien  $m'$  en el período  $t$ . Caso contrario, si  $y(m) < 0$ , entonces el oferente está utilizando  $y(m)$  unidades del insumo  $m$  en  $t$ . Estas

<sup>19</sup> En inglés *commodity bundle*

cuestiones quedan bien formalizadas por medio de los espacios  $L_p(M, \mathcal{M}, \mu)$  con  $1 \leq p \leq \infty$

En dimensión finita si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  es un vector de bienes y  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  el vector de precios, entonces el valor de esa canasta de mercaderías está dado el producto interior  $\langle p, x \rangle_{\mathbb{R}^l} = p \cdot x = \sum_{i=1}^m p_i x_i$ . De manera que  $p_i$  es el precio del  $i$ -ésimo bien  $x_i$ . En los espacios  $L_p$  con  $1 < p < \infty$  tenemos la extensión natural al caso de infinitos bienes y precios. Por lo visto en el Capítulo Primero, sabemos que el precio se encuentra en  $L_p^*$ , de modo que el valor de una corriente de bienes está dado por

$$p(x) = \int_M h(m)x(m)d\mu(m) \quad h \in L_q, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

Matemáticamente entre  $L_p^*$  y  $L_q$  existe un isomorfismo isométrico (Capítulo Primero, Sección I, 15.3 y 15.4). En la literatura económica, se ha acostumbrado a escribir la expresión anterior simplemente como<sup>20</sup>

$$p(x) = \int_M p(m)x(m)d\mu(m) \quad (1)$$

donde:  $p(x)$  es el valor total de ese conjunto de bienes,  $x(m)$  es la cantidad consumida o a consumir del bien  $m$  y  $p(m)$  es el precio unitario del bien  $m$ .

En el caso del espacio  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el sistema de precios se encuentra en  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , de modo que el valor de  $x$  cuando el sistema de precios es  $p$  viene dado por (Capítulo Primero, Sección I, 15.4)

$$p(x) = \int_M x dp$$

Donde no hay interpretación económica del tipo expuesto anteriormente. Es por ello que los autores han tratado de imponer condiciones que aseguren que los precios estén en  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu) \subset ba(M, \mathcal{M}, \mu)$  puesto que allí sí tiene lugar la expresión (1) anterior.

El trabajo de Bewley (1972) utiliza este espacio por lo que es un modelo en el que puede estudiarse la asignación temporal de bienes durante un horizonte infinito de tiempo.

### 1.3.2 Bienes diferenciados

Otro caso donde es indispensable utilizar espacios de dimensión infinita es cuando consideramos bienes diferenciados. Es decir, existen infinitos bienes porque existen infinitas características. Mas-Colell (1975) y Jones (1984) han tratado con estos modelos. En este apartado seguiremos la simbología de este último autor.

<sup>20</sup> Véase, por ejemplo, a Mas-Colell-Zame (1991) pg. 1842



Sea  $T$  la colección de todos los posibles bienes. Cada  $t \in T$  representa una descripción completa de las características económicamente relevantes.  $T$  es un espacio métrico compacto con métrica  $d$ . Dos bienes son “parecidos” si las características de sus unidades son topológicamente cercanas en  $T$ .

Sea el espacio medible  $(T, \mathcal{B}_T)$  donde  $\mathcal{B}_T$  es la colección de subconjuntos de Borel de  $T$ . Los elementos de  $\mathcal{B}_T$  los escribiremos como  $B$ . Sea  $\mathcal{M}$  la colección de medidas signadas sobre dicho espacio. Escribimos  $M$  como el conjunto de elementos de  $\mathcal{M}$  que son no-negativos, de modo que el consumidor escogerá  $m \in M$ .

Así la interpretación económica es la siguiente: bajo el plan  $m$ ,  $m(B)$  es la cantidad de bienes que se consumen que tienen características en  $B$ . En otras palabras  $m$  representa una corriente de consumo en el sentido de que si  $B \in \mathcal{B}_T$  representa un conjunto de características,  $m(B)$  es la cantidad de bienes que se consumen con esas características. De la misma manera  $m'$  describirá otra cantidad de bienes por cada conjunto de características. El conjunto de consumo  $X$  está contenido en  $M$ .

Análogamente con los productores. Sea  $y \in Y$  una medida de  $\mathcal{M}$ , entonces  $y(B) < 0$  será la cantidad de insumos con características en  $B$  que utiliza el productor, en tanto que  $y(B') > 0$  indica la cantidad de producto producidos con características en  $B'$ .

Sea la función que designa los precios  $p: T \mapsto \mathbb{R}_+$ , de manera que  $p(t)$  es el precio del bien  $t$ . Dicha función, además de no negativa y de valor real, es  $\mathcal{B}_T$ -medible y acotada. Para valorar una canasta de bienes utilizamos el hecho de que  $\mathcal{M}$  es isométricamente isomorfo a  $C(T)^*$ , el dual topológico del espacio de las funciones continuas sobre un compacto  $T$ . De ahí que el valor de una corriente de bienes vendrá dado por

$$f(m) = \int_T p(t) dm(t) \quad p \in C(T) \text{ y } f \in C(T)^*$$

Como señalamos anteriormente, es usual escribir a la anterior expresión directamente como

$$p(m) = \int_T p(t) dm(t)$$

Lo cual expresa el valor de un conjunto de bienes diferenciados.

Cada consumidor  $i$  está dotado de una relación de preferencias  $\succsim_i \subset M \times M$ . Por otra parte, la participación del agente  $i$ -ésimo en la  $j$ -ésima empresa está dada por  $\theta_{ij}$ , con  $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$ . Finalmente, cada consumidor dispone de una dotación inicial  $e_i \in M$ . Con estos conceptos la restricción presupuestaria del agente  $i$  está dada por el siguiente conjunto

$$B(p, w_i) = \{m \in M : p(m) \leq w_i\}$$

con  $w_i = p\left(e_i + \sum_j \theta_{ij} y_j\right)$

Una asignación  $(m_1, \dots, m_m; y_1, \dots, y_n) \in L^{m+n}$  es factible si  $m_i \in M$  para todo  $i$ ,  $y_j \in Y_j$  para todo  $j$  y  $\sum_i m_i = \sum_j y_j + \sum_i e_i$ . De esta manera, el vector  $(\bar{p}, \bar{m}_1, \dots, \bar{m}_m; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  es un equilibrio para la economía si (a)  $\bar{m}_i$  maximiza  $\succsim_i$  en  $B(\bar{p}, w_i)$  para todo  $i=1, \dots, m$ , (b)  $\bar{y}_j$  maximiza beneficios en  $Y_j$  para todo  $j=1, \dots, n$  y (c)  $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_m; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  es una asignación factible.

### 1.3.3 Modelos de equilibrio general con incertidumbre e infinitos estados de la naturaleza.

Veamos un tercer caso donde emerge la necesidad de modelizar a la economía con un espacio de bienes de dimensión infinita. Concretamente, el caso de situaciones de incertidumbre cuando existen infinitos estados de la naturaleza. Tomaremos como base un trabajo de Hervés-Beloso et al. (2009) junto con los conceptos desarrollados en Radner (1968 y 1981).

Considérese una economía de 2 períodos  $\{0, 1\}$  y  $L$  bienes en cada uno de ellos. Sea  $S$  el conjunto de estados de la naturaleza, el cual es infinito (numerable o no numerable). Una partición  $P$  de  $S$  es una partición medible si  $P \subset \Sigma$  donde  $\Sigma$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $S$ .

En este modelo el consumo del  $i$ -ésimo agente está dado por la función  $x_i : S \mapsto \mathbb{R}_+$  donde  $x_i(s)$  representa el consumo si ocurre el estado  $s$ . Diremos que  $x_i$  es  $P$ -medible si  $x_i^{-1}(B) \in \sigma(P)$  para todo  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , donde  $\sigma(P)$  es la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene a  $P$ . Nótese que aún si existen finitos bienes el hecho de que existan infinitos estados de la naturaleza no permite usar el espacio  $\mathbb{R}^L$ .

Aquí diferentes agentes pueden tener diferente información (privada) concerniente a las realizaciones de los estados de la naturaleza. Concretamente cada uno tiene una partición  $P_i$  de los estados de la naturaleza  $S$ . Matemáticamente  $P_i$  es una partición medible. Esta información condiciona la elección que el agente puede hacer en el sentido de que dado un cierto estado  $s$  que ha sido realizado en el momento 1 y que pertenece a algún elemento  $N$  de  $P_i$ , entonces la información que dicho agente tiene le capacitará para saber que el estado  $s$  pertenece a  $N$  pero no puede discernir cual de los elementos de  $N$  ha ocurrido. En otras palabras solamente sabe que ha ocurrido un estado de  $N$  pero no específicamente cual.

Si  $S$ , el conjunto de estados de la naturaleza, fuere finito esto significa que si  $x$  es una cesta de consumos del  $i$ -ésimo agente, entonces si  $s, s' \in N$ ,  $x(s) = x(s')$  (Radner (1968) p. 37). Esto expresa la idea de que si el consumidor no puede distinguir, en el instante 1, entre los distintos estados de la naturaleza en  $N$ , entonces su consumo ha de ser el mismo para todo elemento de  $N$ . Esto es equivalente a decir que cada  $x_i$  es  $P_i$ -medible (Radner, (1981) p. 943, líneas 22 a 24). Cuando  $S$  es infinito no tenemos tal

equivalencia y la restricción anteriormente mencionada se formaliza simplemente mediante esta última condición.

### 1.3.3.1 Hervés-Beloso, Martins-da-Rocha y Monteiro (2009)

Estos autores generalizan el teorema de existencia de equilibrio con incertidumbre de Radner (1968) al caso en que hay infinitos estados de la naturaleza, sean numerables sean continuos. Los  $m$  agentes efectúan los contratos del único bien que se comercializa en el período 0 contingente al estado realizado en el período 1. Ahora bien, cada agente tiene información incompleta y posiblemente diferente, por lo que están restringidos a efectuar contratos compatibles con sus respectivas informaciones privadas.

La incertidumbre está representada por el espacio de probabilidad  $(S, \Sigma, \mu)$  donde  $S$  es el conjunto infinito de estados de la naturaleza y cada elemento de  $\Sigma$  es visto como un evento con probabilidad  $\mu$ . La información privada del agente  $i$  está representada por una  $\sigma$ -subálgebra  $\Sigma_i \in \Sigma$ , a la vez que el conjunto de todos los planes de consumos posibles está dado por  $X_i = L_+^p(S, \Sigma_i, \mu)$  de funciones  $p$ -integrables ( $1 \leq p < +\infty$ ) y  $\Sigma_i$ -medibles de  $S$  en  $\mathbb{R}_+$ . El modelo asume que cada agente  $i$  sabe, en el período 0, que observará dos señales en el período 1: una pública  $\kappa$  y otra privada  $\tau_i$ . De esta manera la información del agente  $i$  está representada por una  $\sigma$ -álgebra generada por el par  $(\kappa, \tau_i)$ .

Con relación a la información estrictamente privada, cada agente sabe en  $t = 0$  que en  $t = 1$  tendrá una información incompleta y privada en el sentido de que solo observará la salida de variables aleatorias medibles con relación a  $\Sigma_i$  de  $\Sigma = \prod_{i=1}^m \Sigma_i$ . En  $t = 0$  existe un mercado para los planes de consumo en  $L_+^p(S, \Sigma, \mu)$  y cada agente  $i$  sabe que, contingente al estado  $s$ , tendrá en  $t = 1$  una dotación inicial de  $e_i(s) \geq 0$  del único bien, donde  $e_i \in L_+^p(S, \Sigma_i, \mu)$ . En  $t = 0$  los agentes efectúan los contratos y redistribuyen sus dotaciones iniciales antes de que tenga lugar el estado de la naturaleza. Estos contratos deben ser consistentes con la información privada que cada agente posee, es decir, cada uno escoge un plan de consumo en  $X_i = L_+^p(S, \Sigma_i, \mu)$ .

La economía se define por  $\mathcal{E} = (\Sigma, \prod_{i=1}^m X_i, \prod_{i=1}^m e_i, \prod_{i=1}^m P_i)$  donde  $P_i$  es la correspondencia que define la preferencia estricta del agente  $i$ -ésimo. Sea  $L^p(S, \Sigma, \mu)^*$  el dual topológico de  $L^p(S, \Sigma, \mu)$  que define el espacio de precios. Cada  $x_i \in L_+^p(S, \Sigma_i, \mu)$  representa un plan posible de consumo para el agente  $i$ . Una asignación  $(x_i)_{i=1}^m$  se dice factible si

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m e_i$$

Finalmente el vector  $\left((\bar{x}_i)_{i=1}^m, \bar{p}\right)$  es un equilibrio competitivo si  $(\bar{x}_i)_{i=1}^m$  es una asignación factible y  $\bar{p} \in L^p(S, \Sigma, \mu)^*$  es un sistema de precios tal que  $\bar{p}(\bar{x}_i) = \bar{p}(e_i)$  y si  $y_i \in P_i(\bar{x}_i)$  entonces  $\bar{p}(y_i) > \bar{p}(\bar{x}_i)$ .

#### 1.4 Tipos de estrategias en la demostración de existencia de equilibrio general

En el Capítulo Tercero de la presente tesis desarrollamos nuestros teoremas de existencia de equilibrio general. La estrategia de demostración seguida es la conocida como aproximaciones finitas desarrollada originalmente por Bewley (1972). Aunque el problema con el que nos enfrentamos no permite una aplicación directa de este método sí es cierto que inicialmente procederemos siguiendo esta técnica. Por este motivo, en esta sección presentamos el paper seminal de Truman Bewley junto con algunos otros trabajos que han seguido esta aproximación, todo lo cual permitirá entender más acabadamente lo que el tesista realizará en el capítulo siguiente.

Además de la mencionada, existen al menos otras tres estrategias de demostración: el método de Negishi, el de la equivalencia con el núcleo y el que contempla el exceso de demanda. Luego de analizar la subsección siguiente exponemos ligeramente la idea principal de estas tres aproximaciones.

##### 1.4.1 Aproximaciones finitas

La idea de este método es la siguiente: truncar la economía original y generar una familia de economías de dimensión finita dirigidas por inclusión<sup>21</sup>. Los teoremas existentes, cuando hay finitos bienes, garantizan la existencia de equilibrio en cada elemento de aquella familia de economías. Con ello se obtiene una red donde cada término de la misma es el vector de equilibrio correspondiente a la economía de dimensión finita. Luego se prueba que dicha red es convergente y que el vector al cual converge es un equilibrio de la economía original.

Varios autores han seguido esta aproximación. En primer lugar nos remitiremos al trabajo de Bewley por ser un paper seminal en este asunto.

##### 1.4.1.1 Bewley (1972)

El espacio de bienes, como vimos, es  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Todo consumidor  $i$  está caracterizado por un conjunto de consumo  $X_i$ , una relación de preferencias  $\succsim_i$  sobre  $X_i$ , una dotación inicial  $e_i$  y una participación  $\theta_{ij}$  en los beneficios de la  $j$ -ésima empresa.  $\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$ , lo que significa que los beneficios se distribuyen entre todos los

<sup>21</sup> Para ser estrictos, destacamos que esta técnica no necesariamente requiere que las subeconomías sean de dimensión finita. Por caso Olivera (1997) con un espacio de bienes representado por distribuciones, y Noguchi (1997a) con un espacio de Banach separable y ordenado, construyen subeconomías definidas en subespacios de dimensión infinita. La idea de que las subeconomías contemplan finitos bienes se debe a que así lo demostró Bewley (1972) quien fuese el primero en usar esta argumentación.

consumidores. Asimismo cada productor  $j$  está caracterizado por un conjunto de producción  $Y_j$ . La economía queda así representada por el conjunto

$$\mathcal{E} = (Y_j, X_i, \succsim_i, e_i, \theta_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$$

Una asignación  $(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$  es factible si  $x_i \in X_i$  para todo  $i$ ,  $y_j \in Y_j$  para todo  $j$  y  $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m e_i$ . Por su parte un sistema de precios  $\pi$  es un elemento de  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Dado unos planes de producción  $(y_1, \dots, y_n)$  y un sistema de precios  $\pi$ , la restricción presupuestaria del  $i$ -ésimo agente es

$$B\left(\pi, (y_j)_{j=1}^n\right) = \left\{x \in X_i : \pi(x) \leq \pi(e_i) + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \pi(y_j)\right\}$$

Un equilibrio competitivo es una asignación factible  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  y un sistema de precios  $\bar{\pi}$  tales que para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es maximal en el conjunto presupuestario del  $i$ -ésimo agente y para todo  $j$ ,  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) = \sup\{\bar{\pi}(y) : y \in Y_j\}$ .

Detallamos a continuación tres supuestos que utiliza el autor

*Supuesto de adecuación.* Para cada consumidor  $i$ , existe  $\tilde{x}_i \in X_i$  e  $\tilde{y}_j \in A\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)$  tal que  $\tilde{y}_j + e_i - \tilde{x}_i \gg \gg 0$ <sup>22</sup>

*Supuesto de monotonicidad.* Existen dos conjuntos medibles y disjuntos,  $M_p$  y  $M_q$  cuya unión es  $M$  y que satisfacen<sup>23</sup>

- (i) Para todo  $i$ , si  $x \in X_i$  y  $k \in \tilde{K}_{M_q}$ , entonces  $x + k \succ_i x$
- (ii)  $\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right) - K_{M_p} \subset \sum_{j=1}^n Y_j$
- (iii)  $\mu(M_q) > 0$

*Supuesto de acotación.* Para todo  $j = 1, \dots, n$  y para todo  $u \in L_\infty$ ,  $Y_j \cap \left(L_\infty^+ - \sum_{j \neq j'} Y_{j'} + u\right)$  es acotado en norma.

Con estos datos enunciamos el siguiente teorema

<sup>22</sup>  $A\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)$  es el cono asintótico de  $\sum_{j=1}^n Y_j$ , o sea, el cono convexo de vértice cero más grande contenido en  $\sum_{j=1}^n Y_j$ . Además  $\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{y}_{ij}$ , donde  $\tilde{y}_{ij} \in Y_j$ . Finalmente  $\xi \gg \gg 0$  si existe  $r > 0$  tal que  $\xi(m) > r$   $\mu$ -c.t.p

<sup>23</sup>  $\tilde{K}_{M_q}$  es el conjunto  $\left\{x \in K_{M_q} : \exists r > 0, x(m) \geq r \text{ c.t. } m \in M_q\right\}$  en tanto que  $K_{M_q}$  está dado por  $\left\{x \in L_\infty : x(m) = 0 \text{ c.t. } m \notin M_q, x(m) \geq 0 \text{ c.t. } m \in M_q\right\}$ . Análogamente interpretamos a  $K_{M_p}$ .

**Teorema 1.** Sea  $\mathcal{E} = (Y_j, X_i, \succsim_i, e_i, \theta_{ij}, i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$  una economía cuyo espacio de bienes es  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , donde  $\mu$  es una medida positiva  $\sigma$ -finita. Supóngase que:

- (i)  $\forall i \ X_i \subset L_\infty^+$  es convexo y Mackey-cerrado.
- (ii)  $\forall i \ \succsim_i$  es transitiva, reflexiva y completa.
- (iii)  $\forall i \ y \ \forall x \in X_i, \{z \in X_i : z \succsim_i x\}$  es convexo y Mackey cerrado
- (iv)  $\forall i \ y \ \forall x \in X_i, \{z \in X_i : x \succsim_i z\}$  es cerrado en la topología de la norma.
- (v)  $\forall j \ Y_j$  es convexo y Mackey cerrado, y contiene al cero.
- (vi) La economía  $\mathcal{E}$  satisface los supuestos de adecuación, monotonicidad y acotación.

Entonces,  $\mathcal{E}$  tiene un equilibrio  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, \bar{\pi} \right)$  donde  $\bar{\pi} \in ba(M, \mathcal{M}, \mu)$  y  $\bar{\pi} > 0$ .

**Esquema de la demostración.** A partir de los supuestos en (vi) podemos definir una familia  $\mathcal{F}$  de subespacios de dimensión finita  $F$  de  $L_\infty$  conteniendo a  $e_i, \tilde{x}_i, \tilde{y}_{ij}$ , para todo  $i, j$ ,  $\chi_{M_q}$  y  $\chi_M$ <sup>24</sup>. Sea entonces la economía truncada  $\mathcal{E}^F$  caracterizada por

$$(Y_j \cap F, X_i \cap F, \succsim_i^F, e_i, \theta_{ij}, i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$$

Donde  $\succsim_i^F$  es el preorden inducido sobre  $X_i \cap F$  por  $\succsim_i$ . Se puede comprobar que para cada  $F \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}^F$  satisface las condiciones dadas en Debreu (1962) por lo que tenemos una red de equilibrios  $\left( (x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n, p^F \right)_{F \in \mathcal{F}}$ . A continuación,  $p^F$  puede extenderse sobre todo el espacio  $L_\infty$  conservando la norma por medio de la funcional  $\pi^F$ , de manera que la red que pasamos a considerar es  $\left( (x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n, \pi^F \right)_{F \in \mathcal{F}}$ . A partir de allí Bewley prueba que esta red es acotada y debido al teorema de Alaoglu (Capítulo Primero, Sección I, 13.10) está contenida en un conjunto débilmente\* compacto. Luego, existe una subred  $\left( (x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n, \pi^{F(t)} \right)_{t \in (T, \geq)}$  que converge débilmente\* a  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, \bar{\pi} \right)$ . La demostración se completa mostrando que: (a)  $\bar{\pi} > 0$ , (b) para todo  $i$  si  $x \succsim_i x_i$  entonces  $\bar{\pi}(x) \geq B\left(\bar{\pi}, (\bar{y}_j)_{j=1}^n\right)$  y si  $x \succ_i x_i$  entonces  $x \notin B\left(\bar{\pi}, (\bar{y}_j)_{j=1}^n\right)$  y (c) para todo  $j$ ,  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) = \sup\{\bar{\pi}(y) : y \in Y_j\}$ .

#### 1.4.1.2 Podczeck y Yannelis (2008)

El paper de estos autores contempla un economía de intercambio donde los agentes tienen informaciones distintas o asimétricas. En el trabajo consideran espacios de dimensión infinita cuyo ortante positivo tiene interior no vacío en un modelo y vacío en

<sup>24</sup>  $\chi_{M_q}$  y  $\chi_M$  son las funciones características de  $M_q$  y  $M$  respectivamente.

otro. El caso que aquí trataremos será el primero. Las preferencias no son, necesariamente, ni transitivas ni completas. Tampoco utiliza el supuesto de eliminación libre. La demostración sigue la estrategia de Bewley expuesta anteriormente.

Sea  $E$  un espacio de Hausdorff ordenado y localmente convexo, y sea  $\Omega$  un conjunto finito y no vacío de estados de la naturaleza. Dada una partición  $\mathcal{P}$  de  $\Omega$ , un elemento  $x \in E^\Omega$  es  $\mathcal{P}$ -medible si  $S \in \mathcal{P}$  y  $s, s' \in S$  implica  $x(s) = x(s')$ .

Una economía  $\mathcal{E}$  con información diferenciada, con finitos agentes y con espacio de bienes  $E^\Omega$ , es una familia  $\mathcal{E} = \{(H_i, P_i, \omega_i)_{i \in I}\}$  donde

- \_  $I = \{1, \dots, n\}$  es un conjunto finito de agentes;
- \_ Para cada  $i \in I$ ,  $\mathcal{H}_i$  es una partición de  $\Omega$  que indica la información privada de  $i$ .
- \_ Para cada  $i \in I$ , el conjunto de consumo está dado por

$$X_i = \{x \in E_+^\Omega : x \text{ es } \mathcal{H}_i\text{-medible}\};$$

- \_ Para cada  $i \in I$ ,  $P_i : X_i \mapsto 2^{X_i}$  es la relación de preferencias (estricta)
- \_ Para cada  $i \in I$ ,  $\omega_i \in X_i$  es la dotación inicial tal que
- $\sum_{i \in I} \omega_i \neq 0$ .

Una *asignación* para la economía  $\mathcal{E}$  es un vector  $(x_i)_{i \in I}$  donde  $x_i \in X_i$  para cada  $i \in I$ . Esta asignación es *factible* si  $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \omega_i$ . Decimos que la asignación es individualmente racional si  $\omega_i \notin P_i(x_i)$  para cada  $i \in I$ , y es Pareto óptima si es factible y no existe otra asignación también factible  $(x'_i)_{i \in I}$  con  $x'_i \in P_i(x_i)$  para todo  $i \in I$ . Un *cuasi-equilibrio* para  $\mathcal{E}$  es un par  $((x_i)_{i \in I}, p)$  donde  $(x_i)_{i \in I}$  es una asignación factible y  $p \in E^{\Omega*}$  es un sistema de precios con  $p \neq 0$  tal que, para cada  $i \in I$ ,  $p(x_i) \leq p(\omega_i)$  y si  $x \in P_i(x_i)$  entonces  $p(x) \geq p(\omega_i)$ . Dicho cuasi-equilibrio es *no trivial* si algún agente tiene ingresos, esto es, si  $p(\omega_i) > \inf \{p(x) : x \in X_i\}$  para algún  $i \in I$ . Finalmente un *equilibrio*  $((\bar{x}_i)_{i \in I}, \bar{p})$  es un cuasi-equilibrio donde  $x \in P_i(\bar{x}_i)$  implica  $p(x) > p(\omega_i)$ . A continuación, los supuestos que garantizan la existencia de un equilibrio no trivial

### Supuestos

- S.1 Para todo  $i \in I$  y cada  $x \in X_i$ ,  $x \notin P_i(x_i)$  (irreflexividad)
- S.2 Para todo  $i \in I$  y cada  $x \in X_i$ , el conjunto  $P_i(x_i)$  es convexo.
- S.3 Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una asignación factible e individualmente racional, entonces  $P_i(x_i) \neq \emptyset$  para cada  $i \in I$  (no saciedad de preferencias en asignaciones factibles e individualmente racionales)

S.4 Si  $(x_i)_{i \in I}$  es una asignación individualmente racional y Pareto óptima, entonces  $x_i \in \overline{P_i(x_i)}$  (no saciedad local de las preferencias de una asignación Pareto óptima e individualmente racional)

Sea  $\eta$  alguna topología sobre  $E$ , la cual puede ser diferente de la topología original de  $E$ , entonces  $\eta^\Omega$  denota la topología producto correspondiente sobre  $E^\Omega$ . Esto lo tendremos presente en el siguiente supuesto:

S.5 Existe una topología lineal de Hausdorff  $\eta$  en  $E$  tal que todos los intervalos de orden en  $E$  son  $\eta$ -compactos, y tal que para cada  $i \in I$ ,  $P_i$  es  $(\eta, \mathcal{G})$ -continua, es decir,  $P_i$  tiene un grafo abierto (relativo) en  $X_i \times X_i$  en la topología producto  $\eta \times \mathcal{G}$ , donde  $\mathcal{G}$  es la topología original de  $E^\Omega$ .

S.6 Existe una asignación factible  $(x_i)_{i \in I}$  tal que para cada  $i \in I$  y cada  $s \in \Omega$ ,  $\lambda \sum_{i \in I} \omega_i(s) \leq x_i(s)$  para algún número real  $\lambda > 0$

S.7  $\sum_{i \in I} \omega_i(s) \in \text{int } E_+$  para cada  $s \in \Omega$

Con estos supuestos Podczeck y Yannelis exponen el siguiente teorema

**Teorema 1.** *Sea  $E$  un espacio de Hausdorff ordenado y localmente convexo tal que  $\text{int } E_+ \neq \emptyset$ , sea  $\Omega$  un conjunto finito y no vacío de estados de la naturaleza, y sea  $\mathcal{E} = \{(H_i, P_i, \omega_i)_{i \in I}\}$  una economía con información asimétrica y espacio de bienes  $E^\Omega$ . Supongamos que se cumplen los supuestos S.1-S.7. Entonces  $\mathcal{E}$  tiene un equilibrio no trivial e individualmente racional.*

### Esquema de la demostración.

Podczeck y Yannelis siguen la aproximación de Bewley de economías de dimensión finita. Sin embargo la demostración comienza con ciertas construcciones que pasamos a desarrollar. Sea  $\mathcal{H} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{H}_i$ . Sea  $\mathcal{G}$  una familia maximal de elementos de  $\mathcal{H}$  tal que las funciones de indicadores  $1_s \in \mathbb{R}^\Omega$ ,  $S \in \mathcal{G}$ , sean linealmente independientes. En particular dado que  $\mathcal{H}$  y (consecuentemente)  $\mathcal{G}$  son finitas, se tiene que:

Existe un número real  $k > 0$  tal que si  $\{\alpha_s : S \in \mathcal{G}\}$  son números reales y

$$\left| \sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha_s 1_s(s) \right| \leq 1 \text{ para cada } s \in S \text{ entonces } |\alpha_s| \leq k \text{ para todo } S \in \mathcal{G} \quad (1)$$

Ahora para cada  $S \in \mathcal{G}$ , sea  $L_S = \{e 1_S : e \in E\}$ . Entonces  $L_S$  es un subespacio lineal cerrado de  $E^\Omega$  para cada  $S \in \mathcal{G}$ . Nótese además que  $X_i \subset \sum_{S \in \mathcal{G}} L_S$  ya que cada conjunto de consumo puede escribirse como  $X_i = \left\{ \sum_{S \in \mathcal{H}_i} e_S 1_S : e_S \in E_+ \right\}$ . De esta manera será suficiente con mostrar que para  $\bar{S} \in \mathcal{H}$  y algún  $e \in E$ ,  $e 1_{\bar{S}} \in \sum_{S \in \mathcal{G}} L_S$ .



Ahora, de la elección de  $\mathcal{G}$ , dado  $\bar{S} \in \mathcal{H}$  tenemos  $1_s = \sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha_s 1_s$  para algún número  $\alpha_s$  y de ahí  $e 1_s = \sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha_s e 1_s$  para cualquier  $e \in E$ , y así  $e 1_s \in \sum_{S \in \mathcal{G}} L_s$ . Sea  $k$  el número escogido de acuerdo a (1), entonces:

$$\begin{aligned} &\text{Dado un entorno } W \text{ de cero cerrado, convexo y balanceado en } E, \\ &\text{si } x = \sum_{S \in \mathcal{G}} x_S \in L_S \text{ y } x \in W^\Omega, \text{ entonces } x_S \in kW^\Omega \text{ para todo } S. \end{aligned} \quad (2)$$

En efecto, supongamos que se cumplen las condiciones de (2). Entonces  $x = \sum_{S \in \mathcal{G}} e_S 1_S$  para puntos  $e_S \in E$  por la definición de los subespacios  $L_S$ , y  $x(s) \in W$  para cada  $s \in \Omega$ . Sea  $W^0$  el polar de  $W$  en  $E^*$ , es decir,

$$W^0 = \{p \in E^* : |p(e)| \leq 1 \text{ para cada } e \in W\}.$$

Entonces para cualquier  $p \in W^0$  y para cada  $s \in \Omega$

$$\left| \sum_{S \in \mathcal{G}} (p(e_S)) 1_S(s) \right| = \left| p \left( \sum_{S \in \mathcal{G}} e_S 1_S(s) \right) \right| = |px(s)| \leq 1$$

y luego, por (1),  $|pe_S| \leq k$  para cada  $S \in \mathcal{G}$ . Consecuentemente  $e_S \in kW$  para cada  $S \in \mathcal{G}$  por el teorema bipolar, y de ahí  $e_S 1_S \in kW^\Omega$ . Así (2) se comprueba.

Sea  $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$  el nivel agregado de recursos iniciales y considérese el intervalo de orden  $[0, \omega] = \{x \in E^\Omega : 0 \leq x \leq \omega\}$ . Como  $[0, \omega] = \prod_{s \in \Omega} [0, \omega(s)] \in E^\Omega$  entonces por S.5  $[0, \omega]$  es  $\eta^\Omega$ -compacto. Es fácil ver que si  $(x_i)_{i \in I}$  es cualquier asignación factible entonces  $x_i \in [0, \omega]$  para todo  $i$ , de manera que  $(x_i)_{i \in I}$  pertenece a un conjunto  $\eta^\Omega$ -compacto. De nuevo por S.5, para todo  $i \in I$  la relación de preferencias  $P_i$  tiene secciones inferiores (relativamente)  $\eta^\Omega$ -abiertas. Consecuentemente, para cada  $i \in I$ , el conjunto de todos los  $x_i$  que pertenecen a alguna asignación factible e individualmente racional es también  $\eta^\Omega$ -compacto. Por S.3 y del hecho de que  $P_i$  tiene secciones inferiores (relativamente)  $\eta^\Omega$ -abiertas, se sigue que podemos escoger un conjunto finito  $A \subset \bigcup_{i \in I} X_i$  tal que dado una asignación factible e individualmente racional  $(x_i)_{i \in I}$  existe, para cada  $i \in I$ , un punto  $x'_i \in A$  con  $x'_i \in P_i(x_i)$ .

Con los resultados anteriores podemos ahora construir las sucesivas sub-economías de dimensión finita y obtener el equilibrio a través de la aproximación de Bewley. En efecto sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los subespacios lineales de dimensión finita  $F$  de  $E^\Omega$  tales que

- (a)  $A \subset F$
- (b)  $\omega_i \in F$  para todo  $i \in I$

(c)  $F = \sum_{S \in \mathcal{G}} F_S$  para ciertos subespacios lineales  $F_S$  de  $E^\Omega$  con  $F_S \subset L_S$  para cada  $S \in \mathcal{G}$

Así  $\mathcal{F}$  es dirigido por inclusión y dado que  $X_i \subset \sum_{S \in \mathcal{G}} L_S$  para cada  $i \in I$ , se tiene que  $\mathcal{F}$  es no vacío. Para cada  $F \in \mathcal{F}$  sea  $\mathcal{E}^F$  la economía de dimensión finita definida como:

$$X_i^F = X_i \cap F$$

$$\omega_i^F = \omega_i$$

$$P_i^F(x) = P_i(x) \cap F \text{ para } x \in X_i^F$$

En este caso  $\mathcal{E}^F$  satisface, para todo  $F \in \mathcal{F}$ , las condiciones de existencia de cuasi-equilibrio individualmente racional cuando el espacio de bienes es  $\mathbb{R}^l$  según un lema que en el mismo paper los autores presentan. Esto es, para cada  $F \in \mathcal{F}$ , se obtiene una asignación factible  $(x_i^F)_{i \in I}$  y un vector  $p^F \in F^*$ , con  $p^F \neq 0$ , tal que

$$-\sum_{i \in I} x_i^F = \sum_{i \in I} \omega_i$$

Para todo  $i \in I$

$$-p^F(x_i^F) \leq p^F(\omega_i)$$

— Si  $x'^F \in X_i^F$  satisface que  $x'^F \in P_i(x_i^F)$  entonces  $p^F(x'^F) \geq p^F(\omega_i)$ .

$$-\omega_i \notin P_i(x_i^F)$$

La demostración se completa como sigue: 1.  $((x_i^F)_{i \in I})_{F \in \mathcal{F}}$  define una red en el conjunto  $\eta^\Omega$ -compacto  $[0, \omega]^l$  y por lo tanto existirá una subred  $\eta^\Omega$ -convergente a  $(\bar{x}_i)_{i \in I}$ ; 2. Se prueba que  $\sum_{i \in I} \bar{x}_i = \sum_{i \in I} \omega_i$  y que  $((\bar{x}_i)_{i \in I})_{F \in \mathcal{F}}$  es individualmente racional; 3. A través del teorema de Hahn-Banach existe una extensión de cada  $p^F \in F^*$  a todo  $E^{\Omega,*}$  (la extensión de  $p^F$  la seguimos escribiendo  $p^F$ ); 4. Dado que para todo  $F \in \mathcal{F}$  la extensión  $p^F$  es acotada en norma, por el teorema de Alaoglu existe una subred de la red  $(p^F)_{F \in \mathcal{F}}$  que converge débilmente\* a  $(\bar{p})$ ; 5.  $\bar{p} \neq 0$  y 6. Si  $x \in P_i(\bar{x}_i)$  entonces  $\bar{p}(x) \geq \bar{p}(\omega_i)$  y  $\bar{p}(\bar{x}_i) = \bar{p}(\omega_i)$  para todo  $i$ . Así  $((\bar{x}_i)_{i \in I}, \bar{p})$  es un cuasi-equilibrio no trivial e individualmente racional.

Vemos como Podczeck y Yannelis (2008) también hacen uso del método de economías truncadas o subeconomías de Bewley (1972). Este método es particularmente idóneo, como veremos, en nuestro caso, donde los conjuntos de producción son no convexos. Por tal motivo, esta será la estrategia de demostración que utilizaremos en los teoremas

centrales de esta tesis en el próximo capítulo. Sin embargo, como se hará alusión, las características de la economía que estudiaremos (con externalidades, con conjuntos de producción no convexos y un espacio de dimensión infinita) no permitirán una aplicación directa de este método. En el Capítulo Tercero volveremos detalladamente sobre esta cuestión. A continuación exponemos, sucintamente, otros métodos de prueba de existencia de equilibrio en economías con espacios de bienes de dimensión infinita.

#### 1.4.2 El método de Negishi

Este método, basado en el argumento de Negishi (1960), explota la idea de que bajo ciertos supuestos un vector de equilibrio es un vector Pareto eficiente. De este modo la idea es buscar dichas asignaciones eficientes para luego mostrar que estas, junto con los precios sombra, constituyen un vector de equilibrio general de la economía. La ventaja de este método es que el problema esencialmente se reduce a uno con espacios finitos. Algunos trabajos que siguen esta aproximación son Van Geldrop y Withagen (1990 y 1994), Keyzer (1991) y Ginsburgh y Keyzer (1997) entre otros.

Cuando las economías son no convexas entonces este método no puede ser usado debido a que, en el equilibrio, los planes agregados de producción pueden no ser eficientes. Consecuentemente, tal equilibrio no es, necesariamente, Pareto óptimo.

#### 1.4.3 El método de equivalencia del núcleo

Esta técnica está basada en el teorema de Debreu-Scarf (1963), el cual, en dimensión finita, asegura la coincidencia entre el conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo de una economía con las intersecciones de los núcleos de todas las replicas. El uso de este método en dimensión infinita podemos encontrarlo en Peleg y Yaari (1970) y Aliprantis, Brown y Burkinshaw (1987 y 1989) entre varios. Básicamente lo que estos autores han hecho es, en primer lugar, mostrar que si existe una topología compatible para la cual el conjunto de asignaciones es compacto, entonces la economía tiene un núcleo no vacío y compacto. Luego demuestran que la intersección de los núcleos de todas las replicas (equilibrio de Edgeworth) es no vacío. Que toda asignación de equilibrio es un equilibrio de Edgeworth, es una simple extensión del primer teorema de la economía del bienestar, el recíproco es cierto si el interior del cono positivo del espacio de bienes es no vacío, por lo que en varios de estos trabajos se usaron espacios que garantizaron dicha condición o se impusieron supuestos adicionales sobre las preferencias.

Dado que en una economía con rendimientos crecientes, el equilibrio puede no ser competitivo, este enfoque no sería el apropiado en el Capítulo Tercero.

#### 1.4.4. El método del exceso de demanda

La idea de este enfoque es similar al caso en dimensión finita y depende del uso del teorema de punto fijo de Kakutani o de alguna de sus variantes. Si se asume que el conjunto de asignaciones es compacto, el paso crucial será obtener un simplex de los precios también compacto. Una vez más, si el cono positivo del espacio de bienes tiene interior no vacío (y las preferencias son monótonas) entonces podemos hallar tal simplex, caso contrario no será, en general, posible hallar un conjunto de precios compacto y que no incluya al cero. Adicionales supuestos se necesitan en este caso.

Varios autores han usado este método, entre ellos, Aliprantis y Brown (1983), Bojan (1974), El-Barkuki (1977), Yannelis (1985), Forenzano (1983) y van Zandt (1989).

Una vez más, la no convexidad de los conjuntos de producción, desaconsejan la aplicación de esta técnica en el Capítulo Tercero.

Estos son básicamente los cuatro métodos que se han utilizado en la teoría para obtener los teoremas de existencia de equilibrio general. Le hemos dedicado más atención al primero de estos no porque lo consideremos más importante sino porque es el que utilizaremos en el Capítulo Tercero de esta tesis. Como hemos adelantado, las circunstancias de nuestra economía, tal como ciertas imperfecciones y fallos del mercado, no permiten usar los métodos alternativos a los de Bewley. Con todo, debemos enfatizar una vez más que por el tipo de circunstancias que tienen lugar en nuestro modelo, no podremos hacer una aplicación rutinaria del método de aproximación por economías finitas.

### 1.5 Principales problemas matemáticos al considerar espacios de dimensión infinita.

En este apartado discutiremos tres dificultades que emergen cuando los modelos de la economía presentan un espacio de bienes de dimensión infinita. Estos tres inconvenientes no son los únicos, pero sí son centrales y todos los autores que han desarrollado sus teorías en dimensión infinita han tenido que tratar específicamente con ellos. Un estudio que trata además otros inconvenientes en dimensión infinita puede hallarse en Jones (1992)

- Bajo los supuestos tradicionales el conjunto de asignaciones factibles no es necesariamente compacto.
- Los conocidos teoremas de separación no necesariamente pueden aplicarse.
- La continuidad conjunta no se verifica.

#### 1.5.1 No compacidad del conjunto de asignaciones factibles

En dimensión finita si: (i) Para todo  $i$ ,  $X_i$  es cerrado y acotado inferiormente y (ii) para todo  $j$  a.  $Y_j$  es cerrado b.  $\sum_j Y_j$  es convexo, c.  $0 \in \sum_j Y_j$ , d.  $(\sum_j Y_j) \cap \mathbb{R}_+^l = \{0\}$  e.  $(\sum_j Y_j) \cap (-\sum_j Y_j) = \{0\}$  (irreversibilidad) y f.  $-\mathbb{R}_+^l \subset \sum_j Y_j$  entonces el conjunto

$$A = \left\{ (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \in X_i^m \times Y_j^n : \sum_i x_i = \sum_j y_j + \sum_i \omega_i \right\} \subset \mathbb{R}^{l(m+n)}$$

es no vacío, cerrado y acotado. De ahí, por el teorema de Heine-Borel (Capítulo Primero, Teorema 18.10) este conjunto es compacto. Esta propiedad es indispensable en la prueba de equilibrio general (véase, por ejemplo, Mas-Colell et al., (1995), p. 634 proposición 17.BB.2 y comentarios).

También, bajo ciertas condiciones, se puede asegurar que  $A$  es cerrado. Así, si imponemos la condición de que  $A$  es acotado entonces (otra vez por Heine-Borel) será

también compacto. En dimensión infinita este resultado no es cierto. Sin embargo, como varios trabajos han demostrado, no es necesario que  $A$  sea compacto en la topología original de  $L$ , sino que es suficiente con que lo sea en alguna topología más débil compatible. Veamos los siguientes casos

1.5.1.1. Espacios de bienes que son duales topológicos de otros espacios  $(L_\infty = L_1^*; \mathcal{M} = C(K)^*)$ .

En estos casos si el conjunto de asignaciones factibles  $A$  es convexo y acotado en norma, entonces, si es cerrado en la topología débil\*, será compacto en la misma topología en virtud del teorema de Alaoglu (Ash (1972), p. 162). Veamos un par de casos.

En Bewley (1972), bajo los supuestos vistos, el conjunto

$$A = \left\{ (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \in X_i^m \times Y_j^n : \sum_i x_i = \sum_j y_j + \sum_i \omega_i \right\} \subset L_\infty^{m+n}$$

es  $\sigma(L_\infty, L_1)^{m+n}$ -compacto. Concretamente, en virtud de los supuestos (i), y (v)  $A$  es  $\sigma(L_\infty, L_1)^{m+n}$ -cerrado. Además se deduce que  $y_{j'} = \sum_i x_i - \sum_{j \neq j'} y_j - \sum_i \omega_i$  de manera que  $y_{j'} \in Y_{j'} \cap (L_\infty^+ - \sum_{j \neq j'} y_j + u)$  y, por el supuesto de acotación,  $y_{j'}$  es acotado. Como esto vale para todo  $j'$ , tenemos que  $(y_j)_{j=1}^n$  es acotado en norma. Por otro lado, de  $A$  deducimos que  $0 \leq x_{i'} = \sum_j y_j + \omega - \sum_{i \neq i'} x_i \leq \sum_j y_j + \omega$ , de modo que  $x_{i'} \in L_\infty^+ \cap (\sum_j Y_j + \sum_i \omega_i)$ , lo cual en virtud de (viii) es acotado. Dado que esto es cierto para todo  $i'$  entonces  $(x_i)_{i=1}^m$  es acotado en norma. Así tendremos que  $((x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n) \in L_\infty^{m+n} = (L_1^{m+n})^*$  es acotado, de modo que por el teorema de Alaoglu,  $A$  es  $\sigma(L_\infty, L_1)^{m+n}$ -compacto.

Un caso similar encontramos en Jones (1984). Como vimos, el espacio de bienes es  $\mathcal{M}$ , de familias de medidas signadas y finitas sobre el espacio medible  $(T, \mathcal{B}_T)$ . Con la topología débil\*,  $\mathcal{M} = C(T)^*$  y el conjunto de asignaciones factibles es

$$A = \left\{ (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \in X_i^m \times Y_j^n : \sum_i x_i = \sum_j y_j + \sum_i \omega_i \right\} \subset \mathcal{M}^{m+n} = (C(T)^{m+n})^*$$

Un supuesto similar al de Bewley (1972) sobre acotación, implica que  $A$  es acotado en norma. Como  $X_i$  e  $Y_j$  son cerrados en la topología débil\* entonces otra vez el teorema de Alaoglu asegura que  $A$  será compacto en dicha topología.

## 1.5.1.2 Espacios reflexivos

En estos casos la topología compatible apropiada es la topología débil. En tales espacios todos los subconjuntos de  $L$  que son convexos, acotados y cerrados en la norma son  $\sigma(L, L^*)$ -compactos. De esta manera, el conjunto de asignaciones factibles  $A$  será débilmente compacto si se comprueba que los conjuntos de consumo y producción son cerrados en la topología de la norma<sup>25</sup> y que  $A$  es acotado.

Por ejemplo, en el trabajo de Chichilnisky y Heal (1984) se usa el espacio  $L_2$  en una economía de intercambio. Usando nuestras notaciones, el conjunto de asignaciones factibles es

$$A = \left\{ (x_i)_{i=1}^m \in X_i^m : \sum_i x_i \leq \sum_i \omega_i \right\} \subset L_2^m$$

Los autores obtienen un cierto conjunto  $m^{-1}\left(L_2, \sum_i \omega_i\right) = \left\{ (x_i)_{i=1}^m \in L_2^m : \sum_i x_i \leq \sum_i \omega_i \right\}$  el cual es cerrado y convexo. De esta forma se observa que  $A = \prod_i X_i \cap m^{-1}\left(L_2, \sum_i \omega_i\right)$  es la intersección de dos conjuntos convexos y cerrados según los supuestos utilizados en el trabajo. Se asume además que para cada  $i$ ,  $X_i$  es acotado inferiormente por un elemento  $h_i$ . Se deduce de  $A$  que  $h_{i'} \leq x_{i'} \leq \sum_i \omega_i - \sum_{i \neq i'} x_i \leq \sum_i \omega_i - \sum_{i \neq i'} h_i$  y ello vale para todo  $i'$ , de modo que  $(x_i)_{i=1}^m$  es también acotado. Luego  $A$  es acotado en norma y, por el teorema de Alaoglu, es débilmente compacto en  $L_2^m$ .

En el apéndice de su trabajo los autores muestran que los resultados pueden extenderse a espacios  $L_p$  con  $1 < p < \infty$ .

1.5.1.3 Los espacios  $L = L_1$  o  $l_1$ 

El espacio  $L_1$  si bien no es reflexivo, tiene como topología apropiada a la topología débil ya que los intervalos de orden son  $\sigma(L_1, L_1^*)$ -compactos. Luego, el conjunto de asignaciones factibles es  $\sigma(L_1, L_1^*)$ -compacto si está acotado por el orden (es decir, pertenecen a un intervalo de orden). En el caso del espacio  $l_1$ , un conjunto débilmente compacto es compacto en la topología de la norma (Aliprantis y Burkinshaw (2006), p. 207, teorema 4.32). Consecuentemente, el conjunto de asignaciones factibles será compacto en la topología débil si se comprueba que es acotado (por el orden). Véase Zame (1987, p. 1085) y Mas-Colell y Zame (1991, p. 1851).

## 1.5.1.4 Espacios reticulados de Banach

Como los ejemplos anteriores son casos particulares de reticulados de Banach, en los modelos que trabajan directamente con estos espacios generales, se asume que existe

<sup>25</sup> Téngase en cuenta que los conjuntos convexos que son cerrados en la topología de la norma son cerrados en la topología débil y viceversa (Capítulo Primero, Sección I, 11.6)

una topología (compatible)  $\mathcal{T}$  donde los intervalos de orden son  $\mathcal{T}$ -compactos, lo cual asegura que los conjuntos de consumo y producción factibles también son  $\mathcal{T}$ -compactos. Véase, por ejemplo Zame (1987), Yannelis y Zame (1986) y Tourky (1999) entre otros.

En un artículo que analiza las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de equilibrio, Keiding (2009) muestra que en espacios vectoriales topológicos ordenados, los intervalos de orden deben ser compactos en la topología débil y absorbentes.

En todos los casos a-d es importante notar que se debe escoger la topología apropiada, pues el problema de compacidad en el conjunto factible no sería tanto el no cumplimiento del teorema de Heine-Borel, sino que directamente dicho conjunto no sería acotado en la norma. El siguiente ejemplo de Mas-Colell y Zame (1991) ilustra esta situación.

Sea el espacio  $L = C^1([0,1])$  con la norma  $\|x\|_1 = \sup|x(t)| + \sup|x'(t)|$ . Supongamos que existen dos consumidores, con conjuntos de consumo  $X_1 = X_2 = L^+$  y dotaciones iniciales  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ . El conjunto factible es

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}$$

Vemos que no existe un número real  $M > 0$  que acota este conjunto. Tomemos, por caso,  $(x_1, x_2)$  con  $x_1(t) = x_2(t) = e^{-Mt}$ . Claramente  $(x_1, x_2)$  está en  $A$  pero  $\|(x_1, x_2)\|_1 > M$

#### 1.5.1.5 Espacio de distribuciones.

El espacio de las distribuciones de Schwartz es un espacio vectorial topológico localmente convexo que cumplen con la propiedad de Heine-Borel. En este sentido, basta con mostrar que el conjunto de asignaciones factibles es cerrado y acotado para significar que es compacto. Precisamente en Olivera (1997) se hace uso de esta propiedad<sup>26</sup>.

A continuación exponemos la segunda dificultad

#### 1.5.2 Interior vacío del cono positivo.

Sea  $L$  un espacio vectorial topológico y sea la correspondencia de preferencias estrictas  $P$ , tal que  $P(\bar{x}) = \{x \in X : x \succ \bar{x}\}$  designa al conjunto de vectores estrictamente preferidos a  $\bar{x}$ . Supongamos, como habitualmente, que este es un conjunto abierto y que  $X \subset L_+$  de modo que  $P(\bar{x}) \subset L_+$ . Sea  $\zeta \in L_+ \setminus P(\bar{x})$ , entonces por los conocidos

<sup>26</sup> En rigor, Olivera asume que la proyección de los conjuntos de asignaciones factibles sobre  $X_i$  e  $Y_j$ , para todo  $i, j$  son compactos en la topología del dual. Dado que  $X_i$  e  $Y_j$  se asumen cerrados para todo  $i, j$ , tenemos que, en virtud del teorema de Heine-Borel, ello es equivalente a asumir que el conjunto de asignaciones factibles sea acotado en mentada topología.

teoremas de separación sabemos que existe una funcional lineal y continua que separa  $\zeta$  de  $P(\bar{x})$  si este último tiene interior no vacío (Capítulo Primero, Sección I, 11.4). Cuando  $L$  es igual a  $\mathbb{R}'$  o a cualquier espacio de dimensión finita, entonces el interior de su cono positivo es no vacío de manera que lo mismo ocurrirá con  $P(\bar{x})$ , por lo que siempre podrá hacerse uso de algún teorema de separación (Capítulo Primero, Sección I, 18.8) Sin embargo, si  $L$  es de dimensión infinita entonces el interior de  $L_+$  no es necesariamente distinto de vacío, de manera que lo mismo sucederá con  $P(\bar{x})$ . De este modo, no podríamos hacer uso de ningún teorema de separación. En los modelos teóricos de equilibrio general, los únicos espacios que garantizan que el ortante positivo tendrá un interior no vacío son  $L_\infty$ , de las funciones medibles esencialmente acotadas, y  $C(K)$ , el espacio de las funciones continuas sobre un compacto  $K$ . En estos espacios sí cabe hacer uso de los teoremas de separación, pero no en otros.

A los efectos de tratar con este inconveniente hemos visto en el Capítulo Primero que se ha propuesto una condición sobre las preferencias conocida como *preferencias propias*. Entre los primeros trabajos que hacen uso de este concepto, encontramos el de Mas-Colell (1986b). El próximo resultado muestra como dicha condición permite hacer uso de los teoremas de separación.

**Resultado 1.5.2.1.** *Si las preferencias son convexas entonces la condición de preferencias propias es equivalente a la existencia de una funcional lineal  $p \in L^*$  que separa los conjuntos  $\{x' \in L_+ : x' \succsim x\}$  y  $x$ . Además  $p(v) > 0$  donde  $v$  es el bien deseable (Capítulo Primero, Sección II, 4.12 y comentarios)*

### **Demostración**

En primer lugar supongamos que existe  $p \in L^*$  tal que  $p(x) \leq p(x')$  para todo  $x' \succsim x$ . Probaremos que  $\succsim$  es propia en  $x$  con relación a  $v$ . En efecto, sea  $C = \{z \in L : p(z) > 0\}$  y supongamos que  $\succsim$  no es propia. Entonces  $-C \cap \{x' - x \in L_+ : x' \succsim x\} \neq \emptyset$ , de modo que para algún  $z \in C$ ,  $z = x - x'$ . De la definición de  $C$  tenemos que  $p(z) = p(x) - p(x') > 0$ , pero entonces tenemos una contradicción con el hecho de que  $x' \succsim x$ . Luego  $\succsim$  es propia en  $x$  con relación a  $v$ . En particular  $z = v$  para algún  $z \in C$ , de manera que también se prueba que  $p(v) > 0$ .

Recíprocamente si  $\succsim$  es propia entonces  $(x - C) \cap \{x' \in L_+ : x' \succsim x\} = \emptyset$ , donde  $\{\cdot\}$  es cerrado y convexo y  $x - C$  es abierto, no vacío y convexo. De esta manera existe  $p \in L^*$  tal que  $p(x) - p(z) \leq p(x')$  para todo  $z \in C$  y  $x' \in \{\cdot\}$ . Dado que  $C$  es un cono abierto en cero y no vacío, se verifica que  $p(x) - p\left(\frac{z}{n}\right) \leq p(x')$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando límites,  $p(x) \leq p(x')$  para todo  $x' \succsim x$ . Por otra parte, como  $x \in \{\cdot\}$  tendremos que  $p(z) \geq 0$  para todo  $z \in C$  y dado que este último es un cono abierto en cero se verificará que  $p(z) > 0$  para todo  $z \in C$ . Luego  $p(v) > 0$ .

■



**Resultado 1.5.2.2** Si  $\text{int } L_+ \neq \emptyset$  entonces la condición de preferencias uniformemente propias es implicada por la condición de monotonicidad.

### **Demostración**

Sea  $C$  el cono abierto generado por  $\text{int } L_+$ , de manera que  $C \subset L_+$ . Supongamos que  $(x - C) \cap \{x' \in L_+ : x' \succsim x\} \neq \emptyset$ , entonces existirá un  $z \in C$  tal que  $x - z \succsim x$ , lo cual es una contradicción con el hecho de que las preferencias son monótonas. ■

Mas-Colell y Zame (1991) muestran que para probar la existencia de equilibrio general es insuficiente con asumir la condición de preferencias propias, antes bien debe suponerse que las preferencias son uniformemente propias. Con ello Mas-Colell (1986b), en una economía de intercambio puro, demuestra: 1. toda asignación débilmente Pareto óptima es soportada por un vector de precios no nulo (p. 1048) y 2. existe un cuasi-equilibrio con un vector de precios distinto de cero (p. 1050).

En el caso de una economía con sector productivo, hemos visto en el Capítulo Primero que es necesario introducir condiciones adicionales sobre los conjuntos de producción a fin de que exista al menos un funcional separador. La demostración es similar a la del Resultado 1.5.2.1. A partir de allí, Mas-Colell (1986a) prueba que existe un vector de precios no nulo que soporta una asignación débilmente Pareto óptima.

### *Otros trabajos y extensiones*

El concepto de *preferencias propias* tiene antecedentes en la teoría económica. Concretamente Chichilnisky y Kalman (1977 y 1980) utilizan, en un espacio de Banach ordenado, lo que ellos llamaron la *condición de cono*<sup>27</sup>. Dicha condición sobre las preferencias es equivalente a la de *propiedad*, usada por Mas-Colell, como se prueba en Chichilnisky (1993). Posteriormente Yannelis-Zame (1986) han extendido la condición de preferencias propias al tratar con relaciones no ordenadas y localmente no saciadas en una economía de intercambio. En el caso de estos autores, el supuesto es el de la existencia de un vector  $v$  que es *extremadamente deseable*. Aliprantis, Tourky y Yannelis (2000) muestran la interrelación que existen entre estas dos caracterizaciones y que, bajo ciertas condiciones, la una implica a la otra. Zame (1987) adapta el concepto de Yannelis-Zame (1986) a una economía de intercambio y producción para probar la existencia de equilibrio competitivo. Más recientemente, Aliprantis et al. (2004) prueban tanto el segundo teorema de la economía del bienestar como el teorema de la equivalencia del núcleo usando un concepto de preferencias propias sin monotonicidad ni transitividad.

Cabe mencionar que en los trabajos de Mas-Colell (1986a y b), Yannelis y Zame (1986), Zame (1987) y Aliprantis et al. (2004), así como muchos otros que han usado algún tipo de condición de propiedad en las preferencias y/o en las tecnologías, han utilizado como espacio de bienes a reticulados vectoriales topológicos. Aliprantis,

<sup>27</sup> El nombre *condición de cono* en realidad fue usado en el último de estos papers. En el del año 1977 se usó una condición equivalente que no llevaba ese nombre.

Florenzano y Tourky (2006) extienden el uso de esta propiedad a espacios vectoriales localmente convexos y ordenados no necesariamente reticulados.

Nuevamente debemos hacer comentarios cuando  $L$  es el espacio de distribuciones. Afortunadamente en este caso se satisface el hecho de que el ortante positivo tiene interior no vacío, por lo que no hace falta ningún tipo de supuesto de propiedad, ni en las preferencias ni en los conjuntos de producción. Por ese motivo, Olivera (1997) puede asumir (sin inconsistencias matemáticas) que los recursos iniciales de cada individuo pertenecen al interior de su conjunto de consumo en la topología del dual. Además, Olivera sigue la metodología de Bewley pero con la importante diferencia que las subeconomías son de dimensión infinita. Estas están definidas en subespacios normados con la topología inducida por la norma, la cual es más fina que la inducida por  $L$ . En consecuencia, cada conjunto de consumo de cada subeconomía tiene un ortante positivo con interior no vacío en la topología de la norma. Así, Olivera puede aplicar a cada una de dichas subeconomías el Teorema 2 de Zame (1987) el cual prueba la existencia de equilibrio competitivo con precios estrictamente positivos en economías con espacios normados.

### 1.5.3 Continuidad conjunta

Veremos ahora el tercero de nuestros problemas en dimensión infinita, el cual trata con los inconvenientes de la continuidad conjunta cuando usamos topologías débiles. Concretamente nos referimos a lo siguiente: Si  $x^\alpha \xrightarrow{\sigma} x$  y  $p^\alpha \xrightarrow{\sigma^*} p$  entonces no necesariamente tendremos que  $p^\alpha(x^\alpha)$  converge a  $p(x)$ . El hecho se agrava por el asunto de que en muchos espacios, a fin de que el conjunto de asignaciones factibles sea compacto, trabajamos con la topología débil  $\sigma(L, L^*)$ , en tanto que para que el simplex de precios también sea compacto, resulta suficiente trabajar con la topología débil\*  $\sigma(L^*, L)$ . Es decir, el uso de otras topologías no asegura la compacidad de estos dos conjuntos como vimos en 1.5.1. Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurre en dimensión finita (Capítulo Primero, Sección I, 18.9), ambas topologías no garantizan la convergencia conjunta. Veamos el siguiente ejemplo

#### Ejemplo 1.5.3.1

Sea la sucesión

$$f_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2_{[0,1]}$$

Tenemos que  $f_n(t) \sigma\left(L^2_{[0,1]}, \left(L^2_{[0,1]}\right)^*\right)$ -converge a 0 ya que para todo  $f \in \left(L^2_{[0,1]}\right)^*$ ,  $f(f_n(t)) = \int_0^1 f_n(t)f(t)dt = \int_0^1 \sin(n\pi t)f(t)dt$  tiende a cero conforme  $n$  tiende a infinito. De igual modo se deduce que  $f_n \in \left(L^2_{[0,1]}\right)^* \sigma\left(\left(L^2_{[0,1]}\right)^*, L^2_{[0,1]}\right)$ -converge a 0. Sin embargo, la sucesión  $f_n(f_n(t)) = \int_0^1 f_n^2(t)dt = \int_0^1 \sin^2(n\pi t)dt$  tiende a  $1/2$  conforme  $n$  tiende a infinito.

En la literatura se ha resuelto este inconveniente a través de ciertas sustituciones a partir del conocimiento de la conducta de los consumidores y productores, y de ciertas propiedades matemáticas. A continuación exponemos los modos como algunos autores han lidiado con este problema.

### 1.5.3.1 Noguchi (1997b)

El autor, en aras de la demostración del teorema principal, muestra en el Lema 15 de su trabajo que si  $\xi \succsim \bar{x}$  entonces  $\bar{p}(\xi) \geq \int_S \alpha(t, s) \bar{p}(z(s)) d\pi(s) + \bar{p}(e(t))$  donde  $\bar{p}$  y  $\bar{x}$  se probarán que pertenecen al vector de equilibrio. En un paso de la demostración queda la siguiente expresión

$$p_{n_\alpha}(x_{n_\alpha}(t)) \geq \int_S \alpha(t, s) p_{n_\alpha}(y_{n_\alpha}(s)) d\pi(s) + p_{n_\alpha}(e(t))$$

donde  $p_{n_\alpha} \xrightarrow{\sigma^*} \bar{p}$ ,  $y_{n_\alpha} \xrightarrow{\sigma} \bar{y}$  y  $x_{n_\alpha} \xrightarrow{\sigma} \bar{x}$ . El autor ensaya una solución a partir de desigualdades. En efecto, cómo

$$\int_S \alpha(t, s) p_{n_\alpha}(y_{n_\alpha}(s)) d\pi(s) \geq \int_S \alpha(t, s) p_{n_\alpha}(z(s)) d\pi(s)$$

y

$$p_{n_\alpha}(\xi) > p_{n_\alpha}(x_{n_\alpha}(t))^{28}$$

para todo  $\alpha$ , podemos sustituir en la expresión de arriba y obtener

$$p_{n_\alpha}(\xi) > \int_S \alpha(t, s) p_{n_\alpha}(z(s)) d\pi(s) + p_{n_\alpha}(e(t))$$

Tomando límites quedaría  $\bar{p}(\xi) \geq \int_S \alpha(t, s) \bar{p}(z(s)) d\pi(s) + \bar{p}(e(t))$ . Como esto vale, en particular para  $z(s) = \bar{y}(s) \in Y(s)$ , tendremos finalmente que  $\bar{p}(\xi) \geq \int_S \alpha(t, s) \bar{p}(\bar{y}(s)) d\pi(s) + \bar{p}(e(t))$ . Luego (Lema 16 y expresiones siguientes),  $\bar{p}(\bar{x}(t)) = \int_S \alpha(t, s) \bar{p}(\bar{y}(s)) d\pi(s) + \bar{p}(e(t))$  de donde se concluye que si  $\xi \succsim \bar{x}$  entonces  $\bar{p}(\xi) \geq \bar{p}(\bar{x})$ .

### 1.5.3.2 Bonnisseau y Meddeb (1999)

En un caso similar, Jean-Marc Bonnisseau busca demostrar que  $\bar{x}$  es un elemento maximal del conjunto  $\left\{x \in X : \bar{p}(x) \leq r_i(\bar{\pi}, (\bar{y}_j))\right\}$ . En un paso de dicha demostración

<sup>28</sup> Véanse las expresiones (15.2) y (15.3) en la página 282 de dicho trabajo. En un trabajo anterior (Noguchi (1997a)) el autor utiliza una estrategia similar para tratar con este problema.

se plantea que  $p^{F(t)}(x') > p^{F(t)}(\omega_i) + \rho_i \left( \left( p_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right) \right)$ . Como la convergencia conjunta no está asegurada, al tomar límites se obtiene:

$$\bar{p}(x') \geq \bar{p}(\omega_i) + \rho_i \left( \left( \lim p_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right) \right)$$

Aquí el autor usa el supuesto PR<sup>29</sup> para llegar a la desigualdad  $\bar{p}(x') \geq \bar{p}(\omega_i) + \rho_i \left( \left( \bar{p}_j(\bar{y}_j) \right) \right) = r_i(\bar{p}, \bar{y}_j)$ . Luego, como  $x'$  está arbitrariamente cerca de  $x$  (y  $x \succsim \bar{x}$ ) se tendrá que  $\bar{p}(x) \geq r_i(\bar{p}, \bar{y}_j)$ . La demostración se completa mostrando que  $\bar{p}(\bar{x}) = r_i(\bar{p}, \bar{y}_j)$

En estos dos trabajos vemos que el uso de ciertas desigualdades y sustituciones permiten tratar el problema de la continuidad conjunta. Veremos otro caso donde se enfrenta este inconveniente de un modo alternativo

#### 1.5.3.3 Jones (1984)

En este trabajo que, como vimos, trata acerca de la existencia de equilibrio en economías con bienes diferenciados, el autor aplica el enfoque de Bewley donde  $T^n$  representa las finitas descripciones de las características relevantes de cada bien. Como  $T^n \subset T^{n+1}$  las economías truncadas están dirigidas por inclusión y, en cada  $n \in \mathbb{N}$ , el vector  $(p^n, x^n, y^n)$  es un equilibrio de  $\mathcal{E}^n$ . Se verifica además que  $(p^n, x^n, y^n) \rightarrow (p, x, y)$ . El paso clave para probar la continuidad conjunta es la demostración de que  $(T^n, p^n)$  es acotada y equicontinua (Lemas 1 y 2 pgs. 526 y 527. Además puede verse Mas-Colell (1975) y Kelley (1962), Teorema 15, pg. 264). De ahí se obtiene que existe  $p \in C(T)$  con  $(T^n, p^n) \rightarrow (T, p)$ ,  $p^n(\omega_i) \rightarrow \bar{p}(\omega_i)$  y  $p^n(x_i^n) \rightarrow p(x_i)$  para todo  $i$ .

#### 1.5.3.4 Olivera (1997)

En el trabajo de Olivera (1997), *Existence of equilibrium in production economies described by means of generalized functions*, también se enfrenta este problema a través de ciertas sustituciones y desigualdades. Sin embargo, merece destacarse que Olivera hace uso de las propiedades del espacio de distribuciones como límite inductivo de espacios normados. En efecto, dado como se construyeron las subeconomías (sobre subespacios normados de dimensión infinita), el autor hace uso del límite inductivo y demuestra que un punto límite de la red de equilibrios es un equilibrio de la economía original, valiéndose, entre otros, de la norma correspondiente a cada subespacio.

---

<sup>29</sup> Este supuesto estipula que si  $(p^{F(t)}, y_j^{F(t)}) \rightarrow (\bar{p}, \bar{y}_j)$  en  $\sigma(L^*, L) \times \sigma(L, L^*)$  y  $p^{F(t)} \in \phi_j(y_j^{F(t)})$  para todo  $t$ , entonces  $\lim p_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \bar{p}_j \bar{y}_j$ .

Con este punto terminamos con el análisis del estado del arte en lo referente a la investigación cuando el espacio de bienes tiene dimensión infinita. En la próxima sección haremos lo propio con las tecnologías no convexas, es decir, el caso en que los conjuntos de producción no son convexas. Analizaremos cuáles han sido las principales contribuciones en esta área.

## 2. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con conjuntos de producción no convexas.

Comenzamos esta sección donde los conjuntos de producción presentan rendimientos crecientes a escala o bien, tipos más generales de no convexidad. Del Capítulo Primero de esta tesis ha quedado marcado el hecho de que cuando alguna de estas situaciones tiene lugar, entonces no podemos considerar la conducta maximizadora de beneficios por parte de los productores. De ahí que no podamos hablar de equilibrio competitivo del tipo Arrow-Debreu. Sin embargo, como veremos, sí existe el concepto de equilibrio general en donde los consumidores maximizan sus preferencias dentro de sus respectivas restricciones presupuestarias, donde la oferta total iguala a la demanda total y donde existe un vector de precios que es aceptado tanto por consumidores como por los productores.

Las investigaciones en torno a la existencia de equilibrio han supuesto distintas conductas por parte de los productores dado que, en general, la maximización de beneficios no es posible. Entre ellas podemos mencionar: tarificación al costo marginal, tarificación al costo medio, tarificación al costo marginal en dos partes, comercio voluntario y tarificación con pérdida acotada. Evidentemente el concepto de equilibrio general en cada una de estas instancias varía, lo cual hace que los distintos modelos no sean directamente comparables. Si bien las conductas establecidas anteriormente no son las únicas, sí han sido las que más han adoptado los investigadores. Es por este motivo que en la revisión de los principales papers consideraremos aquellos que han incorporado a alguna o algunas de las mismas.

### 2.1 Modelos de equilibrio general con distintas conductas de los productores ante la presencia de tecnologías no convexas.

#### 2.1.1 Tarificación al costo marginal

A partir de los teoremas de la economía del bienestar, sabemos que en el óptimo cada unidad vendida debe hacerse al nivel donde los precios igualan al costo marginal. Es decir, al nivel donde se satisfacen las condiciones de primer orden de la maximización de beneficios. Cuando los conjuntos de producción son convexas, dichas condiciones son necesarias y suficientes. Sin embargo, en el caso estudiado por nosotros, no está garantizado que el  $j$ -ésimo productor tendrá, si quiera, beneficios. Veamos algunas de las principales contribuciones bajo este tipo de conducta

##### 2.1.1.1 Mantel (1979)

El trabajo de Rolf Mantel es una de las primeras pruebas de existencia de equilibrio general con rendimientos crecientes. Mantel considera una economía de propiedad privada donde existe un único productor cuyo conjunto de consumo  $Y \subset \mathbb{R}^I$  es no

convexo. La conducta del empresario está dada por una correspondencia<sup>30</sup>  $\phi: \partial Y \mapsto S \subset \mathbb{R}^l$ , donde  $S$  es el simplex de precios. Existen  $m$  ( $i = 1, \dots, m$ ) consumidores, cada uno de los cuales tiene un conjunto de consumo  $X_i \subset \mathbb{R}_+^l$ , una relación de preferencias  $\succsim_i$ , recursos iniciales iguales a  $\omega_i$  y una participación en la firma igual a  $\theta_i$ . Dado un plan de producción  $y \in Y$  y un nivel de precios  $p \in S$ , el ingreso del agente  $i$ -ésimo será  $r_i(p, y) = p \cdot \omega_i + \theta_i p \cdot y$ . Así, la economía queda representada como:  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i, \theta_i)_{i=1}^m, (Y, \phi) \right)$ . Mantel realiza los siguientes supuestos<sup>31</sup>:

*Supuesto C* (sobre los consumidores)

Para todo  $x \in X_i$ , sea  $B_i(x) = \{x' \in X_i : x' \succ x\}$  el conjunto de preferencias estrictas del consumidor  $i$ . Se asume que

- (i) Para todo  $x \in X_i$  y todo  $i=1, \dots, m$  el grafo de  $B_i(x)$  es abierto en  $\mathbb{R}_+^{2l}$  (continuidad)
- (ii) Para todo  $x \in X_i$  y todo  $i=1, \dots, m$   $x \notin coB_i(x)$  (irreflexividad)
- (iii) Para todo  $x \in X_i$  y todo  $i=1, \dots, m$  el conjunto  $B_i(x)$  es convexo.
- (iv) La relación de preferencias inducida por  $B_i$  es transitiva, completa y estrictamente convexa.
- (v) Para todo  $i=1, \dots, m$ ,  $\theta_i > 0$  y  $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ . Además  $\omega_i = \theta_i \omega$  y  $\omega \in \mathbb{R}_{++}^l$

*Supuesto P* (sobre los productores)

- (vi)  $Y$  es cerrado, contiene al cero y satisface la condición de eliminación libre.
- (vii)  $Y$  tiene una superficie suave, es decir, puede representarse por medio de una función continua  $f: \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $Y = \{y \in \mathbb{R}^l : f(y) \leq 0\}$ ,  $0$  es un valor regular de  $f$  (o sea, no es un punto crítico) y  $\partial Y = f^{-1}(0)$ .
- (viii) Para todo  $y \in \partial Y$ ,  $\phi(y) = \nabla f(y) / \|\nabla f(y)\|$ <sup>32</sup> donde  $\nabla f(y)$  es el gradiente de  $f$  en  $y$  y  $\|x\|_1 = \sum_{h=1}^l |x_h|$
- (ix) Si  $\hat{Y} = (Y + \omega) \cap \mathbb{R}_+^l$  e  $y + \omega \in \partial \hat{Y}$  entonces  $\phi(y) \in \mathbb{R}_{++}^l$
- (x)  $\hat{Y}$  es acotado.

Los supuestos (i)-(iv) son estándar en la teoría del equilibrio competitivo. El supuesto (v) implica que  $r_i(p, y) = p \cdot (\omega + \theta_i y)$  o sea la condición de estructura fija de ingresos de Guesnerie (Guesnerie (1975), p. 15). Además (v) implica que

<sup>30</sup> Luego veremos que esta correspondencia es la referida a la tarificación al costo marginal.

<sup>31</sup> La forma en que exponemos aquí los supuestos (i)-(iv) siguen la manera en que el autor los ha presentado en su trabajo. Por su parte (v)-(x) es la forma en que Brown (1991) los expuso al comentar el trabajo de Rolf Mantel. El criterio, a juicio del tesista, se debe simplemente a una cuestión de claridad.

<sup>32</sup> Véase Cornet (1988) para una interpretación de las correspondencias que definen tarificaciones como inversas de las funciones de oferta de los productores.

$\sum_{i=1}^m r_i(p, y) = p \cdot (\omega + y)$ . La condición (vi) es estándar aunque debe notarse que no supone que  $Y$  sea convexa. Las condiciones (vii) y (viii) definen la regla de tarificación al costo marginal. Notemos que (vii) significa que para cada punto  $y$  de su frontera  $\partial Y$ , hay una sola normal al hiperplano tangente a  $\partial Y$  en  $y$ . Finalmente el supuesto (x) muestra, junto con (vi), que el conjunto de asignaciones factibles es compacto.

### Equilibrio

El vector  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, \bar{y}, \bar{p} \right) \in \prod_{i=1}^m X_i \times Y \times S \subset \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^l$  es un equilibrio de la economía  $\mathcal{E}$  si a.  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = y + \omega$ , b. Para todo  $i$ ,  $p \cdot \bar{x}_i \leq r_i(\bar{p}, \bar{y})$  y si  $x' \in B_i(\bar{x})$  entonces  $\bar{p} \cdot x' > r_i(\bar{p}, \bar{y})$  y c.  $\bar{p} = \nabla f(y) / \|\nabla f(y)\|_1$  para todo  $i$ .

**Teorema.** *Bajo los supuestos C y P existe un equilibrio con tarificación al costo marginal.*

La demostración de este teorema puede consultarse en Mantel (1979) pgs. 277-279 y en Brown (1991) pg. 1975.

#### 2.1.1.2 Beato (1982)

En este trabajo la autora analiza la existencia de equilibrio con tarificación al costo marginal en economías con rendimientos crecientes a escala. Al igual que Mantel, cuando la frontera de los conjuntos de producción agregada es diferenciable, la economía tiene una sola empresa. Un segundo teorema extiende los resultados de aquél al incorporar conjuntos de producción con fronteras no diferenciables y varias empresas.

### El modelo y los supuestos

La economía tiene un único productor cuyo conjunto de producción lo denotamos por  $Y$  a la vez que existen  $m$  consumidores con conjuntos de consumo  $X_i$  y funciones de utilidad  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Existen  $l$  bienes, cada uno denotado por el índice  $h = 1, \dots, l$ .

Cada consumidor dispone de una dotación inicial igual a  $\omega_i$  y el total de dotaciones iniciales satisface  $\sum_{i=1}^m \omega_i = \omega \in \mathbb{R}_{++}$ . Así, un plan de producción factible para la economía  $\mathcal{E}$  satisface  $y + \omega \geq 0$ . Sea

$$\Delta := \left\{ \delta := \left( \frac{\delta_1, \dots, \delta_m}{\delta_i} \right) \geq 0 \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^m \delta_i = 1 \right\}$$

Llamaremos al par  $(\mathcal{E}, \delta)$  una  $\delta$ -economía de distribución. Los supuestos con relación a los consumidores son:

Para todo  $i$

1.  $X_i = \mathbb{R}_+$ .
2.  $u_i$  es continua en  $\text{int } X_i$ , estrictamente creciente en  $X_i$  y estrictamente cuasi-cóncava en  $X_i$ .

Respecto del productor, los supuesto son los siguientes

3. Existe una función continuamente diferenciable  $g : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $Y = \{y \in \mathbb{R}^l : g(y) \leq 0\}$  y  $\nabla g \neq 0$
4.  $0 \in Y$
5.  $Y - \mathbb{R}_+^l \subset Y$

Definimos a continuación la noción de equilibrio

**Definición 1.** Un equilibrio con tarificación al costo marginal para una  $\delta$ -economía de distribución se define como el vector  $((\bar{x}_i)_{i=1}^m, \bar{y}, \bar{p}) \in \prod_{i=1}^m X_i \times Y \times \mathbb{R}_+^l$  tal que

1. Para cada  $i$

- (a)  $\bar{x}_i \in \{x_i : \bar{p} \cdot x_i \leq \delta_i \bar{M}\}$
- (b)  $u_i(\bar{x}_i) \geq u_i(x_i)$  para todo  $x_i \in \{x_i : \bar{p} \cdot x_i \leq \delta_i \bar{M}\}$

donde  $\bar{M} := \bar{p} \cdot \bar{y} + \bar{p} \cdot \omega$

2.  $\bar{p} = \lambda \nabla g(\bar{y})$  para algún  $\lambda > 0$  y para todo  $j$ .
3.  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = y + \omega$

Tanto los supuestos como la noción de equilibrio son bastante cercanos a los de Mantel (1979).

El productor se comporta de tal manera que el gradiente de su función de producción evaluado al nivel de producción escogido es proporcional al vector de precios. Si el conjunto de producción es convexo, esta regla de comportamiento se identifica con la maximización de beneficios tradicional. En el caso más general, no se trata de otra cosa sino de la tarificación al costo marginal lo cual forma parte de una de las condiciones de primer orden para un óptimo de Pareto.

**Teorema 1.** Sea  $\mathcal{E} = ((X_i)_{i=1}^m, (u_i)_{i=1}^m, Y, \omega)$  una economía como la descrita anteriormente. Supongamos que los supuestos mencionados se satisfacen. Sea  $\delta \in \Delta \cap \mathbb{R}_{++}^m$ . Entonces, la economía  $(\mathcal{E}, \delta)$  tiene un equilibrio.

La demostración de este teorema se encuentra en Beato (1982) pgs. 677-679.



Notemos que una economía de distribución es un caso especial de una economía de propiedad privada *à la* Debreu. Tómese por caso,  $\theta_j^i = \delta_i$  y  $\omega_i = \delta_i \omega$ .

A continuación, la autora extiende el teorema de existencia al caso en que el conjunto de producción tiene una frontera no diferenciable. En tal caso, utiliza el cono de desplazamientos interiores de los matemáticos Dubovickii y Miljurin (1965) e introducido en la teoría económica por Guesnerie (1975) (véase el Capítulo Primero, Sección I, 19.24 y 19.25). El cono de desplazamientos interiores permite la aproximación de un conjunto a un punto de su frontera por medio de algún cono tangente. Veamos algunos ejemplos en  $\mathbb{R}^2$ . En el gráfico de abajo tomamos  $y = 0$  en aras de la sencillez gráfica

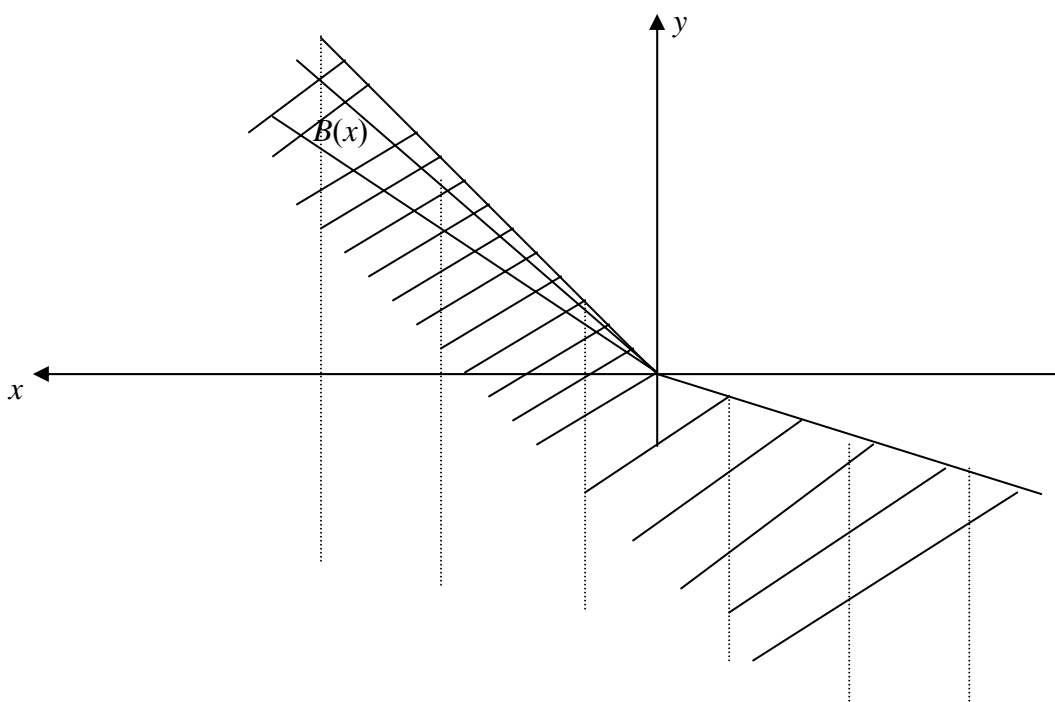


Gráfico II. 2.1.1.2.a

Las líneas punteadas verticales denotan el conjunto de producción, mientras que las líneas continuas diagonales, al cono de desplazamientos interiores.  $B(x)$  es un entorno abierto de  $x$ . Es claro que en este caso  $k[Y, 0] = \text{int } Y$ .

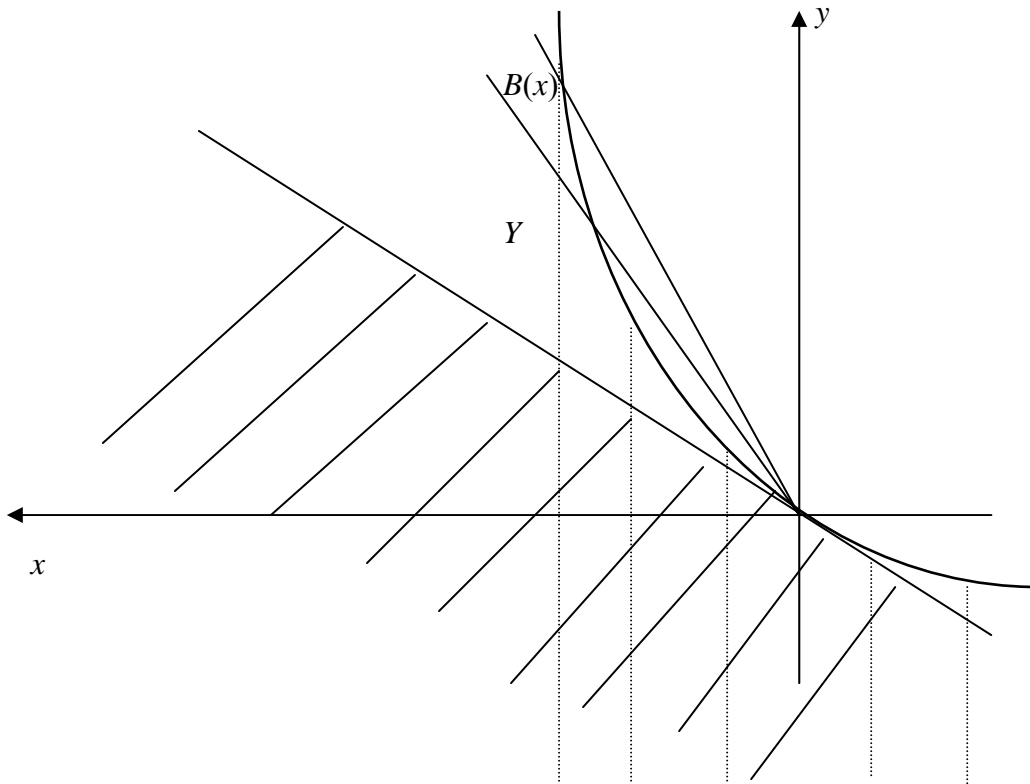


Gráfico II.2.1.1.2.b

Nuevamente, las líneas punteadas verticales denotan el conjunto de producción, mientras que las líneas continuas diagonales al cono  $k[Y, 0]$ . En este caso  $x \in Y$ , pero ningún entorno abierto de  $x$  está en  $k[Y, 0]$ . El gráfico de abajo muestra un caso donde  $x \in k[Y, 0]$  pero  $B(x) \notin Y$ .

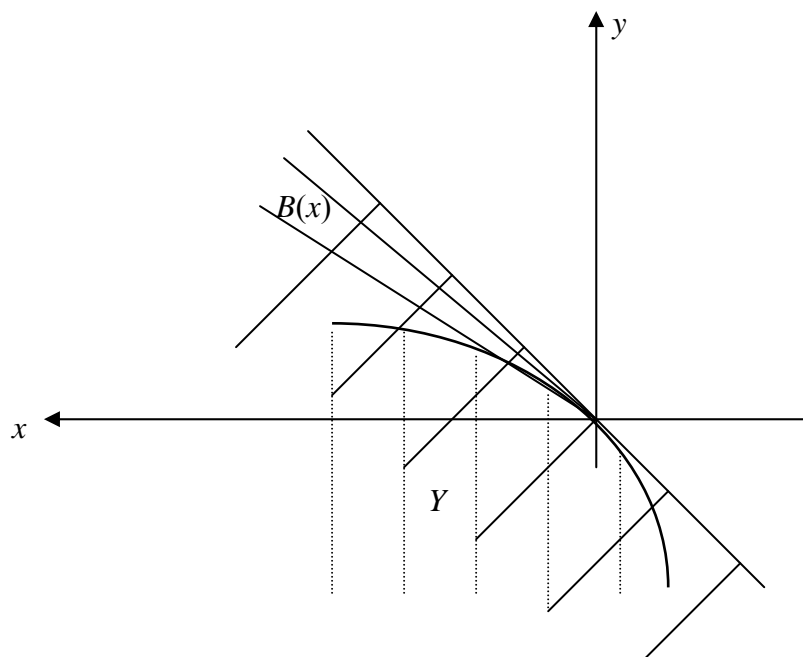


Gráfico II.2.1.1.2.c

Cuando la frontera del conjunto de producción es diferenciable, tenemos además los siguientes resultados

**Proposición 1.** Sea  $Y = \{y \in \mathbb{R}^l : g(y) \leq 0\}$ ,  $g : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}$ ,  $g$  diferenciable. Sea  $\bar{y} \in Y$  tal que  $g(\bar{y}) = 0$  y  $\nabla g(\bar{y}) \neq 0$ . Entonces,  $k[Y, \bar{y}] = \{z \in \mathbb{R}^l : z \nabla g(\bar{y}) < 0\}$ .

**Demostración.** Véase Guesnerie (1979)

Sea  $k_+^o[Y, y]$  el cono polar positivo de  $k[Y, y]$ . Dados los supuestos 3.-5. anteriores, se tiene el siguiente corolario que se encuentra en Beato (1982).

**Corolario 1.** Dado los supuestos de la Proposición 1,

$$k_+^o[Y, \bar{y}] = \{p : \text{existe } \lambda \geq 0 \text{ tal que } \lambda p = -\nabla g(\bar{y})\}$$

Notemos que lo que estos resultados muestran es que cuando la frontera es suave, y el cono de desplazamientos interiores es convexo, entonces el vector de precios en un punto es el vector normal al hiperplano tangente en ese punto. Tomemos por caso el siguiente gráfico

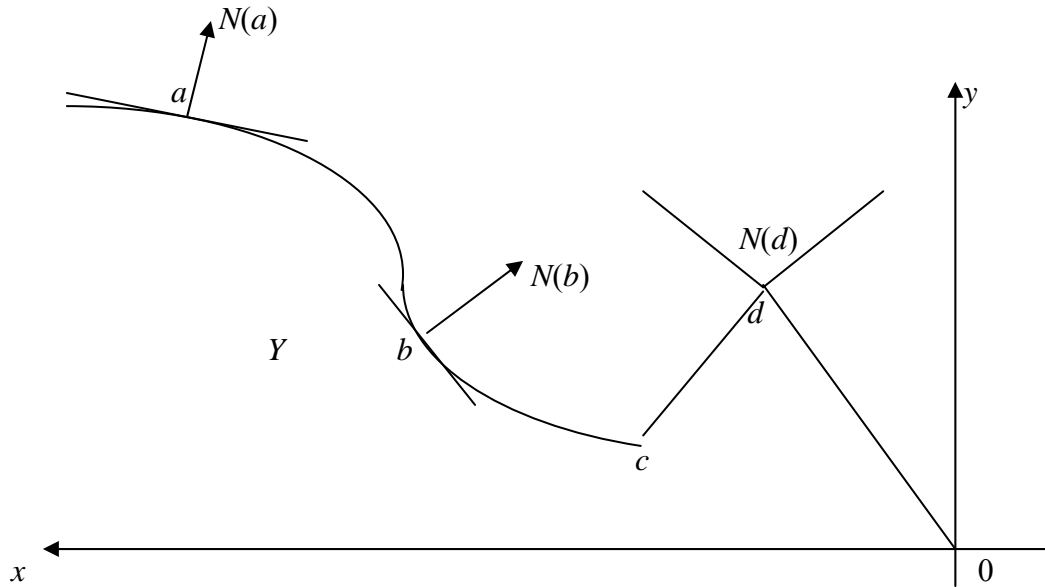


Gráfico II.2.1.1.2.d

El vector de precios en  $a$  consiste en el vector normal a la tangente a la gráfica en  $a$ , denotado por  $N(a)$ . Lo mismo podemos decir acerca de  $b$  y  $N(b)$ . Con relación al punto  $d$ , donde  $k[Y, d]$  es convexo pero no diferenciable, los precios se encuentran en el conjunto de normales al cono de desplazamientos interiores  $N(d)$ . En el caso  $c$ , donde  $k[Y, c]$  es no convexo, la normal al cono de desplazamientos interiores es el vector nulo. Analicemos más de cerca este último caso

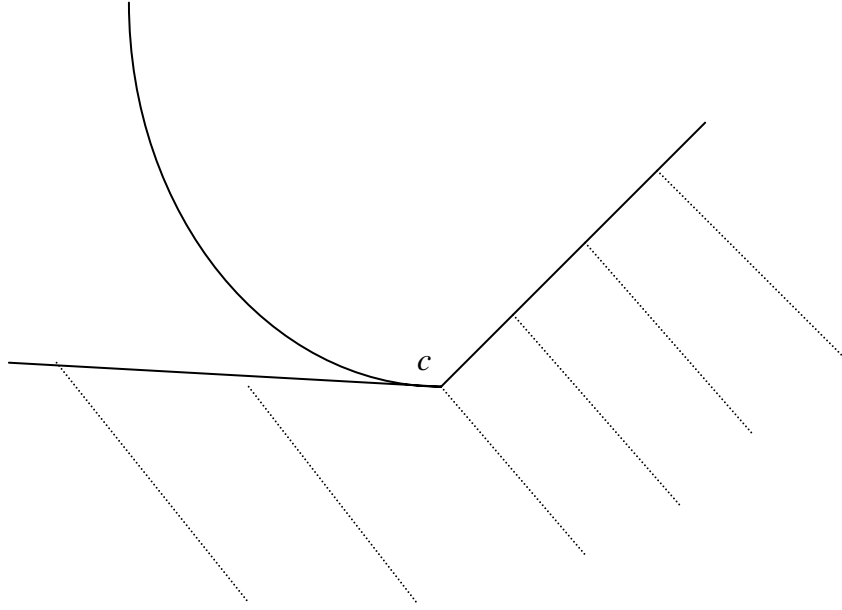


Gráfico II.2.1.1.2.e

En este caso, el cono de desplazamientos interiores, dado por el área rellena con líneas punteadas, es no convexo. Es claro que el conjunto de normales a  $c$  está compuesto únicamente por el vector nulo. Como ello implica un vector de precios igual a cero, es que Guesnerie (1975, 1979) y Beato (1982) excluyen la posibilidad de conjuntos de producción con tramos “torcidos hacia adentro”, es decir, puntos donde los conos de desplazamientos interiores sean no convexos.

**Definición 3.** Sea la economía con distribución  $(\mathcal{E}, \delta)$ . El vector  $((\bar{x}_i)_{i=1}^m, \bar{y}, \bar{p}) \in \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{j=1}^n Y_j \times \mathbb{R}_{++}^l$  es un equilibrio si

1. Para cada  $i$

$$(a) \bar{x}_i \in \{x_i : \bar{p} \cdot x_i \leq \delta_i \bar{M}\}$$

$$(b) u_i(\bar{x}_i) \geq u_i(x_i) \text{ para todo } x_i \in \{x_i : \bar{p} \cdot x_i \leq \delta_i \bar{M}\}$$

$$\text{donde } \bar{M} := \bar{p} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \right) + \bar{p} \cdot \omega$$

2. Para cada  $j$

$$\bar{p} \in -k_+^0[Y_j, \bar{y}_j]$$

$$3. \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$$

**Teorema 2.** Sea la economía de  $\delta$ -distribución. Existe un equilibrio si se satisfacen los siguientes supuestos.

Sobre los consumidores

Los mismos supuestos 1. y 2. considerados en el caso diferenciable

Antes de enunciar los supuestos correspondientes a los productores, definimos los siguientes conjuntos

$$Y := \sum_{j=1}^n Y_j, Y_\omega := Y + \{\omega\}, Y := Y_\omega \cap \mathbb{R}_+^l \text{ y } P := \left\{ p \in \mathbb{R}_+^l : \sum_{h=1}^l p_h = 1 \right\}$$

Los supuestos sobre los conjuntos de producción son:

3.  $k[Y_j, y_j]$  es convexo para todo  $y_j \in \partial Y_j$
4.  $0 \in Y$
5.  $Y - \mathbb{R}_+^l \subset Y$
6. Existe un vector  $\theta \in \mathbb{R}^l, \theta \geq 0$  tal que  $y \in \hat{Y}$  implica  $y \leq \theta$ .
7.  $Y_\omega$  es cerrado y  $0 \notin \partial Y_\omega$
8. Para cada  $y \in \partial Y_\omega, k[Y_\omega, y]$  es convexo.
9. La correspondencia  $\alpha(y) = \{p \in P : -p \in k_+^0[Y_\omega, y]\}$  es hemi-continua superiormente, y  $p \in \alpha(y)$  implica que  $p > 0$  para todo  $y \in \partial \hat{Y}$

La demostración de este teorema se encuentra en el apéndice B de Beato (1982).

Notemos que el trabajo de esta autora permite generalizar los resultados de Mantel (1979) al caso donde existen muchas empresas y dónde las mismas no tienen necesariamente una frontera diferenciable. Sin embargo, el alcance del resultado de existencia dado por el Teorema 2 es limitado, como Beato misma reconoce. En efecto, suponer que el conjunto de producción agregado tiene, en cada punto de su frontera, un cono de desplazamientos interiores convexo, implica formas restrictivas de los conjuntos de producción, ya que estamos diciendo que estos no están “doblados hacia adentro”. El caso se hace más inverosímil cuando vemos que en una economía donde una empresa tiene rendimientos crecientes a escala, la frontera eficiente agregada exhibirá, en general, tramos “doblados hacia adentro”. En estos casos, se requiere que los planes individuales de producción sean drásticamente diferentes (Véase Beato y Mas-Colell (1985)).

Una forma de subsanar el problema de la frontera “doblada hacia adentro” es considerando el cono tangente de Clarke en lugar del cono de desplazamientos interiores. Ello se considera en el próximo punto.

#### 2.1.1.3 Bonnisseau y Cornet (1990b)

Consideremos el gráfico II.2.1.1.2.b. Desde el punto de vista económico, el cono relevante en el punto  $c$ , donde se encuentran los precios, es el cono  $N(c)$  que se muestra abajo.

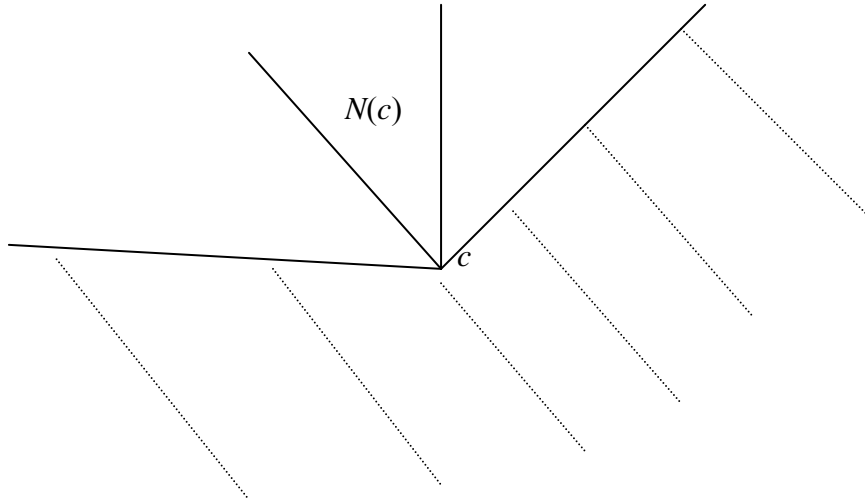


Gráfico II.2.1.1.3.a

$N(c)$  es el conjunto de normales, no al cono de desplazamientos interiores, sino a menos su complemento. Esta idea nos conduce al cono tangente de Clarke (véase Clarke (1983); Capítulo Primero Sección I, 19.11) que fue introducido en la teoría económica por Cornet (1990)<sup>33</sup>. A diferencia del cono de Dubovickii-Miljurin, este es siempre convexo y su interior coincide con el cono de desplazamientos interiores si este es convexo. Más aún, cuando los conjuntos de producción son suaves y convexos, el conjunto de precios que satisface las condiciones necesarias para la maximización del beneficio es precisamente el conjunto de normales al cono tangente de Clarke. Este conjunto recibe el nombre, como ya lo hemos visto, de cono normal de Clarke. Entre otras virtudes de este enfoque, está el hecho de que podemos considerar conjuntos de producción “doblados hacia adentro”.

Bonnisseau y Cornet (1990b) reportan un resultado de existencia en una economía con un sector productivo que presenta conjuntos de producción no convexos, cuyas fronteras no son necesariamente suaves.

### El modelo

Sea la economía  $\mathcal{E}$  con una cantidad  $l$  de bienes,  $m$  de consumidores y  $n$  de productores. Sea  $\omega \in \mathbb{R}^l$  el vector de dotaciones iniciales agregadas. Las posibilidades tecnológicas del  $j$ -ésimo productor ( $j = 1, \dots, n$ ) están dadas por  $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ . Sea  $X_i \subset \mathbb{R}^l$  el conjunto de consumo del  $i$ -ésimo consumidor ( $i = 1, \dots, m$ ). Los autores describen los gustos de los consumidores a través de relaciones de preferencias completas, reflexivas, transitivas y binarias,  $\succeq$ , sobre sus conjuntos de consumo. La relación de preferencias estricta  $x' \succ_i x$  está definida por:  $x' \succeq_i x$  y no  $x \succeq_i x'$ .

La riqueza del  $i$ -ésimo consumidor,  $r_i\left(p, (p \cdot y_j)_{j=1}^n\right)$ , está dada por la función  $r_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  la cual depende del vector de precios  $p$  y de la ganancia o la pérdida

<sup>33</sup> El artículo de Bernard Cornet fue escrito en 1982 y publicado en 1990.

del  $j$ -ésimo productor evaluada en  $p$ ,  $(p \cdot y_j)_{j=1}^n$ . Tenemos claramente incluido aquí el caso de una economía de propiedad privada como en Debreu (1959).

**Definición 1.** Sea la economía  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega \right)$  como la descrita anteriormente. Un equilibrio con tarificación al costo marginal es un elemento  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, \bar{p} \right) \in \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{j=1}^n Y_j \times \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^{l(m+n)} \times \mathbb{R}^l$  que satisface:

- (a) Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es un elemento maximal para  $\succsim_i$  en el conjunto presupuestario  $\left\{ x_i \in X_i : \bar{p} \cdot x_i \leq r_i \left( \bar{p}, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right) \right\}$
- (b) Para todo  $j$ ,  $\bar{y}_j \in Y_j$  y  $p \in N_{Y_j}(\bar{y}_j)$
- (c)  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$

Recuérdese que a partir de lo visto en el Capítulo Primero,  $N_{Y_j}(y_j)$  es el cono normal al conjunto  $Y_j$  en el punto  $y_j$ . Cuando  $Y_j$  es convexo, entonces  $N_{Y_j}(\bar{y}_j) = \{ p \in \mathbb{R}^l : p \cdot \bar{y}_j \geq p \cdot y \text{ para todo } y \in Y_j \}$ . Esto es, la conducta del productor es la de maximización de beneficios. Por su parte, cuando  $\partial Y_j$  es “suave”, es decir cuando el conjunto de producción se puede representar como  $Y = \{ y \in \mathbb{R}^l : g(y) \leq 0 \}$  para alguna función continua  $g$ , entonces  $N_Y(y) = \{ t \nabla g(y) : t \geq 0 \}$ <sup>34</sup>

### Los supuestos

#### Supuesto C

Para todo  $i$ , el conjunto  $X_i$  es no vacío, cerrado, convexo y acotado inferiormente. Por su parte la relación de preferencias  $\succsim_i$  es continua, convexa y localmente no saciada.

#### Supuesto P

Para todo  $j$ , el conjunto  $Y_j$  es no vacío, cerrado, y satisface la condición de eliminación libre,  $Y_j - \mathbb{R}_+^l \subset Y_j$

#### Supuesto R

Para todo  $i$ ,

- (i) la función  $r_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  es continua y satisface

<sup>34</sup> Para las propiedades mencionadas en este párrafo y sus respectivas demostraciones, véase Clarke, (1983)

$\sum_{i=1}^m r_i \left( p, (p \cdot y_j)_{j=1}^n \right) = p \cdot \omega + \sum_{j=1}^n p \cdot y_j$ , y  $r_i \left( tp, t \left( p \cdot y_j \right)_{j=1}^n \right) = tr_i \left( p, (p \cdot y_j)_{j=1}^n \right)$  para todo  $t > 0$ ;

(ii) Si  $\left( p, (y_j) \right) \in \mathbb{R}_+^l \times \prod_{j=1}^n Y_j$ ,  $p \in \cap_{j=1}^n N_{Y_j} (y_j) \setminus \{0\}$ ,  $p \left( \sum_{j=1}^n y_j + \omega \right) > \inf p \cdot X$ ;

y  $\sum_{j=1}^n y_j + \omega \in X$  entonces  $r_i \left( p, (p \cdot y_j)_{j=1}^n \right) > \inf p \cdot X_i$ .

*Supuesto B.*

Para toda  $\bar{\omega} \geq \omega$ , el conjunto de asignaciones factibles

$$\left\{ (y_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n Y_j : \sum_{j=1}^n y_j + \bar{\omega} \in X \right\} \text{ es acotado}$$

*Supuesto WSA*

Para toda  $\bar{\omega} \geq \omega$ , se tiene que:

Para todo  $\left( p, (y_j) \right) \in \mathbb{R}_+^l \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j$ ,  $p \in \cap_{j=1}^n N_{Y_j} (y_j) \setminus \{0\}$  y  $\sum_{j=1}^n y_j + \bar{\omega} \in X$  implican que  $p \left( \sum_{j=1}^n y_j + \bar{\omega} \right) > \inf p \cdot X$

El supuesto C es estándar, mientras que P no asume que la frontera de los conjuntos de producción sea suave. R(i) exige que  $r_i$  sea continua, satisfaga la ley de Walras y que sea homogénea de grado 1 en los precios. (ii) asegura que el ingreso agregado neto se distribuye de tal manera que cada consumidor tiene ingreso suficiente como para subsistir. B es el supuesto de acotación sobre el conjunto factible. Significa que con una cantidad finita de inputs, el sector productivo no puede producir una cantidad ilimita de outputs. El supuesto WSA establece que en la producción de equilibrio hay suficiente ingreso para cubrir todas las pérdidas, y para que los consumidores puedan disponer del ingreso necesario para su consumo de subsistencia.

Ciertas relaciones entre estos supuestos y casos particulares pueden consultarse en Bonnisseau y Cornet (1990b). Nosotros agregamos que el resultado de estos autores extiende, además, uno previo de ellos mismos (Bonnisseau y Cornet (1990a)) donde si bien no suponen que el conjunto agregado de producción tenga una frontera diferenciable, si lo asumen para cada conjunto de producción individual. Enunciamos ahora el principal resultado del trabajo de estos autores

**Teorema 1.** La economía  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i)_{i=1}^m, (Y)_{j=1}^n, \omega \right)$  tiene un equilibrio con tarificación al costo marginal si se satisfacen los supuestos C, P, R, B y WSA.

**Demostración.** Véase Bonnisseau y Cornet (1990b).



## 2.1.1.4 Bonnisseau y Cornet (2008)

Finalizamos esta subsección presentando y haciendo algunos comentarios acerca del trabajo de Bonnisseau y Cornet (2008), *Existence of equilibria with a tight marginal pricing rule*. La principal contribución consiste en establecer un teorema de existencia con una regla de tarificación marginal más precisa que la de Bonnisseau y Cornet (1990b) en el sentido de que el nuevo cono normal que usan los autores (llamado cono intermedio) está contenido en el cono normal de Clarke.

**Definición 1.** Para  $y \in Y$ , el cono intermedio se define como

$$N_Y^I(y) = \bigcup_{t \geq 0} t \limsup_{y' \in Y, y' \rightarrow y} \partial d_y(y')$$

donde  $\partial d_y(y')$  es el gradiente generalizado de Clarke de la función  $d_y(y')$  en  $y'$  definido como<sup>35</sup>

$$\partial d_y(y') = \text{co} \limsup_{y'_j \in \text{dom}(\nabla d_{y_j}), y'_j \rightarrow y_j} \nabla d_{y_j}(y'_j)$$

donde  $\text{dom}(\nabla d_{y_j})$  es el dominio en el cual  $d_{y_j}$  es diferenciable.

**Proposición 1.** Bajo el supuesto *P* de Bonnisseau y Cornet (1990b) se tiene que:

- (a)  $N_Y^I(y) \subset \mathbb{R}_+^l$  y  $\{0\} \neq N_Y^I(y)$ , si  $y \in \partial Y$
- (b) Si  $Y$  es convexo,  $N_Y^I(y) = \{p \in \mathbb{R}^l : p \cdot y \geq p \cdot y', \forall y' \in Y\}$

La demostración se encuentra en Cornet y Czarnecki (2001). Diremos que un productor sigue la regla de fijación de precios al costo marginal en la producción  $y \in \partial Y$  con relación al precio  $p \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ , si  $p \in N_Y^I(y)$ .

**Definición 2.** Sea la economía descrita anteriormente  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i)_{i=1}^m, (Y_j)_{j=1}^n, \omega \right)$ . Un equilibrio con tarificación al costo marginal es un elemento  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, \bar{p} \right) \in \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{j=1}^n Y_j \times \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^{l(m+n)} \times \mathbb{R}^l$  que satisface:

- (a) Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es un elemento maximal para  $\succsim_i$  en el conjunto presupuestario  $\left\{ x_i \in X_i : \bar{p} \cdot x_i \leq r_i \left( \bar{p}, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right) \right\}$
- (b) Para todo  $j$ ,  $\bar{y}_j \in \partial Y_j$  y  $p \in N_{Y_j}^I(\bar{y}_j)$
- (c)  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$

<sup>35</sup> Véase Cornet y Czarnecki (2001)

*Supuestos del modelo*

Los supuestos son básicamente los mismos que en Bonnisseau y Cornet (1990b). La única diferencia estriba en una leve variación en el supuesto R y en el supuesto de supervivencia, el cual es formulado de la siguiente manera

*Supuesto S*

Para todo  $\left(p, (y_j)_{j=1}^n\right) \in PE$ ,  $p \cdot \sum_{j=1}^n y_j > \inf p \cdot X - d_X^\infty\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)$

Este supuesto nos lleva a considerar el siguiente supuesto sobre los ingresos

*Supuesto R*

Para todo  $\left(p, (y_j)_{j=1}^n\right) \in PE$ , si  $(y_j)_{j=1}^n \in A_0 = \left\{(y_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n \partial Y_j : \sum_{j=1}^n y_j \in X\right\}$ , entonces  $r_i\left(p, (y_j)_{j=1}^n\right) > \inf p \cdot X_i - d_X^\infty\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)$  para todo  $i$ .

donde  $d_X^\infty$  denota la distancia de  $\sum_{j=1}^n y_j$  al conjunto  $X$  asociada a la norma del supremo (Capítulo Primero, Sección I, 4.8).

Bajo estos supuestos tenemos el teorema de existencia siguiente

**Teorema 1.** La economía  $\mathcal{E} = \left((X_i, \succsim_i, r_i)_{i=1}^m, (Y)_{j=1}^n, \omega\right)$  tiene un equilibrio con tarificación al costo marginal si se satisfacen los supuestos C, P, R, B y S.

La demostración, dividida en tres partes, se encuentra en Bonnisseau y Cornet (2008). Esta es diferente de la prueba dada en Bonnisseau y Cornet (1990b) debido a que el cono intermedio  $N_{Y_j}^I(y_j)$ , que define (junto con el simplex  $S$ ) la tarificación al costo marginal cuando se produce la cantidad  $y_j$ , no es necesariamente convexo. En Bonnisseau y Cornet (1990b), la convexidad del cono normal de Clarke (junto con la convexidad del simplex  $S$ ) en una producción dada, es fundamental para hacer uso del teorema de punto Fijo de Kakutani. Además, la relación existente entre la regla de asignación de precios y la geometría de los conjuntos de producción es central en la demostración. Ambos hechos no tienen lugar con este nuevo enfoque. Por ello, Bonnisseau y Cornet consideran un argumento diferente, basado en los resultados de Cornet y Czarnecki (2001), sobre aproximación de conjuntos epi-lipschitzianos<sup>36</sup> y compactos, y Bonnisseau y Cornet (1990c), sobre el lema de Morse<sup>37</sup> para transformaciones no diferenciables.

<sup>36</sup> Un conjunto cerrado  $C \subset \mathbb{R}^l$  es epi-Lipschitziano en un punto  $x \in C$  si y solo si,  $\text{int } T_C(x) \neq \emptyset$ .

<sup>37</sup> Sea la función  $f: U \mapsto \mathbb{R}$ . Sea  $f$  de clase  $C^p$ ,  $2 \leq p \leq \infty$ , y  $u_0 \in U$  un punto crítico de  $f$ . Informalmente hablando, el lema de Morse muestra como se comporta  $f$  cerca de  $u_0$ . Para una definición formal y detalles véase Matsumoto (2002).

### 2.1.2 Formas generales de tarificación

En esta sub-sección veremos dos modelos donde la asignación de precios está dada por formas generales, esto es, por correspondencias que satisfacen ciertas condiciones de tal manera que varias clases de conductas pueden considerarse, dependiendo de cada una, como casos particulares de dichas correspondencias. Concretamente, veremos los trabajos de Beato y Mas-Colell (1985) y Bonnisseau y Cornet (1988)

#### 2.1.2.1 Beato y Mas-Colell (1985)

En este trabajo, los autores exponen un teorema de existencia de equilibrio general en el caso “generalizado” de tarificación al costo marginal. El término “generalizado” alude al hecho de que la asignación de precios por parte del  $j$ -ésimo productor está definida no por un cono en particular, sino a través de una correspondencia  $g_j : \partial Y_j \mapsto S$ , donde  $S$  es el simplex unitario y  $\partial Y_j$  la frontera de  $Y_j$ .

#### *Descripción del modelo*

En este modelo, el consumo está representado de forma reducida, i.e., la demanda agregada del mercado está formalizada como una función continua  $f$  de los precios  $p$ , y los planes de producción de las  $n$  firmas  $(y_j)$  en  $\mathbb{R}_+^l$ . Beato y Mas-Colell asumen que

$$p \cdot f\left(p, (y_j)_{j=1}^n\right) = p \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) \text{ si } p \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) \geq 0.$$

#### Supuestos sobre los conjuntos de producción

Para todo  $j$ ,

(H.1)

(i)  $Y_j = K_j - \mathbb{R}_+^l$ , donde  $K_j$  es compacto.

(ii) Sea  $e = (1, 1, \dots, 1)$ , existe  $r > 0$  tal que  $K_j \in \text{int}\left[\{-r \cdot e\} + \mathbb{R}_+^l\right]$

(H.2)

(i)  $g_j$  es hemi-continua superiormente y valorada convexa.

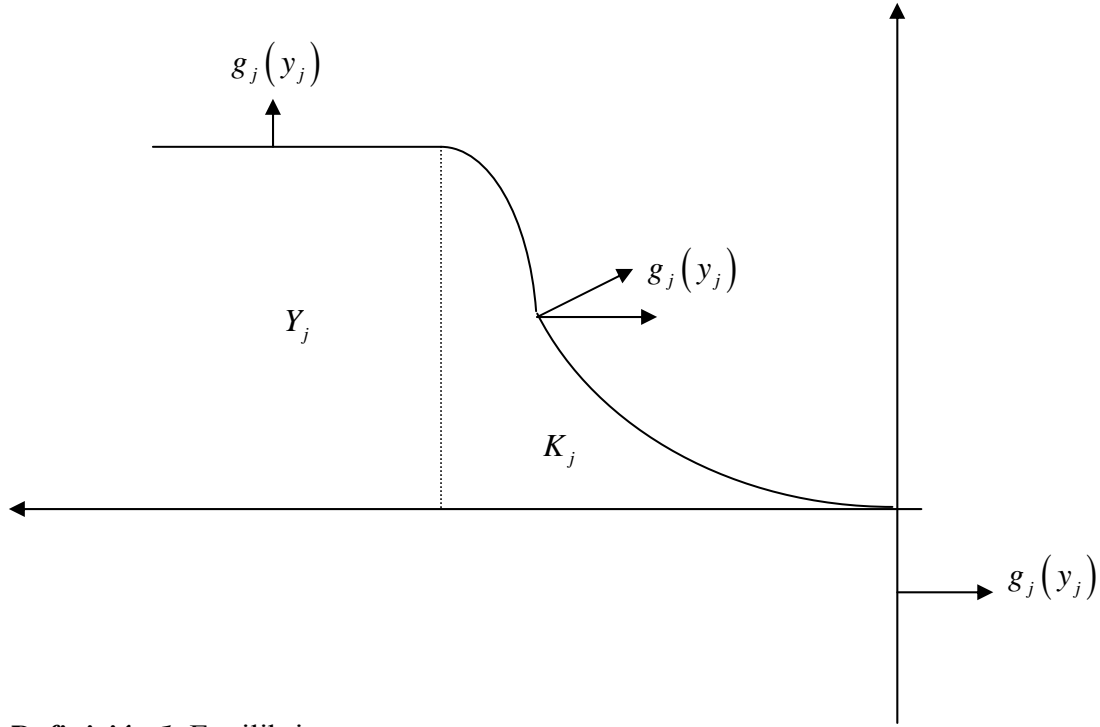
(ii) si  $y_{jh} < -r$  y  $p \in g_j(y_j)$  entonces  $p_h = 0$

(H.3) Si  $\left((y_j)_{j=1}^n, (p)^n\right) \in \prod_{j=1}^n (\partial Y_j \times g_j(y_j))$ , entonces  $p \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) > 0$

En H1  $K_j$  puede interpretarse como el conjunto de producción factible de la firma  $j$ . De este mismo supuesto se tiene que  $\partial Y_j \cap \left[\{-r \cdot e\} + \mathbb{R}_+^l\right]$  es homeomórfico al simplex  $S$ . La interpretación de H.2 es que  $g_j$  es la regla (generalizada) de tarificación que incluye a la tarificación al costo marginal. Cuando el conjunto de producción tiene frontera diferenciable entonces  $g_j$  es el vector normal al conjunto. Si la frontera no es suave, entonces el cono de desplazamientos interiores es un caso particular de la

correspondencia  $g_j$ . Más aún, Bonnisseau y Cornet (1988) muestran, en el Lema 4.2 (c) de su trabajo, que si  $g_j$  es el cono normal de Clarke y si (H.1) (i) tiene lugar, entonces (H.2) (ii) queda satisfecha. Lamentablemente, esta situación no puede aplicarse a todas las reglas de asignación de precios, como por caso, la tarificación al costo medio. (H.3) es el supuesto de supervivencia, el cual es claramente más fuerte que el supuesto WSA de Bonnisseau y Cornet (1990b) y (2008).

Bajo los supuestos (H.1) y (H.2) el conjunto de producción puede ser



**Definición 1.** Equilibrio

El vector  $\left( (\bar{y}_j)_{j=1}^n, (\bar{p}) \right) \in \prod_{j=1}^n (\partial Y_j \times g_j(\bar{y}_j))$  es un equilibrio con eliminación libre de la economía  $\mathcal{E}$  si  $f(\bar{p}, (\bar{y}_j)_{j=1}^n) \leq \sum_{j=1}^n \bar{y}_j$ .

**Teorema 1.** Bajo los supuestos (H.1), (H.2) y (H.3) la economía  $\mathcal{E}$  tiene un equilibrio con eliminación libre.

**Demostración.** Véase Beato y Mas-Colell (1985)

El Teorema 1 anterior, cubre los teoremas de existencia de Mantel (1979) y Beato (1982). Además, el equilibrio puede no ser eficiente en el agregado, que era lo que el modelo de Beato evidenciaba. Por otro lado, como ya hicimos alusión, la correspondencia  $g_j$  no cubre varias conductas seguidas por los productores a la hora de establecer los precios de sus productos. El próximo modelo avanza en esa dirección.

## 2.1.2.2. Bonnisseau y Cornet (1988)

Este modelo es similar al de Bonnisseau y Cornet (1990b) en cuanto a la especificación de la economía. Sin embargo, extiende a aquel ya que los productores siguen formas generales de asignación de precios. Además, se asume que dado el precio fijado por el productor, si la producción es débilmente eficiente, entonces la firma tendrá una cota para su pérdida. Formalmente, existe una correspondencia  $\varphi_j$  de  $\partial Y_j$  a  $\mathbb{R}_+^l$  que verifica lo siguiente

*Supuesto BL.* Para todo  $j$ , existe un número real  $\alpha_j$  tal que  $(y, p_j) \in \partial Y \times S$  y  $p_j \in \varphi_j(y_j)$  implican que  $p_j \cdot y_j \geq \alpha_j$

Esta condición es equivalente a que el  $j$ -ésimo conjunto de producción satisfaga  $[\alpha e, y_j] \subset Y_j$  para algún  $\alpha > 0$  y para todo  $y_j \in Y_j$  (véase el Lema 4.2 en el trabajo de los autores). Evidentemente el supuesto (H.2) (i) de Beato y Mas-Colell está relacionado con BL.

El resultado es más general que los vistos anteriormente (a excepción de Bonnisseau y Cornet (2008) donde el cono intermedio no define un conjunto convexo) ya que la correspondencia  $\varphi_j$  admite toda una variedad de comportamientos por parte de los productores, donde la tarificación al costo marginal y la maximización de los beneficios son tan sólo casos particulares.

Por otro lado, los autores usan básicamente los mismos supuestos que en Bonnisseau y Cornet (1990b). Las diferencias radican en que en este modelo se exigen dos condiciones adicionales, BL y PR, a la vez que el supuesto de supervivencia es más fuerte. Anteriormente vimos la condición BL. Especificamos ahora el supuesto PR sobre la conducta de los productores.

*Supuesto PR*

Para todo  $j$ , la correspondencia  $\bar{\varphi}_j : \partial Y_j \mapsto S$ , definida como  $\bar{\varphi}_j(y_j) = \varphi_j(y_j) \cap S$ , es hemi-continua superiormente, no vacía, valorada convexa y compacta.

Por su parte, el supuesto de supervivencia fuerte SA que usan los autores, es el siguiente

*Supuesto SA*

Si  $(p, (y_j)) \in S \times \prod_{j=1}^n \partial Y_j$  y  $p \in \bigcap_{j=1}^n \varphi_j(y_j)$  entonces  $p \left( \sum_{j=1}^n y_j + \omega \right) > \inf p \cdot \sum_{i=1}^m X_i$

Como mencionamos, este modelo extiende el resultado de Bonnisseau y Cornet (1990b). El costo de ello son los supuestos adicionales que es necesario imponer. En efecto, la condición BL no es necesaria cuando la regla de asignación de precios está dada por la tarificación al costo marginal. Además, la relación entre el cono normal de Clarke y la geometría de los conjuntos de producción permite remover el supuesto PR sobre la continuidad de la asignación de precios en Bonnisseau y Cornet (1990b).

El supuesto SA es más fuerte en el sentido que  $p\left(\sum_{j=1}^n y_j + \omega\right) > \inf p \cdot \sum_{i=1}^m X_i$  implica  $p\left(\sum_{j=1}^n y_j + \bar{\omega}\right) > \inf p \cdot \sum_{i=1}^m X_i$  para toda  $\bar{\omega} \geq \omega$  como se asume en Bonnisseau y Cornet (1990b). Cabe mencionar que a lo largo de los distintos artículos que estos dos autores han realizado, tanto cuando trabajaron en coautoría como cuando lo hicieron por separado, ciertos aspectos de los supuestos SA o WSA y R han ido intercambiándose. Por ello, aunque el supuesto SA no es directamente comparable con WSA en Bonnisseau y Cornet (1990b), si lo son al tomarlos en conjunto, esto es, al comparar SA y R con WSA y R<sup>38</sup>.

La definición de equilibrio es como sigue

**Definición 1.** Sea la economía  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i, \omega_i)_{i=1}^m, (Y_j, \varphi_j)_{j=1}^n \right)$ . Un equilibrio con pérdida acotada es un vector  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, \bar{p} \right) \in \mathbb{R}^{l(m+n)} \times \mathbb{R}^l$  que satisface:

- (a) Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es un elemento maximal para  $\succsim_i$  en el conjunto  $\left\{ x_i \in X_i : \bar{p} \cdot x_i \leq r_i \left( \bar{p}, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right) \right\}$
- (b) Para todo  $j$ ,  $\bar{y}_j \in \partial Y_j$  y  $\bar{p} \in \varphi_j(\bar{y}_j)$
- (c)  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$

Pasamos al teorema principal de los autores

**Teorema 1.** La economía  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, r_i, \omega_i)_{i=1}^m, (Y_j, \varphi_j)_{j=1}^n \right)$  tiene un equilibrio si se satisfacen los mismos supuestos que en Bonnisseau y Cornet (1990b) (excepto WSA), junto con los supuestos BL, PR y SA explicitados anteriormente.

**Demostración.** Véase Bonnisseau y Cornet (1988)

Algunos comentarios importantes de este teorema. En primer lugar, cuando los conjuntos de producción son convexos, y si se satisface el supuesto P, entonces el  $j$ -ésimo productor satisface el supuesto PR. De esta manera, esta condición se cumple tanto cuando existe conducta maximizadora de beneficios, como cuando el productor asigna precios de acuerdo a ley del costo marginal. Recordemos que en este último caso también se cumple el supuesto BL.

Con algunas leves variaciones, este modelo permite obtener, como caso particular, el teorema de existencia de Beato y Mas-Colell (1985) y Vohra (1988) entre otros (véase la sub-sección 3.2 en el trabajo de los autores, en especial los Corolarios 3.5 y 3.6). Finalmente, Bonnisseau y Cornet muestran la relación entre este resultado y el equilibrio con tarificación al costo marginal de Bonnisseau y Cornet (1990b).

<sup>38</sup> También algunas condiciones explicitadas en R, en otro trabajo, aparecen en los supuestos sobre los consumidores C.

Otros trabajos importantes donde se prueba la existencia de equilibrio con reglas generales de asignación de precios son Kamiya (1988a), cuyo supuesto sobre la tarificación garantiza que el beneficio por escala de producción sea asintóticamente no negativo conforme la escala de producción sea infinita, y Vohra (1988), cuya especificación es similar a la de Bonnisseau y Cornet (1988) aunque el dominio de definición incorpora al simplex  $S$  (i.e.  $\varphi_j : S \times \partial Y_j \mapsto S$ ). Dadas las características propias del trabajo de Vohra (1988), sus resultados no son directamente comparables con las de Bonnisseau y Cornet (1988) (véase la sección 3 en el trabajo de Vohra (1988)).

### 2.1.3 Otras formas de tarificación y equilibrio general

Mencionamos ahora otros comportamientos sugeridos en la literatura con rendimientos crecientes a escala. Entre ellas mencionamos tarificación al costo medio, comercio voluntario, conducta cantidad-aceptante, conducta según cantidad-meta, etc. Veamos brevemente la especificación de estos modelos. El lector interesado puede acudir a las ediciones 2 y 3 del número 17 del *Journal of Mathematical Economics* del año 1988, el cual está dedicado completamente al fenómeno de firmas con conjuntos de producción no convexos.

#### 2.1.3.1 Tarificación al costo medio

$$AC_j(y_j) = \{p \in \mathbb{R}_+^l : p \cdot y_j = 0\}$$

En este caso, las empresas con tecnologías no convexas están en equilibrio cuando el precio que asignan a sus productos es tal que sus beneficios son nulos. En general este modelo se ha propuesto en el caso de monopolios públicos.

#### 2.1.3.2 Comercio voluntario (Dehez y Drèze (1988a y b))

En este caso, la conducta de los productores está dada por

$$VT_j(y_j) = \{p \in \mathbb{R}^l : p \cdot y_j \geq p \cdot y \ \forall y \in Y_j \text{ tal que } y \leq y_{j+}\}^{39}$$

Si  $p \in VT_j(y_j)$ , entonces para el  $j$ -ésimo productor será rentable producir las cantidades  $y_{jh}$  en lugar de producir menos. Como consecuencia, a esos precios, se minimiza el costo de producción.

#### 2.1.3.3 Tarificación según cantidad guiada (Dierker y Neufeind (1988))

En este caso, la regla de asignación de precios está dada por una correspondencia  $\psi : (\mathbb{R}_+^{l+k} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+^l \mapsto \mathbb{R}_+^l$ .  $\psi(p, a)$  describe los precios para el sector P que son cargados por las empresas de ese sector a los precios  $p$  y el nivel de actividad  $a$  de acuerdo a algún principio económico. Dierker y Neufeind asumen que es una correspondencia hemi-continua superiormente, valorada compacta y convexa y

<sup>39</sup>  $y_{j+}$  es el vector en  $\mathbb{R}^l$  cuyas componentes son:  $\max\{0, y_{jh}\} (h = 1, \dots, l)$

homogénea de grado 1 en  $p$ . El principio económico que ellos sugieren adoptar es el de *meta de cantidades mínimas*, esto es, una asignación queda descartada como asignación de equilibrio si el producto neto del sector P no alcanza la meta para los bienes del sector P. Formalmente, la meta de cantidades mínimas se define como una función de los precios y de los niveles de producción

$$b: (\mathbb{R}_+^{l+k} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+^l \mapsto \mathbb{R}_+^l$$

$b$  es continua y homogénea de grado cero en los precios. Además  $b(p, a) = 0$  si  $p_h = 0$  para algún bien  $h$  del sector P. En el equilibrio, cada productor  $j$  (i) minimiza su costo, (ii) establece los precios de sus productos por debajo del nivel sugerido por la regla de tarificación  $\psi_j$  y (iii) las aspiraciones de producción de la agencia de planificación se satisfacen y si la meta es excedida por algún bien, entonces el precio establecido por el productor es exactamente igual al sugerido por la correspondencia  $\psi_j$  (véase el Teorema 1 de los autores). Como comentario final cabe mencionar que el modelo asume que la agencia de planificación conoce las posibilidades económicas del sector lo suficiente como para escoger metas que no lleven a una situación demasiado tensa en la economía.

Los papers descritos y analizados a lo largo de toda la sección 2.1 son solo una cantidad limitada de investigaciones llevadas a cabo para obtener resultados de existencia de equilibrio en economías con tecnologías no convexas. Por tanto no se trata de una lista exhaustiva de todos los artículos realizados aunque sí constituyen un catálogo que está incluido en el conjunto de contribuciones más importantes en esta área. A continuación enunciamos algunos trabajos que incorporaron las externalidades al análisis del equilibrio.

### 3. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con externalidades.

En el Capítulo Primero nos hemos adentrado en el concepto de externalidad y sus implicancias en la teoría económica. La literatura sobre este tópico no solamente es abundante sino también con una gran variedad de enfoques. Entre ellos tenemos los trabajos que analizan la existencia de equilibrio con externalidades en economías con un continuo de agentes, es decir, modelos que extienden a los importantes trabajos de Aumann (1964 y 1966) y Schmeidler (1969). Cabe destacar que aquellos toman como externalidad los precios y los consumos de los individuos y que los mismos condicionan a las preferencias de cada agente particular. Esto es, los precios y los perfiles de consumo de los consumidores condicionan la forma en que cada uno de ellos escoge entre las alternativas de consumo. Con sus variantes y matices, en el caso de las economías de intercambio puro, este es el enfoque de Balder (2003 y 2008) y Cornet y Topuzu (2005) por destacar solo algunos trabajos. Lo mismo ocurre con Noguchi y Zame (2006) con la diferencia de que el enfoque de estos autores no es individualista *à la* Aumann sino por características, es decir, en la modelización no se tiene en cuenta al individuo sino a sus características (véase Hart et al. (1974)). Así, Noguchi y Zame describen la economía en términos de distribuciones de probabilidad sobre las características de los agentes. Aquí también los efectos externos condicionan las preferencias de cada consumidor al hacer que aquellas dependan de los consumos del resto de los agentes.



Una limitante de estos modelos es que, aunque las externalidades juegan un papel importante en las preferencias de los consumidores, no ocurre lo mismo con los conjuntos de consumo (por ejemplo Balder (2003 y 2008) y Cornet y Topuzu (2005)), o de producción (por ejemplo Noguchi y Zame (2006)), lo cual hace que el efecto de factores externos no sea tan realista como se esperaría. Por el contrario, modelos donde sí las externalidades condicionan dichos conjuntos son los de Laffont (1976 y 1977) y Laffont y Laroque (1972). Dado que esta será la formalización adoptada por nosotros en el Capítulo Tercero, es que presentamos a continuación una serie de resultados de existencia de equilibrio general bajo este enfoque.

### 3.1 del Mercato (2006)

Esta autora considera una economía de intercambio puro, en donde las externalidades a las que se enfrenta el  $i$ -ésimo consumidor son tanto los consumos de los otros agentes como su dotación inicial. El primero de estos factores sigue la línea desarrollada por Laffont y Laroque (1972) en tanto que la consideración de la dotación inicial con que cuenta el consumidor es visto como un “indicador” de *estatus social* que afecta a las posibilidades de consumo. La herramienta matemática básica usado por del Mercato es la de análisis global<sup>40</sup>, que combina el cálculo con la topología, en lugar del argumento de punto fijo como en Debreu (1959). Más aún, es el primer paper que introduce a las externalidades en el análisis global del equilibrio.

#### *El modelo*

Sea una economía de intercambio con  $L$  bienes y  $m$  consumidores. El espacio de bienes es  $\mathbb{R}_{++}^L$  y los agentes están indexados por el subíndice  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . A continuación detallamos esta economía

$x_i^l$  es el consumo del bien  $l$  por parte del  $i$ -ésimo consumidor;  
 $x_i := (x_i^1, \dots, x_i^l, \dots, x_i^L) \in \mathbb{R}_{++}^L$ ;  $x_{-i} := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$ .

$\omega_i^l$  es la dotación inicial del bien  $l$  por parte del  $i$ -ésimo consumidor;  
 $\omega_i := (\omega_i^1, \dots, \omega_i^l, \dots, \omega_i^L) \in \mathbb{R}_{++}^L$

El conjunto de consumo del  $i$ -ésimo consumidor depende tanto de su dotación inicial como de las acciones emprendidas por los otros consumidores. Así, dados  $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^L$  y  $x_{-i} \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$ , el conjunto de consumo correspondiente al consumidor  $i$  queda definido como:

$$X_i(x_{-i}, \omega_i) = \{x_i \in \mathbb{R}_{++}^L : f_i(x_i, x_{-i}, \omega_i) \geq 0\}$$

<sup>40</sup> Un buen tratamiento del análisis global y su aplicación a la economía puede encontrarse en Debreu (1970) y Smale (1973, 1974a, 1974b, 1974c, 1974d, 1976 y 1981)

donde  $f$  es una función definida de  $\mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_+^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^L$  en  $\mathbb{R}$  y a la que llamamos *función de posibilidad* del consumidor  $i^{41}$ .

Se describen las preferencias de los consumidores a través de funciones de utilidad. Estas dependen de las acciones del resto de los agentes en el siguiente modo:

$$\begin{aligned} u_i : \mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_+^{L(m-1)} &\mapsto \mathbb{R} \\ (\theta, z) &\mapsto u_i(\theta, z) \end{aligned}$$

$u_i(\theta, z)$  es la utilidad del  $i$ -ésimo consumidor asociado a  $(\theta, z) \in \mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_+^{L(m-1)}$

$p^l$  es el precio de una unidad de bien  $l$ ;  $p := (p^1, \dots, p^1, \dots, p^L) \in \mathbb{R}_{++}^L$  es el vector de precios el cual está expresado en unidades de cuentas.

Con la anterior notación, la economía queda expresada como  $\mathcal{E} = (f_i, u_i, \omega_i)_{i=1}^m$

*Definición de equilibrio.*

Antes de dar formalmente la definición de equilibrio de esta economía, recordemos que el problema de maximización de la utilidad del agente  $i$ -ésimo está matemáticamente definido como sigue: dado  $(x_{-i}, p) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^L$ ,

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x_i \in \mathbb{R}_{++}^L} \quad & u_i(x_i, x_{-i}) \\ \text{s.a} \quad & p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i \end{aligned} \tag{1}$$

del Mercado toma al bien  $L$  como numerario y luego normaliza al vector de precios. Nosotros, por simplicidad, seguiremos escribiendo al vector normalizado como  $p$ . En consecuencia, la economía  $\mathcal{E}$  está en equilibrio si existe un vector  $((\bar{x}_i), \bar{p}) \in \mathbb{R}_{++}^{Lm} \times \mathbb{R}_{++}^{L-1}$  tal que

- (a) Para todo  $i = 1$ ,  $\bar{x}_i$  resuelve el problema (1) anterior para  $(\bar{x}_{-i}, \bar{p}) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^{L-1}$
- (b)  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{i=1}^m \omega_i$

*Supuestos del modelo*

A continuación exponemos los supuestos necesarios para la existencia de equilibrio general

---

<sup>41</sup> Nótese que se trata de una formulación equivalente a la del conjunto de producción cuando la frontera del mismo es diferenciable.

Para todo  $i$

- (i) (a) Para cada  $z \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$ , la función  $u_i(\cdot, z)$  es  $C^1$ ; (b) la función  $u_i$  es continua; (c)  $D_\theta u_i(\cdot, \cdot)$  (la derivada direccional de  $u_i$  en la dirección de  $\theta$ ) restringida a  $\mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$  es continua.
- (ii) Para cada  $z \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$ ,  $u_i(\cdot, z)$  es diferenciable, estrictamente cuasi-cóncava y estrictamente creciente<sup>42</sup>.
- (iii) Para cada  $z \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$  y para cada  $u \in \text{Im } u_i$

$$cl_{\mathbb{R}^L} \{ \theta \in \mathbb{R}_{++}^L : u_i(\theta, z) \geq u \} \subseteq \mathbb{R}_{++}^L$$

- (iv) (a) Para cada  $(z, v) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^L$ , la función  $f_i(\cdot, z, v)$  es  $C^1$ ; (b) para cada  $v \in \mathbb{R}_{++}^L$ , la función  $f_i(\cdot, \cdot, v)$  es continua; (c) para cada  $v \in \mathbb{R}_{++}^L$ , la restricción de  $D_\theta f_i(\cdot, \cdot, v)$  a  $\mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)}$  es continua.
- (v) (Convexidad de los conjuntos de consumo) Para cada  $(z, v) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^L$ , la función  $f_i(\cdot, z, v)$  es cuasi-cóncava
- (vi) (Intersección no vacía con el conjunto de presupuesto) Para cada  $(z, v) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^L$ , existe  $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}_{++}^L$  tal que  $f_i(\tilde{\theta}, z, v) > 0$  y  $\tilde{\theta} \ll v$
- (vii) (No saciedad) Para cada  $(z, v) \in \mathbb{R}_{++}^{L(m-1)} \times \mathbb{R}_{++}^L$ ,

$\theta' \in \mathbb{R}_{++}^L$  y  $f_i(\theta', z, v) = 0$  implican:

- (a)  $D_\theta f_i(\theta', z, v) \neq 0$  y (b)  $\exists c(z, v) \in \{1, \dots, L\}$  tal que  $D_{\theta^{(c,z,v)}} f_i(\theta', z, v) \geq 0$

(viii) (Deseabilidad global)

$(\theta'_i, v_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}_{++}^{Lm} \times \mathbb{R}_{++}^{Lm}$  y  $f_i(\theta'_i, \theta'_{-i}, v_i) = 0$  para todo  $i$ , implican

para todo  $l \in \{1, \dots, L\}$ , existe  $i(l) \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $D_{\theta^{(l,i(l))}} f_{i(l)}(\theta', z, v) \geq 0$

Los supuestos (i)-(v) son extensiones directas de los utilizados normalmente en la teoría del consumidor. El Supuesto (iv) sobre la función  $f_i$  es análogo al caso de los conjuntos de producción con frontera diferenciable. El Supuesto (vi) corresponde al supuesto de supervivencia. Una versión más fuerte de este supuesto afirma que cada consumidor tiene dotaciones iniciales en el interior de su conjunto de consumo.

La condición (vii) (a) es un supuesto técnico, el cual implica que la frontera del conjunto de consumo es suave. Este resultado es necesario en la aplicación de las técnicas de topología diferencial. La condición (b) implica que los consumidores nunca están saciados, es decir, que la función de utilidad no alcanza un máximo en el conjunto

<sup>42</sup> Para detalles y especificaciones de este supuesto véase del Mercato (2006) páginas 529-30. Nosotros hemos condensado en el supuesto (ii) lo que para la autora son dos supuestos.

de consumo, lo cual es fundamental para la existencia de equilibrio. En el equilibrio los precios han de ser positivos, y para ello los bienes deben ser “deseables” (Supuesto (viii)). En el trabajo de del Mercato, la idea es como sigue: un bien es “globalmente deseable” si para cada configuración de consumo de la economía, hay un consumidor que puede aumentar estricta y localmente su utilidad aumentando las cantidades de ese bien permaneciendo constantes el resto de sus bienes elegidos en su conjunto de consumo.

#### *Teorema de existencia*

**Teorema 1.** *Dados los supuestos anteriormente enunciados, para cada  $(\omega_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}_{++}^{Lm}$ , el conjunto de equilibrios competitivos para la economía  $\mathcal{E} = (f_i, u_i, \omega_i)_{i=1}^m$ , donde los consumos y los precios son estrictamente positivos, es no vacío y compacto.*

**Demostración.** Véase del Mercato (2006)

Siguiendo el trabajo seminal de Smale (1974a), la autora usa un teorema de homotopía<sup>43</sup> junto a herramientas de topología diferencial para probar el teorema anterior. La idea de usar una homotopía es que cualquier mundo con alguna imperfección (por ejemplo una economía con externalidades) está conectada (a través de un arco) a algún *mundo ideal* (o sea, una economía Pareto-óptima). A lo largo de este arco, los equilibrios se mueven en una forma “más o menos” continua, pero no pueden salirse de la frontera.

Como dijimos al comienzo, el trabajo extiende a los resultados sobre equilibrio general a través de las técnicas de análisis global usadas por Smale (1974a). La autora lleva estos resultados a una economía de intercambio puro con externalidades. El análisis global y las técnicas de la topología diferencial fueron introducidas en la teoría económica por Debreu (1970) para analizar la propiedad de unicidad del equilibrio en economías de intercambio. Usando los teoremas de Sard (véase Sard (1942) para detalles) y de la función inversa, Debreu probó que todas las economías de intercambio tienen un número finito e impar de precios de equilibrio localmente únicos excepto un conjunto de medida nula. Los próximos trabajos también introducen las externalidades a la Laffont a estos estudios

### 3.2. Bonnisseau y del Mercato (2008 y 2010)

Haremos un breve comentario de estos trabajos, los cuales tratan los aspectos de economías regulares con externalidades y restricciones en el consumo. Una economía regular es una economía caracterizada por una función de exceso de demanda la cual tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier precio de equilibrio es distinta de cero<sup>44</sup>.

En el caso de Bonnisseau y del Mercato (2008), el modelo es similar al descripto anteriormente en del Mercato (2006), con la diferencia de que las externalidades están

<sup>43</sup> Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \mapsto Y$  se dicen homotópicas si existe otra aplicación, también continua,  $h : X \times [0, 1] \mapsto Y$  tal que  $h(x, 0) = f(x)$ ,  $h(x, 1) = g(x)$ .

<sup>44</sup> Para una definición formal del concepto de economías regulares véase Mas-Colell et al. (1995) pgs. 591-93.

dadas ahora por las dotaciones iniciales. Así, el conjunto de consumo queda especificado como:

$$X_i(\omega_i) = \{x_i \in \mathbb{R}_{++}^L : f_i(x_i, \omega_i) \geq 0\}$$

En tanto que las preferencias no dependen de las externalidades (a diferencia del paper de del Mercato (2006)). Donde estas sí condicionan a la función de utilidad del individuo es en Bonnisseau y del Mercato (2010). En este trabajo los consumos del resto de los agentes son considerados como externalidad. Los conjuntos de consumo y las funciones de utilidad, dependientes de las externalidades, son respectivamente:

$$X_i(x_{-i}) = \{x_i \in \mathbb{R}_{++}^L : f_i(x_i, x_{-i}) \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} u_i : \mathbb{R}_{++}^L \times \mathbb{R}_+^{L(m-1)} &\mapsto \mathbb{R} \\ (x_i, x_{-i}) &\mapsto u_i(x_i, x_{-i}) \end{aligned}$$

Está claro que desde el punto de vista de la modelización tanto Bonnisseau y del Mercato (2008) como Bonnisseau y del Mercato (2010) son casos particulares de del Mercato (2006). Por consiguiente, la definición de equilibrio será la misma cambiando el vector de externalidad  $(\omega_i, x_{-i})$  por  $(\omega_i)$  y  $(x_{-i})$  respectivamente. Este hecho genera, sin embargo, la necesidad de nuevos supuestos al momento de establecer las condiciones bajo las cuales una economía (aún siendo perturbada) tiene finitos equilibrios.

Estos tres trabajos muestran como las externalidades son contempladas en el análisis del equilibrio. Como ya hemos dicho, la formalización sigue el enfoque de Laffont y Laroque (1972) y Laffont (1977).

En la próxima sección terminamos el presente Capítulo presentando los trabajos que combinan algunos de los fenómenos presentados a lo largo del mismo.

#### 4. El estado del arte en los modelos de equilibrio general con distintas combinaciones de espacios de dimensión infinita, no convexidades y externalidades.

Hasta este momento, hemos revisado las principales contribuciones en teoría del equilibrio general ante distintas circunstancias de espacios infinito-dimensionales, rendimientos crecientes y externalidades. Hemos visto sus problemas y extensiones, supuestos adicionales y limitaciones, etc. Sin embargo, repasamos cada caso aisladamente, es decir, nunca combinamos estos fenómenos. Esta sección, con la cual concluye el Capítulo Segundo, comprende algunos trabajos que sí lo han hecho. El propósito es doble: mostrar las últimas extensiones teóricas y exponer también los “vacíos” de la teoría. Este último punto motiva nuestro Capítulo Tercero.

Existen dos grupos de combinaciones: el de los modelos de equilibrio general con espacio de bienes de dimensión infinita y conjuntos de producción no convexos, y aquellos trabajos de equilibrio general que combinan las externalidades con tecnologías no convexas. En cada uno de estos grupos, los papers se diferencian en la conducta definida para los productores.

#### 4.1 Modelos de equilibrio general con espacios de dimensión infinita y conjuntos de producción no convexos.

Existen dos trabajos que combinan estos fenómenos: Bonnisseau y Meddeb (1999) y Bonnisseau (2002). La diferencia entre ambos es que en el primero la conducta de los productores es similar a la vista en Bonnisseau y Cornet (1988), o sea, es de tipo general, con las particularidades de la dimensión infinita. En el caso de Bonnisseau (2002), la conducta de los productores es la tarificación al costo marginal

##### 4.1.1 Bonnisseau y Meddeb (1999)

Este trabajo, titulado *Existence of equilibria in economies with increasing returns and infinitely many commodities*, combina a las economías descritas en Bonnisseau y Cornet (1988) y Bewley (1972). Por lo tanto el teorema de existencia generaliza a los de aquellos autores. Los supuestos son los mismos que los del trabajo de Bewley, con las siguientes excepciones: los conjuntos de producción no son necesariamente convexos, se presentan variaciones sobre los supuestos de monotonidad y adecuación, y el supuesto de acotación es la versión infinito-dimensional de la misma condición en Bonnisseau y Cornet (1988). Además, los autores agregan los supuestos de eliminación libre (que es crucial en la demostración de equilibrio) y de pérdida acotada, el cual es la versión extendida del mismo supuesto en Bonnisseau y Cornet (1988).

El hecho de que los conjuntos de producción no sean convexos hace necesario introducir un supuesto de continuidad sobre la correspondencia  $\varphi_j$  que define el comportamiento de los productores. Bonnisseau y Meddeb lo llaman supuesto PR

##### Supuesto PR

Para  $j=1, \dots, n$

- (i) La correspondencia  $\varphi_j : \partial_\infty Y_j \mapsto S$  es no vacía y valorada convexa.
- (ii) Para todo subespacio de dimensión finita  $F$  que pertenece a la familia  $\mathcal{F}$ <sup>45</sup>, la correspondencia  $\varphi_j^F$  definida como

$$\varphi_j^F(y_j) = \left\{ p \in F^* : \exists \pi \in \varphi_j(y_j), \forall x \in F, p(x) = \pi(x) \right\}$$

tiene un grafo cerrado.

- (iii) Sea la red  $(p^F, y_j^F) \in S \times Y_j \cap F$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ , tal que

---

<sup>45</sup>  $\mathcal{F}$  es la red de subespacios de dimensión finita de  $L_\infty$  dirigidos por inclusión que contienen tanto a las dotaciones iniciales  $(\omega_i)_{i=1}^n$  como a la función  $\chi_M : M \mapsto \mathbb{R}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (p^F, y_j^F) \rightarrow (\bar{p}, \bar{y}_j) \text{ en la topología producto } \sigma(ba, L_\infty) \times \sigma(L_\infty, L_1) \\ p^F \in \varphi_j^F(y_j^F) \\ p^F(y_j^F)_{F \in \mathcal{F}} \text{ converge} \end{array} \right.$$

entonces:

$$(a) \bar{p}(\bar{y}_j) \leq \lim p^F(y_j^F)$$

$$(b) \text{ Si } \bar{p}(\bar{y}_j) = \lim p^F(y_j^F), \text{ entonces } \bar{y}_j \in \partial_\infty Y_j \text{ y } p \in \varphi_j(\bar{y}_j)$$

Como los autores señalan, la condición (i) es estándar en tanto que las condiciones (ii) y (iii) son más débiles que si directamente se asume que la correspondencia  $\varphi_j$  es hemi-continua superiormente en la topología producto débil\*. Además, si los conjuntos de producción son convexos, la condición PR es automáticamente satisfecha.

La definición de equilibrio es similar a la de Bonnisseau y Cornet (1988) cambiando el espacio  $\mathbb{R}^I$  por  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Dado que los conjuntos de producción no son convexos, no tendremos eficiencia en el sentido de Pareto. Por este motivo, el método para la demostración del teorema de existencia de equilibrio es el de Bewley de aproximaciones finitas. Además de los problemas típicos que emergen en dimensión infinita y que analizamos en la Subsección 1.5 de este capítulo, se añaden que las condiciones de supervivencia débil y de no saciedad local asumidos con relación a la economía original, no se cumplen necesariamente cuando consideramos las subeconomías de dimensión finita. En consecuencia, la estrategia de demostración pasa por construir una red de subeconomías, aplicar el teorema de punto fijo de Kakutani en cada una de ellas y obtener así una red de vectores de consumos, producciones y precios que no necesariamente son equilibrios en las economías auxiliares. Luego, se prueba que esta red tiene un límite y que este es un equilibrio de la economía original.

#### 4.1.2 Bonnisseau (2002)

En *The marginal pricing rule in economies with infinitely many commodities*, J. M. Bonnisseau combina los modelos de Bewley (1972), y Bonnisseau y Cornet (1990a y b) obteniendo así un teorema de existencia que engloba a los anteriores. La descripción teórica de la economía es similar al caso anterior de Bonnisseau y Meddeb (1999) con la sola excepción de que los productores no siguen formas generales de tarificación sino que su comportamiento está formalizado a través de lo que Bonnisseau llama el “Cono Normal grande” (CNG). Este CNG es la versión infinito-dimensional del Cono Normal de Clarke. Como vimos en el Capítulo Primero, Sección I, 19.13, el cono normal es el polar del cono tangente; por este motivo definimos primero el cono tangente usado en Bonnisseau (2002)

**Definición 1.** Sea  $y \in Y$  y sea  $\rho > 0$ . Definimos el siguiente conjunto

$$\mathcal{T}_Y^\rho(y) = \left\{ v \in L_\infty \left| \begin{array}{l} \exists \eta > 0 : \forall r > 0 \exists \text{ un entorno abierto débil}^* U \\ \text{de } y \text{ y } \varepsilon > 0 : \forall y' \in B(y, \rho) \cap U \cap Y, \forall t \in (0, \varepsilon) \\ \left[ \{y'\} + tB(v + \eta(y - y'), r) \right] \cap Y \neq \emptyset \end{array} \right. \right.$$

**Definición 2.** El “Cono Tangente pequeño” de Bonnisseau es  $\mathcal{T}_Y(y) = \bigcap_{\rho > 0} \mathcal{T}_Y^\rho(y)$

**Definición 3.** El CNG de Bonnisseau es  $\mathcal{N}_Y(y) = [\mathcal{T}_Y(y)]^0$

Dado un vector de precios  $p \in S$  y un plan de producción  $y \in \partial_\infty Y$ , el productor sigue la tarificación al costo marginal si  $p \in \mathcal{N}_Y(y)$ .

Como en este modelo la conducta de los productores no es la misma que en Bonnisseau y Meddeb (1999) sino que está dada por el cono  $\mathcal{N}_Y(y)$ , el supuesto BL no es necesario.

**Proposición 1.** Sea  $Y$  un conjunto tal que: es cerrado en la topología débil\*,  $Y \cap L_\infty^+ = \{0\}$  y satisface la condición de eliminación libre, entonces se tiene que:

- (i)  $\mathcal{T}_Y(y)$  es un cono no vacío y convexo y  $\mathcal{N}_Y(y)$  es un cono no vacío, convexo y cerrado.
- (ii)  $-\text{int } L_\infty^+ \subset \mathcal{T}_Y(y)$  y  $\mathcal{N}_Y(y) \subset (L_\infty^+)^*$
- (iii)  $\mathcal{T}_Y(y) \subset T_Y(y)$  y  $\mathcal{N}_Y(y) \subset N_Y(y)$ , donde  $T_Y(y)$  y  $N_Y(y)$  son los conos tangente y normal de Clarke respectivamente. Si  $Y$  es convexo, entonces  $0 \in \mathcal{T}_Y(y) \subset T_Y(y)$  y  $\mathcal{N}_Y(y) = N_Y(y)$ . Si en lugar de  $L_\infty$  consideramos un espacio de dimensión finita entonces  $\mathcal{T}_Y(y) = T_Y(y)$  y  $\mathcal{N}_Y(y) = N_Y(y)$
- (iv) Sea la red  $(p^F, y^F) \in S \times Y$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} (p^F, y^F) \rightarrow (p, y) \text{ en } \sigma(ba, L_\infty) \times \sigma(L_\infty, L_1) \\ p^F \in N_Y(y^F) \cap S \\ p^F(y^F)_{F \in \mathcal{F}} \text{ converge} \end{array} \right.$$

Si  $0 \in \mathcal{T}_Y(y)$ , entonces  $p(y) \leq \lim p^F(y^F)$ . Si  $p(y) = \lim p^F(y^F)$ , entonces  $p \in \mathcal{N}_Y(y)$

Esta proposición es usada en la demostración del teorema de existencia. (i) es directo. (ii) muestra que bajo la tarificación marginal en dimensión infinita, el productor escoge precios no negativos. La afirmación (iii) justifica la terminología empleada por



Bonnisseau y muestra también que el vector de precios no se reduce a cero cuando la producción es débilmente eficiente. Las afirmaciones en los casos en que los conjuntos son convexos y/o los espacios son de dimensión finita muestran la generalidad de los conceptos de  $\mathcal{T}_Y(y)$  y  $\mathcal{N}_Y(y)$ . La afirmación (iv) es fundamental cuando se demuestra que el límite de la red de equilibrios en dimensión finita es un equilibrio en dimensión infinita. Nótese que además reemplaza al supuesto PR visto en Bonnisseau y Meddeb (1999).

Con la excepción de las condiciones BL y PR, el resto de los supuestos de Bonnisseau (2002) son los mismos que en Bonnisseau y Meddeb (1999). La definición de equilibrio es la misma que en Bonnisseau y Cornet (1990b), cambiando  $\mathbb{R}^I$  por  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ . También en este caso es necesario aplicar la técnica de Bewley con los mismos problemas que se mencionaron en la subsección anterior. Sin embargo, Bonnisseau demuestra (Lema 3) que si el subespacio considerado para la subeconomía es lo suficientemente grande, versiones más débiles de los supuestos de supervivencia y de no saciedad local se cumplen y son, además, suficientes para poder aplicar los resultados de Bonnisseau y Cornet (1990b). Así, el autor construye una red de equilibrios correspondientes a las economías auxiliares de dimensión finita, y a través de los mismos argumentos que en Bonnisseau y Meddeb (1999) muestra que esta red tiene un límite el cual es un equilibrio de la economía original.

Al comparar este modelo con Bonnisseau y Meddeb (1999), tenemos que Bonnisseau (2002) puede considerarse como un caso particular de aquél cuando  $\varphi(y) = \mathcal{N}_Y(y)$ . Sin embargo, en este último se necesitan menos supuestos ya que la condición de pérdida acotada no es necesaria y, como ya vimos, la condición PR se cumple cuando se satisfacen los supuestos sobre los productores.

## 4.2 Modelos de equilibrio general con externalidades y conjuntos de producción no convexos.

Consideraremos dos trabajos que combinan los fenómenos de externalidades y rendimientos crecientes: Bonnisseau (1997) y Bonnisseau y Médecin (2001). Una vez más, la diferencia entre ambos es la conducta de los productores. En el primer caso se asume que los mismos siguen una forma general de tarificación al igual que en Bonnisseau y Cornet (1988). En el segundo paper, Bonnisseau y Médecin establecen la conducta de asignación marginal de precios con externalidades a través de un cono que contiene, como caso particular, al de Clarke.

### 4.2.1 Bonnisseau (1997)

Este trabajo no es sino una extensión del modelo de Bonnisseau y Cornet (1988) al importante caso en que se toman en cuenta las externalidades. Los supuestos son directas adaptaciones de aquel; de manera que si no hubiera factores externos, serían los mismos que los de Bonnisseau y Cornet. A diferencia de del Mercato (2006) y de Bonnisseau y del Mercato (2008 y 2010), el enfoque es el de punto fijo antes que el análisis global. Las externalidades condicionan a los consumidores tanto en lo que a conjunto de producción se refiere como a las preferencias. Formalmente:

$$X_i : \mathbb{R}^{l(m+n-1)} \mapsto \mathbb{R}^l$$

$$z_{-i} \mapsto X_i(z_{-i})$$

donde  $z_{-i}$  es el vector de externalidad definido como

$$\left( (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m), (y_j)_{j=1}^n \right).$$

La restricción de las preferencias a la externalidad  $z_{-i}$  es patente en el hecho de que no se pueden comparar dos cestas de bienes si cada una de ellas pertenece a entornos distintos. Simbólicamente, representamos dicha restricción con relación al  $i$ -ésimo consumidor como  $\succsim_{i, z_{-i}}$ . Con relación a los productores, las externalidades condicionan sus planes de producción al hacer que aquellos consideren las decisiones de consumir y de producir del resto de los agentes económicos. Formalmente:

$$Y_j : \mathbb{R}^{l(m+n-1)} \mapsto \mathbb{R}^l$$

$$z_{-j} \mapsto Y_j(z_{-j})$$

donde  $z_{-j} = \left( (x_i)_{i=1}^m, (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \right)$

Al igual que en el caso de los consumidores, en lugar de conjuntos hablamos de correspondencias siguiendo el enfoque de Laffont y Laroque (1972). Por otro lado, un conjunto importante en el trabajo de Bonnisseau (1997) es el conjunto de asignaciones débilmente eficientes:

$$Z = \left\{ z \in L^{m+n} : \forall i \ x_i \in X_i(z_{-i}), \forall j \ y_j \in \partial_\infty Y_j(z_{-j}) \right\}$$

donde  $z = \left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in \mathbb{R}^{l(m+n)}$

Como ya anticipamos, la conducta del  $j$ -ésimo productor está dada por la correspondencia  $\varphi_j$  de Bonnisseau y Cornet (1988). En el caso presente, la misma no está definida en el conjunto de producciones eficientes sino en  $Z$ .

La definición de equilibrio es como sigue:

$$(\bar{z}, \bar{\pi}) = \left( \left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right), \bar{\pi} \right) \in \mathbb{R}^{l(m+n)} \times S \text{ es un equilibrio de la economía}$$

$$\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_{i, \bar{z}_{-i}}, r_i)_{i=1}^m, (Y_j, \varphi_j)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m \right) \text{ si:}$$

(a) Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es  $\succsim_{i, \bar{z}_{-i}}$ -maximal en  $\left\{ x_i \in X_i(\bar{z}_{-i}) : \bar{\pi} \cdot x_i \leq r_i \left( \bar{\pi} \cdot \omega_i, (\bar{\pi} \cdot \bar{y}_j)_{j=1}^n \right) \right\}$

(b)  $\bar{\pi} \in \bigcap_{j=1}^n \varphi_j(\bar{z})$

$$(c) \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$$

Esta definición es la generalización natural del concepto de equilibrio con regla de tarificación general de Bonnisseau y Cornet (1988). Asimismo, si los conjuntos de producción son convexos y no hay externalidades entonces el modelo resultante es el de Arrow-Debreu (1954).

#### 4.2.2 Bonnisseau y Médecin (2001)

Este modelo es similar al anterior con la diferencia de que la conducta de los productores está dada por la correspondencia  $MP_j : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l(m+n)} \mapsto \mathbb{R}^l$  definida como:

$$MP_j(y_j, z) = co \left\{ p \in S \left| \begin{array}{l} \exists (z^v) \subset \mathbb{R}^{l(m+n)}, \quad (z^v) \rightarrow z \\ \exists (y_j^v) \subset \mathbb{R}^l, \quad (y_j^v) \rightarrow y, y_j^v \in \partial Y_j(z^v) \\ \exists (p^v) \subset S, \quad (p^v) \rightarrow p, p^v \in N_{Y_j(z^v)}(y_j^v) \end{array} \right. \right\}$$

donde  $(y_j, z) \in \partial Y_j(z_{-j}) \times Z$ <sup>46</sup> y  $co$  denota la cápsula convexa.

La correspondencia  $MP_j$  expresa la idea de tarificación al costo marginal con externalidades. El productor  $j$  estará en equilibrio si, dados los precios  $p$  y el plan de producción  $y_j \in \partial Y_j(z)$ , se satisface que  $p \in MP_j(y_j, z)$ . Los autores demuestran en el Lema 2.1 que  $MP_j(y_j, z) \supset N_{Y_j(z)}(y_j) \cap S$ , donde  $N_{Y_j(z)}(y_j)$  es el cono normal de Clarke al conjunto  $Y_j(z_{-j})$  en el punto  $y_j$ . En el mismo lema también muestran que  $MP_j$  es una correspondencia hemi-continua superiormente, valorada compacta, convexa y no vacía. De esta manera, Bonnisseau y Médecin (2001) no necesitan el supuesto PR de Bonnisseau (1997) ni tampoco la condición de pérdida acotada asociada con la correspondencia  $\phi_j$ . Cabe aclarar que aunque Bonnisseau y Médecin (2001) puede considerarse como un caso particular de Bonnisseau (1997) cuando  $\phi_j(z) = MP_j(y_j, z)$ , las técnicas matemáticas usadas en el trabajo de Bonnisseau y Médecin son más sofisticadas que las de Bonnisseau (1997). Finalmente, la definición de equilibrio en Bonnisseau y Médecin (2001) es como sigue:

$$(\bar{z}, \bar{\pi}) = \left( \left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right), \bar{\pi} \right) \in \mathbb{R}^{l(m+n)} \times S \text{ es un equilibrio de la economía } \mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, z_i, r_i)_{i=1}^m, (Y_j, \phi_j)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m \right) \text{ si:}$$

<sup>46</sup> En realidad el conjunto  $Z$  considerado en Bonnisseau y Médecin (2001) es ligeramente diferente al definido en Bonnisseau (1997). En este caso,  $Z = \{z \in L^{m+n} : \forall i \ x_i \in X_i(z), \forall j \ y_j \in \partial_\infty Y_j(z)\}$

- (a) Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es  $\succ_{i,\bar{z}}$ -maximal en  $\left\{x_i \in X_i(\bar{z}) : \bar{\pi} \cdot x_i \leq r_i \left( \bar{\pi} \cdot \omega_i, \left( \bar{\pi} \cdot \bar{y}_j \right)_{j=1}^n \right) \right\}$
- (b) Para todo  $j$ ,  $\bar{y}_j \in \partial Y_j(\bar{z})$  y  $\bar{\pi} \in \bigcap_{j=1}^n MP_j(\bar{y}_j, \bar{z})$
- (c)  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$

Es manifiesto que esta definición generaliza a las de Bonnisseau y Cornet (1990a y b).

##### 5. Comentarios finales del capítulo

Claramente la literatura ha avanzado mucho desde el trabajo fundador de Arrow-Debreu (1954). A lo largo de este capítulo hemos expuesto algunas de las principales contribuciones teóricas de aquellos trabajos que consideran, separadamente, espacios de bienes de dimensión infinita, rendimientos crecientes a escala y externalidades. No solo vimos la descripción de los modelos, sino también los alcances, las limitaciones y los supuestos necesarios, además de las importantes implicancias económico-matemáticas. En la última sección repasamos, además, los trabajos que han combinado varios de los fenómenos citados. Subsisten sin embargo algunos vacíos teóricos a saber: Las externalidades no han sido aún modelizadas en el marco de una economía de mercado con espacios de dimensión infinita lo cual implica que el análisis de equilibrio general con (simultáneamente) conjuntos de producción no convexos, externalidades, e infinitos bienes, tampoco haya sido analizado en la literatura. Son precisamente estos temas los que cubrimos en el Capítulo Tercero siguiente y que constituyen la aportación original del tesista a la teoría del equilibrio general.

## CAPÍTULO TERCERO: TEOREMAS DE EXISTENCIA

### 1. Introducción

En los dos capítulos anteriores hemos estudiado los conceptos introducidos y los resultados de existencia alcanzados en la teoría del equilibrio general cuando los espacios de bienes son de dimensión infinita, cuando las empresas presentan rendimientos crecientes a escala o formas más generales de no convexidad en sus producciones y cuando existen externalidades. También hemos mostrado que estas últimas a menudo son causa de que los rendimientos en las empresas no sean decrecientes, motivo por el cual también expusimos modelos que combinaban ambos fenómenos.

Sin embargo, y tal como se vislumbra al final de Capítulo Segundo, subsisten preguntas sin contestar y por lo tanto, alcances teóricos no cubiertos por la literatura. Entre ellos podemos mencionar:

- (i) Las externalidades no han sido aún consideradas al analizar las operaciones de mercado por parte de los agentes económicos cuando el espacio de bienes tiene dimensión infinita.
- (ii) En particular, el efecto que estas tienen sobre los conjuntos de producción, en el sentido de la no convexidad que induce sobre estos, es un asunto no tratado por la teoría económica cuando existen infinitos bienes.
- (iii) En consecuencia, no se ha probado aún que exista un vector de precios de equilibrio en una economía cuyo espacio de bienes es de dimensión infinita, donde los conjuntos de producción son no convexos y con fronteras no necesariamente “suaves” y donde existen externalidades que afectan los conjuntos de consumo, las preferencias y los planes de producción.

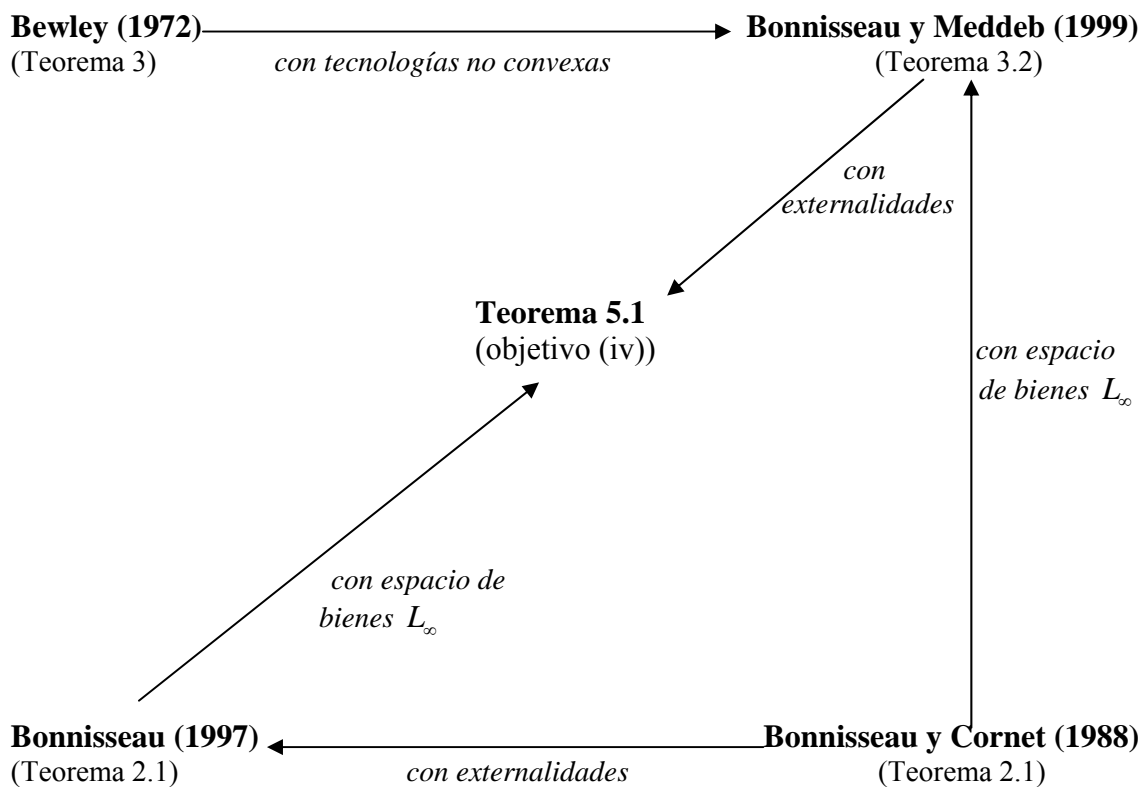
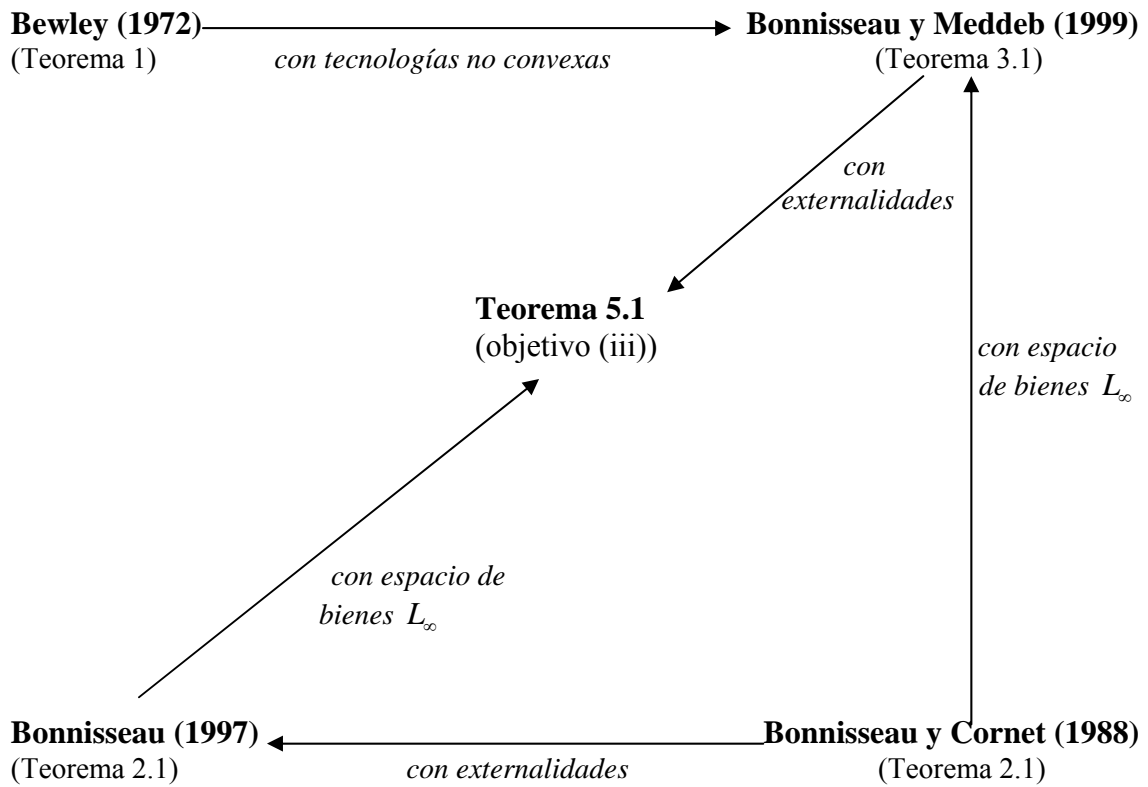
Así, (iii) es el propósito de este capítulo y la aportación original de esta tesis. Sin embargo, también es esencial que los resultados obtenidos tengan interpretación económica. En otras palabras, tan importante es que se pruebe matemáticamente (iii), como que el resultado obtenido tenga sentido desde el punto de vista económico. Por este motivo, explicitamos que en la tesis se debe:

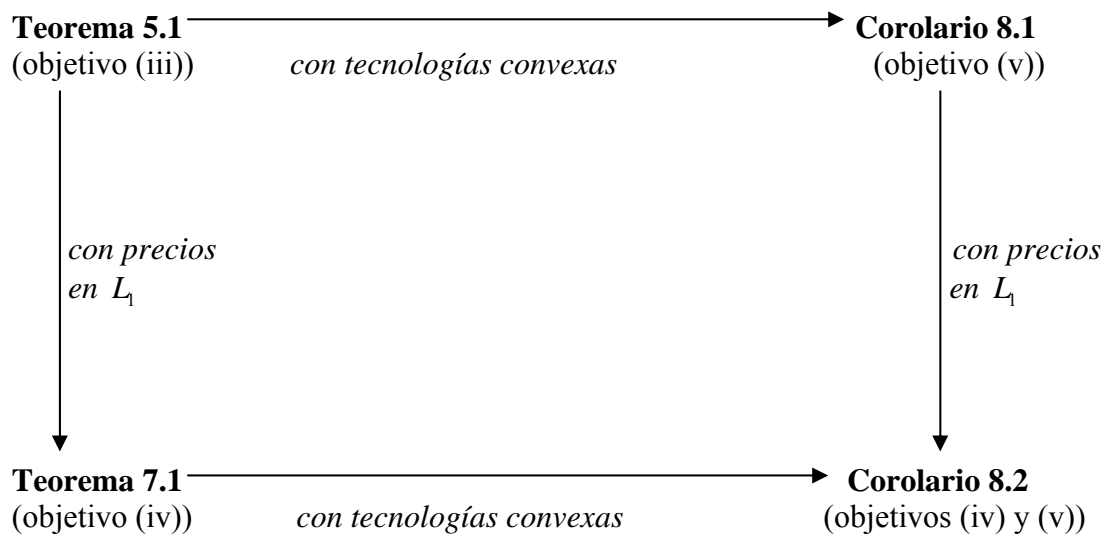
- (iv) Probar no solo la existencia de equilibrio general, sino que además se debe asegurar que el vector de precios tenga significado económico.

Por otro lado, si bien es central la demostración rigurosa de (iii) y (iv) para el cumplimiento del objetivo de la presente tesis, una teoría o modelo debe considerar como casos particulares a las teorías y modelos precedentes a las/los cuales generaliza y/o extiende. Consecuentemente, además de (iii) y (iv) debemos demostrar lo siguiente:

- (v) Si los espacios de bienes son de dimensión finita (en particular  $\mathbb{R}^I$ ), o los conjuntos de producción son convexos, o no existen externalidades, entonces nuestros resultados, que no serían sino corolarios de los resultados de (iii) y (iv), han de coincidir con los teoremas de existencia de los modelos a los cuales nuestros teoremas extienden.

Así, podemos argumentar que el objetivo central de la presente tesis está condensado en el cumplimiento de (iii), (iv) y (v). Exponemos a continuación los siguientes esquemas que clarifican estas consideraciones







## 2. Descripción de la economía

Consideramos una economía con un espacio de bienes infinito dimensional y con una cantidad finita de agentes. Representaremos a dicho espacio por  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el espacio de funciones medibles de valores reales esencialmente acotadas en el espacio de medida  $(M, \mathcal{M}, \mu)$   $\sigma$ -finito y positivo. En el Capítulo Segundo vimos las ventajas que tiene considerar este espacio tanto desde el punto de vista económico como matemático. En lo sucesivo denotaremos a  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ <sup>47</sup> simplemente como  $L$ .

Existen  $m$  consumidores, indexados por  $i=1, \dots, m$  y  $n$  productores, indexados por  $j=1, \dots, n$ . Siguiendo la terminología de Debreu (1959), un estado de la economía se define como

$$z = \left( (x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n}$$

Para todo  $i$ , sea  $z_{-i}$  el elemento de  $L^{m+n-1}$  definido por

$$z_{-i} = \left( (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m), (y_j)_{j=1}^n \right) \in L^{m+n-1}$$

De la misma manera, para todo  $j$ , sea  $z_{-j}$  el elemento de  $L^{m+n-1}$  definido por

$$z_{-j} = \left( (x_i)_{i=1}^m, (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \right) \in L^{m+n-1}$$

Recordemos que una externalidad se representa por toda acción de los agentes económicos, relacionada con actividades de consumo o de inversión, que afecta o puede afectar el (buen) comportamiento del resto de los agentes por una vía directa, es decir sin mediar necesariamente los precios (Capítulo Primero, Sección II, 5.1). Matemáticamente, el conjunto de consumo del  $i$ -ésimo consumidor lo representamos por medio de una correspondencia  $X_i$  definida de  $L^{m+n-1}$  en  $L_+$ . Dada la externalidad o entorno  $z_{-i}$ ,  $X_i(z_{-i}) \subset L_+$  es el conjunto de consumos posibles para el  $i$ -ésimo consumidor. De la misma manera, el conjunto de producción de la  $j$ -ésima firma lo expresamos a partir de la correspondencia  $Y_j$  definida de  $L^{m+n-1}$  en  $L$ .  $Y_j(z_{-j})$  es el conjunto de producción del  $j$ -ésimo productor cuando este está afectado por la externalidad  $z_{-j}$ .

<sup>47</sup> Sin pérdida de generalidad, llamamos a  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$  el conjunto de clases de equivalencia de las funciones  $\mu$ -esencialmente acotadas,  $\mathcal{M}$ -medibles en  $M$ . Sea  $x$  un elemento de  $L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ . Entonces  $x \geq 0$  si  $x(m) \geq 0$   $\mu$ -c.t.p.;  $x > 0$  si  $x \geq 0$  y  $x \neq 0$ , y  $x \gg 0$  si  $x(m) > 0$   $\mu$ -c.t.p. De allí, si  $x$  y  $x' \in L_\infty(M, \mathcal{M}, \mu)$ , entonces  $x \geq x'$  (respectivamente  $x > x', x \gg x'$ ) si  $x - x' \geq 0$  (respectivamente  $x - x' > 0, x - x' \gg 0$ ).  $L_\infty^+(M, \mathcal{M}, \mu) = L_+$  es el cono positivo de  $L$ .

Los gustos de los consumidores se describen por una relación de preferencias completa, reflexiva, transitiva y binaria,  $\succsim_{i,z_i}$ . No asumimos que un individuo pueda comparar dos bienes  $x_i$  y  $x'_i$  si pertenecen a estados  $z_{-i}$  y  $z'_{-i}$  respectivamente y ambos son distintos.

Como vimos en el Capítulo Segundo, los precios se encuentran en el dual topológico de  $L$ ,  $L^*$ . Cuando  $L$  está dotado de la topología de la norma,  $L^*$  está identificado con  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el espacio de las funciones de conjunto acotadas y aditivas en  $(M, \mathcal{M})$  absolutamente continuas con respecto a  $\mu$ . Dados los vectores de bienes y precios respectivamente  $x \in L$  y  $\pi \in ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el valor de esta cesta está dado por la expresión  $\int_M x d\pi$ . Sin embargo, si el vector  $\pi$  de  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$  pertenece a  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$  entonces el valor del vector  $x$  es  $\int_M \pi(m)x(m)d\mu(m)$ , lo cual, como expresáramos en el Capítulo Segundo, Sección 1.3.1, tiene interpretación económica ya que es la extensión, a dimensión infinita, del concepto de producto interior.

El simplex de precios se define como  $S = \{\pi \in ba_+(M, \mathcal{M}, \mu) : \pi(\chi_M) = 1\}$  donde  $\chi_M$  es la función de valor constante 1 para todo  $m$  en  $M$ .

$\sigma(L, L_1) = \sigma^\infty$  es la topología débil\* para la cual el dual topológico de  $L$  es  $L_1$ . Dicha topología hace que el espacio topológico  $(L, \sigma(L, L^*))$  sea un espacio de Hausdorff (Ash (1972) pg. 144). Denotamos por  $\prod_{L^s} \sigma^\infty$  a la topología producto en el espacio  $L^s$ .  $\sigma(L, ba)$  y  $\sigma(ba, L) = \sigma^{ba}$  son las topologías débil y débil\* de  $L$  y  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$  respectivamente. El espacio topológico  $(L, \sigma(L^*, L))$  es también un espacio separado. Denotamos por  $\mathcal{T}$  a la topología de la norma en  $L$ . La correspondencia  $A$  se dice  $(\prod_{L^s} \sigma^\infty, \mathcal{T})$ -hemi-continua inferiormente (abreviado, h.c.i.) si para toda red  $(z^\alpha)$  en  $L^s$  que converge a  $z$  en  $\prod_{L^s} \sigma^\infty$  y  $a \in A(z)$ , hay una red  $(a^\alpha)$  tal que  $a^\alpha \in A(z^\alpha)$  para todo  $\alpha$  y  $a^\alpha$  converge a  $a$  en  $\mathcal{T}$ .

Sea  $\omega_i \in L_+$  la dotación inicial del  $i$ -ésimo consumidor y sea  $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i$  la dotación inicial total de la economía. La renta del  $i$ -ésimo agente la definimos a través de una función de riqueza de  $\mathbb{R}^{1+n}$  a  $\mathbb{R}$ .  $r_i(\pi(\omega_i), (\pi(y_j))_{j=1}^n)$  es la riqueza del  $i$ -ésimo agente si el vector de precios es  $\pi \in S$  y los planes de producción son  $(y_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n Y_j(z_{-j})$ . Notemos que esta definición captura tanto la idea de la participación de los  $m$  consumidores en los dividendos de las empresas como la noción de economía de propiedad privada de Debreu (1959).

Sea el conjunto de asignaciones débilmente eficientes:

$$Z = \{z \in L^{m+n} : \forall i \ x_i \in X_i(z_{-i}) \text{ y } \forall j \ y_j \in \partial_\infty Y_j(z_{-j})\}$$

donde  $\partial_{\infty} Y_j(z_{-j})$  es la  $\mathcal{T}$ -frontera de  $Y_j(z_{-j})$ .

Consideramos una conducta general del productor que incorpora, como caso particular, otras conductas tales como tarificación al costo marginal, etc. Hemos visto en el Capítulo Segundo que cuando los conjuntos de producción son no convexos, es apropiado usar correspondencias cuyo dominio no es el simplex  $S$  sino los conjuntos de producción. En nuestro caso, y generalizando a Bonnisseau (1997), consideramos la correspondencia  $\varphi_j : Z \mapsto S$ . Dado un estado de la economía  $z \in Z, \pi \in L_+^*$  es un vector de precios que el productor  $j$  considera aceptable solo si  $\pi \in \varphi_j(z)$ . Así, diremos que la  $j$ -ésima empresa está en equilibrio en  $(\pi, z) \in S \times Z$  si  $\pi \in \varphi_j(z)$ . Notemos que esta formalización deja abierta la posibilidad a que ciertos productores sean precio aceptantes en tanto que otros sean formadores. Esto último es particularmente cierto en empresas monopólicas que presentan rendimientos crecientes a escala. En el caso de que el conjunto de producción sea convexo tendremos, como caso particular, la conducta maximizadora de beneficios

$$\varphi_j(z) = \left\{ \pi \in S : \pi(y_j) \geq \pi(y'_j), \forall y'_j \in Y_j(z_{-j}) \right\}.$$

Las correspondencias  $X_i$  e  $Y_j$  fueron definidas sobre el espacio  $L^{m+n-1}$ . Notemos que puede ocurrir que ciertos planes  $x_i$  e  $y_j$  no sean posibles al mismo tiempo dado que esas acciones no son compatibles entre sí. Por este motivo definimos al conjunto de asignaciones compatibles débilmente eficientes como aquellos en donde la oferta agregada más la dotación inicial global de bienes alcanza para cubrir la demanda agregada. Formalmente

$$A(\omega) = \left\{ z \in Z : \sum_{i=1}^m x_i \leq \sum_{j=1}^n y_j + \omega \right\}$$

Finalmente el conjunto de producción de equilibrio,  $PE$ , es:

$$PE = \left\{ (\pi, z) \in S \times Z : \pi \in \bigcap_{j=1}^n \varphi_j(z) \right\}$$

### **Definición 2.1. Equilibrio**

$(\bar{z}, \bar{\pi}) = \left( \left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right), \bar{\pi} \right) \in Z \times S$  es un equilibrio de la economía

$$\mathcal{E} = \left( \left( X_i, \succsim_{i, \bar{z}_i}, r_i \right)_{i=1}^m, \left( Y_j, \varphi_j \right)_{j=1}^n, \left( \omega_i \right)_{i=1}^m \right)$$

si:

(a) Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es  $\succsim_{i, \bar{z}_i}$ -maximal en  $\left\{ x_i \in X_i(\bar{z}_{-i}) : \bar{\pi}(x_i) \leq r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \left( \bar{\pi}(\bar{y}_j) \right)_{j=1}^n \right) \right\}$

$$(b) \bar{\pi} \in \bigcap_{j=1}^n \varphi_j(\bar{z})$$

$$(c) \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$$

La primera condición dice que cada consumidor maximiza sus preferencias dentro de su restricción presupuestaria. La segunda condición dice que cada productor establece el mismo nivel de precios de equilibrio. La tercera condición establece que la oferta total es igual a la demanda total.

### 3. Supuestos básicos.

#### Supuesto (C). Consumidores

Para todo  $i$ ,

(i)  $X_i : L^{m+n-1} \rightarrow 2^{L_+}$  es una correspondencia  $(\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, \sigma^\infty)$ -cerrada, valorada convexa y contiene al 0.

(ii) Las preferencias son no saciadas, esto es, para toda  $z_{-i} \in L^{m+n-1}$ , y para todo  $x_i$  en  $X_i(z_{-i})$ , existe  $x$  en  $X_i(z_{-i})$  tal que  $x \succ_{i, z_{-i}} x_i$ . Las mismas son convexas, o sea, para todo  $(x_i, x'_i) \in X_i(z_{-i})^2$ , y para todo  $t \in (0, 1)$ , si  $x'_i \succ_{i, z_{-i}} x_i$  entonces  $tx_i + (1-t)x'_i \succ_{i, z_{-i}} x_i$ . Nótese que ambos supuestos implican que las preferencias son localmente no saciadas (LNS), esto es, para todo  $z_{-i} \in L^{m+n-1}$ , para todo  $x_i$  en  $X_i(z_{-i})$ , y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x$  en  $X_i(z_{-i}) \cap B(x_i, \varepsilon)$  tal que  $x \succ_{i, z_{-i}} x_i$ .

(iv) El conjunto  $\Gamma_i = \{(z_{-i}, x_i, x'_i) \in L^{m+n+1} : (x_i, x'_i) \in X_i(z_{-i})^2, x_i \precsim_{i, z_{-i}} x'_i\}$  es un subconjunto  $\prod_{L^{m+n+1}} \sigma^\infty$ -cerrado de  $L^{m+n+1}$ .

(v) La función  $r_i$  es continua y estrictamente creciente en la segunda variable. Además  $\sum_{i=1}^m r_i\left(\pi(\omega_i), \left(\pi(y_j)\right)_{j=1}^n\right) = \pi(\omega) + \sum_{j=1}^n \pi(y_j)$

#### Supuesto (P). Productores

Para todo  $j$ ,

(i)  $Y_j : L^{m+n-1} \rightarrow 2^L$  es una correspondencia  $(\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, \sigma^\infty)$ -cerrada.

(ii)  $Y_j : L^{m+n-1} \rightarrow 2^L$  es una correspondencia  $(\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, \mathcal{T})$ -h.c.i.

(iii) Existen  $\underline{t}_j$  y  $\bar{t}_j$  en  $\mathbb{R}$  tales que para toda  $z_{-j} \in L^{m+n-1}$ ,  $\underline{t}_j \chi_M \in Y_j(z_{-j})$  y  $\bar{t}_j \chi_M \notin Y_j(z_{-j})$

(iv)  $Y_j(z_{-j}) - L_+ = Y_j(z_{-j})$  para toda  $z_{-j} \in L^{m+n-1}$  (eliminación libre).

*Supuesto (B) (acotación)*

Para todo  $\omega' \geq \omega$ , el conjunto

$A(\omega') = \{z \in Z : \sum_{i=1}^m x_i \leq \sum_{j=1}^n y_j + \omega'\}$  es acotado en norma.

Notemos que en ausencia de externalidades, esto es, si  $X_i$  e  $Y_j$  son correspondencias con valores constantes para todo  $i, j$ , y si  $\succsim_i$  es una relación de preferencias constante para cada  $i$ , entonces los supuestos anteriores son los mismos que los de Bonnisseau y Meddeb (1999)<sup>48</sup>. Con relación a los Supuestos (C), (P) y (B), si el espacio de bienes es  $\mathbb{R}^l$ , entonces estos coinciden con los de Bonnisseau (1997)<sup>49</sup>.

C(i) es la extensión natural de los supuestos usados cuando no existen externalidades. En particular, implica que, para toda  $z_{-i} \in L^{m+n-1}$ , los conjuntos de consumo son no vacíos y acotados inferiormente por 0. Respecto de C(ii) hemos mencionado que implica la condición LNS en las preferencias. El supuesto C(iii) es la extensión estándar del supuesto de preferencias continuas al caso presente en que trabajamos con correspondencias de consumo y externalidades. Por supuesto, ello implica continuidad débil dado un estado fijo o ausencia del mismo. C(iv) es similar a los supuestos usados en Bonnisseau y Meddeb (1999).

Notemos que no hemos introducido ningún supuesto de convexidad en el sector productivo, ni a escala individual, ni en el agregado. P(i) extiende, al caso presente, el supuesto de que los conjuntos de producción son cerrados. P(ii) simplemente generaliza el supuesto de hemicontinuidad inferior de Bonnisseau (1997) al caso actual de dimensiones infinitas. El supuesto P(iii) no está contemplado en el trabajo de Bonnisseau y Meddeb (1999) pero sí en Bonnisseau (1997). El mismo será necesario cuando trunquemos la economía original en subeconomías de dimensión finita. Más allá de eso, lo que este supuesto significa es que no se puede incrementar la producción sin hacer lo propio con los inputs, dado un ambiente o externalidad. El supuesto de eliminación libre (P(iv)) implica que si  $y \in Y_j(z_{-j})$  e  $y' < y$  entonces  $y' \in Y_j(z_{-j})$ .

**Afirmación 3.1** *Bajo el supuesto (P), para cada  $j$ , las producciones son débilmente eficientes si y solo si se encuentran en la  $T$ -frontera de  $Y_j(z_{-j})$ .*

<sup>48</sup> Excepto P(ii) el cual no se requiere.

<sup>49</sup> Excepto el Supuesto C(ii) en el paper de Bonnisseau que discutiremos más adelante. También remarcamos que los supuestos  $X_i(z_{-i}) \subset \mathbb{R}_+^l$  y  $0 \in X_i(z_{-i})$  no están en Bonnisseau (1997).

**Demostración**

Consiste en la equivalencia entre 2.9 y 2.14 del Capítulo Primero, Sección II. ■

El supuesto B significa que el conjunto de asignaciones factibles es acotado aún si se incrementan las dotaciones iniciales. En Bonnisseau y Cornet (1988) se brinda un ejemplo que muestra que el equilibrio puede no existir debido a las posibilidades de pérdida estricta (pg. 146).

*Supuesto (BL) (pérdida acotada)*

Para todo productor  $j = 1, \dots, n$ ; existe un número real  $\alpha_j$  tal que, si  $z \in Z$  y  $\pi_j \in \varphi_j(z)$ , entonces  $\pi_j(y_j) \geq \alpha_j$ .

*Supuesto (WSA) (supervivencia débil)*

Para todo  $(\pi, z, \lambda) \in PE \times \mathbb{R}_+$ , si  $z \in A(\omega + \lambda\chi_M)$  entonces  $\pi(\sum_{j=1}^n y_j + \omega + \lambda\chi_M) > 0$

*Supuesto (R) (ingresos)*

Sea  $(\pi, z) \in S \times A(\omega)$ , si  $\pi(\sum_{j=1}^n y_j + \omega) > 0$  entonces  $r_i(\pi(\omega_i), (\pi(y_j))_{j=1}^n) > 0$ .

El Supuesto (BL) significa que la pérdida (o beneficio) que tiene el productor  $j$ -ésimo está acotada inferiormente dada su conducta  $\varphi_j(\cdot)$ . Con relación al supuesto de supervivencia débil, notemos que si  $z \in A(\omega + \lambda\chi_M)$  entonces  $\sum_j y_j + \omega + \lambda\chi_M \geq 0$  y, por lo tanto,  $\pi(\sum_j y_j + \omega + \lambda\chi_M) \geq 0$  para todo  $\pi \in L_+^*$ . Así, el Supuesto WSA solo requiere que la desigualdad sea estricta e indica que cuando el mismo precio es ofrecido por los productores, de acuerdo a la regla de tarificación que cada uno tiene, la riqueza total de la economía es estrictamente positiva. Debe tenerse en cuenta que cuando los conjuntos de producción son convexos,  $\omega \in \text{int } L_+$ , y  $0 \in Y_j(z_{-j})$  para todo  $j$  y toda  $z_{-j} \in L^{m+n-1}$ , entonces WSA es automáticamente verificado. En efecto, como  $Y_j(z_{-j})$  es un subconjunto convexo de  $L$  y  $0 \in Y_j(z_{-j})$ ,  $\pi(y_j) \geq 0$ . Además, como  $\omega \in \text{int } L_+$ ,  $\pi(\omega) > 0$ . Consecuentemente,  $\pi(\sum_{j=1}^n y_j + \omega + \lambda\chi_M) \geq \pi(\omega) + \lambda > 0$ . Es inmediato notar que este supuesto es un debilitamiento del supuesto de supervivencia SA (véase Kamiya (1988b), pg. 263, para mayor información sobre este tema).

Finalmente el Supuesto (R) puede interpretarse como el hecho de que cada consumidor tiene un ingreso positivo si la riqueza global de la economía es positiva.

#### 4. Subeconomías, limitaciones en el enfoque de Bewley y supuestos adicionales

Como hemos mencionado en el Capítulo Segundo, Subsección 1.4, de todas las estrategias propuestas para obtener un vector de precios, consumos y producciones de equilibrio en una economía de dimensión infinita, el argumento de Bewley de aproximaciones finitas es el ideal cuando los conjuntos de producción son no convexos. Como ya señalamos, debido a las características propias de nuestra economía, hay cuatro problemas que no permiten que la técnica de Bewley pueda aplicarse directamente. Por este motivo, y para chequear cuidadosamente que todas las condiciones se satisfagan, dividimos a esta sección en dos subsecciones. En la primera definimos las Subeconomías y asignamos un supuesto sobre las correspondencias de tarificación. En la Subsección siguiente (4.2) señalamos las dificultades que emergen cuando aplicamos el método de Bewley a nuestra economía. Ello nos llevará a introducir nuevos supuestos de hemi-continuidad inferior en las correspondencias de consumo.

##### 4.1. Las subeconomías y el supuesto de continuidad sobre la conducta de los productores

Consideremos una red  $\mathcal{F}$  de subespacios de dimensión finita de  $L$  dirigida por inclusión y conteniendo tanto a las dotaciones iniciales  $(\omega_i)_{i=1}^m$  como a  $\chi_M$ . Para cada  $F \in \mathcal{F}$ ,  $F_+ = F \cap L_+$  es el cono positivo de  $F$  en tanto que  $\text{int } F_+ = F \cap \text{int } L_+$  es el interior de  $F_+$  el cual es no vacío ya que  $\chi_M$  está en el  $\mathcal{T}$ -interior de  $L_+$ . La siguiente proposición muestra que a cada  $F \in \mathcal{F}$  puede asignársele una estructura euclídea que satisfaga ciertas condiciones deseables.

**Proposición 4.1.1** *En cada subespacio  $F \in \mathcal{F}$  puede definirse un producto interno que satisfaga lo siguiente: a)  $\|\chi_M\| = 1$  y b)  $\{\chi_M^{\perp_F}\} \cap F_+ = \{0\}$ , donde  $\chi_M^{\perp_F}$  es el espacio ortogonal a  $\chi_M$ .*

##### **Demostración**

Dado que en cada  $F \in \mathcal{F}$  podemos definir un orden a través de  $\geq$ , tenemos que  $F$  es un espacio de Banach separable y parcialmente ordenado, de modo que  $F_+ \cap (-F_+) = \{0\}$ . Por la Proposición 3.6.16 de Papageorgiou y Kyritsi-Yiailourou (2009) existe una funcional lineal  $g : F \mapsto \mathbb{R}$  tal que para todo  $v \in F_+ \setminus \{0\}$ ,  $g(v) > 0$  y  $g(0) = 0$ . Sin pérdida de generalidad tomamos  $g(\chi_M) = 1$ . Por tanto, si definimos el producto interno de dos vectores  $v$  y  $v'$  de  $F$  como  $\langle v, v' \rangle_F = g(v)g(v')$  tenemos el resultado deseado. ■

**Observación 4.1.1** Una demostración alternativa (aunque relacionada) consiste en observar que  $F$  es un espacio de Banach cuyo cono positivo tiene interior no vacío. El resto del argumento es idéntico al del párrafo anterior ya que el Lema 3.2.5 en Schalk (1996) garantiza la existencia de una funcional  $g : F \mapsto \mathbb{R}$  con las mismas propiedades que las de la prueba anterior.

Dado que el espacio dual de  $F$ ,  $F^*$ , está relacionado con  $F$  (MacLane, S. y Garrett, B. (1999)), podemos denotar directamente por  $p^F$  a la expresión  $\langle p^F, \cdot \rangle_F$ . Añadimos a estas consideraciones que  $\chi_M$  cumple el rol del vector  $e$  en el trabajo de Bonnisseau (1997)

Ahora procedemos a la construcción de las subeconomías. Sean las correspondencias de consumo y producción respectivamente

$$X_i^F : F^{m+n-1} \rightarrow 2^{F_+}$$

$$Y_j^F : F^{m+n-1} \rightarrow 2^F$$

Definidas como

$$X_i^F(z_{-i}^F) = X_i(z_{-i}^F) \cap F_+.$$

$$Y_j^F(z_{-j}^F) = Y_j(z_{-j}^F) \cap F.$$

El simplex de precios de  $\mathcal{E}^F$  es  $S^F = \{p^F \in F_+^0 : \langle p^F, \chi_M \rangle_F = 1\}$ , donde  $F_+^0$  denota el cono polar positivo de  $F_+$ .  $r_i^F$  es el ingreso del  $i$ -ésimo consumidor, inducido por  $r_i$ , en la subeconomía. La relación  $\succsim_{i,z_{-i}^F}^F$  es el preorden inducido en  $X_i^F(z_{-i}^F)$  por  $\succsim_{i,z_{-i}^F}$ .

Veamos a continuación algunas cuestiones importantes relacionadas con el funcionamiento de estas economías truncadas o subeconomías. En primer lugar notemos que para todo  $F \in \mathcal{F}$ ,  $X_i(z_{-i}^F) \cap F \neq \emptyset$  ya que por C(i)  $0 \in X_i(z_{-i}^F)$  y como  $F$  es un subespacio de  $L$ ,  $0 \in F$ . También para todo  $F \in \mathcal{F}$ ,  $Y_j(z_{-j}^F) \cap F \neq \emptyset$  ya que por el supuesto P(iii)  $\underline{t}_j \chi_M \in Y_j(z_{-j}^F)$  y como  $F$  es un subespacio que contiene a  $\chi_M$ ,  $\underline{t}_j \chi_M \in F$ .

En segundo término veamos que cualquiera sea  $F \in \mathcal{F}$ ,  $\partial(Y_j(z_{-j}^F) \cap F) \subset \partial_\infty Y_j(z_{-j}^F)$ . Si así no fuera, entonces existe  $y \in \partial(Y_j(z_{-j}^F) \cap F)$  tal que  $y \notin \partial_\infty Y_j(z_{-j}^F)$ . Luego, como  $y \in Y_j(z_{-j}^F)$ ,  $y \in \text{int } Y_j(z_{-j}^F)$  y, por tanto,  $y \in \text{int } Y_j(z_{-j}^F) \cap F$ , arribando así a una contradicción.

El conjunto que designa los estados débilmente eficientes de la subeconomía está dado por  $Z^F = \{z^F \in F^{m+n} : \forall i \ x_i^F \in X_i(z_{-i}^F) \cap F \text{ y } \forall j \ y_j^F \in \partial(Y_j(z_{-j}^F) \cap F)\}$  el cual, en virtud de lo deducido anteriormente, está contenido en el conjunto  $Z$ . De ahí que para todo  $j$  y todo  $z^F \in Z^F$  podemos definir el simplex de precios en  $\mathcal{E}^F$  como



$$\varphi_j^F(z^F) = \left\{ p^F \in S^F : \text{existe } \pi \in \varphi_j(z^F) \text{ y } p^F = \pi|_F \right\}.$$

Es inmediato notar que si  $\varphi_j(z^F)$  es no vacío, también lo será  $\varphi_j^F(z^F)$ .

En cuarto término, sean los estados  $z^F$  y  $z^{F'}$  tal que  $F \subset F'$ . Como  $X_i(z^F)$  no es comparable con  $X_i(z^{F'})$ , entonces no podemos afirmar que  $X_i^F(z^F)$  esté contenido en  $X_i^{F'}(z^{F'})$ . Esto no ocurre cuando no existen externalidades.

El conjunto débilmente eficiente y factible en  $\mathcal{E}^F$  es

$$A^F(\omega) = \left\{ z^F \in Z^F : \sum_{i=1}^m x_i^F \leq \sum_{j=1}^n y_j^F + \omega \right\} \subset A(\omega)$$

En tanto que el conjunto de producción de equilibrio en  $\mathcal{E}^F$  es

$$PE^F = \left\{ (p^F, z^F) \in S^F \times Z^F : p^F \in \bigcap_{j=1}^n \varphi_j^F(z^F) \right\}$$

Así tenemos que para todo  $F \in \mathcal{F}$  podemos definir la subeconomía  $\mathcal{E}^F$  como

$$\mathcal{E}^F = \left( \left( X_i^F, \succsim_{i, z_i^F}^F, r_i^F \right)_{i=1}^m, \left( Y_j^F, \varphi_j^F \right)_{j=1}^n, \left( \omega_i \right)_{i=1}^m \right)$$

Junto a estos constructos, establecemos un supuesto adicional sobre la conducta de los productores

*Supuesto (PR)*

Para todo  $j$

- (i) La correspondencia  $\varphi_j : Z \mapsto 2^S$  es no vacía y valorada convexa.
- (ii) Para todo  $F$  en  $\mathcal{F}$ , la correspondencia  $\varphi_j^F$  tiene un grafo cerrado.
- (iii) Sea  $(z^{F(t)}, \pi^{F(t)})_{t \in T}$  una subred de una red  $(z^F, \pi^F)_{F \in \mathcal{F}} \in Z \times S$ , tal que

$$\begin{cases} (z^{F(t)}, \pi^{F(t)}) \rightarrow (\bar{z}, \bar{\pi}) \text{ en la topología } \prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty \times \sigma^{ba} \\ \pi^{F(t)} \in \varphi_j(z^{F(t)}) \text{ para todo } t \in T \\ \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)})_{t \in T} \text{ converge} \end{cases}$$

entonces:

$$(a) \lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \bar{\pi}(\bar{y}_j),$$

y si  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) = \bar{\pi}(\bar{y}_j)$ , entonces

$$(b) \bar{y}_j \in \partial_\infty Y_j(\bar{z}_{-j}) \text{ y } \bar{\pi} \in \Phi_j(\bar{z})$$

En el caso de que no hubiere externalidades, este supuesto se traduce automáticamente en el supuesto PR de Bonnisseau y Meddeb (1999), por lo que así presentado es una generalización de aquel. Más aún, el hecho de exigir que la subred  $(z^{F(t)}, \pi^{F(t)})_{t \in T}$  pertenezca a  $Z \times S$  es menos restrictivo que en el caso de los autores mencionados. Por otro lado, esta correspondencia extiende al supuesto PR en Bonnisseau (1997) al espacio de bienes de infinitas dimensiones. Cuando  $Y_j(z_{-j})$  es un conjunto convexo y satisface el Supuesto (P), entonces (PR) se cumple directamente (véase la Sección 8)

#### 4.2 Limitación del enfoque de Bewley en el actual modelo y supuestos de hemi-continuidad inferior.

Aunque (como hemos adelantado en el Capítulo Segundo) el método apropiado para probar la existencia de equilibrio es el de Bewley de aproximaciones finitas, no es menos cierto que existen cuatro grandes problemas que no permiten una aplicación directa de aquel. En esta subsección veremos los dos primeros, dejando para la Sección 6 los otros dos.

En primer lugar, notemos que en Bonnisseau (1997) tanto para los conjuntos de consumo como producción hay supuestos de hemi-continuidad inferior. Sin embargo, en la Sección 3 no hemos impuesto ninguno, ya que si suponemos que las correspondencias  $X_i$  e  $Y_j$  son simplemente h.c.i. para todo  $i$  y  $j$  (lo cual sería la generalización estándar de los supuestos en Bonnisseau (1997)), la restricción a un subespacio de dimensión finita puede no ser h.c.i. como lo muestra el siguiente ejemplo tomado de Sun (2006)

**Ejemplo 4.2.1** Sea la correspondencia  $\phi: \mathbb{R}_+^3 \mapsto 2^{\mathbb{R}_+^3}$  definida como:

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \{(u, v, w) \in \mathbb{R}_+^3 : u + v > x + y \text{ y } w \geq 0\} & \text{si } y = 0 \\ \{(u, v, w) \in \mathbb{R}_+^3 : u + v > x + y \text{ y } w > 0\} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

La cual es h.c.i., valorada convexa y abierta. Si restringimos  $\phi$  a  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : z = 0\}$  entonces la correspondencia sería:

$$\phi_{xy}(x, y, 0) = \begin{cases} \{(u, v, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : u + v > x + y\} & \text{si } y = 0 \\ \emptyset & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Claramente esta correspondencia no es h.c.i. en  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : z = 0\}$  ya que para cualquier conjunto abierto  $B$  tal que  $\phi_{xy}(x, 0, 0) \cap B \neq \emptyset$  y cualquier entorno de  $(x, 0, 0)$ ,  $W^{(x, 0, 0)}$ , el punto  $(x, y', 0) \in W^{(x, 0, 0)}$  con  $y' > 0$ , implica que  $\phi_{xy}(x, y', 0) \cap B = \emptyset$ .

Así, las condiciones necesarias para la existencia de equilibrio dadas en Bonnisseau (1997) no se satisfacen necesariamente en las subeconomías  $\mathcal{E}^F$ .

El segundo problema de suponer que la correspondencia  $X_i$  es simplemente hemi-continua inferior es que, aun si pudiéramos obtener, de alguna manera, un equilibrio en cada  $\mathcal{E}^F$ , será imposible probar que el límite  $\left( \left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right), \bar{\pi} \right)$  de la red de subeconomías, es un equilibrio en la economía de dimensión infinita original. El punto crucial es que la hemi-continuidad inferior no es suficiente como para probar que, para todo  $i$ , si  $x_i \succsim_{i, \bar{z}_i} \bar{x}_i$  entonces  $\bar{\pi}(x_i) \geq r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \left( \bar{\pi}(\bar{y}_j) \right)_{j=1}^n \right)$  (véase, en la Subsección 6.2, los pasos 4 y 5 juntamente con la Observación 6.2.1)

Kajii (1988) y Sun (2006) investigaron los problemas relacionados a la hemi-continuidad inferior y propusieron soluciones alternativas. Debe destacarse que ellos no trabajaron con correspondencias de consumo o producción sino de preferencias. Sin embargo, los aspectos matemáticos de dichos problemas son idénticos a los nuestros. Con relación a la primera dificultad, la solución adoptada por Kajii fue la de asumir que la restricción de una función multívoca a un subespacio de dimensión finita es h.c.i. Por su parte, para tratar con el segundo inconveniente, Sun usó un supuesto más fuerte de hemi-continuidad inferior al cual llamó  $\left( \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, f \right)$ -h.c.i. con las notaciones de este capítulo.

Adaptaremos las soluciones sugeridas por ambos autores. En se verá que las mismas eliminan los problemas mencionados. En la Sección 6 expondremos soluciones alternativas a éstas.

#### Supuesto (C)

Para todo  $i$

(v) Existe un subespacio de dimensión finita  $\bar{F} \in \mathcal{F}$ , tal que para cualquier subespacio de dimensión finita  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\bar{F} \subset F$ , la correspondencia  $X_i^F$  es h.c.i. en  $F^{m+n-1}$ .

(vi) La correspondencia  $X_i$  es  $\left( \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, f \right)$ -h.c.i. en  $L^{m+n-1}$ , esto es, si  $z_{-i}^\alpha \longrightarrow z_{-i}$  en  $L^{m+n-1}$  en la topología  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$  y  $x \in X_i(z_{-i})$ , entonces existe un subespacio de dimensión finita  $\dot{F}$  tal que hay una red  $(x^\alpha) \subset x + \dot{F}$  con  $x^\alpha \in X_i(z_{-i}^\alpha)$  para todo  $\alpha$  y  $x^\alpha \longrightarrow x$ .

#### Supuesto (P)

(v) Existe un subespacio de dimensión finita  $\bar{\bar{F}} \in \mathcal{F}$ , tal que para todo  $j$  y para cualquier subespacio de dimensión finita  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\bar{\bar{F}} \subset F$ , la correspondencia  $Y_j^F$  es h.c.i. en  $F^{m+n-1}$ .

Tanto  $C(v)$  como  $P(v)$  siguen la solución propuesta por Kajii (1988). Con ello eliminamos el primer problema. Por su parte,  $C(v_i)$  es una adaptación directa de la solución desarrollada por Sun (2006) para resolver el segundo inconveniente. Nótese que el subespacio  $\dot{F}$  puede depender de  $x \in X_i(z_{-i})$  y de la red  $(z_{-i}^\alpha)$ . También es importante destacar que la red  $(x^\alpha)$  converge a  $x$  en la topología de la norma, ya que  $(x^\alpha)$  pertenece a un subespacio afín de dimensión finita. Por lo tanto, si  $X_i$  es una correspondencia  $(\prod_{i=1}^{m+n-1} \sigma^\infty, f)$ -h.c.i., entonces será una correspondencia  $(\prod_{i=1}^{m+n-1} \sigma^\infty, \mathcal{T})$ -h.c.i.

### 5. Teorema de existencia con precios en el espacio $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$

Los supuestos presentados y discutidos en las Secciones 3 y 4 son los que necesitamos para obtener nuestro resultado de existencia.

**Teorema 5.1.** *La economía  $\mathcal{E} = \left( (X_i, \succsim_i, z_{-i}, r_i)_{i=1}^m, (Y_j, \phi_j)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m \right)$  tiene un equilibrio si se satisfacen los supuestos (C), (P), (B), (BL), (WSA) y (PR).*

El teorema anterior generaliza a resultados previos sobre existencia de equilibrio con pérdida acotada. En efecto, extiende el Teorema 3.1 del trabajo de Bonnisseau y Meddeb (1999) dado que permite la posibilidad de externalidades y generaliza el Teorema 2.1 de Bonnisseau (1997) a un espacio de dimensión infinita.

La demostración del Teorema 5.1 la brindamos en la sección siguiente

### 6. Demostración del Teorema 5.1

Esta sección está destinada a probar el Teorema 5.1. La demostración es larga y requiere de varios pasos. A los efectos de estructurar la prueba de una manera ordenada, subdividimos la presente sección en las dos subsecciones siguientes.

#### 6.1 Existencia de equilibrio en las subeconomías

Aplicamos aquí el teorema de existencia de equilibrio de Bonnisseau (1997) a una red de subeconomías de dimensión finita. El resultado concretamente se encuentra en la Proposición 6.1. Exponemos a continuación algunos hechos que necesitamos considerar previamente.

**Hecho 1.** *La subeconomía  $\mathcal{E}^F$  satisface los Supuestos (P), (B), (BL), (PR), (R) y (C), excepto LNS. Tampoco satisface el Supuesto (WSA)*

**Demostración.** Véase el Apéndice A.

El siguiente Hecho señala que cuando el subespacio tiene una dimensión lo suficientemente grande, la subeconomía también satisface versiones más débiles de los Supuestos de No Saciedad Local (LNS) y Supervivencia Débil (WSA). Antes de pasar a

este enunciado, introducimos tres parámetros. Sea  $\eta > 0$  un número real. Sea  $\bar{\gamma} > 0$  un número real que satisface  $\bar{\gamma} > -\sum_{j=1}^n \alpha_j + (1+\eta)\|\omega\|$ , donde  $\alpha_j$  es el parámetro del Supuesto (BL) para cada  $j$ . Sea  $\bar{\lambda}$  un número real tal que  $\bar{\lambda} \geq \bar{\gamma}$ .

**Hecho 2.** Bajo los supuestos (C), (P), (B), (BL), (WSA), (R) y (PR), existe un subespacio  $\hat{F} \in \mathcal{F}$  tal que para todo  $F \in \mathcal{F}$ , si  $\hat{F} \subset F$ , la subeconomía  $\mathcal{E}^F$  satisface:

(WSA<sup>F</sup>): Para todo  $(p^F, z^F, \lambda^F) \in PE^F \times [0, \bar{\lambda}]$ , si  $z^F \in A^F(\omega + \lambda^F \chi_M)$  entonces  $\langle p^F, \sum_{j=1}^n y_j^F + \omega + \lambda^F \chi_M \rangle_F > 0$

(LNS<sup>F</sup>): Para todo  $\left( (x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n \right) \in A^F(\omega)$ , y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $(x_i'^F)_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m \left( X_i^F(z_{-i}^F) \cap B(x_i^F, \varepsilon) \right)$ , tal que  $x_i'^F \succ_{i, z_{-i}^F}^F x_i^F$  para todo  $i$ .

**Demostración.** Véase el Apéndice A.

Notemos que el Supuesto (WSA<sup>F</sup>) es más débil que el supuesto SA en el trabajo de Bonnisseau (1997). Lo mismo podemos afirmar entre (LNS<sup>F</sup>) y el supuesto de no saciabilidad local en el paper de este autor. Por otro lado, es importante destacar que si  $\lambda^F \in [0, \bar{\lambda}]$  para  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\hat{F} \subset F$ , entonces  $z^F \in A^F(\omega + \lambda^F \chi_M) \subset A(\omega + \bar{\lambda} \chi_M)$ . Ello implica que la red  $(z^F)_{F \in \mathcal{F}, F \supset \hat{F}}$  pertenece a un conjunto débilmente\* acotado.

Lo que los dos Hechos anteriores muestran es que, bajo los Supuestos del Teorema 5.1, las condiciones suficientes del Teorema 2.1 de Bonnisseau (1997) se satisfacen completamente en los casos de (P), (B), (BL), (PR), (R) y (C) (excepto LNS), en tanto que (WSA) y (LNS) se cumplen solo en circunstancias especiales. ¿Es suficiente este cumplimiento parcial de las condiciones para asegurar que existe equilibrio en las subeconomías?. La siguiente proposición concluye que sí.

**Proposición 6.1** Sean  $\bar{F}$  y  $\bar{\bar{F}}$  los subespacios de los Supuestos C(v) y P(v) respectivamente y sea  $\hat{F}$  el subespacio del Hecho 2 anterior. Bajo los Supuestos (C), (P), (B), (BL), (WSA), (R) y (PR), si se tiene que  $\bar{F} \subset F, \bar{\bar{F}} \subset F$  y  $\hat{F} \subset F$ , entonces la subeconomía  $\mathcal{E}^F$  tiene un equilibrio  $(z^F, p^F) \in Z^F \times S^F$ .

**Demostración.** Véase el Apéndice A.

Algunos comentarios respecto de la demostración de la proposición anterior. Como adelantamos, debemos probar que los supuestos (C), (P), (B), (BL), (WSA), (R) y (PR), que dan lugar a que se cumplan las condiciones (C), (P), (B), (BL), (WSA<sup>F</sup>), (LNS<sup>F</sup>), (R) y (PR) en las subeconomías, son suficientes para aplicar el Teorema 2.1 de Bonnisseau (1997) a  $\mathcal{E}^F$ . Ahora bien, notemos que dicho teorema ha sido probado en el espacio  $\mathbb{R}^l$ . Por tanto, la Proposición 6.1 muestra, además, que el argumento de

Bonnisseau puede extenderse a  $F$ . El aspecto clave es que  $F$  es equivalente a  $\mathbb{R}^I$  y es un espacio en el cual podemos definir un orden parcial a partir de  $F_+$  y de  $\text{int } F_+$ .

## 6.2 De las subeconomías de dimensión finita a la economía original

Sea la red  $\left( \left( (x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n \right), p^F \right)_{F \in \mathcal{F}}$  de equilibrios de las economías auxiliares  $(\mathcal{E}^F)_{F \in \mathcal{F}}$  de la Proposición 6.1. A partir de la definición de  $\varphi_j^F(z^F)$ , existen vectores de precios  $(\pi_j^F)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n \varphi_j(z^F) \subset S^n$  tales que  $p^F = \pi_{j|F}^F$  para todo  $j$ . De ahí, obtenemos la red  $\left( (x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n, (\pi_j^F)_{j=1}^n \right)_{F \in \mathcal{F}}$ . En los próximos seis pasos probamos que dicha red tiene un punto límite el cual es un equilibrio con pérdida acotada de la economía  $\mathcal{E}$ .

**Paso 1.** Existe una subred  $\left( (x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n, (\pi_j^{F(t)})_{j=1}^n \right)_{t \in (T, \geq)}$  la cual converge a  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, (\bar{\pi}_j)_{j=1}^n \right)$  en la topología  $\prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty \times \prod_{(L^*)^n} \sigma^{ba}$ . Además, para todo  $j$  y todo  $i$ ,  $(\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}))_{t \in (T, \geq)}$  y  $(\pi_j^{F(t)}(x_i^{F(t)}))_{t \in (T, \geq)}$  son convergentes.

### Demostración

De la Proposición 6.1 deducimos que la red  $\left( (x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n \right)_{F \in \mathcal{F}}$  pertenece a  $A(\omega)$ . Por el Supuesto (B), la misma es  $\mathcal{T}$ -acotada y, debido al Teorema de Alaoglu (Capítulo Primero, Sección I, 13.10), pertenece a un subconjunto  $\prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty$ -compacto. Por su parte, la red  $(\pi_j^F)_{F \in \mathcal{F}}$  pertenece a  $S$  el cual es un subconjunto  $\sigma^{ba}$ -compacto. Por tanto, existe una subred  $\left( (x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n, (\pi_j^{F(t)})_{j=1}^n \right)_{t \in (T, \geq)}$  que converge a  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n, (\bar{\pi}_j)_{j=1}^n \right)$  en  $\prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty \times \prod_{(L^*)^n} \sigma^{ba}$ . Luego, también podemos concluir que las subredes de números reales  $\left( \langle p^{F(t)}, y_j^{F(t)} \rangle_{F(t)} \right) = (\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}))$  y  $\left( \langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)} \rangle_{F(t)} \right) = (\pi_j^{F(t)}(x_i^{F(t)}))$   $\mathcal{T}$ -convergen.

■

**Paso 2.**  $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \dots = \bar{\pi}_n > 0$ .

### Demostración

Sea  $x \in L$ . Existe  $F \in \mathcal{F}$ , tal que  $x \in F$ . Existe  $t_0 \in T$  tal que para todo  $t > t_0$ ,  $F \subset F(t)$ . Como  $\pi_{1|F(t)}^{F(t)} = \pi_{2|F(t)}^{F(t)} = \dots = \pi_{n|F(t)}^{F(t)} = p^{F(t)}$ , se tiene que para todo  $t > t_0$ ,  $\pi_1^{F(t)}(x) = \pi_2^{F(t)}(x) = \dots = \pi_n^{F(t)}(x) = \langle p^{F(t)}, x \rangle_{F(t)}$ . Tomando límites, tenemos que

$\bar{\pi}_1(x) = \bar{\pi}_2(x) = \dots = \bar{\pi}_n(x)$ . Dado que esta igualdad vale para todo  $x \in L$ ,  $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \dots = \bar{\pi}_n$ .

Probemos ahora que  $\bar{\pi}_j > 0$  para todo  $j$ . Escogemos arbitrariamente  $j=1$ . Como  $\pi_1^{F(t)}(\chi_M) = \langle p^{F(t)}, \chi_M \rangle_{F(t)} = 1$ , si tomamos límites obtenemos  $\bar{\pi}_1(\chi_M) = 1$ . Luego,  $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \dots = \bar{\pi}_n > 0$ . ■

En lo sucesivo, omitiremos el subíndice  $j$  en aras de la simplicidad de notación, i.e.,  $\bar{\pi} = \bar{\pi}_j$  para todo  $j$ .

**Paso 3.**  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right) \in \prod_{i=1}^m X_i(\bar{z}_{-i}) \times \prod_{j=1}^n Y_j(\bar{z}_{-j})$  y  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$

**Demostración.**

Del Paso 1,  $\left( (x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n \right) \in Z^{F(t)} \subset \prod_{i=1}^m X_i(z_{-i}^{F(t)}) \times \prod_{j=1}^n Y_j(z_{-j}^{F(t)})$ . De los Supuestos C(i) y P(i),  $X_i$  e  $Y_j$  son, para todo  $i$  y  $j$ ,  $\left( \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, \sigma^\infty \right)$ -cerrados. Dado que  $(z^{F(t)})_{t \in (T, \geq)}$   $\prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty$ -converge a  $\bar{z}$ , se sigue que

$$\bar{z} = \left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right) \in \prod_{i=1}^m X_i(\bar{z}_{-i}) \times \prod_{j=1}^n Y_j(\bar{z}_{-j}).$$

Como  $\sum_{i=1}^m x_i^{F(t)} = \sum_{j=1}^n y_j^{F(t)} + \omega$  para todo  $t \in T$ , obtenemos  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$  ■

**Paso 4.** Si  $x_i \succsim_{i, \bar{z}_{-i}} \bar{x}_i$  entonces  $\bar{\pi}(x_i) \geq r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \lim_{j=1}^n \left( \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right)^n \right)$

**Demostración.**

Supongamos que  $\bar{\pi}(x_i) < r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \lim_{j=1}^n \left( \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right)^n \right)$ . Luego, existe un número real  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\bar{\pi}(x_i) + \varepsilon < r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \lim_{j=1}^n \left( \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right)^n \right) \quad (1)$$

Del Supuesto C(ii) existe  $x'_i \in X_i(\bar{z}_{-i}) \cap B(x_i, \varepsilon/2)$  tal que  $x'_i \succ_{i, \bar{z}_{-i}} x_i$ . Luego, dado que las preferencias son transitivas,  $x'_i \succ_{i, \bar{z}_{-i}} \bar{x}_i$ . Como la subred  $(z_{-i}^{F(t)})_{t \in (T, \geq)}$   $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -converge a  $\bar{z}_{-i}$  y  $X_i$  es  $\left( \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, f \right)$ -h.c.i. en  $L^{m+n-1}$  (Supuesto C(vi)), existe un subespacio de dimensión finita  $\dot{F}$  tal que existe una subred  $(x_i^{F(t)})_{t \in (T, \geq)}$  la cual

converge a  $x'_i$ , con  $\left(x_i^{F(t)}\right)_{t \in (T, \geq)} \subset x'_i + \dot{F}$  y  $x_i^{F(t)} \in X_i\left(z_{-i}^{F(t)}\right)$  para todo  $t$ . Por otro lado, existe  $t_0 \in T$  tal que  $t > t_0$  implica  $x'_i + \dot{F} \subset F(t)$ . Luego,  $x_i^{F(t)} \in X_i\left(z_{-i}^{F(t)}\right) \cap F(t)$  para todo  $t > t_0$ .

Como  $(\bar{z}_{-i}, x'_i, \bar{x}_i) \notin \Gamma_i$  y la subred  $\left(x_i^{F(t)}\right)_{t \in (T, \geq)}$   $\sigma^\infty$ -converge a  $\bar{x}_i$ , existe  $t_1 \in T$  tal que para todo  $t > t_1$ ,  $\left(z_{-i}^{F(t)}, x_i^{F(t)}, x_i^{F(t)}\right) \notin \Gamma_i$ , por el Supuesto C(iii). Dado que la subred  $\left(x_i^{F(t)}\right)$  converge a  $x'_i$  en  $\mathcal{T}$ , existe  $t_2 \in T$  tal que para todo  $t > t_2$ ,  $x_i^{F(t)} \in B(x'_i, \varepsilon/2)$ . De ahí, por la completitud de las preferencias, deducimos que para todo  $t$  mayor que  $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$

$$x_i^{F(t)} \in X_i\left(z_{-i}^{F(t)}\right) \cap F(t), \quad x_i^{F(t)} \in X_i\left(z_{-i}^{F(t)}\right) \cap F(t) \cap B(x'_i, \varepsilon/2) \text{ y } x_i^{F(t)} \succ_{i, z_{-i}^{F(t)}}^{F(t)} x_i^{F(t)}$$

Dado que la asignación  $\left(\left(x_i^{F(t)}\right)_{i=1}^m, \left(y_j^{F(t)}\right)_{j=1}^n, p^{F(t)}\right)$  es un equilibrio de  $\mathcal{E}^{F(t)}$ , se sigue que para todo  $t$  mayor que  $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$

$$\left\langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)} \right\rangle_{F(t)} > \left\langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)} \right\rangle_{F(t)} = r_i \left( \left\langle p^{F(t)}, \omega \right\rangle_{F(t)}, \left( \left\langle p^{F(t)}, y_j^{F(t)} \right\rangle_{F(t)} \right)_{j=1}^n \right)$$

Como  $p^{F(t)} = \pi_{j|F(t)}^{F(t)}$  para todo  $j$ , tenemos que

$$\pi_j^{F(t)}\left(x_i^{F(t)}\right) > \pi_j^{F(t)}\left(x_i^{F(t)}\right) = r_i \left( \pi_j^{F(t)}\left(\omega_i\right), \left(\pi_j^{F(t)}\left(y_j^{F(t)}\right)\right)_{j=1}^n \right)$$

Dado que  $x_i^{F(t)} < x'_i + \frac{\varepsilon}{2}\chi_M$  y que  $\pi_j^{F(t)}$  es una funcional lineal positiva, tenemos

$$\pi_j^{F(t)}\left(x'_i + \frac{\varepsilon}{2}\chi_M\right) > \pi_j^{F(t)}\left(x_i^{F(t)}\right) = r_i \left( \pi_j^{F(t)}\left(\omega_i\right), \left(\pi_j^{F(t)}\left(y_j^{F(t)}\right)\right)_{j=1}^n \right)$$

Tomando límites, obtenemos

$$\bar{\pi}(x'_i) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim \pi_j^{F(t)}\left(x_i^{F(t)}\right) = r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \lim \left( \pi_j^{F(t)}\left(y_j^{F(t)}\right) \right)_{j=1}^n \right)$$

Como  $x'_i < x_i + \frac{\varepsilon}{2}\chi_M$  y  $\bar{\pi} > 0$ , deducimos que

$$\bar{\pi}(x_i) + \varepsilon \geq r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \lim \left( \pi_j^{F(t)}\left(y_j^{F(t)}\right) \right)_{j=1}^n \right)$$



lo cual es una contradicción con (1). ■

**Paso 5.** Para todo  $j$ ,  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) = \lim \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})$

### **Demostración**

El Supuesto PR(iii) (a) y el Paso 2 implican que  $\lim \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \bar{\pi}_j(\bar{y}_j) = \bar{\pi}(\bar{y}_j)$  para todo  $j$ . Dado el Supuesto C(iv), tenemos que, para todo  $i$ ,  $r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \lim\left(\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})\right)_{j=1}^n\right) \geq r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \left(\bar{\pi}(\bar{y}_j)\right)_{j=1}^n\right)$ , lo cual, junto con el Paso 4, implican que

$$\bar{\pi}(\bar{x}_i) \geq r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \lim\left(\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})\right)_{j=1}^n\right) \geq r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \left(\bar{\pi}(\bar{y}_j)\right)_{j=1}^n\right) \quad (2)$$

Probamos que  $\bar{\pi}(\bar{x}_i) = r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \left(\bar{\pi}(\bar{y}_j)\right)_{j=1}^n\right)$  para todo  $i$ . Supongamos que para algún  $i_0$ , tenemos la siguiente desigualdad estricta

$$\bar{\pi}(\bar{x}_{i_0}) > r_{i_0}\left(\bar{\pi}(\omega_{i_0}), \left(\bar{\pi}(\bar{y}_j)\right)_{j=1}^n\right)$$

Entonces, a partir del Supuesto C(iv), se sigue que  $\sum_{i=1}^m \bar{\pi}(\bar{x}_i) > \sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) + \bar{\pi}(\omega)$ . Sin embargo, del Paso 3 deducimos que  $\sum_{i=1}^m \bar{\pi}(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) + \bar{\pi}(\omega)$ , lo cual es una contradicción.

De (2), se sigue que  $r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \lim\left(\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})\right)_{j=1}^n\right) = r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \left(\bar{\pi}(\bar{y}_j)\right)_{j=1}^n\right)$  para todo  $i$ . Del Supuesto C(iv),  $r_i$  es estrictamente creciente en la segunda variable. Consecuentemente,  $\lim \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) = \bar{\pi}(\bar{y}_j)$  para todo  $j$ . ■

De los Pasos 2 y 5 juntamente con el Supuesto PR (iii) (b), se obtiene que  $\left(\left(\bar{x}_i\right)_{i=1}^m, \left(\bar{y}_j\right)_{j=1}^n\right) = \bar{z} \in Z$  y  $\bar{\pi} \in \bigcap_{j=1}^n \phi_j(\bar{z})$ . Del Paso 3  $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega$ . Luego,  $(\bar{z}, \bar{\pi}) \in PE$  y  $\bar{z} \in A(\omega)$ . Por lo tanto, solo resta mostrar que se satisface la condición a. de la Definición 2.1 para finalizar la demostración del Teorema 5.1

**Paso 6.** Para todo  $i$ ,  $\bar{x}_i$  es  $\succsim_{i, \bar{z}_i}$ -maximal en el conjunto presupuestario  $\left\{x_i \in X_i(\bar{z}_i) : \bar{\pi}(x_i) \leq r_i\left(\bar{\pi}(\omega_i), \left(\bar{\pi}(\bar{y}_j)\right)_{j=1}^n\right)\right\}$

**Demostración**

Debemos probar que para cada agente  $i$ , si  $x_i \succ_{i, \bar{z}_i} \bar{x}_i$  entonces  $\bar{\pi}(x_i) > \bar{\pi}(\bar{x}_i)$ . Del Paso 4 tenemos que  $\bar{\pi}(x_i) \geq \bar{\pi}(\bar{x}_i)$ . Supongamos que  $\bar{\pi}(x_i) = \bar{\pi}(\bar{x}_i)$ . A partir de los Pasos 4 y 5 y de los Supuestos (WSA) y (R),  $\bar{\pi}(\bar{x}_i) = r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \left( \bar{\pi}(\bar{y}_j) \right)_{j=1}^n \right) > 0$ . Para todo  $t \in (0, 1)$  tenemos que  $\bar{\pi}(tx_i) < \bar{\pi}(x_i) = \bar{\pi}(\bar{x}_i)$ . Sea  $t$  lo suficientemente cercano a 1 tal que  $tx_i \in X_i(\bar{z}_i)$ . Por la continuidad de las preferencias  $tx_i \succ_{i, \bar{z}_i} \bar{x}_i$ , y por el Paso 4,  $\bar{\pi}(tx_i) \geq \bar{\pi}(\bar{x}_i)$ . Tenemos así una contradicción. Luego  $\bar{\pi}(x_i) > \bar{\pi}(\bar{x}_i)$  ■

**Observación 6.2.1** Nótese que si  $X_i$  es simplemente h.c.i. entonces  $x_i'^{F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)})$  para todo  $t \in T$ , pero  $x_i'^{F(t)}$  puede no estar en  $F(t)$ . Por tanto, en el Paso 4, no podríamos afirmar que  $x_i'^{F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)}) \cap F(t)$  y  $\langle p^{F(t)}, x_i'^{F(t)} \rangle_{F(t)} > \langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)} \rangle_{F(t)}$  para todo  $t$  mayor que  $t_0, t_1$  y  $t_2$ . Además, tampoco existe un subespacio de dimensión finita  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $x_i'^{F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)}) \cap F(t)$  para todo  $F(t)$  con  $F(t) \supset F$ . Luego, no podemos obtener un subespacio  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\langle p^{F(t)}, x_i'^{F(t)} \rangle_{F(t)} > \langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)} \rangle_{F(t)}$  para todo  $F(t) \supset F$ .

**Observación 6.2.2** Con relación a los problemas de la hemicontinuidad inferior, una solución alternativa a la desarrollada por Kajii (1988) y Sun (2006) sería la adopción de los siguientes supuestos

C(v') Existe un subespacio de dimensión finita  $\bar{F} \in \mathcal{F}$ , tal que para todo  $i$  y cualquier subespacio de dimensión finita  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\bar{F} \subset F$ , la correspondencia  $X_i : L^{m+n-1} \mapsto F$  es  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -h.c.i. en  $L^{m+n-1}$ .

P(v') Existe un subespacio de dimensión finita  $\bar{\bar{F}} \in \mathcal{F}$ , tal que para todo  $j$  y cualquier subespacio de dimensión finita  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $\bar{\bar{F}} \subset F$ , la correspondencia  $Y_j : L^{m+n-1} \mapsto F$  es  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -h.c.i. en  $L^{m+n-1}$ .

La condición C(v') es equivalente a afirmar que si la red  $(z_{-i}^\alpha)$  converge a  $z_{-i}$  en  $L^{m+n-1}$  en la topología  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$  y  $x \in X_i(z_{-i})$ , entonces existe una red  $(x^\alpha)$  en  $F$  tal que  $x^\alpha \in X_i(z_{-i}^\alpha)$  para todo  $\alpha$  y  $x^\alpha \longrightarrow x$ . Nótese que con este único supuesto podemos eliminar los dos primeros problemas al aplicar la técnica de Bewley. Sin embargo esta es una condición más restrictiva que C(vi). En efecto, baste con tomar  $\dot{F} = F$  para observar que C(v') implica C(vi). El recíproco no es cierto ya que  $(x^\alpha) \subset x + \dot{F}$  no implica que  $(x^\alpha) \subset F$  si  $F \subset \dot{F}$ . Igualmente, C(v') implica C(v) pero el recíproco no es cierto. La demostración es inmediata.

También se puede probar fácilmente que  $P(v')$  implica  $P(ii)$  y  $P(v)$ .

**Observación 6.2.3.** Tal como se discutió en la subsección 4.2, los Supuestos  $C(v)$ ,  $P(v)$  (y aún,  $C(v')$  y  $P(v')$ ) son usados solamente para obtener una red de equilibrios correspondientes a las subeconomías. Por su parte,  $C(vi)$  (y  $C(v'')$ ) es suficiente para asegurar que el límite de dichos equilibrios es un equilibrio de la economía original. Así, los Supuestos  $C(v)$ ,  $C(vi)$  y  $P(v)$  (o sus alternativas más restrictivas,  $C(v')$  y  $P(v')$ ), están vinculados a consideraciones matemáticas antes que económicas.

Podemos considerar otras condiciones suficientes que son más fuertes que las anteriores pero más fáciles de interpretar económicamente. Para los conjuntos de consumo los supuestos son:

Para todo  $i$ ,

$C(v'')$  Para toda  $z_{-i} \in L^{m+n-1}$ , el conjunto  $\{t\chi_M : t \geq 0\}$  está incluido en  $X_i(z_{-i})$

$C(vi')$  Para toda  $z_{-i} \in L^{m+n-1}$ , para todo  $x_i \in X_i(z_{-i})$  y para todo  $t > 0$ , existe un entorno  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -abierto  $V$  de  $z_{-i}$  tal que  $x_i + t\chi_M \in X_i(z'_{-i})$  para toda  $z'_{-i} \in V$ .

Probamos ahora que  $C(v'')$  implica que para  $z_{-i} \in L^{m+n-1}$ , para todo  $x_i \in X_i(z_{-i})$  y para todo  $t > 0$ ,  $x_i + t\chi_M \in X_i(z_{-i})$  dado que, por el Supuesto  $C(i)$ ,  $X_i(z_{-i})$  es un subconjunto cerrado y convexo de  $L_+$ . En efecto,  $x \in X_i(z_{-i})$  y, por  $C(v'')$ ,  $nt\chi_M \in X_i(z_{-i})$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X_i(z_{-i})$  es convexo,  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)x + \frac{1}{n}nt\chi_M = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_i + t\chi_M \in X_i(z_{-i})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X_i(z_{-i})$  es cerrado podemos tomar límites y obtener que  $x_i + t\chi_M \in X_i(z_{-i})$ . También se deduce que  $C(v'')$  y  $C(vi')$  implican que si una red  $(z_{-i}^\alpha)$  converge a  $z_{-i}$  y  $x_i \in X_i(z_{-i})$ , entonces existe una red  $(t^\alpha) \in [0, +\infty)$  la cual converge a 0 y  $x_i + t^\alpha\chi_M \in X_i(z_{-i}^\alpha)$  para todo  $\alpha$ . Finalmente probemos que  $C(vi')$  implica  $C(v')$ . Sea  $x_i \in X_i(z_{-i}) \cap F$  tal que  $X_i(z_{-i}) \cap F \cap B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$ . Sea  $t < \varepsilon$  de modo que por  $C(vi')$  existe un entorno  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -abierto  $V$  de  $z_{-i}$  tal que  $x_i + t\chi_M \in X_i(z'_{-i})$  para toda  $z'_{-i} \in V$ . Por ser  $F$  un subespacio,  $x_i + t\chi_M \in F$ . Entonces,  $x_i + t\chi_M \in X_i(z'_{-i}) \cap F \cap B(x_i, \varepsilon)$  para toda  $z'_{-i} \in V$ . Luego la condición  $C(v')$  es satisfecha. El recíproco no es cierto ya que de  $C(v')$  no se deduce que  $x_i + t\chi_M \in X_i(z'_{-i})$  para toda  $z'_{-i} \in V$ .

Con relación a los conjuntos de producción, dado que estos cumplen con la condición de eliminación libre, tenemos que para  $z_{-j} \in L^{m+n-1}$ , para todo  $y_j \in Y_j(z_{-j})$  y para todo  $t > 0$ ,  $y_j - t\chi_M \in Y_j(z_{-j})$ . Por lo tanto, sólo basta con asumir:

$P(v'')$  Para todo  $j$ , para toda  $z_{-j} \in L^{m+n-1}$ , para todo  $y_j \in \partial_\infty Y_j(z_{-j})$ , y para todo  $t > 0$ , existe un entorno  $\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -abierto  $V$  de  $z_{-j}$  tal que  $y_j - t\chi_M \in Y_j(z'_{-j})$  para toda  $z'_{-j} \in V$ .

Al igual que en el caso de los conjuntos de consumo, este supuesto implica que si una red  $(z_{-j}^\alpha)$  converge a  $z_{-j}$  e  $y_j \in Y_j(z_{-j})$ , entonces existe una red  $(t^\alpha) \in [0, +\infty)$  la cual converge a 0 e  $y_j - t^\alpha \chi_M \in Y_j(z_{-j}^\alpha)$  para todo  $\alpha$ . Análogamente al caso de los conjuntos de consumo, esta condición es claramente más fuerte que  $P(v')$  (y por tanto, que  $P(ii)$  y  $P(v)$ )

A pesar de que son condiciones más restrictivas, las ventajas de considerar estos supuestos son, como apuntamos, su mejor interpretación económica. Concretamente, y por el lado de los conjuntos de producción, dado que  $y_j - t\chi_M$  pertenece al interior de  $Y_j(z_{-j})$ ,  $y_j - t\chi_M$  es tecnológicamente estrictamente factible, dado que podemos producir más de todos los productos (outputs) con estrictamente menos insumos (inputs). Por consiguiente,  $P(v'')$  significa que una perturbación de las externalidades en un entorno apropiadamente escogido, no producirá un efecto tan grande en las posibilidades de producción como para que  $y_j - t\chi_M$  ya no sea factible. Por lo tanto, esta condición puede entenderse como el hecho de que el efecto de un cambio pequeño de las externalidades no es demasiado importante y puede ser siempre respondido por un movimiento pequeño a lo largo del rayo generado por  $\chi_M$ .

Con relación a los conjuntos de consumo se sigue una interpretación análoga. Dado que  $x_i + t\chi_M \in X_i(z_{-i})$  para  $t > 0$ , siempre se podrá aumentar la cantidad considerada de todos los bienes. Por tanto, las condiciones  $C(v'')$  y  $C(vi')$  implican que una variación de las externalidades dentro un entorno apropiado no afectará tanto las decisiones de consumo como para que  $x_i + t\chi_M$  ya no sea factible. Así, las consecuencias de un cambio pequeño de las externalidades no es tan significativo y puede ser contrabalanceado con un cambio leve a lo largo del rayo generado por  $\chi_M$ .

## 7. Existencia de equilibrio con precios en el espacio $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$

En el Capítulo Segundo, Subsección 1.3.1, hemos visto que si el vector de precios de equilibrio está en  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ , la solución parece artificial puesto que el valor de una canasta de bienes no tiene una interpretación económica similar al caso de dimensión finita. Como consecuencia, varios autores impusieron condiciones suficientes bajo las cuales los precios de equilibrio están en  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ , el cual puede identificarse con el conjunto de funciones multívocas contablemente aditivas de  $ba(M, \mathcal{M}, \mu)$ . En esta sección haremos lo propio a fin de obtener un vector de precios de equilibrio significativos desde el punto de vista económico. Concretamente, demostraremos que basta con adaptar los supuestos de Bonnisseau y Meddeb (1999) en la primera firma de la economía como a continuación:

(T)  $Y_1$  es una correspondencia valorada convexa, satisface el Supuesto (P) y  $\varphi_1 = PM_1$ .

(PL1) Para todo  $y \in Y_1(z_{-1})$ , para todo  $t > 0$ , y para toda sucesión  $(A_k)$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$ , existe  $k_0$  tal que para todo  $k > k_0$ ,  $y - t\chi_M + \chi_{A_k} \in Y_1(z_{-1})$ .

En Bonnisseau y Meddeb (1999) tenemos el siguiente resultado que es crucial en la demostración del Teorema 7.1 que aparece abajo.

Si  $(A_k)$  es una sucesión decreciente de  $\mathcal{M}$  tal que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$ , entonces la sucesión  $(\chi_{A_k})$  de elementos de  $L_{\infty}(M, \mathcal{M}, \mu)$  converge a 0 en la topología Mackey  $\tau(L_{\infty}, L_1)$ .

La demostración del anterior enunciado puede verse en Bonnisseau y Meddeb (1999) pg. 305. Presentamos ahora el teorema principal de esta sección

**Teorema 7.1** Bajo los Supuestos (T) y (PL1), si  $\left(\left(\bar{x}_i\right)_{i=1}^m, \left(\bar{y}_j\right)_{j=1}^n, \bar{\pi}\right)$  es un equilibrio de la economía  $\mathcal{E}$ , entonces  $\bar{\pi}$  es un elemento de  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

Antes de demostrar el teorema anterior, enunciamos y probamos el siguiente lema.

**Lema 7.2** Si la correspondencia  $Y_1$  satisface los Supuestos (P) y (PL1) y si  $\varphi_1 = PM_1$  entonces, para toda  $z_{-j} \in L^{m+n-1}$  y todo  $\bar{y} \in Y_1(z_{-j})$ ,  $PM_1(\bar{z}) \subset L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

### Demostración

Sea  $\pi \in PM_1(\bar{z})$ . Dado que  $\pi \geq 0$ , tenemos  $\pi = q + r$ , con  $q \in L_1^+(M, \mathcal{M}, \mu)$  y  $r$  positiva y puramente finitamente aditiva (Capítulo Primero, Sección I, 15.5). Por el teorema de Yosida-Hewitt (Yosida y Hewitt, (1956)) existe una sucesión decreciente  $(A_k)$  tal que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$  y  $r(A_k) = \|r\|$  para todo  $k$ . En virtud del Supuesto (PL1), existe  $k_0$  tal que para todo  $k > k_0$ ,  $\bar{y} - t\chi_M + \chi_{A_k} \in Y_1(z_{-1})$ . Como  $\pi \in PM_1(\bar{z})$ , tenemos la siguiente desigualdad:

$$\pi(\bar{y}) \geq \pi(\bar{y} - t\chi_M + \chi_{A_k})$$

de manera que

$$\pi(t\chi_M) = t\pi(\chi_M) \geq \pi(\chi_{A_k}) = q(\chi_{A_k}) + r(\chi_{A_k}) = q(\chi_{A_k}) + \|r\|$$

Del resultado presentado antes del Teorema 7.1, y dado que  $q \in L_1^+(M, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $q(\chi_{A_k}) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Consecuentemente,  $t\pi(\chi_M) \geq \|r\|$ . Esto implica que  $\|r\| = 0$  ya que esta desigualdad vale para todo  $t > 0$ . Luego,  $\pi = q \in L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$  ■

**Demostración del Teorema 7.1**

Por (T) obtenemos que  $Y_1$  es una correspondencia valorada convexa, satisface el Supuesto (P) y  $\varphi_1 = PM_1$ . Junto al Supuesto (PL1) tenemos (por el lema anterior) que  $\bar{\pi}$  es un elemento de  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ . ■

**8. Casos Particulares****8.1 Espacio de bienes de dimensión finita**

La Proposición 6.1 muestra la existencia de equilibrio cuando el espacio de bienes es de dimensión finita (a partir de una cierta dimensión) lo cual incorpora a  $\mathbb{R}^I$  como caso particular. Consecuentemente, nuestro modelo engloba al de Bonnisseau (1997) siendo igual a este cuando el espacio de bienes está dado por  $\mathbb{R}^I$  (véanse los comentarios siguientes a la enunciación de la Proposición 6.1 en la Subsección 6.1)

**8.2 Inexistencia de externalidades**

Resulta evidente que cuando no existen externalidades, o las mismas son fijas, nuestro modelo se reduce al de Bonnisseau y Médecin (1999). En este caso, los Supuestos C(v), C(vi) y P(v) (lo mismo que sus alternativas más restrictivas) no son necesarios.

**8.3 Correspondencias de producción valoradas convexas**

Nos resta analizar el caso particular de una economía con correspondencias de producción valoradas convexas. En este caso, el equilibrio general se caracteriza porque las empresas maximizan beneficios, similar al caso de equilibrio walrasiano o competitivo. El teorema de existencia es

**Corolario 8.1.** *Si para cada  $j$ , la correspondencia  $Y_j$  es valorada convexa, entonces la economía  $\mathcal{E} = \left( \left( X_i, \succsim_i, z_{-i}, r_i \right)_{i=1}^m, \left( Y_j, PM_j \right)_{j=1}^n, \left( \omega_i \right)_{i=1}^m \right)$  tiene un equilibrio con maximización de beneficios si se satisfacen los supuestos (C), (P), (B), (BL), (WSA) y (R).*

A diferencia del Teorema 5.1, el Supuesto PR no se encuentra entre las condiciones suficientes. Ello se debe a que cuando  $Y_j$  es valorada convexa, este se satisface automáticamente como reza el siguiente lema.

**Lema 8.1** *Si  $Y_j$  es una correspondencia valorada convexa y satisface el Supuesto (P), entonces  $\varphi_j = PM_j$  satisface el Supuesto (PR).*

**Demostración**

En primer lugar  $PM_j$  es no vacía y valorada convexa (PR(i)). Como  $y_j \in \partial_\infty Y_j(z_{-j})$ ,  $\{y_j\} + \text{int } L_+$  tiene intersección vacía con  $Y_j(z_{-j})$  (Capítulo Primero, Sección II, 2.14). Además  $\{y_j\} + \text{int } L_+$  es un conjunto abierto, no vacío y convexo, por lo que existe una funcional lineal continua  $\pi \neq 0$  que separa a  $\{y_j\} + \text{int } L_+$  e  $Y_j(z_{-j})$  (Capítulo Primero, Sección I, 11.4). Como  $y_j \in Y_j(z_{-j})$  y  $\pi$  es continua, se deduce que  $\pi \geq 0$ . Dado que podemos tomar, sin pérdida de generalidad,  $\pi(\chi_M) = 1$ , tenemos que  $PM_j(z) \neq \emptyset$ . La demostración de que  $PM_j$  es valorada convexa es inmediata.

En segundo lugar probamos que la correspondencia  $PM_j^F : Z^F \mapsto S^F$  definida por

$$PM_j^F(z^F) = \{p^F \in S^F : \text{existe } \pi \in PM_j(z^F) \text{ tal que } p^F = \pi|_F\}$$

tiene un grafo cerrado ((PR) (ii)). En efecto, sean las sucesiones  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $Z^F$  y  $S^F$  respectivamente, tales que  $z^n \rightarrow \bar{z}$ ,  $p^n \rightarrow \bar{p}$  y, para cada  $n$ ,  $p^n \in PM_j^F(z^n)$ . De la definición de  $PM_j^F$  existe  $\pi^n \in PM_j(z^n)$ , tal que  $p^n = \pi^n|_F$  para cada  $n$ . Como  $\pi^n$  pertenece al simplex  $S$ , que es  $\sigma^{ba}$ -compacto, existe una subsucesión  $(\pi^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$   $\sigma^{ba}$ -convergente a  $\bar{\pi}$ . Dado que  $\pi^{n_k} \in PM_j(z^{n_k})$ , tenemos que  $\pi^{n_k}(y_j^{n_k}) \geq \pi^{n_k}(y)$  para todo  $y \in Y(z_{-j}^{n_k})$ . A continuación probamos que  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) \geq \bar{\pi}(y)$  para todo  $y \in Y(\bar{z}_{-j})$ . Sea  $y \in Y_j(\bar{z}_{-j})$ . Dado que la subsucesión  $(z_{-j}^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\bar{z}_{-j}$ , existe una subsucesión de  $y$ ,  $(y^{n_k})$ , que  $\mathcal{T}$ -converge a  $y$  e  $y^{n_k} \in Y_j(z_{-j}^{n_k})$  para todo  $k$ , por el Supuesto P(ii). Como  $\pi^{n_k} \in PM_j(z^{n_k})$ , se deduce que  $\pi^{n_k}(y_j^{n_k}) \geq \pi^{n_k}(y^{n_k})$  para todo  $k$ . Tomando límites, se obtiene  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) \geq \bar{\pi}(y)$ . Dado que ello vale para cualquier  $y \in Y_j(\bar{z}_{-j})$ , se sigue que  $\bar{\pi} \in PM_j(\bar{z})$ . Por otro lado, como  $\bar{p}$  y  $\bar{\pi}$  coinciden necesariamente en  $F$ , se tiene que  $\bar{p} \in PM_j^F(\bar{z})$ .

Finalizamos este apéndice probando que la correspondencia  $PM_j$  satisface el Supuesto PR(iii). Concretamente, consideremos la subred  $(z^{F(t)}, \pi^{F(t)})_{t \in T}$  de la red  $(z^F, \pi^F)_{F \in \mathcal{F}}$   $\in Z \times S$ , tal que

$$\begin{cases} (z^{F(t)}, \pi^{F(t)}) \rightarrow (\bar{z}, \bar{\pi}) \text{ en la topología producto } \prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty \times \sigma^{ba} \\ \pi^{F(t)} \in PM_j(z^{F(t)}) \text{ para todo } t \in T \\ \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \text{ converge} \end{cases}$$

Primero probemos la parte (a) del Supuesto PR(iii). Para ello basta con mostrar que  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \bar{\pi}(y)$  para todo  $y \in Y_j(\bar{z}_{-j})$ . Supongamos que existe  $y' \in Y_j(\bar{z}_{-j})$  tal que  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) < \bar{\pi}(y')$ . Luego, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) + \varepsilon < \bar{\pi}(y')$ . A partir del Supuesto P(ii), existe una subred  $(y'^{F(t)})$  la cual  $\mathcal{T}$ -converge a  $y'$  e  $y'^{F(t)} \in Y_j(z_{-j}^{F(t)})$  para todo  $t \in T$ . Como  $\pi^{F(t)} \in PM_j(z^{F(t)})$  para todo  $t \in T$ , tenemos que  $\pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \pi^{F(t)}(y'^{F(t)})$  para todo  $t \in T$ .

Existe  $t_0 \in T$  tal que para todo  $t > t_0$ ,  $y'^{F(t)} > y' - \varepsilon \chi_M$ . Por consiguiente,  $\pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \pi^{F(t)}(y') - \varepsilon$  para todo  $t > t_0$ . Tomando límites, obtenemos  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \bar{\pi}(y') - \varepsilon$ , lo cual contradice la desigualdad anterior. Consecuentemente, deducimos que  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \bar{\pi}(\bar{y})$ .

Finalmente, demostremos que la parte (b) del Supuesto PR(iii) también se satisface. Si asumimos que  $\lim \pi^{F(t)}(y_j^{F(t)}) = \bar{\pi}(\bar{y}_j)$ , entonces  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) \geq \bar{\pi}(y)$  para todo  $y \in Y_j(\bar{z}_{-j})$  lo cual implica que  $\bar{\pi} \in PM_j(\bar{z}) \subset S$ . Probamos ahora que  $\bar{y}_j \in \partial_\infty Y_j(\bar{z}_{-j})$  por contradicción. Si  $\bar{y}_j \notin \partial_\infty Y_j(\bar{z}_{-j})$ , entonces existe  $\xi \in \text{int } L_+$  tal que  $\bar{y}_j + \xi = y_j \in Y_j(\bar{z}_{-j})$  (Capítulo Primero, Sección II, 2.14). Luego,  $y_j \gg \bar{y}_j$ . Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $y_j \gg y_j - \varepsilon \chi_M \gg \bar{y}_j$ . Por la propiedad de eliminación libre,  $y_j - \varepsilon \chi_M \in Y_j(\bar{z}_{-j})$ . Como  $\bar{\pi} \in S$ ,  $\bar{\pi}(y_j) > \bar{\pi}(y_j) - \varepsilon \geq \bar{\pi}(\bar{y}_j)$ . Concluimos así que  $\bar{y}_j \in \partial_\infty Y_j(\bar{z}_{-j})$  ■

### ***Demostración del Corolario 8.1***

Una vez probado el lema anterior, la demostración de este corolario sigue los pasos de la demostración del Teorema 5.1 cambiando el Supuesto PR por el resultado del Lema 8.1. ■

Consideremos ahora la siguiente condición

(T')  $Y_1$  satisface el Supuesto (P).

Entonces, arribamos así al último de nuestros resultados especiales, la existencia de equilibrio con precios significativos en espacios de dimensión infinita, con externalidades y con empresas maximizando beneficios



**Corolario 8.2** Bajo los Supuestos (T') y (PL1), si  $\left( \left( \bar{x}_i \right)_{i=1}^m, \left( \bar{y}_j \right)_{j=1}^n, \bar{\pi} \right)$  es un equilibrio de la economía  $\mathcal{E}$ , en el sentido del Corolario 8.1, entonces  $\bar{\pi}$  es un elemento de  $L_1(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

### **Demostración**

Se deduce directamente del Teorema 7.1. bajo el caso particular que las  $n$  correspondencias  $Y_j$  son valoradas convexas. ■

## **Apéndice A**

En este apartado demostramos formalmente los Hechos 1, 2 y la Proposición 6.1.

### **Demostración del Hecho 1.**

En esta sección probamos el cumplimiento, o no, de las condiciones suficientes de Bonnisseau (1997). Señalamos como  $C^F$ ,  $P^F$ ,  $B^F$ ,  $BL^F$ ,  $SA^F$ ,  $R^F$  y  $PR^F$  a dichas condiciones. Antes de comenzar debemos recordar que en nuestro modelo los vectores  $\underline{\xi}_i$  y  $\bar{\xi}_i$  del trabajo de Bonnisseau son iguales a cero. De la Subsección 4.1 inferimos además que si  $p^F \in PE^F$  entonces  $\inf p^F \cdot X_i^F(z_{-i}^F) = 0$  para toda  $z_{-i}^F \in F^{m+n-1}$  y todo  $i$ .

#### *Supuesto $C^F$*

Para todo  $i$ :

- (i)  $X_i^F : F^{m+n-1} \mapsto F_+$  es una correspondencia hemicontinua inferiormente, valorada convexa y con un grafo cerrado
- (ii) Para toda externalidad  $z_{-i}^F \in F^{m+n-1}$ ,  $0 \in X_i^F(z_{-i}^F) \subset F_+$
- (iii) Para toda externalidad  $z_{-i}^F \in F^{m+n-1}$  y para todo  $x_i^F \in X_i^F(z_{-i}^F)$ , el conjunto

$$\left\{ x_i'^F \in X_i^F(z_{-i}^F) : x_i'^F \succsim_{i, z_{-i}^F}^F x_i^F \right\}$$

es convexo, y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_i'^F$  en  $X_i^F(z_{-i}^F) \cap B(x_i^F, \varepsilon)$  tal que  $x_i'^F \succ_{i, z_{-i}^F}^F x_i^F$ .

- (iv) El conjunto  $\Gamma_i^F = \left\{ (z_{-i}^F, x_i^F, x_i'^F) \in F^{m+n+1} : (x_i^F, x_i'^F) \in X_i^F(z_{-i}^F)^2, x_i^F \precsim_{i, z_{-i}^F}^F x_i'^F \right\}$  es un subconjunto cerrado de  $F^{m+n+1}$ .

- (v)  $r_i^F : S^F \times F^n \mapsto F$  es una función continua y

$$\sum_{i=1}^m r_i^F \left( p^F, (y_j^F)_{j=1}^n \right) = p^F(\omega) + \sum_{j=1}^n p^F(y_j^F)$$

### Verificación del Supuesto $C^F$

(i) En primer lugar  $X_i^F$  es h.c.i. para todo  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $F$  contenga a un cierto  $\bar{F} \in \mathcal{F}$  por el Supuesto C(v). Si  $F$  no contiene a  $\bar{F}$ , entonces nada podemos afirmar acerca de la hemicontinuidad inferior de  $X_i^F$ .

$X_i^F$  es valorada convexa ya que para todo  $z_{-i}^F \in F^{m+n-1} \subset L^{m+n-1}$ ,  $X_i(z_{-i}^F)$  es un subconjunto convexo de  $L_+$  por C(i) y  $F_+$  es el ortante positivo del subespacio  $F$ .

Probemos ahora que  $X_i^F$  es una correspondencia cerrada. En efecto consideremos las sucesiones  $(x_i^n)$  y  $(z_{-i}^n)$  en  $F$  y  $F^{m+n-1}$  respectivamente tales que  $(x_i^n) \rightarrow x_i$ ,  $(z_{-i}^n) \rightarrow z_{-i}$  y  $x_i^n \in X_i^F(z_{-i}^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De la definición de  $X_i^F$ , tenemos que  $x_i^n \in X_i(z_{-i}^n)$  para todo  $n$  y por C(i)  $x_i \in X_i(z_{-i})$ . Como  $F$  es un subespacio de dimensión finita, es cerrado (Capítulo Primero, Sección I, 18.1 y 18.2), de donde obtenemos que  $x_i \in X_i(z_{-i}) \cap F$ . Luego,  $X_i^F$  es cerrada.

(ii) Esto ha sido verificado ya en la Subsección 4.1 cuando construimos las subeconomías.

(iii) Dado que las preferencias son reflexivas, completas, transitivas y convexas y que si la externalidad es fija entonces también son continuas (véase como caso particular del punto (iv) abajo), se puede demostrar (Debreu (1959), pg. 60) que el conjunto  $\{x_i'^F \in X_i^F(z_{-i}^F) : x_i'^F \succsim_{i, z_{-i}^F}^F x_i^F\}$  es convexo.

Analicemos la condición LNS $^F$ . Sea  $x_i^F \in X_i^F(z_{-i}^F)$ . Por C(ii), para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_i'$  en  $X_i(z_{-i}^F) \cap B(x_i^F, \varepsilon)$  tal que  $x_i' \succ_{i, z_{-i}^F} x_i^F$ . Sin embargo  $x_i'$  no tiene por qué pertenecer al subespacio  $F$ . Luego, la no saciedad local no es verificada en la subeconomía.

(iv) Sean las sucesiones  $(x_i^n, x_i'^n)$  y  $(z_{-i}^n)$  en  $F^2$  y  $F^{m+n-1}$  respectivamente, tales que  $(x_i^n, x_i'^n) \rightarrow (x_i, x_i')$ ,  $(z_{-i}^n) \rightarrow (z_{-i})$  y  $(x_i^n, x_i'^n) \in \Gamma_i^F(z_{-i}^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\Gamma_i^F(z_{-i}^n) \subset \Gamma_i(z_{-i}^n)$ , deducimos que  $(x_i, x_i') \in \Gamma_i(z_{-i})$  por C(iv). Dado que  $(z_{-i}, x_i, x_i') \in F^{m+n+1}$ , tenemos que  $(x_i, x_i') \in \Gamma_i^F(z_{-i})$ . Luego,  $\Gamma_i^F$  es una correspondencia cerrada.

(vi) Notemos en primer lugar que existe una notación diferente para la función que nosotros consideramos y la de Bonnisseau (1997). En nuestro caso, de la definición de

$r_i$ , obtenemos  $r_i^F \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right)$ , mientras que en el trabajo de Bonnisseau la función de ingresos es  $r_i^F \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right)$ . Esta (aparente) diferencia puede verse que no es tal, si consideramos la función compuesta  $\hat{r}_i^F \circ f \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right)$  con  $f : S^F \times F^n \mapsto \mathbb{R}^{1+n}$ ,  $f \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right) = \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right)$  y,  $\hat{r}_i^F : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}$ . Así, comparado con Bonnisseau (1997) tenemos  $r_i^F \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right) = \hat{r}_i^F \circ f \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right)$ . El caso es que en nuestra tesis volvemos a escribir  $\hat{r}_i^F$  como  $r_i^F$ , o sea,  $r_i^F \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right) = \hat{r}_i^F \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right)$ . Sin pérdida alguna de generalidad, en adelante escribiremos  $r_i^F \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right)$  o  $r_i^F \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right)$  indistintamente.

La continuidad de  $r_i^F$  se sigue directamente de la continuidad de  $r_i$ . Por otro lado, de lo dicho anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m r_i^F \left( p^F, \left( y_j^F \right)_{j=1}^n \right) &= \sum_{i=1}^m r_i^F \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right) \\ &= \sum_{i=1}^m r_i \left( \pi(\omega_i), \left( \pi(y_j^F) \right)_{j=1}^n \right) \quad (\text{dado que } (\omega_i, (y_j^F)_{j=1}^n) \in F^{1+n} \text{ y } p^F = \pi|_F) \\ &\stackrel{\text{por C(v)}}{=} \pi(\omega) + \sum_{j=1}^n \pi(y_j^F) \\ &= \langle p^F, \omega \rangle_F + \sum_{j=1}^n \langle p^F, y_j^F \rangle \end{aligned}$$

**Supuesto B<sup>F</sup>**

Para todo  $\omega' \geq \omega$ , el conjunto

$$A^F(\omega') = \{z^F \in Z^F : \sum_{i=1}^m x_i^F \leq \sum_{j=1}^n y_j^F + \omega'\} \text{ es acotado.}$$

**Verificación del Supuesto B<sup>F</sup>.**

Dado que  $Z^F \subset Z$ , el Supuesto B implica que B<sup>F</sup> se satisfaga automáticamente.

**Supuesto P<sup>F</sup>**

Para todo  $j$ ,

(i)  $Y_j^F : F^{m+n-1} \rightarrow F$  es una correspondencia hemicontinua inferiormente y cerrada.

(ii) Existen  $\underline{t}_j$  y  $\bar{t}_j$  en  $\mathbb{R}$  tales que para toda  $z_{-j}^F \in F^{m+n-1}$ ,  $\underline{t}_j \chi_M \in Y_j^F(z_{-j}^F)$  y  $\bar{t}_j \chi_M \notin Y_j^F(z_{-j}^F)$

(iii) Para toda  $z_{-j}^F \in F^{m+n-1}$ ,  $Y_j^F(z_{-j}^F) - F_+ = Y_j^F(z_{-j}^F)$  (eliminación libre).

*Verificación del Supuesto  $P^F$ .*

(i)  $Y_j^F$  es h.c.i. para todo  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $F$  contiene a un cierto  $\bar{F} \in \mathcal{F}$  por el Supuesto P(v). Si  $F$  no contiene a  $\bar{F}$ , entonces nada podemos afirmar acerca de la hemicontinuidad inferior de  $Y_j^F$ .

(ii) Esta condición es directamente implicada por P(iii)

(iii) Sea  $y'^F = y^F - \xi^F \in Y_j(z_{-j}^F) \cap F - F_+$  tal que  $y^F \in Y_j(z_{-j}^F) \cap F$  y  $\xi^F \in F_+$ . De ahí que  $y^F \in Y_j(z_{-j}^F)$  y  $\xi^F \in L_+$  y, por P(iii),  $y'^F \in Y_j(z_{-j}^F)$ . Como  $y'^F \in F$ , entonces  $y'^F \in Y_j(z_{-j}^F) \cap F$ . Luego,  $Y_j^F(z_{-j}^F) \supset Y_j^F(z_{-j}^F) - F_+$ .

Recíprocamente, sea  $y'^F \in Y_j(z_{-j}^F) \cap F \subset Y_j(z_{-j}^F)$ . Supongamos, en primer lugar, que  $y'^F \notin \partial Y_j^F(z_{-j}^F)$ , entonces existe  $y^F \in Y_j^F(z_{-j}^F)$  tal que  $y^F \gg y'^F$ . Sea  $\xi^F = y^F - y'^F \gg 0$ , tal que  $y'^F = y^F - \xi^F \in Y_j(z_{-j}^F) \cap F - F_{++} \subset Y_j(z_{-j}^F) \cap F - F_+$ . Ahora asumamos que  $y'^F \in \partial Y_j^F(z_{-j}^F)$ . Como  $0 \in F_+$ , trivialmente tenemos que  $y'^F \in Y_j(z_{-j}^F) \cap F - F_+$ . Luego,  $Y_j^F(z_{-j}^F) \subset Y_j^F(z_{-j}^F) - F_+$ .

*Supuesto  $BL^F$*

Para todo productor  $j = 1, \dots, n$ ; existe un número real  $\alpha_j$  tal que, si  $z^F \in Z^F$  y  $p_j^F \in \varphi_j^F(z^F)$ , entonces  $\langle p_j^F, y_j^F \rangle_F \geq \alpha_j$

*Verificación del Supuesto  $BL^F$ .*

Sea  $z^F \in Z^F \subset Z$ . De la definición de  $\varphi_j^F$  existe  $\pi_j \in \varphi_j(z^F)$  tal que  $\pi_j(y_j^F) \geq \alpha_j$  para todo  $j$ . Como  $\pi_{j|F} = p_j^F$  tenemos que  $\langle p_j^F, y_j^F \rangle_F \geq \alpha_j$  para todo  $j$ .

*Supuesto  $SA^F$*

Para todo vector  $(p^F, z^F, \lambda) \in PE^F \times \mathbb{R}_+$ , si  $z^F \in A^F(\omega + \lambda \chi_M)$  entonces  $\langle p^F, \sum_{j=1}^n y_j^F + \omega + \lambda \chi_M \rangle_F > 0$

*Verificación del Supuesto  $SA^F$ .*

Sean  $(p^F, z^F, \lambda) \in PE^F \times \mathbb{R}_+$  y  $z^F \in A^F(\omega + \lambda \chi_M)$ . De la definición de la correspondencia  $\phi_j^F$ , existen vectores de precios  $(\pi_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n \phi_j(z^F) \subset S^n$  tales que  $p^F = \pi_{j|F}^F$  para todo  $j$ . De la Subsección 4.1 tenemos además que  $z^F \in Z$  y  $A^F(\omega + \lambda \chi_M) \subset A(\omega + \lambda \chi_M)$ . Dado que no se cumple que  $\pi_j = \pi$  para todo  $j$ , no podemos aplicar el Supuesto WSA. Luego, no se verifica el Supuesto  $SA^F$ .

*Supuesto  $R^F$*

Para todo  $(p^F, z^F) \in PE^F$ , si  $z^F \in A^F(\omega)$  entonces  $r_i^F(p^F, (y_j^F)_{j=1}^n) > 0$ .

*Verificación del Supuesto  $R^F$ .*

Sean  $(p^F, z^F) \in PE^F$  y  $z^F \in A^F(\omega)$ . De la definición de  $\phi_j^F$  existe  $\pi \in \phi_j(z^F) \subset S$  tal que  $\pi_{|F} = p^F$ . De la Subsección 4.1 tenemos que  $z^F \in A^F(\omega) \subset A(\omega)$  y, por el Supuesto R, deducimos

$$0 < r_i \left( \pi(\omega_i), \left( \pi(y_j^F)_{j=1}^n \right) \right) = r_i \left( \langle p^F, \omega_i \rangle_F, \left( \langle p^F, y_j^F \rangle_F \right)_{j=1}^n \right) = r_i^F \left( p^F, (y_j^F)_{j=1}^n \right)$$

*Supuesto  $PR^F$*

La correspondencia  $\phi_j^F : Z^F \mapsto S^F$  es no vacía, hemicontinua superiormente, valorada convexa y compacta.

*Verificación del Supuesto  $PR^F$ .*

Observamos que del Supuesto PR(i) se sigue directamente que  $\phi_j^F$  es no vacía y valorada convexa. Por PR(ii)  $\phi_j^F$  es una correspondencia cerrada y dado que el conjunto  $S^F$  es compacto,  $\phi_j^F$  es hemi-continua superiormente (Hildenbrand (1974), pg. 23). Finalmente demostramos que la correspondencia  $\phi_j^F$  es valorada compacta. Como  $\phi_j^F$  es cerrada,  $\phi_j^F(z^F)$  es un subconjunto cerrado de  $S^F$  para todo  $z^F \in F^{m+n}$  (Joseph (1978), pg. 509). Como  $S^F$  es compacto,  $\phi_j^F(z^F)$  es un subconjunto compacto de  $S^F$  (Dunford y Schwartz (1958), pg. 17)

Así hemos demostrado el Hecho 1. Las condiciones suficientes de Bonnisseau (1997) no están completamente cumplidas de modo que no podemos afirmar que exista un equilibrio en cada subeconomía. En el siguiente paso probamos que condiciones más débiles que las que aquí no se verificaron, se cumplen a partir de un cierto subespacio.

**Demostración del Hecho 2.**

La prueba está inspirada en el Lema 3 de Bonnisseau (2002). Sin embargo debemos adaptarla para considerar externalidades y funciones multívocas.

$\text{WSA}^F$

En primer lugar probamos que existe  $\hat{F} \in \mathcal{F}$  tal que para todo  $F$  que contiene a  $\hat{F}$ , la economía  $\mathcal{E}^F$  satisface el Supuesto (WSA<sup>F</sup>). Supongamos, por el contrario, que para todo  $F \in \mathcal{F}$ , existe  $F' \in \mathcal{F}$  tal que  $F' \supset F$ ,  $(p^{F'}, z^{F'}, \lambda^{F'}) \in PE^{F'} \times [0, \bar{\lambda}]$ ,  $z^{F'} \in A(\omega + \lambda^{F'} \chi_M)$  y  $\langle p^{F'}, \sum_{j=1}^n y_j^{F'} + \omega + \lambda^{F'} \chi_M \rangle_{F'} = 0$ . De la definición de  $\phi_j^{F'}$ , existe  $(\pi_j^{F'}) \in \prod_{j=1}^n \phi_j(z^{F'})$  tal que  $\pi_{j|F'}^{F'} = p^{F'}$  para todo  $j$ . Dado que  $z^{F'} \in A(\omega + \lambda^{F'} \chi_M) \subset A(\omega + \bar{\lambda} \chi_M)$  para todo  $F' \in \mathcal{F}$ , el Supuesto (B) implica que  $\left( (z^{F'}), (\pi_j^{F'})_{j=1}^n, (\pi_j^{F'}(y_j^{F'}))_{j=1}^n, \lambda^{F'} \right)_{F' \in \mathcal{F}}$  está en un conjunto compacto en la topología producto generada por las topologías débiles\* y la topología de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por tanto, existe una subred  $\left( (z^{F'(t)}), (\pi_j^{F'(t)})_{j=1}^n, (\pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}))_{j=1}^n, \lambda^{F'(t)} \right)_{t \in (T, \geq)}$  la cual converge a  $\left( (\bar{z}), (\bar{\pi}_j)_{j=1}^n, \lim(\pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}))_{j=1}^n, \lambda \right)$ .

Como  $z^{F'} \in A(\omega + \lambda^{F'} \chi_M)$  para todo  $F' \in \mathcal{F}$ , se sigue que  $\sum_{j=1}^n y_j^{F'(t)} + \omega + \lambda^{F'(t)} \chi_M \geq \sum_{i=1}^m x_i^{F'(t)} \geq 0$ , y dado que  $L_+$  es  $\sigma^\infty$ -cerrado,  $\sum_{j=1}^n \bar{y}_j + \omega + \lambda \chi_M \geq \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \geq 0$ . Del Supuesto C(i) y P(i),  $X_i$  e  $Y_j$  son, para todo  $i$  y  $j$ ,  $(\prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, \sigma^\infty)$ -cerrados. Luego,  $\bar{z} \in \prod_{i=1}^m X_i(\bar{z}_{-i}) \times \prod_{j=1}^n Y_j(\bar{z}_{-j})$ .

Repitiendo el mismo argumento que en el Paso 2 de la Subsección 6.2, deducimos que  $\bar{\pi}_j = \bar{\pi} > 0$  para todo  $j$ . De ahí,  $\sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) + \bar{\pi}(\omega) + \lambda \geq 0$ . Dado que  $\langle p^{F'}, \sum_{j=1}^n y_j^{F'} + \omega + \lambda^{F'} \chi_M \rangle_{F'} = \pi_j^{F'}(\sum_{j=1}^n y_j^{F'} + \omega + \lambda^{F'} \chi_M) = 0$  para todo  $F \in \mathcal{F}$  y todo  $j$ , obtenemos  $\sum_{j=1}^n \lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}) + \bar{\pi}(\omega) + \lambda = 0$ . Recordando que el Supuesto PR (iii) (a) implica que  $\lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}) \geq \bar{\pi}(\bar{y}_j)$ , deducimos

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) + \bar{\pi}(\omega) + \lambda \leq \sum_{j=1}^n \lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}) + \bar{\pi}(\omega) + \lambda = 0, \text{ luego}$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) + \bar{\pi}(\omega) + \lambda = 0 \quad (3)$$

Así,  $\sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) = \sum_{j=1}^n \lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)})$ , lo cual implica que  $\bar{\pi}(\bar{y}_j) = \lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)})$  para todo  $j$ . Del Supuesto PR (iii) (b) se sigue que  $\bar{z} \in Z$  y  $\bar{\pi} \in \bigcap_{j=1}^n \phi_j(\bar{z})$  para todo  $j$ . Del Supuesto (WSA) deducimos que  $\sum_{j=1}^n \bar{\pi}(\bar{y}_j) + \bar{\pi}(\omega) + \lambda > 0$ , lo cual contradice (3).

$\text{LNS}^F$

Finalizamos la prueba de este Hecho mostrando que existe  $\hat{F} \in \mathcal{F}$  tal que la subeconomía  $\mathcal{E}^F$  satisface el Supuesto (LNS<sup>F</sup>) para cada  $F$  que contiene a  $\hat{F}$ . Primero probamos que las preferencias son no saciadas en las asignaciones factibles. Supongamos, por el contrario, que para todo  $F \in \mathcal{F}$ , existe  $F' \in \mathcal{F}$ , tal que  $F' \supset F$ ,  $\left( (x_i^{F'})_{i=1}^m, (y_j^{F'})_{j=1}^n \right) \in A^{F'}(\omega)$  y para algún  $i_0$ , no existe  $\zeta_{i_0}^{F'} \in X_{i_0}^{F'}(z_{-i_0}^{F'})$  tal que  $\zeta_{i_0}^{F'} \succ_{i, z_{-i_0}^{F'}} x_{i_0}^{F'}$ . Como  $A^{F'}(\omega) \subset A(\omega)$  para todo  $F' \in \mathcal{F}$ , existe una subred  $\left( (x_i^{F'(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F'(t)})_{j=1}^n \right)_{t \in (T, \geq)}$  que converge a  $\left( (\bar{x}_i)_{i=1}^m, (\bar{y}_j)_{j=1}^n \right)$  en la topología débil\*  $\prod_{L^{m+n}} \sigma^\infty$ . A partir de los Supuestos C(i) y P(i),  $X_i$  e  $Y_j$  son, para todo  $i$  y  $j$ ,  $\left( \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, \sigma^\infty \right)$ -cerradas. Luego,  $\bar{z} \in \prod_{i=1}^m X_i(\bar{z}_{-i}) \times \prod_{j=1}^n Y_j(\bar{z}_{-j})$ . Del Supuesto C(ii), existe  $(\zeta_i) \in \prod_{i=1}^m X_i(\bar{x}_i)$  tal que  $\zeta_i \succ_{i, \bar{z}_{-i}} \bar{x}_i$  para todo  $i$ . Dado que la subred  $(z_{-i}^{F'(t)})_{t \in (T, \geq)} \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty$ -converge a  $\bar{z}_{-i}$  y  $X_i$  es  $\left( \prod_{L^{m+n-1}} \sigma^\infty, f \right)$ -h.c.i. en  $L^{m+n-1}$  (Supuesto C(vi)), existe, para cada  $i$ , un subespacio de dimensión finita  $\dot{F}_i$  tal que existe una subred  $(\zeta_i^{F'(t)})_{t \in (T, \geq)}$  que converge a  $\zeta_i$ , con  $(\zeta_i^{F'(t)})_{t \in (T, \geq)} \subset \zeta_i + \dot{F}_i$  y  $\zeta_i^{F'(t)} \in X_i(z_{-i}^{F'(t)})$  para todo  $t$ . Existe  $t_0 \in T$  tal que  $t > t_0$  implica  $\zeta_i + \dot{F}_i \subset F'(t)$  para todo  $i$ . Luego,  $\zeta_i^{F'(t)} \in X_i(z_{-i}^{F'(t)}) \cap F'(t)$  para todo  $t > t_0$  y todo  $i$ .

Como  $(\bar{z}_{-i}, \zeta_i, \bar{x}_i) \notin \Gamma_i$  y la red  $(x_i^{F'(t)})_{t \in (T, \geq)} \sigma^\infty$ -converge a  $\bar{x}_i$  existe  $t_1$  tal que para todo  $t > t_1$ ,  $(z_{-i}^{F'(t)}, \zeta_i^{F'(t)}, x_i^{F'(t)}) \notin \Gamma_i$ , por el Supuesto C(iii). Luego, para todo  $i$  y todo  $t$  mayor que  $t_0$  y  $t_1$ ,  $\zeta_i^{F'(t)}$  y  $x_i^{F'(t)}$  pertenecen a  $X_i(z_{-i}^{F'(t)}) \cap F'(t)$  y por la completitud de las preferencias,  $\zeta_i^{F'(t)} \succ_{i, z_{-i}^{F'(t)}} x_i^{F'(t)}$ . Dado que  $\{F'(t) : t \in T\} \subset \{F' : F' \in \mathcal{F}\}$  esto contradice el hecho que existe  $F' \in \mathcal{F}$  tal que  $F' \supset F$ ,  $\left( (x_i^{F'})_{i=1}^m, (y_j^{F'})_{j=1}^n \right) \in A^{F'}(\omega)$  y para algún  $i_0$ , no existe  $\zeta_{i_0}^{F'} \in X_{i_0}^{F'}(z_{-i_0}^{F'})$  tal que  $x_{i_0}^{F'} \prec_{i, z_{-i_0}^{F'}} \zeta_{i_0}^{F'}$ .

Combinando el resultado anterior con el hecho de que la condición de convexidad de las preferencias se mantiene al truncar las subeconomías, deducimos que dichas preferencias son localmente no saciadas (LNS<sup>F</sup>). Con ello terminamos la demostración del Hecho 2. ■

En el siguiente paso probamos que las condiciones que se verificaron en el Hecho 1 junto con las propiedades demostradas anteriormente, son suficientes para garantizar la existencia de equilibrio general en las economías de dimensión finita a partir de una cierta dimensión.

**Demostración de la Proposición 6.1**

Previo a comenzar la demostración de la Proposición 6.1 consideremos cuatro puntos importantes relacionados con las subeconomías. En primer lugar, la topología débil restringida al subespacio  $F$  coincide con la topología métrica inducida por la norma (Capítulo Primero, Sección I, 18.11). Como todo espacio métrico satisface el primer axioma de numerabilidad (Kelley (1962), pg. 142, Teorema 11), tenemos que en las pruebas de este apartado podemos trabajar directamente con sucesiones (Capítulo Primero, Sección I, 2.14). Así, las demostraciones se asemejan mucho a las expuestas por Bonnisseau (1997) excepto detalles a la luz de las obvias diferencias entre nuestras subeconomías, definidas para el subespacio  $F$ , y la economía de Bonnisseau, definida para el espacio  $\mathbb{R}^I$ .

En segundo lugar, reiteramos lo enunciado antes de la demostración del Hecho 1, esto es, los vectores  $\underline{\xi}_i$  y  $\bar{\xi}_i$  del trabajo de Bonnisseau son iguales a cero en nuestro modelo.

Luego, si  $p^F \in PE^F$  entonces  $\inf p^F \cdot X_i^F(z_{-i}^F) = 0$  para toda  $z_{-i}^F \in F^{m+n-1}$  y todo  $i$ .

Dado que en el actual contexto estamos trabajando en el subespacio  $F$ , omitiremos los supraíndices  $F$  de las variables  $p, y_j, x_i$  y de  $s_j$  que pertenece a  $\chi_M^{\perp F}$ . Adoptamos esta medida a los fines de claridad, ya que por las características de la demostración de la Proposición 6.1, las variables quedarían muy cargadas con subíndices y supraíndices.

En cuarto y ultimo término, señalamos que usaremos la siguiente definición de *ínfimo esencial* para una función  $f \in L^*$

$$\inf \text{esen}(f) = \sup \left\{ c \in \mathbb{R} : \mu(m \in M : f(m) < c) = 0 \right\}$$

Ahora pasamos a la demostración de la Proposición 6.1. Sea  $F \in \mathcal{F}$  un subespacio de dimensión finita tal que  $F \supset \bar{F}$ ,  $F \supset \bar{\bar{F}}$  y  $F \supset \hat{F}$ . Sea  $\eta > 0$  el número real definido justo antes del Hecho 2. Consideremos el siguiente conjunto de precios que contiene a  $S^F$

$$S_\eta^F = S^F + \eta \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, 1)$$

donde  $\bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, 1)$  denota la bola unitaria cerrada en  $\chi_M^{\perp F}$ . Sea  $\bar{\gamma}$  el parámetro definido justo antes del Hecho 2. Evidentemente tenemos la siguiente desigualdad

$$\bar{\gamma} > -\sum_{j=1}^n \alpha_j + \max \left\{ \langle p, -\omega \rangle_F : p \in S_\eta^F \right\}$$

En lo sucesivo, denotamos por  $\text{proj}_{\chi_M^{\perp F}}$  a la proyección en  $\chi_M^{\perp F}$  y por  $\pi_{S^F}$  a la proyección en  $S^F$ .



**Lema 6.1.1** A partir de  $P^F$  se verifica lo siguiente:

- (a) Existe una función continua  $\lambda_j : F^{m+n-1} \times \mathcal{X}_M^{\perp_F} \mapsto \mathbb{R}$  tal que para todo  $(z_{-j}, s_j) \in F^{m+n-1} \times \mathcal{X}_M^{\perp_F}$ ,  $s_j - \lambda_j(z_{-j}, s_j)\mathcal{X}_M \in \partial Y_j^F(z_{-j})$ .
- (b) Para todo  $(z_{-j}, s_j) \in F^{m+n-1} \times \mathcal{X}_M^{\perp_F}$ ,  $\inf \{s_j(m) : m \in M\} - \bar{t} \leq \lambda_j(z_{-j}, s_j) \leq \sup \{s_j(m) : m \in M\} - \underline{t}$ .

**Demostración.**

(a) En primer lugar, probamos que para todo  $(z_{-j}, s_j) \in F^{m+n-1} \times \mathcal{X}_M^{\perp_F}$ , existe un número real  $\lambda$  tal que  $s_j - \lambda\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})$ . Sean  $y', y'' \in F$  tales que  $y' \in Y_j^F(z_{-j})$  e  $y'' \notin Y_j^F(z_{-j})$ . De ahí,  $\{\lambda \in \mathbb{R} : s_j - \lambda\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})\} \neq \emptyset$  ya que si  $\lambda = \|s_j\| + \|y'\|$ , entonces  $s_j - (\|s_j\| + \|y'\|)\mathcal{X}_M \leq y'$  c.t.p. ( $s_j - \|s_j\|\mathcal{X}_M \leq 0$  c.t.p.,  $-\|y'\|\mathcal{X}_M \leq y'$  c.t.p.) y por la propiedad de eliminación libre,  $s_j - (\|s_j\| + \|y'\|)\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})$ . Por otro lado notemos que  $\{\lambda \in \mathbb{R} : s_j - \lambda\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})\}$  es acotado inferiormente. En efecto, sea  $\lambda' = -\|s_j\| - \|y''\|$ , y supongamos que existe  $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{R} : s_j - \lambda\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})\}$ , tal que  $\lambda' > \lambda$ . Por eliminación libre, ello implica que  $s_j + (\|s_j\| + \|y''\|)\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})$ . Sin embargo, como  $s_j + (\|s_j\| + \|y''\|)\mathcal{X}_M \geq y''$  c.t.p. se deduce, otra vez por la propiedad de eliminación libre, que  $y'' \in Y_j^F(z_{-j})$ , una contradicción. Dado que el conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{R} : s_j - \lambda\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})\}$  es no vacío y acotado inferiormente, existe  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_j = \inf \{\lambda \in \mathbb{R} : s_j - \lambda\mathcal{X}_M \in Y_j^F(z_{-j})\}$ . Luego,  $s_j - \lambda_j\mathcal{X}_M \in \partial Y_j^F(z_{-j})$ . Como  $\lambda_j$  está en función de  $s_j$  y  $z_{-j}$ , escribimos  $\lambda_j(z_{-j}, s_j)$ .

Veamos a continuación que  $\lambda_j$  es una función continua en  $F^{m+n-1} \times \mathcal{X}_M^{\perp_F}$ . Sea la sucesión  $(z_{-j}^n, s_j^n)$  convergiendo a  $(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)$ . Sea  $\bar{y} = \bar{s}_j - \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)\mathcal{X}_M \in \partial Y_j^F(\bar{z}_{-j})$ . Como  $Y_j^F$  es h.c.i. existe una sucesión  $(y^n)$ , tal que  $y^n \rightarrow \bar{y}$  e  $y^n \in Y_j^F(z_{-j}^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como

$$s_j^n - \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n)\mathcal{X}_M \in \partial Y_j^F(z_{-j}^n) \text{ e } \{y^n\} - F_+ \subset Y_j^F(z_{-j}^n)$$

deducimos que  $s_j^n - \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n)\mathcal{X}_M \notin \{y^n\} - F_{++}$ . Consecuentemente, existe un subconjunto  $M' \subset M$  de medida no nula tal que  $y^n(m) \leq s_j^n(m) - \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n)$  con

$m \in M'$ . Entonces,  $\lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) \leq \sup \{s_j^n(m) - y^n(m) : m \in M\}$ . Consecuentemente,  $\limsup_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) \leq \sup \{s_j(\bar{m}) - \bar{y}(\bar{m}) : m \in M\} = \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)$ .

Veamos ahora que  $\liminf_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) \geq \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)$ . Supongamos que  $\liminf_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) < \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)$ , entonces existe un número real  $\varepsilon > 0$  y una subsucesión  $\lambda_j(z_{-j}^{n_s}, s_j^{n_s})$  tal que  $\lambda_j(z_{-j}^{n_s}, s_j^{n_s}) < \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) - \varepsilon$  para todo  $s \in \mathbb{N}$ . Dado que  $s_j^{n_s} - (\lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) - \varepsilon)\chi_M < s_j^{n_s} - \lambda_j(z_{-j}^{n_s}, s_j^{n_s})\chi_M \in Y_j^F(z_{-j}^{n_s})$  obtenemos, por la condición de eliminación libre, que  $s_j^{n_s} - (\lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) - \varepsilon)\chi_M \in Y_j^F(z_{-j}^{n_s})$ . Como  $Y_j^F$  tiene un grafo cerrado,  $\bar{s}_j - (\lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) - \varepsilon)\chi_M \in Y_j^F(\bar{z}_{-j})$ . Claramente  $\bar{s}_j - (\lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) - \varepsilon)\chi_M \gg \bar{y}$ , lo cual contradice que  $\bar{y} \in \partial Y_j^F(\bar{z}_{-j})$ . Luego,  $\liminf_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) \geq \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)$ .

Como  $\limsup_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) \leq \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) \leq \liminf_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n)$ , se deduce que  $\limsup_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) = \liminf_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) = \lim_n \lambda_j(z_{-j}^n, s_j^n) = \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j)$ . Luego,  $\lambda_j$  es una función continua en  $F^{m+n-1} \times \chi_M^{\perp F}$ .

(b) Recordemos que  $\underline{t}\chi_M \in Y_j^F(z_{-j})$  y  $\bar{t}\chi_M \notin Y_j^F(z_{-j})$ . Consecuentemente, para todo  $y \in \partial Y_j^F(z_{-j}^F)$ ,  $y \notin \{\underline{t}\chi_M\} - F_{++}$  e  $y \notin \{\bar{t}\chi_M\} + F_{++}$ , de donde deducimos que existen subconjuntos  $M'$  y  $M''$  de  $M$ , ambos de medida no nula, tales que  $y(m) \geq \underline{t}$  para todo  $m \in M'$  e  $y(m) \leq \bar{t}$  para todo  $m \in M''$  o, equivalentemente,  $\bar{s}_j(m) - \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) \geq \underline{t}$  si  $m \in M'$  y  $\bar{s}_j(m) - \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) \leq \bar{t}$  si  $m \in M''$ . De allí deducimos  $\inf \{s_j(m) : m \in M\} - \bar{t} \leq \lambda_j(\bar{z}_{-j}, \bar{s}_j) \leq \sup \{s_j(m) : m \in M\} - \underline{t}$  ■

Como  $A^F(\omega + \bar{\gamma}\chi_M)$  es acotado,  $\text{proy}_{Y_j^F(z_{-j}^F)} A^F(\omega + \bar{\gamma}\chi_M)$  es acotado. Consecuentemente,  $\prod_{j=1}^n \text{proy}_{Y_j} A^F(\omega + \bar{\gamma}\chi_M) \subset F^n$  es acotado. Por consiguiente, existe un bola abierta en  $\chi_M^{\perp F}$  de centro 0 y radio  $\varepsilon$ ,  $B_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)$ , tal que

$$\begin{aligned} & \text{proy}_{(\chi_M^{\perp F})^n} \left( \prod_{j=1}^n \text{proy}_{Y_j} A^F(\omega + \bar{\gamma}\chi_M) \right) \\ &= \text{proy}_{(\chi_M^{\perp F})^n} (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= \left( \text{proy}_{\chi_M^{\perp F}} y_1, \text{proy}_{\chi_M^{\perp F}} y_2, \dots, \text{proy}_{\chi_M^{\perp F}} y_n \right) \\ &= (s_1, s_2, \dots, s_n) \subset B_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n. \end{aligned}$$

Esta bola puede escogerse apropiadamente para que también satisfaga  $\varepsilon > \sup_j \left\{ \left| \inf esen(s_j) \right|, \left| \sup esen(s_j) \right| \right\}$ . En consecuencia, el conjunto

$$\left\{ s_j - t_j \chi_M : s_j \in B_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon), t_j \in \left[ \inf esen(s_j - \bar{t}_j \chi_M), \sup esen(s_j - \underline{t}_j \chi_M) \right] \right\}$$

es acotado para todo  $j$ . Por consiguiente, también será acotado el conjunto

$$\left\{ (s_j - t_j \chi_M)_{j=1}^n : (s_j)_{j=1}^n \in B_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n, t_j \in \left[ \inf esen(s_j - \bar{t}_j \chi_M), \sup esen(s_j - \underline{t}_j \chi_M) \right] \right\}$$

para todo  $j$ .

Por lo tanto existe un subconjunto de  $F^n$ ,  $K$ , no vacío, convexo y compacto que contiene al conjunto de arriba. Nótese que por el Lema 6.1.1 (b), para todo  $z \in F^{m+n}$ , para todo  $(s_j)_{j=1}^n \in B_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$ ,  $(y_j)_{j=1}^n = (s_j - \lambda_j(z_{-j}, s_j) \chi_M)_{j=1}^n \in K$ .

### 6.1.1 Compactificación de los conjuntos de consumo

Por  $B^F$ ,  $A^F(\omega)$  es acotado, de modo que la proyección sobre la  $i$ -ésima componente,  $proy_{X_i^F(z_{-i})} A^F(\omega) = \hat{X}_i^F(z_{-i})$ , también es acotada. Para todo escalar  $k \in \mathbb{R}_+$  y para todo  $z \in F^{m+n}$  definimos

$$X_i^{Fk}(z_{-i}) = X_i^F(z_{-i}) \cap (\{k \chi_M\} - F_+)$$

**Lema 6.1.2** Bajo los Supuestos de la Proposición 6.1, existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tal que para todo  $i = 1, \dots, m$

$$(a) \quad \hat{X}_i^F(z_{-i}) \subset \{k \chi_M\} - F_{++}.$$

$$(b) \quad \text{Para todo } \gamma \in [0, \bar{\gamma}] \text{ y para todo } (p, z) \in PE^F \text{ si } z \in A^F(\omega + \gamma \chi_M) \text{ entonces } \langle p, \sum_{j=1}^n y_j + \omega + \gamma \chi_M \rangle_F > 0.$$

$$(c) \quad \text{Para todo } (p^F, z^F) \in PE^F, \text{ si } z^F \in A^F(\omega) \text{ entonces } r_i^F(p, (y_j)_{j=1}^n) > 0.$$

### Demostración

(a) Será suficiente con probar que  $\hat{X}_i^F(z_{-i}) \subset \{k \chi_M\} - \text{int } F_+$ . Como  $\hat{X}_i^F(z_{-i})$  es acotado para toda  $z_{-i} \in F^{m+n-1}$ , existe  $k > 0$  que satisface lo siguiente:  $\hat{X}_i^F(z_{-i}) \subset B(0, k)$  y si  $x \in \hat{X}_i^F(z_{-i})$ , entonces que  $0 < x \ll k \chi_M$ . Sea  $\zeta = k \chi_M - x \gg 0$  y sea  $\delta > 0$  tal que  $\delta \chi_M \ll \zeta$ . Luego,  $B(\zeta, \delta) \subset F_+$  y por lo tanto  $x \in \{k \chi_M\} - \text{int } F_+$ .

(b) La demostración es similar a la de Bonnisseau (1997)

(c) La demostración es similar a la de Bonnisseau (1997)

■

Sea  $k \in \mathbb{R}_+$ , tal que se satisface el Lema 6.1.2. Por  $C^F(i)$ ,  $X_i^F(z_{-i}) \cap (\{k\chi_M\} - \text{int } F_+)$  es no vacío ya que el vector nulo pertenece a la intersección. Como consecuencia, tenemos que  $X_i^{Fk}$  es hemi-continua superiormente y valorada convexa y compacta. En efecto, la imagen de la correspondencia  $z_{-i} \mapsto X_i^F(z_{-i}) \cap (\{k\chi_M\} - F_+)$ , está contenida en un conjunto compacto,  $[0, k\chi_M]$ , y es cerrada. También es h.c.i: sea  $x \in X_i^{Fk}(z_{-i})$  de modo que  $\emptyset \neq X_i^F(z_{-i}) \cap (\{k\chi_M\} - \text{int } F_+) \cap B(x, \varepsilon)$ . Dado que  $(\{k\chi_M\} - \text{int } F_+)$  es un conjunto abierto, existirá una bola abierta que contiene a  $z_{-i}$ ,  $B(z_{-i}, \delta)$ , tal que  $X_i^F(z'_{-i}) \cap (\{k\chi_M\} - \text{int } F_+) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$  para toda  $z'_{-i} \in B(z_{-i}, \delta)$ . Ello implica que  $X_i^{Fk}$  es h.c.i y, por lo tanto, continua en  $F^{m+n-1}$ .

Con los resultados del párrafo anterior, podemos demostrar que la aplicación  $(p, z) \mapsto \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ <sup>50</sup> es continua en  $S_\eta^F \times F^{m+n-1}$ . A tales efectos, notemos en primer lugar, que  $\inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) = \min p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ . En segundo lugar, por el Teorema del Máximo (Capítulo Primero, Sección I, 16.20),  $\min p.X_i^{Fk}(z_{-i}) = -\max(-p).X_i^{Fk}(z_{-i})$  es continua en  $F^{m+n-1}$ . Esto es, para  $\varepsilon/2 > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $d(\inf p.X_i^F(z'_{-i}), \inf p.X_i^F(z_{-i})) < \varepsilon/2$  si  $d(z'_{-i}, z_{-i}) < \delta_1$ .

Por otro lado, sean

$$0 < \delta_2 < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad p' \in B(p, \delta_2), \quad \langle p', x' \rangle_F = \inf p'.X_i^F(z_{-i}) \quad \text{y} \quad \langle p, x \rangle_F = \inf p.X_i^F(z_{-i}).$$

claramente,

$$\langle p', x' \rangle_F - \langle p, x \rangle_F \leq \langle p', x \rangle_F - \langle p, x \rangle_F = \langle p' - p, x \rangle_F \leq \delta_2 k < \varepsilon/2.$$

análogamente,

$$\langle p', x' \rangle_F - \langle p, x \rangle_F \geq \langle p', x' \rangle_F - \langle p, x' \rangle_F = \langle p' - p, x' \rangle_F \geq -\delta_2 k > -\varepsilon/2.$$

Consecuentemente, si  $d(p', p) < \delta_2$  entonces  $d(\inf p'.X_i^F(z_{-i}), \inf p.X_i^F(z_{-i})) < \varepsilon/2$ . Luego,  $p \mapsto \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  es continua en  $S_\eta^F$ .

---

<sup>50</sup>  $\inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) = \inf \{\langle p, x_i \rangle_F : x_i \in X_i^{Fk}(z_{-i})\}$

La continuidad de  $(p, z) \mapsto \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  en  $S_\eta^F \times F^{m+n-1}$  se sigue del análisis anterior. Para ello probamos que para  $\varepsilon > 0$  existe un entorno de  $(p, z)$ ,  $B(p, \delta_2) \times B(z, \delta_1)$ , tal que para todo  $(p', z') \in B(p, \delta_2) \times B(z, \delta_1)$ ,  $d(\inf p'.X_i^F(z'_{-i}), \inf p.X_i^F(z_{-i})) < \varepsilon$ . Sean

$$\langle p', x' \rangle_F = \inf p'.X_i^F(z'_{-i}), \quad \langle p, x \rangle_F = \inf p.X_i^F(z_{-i}) \quad \text{y} \quad \langle p, x' \rangle_F = \inf p.X_i^F(z'_{-i}).$$

de ahí,

$$\begin{aligned} & \left| \inf p'.X_i^F(z'_{-i}) - \inf p.X_i^F(z_{-i}) \right| = \\ & \left| \inf p'.X_i^F(z'_{-i}) - \inf p.X_i^F(z_{-i}) + \inf p.X_i^F(z'_{-i}) - \inf p.X_i^F(z'_{-i}) \right| = \\ & \left| (\langle p', x' \rangle_F - \langle p, x' \rangle_F) + (\langle p, x' \rangle_F - \langle p, x \rangle_F) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Este resultado es particularmente importante en la demostración del Lema 6.1.3, al probar que la función  $f_i$  (véase abajo) es h.c.s.

Por otro lado notemos que  $X_i^{Fk}(z_{-i}) \subset C_i^F = \{x \in F_+ : 0 \leq x \leq k\chi_M\}$ . Para todo  $i$  definimos al conjunto presupuestario  $\beta_i$  y a la correspondencias de pseudo-demanda  $f_i$  de  $S_\eta^F \times \mathbb{R} \times F^{m+n-1}$  en  $F$  como sigue:

Para todo  $(p, w, z_{-i}) \in S_\eta^F \times \mathbb{R} \times F^{m+n-1}$

$$\beta_i(p, w, z_{-i}) = \{x_i \in X_i^{Fk}(z_{-i}) : \langle p, x_i \rangle_F \leq w\}$$

$$f_i(p, w, z_{-i}) = \begin{cases} x_i \in \beta_i(p, w, z_{-i}) : x_i \succsim_{i, z_{-i}}^F x \quad \forall x \in \beta_i(p, w, z_{-i}) \text{ si } w > \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) \\ x_i \in X_i^{Fk}(z_{-i}) : \langle p, x_i \rangle_F = \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) \text{ si } w \leq \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) \end{cases}$$

**Lema 6.1.3.** *Bajo los supuestos de la Proposición 6.1, para todo  $i$ ,  $f_i$  es una correspondencia h.c.s., no vacía, valorada compacta y convexa.*

#### **Demostración.**

En primer lugar mostramos que se trata de una correspondencia no vacía. Si  $w > \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ , entonces  $\beta_i(p, w, z_{-i}) \neq \emptyset$ . Como  $\beta_i$  es valorada compacta existe un vector de consumo que maximiza las preferencias en este conjunto. Por el contrario, si  $w \leq \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ , entonces como  $p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ ,  $\inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) = \min p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ . Luego, existe  $x_i \in X_i^{Fk}(z_{-i})$  tal que  $\langle p, x_i \rangle_F = \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ .

En segundo lugar veamos que  $f_i$  es valorada convexa. Sean  $x_i, x'_i \in f_i(p, w, z_{-i})$ . Comenzamos suponiendo que  $w > \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ . Entonces, tenemos que  $\langle p, x_i \rangle_F \leq w$  y  $x_i \succsim_{i, z_{-i}} x$  para todo  $x \in \beta_i(p, w, z_{-i})$ . Análogamente,  $\langle p, x'_i \rangle_F \leq w$  y  $x'_i \succsim_{i, z_{-i}} x$  para todo  $x \in \beta_i(p, w, z_{-i})$ . Es inmediato notar que para todo  $\lambda \in (0, 1)$   $\langle p, \lambda x_i \rangle_F \leq \lambda w$  y  $\langle p, (1-\lambda)x'_i \rangle_F \leq (1-\lambda)w$ , de modo que

$$\langle p, \lambda x_i + (1-\lambda)x'_i \rangle_F \leq w \text{ y } \lambda x_i + (1-\lambda)x'_i \in X_i^{Fk}(z_{-i}) \text{ para todo } \lambda \in (0, 1).$$

Por otro lado, por  $C^F$  las preferencias son convexas, ello significa que  $\lambda x_i + (1-\lambda)x'_i \succsim_{i, z_{-i}}^F x$  para todo  $x \in \beta_i(p, w, z_{-i})$ . Recíprocamente, supongamos que  $w \leq \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  y sean  $x_i, x'_i \in X_i^{Fk}(z_{-i})$  tales que  $\langle p, x_i \rangle_F = \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  y  $\langle p, x'_i \rangle_F = \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ . Claramente  $\langle p, \lambda x_i + (1-\lambda)x'_i \rangle_F = \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ . Con ello queda demostrado que  $f_i$  es valorada convexa.

La demostración de que  $f_i$  es h.c.s. está en Bonnisseau (1997). En dicha demostración el autor prueba que  $f_i$  tiene un grafo cerrado. De allí deducimos que para todo  $(p, w, z_{-i}) \in S_\eta^F \times \mathbb{R} \times F^{m+n-1}$ ,  $f_i(p, w, z_{-i})$  es un subconjunto cerrado de  $F_+$ . Como además  $f_i(p, w, z_{-i}) \subset [0, k\chi_M]$ ,  $f_i$  es valorada compacta. ■

### 6.1.2 Modificación de la función de ingresos

Sea la extensión de la función  $r_i^F$ ,  $r_i'^F$ , al espacio  $S_\eta^F \times F^n$  de la siguiente manera:

$$r_i'^F(p, (y_j)_{j=1}^n) = r_i^F(\pi_{S^F}(p), (y_j)_{j=1}^n) + \frac{1}{m} \left\langle p - \pi_{S^F}(p), \sum_{j=1}^n y_j + \omega \right\rangle_F$$

Sea asimismo la función auxiliar  $\rho_i : S_\eta^F \times F^{m+n} \mapsto \mathbb{R}$  definida como:

$$\rho_i(p, z) = \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) + \frac{1}{m} \left\langle p, \sum_{j=1}^n y_j + \omega - \sum_{i=1}^m \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i}) \right\rangle_F$$

Notemos que  $\rho_i$  es continua ya que en dimensión finita se verifica la continuidad conjunta (Capítulo Primero, Sección I, 18.9 y Capítulo Segundo, Subsección 1.5.3) y además  $\inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  es una función continua. Por otro lado, es fácil observar que  $\sum_{i=1}^m \rho_i(p, z) = \left\langle p, \sum_{j=1}^n y_j + \omega \right\rangle_F$ . Escogiendo una adecuada combinación entre  $r_i'^F$  y  $\rho_i$  obtenemos el siguiente resultado:

**Lema 6.1.4** Bajo los supuestos de la Proposición 6.1, existen  $m$  funciones continuas  $\tilde{r}_i^F : S_\eta^F \times F^{m+n} \mapsto \mathbb{R}$  las cuales satisfacen las siguientes condiciones: para todo  $(p, z) \in S_\eta^F \times F^{m+n}$ ,

- (a)  $\sum_{i=1}^m \tilde{r}_i^F(p, z) = \langle p, \omega \rangle_F + \left\langle p, \sum_{j=1}^n y_j \right\rangle_F$
- (b) Si  $(p, z) \in PE^F$  y  $z \in A(\omega)$ , entonces  $\tilde{r}_i^F(p, z) = r_i^F(p, z)$  para todo  $i$ .
- (c) Si  $\left\langle p, \sum_{j=1}^n y_j + \omega \right\rangle_F > (\text{respectivamente } \leq) \sum_{i=1}^m \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$ , entonces  $\tilde{r}_i^F(p, z) > (\text{respectivamente } \leq) \inf p.X_i^{Fk}(z_{-i})$  para todo  $i$ .

### Demostración

Véase Bonnisseau (1997)

■

#### 6.1.3 El argumento de punto fijo

Sea la correspondencia<sup>51</sup>

$$\psi : \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{F_n} \mapsto \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{F_n}$$

definida de la siguiente manera

$$\text{Para todo } \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right) \in \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{F_n}$$

$$\psi \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right) = \prod_{v=1}^5 \psi_v \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right)$$

donde

$$\psi_1 : \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{F_n} \mapsto \prod_{i=1}^m C_i, \text{ está definida por}$$

$$\psi_1 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right) = \left( f_i(p, \tilde{r}_i^F(p, z), z_{-i}) \right)_{i=1}^m$$

$$\psi_2 : \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{F_n} \mapsto \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \text{ definida por}$$

$$\psi_2 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right)$$

$$= \left\{ (\hat{s}_j)_{j=1}^n \in \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n : \sum_{j=1}^n \left\langle p - p_j, \hat{s}_j - s'_j \right\rangle_F \geq 0 \forall (s'_j)_{j=1}^n \in \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \right\}$$

---

<sup>51</sup>  $\bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)$  es la clausura de  $B_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)$  la cual se define antes de 6.1.1.

$$\psi_3 : \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{Fn} \mapsto K$$

$$\psi_3 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right) = \left( s_j - \lambda_j(z_{-j}, s_j) \chi_M \right)_{j=1}^n$$

$$\psi_4 : \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{Fn} \mapsto S_\eta^F$$

$$\psi_4 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right)$$

$$= \left\{ p \in S_\eta^F : \left\langle p - p', \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \right\rangle_F \geq 0 \quad \forall p' \in S_\eta^F \right\}$$

$$\psi_5 : \prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{Fn} \mapsto S^{Fn} \text{ es}$$

$$\psi_5 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right) = \prod_{j=1}^n \phi_j^F(z)$$

Notemos que a partir de las especificaciones de  $C_i, \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n, K, S_\eta^F$  y  $S^F$  tendremos que  $\prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{Fn}$  es no vacío, convexo y compacto. Asimismo si  $\psi_v, v = 1, \dots, 5$  es no vacía, valorada compacta y hemicontinua superiormente para cada  $v$  entonces  $\psi = \prod_{v=1}^5 \psi_v$  también lo es (Hildenbrand (1974) Proposición 4, pg. 25; Beer (1993), pg. 197). En lo que sigue probaremos que se cumplen estas propiedades para cada  $\psi_v$ .

$\psi_1$

Por el Lema 6.1.3 se deduce inmediatamente que  $\psi_1$  es no vacía, h.c.s., valorada compacta y convexa para todo  $i$ .

$\psi_2$

Esta correspondencia es no vacía ya que  $\bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)$  es compacto y  $p - p_j$  es continua para todo  $j$ . Con relación a la hemi-continuidad superior, bastará con probar que tiene un grafo cerrado ya que toma sus valores en un conjunto compacto. Sea la sucesión

$$\left( (x_i^q)_{i=1}^m, (s_j^q)_{j=1}^n, (y_j^q)_{j=1}^n, p^q, (p_j^q)_{j=1}^n, (\hat{s}_j^q)_{j=1}^n \right)_{q \in \mathbb{N}}$$

convergente a

$$\left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n, (\hat{s}_j)_{j=1}^n \right)$$



tal que

$$(\widehat{s}_j^q) \in \psi_2 \left( (x_i^q)_{i=1}^m, (s_j^q)_{j=1}^n, (y_j^q)_{j=1}^n, p^q, (p_j^q)_{j=1}^n \right)$$

para todo  $q \in \mathbb{N}$ .

Entonces,  $(\widehat{s}_j^q) \in \overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$  y  $\sum_{j=1}^n \langle p^q - p_j^q, \widehat{s}_j^q - s_j'^q \rangle_F \geq 0$  para todo  $(s_j'^q)_{j=1}^n \in \overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$  y todo  $q \in \mathbb{N}$ . Como  $\overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$  es compacto,  $(\widehat{s}_j)_{j=1}^n$  y  $(s_j')_{j=1}^n$  pertenecen a  $\overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$ . Si tomamos límites en la desigualdad de arriba, obtenemos  $\sum_{j=1}^n \langle p - p_j, \widehat{s}_j - s_j' \rangle_F \geq 0$  para todo  $(s_j')_{j=1}^n \in \overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$ . Consecuentemente,  $(\widehat{s}_j)_{j=1}^n \in \psi_2 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right)$ . Luego,  $\psi_2$  es cerrada y, por lo tanto, h.c.s.

La anterior argumentación implica que  $\psi_2 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right)$  es un subconjunto cerrado de  $\overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$ . Luego,  $\psi_2$  es valorada compacta.

Finalmente probamos que  $\psi_2$  es valorada convexa. Sean  $(\widehat{s}_j)_{j=1}^n$  y  $(\widehat{s}_j')_{j=1}^n$  elementos de  $\psi_2 \left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n \right)$ . La demostración se sigue del hecho que  $\lambda(\widehat{s}_j)_{j=1}^n + (1-\lambda)(\widehat{s}_j')_{j=1}^n \in \overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$  y  $\sum_{j=1}^n \langle p - p_j, \lambda(\widehat{s}_j)_{j=1}^n + (1-\lambda)(\widehat{s}_j')_{j=1}^n - s_j' \rangle_F \geq 0$  para todo  $(s_j')_{j=1}^n \in \overline{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$  y todo  $\lambda \in (0, 1)$ .

$\psi_3$

Por el Lema 6.1.1 y de la discusión anterior a 6.1.1, obtenemos que la correspondencia  $\psi_3$  es no vacía. Veamos que se trata de una correspondencia valorada compacta. Para ello es suficiente con probar que es cerrada. Sea la sucesión

$$\left( (x_i^q)_{i=1}^m, (s_j^q)_{j=1}^n, (y_j^q)_{j=1}^n, p^q, (p_j^q)_{j=1}^n, \left( s_j^q - \lambda_j(z_{-j}^q, s_j^q) \chi_M \right)_{j=1}^n \right)_{q \in \mathbb{N}}$$

convergente a

$$\left( (x_i)_{i=1}^m, (s_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n, p, (p_j)_{j=1}^n, \left( s_j - \lambda_j(z_{-j}, s_j) \chi_M \right)_{j=1}^n \right)_{q \in \mathbb{N}}$$

tal que

$$\left(y_j^q\right)_{j=1}^n = \left(s_j^q - \lambda_j \left(z_{-j}^q, s_j^q\right) \chi_M\right)_{j=1}^n \in \psi_3 \left( \left(x_i^q\right)_{i=1}^m, \left(s_j^q\right)_{j=1}^n, \left(y_j^q\right)_{j=1}^n, p^q, \left(p_j^q\right)_{j=1}^n \right)$$

para todo  $q \in \mathbb{N}$ .

Tomando límites, aplicando el Lema 6.1.1 y considerando la discusión anterior a 6.1.1, deducimos que  $\left(y_j\right)_{j=1}^n = \left(s_j - \lambda_j \left(z_{-j}, s_j\right) \chi_M\right)_{j=1}^n \in K$ . Luego,  $\psi_3$  es cerrada y por lo tanto valorada cerrada. Como  $K$  es compacto, se deduce que  $\psi_3$  es valorada compacta y h.c.s (Hildenbrand (1974) pg. 23).

La demostración que  $\psi_3$  es valorada convexa es trivial.

$\psi_4$

Sea el conjunto  $D = \left\{ \left\langle p, \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \right\rangle_F : p \in S_\eta^F \right\}$ . Este es claramente acotado ya que  $\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \in \sum_{i=1}^m C_i - \sum_{j=1}^n \text{proy}_{Y_j^F(z_{-j})} A^F(\omega + \bar{\gamma} \chi_M) - \{\omega\}$  y  $p \in S_\eta^F$ . Sea la sucesión  $(\zeta^q)_{q \in \mathbb{N}} = \left( \left\langle p^q, \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \right\rangle_F \right)_{q \in \mathbb{N}}$  en  $D$  tal que  $\zeta^q \rightarrow \zeta$ . Como,  $p^q \in S_\eta^F$  para todo  $q$ , existe una subsucesión  $(p^{q_s})_{s \in \mathbb{N}}$  en  $S_\eta^F$  que converge a  $p \in S_\eta^F$ . Consecuentemente,  $\zeta = \left\langle p, \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \right\rangle_F \in D$ . Luego,  $D$  es cerrado y por lo tanto un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . De ahí que exista un vector  $p \in S_\eta^F$  tal que  $\left\langle p, \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \right\rangle_F \geq \left\langle p', \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \omega \right\rangle_F$  para todo  $p' \in S_\eta^F$ .

$\psi_5$

Finalmente, de la condición  $\text{PR}^F$  se deduce que  $\psi_5$  es no vacía, hemi-continua superiormente, valorada convexa y compacta.

Del análisis previo deducimos que la correspondencia  $\psi$  es no vacía, hemi-continua superiormente, valorada convexa y compacta. Dado que  $\prod_{i=1}^m C_i \times \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \times K \times S_\eta^F \times S^{F_n}$  es un conjunto compacto, podemos hacer uso del teorema del punto fijo de Kakutani (Capítulo Primero, Sección I, 17.10 y 17.11). En consecuencia, existe un vector

$$\left( (x_i^*)_{i=1}^m, (s_j^*)_{j=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^n, p^*, (p_j^*)_{j=1}^n \right) \in \psi \left( (x_i^*)_{i=1}^m, (s_j^*)_{j=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^n, p^*, (p_j^*)_{j=1}^n \right)$$

tal que

$$(x_i^*)_{i=1}^m \in \left( f_i \left( (x_i^*)_{i=1}^m, (s_j^*)_{j=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^n, p^*, (p_j^*)_{j=1}^n \right) \right)_{i=1}^m \subset \prod_{i=1}^m X_i^{F_k}(z_{-i}^*) \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \langle p^* - p_j^*, s_j^* \rangle_F \geq \sum_{j=1}^n \langle p^* - p_j^*, s_j' \rangle_F \quad \forall (s_j')_{j=1}^n \in \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n \quad (5)$$

$$(y_j^*)_{j=1}^n = (s_j^* - \lambda_j(z_{-j}^*, s_j^*) \chi_M)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n \partial Y_j^F(z_{-j}^*), \text{ y } s_j^* = \text{proy}_{\chi_M^{\perp F}} y_j^* \text{ para todo } j. \quad (6)$$

$$\langle p^*, \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega \rangle_F \geq \langle p', \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega \rangle_F \quad \text{para todo } p' \in S_\eta^F \quad (7)$$

$$(p_j^*)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n \varphi_j^F(z^*) \quad (8)$$

De (4) y (6) tenemos  $z^* = ((x_i^*)_{i=1}^m, (y_j^*)_{j=1}^n) \in Z^F$ . Sea  $\gamma^* = \langle p^*, \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega \rangle_F$

A continuación presentamos las seis afirmaciones con las que se concluye la demostración de la existencia de equilibrio en las subeconomías. Dada la similitud de nuestra subeconomía con la economía de Bonnisseau, solo expondremos aquellos pasos que o bien no se explicitan en Bonnisseau (1997), o bien revisten, a juicio del tesista, particular importancia.

**Afirmación 1**  $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega - \gamma^* \chi_M \leq 0$

#### **Demostración**

Véase Bonnisseau (1997) pg. 221

■

**Afirmación 2**  $\langle p^*, \sum_{j=1}^n y_j^* \rangle_F \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j$

#### **Demostración**

Dado que  $(0) \in \bar{B}_{\chi_M^{\perp F}}(0, \varepsilon)^n$ , por (5) deducimos  $\sum_{j=1}^n \langle p^* - p_j^*, s_j^* \rangle_F \geq 0$ . A partir de (6)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \langle p^*, y_j^* \rangle_F &= \sum_{j=1}^n \langle p^*, s_j^* - \lambda_j(z_{-j}^*, s_j^*) \chi_M \rangle_F = \sum_{j=1}^n \langle p^*, s_j^* \rangle_F - \lambda_j(z_{-j}^*, s_j^*) \\ &\stackrel{\text{por (5)}}{\geq} \sum_{j=1}^n \langle p_j^*, s_j^* \rangle_F - \lambda_j(z_{-j}^*, s_j^*) = \sum_{j=1}^n \langle p_j^*, s_j^* - \lambda_j(z_{-j}^*, s_j^*) \chi_M \rangle_F \\ &\stackrel{\text{por (6)}}{=} \sum_{j=1}^n \langle p_j^*, y_j^* \rangle_F \stackrel{\text{por BL}^F}{\geq} \alpha_j \end{aligned}$$

■

**Afirmación 3.**  $\gamma^* \leq \bar{\gamma}$  y  $z^* \in A^F(\omega + \bar{\gamma} \chi_M)$

#### **Demostración**

Véase Bonnisseau (1997) pgs. 221-222

■

**Afirmación 4**  $(p^*, z^*) \in PE^F$  y  $\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{j=1}^n y_j^* + \omega + \gamma^* \chi_M$

**Demostración**

De la Afirmación 3 tenemos que  $z^* \in A^F(\omega + \gamma \chi_M)$ , el cual es un conjunto compacto. A partir de (5) y del análisis efectuado en el primer párrafo posterior a la demostración del Lema 6.1.1 deducimos que  $p^* = p_j^*$  para todo  $j$  ya que una función lineal solo alcanza un máximo en el interior de un conjunto que contiene al 0, si dicha función es nula. Luego,  $(p^*) \in \prod_{j=1}^n \phi_j^F(z^*)$  y, por tanto,  $(p^*, z^*) \in PE^F$  y

De lo anterior obtenemos que  $p^* \in S$ . Dado que  $\left\langle p^*, \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega - \gamma^* \chi_M \right\rangle_F = 0$ , y  $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega - \gamma^* \chi_M \leq 0$  (Afirmación 1), probamos ahora que  $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega - \gamma^* \chi_M = 0$ . Supongamos que  $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega - \gamma^* \chi_M < 0$ , entonces existe un número real  $\mu > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \omega - \gamma^* \chi_M + \mu \chi_M < 0$ , lo cual contradice que  $p^* \in S$ . ■

**Afirmación 5**  $\gamma^* = 0$

**Demostración**

A partir de la afirmación anterior, obtenemos que  $\inf p^* \cdot X_i^{Fk}(z_{-i}^*) = 0$  para todo  $i$ . Tomando en cuenta este hecho, el resto de la demostración es idéntica a la de Bonnisseau (1997)<sup>52</sup> ■

Hasta aquí tenemos que las condiciones (b) y (c) del Teorema 2.1 de existencia de equilibrio de Bonnisseau (1997) (nuestra Proposición 6.1) se han cumplido. Solo basta probar que también se satisface la condición (a).

**Afirmación 6**  $(p^*, z^*)$  es un equilibrio de  $\mathcal{E}^F$

**Demostración**

De la Afirmación 4  $(p^*) \in \prod_{j=1}^n \phi_j^F(z^*)$  y  $(p^*, z^*) \in PE^F$ . De la Afirmación 5, obtuvimos que  $\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{j=1}^n y_j^* + \omega$ . Por consiguiente, el Lema 6.1.4 (b) implica que  $\tilde{r}_i^F(p^*, (y_j^*)_{j=1}^n) = r_i^F(p^*, (y_j^*)_{j=1}^n)$  para todo  $i$ . Por su parte, el Lema 6.1.2 (c) implica que  $r_i^F(p^*, (y_j^*)_{j=1}^n) > 0$  para todo  $i$ . Por (4),  $x_i^* \in f_i\left((x_i^*)_{i=1}^m, (s_j^*)_{j=1}^n, (y_j^*)_{j=1}^n, p^*, (p_j^*)_{j=1}^n\right)$

<sup>52</sup> Claim 5 pg. 222.

para todo  $i$ , de modo que  $x_i^* \succsim_{i, z_{-i}^*}^F x$  para todo  $x \in \beta_i \left( p^*, r_i^F \left( p^*, (y_j^*)_{j=1}^n \right), z_{-i}^* \right)$  y para todo  $i$ . A partir del Lema 6.1.2 (a) tenemos que  $x_i^* \ll k \chi_M$ .

Probamos finalmente que  $x_i^*$  es un elemento  $\succsim_{i, z_{-i}^*}^F$ -maximal del conjunto presupuestario  $\left\{ x \in X_i^F(z_{-i}^*) : \langle p^*, x \rangle_F \leq r_i^F \left( p^*, (y_j^*)_{j=1}^n \right) \right\}$ . Supongamos que en este conjunto existe un vector  $x'$  tal que  $x' \succ_{i, z_{-i}^*}^F x_i^*$ . Dado que las preferencias son convexas,  $\lambda x' + (1-\lambda)x_i^* \succ_{i, z_{-i}^*}^F x_i^*$  para todo  $\lambda \in (0,1)$ . Para  $\lambda$  lo suficientemente cerca de 0,  $\lambda x' + (1-\lambda)x_i^* \ll k \chi_M$ . Luego  $\lambda x' + (1-\lambda)x_i^* \in \beta_i \left( p^*, r_i^F \left( p^*, (y_j^*)_{j=1}^n \right), z_{-i}^* \right)$ , lo cual contradice que  $x_i^* \succsim_{i, z_{-i}^*}^F x$  para todo  $x \in \beta_i \left( p^*, r_i^F \left( p^*, (y_j^*)_{j=1}^n \right), z_{-i}^* \right)$  y para todo  $i$ . Con esto hemos demostrado que la subeconomía tiene un equilibrio. ■

**Observaciones** A lo largo de esta subsección hemos probado el Teorema 2.1 de Bonnisseau (1997) para un caso más general de economías de dimensión finita. En nuestro caso, este resultado es válido a partir de una cierta dimensión, o, en términos económicos, a partir de un cierto número de bienes y servicios. Como lo probaron los Hechos 1 y 2, las subeconomías no satisfacen todas las condiciones que utiliza Bonnisseau para probar la existencia de equilibrio sino que, en el caso de la no Saciedad Local y en el de Supervivencia Débil, se cumplen versiones más débiles de los mismos. A la luz de la demostración de la Proposición 6.1 queda claro que el Teorema 2.1 de Bonnisseau (1997) puede demostrarse con supuestos menos restrictivos<sup>53</sup>.

Concretamente, notemos que el Supuesto WSA se usa en las subeconomías únicamente para probar el Lema 6.1.2 (b)<sup>54</sup>. Ahí, los planes de producción están cercanos a la asignación factible en el sentido que  $\sum_{j=1}^n y_j + \omega + \lambda \chi_M \geq 0$  y  $\lambda \in [0, \bar{\gamma}]$ . Dado que  $\bar{\gamma} \leq \bar{\lambda} < \infty$ , tenemos que WSA<sup>F</sup> es suficiente. Por el lado de LNS, remarcamos que este supuesto es usado únicamente en las Afirmaciones 5 y 6. En ambos casos  $z^* \in A^F(\omega)$  (con relación a la Afirmación 5 véase Bonnisseau (1997) pgs. 222-223). Por lo tanto, la condición LNS<sup>F</sup> también es suficiente.

## Apéndice B. Análisis de los problemas clásicos en dimensión infinita en nuestro modelo

En el Capítulo Segundo, Subsección 1.5, hemos visto las tres dificultades matemáticas que tienen lugar cuando la modelización de la economía incorpora un espacio de bienes de dimensión infinita. Hemos visto como distintos autores habían resuelto estos problemas. El propósito de este apéndice es el de exponer brevemente la manera en la cual nosotros lidiamos con los mismos.

<sup>53</sup> Bonnisseau y Jamin (2008) demuestran que otro supuesto que puede debilitarse en dimensión finita es el de acotación B.

<sup>54</sup> Que no demostramos aquí por ser idéntico a lo realizado por Bonnisseau (1997)

En primer lugar, con relación a la compacidad del conjunto de asignaciones factibles, nos ha sido suficiente con la compacidad débil\*. A tales efectos consideramos la topología débil\*  $\prod_{L_\infty^{m+n}} \sigma^\infty$  sobre  $L_\infty^{m+n}$ , el cual es el dual topológico de  $L_1^{m+n}$ , y el Supuesto B. El resto de la argumentación sigue las explicaciones dadas en el Capítulo Segundo, Subsección 1.5.1.1

En segundo lugar, notemos que al considerar como espacio de bienes al espacio  $L_\infty$ , el cual tiene un cono positivo con interior no vacío, se pudo demostrar que  $\bar{\pi} > 0$  sin necesidad de imponer condiciones adicionales sobre las preferencias.

Finalmente exponemos el fenómeno de la continuidad conjunta tratado en el Capítulo Segundo. En los Pasos 5 y 6, a través de una serie de desigualdades, supuestos y sustituciones, demostramos que para  $\bar{x}^{F(t)} \rightarrow \bar{x}$  e  $\bar{y}^{F(t)} \rightarrow \bar{y}$  en  $\sigma(L_\infty, L_1)$  y  $\bar{\pi}^{F(t)} \rightarrow \bar{\pi}$  en  $\sigma(L_\infty, ba)$  se tiene

$$\lim \pi^{F(t)}(\bar{x}_i^{F(t)}) = r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \lim \left( \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right)_{j=1}^n \right) = r_i \left( \bar{\pi}(\omega_i), \left( \bar{\pi}(\bar{y}_j) \right)_{j=1}^n \right)$$

lo cual implica que  $\lim \pi^{F(t)}(\bar{x}_i^{F(t)}) = \bar{\pi}(\bar{x}_i)$  y  $\lim \left( \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \right)_{j=1}^n = \left( \bar{\pi}(\bar{y}_j) \right)_{j=1}^n$ , probándose así la convergencia conjunta.

## BIBLIOGRAFÍA

Aliprantis, C. y Border, K., (1994), *Infinite Dimensional Analysis*, Berlín, Springer-Verlag.

Aliprantis, C., Border, K. y Burkinshaw, O., (1997), “Economies with many commodities”, *Journal of Economic Theory*, 74, pgs. 62-105

Aliprantis, C. y Brown D., (1983), “Equilibria in markets with a Riesz space of commodities”, *Journal of Mathematical Economics*, 11, pgs. 189-207.

Aliprantis, C., Brown, D. y Burkinshaw, O., (1987), “Edgeworth equilibria”, *Econometrica*, 55, pgs. 1109-1137.

Aliprantis, C., Brown, D. y Burkinshaw, O., (1989), *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*, Nueva York, Springer-Verlag.

Aliprantis, C. y Burkinshaw, O., (2006), *Positive Operators*, Dordrecht, Springer-Verlag.

Aliprantis, C., Florenzano, M. y Tourky, R., (2004), “General equilibrium analysis in ordered topological vector spaces”, *Journal of Mathematical Economics*, 40, pgs. 247-269

Aliprantis, C., Florenzano, M. y Tourky, R., (2006), “Production equilibria”, *Journal of Mathematical Economics*, 42, pgs. 406-421

Aliprantis, C., Tourky, R. y Yannelis, C., (2000), “Cone conditions in general equilibrium theory”, *Journal of Economic Theory*, 92, pgs. 96-121.

Araujo, A., Martins da Rocha, F. y Monteiro, P., (2004), “Equilibria in reflexive Banach lattices with a continuum of agents”, *Economic Theory*, 24, pgs. 469-492.

Arrow, K., (1951), “An extension of the basic theorems of classical welfare economics” en J. Neyman (eds.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley y Los Angeles, University of California Press, pgs. 507-532.

Arrow, K. y Debreu, G., (1954), “Existence of equilibrium for a competitive economy”. *Econometrica*, 22, pgs. 265-290.

Ash, R., (1972), *Real Analysis and Probability*, San Diego, California, Academic Press.

Aumann, R., (1964), “Markets with a continuum of traders”, *Econometrica*, 32, pgs. 39-50.

Aumann, R., (1966), “Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders”, *Econometrica*, 34, pgs. 1-17.

- Balder, E., (2003), “Existence of competitive equilibria in economies with a measure space of consumers and consumption externalities”, en prensa, disponible electrónicamente en <http://www.math.uu.nl/publications/preprints/1294.ps.gz>.
- Balder, E., (2008), “More on equilibria in competitive markets with externalities and a continuum of agents”, *Journal of Mathematical Economics*, 44, pgs. 575-602
- Barbolla, R., (1981), *Introducción al Análisis Real*, Alhambra.
- Baum, J., (1964), *Elements of Point Set Topology*, Nueva Jersey, Prentice-Hall.
- Beato, P., (1982), “The existence of marginal cost pricing equilibria with increasing returns”, *The Quarterly Journal of Economics*, 97, pgs. 669-688.
- Beato, P. y Mas-Colell, A., (1985), “On marginal cost pricing with given tax-subsidy rules”, *Journal of Economic Theory*, 37, pgs. 356-365.
- Becker, R., (1991), “Fundamental theorems of welfare economics in infinite dimensional commodity spaces” en Khan, M. A. y Yannelis, N. (eds.) *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces*, Nueva York y Berlin, Springer-Verlag.
- Beer, G., (1993), *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Londres, Kluwer Academic Publishers.
- Berge, C., (1959), *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, París, Dunod.
- Besada, M., García, J., Mirás, M. y Vázquez, C., (2002), “Existence of smooth utilities on Banach lattices”, *Journal of Mathematical Economics*, 37, pgs. 39-45
- Besada, M. y Vázquez, C., (1999), “The generalized marginal rate of substitution”, *Journal of Mathematical Economics*, 31, pgs. 553-560.
- Bewley, T., (1972), “Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities”, *Journal of Economic Theory*, 4, pgs. 514-540
- Bojan, P., (1974), “A generalization of theorems on the existence of competitive economic equilibria to the case of infinitely many commodities”, *Mathematica Balkanica*, 4, pgs. 490-494.
- Bonnisseau, J.M., (1997), “Existence of equilibria in economies with externalities and nonconvexities”, *Set Valued Analysis*, 5, pgs. 209-226.
- Bonnisseau, J. M., (2002), “The marginal pricing rule in economies with infinitely many Commodities”, *Positivity*, 6, pgs. 275-296.
- Bonnisseau, J.M. y Cornet, B., (1988), “Existence of equilibria when firms follow bounded losses pricing rules”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 119-147.
- Bonnisseau, J.M. y Cornet, B., (1990a), “Existence of marginal cost pricing equilibria in an economy with several non convex firms”, *Econometrica*, 58, pgs. 661-682.



Bonnisseau, J.M. y Cornet, B., (1990b), “Existence of marginal cost pricing equilibria: the nonsmooth case”, *International Economic Review*, 31, pgs. 685–708.

Bonnisseau, J.M. y Cornet, B., (1990c), “Fixed-point theorems and Morse's lemma for lipschitzian functions”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146, pgs. 318-332

Bonnisseau, J.M. y Cornet, B., (2008), “Existence of equilibria with a tight marginal pricing rule”, *Journal of Mathematical Economics*, 44, pgs. 613-624.

Bonnisseau, J. M. y del Mercato, L., (2008), “General consumption constraints and regular economies”, *Journal of Mathematical Economics*, 44, pgs. 1286-1301

Bonnisseau, J. M. y del Mercato, L., (2010), “Externalities, consumption constraints and regular economies”, *Economic Theory*, pgs. 123-147.

Bonnisseau, J. M. y Jamin, A., (2008), “Equilibria with increasing returns: sufficient conditions on bounded production allocations”, *Journal of Public Economic Theory*, pgs. 1033-1068.

Bonnisseau, J.M. y Meddeb, M., (1999), “Existence of equilibria in economies with increasing returns and infinitely many commodities”, *Journal of Mathematical Economics*, 31, pgs. 287-307.

Bonnisseau, J.M. y Médecin, M., (2001), “Existence of marginal pricing equilibria in economies with externalities and non-convexities”, *Journal of Mathematical Economics*, 36, pgs. 271–294.

Border, K., (1985), *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Nueva York, Cambridge University Press.

Brown, D., (1991), “Equilibrium analysis with non-convex technologies”, en Hildenbrand, W. y Sonnenschein, H., (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Amsterdam, North-Holland, pgs. 1963-1995.

Chichilnisky, G., (1993), “The cone condition, properness, and extremely desirable commodities”, *Economic Theory*, 3, pgs. 177 -182

Chichilnisky, G. y Heal, G. (1984), “Existence of a competitive equilibrium in  $L_p$  and Sobolev spaces”. *IMA Serie preimpesa* N° 79, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota.

Chichilnisky, G. y Kalman, P., (1977), “Nonlinear functional analysis and optimal economic growth”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 61, pgs. 504-520.

Chichilnisky, G. y Kalman, P., (1980), “Application of functional analysis to models of efficient allocation of economic resources”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 30, pgs. 19-32.

- Choquet, G., (1966), *Topology*, Nueva York, Academic Press.
- Clarke, F., (1983), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Nueva York, Wiley.
- Cornet, B., (1990), “Existence of equilibria in economies with increasing returns”, en Cornet, B. y Tulkens, H. (eds.) *Contributions to Operations Research and Economics: The XXth Anniversary of CORE*, Cambridge, The M.I.T. Press, pgs. 79-97.
- Cornet, B., (1988), “General equilibrium theory and increasing returns: presentation”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 103-118.
- Cornet, B. y Czarnecki, M., (2001), “Existence of generalized equilibria”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 44, pgs. 555-574.
- Cornet, B. y Topuzu, M., (2005), “Existence of equilibria for economies with externalities and a measure space of consumers”, *Economic Theory*, 26, pgs. 397-421.
- Dana, R. y Le Van, C., (1996), “Asset equilibria in  $L^p$  spaces with complete markets: a duality approach”, *Journal of Mathematical Economics*, 25, pgs. 263-280.
- Debreu, G., (1954), "Valuation equilibrium and Pareto optimum", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 40, pgs. 588-592.
- Debreu, G., (1959), *Theory of Value*, Nueva York, Wiley.
- Debreu, G., (1962), “New concepts and techniques for equilibrium analysis”, *International Economic Review*, 3, pgs. 257-273.
- Debreu, G., (1970), “Economies with a finite set of equilibria”, *Econometrica*, 38, pgs. 387-92.
- Debreu, G. y Scarf, H., (1963), “A limit theorem on the core of an economy”, *International Economic Review*, 4, pgs. 235-246.
- Dehez, P. y Drèze, J., (1988a), “Competitive equilibria with quantity-taking producers and increasing returns to scale”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 209-230.
- Dehez, P. y Drèze, J., (1988b), “Distributive production sets and equilibria with increasing returns”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 231-248.
- del Mercato, L. (2006) “Existence of competitive equilibria with externalities: a differential viewpoint”, *Journal of Mathematical Economics*, 42, pgs. 525-543.
- Dierker, E. y Neufeind, W., (1988), “Quantity guided price setting”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 249-259.
- Dubovickii, A. y Miljurin, A., (1965), “Extremum problems in the presence of restrictions”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, V, pgs. 1-80.

- Duffie, D. y Huang, C. F., (1985), “Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities”, *Econometrica*, 53, pgs. 1337-1356.
- Dunford, N., y Schwarz, J., (1958), *Linear Operators, Part I*, Nueva York, Wiley-Interscience.
- El-Barkuki, R., (1977), “The existence of an equilibrium in economic structures with a Banach space of commodities”, *Akad. Nauk. Azerbaidjan, USSR Dokl.*, 33, pgs. 8-12.
- Florenzano, M., (1983), “On the existence of equilibria in economies with an infinite dimensional commodity space”, *Journal of Mathematical Economics*, 12, pgs. 207-219.
- Gabszewicz (1968a) “A limit theorem on the core of an economy with a continuum of commodities”, *CORE Discussion Paper* N° 6807.
- Ginsburgh, V. y Keyzer, M., (1997), *The Structure of Applied General Equilibrium Models*, Cambridge, MIT Press.
- Guesnerie, R., (1975), “Pareto-optimality in nonconvex economies”, *Econometrica*, 43, pgs. 1-29.
- Guesnerie, R., (1979), “General statements on second best Pareto optimality”, *Journal of Mathematical Economics*, 6, pgs. 169-194
- Halmos, P. R., (1974), *Finite Dimensional Vector Spaces*, Nueva York, Springer-Verlag, (reimpresión de la edición publicada por Van Nostrand (1958))
- Hart, S., Hildenbrand, W. y Kohlberg, E., (1974), “On equilibrium allocations as distributions on the commodity space”, *Journal of Mathematical Economics*, 1, pgs. 159–166.
- Hervés-Beloso, C., Filipe Martins-da-Rocha, V. y Monteiro, P., (2009), “Equilibrium theory with asymmetric information and infinitely many states”, *Economic Theory*, pgs. 295-320
- Hildenbrand, W., (1974), *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- Jones, L., (1984), “A competitive model of commodity differentiation”, *Econometrica*, 52, pgs. 507-530.
- Jones, L., (1987), “Existence of equilibria with infinitely many commodities: Banach lattices reconsidered”, *Journal of Mathematical Economics*, 16, pgs. 89-104
- Jones, L., (1992), “Equilibrium in competitive infinite dimensional settings”, Cap. 7 de *Advances in Economic Theory*, Sexto Congreso Mundial, Volumen II. Editor: Jean-Jacques Laffont. Econometric Society Monographs, Nueva York, Cambridge University Press.

Joseph, J., (1978), “Multifunctions and graphs”, *Pacific Journal of Mathematics*, 79, pgs. 509-529.

Kajii, A., (1988), “Notes on equilibria without ordered preferences in topological vector Spaces”, *Economic Letters*, 27, pgs. 1–4.

Kamiya, K., (1988a), “Existence and uniqueness of equilibria with increasing returns”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 149-178

Kamiya, K., (1988b), “On the survival assumption in marginal (cost) pricing”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 261-273.

Keiding, H., (2009), “Topological vector spaces admissible in economic equilibrium theory”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351, pgs. 675-681.

Kelley, J., (1962), *Topología General*, Buenos Aires, EUDEBA (traducción de *General Topology*, (1955), Nueva York, D. van Nostrand Company Inc.)

Kelley, J. y Namioka, I., (1982), *Linear Topological Spaces*, Nueva York, Heidelberg y Berlín, Springer-Verlag.

Keyzer, M., (1991), “On the approximation of infinite horizon allocations”, *De Economist*, 139, pgs. 204-242.

Khan, M. A., (1984), “A remark on the existence of equilibria in markets without ordered preferences and with a Riesz space of commodities”, *Journal of Mathematical Economics*, 13, pgs. 165-169.

Kolmogorov, A. y Fomin, S., (1957), *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Volume 1: Metric and Normed Spaces*. Rochester, Nueva York, Graylock Press (traducción de la primera versión rusa (1954), *Èlementy Teorii Funkciï i Funkcionalnogo Analiza., I. Metricheskie i Normirovannye Prostranstva*).

Kolmogorov, A. y Fomin, S., (1961), *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Volume 2: Measure. The Lebesgue Integral. Hilbert Space*, Albany, Nueva York, Graylock Press (traducción de la primera versión rusa (1960) *Èlementy Teorii Funkciï i Funkcionalnogo Analiza*)

Laffont, J., (1976), “Decentralization with externalities”, *European Economic Review*, 7, pgs. 359–375

Laffont, J., (1977), “Effets externes et théorie économique”, *Monographies du Séminaire d’Econométrie*, París, Editions du CNRS.

Laffont, J.-J. y Laroque, G., (1972), “Effets externes et théorie de l’équilibre general”, *Cahiers du Séminaire d’Econométrie*, 14, París, CNRS.

Le Van, C., (1996), “Complete characterization of properness conditions for separable concave functions defined in  $L_+^p$  and  $L^p$ ”, *Economic Theory*, 8, pgs. 155-166.

- Le van, C. y Duc Ha Truong Xuan, (2001), "Asset market equilibrium in  $L^p$  spaces with separable utilities", *Journal of Mathematical Economics*, 36, pgs. 241-254.
- Lucas, R. y Prescott, E., (1972), "A note on price systems in infinite dimensional space", *International Economic Review*, 13, pgs. 416-22.
- Luenberger, D., (1969), *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley-Interscience.
- MacLane, S. y Garret, B., (1999), *Algebra*, Tercera edición, Nueva York, AMS Chelsea Publishing.
- Magill, M., (1981), "An equilibrium existence theorem", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 84, pgs. 162-169.
- Mantel, R., (1979), "Equilibrio con rendimientos crecientes a escala", *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*, 1, pgs. 271-283.
- Mas-Colell, A., (1975), "A model of equilibrium with differentiated commodities", *Journal of Mathematical Economics*, 2, pgs. 263-295.
- Mas-Colell, A., (1986a), "Valuation equilibrium and Pareto optimum revisited", en Mas-Colell, A. y Hildenbrand, W. (eds.) Capítulo 17, *Advances in Mathematical Economics*, North-Holland.
- Mas-Colell, A. (1986b) "The price equilibrium existence problem in Topological vector lattices", *Econometrica*, 54, pgs. 1039-1054.
- Mas-Colell, A., Whinston, M. y Green, J., (1995),. *Microeconomic Theory*, Nueva York, Oxford University Press.
- Mas-Colell, A. y Zame, W., (1991), "Equilibrium theory in infinite dimensional spaces". en Hildenbrand, W. y Sonnenschein, H. (eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. IV, Amsterdam, North-Holland, pgs. 1836–1898.
- Matsumoto, Y., (2002), *An Introduction to Morse Theory*, American Mathematical Society (originalmente publicado en japonés por Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1997).
- Mertens, J. F., (1991), "An equivalence theorem for the core of an economy with commodity space" en Khan, M. A. y Yannelis, N. (eds.) *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces*, Nueva York y Berlin, Springer-Verlag.
- Negishi, T., (1960), "Welfare economics and existence of an equilibrium for a competitive economy", *Metroeconomica*, 12, pgs. 92-97.
- Noguchi, M., (1997a), "Economies with a continuum of consumers, a continuum of suppliers and an infinite dimensional commodity space", *Journal of Mathematical Economics*, 27, pgs. 1-21

- Noguchi, M., (1997b), “Economies with a continuum of agents with the commodity-price pairing  $(I_\infty, I_1)$ ”, *Journal of Mathematical Economics*, 28, pgs. 265-287.
- Noguchi, M. y Zame, W., (2006), “Competitive markets with externalities”, *Theoretical Economics*, 1, pgs. 143–166.
- Olivera, J. H. G., (1984), “Producción y tiempo: teoría distribucional”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 36, pgs. 93-95.
- Olivera, J. H. G., (1986), “Conjuntos de producción distribucionales”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 38, pgs.49-56.
- Olivera, J. H. G., (1988), “Conjuntos de consumo distribucionales”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 40, pgs. 213-216.
- Olivera, J. H. G., (1990a), “Economías distribucionales y puntos fijos grassmanianos”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 42, pgs. 141-142.
- Olivera, J. H. G., (1990b), “Economías distribucionales”, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 35, pgs. 105-109.
- Olivera, J. H. G., (1992), “Economías distribucionales con un continuo de agentes”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 43, pgs. 81-86.
- Olivera, J. H. G., (1993), “Economías distribucionales y equilibrio social”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 45, pgs. 339-342.
- Olivera, J. H. G., (1994), “El enfoque distribucional de los hechos económicos”, *Anales de la Asociación Argentina de Economía Política*, 4, pgs.1113-1122.
- Olivera, J. H. G., (1997), “Existence of equilibrium in production economies described by means of generalized functions”, disponible electrónicamente en <http://www.econ.uba.ar/servicios/publicaciones/journal1/contents/olivera.htm>; traducido al inglés para la revista electrónica *The Journal of Management and Economics*, y previamente publicado en español como “Economías distribucionales”, (1989), *Revista de la Unión Matemática Argentina*, pgs. 105-110.
- Olivera, J. H. G., (2002), “Sobre la Estructura Geométrica de los Conjuntos de Producción”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias Económicas*, 47, pgs. 147-151.
- Olivera, J. H. G., (2008), “Álgebras distribucionales funcionalmente continuas”, *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, 52, pgs. 109-114.
- Papageorgiou, N. y Kyritsi-Yiallourou, S., (2009), *Handbook of Applied Analysis*, Dordrecht, Springer.
- Peleg, B. y Yaari, M. E., (1970), “Markets with countably many commodities”, *International Economic Review*, 11, 369-377.

Podczeck, K., (1996), "Equilibria in vector lattices without ordered preferences or uniform properness", *Journal of Mathematical Economics*, 25, pgs. 465-485

Podczeck, K., (2005), "On core-Walras equivalence in Banach lattices", *Journal of Mathematical Economics*, 41, pgs. 764-792.

Podczeck, K. y Yannelis, N., (2008), "Equilibrium theory with asymmetric information and with infinitely many commodities", *Journal of Economic Theory*, 141, pgs. 152-183.

Quinzii, M., (1992), *Increasing Returns and Efficiency*, Oxford University Press.

Radner, R., (1968), "Competitive equilibrium under uncertainty", *Econometrica*, 36, pgs. 31-58.

Radner, R., (1981), "Equilibrium under uncertainty", en Arrow, K. e Intriligator, K., (eds.), *Handbook of Mathematical Economics Vol. II*, Amsterdam, North-Holland, pgs. 923-1006.

Richard, S. F., (1989), "A new approach to production equilibria in vector lattices", *Journal of Mathematical Economics*, 18, pgs. 41-56

Rockafellar, T., (1970), *Convex Analysis*, Princeton, Nueva Jersey, Princeton University Press.

Rodríguez, M. A. y Toranzos, F. A., (1999), "Una nueva familia geométrica: los conjuntos finitamente estrellados", *Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires*, XXXIII, pgs. 424-429.

Schalk, S., (1996), "General equilibrium model with a convex cone as the set of commodity bundles", *Research Memorandum FEW 740*, Tilburg University.

Sard, A., (1942), "The measure of the critical points of differentiable maps", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48, pgs. 883-890.

Schaefer, H. H., (1971), *Topological Vector Spaces*, Nueva York y Berlín, Springer-Verlag.

Schmeidler, D., (1969), "Competitive equilibria in markets with a continuum of traders and incomplete preferences", *Econometrica*, 37, pgs. 578-585

Schwartz, L., (1951), *Théorie des distributions*, París, Hermann.

Smale, S. (1973) "Global analysis and economics I: Pareto optimum and a generalization of Morse theory", en Peixoto, M. M., (ed.), *Dynamical Systems*, Nueva York, Academic Press.

Smale, S., (1974a), "Global analysis and economics IIA: extension of a theorem of Debreu", *Journal of Mathematical Economics*, 1, pgs. 1-14

Smale, S., (1974b), “Global analysis and economics, III: Pareto optima and price equilibria”, *Journal of Mathematical Economics*, 1, pgs. 107-117.

Smale, S., (1974c), “Global analysis and economics, IV: finiteness and stability of equilibria with general consumption sets and production”, *Journal of Mathematical Economics*, 1, pgs. 119-127.

Smale, S., (1974d), “Global analysis and economics, V: Pareto theory with constraints”, *Journal of Mathematical Economics*, 1, pgs. 213-221.

Smale, S., (1976), “Global analysis and economics, VI: geometric analysis of Pareto optima and price equilibria under classical hypotheses”, *Journal of Mathematical Economics*, 3, pgs. 1-14

Smale, S., (1981), “Global analysis and economics”, en: Arrow, K., e Intriligator, M. (eds.), *Handbook of Mathematical Economics Vol. I*, pgs. 331–370, Amsterdam, North-Holland.

Stankovic B., (1991), “Generalized functions and their applications”, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 28, pgs. 145-158.

Sun, N., (2006), “Bewley’s limiting approach to infinite dimensional economies with l.s.c. preferences”, *Economic Letters*, 92, pgs. 7–13.

Sutherland, W. A., (1975), *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford University Press.

Tourky, R., (1999), “Production equilibria in locally proper economies with unbounded and unordered consumers”, *Journal of Mathematical Economics*, 32, pgs. 303-315

Van Geldrop, J. y Withagen, C., (1990), “On the Negishi approach to dynamic economic systems”, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 8, pgs. 295-311

Van Geldrop, J. y Withagen, C., (1994), “General equilibrium in an economy with exhaustible resources and an unbounded horizon”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, pgs. 1011-1035

Van Zandt, T., (1989), “Individual excess demands and equilibrium in economies with infinitely many commodities”, University of Pennsylvania, mimeógrafo.

Vohra, R., (1988), “On the existence of equilibria in economies with increasing returns”, *Journal of Mathematical Economics*, 17, pgs. 179-192.

Vulikh, B., (1963), *Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists*, Londres, Addison-Wesley (traducción al inglés de *Vvedeniye v funktsional’nyi analiz*, (1958), Moscú, Fizmatgiz).

Yannelis, N., (1985), “On a market equilibrium theorem with an infinite number of commodities”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 108, pgs. 595-599.



Yannelis, N., (1991), “Integration of Banach-Valued Correspondences” en Khan, M. A. y Yannelis, N. (eds.) *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces*, Nueva York y Berlin, Springer-Verlag.

Yannelis, N. y Zame, W., (1986), “Equilibria in Banach lattices without ordered preferences”, *Journal of Mathematical Economics*, 15, pgs. 85-110.

Yosida, K. y Hewitt, E., (1956), “Finitely additive measures”, *Trans. Am. Math. Soc.*, 2, pgs. 46–66.

Zame, W., (1987), “Competitive equilibria in production economies with an infinite-dimensional commodity space”, *Econometrica*, 55, 1075-1108.