



FACULTAD DE FORMACIÓN DE PROFESORADO Y EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA Y TEORÍA DE LA EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL:

**MECANISMOS ARTICULADOS PARA TRAZAR
CURVAS COMO RECURSO EDUCATIVO DIGITAL PARA
LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN
SECUNDARIA Y BACHILLERATO**

Presentada por D. Fco. Javier Manzano Mozo para optar al grado
de doctor por la Universidad Autónoma de Madrid

Dirigida por:

Dr. Melchor Gómez García
Dr. Jorge Mozo Fernández

Madrid, 2017

A mis padres

Índice general

Índice general	V
1. Introducción	1
1.1. ¿Por qué sistemas articulados?	2
1.2. Educación para el siglo XXI: STEM Education	7
1.3. Sistemas articulados y el currículo	10
2. Evolución histórica	13
2.1. Los tres problemas clásicos	13
2.2. Escuela de Alejandría, árabes y Renacimiento	20
2.3. La Geometría de Descartes	24
2.4. La generalización de las construcciones	35
2.5. La línea recta	38
2.6. Cerrando el círculo	54
2.7. En busca de la sencillez	61
3. SGD: Cinderella.2	71
3.1. Sistemas de Geometría Dinámica	71
3.2. Cinderella.2	73
3.2.1. Breve historia	73
3.2.2. Base teórica	75
4. Propuestas didácticas	83
4.1. A la caza de mecanismos articulados	83
4.1.1. Recursos	84
4.1.2. Descripción de la actividad	84
4.1.3. Vinculación curricular	89
4.2. Manipulando mecanismos	90
4.2.1. Recursos	90
4.2.2. Descripción de la actividad	90
4.2.3. Vinculación curricular	95
4.3. Construyendo mecanismos en <i>Cinderella.2</i>	95
4.3.1. Recursos	96
4.3.2. Descripción de la actividad	96

4.3.3. Vinculación curricular	101
4.4. Mecanismos de cuatro barras	102
4.4.1. Recursos	102
4.4.2. Descripción de la actividad	103
4.4.3. Vinculación curricular	111
4.5. Conicógrafos	111
4.5.1. Recursos	112
4.5.2. Descripción de la actividad	112
4.5.3. Vinculación curricular	120
4.6. Proyecto: los mecanismos articulados	120
4.6.1. Recursos	121
4.6.2. Descripción de la actividad	121
4.6.3. Vinculación curricular	124
5. Conclusión	127
Bibliografía	131

Índice de figuras

1.1. Página de inicio de la web https://sites.google.com/site/tesislinkages/home	2
1.2. Plataforma elevadora	3
1.3. Shuttle Remote Manipulator System (SRMS), Servicio Remoto del sistema manipulador o Canadarm	4
2.1. Trisectriz de Hippias	15
2.2. Trisección de un ángulo	16
2.3. Aparato para resolver el problema Deliano atribuido a Platón	17
2.4. Mecanismo para la construcción de la concoide	19
2.5. Reconstrucción del mecanismo para dibujar la concoide diseñado por Suardi en 1752	19
2.6. Elipsógrafo atribuido a Proclo y a Leonardo da Vinci	20
2.7. Reproducción del conicógrafo citado por Mohammed Ibn Hocesin	21
2.8. Aparato de Leonardo para la resolución del problema de Alhazen	22
2.9. Aparato diseñado por Durero para trazar óvalos y cicloides	23
2.10. Aparato diseñado por Durero para trazar la concoide de Nicomedes	23
2.11. Conicógrafo de Barocius	24
2.12. Pantógrafo de Christoph Scheiner	25
2.13. Conicógrafo de Christoph Scheiner	25
2.14. Hiperbológrafo y elipsógrafo de Guido Ubaldo del Monte	26
2.15. Mesolabio diseñado por Descartes	26
2.16. Hiperbológrafo diseñado por Descartes	28
2.17. Elipsógrafo de van Schooten basado en el mismo principio que el de Proclo-Leonardo	30
2.18. Elipsógrafo de van Schooten mediante un contraparalelogramo articulado	30
2.19. Hiperbológrafo de van Schooten basado ya en la definición habitual de hipérbola	31
2.20. Rombo articulado para trazar secciones cónicas mediante un movimiento continuo	32
2.21. Compases deslizantes (conicógrafos) de van Schooten	33

2.22. Demostración de De Witt del elipsógrafo deslizante	34
2.23. Mecanismo de Newton para la construcción de la cisoide y estrofoide	35
2.24. Cisoide, estrofoide y fundamentación del sistema articulado de Newton que las dibuja	36
2.25. Reproducción del sistema articulado de Sturm	36
2.26. Reconstrucción de un conicógrafo de Newton, junto al dibujo original del texto de los <i>Principia</i> de 1687	37
2.27. Sistema articulado de McLaurin: el transformado de una elipse es claramente una curva de grado cuatro	38
2.28. Transformación de Braikenridge	39
2.29. <i>Constructeur universel d'equations</i> : ilustración dedicada al Ál- gebra de la Enciclopedia de Diderot y D'Alambert. Paris 1751- 1772	40
2.30. Mecanismo <i>Penna Geometrica</i> de Suardi para dibujar curvas cíclicas	40
2.31. Mecanismo de Suardi para la construcción de curvas logarítmicas	41
2.32. Mecanismo de Suardi para la construcción de la concoide . . .	42
2.33. Mecanismo de Watt e imagen de la solicitud de patente . . .	42
2.34. Sistema completo de movimiento paralelo de Watt	43
2.35. Mecanismo de Roberts para dibujar una línea recta	44
2.36. Mecanismo de Evans	44
2.37. Mecanismo de Chebyshev para dibujar una línea recta	46
2.38. Mecanismo alternativo de Chebyshev y comparativa con el original	46
2.39. Combinación de los mecanismos de Watt-Evans y de Chevyshev- Evans	47
2.40. Mecanismo de White. El punto X se mueve a lo largo del diámetro OA	48
2.41. Réplica del mecanismo de Sarrus y fundamentación teórica . .	49
2.42. Mecanismo de Peaucellier	50
2.43. Variante del mecanismo de Peaucellier	52
2.44. Mecanismo de Hart y fundamentación teórica	52
2.45. Inversión de un punto A respecto a una circunferencia S_1 . .	54
2.46. (a) paralelogramo y (b) contrapalelogramo	55
2.47. Imagen original del trasladador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado	55
2.48. Imagen original del reversionador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado	56
2.49. Imagen original del multiplicador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado	57
2.50. Imagen original del sumador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado	57
2.51. Girador de Kempe	58

2.52. Transformador de coordenadas y 4 juegos de coordenadas trigonométricas del mismo punto	59
2.53. Modificaciones del paralelogramo y el contrapalelogramo para mantener su configuración	59
2.54. Sistema articulado para dibujar una cónica concreta mediante el método de Kempe	60
2.55. Curva algebraica que aproxima la J en la firma de John Hancock y el mecanismo articulado que la traza	61
2.56. Sistema articulado de Yates para dibujar la cardioide	62
2.57. Sistema articulado para dibujar óvalos de Cassinni	63
2.58. Sistema articulado para dibujar la familia de cisoides	64
2.59. Sistemas articulados para dibujar la lemniscata de Bernouilli	65
2.60. Estudio del mecanismo de Watt para generar cónicas	65
2.61. Sistema articulado general para dibujar cónicas	66
2.62. Conicógrafos de Yates obtenidos al combinar un mecanismo de Watt con un inversor de Peaucellier o de Hart	68
2.63. Mecanismo articulado de cuatro barras	69
2.64. Curvas pareadas (<i>coupler curves</i>) generadas por un mecanismo de cuatro barras articuladas	69
3.1. Sutherland trabajando con Sketchpad sosteniendo el lápiz óptico. Los botones para usar las distintas funciones de dibujo están en la caja enfrente del autor	72
3.2. Salto de un punto producido al mover levemente otro punto	77
3.3. Dibujos de Durero estudiando la perspectiva en un cubo	78
3.4. Dos rectas paralelas y una secante en Cinderella.2 en vista euclídea (izquierda) y esférica (derecha)	78
3.5. El plano euclídeo inmerso en el espacio proyectivo	79
3.6. El uso de números complejos en la intersección de dos circunferencias. Aunque no sean secantes, <i>Cinderella.2</i> sigue representando la recta que une los puntos de intersección, el eje radical	80
3.7. La misma construcción, un mecanismo de tres barras, realizada en <i>Cinderella.2</i> (izquierda) y Geogebra (derecha). Se puede ver que <i>Cinderella.2</i> genera completamente el locus mientras que Geogebra genera solo la mitad	81
4.1. Unas tijeras y su esquema como mecanismo articulado	84
4.2. Una silla plegable y su esquema como mecanismo articulado	85
4.3. Un pivote fijo (izquierda) y un pivote deslizante (derecha) en una silla plegable	86
4.4. Un canapé abatible y el esquema del mecanismo articulado	86

4.5. Ejemplos de mecanismos articulados: una plataforma elevadora, un pantógrafo ferroviario y un mecanismo de biela-pistón para un motor de combustión interna	87
4.6. Algunos tipos de uniones entre eslabones (pares cinemáticos)	88
4.7. Grados de libertad en el plano y en el espacio	88
4.8. Elementos del mecanismo de Peaucellier	89
4.9. Mecanismo de dos barras para dibujar la curva huevo	91
4.10. Mecanismo de tres barras	93
4.11. Distintas configuraciones de un mecanismo de tres barras	94
4.12. Paralelogramo y contrapalelogramo	96
4.13. Mecanismo de tres barras que traza la lemniscata de Bernoulli	97
4.14. Inversor de Hart para trazar una línea recta	98
4.15. Mecanismo de Yates para trazar la cardioide	99
4.16. Mecanismo de cinco barras para trazar la cardioide	99
4.17. Mecanismo articulado de cuatro barras y las medidas de las barras	103
4.18. Mecanismo articulado de cuatro barras y curvas de acoplador	105
4.19. Mecanismo articulado de cuatro barras y curva de acoplador mediante un triángulo	106
4.20. Mecanismo articulado de cuatro barras y su inverso con las curvas pareadas generadas	107
4.21. Clasificación de curvas de acoplador de un mecanismo de cuatro barras	108
4.22. Tres mecanismos cognados que generan la misma curva	108
4.23. Mecanismo de cuatro barras y curva del punto de acoplador M	109
4.24. Construcción de mecanismos cognados	110
4.25. Herramientas de <i>Cinderella.2</i> para trazar cónicas	112
4.26. Esquema del elipsógrafo de Proclo	113
4.27. Grabado original del <i>compas parfait</i> por Abou Sehl Ouídjen	114
4.28. Conicógrafos de Franz Von Schooten	115
4.29. Esquema del conicógrafo de Boguslavskii basado en el resultado de Newton	117
4.30. Conicógrafo general presentado por R. C. Yates	118
4.31. Parabológrafo, elipsógrafo e hiperbológrafo de Yates	119
4.32. Línea del tiempo interactiva sobre la historia de los conicógrafos	122
4.33. Mecanismos articulados construidos en acrílico	122
4.34. Mecanismos articulados construidos en metal	122
4.35. Pantógrafo construido en acrílico	123
4.36. Mecanismo de tres barras en 3D generado con <i>SketchUp</i>	124
4.37. Elipsógrafo de Proclo construido en <i>SketchUp</i> y animado con <i>SketchyPhysics</i>	125
4.38. Construcción de la máquina de vapor de Watt en 3D animada mediante <i>SketchyPhysics</i>	125

Capítulo 1

Introducción

"Hoy en día tenemos un problema con la formación en Matemáticas, especialmente en las escuelas. Básicamente, nadie está muy contento. Los que la aprenden creen que son algo aislado, difícil y sin interés. Los que tratan de aplicarla, creen que no saben lo suficiente. Los gobiernos se dan cuenta que es algo bueno para la Economía pero no saben cómo adecuarla. Y los profesores también están frustrados. Sin embargo, las Matemáticas son ahora aún más importantes para el mundo que en cualquier otro momento de la historia. Por un lado tenemos el interés decreciente por la educación matemática y, por el otro, un mundo más matemático, un mundo más cuantitativo de lo que nunca antes tuvimos"

Conrad Wolfram en la charla TED *"Stop teaching calculating, start teaching Math"* [111]

Uno de los grandes problemas de la Educación hoy en día estriba en que el alumnado no es capaz de relacionar lo aprendido en la escuela con la realidad cotidiana. La pregunta *'Profe, ¿eso para qué sirve?'* sigue siendo una de las clásicas en nuestras aulas. Mostrar la utilidad de los conceptos aprendidos en clase incluidos en el currículo escolar y relacionarlos con conceptos de otras asignaturas evitando la *compartimentalización del conocimiento* tan típica en nuestras aulas, constituye uno de los grandes objetivos de la Educación para el Siglo XXI.

Así, la propuesta de trabajo que presento va a girar en torno a un tema central: *mecanismos articulados para dibujar curvas* alrededor del que se van desarrollar las propuestas didácticas de aplicación en el aula poniendo en juego conceptos relativos a distintas asignaturas, haciendo uso de las TIC en un formato interdisciplinar basado en metodologías activas y colaborativas.

Como complemento necesario (y casi suficiente) a estas páginas, he creado un sitio web disponible en <https://sites.google.com/site/tesislinkages/home> en la que aparecen construcciones dinámicas manipulables de distintos mecanismos así como otros recursos para la aplicación al aula de las distintas propuestas didácticas. Todas las construcciones dinámicas que he realizado



Figura 1.1: Página de inicio de la web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/home>

Fuente: Elaboración propia

están disponibles para su descarga desde esta web bajo licencia Creative Commons (CC BY-NC-SA 4.0).

1.1. ¿Por qué sistemas articulados?

En primer lugar, cabe preguntarse qué es un sistema articulado. Desde un punto de vista intuitivo, un sistema articulado es un mecanismo compuesto por barras rígidas unidas mediante articulaciones. Así, un compás, unas tijeras, una plataforma elevadora (Figura 1.2), un pantógrafo o el Sistema de Manipulación Remota del Transbordador Espacial (Figura 1.3) son ejemplos de mecanismos articulados más o menos complejos.

A lo largo de este trabajo, nos vamos a centrar en los sistemas articulados planos suponiendo que las barras son unidimensionales y que las articulaciones les permiten girar con completa libertad en el plano para facilitar el estudio geométrico de los mismos.

Y ¿por qué para dibujar curvas? Empecemos por el principio. En los *Elementos de Geometría*, Euclides describe sus cinco famosos Postulados que requieren algo previo: la posibilidad de trazar líneas rectas y circunferencias. Así, es interesante preguntarse cómo podemos describir y generar rectas y circunferencias con toda la precisión que se pueda.

Para la circunferencia no encontramos mucha dificultad: tomando la definición de Euclides y asumiendo que trabajamos en el plano, vemos que únicamente tenemos que hacer que el punto que describe la circunferencia mantenga una distancia constante a un punto dado igual al radio. Esto se puede realizar tomando una pieza plana de cualquier forma, fijando un pivo-



Figura 1.2: Plataforma elevadora
Fuente: Wikipedia

te a la superficie plana en el centro dado de la circunferencia y tomando un lápiz en otro agujero a distancia igual al radio requerido. Así, moviendo el lápiz seremos capaces, con este rudimentario aparato, de trazar una circunferencia de una forma sencilla. De cara a mejorar la precisión en el trazado, podemos perfeccionar el sistema usando un mecanismo mejorado: el compás de toda la vida. Así el tercer Postulado de Euclides (*Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera*) postula la existencia de compases.

Pero, ¿cómo vamos a describir y trazar la línea recta? Euclides la define como *línea recta es la más breve extensión de un punto a otro* ([22], Definición III). Y los dos primeros Postulados postulan la existencia de una regla para trazar rectas. Pero así se está evitando la cuestión: si trazamos rectas con una regla, esta regla ya debe tener un lado recto así que ¿cómo construimos este lado recto? Volvemos al inicio entrando en un círculo vicioso del que no podemos salir. Vemos que el sistema de trazado de una línea recta y una circunferencia difieren entre sí. Si aplicamos el sistema de trazado de la línea recta mediante una regla a la circunferencia, habrá que tener una lámina circular (como una moneda) y trazar la circunferencia moviendo un lápiz alrededor de dicha lámina. Pero el método descrito para trazar circunferencias (mediante un compás) no presupone la existencia de una circunferencia que se usa para trazar otras, simplemente se pide que la distancia entre dos puntos sea constante. Esta diferencia conceptual es muy importante. Si se lograra un mecanismo articulado formado por barras y pivotes (como un compás) capaz de trazar una línea recta, se pondría fin a este dilema.

Así, la elección de los sistemas articulados para dibujar curvas como tema central no es casual. En primer lugar, los sistemas articulados son algo cotidiano que el alumnado puede relacionar con muchas situaciones diarias. En segundo lugar, el estudio de estos sistemas tiene una componente matemáti-



Figura 1.3: Shuttle Remote Manipulator System (SRMS), Servicio Remoto del sistema manipulador o Canadarm

Fuente: Wikipedia

ca muy importante desde el momento en que aparecieron en la Antigüedad para resolver los problemas clásicos de la Matemática griega, fueron utilizados por Descartes para establecer los principios de la Geometría Analítica pasando por la invención en el siglo XIX de dicho sistema articulado para dibujar líneas rectas y terminando con el teorema que demuestra que para cualquier curva algebraica existe un mecanismo articulado que la dibuja. Ese recorrido histórico sobre los distintos sistemas articulados ideados a lo largo de los últimos dos mil años nos va a dar pie a proponer numerosas actividades muy significativas con los alumnos relativas a contenidos de distintas asignaturas en un entorno educativo STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Además, el tratamiento geométrico del funcionamiento de los sistemas articulados va a permitir el desarrollo de una de las competencias básicas presente en el currículo: la competencia matemática definida como *la habilidad para utilizar números y operaciones, formas de expresión y razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, conocer aspectos cuantitativos y espaciales y resolver problemas* [2].

Recientemente, la OCDE ha publicado el informe PISA que muestra la capacidad del alumnado de quince años para enfrentarse a problemas de la vida diaria, aplicando las competencias básicas adquiridas en clase. Dejando a un lado los resultados españoles, una de las conclusiones del informe es que existe una gran correlación (0'81) entre la competencia matemática del alumnado y el desempeño en la resolución de problemas ([83], pág. 68). Así,

centraremos nuestra propuesta en el desarrollo de las competencias básicas más que en la mera adquisición de conceptos presentando actividades relacionadas con el Aprendizaje Basado en Proyectos en las que el alumnado tenga que poner en práctica dichas competencias para la realización de las tareas apoyándose en el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) .

Cabe destacar que el progresivo aumento y generalización del uso de ordenadores en el aula ha hecho que los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), desde sus comienzos, fuesen un ejemplo generalizado de uso de las TIC en clase de Matemáticas. La posibilidad de realizar una construcción que cumpla unas condiciones hace que las propiedades intrínsecas de dicha construcción se conserven invariantes en contraposición con las distintas configuraciones obtenidas al mover algún elemento de dicha construcción. Así, las propiedades geométricas se perciben en un SGD como invariantes en las variaciones de la construcción. La Geometría Dinámica nos da la posibilidad de interactuar con objetos variables siendo el estudio de esas variaciones algo esencial en Matemáticas. Atendiendo a las palabras del geómetra francés Gaspar Monge en las *Leçons données à l'Ecole Normale de l'an III*:

“Il faut que l'élève se mette en état, d'une part de pouvoir écrire tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.”

Es decir, que el estudiante debe ser capaz, por un lado, de escribir todos los movimientos que pueda concebir en el espacio y, por otro, imaginar perpetuamente en el espacio las trayectorias descritas por cada operación analítica. La Geometría Dinámica desde el momento que permite al alumno interactuar con objetos tangibles y variables, se convierte en una herramienta muy potente y económica para mostrar a los estudiantes teoremas, conceptos y relaciones geométricas complicadas de una forma sencilla e intuitiva.

El estudio propuesto sobre mecanismos articulados y las curvas que generan se basa en una serie de construcciones dinámicas realizadas con el Sistema de Geometría Dinámica *Cinderella.2* . El entender el funcionamiento de dichos mecanismos a través de su manipulación mediante este SGD, va a motivar a los alumnos para poder realizar distintos estudios y obtener conclusiones propias fomentando su curiosidad, creatividad y rigor en dichos estudios. Así mismo, estos estudios dan la oportunidad de reforzar relaciones entre el Álgebra y la Geometría solucionando la carencia de visualizaciones y nociones geométricas en la educación matemática [40].

En los mecanismos articulados a los que hacemos referencia, hay un punto que traza una trayectoria o *locus*. En general, un locus geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen unas determinadas condiciones. Por ejemplo, como lugar geométrico, una circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de uno fijo llamado centro. Otro ejemplo distinto es considerar una circunferencia c de centro C . Si Q es un punto cualquiera de dicha cir-

cunferencia, podemos considerar el locus generado por los puntos medios P de los segmentos CQ mientras Q se mueve a lo largo de la circunferencia c .

En Geometría Dinámica, el término locus generalmente se refiere a trayectorias (loci) generadas como en el segundo ejemplo, es decir, a la trayectoria determinada por las distintas posiciones de un punto (*the tracer*, P en el ejemplo anterior) que corresponden a las distintas posiciones de una construcción determinada por el movimiento de un segundo punto (*the mover*, Q en el ejemplo anterior) a lo largo de un determinado camino (c en el ejemplo anterior [4]).

Durante el siglo XIX y principios del siglo XX se produjo una *algebrización de las Matemáticas* fomentándose el trabajo simbólico de una forma casi absoluta en perjuicio de los razonamientos visuales traduciéndose en la escasa implantación de la Geometría y las aproximaciones visuales en los sistemas educativos. Históricamente, el concepto de función se desarrolló desde la creación de una curva a través de un movimiento geométrico o físico, por ejemplo, con un mecanismo articulado. Después, la curva es analizada según sus propiedades geométricas para llegar a su representación algebraica (ecuación). Descartes (1637) utilizó mecanismos articulados para construir curvas y, estudiando la propiedades de la construcción, obtuvo la ecuación de la curva en relación a un sistema de coordenadas. En este sentido, se van a proponer actividades en las que el alumnado, mediante la manipulación de distintas construcciones, va a poder relacionar la curva construida mecánicamente con su ecuación.

Las últimas tendencias en educación matemática sugieren que *la intuición que provee la visualización matemática no es ... un sustituto superficial del razonamiento sino el tipo de intuición que penetra en el corazón de una idea* [117] dando profundidad y sentido al entendimiento, ayudando a la resolución de problemas y inspirando descubrimientos creativos.

En nuestro caso, la construcción y estudio de sistemas articulados va a generar una relación entre los razonamientos deductivos y la experimentación con modelos digitales (construcciones geométricas dinámicas). Este tipo de mecanismos pueden inscribirse en la frontera entre el campo de la experiencia mecánica y la experiencia geométrica. Además, la construcción de modelos geométricos dinámicos requiere que los alumnos analicen, recuerden y apliquen propiedades geométricas básicas.

Los mecanismos articulados presentes en la realidad cotidiana así como en máquinas históricas, suponen un contexto óptimo para el desarrollo de las habilidades visuales de los alumnos. Los mecanismos articulados contienen una carga geométrica muy apropiada para el aprendizaje en Secundaria y Bachillerato además de que, trabajando con simulaciones dinámicas, se permite a los alumnos analizar relaciones y elaborar conjeturas. Explicar por qué los sistemas articulados funcionan como lo hacen, va a propiciar en los alumnos el entendimiento de conceptos geométricos, el razonamiento deductivo y la motivación por las demostraciones matemáticas.

1.2. Educación para el siglo XXI: STEM Education

En los últimos tiempos y ante los retos de la educación en el siglo XXI en un entorno tecnológico y en constante evolución, se ha producido un notable interés en la implementación en los sistemas educativos de lo que se conoce como “STEM Education” [20], es decir, el desarrollo de proyectos que incluyan las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (Science, Technology, Engineering, Mathematics en sus siglas en inglés). De esta forma, una propuesta concreta de implementación de un proyecto STEM en el aula, consiste en el estudio y generación digital mediante un SGD de simulaciones de mecanismos articulados. ([18], [19], [32], [40] y [109]).

En la actualidad, los gobiernos de todos los países avanzados son conscientes de que no se está preparando a suficientes alumnos y profesores en las áreas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas de cara a una economía basada en el conocimiento tecnológico. Podemos hablar de *alfabetización científica* como la “capacidad de entender, tomar decisiones y aplicar el conocimiento científico de la ciencia al vivir diario” [8]. Así, la alfabetización científica de la población es un factor crucial para el desarrollo económico de un país [41], ya que la generación de valor agregado va acompañada de la generación de conocimiento científico, del desarrollo tecnológico y de la innovación.

Sin embargo, la realidad es que mientras que la demanda de titulados universitarios en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas crecerá en Europa un 14 % hasta 2020, en Europa sólo el 17 % de los alumnos de enseñanzas superiores cursan estas especialidades, mientras que en Corea del Sur optan por ellas el 29 % de los estudiantes, y en China y Taiwan el 31 %. Y en España solo 13 de cada 1.000 personas han completado estudios en estos campos [21].

Para dar respuesta a esta situación, surge la propuesta STEM como una estrategia coordinada para la educación en niveles anteriores a la Universidad en Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas enfocado en el desarrollo de competencias y habilidades tecnológicas y personales [20].

Rodger W. Bybee, en su libro *The case for STEM Education: challenges and opportunities*, señala la ausencia de una identificación de éste acrónimo con unas prácticas educativas claras en los diferentes niveles educativos y propone una serie de retos para llegar a concretar dichas prácticas. Uno de ellos consiste en el “uso de contextos”, es decir, remarca la necesidad de realizar una enseñanza basada en distintos escenarios que enfrenten al alumnado a problemas y situaciones que le lleven a desarrollar sus competencias y utilizar las cuatro áreas que forman STEM para entender las situaciones que se le puedan plantear como ciudadanos y construir soluciones a ellos.

Además, propone una serie de objetivos de una educación enfocada desde STEM referidos a qué se pretende que alcance el alumnado entre los que destacan el de adquirir conocimientos, habilidades y actitudes para identi-

ficar cuestiones y problemas en la vida real, explicar el mundo natural y el “diseñado” y obtener conclusiones basadas en pruebas acerca de cuestiones relacionadas con STEM. La propuesta del uso de los mecanismos articulados para generar esos contextos, supone una solución óptima al reto planteado a la vez que permite alcanzar dicho objetivo.

La idea no es nueva. Jan Comenius (1592 - 1670) ya defendía hace casi 400 años en su *Didactica Magna* (1657) la importancia de la manipulación de objetos concretos en toda experiencia individual de construcción de conocimiento:

“Everything must be presented to the senses as much as possible; to wit, the visible to the eye, the audible to the ear, odors to the sense of smell, the tastable to the taste, and the touchable to the sense of touch; and, whenever something can be grasped by more than one sense at one time, let it be presented to them at one time. One may, however, if the things themselves cannot be presented, use representations of them, such as models and pictures. [...] It is a mistake to let rules in an abstract form go before, and afterwards explain them in examples. For the light must go before him for whom it is intended to shine. [...] Whatever is to be done, must be learned by doing it. Mechanics do not detain their apprentices for a long time with meditations: they put them to work at once, that they may learn to forge by forging, to carve by carving, to paint by painting, etc. So the pupils should also learn at school to write by writing, to speak by speaking, to count by counting, etc. Then the schools are workshops filled with the sound of work.” (Comenius, 1657).

Franz Reuleaux (1829 - 1905), considerado como el padre de la Cinemática, creía que hay principios científicos detrás de la invención y creación de nuevas máquinas, lo que se conoce actualmente como síntesis de mecanismos [106]. El uso y estudio de simulaciones digitales mecanismos articulados propicia una experiencia conjunta entre Ingeniería y Matemáticas (Geometría) permitiendo la visualización de los efectos de la variación de parámetros en un mecanismo articulado, primero de forma cualitativa y, en última instancia, de forma cuantitativa. De esta forma, la implementación de propuestas educativas basadas en el uso, generación digital y estudio de mecanismos articulados, dan lugar a prácticas de aula coherentes con los principios y objetivos de una educación STEM.

Cabe destacar que, en el momento de redacción de esta tesis, estamos viviendo un nuevo cambio normativo en el sistema educativo español (y van...) con la implantación de la LOMCE: *Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa* [1] en sustitución de la LOE: *Ley Orgánica de Educación de 2006* [2]. En estos momentos se está trabajando en un gran pacto para la Educación y lograr redactar una Ley de Educación duradera e independiente del partido político en el Gobierno en cada momento.

Quiero, con este comentario, mostrar que la propuesta didáctica que se incluye en esta tesis así como sus principios conceptuales y metodológicos

están al margen de los vaivenes normativos en materia de Educación a los que estamos acostumbrados y que la validez de esta propuesta está basada en estándares marcados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) de cara a la adquisición de habilidades y competencias del siglo XXI para los aprendices del nuevo milenio en los países de la OCDE [82]. Los modelos económicos y sociales de la actualidad basados en la sociedad del conocimiento en comparación con los del siglo pasado al servicio de un modo industrial de producción, exigen que los sistemas educativos ofrezcan nuevas habilidades y competencias y nuevas formas de trabajo en el aula. En nuestra propuesta didáctica, las metodologías activas y colaborativas en general y el Aprendizaje por Proyectos (PBL) o el proceso de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en particular, van a ser la base metodológica de aplicación al aula. En ambos casos, constituyen un método de trabajo en el que los alumnos participan activamente en la adquisición de su conocimiento. El método se orienta a la resolución de tareas o problemas que son seleccionados de la realidad o bien diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos de conocimiento.

El origen de esta forma de trabajo surge en los años 60 en la Universidad de McMaster (Canadá) cuando un grupo de educadores médicos se replanteó la forma de enseñar Medicina tratando de conseguir una mejor preparación de sus profesionales planteando que, además de adquirir conocimientos, tenían que adquirir también una serie de competencias y habilidades básicas para su trabajo [99]. De este modo, la Facultad de Ciencias de la Salud de la Universidad de McMaster estableció una propuesta metodológica que fue implementada a lo largo de los tres años de su plan de estudios y que es conocida actualmente como Aprendizaje Basado en Problemas. Esta mentalidad, dada su validez académica, comienza a expandirse muy pronto a otros campos profesionales tales como la ingeniería, la gestión empresarial o las ciencias jurídicas. A Europa llega a través de la Universidad de Maastricht (Holanda) que se crea en 1974 y organiza todos sus estudios con esta metodología [76]. Por último, la Universidad de Aalborg (Dinamarca) crea una variante, el Aprendizaje Basado en Proyectos, con la cual organizan una gran parte de sus enseñanzas.

El aprendizaje por Proyectos (PBL del inglés Project Based Learning) es un modelo de aprendizaje con el cual los estudiantes trabajan de manera activa, planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula [70].

La metodología ABP (Aprendizaje Basado en Problemas) es una colección de problemas cuidadosamente contruidos por grupos de profesores de materias afines que se presentan a pequeños grupos de estudiantes auxiliados por un tutor. Los problemas, generalmente, consisten en una descripción en lenguaje muy sencillo y poco técnico de conjuntos de hechos o fenómenos observables que plantean un reto o una cuestión, es decir, requieren explicación. La tarea del grupo de estudiantes es discutir estos problemas y producir

explicaciones tentativas para los fenómenos describiéndolos en términos fundados de procesos, principios o mecanismos relevantes [80].

Por otro lado, tomando las palabras de Claudi Alsina *“reivindicaríamos más allá de la creatividad técnica en la resolución de problemas la creatividad en seleccionar enunciados sorprendentes, en buscar problemas actuales y aplicarlos, en conectar con la vida de las personas, en desarrollar la capacidad de cuestionar cosas y formular buenas preguntas o discutir ideas relevantes”* [7].

Así, la presentación al alumnado de un enunciado tan sencillo como *¿Cómo dibujar una línea recta?* da lugar a toda una serie de actividades, investigaciones y tareas en las que se puede lograr uno de los objetivos generales de cualquier sistema educativo: *“El alumnado es el centro y la razón de ser de la educación. El aprendizaje en la escuela debe ir dirigido a formar personas autónomas, críticas, con pensamiento propio”* ([1], Preámbulo) adaptándolo a las necesidades y particularidades de una Educación para el Siglo XXI. Así, el rol del profesor pasa de ser del de poseedor de una serie de conocimientos y transmisor de forma oral a una serie de sujetos pasivos receptores de dicha información al de facilitador, mentor y acompañante del alumnado en el proceso de aprendizaje.

Se pueden considerar incluso las siguientes habilidades de supervivencia para el siglo XXI [110] a tener en cuenta a la hora de planificar y desarrollar la actividad en el aula con el alumnado:

- Pensamiento crítico y resolución de problemas
- Trabajo en grupo
- Aprender a encontrar, filtrar y usar la información
- Iniciativa, liderazgo, asumir riesgos responsables
- Gestión del tiempo
- Interactuar en un entorno gráfico y multimedia
- Interdisciplinariedad

Todas las ideas que se acaban de exponer van a ser la base pedagógica en la que se va a apoyar la propuesta didáctica.

1.3. Sistemas articulados y el currículo de Secundaria y Bachillerato

Partiendo de la base de que, según lo expuesto anteriormente, nuestra propuesta pretende ir más allá del desarrollo normativo del sistema educativo, no podemos obviar que la realidad es que hay un currículo oficialmente

establecido que regula el proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, “se entiende por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. Dentro del currículo tenemos los contenidos o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias”. Por otro lado, “los centros docentes desarrollarán y complementarán, en su caso, el currículo de las diferentes etapas y ciclos en uso de su autonomía”. ([1] Capítulo III, Artículo 6). Es decir, el currículo, los contenidos, los temarios no son algo cerrado en cuanto los equipos docentes lo pueden adaptar así como la metodología de cara a mejorar la calidad educativa.

Por contextualizar un poco lo anteriormente descrito, la experimentación con mecanismos articulados para dibujar curvas ha jugado un papel fundamental en el desarrollo histórico de la Geometría Analítica, el simbolismo algebraico, el Cálculo y la definición del concepto de función. Uno de los contenidos a desarrollar en la etapa de Secundaria es el de Funciones y Gráficas ([2], Bloque 5 de contenidos en los cuatro cursos de Secundaria). Muchos libros de texto comienzan el tema dando la definición de función en términos de relación entre conjuntos que luego no tiene nada que ver con las actividades propuestas posteriormente. Por otro lado, el concepto de función no es algo trivial y ha llevado unos cuantos siglos de historia de las Matemáticas llegar a ello. Es más, en el siglo XIX casi hubo un “juego” en el que cuando un matemático daba una definición del concepto de función, otros se empeñaban en encontrar funciones que no cumplieran dicha definición. Se llegó a un punto en el que Henri Poincaré afirmó en 1899 [69]: *durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas que parecen forzadas a parecerse lo menos posible a las funciones honestas que sirven a algún propósito. [...] Antes, cuando se inventaba una nueva función era con una meta práctica. Hoy son inventadas a propósito para mostrar que el razonamiento de nuestros ancestros fallaba y nunca obtendremos más que eso de ellas. Si la lógica fuera la única guía del profesor, tendría que empezar por lo más general, es decir, las funciones más estrambóticas.*

Si preguntamos a un estudiante qué es una función, generalmente responden que es una ecuación con x e y que se puede dibujar mediante una gráfica. Pero, una función ¿es su ecuación? ¿su gráfica?... Por otro lado, se invierte mucho tiempo en el aula estudiando la relación entre la expresión analítica de una función y su gráfica. Así, parece implícito que las gráficas son creadas por ecuaciones. Pero ¿qué ocurre si sustituimos *gráfica* por *curva*? Es entonces cuando ya no es necesario un sistema de coordenadas para generar dichas curvas que aparecen gracias a acciones físicas o geométricas o pueden ser generadas mediante un sistema mecánico. Es más, Descartes en su *Geometría* no escribe una ecuación y luego dibuja su gráfica. Lo que hace, como hemos comentado, es generar curvas mediante mecanismos articulados, establecer un sistema de coordenadas apropiado y, por último, encontrar la

ecuación de la curva [33].

Así, mediante la manipulación de mecanismos articulados como los utilizados por Descartes generados con *Cinderella.2*, podemos trabajar el concepto de función como un proceso cognitivo flexible entre múltiples representaciones donde las curvas existen antes que los sistemas de coordenadas y las ecuaciones generando un entorno en el que los alumnos pueden investigar las profundas relaciones entre Geometría y Álgebra.

Además, pretendemos proponer actividades que puedan tener cabida en distintas asignaturas siendo el equipo docente el encargado de distribuir las tareas y seleccionar el nivel educativo en el que lo van a aplicar. Vamos a huir del corsé que supone la clásica categorización de las Unidades Didácticas partiendo de nivel educativo, objetivos y contenidos para pasar a desarrollar las tareas y hacerlo a la inversa, es decir, se van a presentar una serie de secuencias didácticas a través de actividades, problemas y pequeños proyectos para, posteriormente, relacionarlas con distintas asignaturas y los conceptos y contenidos a tratar dejando abierta la posibilidad de ampliación de tareas por parte de los docentes. Además, se va a poner mucho énfasis en la adquisición de competencias clave desde un enfoque constructivista, es decir, en crear un escenario en el que el alumno construya una parte significativa de sus conocimientos a partir del contacto con fuentes, materiales y situaciones de información de calidad realizando tareas que constituyan un reto haciendo uso de las herramientas necesarias en cada situación para hacer frente al mismo.

Espero que con esta propuesta de mecanismos articulados, la investigación sobre la historia de los mecanismos articulados, las actividades de aplicación al aula y los materiales creados disponibles en la web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/home> se haya creado dicho escenario.

Capítulo 2

De la cuadratura del círculo a la línea recta. Evolución histórica de mecanismos articulados

En este capítulo se presenta un recorrido histórico de la aparición de mecanismos físicos y técnicas para la construcción de curvas desde la antigüedad hasta nuestros días. Todos estos sistemas articulados se idearon de cara a la resolución de distintos problemas. Se intentará ver qué problemas y situaciones generaron tales artefactos realizando un estudio de su funcionamiento. Además, en la web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/evolucion-historica> están desarrollados estos apartados incluyendo vídeos del funcionamiento de la mayoría de los mecanismos presentados así como los archivos con las construcciones dinámicas de los mismos realizados en *Cinderella.2* dispuestos para su descarga y manipulación. Los 41 vídeos realizados que muestran el funcionamiento de los mecanismos presentes en este estudio histórico, se han recopilado en una lista de reproducción disponible en https://www.youtube.com/playlist?list=PLnx_YZQNvSPiik7TM2YBwYdfuMDqdGtjw.

2.1. Los tres problemas clásicos de la matemática griega

El legado de la escuela pitagórica hizo que la matemática griega estuviera consagrada casi exclusivamente al estudio de la Geometría. En un principio fueron la recta y la circunferencia, construidas mediante regla y compás. A partir de estas figuras y sus conexiones mutuas, basaron los griegos todas las proposiciones geométricas, ya fueran teoremas o construcciones. Sin embar-

go, la regla y el compás resultaron ser “artillería” insuficiente para la resolución de los tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo como se demostró muy posteriormente.

La *cuadratura del círculo* es uno de los problemas matemáticos más antiguos ya conocido entre los babilonios y los egipcios. Aparece ya en el Papiro Rhind, un documento egipcio descubierto en 1855 y que contiene una serie de problemas matemáticos planteados hace unos cuatro mil años. Consiste en hallar un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. En 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann demostró que π es un número trascendente por lo que es imposible cuadrar el círculo usando regla y compás.

La *duplicación del cubo* consiste en hallar un cubo de volumen doble a uno dado. El origen de este problema es incierto conociéndose, al menos, un par de versiones distintas cuya fuente es Eratóstenes [53]. La primera (en su obra *Platonicus*) le atribuye el origen a una consulta al oráculo de Delfos por parte de los habitantes de la isla de Delos a fin de aplacar una peste. El oráculo habría aconsejado duplicar el ara de Apolo que era cúbica. La otra versión viene de la siguiente historia: *Eratóstenes al rey Tolomeo, saludos. Se cuenta que uno de los poetas trágicos antiguos representaba a Minos haciendo construir una tumba para Glauco y que, cuando Minos descubrió que la tumba medía cien pies de cada lado, dijo “Demasiado pequeña es la tumba que habéis señalado como el sitio real de descanso. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada lado de la tumba”*. Esto claramente era un error ya que si los lados se duplican, la superficie se multiplica por cuatro y el volumen por ocho. Para duplicar el cubo, hace falta construir $\sqrt[3]{2}$, un número no construible con regla y compás tal y como demostró en 1837 el matemático francés Pierre Wantzel.

La *trisección del ángulo* consiste en dividir un ángulo α dado en 3 partes iguales. Hay varias razones por las cuales este problema difiere de los dos anteriores: no hay una historia que cuente cómo el problema llegó a ser planteado por primera vez y, además, este problema es resoluble en casos particulares (no como los anteriores) pero no en general ya que supone la resolución de una ecuación de tercer grado por lo que la demostración de Wantzel antes mencionada puede ser aplicada en este caso.

Para resolver estos problemas, los matemáticos griegos emplearon todo tipo de argucias desde las lúnulas de Hipócrates para la cuadratura del círculo, la construcción tridimensional de Arquitas para la duplicación del cubo o la espiral de Arquímedes para la trisección del ángulo. Hallazgos recientes, aplicando los axiomas de Huzita [59], permiten trisecar un ángulo mediante papiroflexia.

Pero vamos a lo que nos interesa, la utilización de mecanismos articulados para la resolución de estos problemas. Como hemos comentado, un mecanismo articulado es un sistema compuesto por barras rígidas unidas por sus

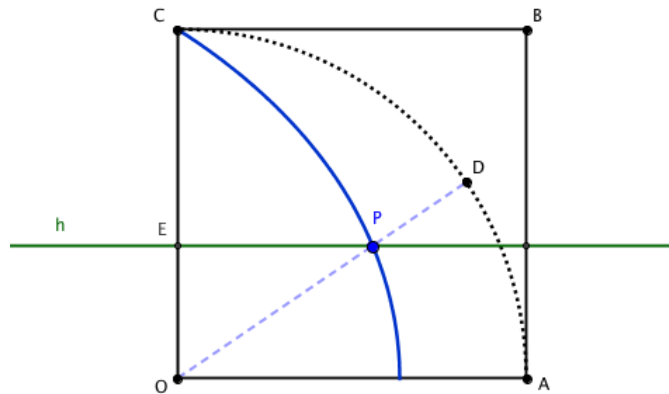


Figura 2.1: Trisectriz de Hippias
Fuente: elaboración propia

extremos mediante articulaciones. Tales articulaciones pueden permitir pivotar o deslizar las barras entre sí. Estos mecanismos permiten construir mecánicamente distintos tipos de curvas.

Es interesante la controversia entre los historiadores de la matemática sobre la admisión en la geometría griega de construcciones usando instrumentos distintos a la regla y el compás ([44] y [6]). Plutarco escribió [31]: *Platón reprochó a los discípulos de Eudoxo, Arquitas y Menecmo por recurrir a medios mecánicos e instrumentos para resolver el problema de duplicar el volumen, ya que en su deseo de encontrar de alguna manera dos medias proporcionales, recurrieron a un método que era irracional. Al proceder de esto modo, se perdía irremediabilmente lo mejor de la geometría, por una regresión al nivel de los sentidos, lo cual impide crear e incluso percibir las imágenes eternas e incorpóreas entre las que Dios es eternamente Dios.*

El primer mecanismo de este tipo del que se tiene conocimiento es del sistema para la construcción de una curva llamada trisectriz atribuido a Hippias (460 - 400 a.C.). Esta curva también se conoce como la cuadratriz de Dinostrato (390 - 320 a.C.), hermano de Menecmo por cierto.

La trisectriz (o cuadratriz) se obtiene de la siguiente forma (Figura 2.1):

1. Se construye el cuadrado de vértices O, A, B y C
2. Sea Q_0 el arco de circunferencia centrado en O con extremos A y C
3. Sea D un punto sobre el arco Q_0

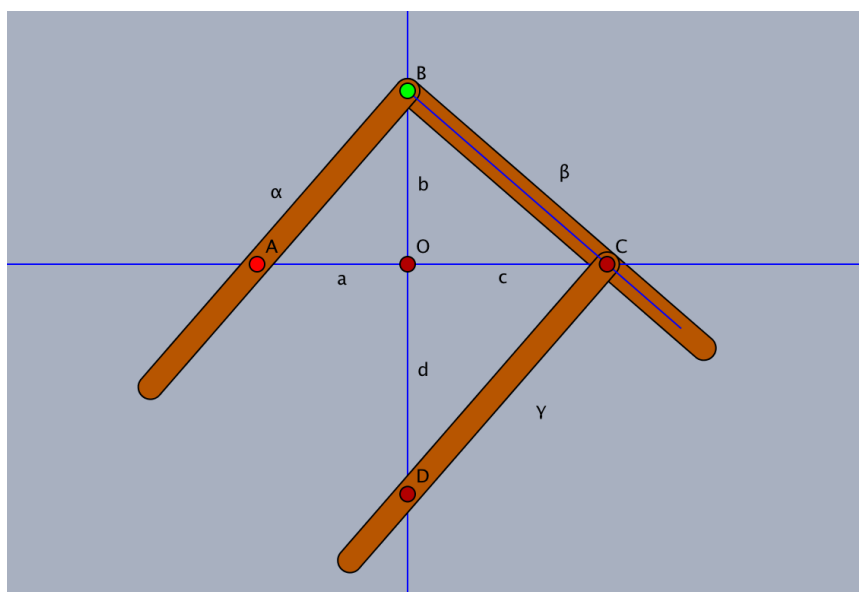


Figura 2.3: Aparato para resolver el problema Deliano atribuido a Platón
Fuente: elaboración propia

5. Se traza la semirrecta OW
6. La medida del ángulo AOW es un tercio de la medida del ángulo AOD

A pesar de lo comentado anteriormente acerca de la opinión de Platón sobre la generación de curvas mediante mecanismos articulados, hay referencias en Eutocio y Proclo en las que se le atribuye un sistema mecánico (Figura 2.3) para el cálculo de raíces cúbicas que tiene aplicación directa para resolver el problema Deliano (duplicación del cubo).

El mecanismo, descrito en [6] y [39], consiste en 3 barras, dos de las cuales α y β están rigidamente unidas por un extremo formando un ángulo recto con vértice B y la tercera γ se puede desplazar a lo largo de β a la que está unida por uno de sus extremos C, manteniéndose paralela a α .

En la Figura 2.3 se puede ver cómo se usa. Para calcular la raíz cúbica de $\frac{d}{a}$, es decir, de la medida del segmento d tomando a como unidad, en un sistema cartesiano se hace pasar la barra α por el punto $A(-a, 0)$ y la barra γ por el punto $D(0, -d)$. A continuación, se desplaza la barra β hasta que el vértice C esté en el eje x (en el punto $(c, 0)$) y el B en el eje y (en el punto $(0, b)$).

Aplicando el teorema de la altura a los triángulos rectángulos ABC y BCD , tenemos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= ac \\ c^2 &= bd \end{aligned}$$

Entonces:

$$b^4 = a^2c^2 = a^2bd \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{d}{a}$$

No contenta con esta solución empírica, la escuela de Platón se dedicó a buscar nuevos métodos para la construcción de curvas cónicas de cara a resolver los tres problemas clásicos. Menecmo (380 - 320 a.C.) logró resolver teóricamente el problema de la duplicación del cubo reduciendo el problema a la construcción de las 2 medias proporcionales entre 2 y 1, es decir, encontrar x e y tales que:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{1}$$

de donde

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 2y \\ y^2 = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 = 2y^3$$

con lo que el cubo de lado x es de volumen doble que el de lado y .

En general, el problema de hallar dos medias proporcionales entre a y b consiste en hallar x e y tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

es decir, hallar la intersección de las curvas $x^2 = ay$ y $xy = ab$, una parábola y una hipérbola equilátera. Así, la resolución del problema de la duplicación del cubo se llevaría a cabo cuando se descubriesen instrumentos para la construcción de dichas curvas [17], los conicógrafos de los que hablaremos más adelante. Las primeras referencias a este tipo de aparatos son muy posteriores.

De esta época sólo se tiene noticia de un instrumento mecánico (Figura 2.4) para la construcción de la curva conocida como conoide de Nicomedes (280 - 210 a.C.), curva usada para la resolución de los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El sistema está formado por tres barras, dos de ellas rígidamente unidas entre sí formando un ángulo recto y la tercera que desliza a través de las otras dos a una distancia fija. En la Figura 2.5 se puede ver una reconstrucción del mecanismo según G. B. Suardi [102].

Y, por último, también se tienen noticias de una curva construida mecánicamente conocida como cisoide de Diocles (240 - 180 a.C.) utilizada también para resolver el problema de la duplicación del cubo. Proclo (418 - 485 d.C.) en sus comentarios sobre el libro I de los *Elementos* [46] hace referencia a esta curva aunque, hasta tiempos de Newton, no hay referencias de un mecanismo para construirla.

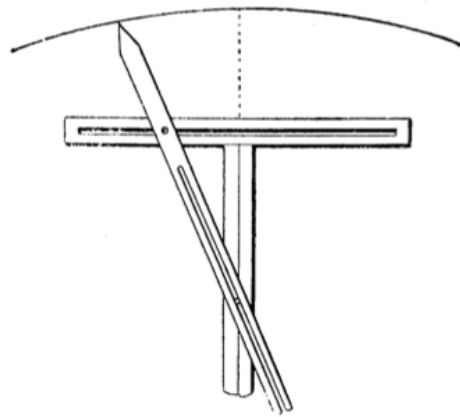


Figura 2.4: Mecanismo para la construcción de la conchoide
Fuente: [17]

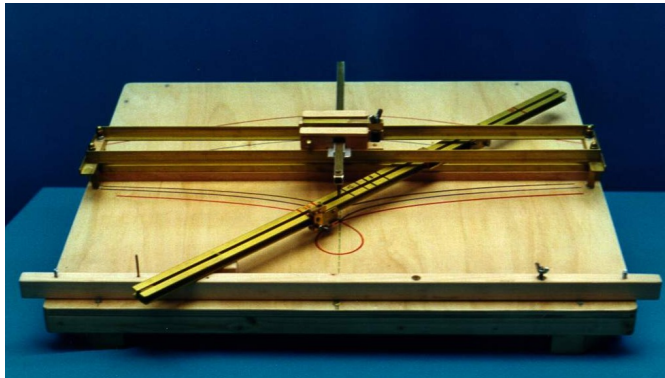


Figura 2.5: Reconstrucción del mecanismo para dibujar la conchoide diseñado por Suardi en 1752

Fuente: http://www.macchinematematiche.org/cataoghi/theatrum/machine/_00the.htm

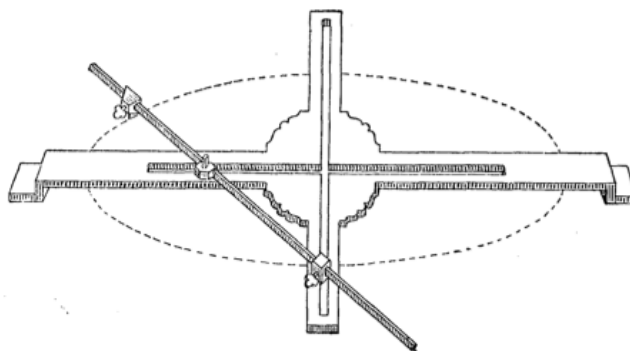


Figura 2.6: Elipsógrafo atribuido a Proclo y a Leonardo da Vinci
Fuente: [39]

2.2. La escuela de Alejandría, los árabes y el Renacimiento

La labor de búsqueda e investigación de las cónicas continuó en la escuela de Alejandría gracias a los trabajos de Ptolomeo (100 - 170 d.C.) y el estudio de los trabajos de los *grandes de la Antigüedad*: Euclides (325 - 265 a.C.), Arquímedes (287 -212 a.C.) y Apolonio (262 -190 a.C.), entre otros. Hay que tener en cuenta que los geómetras griegos trataban de resolver problemas geométricos mediante este tipo de mecanismos y que el tipo de soluciones buscadas tenían aplicaciones prácticas. Como hemos comentado, esto iba en contra del deseo de realizar construcciones geométricas usando únicamente los instrumentos divinos, la regla y el compás.

La gran obra de Apolonio *Sobre las secciones cónicas* y su influencia posterior hizo de la construcción de curvas obtenidas como secciones del cono un asunto de capital importancia. Hay referencias [14] de un elipsógrafo (Figura 2.6) atribuido a Proclo (y posteriormente a Leonardo da Vinci) consistente en dos barras rígidamente unidas con dos ranuras por las que se deslizan dos pivotes de una tercera barra. Cualquier punto rígidamente unido a esta tercera barra describe una elipse.

Proclo en [46] habla de un *compás para trazar parábolas* de Isidoro de Mileto, arquitecto griego bizantino coautor de la basílica de Santa Sofía en Constantinopla (S. VI d.C.). También se menciona a Eutoquio [17], de la escuela de Isidoro, y de un aparato para resolver el problema de la duplicación del cubo mediante el método de Menecmo antes mencionado.

Este es el legado de la escuela griega a nuestro estudio sobre mecanismos para la construcción de curvas. Con la destrucción de la Biblioteca de Alejandría por parte del califa Omar en el año 640 d.C., se perdió gran parte de ese legado y habrá que esperar unos cuantos siglos para volver a tener noticias de mecanismos de este tipo vía autores árabes principalmente. Es interesan-

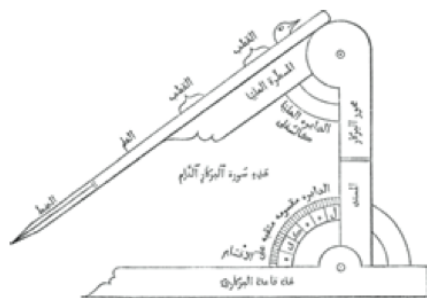


Figura 2.7: Reproducción del conicógrafo citado por Mohammed Ibn Hoceïn
Fuente: [112]

te observar [24] que tras el brillante periodo alejandrino en que los griegos sentaron las bases de la Matemática, hubo un lapso de estancamiento antes de que los europeos, a comienzos del siglo XVI, reiniciaran el camino en el punto en que los griegos lo dejaran. Algunos historiadores incluso sostienen que *La ciencia árabe solo reprodujo las enseñanzas de la ciencia griega* [37].

Sin entrar en estas valoraciones, las traducciones de manuscritos islámicos de la época de Franz Wöpcke (1826 - 1864) indican que los tres problemas clásicos de la matemática griega son estudiados por los matemáticos árabes [113] y encontramos soluciones en escritos del siglo XI mediante el uso de curvas cónicas y curvas de grado cuatro. Es conocido el “método del jardinero” para la construcción de elipses además de un *compas parfait* para dibujar cónicas [112] por parte de los matemáticos Ahmed Ibn Mohammed Ibn Abdel-Djelîl es-Sidjzi (siglo IX), Abou Sehl Ouïdjen Ibn Ouesten el-Kouhi (siglo X) y Mohammed Ibn Hoceïn (siglo XI). En un manuscrito de éste último, aparece una reproducción de un instrumento como el de la Figura 2.7 capaz de trazar curvas cónicas.

Por último, mencionar que Wöpcke ([60], pág. 93) habla de la resolución mecánica por parte del matemático Ibn Ahaïtham de un problema arquimedeo resolviendo una ecuación cúbica del tipo $x^3 - cx^2 + a^2b = 0$ que implica la construcción de una parábola. Sus palabras son: *Élle m’a paru mériter une attention particulière, comme solution mécanique d’un problème de géométrie; et encore parce qu’elle prouve, comme on verra, combien les Arabes ont su pénétrer dans l’esprit des méthodes grecques, et s’en faire des instruments qu’ils maniaient habilement.*

Mientras tanto, en Occidente no se tienen noticias de avances al respecto de nuestro estudio hasta finales del siglo XV cuando Leonardo da Vinci (1452 - 1519) y Alberto Durero (1471 - 1528) diseñaron aparatos para la resolución de problemas geométricos. Se ha comentado que el elipsógrafo de la Figura 2.6 se le atribuye a Leonardo. También se le atribuye [47] el mecanismo de la Figura 2.8 para la resolución del problema de Alhazen, un

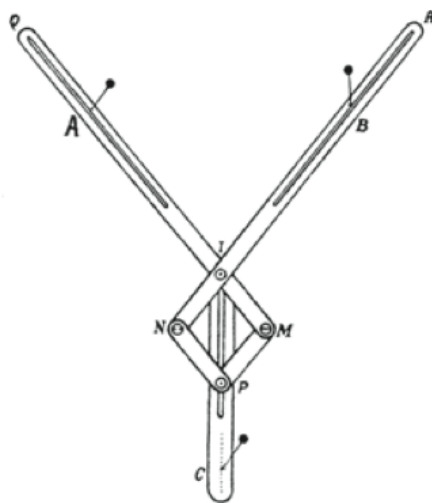


Figura 2.8: Aparato de Leonardo para la resolución del problema de Alhazen
Fuente: [47]

problema de óptica ya formulado por Ptolomeo en el año 150 que Leonardo reconoció que no lograría resolver de manera geométrica y recurrió a una solución mecánica.

Por su parte, Durero en su obra *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien* (Nüremberg 1525), además de describir métodos para el trazado de cónicas punto a punto, diseña dos instrumentos para el trazado de curvas: uno (Figura 2.9) para el trazado de óvalos y cicloides y otro para trazar la conchoide de Nicomedes (Figura 2.10).

Francesco Barozzi (1537 - 1604), conocido como *Barocius*, tradujo y comentó las obras de Proclo y Herón y en su libro sobre rectas *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum quod docet duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidunt, etiam si in infinitum protrahantur: et quanto longius producuntur, tanto sibiinvicem propiores euadant* (1586), concibió el aparato (Figura 2.11) para el trazado de cónicas que con tanto ahínco trataron de construir los matemáticos árabes ([43] y [60] pag. 153).

Las traducciones de Francesco Maurolico (1494 - 1575) de textos griegos, contribuyeron a la investigación en la construcción de mecanismos para dibujar cónicas. Su trabajo inspiró al astrónomo Christoph Scheiner (1573 - 1650) - al que se le atribuye el invento del pantógrafo (Figura 2.12), mecanismo articulado basado en las propiedades de los paralelogramos - para construir un conicógrafo (Figura 2.13) mejorando el de Barocius. Un alumno de Scheiner, Georg Schönberger, describe el instrumento en su obra *Exegetis fundamentorum gnomiorum* Ingolstadt (1614) y explica las posiciones que debe adoptar el mecanismo para trazar la elipse, hipérbola y parábola y

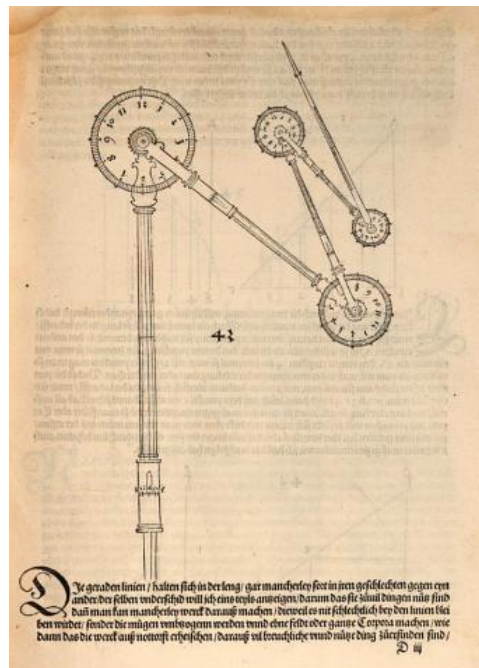


Figura 2.9: Aparato diseñado por Durero para trazar óvalos y cicloides
 Fuente: [38]

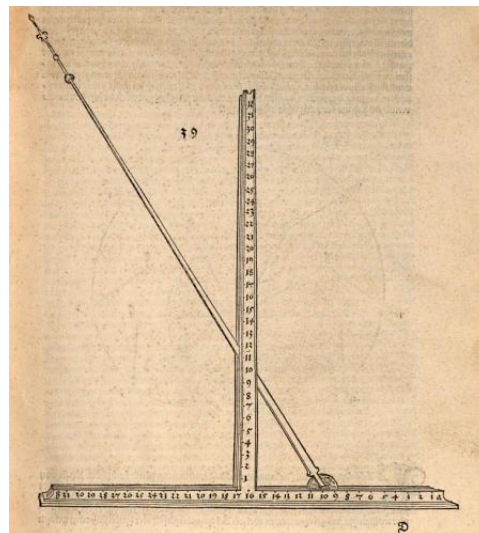


Figura 2.10: Aparato diseñado por Durero para trazar la conchoide de Nico-
 medes

Fuente: [38]

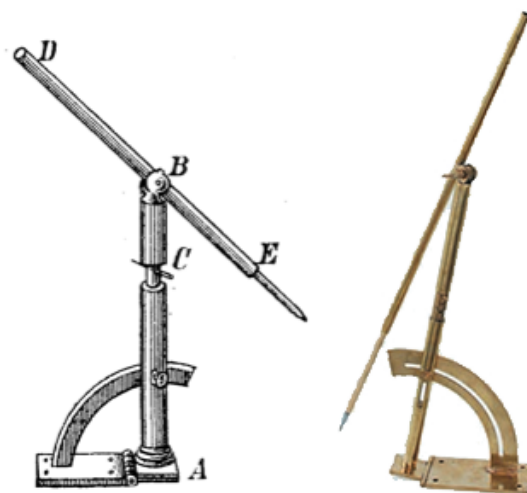


Figura 2.11: Conicógrafo de Barocius

Fuentes: [39] y [96]

poderlo aplicar en la construcción de relojes de sol.

Por último, citar a Guido Ubaldo del Monte (1545 - 1607) - protector de Galileo - y sus instrumentos: uno para el trazado de hipérbolas (Figura 2.14 izquierda) donde los puntos a y b son los focos, las barras al y bm están graduadas y el trazado se hace punto a punto y un elipsógrafo (Figura 2.14 derecha) que replica el de Proclo-Leonardo [73].

2.3. La Geometría de Descartes

En nuestro recorrido histórico sobre mecanismos articulados, llegamos al siglo XVII donde una figura prevalece sobre las demás: René Descartes (1596 - 1650). A principios de este siglo era posible representar una gran variedad de conceptos aritméticos y relaciones gracias al recién nacido lenguaje algebraico. Cuestiones acerca de formas apropiadas de representación dominaron la actividad intelectual de este siglo, no solo en Ciencia y Matemáticas sino también en religión, política, leyes y discusiones filosóficas. Comentar en este sentido que la *Geometría* de Descartes fue originalmente publicado como apéndice a su obra filosófica *El discurso del método*.

Descartes es señalado como el padre de la geometría analítica pero no hay en la *Geometría* gráfica de ecuación alguna. Las curvas eran construidas por acciones geométricas la mayor parte de las cuales eran representadas mediante instrumentos mecánicos. Una vez dibujadas las curvas, Descartes introducía el sistema de coordenadas para analizar el proceso de construcción de la curva y obtener una ecuación que representara dicha curva. Así, las ecuaciones no creaban las curvas: éstas generaban ecuaciones. Lo que

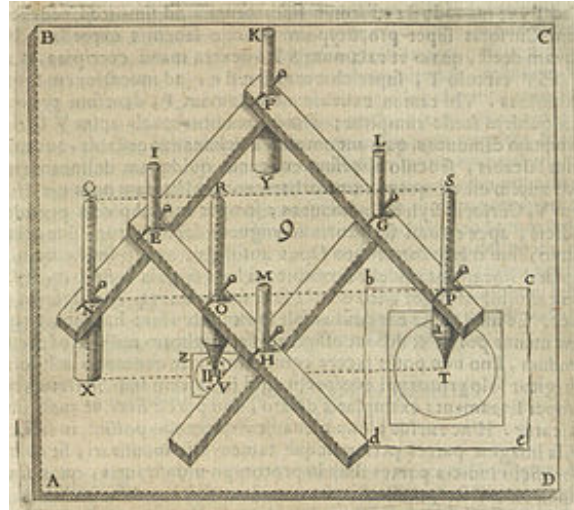


Figura 2.12: Pantógrafo de Christoph Scheiner

Fuente: http://redi.imss.fi.it/invenzioni/index.php/File:920801_00045.jpg

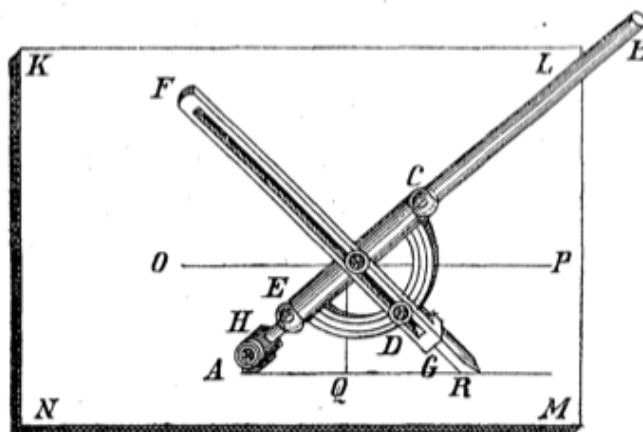


Figura 2.13: Conicógrafo de Christoph Scheiner

Fuente: [39]

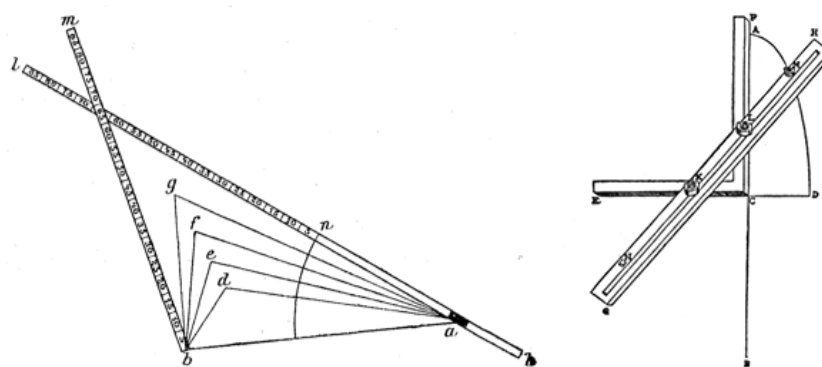


Figura 2.14: Hiperbológrafo y elipsógrafo de Guido Ubaldo del Monte
Fuente: [39]

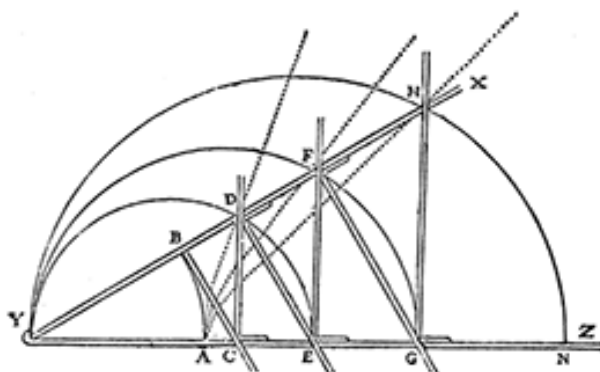


Figura 2.15: Mesolabio diseñado por Descartes
Fuente: [34]

hizo Descartes fue usar las ecuaciones para realizar una clasificación de las curvas [67].

Durante el siglo XVII se produjo un cambio de rumbo desde la orientación geométrica clásica griega vigente en el Renacimiento hacia una visión filosófica romana mucho más pragmática. En esta época, una clase de Geometría trataría sobre fortificaciones, máquinas de asedio, canales, sistemas de riego o mecanismos elevadores. La *Geometría* no habla de construcciones estáticas ni de pruebas axiomáticas sino de movimientos mecánicos y su posible representación mediante ecuaciones algebraicas [33]. Se citan muchos problemas clásicos transformados en problemas de *locus* (trayectorias producidas por movimientos continuos) gracias al uso de una gran variedad de movimientos y mecanismos que iban más allá de las construcciones clásicas con regla y compás. Descartes, tras leer a Pappus, aprendió que los antiguos geómetras griegos consideraron tres clases de problemas en función de la construcción

usada para su resolución: las construcciones con regla y compás se llamaron *planas* mientras que las que incluían secciones cónicas o construcción de dos medias proporcionales se llamaron *sólidas*. Las construcciones incluidas en estas dos clases fueron consideradas puramente geométricas mientras que las de la tercera que incluía curvas que sólo se podían construir con algún ingenio mecánico, fueron excluidas de la Geometría. Descartes pensó en construir una Geometría que incluyera todas esas curvas construidas mediante mecanismos articulados, es decir, instrumentos hechos con barras articuladas ([34], pp. 40 - 43). Supuso que ésta clase de curvas constituía la de las curvas algebraicas pero no lo demostró.

El primer mecanismo que aparece en la *Geometría* (Libro II) es el de la Figura 2.15, conocido como *mesolabio*, a sazón de un comentario sobre el rechazo de los antiguos geómetras griegos a curvas más complejas que las cónicas cuando se encontraron con curvas como la espiral, la cuadratriz, la conoide y la cisoide. El mecanismo consta de dos barras YZ e YX que se articulan en Y . El punto B está fijo pero todos los demás son móviles manteniéndose únicamente la ortogonalidad de las barras transversales bien a YZ bien a YX . El aparato tiene una doble finalidad:

1. Los triángulos ABC , ACD , ADE , AEF , AFG y AGH son semejantes por lo que tenemos

$$\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \frac{EF}{FG} = \frac{FG}{GH}$$

Es decir, este aparato permite calcular raíces cúbicas por lo que se puede usar para la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

2. El punto B describe una circunferencia pero los puntos D , F y H describen curvas cada vez más complicadas. Si llamamos θ al ángulo \widehat{ZYX} y $a = \overline{YB}$, la ecuación en polares de la curva descrita por D es:

$$\overline{YD} = a + \overline{BD} = a + \overline{BC}\tan\theta = a + a \cdot \tan^2\theta$$

Considerando el punto Y como origen de coordenadas, la barra YZ como eje de abscisas, la perpendicular a YZ por Y como eje de ordenadas y el punto D con coordenadas (x, y) , tenemos:

$$\begin{aligned} \tan^2\theta &= \frac{y^2}{x^2} \\ \overline{YD} &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Como $\overline{YD} = a \cdot (1 + \tan^2\theta)$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)$$

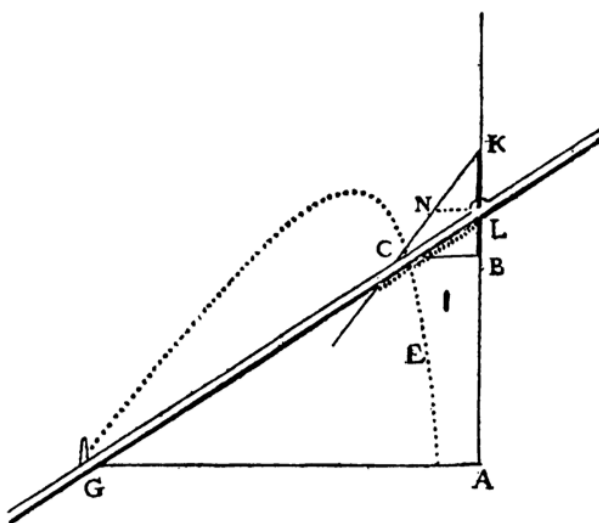


Figura 2.16: Hiperbológrafo diseñado por Descartes

Fuente: [34]

de donde se obtiene la curva cuártica:

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2)$$

muy parecida a la cuadratriz.

El segundo de los mecanismos que aparece en la *Geometria* es un hiperbológrafo (Figura 2.16) descrito por el propio Descartes: *Sea la curva EC descrita por la intersección de la barra GL con la figura rectilínea NKL cuyo lado KN es generado indefinidamente en dirección a C y que, movido en el mismo plano de manera que su diámetro KL coincide siempre con parte de la línea AB, proporciona a la barra GL un movimiento giratorio alrededor de G (la barra está unida a la figura NKL en L). Si quiero encontrar a que clase pertenece esta curva, elijo una línea recta, como AB, y en ella elijo un punto A por el que empezar la investigación. Digo 'escojo esto y esto' porque somos libres de elegir los que queramos para hacer la ecuación los más corta y simple posible y no importa qué recta escoja en vez de la AB ya que la curva será siempre de la misma clase como es fácilmente demostrable.*

Así, Descartes asegura que el grado de la ecuación que describe la curva es independiente del sistema de coordenadas elegido. Para encontrar la ecuación que describe esa curva, procede de la siguiente forma: introduce las variables $AB = y$, $BC = x$ y las constantes $GA = a$, $KL = b$ y $NL = c$. Como los triángulos KLN y KBC son semejantes, tenemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{BK} \Rightarrow BK = \frac{b}{c}x \Rightarrow BL = \frac{b}{c}x - b$$

De aquí, se tiene que:

$$AL = y + BL = y + \frac{b}{c}x - b$$

Como los triángulos LBC y LAG son semejantes:

$$\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{x}{\frac{b}{c}x - b} = \frac{a}{y + \frac{b}{c}x - b} \Leftrightarrow x \left(y + \frac{b}{c}x - b \right) = a \left(\frac{b}{c}x - b \right)$$

Entonces:

$$xy + \frac{b}{c}x^2 - bx = \frac{ab}{c}x - ab \Leftrightarrow x^2 = cx - \frac{c}{b}xy + ax - ac$$

Descartes dejó así la ecuación ya que quería enfatizar que era de segundo grado concluyendo que era una hipérbola: *comme en effect elle n'est autre qu'une Hyperbole* ([34], pág. 54).

Vemos entonces que las curvas se generan a partir de mecanismos articulados. El hiperbológrafo descrito sólo es el comienzo de un método descrito por Descartes donde las construcciones para dibujar curvas pueden ser iteradas progresivamente para generar progresivamente curvas de mayor y mayor grado simplemente cambiando el triángulo KLN por cualquier curva construida previamente [32]. Así, Descartes clasificó las curvas de acuerdo a pares de grados algebraicos; por ejemplo, las rectas y las cónicas constituían la primera clase (usó el término *género*), las de tercer y cuarto grado la segunda clase, etc. Esta clasificación es completamente natural cuando uno está trabajando con mecanismos articulados y trayectorias (*locus*). Con cada iteración de mecanismos, el grado de las curvas aumenta en dos con algunos casos especiales donde aparecen curvas de grado impar. Se abre así un camino para generar curvas de cualquier grado de forma mecánica.

Destaca entonces la figura del holandés Franz van Schooten el joven (1615 - 1668) el cual en su tratado *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* publicado en 1675, presenta seis mecanismos para dibujar cónicas. Van Schooten tradujo al latín y comentó la *Geometría* de Descartes dándola a conocer a toda la comunidad matemática.

El primer mecanismo (Figura 2.17) es un elipsógrafo. Aunque aparentemente distinto al de Proclo - Leonardo (Figura 2.6), está basado en el mismo principio. Si tomamos dos barras de la misma longitud OP y PQ articuladas en P y sujetas por O a una barra fija por la que se desliza Q , cualquier punto

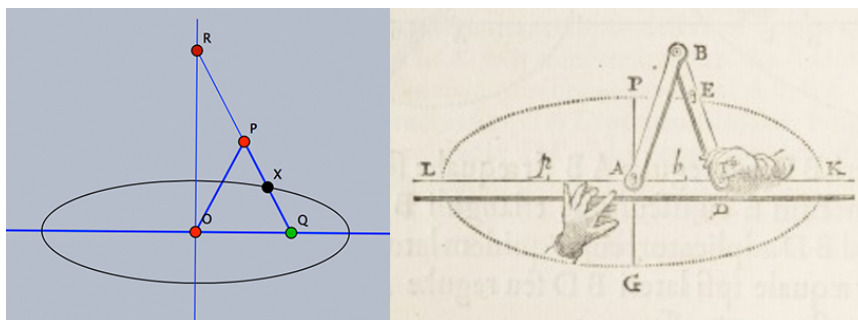


Figura 2.17: Elipsógrafo de van Schooten basado en el mismo principio que el de Proclo-Leonardo

Fuentes: elaboración propia y [108]

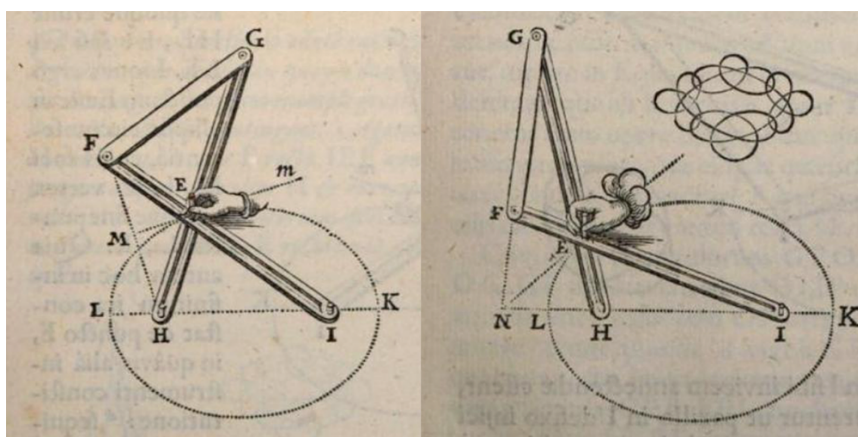


Figura 2.18: Elipsógrafo de van Schooten mediante un contraparalelogramo articulado

Fuente: [108]

X de la barra PQ , diferente de sus extremos, describe una elipse. Si situamos una barra perpendicular a OQ en O y añadimos otra barra PR idéntica a la PQ a partir de P , aparece el elipsógrafo de Proclo, es decir, la barra de longitud fija QR que se apoya en dos barras fijas.

Además, Van Schooten propone otro elipsógrafo (Figura 2.18) en el que se han incluido dos imágenes para dar una idea del movimiento del mismo. El mecanismo está compuesto por un contraparalelogramo articulado formado por tres barras HG , IF y FG cumpliéndose que las barras HG y IF son de igual longitud y la distancia entre los vértices H e I es igual a la medida de la barra FG . Los vértices H e I son fijos. Así, el punto de intersección E de las barras HG e IF traza una elipse de focos H e I cuando la barra HG gira con centro el vértice H ya que el punto E es equidistante de H y F a la vez

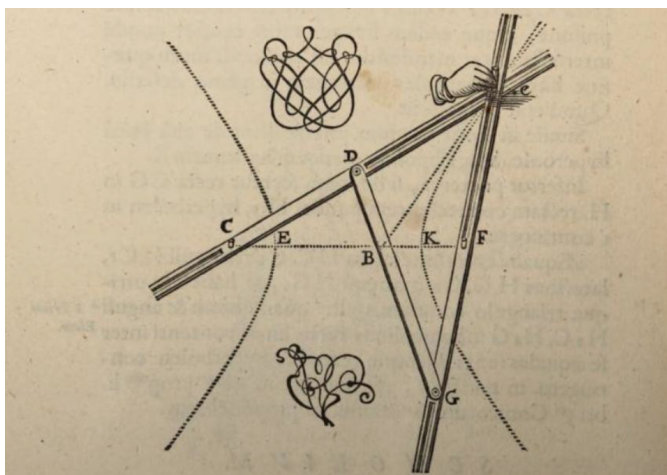


Figura 2.19: Hiperbológrafo de van Schooten basado ya en la definición habitual de hipérbola

Fuente: [108]

que equidista de I y G (los triángulos HEI y FEG son siempre congruentes en cualquier posición del mecanismo). De este modo, $\overline{HE} + \overline{IE} = \overline{HG} = \overline{IF}$ por lo que la suma de distancias de E a los dos focos es constante.

Cabe destacar que el mecanismo permite obtener la tangente a la elipse trazada en cualquier punto de la misma. Los dos dibujos de la Figura 2.17 nos dan dos métodos. A la izquierda, la tangente a la elipse en el punto E es la recta que pasa por E y por M , el punto medio del segmento FH . A la derecha, vemos que la tangente es la recta que pasa por E y por N siendo éste último punto el de corte de las rectas que pasan por F y G y por H e I .

Otro mecanismo es un hiperbológrafo que ya está basado en la definición habitual de hipérbola como lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante. En la Figura 2.19 los puntos C y F son fijos. La distancia \overline{CF} coincide con \overline{DG} y $\overline{CD} = \overline{FG}$. Si llamamos X al punto correspondiente a la mano, es decir, al que traza la curva obtenido como intersección de las rectas que pasan por C y D y por G y F , entonces $\overline{XD} = \overline{XF}$. Con estas medidas y disposición, el movimiento del mecanismo se obtiene al girar el punto D alrededor del punto C y se cumple que:

$$\overline{XC} - \overline{XF} = \overline{XC} - \overline{XD} = \overline{CD}$$

por lo que, al ser constante la diferencia de distancias de X a los focos C y F , el punto X traza una hipérbola.

Van Schooten construyó también tres tipos de compases deslizantes basados en el siguiente resultado (Figura 2.20):

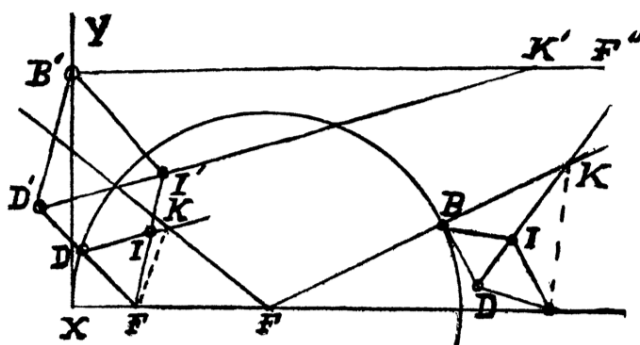


Figura 2.20: Rombo articulado para trazar secciones cónicas mediante un movimiento continuo

Fuente: [88]

Si un vértice B de un rombo articulado se mueve en una circunferencia de centro F' mientras que el vértice opuesto está fijo, la trayectoria del punto K , intersección entre la diagonal de los otros dos vértices D e I del rombo y la recta $F'B$, es una cónica.

Sea $BIDF$ el rombo articulado con el vértice B girando alrededor del punto F' . El vértice opuesto F está fijo. Sea K el punto de intersección de la recta $F'B$ y la diagonal DI del rombo.

A la izquierda de la Figura 2.20:

$$FK + KF' = BK + KF' = BF' = r$$

siendo r constante igual al radio de la circunferencia por la que se mueve B por lo que la trayectoria del punto K es una elipse de focos F y F' .

A la derecha de la Figura 2.20:

$$F'K - FK' = F'K + BK = BF' = r$$

siendo r constante igual al radio de la circunferencia por la que se mueve B por lo que la trayectoria del punto K es una hipérbola de focos F y F' .

Si suponemos que el radio $r = BF'$ de la circunferencia es infinito, entonces dicha circunferencia corresponde a la recta XY perpendicular al diámetro XF , BF corresponde a la recta $B'F''$ y la diagonal $D'I'$ la corta en K' . Así:

$$B'K' = FK'$$

por lo que la trayectoria del punto K' es una parábola de foco F y directriz XY .

En la Figura 2.21 se pueden ver las ilustraciones de los conicógrafos de van Schooten obtenidos a partir del resultado anterior.

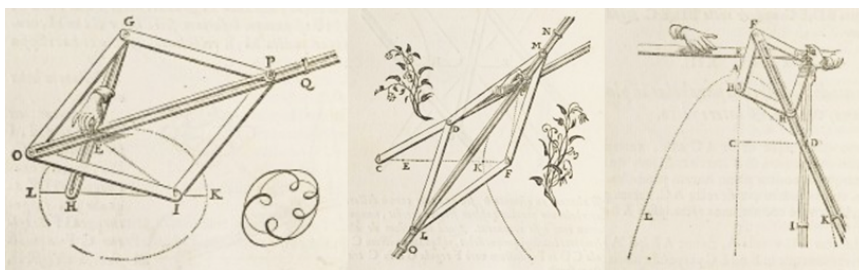


Figura 2.21: Compases deslizantes (conicógrafos) de van Schooten
Fuente: [108]

El estudio más completo y sistemático sobre curvas cónicas lo realiza Johann de Witt (1625 - 1672), jurista y matemático holandés, íntimo de van Schooten. En su *Elementa Curvarum Linearum* [30], publicado originalmente como apéndice a la segunda edición latina de van Schooten de la *Geometría* de Descartes, de Witt describe varios mecanismos para construir cónicas. Uno de ellos es el conocido elipsógrafo de barras deslizantes atribuido a Proclo - Leonardo con la demostración de que describe una elipse (Figura 2.22):

Sean dos rectas perpendiculares AA' y BB' que se cortan en O . El segmento CD es deslizante de forma que C siempre está en AA' y D en BB' . Sea P un punto de CD o extensión del mismo de forma que si D está en O , P coincide con A y si C está en O , P coincide con B . Entonces, el punto P describe una elipse de semiejes AA' y BB' . En efecto: sea $PM \perp OA$ y $DM \perp PM$. Como los triángulos PQC y PMD son semejantes, tenemos que $\frac{PQ}{PM} = \frac{PC}{PD}$. Por otro lado, $PC = OB = OB'$ y $PD = OA = OA'$. Así:

$$\frac{PQ^2}{PM^2} = \frac{OB^2}{OA^2}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$PM^2 = PD^2 - DM^2 = OA^2 - OQ^2 = (OA - OQ)(OA + OQ) = AQ \cdot A'Q$$

Entonces:

$$PQ^2 = \frac{OB^2}{OA^2} AQ \cdot A'Q$$

que es la ecuación de una elipse si, en notación moderna, AA' y BB' son los ejes x e y ya que:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a-x)(a+x) = \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Además, de Witt demuestra que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.

Esta forma de ver las curvas como resultado de movimientos mecánicos también puede verse en trabajos de Roberval (1602 -1675), Pascal (1623

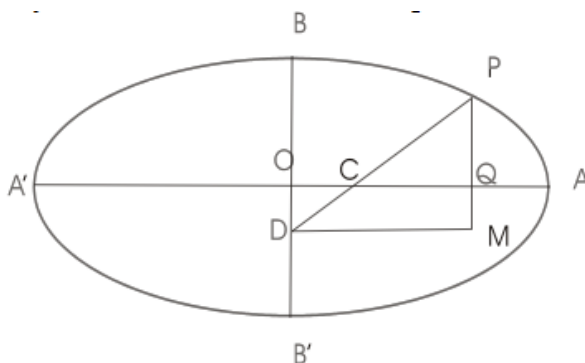


Figura 2.22: Demostración de De Witt del elipsógrafo deslizante
Fuente: [106]

- 1662) y Leibniz (1646 - 1716). Los mecanismos articulados para dibujar curvas jugaron un papel fundamental en la creación de nuevos lenguajes simbólicos (el cálculo, por ejemplo). Las tangentes, áreas y longitudes de arcos eran conocidas antes de que se escribiera ecuación algebraica alguna. A finales del siglo XVII, la necesidad de aparatos para construir curvas de grado tres y cuatro se hizo necesaria de cara a la 'algebrización' y resolución de numerosos problemas prácticos. Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) en su *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota* publicado en 1635, hizo de la resolución de tres problemas un asunto capital: la cuadratura, el trazado de tangentes y la rectificación de curvas.

Una curva captó la atención y el trabajo de numerosos matemáticos de la época: la cicloide, curva mecánica por antonomasia. Ya conocida por Hiparco en el siglo II a.C. y estudiada por Durero, su nombre y definición lo debemos a Galileo Galilei (1564 - 1643). Su alumno Evangelista Torricelli (1608 - 1647) publicó en 1644 su tratado sobre el movimiento *Opera geometrica* sobre propiedades de las cicloides al tiempo que Gilles de Roberval (1602 - 1675) que también diseñó un método muy general de dibujar tangentes, considerando una curva descrita por un punto móvil cuyo movimiento es el resultado de varios movimientos simples. Gérard Desargues (1591 - 1661) diseñó un sistema para elevar agua que fue instalado en el Château of Beaulieu en las cercanías de París fundamentado en el principio de la rueda epicicloidal ([100], pág. 143). Los mecanismos articulados para la construcción de estas curvas estaban basados en engranajes con ruedas dentadas como mostró De la Hire (1640 - 1718) en su *Traité des épicycloïdes et leus usage dans les mécaniques* publicado en 1699. También Huygens (1629 - 1695) en sus estudios sobre el péndulo, calculó la evoluta de muchas curvas, en especial, de la cicloide y las cónicas.

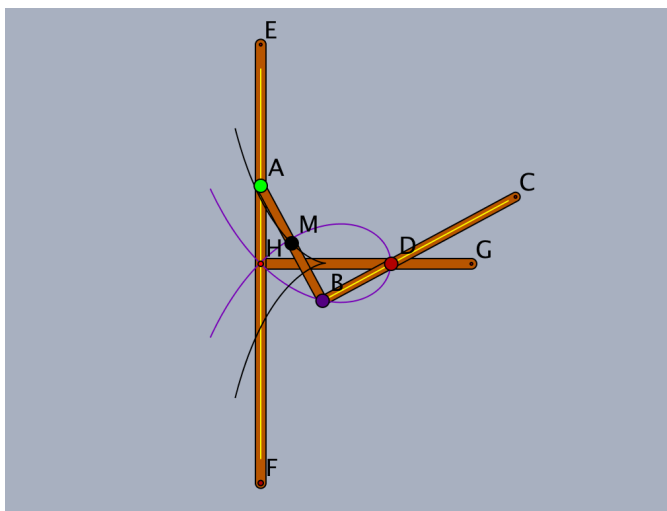


Figura 2.23: Mecanismo de Newton para la construcción de la cisoide y estrofoide

Fuente: elaboración propia

2.4. Newton y la generalización de las construcciones

En los trabajos matemáticos de Isaac Newton (1642 - 1727) hay referencias a mecanismos que dibujan curvas. En su *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* describe setenta y dos tipos de curvas de tercer grado y las clasifica en 5 tipos ([12] y [100], pág. 117). Ideó un mecanismo articulado muy sencillo (Figura 2.23) para la construcción de la cisoide y la estrofoide. El sistema de referencia $EFGH$ está formado por dos barras fijas perpendiculares EF y GH . La parte móvil está formada por dos barras fijas rígidas AB y BC que forman un ángulo recto. Este mecanismo se mueve de forma que el vértice A desliza a través del eje EF y la barra BC pasa por el punto fijo D de la barra GH siendo las medidas de los segmentos \overline{HD} y \overline{AB} iguales. Entonces, el punto B describe la estrofoide y el punto medio M de la barra AB describe la cisoide.

La prueba la obtenemos de la Figura 2.24:

- Para la curva trazada por Q (parte izquierda de la Figura 2.24), tomando $\overline{AO} = \overline{PQ} = 1$ y siendo (x, y) las coordenadas del punto Q , tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin\theta \\ y = (1-x)\tan\theta \end{array} \right\} \Rightarrow y = (1-x) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y^2(1+x) = x^2(1-x)$$

y la curva es la estrofoide.

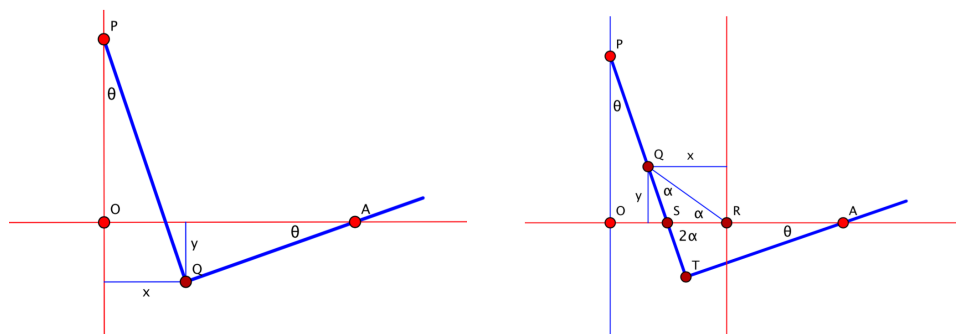


Figura 2.24: Cisoide, estrofoide y fundamentación del sistema articulado de Newton que las dibuja

Fuente: elaboración propia

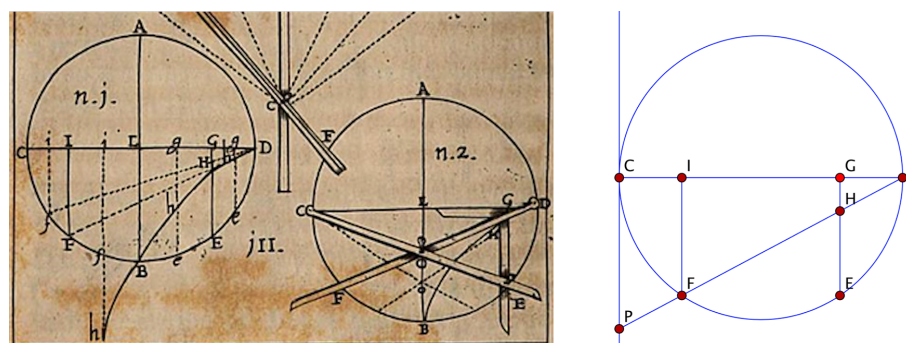


Figura 2.25: Reproducción del sistema articulado de Sturm

Fuentes: [101] y elaboración propia

- Para la curva trazada por Q (parte derecha de la Figura 2.24) consideramos que $\overline{PT} = \overline{OA} = 1$. Tenemos que los triángulos rectángulos POS y ATS son iguales por lo que $\overline{OS} = \overline{ST}$ y como Q y R son los puntos medios de los segmentos \overline{PT} y \overline{OA} , entonces $\overline{SQ} = \overline{SR}$ y, al ser el triángulo QRS isósceles, $\widehat{SQR} = \widehat{SRQ}$. Llamando α a ese ángulo, $\widehat{OSP} = 2\alpha \Rightarrow \theta = \pi/2 - 2\alpha$. Las ecuaciones de la curva así construida son:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) = \sin^2\alpha \\ y &= x \cdot \tan\alpha = x \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2(1-x) = x^3$$

y la curva es la cisoide.

En 1689 J. Ch. Sturm (1635 - 1703) en su *Mathesis Enucleata* [101] describe un sistema articulado (Figura 2.25) para dibujar la cisoide ([116],

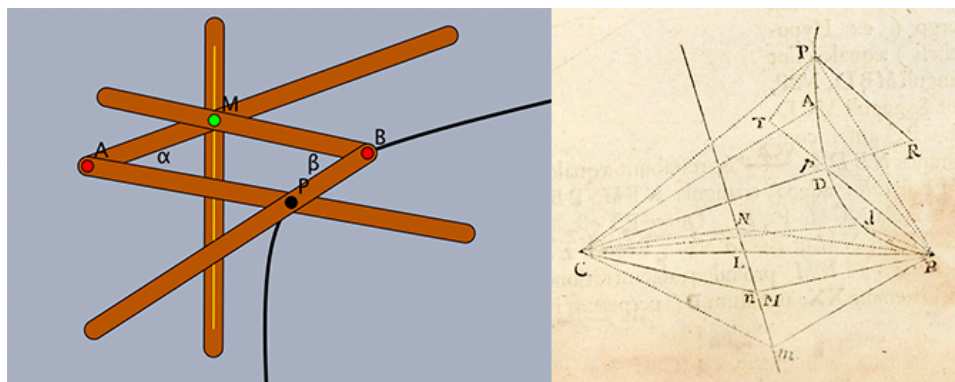


Figura 2.26: Reconstrucción de un conicógrafo de Newton, junto al dibujo original del texto de los *Principia* de 1687

Fuentes: elaboración propia y [78]

pág. 26). Manteniendo su notación, el punto H está en la cisoide de vértice D si y solo si $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{FP}$. Por proyección sobre el eje x esto sucede si y solo si $\overline{DG} = \overline{KC}$ y, por simetría de la circunferencia, esto es equivalente a $\overline{GE} = \overline{IF}$. Entonces, en el sistema articulado de Sturm, las barras DF y CE se cortan en el eje y , el punto E se mueve en la circunferencia y la barra EG se mantiene perpendicular al eje x . De este modo, el punto H de corte de las barras EG y DF describe la cisoide.

Como hemos visto en el apartado anterior, Van Schooten buscó un sistema uniforme para dibujar cónicas a través de movimientos mecánicos. Newton estudió su trabajo e ideó un sistema orgánico de generación de curvas (Figura 2.26) que resolvía el problema planteado por van Schooten:

Dos ángulos de magnitud fija (α y β) giran sobre dos pivotes (A y B) situados en sus vértices. Uno de los brazos del primer ángulo corta a uno de los brazos del segundo en un punto (D) que traza una línea recta, entonces el lugar de la intersección de los otros dos brazos (P) traza una cónica ([78] Libro I, sec V, Lema XXI).

Newton llamó *polos* a los puntos fijos A y B y *directriz* a la recta sobre la que se mueve D . Parece ser que, en varios de sus papeles, Newton afirmaba que este mecanismo, iterado adecuadamente, era capaz de dibujar todo tipo de curvas algebraicas generalizando el principio de Descartes de que, al iterar los movimientos de mecanismos, el grado de la curva se duplicaba. Para empezar a construir curvas, se usa una recta como directriz. El tipo, tamaño y posición de la cónica descrita por el punto P depende de la posición de los polos, el tamaño de los ángulos y la posición de la directriz. Por ejemplo [71], si la directriz es paralela a la recta AB :

- y $\alpha + \beta > \pi$, P describe una elipse

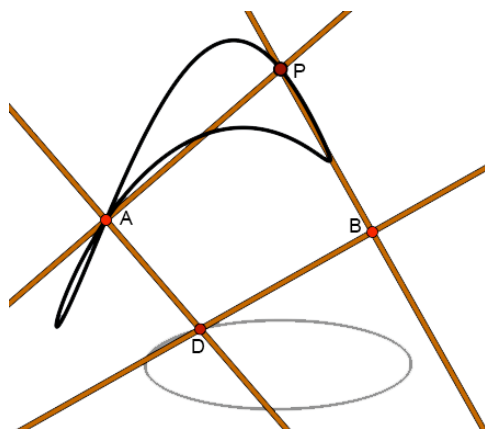


Figura 2.27: Sistema articulado de McLaurin: el transformado de una elipse es claramente una curva de grado cuatro

Fuente: elaboración propia

- y $\alpha + \beta = \pi$, P describe una parábola
- y $\alpha + \beta < \pi$, P describe una hipérbola

Las iteraciones a las que hemos hecho referencia consisten en mover el punto D sobre distintos tipos de curvas lo que permite construir curvas de cualquier grado a partir de otras anteriores.

Como consecuencia de esta construcción, se obtiene que '*por cinco puntos del plano en posición general pasa una única cónica*', resultado conocido como *Teorema de Braikenridge - McLaurin*. Tanto Colin McLaurin (1698 - 1746) como William Braikenridge (1700 - 1768) se adjudicaron este resultado.

McLaurin [68] consideró un caso particular de esta construcción orgánica de Newton donde $\alpha = \beta = \pi/2$ y demostró que si D recorre una curva de grado d , entonces P recorre una curva de grado $2d$ (Figura 2.27).

Por su parte, Braikenridge propone una construcción puramente proyectiva (Figura 2.28). Por tres puntos fijos no alineados del plano B_1 , B_2 y B_3 se hacen pasar tres rectas variables r_1 por B_1 , r_2 por B_2 y r_3 por B_3 . Sean $A_1 = r_2 \cap r_3$, $A_2 = r_1 \cap r_3$ y $A_3 = r_1 \cap r_2$ y el punto A_1 que recorre una recta fija r que no pasa por ninguno de los puntos fijos. Braikenridge demuestra que si A_2 recorre una curva de grado d , entonces A_3 describe una curva de grado $2d$ [16].

2.5. La línea recta

A finales del siglo XVIII nos encontramos en una situación de gran desarrollo en la construcción, teoría y diseño de mecanismos articulados. Un ejemplo del uso de este tipo de instrumentos, en este caso como disposi-

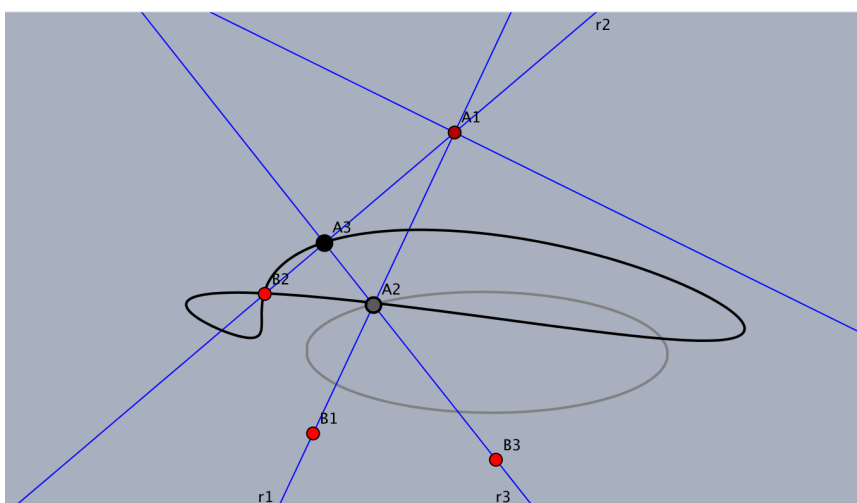


Figura 2.28: Transformación de Braikenridge
Fuente: elaboración propia

tivos para el cálculo algebraico, puede verse en la Figura 2.29, ilustración del *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* de Diderot y D'Alambert donde *el álgebra es descrita como un potente metalenguaje del arte de resolver problemas que puede ayudarse de algún dispositivo mecánico destinado a aliviar la fatiga de largas operaciones contables* ([50], pág. 72). Este *constructor universal de ecuaciones* automatiza la resolución (aproximada) de ecuaciones polinómicas de tercer grado con coeficientes reales del tipo $y = d + cx + bx^2 + ax^3$. Su funcionamiento tiene muchas similitudes con el mesolabio de Descartes (Figura 2.15). No es un mecanismo articulado para la construcción de curvas, objeto de este estudio, pero nos da una idea de la importancia de este tipo de maquinarias a finales del siglo XVIII.

Por otro lado, destacar la figura del conde Gianbattista Suardi que en su *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve* publicado en Brescia en 1752, describe una serie muy interesante de instrumentos para la construcción mecánica de curvas afrontando la cuestión de cuántas curvas distintas se pueden construir con un sólo aparato [102].

Uno de estos aparatos (Figura 2.30) llamado *Penna Geometrica* por el propio Suardi, permite dibujar un gran número de curvas generadas por movimientos rotatorios. Es similar al ilustrado por George Adams en su *Geometrical and Graphical Essays* (Londres, 1791) y consiste en un trípode de soporte en el centro del cual está sujeto un eje vertical con un brazo giratorio. A éste se le incorpora un segundo brazo móvil que lleva un puntero para dibujar la curva. A través de una serie de ruedas dentadas, los dos brazos giran de tal manera que dibujan hipo y epicicloides, elipses o espirales.

Suardi desarrolla el estudio de la naturaleza mecánica de las curvas con

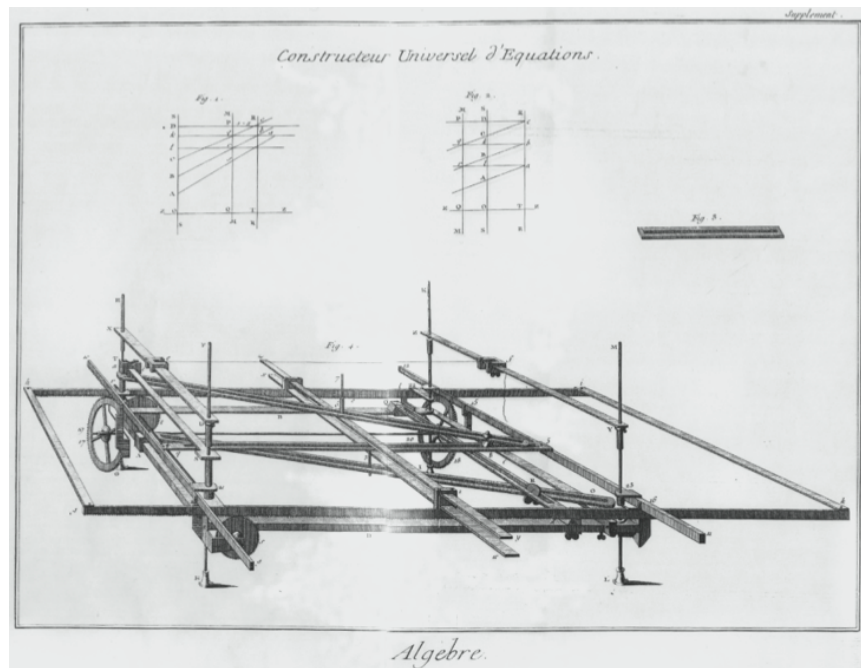


Figura 2.29: *Constructeur universel d'equations*: ilustración dedicada al Álgebra de la Enciclopedia de Diderot y D'Alambert. Paris 1751-1772

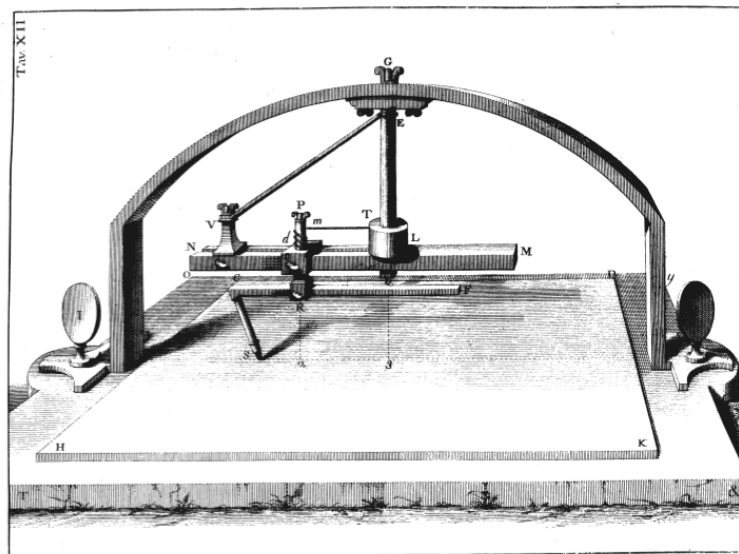


Figura 2.30: Mecanismo *Penna Geometrica* de Suardi para dibujar curvas cíclicas

Fuente: [103]

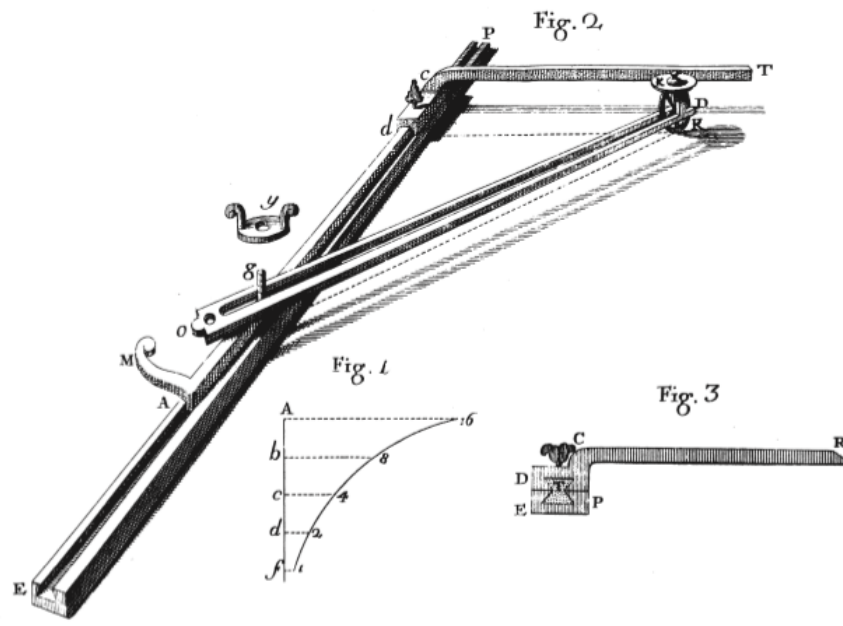


Figura 2.31: Mecanismo de Suardi para la construcción de curvas logarítmicas

Fuente: [103]

una intención predominantemente estética. En particular con respecto a las descripciones de las curvas orgánicas mecánicas, especialmente las logarítmicas (Figura 2.31), su tractriz (o trayectoria de Huygens) y su evoluta (la catenaria), curvas también vinculadas a las cuestiones relativas a la teoría de la mecánica de las curvas elásticas.

Las curvas griegas - conoide de Nicomedes, cisoide de Diocles y cuadratriz de Dinostrato - que Suardi cita al comienzo de su tratado, no son sólo curiosidades arqueológicas sino instrumentos útiles para la resolución de problemas algebraicos. Suardi pone como ejemplo su mecanismo para construir la conoide (Figura 2.32) como el primer tipo de conexión directa entre las propiedades geométricas y los vínculos mecánicos correspondientes.

Así pues, en el siglo XVIII surge una nueva disciplina relativa a mecanismos articulados y la geometría del movimiento: la Cinemática que experimenta un gran desarrollo en la creación y fabricación de máquinas bajo la presión de la necesidad. Muchas cuestiones algebraicas se aplicaron a problemas físicos. Lagrange describió el tratado de Leonard Euler (1707-1783) *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* como la “primera gran obra en la que el análisis es aplicado a la ciencia del movimiento” [106].

Tenemos entonces la posibilidad de generar mecánicamente curvas de cualquier grado. Sin embargo nos encontramos con el problema de ¿cómo

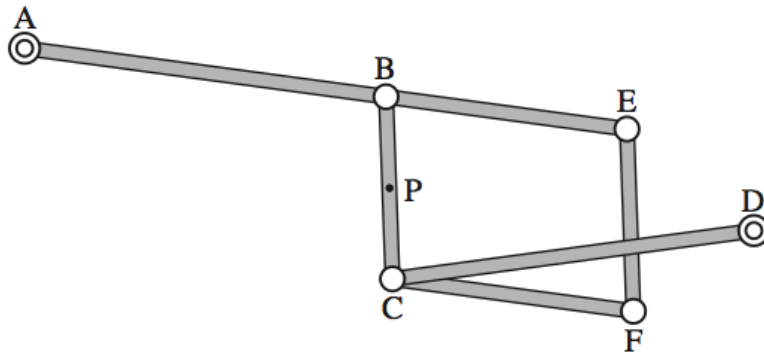


Figura 2.34: Sistema completo de movimiento paralelo de Watt
Fuente: [18]

El mecanismo de movimiento paralelo a una dirección de referencia (Figura 2.33) consiste en tres barras articuladas. Las dos de los extremos son de mayor longitud que la central. El punto medio de la barra central traza aproximadamente una línea recta en la proximidades del centro del mecanismo. En otra carta a Boulton del 11 de septiembre de 1784, Watt describe el mecanismo:

The convexities of the arches, lying in contrary directions, there is a certain point within the connecting-lever, [the movement of] which has very little sensible variation from a straight line

de donde se deduce que Watt era consciente de que su mecanismo no dibujaba una línea recta exactamente.

Watt se dio cuenta de que el sistema con las barras laterales de igual longitud podía ocupar demasiado espacio dentro de la maquinaria [18] por lo que mejoró el sistema original con el sistema completo de movimiento paralelo incluido en la patente original de 1784. En la Figura 2.34 vemos la barra principal que pivota en A pero que no termina en B sino en E . La barra CD de la misma longitud que AB , conecta con la barra de menor longitud BC cuyo punto central P es el que traza aproximadamente la línea recta. Las otras barras forman el paralelogramo $BCFE$ y el pivote F está conectado a la biela del pistón. La mejor aproximación a la línea recta se obtiene cuando las barras AB y BE tienen la misma longitud ([18], pág. 27).

Otra solución aproximada al trazado de una línea recta es atribuida a Richard Roberts (1789-1864), ingeniero de Manchester. El mecanismo (Figura 2.35) es de tres barras, dos laterales de igual longitud fijadas a dos pivotes cuya distancia es el doble de la medida de la barra central. Sujeto a la barra central tenemos un triángulo isósceles. Las medidas de los lados del triángulo coinciden con las medidas de las barras. El vértice opuesto al lado desigual de este triángulo describe aproximadamente una línea recta cuando

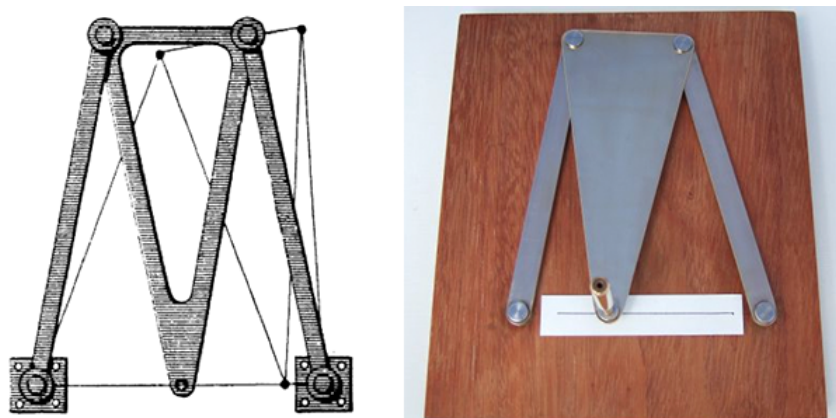


Figura 2.35: Mecanismo de Roberts para dibujar una línea recta
Fuentes: [58] y [18]

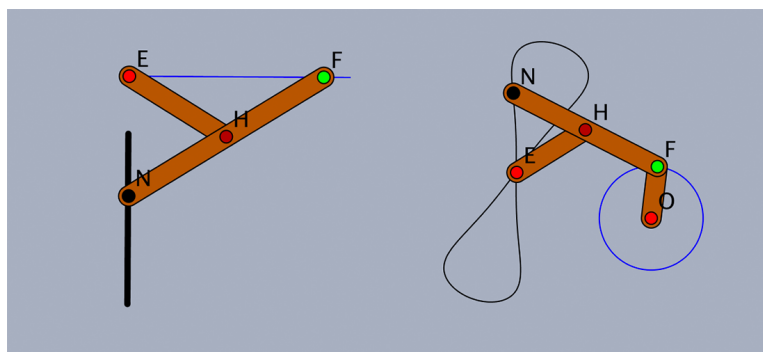


Figura 2.36: Mecanismo de Evans
Fuente: elaboración propia

se mueve entre los dos pivotes fijos. A pesar de que este mecanismo está atribuido a Roberts, causa confusión el hecho de que no aparece en ninguna de sus patentes y que puede verse implementado en una máquina de 1760 para el corte de pilotes bajo el agua [42].

Igual de simple que el mecanismo de Watt, encontramos otro mecanismo que genera un movimiento conocido por *saltamontes* atribuido (no sin muchas dudas [42]) a Oliver Evans (1765 - 1819), ingeniero norteamericano pionero en el uso de máquinas de vapor de alta presión. El sistema articulado (Figura 2.36, izquierda) $[EHNF]$ está compuesto por dos barras EH y NF articuladas en el punto medio H de NF tales que $\overline{EH} = \overline{NH} = \overline{HF}$. Entonces $\overrightarrow{HF} = -\overrightarrow{HN}$ y se verifica que:

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EN} = (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HF}) \cdot (\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{HF}) = (\overrightarrow{EH})^2 - (\overrightarrow{HF})^2 = 0$$

En consecuencia, si F se mueve en una línea recta (azul) que llega a E , N describe la recta ortogonal (negra) a ella por E .

En la derecha de la Figura 2.36, se puede ver el mismo mecanismo con otra configuración en la que el punto F realiza una trayectoria circular, trazando el punto N una aproximación a una recta en las cercanías del punto E .

El matemático ruso Pafnuty Chebyshev (1821-1894) fue el principal protagonista durante el siglo XIX en la búsqueda de un mecanismo articulado que trazase exactamente una línea recta. Después de visitar Inglaterra y Francia y observar el progreso de la mecánica aplicada en estos países, en 1853 leyó su primer texto sobre el tema y durante treinta años atacó el problema con nuevos bríos al menos una docena de veces [42]. Al parecer, llegó a pensar que era imposible construir un mecanismo que trazase exactamente una recta. Hay incluso un informe de una conversación entre el ruso y el inglés James Sylvester indicando que Chebyshev había “demostrado la inexistencia de un mecanismo de cinco barras capaz de trazar exactamente una línea recta” ([42] y [105]).

Uno de sus primeros artículos sobre el tema fue *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* de 1854 [25] donde estudia la aproximación a una función por un polinomio de grado n en un cierto intervalo. A mayor grado del polinomio, mejor aproximación. Esto le va a permitir una aproximación a una línea recta tan buena como un polinomio de grado n . Así, en el artículo *Sur un mécanisme* publicado en 1868 presenta el mecanismo de la Figura 2.37 que dibuja aproximadamente una línea recta [26].

Es un mecanismo de tres barras, las dos laterales CA y C_1A_1 de igual longitud fijadas a dos pivotes fijos C y C_1 . El punto medio de la barra AA_1 traza la aproximación a la línea recta. Chebyshev ya había demostrado que para obtener la mejor aproximación a una línea recta, las medidas de las barras debían cumplir dos condiciones ([26], pág 52 y [64], pág. 509):

- $CC_1 = \frac{1}{3}(AC + A_1C_1 + AA_1)$
- $AA_1 \geq \frac{1}{4}AC$

En este caso, si L_1 es la distancia entre los pivotes fijos, $L_2 = L_4$ la medida de las barras laterales y L_3 la medida de la barra central, una relación $L_1 : L_2 : L_3 = 2 : 2,5 : 1 = 4 : 5 : 2$ como la que presenta Kempe como ejemplo de este mecanismo ([58], pp. 10-11), cumple las condiciones y la trayectoria del punto M aproxima muy bien una línea recta.

Chebyshev demuestra que la distancia MX es casi constante.

En la Figura 2.38 puede verse una variante de este mecanismo que cuenta con la ventaja de no tener ‘barras cruzadas’ que interfieran el movimiento así como una comparativa de los dos mecanismos (en negro el original y en azul la variante) donde se puede ver que el fundamento es el mismo en los dos casos.

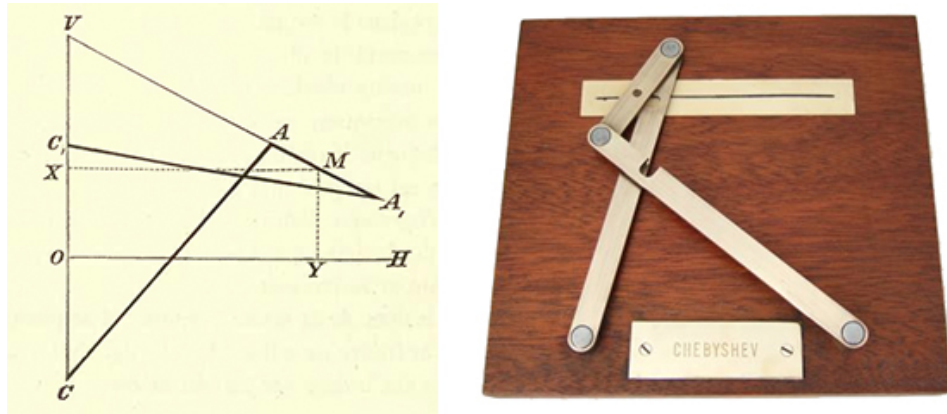


Figura 2.37: Mecanismo de Chebyshev para dibujar una línea recta
Fuentes: [26] y [18]

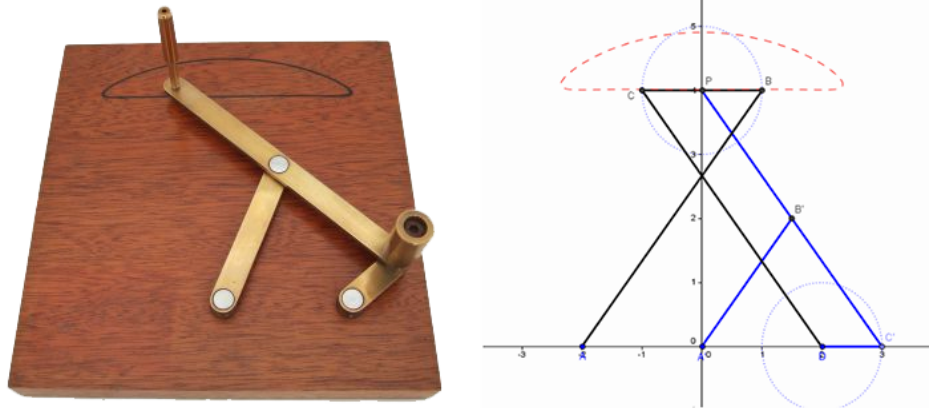


Figura 2.38: Mecanismo alternativo de Chebyshev y comparativa con el original

Fuente: [18]

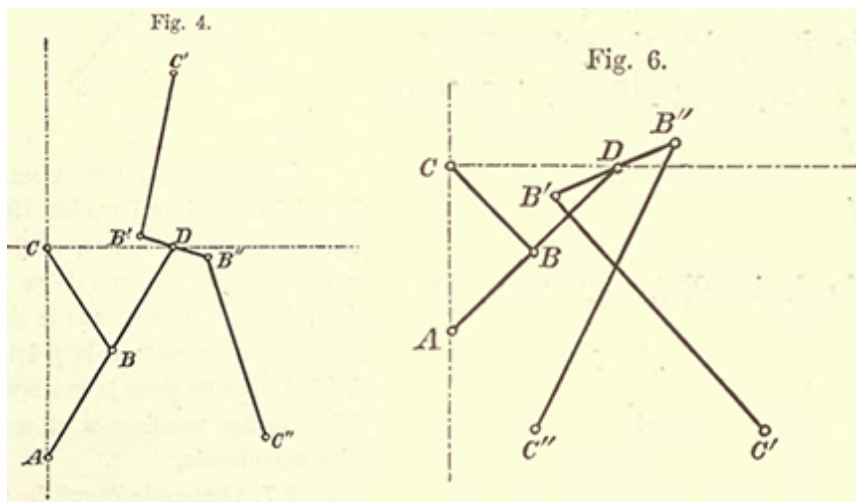


Figura 2.39: Combinación de los mecanismos de Watt-Evans y de Chevyshev-Evans

Fuente: [26]

Tratando de obtener la mejor aproximación a una línea recta, Chebyshev presenta unos resultados muy interesantes en su artículo *Sur les parallélogrammes* publicado en 1869. No se ciñe exclusivamente a mecanismos articulados de tres barras sino que estudia mecanismos articulados con un número arbitrario de barras (m), pivotes (n) y puntos fijos (v) ([26], pp. 85 - 106).

El caso $m = 1$, $v = 1$ y $n = 0$ es el de un compás que genera una ecuación de grado dos: una aproximación a la línea recta de grado dos.

El caso $m = 3$ (mecanismo de cuatro barras), $v = 2$ y $n = 2$ es el del mecanismo de Watt o el del propio Chebyshev antes mostrados.

Entonces Chebyshev se centra en el caso $m = 5$, $v = 3$ y $n = 4$ proponiendo primero una combinación de un mecanismo de Watt y uno de Evans (Figura 2.39, izquierda): el punto D del mecanismo de Watt sigue aproximadamente una línea recta y el punto A del mecanismo de Evans también con un error de 10^{-11} . Posteriormente (Figura 2.39, derecha), sustituyó el mecanismo de Watt por el suyo de barras cruzadas alcanzando desviaciones del orden de 10^{-13} .

En 1873 se exhibió en Viena un prototipo de máquina de vapor que utilizaba este último mecanismo combinado. Un visitante inglés comentó que el mecanismo, a pesar de lo ingenioso, no era muy práctico ya que no se imaginaba una circunstancia en la que tan complicado sistema de barras, con tantas articulaciones, pivotes y engranajes que lubricar y mantener tendría ventaja respecto a un sistema menos exacto pero más sólido y sencillo [42].

Todas estas soluciones aproximadas al trazado de una línea recta que hemos visto son, en general, del tipo mecanismo de Watt o de Evans, es

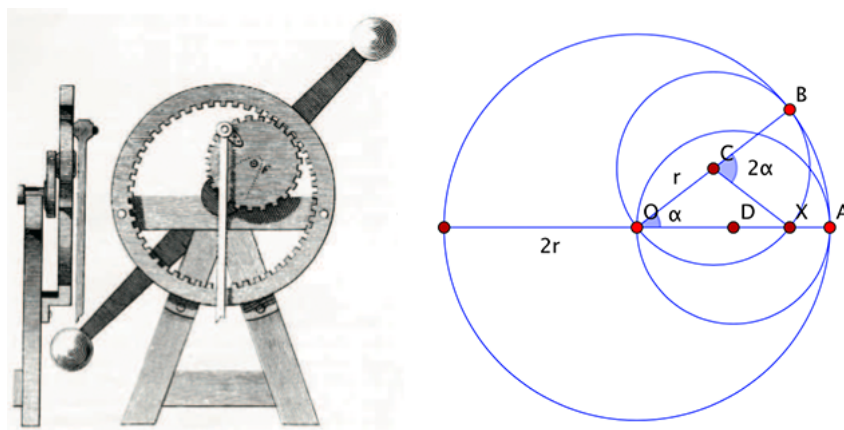


Figura 2.40: Mecanismo de White. El punto X se mueve a lo largo del diámetro OA

Fuentes: [42] y elaboración propia

decir, mecanismos articulados de cuatro barras con dos pivotes fijos y tres barras móviles. La cuarta barra se considera la que une esos dos pivotes fijos.

En 1800 encontramos un mecanismo para trazar líneas rectas exactamente aplicando las propiedades de la hipocicloide (Figura 2.40) a cargo del ingeniero inglés James White. Como vemos, es una solución con un concepto totalmente distinto a lo anterior. Si una rueda de radio r gira sin deslizar dentro de una circunferencia de radio $2r$, el punto de la rueda que al iniciar el movimiento está en contacto con la circunferencia exterior se mueve en línea recta. Al ser el radio de la circunferencia exterior doble del de la interior, la longitud del arco AB que coincide con la del arco XB corresponde a un ángulo α y la del XB a un ángulo 2α . Entonces:

$$\vec{OX} = \vec{OC} + \vec{CX} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) + (r\cos\alpha, -r\sin\alpha) = (2r\cos\alpha, 0)$$

por lo que el punto X se mueve a lo largo del eje horizontal trazando una línea recta. White recibió de manos de Napoleón Bonaparte una medalla por su invento cuando se exhibió en una exposición industrial en París en 1801 [35].

Otro mecanismo (Figura 2.41) que describe una línea recta exactamente fue descrito por Pierre Frederic Sarrus (1798–1861) en 1853 y difiere totalmente de los anteriores en el sentido de que sus partes se mueven en el espacio de dimensión tres en vez de en dimensión dos como los sistemas articulados planos. El sistema está compuesto por dos triángulos isósceles rígidos de lados paralelos \overline{ABC} y $\overline{A'B'C'}$ unidos por dos pares de cuadrados rígidos

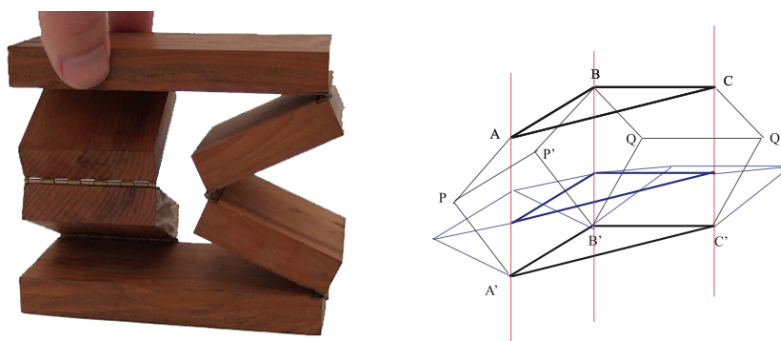


Figura 2.41: Réplica del mecanismo de Sarrus y fundamentación teórica
Fuentes: [18] y [9]

$[ABP'P]$, $[A'B'P'P]$ y $[BCQ'Q]$, $[B'C'Q'Q]$. El sistema está articulado por medio de bisagras en AB , PP' , $A'B'$, BC , QQ' y $B'C'$ por lo que:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{P'B'}, \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CQ'}, \overrightarrow{QB'} = \overrightarrow{Q'C'}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'C'}$$

Además, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PP'}$ es ortogonal a \overrightarrow{AP} y a $\overrightarrow{P'A'}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QQ'}$ es ortogonal a \overrightarrow{BQ} y a $\overrightarrow{QB'}$ por lo que:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{P'B'} = \overrightarrow{BB'}$$

y ambos son ortogonales a \overrightarrow{AB} .

Por el mismo razonamiento, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{BC}$

Luego $\overrightarrow{AA'}$ siempre es ortogonal al plano ABC por lo que A se desplaza en línea recta.

Tenemos entonces sistemas articulados que aproximan muy bien la línea recta y sistemas que la trazan exactamente pero que no son prácticos de implementar.

El primer sistema articulado capaz de dibujar en el plano exactamente una línea recta se debe a Charles-Nicolas Peaucellier (1832 - 1913), capitán de ingenieros del ejército francés y antiguo alumno de la Ecole Polytechnique. A los 32 años, en 1864, escribe una carta al editor de *Nouvelles Annales de mathématiques* (ser. 2, vol. 3, pp. 414-415) de París en la que describe un *compas composé*, el mecanismo articulado en cuestión, y propone construir uno que trace rectas, circunferencias de cualquier radio por grande que sea además de curvas cónicas. Sin embargo, no publica su modelo hasta 1873 (*Nouvelles Annales de mathématiques* ser. 2, vol. 12) por lo que algunos autores atribuyen su invención a Yom Tov Lipman Lipkin (1843 - 1875) que

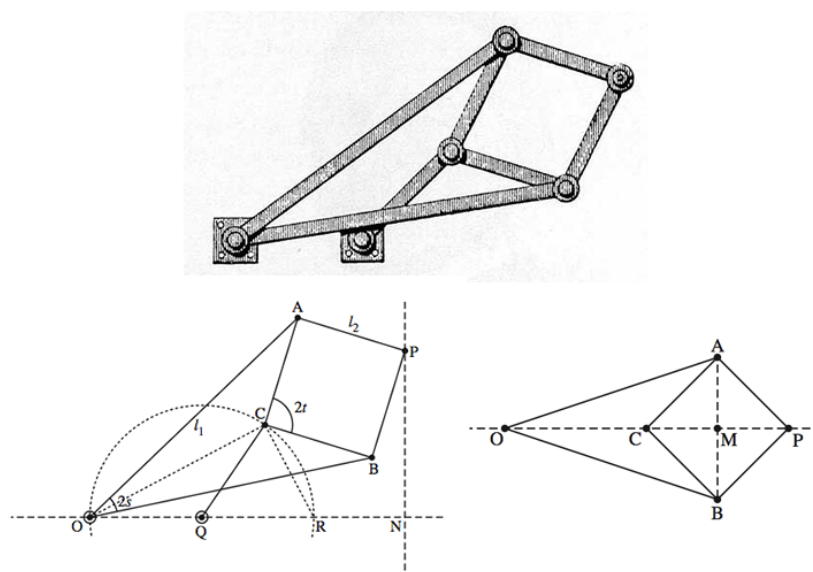


Figura 2.42: Mecanismo de Peaucellier

Fuentes: [58] y [18]

lo presentó antes. Ambos obtuvieron premios en su tiempo por su invento. Además, en su publicación Peaucellier conjeturó que si un mecanismo articulado generaba curvas que podían ser expresadas algebraicamente, cada curva algebraica debería ser generada por un sistema articulado [85], intuyendo el resultado posterior de Kempe.

El mecanismo de Peaucellier (Figura 2.42) consta de siete barras articuladas y transforma el movimiento circular de la barra QC en uno rectilíneo descrito por el punto P . La medidas son:

$$OA = OB = l_1$$

$$AP = BP = AC = BC = l_2$$

Si excluimos la barra QC (Figura 2.42, abajo a la derecha), podemos considerar el mecanismo compuesto por una “cometa” $OAPB$ y una “flecha” $OACB$. Por el teorema de Pitágoras:

$$\left. \begin{array}{l} (OM)^2 + (AM)^2 = l_1^2 \\ (PM)^2 + (AM)^2 = l_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (OM)^2 - (PM)^2 = l_1^2 - l_2^2$$

Entonces

$$(OM - PM)(OM + PM) = k^2$$

donde k es una constante ($k^2 = l_1^2 - l_2^2$). Ahora, como $OM - PM = OC$ y $OM + PM = OP$, tenemos que:

$$OC \cdot OP = k^2$$

Es decir, C y P son inversos respecto a la inversión de centro O y razón k.

Incluyendo ahora la barra QC (Figura 2.42 abajo a la izquierda) cumpliendo que $OQ = QC$ y teniendo fijos los puntos O y Q , el punto C describe una circunferencia de centro Q por lo que el triángulo OCR es rectángulo. Sea N la intersección de la perpendicular desde P a OQ con OQ . Los triángulos OCR y ONP son semejantes por lo que:

$$\frac{ON}{OP} = \frac{OC}{OR} \Rightarrow ON = \frac{OC \cdot OP}{OR} = \frac{k^2}{2OQ} = \text{constante}$$

por lo que, al ser la distancia ON constante, el movimiento de P es una línea recta perpendicular a OQ .

Geoméricamente, la inversión transforma las circunferencias que pasan por el polo O en rectas perpendiculares al diámetro de la circunferencia.

El mecanismo de Peaucellier suele presentarse de esta forma pero se puede “compactar” dando lugar a la variante de la Figura 2.43, modelo del *Conservatoire National des Arts et Métiers* de París. La geometría no varía y según James Joseph Sylvester (1814 - 1897), matemático británico fundador del *American Journal of Mathematics*, en esta forma se utilizó el inversor de Peaucellier para guiar los pistones del sistema de ventilación de las casas del Parlamento británico. Sylvester se entusiasmó tanto con el aparato que llegó a afirmar [105]:

The perfect parallel motion of Peaucellier looks so simple, and moves so easily that people who see it at work almost universally express astonishment that it waited so long to be discovered. But I wonders the more that it was ever found out, and can see no reason why it should have been discovered for a hundred years to come.

En los últimos años del XIX se inventan numerosas mejoras y variantes del inversor, algunas tan complejas como un sistema articulado de Sylvester compuesto por 78 barras y capaz de trazar el segmento que une dos puntos dados [42].

En el sentido opuesto, tratando de simplificar el mecanismo, tenemos el ideado por Harry Hart en 1874 que también traza exactamente una línea recta (Figura 4.14). Si el mecanismo de Peaucellier tenía siete barras, éste tiene solamente cinco. Básicamente consiste en un antiparalelogramo $GHIJ$ de cuatro barras iguales dos a dos $GJ = HI$ y $GH = IJ$. En la barra GH , el punto O es fijo. Esto asegura que las líneas (imaginarias) GI y HJ permanezcan paralelas durante el movimiento del mecanismo. Consideramos la línea paralela a HJ por O y sus puntos de corte con el mecanismo C , P y O' . Vamos a ver que estos puntos se comportan de forma que cumplen las propiedades del mecanismo de Peaucellier.

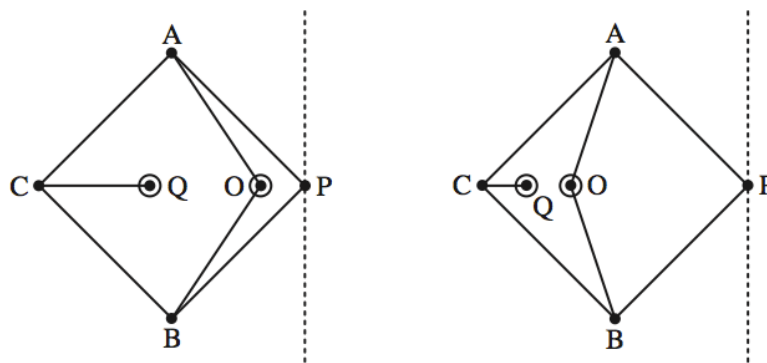
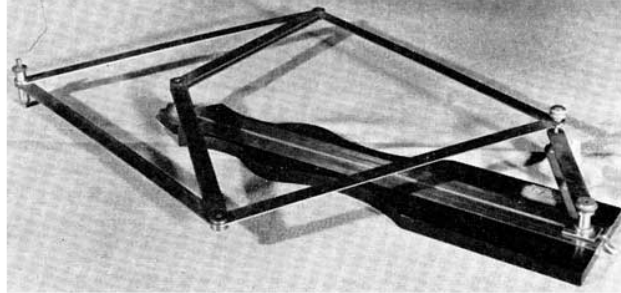


Figura 2.43: Variante del mecanismo de Peaucellier
Fuentes: [42] y [18]

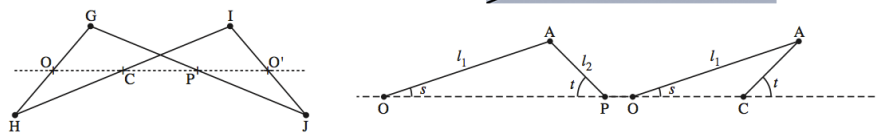
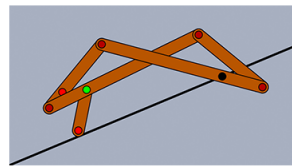
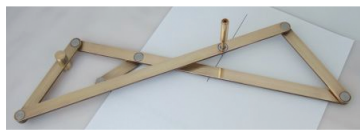


Figura 2.44: Mecanismo de Hart y fundamentación teórica
Fuentes: [18] y elaboración propia

El diagrama de la Figura 4.14 abajo a la izquierda muestra el caso en que $\frac{GH}{GJ} = \frac{1}{2}$. Como los triángulos HGJ , OGP , HIJ y CIO' son semejantes, tenemos que:

$$\frac{GO}{GH} = \frac{GP}{GJ} = \frac{IC}{IH} = \frac{IO'}{IJ}$$

Cuando el mecanismo se mueve, esta propiedad se mantiene. Además OP y CO' se mantienen paralelos a HJ . Como la distancia de OP a HJ es GO/GH que es la misma que la de CO' a HJ , los cuatro puntos $OCPO'$ se mantienen alineados durante el movimiento del mecanismo por lo que se conserva una de las propiedades del mecanismo de Peaucellier. Falta ver que $OC \cdot OP$ es constante.

Una forma de hacerlo es dividir el antiparalelogramo en dos componentes (Figura 4.14, abajo a la derecha). En este diagrama tenemos a la izquierda la mitad de una “cometa” y a la derecha la mitad de una “flecha” similares a las de la Figura 2.42, abajo a la derecha. Así podemos asociar la flecha con OHC y la cometa con OGP y lo tenemos.

La otra forma es considerar que los cuatro puntos G , H , I y J están en una circunferencia. Tres puntos no alineados determinan una circunferencia por lo que el cuarto depende de estos tres. Así, considerando la circunferencia que pasa por HGI , la perpendicular a la cuerda GI pasa por el centro de esa circunferencia y, por simetría, el punto J pertenece a esa circunferencia. Aplicando un resultado conocido como Teorema de Ptolomeo [18]:

$$GJ \cdot HI = GI \cdot HJ + GH \cdot IJ$$

Por simetría:

$$GJ^2 = GI \cdot HJ + GH^2 \Rightarrow GI \cdot HJ = GJ^2 - GH^2 = k^2$$

para una constante k . Por triángulos semejantes, OC es proporcional a GI y OP es proporcional a HJ por lo que $OC \cdot OP$ es también proporcional a $GI \cdot HJ$ y, por lo tanto, constante.

A los mecanismos de Peaucellier y Hart se les suele llamar *inversores* ya que reproducen la transformación geométrica llamada inversión (Figura 2.45):

Sea S_1 una circunferencia con centro O y radio r y sea A un punto distinto de O . La inversión de A respecto a S_1 es el punto B de la recta que pasa por O y A tal que $OA \cdot OB = r^2$.

Y esta propiedad es la que usan Peaucellier y Hart para, de un modo muy ingenioso y sencillo, *invertir* un movimiento circular en uno rectilíneo.

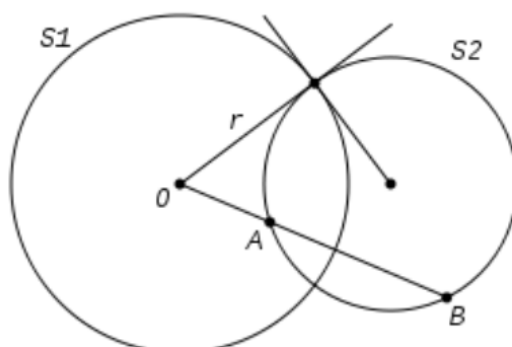


Figura 2.45: Inversión de un punto A respecto a una circunferencia S_1

Fuente:

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Planeinversion.svg>

2.6. Cerrando el círculo

Alfred Bray Kempe (1849 - 1922) publicó en 1875 un libro titulado *¿Cómo dibujar una línea recta?* [58] en el que hace un estudio sistemático de algunos tipos de sistemas articulados que acabamos de ver e introduce variantes sobre los mismos. En 1876 [57] presenta una versión preliminar de lo que hoy se conoce como el *Teorema de Universalidad de Kempe*:

Dada una curva algebraica real plana $f(x,y) = 0$ y un punto P de ella, existen un entorno de P , E_p y un sistema articulado S tal que mientras un punto de S recorre un segmento de línea recta, otro punto de S describe la intersección de la curva con E_p .

La importancia de este teorema radica en que, aunque con algunos errores leves, demuestra la conjetura de Peaucellier de que cualquier curva algebraica puede trazarse mediante un sistema articulado. Además, la potencia de este resultado se multiplica cuando se combina con el teorema de aproximación de Stone-Weierstraß que implica que cualquier función real continua o curva dentro de un intervalo compacto puede aproximarse con cualquier precisión por un polinomio o una curva algebraica.

Para construir el mecanismo que dibuja la curva $f(x,y) = 0$, Kempe en [57] describe los sistemas articulados básicos que luego combina para obtener el mecanismo: el *paralelogramo*, el *contraparalelogramo*, el *trasladador*, el *reversor*, el *multiplicador* y el *sumador*.

Mientras que un sistema articulado en forma de paralelogramo (Figura 2.46 (a)) es bien conocido, uno en forma de contraparalelogramo (Figura 2.46 (b)) puede no serlo tanto. En un contraparalelogramo, un vértice P del paralelogramo está invertido manteniéndose las medidas del paralelogramo como vimos cuando hablamos del inversor de Hart (Figura 4.14). Así,

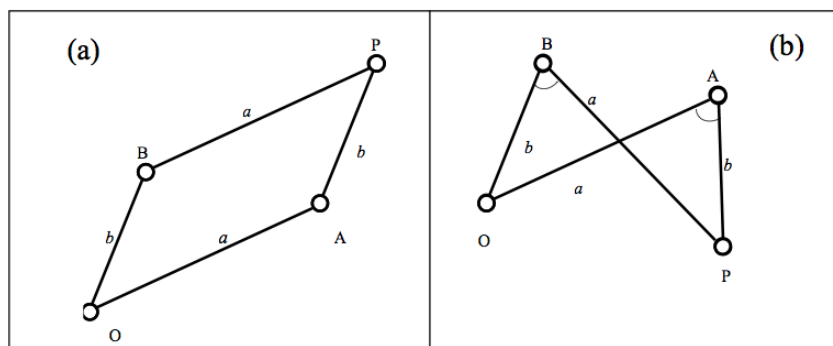


Figura 2.46: (a) paralelogramo y (b) contraparalelogramo
Fuente: [95]

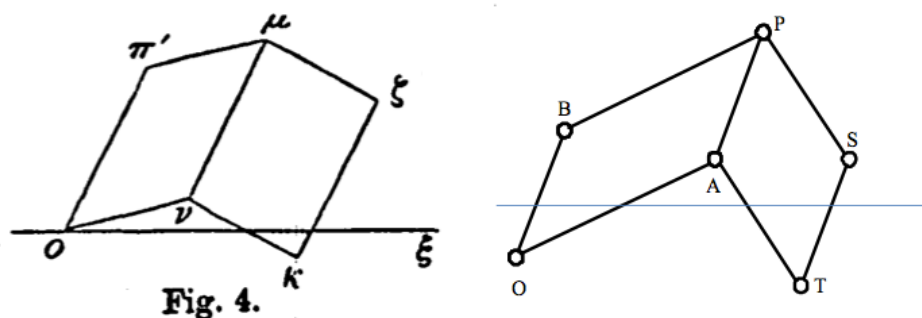


Figura 2.47: Imagen original del trasladador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado

Fuentes: [57] y [95]

los ángulos \widehat{OBP} y \widehat{OAP} son iguales. La mayoría del resto de mecanismos de Kempe son combinaciones de contraparalelogramos.

El *trasladador* (Figura 2.47) es un sistema articulado que permite trasladar vectores. Si la barra OB forma con la horizontal cierto ángulo entonces, a través de dos paralelogramos $OBPA$ y $APST$, las barras AP y ST forman el mismo ángulo con la horizontal.

El *reversor* (Figura 2.48) es un mecanismo articulado compuesto por dos contraparalelogramos. El primero es el $OBCA$ donde $|OB| = |AC|$ y $|OA| = |BC|$. En la barra BC tenemos un vértice D de forma que $|BD|$ es la tercera proporcional de $|OA|$ y $|OB|$, es decir:

$$\frac{BD}{OB} = \frac{OB}{OA} \Rightarrow |OB|^2 = |BD| \cdot |OA|$$

Así, se obtiene el segundo contraparalelogramo $OEDB$ donde $|OE| =$

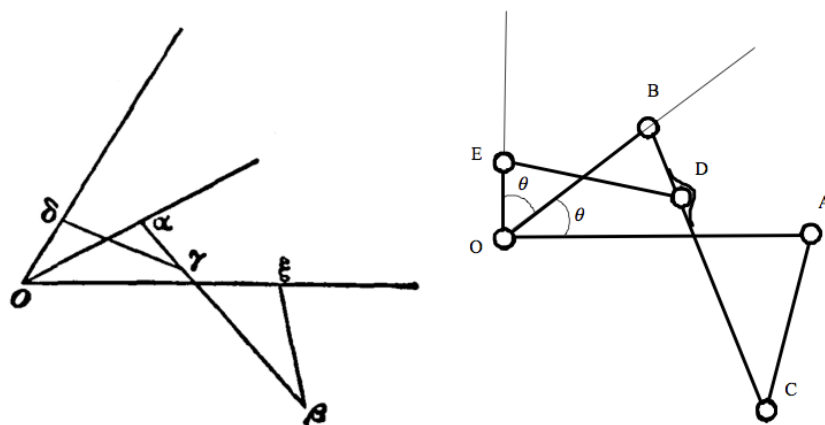


Figura 2.48: Imagen original del reversor de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado

Fuentes: [57] y [95]

$|BD|$ y $|OB| = |ED|$. Así construido, los contraparalelogramos son semejantes por lo que tenemos que $\widehat{EOB} = \widehat{BOA} = \theta$. Así, si la barra OA forma un ángulo θ con la barra OB , la barra OE siempre forma el mismo ángulo θ con la barra OB , de ahí el nombre de reversor que le dio Kempe. Además, $\widehat{EOA} = 2\theta$ por lo que a este mecanismo también se le conoce como el *duplicador de ángulos*.

Si al reversor le añadimos otras dos barras (Figura 2.49) OG y GF de forma que $\frac{OG}{OE} = \frac{OE}{OB}$ (es decir, que $|OE|$ es la tercera proporcional de $|OG|$ y $|OB|$) con el vértice F sobre la barra ED , obtenemos el *multiplicador*, mecanismo articulado formado por tres contraparalelogramos. Además el ángulo $\widehat{GOA} = 3\theta$ por lo que este mecanismo resuelve el problema de la trisección del ángulo. Si uno continúa añadiendo contraparalelogramos con estas condiciones, puede multiplicar cualquier ángulo θ por cualquier número natural r , de ahí el nombre de multiplicador por parte de Kempe.

Si consideramos ahora dos reversores $AKLD - ADMN$ y $ABCD - ADEF$ con una barra AD común (Figura 2.50), tenemos el *sumador de ángulos*. Veamos:

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \widehat{NMD} = \widehat{NAD} = \widehat{DAK} \\ \alpha = \widehat{FED} = \widehat{FAD} = \widehat{DAB} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta = \widehat{FAK} = \widehat{NAB}$$

Otro de los mecanismos articulados usados por Kempe es el *girador* (Figura 2.51) formado por un paralelogramo $ABCD$. A través de las barras AB , AD y AC se deslizan cuatro barras: las barras IE e IG con los extremos E y G en el lado AB y las barras IF e IH con sus extremos F y H en la barra AD , las cuatro con un vértice común I que, a su vez, se desliza a través de

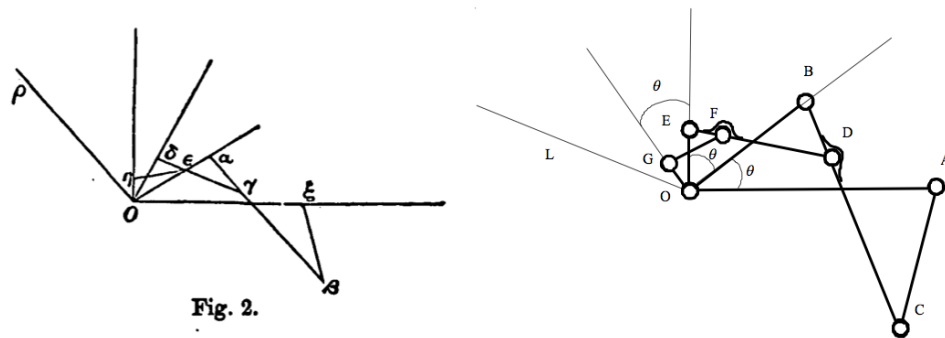


Figura 2.49: Imagen original del multiplicador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado

Fuentes: [57] y [95]

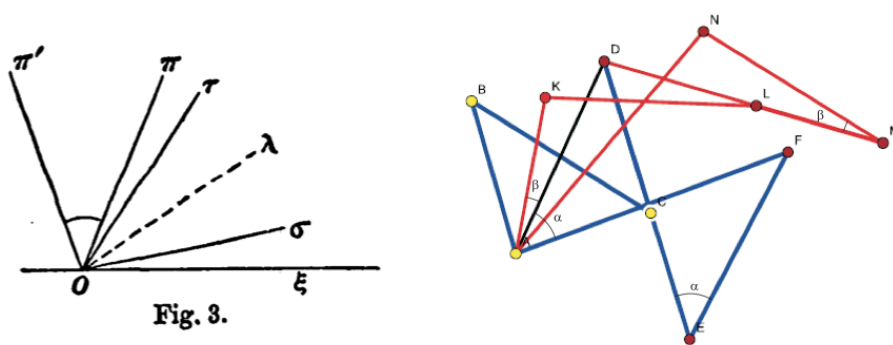


Figura 2.50: Imagen original del sumador de Kempe en [57] y esquema del sistema articulado

Fuentes: [57] y [95]

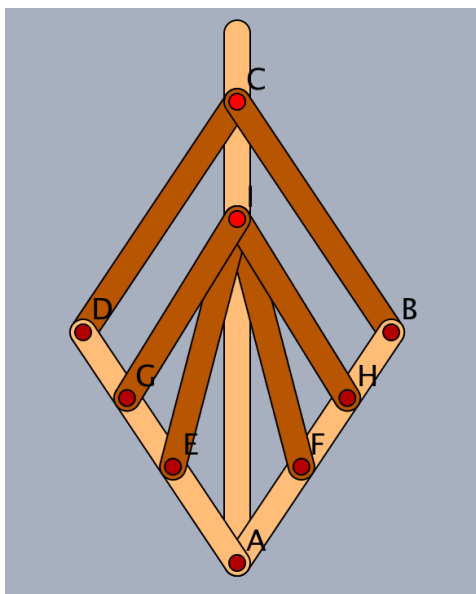


Figura 2.51: Girador de Kempe
Fuente: elaboración propia

la barra AC verificando que:

$$|IE| = |IF|, |IG| = |IH|$$

y, por simetría:

$$|AG| = |AH|, |EG| = |FH|$$

Así, el girador permite girar cualquier ángulo un vector con origen en A de módulo menor o igual que $|AB|$ sin más que desplazar el vértice I hasta que H se sitúe en el extremo del vector y luego desplazar C hasta que \widehat{DAB} sea el ángulo deseado. Así, \overrightarrow{AG} será el vector girado de AH . Del mismo modo, se puede girar cualquier segmento FH el ángulo \widehat{DAB} .

Una vez descritos estos mecanismos, Kempe en su *On a General Method of describing Plane Curves of the n th degree by Linkwork* [57], se las ingenia para combinarlos y generar uno que traza una curva algebraica real plana $f(x,y) = 0$ dada.

Sin embargo, Kempe no tuvo en cuenta los casos extremos en los que un paralelogramo ‘degenera’ en una línea recta y pasa a ser un contrapalelogramo y viceversa. Asumió que los paralelogramos siempre se mantendrían como tales al igual que los contrapalelogramos con los que el mecanismo describe la curva. Tenemos dos situaciones en las que esto puede ocurrir:

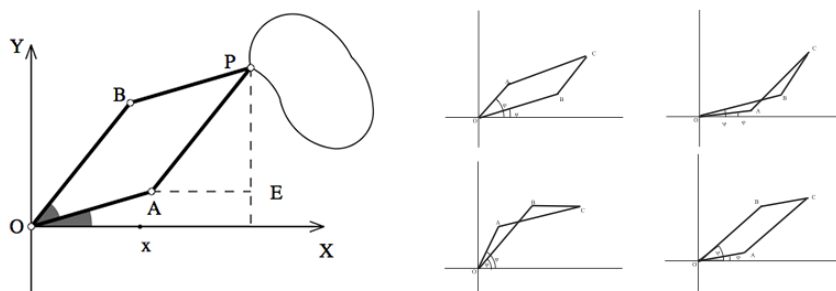


Figura 2.52: Transformador de coordenadas y 4 juegos de coordenadas trigonométricas del mismo punto

Fuentes: [49] y [9]

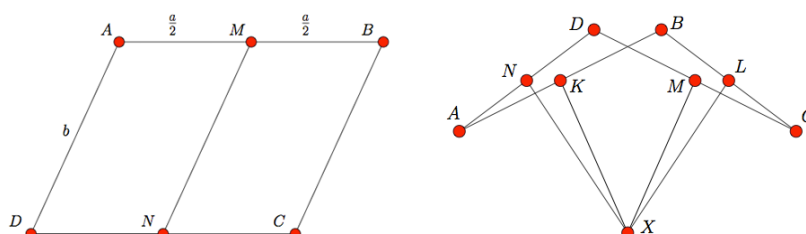


Figura 2.53: Modificaciones del paralelogramo y el contraparalelogramo para mantener su configuración

Fuente: [5]

- Para encontrar el mecanismo que describe la curva algebraica $f(x, y) = 0$, Kempe construye un paralelogramo de vértices $OAPB$ (Figura 2.52) donde $|OA| = m$, $|OB| = n$ y forman respectivamente ángulos θ y φ con el eje OX . P es un punto de la curva. Así, sus coordenadas en polares son:

$$\begin{aligned} x &= m\cos\theta + n\cos\varphi \\ y &= m\sin\theta + n\sin\varphi \end{aligned}$$

El problema aquí es la no unicidad global de las coordenadas trigonométricas ya que en la Figura 2.52 a la derecha, se muestran cuatro juegos de coordenadas distintas para cada punto P . Esto se debe a un cambio de configuración de paralelogramo que acabamos de comentar.

- Todos los mecanismos que operan con contraparalelogramos requieren que no cambie su configuración para su correcto funcionamiento.

Para resolver estos problemas, en [5] se proponen unas modificaciones a los mismos para que no cambien de configuración (Figura 2.53). Para el

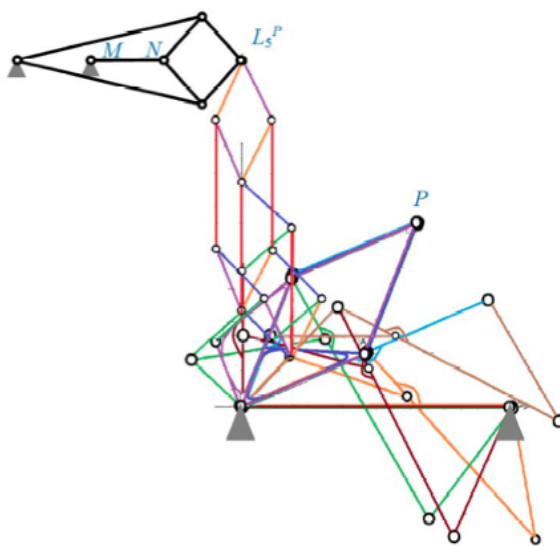


Figura 2.54: Sistema articulado para dibujar una cónica concreta mediante el método de Kempe

Fuente: [95]

paralelogramo $ABCD$ no hay más que añadir una barra MN paralela a AD (y por tanto a BC) con extremos los puntos medios de AB y DC . Para el contraparelelogramo $ABCD$ se añaden cuatro barras adicionales XN , XK , XM y XL siendo N , K , M y L los puntos medios de AD , AB , DC y BC respectivamente. Además, si $|KX| = |MX| = r_1$ y $|NX| = |LX| = r_2$ se debe cumplir que $r_2^2 - r_1^2 = \frac{1}{4}(|AD|^2 - |AD|^2)$ para que el contraparelelogramo tenga el mayor movimiento posible sin cambiar de configuración.

Como hemos comentado, con toda esta panoplia de mecanismos, Kempe se las ingenia para unir unos con otros y obtener el mecanismo que describe una curva concreta. La complejidad de la construcción de tales mecanismos es tremenda ya que, como afirmó el propio Kempe:

... there is a way of drawing any given case; and the variety of methods of expressing particular functions that have already been discovered renders it in the highest degree probable that in every case a simpler method can be found. There is still, therefore, a wide field open to the mathematical artist to discover the simplest linkworks that will describe particular curves.

Un ejemplo de esta complejidad lo tenemos en la Figura 2.54 donde se muestra el sistema articulado de 41 barras y 59 pivotes (excluyendo el inversor de Peaucellier de arriba usado para generar el movimiento rectilíneo a lo largo del eje y) que genera la curva $(x - y)(x + y + \frac{1}{\sqrt{2}})$. El método para generar estas construcciones puede verse en [49] y [95].

Probablemente, la más elegante reformulación del *Teorema de Univer-*

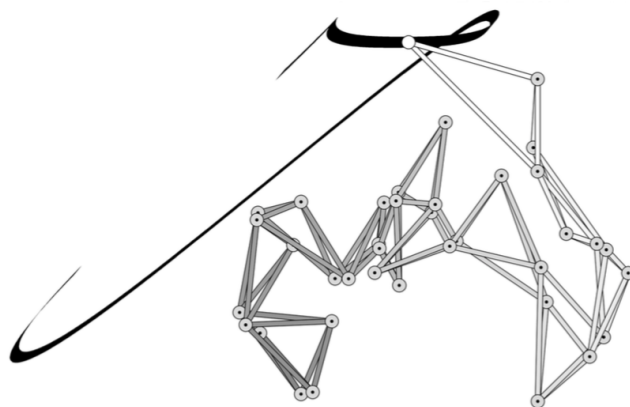


Figura 2.55: Curva algebraica que aproxima la J en la firma de John Hancock y el mecanismo articulado que la traza

Fuente: [48]

salidad de Kempe, tal y como es presentado hoy en día [62], es debida a William Thurston (1946 - 2012). Thurston (Medalla Fields 1982) establece que toda variedad algebraica es analíticamente isomorfa a una componente de la variedad de posiciones de un sistema articulado [5]. De aquí, se deduce de forma trivial el teorema de Kempe. La reformulación a la que hemos hecho referencia se resume en la frase “hay un sistema articulado que traza tu firma”.

En la Figura 2.55 podemos ver un mecanismo articulado que traza la J de la firma de John Hancock, comerciante de Massachusetts y destacado patriota de la Revolución estadounidense, famoso por su firma en la Declaración de Independencia de manera que en Estados Unidos, “John Hancock” se ha llegado a convertir en sinónimo de firma. Este mecanismo consta de 26 barras y 37 pivotes [48].

2.7. En busca de la sencillez

La situación, pues, a comienzos del siglo XX es tal que se puede generar un mecanismo articulado para cada curva algebraica mediante un método general pero éste método de Kempe es como matar moscas a cañonazos.

Así, en la búsqueda de mecanismos articulados lo más simple posibles que trazan algunas curvas, tenemos a Robert C. Yates (1904-1963) ingeniero estadounidense que en 1941 publica un tratado con ejercicios de Geometría [114] para futuros profesores de Matemáticas en el que hace un estudio de distintas curvas y propone una serie de mecanismos articulados muy sencillos que describen algunas de ellas. Posteriormente, en 1947 publica un libro

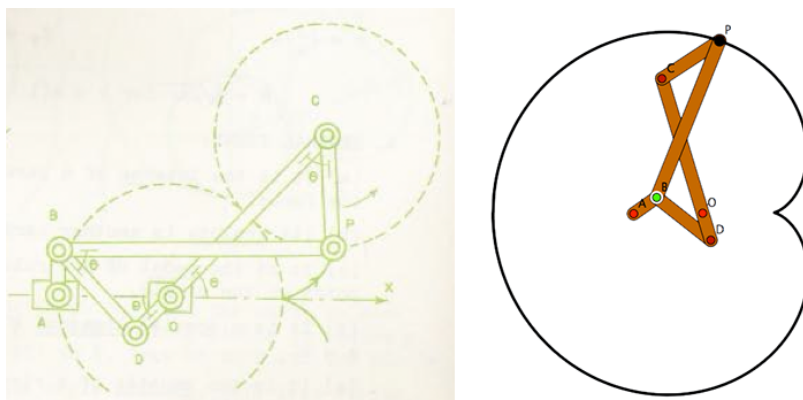


Figura 2.56: Sistema articulado de Yates para dibujar la cardioide
Fuentes: [116] y elaboración propia

de texto [115] con un estudio más detallado de todas estas construcciones. En ellas combina de forma ingeniosa el mecanismo de Watt y los inversores de Peaucellier y Hart para obtener distintas curvas.

En la Figura 2.56 vemos un mecanismo para dibujar la cardioide que es una epicicloide generada por un punto de una circunferencia de radio a que gira tangente alrededor de otra circunferencia de radio a . El mecanismo consiste en dos inversores de Hart $ABDO$ y $BDCP$ con A y O fijos de medidas:

$$AO = BD = CP = a$$

$$AB = OD = b$$

Además:

$$BP = DC = c = b + 2a$$

$$a^2 = b \cdot c$$

Como en todo momento $\widehat{PCO} = \theta = \widehat{COX}$, cuando el vértice B gira alrededor de A , el punto P describe la cardioide.

En la Figura 2.57, Yates propone un mecanismo para dibujar curvas de Cassini, descritas por Giovanni Domenico Cassini (1625 -1712) al estudiar los movimientos relativos de la Tierra y el Sol. También se conocen como óvalos de Cassini. Las curvas de Cassini son curvas que se obtienen a partir de dos focos fijos F_1 y F_2 , siendo constante el producto de las distancias desde cualquier punto P de la curva a los focos, es decir, $PF_1 \cdot PF_2 = k$.

El mecanismo tiene dos vértices fijos A y A' y los puntos P y P' describen la curva cuando D gira alrededor de A siendo las medidas de las barras:

$$AD = AO = a$$

$$DC = CQ = EO = OC = \frac{c}{2}$$

$$CP = PE = EP' = P'C = d$$

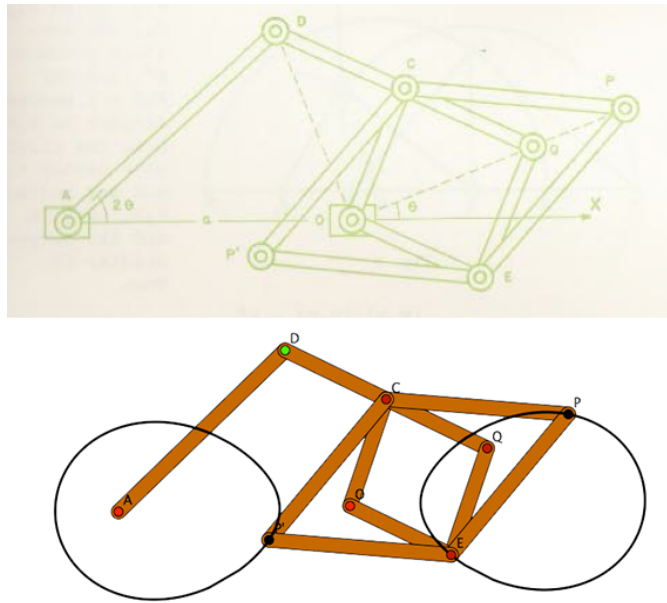


Figura 2.57: Sistema articulado para dibujar óvalos de Cassini
Fuentes: [116] y elaboración propia

Si las coordenadas de Q y P son (ρ, θ) y (r, θ) respectivamente, como O , D y Q pertenecen a la circunferencia de centro C y radio $\frac{c}{2}$, las líneas DO y OQ son perpendiculares. Así:

$$(OQ)^2 = (DQ)^2 - (DO)^2 \Rightarrow \rho^2 = c^2 - 4a^2 \sin^2 \theta$$

El mecanismo de Peaucellier $CPEQ$ invierte el punto Q al punto P cumpliéndose que:

$$r(r - \rho) = d^2 - \frac{c^2}{4}$$

Eliminando ρ de las ecuaciones anteriores:

$$\left(d^2 - \frac{c^2}{4} - r^2\right)^2 = r^2 c^2 - 4r^2 a^2 \sin^2 \theta$$

que, en coordenadas cartesianas es:

$$(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

que define una curva de Cassini si

$$d = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$$

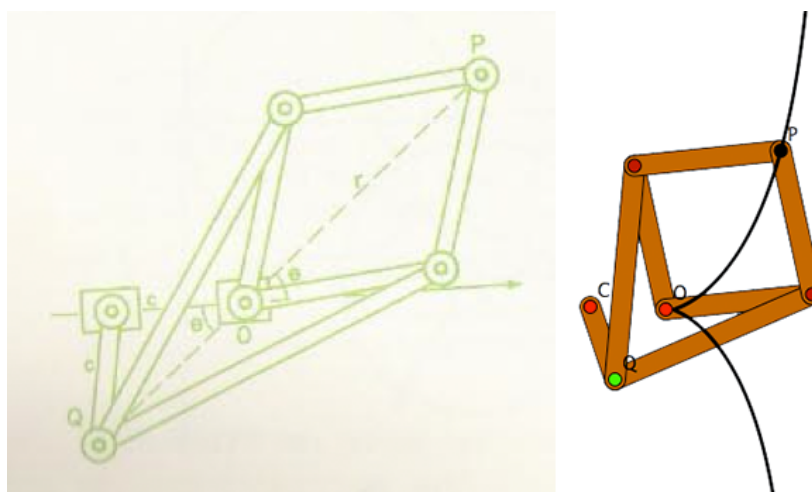


Figura 2.58: Sistema articulado para dibujar la familia de cisoides
Fuentes: [116] y elaboración propia

Para trazar la cisoide de Diocles, tenemos el mecanismo de la Figura 2.58. Básicamente es un inversor de Peaucellier al que se le transmite un movimiento circular al vértice que estaba fijo cuando se usaba para dibujar la línea recta, manteniendo fijo el que recibía dicho movimiento circular. Con esta argucia:

$$OQ \cdot QP = k^2 = 1$$

Así:

$$2c \cdot \cos\theta(2c \cdot \cos\theta + r) = 1 \Rightarrow r = \left(\frac{1}{2c}\right) \sec\theta - 2c \cdot \cos\theta$$

por lo que se genera la familia de cisoides ya que:

- para $c < \frac{1}{2}$, la curva no gira sobre sí misma
- para $c = \frac{1}{2}$, la curva tiene un punto cúspide (cisoide de Diocles)
- para $c > \frac{1}{2}$, la curva gira sobre sí misma

Yates propone dos mecanismos muy sencillos para generar la lemniscata de Bernoulli (Figura 2.59). El mecanismo de la izquierda consiste en dos barras articuladas AB , BP con una tercera barra OP articulada a la BP en su punto central C . Los vértices A y O son fijos. Cuando el vértice C gira alrededor de O , el punto P describe la curva ya que, si las medidas son:

$$\begin{aligned} OA = AB &= a \\ BC = CP = OC &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

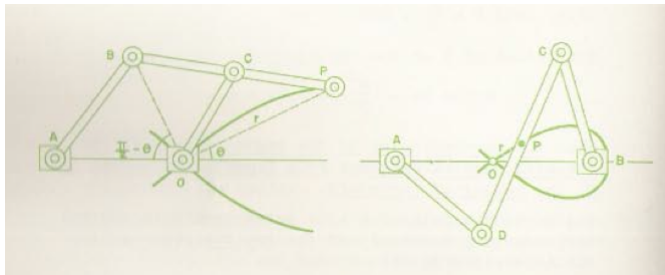


Figura 2.59: Sistemas articulados para dibujar la lemniscata de Bernoulli
Fuente: [116]

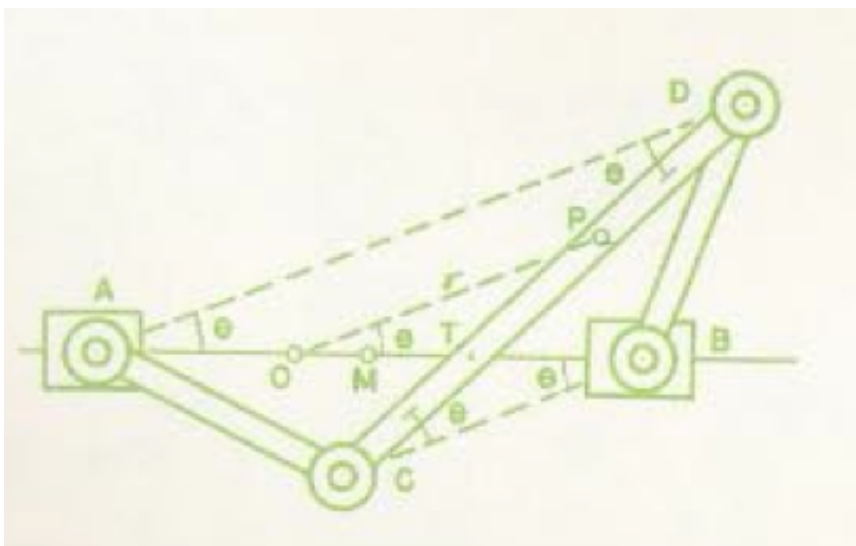


Figura 2.60: Estudio del mecanismo de Watt para generar cónicas
Fuente: [116]

como el ángulo $\widehat{BOP} = \frac{\pi}{2}$, se cumple que:

$$r^2 = (BP)^2 - (OB)^2 = 2a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta$$

es decir:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

En el mecanismo de la derecha (Figura 2.59), vemos un mecanismo de Watt con medidas:

$$\begin{aligned} AB = CD &= a\sqrt{2} \\ AD = BC &= a \end{aligned}$$

donde P y O son los puntos medios de DC y AB respectivamente de donde $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ [114].

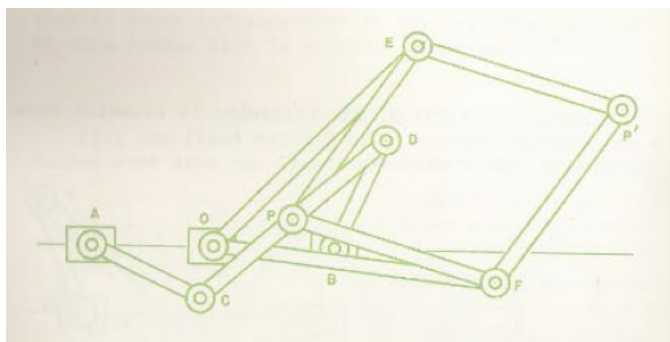


Figura 2.61: Sistema articulado general para dibujar cónicas
Fuente: [116]

Por último, Yates propone un conicógrafo general combinando un mecanismo de Watt con un inversor de Peaucellier. En el mecanismo de tres barras de la Figura 2.60

$$AB = CD = 2a$$

$$AC = BD = 2b$$

con $a > b$. Entonces $AD \cdot BC = 4(a^2 - b^2)$.

Sea P un punto de la barra CD . Trazamos la paralela por P a AD y BC obteniendo el punto fijo O donde $OP = r$. Sea $OM = c$, $MT = z$ donde M es el punto medio de AB . Entonces:

$$AD = 2 \cdot AT \cdot \cos\theta = 2(a + z)\cos\theta$$

$$BC = 2 \cdot BT \cdot \cos\theta = 2(a - z)\cos\theta$$

de donde, al multiplicar, tenemos que:

$$(a^2 - z^2)\cos^2\theta = a^2 - b^2$$

Combinando este resultado con que $r = 2(c + z)\cos\theta$, resulta:

$$\left(\frac{r}{2} - c \cdot \cos\theta\right)^2 = b^2 - a^2 \sin^2\theta$$

que es la ecuación en polares del trazado que describe el punto P .

Si a este mecanismo le añadimos un inversor de Peaucellier $OEFPF'$ (Figura 4.30), tenemos que:

$$r \cdot \rho = 2k$$

donde $\rho = OP'$. El inverso de este conjunto de curvas (el *locus* de P') es:

$$(k - c \cdot \rho \cdot \cos\theta)^2 = b^2 - a^2 \cdot \rho^2 \cdot \sin^2\theta$$

que, en coordenadas cartesianas es:

$$(a^2 - b^2)y^2 - (b^2 - c^2)x^2 - 2c \cdot k \cdot x + k^2 = 0$$

que es una cónica. Como $a > b$, la cónica en cuestión depende del valor de c , es decir, de la posición del punto P :

- una elipse si $c > b$
- una parábola si $c = b$
- una hipérbola si $c < b$

En la Figura 4.31 podemos ver los mecanismos obtenidos mediante este proceso: la primera para la construcción de una parábola, la segunda para construir una elipse (usando un inversor de Hart) y la tercera para la hipérbola.

Por otro lado, en 1964 Iván Ivánovich Artobolevski (1905 – 1977), ingeniero mecánico y científico ruso y primer presidente de la Federación Internacional de Teoría de Máquinas y Mecanismos, publica un libro titulado *Teoría de mecanismos para la generación de curvas planas* donde, además de generalizar el trabajo de sus predecesores, desarrolla una teoría para el compendio de mecanismos para la generación de curvas planas. Este método para la búsqueda de las soluciones más simples se obtiene del estudio de las propiedades geométricas individuales de cadenas cinemáticas (mecanismos articulados) combinado con las propiedades analíticas y geométricas de las curvas a generar como trayectorias de dichos mecanismos. Artobolevski lo llama *método geometro-algebraico* ya que combina métodos geométricos de construcción con el análisis teórico de curvas algebraicas y trascendentes (*Preface to the English edition* de [10]).

Además expone su teoría para la generación de mecanismos de cónicas, curvas algebraicas de grado tres y cuatro y de algunos casos de curvas algebraicas de grado mayor que cuatro además de algunas curvas trascendentales.

A efectos prácticos, en esta búsqueda en el siglo XX de mecanismos los más sencillos posible para el trazado de curvas toman especial importancia los de cuatro barras articuladas debido a la economía en su construcción (y mantenimiento), mínimas vibraciones y a las múltiples posibilidades que ofrecen. Un mecanismo de cuatro barras (Figura 2.63) consiste en tres barras móviles *ad*, *de* y *eh* siendo la cuarta barra *ah* fija (por ejemplo el suelo). El movimiento lo genera la barra *ad* transmitiéndose por medio de la barra *de*, llamada *de acoplador*, a la barra *eh*. En este estudio ya hemos visto unos cuantos casos particulares de este tipo de mecanismos (Watt, Roberts, Hart, Chevyshev) que se consideraban de tres barras ya que no se contaba la fija.

El ingeniero alemán Franz Reuleaux, en su *Teoretische Kinematik* de 1875, definió el concepto de *mecanismo* como una cadena cinemática cerrada por lo que hoy en día es común contar con dicha barra para que el mecanismo sea considerado como tal.

En el movimiento del mecanismo, si una barra realiza un giro de 180° se denomina *manivela* y si realiza un movimiento oscilatorio se denomina *balancín*.

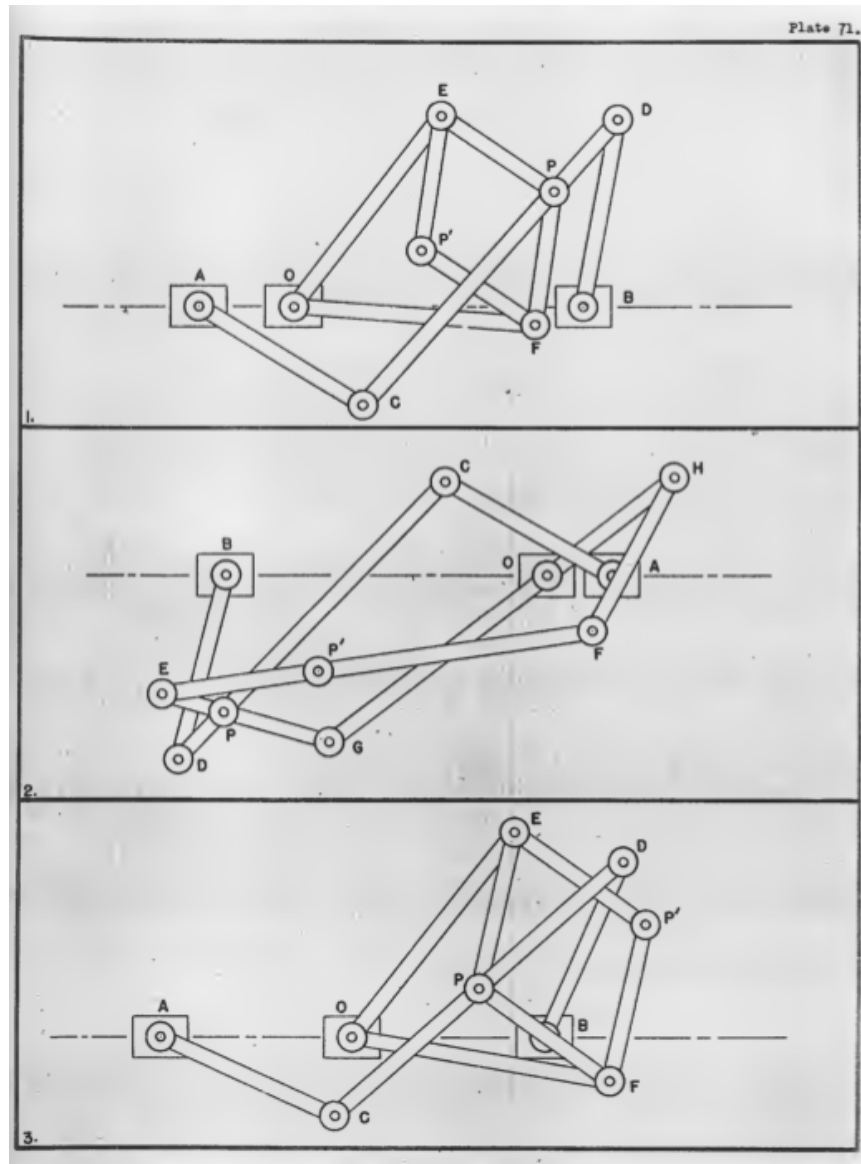


Figura 2.62: Conicógrafos de Yates obtenidos al combinar un mecanismo de Watt con un inversor de Peaucellier o de Hart

Fuente: [114]

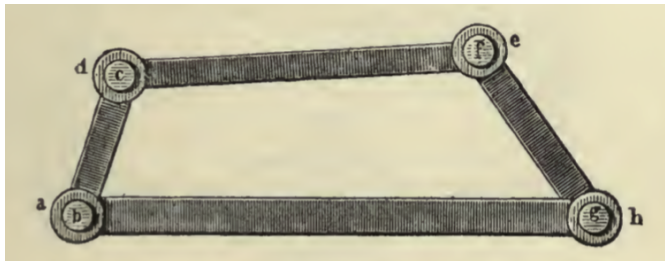
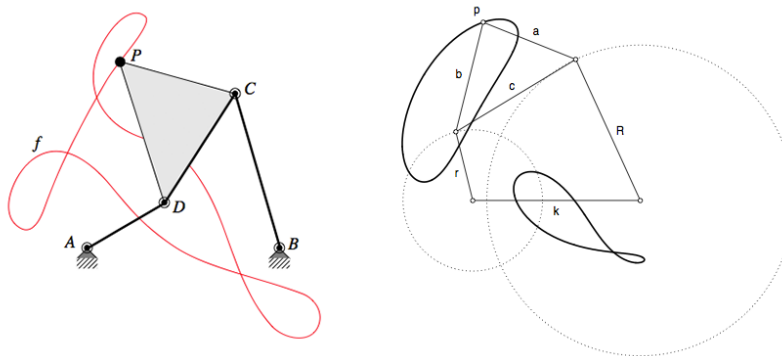


Figura 2.63: Mecanismo articulado de cuatro barras

Fuente: [91]

Figura 2.64: Curvas pareadas (*coupler curves*) generadas por un mecanismo de cuatro barras articuladas

Fuentes: [107] y [40]

La amplitud de los movimientos del mecanismo, viene establecida por la Ley de Grashof que establece que *un mecanismo de cuatro barras tiene al menos una articulación de revolución completa si y solo si la suma de las longitudes de la barra más corta y la barra más larga es menor o igual que la suma de las longitudes de las barras restantes.*

Si a la barra de acoplador de un mecanismo de cuatro barras le añadimos un triángulo CDP (Figura ??), cuando gira la barra AD , el punto P traza una curva llamada *coupler curve* o curva de acoplador. Cabe destacar que un mismo mecanismo cuando cumple la condición de Grashof (tiene al menos una barra que da una vuelta completa), puede trazar dos curvas en función de la configuración del cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo o como contrapalelogramo. Los mecanismos que no cumplen dicha condición, generan una única curva [40].

Estos mecanismos de cuatro barras dan lugar una gran variedad de trayectorias. Por ejemplo, el atlas de Hrones y Nelson cataloga alrededor de 7000 trayectorias diferentes generadas por estos mecanismos [55]. Así, en Ingeniería, dada una trayectoria específica, muchas veces es necesario generar

el mecanismo que la genere exactamente. Otras veces, es suficiente trazar una aproximación con el mayor grado de exactitud posible.

Todas estas trayectorias generadas por mecanismos articulados de cuatro barras son (partes de) curvas algebraicas de grado seis ([75], [52] y [40]).

Por otro lado, una propiedad de las curvas pareadas viene dada por el teorema de Roberts-Chevyshev [?] que establece que *una misma curva de acoplador puede ser generada por tres mecanismos de cuatro barras diferentes* llamados mecanismos cognados. Esto no es sólo una curiosidad matemática ya que una vez que una trayectoria es generada por un mecanismo, uno de sus cognados puede tener mejores características para la transmisión de fuerzas, algo esencial en Ingeniería.

Además, un mecanismo de cuatro barras es ligero, barato y resistente a altas velocidades por lo que, a la hora de aproximar una determinada trayectoria generada por una función, constituyen una solución ideal pero con un error inherente que el diseño del mecanismo debe minimizar. Esta solución tiene múltiples aplicaciones prácticas, por ejemplo, en Robótica.

Así, para diseñar un mecanismo de cuatro barras que trace una determinada trayectoria, por un lado se puede consultar el atlas de curvas [55] o utilizar métodos numéricos para encontrar las medidas y disposición del mecanismo que genere una trayectoria interpolando una serie de puntos prescritos con el orden de precisión deseado [45].

Para terminar, hemos de citar unas palabras de Artovolevsvki incidiendo en la importancia de la sencillez de los mecanismos:

We shall not examine the many others mechanisms [...] since it is considered that mechanisms containing from four to eight or ten links serve as a basis for practical application. Mechanisms with a large number of links prove scarcely suitable for operation, chiefly through lack of accuracy ([10], pág 169).

Capítulo 3

Sistemas de Geometría Dinámica: Cinderella.2

En el capítulo anterior hemos estado viendo ejemplos de construcciones de sistemas articulados realizados mediante sistemas de Geometría Dinámica con la posibilidad de interactuar sobre las construcciones disponibles en <https://sites.google.com/site/tesislinkages/evolucion-historica>. En este capítulo vamos a profundizar sobre estos sistemas y justificar la elección del que hemos utilizado para nuestra propuesta didáctica: *Cinderella.2*.

3.1. Sistemas de Geometría Dinámica

Un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) es un programa informático que permite la creación y manipulación de construcciones geométricas [13]. Una característica muy importante de este tipo de programas es que son capaces de construir modelos geométricos a partir de objetos tales como puntos, rectas, círculos, etc. así como de las dependencias que pueden relacionar unos objetos con otros. El usuario puede manipular el modelo geométrico moviendo algunos elementos y el SGD automáticamente realizará los cálculos para mover los elementos dependientes manteniendo la construcción. Esto es lo que se conoce como Geometría Dinámica. A diferencia de otros programas de creación de imágenes, un dibujo en un SGD es una visualización de un modelo geométrico y viene provisto de una interfaz visual para su manipulación.

La construcción de un modelo en la mayoría de los SGD comienza con la creación de un conjunto de objetos independientes que, inicialmente, están predeterminados (generalmente puntos) y sigue con la construcción de otros que dependen de los iniciales de manera que se relacionan geoméricamente con ellos.

Podemos considerar que los orígenes de la Geometría Dinámica se remontan a la antigua Grecia y a la Geometría árabe de la época medieval



Figura 3.1: Sutherland trabajando con Sketchpad sosteniendo el lápiz óptico. Los botones para usar las distintas funciones de dibujo están en la caja enfrente del autor

Fuente: [104]

desde el momento en que los geómetras de estas épocas se dieron cuenta de que solamente con regla y compás no podían resolver muchos problemas como la trisección de un ángulo, la construcción de un heptágono regular, la cuadratura del círculo o la duplicación del cubo. Así, se idearon otros métodos geométricos para tratar de resolver problemas de este tipo. Uno de esos métodos se denominó *método neusis* (del griego $\nu\epsilon\upsilon\sigma\iota\varsigma$) basado en construcciones con compás y una regla graduada. Los antiguos matemáticos crearon una gran cantidad de construcciones en las que, moviendo un segmento, una recta o incluso un grupo de elementos, se producía el efecto deseado. En este sentido, la construcción del heptágono regular por parte de Arquímedes es un ejemplo de este tipo de geometría móvil [54]. De este modo, el método neusis constituye la esencia de los SGD en el sentido de que se basan en realizar construcciones geométricas con algún elemento móvil (un punto, un segmento, una recta) de forma que, al mover ese elemento, se obtiene un resultado o se puede comprobar si una hipótesis es válida [27]. Un conjunto importante de construcciones geométricas basadas en elementos móviles son los mecanismos articulados (linkages), objeto de estudio en la presente tesis.

Para llegar a los actuales Sistemas de Geometría Dinámica, hubo un hecho en el desarrollo de la computación de relevante importancia. En 1963, Ivan Sutherland (1938 -) desarrolló *Sketchpad: A man-machine graphical communication system*, el primer programa informático que permitía la manipulación directa de objetos gráficos [104]. Después de tantos años, las ideas

subyacentes en Sketchpad todavía influyen en la interacción entre computadoras y usuarios siendo de los primeros sistemas en utilizar una interfaz gráfica. Implementó el uso del lápiz óptico, predecesor del actual ratón permitiendo al usuario interactuar con los objetos presentes en la pantalla. Fue el precursor de muchas de las formas de interactuar con los ordenadores que hoy consideramos totalmente naturales tales como hacer clic en un botón para seleccionar un objeto visible o arrastrar para modificarlo (Figura [?]). Sketchpad sentó las bases para el posterior desarrollo de los Sistemas de Geometría Dinámica.

Los primeros programas informáticos para Geometría Dinámica fueron *The Geometer's Sketchpad* [56] (norteamericano presentado en 1989 basado en Sketchpad) y *Cabri Geomètre* [66] (francés presentado en 1988). Posteriormente, muchos otros SGD han ido apareciendo ofreciendo distintas funcionalidades (GEONExT, Dr. Genius, Dr. Geo, Gambol, Geogebra, ...). Mención aparte merece Cinderella, el que hemos elegido para la realización de las construcciones de la presente tesis.

3.2. Cinderella.2

Cinderella es un Sistema de Geometría Dinámica. Dos características principales le diferencian de otros SGD y nos han llevado a su elección para el desarrollo del presente trabajo. El primero es que las construcciones en Cinderella están realizadas en un espacio proyectivo de números complejos lo que garantiza la consistencia de las construcciones incluso en posiciones degeneradas. La segunda es que Cinderella desarrolla un movimiento continuo de los puntos evitando saltos en las construcciones.

3.2.1. Breve historia

Su versión actual, *Cinderella.2*, es el resultado de una secuencia de tres proyectos llevados a cabo entre 1993 y 1998. La idea del primero de estos proyectos surgió en 1992 durante la celebración de unas conferencias en el Instituto Mittag-Leffler de Suecia cuando Henry Crapo and Jürgen Richter-Gebert estaban en un paseo fluvial a bordo de un barco llamado *Cinderella* (Cenicienta). En aquellos entonces, Jürgen Richter-Gebert había desarrollado métodos simbólicos para la demostración automática de teoremas geométricos [92] y los dos soñaban con un programa de ordenador que permitiera generar construcciones geométricas con unos pocos clics de ratón y preguntar al ordenador acerca de las propiedades de dichas construcciones.

Henry y Jürgen se pusieron manos a la obra y comenzaron a trabajar con un ordenador NeXT que, por aquellos entonces, era famoso por su maravillosa arquitectura de software. Cabe destacar que NeXT fue el proyecto de Steve Jobs cuando lo echaron de Apple, empresa que él mismo había

fundado. Posteriormente, NeXT fue adquirida por Apple siendo el software desarrollado por NeXT la base del sistema operativo Mac OS.

El primer prototipo de programa estaba basado en los principios de la geometría proyectiva y la teoría de invariantes. Era capaz de encontrar pruebas algebraicas *legibles* de muchos teoremas de la geometría proyectiva sobre puntos, rectas y cónicas [28].

En la medida que declinaba la popularidad del sistema NeXT lo hizo el ímpetu del proyecto *Cinderella*. Como ejemplo, en 1995 en una conferencia sobre Geometría Computacional y Discreta en el Mt. Holyoke College (Massachusetts, Estados Unidos) se logró hacer una demostración del software sólo a última hora debido a que no había disponibles ordenadores con el sistema operativo NeXT y los que había disponibles tenían una versión obsoleta del sistema operativo o no se podían conectar a un proyector ([65], pág. 115). Esta situación dejó claro que no se podía depender de un único sistema operativo por muy bueno que fuese.

En 1996, Ulli Kortenkamp and Jürgen Richter-Gebert que estaban trabajando en la Universidad Técnica de Berlín en el grupo de Günter M. Ziegler, decidieron empezar de nuevo basándose en el lenguaje de programación independiente Java desarrollado originalmente por *Sun Microsystems* en 1995. Java es un lenguaje de programación orientado a objetos cuya intención es permitir a los desarrolladores escribir una vez el programa y ejecutarlo en cualquier dispositivo. La plataforma Java consiste en tres grandes bloques: el lenguaje Java, una máquina virtual Java (JVM) y una interfaz de programación de aplicaciones (API) que permiten que las aplicaciones de Java puedan ejecutarse en cualquier máquina virtual sin importar la arquitectura del ordenador en el que se ejecute. Estas características y el ser un lenguaje de código abierto, contribuyeron a la popularización de Java como lenguaje de programación de numerosas aplicaciones en los años 90 y primera década del siglo XXI. Sin embargo, en 2009 la compañía Oracle adquirió Sun Microsystems dejando Java de ser un lenguaje abierto con una comunidad de programadores detrás para pasar a ser uno de los grandes quebraderos de cabeza en el tema de seguridad informática en estos momentos.

La intención de este segundo proyecto era implementar las funcionalidades presentes en la versión de NeXT añadiendo características de la geometría euclídea y las no euclídeas. Se pretendía también implementar la generación de locus o curva generada por la trayectoria seguida por un objeto de una construcción. Además, al ser Java un lenguaje que tiene integrado el protocolo TCP-IP lo que es ideal para Internet, la nueva versión debería ser capaz de funcionar en un navegador web. En particular, el programa debía ser capaz de crear ejercicios para los estudiantes vía web. La funcionalidad de comprobación de teoremas debía usarse para comprobar automáticamente la validez de las respuestas de los estudiantes.

Una primera versión operativa fue presentada en septiembre de 1996 en la Universidad Técnica de Zurich. La segunda versión ganó el “Multimedia

Innovation Award” en el “Multimedia Transfer” del ASK Karlsruhe en enero de 1997.

Esta segunda versión, al igual que otros programas informáticos de Geometría, tenía inconsistencias matemáticas que parecían insolubles. Estas inconsistencias provenían de ambigüedades en operaciones tales como “calcula la intersección de una recta y una circunferencia”. Puede haber dos puntos de intersección, uno o ninguno dependiendo de la posición relativa de la recta y la circunferencia. Al mover la construcción, el programa debe decidir qué punto de intersección elegir. Esta situación, que parece irrelevante, puede hacer que al mover un poco un punto, partes enteras de la construcción desaparezcan. Así, a comienzos de 1998 se resolvió este problema decidiendo utilizar como base del programa un espacio vectorial de números complejos. Los resultados de la teoría analítica de funciones se usaron para evitar situaciones singulares lo que suponía reescribir todo el programa y que los cálculos en cada operación fuesen entre veinte y doscientas veces los realizados en la versión anterior.

De esta forma se terminó el tercer proyecto cuyo resultado es el Sistema de Geometría Dinámica *Cinderella.2*. El programa se puede descargar en <http://www.cinderella.de/tiki-index.php> teniendo una versión gratuita completamente funcional para nuestros propósitos.

3.2.2. Base teórica

No vamos a hacer aquí un completo estudio de todas las características de *Cinderella.2*. La versión completa del manual de más de 400 páginas se encarga de ello. Pero sí vamos a presentar, tomado del manual [93], las bases matemáticas más importantes que tienen implicaciones en la construcción de mecanismos articulados y la generación de curvas por parte de dichos mecanismos que son las que nos decidieron por la utilización de *Cinderella.2* para esta tesis.

Problemas en Geometría Interactiva

Según los autores, un SGD debe cumplir una serie de condiciones:

- debe ser fácil de usar
- el usuario no puede ser distraído por comportamientos inesperados del programa
- el usuario no debe ser atormentado por la necesidad de introducir datos innecesarios
- los resultados obtenidos deben ser correctos

Sin embargo, ocurre muchas veces que estos condicionantes se convierten en algo difícil de conseguir debido, principalmente, a dos razones:

- hay problemas que provienen de casos especiales que se dan incluso en una construcción estática
- hay problemas que tienen una naturaleza genuinamente dinámica

Si nos fijamos en los problemas estáticos que dan lugar a casos especiales, podemos considerar multitud de situaciones: dos rectas pueden ser secantes o paralelas, dos circunferencias pueden tener dos, uno o ningún punto de intersección, ... Así, es difícil deducir un resultado correcto y razonable para estos casos especiales. Por ejemplo ¿cuál es la bisectriz entre dos paralelas? ¿No existe? ¿Puede ser una recta paralela a las dos iniciales? ¿será equidistante?

Estos problemas fueron estudiados desde hace mucho tiempo. Los geómetras del siglo XIX se ocuparon de ellos y los resolvieron en su mayoría. La clave fue extender la geometría euclídea incluyendo en el plano al infinito llegando a la geometría proyectiva y ampliar la estructura algebraica subyacente con los números complejos. Esto resuelve la mayoría de los problemas anteriormente expuestos.

Hacia 1870 estas ideas desembocaron en un sistema completo y consistente que explica perfectamente las propiedades de la geometría euclídea y las no euclídeas como la geometría hiperbólica. Hoy en día es conocida como la *Geometría de Cayley-Klein* [61]. El fundamento matemático en la implementación de *Cinderella.2* se basa en este modelo. Así se puede trabajar con casos especiales así como en geometrías euclídea, hiperbólica y elíptica.

Por otro lado, al realizar construcciones dinámicas, es deseable que haya un comportamiento continuo del programa en el sentido de que, al realizar un mínimo movimiento de un punto libre, los elementos dependientes de este punto realicen también mínimos movimientos. Esto puede comprobarse de la siguiente forma: en un SGD, por ejemplo Geogebra, se dibuja una recta horizontal y se construyen dos circunferencias del mismo radio con los centros en la recta. Se mueven las circunferencias hasta que sean secantes y se traza el punto superior de intersección de las dos circunferencias. Ahora, se mueve lentamente a lo largo de la recta el centro de una de las circunferencias de forma coincida con el centro de la otra. Lo más probable es que, a partir del momento en que coincidan los dos centros, el punto superior de intersección de repente salte al punto inferior de intersección (Figura 3.2). Este hecho va en contra del comportamiento continuo deseado en un SGD: pequeños movimientos no pueden producir saltos de este tipo. Además, de cara a la concatenación de movimientos en un sistema articulado, esto no es lo más deseable ya que otros movimientos pueden depender del movimiento de este punto. *Cinderella.2* resuelve esta situación en base a una teoría que es capaz de prevenir saltos de este tipo. Esta teoría está basada en el uso de

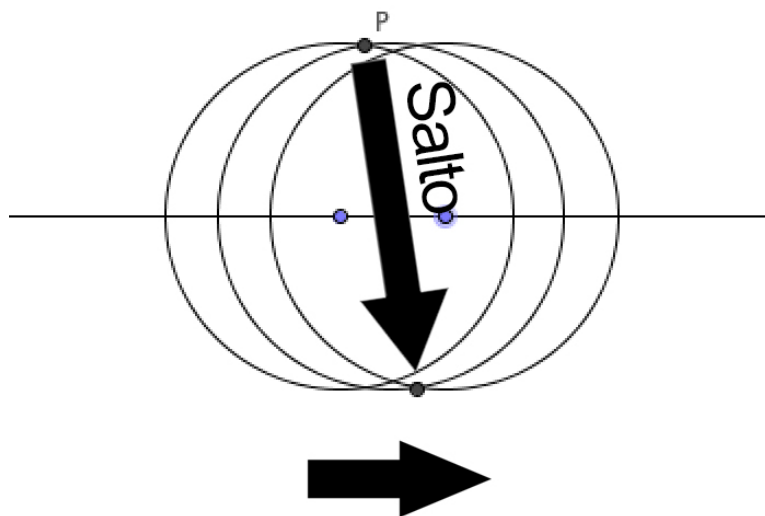


Figura 3.2: Salto de un punto producido al mover levemente otro punto
Fuente: Elaboración propia

números complejos ya presentes para resolver los problemas de las construcciones estáticas. El uso de esta teoría tiene muchas ventajas, por ejemplo, está presente en la base de generación de trayectorias (loci) de puntos, algo esencial en las construcciones realizadas en la presente tesis. Esta teoría está desarrollada en [65], capítulos 6 y 7.

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/sgd/sgd3> pueden verse unos vídeos de construcciones dinámicas que ejemplifican estos casos.

Geometría Projectiva

El primer paso y quizás el más importante para una disposición geométrica consistente es extender el plano euclídeo al infinito. En la frase “dos rectas paralelas se cortan en el infinito” subyace la idea principal de la Geometría Projectiva. Puede considerarse su origen histórico en los estudios sobre perspectiva de Alberto Durero (1471 - 1528) (Figura 3.3) y Leonardo da Vinci (1452 - 1519). Su origen matemático se debe a Gaspard Monge (1746 - 1818), matemático francés que desarrolló el método de la Geometría Descriptiva que permite representar objetos tridimensionales sobre una superficie bidimensional. Existen distintos sistemas de representación en este sentido como la perspectiva cónica o el sistema de planos acotados pero quizás, el más importante es el sistema diédrico desarrollado por Monge en 1799. Observó que muchas propiedades de configuraciones geométricas planas se podían inferir al considerar estas configuraciones como proyecciones de configuraciones en

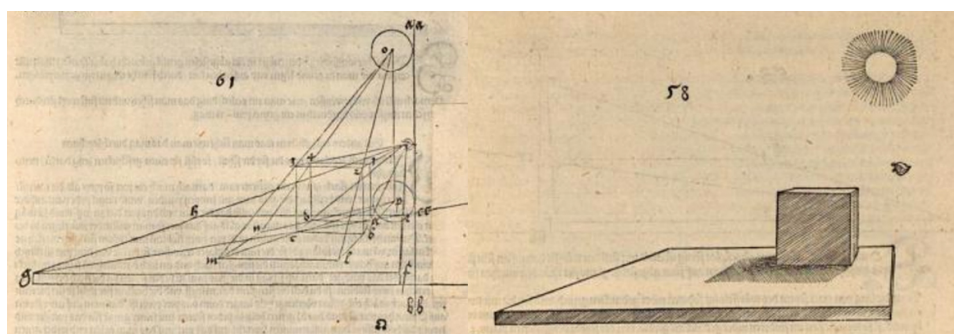


Figura 3.3: Dibujos de Dürero estudiando la perspectiva en un cubo
Fuente: [38]

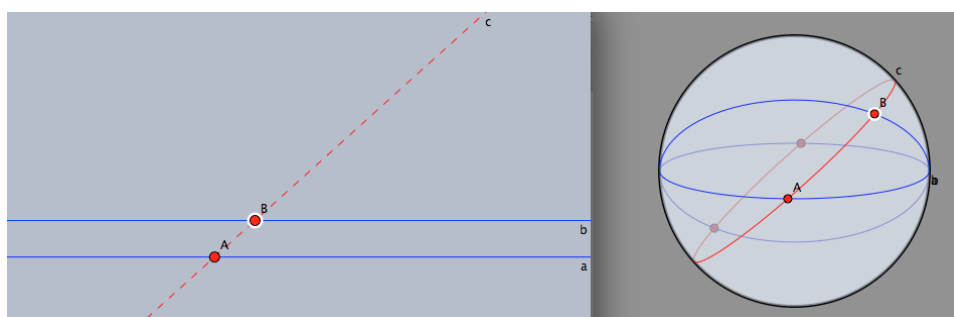


Figura 3.4: Dos rectas paralelas y una secante en Cinderella.2 en vista euclídea (izquierda) y esférica (derecha)
Fuente: Elaboración propia

el espacio [72]. El plano proyectivo incluye todos los puntos del plano euclídeo tradicional al que se le añade un punto infinito en todas las direcciones posibles. Las rectas del plano proyectivo incluyen las rectas del plano euclídeo más una recta en el infinito. El primero en formalizar el plano proyectivo fue Victor Poncelet (1788 - 1867), discípulo de Monge [87].

Coordenadas homogéneas

El incluir elementos del infinito elimina muchas situaciones especiales de la geometría euclídea clásica. En *Cinderella.2* el plano euclídeo está inmerso en el plano proyectivo. Sin embargo, en un ordenador no podemos usar objetos geométricos como tales. Un punto o una recta debe ser representado mediante números, sus coordenadas. Generalmente, un punto se describe por dos coordenadas (x, y) y una recta por tres (a, b, c) que definen su ecuación $ax + by + c = 0$. Pero si queremos hacerlo mediante Geometría Proyectiva, esto no vale. Un par de coordenadas (x, y) definen un punto pero así no hay forma de representar los puntos del infinito. A mediados del siglo XIX se fue

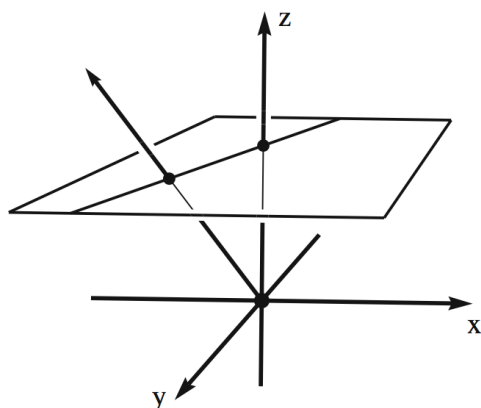


Figura 3.5: El plano euclídeo inmerso en el espacio proyectivo

Fuente: [93]

llegando a la solución de este problema, primero con las *coordenadas bari-céntricas* de Möbius, pasando por el conjunto de *coordenadas homogéneas* de Plücker llegando al *álgebra multilinear* de Grassmann. Tomando las palabras de Julius Plücker [86] acerca del sistema de coordenadas homogéneas:

Ich habe bei den folgenden Entwicklungen nur die Absicht gehabt, an Beispielen zu zeigen, dass die neue Methode einerseits zum Beweise vorgelegter einzelner Sätze und zur Darstellung allgemeiner Theorien sich sehr geschmeidig zeigt, und dass sie andererseits Resultate finden lehrt, wenn man sie aus allgemeinen analytischen Gesichtspunkten betrachtet.

lo que en román paladino viene a indicar lo propio que es el nuevo sistema de coordenadas homogéneas para demostrar teoremas y ayudar a obtener nuevos resultados.

El sistema es el siguiente: para cada punto del plano euclídeo se utilizan tres coordenadas en vez de dos. Consideramos el plano euclídeo colocándolo paralelo al plano xy en el espacio tridimensional a una altura de $z = 1$ de forma que no pasa por el origen $(0, 0, 0)$ (Figura 3.5). Ahora, cada punto (x, y) del plano euclídeo está representado por sus coordenadas $(x, y, 1)$ en el espacio tridimensional. Ahora, ¿qué pasa con el resto de puntos del espacio? La mayoría de ellos van a ser considerados como puntos del plano original identificando los puntos con coordenadas proporcionales. Así, un punto (x, y, z) en el espacio será considerado como el punto $(x/z, y/z, 1)$ del plano original siempre que $z \neq 0$. Así, todo punto del plano euclídeo original corresponde a la recta que une ese punto con el origen de coordenadas del espacio tridimensional. Este proceso se conoce como *deshomogeneización*.

Los puntos de la forma $(x, y, 0)$ son los que corresponden con los de la línea del infinito de la Geometría Proyectiva. Vamos a verlo estudiando el

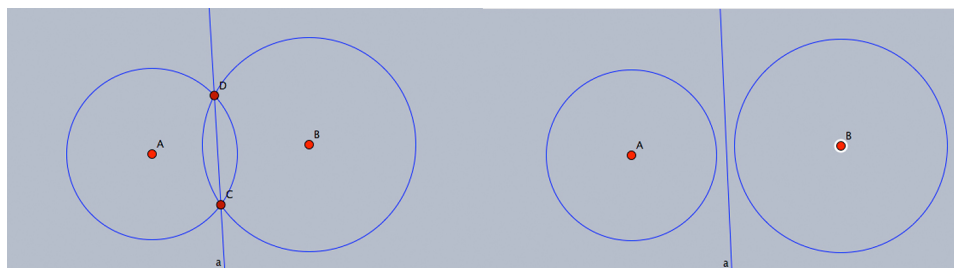


Figura 3.6: El uso de números complejos en la intersección de dos circunferencias. Aunque no sean secantes, *Cinderella.2* sigue representando la recta que une los puntos de intersección, el eje radical

Fuente: Elaboración propia

comportamiento de un punto (y de sus coordenadas) del plano euclídeo original a medida que se traslada al infinito. Supongamos que el punto es de la forma (r, r) . A medida que r crece, el punto se acerca a un punto del infinito en un ángulo de 45° . Si nos fijamos en sus coordenadas homogéneas, éstas son de la forma $(r, r, 1) \sim (1, 1, 1/r)$. Cuando r es infinito, las coordenadas homogéneas son $(1, 1, 0)$, un punto del infinito. Nos podemos imaginar también la recta que une ese punto y el origen de coordenadas del espacio tridimensional. A medida que el punto se acerca al infinito, esta recta va estando cada vez más horizontal hasta que, al final, está completamente incluida en el plano xy .

En el caso de rectas ocurre algo similar. Para la recta $ax + by + c = 0$, consideramos los parámetros (a, b, c) como las coordenadas homogéneas de la recta. Igual que el en caso de los puntos, identificamos como iguales las rectas con coordenadas proporcionales. Así, hay un conjunto de parámetros de la forma $(0, 0, 1)$ que se corresponden con la recta en el infinito.

De hecho, la noción algebraica de coordenadas homogéneas provee una simetría completa entre puntos y rectas. Cada punto es representado por tres coordenadas homogéneas. Un punto (x, y, z) pertenece a una recta (a, b, c) si y solo si el producto escalar $ax + by + cz$ es igual a 0 lo que simplemente es reescribir la ecuación de la recta. Geométricamente implica que los correspondiente vectores son ortogonales en el espacio tridimensional.

Números complejos

Para todas las coordenadas y distintos valores, *Cinderella.2* utiliza números complejos lo que resulta muy útil de cara a construcciones en las que, gracias a los valores complejos, hay elementos que no desaparecen. Un ejemplo claro de esta situación es el de los puntos de corte de dos circunferencias. Estos pueden ser dos, uno o ninguno. Consideremos dos circunferencias secantes de centros A y B con puntos de corte C y D siendo la recta a que pasa

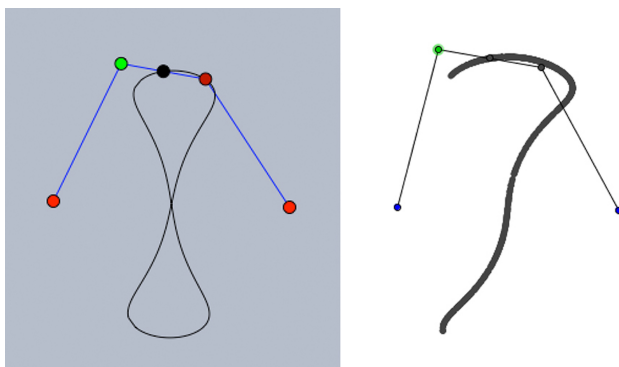


Figura 3.7: La misma construcción, un mecanismo de tres barras, realizada en *Cinderella.2* (izquierda) y Geogebra (derecha). Se puede ver que *Cinderella.2* genera completamente el locus mientras que Geogebra genera solo la mitad
Fuente: Elaboración propia

por los puntos de intersección (Figura 3.6). Encontrar los puntos de intersección implica resolver una ecuación cuadrática que, en los números reales, puede no tener solución. En este caso, las circunferencias no son secantes. Sin embargo, en los números complejos, siempre hay solución así que, aunque gráficamente no haya intersección, las intersecciones siguen existiendo sólo que con coordenadas complejas por lo que no se ven en el plano real. Además, las soluciones complejas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales son conjugadas por lo que los puntos de intersección de dos circunferencias tienen coordenadas complejas conjugadas. De esta forma, la recta que los une es real sin importar donde estén colocadas las circunferencias incluso si los puntos de intersección son complejos y, por lo tanto, invisibles. Al estar *Cinderella.2* completamente implementado sobre números complejos, al mover las circunferencias de forma que ya no sean secantes seguirá representando la recta a .

Esto es de esencial importancia a la hora de representar los *loci* de las construcciones mecánicas ya que las barras de un mecanismo articulado generado en un SGD suelen ser segmentos que unen intersecciones de circunferencias. Así *Cinderella.2* permite que, aunque se llegue a una configuración degenerada del mecanismo articulado (circunferencias sin puntos de corte), la trayectoria sea perfectamente calculada y representada en su totalidad. Un ejemplo de esta situación es el mecanismo de tres barras (Figura 4.10). Mientras que *Cinderella.2* genera completamente el locus del punto medio de la barra central, otro SGD (Geogebra en este caso) sólo genera la mitad.

El principio de continuidad

Hemos comentado con anterioridad que un SGD no debe tener comportamientos inesperados en forma de saltos. *Cinderella.2* está programado

mediante un algoritmo de continuidad ([65], 6.2.5) de forma que no ocurren este tipo de situaciones. En el ejemplo del punto de intersección de dos circunferencias (Figura 3.2), una primera solución puede ser trazar el punto de intersección más próximo a la posición previa ya que esto refleja bien el principio de continuidad. Además, como hemos visto que *Cinderella.2* está basado en números complejos, las intersecciones nunca desaparecen por lo que se puede usar perfectamente este principio.

Sin embargo, esto no es suficiente. Si separamos las circunferencias, llegaremos a una posición en la que los dos puntos de intersección coincidan, es decir, cuando haya un solo punto de intersección. ¿Cómo distinguirlos ahora? Este es un caso de singularidad que el programa tiene que resolver. *Cinderella.2* implementa un método que permite que una construcción se mueva de forma que, cuando se pasa a través de una singularidad, los cambios producidos en la construcción sean de tal forma que las propiedades válidas antes de pasar por la singularidad sigan estando presentes.

La idea subyacente es el llamado principio de continuidad de Poncelet que establece que *si una figura deriva de otra mediante un cambio continuo, toda propiedad de la primera vale para la segunda* [87].

De forma muy resumida, cuando en *Cinderella.2* movemos un punto de la posición *A* a la posición *B*:

- *Cinderella.2* genera una ruta de *A* a *B* en el espacio complejo que evita todas las situaciones degeneradas
- los elementos dependientes se trazan a través del espacio complejo
- el número de pasos intermedios en la ruta se ajustan a la precisión requerida

Todo lo descrito anteriormente hace de *Cinderella.2* el SGD más adecuado a nuestros propósitos. Evidentemente, el programa tiene muchas más funcionalidades como un entorno de simulaciones físicas (CindyLab), un entorno de programación (CindyScript), el poder trabajar en geometrías no euclídeas o la posibilidad de realizar demostraciones automáticas de ciertos teoremas. Además, es destacable la posibilidad de exportar las construcciones en forma de applets de Java para incluirlas en una página web siendo totalmente funcionales de forma independiente del sistema operativo o del navegador.

Capítulo 4

Propuestas didácticas

En este capítulo vamos a proponer una serie de secuencias didácticas de aplicación al aula en relación a los mecanismos articulados. Su implementación se propone para Secundaria y Bachillerato siendo el docente el encargado de temporalizar cada propuesta y aplicarla en el curso que crea más conveniente en función de las capacidades y habilidades del alumnado y los recursos disponibles. También puede aplicar varias propuestas en un mismo grupo con diferentes alumnos adaptando los contenidos y el nivel de exigencia a cada grupo.

La secuenciación que se propone no es cerrada, es decir, la 3 no tiene por qué ir necesariamente después de la 2 ni la 6 después de la 5. Se permite una total flexibilidad en ese aspecto. Señalar que son propuestas abiertas en el sentido de que el docente puede ampliar los contenidos de cada actividad adaptándolos a su antojo.

Por otro lado, muchas actividades no son de respuesta cerrada, es decir, de una única respuesta válida. Las respuestas son abiertas en el sentido de que el alumno puede obtener resultados que, a priori, no están contemplados haciendo uso de su imaginación y creatividad.

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas> están desarrollados estos apartados con todos los materiales disponibles para su uso en el aula.

4.1. A la caza de mecanismos articulados

Los mecanismos articulados forman parte de nuestra realidad cotidiana. Los podemos encontrar en muchos sitios. En esta actividad se propone localizar el mayor número de estos mecanismos y realizar un pequeño estudio del funcionamiento y utilidad de cada uno de ellos.

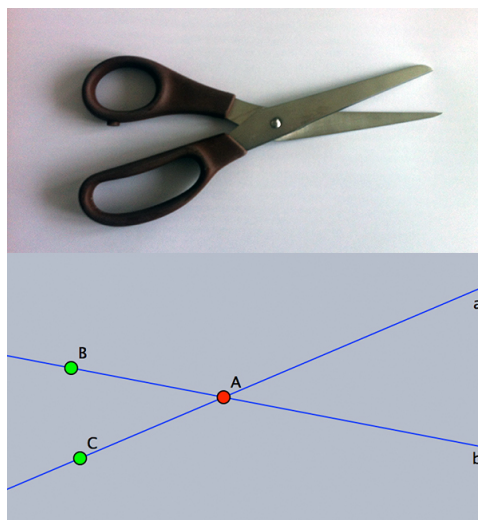


Figura 4.1: Unas tijeras y su esquema como mecanismo articulado
Fuente: elaboración propia

4.1.1. Recursos

El primer y más importante recurso para la realización de esta actividad es el interés y curiosidad de los alumnos por la realidad que les rodea. La labor de búsqueda de mecanismos articulados, el entender su funcionamiento y comprender su utilidad deben ser una fuente de motivación para la realización de esta actividad.

Con el Sistema de Geometría Dinámica *Cinderella.2*, el alumno debe hacer un esquema del funcionamiento de cada mecanismo.

4.1.2. Descripción de la actividad

Se propone localizar mecanismos articulados reales, elaborar un pequeño informe sobre su utilidad y funcionamiento así como realizar un esquema de dicho funcionamiento con *Cinderella.2*. Desde un punto de vista intuitivo, un sistema articulado es un mecanismo compuesto por barras rígidas unidas mediante pivotes. A continuación, vamos a presentar unos sencillos ejemplos.

Tijeras

Uno de los sistemas articulados más sencillos que nos podemos encontrar son unas tijeras. Como sistema articulado (Figura 4.1), consta de dos barras rígidas a y b unidas por un pivote A . El movimiento se genera girando el punto B o el punto C (o ambos a la vez) alrededor del pivote fijo A .

Su utilidad es evidente: unas tijeras sirven para cortar.

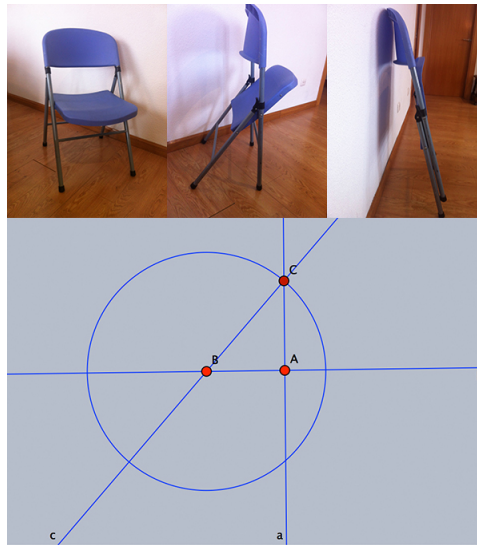


Figura 4.2: Una silla plegable y su esquema como mecanismo articulado
Fuente: elaboración propia

Silla plegable

Un objeto cotidiano que hace uso de un sistema articulado es una silla plegable. En realidad, la silla tiene dos sistemas articulados simétricos que hacen que se pueda plegar, uno a cada lado. Así, lo primero que debemos hacer para estudiar el mecanismo articulado es esquematizar la figura de la silla de tres dimensiones en un mecanismo articulado plano de dos dimensiones. Debemos fijarnos pues en uno de los laterales de la silla. Vemos que como sistema articulado, la silla de la Figura 4.2 consta de tres barras rígidas: a que corresponde al respaldo de la silla y las patas delanteras, b correspondiente al asiento y c correspondiente a las patas traseras de la silla. Estas barras están unidas mediante tres pivotes, dos de ellos fijos A y B y uno deslizante C .

En la realización del esquema, hemos tenido que usar una circunferencia auxiliar para obtener el pivote deslizante C como intersección de dicha circunferencia y la recta a . El movimiento se va a obtener moviendo la recta b .

En este caso, es muy interesante estudiar la diferencia entre los pivotes fijos y el deslizante (Figura 4.3). Los pivotes fijos básicamente son tornillos pero los pivotes deslizantes, en este modelo, son unas piezas que deben permitir tanto deslizar a lo largo de la barra a (respaldo y patas delanteras) como pivotar con la barra c (patas traseras). En el esquema, este pivote deslizante es representado simplemente como un punto C .

Se puede complementar este pequeño estudio sobre el mecanismo articulado que permite a una silla ser plegable con la búsqueda de otros modelos



Figura 4.3: Un pivote fijo (izquierda) y un pivote deslizante (derecha) en una silla plegable

Fuente: elaboración propia

de sillas plegables para comparar tanto el esquema de funcionamiento para el plegado de la silla cuanto el método de pivote deslizante empleado.

Su utilidad es evidente: una silla sirve para sentarse.

Canapé abatible

En este caso, hemos localizado un mecanismo articulado que permite abrir un canapé abatible (Figura 4.4). Vemos que es un sistema articulado de cuatro barras. La barra a corresponde a la estructura de madera y la barra b corresponde al somier. Consta de cuatro pivotes A , B , C y D . A mayores, hay una barra hidráulica que permite la apertura sin apenas esfuerzo.

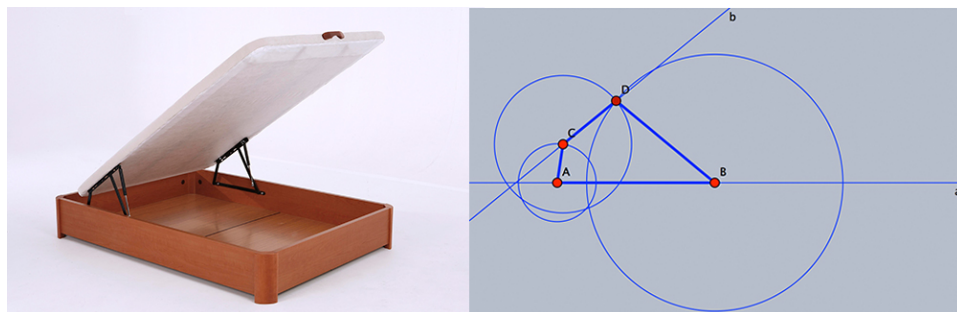


Figura 4.4: Un canapé abatible y el esquema del mecanismo articulado

Fuente: elaboración propia

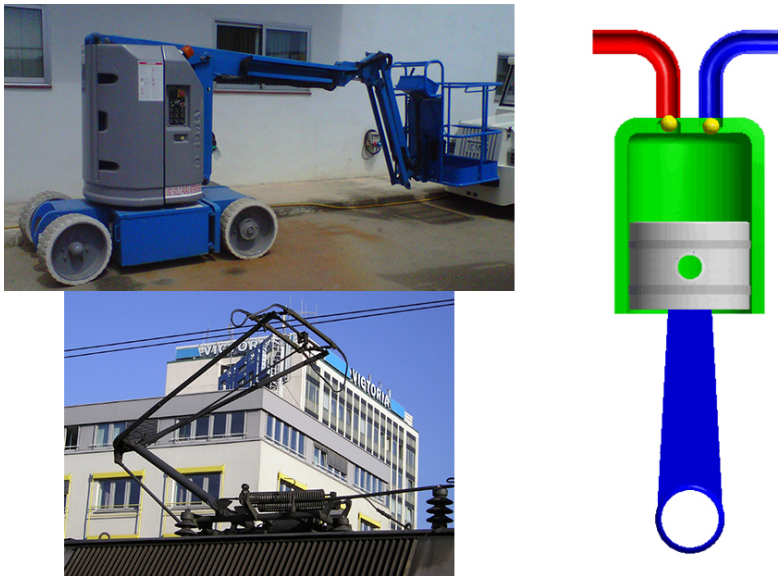


Figura 4.5: Ejemplos de mecanismos articulados: una plataforma elevadora, un pantógrafo ferroviario y un mecanismo de biela-pistón para un motor de combustión interna

Fuente: Wikipedia

En este caso, hemos trazado tres circunferencias auxiliares para generar las cuatro barras del mecanismo. Las medidas de dichas circunferencias y, por tanto, las medidas de las barras, son esenciales para que la recta b sea horizontal cuando C esté en la recta a , es decir, para que cuando se cierre el canapé, el somier quede horizontal. En el estudio de este mecanismo, los alumnos deben tomar las medidas reales de las barras para realizar la construcción a escala en *Cinderella.2*.

Este tipo de mecanismos de cuatro barras (siendo una de ellas fijas) es el más utilizado en ingeniería debido a la sencillez del sistema y su versatilidad. En este caso, el mecanismo permite abrir el canapé.

Otros mecanismos

Además de los propuestos, la tarea consiste en encontrar otros, cuantos más mejor, y realizar el informe con un esquema del funcionamiento del mecanismo. Algunos de los mecanismos articulados que se pueden estudiar pueden ser una plataforma elevadora, un pantógrafo ferroviario o el mecanismo de biela-pistón para un motor de combustión interna (Figura 4.5).

Se debe prestar mucha atención a las uniones (pares cinemáticos) de las barras (eslabones) del mecanismo diferenciando las articulaciones (rotacionales) de las guías correderas (prismáticos o deslizantes) y estudiando en

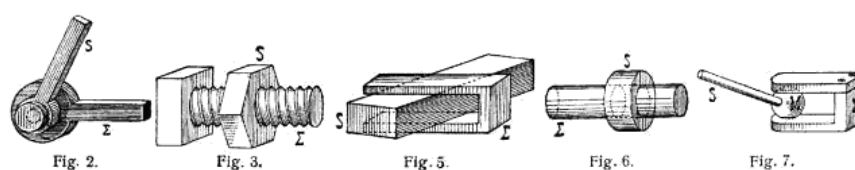


Figura 4.6: Algunos tipos de uniones entre eslabones (pares cinemáticos)
Fuente: Wikipedia

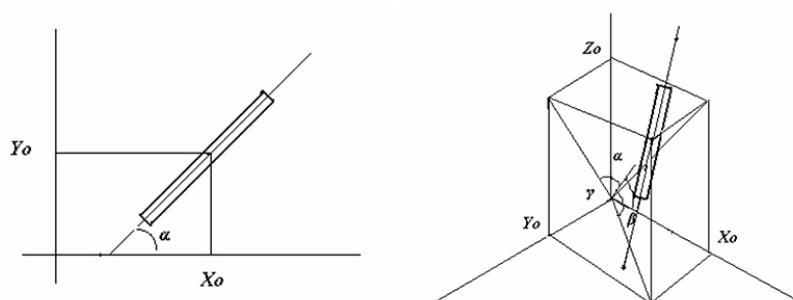


Figura 4.7: Grados de libertad en el plano y en el espacio
Fuente: <http://www.uhu.es/rafael.sanchez/ingenieriamaquinas/carpetaapuntes.htm/Apuntes%20Tema%201.pdf>

detalle dichos pares cinemáticos, sobre todo los deslizantes (Figura 4.6).

Un estudio detallado sobre las uniones entre piezas (o eslabones) de un mecanismo articulado puede encontrarse en *Theoretische Kinematik: Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens*, obra con la que Franz Reuleaux estableció los cimientos teóricos de la Cinemática Moderna. Reuleaux definió un mecanismo como la *combinación de cuerpos resistentes conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo y cuyo propósito es transformar el movimiento*, definición acorde con los mecanismos articulados objeto de esta tesis.

Siguiendo esta línea referente a la Ingeniería Mecánica, otra de las actividades que se puede proponer dependiendo del nivel académico del alumnado es la obtención del número de grados de libertad de cada mecanismo articulado. Destacar que los sistemas articulados que estamos estudiando son mecanismos planos cuyo movimiento tiene lugar solo en dos dimensiones. El número de grados de libertad (GDL) de un sistema es el número de parámetros independientes que se necesitan para definir unívocamente su posición en el espacio en cualquier instante. Refiriéndose a un cuerpo rígido en el plano, se requiere de tres parámetros (GDL): dos coordenadas lineales (x, y) y una coordenada angular α . En el espacio, se requiere de seis GDL: tres distancias (x, y, z) y tres ángulos (α, β, γ) (Figura 4.7).

Para un mecanismo plano (como los estudiados), el número de grados

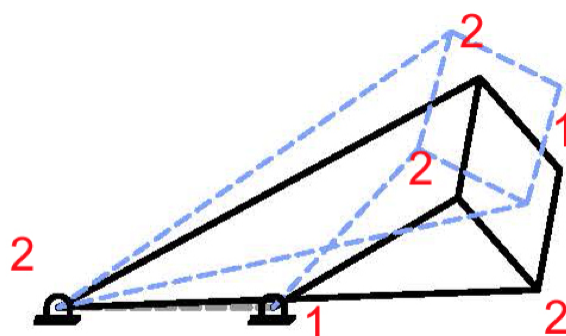


Figura 4.8: Elementos del mecanismo de Peaucellier

Fuente: http://courses.csail.mit.edu/6.S080/lectures/02_all.pdf

de libertad del mismo se puede calcular mediante el criterio de Grübler-Kutzbah:

$$m = 3(n - 1) - 2j_1 - j_2$$

donde:

m es el número de grados de libertad

n es el número de elementos (eslabones) del mecanismo incluyendo el de agarre al suelo

j_1 es el número de uniones de 1 grado de libertad

j_2 es el número de uniones de 2 grados de libertad

Vamos a ver un ejemplo calculando el número de grados de libertad del mecanismo de Peaucellier (Figura 4.8):

$n = 8$ ya que se debe considerar la barra de sujeción a suelo

$j_1 = 10$ ya que hay 4 pares cinemáticos dobles de 1 grado de libertad

$j_2 = 0$ ya que no hay pares cinemáticos de 2 grados de libertad

Por lo tanto, $m = 3(8 - 1) - (2 \cdot 10) = 1$, es decir, el mecanismo de Peaucellier tiene un grado de libertad.

En el capítulo 1 de [79] pueden verse más ejemplos sobre la obtención del número de grados de libertad de distintos mecanismos así como la esquematización de estos mecanismos.

4.1.3. Vinculación curricular

Con esta actividad se pretende ayudar al alumnado a alcanzar algunos de los once objetivos generales de la enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Secundaria [3]:

- 2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
- 5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
- 6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
- 7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- 10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

4.2. Manipulando mecanismos

Con esta actividad, se pretende que los alumnos manipulen construcciones de mecanismos articulados que se les van a proporcionar ya realizadas para que, mediante su estudio y manipulación, realicen un pequeño informe acerca de su funcionamiento, sus propiedades, la curva que generan y, en su caso, obtengan algunas conclusiones.

4.2.1. Recursos

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula2> hay disponibles una buena cantidad de construcciones realizadas con *Cinderella.2* para su descarga, manipulación y estudio.

También, hay disponible un ejemplo de hoja de actividad a entregar al alumno para la realización de la actividad.

4.2.2. Descripción de la actividad

A cada alumno o grupo de alumnos se le puede facilitar una hoja con una imagen del mecanismo, la dirección web donde se puede tanto manipular

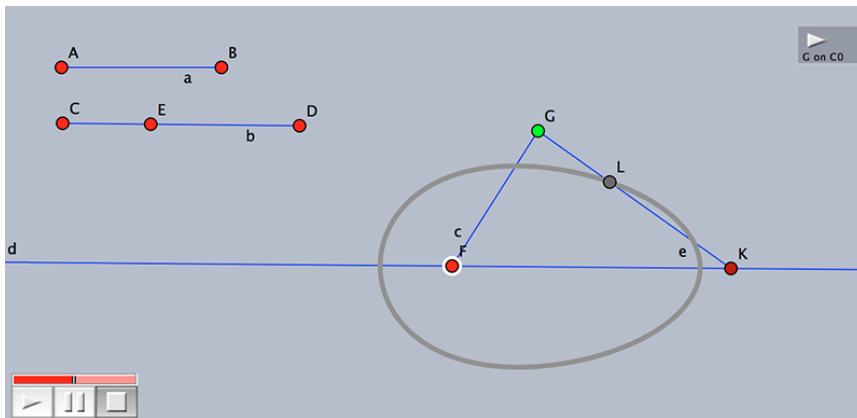


Figura 4.9: Mecanismo de dos barras para dibujar la curva huevo
Fuente: elaboración propia

online la construcción como descargar dicha construcción y un pequeño gui3n para el estudio del mecanismo y de la curva que genera.

Esta actividad es abierta en el sentido de que no conocemos a priori las conclusiones a las que pueden llegar los alumnos. Es m3s, se les debe incentivar a ser originales y creativos en dichas conclusiones esperando que nos *sorprendan* llegando a resultados que, como docentes, no podemos prever. En lo que hay que incidir es tanto en el rigor de las explicaciones como de los resultados.

Vamos a ver un par de ejemplos.

Mecanismo para dibujar la curva *huevo*

En la Figura 4.9 puede verse el mecanismo. En el informe que debe presentar el alumno, debe constar al menos la descripci3n del mecanismo, una explicaci3n de lo que pasa al mover distintos puntos de la construcci3n y qu3 ocurre al cambiar las medidas de las barras, todo ello relacionado con la curva que se genera.

Descripci3n del mecanismo

El mecanismo consiste en dos barras FG y GK y tres pivotes F , G y K . El pivote K es deslizante. El movimiento se produce cuando el pivote G gira alrededor del pivote F . Esto produce un movimiento tal que la barra GK se mueve haciendo que el pivote K se desplace a trav3s de la recta d . En este movimiento, el pivote F es fijo.

En la barra GK hay un punto L cuya trayectoria genera la curva *huevo*.

Este mecanismo es el conocido como de biela-manivela que transforma un movimiento circular en uno rectil3neo o viceversa. Se puede encontrar este tipo de mecanismos en las antiguas m3quinas de tren o en el sistema biela-pist3n de un motor de combusti3n interna.

Desplazando puntos del mecanismo

- Al desplazar el punto F , se desplaza toda la construcción.
 - Al desplazar el punto G , éste gira alrededor del punto F y se genera el movimiento del mecanismo.
 - Al desplazar el punto K , cambia la inclinación de la recta d .
- En ninguno de estos casos varía la forma de la curva generada.

Cambiando las medidas del mecanismo

En la construcción, podemos observar dos segmentos AB y CD que corresponden con las medidas de las barras de forma que:

$$\begin{aligned} |AB| &= |FG| \\ |CD| &= |GK| \end{aligned}$$

En el segmento CD vemos un punto E . Se cumple que

$$\begin{aligned} |CE| &= |GL| \\ |ED| &= |LK| \end{aligned}$$

Comenzamos desplazando el punto E , es decir, cambiando de posición el punto L del mecanismo que genera la curva. Si desplazamos el punto E , al acercarse este al punto D , la forma del huevo es más achatada mientras que si E se acerca a C , la forma del huevo es más circular. En los casos extremos, cuando hacemos coincidir E con C , el mecanismo dibuja una circunferencia. Si hacemos coincidir E con D , el mecanismo dibuja un segmento.

Nos fijamos ahora en las medidas de las barras:

- Si $|FG| < |GK|$, el mecanismo dibuja una curva con forma de huevo
- Si $|FG| > |GK|$, la curva cambia y el mecanismo dibuja una curva cóncava con forma de media luna
- Si $|FG| = |GK|$, el mecanismo dibuja una elipse

Vemos pues que la curva que dibuja el mecanismo depende tanto de la medida de las barras cuanto de la posición del punto que la traza.

Mecanismo de tres barras

En la Figura 4.10 puede verse el mecanismo.

Descripción del mecanismo

El mecanismo consiste en tres barras EG , GK y KF y cuatro pivotes E , F , G y K . Ninguno de ellos es deslizante. El movimiento se produce cuando el pivote G gira alrededor del pivote E . Esto produce un movimiento de las barras GK y KF . En este movimiento, los pivotes E y F son fijos.

En la barra GK hay un punto H cuya trayectoria genera la curva conocida como *lemniscoide* ([36], pág. 119)

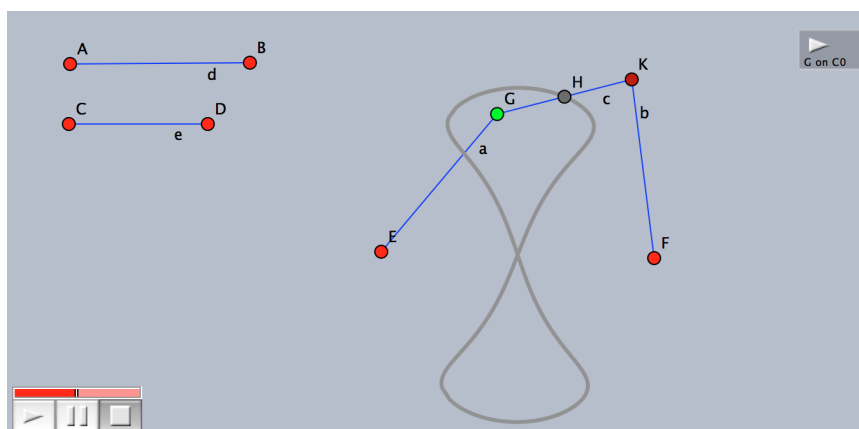


Figura 4.10: Mecanismo de tres barras
Fuente: elaboración propia

El mecanismo presentado es simétrico en el sentido de que las barras EG y KF miden lo mismo. Obviamente, la curva trazada es simétrica debido a esta simetría del mecanismo.

Desplazando puntos y variando las medidas del mecanismo

El punto G solo puede girar alrededor del punto E . El punto K no puede moverse independientemente. Su movimiento depende de los otros. Podemos observar esta dependencia en el color rojo del punto K que es algo más oscuro que el de los puntos E y F . El programa *Cinderella.2* colorea por defecto de esta forma los puntos al realizar la construcción.

Debido a la simetría de la construcción antes mencionada, el mover el punto E tiene el mismo efecto que mover el punto F , es decir, lo que va a variar es la distancia entre los dos pivotes fijos del mecanismo.

Vamos a estudiar qué ocurre al cambiar la distancia entre E y F suponiendo que las barras laterales son más largas que la barra central.

Si vamos separando el punto E del F , la forma en ocho de la curva se va estrechando hasta llegar a una posición degenerada en la que las barras GK y KF está alineadas. Si separamos un poco más el punto E del punto F , desaparecen dos barras del mecanismo y, por tanto, la curva dibujada. Esto se debe a que la suma de las longitudes de las barras GK y KF es menor que la distancia del punto G al punto F .

Por otro lado, se pueden mover los puntos F y G de forma que las tres barras estén casi alineadas. Vemos que el trazado de la curva va siendo cada vez más pequeño produciéndose un movimiento *serpenteante* del mecanismo.

En el sentido inverso, es decir, si vamos disminuyendo la distancia entre los puntos E y F , vemos que llega un momento en que la curva deja de tener forma de ocho para pasar a tener un punto cúspide (Figura 4.11, 1). El alumno puede estudiar la relación entre distancias (con la herramienta *medir*

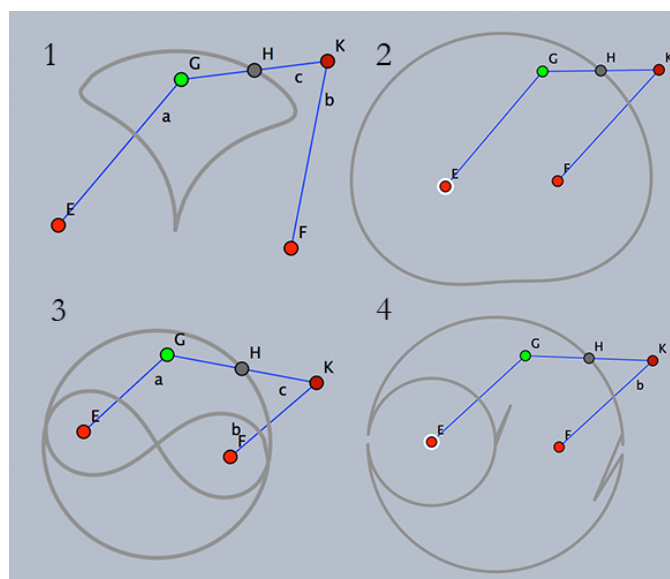


Figura 4.11: Distintas configuraciones de un mecanismo de tres barras
Fuente: elaboración propia

distancia del programa) para ver en qué momento ocurre esto considerando distintos casos particulares.

Al seguir disminuyendo la distancia entre E y F (recordemos que las barras laterales son más largas que la central), va desapareciendo el punto cúspide de la curva que se va transformando en un media luna hasta que llega un momento en el que la curva rodea a los puntos F y G (Figura 4.11, 2). Es fácil comprobar que esto ocurre a partir de que la distancia entre F y G coincide con la medida de la barra GK . En el caso extremo en que E coincide con F , el mecanismo traza una circunferencia.

Veamos qué ocurre ahora cuando la barra central es más larga que las laterales

En la construcción presentada, al disminuir la medida del segmento AB de forma que sea menor que la del segmento CD , el mecanismo sigue trazando una lemniscoide (curva en forma de ocho).

Al aumentar la distancia entre E y F , ocurre lo mismo que en caso anterior cuando las barras laterales eran más largas que la central.

Sin embargo, al disminuir la distancia entre E y F vemos que la curva conserva su simetría hasta transformarse en una combinación entre una circunferencia y una lemniscata (Figura 4.11, 3) en el momento en que la distancia entre E y F coincide con la medida de la barra central. Si continuamos disminuyendo la distancia entre E y F vemos que la curva gira dos veces sobre sí misma hasta que la distancia entre E y F es la mitad de la de la barra central, momento a partir del cual la curva toma forma de

riñón. En el caso extremo en que E y F coincidan, el mecanismo traza una circunferencia.

Si movemos el mecanismo de forma que las medidas de las tres barras sean iguales entre sí e iguales a la distancia entre E y F , se produce una configuración degenerada en el que se debían trazar tres circunferencias pero *Cinderella.2* no puede realizar esos cálculos ofreciendo resultados anómalos (Figura 4.11, 4).

Otros mecanismos

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula2> se presentan una gran cantidad de construcciones dinámicas de distintos mecanismos para presentar a los alumnos de cara a que realicen estudios como los que acabamos de ver.

4.2.3. Vinculación curricular

Según la legislación vigente, *las matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento. El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto [3].*

Esta actividad hace hincapié en este aspecto. La precisión en las explicaciones acerca del funcionamiento de estos mecanismos es uno de los objetivos y principal criterio evaluador del trabajo del alumnado.

4.3. Construyendo mecanismos en *Cinderella.2*

Con el Sistema de Geometría Dinámica *Cinderella.2* se pueden crear simulaciones interactivas de mecanismos articulados así como de la curva generada por la trayectoria seguida por un punto del mecanismo (*locus*). En esta actividad se pretende que el alumno realice simulaciones en *Cinderella.2* de distintos mecanismos articulados. Se van a proponer algunos pero queda abierta la posibilidad de realizar más construcciones.

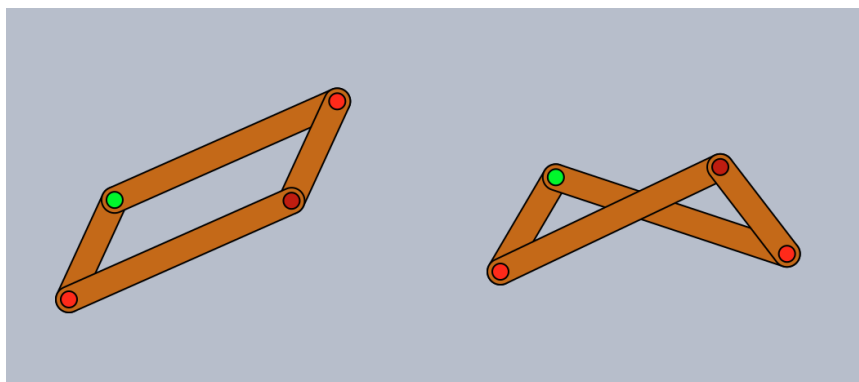


Figura 4.12: Paralelogramo y contrapalelogramo
Fuente: elaboración propia

4.3.1. Recursos

En <http://vimeo.com/channels/732336> se ha creado para esta tesis un canal de vídeos acerca de la utilización básica del programa *Cinderella.2* y la creación de simulaciones de mecanismos articulados. Se propone la visualización de dichos vídeos por parte del alumnado siguiendo la numeración correspondiente y la creación en *Cinderella.2* de los mecanismos presentados.

4.3.2. Descripción de la actividad

Se trata de que el alumnado construya una serie de mecanismos articulados y las curvas que generan mediante el sistema de Geometría Dinámica *Cinderella.2* y complemente dichas construcciones con pequeñas investigaciones relativas al mecanismo en cuestión.

Se puede empezar con construcciones sencillas como un mecanismo de biela manivela, uno de tres barras (ver vídeos) o un paralelogramo y un contrapalelogramo (Figura 4.12). También es interesante construir el mecanismo de Peaucellier que traza una línea recta complementando esta construcción con un pequeño estudio por parte de los alumnos sobre la historia de este mecanismo y la geometría que hay detrás de esta construcción para hacer lo que hace.

Avanzando en la complejidad de los mecanismos, vamos a proponer unos cuantos más.

Mecanismo de tres barras que traza la lemniscata de Bernoulli

Es un mecanismo articulado de tres barras AB , BC y CD . Los puntos A y D son fijos y el punto B genera el movimiento girando alrededor de A . La trayectoria del punto L es la que genera la curva (Figura 4.13).

Sus medidas cumplen que:

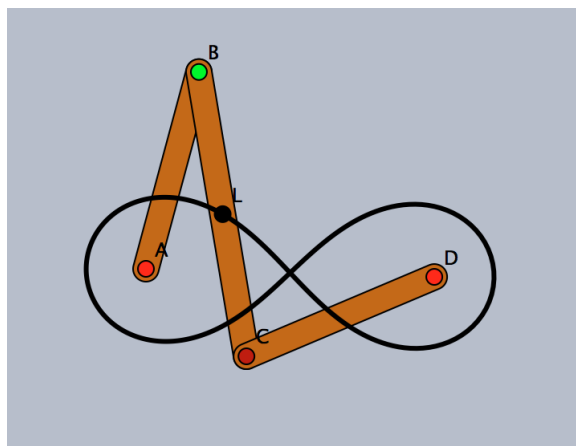


Figura 4.13: Mecanismo de tres barras que traza la lemniscata de Bernoulli
Fuente: elaboración propia

$$\begin{aligned} |AB| &= |CD| \\ |BC| &= \sqrt{2} \cdot |AB| \end{aligned}$$

siendo L el punto medio del segmento BC .

Para su construcción se van a necesitar barras de dos tipos, una con medida a y otra con medida $\sqrt{2} \cdot a$ que habrá que construir previamente. Vemos aquí la necesidad de unos mínimos conocimientos geométricos para realizar esta construcción.

Esta construcción se puede complementar con el estudio de la ecuación de la lemniscata de Bernoulli y el porqué un mecanismo de este tipo y con estas medidas la genera. Un pequeño artículo al respecto se puede encontrar en <http://arxiv.org/pdf/1003.3078.pdf>. Además, la lemniscata de Bernoulli es una curva muy interesante que cumple una serie de propiedades que pueden ser aprovechadas para complementar esta actividad como investigación por parte de los alumnos.

Inversor de Hart para trazar una línea recta

Si el mecanismo de Peaucellier consta de siete barras y traza una línea recta, el mecanismo de Hart hace lo mismo solamente con cinco. Consiste en un contraparelelogramo de cuatro barras iguales dos a dos que transforma un movimiento circular en uno rectilíneo aplicando una inversión como la del mecanismo de Peaucellier. Es por esto por lo que a los mecanismos de Peaucellier y Hart se les conoce como inversores.

Este mecanismo (Figura 4.14) consta de cinco barras AB , BC , CD , AD y OM . Los puntos O y P son fijos y el punto M genera el movimiento girando alrededor de O . El punto L describe una línea recta.

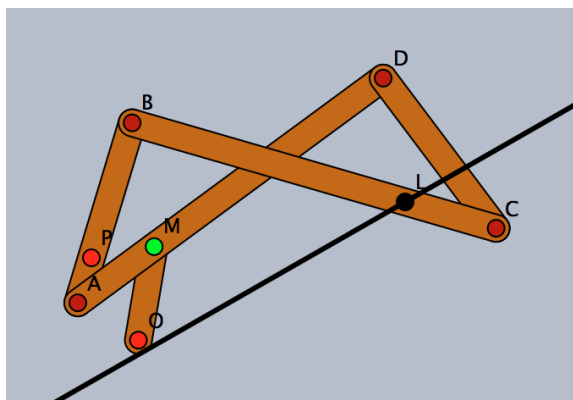


Figura 4.14: Inversor de Hart para trazar una línea recta
Fuente: elaboración propia

Sus medidas cumplen que:

$$\begin{aligned} |AB| &= |CD| \\ |BC| &= |AD| \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} |AM| &= |OM| = |LC| = \frac{|AD|}{4} \\ |AP| &= \frac{|AB|}{4} \end{aligned}$$

Cardioide, una curva con corazón

La cardioide es una curva llamada así por su semejanza con el dibujo de un corazón. Vamos a proponer dos mecanismos articulados que la dibujan.

El primero de ellos (Figura 4.15) fue ideado por el ingeniero estadounidense Robert C. Yates (1904-1963) ([115] pág. 6). Es un mecanismo articulado de cinco barras AB , BD , DC , CP y BP . Los puntos A y O son fijos y el punto B genera el movimiento girando alrededor de A . La trayectoria del punto P genera la cardioide.

Sus medidas cumplen que:

$$\begin{aligned} |AB| &= |OD| = b \\ |AO| &= |BD| = |CP| = a \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} |BP| &= |DC| = c = b + 2a \\ a^2 &= b \cdot c \end{aligned}$$

En este caso, vamos a necesitar barras de tres medidas distintas siendo la medida de una de ellas la media proporcional de las otras dos.

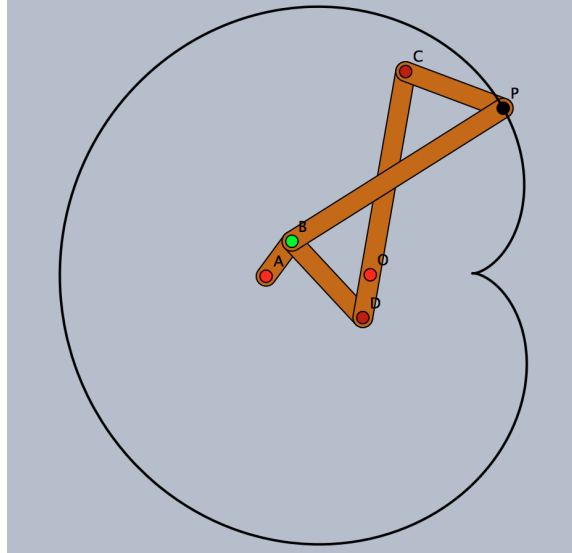


Figura 4.15: Mecanismo de Yates para trazar la cardioide
Fuente: elaboración propia

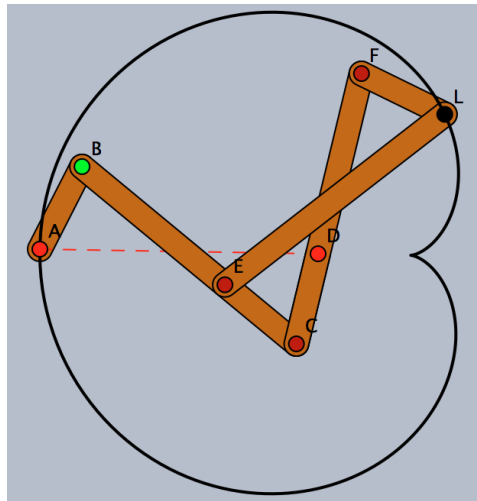


Figura 4.16: Mecanismo de cinco barras para trazar la cardioide
Fuente: elaboración propia

Otro mecanismo para trazar la cardioide es el de la Figura 4.16. Consta de cinco barras AB , BC , CF , FL y LE . Los puntos A y D son fijos y el punto B genera el movimiento girando alrededor de A . La trayectoria del punto L genera la cardioide.

Sus medidas cumplen que:

$$\begin{aligned} |BC| &= |CF| = |EL| = |AD| = a \\ |AB| &= |FL| = |CD| = |CE| = b \end{aligned}$$

donde

$$a = 3 \cdot b$$

Si nos fijamos en este mecanismo, podemos observar que consiste en dos contraparalelogramos $ABCD$ y $CFLE$ combinados. La barra AD en realidad es fija y no interviene en el movimiento del mecanismo.

Tanto en esta construcción como en la anterior se puede complementar la actividad estudiando la ecuación de la cardioide en polares y tratando de demostrar porqué estos mecanismos generan esta curva.

Otros mecanismos

Además de la construcción de los mecanismos que acabamos de proponer, se puede realizar por parte del alumnado cualquier otra construcción de la presente tesis correspondiente al apartado de evolución histórica de los mecanismos articulados presentados en forma de vídeo en el canal creado a tal efecto disponible en https://www.youtube.com/playlist?list=PLnx_YZQNvSPiik7TM2YBwYdfuMDqdGtjw.

Por otro lado, se puede consultar la *Kinematic Models for Design Digital Library* (KMODDL) de la Universidad de Cornell donde, entre otros, se presenta la colección de mecanismos cinemáticos diseñados por Franz Reuleaux (1829 - 1905) y contruidos por su amigo Gustav Voigt. Está disponible en <http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=reuleaux>.

Reuleaux creía que había principios científicos detrás del diseño e invención de nuevas máquinas, lo que se conoce hoy en día como *síntesis de mecanismos* [74]. Franz Reuleaux estableció los cimientos de la Cinemática siendo el primer ingeniero en aplicar ideas topológicas en Cinemática. Creía en el uso de estos modelos para presentar conceptos matemáticos y cinemáticos. Así, construyó una colección de 800 modelos y envió 350 a universidades de todo el mundo. Aunque gran parte de su colección fue destruida en la Segunda Guerra Mundial, la mayor parte que se conserva corresponde a la de la Universidad de Cornell que, desde 2002, lleva trabajando en el proyecto KMODDL presentando estos modelos en Internet con imágenes, información histórica y vídeos interactivos que permiten explorar cómo funcionan.

Una parte importante de este proyecto es explicar los principios matemáticos presentes en cada modelo para su uso en el aula.

Del mismo modo, se puede consultar el *Laboratorio delle Macchine Matematiche* de la Universidad de Módena y Reggio Emilia, un laboratorio de investigación de la Didáctica de las Matemáticas (en particular de la Geometría) a través del uso de instrumentos como los presentados en esta tesis. Está disponible en <http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html>. El laboratorio cuenta con maquetas de antiguos instrumentos geométricos y la *Associazione Macchine Matematiche* ha elaborado material didáctico incluyendo simulaciones digitales de los instrumentos del laboratorio.

4.3.3. Vinculación curricular

En las actividades propuestas en este apartado, vemos como las explicaciones acerca del funcionamiento del programa *Cinderella.2* se realizan mediante videotutoriales. Estos vídeos los puede ver el alumno en casa de forma que es en el aula cuando realiza las tareas y tiene al docente a su disposición para resolver las dudas que se le puedan plantear. Además, esas dudas suelen surgir cuando se realizan las actividades. Este cambio de planteamiento metodológico en el que el docente deja de ser un mero transmisor oral de información a un grupo de sujetos pasivos receptores de esa información y en el que las tareas activas se mandan como deberes para casa, recibe el nombre de *Flipped classroom*, es decir, la clase invertida o clase al revés. La realidad nos muestra que los alumnos son voraces consumidores de vídeos en Internet. La tecnología permite hoy en día que cualquier docente con conocimientos mínimos de informática realice videotutoriales y los pueda subir a un canal de Internet para que los alumnos realicen su visionado en cualquier sitio y cualquier lugar (aprendizaje ubicuo 24/7) para que el aula se convierta en un espacio de aprendizaje activo donde el docente deja de ser el protagonista pasando dicho protagonismo al alumnado.

Por otro lado, el que el alumno se enfrente al reto que supone la realización de este tipo de construcciones interactivas, desarrolla la competencia de aprender a aprender definida en la legislación [2] como *disponer de habilidades para iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuar aprendiendo de manera cada vez más eficaz y autónoma de acuerdo a los propios objetivos y necesidades*.

Respecto al conjunto de conceptos geométricos y matemáticos tratados en esta propuesta, entre otros, podemos citar:

- Punto, recta, circunferencia
- Proporcionalidad de segmentos
- Paralelogramos

- Inversión
- Cónicas, cardioide, lemniscata de Bernouilli
- Coordenadas polares

El docente debe ser el encargado de usar estas actividades para realizar las explicaciones acerca de estos (y otros) conceptos complementando sus explicaciones y tareas con esta propuesta.

Relacionado con otras asignaturas, vemos que el manejo básico del programa *Cinderella.2* tiene una relación directa con la asignatura de Dibujo Técnico. Además, la posibilidad de relacionar históricamente la invención de estos mecanismos con la Historia Universal (línea recta y la máquina de vapor) da lugar a una interesante serie de actividades a realizar de forma interdisciplinar en el aula.

4.4. Mecanismos de cuatro barras

Un mecanismo de cuatro barras es la cadena cinemática cerrada más simple de eslabones unidos con un grado de libertad. El concepto de cadena cinemática fue desarrollado por Franz Reuleaux (1829 - 1905), ingeniero alemán. Una cadena cinemática se obtiene al conectar entre sí varios eslabones (barras) de tal forma que sea posible el movimiento relativo entre ellos de forma que si se proporciona un movimiento de entrada, se obtiene como respuesta un movimiento de salida. Si no son posibles dichos movimientos, se trata de una estructura [89].

Casi todas las cadenas cinemáticas tienen un eslabón fijo (soporte) que constituye el cierre de la cadena siendo móviles los demás. Vemos entonces que un mecanismo de cuatro barras es como uno de tres barras al que hemos añadido la barra que une los dos pivotes fijos.

Por medio de mecanismos de cuatro barras en combinación con otros, se pueden construir mecanismos más complejos. Además, los mecanismos de cuatro barras permiten generar directamente una amplia variedad de movimientos (curvas). Por todo esto y por la economía en su construcción, este tipo de mecanismo es el más utilizado en máquinas y se puede encontrar como mecanismos de aperturas de puertas, suspensiones de vehículos, limpiaparabrisas, formando parte de la estructura de maquinarias tales como prensas, excavadoras, máquinas transportadoras, etc.

4.4.1. Recursos

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula4> se presentan actividades y recursos para la realización de las actividades propuestas. Por otro lado, es interesante

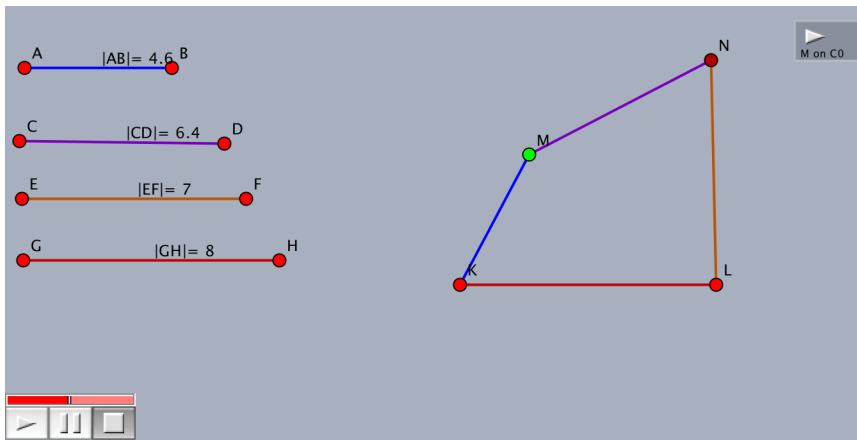


Figura 4.17: Mecanismo articulado de cuatro barras y las medidas de las barras

Fuente: elaboración propia

consultar una lección a cargo de Alexander Slocum, profesor de Ingeniería Mecánica del MIT, acerca de mecanismos articulados en la que presta especial atención a los de cuatro barras. Está disponible en este enlace <http://goo.gl/S1Bj5z>.

4.4.2. Descripción de la actividad

Las actividades propuestas se van a basar tanto en la manipulación de construcciones interactivas para la obtención de resultados cuanto en el estudio puramente matemático de mecanismos articulados de cuatro barras.

Clasificación: ley de Grashof

Comenzamos estudiando el movimiento de un mecanismo de cuatro barras manipulando las medidas de las barras para realizar una primera clasificación de este tipo de mecanismos en función de dichas medidas. Dicha clasificación va a venir dada por la ley de Grashof [51] enunciada en 1883 por el ingeniero alemán Franz Grashof (1826-1893) y no demostrada formalmente hasta 1979 por Burton Paul (1931-2007) ([84] y [23]).

La ley de Grashof establece que *la condición necesaria para que al menos una barra del mecanismo pueda realizar giros completos respecto de otra es que la suma de las longitudes de la barra más larga (l) y más corta (s) sea menor o igual que la suma de las longitudes de las otras dos barras (p, q).*

Es decir:

$$s + l \leq p + q$$

donde s (*short*) es la longitud de la barra más corta, l (*long*) la longitud de la barra más larga y p y q las longitudes de las otras dos.

Se denomina *manivela* al eslabón (o barra) que puede realizar un giro completo, *balancín* al que tiene un movimiento de giro alternativo. El eslabón que sirve de conexión se denomina *biela* o *acoplador* que también puede ser manivela o balancín.

Así, si en un mecanismo articulado de cuatro barras al menos una de ellas realiza giros completos, se dice que cumple la condición de Grashof. Esto permite que el accionamiento del mecanismo se pueda realizar mediante un motor de giro continuo. De esta forma se obtiene una primera clasificación de los mecanismos de cuatro barras. Si cumplen la condición de Grashof (Clase I) o si no la cumplen (Clase II).

La actividad va a consistir en cambiar las medidas de las cuatro barras del mecanismo que se puede descargar en <https://drive.google.com/file/d/0B9bnyqYzrVy0bE11N1FkX014R1k/view?pref=2&pli=1> (Figura 4.17) para que el alumno deduzca la condición de Grashof y pueda realizar una clasificación de este tipo de mecanismos. Se propone al alumno que cambie las medidas de las barras para que:

- el mecanismo tenga una manivela y un balancín
- el mecanismo tenga dos balancines
- el mecanismo tenga dos manivelas

Cuantas más construcciones de cada tipo se encuentren, mejor. El alumno deberá ir apuntando las medidas en una tabla como esta:

$ AB $	$ CD $	$ EF $	$ GH $	Manivelas	Balancines	$s + l$	$p + q$

donde las cuatro primeras columnas corresponden a las medidas de las barras de la izquierda que se corresponden, por colores, con las medidas de las barras del mecanismo. En la columna Manivelas se deberá apuntar el número de manivelas (0, 1 o 2) del mecanismo y en la de Balancines el número de balancines del mecanismo (2, 1 o 0). En la columna $s + l$ se debe anotar la suma de las longitudes de la barra más corta y la más larga mientras que en la columna $p + q$ se deberá anotar la suma de las medidas de las otras dos para luego comparar estos dos números y deducir cuándo un mecanismo es de Grashof, es decir, cuándo tiene al menos una manivela.

En <https://goo.gl/Pg52DU> se puede ver un ejemplo del documento a entregar al alumnado.

Es muy interesante que el alumno vea en qué situaciones *límite* se pasa de un caso a otro. Así, se debe obtener la siguiente clasificación:

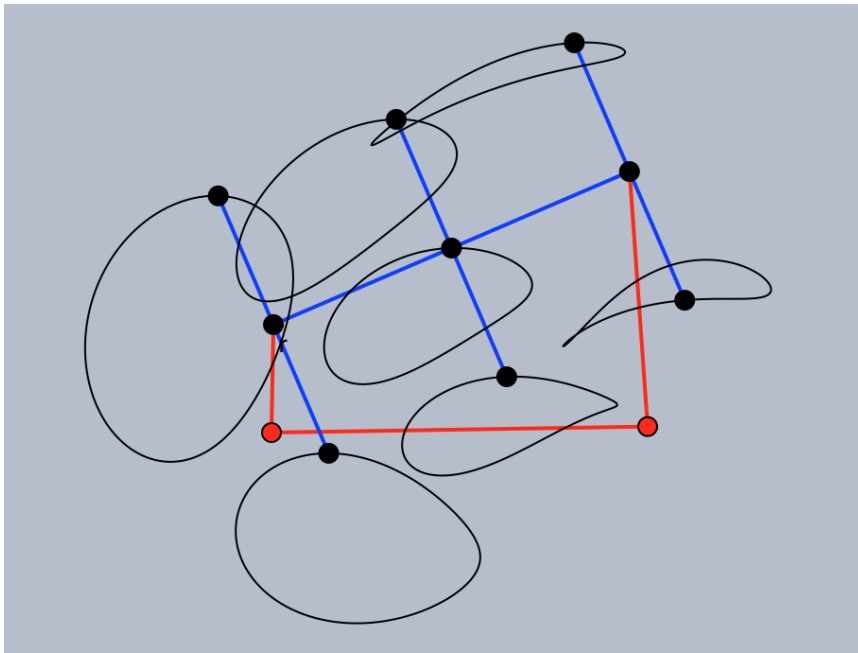


Figura 4.18: Mecanismo articulado de cuatro barras y curvas de acoplador
Fuente: elaboración propia

- Mecanismo manivela-balancín (de Grashof)
- Mecanismo de doble manivela (de Grashof)
- Mecanismo de doble balancín (de Grashof)
- Mecanismo de doble balancín (de no Grashof)
- Mecanismos plegables (de Grashof)

Esta primera clasificación se puede complementar, en función del alumbrado, con la de Hartenberg y Denavit de 1964 [52], la de Dijksman de 1976 [36] o una más reciente (1996) para el estudio de sistemas mecánicos biológicos en animales [77].

Curvas de acoplador

Se denomina curva de acoplador a la curva que describe un punto de la biela o acoplador de un mecanismo durante su movimiento (Figura 4.18). Las curvas de acoplador para un mecanismo de cuatro barras fueron estudiadas por Chebyshev en 1853 [25], por Cayley y Roberts en 1875 [94], por Darboux en 1879 [29] y por Koenigs en 1897 [63].

Para cada mecanismo de cuatro barras, el plano del acoplador tiene infinitos puntos por lo que un mismo mecanismo de cuatro barras puede generar

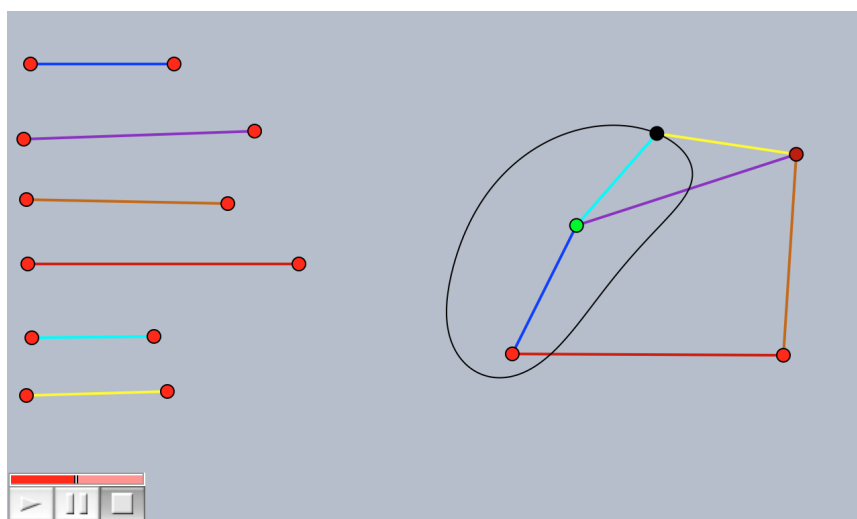


Figura 4.19: Mecanismo articulado de cuatro barras y curva de acoplador mediante un triángulo

Fuente: elaboración propia

infinitas trayectorias distintas siendo este una característica muy interesante de cara a aplicaciones en la industria debido a la economía en la construcción del mecanismo, su versatilidad y a las posibilidades que ofrece.

Las curvas generadas mediante un mecanismo de este tipo son algebraicas de grado 6 ([75] y [52], capítulo 6).

Otra forma muy interesante de generar estas curvas es añadir un triángulo de lados variables al acoplador para que el vértice genere la curva (Figura 4.19). Tenemos que señalar que cada mecanismo de cuatro barras que cumple la condición de Grashof posee uno inverso ([40] capítulo 5): uno con el cuadrilátero en forma de paralelogramo y otro con el mismo cuadrilátero en forma de antiparalelogramo (Figura 4.20) que dan lugar a dos curvas llamadas *curvas pareadas* o *coupler curves*.

Es de destacar que el atlas de Hrones-Nelson [55] cataloga alrededor de 7000 trayectorias diferentes generadas por este tipo mecanismos. La página web <http://www.cedarville.edu/cf/engineering/kinematics/ccapdf/fccca.htm> ofrece la posibilidad de cambiar distintos parámetros del mecanismo y obtener las curvas de acoplador asociadas.

La actividad a desarrollar con los alumnos será la manipulación de la construcción disponible en <https://goo.gl/3NRvht> para obtener distintas curvas en función de la clasificación obtenida en la actividad anterior: doble manivela, doble balancín (de Grashof y no de Grashof), manivela-balancín y plegable y obtener una clasificación [97] de seis tipos o familias de curvas de acoplador del cuadrilátero articulado:

- Curvas formadas por arcos casi circulares.

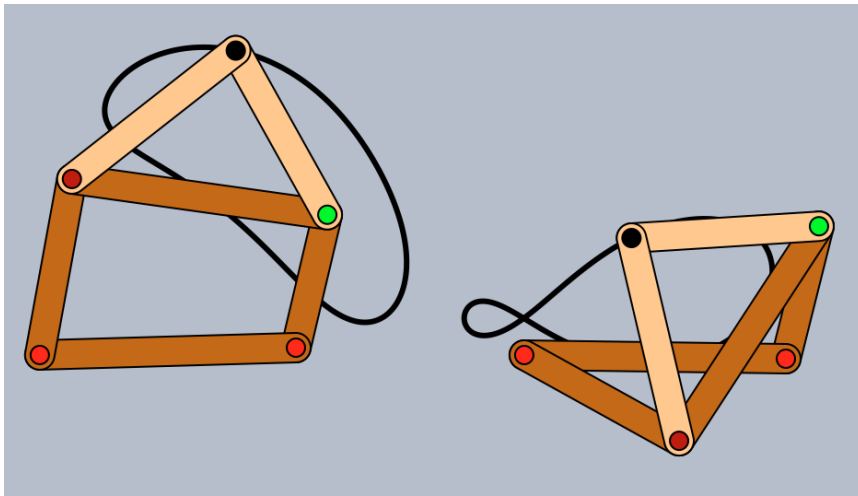


Figura 4.20: Mecanismo articulado de cuatro barras y su inverso con las curvas pareadas generadas

Fuente: elaboración propia

- Curvas formadas por arcos casi circulares y un segmento casi rectilíneo.
- Curvas formadas por arcos casi circulares y dos segmentos casi rectilíneos.
- Curvas con puntos dobles o figuras en forma de ocho.
- Curvas con forma de ala de avión.
- Curvas con puntos de retroceso o cúspides.

También se puede utilizar la clasificación de curvas de acoplador de la Figura 4.21.

Teorema de Roberts-Chevyshev

El teorema de Roberts-Chevyshev establece que *una misma curva pareada puede ser generada por tres mecanismos de cuatro barras diferentes* llamados mecanismos cognados ([52], pp. 168-174 disponible en http://ebooks.library.cornell.edu/k/kmoddl/toc_hartenberg1.html). Esto no es sólo una curiosidad matemática ya que una vez que una trayectoria es generada por un mecanismo, puede ocurrir que la ubicación de los pivotes fijos sea un inconveniente en el diseño de una máquina o que uno de sus cognados puede tener mejores características para la transmisión de fuerzas, algo esencial en Ingeniería.

En la Figura 4.22 puede verse un ejemplo. El punto P es el punto de acoplador de tres mecanismos articulados de cuatro barras: el $|ABDE|$ (verde),

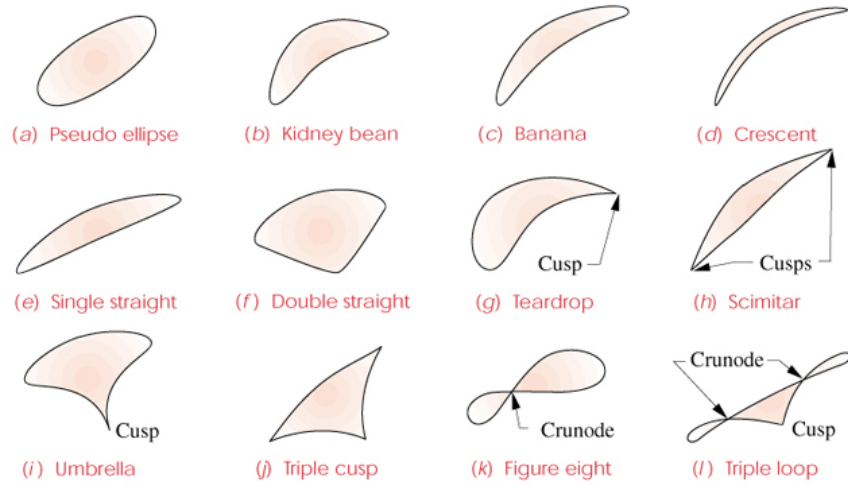


FIGURE 3-16
A "Cursory Catalog" of coupler curve shapes

Figura 4.21: Clasificación de curvas de acoplador de un mecanismo de cuatro barras

Fuente: [81]

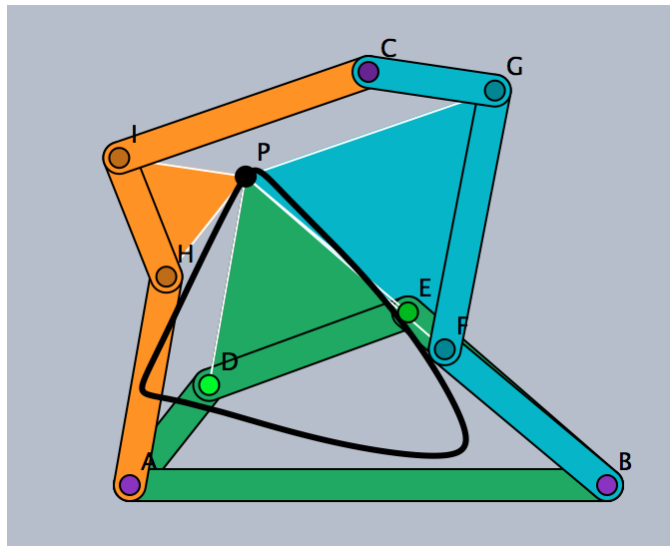


Figura 4.22: Tres mecanismos cognados que generan la misma curva

Fuente: elaboración propia

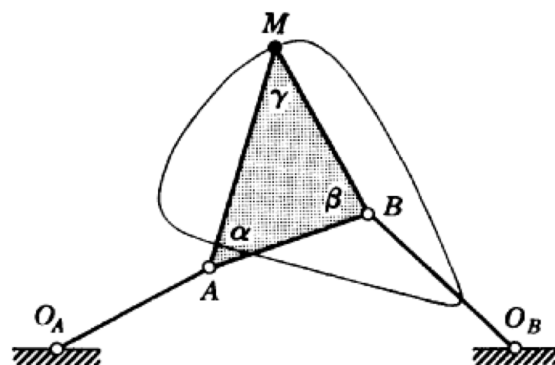


Figura 4.23: Mecanismo de cuatro barras y curva del punto de acoplador M
Fuente: [52]

el $|AHIC|$ (naranja) y el $|BFGC|$ (azul). Un vídeo de esta construcción está disponible en <https://youtu.be/0ZQ7L5IxGhM> y la construcción se puede descargar en <https://goo.gl/39nV0I>.

Samuel Roberts (1827-1913) y Pafnuty Lvovich Chevyshev (1821-1894) fueron dos importantes matemáticos de finales del siglo XVIII. Ambos fueron miembros de la Royal Society y estudiaron, entre otros muchos temas, las curvas pareadas y los mecanismos cognados. La literatura francesa y alemana habla del teorema de Roberts mientras que la rusa habla del teorema de Chevyshev. Roberts publicó el resultado en 1875 y Chevyshev en 1878 y, salvo en el resultado final, no hay relación entre los dos desarrollos empleados por lo que parece conveniente citar a ambos autores en el nombre del teorema ([52], capítulo 6, apartado 4).

Para investigar el teorema de Roberts-Chevyshev *una misma curva pareada puede ser generada por tres mecanismos de cuatro barras diferentes*, consideramos el mecanismo de cuatro barras $O_A A B O_B$ de la Figura 4.23 siendo M el punto de acoplador que traza la curva pareada. En la Figura 4.24 vemos el método para construir los mecanismos cognados: a la izquierda de la construcción se añaden los puntos A_1 y C_1 de forma que $O_A A A_1$ forme un paralelogramo y que el triángulo $A_1 M C_1$ sea semejante al triángulo ABM .

A la derecha de la Figura 4.24, se realiza una construcción similar con B_2 y C_2 : paralelogramo $O_B B M B_2$ y triángulo $B_2 M C_2$ semejante a ABM .

Por último, se obtiene el punto O_C mediante el paralelogramo $C_1 M C_2 O_C$. Este punto O_C va a ser fijo. Además, se observa que el triángulo $O_A O_B O_C$ es semejante al original ABM .

Realizada la construcción, podemos observar que se obtienen tres mecanismos de cuatro barras conectados por el punto de acoplador M :

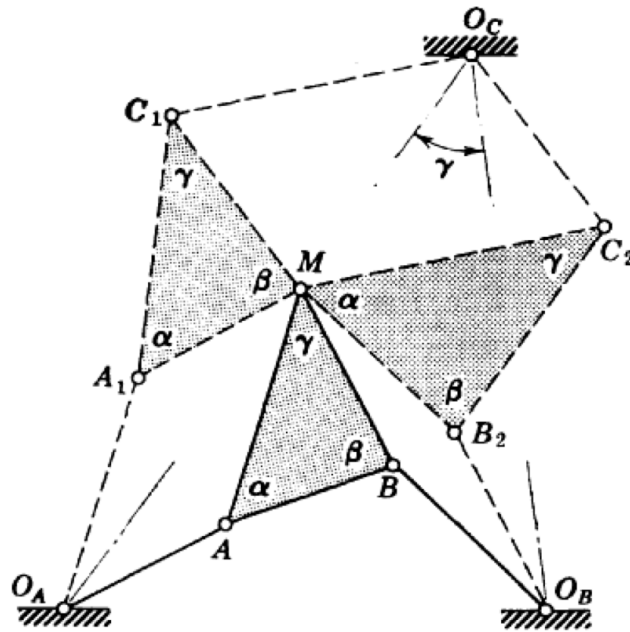


Figura 4.24: Construcción de mecanismos cognados
Fuente: [52]

- $O_A A B O_B$ El mecanismo original
- $O_A A_1 C_1 O_C$ La barra $O_A O_C$ no se muestra
- $O_B B_2 C_2 O_C$ La barra $O_B O_C$ no se muestra

Así, los tres mecanismos trazan la misma curva por lo que el mecanismo original puede ser reemplazado por cualquiera de los otros dos de cara a mejorar la posición del mecanismo dentro de una máquina.

Una primera actividad va a consistir en manipular el mecanismo de <https://goo.gl/39nV0I> de forma que el mecanismo original (verde) sea de doble manivela, doble balancín (de Grashof y no de Grashof), manivela-balancín y plegable y estudiar de qué tipo son los otros dos mecanismos cognados cumplimentando una tabla como la siguiente:

Verde	Naranja	Azul
doble manivela		
doble balancín (de Grashof)		
doble balancín (no de Grashof)		
manivela-balancín		
plegable		

La segunda actividad propuesta consiste en, dado el mecanismo de cuatro barras de <https://goo.gl/8gtDq>, seguir las instrucciones anteriores y construir los cognados.

4.4.3. Vinculación curricular

En este caso, vamos a hacer referencia a la aportación de estas actividades a objetivos de otras asignaturas de Secundaria como Ciencias de la Naturaleza y Tecnología. El segundo objetivo general de la enseñanza de las Ciencias de la Naturaleza en la etapa de Secundaria, tiene como finalidad *aplicar, en la resolución de problemas, estrategias coherentes con los procedimientos de las ciencias, tales como la discusión del interés de los problemas planteados, la formulación de hipótesis, la elaboración de estrategias de resolución y de diseños experimentales, el análisis de resultados, la consideración de aplicaciones y repercusiones del estudio realizado y la búsqueda de coherencia global.*

Por otro lado, el tercer objetivo general de la enseñanza de las Tecnologías en la etapa de Secundaria supone *analizar los objetos y sistemas técnicos para comprender su funcionamiento, conocer sus elementos y las funciones que realizan, aprender la mejor forma de usarlos y controlarlos y entender las condiciones fundamentales que han intervenido en su diseño y construcción.*

Así pues, vemos cómo las actividades propuestas no se inscriben exclusivamente en el campo de la enseñanza de las Matemáticas sino que tienen (y deben tener) relación con otras asignaturas evitando la excesiva *compartimentalización del conocimiento* tan habitual en nuestras aulas, El trabajo interdisciplinar supone una motivación para el alumnado que supone el reconocimiento de la importancia del dominio de ideas y destrezas matemáticas en otras materias.

Por otro lado, cabe indicar el carácter investigador de esta propuesta en el sentido de que al alumno no se le da un resultado (Ley de Grashof) para que se lo aprenda y, posteriormente, lo *vomite* en un examen sino que se pretende que deduzca por sí mismo este resultado.

Además, los mecanismos articulados de cuatro barras son un tema recurrente en distintas asignaturas de carreras universitarias de Ingeniería (análisis de posición, velocidad y aceleración, síntesis de mecanismos articulados de cuatro barras) por lo que el conocimiento de la existencia y funcionamiento de este tipo de mecanismos en etapas anteriores a la universitaria, ayuda a los alumnos que cursen estos estudios a tener una base muy útil en el futuro.

4.5. Conicógrafos

Un conicógrafo es un mecanismo con unos ajustes apropiados capaz de trazar secciones cónicas [10]. Conscientes de la existencia de métodos para trazar cónicas como el del jardinero para el trazado de la elipse, mediante mecanismos punto a punto como los propuestos por Durero y Guido Ubaldo del Monte o mediante mecanismos de ruedas dentadas como el propuesto por La Hire, nos vamos a centrar en los mecanismos de barras articuladas



Figura 4.25: Herramientas de *Cinderella.2* para trazar cónicas
Fuente: elaboración propia tomado del menú de *Cinderella.2*

mediante los cuales dichas secciones cónicas son obtenidas como trayectorias de puntos de las barras del mecanismo. A partir de una revisión histórica de estos mecanismos, se van a proponer actividades basadas en la manipulación de distintos conicógrafos para comprender su funcionamiento a la hora de generar elipses, hipérbolas o parábolas haciendo referencia a las propiedades geométricas y distintos elementos de las cónicas.

4.5.1. Recursos

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula5> obran los recursos necesarios para la realización de las actividades propuestas.

Además se ha realizado un gráfico interactivo (línea del tiempo) con un resumen de la evolución histórica de los conicógrafos presentes en este apartado (Figura ??). Está disponible en <http://www.dipity.com/fjmanzano/linkages/>.

4.5.2. Descripción de la actividad

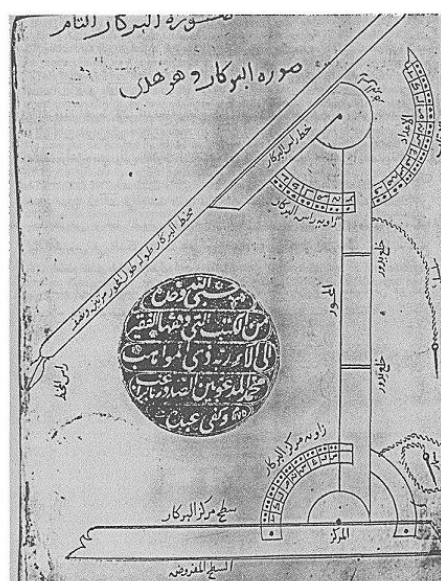
Apolonio de Pérgamo (c. 262 - 190 a.C.) en su obra *Sobre las secciones cónicas* define y describe las propiedades fundamentales de estas curvas. Los geómetras de la escuela de Platón y todos los matemáticos posteriores, al estudiar este tipo de curvas, se preocuparon en buscar los medios adecuados para trazarlas.

Actividad: *Cinderella.2* tiene unas herramientas (Figura 4.25) mediante las cuales es posible generar cónicas dados algunos de sus elementos:

- Traza la cónica que pasa por cinco puntos
- Traza una elipse dados sus focos y un punto
- Traza una hipérbola dados sus focos y un punto
- Traza una parábola dado el foco y la directriz

El manual de *Cinderella.2* [93] dedica el apartado 4.9 a operaciones con cónicas.

La actividad va a consistir en utilizar esas herramientas para:



Kitāb al-Qāhī fi al-birkār al-āmm, MS Istanbul, Raḡīb Paṣhā 569, fol. 235^v.

Figura 4.27: Grabado original del *compas parfait* por Abou Sehl Ouïdjen
Fuente: Wikipedia

- $|AB| = |CD|$. Variando la medida del segmento CD , varía la del segmento AB
- $|AP| = |EF|$. Variando la medida del segmento EF , varía la del segmento AP

Una vez realizada la construcción, variar las medidas de los segmentos CD y EF y describir lo que sucede.

Por otro lado, Proclo habla de un compás para trazar parábolas de Isidoro de Mileto [39]. Hay constancia de un *compas parfait* para dibujar cónicas [112] por parte de los matemáticos Ahmed Ibn Mohammed Ibn Abdel-Djelîl es-Sidjzi (siglo IX), Abou Sehl Ouïdjen Ibn Ouesten el-Kouhi (siglo X) y Mohammed Ibn Hoceïn (siglo XI). Consiste en un compás en el que uno de los brazos llevaba una punta trazante, que podía alargarse a voluntad por medio de un resorte, de modo que siempre se apoyase en el papel, mientras que el otro brazo se fijaba oblicuamente en el plano del papel (Figura 4.27). Este instrumento se volvió a descubrir por varios autores de la edad media y fue propuesto para resolver los problemas de la gnomónica [11].

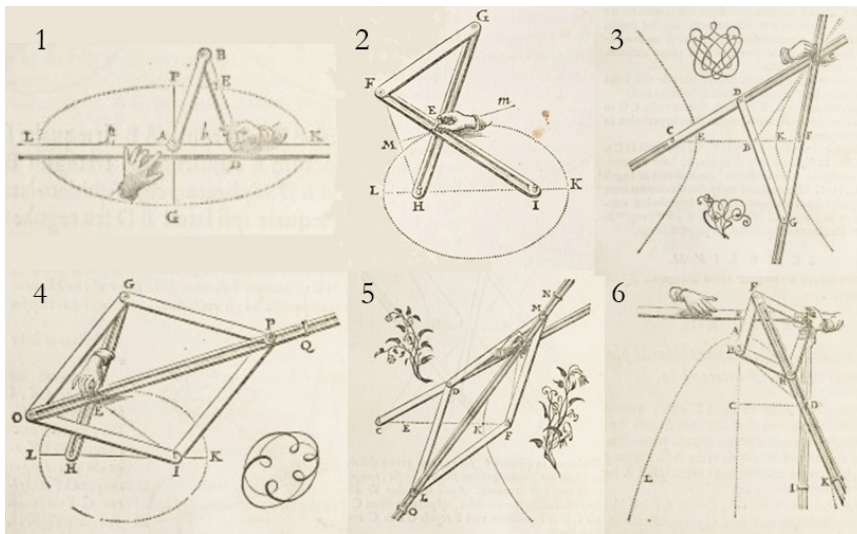


Figura 4.28: Conicógrafos de Franz Von Schooten
Fuente: [108]

Actividad: En la página web <http://cmup.fc.up.pt/cmup/geomconstr/node2.html>, se tiene una descripción en portugués de dicho *compas parfait* además de una presentación dinámica (applet) de su funcionamiento. La actividad consiste en realizar una traducción de dicha página así como de replicar en *Cinderella.2* el funcionamiento dinámico del mecanismo.

Tenemos que llegar a la época de Descartes para encontrar mecanismos articulados capaces de trazar cónicas. Descartes es el primero que considera estudiar las curvas cinemáticamente aunque sólo da un ejemplo para las cónicas, en particular para una hipérbola.

Es Franz van Schooten el joven (1615 - 1668) quien, en su tratado *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* publicado en 1675, presenta numerosos mecanismos para dibujar cónicas. Generaliza el teorema de Proclo reemplazando el ángulo recto por un ángulo cualquiera, propone un elipsógrafo compuesto por un compás de lados iguales (Figura 4.28, 1), otro elipsógrafo formado por un antiparalelogramo (Figura 4.28, 2) y un hiperbológrafo basado en la definición habitual de hipérbola como lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante (Figura 4.28, 3). Van Schooten también diseña tres aparatos para trazar cada una de las tres cónicas con rombos articulados (Figura 4.28, 4, 5 y 6).

Actividad: Tomando como base el libro original de Franz von Schooten *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus* disponible en <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECH0docuView?url=/mpiwg/online/permanent/library/EWN480XH>, construir en *Cinderella.2* los conicógrafos 1, 2 y 3 de la Figura 4.28

Actividad: En la web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula5> se presentan tres construcciones dinámicas correspondientes a los tres conicógrafos de van Schooten basados en rombos articulados respetando la notación original:

- Estudiar el funcionamiento de los tres conicógrafos cambiando la posición de los puntos y las medidas de las barras realizando un pequeño informe
- Disponer el elipsógrafo de la construcción descargable en <https://goo.gl/lnknCT> de forma que la curva que genere coincida con la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$
- Disponer el hiperbológrafo de la construcción descargable en <https://goo.gl/B93CU2> de forma que la curva que genere coincida con la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$
- Disponer el parabológrafo de la construcción descargable en <https://goo.gl/k5jf0t> de forma que la curva que genere coincida con la parábola de ecuación $y = x^2$

En las construcciones anteriores, se puede cambiar la imagen de fondo para insertar otras cónicas generadas por ecuaciones algebraicas distintas de cara a estudiar la posición en el plano de los focos, la directriz, etc. Las imágenes de las cónicas generadas por ecuaciones han sido obtenidas con la calculadora gráfica online Desmos (<https://www.desmos.com>).

El tratado más sistemático y completo acerca de la generación mecánica de cónicas es el *Elementa Curvarum Linearum* de Johan de Witt (1625 - 1672), jurista y matemático holandés, íntimo amigo de van Schooten. En su *Elementa Curvarum Linearum* [30], publicado originalmente como apéndice a la segunda edición latina de van Schooten de la *Geometría* de Descartes, de Witt describe varios mecanismos para construir cónicas. Uno de ellos es el conocido elipsógrafo de barras deslizantes atribuido a Proclo - Leonardo con la demostración de que describe una elipse. Además, propone la construcción de un hiperbológrafo mediante una barra giratoria y otra deslizante [106].

Llegamos a la época de Isaac Newton (1642 - 1727) que también estudió la manera de construir mecánicamente las cónicas obteniendo el teorema:

Si dos ángulos giran alrededor de sus vértices y la intersección de dos lados describe una recta entonces la intersección de los otros dos lados describe una cónica.

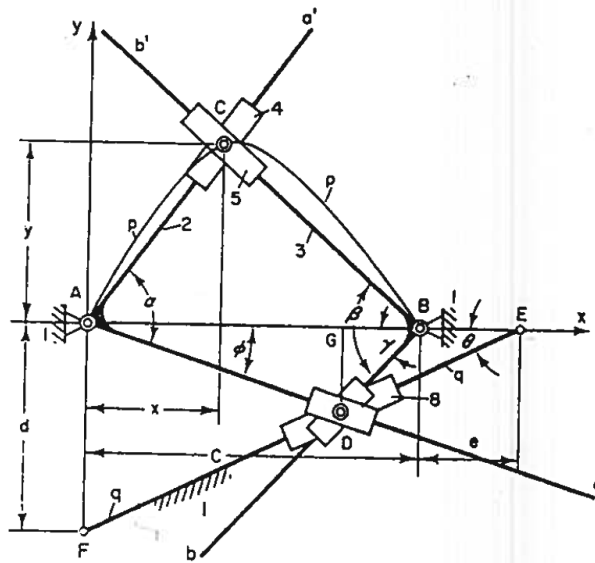


Figura 4.29: Esquema del conicógrafo de Boguslavskii basado en el resultado de Newton

Fuente: [10]

Cabe citar que el conicógrafo de Boguslavskii (Figura 4.29) descrito por Artobolevskii en su enciclopédico *Mechanisms for the generation of planes curves* de 1964, está basado en este resultado ([10], pág. 70).

Vemos que, hasta esta época, los principios teóricos utilizados en el diseño de conicógrafos eran las propiedades de las secciones cónicas. Llegamos a 1864 cuando Charles-Nicolas Peaucellier (1832 - 1913), capitán de ingenieros del ejército francés y antiguo alumno de la Ecole Polytechnique en una carta al editor de *Nouvelles Annales de mathématiques* (ser. 2, vol. 3, pp. 414-415) de París propone construir un *compas compose* que trace rectas, circunferencias de cualquier radio por grande que sea y cónicas. Cabe recordar que Peaucellier es el artífice del primer sistema articulado capaz de dibujar en el plano una línea recta mediante un mecanismo de siete barras que transforma un movimiento circular en uno rectilíneo llamado inversor de Peaucellier. Este mecanismo atrajo la atención del matemático inglés James Joseph Sylvester (1814 - 1897) el cual, con otros colegas ingleses, ideó una gran cantidad de mecanismos articulados destinados al trazado de distintas curvas, cónicas en particular [105].

A. B. Kempe (1849 - 1922) demostró que cualquier curva algebraica puede trazarse mediante un sistema articulado. Para ello utiliza una combinación de mecanismos llegando a tal grado de complicación que él mismo propone la búsqueda de métodos más sencillos para describir las curvas. Así, Kempe obtiene elipsógrafos de ocho barras articuladas y Peaucellier un elipsógrafo

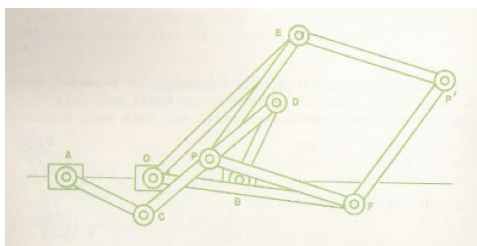


Figura 4.30: Conicógrafo general presentado por R. C. Yates

Fuente: [116]

de diez barras [11].

Robert C. Yates (1904-1963), ingeniero norteamericano, en su libro *Curves and their properties* ([116], pp. 51-52) presenta un mecanismo articulado general para construir cónicas combinando un inversor de Hart y uno de Peaucellier (Figura 4.30). En el libro de texto *Tools: A Mathematical Sketch and Model Book* (1941) ([114], pp. 174-175), desarrolla dicho mecanismo para construir una elipse, una hipérbola y una parábola (Figura 4.31).

Actividad: Tomando como base los textos de R. C. Yates disponibles en <https://archive.org/details/YatesHandbookCurves1947> y <https://archive.org/details/YatesToolsMathematicalSketchModel1941>, realizar las simulaciones interactivas de los conicógrafos de Yates en *Cinderella.2*.

Por último, tenemos a Ivan Ivanovich Artobolevskii (1905 - 1977), ingeniero mecánico y científico ruso y primer presidente de la Federación Internacional de Teoría de Máquinas y Mecanismos quien en su *Mechanisms for the generation of planes curves* de 1964, dedica el capítulo 4 a un estudio sistemático y recopilatorio sobre la generación mecánica de elipses, hipérbolas y parábolas categorizando los mecanismos capaces de trazar cónicas en:

- conicógrafos generales
- conicógrafos de tipo tangente
- elipsógrafos
- hiperbológrafos
- parabológrafos

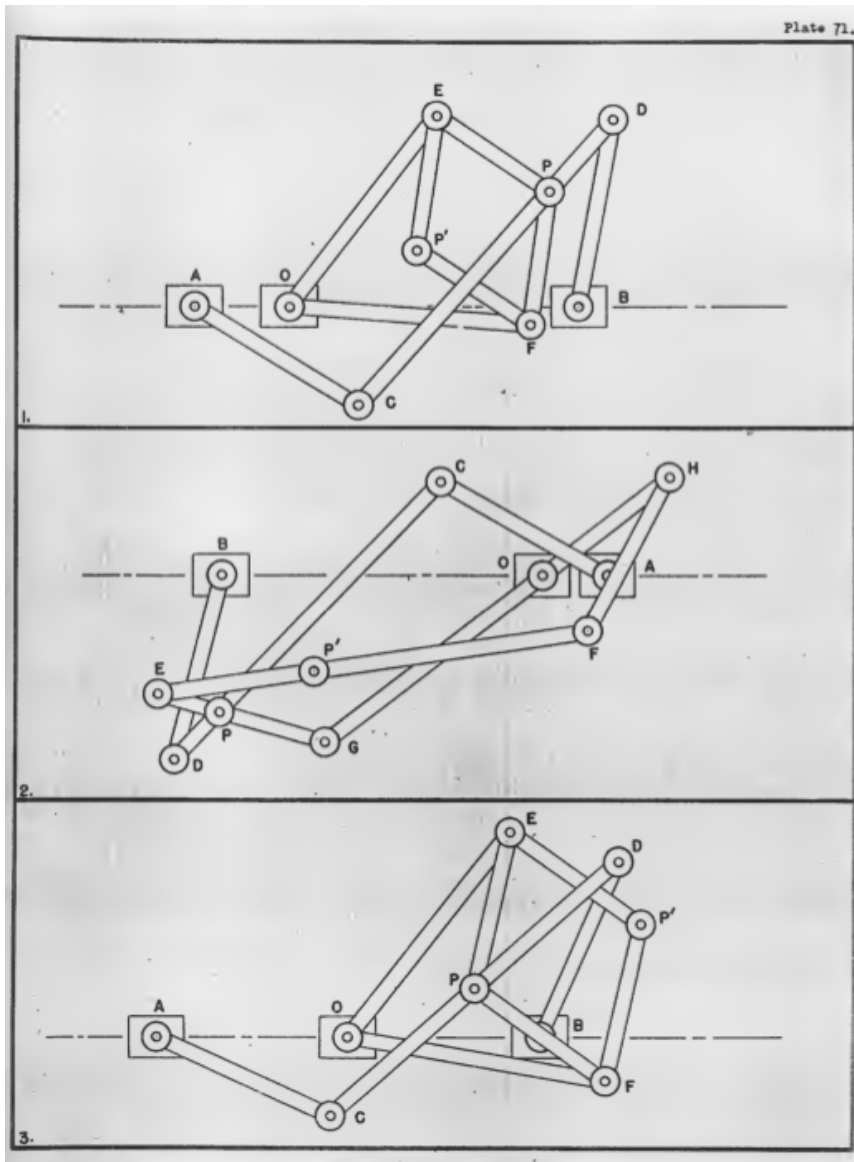


Figura 4.31: Parabológrafo, elipsógrafo e hiperbológrafo de Yates
 Fuente: [114]

Actividad: En la web de la *Associazione Macchine Matematiche* de la Universidad de Módena (<http://www.macchinematematiche.org>), se presenta un compendio de mecanismos geométricos entre los cuales presenta un apartado con numerosos conicógrafos articulados como los que se han presentado con maquetas construidas de cada aparato, la demostración matemática de su funcionamiento y una simulación interactiva del mecanismo. Catalogar los conicógrafos articulados presentes en esta web constituye una buena actividad complementaria a las anteriores.

4.5.3. Vinculación curricular

Las cónicas aparecen en el currículo de Bachillerato en las asignaturas de Matemáticas y de Dibujo Técnico. Por otro lado, el estudio histórico de los conicógrafos contribuye a uno de los objetivos generales de la enseñanza de las Ciencias Sociales, Geografía e Historia en la etapa de Secundaria: *Identificar y localizar en el tiempo y en el espacio los procesos y acontecimientos históricos relevantes de la historia del mundo, de Europa y de España para adquirir una perspectiva global de la evolución de la Humanidad y elaborar una interpretación de la misma que facilite la comprensión de la pluralidad de comunidades sociales a las que se pertenece.*

Además, en esta propuesta se hace hincapié en que estos mecanismos contribuyeron de forma notable a la creación por parte de Descartes de la Geometría Analítica. El que el alumnado conozca este hecho así como del estudio de la relación entre la generación mecánica y las ecuaciones de las cónicas, ayuda a la comprensión del significado de dichas ecuaciones.

4.6. Proyecto: los mecanismos articulados

En este apartado se va a proponer un proyecto de trabajo con los alumnos a través de una serie de actividades en un ambiente tecnológico relacionadas con los mecanismos articulados objeto de esta tesis. Van a ser algo así como piezas de un puzzle que, al encajar unas con otras, van a formar un completo proyecto interdisciplinar de trabajo colaborativo que debe implicar a profesorado de distintas asignaturas y que se puede complementar con otras actividades surgidas de la imaginación tanto de los docentes como de los alumnos que pongan en marcha este tipo de actuaciones en el aula.

El Aprendizaje Basado en Proyectos (PBL en inglés) es un modelo de aprendizaje mediante el cual los estudiantes trabajan de manera activa, planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula de clase [15]. El Proyecto no se centra sólo en aprender acerca de algo sino que está enfocado en la acción realizando tareas concretas haciendo, en este caso, un uso efectivo de las TIC. Es decir, se trata de

implementar metodologías activas en el aula con una base teórica constructivista de forma que sean los propios alumnos los que, bajo la supervisión y guía del docente, realicen las tareas propuestas.

4.6.1. Recursos

En la página web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula6> se presentan los recursos necesarios para la realización de las actividades propuestas. Se propone el uso de la herramienta online *Dipity* para la creación de gráficos interactivos (líneas de tiempo). El aula taller del Centro educativo ha de ser un lugar de trabajo para la realización de las maquetas propuestas. Finalmente, el programa de diseño gráfico *Sketchup* es la herramienta propuesta para la realización de construcciones en 3D.

4.6.2. Descripción de la actividad

Evolución histórica de mecanismos articulados que trazan curvas

En esta actividad, el alumnado debe realizar un gráfico interactivo (línea del tiempo) con los personajes y los mecanismos articulados descritos en el capítulo *Evolución histórica de mecanismos articulados para describir curvas* ordenados cronológicamente. Para ello, se propone la herramienta online TimelineJS (<https://timeline.knightlab.com>) debido a su gratuidad, su interfaz y la posibilidad de generar fichas ampliables con fotografías, vídeos, texto y mapas.

En la Figura 4.32 puede verse una imagen de una línea del tiempo con un resumen de la evolución histórica de los conicógrafos estudiados en la sección anterior.

Construcción de maquetas

A lo largo de estas páginas, hemos interactuado con los mecanismos articulados mediante el Software de Geometría Dinámica *Cinderella.2*. Ahora, se propone la construcción de maquetas reales de estos mecanismos articulados. En las Figuras 4.33, 4.34 y 4.35, podemos ver mecanismos construidos en material acrílico y metal.

La elección tanto del material como del sistema de articulaciones pivotantes o deslizantes de las barras del mecanismo, constituye un reto al que los alumnos deben enfrentarse - con la necesaria ayuda del profesor - para una construcción robusta y efectiva de cada mecanismo.

La construcción de una maqueta de cualquier mecanismo articulado visto a lo largo de esta tesis como el mecanismo de Peaucellier de siete barras capaz de trazar una línea recta, así como del estudio matemático y cinemático de



Figura 4.32: Línea del tiempo interactiva sobre la historia de los conicógrafos

Fuente:

<https://sites.google.com/site/tesislinkages/propuestas-didacticas/aula6>

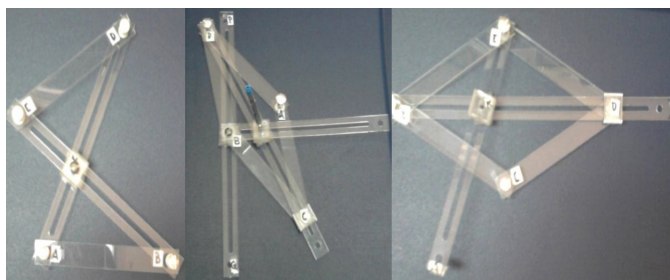


Figura 4.33: Mecanismos articulados construidos en acrílico

Fuente: [98]

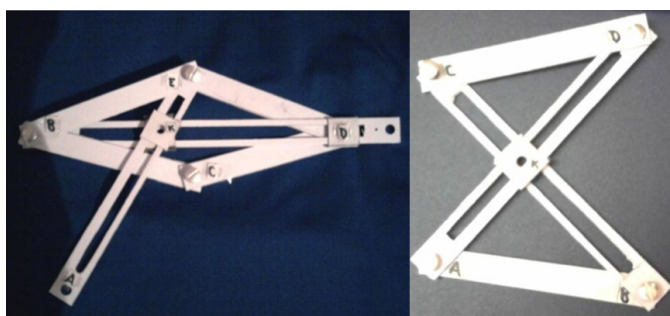


Figura 4.34: Mecanismos articulados construidos en metal

Fuente: [98]

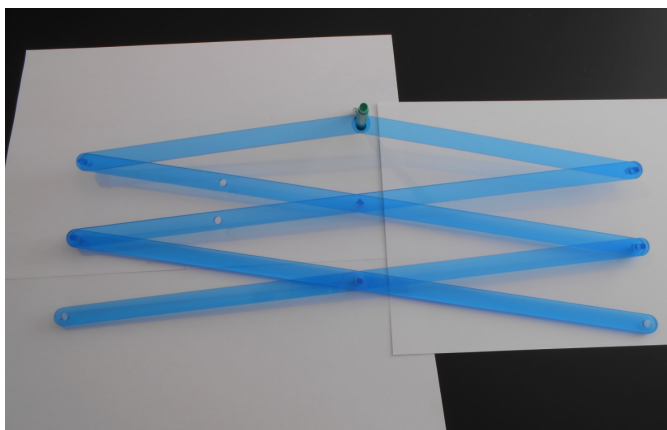


Figura 4.35: Pantógrafo construido en acrílico

Fuente: [http://](http://makezine.com/2012/07/30/math-monday-linkages-an-introduction/)

makezine.com/2012/07/30/math-monday-linkages-an-introduction/

su funcionamiento, constituye un proyecto muy interesante para realizar en el aula.

Generación de mecanismos en 3D

En un ambiente tecnológico como en el que nos estamos moviendo, la generación de imágenes en tres dimensiones (3D) toma una importancia a tener en cuenta de cara a los beneficios que conlleva en el conocimiento de la matemáticas. En la actualidad, hay numerosas herramientas de generación de imágenes en 3D además de la creciente popularización de impresoras 3D que permiten *imprimir* la construcción realizada en el ordenador.

Dentro de la panoplia de programas de diseño gráfico en 3D, destacamos la herramienta de Google *SketchUp* por su sencillez de manejo, por la gran cantidad de documentación y tutoriales de uso disponible en Internet, por estar pensada con fines pedagógicos y por ser gratuito. Además, hay una galería de construcciones realizadas por los usuarios de *SketchUp* en Internet (<https://3dwarehouse.sketchup.com>) con una gran cantidad de construcciones disponibles para su descarga y manipulación posterior.

En la Figura 4.36 se puede ver un mecanismo articulado de tres barras generado con *SketchUp* utilizando la textura de metal empleada por Kempe en las figuras del libro *How to draw a straight line* [58]. Puede manipularse la construcción en <https://3dwarehouse.sketchup.com/model.html?id=u492b3fd8-79f0-4b24-a6fa-559d11950d0f>.

Por otro lado, *SketchyPhysics* es un plugin de *SketchUp* que permite el movimiento automático de los objetos de una construcción 3D y ver cómo interactúan unos con otros. Las herramientas de *SketchyPhysics* incluyen

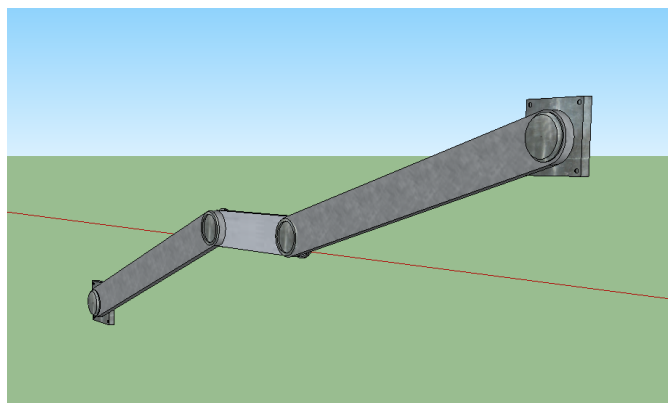


Figura 4.36: Mecanismo de tres barras en 3D generado con *SketchUp*
Fuente: elaboración propia

movimientos básicos como la articulación, rotación, caída debido a la gravedad, etc. Además, permite grabar los movimientos de las presentaciones. Esto permite que, tras la construcción de un mecanismo articulado en *SketchUp*, se le pueda *dar vida* mediante *SketchyPhysics*. Esta actividad, por sí sola, constituye un buen proyecto de trabajo complementario a todas las propuestas realizadas en esta tesis hasta ahora.

En la Figura 4.37 aparece el elipsógrafo de Proclo generado en 3D. En la Figura 4.38 se puede ver una reproducción en 3D de la máquina de Watt. En ambos casos, una vez descargados al ordenador los modelos de *SketchUp* y teniendo instalado el plugin de *SketchyPhysics*, permiten ver la animación correspondiente.

El proyecto de trabajo puede consistir en la generación en 3D por parte del alumnado de máquinas de este tipo combinado con un estudio histórico de la Revolución Industrial del siglo XVIII. La documentación de todo el proceso ha de ser algo totalmente necesario de cara a la evaluación efectiva del trabajo desarrollado.

4.6.3. Vinculación curricular

El Aprendizaje Basado en Proyectos constituye una de las metodologías de trabajo en el aula más eficaces para el proceso de enseñanza - aprendizaje y para la construcción del propio conocimiento del alumnado.

Esta forma de actuar en el aula incide en tres de los objetivos generales de la etapa de Educación Secundaria [3]:

- *b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.*

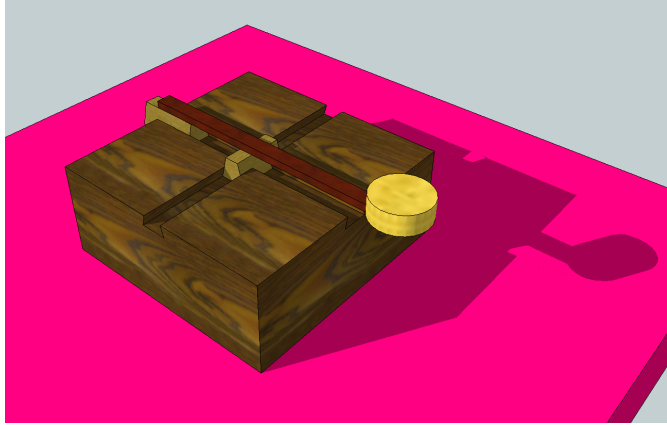


Figura 4.37: Elipsógrafo de Proclo construido en *SketchUp* y animado con *SketchyPhysics*

Fuente: <https://3dwarehouse.sketchup.com/model.html?id=49f0a602da1bb6fec9f016d57db96408>

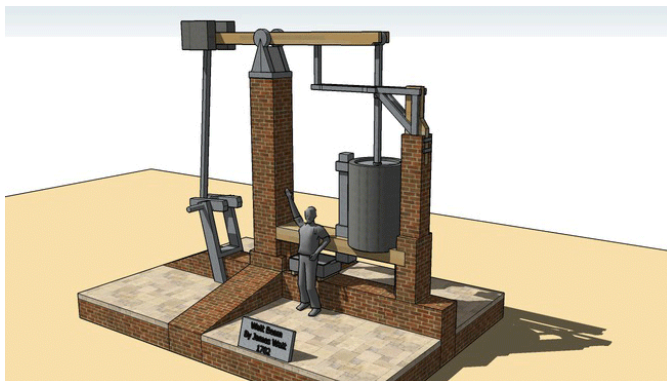


Figura 4.38: Construcción de la máquina de vapor de Watt en 3D animada mediante *SketchyPhysics*

Fuente: <https://3dwarehouse.sketchup.com/model.html?id=d5d81acfa8ce94c2b4fa91de6dfa2d72>

- *e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.*
- *f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.*

Con estas propuestas se ha pretendido presentar nuevos enfoques en el aprendizaje y evaluación que supongan un importante cambio en las tareas que han de resolver los alumnos y planteamientos metodológicos innovadores.

Capítulo 5

Conclusión

Los mecanismos articulados suponen un recurso muy efectivo a la hora de implementar escenarios para la experimentación activa en el aula de Matemáticas con alumnos de Secundaria y Bachillerato. Mediante la investigación con actividades y materiales como los aquí presentados y con la guía del profesor, los alumnos pueden generar nuevos conocimientos matemáticos siendo protagonistas en la obtención de resultados y en la construcción de pruebas además de poder asimilar distintas estrategias para la resolución de tareas propuestas fomentando la creatividad en la búsqueda de soluciones o demostraciones.

Como hemos comentado, Jan Comenius ya defendía en su *Didactica Magna* de 1657 la importancia de la manipulación de objetos concretos en la construcción de cada experiencia de conocimiento individual. También Franz Reuleaux, estableciendo los principios de la Cinemática, defendía la importancia de la educación y el papel de las Matemáticas:

... The instruction in the polytechnic school has of necessity to adopt as fundamental principles the three natural sciences – mechanics, physics, and chemistry, and the all-measuring master art of mathematics [90].

La propuesta que he presentado pretende hacer esto realidad.

He comenzado con un estudio sobre la evolución histórica de mecanismos articulados que supone introducir al alumno en el contexto en el que se produjeron los avances científicos presentados mostrándo que dichos avances científicos no son cosa de inspiración de un día sino que son el resultado de trabajos de muchas personas a lo largo de los años. El estudio de mecanismos articulados generadores de curvas nos da una idea de cómo se han ido creando y descubriendo soluciones a problemas reales. Este hecho es fundamental a la hora del estudio y didáctica de las Matemáticas en particular y de la Ciencia en general ya que proporciona una visión amplia de cómo se desarrollaron distintas teorías. Por otro lado, este análisis histórico muestra que, en el campo de la Geometría, la relación entre aspectos teóricos y prácticos ha sido muy estrecha desde siempre.

Así, se ha pretendido poner al alumnado en la situación del investigador utilizando fuentes originales para resolver algunas de las tareas propuestas. Distintas teorías en Didáctica de las Matemáticas inciden en los beneficios para el proceso de enseñanza aprendizaje de introducir en el aula recreaciones de investigaciones científicas y que utilizan modelos mecánicos o articulados de mecanismos para trazar curvas [19].

Consciente de que existen otros estudios históricos sobre este tema ([39], [58], [42], [106], [9], ...), mi intención ha sido complementar unos con otros además de aportar construcciones dinámicas manipulables de muchos de los mecanismos estudiados poniéndolos a disposición de toda la comunidad educativa a través de la web <https://sites.google.com/site/tesislinkages/> dando un valor añadido a este estudio. Además, todas las construcciones dinámicas que he elaborado están disponibles para su descarga y uso posterior bajo licencia Creative Commons (CC BY-NC-SA 4.0).

Conscientes de los retos de la Educación para el Siglo XXI, he puesto mucho énfasis en el uso de la tecnología en el aula. Gracias a los ordenadores y a los Sistemas de Geometría Dinámica, se pueden realizar de una forma muy sencilla y económica construcciones interactivas de distintos sistemas articulados así como de las curvas generadas además de estudiar variaciones a una misma construcción con un coste mínimo, algo impensable no mucho tiempo atrás. He añadido un estudio sobre el Sistema de Geometría Dinámica *Cinderella.2* señalándolo como el más adecuado para la generación de curvas mediante mecanismos articulados planos.

Entender el funcionamiento de este tipo de mecanismos con la ayuda de la Geometría Dinámica en un entorno de aprendizaje por descubrimiento, supone una motivación para el alumnado con el objetivo de llegar a demostraciones matemáticas rigurosas a la vez que muestra las relaciones entre el Álgebra y la Geometría.

Por último, he realizado propuestas metodológicas concretas y aplicaciones didácticas para el aula de forma interdisciplinar incluyendo distintas asignaturas y trabajo cooperativo y colaborativo investigando las posibilidades que ofrecen las TIC para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

He caracterizado las propuestas didácticas en seis bloques aunque, como indiqué, es aconsejable y hasta deseable que cada docente adapte la secuenciación en función de las capacidades y habilidades del alumnado y a los recursos disponibles.

A grandes rasgos, con cada bloque se ha pretendido trabajar conceptos del currículo así como habilidades y competencias del alumnado:

- *A la caza de mecanismos articulados*: el alumno debe encontrar mecanismos articulados sencillos en el mundo real y realizar un pequeño esquema de su funcionamiento con *Cinderella.2*.

- *Manipulando mecanismos*: con esta actividad se pretende que el alumnado entienda el funcionamiento de una serie de mecanismos y realice informes sobre dicho funcionamiento.
- *Construyendo mecanismos en Cinderella.2*: con mecanismos cada vez un poco más complejos, el alumnado debe realizar construcciones de dichos mecanismos para lo que se requiere un conocimiento profundo de su funcionamiento a la vez que se deben aplicar distintos conocimientos geométricos.
- *Mecanismos de cuatro barras*: son los mecanismos más simples y más estudiados con multitud de aplicaciones en Ingeniería. Se ha pretendido que el alumnado descubra una serie de resultados teóricos mediante la manipulación y experimentación.
- *Conicógrafos*: un caso particular de este tipo de mecanismos. A partir de una revisión histórica que se puede complementar con otros conicógrafos, se pretende alcanzar un conocimiento profundo de estas curvas y sus elementos a la vez que se muestra la relación entre estas curvas, sus ecuaciones, sus elementos y distintos mecanismos que las generan,
- *Proyecto: los mecanismos articulados*: constituye una propuesta muy concreta de Aprendizaje Basado en Proyectos de forma interdisciplinar.

Espero que con todo lo expuesto, haya podido crear (o al menos esbozar) un escenario de aprendizaje como el que presentaba en la *Introducción* de esta tesis en el que el alumno pueda construir una parte significativa de sus conocimientos a partir del contacto con fuentes, materiales y situaciones de información de calidad realizando tareas que constituyan un reto haciendo uso de las herramientas necesarias en cada situación para hacer frente al mismo.

Para terminar, unas palabras de Artobolevski relacionadas con la Educación:

Most important in the education of scientific youth is the development of independence and creative idea. To learn and learn creativity it is possible. Most important for a creative person is his skill to observe a natural phenomenon, to know the mechanism of processes, occurring in it and to transfer this knowledge to the world of techniques.

Bibliografía

- [1] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. En Boletín Oficial del Estado, num. 295, 10 de diciembre de 2013.
- [2] Ley Orgánica de Educación del 2/2006 de 3 de mayo. En Boletín Oficial del Estado, num. 106, 4 de mayo de 2006.
- [3] Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. En Boletín Oficial del Estado, num. 5, 5 de enero de 2007.
- [4] ABÁNADES, M. Á., BOTANA, F., MONTES, A., AND RECIO, T. An algebraic taxonomy for locus computation in dynamic geometry. *Computer-Aided Design* 56 (2014), 22–33.
- [5] ABBOTT, T. G. *Generalizations of Kempe's Universality Theorem*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical Engineering and Computer Science, 2008.
- [6] ALLMAN, G. J. *Greek Geometry from Thales to Euclid*. Hodges, Figgis & Company, 1889.
- [7] ALSINA, C. *Una matemática feliz y otras conferencias Buenos Aires*. OMA, 1995.
- [8] AMERICAN ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE AND OTHERS. *Benchmarks for Science literacy*. Oxford University Press, 1994.
- [9] AROCA, J. M. Sistemas articulados. Teorema de Kempe. *Revista del Seminario Iberoamericano de Matemáticas 4 Fascículo II* (2013).
- [10] ARTOBOLEVSKII, I. I. *Mechanisms for the generation of plane curves*. Pergamon, 1964.
- [11] AUBRY, M. A. Estudio sobre los conicógrafos. *El progreso matemático, revista de Matemáticas puras y aplicadas*, 15 y 16 (1900).

- [12] BALL, W. R. On Newton's classification of cubic curves. *Proceedings of the London Mathematical Society* 1, 1 (1890), 104–143.
- [13] BANTCHEV, B. B. A brief tour to Dynamic Geometry Software. *CaMSP February 2015 Newsletter* (2010).
- [14] BLAKE, E. The ellipsograph of Proclus. *American Journal of Mathematics* 22 (1900), 146–153.
- [15] BLANK, W. E., AND HARWELL, S. *Promising Practices for Connecting High School to the Real World*. Distributed by ERIC Clearinghouse [S.l.], 1997.
- [16] BRAIKENRIDGE, R. M. A general Method of describing Curves by the intersection of right lines; Moving about Points in a Given Plane. In a Letter to Dr. Hoadly. *Philosophical Transactions* 39, 436-444 (1735), 25–36.
- [17] BRAUNMÜHL, A. *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts*. In W. Dyck Katalog... pp. 54 - 88.
- [18] BRYANT, J., AND SANGWIN, C. *How Round Is Your Circle?: Where Engineering and Mathematics Meet*. Princeton University Press, 2011.
- [19] BUSSI, M. G. B. Drawing Instruments: Theories and Practices from History to Didactics. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (1998), pp. 735–746.
- [20] BYBEE, R. W. What is STEM Education? *Science* 329, 5995 (2010), 996–996.
- [21] CAPRILE, M., PALMÉN, R., SANZ, P., AND DENTE, G. Encouraging STEM Studies for the Labour Market. *Directorate General for Internal Policies, European Union* (2015).
- [22] CARDUCHO, L. *Elementos geometricos de Euclides philosopho megarense: sus seys primeros libros*. Por Antono Duplast[e], 1637.
- [23] CHANG ET AL, W. A Note on Grashof's Theorem. *Journal of Marine Science and Technology* 13, 4 (2005), 239–248.
- [24] CHAPARRO, E. Las matemáticas en el Islam medieval. *Transoxiana*, 5 (2002).
- [25] CHEVYSHEV, P. L. *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*. Imprimerie de l'Académie impériale des sciences, 1853.

- [26] CHEVYSHEV, P. L., MARKOV, A. A., AND SONIN, N. *Oeuvres de P. L. Tchebychef*. No. v. 2. Commissionaires de l'Académie Impériale des Sciences, 1907.
- [27] CHUAN, J.-C., AND MAJEWSKI, M. From Ancient 'Moving Geometry' to Dynamic Geometry and Modern Technology. In *Proceedings of the Seventeenth Asian Technology Conference in Mathematics, Bangkok, Thailand: Suan Sunandha Rajabhat University* (2012).
- [28] CRAPO, H., AND RICHTER-GEBERT, J. Automatics proving of geometric theorems. In *Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry*. Springer, 1995, pp. 167–196.
- [29] DARBOUX, J. G. Recherches sur un système articulé. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* 3 (1879), 151–192.
- [30] DE WITT, J., AND GROOTENDORST, A. *Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum: Liber Secundus*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer-Verlag, 2010.
- [31] DELATTRE, J., AND BKOUCHE, R. Why ruler and compass. *History of Mathematics: History of Problems* (1997), 89–113.
- [32] DENNIS, D. *Historical perspectives for the reform of mathematics curriculum: Geometric curve drawing devices and their role in the transition to an algebraic description of functions*. Cornell University, May, 1995.
- [33] DENNIS, D. René Descartes curve-drawing devices: experiments in the relations between mechanical motion and symbolic language. *Mathematics Magazine* 70, 3 (1997), 163–174.
- [34] DESCARTES, R. *Geometry*. Dover Publications, 1954.
- [35] DICKINSON, H. James White and his "New Century of Inventions". *Transactions of the Newcomen Society* 27, 1 (1949), 175–179.
- [36] DIJKSMAN, E. *Motion Geometry of Mechanisms*. Cambridge University Press, 1976.
- [37] DUHEM, P. *Le système du monde: histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic, Volumen 6*. Hermann, 1954.
- [38] DÜRER, A. *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit, in Linien Ebenen und gantzen Corporen*. 1524.
- [39] DYCK, W. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente: nebst Nachtrag*. Georg Olms Verlag, 1892.

- [40] FAROUKI, R. T. Curves from motion, motion from curves. Tech. rep., DTIC Document, 2000.
- [41] FENSHAM, P. J. Real world contexts in PISA science: Implications for context-based science education. *Journal of research in science teaching* 46, 8 (2009), 884–896.
- [42] FERGUSON, E. *Kinematics of mechanisms from the time of Watt*. Bulletin (United States National Museum). Smithsonian Institution, 1962.
- [43] FISCHER, E. Beiträge zur Geschichte, Theorie und Praxis der Zeichninstrumente, insbesondere der Ellipsographen. *Polytechnisches Journal* 255 (1885), 188–199.
- [44] FOWLER, D. *The mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, 1987.
- [45] FREUDENSTEIN, F. Approximate Synthesis of Four-Bar Linkages. *Resonance* 15, 8 (2010), 740–767.
- [46] FRIEDLEIN, G. *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*. Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana. In aedibus B. G. Teubneri, 1873.
- [47] FRISHAUER, P. *Leonardo Da Vinci: das Lebensbild eines Genies*. Gads Forlag, 1995.
- [48] GALLET, M., KOUTSCHAN, C., LI, Z., REGENSBURGER, G., SCHICHO, J., AND VILLAMIZAR, N. Planar linkages following a prescribed motion. *Mathematics of Computation* (2016).
- [49] GAO, X., AND ZHU, C. Automated generation of Kempe linkage and its complexity. *J. Comput. Sci. Technol.* 14, 5 (1999), 460–467.
- [50] GAY, F. *Intorno agli omolografi strumenti e modelli per la geometria descrittiva*. Istituto universitario di architettura di Venezia, 2000.
- [51] GRASHOF, F. Theoretische Maschinenlehre. *Leipzig: Voss* (1883), 113–118.
- [52] HARTENBERG, R., AND DENAVIT, J. *Kinematic synthesis of linkages*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 1964.
- [53] HEATH, T. *A History of Greek Mathematics*, vol. 1. Clarendon, 1921.
- [54] HOGENDIJK, J. P. Greek and Arabic constructions of the regular heptagon. *Archive for History of Exact Sciences* 30, 3-4 (1984), 197–330.

- [55] HRONES, J. A., AND NELSON, G. L. *Analysis of the four-bar linkage. Its application to the Synthesis of Mechanisms*. The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1951.
- [56] JACKIW, N., AND BENNETT, D. *The Geometer's Sketchpad: Dynamic Geometry for the 21st Century*. Key Curriculum Press, 1995.
- [57] KEMPE, A. B. On a General Method of describing Plane Curves of the n th degree by Linkwork. *Proceedings of the London Mathematical Society* 7, 213-16 (1875).
- [58] KEMPE, A. B. *How to draw a straight line, a lecture on linkages*. Nature series. 1877.
- [59] KHADEMZADEH, H., AND MAZAHERI, H. Some results to the Huzita axioms. *International Mathematical Forum* 2, 13-16 (2007), 699–704.
- [60] KHAYYAM, O. *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publ., tr. et accompagnée d'extr. de MSS. inéd. par F. Woepcke*. François Woepcke, 1851.
- [61] KLEIN, F., AND SCHILLING, F. *Nicht-Euklidische Geometrie*, vol. 1. 1893.
- [62] KOBEL, A. *Automated generation of Kempe Linkages for Algebraic Curves in a Dynamic Geometry System*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, 2008.
- [63] KOENIGS, G. X. P. *Leçons de cinématique, (avec des notes par M.G. Darboux)*. Librairie Scientifique A. Hermann, 1897.
- [64] KOETSIER, T., AND CECCARELLI, M. *Explorations in the History of Machines and Mechanisms: Proceedings of HMM2012*. History of Mechanism and Machine Science. Springer, 2012.
- [65] KORTENKAMP, U. H. *Foundations of dynamic geometry*. PhD thesis, Technische Wissenschaften ETH Zürich, 2000.
- [66] LABORDE, J. M. BELLEMAIN, F. *Cabri Geometry II*. Texas Instruments, Dallas, 1998.
- [67] LENOIR, T. Descartes and the geometrization of thought: The methodological background of Descartes' géométrie. *Historia Mathematica* 6, 4 (1979), 355 – 379.
- [68] MACLAURIN, C. *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*. 1720.
- [69] MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS. The function concept. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Functions.html>.

- [70] MARTÍ, J. A., HEYDRICH, M., ROJAS, M., AND HERNÁNDEZ, A. Aprendizaje Basado en Proyectos: una experiencia de innovación docente. *Revista Universidad EAFIT* 46, 158 (2012), 11–21.
- [71] MEREUTA, E. VERESIU, S., AND RUS, M. On the topology of mechanisms designed for curves generation. *JIDEG - the SORGING Journal* 3, 1 (2008).
- [72] MONGE, G., AND BRISSON, B. *Gèométrie descriptive*. Bachelier, 1827.
- [73] MONTE, G. *Guidiubaldi e Marchionibus Montis Planisphaeriorum universalium Theorica*. apud Maternum Cholinum, 1581.
- [74] MOON, F. C. Franz Reuleaux: Contributions to 19th century kinematics and theory of machines. *Applied Mechanics Reviews* 56, 2 (2003), 261–285.
- [75] MORLEY, F. V. The Three-Bar Curve. *The American Mathematical Monthly* Volume 31, Issue 2 (1924), 71–77.
- [76] MOUST, J. H. The problem-based education approach at the Maastricht Law School. *The Law Teacher* 32, 1 (1998), 5–36.
- [77] MULLER, M. A novel classification of planar four-bar linkages and its application to the mechanical analysis of animal systems. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci* 351, 1340 (1996), 689–720.
- [78] NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687.
- [79] NIETO QUIJORNA, A. J. Problemas de cinemática de mecanismos. http://www.uclm.es/area/imecanica/AsignaturasWEB/Teoria_de_Maquinas/Problemas/problemas_cinematica.pdf.
- [80] NORMAN, GR. SCHMIDT, H. The psychological basis of Problem Based Learning. A review of the evidence. *Academic Medicine* 67, 9 (1992), 557–565.
- [81] NORTON, R. L. *Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines*. McGraw-Hill Professional, 2004.
- [82] OECD., Ed. *Working Paper 21st Century Skills and Competences for New Millennium Learners in OECD Countries (EDU Working paper no. 41)* (2010).

- [83] OECD. *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V)*. OECD Publishing Paris, 2014.
- [84] PAUL, B. A Reassessment of Grashof's Criterion. *J. Mech. Des.-T-ASME* 101, 3 (1979), 515–518.
- [85] PEAUCELLIER, C. Note sur une question de geometrie de compas. *Nouv. Ann. der Math* 12 (1873), 71–81.
- [86] PLÜCKER, J. Ueber ein neues Coordinatensystem. *Crelle's Journal* 5 (1829), 1–36.
- [87] PONCELET, J. V. *Traité des propriétés projectives des figures*, vol. 2 de *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Jean Victor Poncelet. Gauthier-Villars, 1866.
- [88] QUINN, J. J. A linkage for describing the conic sections by continuous motion. *The American Mathematical Monthly: Devoted to the Interests of Collegiate Mathematics* 11-12 (1904).
- [89] REULEAUX, F. *Theoretische Kinematik: Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens*. Lehrbuch der Kinematik. F. Vieweg und Sohn, 1875.
- [90] REULEAUX, F. *The influence of the Technical Sciences upon General Culture*. Columbia University, Henry Krumb School of Mines, 1885.
- [91] REULEAUX, F., AND KENNEDY, A. *The Kinematics of Machinery: Outlines of a Theory of Machines*. Macmillan and Company, 1876.
- [92] RICHTER-GEBERT, J. Mechanical theorem proving in projective geometry. In *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* (1995), vol. 13, pp. 139–172.
- [93] RICHTER-GEBERT, J., AND KORTENKAMP, U. *The Cinderella.2 Manual: Working with The Interactive Geometry Software*. Springer, 2012.
- [94] ROBERTS, S. On three-bar motion in plane space. *Proceedings of the London Mathematical Society* 7 (1875), 14–23.
- [95] SAXENA, A. Kempe's Linkages and the Universality Theorem. *Resonance* 16, 3 (2011), 220–237.
- [96] SEZGIN, F., AND NEUBAUER, E. *Wissenschaft und Technik im Islam: Katalog der Instrumentensammlung des Institutes für Geschichte*

- der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 3. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Goethe-Universität, 2003.
- [97] SONI, A. *Mechanism synthesis and analysis*. Scripta Book Company, 1974.
- [98] SOTO RODRÍGUEZ, H. A. Experimentación con un grupo de estudiantes de bachillerato con hojas de trabajo relacionadas con la parábola y elipse usando artefactos concretos. Master's thesis, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Luis Manuel Rivera Gutiérrez", 2010.
- [99] SPAULDING, W. B., AND COCHRAN, J. *Revitalizing medical education: McMaster Medical School, the early years 1965-1974*. BC Decker, 1991.
- [100] STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.
- [101] STURM, J. *Mathesis enucleata*. 1711.
- [102] SUARDI, G. *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve*. Rizzardi, 1752.
- [103] SUARDI, G. *Trattenimenti matematici del conte Giambatista Suardi Bresciano ...* Dalle stampe di Giambatista Bossine, 1764.
- [104] SUTHERLAND, I. E. Sketchpad: a man-machine graphical communication system. In *Proceedings of the SHARE Design Automation Workshop* (1964), DAC '64, ACM, pp. 6.329–6.346.
- [105] SYLVESTER, J. J. Recent discoveries in mechanical conversion of motion. *Notices of the Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*, 7 (1873-1875).
- [106] TAIMINA, D., PAN, B., GAY, G., SAYLOR, J., HEMBROOKE, H., HENDERSON, D., HENDERSON, D. W., LIPSON, H., MOON, F. C., HAI, J., ET AL. Historical mechanisms for drawing curves. *Hands On History: A Resource for Teaching Mathematics* (2007), 89–104.
- [107] TOUSSAINT, G. Simple proofs of a geometric property of four-bar linkages. *The American Mathematical Monthly* 110, 6 (2003), 482–494.
- [108] VAN SCHOOTEN, F. *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus: cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione*. Elzevir, 1746.
- [109] VINCENT, J., AND MCCRAE, B. Mechanical linkages, dynamic geometry software and mathematical proof. *AVAILABLE FROM* (2000), 280.

- [110] WAGNER, T. *The Global Achievement Gap: Why Even Our Best Schools Don't Teach the New Survival Skills Our Children Need-And What We Can Do about It*. ReadHowYouWant.com, Limited, 2010.
- [111] WOLFRAM, C. Stop teaching calculating, start teaching math—Fundamentally reforming the Math curriculum. Transcript: Wolfram Technology Conference 2010 Talk, 2010.
- [112] WÖPCKE, F. *Trois traités arabes sur le compas parfait*. 1874.
- [113] WÖPCKE, F. *Études sur les mathématiques arabo-islamiques: Nachdruck von Schriften aus den Jahren 1842-1874, Volumen 1*. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, 1986.
- [114] YATES, R. C. *Geometrical Tools: A Mathematical Sketch and Model Book*. Educational Publishers, 1941.
- [115] YATES, R. C. *A handbook on curves and their properties*. J.W. Edwards, 1947.
- [116] YATES, R. C. *Curves and their properties*. Classics in Mathematics Education. National Council of Teachers of Mathematics, 1974.
- [117] ZIMMERMANN, W., AND CUNNINGHAM, S. *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA notes. Mathematical Association of America, 1991.