

LA VERDAD LÓGICA EN EL FRAGMENTO PROPOSICIONAL DE LOS *PRINCIPIA* Y SUS IMPLICACIONES METALÓGICAS*

Víctor Aranda Utrero**

RESUMEN. La teoría de tipos de los *Principia Mathematica* contiene una subteoría muy especial que constituye una lógica correcta y completa y cuyo conjunto de verdades es, además, decidible: la lógica proposicional. El propósito de este artículo es explicar qué entendían Whitehead y Russell por una verdad de esta lógica y analizar por qué no se preocuparon por la consistencia de sus axiomas ni por la completud de su cálculo. ¿Hay alguna relación entre su concepción de las verdades lógicas y la falta de desarrollos metalógicos?

PALABRAS CLAVE. Lógica proposicional, consistencia, completud, tablas de verdad, Russell.

LOGICAL TRUTH IN THE PROPOSITIONAL FRAGMENT OF THE *PRINCIPIA* AND ITS METALOGICAL IMPLICATIONS

ABSTRACT. The theory of types in *Principia Mathematica* contains a very special subtheory which constitutes a sound and complete logic and whose set of truths is, in addition, decidable: it is propositional logic. The aim of this article is to explain what

* Este trabajo ha sido posible gracias a la beca FPU15/00830, concedida por el Ministerio de Educación español. Agradezco a los dos revisores anónimos de la revista Andamios sus interesantes comentarios y sugerencias.

** Contratado predoctoral en el Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad Autónoma de Madrid, España. Correo electrónico: vicarandau@gmail.com

a tautology is for Whitehead and Russell and to analyse why they were not worried about the consistency of their axioms nor about the completeness of their calculus. Is there any relation between their conception of logical truths and the lack of meta-logical developments?

KEY WORDS. Propositional logic, consistency, completeness, truth tables, Russell.

INTRODUCCIÓN: LA CARTA DE RUSSELL A HENKIN

En la carta que escribió a Henkin en 1963, Russell hace algunas observaciones sobre lo que tenía en mente cuando Whitehead y él estaban trabajando en los *Principia*:

Te diste cuenta de que éramos indiferentes a los intentos de probar que nuestros axiomas no podían conducir a contradicciones. En esto, Gödel mostró que habíamos estado equivocados. Pero yo pensaba que debía ser imposible probar que cualquier conjunto dado de axiomas no conduce a una contradicción y, por esa razón, presté poca atención a la obra de Hilbert. Además, con la excepción del axioma de la reducibilidad, que siempre consideré un parche, todos nuestros otros axiomas me parecían luminosamente evidentes. No veía cómo nadie podía negar, por ejemplo, que q implica p o q , o que p o q implica q o p (Russell 1963, pp. 592-593).

Hay, como mínimo, dos interpretaciones posibles para este párrafo. La primera de ellas consiste en entender literalmente la frase “yo pensaba que debía ser imposible probar que cualquier conjunto dado de axiomas no conduce a una contradicción”. Tomada de esta manera, deberíamos pensar que, para Russell, era tan imposible probar la consistencia de los axiomas de la aritmética como la de los axiomas de la lógica proposicional.

Sin embargo, la alusión a Gödel y al programa de Hilbert sugiere que, en realidad, Russell se refería a cualquier conjunto de axiomas que permitiera expresar las verdades de la *aritmética*. Es más, como ya señaló Skolem (1922), el uso del axioma de reducibilidad (“que siempre consideré un parche”) evidencia que Whitehead y Russell fueron incapaces de desarrollar pruebas de carácter metalógico para su teoría de los tipos.

La segunda interpretación consiste, pues, en situar esa frase de Russell en el contexto de los teoremas de Gödel. En este sentido, el comienzo de la carta resulta particularmente ilustrativo:

Me percaté, por supuesto, de que el trabajo de Gödel es de fundamental importancia, pero me dejó perplejo. Me alegré de ya no estar trabajando en lógica matemática. Si un determinado conjunto de axiomas conduce a una contradicción, está claro que al menos uno de ellos debe ser falso. ¿Se aplica esto a la aritmética de los niños de la escuela y, si es así, podemos creer algo de lo que nos enseñaron en la juventud? ¿Debemos pensar que $2 + 2$ no son 4, sino 4.001? (Russell 1963, p. 592).

Por tanto, parece que Russell creía que Whitehead y él se equivocaron al ignorar los intentos de probar que los axiomas de los *Principia* eran consistentes, ya que Gödel habría mostrado que, de hecho, no lo son. Más allá de esta confusión palmaria entre lo que es una teoría incompleta y lo que es una teoría inconsistente¹, Russell no solo pensaba que la consistencia de su teoría de tipos era indemostrable, sino que, además, ciertos axiomas no requerían una prueba tal.

Russell argumenta en esta misma carta que, si un conjunto de axiomas conduce a una contradicción, entonces al menos uno de esos axiomas deberá ser falso. Ahora bien, desde su punto de vista, axiomas de la lógica proposicional como “ q implica p o q ” y “ p o q implica q o p ” son *luminosamente autoevidentes*.

¹ “En respuesta a la pregunta final de Russell, Henkin intentó aclarar la relevancia del segundo teorema de Gödel, enfatizando la distinción entre incompletud e inconsistencia. Finalmente, una copia de la carta de Russell llegó a Gödel, quien comentó que “Russell evidentemente malinterpreta mi resultado; sin embargo, lo hace de una manera muy interesante....” (Dawson 1988, pp. 90-91).

Luego, en tanto se trata de axiomas verdaderos, es natural pensar que para Russell era obvio que carecían de consecuencias contradictorias. Tanto es así que, en la sección de los *Principia* dedicada a la lógica proposicional, Whitehead y Russell no están preocupados por el problema de la consistencia:

En la presente sección, ciertas proposiciones serán establecidas como premisas y se demostrará que son suficientes para todas las formas comunes de inferencia. Se mostrará que todas son necesarias, y es posible que el número de ellas disminuya. Todo lo que se afirma sobre las premisas es (1) que son ciertas, (2) que son suficientes para la teoría de la deducción, (3) que no sabemos cómo disminuir su número (Whitehead y Russell 1910, p. 94).

Como se advierte, estaban convencidos de que sus premisas de partida (o sea, los axiomas de la lógica proposicional) eran verdaderos. Y, entre esas premisas de partida, destaca la siguiente afirmación: “1.1. Todo lo que implica una proposición elemental verdadera es verdadero” (Whitehead y Russell 1910, p. 98). De este modo, tras postular la corrección del *modus ponens*, les resultó inmediato que una contradicción nunca podría estar entre las consecuencias de la lógica proposicional. Whitehead y Russell simplemente no veían la necesidad de probar la consistencia de estos axiomas, porque su verdad, luminosidad o auto-evidencia era (gracias al citado axioma 1.1) transmitida a cualquier proposición que se dedujera de ellos.

Que los axiomas de los *Principia* sean verdaderos o auto-evidentes contrasta con la concepción actual de las *verdades lógicas*. Es decir, en la práctica habitual de la lógica ya no escogemos los axiomas de un sistema formal por su luminosidad y auto-evidencia, sino porque son siempre verdaderos en la estructura matemática que nos interesa representar. Así, el objetivo de este artículo es justamente responder a la pregunta: ¿Qué es una verdad de la lógica proposicional² en los

² “La gran cuestión ahora”, reflexionaba Wittgenstein en una carta a Russell, “es: ¿cómo debe construirse un sistema de signos a fin de hacer que toda tautología sea reconocible

Principia y qué relación hay entre este concepto y la ausencia de meta-teoremas para dicha lógica?

El artículo se divide en dos grandes bloques. En el primero, analizamos la manera en que Whitehead y Russell definían las proposiciones y su concepto de “función proposicional”. En el segundo, veremos qué se entiende en los *Principia* por verdad lógica (“función proposicional aseverada”) y cuál su relación con los problemas de consistencia y completud. Finalmente, discutiremos los resultados obtenidos a la luz de Henkin, Dreben y van Heijenoort y el propio Russell.

PROPOSICIONES... Y FUNCIONES PROPOSICIONALES

Naturalmente, antes de determinar qué entendían Whitehead y Russell por verdad lógica es necesario saber cuáles eran para ellos las fórmulas bien formadas de la lógica proposicional. En su opinión, la lógica se distinguía por tratar con los enunciados más generales, es decir, aquellos cuyo contenido no afecta a su verdad. “Las ideas y proposiciones de la lógica son todas generales: una aseveración (por ejemplo) que es verdadera de Sócrates pero no de Platón, no pertenece a la lógica” (Whitehead y Russell 1910, p. 97). Debido a ello, las fórmulas bien formadas de la lógica proposicional tendrán que expresar esa generalidad.

A este respecto, en los *Principia* se distingue entre proposiciones elementales y funciones proposicionales elementales. De hecho, el *modus ponens* se extenderá también a esas funciones proposicionales elementales (se trata del axioma 1.11, p. 99), por lo que una deducción puede darse entre proposiciones o entre funciones proposicionales.

Entrando ya en las diferencias entre una y otra noción, al principio de la sección dedicada a la lógica proposicional (que ellos llaman ‘teoría de la deducción’) encontramos una definición muy precisa de lo que es una proposición elemental:

Por proposición “elemental” se entiende aquella que no involucra ninguna variable o, en otras palabras, aquella que no incluye

como tal DE UNA SOLA Y ÚNICA MANERA? ¡Este es el problema fundamental de la lógica!” (Monk 1994, p. 103).

palabras como “todo”, “algunos”, “el” u otras equivalentes. Una proposición como “esto es rojo”, donde “esto” es un dato sensorial, será elemental. Cualquier combinación de determinadas proposiciones elementales por medio de la negación, la disyunción o la conjunción (ver más abajo) será elemental. (Whitehead y Russell 1910, pp. 95-96)

La primera parte de esta definición viene a decir que “elementales” solo son las proposiciones donde no hay cuantificadores. La segunda, en cambio, tiene más que ver con esa generalidad característica de la lógica. Supongamos que la sensación denotada por “esto” de la que hablan Whitehead y Russell fuera la percepción de unas fresas. En tal caso, la proposición “esto es rojo” sería verdadera, pero no lo sería si “esto” denotara la percepción de unas naranjas. Por analogía con el ejemplo de Sócrates y Platón, debemos concluir que lo que sea verdadero de unas fresas y no de unas naranjas no podrá pertenecer a la lógica. “Es un hecho que ninguna proposición elemental constante ocurre en el presente trabajo, ni podrá ocurrir en cualquier otro trabajo que emplee sólo ideas lógicas” (Whitehead y Russell 1910, p. 97).

A continuación, explican lo que son las funciones proposicionales elementales, enfatizando que estas toman como valor proposiciones elementales:

Por una “función proposicional elemental” entendemos una expresión que contiene un componente indeterminado, es decir, una variable, o varios de esos componentes, y tal que, cuando se determina el componente o componentes indeterminados, o sea, cuando se asignan valores a la variable o variables, el valor resultante de la expresión en cuestión es una proposición elemental. Por lo tanto, si p es una proposición elemental indeterminada, “no- p ” es una función proposicional elemental. (Whitehead y Russell 1910, p. 96).

Para entender mejor el significado de la expresión “constituyente indeterminado”, podemos recurrir a la distinción hoy estándar entre lenguaje interpretado y lenguaje sin interpretar. A pesar de que

Whitehead y Russell utilizan “constituyente determinado” y “valor ambiguo” de manera prácticamente indistinta³, sería un error pensar que las variables proposicionales toman un valor que es indeterminado/ ambiguo. Por el contrario, la idea es que no toman ningún valor determinado: las funciones proposicionales elementales son fórmulas de la lógica proposicional *sin interpretar*.

No obstante, el hecho de que las funciones proposicionales elementales sean funciones que toman proposiciones elementales incluye más expresiones que las meras fórmulas sin interpretar. Para empezar, parece que las propias variables proposicionales se ajustarían a esta definición, dado que en los *Principia* la asignación de estas variables es cualquier proposición elemental.

Similarmente, las propias conectivas, en la medida en que Whitehead y Russell las introducen como funciones de verdad, son asimismo funciones proposicionales:

La Adición Lógica es una función proposicional con dos argumentos p y q , y es la proposición que afirma p o q disyuntivamente, es decir, que afirma que al menos uno de los dos p y q es verdadero [...] La Multiplicación Lógica es una función proposicional con dos argumentos p y q , y es la proposición que afirma p y q conjuntamente, es decir, que afirma que tanto p como q son verdaderos (Whitehead y Russell 1910, p.6).

En lo relativo a las conectivas, basta con definir el conjunto de fórmulas bien formadas para expresiones que contengan el negador y el disyuntor, ya que el resto se pueden obtener combinando el significado de la negación y el de la disyunción. Debido a ello, después de haber estipulado que ‘no- p ’ es una función proposicional elemental si y solo si ‘ p ’ es una proposición elemental sin determinar (o sea, sin

³ “Hay que lamentar que la primera presentación exhaustiva y completa de una lógica matemática, y la deducción de las matemáticas a partir de ella, carezca de tanta precisión formal en sus fundamentos (contenida en las secciones 1-1.21 de los *Principia*) que presenta a este respecto un considerable retroceso en comparación con Frege” (Gödel 1944, p. 126).

ningún valor asignado), Whitehead y Russell enuncian que: “1. 72. Si Φp y ψp son funciones proposicionales elementales que toman las proposiciones elementales como argumentos, $\Phi p \vee \psi p$ es una función proposicional elemental” (Whitehead y Russell 1910, p. 101).

Por tanto, todas las fórmulas bien formadas de la lógica proposicional son funciones proposicionales elementales (salvo, como ya veremos, las precedidas por el signo de aserción⁴). Esas fórmulas, que al contener al menos una letra proposicional sin interpretar no tienen valor de verdad, son la base del sistema lógico de los *Principia*. “El principio anterior [1.1] se utiliza siempre que tengamos que deducir una proposición de una proposición. Pero la inmensa mayoría de las aseveraciones del presente trabajo son funciones proposicionales aseveradas, es decir, contienen una variable indeterminada” (Whitehead y Russell 1910, p. 99).

Así pues, la cuestión ahora es explicar cómo distinguían Whitehead y Russell entre las fórmulas bien formadas que son verdades lógicas y aquellas que no lo son, o sea, entre las funciones proposicionales elementales que pueden ser aseveradas y las que no.

VERDAD LÓGICA, CONSISTENCIA Y COMPLETUD

Las verdades de la lógica proposicional: funciones proposicionales aseveradas

Tomemos como ilustración la función proposicional elemental $p \supset (p \supset p)$. Esta función proposicional elemental es una verdad lógica (según Whitehead y Russell, puede ser aseverada) porque el valor de verdad de la proposición que resulta de determinar ‘ p ’ por una proposición elemental es siempre ‘verdadero’⁵.

⁴ “Este signo ‘ \vdash ’ se llama “signo de aserción”. *Hemos adoptado tanto la idea como el signo de aserción de Frege” (Whitehead y Russell 1910, p. 96).

⁵ “Las entidades consideradas son números que pueden ser todos 0 o 1; $p \supset q$ debe tener el valor 0 si p es 1 y q es 0; de lo contrario, debe tener el valor 1; $\sim p$ debe ser 1 si p es 0, y 0 si p es 1; $p \cdot q$ debe ser 1 si p y q son ambos 1, y debe ser 0 en cualquier otro caso; $p \vee q$ debe ser 0 si p y q son ambos 0, y debe ser 1 en cualquier otro caso; y el signo de aserción significa que lo que sigue tiene el valor 1” (Whitehead y Russell 1910, p. 120).

Veámoslo ahora con una analogía. Para Whitehead y Russell, las verdades de la lógica debían ser como las verdades contenidas en los enunciados de Euclides. Enunciados como ‘si ABC es un triángulo isósceles, entonces sus ángulos en la base serán iguales’ se aplicarían a cualquier triángulo isósceles, ya que son verdaderos de *cualquier* triángulo isósceles y no de uno en concreto. Es decir, el valor de verdad de la proposición que resulta de determinar ‘ ABC ’ por un triángulo isósceles, sea este el que sea, es siempre ‘verdadero’. Como sucedía en lógica, el enunciado de Euclides contiene un constituyente que aún no toma ningún valor (‘ ABC ’), lo cual expresaría la generalidad característica de los sistemas formales.

Esta concepción de las verdades lógicas permite explicar algo tan poco intuitivo como que una expresión que no tenga valor de verdad pueda estar aseverada. Cuando se introduce el signo de aserción en los *Principia* (p. 96), Whitehead y Russell afirman que debería ser leído como ‘es verdadero que...’. De este modo, la proposición ‘César murió’ precedida del signo de aserción debería ser leída como ‘es verdadero que César murió’. Ahora bien, imaginemos que el nombre propio ‘César’ fuera sustituido por la variable ‘ x ’. En tal caso, la expresión ‘ x murió’ precedida del signo de aserción debería leerse ‘es verdadero que x murió’, lo cual, en tanto no sabemos quién es ‘ x ’, es absurdo. No obstante, Whitehead y Russell insisten en que hay un tipo especial de funciones proposicionales que sí pueden estar aseveradas:

Además de la aseveración de proposiciones definidas, necesitamos lo que llamaremos “aseveración de una función proposicional” [...] Sea Φx una función proposicional cuyo argumento es x . Podemos afirmar Φx sin asignar un valor a x . Lo hacemos, por ejemplo, cuando la ley de identidad se afirma bajo la forma “ A es A ”. Aquí A se deja indeterminado, porque, sin importar cómo se determine A , el resultado es verdadero. Así, cuando afirmamos que Φx deja x indeterminado, estamos afirmando un valor ambiguo de nuestra función. Esto solo es legítimo si, independientemente de cómo se determine esa ambigüedad, el resultado será verdadero. (Whitehead y Russell 1910, pp. 96-97).

La diferencia entre las expresiones “ x murió” y “ A es A ” es que solo en la segunda la proposición que resulta de asignar un valor a la variable es siempre verdadera. En efecto, “ x murió” es verdadera si “ x ” designa a César, pero no lo es si “ x ” hace referencia a una persona viva; por el contrario, “ A es A ” es verdadera sea cual sea la denotación de la letra sin interpretar “ A ”. Esta es la razón por la que Whitehead y Russell pensaban que ciertas funciones proposicionales podían estar aseveradas a pesar de que su contenido estuviera indeterminado. Son, como vimos, aquellas cuya proposición resultante es verdadera independientemente del modo en que esa indeterminación sea resuelta (o sea, las verdades lógicas como el principio de identidad).

En definitiva, una verdad de la lógica proposicional en los *Principia* es una función proposicional elemental (una fórmula sin interpretar que contiene al menos una variable libre) que, en la medida en que está aseverada (esto es, en la medida en que su verdad es independiente del valor que le asignemos a esa variable), constituye una proposición siempre verdadera. Las verdades de la lógica son, en tanto enunciados máximamente generales, proposiciones que aseveran algo que se cumple para toda posible determinación de su contenido. Mas, ¿hay alguna relación entre esta caracterización de las mismas y la ausencia de resultados metalógicos en los *Principia*?

La justificación matemática de las verdades lógicas: la tesis doctoral de Post

Con respecto a la consistencia de sus axiomas, ya vimos en la introducción que se trata de un problema que pasaron por alto al considerar obvio que estos no podían ser falsos. Pero, atendiendo solo a la lógica proposicional, lo cierto es que podrían haber probado fácilmente la corrección de la única regla que hacen explícita⁶, el modus ponens. Basta con postular que los axiomas de la lógica proposicional son

⁶ “Esta operación [la regla de sustitución] no está explícitamente definida en los *Principia*, pero Russell señala que es necesaria (1919, p. 151). Su forma particular nos fue sugerida por la primera parte de la operación “sustitución” dada por Lewis (1918, p. 295)” (Post 1921, p. 264).

proposiciones siempre verdaderas (es decir, funciones proposicionales elementales que pueden estar aseveradas) para que la demostración de que el modus ponens preserva esa propiedad no sea especialmente complicada.

Así, sean p y $\sim p \vee q$ dos funciones proposicionales elementales que están aseveradas. Puesto que, por hipótesis, p denota una proposición siempre verdadera, es obvio que $\sim p$ denota una proposición siempre falsa. Por este motivo, para que $\sim p \vee q$ denote una proposición siempre verdadera, ' q ' debe referirse asimismo a una proposición siempre verdadera. De ahí se concluye que toda función proposicional elemental que se siga (por *modus ponens*) de otra que esté aseverada también está aseverada. Como una contradicción no puede estar nunca aseverada (ya que es una proposición siempre falsa), si los axiomas de la lógica proposicional son proposiciones siempre verdaderas, entonces serán consistentes. Por tanto, entender las verdades lógicas como funciones proposicionales elementales que pueden estar aseveradas no es incompatible con el desarrollo de una prueba de corrección para el *modus ponens*.

La clave está, pues, en cómo mostrar que las proposiciones que resultan de asignar un valor a las variables contenidas en los axiomas de la lógica proposicional son siempre verdaderas. Debido a que Whitehead y Russell no veían la consistencia como un problema, no sintieron la necesidad de demostrar matemáticamente que esto era así y se conformaron con una justificación informal de dichos axiomas:

Algunas proposiciones deben ser asumidas sin prueba, en la medida en que toda inferencia procede de proposiciones previamente aseveradas [...] Éstas, en tanto ideas primitivas, son hasta cierto punto un asunto de elección arbitraria; aunque, como en el caso anterior, un sistema lógico crece en importancia cuanto menos y más simples son sus proposiciones primitivas. Veremos que, debido a la debilidad de la imaginación al tratar con ideas abstractas simples, no se puede hacer mucho énfasis en su obviaidad. Son obvias para la mente instruida, pero también lo son muchas proposiciones que no pueden ser del todo ciertas, ya que son refutadas por sus consecuencias contradictorias (Whitehead y Russell 1910, p. 13).

Por decirlo ya, nuestra hipótesis es que esta justificación informal (no matemática) de las verdades lógicas (o sea, que la prueba de que una función proposicional elemental está aseverada se deje a las “mentes instruidas” que sepan captar su “obviedad”) explica que Whitehead y Russell no se plantearan cuestiones como la completud semántica. Un posible argumento para defender esta idea se encuentra en la que fuera la tesis doctoral de Post (1921). En ella, Post también considera que las verdades de la lógica proposicional son un subconjunto especial de funciones: “esta teoría trata con la aseveración de un cierto subconjunto de estas funciones. Denotamos la aseveración de una función escribiendo a \vdash antes de ella” (Post 1921, p. 267). Sin embargo, él no recurre a la luminosidad o auto-evidencia de algunas funciones proposicionales para persuadirnos de que resultan en una proposición siempre verdadera: “Nuestro teorema más importante da un método uniforme para probar la verdad de cualquier proposición del sistema y, por medio de este teorema, podemos mostrar ciertas relaciones generales que existen entre estas proposiciones”. (Post 1921, p. 265)

Ese teorema “más importante” (el teorema fundamental⁷) establece formalmente una condición necesaria y suficiente para que una función proposicional elemental esté aseverada. Así, Post demostrará que una función proposicional está aseverada si y solo si es una función positiva, es decir, si y solo si todos los valores de su *tabla de verdad* son +. El método de tablas de verdad es, a diferencia de la apelación de Whitehead y Russell a las mentes instruidas, un procedimiento efectivo (o sea, un algoritmo) que permite *decidir* si una función proposicional elemental es o no una verdad lógica.

Y, como señala el propio Post, ese procedimiento de decisión no estaba en los *Principia*. “Los valores de verdad, funciones de verdad y nuestras tablas de verdad primitivas se describen en Whitehead y Russell 1910, págs. 8 y 120, pero no se introduce la noción general de tabla de verdad.” (Post 1921, p. 267). Por tanto, la razón de que escojamos una función proposicional elemental como axioma ya no

⁷ “Una condición necesaria y suficiente para que una función de F sea aseverada como resultado de los postulados II, III y IV es que todos sus valores de verdad sean +” (Post 1921, p. 269).

es que nos parezca evidente que siempre resulta en una proposición verdadera: ahora disponemos de las tablas de verdad para comprobarlo.

Es más, gracias a este método, Post también es consciente de que puede formular ciertos metateoremas para la lógica proposicional que no estaban al alcance de Whitehead y Russell:

Deseamos subrayar aquí que los teoremas de este artículo se refieren a la lógica proposicional, pero no se incluyen en ella. Más particularmente, mientras que las proposiciones de los *Principia* son aseveraciones particulares introducidas por su interés y utilidad en partes posteriores del trabajo, las del presente artículo se refieren al conjunto de todas esas posibles aseveraciones". (Post 1921, p. 265)

Los dos metateoremas más importantes que logra demostrar (y que, en el fondo, constituyen el núcleo del teorema fundamental) son que toda función proposicional elemental que se deduzca de los axiomas es una función positiva (corrección de la lógica proposicional) y que toda función positiva puede deducirse a partir de los mismos (completud semántica). Para Whitehead y Russell, que no justificaron la elección de ninguno de sus axiomas mediante conceptos matemáticos como el de función positiva, resultó imposible tomar el conjunto de proposiciones lógicas como un todo. De ahí que, a pesar de mantener que todas las verdades de la matemática podían obtenerse deductivamente partiendo solo de un número relativamente exiguo de conceptos lógicos, ni se plantearan llegar a probar que esto era realmente así.

DISCUSIÓN: HENKIN, VAN HEIJENOORT Y RUSSELL

Por supuesto, había matemáticos y lógicos que no estaban convencidos. Y así surgió la necesidad de una prueba. En realidad, la formulación adecuada del problema de si un sistema de axiomas es adecuado para establecer todas las afirmaciones verdaderas de

algún campo de investigación requiere una formulación matemáticamente precisa de la noción de “sentencia verdadera”, y no fue hasta 1935 que Alfred Tarski, en un trabajo pionero, hizo plenamente evidente la forma en que las nociones semánticas deben ser analizadas para los lenguajes matemáticos (Henkin 1962, p. 790).

Como podemos observar, Henkin pensaba que para preguntarse si un conjunto de axiomas es *suficiente* para derivar todas las verdades de una teoría formalizada es necesario, previamente, haber alcanzado cierto grado de precisión matemática en la definición de ‘sentencia verdadera’. Si esto es así, en el caso de la lógica proposicional sería necesario cierto grado de precisión matemática en la definición de ‘verdad de la lógica proposicional’. El diagnóstico de Henkin parece apoyar, pues, la hipótesis que sugerimos más arriba. Ahora bien, la alusión a Tarski puede malinterpretarse, ya que a partir de la referencia a 1935 alguien podría inferir que para probar completud se requiere, además, un concepto *explícito* de consecuencia semántica. Pero Post, a pesar de no tenerlo, da a entender que ha probado algo que recuerda mucho a lo que dice Henkin en el párrafo citado: “Estas relaciones muestran definitivamente que los postulados de los *Principia* son capaces de generar el sistema completo de la lógica de las proposiciones sin introducir nunca resultados ajenos a ese sistema —una conclusión a la que difícilmente se podría haber llegado por medio de los procesos particulares utilizados en esa obra”. (Post 1921, p. 265)

De este modo, Post, al igual que Henkin, también creía que la manera en que Whitehead y Russell encaraban su sistema formal era incompatible con ciertos resultados metalógicos como la completud. No obstante, esto no se debe a que el concepto de función proposicional aseverada no recoja una buena intuición sobre lo que es una verdad lógica (que ciertamente lo hace), sino a que, matemáticamente hablando, su justificación no es lo suficientemente precisa.

Por otro lado, si Dreben y van Heijenoort estaban en lo cierto⁸, entonces esa nueva justificación de las verdades de la lógica proposicional que encontramos en Post (o sea, el método de tablas de verdad) debe provenir del Álgebra de la Lógica. Pues bien, él mismo admitió que su método no era esencialmente distinto al que ya estaba en Schröder, aunque obviamente este no lo usara para probar metateoremas de la lógica proposicional. “El método para comprobar las proposiciones incorporadas en este teorema [el teorema fundamental] es esencialmente el mismo que el dado por Schröder (1891, s. 32) para su sistema lógico” (Post 1921, p. 269). De hecho, Post matiza aún más y asegura (basándose en la autoridad de Lewis) que el concepto general de tabla de verdad fue precisado por Jevons y Venn.

En cambio, para Whitehead y Russell la tradición que arranca con Boole habría sido, a pesar de tener cierto interés, demasiado acentuada; ese excesivo énfasis en la lógica entendida “como un cálculo” habría sido a expensas de minusvalorar su papel como la parte más elemental de la matemática (1910, p. 120). Russell, en *The Principles of Mathematics*, ya había criticado años antes al Álgebra de la Lógica afirmando que el desarrollo técnico que Boole procuró a la disciplina no vino acompañado de ninguna utilidad para la filosofía o para la propia matemática (1903, p. 10). Posteriormente, en *My philosophical development*, dirá que ni Boole, ni Pierce ni Schröder arrojaron luz sobre los problemas que la aritmética presenta a la lógica (1959, p. 65).

Sin embargo, la crítica más injusta de Russell a estos pioneros es, quizá, la que podemos leer en *Our knowledge of external world*:

El desarrollo moderno de la lógica matemática data de las *Leyes del Pensamiento de Boole* (1854). Pero en él y en sus sucesores,

⁸ “Para plantear la cuestión de la completud semántica, hubo que abandonar la visión Frege-Russell-Whitehead de la lógica [...] y la noción de Frege de sistema formal tenía que convertirse en un objeto de investigación matemática y ser sometida a los análisis modelo-teóricos de los algebristas de la lógica.” (Dreben y van Heijenoort 1986, p. 45).

antes de Peano y Frege, lo único que realmente se logró, aparte de ciertos detalles, fue la invención de un simbolismo matemático para deducir consecuencias de las premisas que los nuevos métodos compartían con los de Aristóteles. Este tema tiene un interés considerable como rama independiente de las matemáticas, pero tiene muy poco que ver con la lógica real. El primer avance serio en la lógica real desde la época de los griegos fue hecho independientemente por Peano y Frege, ambos matemáticos (Russell 1914, p. 50).

La desatención de Russell al Álgebra de la Lógica (“tiene muy poco que ver con la lógica real”⁹) fue tal que, más de quince años después de que Post aplicara las tablas de verdad a la lógica proposicional de los *Principia*, seguía sin justificar matemáticamente que las verdades lógicas eran tales. En el prólogo a la segunda edición de *The Principles of Mathematics*, la idea de que son proposiciones que aseveran algo que se cumple para toda posible determinación de sus variables alcanza cierta madurez. Así, recuperando la oposición entre forma y contenido¹⁰ que hizo explícita en 1914 (pp. 52-53), sostiene que las proposiciones lógicas son verdaderas en virtud de su forma.

Esta concepción refinada de las verdades lógicas (que, de nuevo, se basa en la generalidad de los enunciados que son siempre verdaderos) tampoco encuentra mayor rigor matemático en un Russell que se confiesa incapaz de especificar más:

La característica fundamental de la lógica es, obviamente, la que se indica cuando decimos que las proposiciones lógicas son verdaderas en virtud de su forma [...] Confieso, sin embargo, que

⁹ Los principios de la “lógica real” no requieren de justificación matemática, pues, recordemos, resultan autoevidentes para las “mentes instruidas”.

¹⁰ “En toda proposición y en toda inferencia hay, además de la materia particular en cuestión, una cierta forma, una manera en que los constituyentes de la proposición o la inferencia son combinados. Si digo “Sócrates es mortal”, “Jones está enfadado”, “El sol está caliente” hay algo en común en estos tres casos, algo indicado por la palabra “es”. Lo que es común es la forma de la proposición, no un constituyente real” (Russell 1914, p. 52).

soy incapaz de dar cuenta clara de lo que significa decir que una proposición es “verdadera en virtud de su forma”. Pero esta frase, por inadecuada que sea, apunta, creo, al problema que debe ser resuelto si se quiere encontrar una definición adecuada de la lógica (Russell 1938, p. xii).

Por tanto, es natural pensar que haya cierta relación entre la incapacidad de Russell para justificar matemáticamente las verdades de la lógica proposicional (que, como hemos visto, le acompañó más allá de los *Principia*) y el hecho de que las cuestiones metalógicas se le escaparan. A favor de esta hipótesis no solo hay que tener en cuenta que Post sí logró probar la corrección y la completud de esa lógica conservando mucha terminología de Whitehead y Russell, sino también que le prestó poca atención a la tradición donde el propio Post descubrió la clave.

CONCLUSIONES

Recordemos que este artículo pretendía aclarar qué era una verdad de la lógica proposicional para Whitehead y Russell, así como analizar en qué medida esa concepción explica que no se probaran metateoremas en los *Principia*.

Una proposición lógica debía ser, antes que nada, un enunciado general, por lo que en los *Principia* se introduce el concepto de función proposicional como base de cualquier sistema lógico. No todas las funciones proposicionales son verdades de la lógica proposicional, puesto que basta con tener un constituyente indeterminado (o sea, una variable) para formar parte de este conjunto. Ahora bien, una función proposicional elemental (sin cuantificadores) solo es una verdad lógica si la proposición que resulta al resolver dicha indeterminación es siempre verdadera. Esta peculiaridad implica que, a pesar de no tener valor de verdad, puedan estar aseveradas.

Que las funciones proposicionales elementales precedidas del signo de aserción fueran proposiciones verdaderas se justificaba en su aparente luminosidad y auto-evidencia. Esta obviedad hizo pensar a Whitehead y Russell que los axiomas de la lógica proposicional no podían conducir

a una contradicción, pues de lo contrario serían falsos. Debido a este sesgo epistemológico, no vieron la consistencia de tales axiomas como algo que hubiera que demostrar, a pesar de que podían haber probado la corrección del modus ponens (y, simplemente, la postularon). Si hubieran sentido la necesidad de demostrarla, tal vez habrían dedicado más tiempo a justificar matemáticamente que sus axiomas eran verdades lógicas. Presumiblemente, esto les habría permitido distinguir entre dos maneras de clasificar funciones proposicionales elementales: la derivación de teoremas y la aplicación de procedimientos semánticos.

Haber precisado un concepto de verdad lógica independiente de la relación de deducibilidad (y, como decimos, matemáticamente preciso) habría supuesto que la cuestión de la completud semántica aflorara con naturalidad. Como muestra de ello, expusimos la introducción de las tablas de verdad en la tesis doctoral de Post (quien sí probó corrección y completud), además de recurrir a la autoridad de Henkin para apoyar nuestro argumento. Finalmente, vimos que el refinamiento matemático de la idea de verdad lógica se debió en gran medida al Álgebra de la Lógica, la cual fue, casualmente o no, ignorada por Russell.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- DAWSON, J. W. (1988). The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems. En Shanker (Ed.). (1988). pp. 74-96.
- GRATTAN-GUINNESS, I. (2000). *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton: Princeton University Press.
- GÖDEL, K. (1944). *Russell's mathematical logic*. En Schilpp (Ed.), 1944. pp. 125-153.
- GÖDEL, K. (1986). *Collected works* (1st Volume). Oxford: Oxford University Press.
- HENKIN, L. (1962). Are Logic and Mathematics Identical? En *Science*. Núm. 138. pp. 788-794.
- LEWIS, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press.

- MONK, R. (1994). *Ludwig Wittgenstein*. Barcelona: Editorial Anagrama.
- POST, E. (1967). *Introduction to a general theory of elementary propositions*. En van Heijenoort (Ed.). 1967. pp. 264-283.
- RUSSELL, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- RUSSELL, B. (1914). *Our Knowledge of External World*. Londres: George Allen & Unwin.
- RUSSELL, B. (1938). *The Principles of Mathematics*. Nueva York: W. W. Norton & Company.
- RUSSELL, B. (1959). *My Philosophical Development*. Nueva York: Simon and Schuster.
- RUSSELL, B. (1963). *Letter to Henkin*. En Grattan-Guinness 2000. pp. 592-593.
- SCHILPP, P. (Ed.). (1944). *The philosophy of Bertrand Russell*. Chicago: North-western University.
- SHANKER, S. (1988). *Gödel's Theorems in focus*. London: Routledge & Kegan Paul.
- SKOLEM, T. (1922). Some remarks on axiomatized set theory. En van Heijenoort (Ed.) 1967. pp. 264-283.
- VAN HEIJENOORT, J. (Ed.). (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard: Harvard University Press.
- VAN HEIJENOORT, J. y Dreben, B. (1986). Introductory note to 1929, 1930 and 1930a. En Gödel (1986). pp. 44-59.
- WANG, H. (1974). *From Mathematics to Philosophy*. Londres: Routledge & Kegan Paul.
- WHITEHEAD, A. y Russell, B. (1910). *Principia Mathematica* (1st Volume). Cambridge: Cambridge University Press.

Fecha de recepción: 12 de abril de 2019
 Fecha de aceptación: 24 de julio de 2019