

Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias



Universidad Autónoma  
de Madrid

Tesis Doctoral

---

**Efectos de la cosmología cuántica de lazos  
en perturbaciones primordiales y en  
espaciotiempos de agujero negro**

---

Alejandro García-Quismondo Martín

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Instituto de Estructura de la Materia



**CSIC**

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

**Director de tesis:**

Guillermo Antonio Mena Marugán

Madrid, marzo 2023

*A mi familia.  
Sin vosotros, yo no sería quien soy  
y nada de esto habría sido posible.*

*“Oh, Universo infinito, ¡qué movidón desconocido!”*  
*- Gigatron*

# Agradecimientos

Como no podría ser de otro modo, mi primer y más sentido agradecimiento es para Guillermo, que me ha acompañado en mis primeros pasos en el mundo de la investigación y me ha ofrecido una perspectiva única. Gracias por haber confiado en mí y por haberme sacado una carcajada en los momentos buenos y en los no tan buenos. Gracias también a Santi, a Laura y a Bea por haberme hecho sentir como uno más desde el primer día y por haber compartido conmigo risas, cervezas y nada menos que un viaje inolvidable a México.

Tengo mucho que agradecer también a mis amigos de la universidad, que son la razón principal por la que considero esos años de clases, cafés y estudio en grupo algunos de los mejores de mi vida. Maca, Alber (García) y Alber (Megías), no puedo echar la vista atrás e imaginarme esta época sin vosotros. Gracias por todos los momentos que hemos compartido.

Por supuesto, yo no estaría aquí de no ser por mi familia y, en especial, por mis tías Susi y Silvi, mis abuelos Mila y Paco, mis padres y mi hermana. Gracias por animarme siempre a perseguir mis sueños y por darme alas para hacerlo. Aquí incluyo a aquellos con quienes no comparto lazos de sangre pero que son también parte de mi familia. Gracias, Bea, por haberte interesado siempre por mi trabajo y por haberme ayudado a desconectar cuando más falta me hacía en el proceso de escritura de esta tesis. Gracias, Marta, por haberme acompañado todos estos años y por haber estado siempre ahí cuando te he necesitado. Sois el eje de mi vida y doy gracias por teneros.

No quiero olvidarme de mencionar a Ana Gutiérrez, mi profesora de física en el instituto. Sin ti, probablemente nunca habría contemplado la posibilidad de emprender el camino que culmina hoy aquí.

Finalmente, quiero agradecer el apoyo de una beca de la Fundación “la Caixa” con código LCF/BQ/DR19/11740028, que ha hecho posible mi dedicación completa a la investigación durante los últimos años.

# Resumen

La gravedad cuántica de lazos es un candidato sólido para cuantizar la relatividad general que es compatible con la independencia de fondo característica de la teoría einsteiniana. Si bien el programa de cuantización aún no ha sido completado para escenarios generales, las técnicas empleadas en su construcción se han aplicado con éxito a la cuantización de sistemas con un alto número de simetrías. Estos sistemas, entre los que se incluyen modelos cosmológicos y de agujero negro, resultan ser también los más prometedores desde el punto de vista de la potencial obtención de predicciones relacionadas con la naturaleza cuántica de la gravedad, tanto porque describen regiones en las que la curvatura puede ser grande, incluso con presencia de singularidades clásicas, como porque su simplicidad permite un tratamiento detallado. El campo nacido del estudio de este tipo de sistemas mediante el uso de técnicas inspiradas en la gravedad cuántica de lazos recibe el nombre de *cosmología cuántica de lazos*.

En los últimos años, ha habido un resurgir del interés por investigar las fuentes de ambigüedad que afectan al programa de cuantización. En particular, se ha prestado especial atención al procedimiento de regularización de la ligadura hamiltoniana en cosmologías homogéneas. El enfoque tradicional adoptado en dicho procedimiento ha consistido en explotar las simetrías de los sistemas estudiados para reescribir la parte lorentziana de la ligadura hamiltoniana en términos de la euclídea, de tal forma que solo ha sido necesario regularizar esta última. Este modo de proceder contrasta considerablemente con el que se sigue en la teoría completa, donde cada parte de la ligadura hamiltoniana requiere una regularización independiente. Dado que no existe garantía de que la cosmología cuántica de lazos capture la dinámica cosmológica de la gravedad cuántica de lazos, parece razonable examinar propuestas de regularización alternativas más cercanas al procedimiento seguido en la teoría completa para analizar cuán robustas son las predicciones obtenidas hasta el momento. A este respecto, merece una mención especial la regularización modificada propuesta por Dapor y Liegener, que conduce a un formalismo de la cosmología cuántica de lazos con una imagen física de la evolución del Universo Primordial cualitativamente distinta de

la estándar en esta disciplina: la singularidad inicial clásica se elude mediante un mecanismo de rebote cuántico *asimétrico*, que une una era de Sitter con una constante cosmológica emergente de orden planckiano y una rama cosmológica estándar en expansión.

En lo referente a la descripción de espaciotiempos de agujero negro, un modelo propuesto recientemente para la descripción efectiva de agujeros sin rotación ni carga ha atraído una atención considerable por parte de la comunidad. Dicho modelo efectivo destaca frente a otros enfoques debido a que no presenta ciertas características patológicas de las que adolecían investigaciones previas. En gran parte, las propiedades atractivas del modelo se deben a una elección muy concreta de los parámetros que regulan la introducción de efectos cuánticos en el sistema. En lugar de tomarlos como meras constantes o como funciones arbitrarias, Ashtekar, Olmedo y Singh — los autores del nuevo modelo — optaron por definir estos parámetros de tal modo que fuesen constantes solo a lo largo de las trayectorias dinámicas. La física resultante de dicho procedimiento es tal que la singularidad central clásica se ve reemplazada por una hipersuperficie regular que media la transición entre una región atrapada y una anti-atrapada.

En esta tesis, examinaremos primero en detalle la nueva propuesta de regularización para modelos cosmológicos con el fin de discutir la robustez de las predicciones físicas de la cosmología cuántica de lazos en lo que se refiere a esta ambigüedad. Nuestros objetivos principales son la generalización de dicho procedimiento al estudio de sistemas cosmológicos más complejos que los contemplados en la literatura y el análisis de las teorías cuánticas que resultan de adoptar este esquema de regularización, haciendo énfasis en las diferencias y similitudes encontradas con respecto a la cosmología cuántica de lazos estándar. Para ello, empezaremos examinando la cuantización de sistemas cosmológicos homogéneos e isótropos, adoptando la nueva propuesta para la regularización de la ligadura escalar y empleando una de las dos prescripciones de orden de factores predominantes en el campo (a saber, la denominada prescripción MMO, por las siglas de sus autores: Martín-Benito, Mena-Marugán y Olmedo). Tras comprobar que las buenas propiedades que caracterizan dicha prescripción siguen presentes cuando se regulariza la ligadura hamiltoniana según el nuevo esquema, nos centraremos en el estudio de los sistemas cosmológicos anisótropos de Bianchi tipo I empleando la misma prescripción. En dicho contexto, si bien la forma funcional del operador de ligadura es considerablemente complicada, encontramos que las reglas de superselección se ven modificadas con respecto a las obtenidas siguiendo el procedimiento estándar. Esto es fruto de que la acción de la ligadura hamiltoniana involucra un mayor número de grados de libertad.

Empleando el estudio de los sistemas homogéneos mencionados previamente como punto de partida, abordaremos la construcción de un marco teórico para el tratamiento de perturbaciones en torno a cosmologías homogéneas e isotropas con secciones espaciales compactas y con un contenido material proporcionado por un campo escalar mínimamente acoplado a la geometría. Para ello, utilizaremos el formalismo de la cosmología cuántica híbrida, que fue diseñado ya para admitir cualquier representación de la geometría homogénea. En esta tesis, consideraremos la representación polimérica resultante de adoptar el procedimiento alternativo de regularización y llevaremos a cabo una cuantización explícita del sistema completo (comprendido por el fondo homogéneo y por perturbaciones tanto de la métrica como del campo material). Introduciremos dos propuestas de definición distintas para ciertos operadores geométricos relevantes en la representación de las contribuciones perturbativas a la ligadura hamiltoniana. Centrándonos en una cierta clase de soluciones y con un número controlado de hipótesis, deduciremos una ligadura maestra que gobierna la dinámica de las perturbaciones y estudiaremos la contrapartida clásica de las ecuaciones que rigen dicha dinámica. Finalmente, llevaremos a cabo un análisis detallado de las masas efectivas (dependientes del fondo) que intervienen en las ecuaciones de propagación de las perturbaciones escalares y tensoriales, masas que incorporan correcciones cuánticas, entre las que se incluyen las resultantes de adoptar un esquema de regularización alternativo. Más concretamente, estudiaremos sus propiedades de positividad en los regímenes de interés físico desde el punto de vista de la fijación de condiciones iniciales para la dinámica perturbativa: el instante del rebote y la era de Sitter emergente. En este análisis, además de las masas de las dos propuestas mencionadas anteriormente en la cuantización híbrida, incluiremos también las masas resultantes de otro de los enfoques existentes para el tratamiento de perturbaciones dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos: el denominado enfoque de la métrica vestida. Esto nos permitirá extender el estudio comparativo que se había realizado previamente en el contexto de la regularización estándar. Como se observaba ya en dicho estudio en el rebote, concluimos que, tanto en el instante del rebote como ahora también en la era de Sitter, las masas del formalismo híbrido (y, en particular, las resultantes de una de las propuestas de definición de ciertos operadores en la teoría cuántica) exhiben mejores propiedades en los escenarios de interés en lo que se refiere a la fenomenología del fondo cósmico de microondas. Este comportamiento respalda la adopción del enfoque híbrido frente a otros enfoques existentes, también en el contexto de la regularización alternativa. Dicho esto, cabe enfatizar que el esquema de regularización alternativo *sí* deja una huella en las masas dependientes del fondo estudiadas, que son fundamentales para la obtención última de los espectros de potencia del fondo cósmico de microondas.

Además de estas cuestiones referentes a sistemas cosmológicos, en esta tesis también investigaremos las bases teóricas del nuevo modelo efectivo para la descripción polimérica de agujeros negros de Schwarzschild. En particular, mostraremos cómo reconciliar el modelo con un tratamiento hamiltoniano consistente en el que el papel de parámetros cuánticos viene desempeñado por constantes del movimiento. Este estudio es necesario porque los autores del nuevo modelo efectivo tratan los parámetros como si fuesen meros números constantes en la deducción de las ecuaciones dinámicas, lo que oscurece la relación entre el hamiltoniano efectivo propuesto y la dinámica estudiada. Para sustentar el modelo en un tratamiento hamiltoniano canónico riguroso, exploraremos dos caminos disintos.

En primer lugar, propondremos una definición de los parámetros más general que las consideradas hasta el momento en la literatura, haciendo uso de dos funciones del espacio de fases que se conservan dinámicamente y que aparecen de forma natural en el modelo. A partir de dichas definiciones y teniendo en cuenta que los parámetros así definidos no conmutan con las variables canónicas, obtendremos las ecuaciones dinámicas mediante un cálculo hamiltoniano estándar. Estas ecuaciones resultan más complicadas que las consideradas por los autores del modelo original. De hecho, difieren de estas últimas en la aparición de dos factores adicionales que son funciones del espacio de fases. Reabsorbiendo dichos factores mediante dos redefiniciones temporales apropiadas, es posible alcanzar un formalismo de dos tiempos cuyas ecuaciones del movimiento son idénticas en forma a las del modelo original. Dos de nuestros objetivos a este respecto son, por un lado, analizar la viabilidad de este formalismo de dos tiempos (examinando las posibles fuentes de obstrucción que podrían impedir la reexpresión local de la métrica espaciotemporal efectiva en términos de un único tiempo en todos los puntos del interior del agujero), y, por otro lado, estudiar en qué medida se puede lograr reconciliar este formalismo con el modelo original en algún régimen. Las conclusiones alcanzadas muestran que la libertad existente en el formalismo de dos tiempos es suficiente para garantizar una geometría efectiva bien definida para agujeros negros muy masivos en la que no se alcanza punto singular alguno a lo largo de la evolución. Además, es posible reconciliar parcialmente la física de este formalismo de dos tiempos con la del modelo original en la región que abarca desde el horizonte hasta una vecindad de la superficie de transición, donde ambos tiempos coinciden aproximadamente debido a la pequeñez de los efectos cuánticos.

En segundo lugar, consideraremos también la posibilidad de encontrar un formalismo hamiltoniano bien puesto que conduzca exactamente a las ecuaciones del movimiento empleadas en las investigaciones originales (y no a unas complicadas por la aparición de dos factores de cambio de tiempo dependientes del espacio de fases, como



en el enfoque discutido anteriormente). Para tal fin, examinaremos cuidadosamente un argumento que involucra la extensión del espacio de fases del modelo en la relatividad general mediante la inclusión de los parámetros cuánticos como variables canónicas adicionales (que están sujetas a dos ligaduras que dictan su dependencia en el resto del espacio de fases). Más concretamente, tras estudiar la reducción de este espacio extendido mediante las ligaduras en los parámetros cuánticos, prestaremos una atención especial a determinar cuál es la relación entre el espacio de fases así alcanzado y el de partida en la relatividad general. A diferencia de lo afirmado en la literatura, dichos espacios de fases resultan no ser equivalentes, ya que las variables de tríada y de conexión que codifican los grados de libertad gravitatorios en la cosmología cuántica de lazos no satisfacen un álgebra canónica en el espacio de fases reducido. Esta modificación de la estructura simpléctica, que había pasado desapercibida hasta ahora, es clave para obtener las ecuaciones dinámicas del modelo siguiendo un cálculo hamiltoniano consistente, lo que arroja luz sobre una de las controversias que había rodeado al modelo desde su propuesta. Tras asentar el modelo en una base teórica firme, es sin duda conveniente realizar un estudio del espacio de soluciones de las ecuaciones dinámicas como paso previo a la cuantización del modelo. Un estudio tal faltaba en la literatura ya que, en los trabajos originales, los autores llevaron a cabo una fijación excesivamente restrictiva de las constantes de integración que aparecen en la resolución de las ecuaciones del movimiento. Para remediar esta cuestión, resolveremos las ecuaciones que gobiernan la dinámica del modelo con la elección más general posible de constantes de integración (aportando argumentos para limitar físicamente sus valores admisibles) y estudiaremos qué efecto tiene una elección tal en las propiedades de la geometría resultante.

Con la comprensión del espacio de soluciones que proporciona este análisis, abordaremos la cuantización del modelo usando como punto de partida el formalismo basado en el espacio de fases extendido, donde las variables de tríada y de conexión satisfacen su álgebra relativista. Para ello, proporcionaremos una representación de esta álgebra sobre un espacio de Hilbert (con ingredientes poliméricos) y promoveremos las tres ligaduras del sistema (la hamiltoniana y las dos que dictan la forma de los parámetros) a operadores. Esto puede hacerse introduciendo un número notablemente pequeño de operadores geométricos, lo que conduce a una cinemática cuántica con las buenas propiedades que caracterizan la prescripción de orden de factores que se emplea a lo largo de toda esta tesis. Asumiendo ciertos comportamientos espectrales razonables para los operadores que integran los operadores de ligadura, discutiremos formalmente la expresión de los estados físicos de la teoría. Estos estados resultan estar caracterizados completamente por funciones de ondas de la masa del agujero

negro con soporte en un conjunto espectral muy específico, cuya forma viene dictada por las propiedades de los operadores geométricos. Además, comentaremos qué condiciones han de darse para que los estados físicos discutidos puedan describir agujeros negros muy masivos, que son de gran interés astrofísico. Esto constituye el primer paso en un programa ambicioso para extraer predicciones físicas robustas de la teoría de lazos referentes a las ondas gravitacionales que se emiten en eventos de colisión de agujeros negros sin rotación.

# Abstract

Loop quantum gravity is a solid candidate for the quantization of general relativity that is compatible with the background independence characteristic of the Einsteinian theory. Although the quantization program has not yet been completed for general scenarios, the techniques employed in its construction have been successfully applied to the quantization of systems with a large number of symmetries. These systems, which include cosmological and black hole models, are also the most promising ones from the perspective of potentially obtaining predictions related to the quantum nature of gravity, both because they describe regions in which the curvature can be large (which can even include classical singularities) and because their simplicity allows for a detailed treatment. The field born from the study of this type of systems using techniques inspired by loop quantum gravity receives the name of *loop quantum cosmology*.

In recent years, there has been a resurgence of interest in investigating sources of ambiguity that affect the quantization program. In particular, special attention has been paid to the regularization of the Hamiltonian constraint in homogeneous cosmologies. The traditional approach adopted in this procedure consists in exploiting the symmetries of the studied systems to rewrite the Lorentzian part of the Hamiltonian constraint in terms of the Euclidean one, in such a way that it is only necessary to regularize the latter. This course of action is in sharp contrast with the one followed in the complete theory, where each part of the Hamiltonian constraint requires an independent regularization. Since it is not guaranteed that loop quantum cosmology captures the cosmological dynamics of loop quantum gravity, it seems reasonable to examine alternative regularization proposals that actually lie closer to the procedure followed in the full theory to test the robustness of the predictions obtained in the field so far. In this respect, the modified regularization proposed by Dapor and Liegener is worthy of a special mention. It leads to a formalism of loop quantum cosmology with a physical picture of the evolution of the Very Early Universe that is qualitatively different from the standard one in this discipline: the classical initial singularity is circumvented by an *asymmetric* quantum bounce that

links a de Sitter era, with an emergent cosmological constant of Planckian order, and an expanding, standard cosmological branch.

As regards the description of black hole spacetimes, a recently proposed model for the effective description of Schwarzschild black holes has attracted considerable attention from the community. This effective model stands out from other approaches because it is free of certain pathological features from which previous works suffer. To a large extent, the appealing properties of the model are due to a very specific choice of the parameters that regulate the introduction of quantum effects in the system. Instead of taking them as mere constants or as arbitrary functions, Ashtekar, Olmedo, and Singh—the authors of the model—chose to define these parameters in such a way that they are constant only along the dynamical trajectories. The physics resulting from this procedure is such that the classical central singularity is replaced with a regular hypersurface that mediates the transition between a trapped region and an anti-trapped one.

In this thesis, we will first examine in detail the new regularization proposal for cosmological models in order to discuss the robustness of the physical predictions of loop quantum cosmology with respect to this ambiguity. Our main objectives are the generalization of such a procedure to the study of cosmological systems that are more involved than those considered in the literature and the analysis of the quantum theories that result from adopting this regularization scheme, emphasizing the differences and similarities with respect to standard loop quantum cosmology. To this end, we will begin by examining the quantization of homogeneous and isotropic cosmologies, adopting the new proposal for the regularization of the scalar constraint and employing one of the two prevailing factor ordering prescriptions in the field (the so-called MMO prescription, named after the initials of its authors: Martín-Benito, Mena-Marugán, and Olmedo). After verifying that the good properties that characterize this prescription are still present when the Hamiltonian constraint is regularized according to the new scheme, we will focus our attention on the study of anisotropic Bianchi type I cosmologies using the same prescription. In this context, although the functional form of the constraint operator is fairly complicated, we find that the superselection rules are modified with respect to those obtained following the standard procedure. This is due to the fact that the action of the Hamiltonian constraint involves a larger number of degrees of freedom.

Taking the study of the aforementioned homogeneous systems as the starting point, we will then approach the construction of a theoretical framework for the treatment of perturbations around homogeneous and isotropic cosmologies with compact spatial sections and with a matter content provided by a minimally-coupled

scalar field. For this purpose, we will make use of the hybrid quantum cosmology formalism, which was already designed to admit any representation of the homogeneous geometry. In this thesis, we will employ the polymeric representation resulting from the alternative regularization procedure and carry out an explicit quantization of the complete system (comprised of the homogeneous background and of perturbations of both the metric and the matter field). We will introduce two different proposals for the definition of certain geometric operators that are relevant for the representation of the perturbative contributions to the Hamiltonian constraint. Focusing on a certain class of solutions and with a controlled number of hypotheses, we will deduce a master constraint for the perturbations and study the classical counterpart of the equations governing their dynamics. Finally, we will carry out a detailed analysis of the effective background-dependent masses involved in the propagation equations of the scalar and tensor perturbations, masses that incorporate quantum corrections, including those sourced by the adoption of an alternative regularization scheme. More specifically, we will study their positivity properties in the regimes of physical interest from the point of view of setting initial conditions for the perturbative dynamics: the instant of the bounce and the emergent de Sitter era. In this analysis, in addition to the masses of the two proposals within the hybrid formalism that we mentioned above, we will also include the masses resulting from another of the existing approaches to the treatment of perturbations within the framework of loop quantum cosmology: the so-called dressed metric approach. This will allow us to extend the comparative study previously performed in the context of the standard regularization. As already observed in that study at the bounce, we conclude that, both at the instant of the bounce and now in the de Sitter era as well, the masses of the hybrid formalism (and, in particular, those resulting from one of the proposed definitions of certain operators in the quantum theory) exhibit much better properties in the scenarios of interest, as far as the phenomenology of the cosmic microwave background is concerned. This behavior supports the adoption of the hybrid approach over other existing ones, also in the context of the alternative regularization. That said, it should be emphasized that the alternative regularization scheme *does* leave a footprint on the studied background-dependent masses, which are fundamental for the ultimate derivation of the power spectra for the cosmic microwave background.

In addition to these questions concerning cosmological systems, in this thesis we will also investigate the theoretical basis of the new effective model for the polymeric description of Schwarzschild black holes. In particular, we will show how to reconcile the model with a consistent Hamiltonian treatment in which the role of quantum parameters is played by constants of motion. This study is necessary because the

authors of the new effective model treat the parameters as if they were mere constant numbers in the derivation of the dynamical equations, which obscures the relation between the proposed effective Hamiltonian and the studied dynamics. In order to provide the model with support within a rigorous canonical Hamiltonian treatment, we will explore two distinct paths.

First, we will propose a definition of the parameters that is more general than those considered in the literature so far, making use of two dynamically conserved phase space functions that appear naturally in the model. From these definitions and taking into account that the parameters thus defined do not commute with the canonical variables, we will obtain the dynamical equations by means of a standard Hamiltonian calculation. These equations are more involved than those considered by the authors of the original model. In fact, they differ from those in the appearance of two additional factors which are functions of the phase space. By reabsorbing these factors through two suitable time redefinitions, it is possible to attain a two-time formalism, the equations of motion of which are identical in form to those of the original model. Two of our objectives in this respect are, on the one hand, to analyze the viability of this two-time formalism (by examining the possible sources of obstructions that could prevent the local reexpression of the effective spacetime metric in terms of a single time at every point of the interior of the hole), and, on the other hand, to study to what extent it is possible to reconcile this formalism with the original model in some regime. The drawn conclusions show that the freedom that exists in the two-time formalism is sufficient to guarantee a well-defined effective geometry for very massive black holes, in which no singular point is reached along the evolution. Moreover, it is possible to partially reconcile the physics of this two-time formalism with that of the original model in the region from the horizon up to a neighborhood of the transition surface, where both times coincide approximately owing to the smallness of the quantum effects.

Second, we will also consider the possibility of finding a well-posed Hamiltonian formalism that leads exactly to the equations of motion employed in the original investigations (and not others complicated by the appearance of two phase space dependent factors that suggest the introduction of time redefinitions, as in the approach discussed above). To that end, we will carefully examine an argument involving the extension of the phase space of the model in general relativity by including the quantum parameters as additional canonical variables, which are subject to two constraints that dictate their dependence on the rest of the phase space. More specifically, after studying the reduction of this extended space by means of the constraints on the quantum parameters, we will pay special attention to determining

the relation between the phase space thus attained and the starting one in general relativity. Contrary to what had been claimed in the literature, such phase spaces turn out not to be equivalent, since the triad and connection variables encoding the gravitational degrees of freedom in loop quantum cosmology do not satisfy a canonical algebra in the reduced phase space. This modification of the symplectic structure, which had gone unnoticed until now, is key to obtain the dynamical equations of the model following a consistent Hamiltonian calculation. This sheds light on one of the controversies that had surrounded the model since its proposal. After setting the model on firm theoretical foundations, it is undoubtedly convenient to carry out a study of the space of solutions of the dynamical equations as a prior step to the quantization of the model. Such a study was absent in the literature since, in the original works, the authors carried out an excessively restrictive choice of the integration constants appearing in the solution of the equations of motion. To remedy this issue, we will solve the equations governing the dynamics of the model with the most general choice of integration constants (providing arguments to physically limit their admissible values) and study what effects such a choice has on the properties of the resulting geometry.

With the understanding of the space of solutions provided by this analysis, we will approach the quantization of the model using the extended formalism, where the triad and connection variables satisfy their relativistic algebra, as a starting point. To this end, we will provide a representation of this algebra on a Hilbert space (with polymeric ingredients) and promote the three constraints of the system (the Hamiltonian one and the two that dictate the form of the parameters) to operators. This can be done by introducing a remarkably small number of geometric operators, leading to a quantum kinematics that displays the nice properties that characterize the factor ordering prescription employed throughout this thesis. Assuming certain reasonable spectral behaviors for the operators that integrate the constraints, we will formally discuss the expression of the physical states of the theory. These states turn out to be completely characterized by wave functions of the black hole mass with support on a very specific spectral set, the structure of which is dictated by the properties of the geometric operators. In addition, we will discuss what conditions must be met for the discussed physical states to be fit to describe very massive black holes, which are of great astrophysical interest. This constitutes the first step in an ambitious program to extract robust physical predictions from the loop quantum theory concerning the gravitational waves emitted in non-rotating black hole mergers.

# Índice de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1-	Contexto y motivación . . . . .	1-
2-	Objetivos y estructura de la tesis . . . . .	10-
	Notación . . . . .	15-
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>17</b>
1-	Conceptos elementales de la gravedad cuántica de lazos . . . . .	17-
2-	Cosmología cuántica de lazos homogénea: el caso anisótropo de Bianchi tipo I . . . . .	21-
3-	Cosmología cuántica de lazos homogénea: el caso isótropo . . . . .	29-
4-	Cosmología cuántica de lazos híbrida: perturbaciones cosmológicas . . . . .	32-
5-	Agujeros negros cuánticos de lazos: el modelo efectivo de Ashtekar, Olmedo y Singh . . . . .	36-
<b>I</b>	<b>Cosmología</b>	<b>43</b>
<b>3</b>	<b>Regularización alternativa en cosmologías homogéneas e isótropas: la prescripción MMO</b>	<b>45</b>
1-	La ligadura hamiltoniana completa . . . . .	46-
1.1-	La parte lorentziana en cosmologías de Bianchi I . . . . .	46-
1.2-	La parte lorentziana en espaciotiempos de FLRW . . . . .	48-
2-	La ligadura hamiltoniana cuántica . . . . .	49-
2.1-	La prescripción de cuantización MMO . . . . .	49-
2.2-	Acción sobre la base de autoestados del volumen . . . . .	51-
3-	Sectores de superselección . . . . .	52-
4-	Autofunciones generalizadas . . . . .	54-
5-	Conclusión . . . . .	56-
<b>4</b>	<b>Regularización alternativa en cosmologías de Bianchi I</b>	<b>59</b>
1-	Cuantización de la contribución euclídea . . . . .	60-



1.1	Sectores de superselección . . . . .	61
2	Cuantización de la contribución lorentziana . . . . .	64
2.1	Sectores de superselección . . . . .	71
3	Nota acerca del caso isótropo . . . . .	74
4	Conclusión . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Regularización alternativa en el formalismo híbrido</b>	<b>79</b>
1	Descripción canónica del modelo-clásico . . . . .	80
2	Cuantización de lazos híbrida . . . . .	81
2.1	Representación cuántica del sector homogéneo . . . . .	82
2.2	Representación de Fock de las perturbaciones e implementación cuántica de las ligaduras perturbativas . . . . .	85
2.3	Prescripciones de orden de factores . . . . .	86
2.4	Cuantización de las contribuciones perturbativas . . . . .	88
3	Ligadura maestra y masas perturbativas . . . . .	90
4	Conclusión . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Efectos de la regularización alternativa en las masas efectivas de perturbaciones cosmológicas</b>	<b>97</b>
1	Masas efectivas híbridas . . . . .	98
1.1	Prescripción A . . . . .	101
1.2	Prescripción B . . . . .	102
2	Mases efectivas en el formalismo de la métrica vestida . . . . .	103
3	Masas efectivas en el instante del rebote . . . . .	105
3.1	Formalismo híbrido: prescripción A . . . . .	106
3.2	Formalismo híbrido: prescripción B . . . . .	111
3.3	Formalismo de la métrica vestida . . . . .	114
4	Masas efectivas en el régimen de Sitter . . . . .	116
4.1	Formalismo híbrido: prescripción A . . . . .	117
4.2	Formalismo híbrido: prescripción B . . . . .	124
4.3	Formalismo de la métrica vestida . . . . .	125
5	Conclusión . . . . .	126
<b>II</b>	<b>Agujeros negros</b>	<b>131</b>
<b>7</b>	<b>Modelo efectivo de dos tiempos para agujeros negros estáticos</b>	<b>133</b>
1	Dinámica y redefiniciones temporales . . . . .	134
2	Estudio de las posibles obstrucciones . . . . .	141

2.1	Integrabilidad e invertibilidad . . . . .	143
2.2	Imágenes de las funciones primitivas . . . . .	151
2.3	Comportamiento de la componente métrica temporal . . . . .	156
3	Redefinición del origen del tiempo angular . . . . .	158
4	Relación temporal en el límite de masas grandes . . . . .	161
5	Conclusión . . . . .	165
<b>8</b>	<b>Estudio del espacio de soluciones del modelo original</b>	<b>169</b>
1	Soluciones generales a las ecuaciones dinámicas . . . . .	170
1.1	Solución interior . . . . .	170
1.2	Solución exterior y unión en los horizontes . . . . .	173
2	Propiedades termodinámicas . . . . .	177
3	Comportamiento asintótico y nociones de masa . . . . .	179
4	Conclusión . . . . .	182
<b>9</b>	<b>Formalismo hamiltoniano y cuantización polimérica</b>	<b>185</b>
1	Modelo extendido . . . . .	186
1.1	Modelo clásico de partida y dinámica efectiva . . . . .	186
1.2	Espacio de fases extendido . . . . .	188
2	Reducción del espacio de fases . . . . .	189
2.1	Fijación del gauge: álgebra de Dirac . . . . .	190
2.2	Inequivalencia con el espacio de fases de partida . . . . .	191
3	Cuantización polimérica . . . . .	194
4	Estados físicos . . . . .	198
5	Conclusión . . . . .	203
<b>10</b>	<b>Conclusiones de la tesis</b>	<b>207</b>
	<b>Publicaciones</b>	<b>213</b>
	<b>Referencias</b>	<b>215</b>
	<b>Apéndice A: Órdenes de factores alternativos en la teoría isótropa</b>	<b>229</b>
	<b>Apéndice B: Nuevos momentos en el espacio de fases extendido</b>	<b>237</b>
	<b>Apéndice C: Regularización del hamiltoniano de Kantowski-Sachs</b>	<b>239</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1 Contexto y motivación

La física teórica moderna se asienta sobre dos pilares fundamentales cuyo desarrollo en el siglo XX sacudió nuestro entendimiento del Universo: la relatividad general [1, 2] y la mecánica cuántica [3, 4]. Por un lado, la relatividad general proporciona una descripción covariante (es decir, independiente de la elección de sistema de referencia) de la que ha sido clásicamente interpretada como la interacción gravitatoria, en este marco teórico entendida como el resultado de la geometría espaciotemporal curva. En efecto, esta teoría no solo describe cómo la geometría del espaciotiempo dicta cómo ha de moverse la materia sino que, al mismo tiempo, detalla también cómo la materia altera la geometría del espaciotiempo, deformándolo. Por otro lado, la mecánica cuántica es el paradigma que gobierna la física del mundo microscópico, donde las leyes físicas clásicas dejan de ser de aplicación. En lugar de estar basada en la noción de trayectorias espaciotemporales, la mecánica cuántica proporciona una descripción de la naturaleza donde los observables físicos poseen una distribución estadística. En el marco de esta teoría, esta distribución de probabilidad de los observables físicos viene determinada por el estado cuántico del sistema, cuya evolución temporal es generada por la ecuación de Schrödinger.

Las predicciones físicas derivadas tanto de la relatividad general como de la mecánica cuántica han sido comprobadas experimentalmente, con gran precisión para ciertos rangos de escala en sus respectivos dominios de aplicación. Asimismo, la combinación parcial de ambos formalismos cuando los sistemas físicos son descritos por campos cuánticos relativistas (denominada teoría cuántica de campos) ha conducido a numerosas predicciones en regímenes de energía muy variados que también han sido verificadas experimentalmente con una precisión notable. Estos campos pueden describir, e.g., excitaciones materiales cuánticas (o partículas) que se propagan en un espaciotiempo plano de fondo. De hecho, la teoría cuántica de campos es el núcleo del modelo estándar de las partículas elementales, que representa uno de los mayores hitos de la historia de la ciencia. Además de su éxito en la descripción de campos que se propagan en geometrías planas, existe también una generalización de la teoría cuántica de campos al caso en el que el fondo viene dado por un espaciotiempo

clásico-curvo [5, 6]. Aunque el formalismo resultante ha conducido a un número de predicciones teóricas (como la radiación de Hawking [7], el efecto Unruh [8, 9] y la producción de partículas en fondos no estacionarios [10, 11]), aún no se ha encontrado evidencia experimental que las respalde. Cabe mencionar que esta generalización no es en absoluto inmediata e, incluso en el caso de campos con ecuaciones de evolución lineales, conduce a la aparición de una serie de ambigüedades que estaban ausentes en la teoría cuántica en espaciotiempos planos. La más notable de ellas está relacionada con la selección de una representación cuántica del álgebra de las variables canónicas básicas que describen clásicamente el campo. En la mecánica cuántica, debido al número finito de grados de libertad, el teorema de Stone-von Neumann [12] asegura que la representación del álgebra de Weyl, que captura las reglas de conmutación canónicas, es única (salvo equivalencia unitaria), siempre que se den ciertas condiciones razonables de continuidad. Esto implica que dos representaciones distintas del álgebra son unitariamente equivalentes, lo cual resulta en predicciones físicas robustas, independientes de la elección de representación. El hecho de que los campos proporcionen una descripción de un número infinito de grados de libertad conlleva inmediatamente que el teorema de Stone-von Neumann mencionado con anterioridad no se aplica en el caso de la teoría cuántica de campos. En el contexto de la cuantización de Fock estándar, esto explica que no haya una elección preferente de operadores de creación y destrucción, sino que hay un número infinito de elecciones posibles inequivalentes entre sí. A su vez, esto significa que la definición del vacío de la teoría (i.e., el estado aniquilado por todos los operadores de destrucción) no es único: en general, hay un número infinito de vacíos *a priori* igualmente válidos. No obstante, esta ambigüedad se puede reducir e incluso eliminar en cierto tipo de espaciotiempos mediante la aplicación de criterios físicos, como el requerimiento de que la teoría cuántica deba estar adaptada a la geometría de fondo mediante la incorporación de sus simetrías. En el espaciotiempo de Minkowski, que desempeña el papel de fondo fijo en las teorías de campos que subyacen al modelo estándar de partículas elementales, existe un vacío preferencial (o, equivalentemente, una noción privilegiada de partícula) invariante bajo transformaciones del grupo de Poincaré (i.e., el grupo de isometrías del espaciotiempo de Minkowski). Criterios físicos similares se pueden emplear para seleccionar cuantizaciones preferidas cuando el fondo admite un cierto número de isometrías, en los que la imposición de que la teoría cuántica respete las simetrías de la teoría clásica esencialmente selecciona un único vacío posible.

Sin embargo, una elección tal no puede llevarse a cabo cuando se consideran campos cuánticos que se propagan en espaciotiempos más generales (como, por ejemplo, en ausencia de estacionariedad). Muchos procesos de interés físico entran dentro de esta categoría, desde el colapso gravitacional de una estrella hasta la evolución cosmológica del Universo mismo. En efecto, estos escenarios físicos carecen de simetrías temporales continuas y, como consecuencia, la teoría cuántica no se puede restringir empleando los medios comentados en el párrafo anterior. Las consecuencias de esta falta de estacionariedad son aún mayores si uno se da cuenta de que las representaciones cuánticas de las relaciones de (anti)conmutación clásicas no tienen por qué ser equivalentes entre sí en instantes de tiempo diferentes. Por lo tanto, la interpretación probabilística estándar podría no ser respetada y la robustez teórica de todas las

predicciones basadas en la evolución cuántica de los estados podría verse comprometida. Un extenso número de trabajos llevados a cabo en la última década parecen apuntar a que ambos problemas—la no unicidad de la cuantización y la no unitariedad de la evolución—están íntimamente relacionados. De hecho, se ha mostrado que, para campos escalares libres y campos fermiónicos en una variedad de escenarios cosmológicos, requerir la unitariedad de la dinámica cuántica garantiza la unicidad de la representación de Fock de las relaciones de (anti)conmutación clásicas, siempre y cuando las simetrías de las ecuaciones de campo clásicas se impongan también a nivel cuántico. Por esta razón, se ha propuesto que implementar la dinámica de Heisenberg cuántica por un operador unitario es un posible criterio para la selección de una única clase de equivalencia de cuantizaciones (véanse las Refs. [13–18]).

Si bien la relatividad general y la teoría cuántica de campos resultan exitosas individualmente en la descripción de una amplia variedad de fenómenos, es importante enfatizar que ambas teorías parecen estar en tensión la una con la otra. En efecto, parece extraño considerar materia de naturaleza cuántica viviendo en una geometría clásica, dado que las ecuaciones de Einstein de la relatividad general declaran que la presencia de materia modifica las propiedades del espaciotiempo. Por consiguiente, aparecen problemas conceptuales serios cuando se intenta entender el efecto de campos materiales cuánticos sobre un espaciotiempo clásico de fondo, especialmente si dichos campos materiales presentan fluctuaciones cuánticas importantes. Parece razonable creer que, si existen escenarios físicos en los que es válido considerar campos cuánticos propagándose en un espaciotiempo clásico (como sugieren las evidencias experimentales), puede que existan otros regímenes donde las naturalezas cuánticas tanto de la materia como del espaciotiempo de fondo desempeñen un papel relevante en una descripción satisfactoria de la física del sistema. Las ecuaciones de Einstein clásicas habrían de entenderse como un cierto límite de la teoría completa de gravedad cuántica que gobernaría la física en dichos regímenes. Además, conocer la teoría completa permitiría aliviar las tensiones que aparecen al intentar acomodar la teoría cuántica de campos a regímenes intermedios para la geometría entre el puramente clásico y el puramente cuántico. Aparte de esta motivación fundamental basada en la consistencia entre los dos pilares fundamentales de la física teórica moderna, otras razones llevan a la comunidad científica a buscar una teoría de gravedad cuántica. Por ejemplo, la relatividad general predice la existencia de singularidades espaciotemporales, donde algunos observables físicos divergen y la teoría se derrumba, perdiendo su capacidad predictiva [1]. En efecto, algunas de estas singularidades resultan aparecer en escenarios de interés físico, tales como la formación de agujeros negros al final de la vida de estrellas masivas o como el origen del Universo. Por este motivo, existe una esperanza colectiva de que la introducción de efectos cuánticos resuelva las singularidades de la teoría clásica, haciendo posible la extracción de predicciones físicas robustas en las proximidades de estos regímenes extremos.

En los últimos cincuenta años, ha habido numerosas tentativas de formular una teoría cuántica de la gravedad [19–21]. Entre ellas, la gravedad cuántica de lazos es un intento formalmente sólido de cuantizar la gravedad siguiendo los preceptos teóricos de la relatividad general [22–26]. La gravedad cuántica de lazos no es sino una cuantización no perturbativa de la relatividad en  $3+1$  dimensiones independiente

de estructuras de fondo que, a diferencia de otros enfoques canónicos previos a la construcción de una teoría de gravedad cuántica (como, por ejemplo, la teoría de Wheeler-de Witt [27]), se sirve de técnicas desarrolladas en el contexto de las teorías gauge de Yang-Mills. En su formulación canónica, las variables básicas son las holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero a lo largo de *lazos* (en inglés, *loops*) y los flujos de la tríada densitizada a través de superficies. Una característica fundamental del programa de cuantización de la gravedad cuántica de lazos es que emplea una representación cuántica del álgebra de variables clásicas que no es unitariamente equivalente a la representación de Fock de las teorías cuánticas de campos ordinarias pero que sí es compatible con la independencia de estructuras de fondo característica de la relatividad general. Además, dicho programa de cuantización pretende respetar la covariancia general de la teoría clásica a nivel cuántico. Paralelo, las ligaduras que generan difeomorfismos espaciotemporales (considerados las simetrías fundamentales de la teoría) son impuestas a nivel cuántico siguiendo el formalismo de Dirac para la cuantización de sistemas ligados [28]. La relatividad general clásica resulta ser un sistema completamente ligado, lo cual quiere decir que el hamiltoniano total asociado (quizá salvo términos de contorno) está compuesto puramente por la integración de una combinación lineal de ligaduras: tres ligaduras de difeomorfismos espaciales y la ligadura escalar o hamiltoniana (que genera reparametrizaciones temporales una vez impuestas las ligaduras de difeomorfismos espaciales). Además de estas cuatro ligaduras, la ligadura de Gauss, que codifica la información acerca de una simetría  $SU(2)$  introducida en la reformulación triádica de la relatividad general en la que está basada la teoría, también desempeña un papel importante. En resumen, en la gravedad cuántica de lazos, los grados de libertad en vacío vienen descritos por pares de variables canónicas dadas por las componentes de la tríada densitizada y de la conexión gauge. Sus respectivos flujos a través de superficies y holonomías a lo largo de lazos forman un álgebra bajo corchetes de Poisson de la que se busca una representación cuántica en un espacio de Hilbert. Este espacio recibe el nombre de el espacio de Hilbert *cinématico*, y los operadores cuánticos que representan las ligaduras se imponen en él, requiriendo que aniquilen los estados físicos.

Los fundamentos de la gravedad cuántica de lazos han sido objeto de un examen exhaustivo durante las últimas décadas. A pesar de que el programa de cuantización no se haya completado aún en escenarios generales, sí que se ha podido aplicar con éxito a sistemas con un gran número de simetrías, entre los que están incluidos los sistemas que describen algunos de los escenarios físicos más prometedores desde el punto de vista de extraer evidencias de la naturaleza cuántica de la gravedad en el futuro: la cosmología temprana y los agujeros negros. Estos sistemas, que serán el objeto de estudio central de esta tesis, han sido estudiados en gran detalle (además de, en algunos casos, perturbaciones entorno a ellos), lo cual ha llevado a la gravedad cuántica de lazos a estar más cerca de ser capaz de hacer predicciones físicas sólidas que puedan ser falsadas observacionalmente [29–37].

En particular, las técnicas de la gravedad cuántica de lazos han logrado una cuantización completa y consistente de una variedad de sistemas cosmológicos. Esta conjunción de la gravedad cuántica de lazos y de la cosmología ha dado lugar al nacimiento de un nuevo campo de investigación denominado *cosmología cuántica de*

*lazos* [38–41] que ha experimentado una rápida evolución en los últimos años. En efecto, existe una gran cantidad de estudios en escenarios variados. Véanse, por ejemplo, las Refs. [42–48] para una ilustración de los trabajos llevados a cabo en modelos homogéneos e isótropos como los espaciotiempos de tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Para trabajos relativos a cosmologías anisótropas de Bianchi, consúltense las Refs. [49–55]. Análisis similares también han sido llevados a cabo dentro del marco de ciertos tipos de cosmologías inhomogéneas, como es el caso de los espaciotiempos de Gowdy, tratados en las Refs. [56–59]. Finalmente, se ha investigado la inclusión de inhomogeneidades perturbativas en torno a espaciotiempos homogéneos e isótropos [60–70].

Unos de los resultados más destacados del campo de la cosmología cuántica de lazos es el hecho de que se evite la singularidad inicial del Big Bang. En efecto, si se visualiza la evolución cosmológica en orden inverso (de tal manera que el Universo se va haciendo cada vez más compacto y más denso a medida que el tiempo retrocede), esta teoría sugiere que, en lugar de colapsar indefinidamente, el Universo experimentaría un rebote cuántico regular cuando la densidad de energía es comparable a la densidad de Planck. Además, la curvatura espaciotemporal decrece rápidamente antes y después del rebote, por lo que solo hay que alejarse del rebote unos pocos tiempos de Planck para que la relatividad general sea apta para describir la dinámica cosmológica con un alto grado de precisión. Por esta razón, se dice a menudo que el rebote cuántico hace las veces de nexo entre dos universos clásicos (uno anterior al rebote, en contracción, y otro posterior, en expansión). Es más, estados semiclásicos a volúmenes grandes resultan permanecer picados a lo largo de toda la evolución cosmológica (incluso a través de la región del rebote [71]). La dinámica de sus picos queda bien aproximada por una dinámica efectiva<sup>1</sup> [44], por lo que a menudo se habla de un rebote *determinista*. La desaparición de la singularidad clásica como resultado de los efectos de geometría cuántica se ha encontrado no solo en cosmologías homogéneas generales (tanto isótropas como anisótropas [39, 72–75]), sino que también se ha confirmado en ciertos escenarios inhomogéneos [76]. De hecho, una variedad de resultados apunta a la posibilidad de que todas las singularidades fuertes sean evitables en el contexto de la cosmología cuántica de lazos (o, al menos, en sistemas muy simétricos [77]).

La regularización y la representación cuántica de la ligadura hamiltoniana en la gravedad cuántica de lazos sigue siendo hoy un problema abierto. Thiemann introdujo varias estrategias para este fin dentro del marco de la teoría completa, que serían más tarde heredadas por la cosmología cuántica de lazos [78]. No obstante, es bien sabido que el proceso de regularización involucra una serie de ambigüedades [79–81], que originalmente fueron resueltas apelando a criterios físicos aparentemente naturales. Sin embargo, una nueva tendencia ha ganado adeptos recientemente: en lugar de eliminar opciones alternativas mediante argumentos físicos, aquellas que conducen a escenarios físicos viables son examinadas con atención, con el objetivo de comparar las predicciones que se derivan de ellas. Este ejercicio de comparación es especialmente interesante cuando se trata de alternativas más cercanas a la gravedad cuántica de

---

<sup>1</sup>En esta tesis, se emplea el término “efectivo” para caracterizar una descripción, modelo u objeto matemático inherentemente clásico pero que incorpora correcciones de origen cuántico.

lazos, en el sentido de que siguen más fielmente la estrategia de regularización de la teoría completa. Estos casos han despertado la curiosidad de una parte de la comunidad en los últimos años, resultando en un análisis extensivo de la dinámica cosmológica y de la resolución de la singularidad en estas alternativas modificadas, con el objetivo de buscar diferencias cualitativas y/o cuantitativas con respecto a los resultados estándar de cosmología cuántica de lazos.

Cabe esperar la existencia de alternativas más cercanas a la gravedad cuántica de lazos porque el procedimiento de regularización en la teoría completa y el que se ha venido empleando tradicionalmente en cosmología presentan diferencias fundamentales. Dichas diferencias residen principalmente en el tratamiento de las dos partes que componen la ligadura hamiltoniana gravitacional en la relatividad general: las llamadas parte euclídea y parte lorentziana. En la gravedad cuántica de lazos, cada una de estas partes requiere una estrategia de cuantización distinta. El procedimiento de regularización empleado habitualmente en la cosmología cuántica de lazos, sin embargo, se basa en el hecho de que las partes euclídea y lorentziana son proporcionales la una a la otra cuando las secciones espaciales del espaciotiempo cosmológico bajo consideración son homogéneas y planas. Por este motivo, la ligadura hamiltoniana ha sido predominantemente considerada proporcional únicamente a la parte euclídea para su posterior cuantización. Dado que, a día de hoy, no se comprende aún cómo se relacionan de forma precisa la cosmología cuántica de lazos y el sector cosmológico de la gravedad cuántica de lazos (véanse, por ejemplo, las Refs. [82–86]), no está asegurado que la dinámica cosmológica que resulta del enfoque estándar a la cosmología cuántica de lazos capture la dinámica cosmológica de la teoría completa, ni siquiera a orden dominante. Por consiguiente, parece razonable analizar enfoques alternativos que siguen más de cerca el procedimiento de regularización adoptado en la gravedad cuántica de lazos con el fin de arrojar luz sobre si también se alcanza una resolución de las singularidades clásicas mediante un rebote cuántico en la teoría completa.

Yang, Ding y Ma abordaron este asunto por primera vez en la Ref. [87], donde construyeron un hamiltoniano para la cosmología cuántica de lazos empleando una propuesta de regularización similar a la empleada en la teoría completa. Mientras que la ligadura hamiltoniana estándar conduce a una ecuación en diferencias finitas de segundo orden, este hamiltoniano alternativo introduce una ecuación de orden cuatro debido a la cuantización separada de las partes euclídea y lorentziana. Además, los autores concluyeron que la ligadura hamiltoniana modificada lleva a un mecanismo de rebote con las características estándar comentadas anteriormente: no se notaron diferencias cualitativas.

En un trabajo más reciente [88], Dapor y Liegener consideraron un esquema de regularización dentro del marco de la gravedad cuántica de lazos que deja invariante el grafo sobre el que actúa [89]. Calculando el valor esperado de la ligadura hamiltoniana resultante en cierto tipo de estados coherentes que representa espaciotiempos homogéneos e isotropos, recuperaron un hamiltoniano efectivo idéntico (a orden dominante en una expansión semiclásica) al obtenido previamente en la Ref. [87]. Esta estrategia de regularización (que fue originalmente concebida en el contexto de la teoría completa) fue aplicada sin modificación en el contexto de la cosmología cuántica de lazos en



un trabajo posterior [90], resultando una vez más en el hamiltoniano efectivo que se había deducido en investigaciones previas [87, 88]. Aunque un estudio de la dinámica cuántica reveló que la singularidad inicial también se evitaba en el formalismo derivado de la nueva ligadura hamiltoniana, el mecanismo de rebote resultó sufrir modificaciones cualitativas: si bien seguía habiendo un universo clásico, se comprobó por primera vez la aparición de una época de Sitter emergente con una constante cosmológica planckiana. A diferencia de lo concluido en la Ref. [87], el rebote modificado resulta ser ahora asimétrico: una solución de Sitter en contracción con un universo clásico en expansión o *vice versa*. En una publicación posterior [91], donde se presentó todo el análisis detallado que subyace a la Ref. [90], los autores llenaron parcialmente un vacío que existía en la literatura en lo que se refiere al análisis espectral del operador hamiltoniano modificado. En particular, mostraron que admite una familia de extensiones autoadjuntas, aunque la demostración requiere de una elección de un sector de superselección particular.

Además, Li, Singh y Wang estudiaron de manera sistemática la dinámica cosmológica efectiva que resulta de este hamiltoniano alternativo [92], al que a menudo nos referiremos simplemente como *hamiltoniano efectivo*. Usando técnicas tanto analíticas como numéricas, consideraron campos escalares con y sin masa como contenido material de una cosmología homogénea e isotrópica con secciones espaciales planas. Los autores notaron que, mientras que un único conjunto de ecuaciones de Hamilton es suficiente para calcular toda la evolución cosmológica, se necesitan *dos* conjuntos diferentes de ecuaciones de Friedmann-Raychaudhuri para el mismo fin: ambas descripciones resultan no estar relacionadas por una correspondencia uno a uno. Esto resuelve la tensión existente entre trabajos previos en lo que se refiere a la naturaleza simétrica o asimétrica del rebote. En efecto, si se considera un único conjunto de ecuaciones de Friedmann-Raychaudhuri, el rebote parece simétrico, conclusión que se demuestra físicamente inconsistente, apoyando lo sugerido por las Refs. [88, 90]. El interés principal de este modelo alternativo es, entonces, que la asimetría del rebote que reemplaza la singularidad cosmológica inicial puede tener consecuencias fenomenológicas que divergen de las que se desprenden del formalismo estándar de la cosmología cuántica de lazos. En un artículo posterior [93], los mismos autores ampliaron su análisis, considerando también otro hamiltoniano alternativo. Completaron el estudio y la comparación de estos modelos concluyendo que, para varios potenciales inflacionarios, ambos modelos alternativos presentan una era inflacionaria no singular. Finalmente, en la Ref. [94], los autores establecieron una serie de características dinámicas que parecen ser compartidas por los tres modelos (incluyendo el estándar) que habían discutido en sus trabajos anteriores. Además, calcularon la probabilidad de que el Universo presente una época de inflación, reportando probabilidades altas en los tres escenarios. Otro estudio de la dinámica efectiva del modelo resultante de la propuesta de regularización de Dapor y Liegener fue llevado a cabo en la Ref. [95].

También se han hecho esfuerzos por extraer predicciones físicas relativas a observables en cosmología que son sensibles a esta ambigüedad en la cuantización. A este respecto, Agullo empleó la ligadura hamiltoniana modificada para obtener el espectro de potencias escalar y lo comparó con el que había sido calculado previamente en el

contexto del enfoque estándar a la cosmología cuántica de lazos [96]. Otros aspectos de los formalismos alternativos han sido explorados en publicaciones posteriores. Por ejemplo, Liegener y Singh han argumentado que el rebote tiene que ser asimétrico empleando por primera vez un tratamiento invariante de gauge de la resolución de la singularidad [97]. En este sentido, los rebotes simétricos obtenidos en el enfoque usual a la cosmología cuántica de lazos podrían ser un artefacto de la fijación de gauge en los flujos de las tríadas densitizadas. Por otro lado, Yang, Zhang y Ma han propuesto un procedimiento para obtener otra modificación más de la ligadura hamiltoniana [98]. Dicho procedimiento está basado en una regularización de las partes euclídea y lorentziana de la ligadura escalar que involucra su reescritura en términos de la acción de Chern-Simons en las secciones espaciales. El modelo resultante (que parece exhibir un límite clásico correcto) es no-singular, ya que el Big Bang es reemplazado por un rebote cuántico que también es asimétrico.

Habiendo resumido el contexto en el que se enmarcan los estudios cosmológicos llevados a cabo en esta tesis, es interesante discutir cuál es la situación referente al otro escenario físico donde se espera que los efectos de la naturaleza cuántica de la gravedad sean relevantes: los agujeros negros. Dado su gran interés físico, este tipo de sistemas también ha sido estudiado extensivamente en los campos de la gravedad y cosmología cuánticas de lazos. Desde los trabajos pioneros de Modesto (véanse, e.g., las Refs. [99–101]), ha habido multitud de trabajos en los que se ha intentado incorporar correcciones cuánticas de lazos en la descripción de espaciotiempos de agujero negro (véanse, entre otras, las Refs. [102–136]).

Hace unos cuatro años, Ashtekar, Olmedo y Singh propusieron en las Refs. [137–139] un nuevo modelo efectivo para describir agujeros negros sin rotación ni carga dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos, al que se denomina en ocasiones “modelo AOS” por las siglas de los apellidos de sus autores. Estos trabajos destacan frente a investigaciones previas por varios motivos, incluyendo que se afirma que sus predicciones físicas ni dependen de estructuras fiduciales ni presentan efectos cuánticos locales importantes en regiones de baja curvatura (problemas que exhibían típicamente los estudios que existían previamente en la literatura). Mediante la inclusión de efectos derivados de la naturaleza cuántica de la geometría (regulada por dos parámetros de la polimerización<sup>2</sup>), la singularidad central clásica resulta desaparecer. En efecto, en este modelo efectivo, la singularidad se ve reemplazada por una hipersuperficie regular que media la transición entre una región atrapada y una anti-atrapada emergente, limitada por lo que ha sido interpretado como un horizonte de agujero blanco. Como resultado de la inclusión de correcciones cuánticas de lazos, la geometría interior efectiva resultante es suave y los invariantes de curvatura admiten cotas superiores finitas independientes de la masa del agujero negro bajo consideración [137, 138]. Los autores del modelo completaron su investigación llevando a cabo

---

<sup>2</sup>Aquí, el término “polimerización” se refiere al nombre “cuantización polimérica”, que se emplea habitualmente en el contexto de la cuantización de modelos reducidos por simetría mediante técnicas inspiradas en la gravedad cuántica de lazos. La motivación que justifica esta terminología viene de la naturaleza unidimensional de las excitaciones del campo gravitacional en la gravedad cuántica de lazos, que están contenidas en las aristas de grafos, conduciendo a esta visión “polimérica” de la geometría espaciotemporal.

una extensión del formalismo a la región exterior. La geometría exterior efectiva derivada de esta extensión puede ser unida suavemente con la geometría interior descrita anteriormente tanto en el horizonte (del agujero) negro como en el (del) blanco, resultando en una extensión efectiva de la totalidad del espaciotiempo de Kruskal.

Una de las características principales del modelo AOS, que está íntimamente relacionada con las buenas propiedades que presenta, es el modo en el que se seleccionan los parámetros de polimerización que capturan las correcciones de origen cuántico. Para solucionar algunas de las limitaciones presentes en trabajos previos, los autores del modelo propusieron identificar los parámetros de polimerización con *observables de Dirac* (en otras palabras, con funciones del espacio de fases constantes a lo largo de cualquier trayectoria dinámica dada pero no constantes en todo el espacio de fases en sí) definidos mediante ciertas condiciones de área mínima en la superficie de transición. Sin embargo, en lo que parece una contradicción con la filosofía propuesta, los parámetros son tratados como meros números constantes en la derivación hamiltoniana de las ecuaciones dinámicas. Solo una vez obtenidas dichas ecuaciones, los parámetros se identifican con funciones de la masa ADM del agujero negro, que es el valor sobre soluciones coincidente de dos observables de Dirac que aparecen en el formalismo. Esta aparente inconsistencia, que oscurece la relación entre el hamiltoniano efectivo considerado y las ecuaciones del movimiento estudiadas en las Refs. [137–139], ya fue notada en la Ref. [140]. Para construir un formalismo canónico consistente en el que los parámetros sean tratados como constantes dinámicas genuinas, los autores de dicha investigación propusieron explotar la simplicidad de la estructura de la ligadura hamiltoniana efectiva del sistema. Con una cierta elección de función lapso, dicha ligadura viene dada por la diferencia de dos observables de Dirac cuyos valores sobre soluciones son idénticos entre sí e iguales a la masa ADM del agujero. Basándose en esta observación, propusieron definir cada uno de los parámetros de polimerización como una función de uno de estos observables de Dirac. Una elección tal no solo permite tener en cuenta su naturaleza como funciones del espacio de fases en el cómputo de las ecuaciones dinámicas, sino que también conduce a la propuesta de las Refs. [137, 138] una vez se evalúan sobre soluciones (en el sentido de que los parámetros vienen dados por funciones de la masa sobre la superficie de ligadura). Los autores de la Ref. [140] mostraron que las ecuaciones del movimiento resultantes se ven modificadas con respecto a las consideradas originalmente en las Refs. [137, 138] por la aparición de dos factores multiplicativos adicionales dependientes del espacio de fases. Sin embargo, dada la forma en la que intervienen estos factores, propusieron reabsorberlos mediante redefiniciones temporales apropiadas, dando lugar a ecuaciones de forma idéntica a las originales pero escritas en dos tiempos distintos, que se pueden resolver analíticamente. Se concluyó que los resultados del formalismo así construido coinciden con los del modelo AOS en la región cercana al horizonte negro (ya que ambos tiempos son similares en dicha región). Sin embargo, debido a la complejidad introducida por las redefiniciones temporales, es en general posible que aparezcan puntos singulares a lo largo de las trayectorias dinámicas.

Además de esta aparente ausencia de una motivación hamiltoniana consistente de

las ecuaciones dinámicas del modelo, la descripción efectiva introducida en las Refs. [137, 138] ha recibido otras críticas. Por un lado, en las Refs. [141–143], se han presentado argumentos que pueden cuestionar la covariancia del modelo. Por otro lado, en la Ref. [144], se ha hecho notar que la geometría exterior efectiva a la que conduce el modelo resulta no ser asintóticamente plana en el sentido usual pero sí en un sentido elemental. En efecto, si bien la geometría espaciotemporal efectiva tiende a una métrica plana en el infinito espacial a un ritmo suficiente, las derivadas de las componentes métricas no cumplen los requerimientos necesarios para la noción usual de planitud asintótica (véase también la Ref. [139] para una visión complementaria de esta cuestión). A pesar de estas críticas, las propiedades atractivas del modelo (en especial, a lo que se refiere a la resolución de la singularidad central clásica) han atraído una atención considerable por parte de la comunidad científica, de lo que ha surgido un estimable número de trabajos [145–147] en los que se profundiza en el análisis de las predicciones físicas del modelo de las Refs. [137, 138]. Entre otras cuestiones, se ha estudiado la geometría cercana al horizonte negro, las propiedades termodinámicas y las distintas nociones de masa asociadas a la geometría efectiva [139], la sombra proyectada por el agujero efectivo [145] y los modos quasinormales de perturbaciones en torno a la geometría efectiva que define el modelo [146], en los que se observa una ruptura de isoenergicidad [147].

Una vez resumido el contexto en el que se enmarca la investigación cuyos resultados recoge esta tesis —tanto en el frente de la cosmología (donde se ha experimentado un resurgimiento en el interés por determinar la robustez de las predicciones físicas de la cosmología cuántica de lazos mediante el estudio de la ambigüedad existente en la regularización de la ligadura escalar) como en el frente de los agujeros negros (donde se ha propuesto recientemente un modelo para la descripción efectiva de agujeros cuánticos de lazos con ciertas propiedades atractivas)—, nos encontramos en la posición idónea para introducir los objetivos principales de la tesis. Esta tarea se lleva a cabo en la siguiente sección.

## 2 Objetivos y estructura de la tesis

Dado que los dos escenarios físicos más prometedores desde el punto de vista de la detección de efectos de gravedad cuántica son el Universo Primordial y los agujeros negros, esta tesis aborda su estudio en dos partes estrechamente relacionadas entre sí, ya que son el fruto de la aplicación de las mismas técnicas a dos contextos físicos distintos. En la primera de ellas, nos centraremos en el ámbito cosmológico, mientras que en la segunda pasaremos a considerar espaciotiempos que describen agujeros negros.

El objetivo principal en lo que se refiere a la cosmología es sentar las bases teóricas necesarias para ampliar nuestro conocimiento acerca de cómo se ven afectados los observables físicos por la ambigüedad que existe en la regularización del hamiltoniano en la cosmología cuántica de lazos, comprobando con ello hasta qué punto son robustas las predicciones que se han hecho hasta la fecha. Para ello, empezaremos considerando los espaciotiempos cosmológicos más sencillos (homogéneos e isótropos) e iremos

incrementando progresivamente el grado de complejidad de los sistemas bajo consideración, empezando por la inclusión de anisotropías y culminando con la introducción de inhomogeneidades de forma perturbativa. En todo este proceso, generalizaremos trabajos existentes en la literatura adaptando los formalismos que habían sido desarrollados previamente en el contexto de la cosmología cuántica de lazos estándar para implementar la nueva propuesta de regularización, enfatizando las similitudes y las diferencias con respecto a los resultados anteriores. Más concretamente, cabe destacar los siguientes objetivos específicos:

- C1.- Construir un nuevo formalismo de la cosmología cuántica de lazos basado en el modelo cosmológico homogéneo e isótropo resultante de la nueva propuesta de regularización, adoptando para su cuantización una prescripción de simetrización que presenta propiedades atractivas en el formalismo estándar.
- C2.- Comprobar si la teoría cuántica resultante sigue exhibiendo las propiedades atractivas por las que dicha prescripción de simetrización destaca frente a otras propuestas en la formulación estándar de la cosmología cuántica de lazos.
- C3.- Generalizar el nuevo procedimiento de regularización al caso de las cosmologías anisótropas de Bianchi tipo I y estudiar las propiedades de la teoría resultante de su cuantización con el orden de factores de la prescripción comentada.
- C4.- Estudiar cómo la ausencia de isotropía afecta a las propiedades fundamentales de la teoría cuántica y en qué sentido el nuevo formalismo cuántico de cosmologías homogéneas e isotropas se puede entender como un límite isótropo de la misma.
- C5.- Construir un marco teórico para el tratamiento de perturbaciones cosmológicas siguiendo las ideas de la cosmología cuántica de lazos híbrida, adoptando la nueva propuesta de regularización para la cuantización del sector homogéneo de la geometría.
- C6.- Determinar bajo qué condiciones se puede derivar un régimen efectivo y examinar cómo las propiedades de la ligadura maestra que gobierna la dinámica efectiva de las perturbaciones se ven alteradas por la nueva propuesta de regularización.
- C7.- Analizar las consecuencias de adoptar un esquema de regularización alternativo en las propiedades de las masas efectivas dependientes del tiempo que aparecen en las ecuaciones dinámicas efectivas de las perturbaciones cosmológicas escalares y tensoriales.
- C8.- Comparar las propiedades de positividad de las masas efectivas derivadas del formalismo híbrido con las que se obtendrían del formalismo de la métrica vestida, adoptando en ambos casos el esquema de regularización alternativo.

Por otro lado, el propósito fundamental en lo que concierne al estudio de agujeros negros es abordar algunas de las cuestiones que han sido objeto de crítica en lo referente a su nueva descripción efectiva dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos y proceder a su posterior cuantización. En particular, buscamos entender

con precisión cómo construir una descripción hamiltoniana consistente cuando el propio hamiltoniano determina los parámetros de polimerización en la teoría efectiva. Para ello, consideraremos dos situaciones, que resultan de partir de espacios de fases distintos y que conducen a ecuaciones dinámicas y predicciones físicas diferentes. Tras estudiar con cuidado la relación que existe entre ambos espacios de fases, argumentaremos que uno de ellos parece más conveniente para servir de punto de partida en el proceso de cuantización. Tras un estudio del espacio de fases de la teoría efectiva, procederemos a su cuantización y a la discusión de la expresión formal de los estados físicos asociados a agujeros negros con masas mucho mayores que la de Planck, que son de especial interés desde el punto de vista observacional. Se pueden distinguir los siguientes objetivos específicos:

- A1. Proponer una nueva forma de definir los parámetros cuánticos que sea compatible con el requisito de que sean observables de Dirac, buscando reconciliar algunos de los resultados del modelo original con un tratamiento hamiltoniano estándar.
- A2. Decidir si el nuevo formalismo propuesto encuentra obstrucciones o si, en cambio, conduce con éxito a una métrica bien definida en toda la región espacio-temporal considerada.
- A3. Determinar cómo cambian las propiedades termodinámicas del modelo efectivo si se considera una elección menos restrictiva de constantes de integración en la resolución de las ecuaciones dinámicas.
- A4. Estudiar la totalidad del espacio de soluciones del modelo efectivo para abrir el camino al programa de cuantización de la cosmología cuántica de lazos.
- A5. Llevar a cabo la cuantización del modelo efectivo empleando las técnicas usuales de la cosmología cuántica de lazos, justificando previamente cuál ha de ser el espacio de fases clásico de partida.
- A6. Deducir la expresión formal de los estados físicos asumiendo propiedades espectrales razonables para los operadores involucrados en la representación cuántica de la ligadura hamiltoniana y entender qué condiciones han de darse para que existan estados físicos que describan agujeros negros muy masivos.

Dada la relación entre los objetivos de la tesis y su estructura, concluimos esta sección detallando cómo están organizados los contenidos en lo que sigue. Cabe mencionar que, tras un capítulo preliminar, el cuerpo de esta tesis incluye dos partes estrechamente relacionadas entre sí: la primera relacionada con el estudio de sistemas cosmológicos y la segunda, con la investigación de espaciotiempos de agujero negro.

- **Preliminares.** En el Capítulo 2, dividido en cinco secciones, repasamos algunos de los conceptos fundamentales que subyacen al contenido de la tesis, así como los ingredientes básicos de los trabajos de mayor importancia que la anteceden.

- *Conceptos elementales de la gravedad cuántica de lazos.* El objetivo principal de esta sección es motivar la elección de variables fundamentales en la gravedad

cuántica de lazos, elección que es de una importancia central en toda la tesis. Adicionalmente, incluimos un comentario muy breve acerca del proceso de cuantización y de algunas de las propiedades físicas más relevantes de la teoría cuántica resultante.

- *Cosmología cuántica de lazos homogénea: el caso anisótropo de Bianchi I.* En esta sección, presentamos la cinemática cuántica de cosmologías de Bianchi I y exponemos el procedimiento estándar que se ha seguido en la cosmología cuántica de lazos homogénea para regularizar la ligadura hamiltoniana.
  - *Cosmología cuántica de lazos homogénea: el caso isótropo.* Partiendo de los resultados presentados en la sección anterior y tomando el límite isótropo, en esta sección resumimos la cinemática cuántica de la cosmología cuántica de lazos homogénea e isótropa y escribimos la ligadura escalar asociada a este tipo de sistemas, regularizándola de acuerdo al procedimiento estándar.
  - *Cosmología cuántica de lazos híbrida: perturbaciones cosmológicas.* En esta sección, introducimos el formalismo de la cosmología cuántica híbrida para el tratamiento de perturbaciones cosmológicas en torno a un cierto tipo de cosmología homogénea e isótropa. En particular, hacemos especial énfasis en la construcción de una descripción canónica clásica del sistema mediante variables invariantes de gauge.
  - *Agujeros negros cuánticos de lazos: el modelo efectivo de Ashtekar, Olmedo y Singh.* Introducimos los ingredientes básicos del modelo AOS, principalmente en su aplicación a la región interior de un agujero negro de Schwarzschild pero incluyendo al final también un comentario acerca de la extensión del formalismo a la región exterior.
- **I. Cosmología.** En cuatro capítulos (Capítulos 3-6) investigamos el tratamiento de sistemas cosmológicos cada vez más complejos en el marco de la cosmología cuántica de lazos, estudiando el impacto de la adopción de un esquema de regularización alternativo.
    - *Regularización alternativa en cosmologías homogéneas e isótropas: la prescripción MMO.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos C1 y C2.
    - *Regularización alternativa en cosmologías de Bianchi I.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos C3 y C4.
    - *Regularización alternativa en el formalismo híbrido.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos C5 y C6.
    - *Efectos de la regularización alternativa en las masas efectivas de perturbaciones cosmológicas.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos C7 y C8.
  - **II. Agujeros negros.** En los Capítulos 7-9 buscamos una descripción consistente de la región interior de agujeros negros sin rotación ni carga que esté basada en un formalismo canónico en el que los parámetros de polimerización se traten como constantes del movimiento genuinas y que sienten las bases sobre las cuales se pueda implementar el programa de cuantización de la cosmología cuántica de lazos.

- *Modelo efectivo de dos tiempos para agujeros negros estáticos.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos A1 y A2.
- *Estudio del espacio de soluciones del modelo original.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos A3 y A4.
- *Formalismo hamiltoniano y cuantización polimérica.* En este capítulo, abordamos los objetivos específicos A5 y A6.
- **Conclusiones.** En ellas, resumimos los resultados principales de esta tesis.
- **Publicaciones.** En este apartado, detallamos la información de las publicaciones a las que ha dado lugar la investigación cuyos resultados se presentan en esta tesis.
- **Apéndices.** En esta parte de la tesis, que contiene un total de tres apéndices (Apéndices A-C), recogemos todos aquellos cálculos cuya presentación en el cuerpo principal de la tesis interrumpiría la fluidez de la discusión y empañaría la transparencia de los argumentos presentados.



## Notación

En lo que sigue, salvo que se indique explícitamente lo contrario, se empleará el convenio de suma de Einstein. En otras palabras, siempre que aparezcan un subíndice y un superíndice repetidos en una misma expresión, se sobreentenderá una suma sobre todos los valores posibles que pueden tomar dichos índices. Por un lado, los índices espaciotemporales, que toman valores en el conjunto  $\{0, 1, 2, 3\}$ , serán denotados por letras de la mitad del alfabeto griego ( $\mu, \nu, \rho \dots$ ). Por otro lado, las letras del comienzo del alfabeto latino ( $a, b, c \dots$ ) se corresponderán con índices espaciales y, por consiguiente, adoptarán valores pertenecientes al conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Finalmente, los índices internos asociados a la simetría  $SU(2)$  de la formulación triádica, que también toman valores en el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , serán denotados por letras del medio del alfabeto latino ( $i, j, k \dots$ ).

Dado un cierto tensor  $T_{\mu_1 \dots \mu_n}$ , la simetrización y antisimetrización completas de un cierto subconjunto de sus índices vendrán indicadas, respectivamente, por paréntesis y corchetes (con líneas verticales separando los índices afectados de los no afectados cuando sea oportuno). A modo de ejemplo,  $T_{(\mu_1 \mu_2) \dots \mu_n}$  y  $T_{[\mu_1 \mu_2] \mu_3 \dots \mu_n}$  denotarán, respectivamente, la simetrización y antisimetrización de los dos primeros índices:

$$T_{(\mu_1 \mu_2) \dots \mu_n} = \frac{1}{2} (T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + T_{\mu_2 \mu_1 \dots \mu_n}), \quad T_{[\mu_1 \mu_2] \dots \mu_n} = \frac{1}{2} (T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} - T_{\mu_2 \mu_1 \dots \mu_n}).$$

Nótese que, de acuerdo con el convenio seguido en esta tesis, los factores combinatorios apropiados están incluidos en estas definiciones.

La delta de Kronecker y el símbolo completamente antisimétrico de Levi-Civita serán denotados, respectivamente, por  $\delta_{\mu\nu}$  y  $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ , definidos como

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}, \quad \epsilon_{[\mu\nu\rho]} = \epsilon_{\mu\nu\rho}, \quad \epsilon_{123} = 1.$$

Para concluir, a lo largo de esta tesis, se considerarán unidades naturales en las que tanto la velocidad de la luz en vacío  $c$  como la constante reducida de Planck  $\hbar$  son iguales a la unidad. Además, se adoptará como convenio que las métricas espaciotemporales tienen signaturas mayormente compuestas por signos positivos:  $(-, +, +, +)$ .

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo repasamos los elementos más importantes sobre los que se asienta el trabajo presentado en esta tesis. En primer lugar, hacemos un resumen muy breve de los conceptos básicos de la gravedad cuántica de lazos a modo de contextualización (véase la Sec. 1), entrando más en detalle en el caso de su aplicación a sistemas cosmológicos. Para motivar el tratamiento de ciertos signos en el contexto de las cosmologías homogéneas e isotropas, empezamos considerando el enfoque estándar a la descripción de cosmologías anisótropas de Bianchi I en la Sec. 2 y estudiamos posteriormente su límite isotropo en la Sec. 3. Una vez repasados los ingredientes básicos de dichos modelos cosmológicos, discutimos el tratamiento estándar de perturbaciones primordiales con el formalismo híbrido (véase la Sec. 4). En último lugar, en la Sec. 5 resumimos las bases del nuevo modelo efectivo para la descripción de agujeros negros dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos propuesto por Ashtekar, Olmedo y Singh.

### 1 Conceptos elementales de la gravedad cuántica de lazos

La gravedad cuántica de lazos (LQG<sup>3</sup>) es una cuantización de la relatividad general en 3+1 dimensiones que se caracteriza por ser no perturbativa y por ser independiente de estructuras de fondo [22, 23]. En su formulación canónica, se parte de una descripción hamiltoniana de la relatividad general, basada a su vez en una elección muy particular de variables fundamentales. En lo que sigue, ilustramos el proceso que conduce desde las variables que capturan los grados de libertad gravitacionales en la formulación habitual de la relatividad general hasta la elección final de variables canónicas que abre el camino al programa de cuantización de la LQG. No obstante, no ponemos tanto énfasis en la descripción del proceso de cuantización como tal, que se revisará en detalle en el caso de sistemas con un gran número de simetrías (como es el caso de los espaciotiempos cosmológicos y los de agujero negro), que suponen el núcleo de esta tesis.

---

<sup>3</sup>De ahora en adelante, para referirnos de manera compacta a las distintas teorías y modelos, emplearemos las siglas derivadas de sus nombres en inglés.

En la relatividad general, la información sobre un sistema gravitacional dado está contenida en su métrica espaciotemporal. Para su reformulación canónica, es necesario restringir nuestra atención a espaciotiempos globalmente hiperbólicos, que admiten una noción global de tiempo y se caracterizan por la existencia de una hipersuperficie de Cauchy que determina causalmente el espaciotiempo en su totalidad. Dada esta hipersuperficie, toda la información relevante para la determinación de las soluciones clásicas está contenida en la *métrica espacial* inducida en ella y en la *curvatura extrínseca* correspondiente, en cuya expresión en términos de funciones métricas intervienen la función lapso y el vector desplazamiento. Reescribiendo la acción de Hilbert-Einstein usando estas nuevas variables y llevando a cabo una transformación de Legendre, se puede obtener el hamiltoniano de la relatividad general, que resulta venir dado simplemente por la integración de una combinación lineal de cuatro ligaduras (salvo posibles contribuciones de contorno), donde la función lapso y el vector desplazamiento hacen las veces de multiplicadores de Lagrange. Estas ligaduras, que reciben los nombres de *ligadura escalar o hamiltoniana* y *ligaduras de momentos o difeomorfismos espaciales*, son un reflejo de la simetría bajo difeomorfismos espaciotemporales que caracteriza a la relatividad general. En efecto, es sencillo ver que las ligaduras de momentos generan difeomorfismos espaciales, mientras que la ligadura escalar genera reparametrizaciones temporales módulo difeomorfismos espaciales. De esta forma, esta descomposición del espaciotiempo (que usualmente recibe el nombre de  $3+1$  o ADM [148, 149] —por las siglas de los apellidos de los autores que originalmente la desarrollaron: Arnowitt, Deser y Misner) conduce a un punto en el que los grados de libertad gravitacionales están contenidos en un par canónico de funciones métricas construidas a partir de la métrica espacial y la curvatura extrínseca, que están sujetas a una serie de ligaduras. Dado el hecho de que, desde este punto de vista canónico, la relatividad general no es sino un sistema completamente ligado, el programa de cuantización de la LQG sigue las ideas de Dirac [28], como comentaremos más adelante.

A continuación, podemos adoptar un formalismo triádico, que permite, entre otras, el acoplamiento de campos fermiónicos a la teoría. Es más, con la introducción de una *tríada* y su *co-tríada* inversa asociada<sup>4</sup> se puede alcanzar un nuevo par canónico constituido por la *tríada densitizada* y la curvatura extrínseca en su versión *triádica*. Si bien sus corchetes de Poisson son proporcionales a la identidad, presentan una divergencia de contacto en forma de delta de Dirac tridimensional cuando ambos objetos están evaluados en el mismo punto espacial. Antes de seguir adelante, cabe mencionar que, dada una métrica espacial, la elección de co-tríada no es única. En efecto, dada una cierta co-tríada que permita recuperar la métrica espacial, cualquier otra relacionada con esta a través de una rotación interna proporciona una descripción igual de válida. Por consiguiente, como resultado de emplear un formalismo triádico, aparece una redundancia en la descripción de los grados de libertad gravitacionales que queda reflejada en la aparición de una nueva simetría

---

<sup>4</sup>La introducción de estas estructuras adicionales se puede interpretar como la asignación de un sistema de referencia localmente inercial (compuesto por tres ejes coordenados dados por las tres componentes de la tríada) a cada punto de la sección espacial considerada, soldando el espacio cotangente con un espacio plano de forma local.

local  $SU(2)$ , que dota al espaciotiempo de una estructura de fibrado principal  $SU(2)$  (que es el doble recubridor universal del grupo de rotaciones tridimensionales y que, debido a sus buenas propiedades, se suele considerar en su lugar). Como resultado del agrandamiento del conjunto de simetrías de la teoría, aparece una nueva ligadura en el hamiltoniano del sistema que genera transformaciones  $SU(2)$ : la llamada *ligadura de Gauss*.

El siguiente paso en el programa de la LQG pasa por definir las llamadas variables de Ashtekar-Barbero [24, 25], cuya definición simplifica enormemente la forma funcional de las ligaduras. La idea clave es sustituir la curvatura extrínseca triádica por una conexión de  $\mathfrak{su}(2)$ . Es importante notar que, a través de una condición de metricidad, la triada densitizada define de manera única una conexión  $\mathfrak{su}(2)$  (llamada *conexión de espín*). Dado que se quiere que la conexión de  $\mathfrak{su}(2)$  que reemplace a la curvatura extrínseca triádica conserve la información dinámica que esta contiene, parece natural buscar la manera de integrar la curvatura extrínseca triádica en la propia conexión  $\mathfrak{su}(2)$ . Como consecuencia de sus propiedades de transformación, es inmediato ver que el resultado de sumarle a la conexión de espín un término proporcional a la curvatura extrínseca triádica es otra conexión de  $\mathfrak{su}(2)$ . Precisamente así se define la *conexión de Ashtekar-Barbero*, donde el número real distinto de cero que multiplica a la curvatura extrínseca triádica recibe el nombre de *parámetro de Immirzi* [150] y es un parámetro libre de la teoría<sup>5</sup>. De su definición, es obvio que los corchetes de Poisson de la conexión de Ashtekar-Barbero con la triada densitizada siguen siendo proporcionales a la identidad. Por tanto, se puede tomar el conjunto canónico formado por la triada densitizada y la conexión  $\mathfrak{su}(2)$  recién introducida, las denominadas variables de Ashtekar-Barbero, para describir el sistema sin pérdida de información relevante alguna. Cabe insistir en que estas variables están vinculadas por un total de siete ligaduras: la ligadura escalar, las tres ligaduras de difeomorfismos espaciales y las tres componentes en  $SU(2)$  de la ligadura de Gauss.

Como comentamos anteriormente, la descripción triádica de los grados de libertad gravitacionales es matemáticamente redundante, como queda de manifiesto por la aparición de una nueva simetría gauge  $SU(2)$ . El último paso en la definición de las variables fundamentales de la LQG consiste en seleccionar variables que contengan únicamente información invariante de gauge, ya que es la única con significado físico genuino. Como es bien sabido, una conexión proporciona una cierta noción de transporte paralelo. En el caso estudiado, la conexión de espín da lugar a un transporte paralelo entre las distintas fibras gauge que queda unívocamente determinado salvo por la libertad de realizar rotaciones tridimensionales —o transformaciones de  $SU(2)$ — en los extremos. Si se cierra el camino, esta libertad adicional queda suprimida y la información codificada en el objeto resultante es invariante de gauge. De este modo, parece natural reemplazar la conexión de Ashtekar-Barbero por sus *holonomías* a lo largo de caminos cerrados o *lazos*, hecho que da a la teoría su nombre. En el proceso de definir las holonomías, no solo se eliminan los grados de libertad de gauge sin necesidad de recurrir a una cierta estructura de fondo, sino que

---

<sup>5</sup>Tradicionalmente, su valor se ha fijado de tal manera que se recupere asintóticamente la ley de Bekenstein-Hawking en el cómputo de la entropía de un agujero negro (véase, e.g., la Ref. [151]).

también se suaviza la conexión a lo largo de una dimensión, aliviando parcialmente las divergencias de contacto que aparecen por las reglas de conmutación canónicas de las variables de Ashtekar-Barbero. Dado que estas divergencias aparecen en forma de deltas de Dirac tridimensionales, resulta natural preguntarse si es posible suavizar además la tríada densitizada a lo largo de las restantes dos dimensiones sin necesidad de pagar el precio de introducir una estructura de fondo. En efecto, dadas una superficie y una función test de  $SU(2)$ , las propiedades de transformación de la tríada densitizada garantizan que es posible definir su *flujo* a través de dicha superficie sin necesidad de introducir estructuras de fondo. Así, se tiene que las holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero y los flujos de la tríada densitizada forman un álgebra bajo corchetes de Poisson en la que se rebajan las divergencias distribucionales de las reglas de conmutación canónicas para las variables de Ashtekar-Barbero. El programa de cuantización de la teoría tal y como está formulada se traduce, por tanto, en la búsqueda de una representación cuántica del álgebra de holonomías y flujos en forma de operadores que actúen sobre un cierto espacio de Hilbert cinemático.

Uno de los resultados más robustos de la LQG es el conocido como teorema LOST (denominado así por las siglas de sus autores: Lewandoski, Okolow, Sahlmann y Thiemann). Este teorema asegura la unicidad (módulo equivalencia unitaria) de la representación cíclica del álgebra de holonomías (es decir, construida a partir de la acción de las mismas sobre un estado) cuyo vacío es invariante bajo difeomorfismos espaciales y que soporta una representación de los flujos [152]. En la LQG, el álgebra de configuración se identifica con el álgebra de funciones cilíndricas de la conexión (es decir, funciones complejas que dependen de la conexión a través de sus holonomías a lo largo de un número finito de aristas). En virtud de las propiedades de la completación de esta álgebra de funciones con la norma del supremo, la teoría de Gel'fand garantiza que el álgebra resulta ser isomorfa a la de funciones continuas sobre un cierto espacio compacto denominado espectro [153]. Empleando este lenguaje, el teorema LOST dicta que el espacio de Hilbert cinemático *único* de la LQG que admite una representación no solo de las holonomías, sino también de los flujos, es aquel dado por el espacio de funciones de cuadrado integrable sobre el espectro con la medida de Ashtekar-Lewandowski, que es invariante bajo difeomorfismos [153]. Cabe mencionar que una de las características más importantes de la representación cuya unicidad garantiza el teorema LOST es que no es continua [22]. Esto implica inmediatamente que no es posible obtener una representación cuántica de la conexión, lo cual introduce una no localidad en la teoría, por lo que será necesario expresar los observables físicos en términos de holonomías en lugar de conexiones para obtener su representación cuántica. Otra consecuencia notable de la discontinuidad comentada es que no existe una generalización válida del teorema de Stone-von Neumann y, por tanto, la representación de la LQG *no* es unitariamente equivalente a las representaciones empleadas en la teoría cuántica de campos ordinaria.

En conclusión, la elección de variables canónicas fundamentales (motivada por la independencia de estructuras de fondo) y la identificación de la invariancia bajo difeomorfismos espaciales como simetría fundamental de la teoría seleccionan una única familia unitariamente equivalente de representaciones cuánticas para las holonomías y los flujos que son discontinuas respecto a las primeras y que, por consiguiente,

no son unitariamente equivalentes a la representación estándar de la teoría cuántica de campos. Para una descripción más detallada del escenario físico al que conduce la LQG, véanse la Ref. [22] y las referencias allí incluidas. Sí que cabe mencionar que, como consecuencia natural del tratamiento inherentemente geométrico adoptado, las cantidades geométricas se ven cuantizadas, en el sentido de que los operadores que las representan poseen espectros discretos. Un caso notable es el del operador de área, que posee un autovalor no nulo mínimo que recibe el nombre de *gap de área*. Este valor desempeña un papel de gran importancia en la implementación de la denominada *dinámica mejorada* en contextos cosmológicos, como discutiremos en las secciones siguientes.

Finalicemos esta sección con un breve comentario acerca de la imposición de las ligaduras a nivel cuántico. Siguiendo las ideas de Dirac para el tratamiento de sistemas ligados [28], la estrategia general es la siguiente. Si un sistema está constreñido por un cierto número de ligaduras, estas ligaduras se sustituyen por combinaciones lineales de sí mismas de tal modo que se logre que tantas de ellas como sea posible formen un conjunto de *primera clase* (es decir, un conjunto de ligaduras que conmuten entre sí bajo corchetes de Poisson). El conjunto restante de las ligaduras de *segunda clase* (es decir, aquellas cuyas combinaciones lineales no pueden hacerse conmutar con las de primera clase) se imponen clásicamente para reducir el número de grados de libertad de la teoría mediante la introducción de condiciones de fijación del gauge apropiadas y estables bajo la evolución temporal. Una vez solo quedan las de primera clase, se procede a la cuantización, representando el álgebra de variables canónicas sobre el espacio de Hilbert cinemático. Finalmente, las ligaduras de primera clase se imponen a nivel cuántico, representándolas mediante operadores que actúan en ese espacio de Hilbert e identificando aquellos estados (generalizados) a los que aniquilan como los estados físicos de la teoría. En el caso de la LQG, las ligaduras de momentos y la de Gauss se han impuesto cuánticamente con éxito gracias a su simplicidad. Sin embargo, la imposición de la ligadura escalar sigue siendo un problema abierto a día de hoy. Esto supone una obstrucción a la compleción del programa de cuantización de la LQG. No obstante, dicha obstrucción puede ser salvada en el contexto de escenarios físicos que presentan un gran número de simetrías, como lo son la cosmología y los agujeros negros. Estos sistemas serán el centro de atención en lo que resta de esta tesis.

## 2 Cosmología cuántica de lazos homogénea: el caso anisótropo de Bianchi tipo I

En esta sección, repasamos los ingredientes esenciales del enfoque estándar para la cuantización polimérica de los espaciotiempos de Bianchi tipo I [154]. Si bien el orden seguido en el cuerpo principal de esta tesis es en orden creciente de complejidad (es decir, empezando por cosmologías homogéneas e isotropas, seguidas de espaciotiempos de Bianchi I y culminando en la discusión del tratamiento de perturbaciones cosmológicas), los preliminares se presentan en otro orden, más conveniente de cara a introdu-

circiertos conceptos de manera más natural.

Las cosmologías de Bianchi I han sido estudiadas en detalle en el contexto de la cosmología cuántica de lazos (LQC). Para más detalles acerca de los distintos enfoques a su cuantización polimérica, consúltense los trabajos originales, entre los cuales cabe destacar las Refs. [49, 52–55]. Estos sistemas cosmológicos se caracterizan por su homogeneidad y anisotropía, exhibiendo secciones espaciales planas. En este sentido, se pueden entender como la generalización anisótropa inmediata de las cosmologías de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) planas. A pesar de que esta afirmación es cierta clásicamente, su veracidad a nivel cuántico depende críticamente de la prescripción de cuantización empleada para representar la ligadura hamiltoniana, como discutiremos más adelante. De hecho, uno de los motivos principales por los que el tratamiento de las cosmologías de Bianchi I se presenta en primer lugar es que su estudio permite motivar la elección de una prescripción de simetrización “natural” en el contexto de la LQC homogénea e isótropa.

Siguiendo la filosofía de la LQG, describimos el sistema usando variables de Ashtekar-Barbero [49, 52, 54]. Usualmente, la definición de estas variables en la LQC homogénea requiere la introducción de una tríada fiducial y de una celda fiducial finita, que hace las veces de regulador infrarrojo, permitiendo evitar la aparición de divergencias en la integración de cantidades homogéneas sobre secciones espaciales no compactas. No obstante, si se toma un gauge diagonal y se hace una cierta elección de variables de Ashtekar-Barbero, las cantidades físicas resultan ser independientes de estas elecciones, como se mostró en la Ref. [53]. Por consiguiente, seleccionamos por simplicidad una tríada fiducial euclídea y nos centramos en el estudio del caso en el que las secciones espaciales tienen la topología compacta del tres-toro  $T^3$ . Con estas consideraciones, es natural fijar la celda fiducial como la totalidad de la sección tres-toroidal con lados de longitud coordenada  $2\pi$ . Teniendo esto en cuenta, se alcanzan las siguientes expresiones para la conexión de Ashtekar-Barbero  $A_a^i$  y para la tríada densitizada  $E_i^a$ :

$$A_a^i = \frac{c^i}{2\pi} \delta_a^i, \quad E_i^a = \frac{p_i}{4\pi^2} \delta_i^a, \quad (2.1)$$

donde las componentes de la conexión  $c^i$  y de la tríada densitizada  $p_i$  son constantes en las secciones espaciales (pero no bajo evolución temporal) y codifican toda la información relevante acerca de los grados de libertad gravitacionales del sistema. Los corchetes de Poisson no triviales de las variables canónicas adoptan la siguiente expresión en términos de  $c^i$  y  $p_i$ :

$$\{c^i, p_j\} = 8\pi G \gamma \delta_j^i, \quad (2.2)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal de Newton y  $\gamma$  es el parámetro de Immirzi [150]. Es importante notar que, dado que hemos elegido un gauge diagonal, los índices internos  $SU(2)$  y los espaciales pueden ser identificados (recuérdense los convenios introducidos al respecto en la sección Notación). Así lo hacemos de aquí en adelante por conveniencia.

Empleando coordenadas angulares  $\{x^i\} = \{\theta, \sigma, \delta\}$  (donde  $x^i \in S^1$ ), se puede escribir la métrica espaciotemporal como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{V^2}{4\pi^2} \sum_{i=\theta, \sigma, \delta} \left( \frac{dx^i}{p_i} \right)^2, \quad (2.3)$$

donde  $N$  es la función lapso asociada a una elección de variable temporal  $t$  y

$$V = \sqrt{|p_\theta p_\sigma p_\delta|} \quad (2.4)$$

es el volumen físico del Universo. Nótese que, en la Ec. (2.3), usamos la notación estándar de sumatorio  $\sum$ . (Esto es debido a que, en el contexto de las cosmologías de Bianchi, no emplearemos el convenio de suma de Einstein en lo referente a índices SU(2), ya que a menudo aparecen repetidamente en una misma expresión y podría generar confusión.)

En la LQC homogénea, se caracteriza el espacio de configuración empleando las holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero a lo largo de aristas rectas. En el caso de Bianchi I, estas aristas se orientan a lo largo de las direcciones fiduciales (etiquetadas por  $i = \theta, \sigma, \delta$ ) y tienen longitudes  $2\pi\mu_i \in \mathbb{R}$ , respectivamente. En estos términos, se obtienen las siguientes expresiones para las holonomías fundamentales:

$$h_i^{\mu_i}(c^i) = e^{\mu_i c^i \tau_i}, \quad (2.5)$$

donde  $\tau_i = -i\sigma_i/2$  ( $\sigma_i$  son las matrices de Pauli) son los generadores de la representación fundamental de SU(2) y que, como tales, verifican las relaciones de conmutación  $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ij}^k \tau_k$ . El álgebra de configuración viene dada entonces por sumas de productos de los elementos de matriz de las representaciones irreducibles de las holonomías. Es bien sabido [40, 153] que esta álgebra es el álgebra de funciones quasi-periódicas de las variables de conexión  $c^i$ . Un álgebra tal es generada por los elementos de matriz de las holonomías

$$\prod_i \mathcal{N}_{\mu_i}(c^i) = \prod_i e^{i\mu_i c^i / 2}. \quad (2.6)$$

En la expresión anterior, el producto debe ser tomado sobre las tres direcciones espaciales fiduciales ( $i = \theta, \sigma, \delta$ ) y  $\mu_i \in \mathbb{R}$  son números reales arbitrarios. La descripción del espacio de fases se completa con los flujos de la tríada densitizada a través de rectángulos fiduciales formados por las aristas de las holonomías. El área del rectángulo formado por dos aristas orientadas a lo largo de dos direcciones fiduciales distintas  $j$  y  $k$  (ambas ortogonales a la dirección  $i$ ) resulta ser proporcional a  $p_i$ . En efecto, el flujo asociado a una superficie rectangular de estas características viene dado por

$$E(S_i) = \frac{p_i}{4\pi^2} S_i, \quad (2.7)$$

donde  $S_i$  es el área fiducial de la superficie rectangular.



En el proceso de cuantización, las exponenciales que proporcionan los elementos de matriz de las holonomías fundamentales son representadas por estados  $|\mu_i\rangle$ . En términos de estos estados se pueden definir los análogos de las funciones cilíndricas de la LQG (véase la Sec. 1) como [58]

$$\text{Cyl}_S^{\text{BI}} = \text{span}\{|\mu_\theta, \mu_\sigma, \mu_\delta\rangle\}, \quad (2.8)$$

donde  $\text{span}\{\cdot\}$  indica la envoltura lineal de los estados entre corchetes y los estados  $|\mu_\theta, \mu_\sigma, \mu_\delta\rangle = |\mu_\theta\rangle \otimes |\mu_\sigma\rangle \otimes |\mu_\delta\rangle$  vienen dados por el producto tensorial de los estados correspondientes a cada una de las tres direcciones fiduciales. Por tanto, el espacio de Hilbert cinemático asociado a una cosmología de Bianchi I,  $\mathcal{H}_{\text{BI}}^{\text{kin}} = \otimes_i \mathcal{H}_i^{\text{kin}}$ , viene dado por la completación de  $\text{Cyl}_S^{\text{BI}}$  con respecto al producto interno discreto definido por  $\langle \mu_i | \mu'_i \rangle = \delta_{\mu_i, \mu'_i}$  en cada dirección espacial.

Claramente, los estados  $|\mu_\theta, \mu_\sigma, \mu_\delta\rangle$  recién introducidos proporcionan una base de dicho espacio de Hilbert. La acción de los operadores fundamentales en estos estados es sencilla. Por un lado, son autoestados de los operadores  $\hat{p}_i$  que, como hemos mencionado, están relacionados con los flujos de la tríada densitizada a través de superficies rectangulares ortogonales a la dirección fiducial  $i$ . Por otro lado, los operadores  $\hat{\mathcal{N}}_{\mu_i}$ , que representan los elementos de matriz de las holonomías fundamentales a lo largo de aristas orientadas en la dirección fiducial  $i$ , producen desplazamientos en las etiquetas de los estados. En efecto, tenemos que

$$\hat{p}_i |\mu_i\rangle = 4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \mu_i |\mu_i\rangle, \quad \hat{\mathcal{N}}_{\mu'_i} |\mu_i\rangle = |\mu_i + \mu'_i\rangle, \quad (2.9)$$

donde  $l_{\text{Pl}} = \sqrt{G}$  es la longitud de Planck en unidades naturales (véase el apartado Notación). Por supuesto, la acción de estos operadores sobre estados asociados a las direcciones espaciales ortogonales a  $i$  es trivial. En este sentido, a menudo emplearemos  $\hat{\mathcal{N}}_i$  para referirnos de manera compacta a  $\hat{\mathcal{N}}_i \otimes \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{I}_k$ , omitiendo las acciones triviales por brevedad.

En la LQG, el espectro del operador de área es discreto y el límite de área nula no se puede alcanzar [22]: existe un *gap de área*  $\Delta$ , que es comúnmente identificado con la cantidad

$$\Delta = 4\sqrt{3}\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2. \quad (2.10)$$

Se ha argumentado extensivamente que este hecho debería ser implementado de alguna manera en el formalismo de la LQC. Usualmente, la existencia del gap de área se importa en la LQC en forma de una longitud coordinada mínima de las aristas de las holonomías. Aunque existen distintas prescripciones en el campo para la inclusión de esta longitud mínima, la más extendida es la llamada *prescripción de dinámica mejorada* (también conocida como esquema  $\bar{\mu}$ ) [44]. Esta propuesta plantea fijar una longitud mínima para cada dirección espacial mediante el requerimiento de que las aristas de los circuitos de holonomía formen rectángulos de un área física igual al gap de área de la LQG [49]

$$\bar{\mu}_j \bar{\mu}_k |p_i\rangle = \Delta, \quad (2.11)$$

con  $i \neq j \neq k$ . Escribiendo expresiones similares para rectángulos contenidos en el resto de planos coordenados fiduciales, se obtiene de forma trivial que

$$\bar{\mu}_i = \sqrt{\frac{|p_i|}{|p_j p_k|}} \Delta. \quad (2.12)$$

El hecho de que la longitud coordenada mínima dependa de las variables de tríada asociadas a las tres direcciones espaciales implica que el desplazamiento producido por los operadores  $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}_i}$  al actuar sobre un estado de la base del espacio de Hilbert cinemático depende del estado sobre el que actúan. Sin embargo, es posible reescribir los operadores de holonomía de tal forma que su acción se simplifique considerablemente. Usualmente, dicha reexpresión se lleva a cabo mediante la introducción de un parámetro afín  $\lambda_i$  por dirección fiducial, que viene dado por

$$\lambda_i = \text{sgn}(p_i) \frac{\sqrt{|p_i|}}{(4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta})^{1/3}}, \quad (2.13)$$

donde  $\text{sgn}(\cdot)$  denota la función signo. La cantidad  $i\bar{\mu}_i c^i$ , que aparece en el exponente de las holonomías a lo largo de aristas de longitud coordenada mínima, se puede interpretar como el operador diferencial  $8\pi\gamma G \bar{\mu}_i \partial_{p_i}$ , como sería usual en la representación de momentos. Es fácil demostrar que un operador tal se puede reescribir como [49, 54]

$$8\pi\gamma G \bar{\mu}_i \partial_{p_i} = \frac{1}{|\lambda_j \lambda_k|} \partial_{\lambda_i}, \quad (2.14)$$

donde las tres direcciones que aparecen en la expresión anterior son distintas. Entonces, parece natural reetiquetar los estados  $|\mu_\theta, \mu_\sigma, \mu_\delta\rangle$  de la base del espacio de Hilbert cinemático empleando los parámetros  $\lambda_i$ ,  $|\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle$ . Con este reetiquetado, la acción de los operadores de holonomía fundamentales sobre los estados de la base se define como [58]

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta} |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \left| \lambda_\theta \pm \frac{1}{2|\lambda_\sigma \lambda_\delta|}, \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle \quad (2.15)$$

junto con dos expresiones análogas para la acción de los operadores  $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\sigma}$  y  $\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\delta}$ . Estos estados también son autoestados de los operadores de tríada  $\hat{p}_i$ , como pone de manifiesto su acción sobre ellos:

$$\hat{p}_i |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = (4\pi G \gamma \sqrt{\Delta})^{2/3} \text{sgn}(\lambda_i) |\lambda_i|^2 |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle. \quad (2.16)$$

Adicionalmente, también es interesante discutir la acción del operador de volumen físico  $\hat{V} = \sqrt{|p_\theta p_\sigma p_\delta|}$ . Dado que está definido por un producto de potencias de los operadores de tríada, es obvio que los elementos de la base ortonormal introducida previamente son autoestados del volumen. De manera trivial,

$$\hat{V} |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = 4\pi G \gamma \sqrt{\Delta} |\lambda_\theta \lambda_\sigma \lambda_\delta| |\lambda_\theta, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle. \quad (2.17)$$

En analogía con el caso isótropo, se puede definir el parámetro adimensional  $v$ , proporcional al volumen físico del Universo [véase la siguiente sección y, más concretamente, la Ec. (2.36) y el párrafo que le sucede]. El análogo anisótropo (que designaremos empleando la misma letra para evitar introducir notación innecesaria) se puede definir entonces como  $v = 2\lambda_\theta\lambda_\sigma\lambda_\delta$  en la base que hemos venido considerando.

Se puede reescribir la acción de los operadores fundamentales en una representación alternativa sustituyendo  $\lambda_\theta$  (o cualquier otra  $\lambda_i$ ) por el parámetro  $v$  recién introducido. En la *representación*  $v$  —en contraposición a la *representación*  $\lambda$  de las Ecs. (2.15) y (2.16)—, dicha acción adopta la forma

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\theta}^z |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = |v \pm \text{sgn}(\lambda_\sigma\lambda_\delta), \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle, \quad (2.18)$$

$$\hat{\mathcal{N}}_{\pm\bar{\mu}_\sigma}^z |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \left\langle v \pm \text{sgn}(v\lambda_\sigma), \frac{v \pm \text{sgn}(v\lambda_\sigma)}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle, \quad (2.19)$$

$$\hat{p}_\theta |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = (4\pi G\gamma\sqrt{\Delta})^{2/3} \text{sgn}\left(\frac{v}{\lambda_\sigma\lambda_\delta}\right) \frac{v^2}{4\lambda_\sigma^2\lambda_\delta^2} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle, \quad (2.20)$$

$$\hat{p}_\sigma |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = (4\pi G\gamma\sqrt{\Delta})^{2/3} \text{sgn}(\lambda_\sigma) \lambda_\sigma^2 |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle. \quad (2.21)$$

La acción de los operadores asociados a la dirección espacial  $\delta$  es completamente análoga a la de los correspondientes a la dirección  $\sigma$ , por lo que la omitimos por brevedad. En esta tesis, emplearemos indistintamente ambas representaciones, dependiendo de cuál sea más conveniente para presentar los resultados.

Llegado este punto de la discusión en el que la descripción del espacio de Hilbert cinemático del sistema queda completada, resumimos los pasos que se han dado para facilitar la comparación con el procedimiento general seguido en la LQG.

1. Hemos comenzado describiendo los grados de libertad gravitacionales mediante una conexión gauge y una triada densitizada. En el proceso de su definición, hemos introducido una celda fiducial adaptada a la elección de topología tres-toroidal para las secciones espaciales y hemos fijado el gauge de tal manera que las variables resultantes sean diagonales. Cabe recordar que esta forma de proceder viene motivada por el hecho de que se ha demostrado que los resultados físicos son independientes de ella.
2. Hemos definido las holonomías de la conexión a lo largo de aristas de una cierta longitud coordinada y los flujos de la triada densitizada a través de superficies rectangulares.
3. Hemos identificado el álgebra de configuración (que viene dada por las sumas de productos de elementos de matriz de las holonomías) con el álgebra de funciones quasi-periódicas de las variables de conexión  $c^i$ .
4. Hemos representado cada exponencial por un estado ket, definiendo subsecuentemente el análogo del espacio de funciones cilíndricas como la envoltura lineal de dichos estados. Hemos construido el espacio de Hilbert cinemático como la completación del espacio de funciones cilíndricas con respecto a un producto interno discreto en cada dirección espacial.

5. Hemos representado las variables canónicas clásicas (es decir, los elementos de matriz de las holonomías y las variables de tríada  $p_i$ ) mediante operadores en el espacio de Hilbert cinemático y hemos obtenido su acción sobre la base compuesta por los estados introducidos anteriormente.
6. Finalmente, hemos argumentado que, dado que existe un gap de área en la LQG, debería existir una longitud coordenada mínima en la LQC. Hemos introducido dicha longitud mínima siguiendo las ideas de la prescripción de dinámica mejorada, alcanzando así unos operadores de holonomía cuya acción es dependiente del estado sobre el que actúan, lo que complica sustancialmente la descripción. Por esta razón, hemos llevado a cabo un reetiquetado de los estados de la base del espacio de Hilbert cinemático para simplificar la acción de estos operadores fundamentales.

El siguiente paso en el programa de cuantización es la representación de la ligadura hamiltoniana, ya que es la única ligadura no trivial en la descripción de sistemas cosmológicos homogéneos y planos (una vez seleccionado un gauge diagonal). Además, en un paso previo a su promoción a operador cuántico sobre el espacio de Hilbert cinemático de la teoría, la ligadura clásica ha de regularizarse para ser reescrita en términos de las holonomías, que son las variables clásicas que tienen un análogo cuántico bien definido, y no la conexión (véase el final de la Sec. 1). En esta sección nos centramos exclusivamente en describir el proceso de regularización que ha sido empleado tradicionalmente en el contexto de la LQC homogénea y plana, ya que la cuantización de la ligadura regularizada será examinada en detalle en el cuerpo de esta tesis (en el Capítulo 4, en el caso de las cosmologías de Bianchi-I). Durante toda la tesis nos referiremos a esta propuesta de regularización como la *estándar*, en el sentido de que es la que ha sido usada predominantemente desde los orígenes de la LQC. No obstante, este proceso presenta diferencias fundamentales con respecto al que se emplea en la teoría completa de la LQG.

En la formulación de la relatividad general en términos de conexiones y tríadas, la parte gravitacional de la ligadura hamiltoniana  $H_{\text{gr}}$  está compuesta por dos piezas: la *parte euclídea*  $H_E$  y la *parte lorentziana*  $H_L$ . La razón tras esta nomenclatura es sencilla: en gravedad euclídea, solo la primera parte aparece, por lo que la segunda está íntimamente relacionada a la naturaleza lorentziana de la teoría de la gravitación de Einstein.

Explícitamente,  $H_{\text{gr}}(N) = N(H_E + H_L)$ , con

$$H_E = \frac{1}{16\pi G} \int \left( d^3x \, \epsilon^{-1} \sum_{i,j,k} \left( E_i^a E_j^b F_{ab}^k \right), \quad (2.22)$$

$$H_L = -\frac{1+\gamma^2}{8\pi G} \int \left( d^3x \, \epsilon^{-1} \sum_{i,j} E_i^a E_j^b K_{[a}^i K_{b]}^j \right). \quad (2.23)$$

En las expresiones anteriores,  $\epsilon = \sqrt{|\det(E)|} = \sqrt{\mathfrak{h}}$  (donde  $\mathfrak{h}$  es el determinante de la métrica espacial),  $F_{ab}^k$  es el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero y  $K_a^i$  es la curvatura extrínseca triádica. Recordemos que la conexión de Ashtekar-Barbero es la suma de la conexión de espín  $\Gamma_a^i$  y la curvatura extrínseca triádica  $K_a^i$ .

(multiplicada por el parámetro de Immirzi  $\gamma$ ). Por lo tanto, clásicamente, tenemos de manera trivial que  $\gamma K_a^i = A_a^i - \Gamma_a^i$ .

Cuando las secciones espaciales son planas, la conexión de espín resulta anularse idénticamente y, por tanto, la conexión de Ashtekar-Barbero es proporcional a la curvatura extrínseca triádica. Además, en cosmologías homogéneas, la curvatura extrínseca no varía de un punto de una sección espacial dada a otro, lo cual implica que las derivadas parciales de la conexión de Ashtekar-Barbero que aparecen en el término abeliano de la definición del tensor de curvatura asociado se anulan. Por tanto, en el caso de las cosmologías homogéneas y espacialmente planas, el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero se puede escribir simplemente como  $F_{ab}^k = \gamma^2 \sum_l \epsilon^k{}_{lm} K_{[a}^l K_{b]}^m$ . Como resultado, es evidente que la parte lorentziana  $H_L$  es clásicamente proporcional a la parte euclídea  $H_E$  en el tipo de sistemas que estamos considerando. Por consiguiente, cuando se pretende describir un sistema cosmológico homogéneo con secciones espaciales planas, la contribución gravitatoria a la ligadura hamiltoniana se puede escribir en términos únicamente de  $H_E$  como sigue:

$$H_{\text{gr}}(N) = -\frac{N}{\gamma^2} H_E. \quad (2.24)$$

Debido a este hecho, el método de regularización más comúnmente empleado en la LQC consiste en regularizar la parte euclídea y, empleando la identidad mostrada sobre estas líneas, regularizar así la totalidad de la ligadura escalar en el vacío. A continuación, resumimos brevemente el resultado de aplicar este procedimiento de regularización estándar a las cosmologías de Bianchi I.

En primer lugar, para poder escribir la parte euclídea de la ligadura hamiltoniana en términos de holonomías, es necesario lidiar con el tensor de curvatura  $F_{ab}^k$ . Paralelo, se emplean habitualmente las llamadas *identidades de Thiemann*, que fueron desarrolladas originalmente dentro del marco de la LQG [78]. Dichas identidades clásicas fueron después heredadas por la LQC junto con el resto de las técnicas inspiradas en la LQG. En el caso del modelo diagonal considerado, la siguiente identidad se cumple clásicamente:

$${}^{(\text{BI})} F_{ab}^i = -2 \sum_{j,k} \left( \Gamma_{jk}^i - \frac{h_{\square_{jk}}^{\bar{\mu}} - \delta_{jk}}{4\pi^2 \bar{\mu}_j \bar{\mu}_k} \tau^i \right) \left( \delta_a^j \delta_b^k, \right) \quad (2.25)$$

donde  $i \neq j \neq k$ . Además,  $h_{\square_{jk}}^{\bar{\mu}} = h_j^{\bar{\mu}_j} h_k^{\bar{\mu}_k} (h_j^{\bar{\mu}_j})^{-1} (h_k^{\bar{\mu}_k})^{-1}$  denota la holonomía a lo largo de un circuito rectangular cuyas aristas (de longitudes coordenadas  $2\pi \bar{\mu}_j$  y  $2\pi \bar{\mu}_k$ ) están orientadas a lo largo de las direcciones fiduciales  $j$  y  $k$ , respectivamente.

Empleando las propiedades de las matrices de Pauli, es trivial darse cuenta de que la holonomía de la conexión a lo largo de una arista de longitud fiducial  $2\pi \bar{\mu}_i \in \mathbb{R}$  paralela a la dirección espacial  $i$  viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} h_i^{\bar{\mu}_i} &= \exp(\bar{\mu}_i c^i \tau_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \bar{x}_i^{2n} \sigma_i^{2n} - \mathbf{i} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \bar{x}_i^{2m+1} \sigma_i^{2m+1} \\ &= \cos \bar{x}_i \mathbb{I} - \mathbf{i} \sin \bar{x}_i \sigma_i, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $\bar{x}_i = \bar{\mu}_i c^i / 2$ . Un cálculo sencillo conduce por tanto al siguiente resultado para el tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} {}^{(\text{BI})}F_{ab}^i &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sin 2\bar{x}_a}{\bar{\mu}_a} \frac{\sin 2\bar{x}_b}{\bar{\mu}_b} \epsilon_{ab}^i \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{\sin 2\bar{x}_a}{\bar{\mu}_a} \frac{\sin^2 \bar{x}_b}{\bar{\mu}_b} \delta_a^i - \frac{\sin^2 \bar{x}_a}{\bar{\mu}_a} \frac{\sin 2\bar{x}_b}{\bar{\mu}_b} \delta_b^i \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dadas sus propiedades de simetría, los dos últimos términos de esta expresión se anulan idénticamente al introducirlos en la expresión de la parte euclídea de la contribución gravitacional a la ligadura escalar (2.22). Por consiguiente, teniendo en cuenta la homogeneidad de las secciones espaciales, obtenemos

$$H_E^{\text{BI}} = \frac{1}{16\pi G} \frac{1}{V} \sum_i \left( p_i \frac{\sin \bar{\mu}_i c^i}{\bar{\mu}_i} \sum_{j \neq i} \left( p_j \frac{\sin \bar{\mu}_j c^j}{\bar{\mu}_j} \right), \quad (2.28)$$

donde hemos usado que el determinante de la tríada densitizada es  $\mathbf{e} = -V/(2\pi)^3$ . En conclusión, cuando se emplea el procedimiento estándar para regularizar la ligadura hamiltoniana en vacío, el hamiltoniano resultante se puede escribir como

$$H_{\text{gr}}^{\text{BI}}(N) = -\frac{N}{16\pi G \gamma^2} \frac{1}{V} \sum_i \left( p_i \frac{\sin \bar{\mu}_i c^i}{\bar{\mu}_i} \sum_{j \neq i} \left( p_j \frac{\sin \bar{\mu}_j c^j}{\bar{\mu}_j} \right), \quad (2.29)$$

donde, recordemos,  $\bar{\mu}_i = \sqrt{\Delta|p_i|} / \sqrt{|p_j p_k|}$  para  $i \neq j \neq k$ . La expresión anterior solo depende de las variables de tríada  $p_i$  y de funciones trigonométricas de las variables de conexión, que esencialmente son los elementos de matriz de las holonomías a lo largo de aristas de longitud coordenada mínima. Por ende, la ligadura escalar está preparada para ser cuantizada de acuerdo con alguna prescripción para su posterior implementación en el espacio de Hilbert cinemático de la teoría. Dicho procedimiento será discutido conjuntamente con la regularización y cuantización de la parte lorentziana de la ligadura hamiltoniana más tarde en esta tesis (véase el Capítulo 4).

### 3 Cosmología cuántica de lazos homogénea: el caso isótropo

En esta sección, discutimos brevemente los ingredientes básicos del tratamiento de espaciotiempos homogéneos e isótropos de tipo FLRW [154], que han sido investigados en multitud de trabajos dentro del marco de la LQC estándar. En particular, nos centramos en describir el espacio de Hilbert cinemático de la teoría y la regularización estándar de la ligadura hamiltoniana, por lo que guardamos una estructura muy similar a la de la Sec. 2. Además, como comentamos en dicha sección, las cosmologías de FLRW pueden entenderse como el límite isótropo de las de Bianchi I, por lo que su discusión previa posibilita una presentación mucho más compacta en la

presente sección. Para más detalles acerca de la cuantización polimérica del modelo, consúltense, e.g., las Refs. [43–45].

En el caso isótropo de las cosmologías de FLRW, las tres direcciones espaciales son idénticas. Por lo tanto, las variables de Ashtekar-Barbero se reducen a

$$A_a^i = \frac{c}{2\pi} \delta_a^i, \quad E_i^a = \frac{p}{4\pi^2} \delta_i^a, \quad (2.30)$$

siendo sus corchetes de Poisson no triviales

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3}. \quad (2.31)$$

Nótese la presencia de un factor  $1/3$  extra con respecto a los corchetes análogos en la sección anterior, originado por la identificación de los tres pares de variables de tríada y de conexión asociados a direcciones espaciales distintas en el caso de las cosmologías de Bianchi I. Estas expresiones son válidas con una fijación apropiada de métrica fiducial euclídea y tríada fiducial diagonal, de tal modo que la libertad de fijación de gauge queda eliminada y la ligadura hamiltoniana es de nuevo la única ligadura no trivial a la que está sometida el sistema. Como en el caso de Bianchi I, es bien sabido que el modelo cosmológico resultante de estas elecciones es independiente de ellas [43, 44].

Introduzcamos a continuación las holonomías a lo largo de aristas de longitud coordinada  $2\pi\mu$  y los flujos de las tríadas densitizadas a través de cuadrados coordinados formados por estas aristas. El álgebra de configuración es el de funciones quasi-periódicas de la variable de conexión  $c$ , que es generada por los elementos de matriz de las holonomías

$$\mathcal{N}_\mu(c) = e^{i\mu c/2}. \quad (2.32)$$

Al igual que en el caso discutido anteriormente, estas exponenciales quedan representadas en forma de estados  $|\mu\rangle$  en el proceso de cuantización. La envoltura lineal de estos estados define el análogo del espacio de funciones cilíndricas de la variable de conexión  $\text{Cyl}_S = \text{span}\{|\mu\rangle\}$  y su completación con respecto al producto interno discreto  $\langle\mu|\mu'\rangle = \delta_{\mu\mu'}$  resulta en el espacio de Hilbert cinemático asociado a cosmologías de FLRW,  $\mathcal{H}^{\text{kin}}$ . Los operadores fundamentales presentan una acción sencilla sobre los estados  $|\mu\rangle$  de la base del espacio de Hilbert. En efecto, dichos estados son autoestados del operador  $\hat{p}$  y sus etiquetas se ven desplazadas por la acción de  $\hat{\mathcal{N}}_\mu$ :

$$\hat{p} |\mu\rangle = \frac{4\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2}{3} \mu |\mu\rangle, \quad (2.33)$$

$$\hat{\mathcal{N}}_\mu |\mu\rangle = |\mu + \mu'\rangle. \quad (2.34)$$

Para determinar la longitud fiducial mínima  $\bar{\mu}$  de las aristas a lo largo de las cuales se definen las holonomías, se emplea de nuevo la prescripción de la dinámica mejorada, exigiendo que dichas aristas formen cuadrados coordinados de un área física igual al gap de área  $\Delta$  de la LQG. De este requerimiento se deduce trivialmente que

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{|p|}}. \quad (2.35)$$

Es inmediato darse cuenta de que este resultado reproduce el obtenido en el caso anisótropo cuando se identifican las tres direcciones espaciales y sus variables de tríada asociadas. El hecho de que la longitud fiducial mínima establecida por la prescripción de dinámica mejorada dependa de la variable de tríada implica que la acción de los operadores fundamentales de holonomía será dependiente del estado sobre el que actúan. Una vez más, es conveniente simplificar dicha acción mediante la introducción de un parámetro afín  $v$  para reetiquetar los estados de la base del espacio de Hilbert cinemático. Requerir que los operadores de holonomía produzcan desplazamientos de una unidad en la nueva etiqueta es equivalente a imponer que el operador diferencial asociado al exponente de los elementos de matriz de las holonomías fundamentales sea simplemente  $\partial_v$  [44], de donde se sigue que

$$v = (2\pi l_{\text{Pl}}^2 \gamma \sqrt{\Delta})^{-1} \text{sgn}(p) |p|^{3/2}. \quad (2.36)$$

Dada esta expresión,  $v$  tiene una interpretación física clara: se trata de un parámetro adimensional proporcional al volumen físico del Universo, cuya expresión clásica es  $V = |p|^{3/2}$ . Por consiguiente,  $|v|$  proporciona el volumen del Universo en unidades del volumen de Planck  $l_{\text{Pl}}^3$ , salvo por un factor  $(16\sqrt{3}\pi^3\gamma^3)^{-1/2}$ . Finalmente, reetiquetando los estados  $|\mu\rangle$  empleando el parámetro recién introducido se llega a las siguientes acciones para los operadores fundamentales:

$$\hat{p}|v\rangle = (2\pi\gamma l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{\Delta})^{2/3} \text{sgn}(v) |v|^{2/3} |v\rangle, \quad \hat{N}_{\bar{\mu}}|v\rangle = |v+1\rangle. \quad (2.37)$$

Con esto, queda completada una descripción elemental del espacio de Hilbert cinemático de la LQC homogénea e isótropa. El siguiente paso en el programa de cuantización es la representación e imposición de la ligadura escalar. No obstante, como ya hemos comentado en varias ocasiones, es necesario implementar previamente un procedimiento de regularización para reexpresar la ligadura clásica en términos de las holonomías de la conexión, que son las variables fundamentales que tienen un análogo cuántico bien definido. Para ello, tendríamos que llevar a cabo un proceso completamente análogo al presentado en la sección anterior, que consta de los siguientes pasos:

1. Empleamos una identidad de Thiemann [78] apropiada para expresar el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero en términos de holonomías. Esto involucra típicamente el cálculo de la holonomía a lo largo de un circuito cerrado, que en el caso isótropo es un cuadrado coordenado. En efecto,

$$F_{ab}^i = -2 \sum_{j,k} \left( \tau^i \frac{h_{\square_{jk}}^{\bar{\mu}} - \delta_{jk}}{4\pi^2 \bar{\mu}^2} \tau^i \right) \left( \delta_a^j \delta_b^k \right), \quad (2.38)$$

expresión que es enteramente análoga a la empleada en el caso anisótropo.

2. Obtenemos la parte euclídea de la ligadura hamiltoniana introduciendo el resultado del cálculo anterior en la Ec. (2.22). Para ello, hacemos uso de la expresión del determinante de la tríada densitizada y del hecho de que las secciones espaciales son homogéneas, con un volumen fiducial  $(2\pi)^3$ .



3. Finalmente, insertamos la expresión de la parte euclídea en la Ec. (2.24) para obtener la ligadura hamiltoniana regularizada de acuerdo con el procedimiento estándar.

No obstante, dada la relación que existe entre las cosmologías de Bianchi I y las de FLRW planas, es suficiente con establecer que  $p_i = p$ ,  $c^i = c$  y  $\bar{\mu}_i = \bar{\mu}$  para todo  $i \in \{\theta, \sigma, \delta\}$  en la Ec. (2.28). Teniendo en cuenta que los seis términos de dicha expresión coinciden en este límite isótropo (lo cual resulta en la aparición de un factor 6 global), obtenemos que

$$H_E = \frac{3}{8\pi GV} \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right) \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right) \left( \right) \quad (2.39)$$

Finalmente, la ligadura escalar regularizada de acuerdo con el procedimiento estándar resulta venir dada por

$$H_{gr} = -\frac{3N}{8\pi G\gamma^2 V} \frac{1}{V} \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right) \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right) \left( \right) \quad (2.40)$$

Aunque aparece una función signo al cuadrado, mantenemos explícitamente esta estructura para facilitar la representación cuántica de la ligadura de acuerdo con la prescripción MMO—denominada así por las siglas de los apellidos de sus autores, Martín-Benito, Mena-Marugán y Olmedo [45]—, que se inspira en el caso anisótropo (donde las funciones signo actúan sobre dos variables de tríada asociadas a direcciones espaciales distintas) para motivar una elección natural de orden de factores en el caso de las cosmologías homogéneas e isótropas. Dicha promoción a operador cuántico será discutida en detalle en el Capítulo 3 de esta tesis, donde abordaremos también la cuantización separada de la parte lorentziana que, hasta ahora, se ha reescrito en términos de la euclídea explotando las simetrías de las secciones espaciales.

## 4 Cosmología cuántica de lazos híbrida: perturbaciones cosmológicas

En esta sección, repasamos las ideas más relevantes que subyacen al tratamiento de perturbaciones cosmológicas en el formalismo de la LQC híbrida [31, 60–64, 66], que es una de las propuestas predominantes junto con el formalismo de la métrica vestida [67–70] (para más información acerca de otras propuestas existentes, véanse, e.g., las Refs. [155–157]). La propuesta híbrida fue originalmente aplicada para la cuantización de modelos cosmológicos de Gowdy [56–59] y después adaptada al tratamiento de un escenario de mayor interés físico: la perturbación de espaciotiempos homogéneos e isótropos. En esta sección, nos centramos en este último caso, más general. Para una discusión más detallada, pueden consultarse los trabajos originales y el artículo de revisión [158], en los que está basado el resumen presentado a continuación.

Dado que el Universo inflacionario [159–164] se suele describir como una cosmología de FLRW que hace las veces de fondo sobre el cual se propagan las perturbaciones,

la idea original fue tratar el fondo homogéneo e isótropo empleando las técnicas de la LQC y cuantizar las perturbaciones siguiendo el procedimiento usual de la teoría cuántica de campos. Esta combinación de una cuantización polimérica y de una de Fock para sectores distintos del sistema en un enfoque *híbrido* es la característica fundamental de la propuesta. Su validez está motivada por el hecho de que cabe esperar que, entre los regímenes puramente clásico y puramente cuántico (para cuya descripción sería necesaria una teoría completa de gravedad cuántica), exista un régimen en el que la naturaleza cuántica de la geometría afecte principalmente a la dinámica del fondo homogéneo, siendo una buena aproximación emplear representaciones de Fock apropiadas para la descripción del resto de grados de libertad del sistema.

El primer paso consiste en construir una descripción canónica del sistema formado por la cosmología homogénea e isótropa (por simplicidad, con secciones espaciales compactas con topología tres-toroidal) y sus perturbaciones empleando un conjunto de variables invariantes de gauge (es decir, invariantes bajo difeomorfismos perturbativos), para así poder distinguir los grados de libertad perturbativos genuinos de aquellos que son meros artefactos gauge [63, 165–170]. Adicionalmente, consideramos un contenido material dado por un campo escalar homogéneo  $\varphi$  sujeto a un cierto potencial  $W(\varphi)$ , que también es perturbado. En ausencia de perturbaciones, el sector homogéneo se encuentra restringido por la ligadura hamiltoniana homogénea  $H_{|0}$ , que contiene una parte puramente gravitacional y una contribución material. Una vez introducidas perturbaciones tanto de la métrica como del inflatón  $\varphi$ , se pueden distinguir componentes *escalares*, *vectoriales* y *tensoriales* de acuerdo con sus propiedades de transformación bajo las simetrías de las secciones espaciales (en el límite no compacto). Dado que el laplaciano espacial correspondiente a la métrica fiducial euclídea respeta las simetrías de las secciones espaciales, es posible descomponer las distintas componentes perturbativas en los modos propios (de Fourier) de dicho operador diferencial, etiquetados por vectores de onda  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 - \{0\}$  (cuya primera componente no nula ha de ser positiva) y por su paridad bajo traslaciones periódicas,  $\epsilon \in \{-, +\}$ . Las perturbaciones escalares quedan entonces descritas por los coeficientes de Fourier asociados al campo escalar, a las partes con y sin traza de la métrica espacial, al lapso y a la parte escalar del vector desplazamiento. De manera similar, las perturbaciones tensoriales quedan descritas por los coeficientes de Fourier generalizados que aparecen en una descomposición de la parte tensorial de la métrica espacial en autotensores del laplaciano. Estos, además de un vector de onda  $\vec{n}$  y una paridad  $\epsilon$ , tienen una etiqueta adicional relacionada con la polarización,  $\tilde{\epsilon} \in \{+, \times\}$ . Con la elección de contenido material considerada, las perturbaciones vectoriales no codifican grados de libertad físico, por lo que centramos la discusión en las escalares y tensoriales de aquí en adelante.

Insertando las expansiones descritas en el párrafo anterior en la acción de Hilbert-Einstein con un campo escalar mínimamente acoplado y truncando el resultado a orden cuadrático en los coeficientes perturbativos (que resulta ser el primer orden no trivial), se puede obtener una formulación hamiltoniana del sistema. Examinando el hamiltoniano resultante, es fácil darse cuenta de que los coeficientes de Fourier (debidamente redefinidos por factores multiplicativos) aparecen de dos formas distin-

tas: o bien aparecen como multiplicadores de Lagrange asociados a ligaduras, o bien forman un conjunto canónico con las variables del sector homogéneo y con momentos canónicamente conjugados a todos ellos. La conclusión que se alcanza es que, al orden de truncamiento perturbativo considerado, el sistema formado por una cosmología homogénea e isótropa con un campo escalar mínimamente acoplado y sus perturbaciones es un sistema completamente ligado que admite una estructura simpléctica canónica [63]. Las ligaduras a las que está sujeto son de dos tipos. Por un lado, están las ligaduras perturbativas, lineales en los coeficientes perturbativos, cuyos multiplicadores de Lagrange asociados son los coeficientes de Fourier (redefinidos) correspondientes a las perturbaciones del lapso y del vector desplazamiento. Por otro lado, se encuentra el modo cero de la ligadura escalar (cuyo multiplicador de Lagrange es el modo cero de la función lapso), compuesto por la ligadura escalar homogénea y dos contribuciones cuadráticas en las perturbaciones escalares y tensoriales, respectivamente. En efecto, el hamiltoniano se puede escribir de la siguiente manera:

$$H = N_0 \left[ H_{|0} + \sum_{\vec{n}, \epsilon} \left( H_{|2}^{\vec{n}, \epsilon} + \sum_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}^T H_{|2}^{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}} \right) \right] + \sum_{\vec{n}, \epsilon} \left( g_{\vec{n}, \epsilon} \tilde{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon} + \sum_{\vec{n}, \epsilon} k_{\vec{n}, \epsilon} \tilde{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon} \right), \quad (2.41)$$

donde  $N_0$ ,  $g_{\vec{n}, \epsilon}$  y  $k_{\vec{n}, \epsilon}$  son los multiplicadores de Lagrange asociados al modo cero de la ligadura escalar y a las dos ligaduras perturbativas lineales  $\tilde{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon}$  y  $\tilde{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon}$ , respectivamente. Además,  $H_{|0}$  es la ligadura escalar correspondiente a una cosmología de FLRW con un campo escalar mínimamente acoplado y  $H_{|2}^{\vec{n}, \epsilon}$  y  ${}^T H_{|2}^{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}$  son las contribuciones cuadráticas en las perturbaciones escalares y tensoriales.

Las variables empleadas para describir los grados de libertad perturbativos en el sector escalar (es decir, los coeficientes de Fourier restantes que no desempeñan el papel de multiplicadores de Lagrange) tienen la desventaja de que no conmutan con las ligaduras perturbativas lineales, incluso cuando el fondo homogéneo se considera fijo. Por tanto, no son invariantes bajo difeomorfismos perturbativos. Para solventar posibles problemas derivados en la identificación del fondo, en el formalismo híbrido se busca emplear variables invariantes de gauge a la hora de describir los grados de libertad perturbativos. A continuación, repasamos brevemente el procedimiento seguido en la LQC híbrida para definir unas variables tales.

En primer lugar, cabe enfatizar que las variables asociadas al sector perturbativo tensorial (que serán designadas<sup>6</sup> por  $\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}$  y  $\pi_{\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}}$ ) ya son invariantes de gauge en el sentido de los potenciales de Bardeen [165]. En el sector escalar, sin embargo, es necesaria una redefinición de las variables, como ya hemos comentado en el párrafo anterior. Para esta redefinición, consideramos fijo el fondo homogéneo, ignorando momentáneamente su dinámica. Mediante una combinación lineal apropiada de los tres coeficientes de Fourier dinámicos asociados a las perturbaciones escalares, se

<sup>6</sup>La notación empleada contiene una tilde que tiene su origen en el hecho de que, desde su definición, las variables perturbativas tensoriales experimentan una serie de transformaciones para asegurar que la dinámica cuántica asociada sea implementable mediante un operador unitario. Lo mismo ocurre en el sector de las perturbaciones escalares (salvo por un reescalado adicional en las variables tensoriales que no tiene lugar en las variables escalares). Nótese el comentario entre paréntesis bajo la Ec. (2.43).

pueden definir las denominadas *variables de Mukhanov-Sasaki*  $v_{\vec{n},\epsilon}$ , que son invariantes de gauge. Dado que conmutan con las ligaduras perturbativas lineales por definición de invariante de gauge, es posible alcanzar un sistema completo de variables compatibles e invariantes *considerando el fondo homogéneo fijo* si se abelianiza el álgebra de las ligaduras perturbativas lineales y se toman las ligaduras resultantes,  $\check{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon}$  y  $\check{H}_{-1}^{\vec{n},\epsilon}$ , como variables. Esto se puede llevar a cabo al orden de truncación considerado reemplazando una de las ligaduras lineales de forma apropiada y redefiniendo el modo-cero de la función lapso. Definiendo entonces momentos apropiados para cada variable, se puede establecer una transformación canónica para las perturbaciones escalares que, en particular, conduce a un conjunto completo de variables canónicas en el sector invariante de gauge [63]. Tras la anterior transformación canónica, las variables de configuración  $V_{q_l}^{\vec{n},\epsilon}$  (con  $l = 1, 2, 3$ ) para las perturbaciones escalares pueden identificarse como las variables de Mukhanov-Sasaki  $v_{\vec{n},\epsilon}$  y los momentos asociados a las ligaduras perturbativas lineales abelianizadas:

$$\{V_{q_l}^{\vec{n},\epsilon}\} = \left\{ v_{\vec{n},\epsilon}, C_{|1}^{\vec{n},\epsilon}, C_{-1}^{\vec{n},\epsilon} \right\} \left( \right. \quad (2.42)$$

Por otro lado, las correspondientes variables de momento  $V_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}$  (con  $l = 1, 2, 3$ ) vienen dadas por el momento asociado a las variables de Mukhanov-Sasaki  $\pi_{v_{\vec{n},\epsilon}}$  (en cuya definición clásica se requiere que la dinámica cuántica sea implementable por un operador unitario para fijar una libertad existente [63]) y las ligaduras perturbativas lineales abelianizadas<sup>7</sup>:

$$\{V_{p_l}^{\vec{n},\epsilon}\} = \left\{ \pi_{v_{\vec{n},\epsilon}}, \check{H}_{|1}^{\vec{n},\epsilon}, \check{H}_{-1}^{\vec{n},\epsilon} \right\} \left( \right. \quad (2.43)$$

El cambio de variables para el sector escalar que acabamos de describir tiene la propiedad notable de que puede ser completado descongelando la dinámica del fondo, dando lugar a una transformación canónica para el sistema completo. Para ello, basta con sustituir las variables perturbativas de partida en el término de Legendre de la acción como funciones de las nuevas. Incluyendo en ese término de Legendre los modos-cero del fondo, la sustitución comentada permite identificar nuevas variables para dichos modos-cero tales que se preserve la forma canónica global, salvo términos de orden superior en el esquema de truncamiento considerado. Las variables de configuración y de momento que se obtienen de este procedimiento para el fondo resultan diferir de las originales en correcciones que son cuadráticas en las variables perturbativas de partida [63, 171, 172].

El último paso para completar el formalismo canónico clásico es reexpresar el modo-cero de la ligadura escalar en las nuevas variables canónicas para el sistema, respetando la truncación a orden cuadrático considerada. El hecho de que los nuevos modos-cero difieran de los originales en términos cuadráticos en las perturbaciones facilita en gran medida esta reexpresión. La ligadura hamiltoniana final resulta tener

---

<sup>7</sup>La consideración de las ligaduras perturbativas como variables de momento y no de configuración facilita su imposición posterior a nivel cuántico.

la misma forma general que la original (2.41):

$$H = \check{N}_0 \left[ H_{|0} + \sum_{\vec{n}, \epsilon} \check{H}_{|2}^{\vec{n}, \epsilon} + \sum_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}^T \check{H}_{|2}^{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}} \right] + \sum_{\vec{n}, \epsilon} \check{g}_{\vec{n}, \epsilon} \check{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon} + \sum_{\vec{n}, \epsilon} \check{k}_{\vec{n}, \epsilon} \check{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon}. \quad (2.44)$$

No obstante,  $\check{N}_0$  contiene correcciones cuadráticas con respecto al modo cero de la función lapso de partida y  $\check{g}_{\vec{n}, \epsilon}$  y  $\check{k}_{\vec{n}, \epsilon}$  difieren de sus contrapartidas originales en términos lineales en las perturbaciones. Adicionalmente,  $H_{|0}$  ha de entenderse como función de las nuevas variables del fondo homogéneo en lugar de de las de partida. Como resultado de dicho reemplazo,  $\check{H}_{|2}^{\vec{n}, \epsilon}$  y  ${}^T \check{H}_{|2}^{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}$  también reciben correcciones cuadráticas. Finalmente, conviene recordar que  $\check{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon}$  y  $\check{H}_{|1}^{\vec{n}, \epsilon}$  son las ligaduras lineales abelianizadas.

Llegado este punto, el sistema clásico está preparado para proceder a su cuantización siguiendo la propuesta híbrida, escogiendo representaciones específicas para los sectores homogéneo e inhomogéneo e imponiendo la ligadura hamiltoniana a nivel cuántico en el producto tensorial de los espacios de representación asociados a cada uno de los sectores. Para evitar solapamientos entre los Preliminares y el resto de la tesis en la medida de lo posible, expondremos el procedimiento seguido para la cuantización del sistema completo en el Capítulo 5, donde consideraremos una representación del sector homogéneo en la que se incorpora la propuesta de regularización alternativa de Dapor y Liegener.

## 5 Agujeros negros cuánticos de lazos: el modelo efectivo de Ashtekar, Olmedo y Singh

En esta sección, introducimos los ingredientes básicos del modelo efectivo propuesto por Ashtekar, Olmedo y Singh (AOS) para la descripción de agujeros negros dentro del marco de la LQC (para más detalles, consúltense los trabajos originales [137–139]). Si bien, a diferencia de los sistemas discutidos en secciones anteriores, este modelo no es de naturaleza cosmológica, se basa en la aplicación de técnicas inspiradas por la LQG que son enteramente análogas a aquellas empleadas en contextos cosmológicos.

El sistema físico bajo consideración es un agujero negro de Schwarzschild (es decir, sin rotación ni carga), en el que, clásicamente, se distinguen dos regiones separadas: una región interior singular (correspondiente a valores de la coordenada  $r$  de Schwarzschild menores que el radio de Schwarzschild del agujero) y una región exterior asintóticamente plana (correspondiente a valores mayores que el radio de Schwarzschild). La primera de estas regiones presenta una característica que no exhibe la región exterior y que supone una diferencia fundamental entre ambas de cara a formular una descripción hamiltoniana estándar del sistema en términos de un espacio de fases de dimensión finita. En efecto, solo la región interior admite una foliación en hipersuperficies espaciales homogéneas. Esto garantiza que los grados de libertad gravitacionales pueden ser capturados en un número finito de pares canónicos, como es el caso de las cosmologías de FLRW y de Bianchi I. De hecho, con una

elección apropiada de variables [103], la región interior es clásicamente isométrica a una cosmología de Kantowski-Sachs [173–175] (para más detalles, véanse el Capítulo 9 y el Apéndice C). En lo que sigue, repasamos principalmente las ideas elementales concernientes a una descripción efectiva de la región interior, siguiendo las Refs. [137–139]. Al final de la sección, incluimos un breve comentario acerca de la extensión del formalismo a la región exterior y de algunas de las propiedades físicas de dicha extensión.

Como comentamos anteriormente, la región interior del espaciotiempo de Schwarzschild puede ser foliada por hipersuperficies de Cauchy homogéneas, con topología  $\mathbb{R} \times S^2$  e invariantes, por tanto, bajo el grupo  $\mathbb{R} \times \text{SO}(3)$ . Se puede demostrar [138] que la dinámica del sistema admite una descripción en términos de las variables de Ashtekar-Barbero definidas de la siguiente manera:

$$A_a^i \tau_i dx^a = \frac{c}{L_o} \tau_3 dx + b \tau_2 d\theta - b \tau_1 \sin\theta d\phi + \tau_3 \cos\theta d\phi, \quad (2.45)$$

$$E_i^a \tau^i \partial_a = p_c \tau_3 \sin\theta \partial_x + \frac{p_b}{L_o} \tau_2 \sin\theta \partial_\theta - \frac{p_b}{L_o} \tau_1 \partial_\phi, \quad (2.46)$$

donde  $L_o$  es la longitud fiducial introducida para evitar divergencias derivadas de la naturaleza no compacta de las secciones espaciales en la dirección radial  $x$  (por tanto, los observables físicos deberán tener un límite bien definido cuando  $L_o \rightarrow \infty$ ), que queda restringida a tomar valores en el intervalo  $I = [0, L_o]$ . Adicionalmente,  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas en la 2-esfera. Dicho esto, es inmediato ver que toda la información dinámica relevante está contenida en cuatro variables canónicas constantes en cada sección espacial (pero no bajo evolución temporal). En efecto, se distinguen dos variables de conexión,  $b$  y  $c$ , y sus dos variables de tríada canónicamente conjugadas,  $p_b$  y  $p_c$ . El par canónico  $(b, p_b)$  codifica los grados de libertad asociados a la dirección radial de las secciones espaciales, mientras que los grados de libertad asociados a las direcciones angulares se encuentra contenida en el par  $(c, p_c)$ <sup>8</sup>. Por consiguiente, el espacio de fases asociado al sistema es de dimensión cuatro. Los corchetes de Poisson no triviales de las variables canónicas resultan ser los siguientes:

$$\{b, p_b\} = -G\gamma, \quad \{c, p_c\} = 2G\gamma. \quad (2.47)$$

En términos de estas variables, el elemento de línea espaciotemporal  $ds^2$  se puede escribir como

$$ds^2 = -N(\tau)^2 d\tau^2 + \frac{p_b^2}{L_o^2 |p_c|} dx^2 + |p_c| d\Omega^2, \quad (2.48)$$

donde  $N(\tau)$  denota la función lapso asociada a una cierta elección de variable temporal  $\tau$  y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es la métrica de la 2-esfera unidad.

Dado que la libertad de gauge queda fijada en el proceso de definición de las variables de Ashtekar-Barbero [138] y las secciones espaciales son homogéneas, la única ligadura no-trivial a la que están sometidas las variables canónicas es la ligadura

<sup>8</sup>Atendiendo a esta diferencia, de aquí en adelante nos referiremos a menudo a los sectores “radial” y “angular” del espacio de fases.

escalar o hamiltoniana. En la Ref. [138], se asume que el resultado de regularizar la ligadura siguiendo procedimientos similares a los descritos en el contexto de la cosmología<sup>9</sup> es el que sigue. Con una elección de función lapso

$$N = \frac{\gamma \delta_b \text{sgn}(p_c) \sqrt{|p_c|}}{\sin \delta_b b} \quad (2.49)$$

asociada a una variable temporal  $t$ , el producto del hamiltoniano efectivo  $H_{\text{eff}}$  y la función lapso viene dado por [137, 138]

$$NH_{\text{eff}} = \frac{L_o}{G}(O_b - O_c), \quad O_b = -\frac{p_b \sin \delta_b b}{2\gamma L_o \delta_b} \left( 1 + \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b} \right) \left( O_c = \frac{p_c \sin \delta_c c}{\gamma L_o \delta_c}, \quad (2.50) \right.$$

donde nos referiremos a  $O_b$  y  $O_c$  como los hamiltonianos parciales radial y angular, respectivamente. En la expresión anterior,  $\delta_b$  y  $\delta_c$  son los parámetros de polimerización que regulan la introducción de efectos cuánticos en el sistema, recuperándose el hamiltoniano clásico en el límite en el que ambos se anulan. Comparando con los espaciotiempos cosmológicos discutidos anteriormente, estos parámetros desempeñan un papel similar al de las longitudes fiduciales mínimas de las aristas de los circuitos de holonomía (véase el Apéndice C para una discusión precisa sobre su relación). Antes de pasar a discutir cómo se fijan dichos parámetros de polimerización, nótese que cada uno de los hamiltonianos parciales,  $O_b$  y  $O_c$ , solo son funciones de las variables canónicas de uno de los sectores del espacio de fases y de uno de los parámetros de polimerización. Por tanto, si los parámetros de polimerización no introducen una dependencia cruzada en dichos sectores,  $O_b$  y  $O_c$  resultan generar la dinámica en los sectores radial y angular, respectivamente. Este es el motivo por la cual emplearemos la nomenclatura de *hamiltonianos parciales* a pesar de que esta interpretación solo sea válida para un subconjunto de las posibles definiciones de dichos parámetros.

Llegados a este punto, es necesario seleccionar una prescripción para fijar los parámetros  $\delta_b$  y  $\delta_c$ . Como en el caso de la cosmología, existen distintas propuestas que se han explorado en la literatura (véase la Ref. [138] para un estudio comparativo). El modelo AOS se distingue de trabajos relacionados que lo preceden, entre otras cosas, por la manera en la que se seleccionan estos parámetros. La idea es, a grandes rasgos, fijar los parámetros de polimerización de tal forma que sean observables de Dirac o, lo que es lo mismo, constantes del movimiento. En otras palabras, no son constantes en todo el espacio de fases pero tampoco son funciones arbitrarias del espacio de fases: son funciones que se mantienen constantes a lo largo de una trayectoria dinámica dada pero que pueden variar y varían de una trayectoria dinámica a otra. Además, los parámetros de polimerización han de anularse en el límite en el que el gap de área  $\Delta$  se hace cero, de acuerdo con su interpretación física. El primero de estos requisitos (es decir, el relacionado con que se mantengan constantes a lo largo de las trayectorias dinámicas) no es trivial, ya que equivale a pedir que los parámetros de polimerización conmuten bajo corchetes de Poisson con la ligadura escalar efectiva

<sup>9</sup>En este caso, las secciones espaciales no son planas y, por tanto, la conexión de espín no se anula idénticamente, lo cual complica ligeramente el cálculo para obtener el hamiltoniano efectivo. Véase el Apéndice C para detalles explícitos acerca del procedimiento de regularización.

(que es el generador de la evolución temporal en el sistema en cuestión), la cual depende a su vez de estos parámetros. Una parte considerable de esta tesis tiene que ver, directa o indirectamente, con entender cómo definir unos parámetros de este modo y cómo obtener mediante un tratamiento hamiltoniano bien fundamentado las ecuaciones dinámicas que gobiernan la evolución temporal del sistema. En la Ref. [138], los autores proceden asumiendo que una definición que satisfice ambas condiciones es posible y, posteriormente, justifican la validez de esta asunción. En esta sección, seguimos una estructura similar.

De acuerdo con el análisis de las Refs. [137, 138], las ecuaciones efectivas a las que están sujetas las variables de conexión y de tríada que describen la dinámica de la región interior de un agujero negro son las siguientes:

$$c' = -2 \frac{\sin \delta_c c}{\delta_c}, \quad (2.51)$$

$$p'_c = 2p_c \cos \delta_c c, \quad (2.52)$$

$$b' = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sin \delta_b b}{\delta_b} + \frac{\gamma^2 \delta_b}{\sin \delta_b b} \right) \left( \quad (2.53)$$

$$p'_b = \frac{1}{2} p_b \cos \delta_b b \left( 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b} \right) \left( \quad (2.54)$$

donde el símbolo ' denota la derivada con respecto a la variable temporal  $t$  asociada a la elección de función lapso recogida en la Ec. (2.49). Las ecuaciones anteriores han sido obtenidas tomando el corchete de Poisson de la variable canónica en cuestión con  $NH_{\text{eff}}$  dado en la Ec. (2.50), tratando los parámetros de polimerización como meras constantes numéricas. Este tratamiento que, aparentemente, es contradictorio con la afirmación de que  $\delta_b$  y  $\delta_c$  se definen como observables de Dirac (con una naturaleza como funciones del espacio de fases que en general no es trivial) es justificado con ayuda de un argumento que involucra una expansión y posterior reducción del espacio de fases (este argumento se analiza críticamente en el Capítulo 9). Las soluciones a estas ecuaciones dinámicas se pueden obtener independientemente para los sectores radial y angular, que están desacoplados dinámicamente. Siguiendo el convenio según el cual  $c \geq 0$ ,  $p_c > 0$ ,  $b \geq 0$  y  $p_b < 0$ , las soluciones efectivas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\tan \frac{\delta_c c(t)}{2} = \frac{\gamma L_o \delta_c}{8m} e^{-2t}, \quad (2.55)$$

$$p_c(t) = 4m^2 \left( e^{2t} + \frac{\gamma^2 L_o^2 \delta_c^2}{64m^2} e^{-2t} \right) \left( \quad (2.56)$$

$$\cos \delta_b b(t) = b_o \tanh \left( \frac{1}{2} b_o t + \tanh^{-1} b_o^{-1} \right) \left( \quad (2.57)$$

$$p_b(t) = -\frac{2\delta_b p_c(t) \sin \delta_c c(t) \sin \delta_b b(t)}{\delta_c \left( \gamma^2 \delta_b^2 + \sin^2 \delta_b b(t) \right)}, \quad (2.58)$$

donde la expresión de la variable de tríada radial  $p_b$  se obtiene de las demás haciendo uso del hecho de que la ligadura escalar ha de anularse sobre soluciones. Adicionalmente,  $m$  es el valor conservado común de los hamiltonianos parciales  $O_b$  y  $O_c$ , que



está relacionado con la masa ADM del agujero bajo consideración [139], y la constante  $b_o$  se define como  $b_o = \sqrt{1 + \gamma^2 \delta_b^2}$ . Los valores de las constantes de integración se fijan requiriendo que el límite clásico  $\delta_b, \delta_c \rightarrow 0$  de estas expresiones coincida con las soluciones clásicas y que el horizonte negro, correspondiente a  $b(t^{\text{BH}}) = 0 = p_b(t^{\text{BH}})$ , se localice en  $t = t^{\text{BH}} = 0$ .

A partir de las soluciones efectivas (2.55)-(2.58), se pueden analizar algunas de las propiedades de la región interior (correspondiente a valores negativos de la variable temporal  $t$ ), como la estructura causal y el comportamiento de los invariantes de curvatura. De especial interés es el estudio del análogo de la singularidad central que aparece en la teoría clásica, correspondiente en el lenguaje de tríadas y conexiones a la región del espacio de fases donde las variables de tríada se anulan y las variables de conexión divergen [véase la métrica espaciotemporal (2.48)]. El espaciotiempo interior efectivo resulta no presentar singularidad alguna: para cualquier trayectoria dinámica, no existe ningún punto en el que estas condiciones se cumplan. De hecho, la variable de tríada angular nunca se anula, ya que está acotada inferiormente por un valor positivo. Su único mínimo local, que es de especial importancia desde el punto de vista físico, se alcanza para un valor de la variable temporal dado por

$$t_{\mathcal{T}} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{8m}{\gamma L_o \delta_c} \right) \quad (2.59)$$

que tiende a menos infinito en el límite clásico, valor para el que se alcanza la singularidad en la teoría clásica. Por tanto, en este sentido, se dice que la hipersuperficie regular  $\mathcal{T}$  reemplaza a la singularidad clásica en la teoría efectiva [137, 138]. Esta hipersuperficie, llamada *superficie de transición*, tiene un significado físico muy interesante, como revela un estudio de la estructura causal del modelo. En efecto, parece servir de 3-superficie frontera entre una región atrapada hacia su pasado (semejante al interior de un agujero negro clásico pero no singular) y una anti-atrapada hacia su futuro (semejante a un agujero blanco clásico pero, de nuevo, no singular) [137, 138]. Por este motivo, se suele decir de manera poco precisa que la introducción de efectos cuánticos cura la singularidad central clásica, que se ve reemplazada por una 3-superficie que media la transición entre el interior de un agujero negro y el de un agujero blanco. Dado que el espaciotiempo clásico queda extendido al aparecer una región anti-atrapada más allá del análogo regular de la singularidad clásica, parece natural preguntarse si existe un horizonte blanco que sirva de frontera futura a la región interior, igual que el horizonte negro en  $t = 0$  hace las veces de frontera pasada. La respuesta resulta ser afirmativa, ya que las variables radiales se anulan para un cierto valor  $t^{\text{WH}} = -4b_o^{-1} \tanh^{-1} b_o^{-1}$ . Además de estas propiedades, las soluciones efectivas presentan otras, como el hecho de que los invariantes de curvatura están acotados superiormente por supremos universales (independientes del valor de la masa del agujero considerado), la concentración de los efectos cuánticos locales en una vecindad de la superficie de transición y la ausencia de amplificación de la masa [138].

Llegados a este punto y antes de pasar a comentar la extensión del modelo a la región exterior, resumamos de forma muy breve el argumento seguido por los autores para definir los parámetros cuánticos (para más detalles, véanse la Sec. IV.A y los

Apéndices A y B de la Ref. [138]). En primer lugar, se requiere que, en la superficie de transición, las áreas físicas encerradas por dos plaquetas rectangulares infinitesimales (una contenida en el plano  $\theta = \pi/2$  de la celda fiducial y la otra, en una 2-esfera cualquiera con un valor de  $x$  constante) sean iguales al gap de área. En este contexto, los parámetros  $\delta_b$  y  $\delta_c$  están relacionados con las longitudes fiduciales de las aristas paralelas a las direcciones angulares y radial. Esto permite encontrar dos ecuaciones que involucran a los parámetros de polimerización y que dependen de una cierta combinación de las soluciones dinámicas evaluadas en la superficie de transición (en las que aparecen, a su vez, los parámetros). Al menos formalmente, debería ser posible resolver este sistema de ecuaciones y obtener expresiones para los parámetros  $\delta_b$  y  $\delta_c$  en términos, esencialmente, de la masa  $m$  (además de las constantes fundamentales que intervienen en la teoría). En la práctica, los autores solo logran determinar los parámetros en el límite de masas grandes (para más detalles, acúdase al Apéndice B de la Ref. [138]), donde obtienen que

$$\delta_b = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2\pi\gamma^2 m}} \right)^{1/3}, \quad \delta_c = \frac{1}{2L_o} \left( \frac{\gamma\Delta^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/3}. \quad (2.60)$$

Estas expresiones cumplen trivialmente la condición de que los parámetros se anulen en el límite en el que el gap de área desaparece. No obstante, tal y como están escritos, los parámetros son simplemente funciones de una constante numérica  $m$  que coincide con el valor sobre soluciones de dos constantes de movimiento del modelo. Para justificar la compatibilidad del tratamiento de estos parámetros como constantes ordinarias con la afirmación de que se fijan como observables de Dirac, los autores de la Ref. [138] presentan un argumento en el Apéndice A de dicha referencia que estudiaremos en detalle en el Capítulo 9 de esta tesis.

Finalmente, mencionemos cómo se extiende el modelo efectivo presentado en esta sección a la región exterior, que no puede ser foliada por hipersuperficies de Cauchy homogéneas. La observación clave que permite dicha extensión es que la región exterior del espaciotiempo de Schwarzschild sí que admite una foliación en hipersuperficies homogéneas *temporales* (más concretamente, aquellas definidas por un valor constante de la coordenada  $r$  de Schwarzschild). Esto posibilita formular una descripción hamiltoniana con un espacio de fases de dimensión finita pero fundamentalmente no estándar, en el sentido de que el hamiltoniano sería el generador de una “evolución radial” en lugar de la evolución temporal habitual. En cada hipersuperficie temporal, los grados de libertad gravitacionales se pueden capturar en variables de tipo Ashtekar-Barbero con la particularidad de que el grupo gauge asociado es  $SU(1,1)$  en lugar de  $SU(2)$ . Un análisis cuidadoso [138] permite darse cuenta de que las expresiones correspondientes a la región exterior se pueden alcanzar a partir de sus análogos interiores mediante los reemplazos

$$b \rightarrow \tilde{\mathbf{i}}\tilde{b}, \quad p_b \rightarrow \tilde{\mathbf{i}}\tilde{p}_b, \quad c \rightarrow \tilde{c}, \quad p_c \rightarrow \tilde{p}_c, \quad (2.61)$$

donde  $(\tilde{b}, \tilde{p}_b)$  y  $(\tilde{c}, \tilde{p}_c)$  son los pares canónicos que describen la dinámica exterior e  $\mathbf{i}$  es la unidad imaginaria. Nótese que la aparición de la unidad imaginaria multiplicando

a las variables radiales interiores está relacionada con el hecho de que, al atravesar el horizonte, la coordenada radial se vuelve temporal y vice-versa. Con este esquema de correspondencias, se pueden obtener los corchetes de Poisson canónicos, la expresión de la ligadura hamiltoniana efectiva  $\tilde{N}\tilde{H}_{\text{eff}} = L_o(\tilde{O}_b - \tilde{O}_c)/G$ , las ecuaciones dinámicas efectivas y sus soluciones. Además, se demuestra que las métricas efectivas interior y exterior se pueden unir de tal forma que la geometría a través del horizonte sea al menos dos veces derivable con derivada continua. Dado que una solución exterior como la que se describe se puede unir a la geometría interior tanto en el horizonte negro como en el blanco (con una fijación apropiada de las constantes de integración), el modelo efectivo resulta en una extensión del espaciotiempo de Kruskal tal que la geometría es regular en todos sus puntos, con las características que hemos venido enumerando y sobre las que se puede leer en más detalle en las Refs. [137–139]. Para terminar, cabe mencionar que en la Ref. [139] también se discuten los efectos de la introducción de efectos cuánticos tanto en la temperatura de Hawking como en el comportamiento asintótico en el infinito espacial (véase la Ref. [144] para una visión complementaria respecto a este último punto).

# Parte I

## Cosmología

# Capítulo 3

## Regularización alternativa en cosmologías homogéneas e isótropas: la prescripción MMO

En este capítulo construimos un nuevo formalismo de la LQC basado en la ligadura hamiltoniana que resulta de la prescripción de regularización propuesta por Dapor y Liegener, adoptando para su implementación cuántica, en lugar de la prescripción presentada en la Ref. [44], aquella propuesta por Martín-Benito, Mena Marugán y Olmedo en la Ref. [45], que recibe el nombre MMO por las siglas de sus tres autores. La prescripción MMO se caracteriza por incorporar en la LQC homogénea e isótropa una simetrización que está inspirada por la consideración de cosmologías de Bianchi I y que involucra un tratamiento especial de los signos de las componentes de la tríada. En el contexto de la LQC estándar, esta simetrización conduce a una teoría cuántica con características atractivas. En primer lugar, el análogo cuántico de la singularidad clásica se desacopla a nivel cinemático sin necesidad de imponer condiciones adicionales. Asimismo, la teoría resultante exhibe sectores de superselección que son significativamente más simples que aquellos que resultan de adoptar otras prescripciones. Gracias a ello, es posible obtener una expresión cerrada para las autofunciones generalizadas del operador hamiltoniano en la LQC estándar, cuya expresión resulta ser notablemente eficiente desde el punto de vista computacional, permitiendo construir las autofunciones más rápidamente y de manera más precisa. Todas estas características son consideradas puntos fuertes de la prescripción MMO. Teniendo en cuenta este contexto, parece interesante verificar si dichas características persisten cuando la prescripción MMO se adopta para la implementación cuántica del hamiltoniano modificado, en lugar de para la del estándar. Este es precisamente el objetivo de este capítulo, que recoge los resultados publicados por primera vez en la Ref. [176].

El resto de este capítulo está estructurado como sigue. En la Sec. 1, procedemos a la regularización de la parte lorentziana asociada a cosmologías de Bianchi I, expresándola en términos de holonomías. Basándonos en este cálculo, identificamos una cierta estructura de signos en cada uno de los términos del hamiltoniano modificado, introduciendo en concordancia una propuesta de simetrización natural. Entonces,

consideramos la situación límite de un régimen isótropo para obtener la versión regularizada de la parte lorentziana de la ligadura hamiltoniana de espaciotiempos de FLRW, respetando la estructura de signos identificada previamente. En la Sec. 2, discutimos detalladamente la promoción del hamiltoniano alternativo a operador sobre el espacio de Hilbert cinemático del sistema siguiendo la prescripción MMO. A continuación, calculamos la acción del operador resultante en la base de autoestados del volumen. En la Sec. 3 determinamos los sectores de superselección preservados por esta acción. Finalmente, en la Sec. 4 consideramos autoestados generalizados del operador hamiltoniano alternativo y discutimos su degeneración, obteniendo una expresión cerrada que permite reconstruir cualquier autofunción a partir de su valor en dos autovalores del volumen. Concluimos con un resumen de los resultados principales del capítulo en la Sec. 5.

## 1 La ligadura hamiltoniana completa

En esta sección, discutimos la regularización de la parte lorentziana de la ligadura hamiltoniana (2.23). Tal regularización nos permitirá construir la ligadura hamiltoniana gravitacional completa, combinando la expresión resultante con la parte euclídea introducida en el Capítulo 1 (véase, concretamente, la Sec. 3 de dicho capítulo). Para ello, empezamos discutiendo la regularización de la parte lorentziana del hamiltoniano asociado a una cosmología de Bianchi I, obteniendo posteriormente el resultado análogo en cosmologías de FLRW tomando el límite isótropo que resulta de identificar todas las direcciones espaciales. La ventaja de este procedimiento frente al cálculo directo en el caso isótropo es que, de esta manera, resulta más natural introducir una prescripción de cuantización que respete la relación clásica entre los dos sistemas cosmológicos mencionados. La ligadura regularizada asociada al caso isótropo será cuantizada de acuerdo con la prescripción MMO en la Sec. 2.

### 1.1 La parte lorentziana en cosmologías de Bianchi I

La regularización de la parte lorentziana (2.23) empleada para definir la ligadura hamiltoniana modificada está basada en la identidad clásica [79]

$$K_a^i = \frac{1}{8\pi G\gamma^3} \{A_a^i, \{H_E, V\}\}, \quad (3.1)$$

que permite reescribir la curvatura extrínseca triádica  $K_a^i$  en términos de los elementos de holonomía sin explotar las simetrías del sistema bajo consideración, a diferencia del método empleado en el esquema de regularización estándar. Esta expresión involucra el cálculo del corchete de Poisson de la parte euclídea de la ligadura  $H_E$  con el volumen  $V$ . Tomando las expresiones correspondientes a las cosmologías de Bianchi I introducidas en los Preliminares [véanse las Ecs. (2.4) y (2.28)], se obtiene

$$\{H_E^{\text{BI}}, V\} = 4\pi G\gamma \sum_i \left( \text{sgn}(p_i) \sqrt{\left| \frac{p_j p_k}{p_i} \frac{\partial H_E^{\text{BI}}}{\partial c^i} \right|} = \frac{\gamma}{2} \sum_i p_i \frac{\sin \bar{x}_i}{\bar{\mu}_i} \sum_{j \neq i} \left( \cos \bar{x}_j, \quad (3.2) \right.$$

con  $\bar{x}_i = \bar{\mu}_i c^i$  e  $i \neq j \neq k$ . Con estas ecuaciones, es inmediato alcanzar la siguiente expresión regularizada para la curvatura extrínseca triádica correspondiente a cosmologías de Bianchi I:

$${}^{(\text{BI})}K_a^i = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\sin \bar{x}_i}{\bar{\mu}_i} \sum_{j \neq i} \cos \bar{x}_j \Big) \delta_a^i. \quad (3.3)$$

En el caso de estas cosmologías de Bianchi I, la parte lorentziana del hamiltoniano (2.23) puede ser escrita como

$$H_L^{\text{BI}} = -\frac{1+\gamma^2}{2G} \frac{\pi}{V} \sum_{i,j} p_i p_j {}^{(\text{BI})}K_{[i}^i {}^{(\text{BI})}K_{j]}^j. \quad (3.4)$$

Introduciendo en esta fórmula la expresión regularizada de  ${}^{(\text{BI})}K_a^i$ , resulta que la parte lorentziana viene dada por

$$H_L^{\text{BI}} = -\frac{1}{64\pi G} \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \frac{1}{V} \sum_i p_i \left( \frac{\sin^2 \bar{x}_i}{\bar{\mu}_i} \sum_{j \neq i} p_j \left( \frac{\sin^2 \bar{x}_j}{\bar{\mu}_j} \sum_{k \neq i} \cos^2 \bar{x}_k \sum_{l \neq j} \left( \cos^2 \bar{x}_l \right. \right. \right) \quad (3.5)$$

Por último, combinando el resultado anterior con la parte euclídea regularizada (2.28), se llega a la siguiente expresión para la ligadura hamiltoniana gravitacional *completa*, regularizada de acuerdo con el esquema de Dapor y Liegener:

$$H_{\text{gr}}^{\text{BI}}(N) = \frac{N}{16\pi G V} \sum_i p_i \left( \frac{\sin \bar{\mu}_i c^i}{\bar{\mu}_i} \sum_{j \neq i} p_j \left( \frac{\sin \bar{\mu}_j c^j}{\bar{\mu}_j} \right. \right. \\ \times \left. \left. 1 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \sum_{k \neq i} \cos \bar{\mu}_k c^k \sum_{l \neq j} \cos \bar{\mu}_l c^l \right) \right). \quad (3.6)$$

Cabe enfatizar que la ligadura hamiltoniana presenta una estructura de signos de la forma

$$\sum_{N=1,2} \left[ \sum_i \left( \text{sgn}(p_i) F_i^{(N)}(|p|, c) - \sum_{j \neq i} \left( \text{sgn}(p_j) F_j^{(N)}(|p|, c) \right) \right) \right], \quad (3.7)$$

donde, para cada valor del índice  $i$  y de la etiqueta  $N = 1, 2$ , las funciones  $F_i^{(N)}(|p|, c)$  solo dependen de las tres variables de conexión  $c^l$  y de la norma de las variables de tríada  $p_l$  (con  $l = \theta, \sigma, \delta$ ), pero *no* de los signos de  $p_l$ . Dado que los signos de las variables de tríada no conmutan en general con las variables de conexión, el proceso de cuantización deberá incorporar una cierta prescripción para ordenar los productos de estas variables. En lo que sigue, consideraremos una prescripción de orden de factores *simétrica*, que será adoptada también en el caso de los modelos cosmológicos de FLRW<sup>10</sup> (que son vistos como un caso especial en el que todas las direcciones

<sup>10</sup>Si no se considerase esta motivación proveniente del análisis del caso anisótropo, uno estaría tentado de reorganizar los términos de tal modo que se obtuviesen factores cuadráticos en los signos, que serían iguales a la unidad en el caso isótropo. Tal elección conduce a una teoría cuántica [43, 44] con propiedades que no son tan atractivas como las de la resultante de la prescripción MMO.

espaciales presentan un comportamiento idéntico). Esta elección de simetrización y su conservación en el contexto de las cosmologías de FLRW es el núcleo principal de la prescripción MMO.

## 1.2 La parte lorentziana en espaciotiempos de FLRW

Tomando  $c_i = c$ ,  $p_i = p$  y  $\bar{\mu}_i = \bar{\mu}$  para todas las direcciones espaciales  $i$  (del mismo modo que en la Sec. 3 de los Preliminares), se obtiene el siguiente resultado para la ligadura hamiltoniana completa en cosmologías de FLRW:

$$H_{\text{gr}}(N) = -\frac{3N}{8\pi GV} \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \right) \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \right) \left( \begin{array}{l} \times \left[ 1 - \frac{1 + \gamma^2}{4\gamma^2} (2\cos \bar{\mu} c)(2\cos \bar{\mu} c) \right] \left( \end{array} \right. \quad (3.8)$$

donde se ha mantenido explícitamente la estructura de signos presente en el caso anisótropo, de acuerdo con el último párrafo de la sección anterior. Esta expresión se puede reescribir como una diferencia de cuadrados de forma trivial, lo que resulta en

$$H_{\text{gr}} = -\frac{3N}{8\pi GV} \left[ \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \right) \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \right) \left( \begin{array}{l} - \frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2} \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin 2\bar{\mu} c}{2\bar{\mu}} \right) \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin 2\bar{\mu} c}{2\bar{\mu}} \right) \right] \left( \end{array} \right. \quad (3.9)$$

donde, recordemos,  $\bar{\mu} = \sqrt{\Delta/|p|}$ . Cabe notar que, para valores pequeños de  $\bar{\mu}$ , este hamiltoniano coincide a primer orden con el obtenido siguiendo la propuesta de regularización de la LQC estándar. En efecto, si  $\bar{\mu} c \ll 1$ ,

$$H_{\text{gr}} \approx -\frac{3N}{8\pi G\gamma^2 V} \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \right) \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \right) \left( \begin{array}{l} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Además, como cabe esperar, en el límite clásico  $\bar{\mu} \rightarrow 0$  (en el que el gap de área se anula), se recupera la ligadura hamiltoniana asociada a cosmologías homogéneas e isotropas en la relatividad general,

$$H_{\text{gr}} = -\frac{3N}{8\pi G\gamma^2} c^2 \sqrt{|p|}. \quad (3.11)$$

Por consiguiente, parece razonable esperar recuperar las características y resultados de la cosmología estándar y de la LQC efectiva en el límite de longitudes coordenadas mínimas pequeñas.

Aunque estas observaciones parezcan sugerir que la inclusión de la parte lorentziana se puede entender como una corrección de orden superior al formalismo estándar que no introduce cambio cualitativo alguno, esta conclusión no es del todo correcta. En efecto, en la Sec. 2 mostraremos que el número de autosoluciones de la ligadura modificada parece doblar el de las del hamiltoniano estándar de la LQC.



## 2 La ligadura hamiltoniana cuántica

En la teoría cuántica, la ligadura hamiltoniana gravitacional (3.8) ha de ser representada por un operador sobre el espacio de Hilbert cinemático del sistema, descrito en la Sec. 3 de los Preliminares. En esta sección, llevamos a cabo el proceso de cuantización de la ligadura hamiltoniana completa de acuerdo con la prescripción MMO, cuyos elementos esenciales resumimos a continuación. Una vez obtenido el operador correspondiente, calculamos su acción sobre la base de autoestados del volumen.

### 2.1 La prescripción de cuantización MMO

En la prescripción MMO, se explota la ambigüedad en la selección de orden de factores que surge en la representación cuántica de las ligaduras (que, en general, contienen productos de cantidades que no conmutan clásicamente bajo corchetes de Poisson) para elegir una prescripción simétrica que desacople ya a nivel cinemático el análogo cuántico de la singularidad (i.e. el autoestado del volumen asociado al autovalor nulo,  $|v = 0\rangle$ ). Esto permite, a efectos prácticos, retirar este autovalor del espectro del operador que representa el inverso del volumen. Como ya hemos comentado anteriormente, esta prescripción de simetrización está inspirada en el análisis previo de las cosmologías de Bianchi I dentro del marco de la LQC [54, 55], donde la orientación de la tríada densitizada (o, más concretamente, los signos de sus distintas componentes) desempeña un papel de gran relevancia. Dado que, en ausencia de isotropía, existen tres direcciones espaciales inequivalentes, el producto de dos de estos signos no es necesariamente igual a la unidad. Por consiguiente, si se desea conservar a nivel cuántico la relación clásica existente entre las cosmologías de FLRW y de Bianchi I, esta cuestión debe ser tenida en cuenta también en la representación cuántica de la ligadura escalar asociada a cosmologías isótropas. De otro modo, la teoría cuántica asociada a sistemas cosmológicos de Bianchi I no podría entenderse como la generalización anisótropa inmediata de la teoría cuántica correspondiente a espaciotiempos de FLRW.

De forma condensada, la prescripción MMO se basa en dos reglas principales para resolver la ambigüedad en el orden de factores adoptado en la teoría cuántica:

- i) Al cuantizar, los productos de potencias de  $\widehat{|p|}$  y  $1/\sqrt{\widehat{|p|}}$  (que son definidos positivos una vez se ha desacoplado el autoestado de volumen cero) con holonomías y signos de la variable de tríada se ordenan, en primer lugar, adoptando una simetrización algebraica de los operadores clásicamente relacionados con  $|p|$ .
- ii) Los términos restantes que involucran el signo de la variable de tríada y los elementos de matriz de las holonomías fundamentales se simetrizan de la siguiente manera:

$$\sin n\bar{\mu}c \operatorname{sgn}(p) \longrightarrow \frac{1}{2} \left[ \widehat{\sin n\bar{\mu}c \operatorname{sgn}(p)} + \widehat{\operatorname{sgn}(p) \sin n\bar{\mu}c} \right], \quad (3.12)$$

donde  $n$  es un número entero y

$$\widehat{\sin n\bar{\mu}c} = \frac{1}{2i} \left( \hat{\mathcal{N}}_{2n\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-2n\bar{\mu}} \right) \quad (3.13)$$

Comencemos introduciendo la notación

$$\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}} = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \left[ \frac{\widehat{1}}{\sqrt{|p|}} \right]^{-1/2} \widehat{\sqrt{|p|}} \left[ (\hat{\mathcal{N}}_{n\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-n\bar{\mu}}) \widehat{\text{sgn}(p)} + \widehat{\text{sgn}(p)} (\hat{\mathcal{N}}_{n\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-n\bar{\mu}}) \right] \widehat{\sqrt{|p|}} \left[ \left( \frac{\widehat{1}}{\sqrt{|p|}} \right)^{-1/2} \right], \quad (3.14)$$

para cualquier etiqueta entera  $n$ . De acuerdo con las reglas de simetrización de la prescripción MMO introducidas anteriormente y teniendo en cuenta que  $\bar{\mu} = \sqrt{\Delta/|p|}$ , es inmediato ver que

$$|p| \text{sgn}(p) \frac{\sin \bar{\mu} c}{\bar{\mu}} \longrightarrow \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}. \quad (3.15)$$

Por consiguiente, la parte euclídea de la ligadura hamiltoniana viene representada por el operador

$$\hat{H}_E = \frac{3}{8\pi G} \left[ \frac{\widehat{1}}{V} \right]^{1/2} \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^2 \left[ \frac{\widehat{1}}{V} \right]^{1/2}. \quad (3.16)$$

En la expresión anterior,

$$\frac{\widehat{1}}{V} \left( \left[ \frac{\widehat{1}}{\sqrt{|p|}} \right] \right)^3 \quad (3.17)$$

es el operador inverso de volumen, donde<sup>11</sup>

$$\frac{\widehat{1}}{\sqrt{|p|}} = \frac{3}{4\pi G \gamma \sqrt{\Delta}} \widehat{\text{sgn}(p)} \widehat{\sqrt{|p|}} \left( \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \widehat{\sqrt{|p|}} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}} \widehat{\sqrt{|p|}} \hat{\mathcal{N}}_{-\bar{\mu}} \right) \quad (3.18)$$

es autoadjunto y  $\widehat{\sqrt{|p|}}$  se define a partir de la acción del operador  $\hat{p}$  sobre la base de autoestados del volumen (2.37) en el sentido del teorema espectral [4, 12].

Como se puede ver comparando directamente los dos términos de la Ec. (3.9), la parte lorentziana tiene una estructura muy similar a la de la contribución euclídea. En efecto, salvo factores multiplicativos irrelevantes, la primera se puede obtener a partir de la segunda mediante el reemplazo  $\bar{\mu} \rightarrow 2\bar{\mu}$ . Por lo tanto, ambas contribuciones serán representadas por operadores cuánticos simétricos que presentan la misma estructura. De hecho, es inmediato darse cuenta de que la parte lorentziana de la ligadura escalar se puede representar mediante el operador

$$\hat{H}_L = -\frac{3}{8\pi G} \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \left[ \frac{\widehat{1}}{V} \right]^{1/2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 \left[ \frac{\widehat{1}}{V} \right]^{1/2}. \quad (3.19)$$

<sup>11</sup>Esta definición se basa en una identidad de Thiemann clásica que permite reexpresar  $1/\sqrt{|p|}$  en términos de los corchetes de Poisson de ciertas holonomías con  $\sqrt{|p|}$ . Para más detalles, véase, e.g., la Ref. [40].

En conclusión, el operador hamiltoniano regularizado de acuerdo con la propuesta de Dapor y Liegener y cuantizado adoptando la prescripción MMO resulta venir dado por

$$\hat{H}_{\text{gr}}(N) = \frac{3N}{8\pi G} \left[ \frac{\hat{1}}{V} \right]^{1/2} \left( \hat{\mathcal{L}}_{2\bar{\mu}}^2 - \frac{1 + \gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 \right) \left[ \frac{\hat{1}}{V} \right]^{1/2}. \quad (3.20)$$

## 2.2 Acción sobre la base de autoestados del volumen

Dado que, con la prescripción de simetrización adoptada, aparecen potencias del operador inverso de volumen tanto a la izquierda como a la derecha del operador de ligadura [véase la Ec. (3.20)], este operador —o, más precisamente, una potencia del operador  $1/\sqrt{|p|}$ , en términos del cual se define a su vez el operador inverso de volumen (3.17)— es el primero y el último en actuar sobre un cierto estado cuando se calcula la acción del operador hamiltoniano sobre él. De las definiciones de  $\sqrt{|p|}$  y  $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\mu}}^*$ , se obtiene la siguiente acción:

$$\frac{\hat{1}}{\sqrt{|p|}} |v\rangle = \frac{3}{2(2\pi G\gamma\sqrt{\Delta})^{1/3}} |v|^{1/3} |v+1|^{1/3} - |v-1|^{1/3} |v\rangle. \quad (3.21)$$

Se observa inmediatamente que el operador inverso de volumen aniquila al estado de volumen nulo  $|v=0\rangle$ . Además, los elementos de la base de autoestados del volumen resultan ser autoestados de este operador, por lo que su acción deja invariante el complemento ortogonal del estado singular  $|v=0\rangle$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$ . El hecho de que la ligadura hamiltoniana contenga potencias del operador inverso de volumen a su izquierda y a su derecha implica que la restricción del operador de ligadura a  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$  está bien definida. Como resultado, el estado singular se ve desacoplado y podemos restringir nuestra atención a su complemento ortogonal<sup>12</sup> para estudiar las soluciones no triviales a la dinámica cuántica. En este sentido, el análogo cuántico de la singularidad clásica queda eliminado del espacio de Hilbert del sistema, por lo que se soluciona la singularidad a nivel cinemático<sup>13</sup>.

Una vez se ha eliminado el kernel del operador inverso de volumen, es posible introducir un operador hamiltoniano densitizado [45], que denominaremos  $\mathcal{H}_{\text{gr}}$ . Dado que, en general, los estados físicos (i.e., aquellos aniquilados por el operador de ligadura) no son normalizables en el espacio de Hilbert cinemático, parece natural considerar un espacio más grande. En particular, siguiendo la Ref. [45], tomamos el dual algebraico de  $\widetilde{\text{Cyl}}_{\text{S}}$ , donde es posible establecer una relación uno a uno entre un estado  $\langle\phi|$  aniquilado por el adjunto de  $\hat{H}_{\text{gr}}$  y el estado  $\langle\phi| = \langle\phi| [\hat{1}/V]^{1/2}$  aniquilado por el adjunto de la versión densitizada del operador de ligadura (véase el comentario

<sup>12</sup>Nótese que  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$  no es sino el resultado de completar  $\widetilde{\text{Cyl}}_{\text{S}} = \text{span}\{|v\rangle, v \neq 0\}$  con respecto a la norma discreta.

<sup>13</sup> Esta afirmación es precisa siempre y cuando se asuma que no se ve alterada por la inclusión de una contribución material a la ligadura escalar.

en el pie de página 13)

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{gr}}(N) = \frac{3N}{8\pi G} \left( \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 \right) \left( \quad \right) \quad (3.22)$$

De aquí en adelante, cada vez que mencionemos la ligadura hamiltoniana del sistema, nos referiremos siempre a esta versión densitizada.

De acuerdo con la expresión anterior, el cómputo de la acción del operador de ligadura sobre los autoestados del volumen equivale al cálculo de la acción de los operadores  $\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}^2$  para  $n = 2, 4$ . Para ello, es útil definir las funciones

$$g(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = 0, \\ 1 + \frac{1}{v} - 1 - \frac{1}{v} & \text{si } v \neq 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$s_{\pm}^{(n)} = \text{sgn}(v) + \text{sgn}(v \pm n), \quad (3.24)$$

$$f_{\pm}^{(n)}(v) = \frac{\pi G \gamma}{3} g(v) s_{\pm}^{(n)}(v) g(v \pm n). \quad (3.25)$$

En términos de estas funciones, la acción de  $\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}^2$  en la base de autoestados del volumen de  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$  se puede escribir de la siguiente forma compacta:

$$\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}^2 |v\rangle = -\mathbf{i} \left[ f_{+}^{(n)}(v) |v+n\rangle - f_{-}^{(n)}(v) |v-n\rangle \right] \left( \quad \right) \quad (3.26)$$

La acción de  $\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}^2$  viene dada, entonces, por

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}^2 |v\rangle = & -f_{+}^{(n)}(v) f_{+}^{(n)}(v+n) |v+2n\rangle + \left\{ \left[ f_{+}^{(n)}(v) \right]^2 + \left[ f_{-}^{(n)}(v) \right]^2 \right\} |v\rangle \\ & - f_{-}^{(n)}(v) f_{-}^{(n)}(v-n) |v-2n\rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En particular, cabe destacar lo siguiente. Por un lado, la acción de la parte euclídea del operador de ligadura sobre un cierto autoestado del volumen, o bien deja invariante la etiqueta de dicho estado, o bien produce desplazamientos de más o menos cuatro unidades en ella. La conclusión en lo referente a la contribución lorentziana es la misma, reemplazando los saltos de cuatro unidades en valor absoluto por desplazamientos de más o menos ocho unidades. Dado el carácter discreto de la representación del volumen, la acción del operador de ligadura hamiltoniana sobre un cierto estado  $|v\rangle$  conduce entonces a una ecuación en diferencias finitas que involucra un total de cinco estados, a saber,  $|v-8\rangle$ ,  $|v-4\rangle$ ,  $|v\rangle$ ,  $|v+4\rangle$  y  $|v+8\rangle$ .

### 3 Sectores de superselección

En la LQC isotropa estándar con las prescripciones de la Ref. [44], la ligadura escalar gravitacional deja invariante el espacio de Hilbert con soporte en redes discretas de paso cuatro. Además, estas redes resultan ser sectores de superselección ya

que las acciones de la ligadura hamiltoniana total, que incluye un término material (típicamente el asociado a un campo escalar), y de los observables físicos relevantes las dejan invariantes también [42–44, 177–179]. En cambio, los sectores de superselección que resultan de adoptar la prescripción MMO son aún más sencillos: gracias a la elección especial de orden de factores en la simetrización de la ligadura, las semirredes positiva y negativa se desacoplan bajo la acción del operador hamiltoniano [45]. Como consecuencia, los sectores de superselección derivados vienen dados por los espacios de Hilbert con soporte en *semirredes* de paso cuatro, en lugar de redes completas. Esta simplicidad adicional de los sectores de superselección a los que conduce la prescripción MMO se considera ventajosa con respecto a otras prescripciones de cuantización. En esta sección, analizamos si esta propiedad sigue presente incluso cuando la contribución lorentziana se trata independientemente en el proceso de regularización de la ligadura escalar.

Ya que el operador que representa cuánticamente la contribución lorentziana a la ligadura escalar posee la misma estructura que su contrapartida euclídea salvo por que produce desplazamientos el doble de grandes, su introducción claramente no afecta al hecho de que los espacios de Hilbert con soporte en redes de paso cuatro son conservados. Por tanto, como mínimo, los sectores de superselección resultantes de adoptar la propuesta de regularización de Dapor y Liegener no serán más complicados que los obtenidos en la LQC isótropa estándar con las prescripciones de la Ref. [44]. En realidad, es fácil ver que resultan ser más simples una vez más, debido a las siguientes propiedades excepcionales de los coeficientes  $f_{\pm}^{(n)}(v)f_{\pm}^{(n)}(v \pm n)$ . Dada la definición de  $f_{\pm}^{(n)}(v)$  [véase la Ec. (3.25)], es fácil convencerse de que poseen las características

$$f_{+}^{(n)}(v)f_{+}^{(n)}(v+n) = 0 \quad \forall v \in [-2n, 0), \quad (3.28)$$

$$f_{-}^{(n)}(v)f_{-}^{(n)}(v-n) = 0 \quad \forall v \in (0, 2n]. \quad (3.29)$$

Estas identidades garantizan que las redes se separan en realidad en dos semirredes invariantes bajo la acción del operador de ligadura escalar (3.22): los autoestados asociados a autovalores positivos y aquellos correspondientes a autovalores negativos nunca se relacionan por la acción de la ligadura completa. Por consiguiente, los sectores de superselección, como en el caso de la LQC estándar con la prescripción MMO, resultan venir dados por los espacios de Hilbert con soporte en las semirredes correspondientes a autovalores, o bien positivos, o bien negativos. De manera más precisa, los sectores de superselección  $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{\pm}$  son la completación de Cauchy con respecto a la norma discreta de  $\text{Cyl}_{\varepsilon}^{\pm} = \text{span}\{|v\rangle, v \in \mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm}\}$ , donde  $\mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm}$  denota las semirredes de paso cuatro definidas como

$$\mathcal{L}_{\varepsilon}^{\pm} = \{v = \pm(\varepsilon + 4n), \varepsilon \in (0, 4], n \in \mathbb{N}\}. \quad (3.30)$$

El hecho de que estos espacios de Hilbert tengan soporte en estas semirredes es una consecuencia inmediata de las propiedades (3.28) y (3.29), que a su vez derivan de la combinación notable de signos dictada por el esquema de simetrización empleado en la representación de la ligadura hamiltoniana completa. Por tanto, podemos concluir

que el tratamiento especial de la orientación de la tríada densitizada, que es una característica fundamental de la prescripción MMO inspirada en la consideración de cosmologías anisótropas, conduce en última instancia a la obtención de unos sectores de superselección más sencillos incluso que los obtenidos en la LQC estándar con otras prescripciones de orden de factores, como la de la Ref. [44]. Esto es, una vez más, prueba de la potencia del esquema de simetrización adoptado y de la ventaja que supone frente a la consideración de otras alternativas.

## 4 Autofunciones generalizadas

En el enfoque estándar de la LQC, se ha encontrado que la ligadura hamiltoniana cuántica generalmente admite extensiones autoadjuntas con un espectro continuo no vacío [45, 178]. En el contexto del esquema de regularización alternativo, los autores de la Ref. [91] mostraron que la ligadura hamiltoniana (3.22) admite una familia de extensiones autoadjuntas. Asumiendo que también posee un espectro continuo no vacío, nos centramos en dicha parte de su espectro y, en esta sección, estudiamos sus autofunciones generalizadas. Empleamos la siguiente notación para los autoestados generalizados:

$$|e_\lambda^\varepsilon\rangle = \sum \left( e_\lambda^\varepsilon(v) |v\rangle \right), \quad \left( \left( \hat{\Phi}_{2\bar{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 \right) \right) \left( e_\lambda^\varepsilon \right) = \lambda |e_\lambda^\varepsilon\rangle, \quad (3.31)$$

donde  $e_\lambda^\varepsilon(v)$  es, por tanto, la autofunción generalizada asociada al autovalor generalizado  $3N\lambda/8\pi G$  de la ligadura escalar cuántica. En la expresión anterior, la suma ha de llevarse a cabo sobre  $v \in \mathcal{L}_\varepsilon^\pm$  para un cierto valor fijo de  $\varepsilon$ . Consideremos, por ejemplo, el sector de superselección  $\mathcal{H}_\varepsilon^+$  correspondiente a la semirred  $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ .

Calculando el producto interno de  $\langle v|$  con ambos lados de la segunda igualdad en la ecuación anterior, típicamente se obtiene una expresión que relaciona los valores de la autofunción generalizada en cinco puntos de la semirred. Notablemente, si se considera el punto más cercano al origen (i.e.,  $v = \varepsilon$ ), la relación en cuestión involucra solo el valor de la autofunción en tres puntos de la semirred:  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon + 4$  y  $\varepsilon + 8$ . La razón detrás de esta peculiaridad es que los coeficientes que acompañan a las contribuciones de los otros dos puntos que deberían a priori intervenir ( $\varepsilon - 4$  y  $\varepsilon - 8$ ), que pertenecen a la semirred negativa, resultan anularse idénticamente, como ya discutimos en la sección anterior. Por tanto, fijando la autofunción generalizada en los dos primeros puntos de la semirred bajo consideración,  $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon)$  y  $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 4)$ , su valor en el tercer punto queda inmediatamente fijado por el requisito de que  $|e_\lambda^\varepsilon\rangle$  sea un autoestado generalizado del operador de ligadura hamiltoniana. Si trasladamos este argumento al siguiente punto en la semirred ( $v = \varepsilon + 4$ ), la relación resultante de proyectar la acción de la ligadura sobre  $|v\rangle$  pasa a involucrar el valor de la autofunción generalizada en cuatro puntos de la semirred (ya que ahora solo una de las contribuciones se anula), de los cuales tres ya están determinados, por lo cual el cuarto queda fijado también. Este argumento se puede repetir recursivamente *ad infinitum*, alcanzando la conclusión de que la totalidad de la autofunción generalizada queda fijada una

vez se fije su valor en los dos primeros puntos de la semirred asociada al sector de superselección considerado<sup>14</sup>.

Llegados a este punto, cabe enfatizar que el resultado discutido en el párrafo anterior representa una diferencia fundamental con respecto al que se obtiene en el contexto del procedimiento de regularización estándar. En efecto, cuando solo se considera la parte euclídea de la ligadura escalar, las autofunciones generalizadas resultan contener únicamente un dato libre, correspondiente a su valor para el autovolumen del volumen más pequeño del sector de superselección en cuestión, que puede ser absorbido salvo por una fase mediante una renormalización generalizada apropiada de la autofunción [45]. En el caso que nos ocupa, sin embargo, el número de datos libres resulta ser dos, como indica el argumento que acabamos de presentar. Esto nos hace concluir que parece haberse doblado el número de soluciones al considerar la parte lorentziana en la regularización de la ligadura hamiltoniana. Por este motivo, uno diría que esta contribución no puede ser entendida como una mera corrección de orden superior: una nueva clase de autosoluciones de la ligadura cuántica parece emerger formalmente como resultado de la adopción del esquema alternativo de regularización en la LQC homogénea e isótropa<sup>15</sup>. Cabe mencionar que los autores de la Ref. [91] mostraron que el operador hamiltoniano alternativo no es autoadjunto pero admite una familia *uniparamétrica* de extensiones autoadjuntas, cada una de ellas con un espectro no degenerado. Este resultado proporciona otra perspectiva desde la que interpretar el nuevo dato aparentemente libre en nuestro análisis: permite “cubrir” las posibilidades correspondientes a las diferentes extensiones halladas en la Ref. [91].

Para completar esta sección, estudiemos si se puede derivar una expresión cerrada que permita calcular cualquier autofunción generalizada dada (cuya existencia asumimos aquí) en un punto cualquiera de la semirred en términos de su valor en los dos primeros puntos. Como cabría esperar, la respuesta resulta ser afirmativa, conservándose otra de las principales características atractivas de la prescripción MMO. Para escribir la expresión resultante de manera algo más compacta, conviene introducir las definiciones que siguen:

$$F_{\lambda}^0(v) = -\frac{4\gamma^2}{1+\gamma^2} \frac{\lambda - \left\{ \left[ f_{+}^{(2)}(v) \right]^2 + \left[ f_{-}^{(2)}(v) \right]^2 \right\}}{f_{-}^{(4)}(v+8)f_{-}^{(4)}(v+4)} \left( \frac{\left[ f_{+}^{(4)}(v) \right]^2 + \left[ f_{-}^{(4)}(v) \right]^2}{f_{-}^{(4)}(v+8)f_{-}^{(4)}(v+4)} \right), \quad (3.32)$$

$$F^{\pm 4}(v) = -\frac{4\gamma^2}{1+\gamma^2} \frac{f_{\mp}^{(2)}(v \pm 4)f_{\mp}^{(2)}(v \pm 2)}{f_{-}^{(4)}(v+8)f_{-}^{(4)}(v+4)}, \quad (3.33)$$

$$F^{-8}(v) = -\frac{f_{+}^{(4)}(v-8)f_{+}^{(4)}(v-4)}{f_{-}^{(4)}(v+8)f_{-}^{(4)}(v+4)}. \quad (3.34)$$

Estas expresiones se corresponden con los coeficientes de las autofunciones en los

<sup>14</sup>Este argumento aplica con modificaciones mínimas al caso de los sectores de superselección con soporte en las semirredes negativas.

<sup>15</sup>Este fenómeno está relacionado con la aparición de una era de Sitter emergente con curvatura constante de orden planckiano en el régimen efectivo del modelo de Dapor y Liegener, [90, 92, 93, 95, 96].

puntos  $v, v \pm 4$  y  $v - 8$ , respectivamente, en la relación que las vincula una vez se ha normalizado a la unidad el coeficiente que acompaña a  $e_\lambda^\varepsilon(v + 8)$ .

Empleando las funciones (3.32)-(3.34) recién definidas, el valor de una función generalizada en un cierto punto dado (de volumen finito) de la semirred  $\mathcal{L}_\varepsilon^+$  se puede escribir como

$$e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 4n) = \sum_{m=0,1} \sum_{O(m \rightarrow n)} \left\{ \prod_{\{m\}} \left( F^{+4}[\varepsilon + 4(r_m - 1)] \prod_{\{s\}} F_\lambda^0[\varepsilon + 4s] \right) \right. \\ \left. \times \prod_{\{t\}} \left( F^{-4}[\varepsilon + 4(t + 1)] \prod_{\{u\}} F^{-8}[\varepsilon + 4(u + 2)] \right) \right\} e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 4m). \quad (3.35)$$

En esta expresión,  $O(p \rightarrow q)$  denota el conjunto de caminos que contienen saltos de una, dos, tres o cuatro unidades y que conectan dos puntos,  $p$  y  $q$ , en una semirred de paso unidad. Estos caminos están compuestos por puntos intermedios entre  $p$  y  $q$ . Entonces, llamemos  $\{r\}$ ,  $\{s\}$ ,  $\{t\}$  y  $\{u\}$  a aquellos subconjuntos de estos puntos intermedios que, en el camino considerado, están seguidos por un salto de una, dos, tres o cuatro unidades, respectivamente. Adicionalmente, cabe enfatizar la diferencia que existe entre el conjunto de puntos intermedios seguidos por un salto de una unidad en caminos que empiezan en 0 (i.e.,  $\{r_0\}$ ) del mismo conjunto en el caso de caminos que empiezan en 1 (i.e.,  $\{r_1\}$ ). Si 0 pudiera pertenecer al conjunto  $\{r_0\}$ , existiría un término que vincularía los puntos  $\varepsilon$  y  $\varepsilon + 4$  que no aparece en el cálculo directo. Si ese fuera el caso, uno concluiría que  $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon)$  y  $e_\lambda^\varepsilon(\varepsilon + 4)$  no son cantidades independientes, reduciendo el número de datos libres de nuevo a uno. Teniendo esta peculiaridad en mente, la expresión presentada anteriormente permite calcular las autofunciones generalizadas asociadas a un cierto autovalor de la ligadura escalar cuántica en cualquier punto de una cierta semirred mediante la determinación de todos los caminos que conectan los enteros 0 y 1 con el entero correspondiente al punto en cuestión.

El hecho de que podamos calcular las autofunciones generalizadas gravitacionales de manera exacta es una característica especialmente atractiva de la prescripción MMO que ya estaba presente en el marco de la LQC estándar y que, como vemos, persiste con el tratamiento separado de la contribución lorentziana en la regularización del hamiltoniano gravitacional. En la Ref. [44], donde se emplea la otra propuesta predominante para resolver la ambigüedad de orden de factores, estas autofunciones son obtenidas iterativamente y calculadas empleando métodos numéricos<sup>16</sup>.

## 5 Conclusión

En este capítulo, hemos construido explícitamente un formalismo cuántico para la descripción de cosmologías de FLRW basado en el esquema de regularización de la

<sup>16</sup>Nótese que, en este trabajo, se regulariza la ligadura escalar de manera estándar, por lo que los resultados de adoptar la prescripción MMO presentados en esta tesis son más potentes, incluso cuando la ligadura escalar es notablemente más complicada.



ligadura-escalar-propuesto-por-Dapor-y-Liegener-[88,-90].-Para-ello,-hemos-empezado-considerando-una-cosmología-de-Bianchi-I,-donde-la-simetrización-natural-que-caracteriza-la-prescripción-MMO-queda-especialmente-patente.-En-este-contexto,-hemos-llevado-a-cabo-la-regularización-de-la-contribución-lorentziana-a-la-ligadura-hamiltoniana-gravitacional-empleando-una-identidad-clásica-de-Thiemann-que-permite-expresar-la-curvatura-extrínseca-triádica-en-términos-de-las-holonomías-de-la-conexión-sin-necesidad-de-hacer-uso-de-las-simetrías-del-sistema-considerado.-Combinando-la-contribución-resultante-con-la-parte-euclídea-regularizada-de-manera-estándar,-hemos-obtenido-la-ligadura-hamiltoniana-completa,-en-la-cual-hemos-identificado-una-estructura-de-signos-que-aparece-como-resultado-de-que-los-signos-de-distintas-componentes-de-la-triáda-densitizada-no-tienen-por-qué-ser-iguales-en-ausencia-de-isotropía.-Preservando-esta-estructura,-hemos-tomado-el-límite-isótropo-para-obtener-la-ligadura-completa-regularizada-en-el-contexto-de-cosmologías-de-FLRW,-que-son-el-objeto-de-estudio-principal-de-este-capítulo.-

A-continuación,-hemos-representado-cuánticamente-la-ligadura-hamiltoniana-isótropa-completa-de-acuerdo-con-las-reglas-de-la-prescripción-MMO.-Como-resultado-de-la-simetrización-algebraica-de-las-potencias-del-operador-de-triáda-que-es-característica-de-la-prescripción-MMO,-el-estado-singular-de-volumen-nulo-se-ve-desacoplado-del-resto-del-espacio-de-Hilbert-cinemático-del-sistema.-Dado-que-estamos-interesados-en-soluciones-no-triviales-a-la-dinámica,-hemos-restringido-el-análisis-a-su-complemento-ortogonal-a-través-de-una-densitización-del-operador-de-ligadura.-La-acción-de-la-versión-densitizada-del-hamiltoniano-completo-sobre-la-base-de-autoestados-del-volumen-se-traduce-en-una-ecuación-en-diferencias-finitas-de-orden-cuatro-(en-lugar-de-una-de-orden-dos,-como-ocurre-en-el-formalismo-estándar-en-el-que-la-ligadura-se-escribe-únicamente-en-términos-de-su-parte-euclídea),-que-vincula-un-total-de-cinco-estados-de-volúmenes- $v$ ,  $v \pm 4$  y  $v \pm 8$ .-Por-consiguiente,-la-acción-del-hamiltoniano-modificado-(que-incluye-una-contribución-euclídea-y-una-lorentziana)-deja-invariantes-subespacios-de-Hilbert-con-soporte-en-redes-discretas-de-paso-cuatro.-Sin-embargo,-gracias-a-las-propiedades-de-la-prescripción-MMO-(y,-en-particular,-a-la-simetrización-del-signo-de-la-triáda-y-de-los-elementos-de-holonomía-que-la-caracteriza),-la-acción-del-operador-estudiado-no-relaciona-estados-cuyos-parámetros-de-volumen-asociados-tienen-signo-distinto:-los-sectores-de-superselección-de-la-teoría-cuántica-resultan-venirdados-por-espacios-de-Hilbert-con-soporte-en-*semirredes* discretas-de-paso-cuatro-en-lugar-de-redes-completas.-

El-hecho-de-que-haya-un-valor-del-volumen-con-valor-absoluto-mínimo-distinto-de-cero-en-cada-una-de-estas-semirredes-implica-que-formalmente-se-puede-escribir-una-relación-entre-los-valores-de-la-autofunción-generalizada-en-los-tres-primeros-puntos-actuando-con-el-operador-hamiltoniano-sobre-el-estado-correspondiente-al-primer-de-estos-puntos-(las-dos-contribuciones-restantes,-que-llevarían-a-estados-con-volúmenes-negativos,-desaparecen-gracias-al-tratamiento-del-signo-de-la-triáda-densitizada-característico-de-la-prescripción-MMO).-Esto-tiene-consecuencias-inmediatas-en-el-cálculo-de-las-autofunciones-generalizadas-del-operador-hamiltoniano-completo.-En-efecto,-es-fácil-convencerse-de-que,-si-se-fijan-los-valores-de-la-autofunción-generalizada-asociada-a-un-cierto-autovalor-en-los-dos-primeros-puntos,-su-valor-en-el-tercero-está-inmediatamente-determinado-por-la-relación-mencionada-anteriormente.-

Además, si se escribe una expresión similar partiendo de la acción del operador hamiltoniano en el segundo punto de la semirred, el valor de la autofunción generalizada en el cuarto punto quedaría inmediatamente fijado también. Repitiendo este argumento un número infinito de veces, desplazando el punto de actuación del hamiltoniano a lo largo de la semirred, se llega a la conclusión de que la totalidad de la autofunción generalizada queda determinada cuando se fija su valor en los dos primeros puntos: existen dos datos libres en el cómputo de las autofunciones de la ligadura escalar cuántica. Esta conclusión contrasta con la alcanzada en el contexto del enfoque estándar, en el que solo existe un dato libre. Por tanto, la consideración y subsecuente regularización del término lorentziano se traduce en una posible duplicación del número de grados de libertad, indicando que dicha contribución no puede ser considerada meramente como una corrección de orden superior al formalismo estándar de la LQC homogénea e isótropa. Hemos comentado que la aparición de este dato adicional, que es (aparentemente) libre, está estrechamente relacionada con el hecho de que el operador hamiltoniano admite una familia *uniparamétrica* de extensiones autoadjuntas con espectros no degenerados [91], por lo que dicho dato podría entenderse en cierto modo como el parámetro que permite “recorrer” esa familia de extensiones. Por último, hemos mostrado que es posible obtener una expresión cerrada para el cálculo de las autofunciones generalizadas que solo depende de sus valores en los dos primeros puntos de la semirred asociada al sector de superselección bajo consideración. Cabe enfatizar que esto solo es posible gracias al hecho de que los espacios de Hilbert invariantes bajo la acción del operador de ligadura tienen soporte en semirredes discretas y no en redes completas, lo cual es una consecuencia inmediata de la prescripción de orden de factores adoptada.

En conclusión, los resultados del análisis recogido en este capítulo confirman que la prescripción MMO conduce a una teoría cuántica con propiedades atractivas, no solo con la regularización estándar en la LQC, sino también con un procedimiento de regularización en el que se trata de forma independiente la contribución lorentziana a la ligadura hamiltoniana.

# Capítulo 4

## Regularización alternativa en cosmologías de Bianchi I

En este capítulo, generalizamos el formalismo desarrollado en el capítulo anterior al caso de las cosmologías anisótropas de Bianchi I. En otras palabras, regularizamos la ligadura hamiltoniana gravitacional sin apelar a consideraciones de simetría siguiendo el esquema propuesto por Dapor y Liegener [90, 91] y procedemos a su representación polimérica adoptando la prescripción MMO, haciendo énfasis en determinar si las buenas propiedades de esta prescripción siguen presentes en el modelo considerado incluso cuando el procedimiento de regularización seguido no es el estándar.

El resto de este capítulo, en el que se recogen los resultados presentados originalmente en la Ref. [180], está organizado como sigue. Dado que la descripción del espacio de Hilbert cinemático de la teoría y la regularización de las contribuciones euclídea y lorentziana ya han sido presentadas en esta tesis (véanse la Sec. 2 de los Preliminares y la Sec. 1.1 del Capítulo 3), procedemos directamente a la representación cuántica de la ligadura hamiltoniana completa. En la Sec. 1, comenzamos repasando la promoción de la parte euclídea a operador cuántico, discutiendo su acción sobre los elementos de una base del espacio de Hilbert y estudiando la estructura de los sectores de superselección que define. En la Sec. 2, llevamos a cabo un procedimiento idéntico con la contribución lorentziana, destacando las similitudes y diferencias con respecto al caso euclídeo estándar. También investigamos cómo se alteran los sectores de superselección al introducir la parte lorentziana (véase la Sec. 2.1). En la Sec. 3, discutimos la relación existente entre los resultados de la sección anterior y las reglas de superselección del caso isótropo presentadas en el capítulo anterior. Finalmente, los resultados principales del capítulo están resumidos en la Sec. 4, donde se incluye también un comentario acerca de la implementación de la dinámica mejorada en el modelo. Además, el Apéndice A incorpora una explicación de los distintos convenios adoptados en la LQC isótropa y anisótropa, e incluye una reformulación del formalismo del Capítulo 3 de tal modo que sea inmediatamente comparable con el de este capítulo.

# 1 Cuantización de la contribución euclídea

La representación polimérica de la contribución euclídea a la ligadura escalar gravitacional ya ha sido abordada en un cierto número de trabajos, empleando esquemas variados para la implementación de la dinámica mejorada y con distintas prescripciones de orden de factores [49, 52–55]. En esta sección, repasamos los ingredientes básicos de la cuantización planteada en la Ref. [54], donde se emplea la prescripción MMO. El lector puede consultar dicho artículo para un análisis más detallado.

Siguiendo las reglas introducidas en la sección anterior, llevamos a cabo una simetrización algebraica de las potencias de  $\widehat{|p|}$  y  $1/\sqrt{\widehat{|p|}}$  y simetrizamos los términos que involucran el signo de las variables de tríada y las holonomías de la manera siguiente:

$$\text{sgn}(p_i) \sin \widehat{\mu_i c^i} \longrightarrow \widehat{F}_i = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\text{sgn}(p_i)}, \widehat{\sin \mu_i c^i} \right]_+, \quad (4.1)$$

donde  $[\cdot, \cdot]_+$  es el anticonmutador de operadores y

$$\widehat{\sin \mu_i c^i} = \frac{1}{2i} \left( \widehat{\mathcal{N}}_{2\mu_i} - \widehat{\mathcal{N}}_{-2\mu_i} \right). \quad (4.2)$$

El resultado de aplicar estas reglas a la contribución euclídea a la ligadura escalar asociada a una cosmología de Bianchi I [véase la Ec. (2.28)] es un operador sobre el espacio de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_{\text{BI}}^{\text{kin}}$  de la forma

$$\widehat{H}_E^{\text{BI}} = \left[ \frac{\widehat{1}}{V} \right]^{1/2} \sum_{i=\theta, \sigma, \delta} \left( \widehat{\mathcal{H}}_E^{(i)} \right) \left[ \left( \frac{\widehat{1}}{V} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.3)$$

donde

$$\widehat{\mathcal{H}}_E^{(i)} = \frac{1}{16\pi G \Delta} \widehat{V}^{1/2} \left( \widehat{F}_j \widehat{V} \widehat{F}_k + \widehat{F}_k \widehat{V} \widehat{F}_j \right) \widehat{V}^{1/2}, \quad (4.4)$$

con  $i \neq j \neq k$ . En vista de la definición anterior, cabe pararse a hacer un breve comentario acerca del orden de factores empleado. En primer lugar, es importante notar que los operadores  $\widehat{F}_i$  y el operador de volumen no conmutan clásicamente bajo corchetes de Poisson, por lo que es necesario seleccionar una prescripción para representar sus productos cuánticamente. En la Ref. [54], cuya presentación se sigue de cerca en esta sección, se decidió tomar la propuesta de la Ref. [49] para facilitar la comparación de resultados<sup>17</sup>. La simetrización extra que aparece en la ecuación anterior es consecuencia del hecho de que  $\widehat{F}_j$  y  $\widehat{F}_k$  tampoco conmutan entre sí, propiedad que resulta de la propuesta de implementación de la dinámica mejorada

<sup>17</sup>El número específico de potencias del volumen que aparece en la Ec. (4.4) es el resultado de la representación cuántica considerada para  $1/\mu_i$ . La contrapartida isótropa del operador que se obtiene con estos convenios resulta diferir ligeramente en el orden de factores con respecto al operador convencional en la LQC homogénea e isótropa. Esto complica en cierta medida la interpretación de la relación entre las teorías cuánticas isótropa y anisótropa. Véase el Apéndice A para un comentario en mayor profundidad acerca de la diferencia mencionada y de sus consecuencias.

considerada<sup>18</sup> (véase la definición de las longitudes fiduciales mínimas en la Sec. 2 de los Preliminares).

El operador inverso de volumen  $\widehat{1/V}$  se define de la forma usual (es decir, partiendo de una identidad de Thiemann clásica) como en el capítulo anterior. El operador que se obtiene resulta aniquilar cualquier estado que pertenezca al kernel de cualquiera de los operadores de tríada  $\hat{p}_i$ , que corresponden a autoestados del volumen de autovalor nulo (en otras palabras, son los análogos cuánticos de las singularidades clásicas). Por consiguiente, gracias a la simetrización algebraica característica de la prescripción MMO, el operador que representa cuánticamente la contribución euclídea aniquila los estados de volumen cero y deja invariante su complemento ortogonal, de manera equivalente a la situación encontrada en escenarios isótopos. Dicho complemento ortogonal, que llamaremos  $\widehat{\mathcal{H}}_{\text{BI}}^{\text{kin}}$ , no es sino la completación de Cauchy de  $\widetilde{\text{Cyl}}_{\mathbb{S}} = \text{span}\{|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle : v \neq 0\}$  con respecto al producto interno discreto en cada dirección espacial. Las propiedades mencionadas anteriormente aseguran que es posible densitizar el operador hamiltoniano euclídeo (4.3), eliminando en el proceso los estados singulares, que quedan completamente desacoplados ya a nivel cinemático. Formalmente, dicha densitización requiere establecer una relación biyectiva entre los estados  $\langle \tilde{\phi} | \in \widetilde{\text{Cyl}}_{\mathbb{S}}^*$  aniquilados por el adjunto de  $\hat{H}_E^{\text{BI}}$  y los estados  $\langle \phi | \in \widetilde{\text{Cyl}}_{\mathbb{S}}^*$  aniquilados por el adjunto de su versión densitizada  $\hat{\mathcal{H}}_E^{\text{BI}} = \sum_i \hat{\mathcal{H}}_E^{(i)}$ . En lo que sigue, nos centramos exclusivamente en el estudio de esta versión densitizada y nos referimos siempre a ella, incluso si omitimos la denominación “densitizada” por brevedad.

Dado que la ligadura escalar presenta una forma funcional muy compleja, no existen estudios en la literatura donde se determinen sus propiedades espectrales. No obstante, se ha mostrado que su acción superselecciona espacios de Hilbert, por lo que, en la práctica, se puede restringir la discusión presente a cualquiera de ellos. En la siguiente subsección describiremos dichos sectores de superselección, ya que los argumentos empleados en este caso servirán para ilustrar el razonamiento usado en el caso más complejo del tratamiento de la contribución lorentziana en la Sec. 2.

## 1.1 Sectores de superselección

Las reglas de superselección que dictan la estructura de los sectores invariantes bajo la acción del operador de ligadura densitizada se pueden deducir sin gran dificultad a partir de la acción de los operadores  $\hat{F}_i$  en la base de autoestados del volumen. En la representación  $v$  (véase la Sec. 2 de los Preliminares para más detalles acerca de

---

<sup>18</sup>A modo de ejemplo, con la propuesta de la Ref. [52], la longitud fiducial mínima asociada a cada dirección espacial solo depende de la variable de tríada correspondiente, por lo que esta simetrización extra sería innecesaria una vez ordenadas las potencias del operador de volumen de forma apropiada [57].

cómo se definen las representaciones  $\lambda$  y  $v$ ),

$$\begin{aligned} \hat{F}_\theta |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle &= -\frac{\mathbf{i}}{4} \text{sgn}(\lambda_\sigma \lambda_\delta) \\ &\times \sum_{l=\pm 1} \left( [\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v + 2l \text{sgn}(\lambda_\sigma \lambda_\delta))] |v + 2l \text{sgn}(\lambda_\sigma \lambda_\delta), \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_\sigma |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle &= -\frac{\mathbf{i}}{4} \text{sgn}(\lambda_\sigma) \\ &\times \sum_{l=\pm 1} \left( [1 + \text{sgn}(|v| + 2l \text{sgn}(\lambda_\sigma))] v + 2l \text{sgn}(v \lambda_\sigma), \frac{v + 2l \text{sgn}(v \lambda_\sigma)}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

La acción de  $\hat{F}_\delta$  es completamente análoga a la de  $\hat{F}_\sigma$ .

A estas alturas de la discusión, ya es posible darse cuenta de que la acción de la parte euclídea de la ligadura hamiltoniana no cambia el signo de ninguna de las etiquetas de los estados sobre los que actúa. Por lo tanto, el espacio de Hilbert cinemático se separa inmediatamente en un total de ocho subespacios de Hilbert superseleccionados, con soporte en los ocho octantes definidos por los signos de  $v$ ,  $\lambda_\sigma$  y  $\lambda_\delta$ . Dado que cada término de la contribución euclídea está compuesto por dos operadores  $\hat{F}_i$  asociados a dos direcciones espaciales distintas (salvo potencias del operador de volumen, que no influyen en este argumento<sup>19</sup>), los sectores de superselección del hamiltoniano euclídeo cuántico están estrechamente relacionados con los de  $\hat{F}_i$ .

Empecemos, por tanto, estudiando las reglas de superselección derivadas de la acción de estos operadores. De ahora en adelante, estudiamos el caso en el que el estado de partida  $|\psi\rangle$  está etiquetado por tres números positivos. En otras palabras,  $|\psi\rangle \in \text{Cyl}_S^+ = \text{span}\{|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle : v > 0, \lambda_\sigma > 0\}$ , con  $r = \sigma, \delta$ . Bajo la acción de un cierto  $\hat{F}_i$ , solo la contribución correspondiente a  $l = -1$  [véanse las Ecs. (4.5) y (4.6)] podría modificar el signo de una de las etiquetas (o de dos, en el caso de las acciones de  $\hat{F}_\sigma$  y  $\hat{F}_\delta$ ). La observación clave es que estas contribuciones aparecen pesadas por un factor que se anula idénticamente para  $v < 2$ , es decir, precisamente cuando estos cambios de signo podrían producirse. En efecto, los operadores de holonomía solo producen desplazamientos de dos unidades en el parámetro adimensional de volumen y dilataciones (o contracciones) en las variables de anisotropía  $\lambda_\sigma$  y  $\lambda_\delta$  caracterizadas por fracciones en las que el numerador y el denominador difieren en dos unidades en valor absoluto. Adicionalmente, en el caso de  $\hat{F}_\sigma$  y  $\hat{F}_\delta$  (que producen desplazamientos y dilataciones/contracciones simultáneas, a diferencia de  $\hat{F}_\theta$ , que solo genera desplazamientos), no se puede producir un cambio de signo aislado en una de las etiquetas, sino que tiene que ocurrir necesariamente en las dos etiquetas afectadas a la vez. En conclusión, el prefactor que impide la ocurrencia de un cambio de signo en el volumen resulta garantizar que no tiene lugar ningún cambio de signo en absoluto. Por consiguiente, la acción del operador hamiltoniano euclídeo deja invariante el subespacio con soporte en el octante donde todas las etiquetas de los

<sup>19</sup>Excepto en los casos en los que  $v = 2, 4$ , donde aniquilan las contribuciones potencialmente singulares, garantizando la buena definición de la restricción de  $\mathcal{H}_E$  a  $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{BI}}^{\text{kin}}$ .

estados son positivas. Un argumento completamente análogo permite alcanzar la misma conclusión en los otros siete octantes, por lo que, como habíamos adelantado, el espacio de Hilbert cinemático se divide en ocho subespacios superseleccionados bajo la acción de  $\hat{\mathcal{H}}_E^{\text{BI}}$ .

De hecho, podemos ser aún más precisos. Centremos nuestra atención en estados  $|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle \in \text{Cyl}_S^+$ . Dada la estructura de cada término de la ligadura densitizada y las acciones de los operadores  $\hat{F}_i^r$  discutidas en el párrafo anterior, la acción de cada término de  $\hat{\mathcal{H}}_E^{\text{BI}}$  conduce a contribuciones en las que la etiqueta  $v$  se ve desplazada en cero, más o menos cuatro unidades con respecto al valor de la etiqueta de partida. Asimismo, produce dilataciones y/o contracciones en una o dos de las variables de anisotropía, dependiendo del término en cuestión. Esto indica que los subespacios invariantes bajo la acción repetida de la ligadura vienen dados por la completación de Cauchy de conjuntos de la siguiente forma:

$$\text{Cyl}_{S,\varepsilon,\lambda_\sigma,\lambda_\delta} = \text{span}\{|v^*, \lambda_\sigma^*, \lambda_\delta^*\rangle : v^* \in \mathcal{L}_\varepsilon^+, \lambda_r^* = w_\varepsilon \lambda_r, w_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon\}, \quad (4.7)$$

donde  $\lambda_r$  son las variables de anisotropía del estado de partida sobre el que actúa repetidamente  $\hat{\mathcal{H}}_E^{\text{BI}}$  y  $\mathcal{L}_\varepsilon^+$  y  $\mathcal{W}_\varepsilon$  son los conjuntos definidos en los párrafos siguientes.

Por un lado, como en el caso isotropo, es sencillo apreciar que  $v^*$  vive en una semirred discreta de paso cuatro,  $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ , definida mediante un número real  $\varepsilon \in (0, 4]$  tal que

$$\mathcal{L}_\varepsilon^+ = \{v^* = \varepsilon + 4n : n \in \mathbb{N}\}, \quad (4.8)$$

donde  $\mathbb{N}$  denota el conjunto de los números enteros no negativos.

Por otro lado, las variables de anisotropía de los estados diana se obtienen mediante la multiplicación sucesiva de fracciones cuyo numerador y denominador difieren en dos unidades en valor absoluto. Por ende, dichas variables son siempre proporcionales a las variables de anisotropía del estado de partida, con un factor de proporcionalidad  $w_\varepsilon$  que solo depende de  $\varepsilon$ , como se puede apreciar en la Ec. (4.6). En virtud de estas observaciones, no es complicado comprobar que  $w_\varepsilon$  puede tomar cualquier valor en el conjunto discreto

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \left\{ \left( \frac{\varepsilon - 2^z}{\varepsilon} \right)^z \prod_{n,m \in \mathbb{N}} \left( \frac{\varepsilon + 2n}{\varepsilon + 2m} \right)^{k_m^n} : k_m^n \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{Z} \text{ si } \varepsilon > 2, z = 0 \text{ si } \varepsilon \leq 2 \right\}, \quad (4.9)$$

que es infinito numerable y denso en la recta real positiva [58].

De este modo, si bien el volumen  $v$  vive en una semirred discreta de paso cuatro, las variables de anisotropía toman valores en un conjunto mucho más complejo. Sin embargo, a pesar de las complicaciones obvias que surgen de la consideración de un sistema anisótropo, la parte euclídea de la ligadura sigue dejando invariantes espacios de Hilbert separables  $\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda_\sigma,\lambda_\delta}$  dados por la completación de  $\text{Cyl}_{S,\varepsilon,\lambda_\sigma,\lambda_\delta}$  con respecto al producto interno discreto en cada dirección espacial.

## 2 Cuantización de la contribución lorentziana

Una vez finalizado el repaso del procedimiento seguido en la Ref. [54] para la representación cuántica de la contribución euclídea, procedemos en esta sección a la discusión del tratamiento de la parte lorentziana de la ligadura escalar (3.5).

Como resultado de las reglas de la prescripción MMO, es inmediato ver que el operador que se obtiene al representar cuánticamente la parte lorentziana (3.5) también es de la forma

$$\hat{H}_L^{\text{BI}} = \left[ \frac{\hat{1}}{V} \right]^{1/2} \mathcal{H}_L^{\text{BI}} \left[ \frac{\hat{1}}{V} \right]^{1/2}, \quad (4.10)$$

donde  $\mathcal{H}_L^{\text{BI}}$  es el operador densitizado correspondiente. Igual que ocurre en el caso de la contribución euclídea, podemos llevar a cabo una restricción bien definida al complemento ortogonal de los estados de volumen cero,  $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{BI}}^{\text{kin}}$ , desacoplándose los análogos cuánticos de las singularidades clásicas a nivel cinemático. En lo que resta de esta sección, analizamos las propiedades de esta versión densitizada del operador hamiltoniano lorentziano.

En vista de lo discutido en la sección anterior, es sencillo convencerse de que el operador considerado se puede escribir como

$$\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{BI}} = -\frac{1}{16\pi G} \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \frac{1}{2\Delta} \sum_i \sum_{j \neq i} \left[ \hat{G}_i^{(\alpha)}, \hat{G}_j^{(\alpha)} \right]_+, \quad (4.11)$$

donde el análogo clásico de  $\hat{G}_i^{(\alpha)}$  es<sup>20</sup>

$$V \text{sgn}(p_i) \sin \bar{\mu}_i c^i \sum_{k \neq i} \left( \cos \bar{\mu}_k c^k. \right. \quad (4.12)$$

Siguiendo las directrices de la prescripción MMO, la expresión clásica anterior se puede promover a un operador  $\hat{G}_i^{(\alpha)}$  sobre  $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{BI}}^{\text{kin}}$  del siguiente modo:

$$\hat{G}_i^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\text{sgn}(p_i)}, \hat{\Theta}_i^{(\alpha)} \right] \left(, \right. \quad (4.13)$$

donde el operador  $\hat{\Theta}_i^{(\alpha)}$  se define a su vez como

$$\hat{\Theta}_i^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \hat{V}^{1/2-\alpha} \sum_{k \neq i} \left( \widehat{\sin \bar{\mu}_i c^i} \hat{V}^{2\alpha} \widehat{\cos \bar{\mu}_k c^k} + \widehat{\cos \bar{\mu}_k c^k} \hat{V}^{2\alpha} \widehat{\sin \bar{\mu}_i c^i} \right) \left( \right)^{1/2-\alpha}, \quad (4.14)$$

con  $0 < \alpha < 1/2$  para garantizar que  $\hat{\Theta}_i^{(\alpha)}$  está bien definido y con

$$\widehat{\cos \bar{\mu}_k c^k} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathcal{N}}_{2\bar{\mu}_k} + \hat{\mathcal{N}}_{-2\bar{\mu}_k} \right). \quad (4.15)$$

<sup>20</sup>Como veremos a continuación, la etiqueta  $\alpha$  es un parámetro que da cuenta del orden de factores adoptado para las potencias del operador de volumen.



Una vez introducido el operador hamiltoniano lorentziano, el siguiente paso consiste en evaluar su acción sobre la base de autoestados del volumen. Como en el caso de la parte euclídea, es conveniente empezar calculando la acción de  $\hat{\Theta}_i^{(\alpha)}$ , a partir de la cual se puede derivar inmediatamente la de  $\hat{G}_i^{(\alpha)}$  y, en un paso posterior, la del operador de ligadura completo. Consideremos el caso de  $\hat{\Theta}_\theta^{(\alpha)}$  en primer lugar. En la representación  $v$ ,

$$2i \widehat{\sin \bar{\mu}_\theta c^\theta} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \sum_{l=\pm 1} l |v + 2l \operatorname{sgn}(\lambda_\sigma \lambda_\delta), \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle, \quad (4.16)$$

$$2 \widehat{\cos \bar{\mu}_\sigma c^\sigma} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \sum_{l=\pm 1} \left( v + 2l \operatorname{sgn}(v \lambda_\sigma), \frac{v + 2l \operatorname{sgn}(v \lambda_\sigma)}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right). \quad (4.17)$$

La acción del operador coseno asociado a la dirección fiducial  $\delta$  es totalmente análoga a la mostrada para la dirección  $\sigma$ . De las acciones mostradas sobre estas líneas, es fácil deducir que la acción de  $\hat{\Theta}_\theta^{(\alpha)}$  sobre un estado de  $\text{Cyl}_S^+$  resulta en

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_\theta^{(\alpha)} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = & -i \frac{\pi}{4} G \gamma \sqrt{\Delta} |v|^{1/2-\alpha} \sum_{l,m=\pm 1} |v + 2l|^{2\alpha} |v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l)|^{1/2-\alpha} \\ & \times \left\{ l |v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l)}{v + 2l} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\} \left( \right. \\ & \left. + m |v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right) + (\sigma \leftrightarrow \delta) \left. \right\} \left( \right. \quad (4.18) \end{aligned}$$

que involucra, en general, un total de dieciséis contribuciones. Cabe notar que, cuando  $v = 2, 4$ , los pesos de algunas de estas contribuciones resultan anularse idénticamente, ya que  $v + 2l$  y  $v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l)$  pueden hacerse cero en estas situaciones. Este es efectivamente el caso de las ocho contribuciones correspondientes a  $l = -1$  cuando  $v = 2$  y de las cuatro correspondientes a  $l, m = -1$  cuando  $v = 4$ . Esta observación cobrará importancia más adelante.

Especifiquemos ahora por completitud la acción de  $\hat{\Theta}_\sigma^{(\alpha)}$  (la acción de  $\hat{\Theta}_\delta^{(\alpha)}$  es completamente análoga a la presentada a continuación, reemplazando  $\sigma$  por  $\delta$ ). Las combinaciones de elementos de holonomía relevantes son las siguientes:

$$2i \widehat{\sin \bar{\mu}_\sigma c^\sigma} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \sum_{l=\pm 1} \left( v + 2l \operatorname{sgn}(v \lambda_\sigma), \frac{v + 2l \operatorname{sgn}(v \lambda_\sigma)}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right), \quad (4.19)$$

$$2 \widehat{\cos \bar{\mu}_\theta c^\theta} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \sum_{l=\pm 1} |v + 2l \operatorname{sgn}(\lambda_\sigma \lambda_\delta), \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle, \quad (4.20)$$

y la acción del operador  $\widehat{\cos \bar{\mu}_\delta c^\delta}$  se puede extraer de la Ec. (4.17) mediante el cambio  $\sigma \rightarrow \delta$ . Considerando en particular estados de partida que viven en  $\text{Cyl}_S^+$ , se obtiene

que el resultado de actuar sobre ellos con el operador  $\hat{\Theta}_\sigma^{(\alpha)}$  es

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_\sigma^{(\alpha)} |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = & -i \frac{\pi}{4} G \gamma \sqrt{\Delta} |v|^{1/2-\alpha} \sum_{l,m=\pm 1} |v+2l|^{2\alpha} |v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l)|^{1/2-\alpha} \times \\ & \times \left\{ l \left| v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l), \frac{v+2l}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle \left( \right. \right. \\ & + m \left| v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l), \frac{v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l)}{v+2l} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle \left( \right. \\ & + l \left| v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l), \frac{v+2l}{v} \lambda_\sigma, \frac{v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l)}{v+2l} \lambda_\delta \right\rangle \left( \right. \\ & \left. \left. + m \left| v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l), \frac{v+2l+2m \operatorname{sgn}(v+2l)}{v+2l} \lambda_\sigma, \frac{v+2l}{v} \lambda_\delta \right\rangle \right) \right\} \quad (4.21) \end{aligned}$$

Una vez más, la ecuación anterior vincula  $|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle$  con un total de dieciséis estados. No obstante, como en el caso del operador  $\hat{\Theta}_\theta^{(\alpha)}$ , las contribuciones de ciertos estados desaparecen en los casos en los que  $v = 2, 4$ . De hecho, la situación es exactamente la misma que la descrita en el párrafo bajo la Ec. (4.18).

En conclusión, observamos que, en el caso de los tres operadores  $\hat{\Theta}_i^{(\alpha)}$ , no todos los estados vinculados con un estado de partida  $|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle \in \text{Cyl}_\mathbb{S}^+$  mediante la actuación consecutiva de dos holonomías contribuyen al resultado final. La razón que subyace a esta propiedad no es sino la prescripción de orden de factores adoptada para las potencias del volumen que intervienen en la expresión de estos operadores. En el caso discutido, dicha prescripción evita la aparición de dos tipos de estados singulares: aquellos asociados a un volumen nulo y aquellos en los que las variables de anisotropía se anulan o divergen. Este hecho asegura que es posible obtener un operador de ligadura hamiltoniana lorentziana bien definido en  $\mathcal{H}_{\text{BI}}^{\text{kin}}$  y que admite una restricción al complemento ortogonal del kernel del operador de volumen  $\hat{V}$ .

Cabe comentar que es posible visualizar esta situación desde una perspectiva alternativa. Como hemos discutido anteriormente, el orden de factores escogido para las potencias del volumen resulta anular ciertas contribuciones, lo cual se traduce en el desacoplamiento de los estados potencialmente singulares *incluso en pasos intermedios* (en otras palabras, los estados imagen no pueden contener contribuciones de volumen cero, ni siquiera tras la actuación de una sola holonomía). Esto puede entenderse alternativamente como una restricción en los valores que  $l$  y  $m$  pueden adoptar en las Ecs. (4.18) y (4.21) como resultado de dicho orden de factores. Por ende, en la práctica, se lleva a cabo una proyección  $\hat{\mathcal{P}}$  sobre el espacio de Hilbert que resulta de la compleción de Cauchy de  $\text{Cyl}_\mathbb{S}$  tras la actuación de cada holonomía que interviene en la definición del operador hamiltoniano lorentziano. Como consecuencia, podemos reemplazar cada operador de holonomía en la Ec. (4.14) por su contrapartida proyectiva

$$\widehat{\sin \bar{\mu}_i c^i} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}} \widehat{\sin \bar{\mu}_i c^i}, \quad \widehat{\cos \bar{\mu}_j c^j} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}} \widehat{\cos \bar{\mu}_j c^j}. \quad (4.22)$$

Antes de proceder a la fijación del valor del parámetro  $\alpha$  del orden de factores adoptado para las potencias del volumen, resulta útil especificar las restricciones en los valores de  $l$  y  $m$  que resultan de las proyecciones previamente incorporadas. Para este fin, consideramos  $l$  y  $m$  como las componentes de una 2-tupla ordenada  $(l, m)$  que ha de pertenecer a un cierto conjunto  $I_v$ , definido como sigue para cada valor del volumen del estado de partida:

$$I_v = \begin{cases} \{(+1, +1), (+1, -1), (-1, +1), (-1, -1)\} & \text{si } v \neq 2, 4, \\ \{(+1, +1), (+1, -1)\} & \text{si } v = 2, \\ \{(+1, +1), (+1, -1), (-1, +1)\} & \text{si } v = 4. \end{cases} \quad (4.23)$$

Por tanto, las restricciones en los valores de  $l$  y  $m$  se pueden incorporar fácilmente mediante la sustitución  $\sum_{l,m=\pm 1} \rightarrow \sum_{(l,m) \in I_v}$  en las Ecs. (4.18) y (4.21), lo cual es completamente equivalente a introducir las proyecciones (4.22) en las definiciones de  $\hat{\Theta}_i^{(\alpha)}$ .

A continuación, abordamos la cuestión de la fijación del valor de  $\alpha$  para seleccionar un orden de factores concreto para las potencias del operador de volumen. Las opciones que podrían parecer naturales son, o bien el valor totalmente simétrico  $\alpha = 1/4$ , o bien los valores límite,  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = 1/2$ . En vista del hecho de que hemos considerado una representación de la parte euclídea que reproduce el orden de factores de la Ref. [49], lo más razonable parece elegir aquel valor que reproduzca el mismo orden de factores. Una comparación de las formas funcionales de las versiones densitizadas de las partes euclídea y lorentziana [véanse las Ecs. (4.4) y (4.11)] permite notar que la contrapartida euclídea de los operadores  $\hat{G}_i^{(\alpha)}$  es, en realidad,  $\hat{V}^{1/2} \hat{F}_i \hat{V}^{1/2}$ . Para acercar la forma de estas dos expresiones, reescribamos  $\hat{G}_i^{(\alpha)}$  como

$$\hat{V}^{1/2-\alpha} \left[ \frac{1}{4} \widehat{\text{sgn}}(p_i), \sum_{k \neq i} \left( \hat{P} \widehat{\sin \bar{\mu}_i c^i} \hat{V}^{2\alpha} \hat{P} \widehat{\cos \bar{\mu}_k c^k} + \hat{P} \widehat{\cos \bar{\mu}_k c^k} \hat{V}^{2\alpha} \hat{P} \widehat{\sin \bar{\mu}_i c^i} \right) \right]_+ \hat{V}^{1/2-\alpha}. \quad (4.24)$$

Cabe enfatizar que, en esta fórmula, gracias a la aparición de los operadores volumen y de las proyecciones, el operador signo nunca actúa sobre estados de volumen nulo (acción que no estaría bien definida). Comparando la ecuación anterior con la Ec. (4.1), es obvio que los operadores  $\hat{G}_i^{(\alpha)}$  y  $\hat{V}^{1/2} \hat{F}_i \hat{V}^{1/2}$  (para un cierto valor de  $i$ ) tienen la misma estructura en el límite  $\alpha \rightarrow 0$ . En lo que sigue, consideramos dicho límite respetando las proyecciones y estudiamos el operador resultante<sup>21</sup>. Para simplificar la notación y las expresiones empleadas de aquí en adelante, es conveniente introducir

<sup>21</sup>Este orden de factores cuenta con una ventaja adicional: se recupera el operador  $\widehat{\sin 2\bar{\mu}c}$  en el límite isótropo, lo cual simplifica considerablemente la comparación con los resultados ya obtenidos en el contexto de cosmologías homogéneas e isótropas [176]. Para más detalles acerca de la relación entre el trabajo presente y el expuesto en el capítulo anterior, véase el Apéndice A.

las definiciones

$$\hat{\Theta}_i = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\hat{P} \sin \bar{\mu}_i c^i}, \sum_{k \neq i} \widehat{\hat{P} \cos \bar{\mu}_k c^k} \right]_+, \quad (4.25)$$

$$\hat{G}_i = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\text{sgn}(p_i)}, \hat{\Theta}_i \right], \quad (4.26)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{BI}} = -\frac{1}{32\pi G \Delta} \frac{1+\gamma}{4\gamma^2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left( \hat{G}_i \hat{V} \hat{G}_j + \hat{G}_j \hat{V} \hat{G}_i \right) \hat{V}^{1/2}. \quad (4.27)$$

Extrayendo los factores apropiados que resultan de la acción del operador de volumen, las acciones de los operadores  $\hat{\Theta}_i$  pueden obtenerse a partir de las Ecs. (4.18) y (4.21) tomando el límite  $\alpha \rightarrow 0$ . En principio, lo mismo ocurre con las acciones de  $\hat{G}_i$  y  $\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{BI}}$  pero, en la práctica, el número de términos en las expresiones resultantes es considerablemente grande (en el caso de  $\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{BI}}$ , estaríamos hablando de 1536, en contraste con los 24 que aparecen en la acción de su análogo euclídeo). Por consiguiente, omitimos aquí la expresión explícita de la acción a pesar de que su obtención no presenta obstáculo alguno. Dicho esto, la complejidad del operador no impide estudiar la estructura de los sectores que deja invariantes. Veamos en primer lugar si la acción de  $\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{BI}}$  superselecciona los subespacios de Hilbert con soporte en los ocho octantes definidos por los signos de  $v$ ,  $\lambda_\sigma$  y  $\lambda_\delta$ , como es el caso en el sector euclídeo.

Como en la sección anterior, el hecho de que la base que hemos venido considerando sea de autoestados del volumen implica que es suficiente con analizar las características de la acción de los operadores  $\hat{G}_i$ . Como consecuencia de la estructura de  $\hat{G}_i$  (4.26), es inmediato convencerse de que su acción sobre un estado de la base de autoestados del volumen adopta la forma

$$\hat{G}_i |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = \frac{1}{2} \sum_{v^*, \lambda_\sigma^*, \lambda_\delta^*} [\text{sgn}(\lambda_i) + \text{sgn}(\lambda_i^*)] |v^*, \lambda_\sigma^*, \lambda_\delta^*\rangle, \quad (4.28)$$

donde  $v^*$ ,  $\lambda_\sigma^*$  y  $\lambda_\delta^*$  son los números cuánticos de los estados diana que resultan de la acción de  $\hat{G}_i$ . Por ende, la suma en la expresión anterior debe entenderse sobre todo estado tal, recordando que  $\lambda_\theta = v/(2\lambda_\sigma\lambda_\delta)$ . Es fácil ver que el factor que pesa cada término asegura que no contribuyen todos aquellos estados en los que se produce una inversión del signo de la variable de tríada asociada a la dirección espacial correspondiente. Esto es, una vez más, una consecuencia obvia de la simetrización del signo de las variables de tríada y de los elementos de holonomía característica de la prescripción adoptada.

Consideremos en primer lugar el caso del operador  $\hat{G}_\theta$ . Por un lado, la acción de  $\hat{\Theta}_\theta$  sobre un estado de  $\text{Cyl}_3^+$  resulta venir dada por

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_\theta |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = & -\frac{\mathbf{i}}{8} \sum_{(l,m) \in I_v} \left\{ l v + 2l + 2m \text{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l + 2m \text{sgn}(v + 2l)}{v + 2l} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\} \\ & + m v + 2l + 2m \text{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \left\} + (\sigma \leftrightarrow \delta) \right\} \left( \quad (4.29) \end{aligned}$$

En lo que concierne al volumen  $v$ , los estados diana difieren del estado de partida en desplazamientos de cero, más o menos cuatro unidades. Por lo tanto, como cada término del hamiltoniano lorentziano cuántico contiene dos de estos operadores, es evidente que  $\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{BI}}$  conecta estados de volumen  $v$  con estados de volumen  $v$  o  $v \pm 8$ . Esta observación comporta que la acción de la parte lorentziana deja invariantes redes discretas de paso cuatro. En la sección anterior, vimos que la contribución euclídea superselecciona subespacios aún más simples, ya que las semirredes positiva y negativa resultan ser invariantes separadamente. La cuestión es, entonces, si lo mismo ocurre en el sector lorentziano investigado.

Recordemos que, en el caso de la parte euclídea, cada estado imagen obtenido por la acción del operador  $\hat{F}_i$  sobre un cierto estado de partida aparece pesado por un factor  $[\text{sgn}(\lambda_i) + \text{sgn}(\lambda_i^*)]$  que asegura el desacoplamiento de las semirredes positiva y negativa. Asimismo, estos factores son también la razón que subyace al hecho de que los subespacios de Hilbert con soporte en los distintos octantes definidos por los signos de  $\lambda_i$  sean invariantes bajo la acción de  $\hat{\mathcal{H}}_E^{\text{BI}}$ . La observación clave en este argumento es que la acción de  $\hat{F}_i$  solo puede inducir cambios de signo en *una* de las variables  $\lambda_i$ , lo cual se traduce en que la acción de los operadores  $\hat{F}_i$  en la representación  $v$  puede dar lugar, por un lado, a un cambio de signo solo en el volumen (que corresponde a un cambio de signo en la variable  $\lambda_\theta$ ) o, por otro lado, a un cambio de signo simultáneo en el volumen y en una de las variables de anisotropía. Precisamente en este punto reside la diferencia fundamental entre las contribuciones euclídea y lorentziana. Por un lado, como resultado de la contribución de los operadores de holonomía asociados a todas las direcciones fiduciales en la Ec. (4.25), los operadores  $\hat{\Theta}_i$  pueden inducir cambios en el signo de las tres etiquetas de los estados sobre los que actúan (pero nunca de más de dos de manera simultánea). Por otro lado, el factor  $[\text{sgn}(\lambda_i) + \text{sgn}(\lambda_i^*)]$  que acompaña a cada estado imagen bajo la acción de  $\hat{G}_i$  solo protege el signo de una de las etiquetas. Por tanto, *a priori* existiría la posibilidad de que apareciesen cambios de signo en las otras dos etiquetas sin que el factor mencionado anteriormente se anulase. En el caso euclídeo, la situación descrita no podría tener lugar ya que todos los cambios de signo posibles forzosamente aparecen a la vez debido a la forma funcional de la parte euclídea, lo cual garantiza que los tres signos quedan protegidos por el factor  $[\text{sgn}(\lambda_i) + \text{sgn}(\lambda_i^*)]$ , conduciendo al desacoplamiento de los subespacios de Hilbert con soporte en cada uno de los ocho octantes. El operador hamiltoniano lorentziano resulta *no* exhibir esta propiedad. En efecto, sea, e.g., el estado correspondiente a  $l = m = -1$  en la primera línea de la Ec. (4.29)

$$[1 + \text{sgn}(v - 2)]^{v - 2} \frac{v - 2 - 2\text{sgn}(v - 2)}{v - 2} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \rangle \left( \quad (4.30)$$

donde se ha incluido también el peso que le corresponde en la acción de  $G_\theta$ . Si  $2 < v < 4$ , está claro que el estado considerado tiene una contribución no nula (ya que  $v - 2 > 0$ , por lo que el factor  $[1 + \text{sgn}(v - 2)]$  es distinto de cero). Sin embargo, las dos primeras etiquetas del estado mostrado en la ecuación anterior han cambiado de signo con respecto a las del estado de partida  $|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle \in \text{Cyl}_S^+$ . Por ende, al menos uno de los estados vinculados con  $|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle \in \text{Cyl}_S^+$  mediante la acción del operador  $\hat{G}_\theta$  pertenece a un subespacio de Hilbert con soporte en un octante diferente

del de partida (a saber, el definido por  $v < 0$ ,  $\lambda_\sigma < 0$  y  $\lambda_\delta > 0$ ). Este hecho lleva a la conclusión de que la acción de  $\mathcal{H}_L^{\text{BI}}$  no deja invariantes los subespacios de Hilbert con soporte en cada uno de los octantes definidos por los signos de las variables de tríada y, en concreto, acopla las semirredes discretas de volumen positivo y negativo. Esta conclusión trae consigo inmediatamente que los sectores de superselección para el esquema de regularización alternativo de Dapor y Liegener son más grandes que aquellos que se obtienen en el formalismo estándar (es decir, los del sector euclídeo, discutidos en la sección anterior).

Antes de determinar en qué medida los sectores de superselección se ven ampliados con respecto a los obtenidos de la acción de la parte euclídea, escribamos la acción del operador  $\hat{\Theta}_\sigma$  por completitud (de ella se puede obtener la acción de  $\hat{\Theta}_\sigma$  mediante una sustitución trivial). Particularizando para estados de partida  $|v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle \in \text{Cyl}_\mathbb{S}^+$ , la acción del operador  $\hat{\Theta}_\sigma$  viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_\sigma |v, \lambda_\sigma, \lambda_\delta\rangle = & -\frac{i}{8} \sum_{(l,m) \in I_v} \left\{ l \left| v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle \right. \\ & + m \left| v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l)}{v + 2l} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle \left( \right. \\ & + l \left| v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l}{v} \lambda_\sigma, \frac{v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l)}{v + 2l} \lambda_\delta \right\rangle \left( \right. \\ & \left. \left. + m \left| v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l), \frac{v + 2l + 2m \operatorname{sgn}(v + 2l)}{v + 2l} \lambda_\sigma, \frac{v + 2l}{v} \lambda_\delta \right\rangle \right) \right\} \left( \right. \quad (4.31) \end{aligned}$$

Es fácil darse cuenta de que, en este caso, también hay estados diana que pueden pertenecer a un subespacio de Hilbert diferente al de partida. Al llevar a cabo el cómputo de la acción de  $\hat{G}_\sigma$ , cada uno de los términos en la expresión resultante aparece pesado por un factor  $[1 + \operatorname{sgn}(\lambda_\sigma^*)]$  (donde  $\lambda_\sigma^*$  es el segundo número cuántico de cada estado imagen), que impide la ocurrencia de cambios de signo en la etiqueta  $\lambda_\sigma$ . Sin embargo, cambios en los signos de  $v$  o  $\lambda_\delta$  sí que son posibles siempre y cuando no ocurran de manera simultánea a un cambio en el signo de  $\lambda_\sigma$ . Es obvio que esta situación se da, al menos cuando  $v \neq 2, 4$ . Sea, por ejemplo, el estado diana correspondiente a  $l = m = -1$  en la primera línea de la Ec. (4.31):

$$[1 + \operatorname{sgn}(v - 2)] \left| v - 2 - 2 \operatorname{sgn}(v - 2), \frac{v - 2}{v} \lambda_\sigma, \lambda_\delta \right\rangle, \quad (4.32)$$

donde se ha incluido también el factor que lo acompaña en la acción de  $\hat{G}_\sigma$  (salvo por una constante multiplicativa irrelevante). Si el estado original es tal que  $2 < v < 4$ , entonces  $v - 2 > 0$ , por lo que no hay cambio de signo en  $\lambda_\sigma$  y el prefactor no se anula. Sin embargo, el volumen imagen  $v^* = v - 4$  sí que es negativo<sup>22</sup>, por lo que este estado no pertenece al subespacio de Hilbert con soporte en el primer octante.

<sup>22</sup>También se pueden encontrar ejemplos en los que se produce un cambio de signo simultáneo en las etiquetas  $v$  y  $\lambda_\delta$ . Este es el caso, e.g., del estado correspondiente a  $l = m = -1$  en la tercera línea de la Ec. (4.31) cuando  $2 < v < 4$ , como se puede comprobar fácilmente.

## 2.1 Sectores de superselección

Una vez comprendida la acción de los operadores  $\hat{G}_i$  en términos de la acción de  $\hat{\Theta}_i$ , concluyamos esta sección con un estudio de los sectores superseleccionados por el operador hamiltoniano lorentziano. Como ya hemos determinado a partir de un análisis de las propiedades de las acciones de los operadores relevantes, los sectores de superselección euclídeos (es decir, los presentados en la Sec. 1.1) no son invariantes bajo la acción del operador que representa la parte lorentziana de la ligadura escalar. Esto implica que los sectores de superselección de la teoría cuántica asociada a cosmologías de Bianchi I se ven modificados con la introducción de la parte lorentziana en el procedimiento de regularización: los nuevos espacios de Hilbert invariantes bajo la acción del operador hamiltoniano son, en general, más extensos que los de la regularización estándar. En efecto, hemos identificado contribuciones en las que la acción de los operadores  $\hat{G}_i$  produce un cambio de signo en las variables de tríada, con lo que espacios de Hilbert con soporte en octantes distintos se ven mezclados por la acción de la ligadura, a diferencia de lo que ocurre en los estudios de las Refs. [54, 55].

A pesar de las diferencias notadas, las acciones de los hamiltonianos euclídeo y lorentziano comparten propiedades similares, tales como que ambos producen desplazamientos constantes en el volumen y dilataciones/contracciones en las anisotropías. En lo que al volumen se refiere, la acción de la contribución lorentziana (que produce desplazamientos un número entero de veces más grandes que la euclídea) sigue dejando invariantes subespacios de Hilbert con soporte en redes discretas de paso cuatro. A pesar de que las semirredes de volumen positivo y negativo no estén desacopladas, una red siempre se puede escribir como la suma directa de dos semirredes. Por consiguiente, si el estado de partida tiene un volumen  $v = \varepsilon + 4n$  para un cierto  $n \in \mathbb{N}$ , la acción repetida del operador hamiltoniano lorentziano  $\mathcal{H}_L^{\text{BI}}$  lo conecta con estados imagen con volúmenes  $v^*$  que viven en la red discreta  $\mathcal{L}_\varepsilon^+ \cup \mathcal{L}_{4-\varepsilon}^-$ , donde  $\mathcal{L}_\varepsilon^- = \{v = -(\varepsilon + 4n) : n \in \mathbb{N}\}$ . En los casos especiales en los que  $\varepsilon = 2, 4$ , se encuentra una excepción, ya que las proyecciones que intervienen en la acción del hamiltoniano cuántico aseguran que los términos asociados a estados de volumen nulo no contribuyen, ni siquiera en pasos intermedios. Por ende, en estos casos excepcionales, los volúmenes de los estados imagen  $v^*$  pertenecen a semirredes discretas,  $\mathcal{L}_2^+$  o  $\mathcal{L}_4^+$ .

En el sector de las anisotropías, tiene lugar una situación parecida. En una sección de volumen constante, la acción repetida del hamiltoniano euclídeo solo vincula estados tales que sus variables de anisotropía  $\lambda_r^*$  (con  $r = \sigma, \delta$ ) son de la forma  $\lambda_r^* = w_\varepsilon \lambda_r$ , donde  $w_\varepsilon \in \mathcal{W}_\varepsilon$  y  $\lambda_r$  son las variables de anisotropía del estado de partida. En esta sección, hemos argumentado que, cuando la ligadura escalar se regulariza siguiendo un esquema en el que la parte lorentziana se trata independientemente, las variables de anisotropía pueden cambiar de signo bajo la acción del operador de ligadura. Por consiguiente, si bien la situación encontrada no puede seguir siendo la misma, la aparición de estos cambios de signo no altera por completo la estructura de los sectores de superselección. Esta afirmación se puede entender de manera sencilla. En lo referente al presente argumento, la única diferencia relevante entre los

operadores que representan las dos contribuciones a la ligadura escalar gravitacional es que, al calcular la acción de la parte lorentziana sobre un cierto estado, un mayor número de operadores de holonomía  $\hat{N}_{\pm 2\bar{\mu}_i}$  actúa sobre él. A pesar de ello, la acción de estos operadores sigue siendo extremadamente sencilla: generan saltos de dos unidades en el parámetro adimensional de volumen y, en los casos en los que  $i = \sigma, \delta$ , dilataciones/contracciones en las variables de anisotropía del tipo  $\lambda_r \rightarrow \lambda_r^* = (v^*/v)\lambda_r$ . En definitiva, como en el caso euclídeo, las variables de anisotropía de los estados imagen vinculados con un cierto estado de partida por la acción repetida de la parte lorentziana se pueden obtener a partir de las originales mediante el producto de factores fraccionales cuyos numeradores y denominadores difieren en dos unidades. A este respecto, el efecto de la contribución lorentziana sobre las variables de anisotropía depende exclusivamente del volumen de partida y, por tanto, del parámetro  $\varepsilon$  que define la red discreta de paso cuatro que lo contiene. Sin embargo, a pesar de todos los paralelismos comentados entre las situaciones encontradas en los sectores euclídeo y lorentziano, los signos de las variables de anisotropía dejan de estar protegidos. Esto se traduce en la desaparición de la restricción en los valores de  $z$  en la definición del conjunto  $\mathcal{W}_\varepsilon$  [véase la Ec. (4.9)], que garantiza que todos los elementos del conjunto están contenidos en la semirrecta real positiva. Cuando entra en juego el operador lorentziano, los factores  $\tilde{w}_\varepsilon$  pasan a pertenecer a un conjunto más grande  $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ , definido como sigue:

$$\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon = \left\{ \prod_{n,m \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\varepsilon + 2n}{\varepsilon + 2m} \right)^{k_m^n} : k_m^n \in \mathbb{N}; n, m \neq -\varepsilon/2 \text{ si } \varepsilon = 2, 4 \right\}, \quad (4.33)$$

donde la última condición elimina la posibilidad de que aparezcan factores singulares, lo cual está asegurado por la forma funcional de la ligadura (y, en particular, por la aparición de las proyecciones sobre el complemento ortogonal de los estados de volumen cero), como hemos discutido previamente. Es fácil ver que los elementos de este nuevo conjunto admiten una expresión sencilla en términos de elementos de  $\mathcal{W}_\varepsilon$ . Efectivamente, los factores fraccionales se pueden reorganizar de tal manera que cualquier elemento  $\tilde{w}_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$  se puede escribir como

$$\tilde{w}_\varepsilon = C_\varepsilon w_\varepsilon w_{\varepsilon'}, \quad (4.34)$$

donde  $C_\varepsilon$  es un coeficiente que determina el signo de  $\tilde{w}_\varepsilon$ . Adicionalmente,  $w_\varepsilon$  y  $w_{\varepsilon'}$  pertenecen respectivamente a los conjuntos  $\mathcal{W}_\varepsilon$  y  $\mathcal{W}_{\varepsilon'}$ , con la notación

$$\varepsilon' = \begin{cases} 4 - \varepsilon & \forall \varepsilon \neq 2, 4, \\ \varepsilon & \text{si } \varepsilon = 2, 4. \end{cases} \quad (4.35)$$

La posible existencia de potencias enteras de un factor cuyo numerador y denominador tienen distinto signo da lugar a la presencia del coeficiente  $C_\varepsilon$  en la Ec. (4.34), que viene dado simplemente por

$$C_\varepsilon = \begin{cases} (-1)^{z'} \frac{\varepsilon - 2}{\varepsilon - 2 - 2\text{sgn}(\varepsilon - 2)}^{z'} & \text{si } \varepsilon \neq 2, 4, \\ 1 & \text{si } \varepsilon = 2, 4, \end{cases} \quad (4.36)$$



con  $z' \in \mathbb{Z}$ .

Recordemos que, como ya se ha comentado anteriormente, los casos en los que  $\varepsilon = 2, 4$  son peculiares: como resultado del desacoplamiento de los análogos cuánticos de las singularidades clásicas, que impide que el signo del volumen cambie en estas situaciones, se superseleccionan semirredes en lugar de redes completas. Otro resultado de este desacoplamiento de los estados singulares es que, cuando el volumen de partida vive en una de las semirredes asociadas a estos valores especiales de  $\varepsilon$ , las variables de anisotropía tampoco experimentan cambios de signo. Estos fenómenos resultan en espacios de Hilbert invariantes idénticos a los superseleccionados por el operador hamiltoniano euclídeo. Esta información queda ya incorporada en las definiciones introducidas en el párrafo anterior. En efecto, cuando  $\varepsilon = 2, 4$ , es fácil darse cuenta de que  $\mathcal{W}_\varepsilon = \mathcal{W}_{\varepsilon'} = \mathcal{W}_\varepsilon \cdot \mathcal{W}_{\varepsilon'}$  (ya que un producto de dos elementos de  $\mathcal{W}_\varepsilon$  pertenece también a  $\mathcal{W}_\varepsilon$ , como sigue de su definición), por lo que el conjunto  $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$  se reduce a su contrapartida euclídea  $\mathcal{W}_\varepsilon$  en estos casos especiales [véase también la Ec. (4.36)].

Para concluir, es interesante notar algunas de las propiedades del conjunto  $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$ . A pesar de ser más extenso que el que aparece en el contexto del esquema de regularización estándar,  $\mathcal{W}_\varepsilon$ , resulta conservar las propiedades notables de ser infinito numerable y denso, esta vez en la recta real en lugar de en la semirrecta real positiva. Esta última propiedad se puede demostrar siguiendo un argumento completamente análogo al expuesto en el Apéndice D de la Ref. [58]. Efectivamente, el subconjunto de elementos positivos es trivialmente denso en  $\mathbb{R}^+$ , dado que contiene al conjunto  $\mathcal{W}_\varepsilon$ , que es denso [58]. Un argumento similar se aplica al subconjunto de elementos  $\tilde{w}_\varepsilon$  negativos en la semirrecta real negativa.

A modo de resumen, los sectores de superselección que resultan del esquema de regularización de Dapor y Liegener, en el que la contribución lorentziana a la ligadura escalar se trata de forma independiente sin recurrir a las simetrías del sistema, retienen parcialmente la estructura de los del formalismo estándar, en el que el hamiltoniano se escribe en términos únicamente de su parte euclídea. Por un lado, el volumen  $v^*$  de los estados vinculados con un cierto estado de partida por la acción repetida de la parte lorentziana pertenece a una red discreta de paso cuatro (que se puede entender como la suma directa de dos de las semirredes discretas que aparecen en la definición de los sectores de superselección euclídeos), caracterizada por un parámetro  $\varepsilon$  determinado por el valor del volumen del estado inicial. Por otro lado, en una sección de volumen constante, los estados imagen vienen etiquetados por variables de anisotropía proporcionales a las de partida, con factores de proporcionalidad que solo dependen del número cuántico de volumen de partida (o, alternativamente, de  $\varepsilon$ ) y que pertenecen a un conjunto  $\tilde{\mathcal{W}}_\varepsilon$  (cuyos elementos se pueden reescribir fácilmente en términos de otros pertenecientes a dos conjuntos que intervienen en la definición de los sectores de superselección euclídeos). Dicho esto, aunque los signos del volumen y de las variables de anisotropía no están protegidos bajo la acción de la parte lorentziana, el operador lorentziano deja invariantes espacios de Hilbert que, si bien son más complejos que los euclídeos, siguen siendo separables.

### 3 Nota acerca del caso isótopo

En este capítulo hemos estudiado cómo los sectores de superselección invariantes bajo la acción de la parte lorentziana de la ligadura escalar de cosmologías de Bianchi I se ven modificados con respecto a los encontrados en el formalismo euclídeo. No obstante, la propia conclusión de que los sectores de superselección estudiados no coinciden con los estudiados previamente en las Refs. [54, 55] parece en directa contradicción con los resultados obtenidos en el contexto de cosmologías de FLRW planas, donde la introducción de la contribución lorentziana no altera los espacios de Hilbert invariantes del formalismo estándar (véanse la Ref. [176] y el Apéndice A). Para reconciliar estas dos afirmaciones, parece necesario que exista un mecanismo que impida la extensión de los sectores de superselección en el caso isótopo.

Como se ha discutido a lo largo de esta sección, la razón principal por la que los sectores de superselección se ven modificados con respecto a los euclídeos es que la acción de la parte lorentziana de la ligadura no respeta los signos de las componentes de la tríada densitizada. En efecto, su acción sobre un cierto estado puede contener contribuciones cuyos números cuánticos asociados tengan signo opuesto a los del estado de partida. La acción del hamiltoniano euclídeo impide la aparición de estos cambios de signo gracias a la presencia de un factor  $[\text{sgn}(\lambda_i) + \text{sgn}(\lambda_i^*)]$  que pesa cada una de las contribuciones resultantes de la acción del operador  $\hat{F}_i$ . Este factor, junto con el hecho de que cada operador  $\hat{F}_i$  solo afecta a la etiqueta  $\lambda_i$  correspondiente a la misma dirección espacial, asegura que, si bajo la acción de  $\hat{F}_i$  aparece un estado en el que se ha experimentado un cambio de signo (lo cual solo puede ocurrir en la etiqueta  $\lambda_i$ ), no va a contribuir en la expresión de la acción de la parte euclídea. Sin embargo, las contrapartidas lorentzianas de estos operadores,  $\hat{G}_i$ , generan cambios en dos de las tres variables  $\lambda_i$ , ya que contienen productos de operadores de holonomía asociados a dos direcciones espaciales diferentes. Por consiguiente, aunque aparezca un factor que protege el signo de una de las variables  $\lambda_i$ , existen situaciones en las que aparecen contribuciones no nulas de estados que pertenecen a espacios de Hilbert con soporte en un octante distinto al de partida, por lo que los sectores de selección de la teoría euclídea no son invariantes bajo la acción del operador lorentziano.

Parece interesante preguntarse cómo se evita esta situación en el límite isótopo, límite en el que los sectores de superselección de las partes euclídea y lorentziana coinciden. En vista del resumen del párrafo anterior, la respuesta es sencilla. En escenarios isótopos, todas las componentes no triviales de la tríada coinciden y lo mismo ocurre con las de la conexión. Por lo tanto, los grados de libertad gravitacionales se encuentran codificados en un único par canónico  $(c, p)$ . Como consecuencia, las variables  $\lambda_i$  se reducen a una única función del espacio de fases isótopo dada por  $\lambda = \text{sgn}(p)|p|^{1/2}/(4\pi G\gamma\sqrt{\Delta})^{1/3}$ . Esto implica que el signo del producto de un número impar de estas variables viene dado en el límite isótopo por el signo de la única variable de tríada  $p$  o, equivalentemente, por el signo del parámetro adimensional de volumen  $v$ . Entonces, cada contribución en la acción del operador hamiltoniano lorentziano aparece pesada por un factor  $[\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v^*)]$ , que se anula idénticamente cuando se produce un cambio en el signo del volumen del estado al que acompaña (que es la única etiqueta de los estados cuánticos asociados a cosmologías de FLRW

planas). Dado que la identificación de todas las direcciones espaciales en el límite isótropo implica que solo existe un grado de libertad triádico (a saber, la variable  $p$ ), este factor es suficiente para garantizar que la acción de la ligadura no conduce a cambios de signo: ya no existen variables de triada adicionales cuyo signo pueda cambiar sin que se entere el factor  $[\text{sgn}(v) + \text{sgn}(v^*)]$ . Esta es, en última instancia, la razón por la que, en escenarios isótropos, no se halla una expansión de los sectores de superselección.

## 4 Conclusión

En la Sec. 1, hemos comenzado repasando la cuantización de la contribución euclídea a la ligadura escalar correspondiente a cosmologías de Bianchi I empleando la prescripción MMO [45] y el análisis subsecuente de las propiedades del operador resultante (véase la Ref. [54] para más detalles). Como resultado de dicho análisis, se concluye que la contribución euclídea a la ligadura escalar (y, por tanto, la ligadura hamiltoniana estándar en la LQC de cosmologías de Bianchi I) tiene una representación cuántica bien definida y que, aunque las propiedades espectrales del operador que la representa a nivel cuántico no se han podido determinar debido a su compleja forma funcional, su acción deja invariantes un cierto número de sectores de superselección cuya estructura se puede determinar con precisión. Es importante mencionar que existen ambigüedades adicionales en el programa de cuantización más allá de la selección de esquema de regularización y de prescripción de orden de factores, como, por ejemplo, aquella relacionada con la implementación de la dinámica mejorada (para cuya inclusión se sigue un método sobre el que no hay consenso en la comunidad, a diferencia de lo que ocurre en el contexto isótropo [44]). Si bien se han sugerido varias propuestas, la considerada en este capítulo (véase la Ref. [49]) cuenta con un mayor grado de aceptación. Al final de este apartado, incluimos un breve comentario acerca de cómo se verían modificados nuestros resultados si considerásemos otras opciones, como la propuesta en la Ref. [52].

Tras repasar el procedimiento seguido en la Ref. [54] para el análisis de la contribución euclídea, hemos centrado nuestra atención en la parte lorentziana de la ligadura y en su tratamiento independiente dentro del marco del esquema de regularización propuesto por Dapor y Liegener. En la Sec. 2, hemos promovido la contribución lorentziana clásica correspondiente a cosmologías de Bianchi I (deducida previamente en la Ref. [176]) a un operador sobre el espacio de Hilbert cinemático. Para ello, hemos empleado la prescripción MMO junto con un orden de factores general para las potencias del operador de volumen, que conlleva la aparición de proyecciones sobre el complemento ortogonal de los estados singulares tras la actuación de cada uno de los operadores de holonomía que se encuentran en cada término del operador resultante. Tras densitizar dicho operador (desacoplando así los estados de volumen cero y restringiendo el estudio a su complemento ortogonal), hemos obtenido la acción de los operadores que intervienen en la definición del hamiltoniano lorentziano. Hemos motivado la selección de un orden de factores concreto para las potencias del operador de volumen apelando a la compatibilidad con trabajos previos en el contexto de la

regularización alternativa. Con dicho orden, hemos hallado las propiedades relevantes de los operadores involucrados en la determinación de los sectores de superselección invariantes bajo la acción de la versión densitizada del operador hamiltoniano lorentziano. Si bien las propiedades observadas son similares a las encontradas en el caso euclídeo, existe una diferencia fundamental: en vez de generar saltos de cuatro unidades en el parámetro de volumen, la contribución lorentziana da lugar a desplazamientos el doble de grandes. Una vez establecidas estas propiedades, hemos pasado a discutir las reglas de superselección asociadas en la Sec. 2.1. Dado que los desplazamientos en el volumen generados por la parte lorentziana son precisamente el doble de grandes que los inducidos por la parte euclídea, cabría esperar que la acción del primero superseleccionase también espacios de Hilbert poblados por estados cuyos volúmenes viven en semirredes discretas. No obstante, esto no es así debido a que la forma funcional del operador lorentziano permite la aparición de cambios de signo en los números cuánticos de los estados sobre los que actúa. Por ende, en lugar de semirredes, la contribución lorentziana define sectores de superselección con soporte en redes discretas completas. Algo similar ocurre en el sector de las variables de anisotropía. Si bien la acción repetida de la contribución lorentziana produce también contracciones y dilataciones dadas por ciertos factores de proporcionalidad dependientes del volumen (obtenidos mediante productos de fracciones cuyos numeradores y denominadores difieren en dos unidades), dichos factores de proporcionalidad pueden ser ahora negativos. Por consiguiente, la definición de los sectores de superselección involucra un conjunto más complejo, que abarca valores negativos pero que retiene una estructura similar a la de su análogo euclídeo. A pesar de las complicaciones que emergen como consecuencia de la adopción de un procedimiento de regularización más cercano al empleado en la LQG, la ligadura escalar completa (incluyendo tanto su contribución euclídea como su contribución lorentziana) se puede representar cuánticamente de manera bien definida y tiene una acción que deja invariantes sectores de superselección en general<sup>23</sup> más grandes que los del formalismo estándar, pero que conservan la propiedad de ser separables.

Para concluir, hagamos un pequeño comentario acerca de cómo se verían afectados estos resultados si se considerase otra prescripción para la implementación de la dinámica mejorada (que, como mencionamos anteriormente, es otro punto en el que el programa de cuantización es ambiguo). En particular, discutamos el caso de la propuesta de la Ref. [52], en la que la longitud fiducial mínima correspondiente a cada dirección espacial solo depende de su variable de tríada asociada. Esto implica que los operadores de holonomía fundamentales solo generan desplazamientos en su dirección fiducial correspondiente, dividiéndose la teoría cuántica en tres copias idénticas (una por dirección espacial). Adicionalmente, esta definición de la longitud fiducial mínima permite la construcción de parámetros de volumen asociados a cada una de las direcciones espaciales (a diferencia de un único parámetro de volumen y dos variables de anisotropía). En una representación en la que los estados del espacio

---

<sup>23</sup>Como hemos discutido, existen casos excepcionales en los que el volumen de partida pertenece a una de las dos redes discretas simétricas en torno al origen. En estas situaciones especiales, los signos de las componentes de la tríada son respetados por la acción de la parte lorentziana de la ligadura y los sectores de superselección correspondientes resultan coincidir con los de la contribución euclídea.

de Hilbert cinemático vienen etiquetados por estos tres parámetros de volumen, las holonomías fundamentales producen desplazamientos constantes en la etiqueta pertinente. A pesar de todas estas simplificaciones (que conducen, entre otras, a una reducción drástica del número de términos en la acción del hamiltoniano lorentziano), es fácil convencerse de que los subespacios de Hilbert con soporte en cada uno de los octantes siguen acoplados. En efecto, cada una de las contribuciones a la acción de la parte lorentziana está pesada por un factor que protege el signo de una de las variables de volumen pero cada término contiene operadores de holonomía asociados a dos direcciones espaciales distintas, dando lugar a desplazamientos en dos de los tres parámetros de volumen. Por tanto, seguirá habiendo términos en los que la variable de volumen cuyo signo no está protegido cambie de signo, llevando a una ruptura del desacoplamiento de octantes que sí tiene lugar en el sector euclídeo. En definitiva, los resultados presentados en este capítulo siguen siendo válidos cualitativamente cuando se selecciona la propuesta de implementación de la dinámica mejorada de la Ref. [52].

## Capítulo 5

# Regularización alternativa en el formalismo híbrido

En este capítulo, construimos un marco teórico para el tratamiento de perturbaciones cosmológicas incorporando el esquema de regularización alternativo en el formalismo de la cosmología cuántica híbrida (que, tal y como fue presentado en la Ref. [63], estaba ya diseñado para admitir cualquier representación cuántica de la geometría homogénea). Concretamente, consideramos inhomogeneidades perturbativas sobre un espaciotiempo de FLRW con secciones espaciales tres-toroidales planas y con un campo escalar mínimamente acoplado que hace las veces de contenido material. El objeto principal de estudio en este capítulo son las perturbaciones de carácter escalar y tensorial. Las primeras son de gran interés físico, ya que se acoplan a las fluctuaciones de densidad de energía y son responsables de las inhomogeneidades y anisotropías observadas hoy en día en el Universo. Por otro lado, las perturbaciones tensoriales generan un fondo primordial de ondas gravitacionales que, de ser observado en el futuro, proporcionaría una información valiosa como huellas únicas de la dinámica cosmológica temprana. Para lidiar con el problema de la invariancia de gauge [165], seguimos los enfoques de las Refs. [63] y [66] en la selección de variables invariantes de gauge para los grados de libertad perturbativos. Finalmente, para la representación cuántica de la geometría homogénea, empleamos la prescripción seguida en la Ref. [176] (véase el Capítulo 3), que generaliza la estrategia presentada originalmente en la Ref. [45] al marco del esquema de regularización alternativo.

El resto de este capítulo, en el que se recogen los resultados presentados por primera vez en la Ref. [181], está organizado de la siguiente manera. En la Sec. 1, tras un recordatorio de la elección de variables para la descripción hamiltoniana del sistema introducidas en la Sec. 4 de los Preliminares, escribimos explícitamente el modo cero de la ligadura escalar (incluyendo los términos cuadráticos en las perturbaciones escalares y tensoriales). Seguidamente, procedemos a la cuantización del sistema ligado completo en la Sec. 2, siguiendo el enfoque híbrido e implementando la propuesta de regularización de Dapor y Liegener en la geometría homogénea, construyendo una representación alternativa para el momento del factor de escala. En la Sec. 3, consideramos una cierta clase de soluciones a la ligadura hamiltoniana cuántica cuyas dependencias en la geometría homogénea y en las perturbaciones pueden ser

separadas. Centrándonos en este tipo de soluciones, derivamos una ligadura maestra para las perturbaciones invariantes de gauge y obtenemos las masas dependientes del fondo que gobiernan la propagación de las perturbaciones escalares y tensoriales. En último lugar, presentamos un resumen de los resultados principales del capítulo en la Sec. 4.

## 1 Descripción canónica del modelo clásico

Sea una cosmología homogénea e isotrópica con secciones espaciales planas e isomorfas a un tres-toro, cuyo contenido material viene dado por un campo escalar (al que también nos referiremos como inflatón) sujeto a un cierto potencial. Consideremos la introducción de inhomogeneidades en forma de perturbaciones en torno al sistema descrito anteriormente (tanto de la geometría como del campo). Siguiendo el proceso ilustrado en la Sec. 4 de los Preliminares (consúltese la Ref. [63] para una discusión detallada), es posible obtener una formulación hamiltoniana de este sistema empleando variables invariantes de gauge para las perturbaciones escalares  $V_l^{\vec{n},\epsilon} = (V_{q_l}^{\vec{n},\epsilon}, V_{p_l}^{\vec{n},\epsilon})$  [véanse las Ecs. (2.42) y (2.43)] y tensoriales  $(\tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}, \pi_{\tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}})$ . Como consecuencia de la invariancia bajo difeomorfismos de la relatividad general, el sistema canónico en cuestión hereda un hamiltoniano compuesto únicamente por ligaduras. En efecto, con una elección de variables apropiada, el hamiltoniano resultante de una truncación a orden cuadrático en las perturbaciones tiene la forma dada en la Ec. (2.44).

Reescribamos en primer lugar la contribución homogénea a dicha ligadura separando el término cinético asociado al campo escalar de las contribuciones geométrica y de potencial:

$$H_{|0} = \frac{1}{2} e^{-3\tilde{\alpha}} (\pi_{\tilde{\varphi}}^2 - \mathcal{H}_0^{(2)}), \quad (5.1)$$

donde

$$\mathcal{H}_0^{(2)} = \pi_{\tilde{\alpha}}^2 - 2e^{6\tilde{\alpha}} \bar{W}(\tilde{\varphi}). \quad (5.2)$$

En las expresiones anteriores,  $(\tilde{\varphi}, \pi_{\tilde{\varphi}})$  son las variables canónicas asociadas al inflatón —siendo  $\bar{W}(\tilde{\varphi})$  el potencial al que está sujeto<sup>24</sup>—, mientras que  $(\tilde{\alpha}, \pi_{\tilde{\alpha}})$  son las variables que encapsulan los grados de libertad asociados a la geometría homogénea (más concretamente,  $\tilde{\alpha}$  es el factor de escala logarítmico de la cosmología de FLRW de fondo y  $\pi_{\tilde{\alpha}}$ , su momento canónicamente conjugado). En estos nuevos términos, el modo cero de la ligadura escalar se puede escribir como  $e^{-3\tilde{\alpha}} \tilde{H}$ , con [63, 66]

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left( \pi_{\tilde{\varphi}}^2 - \mathcal{H}_0^{(2)} - \Theta_e^S - \Theta_o^S \pi_{\tilde{\varphi}} - \Theta^T \right) \left( \quad \right) \quad (5.3)$$

---

<sup>24</sup>Más precisamente, está relacionado con el potencial de campo  $W(\tilde{\varphi})$  mediante la expresión  $\bar{W}(\tilde{\varphi}) = \sigma^4 W(\tilde{\varphi}/\sigma)$ , donde la constante  $\sigma$  viene definida por  $\sigma^2 = 4\pi G/(3l_0^3)$  y  $l_0$  es la longitud coordenada de los ciclos fundamentales de las secciones tres-toroidales.

Las funciones introducidas en la ecuación anterior se definen como sigue:

$$\Theta_o^S = -\vartheta_o \sum_{\vec{n}, \epsilon} (V_{q_1}^{\vec{n}, \epsilon})^2, \quad \Theta_e^S = -\sum_{\vec{n}, \epsilon} \left[ (\vartheta_e \omega_n^2 + \vartheta_e^q) (V_{q_1}^{\vec{n}, \epsilon})^2 + \vartheta_e (V_{p_1}^{\vec{n}, \epsilon})^2 \right] \quad (5.4)$$

$$\Theta^T = -\sum_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}} \left[ (\vartheta_e \omega_n^2 + \vartheta_T^q) (\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}})^2 + \vartheta_e (\pi_{\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}})^2 \right] \quad (5.5)$$

donde  $\omega_n^2 = -4\pi^2 |\vec{n}|^2 / l_0^2$  ( $\vec{n}$  denota el vector de onda del modo perturbativo en cuestión y  $l_0$  es, como se indica en el pie de página 24, la longitud coordenada de los ciclos fundamentales del tres-toro isomorfo a las secciones espaciales) y

$$\vartheta_o = -12e^{4\tilde{\alpha}} \bar{W}_{,\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi}) \frac{1}{\pi_{\tilde{\alpha}}}, \quad \vartheta_e = -e^{2\tilde{\alpha}}, \quad (5.6)$$

$$\vartheta_e^q = -e^{-2\tilde{\alpha}} \mathcal{H}_0^{(2)} - 19 - 18 \frac{\mathcal{H}_0^{(2)}}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} \left( +e^{4\tilde{\alpha}} [\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi}) - 4\bar{W}(\tilde{\varphi})], \quad (5.7) \right.$$

$$\vartheta_T^q = -e^{-2\tilde{\alpha}} \mathcal{H}_0^{(2)} - 4e^{4\tilde{\alpha}} \bar{W}(\tilde{\varphi}). \quad (5.8)$$

Aquí,  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}$  y  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$  denotan, respectivamente, la primera y segunda derivadas del potencial del inflatón con respecto a  $\tilde{\varphi}$ .

Es importante notar que las contribuciones cuadráticas en las perturbaciones escalares  $\Theta_e^S + \Theta_o^S \pi_{\tilde{\varphi}}$  y tensoriales  $\Theta^T$  (que suelen recibir el nombre de *hamiltoniano de Mukhanov-Sasaki* y *hamiltoniano tensorial*, respectivamente) son trivialmente invariantes de gauge. Adicionalmente, cabe enfatizar que no hay contribuciones lineales en  $V_{p_1}^{\vec{n}, \epsilon}$  o  $\pi_{\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}}$  en dichos hamiltonianos. Esto es una condición necesaria para que la dinámica cuántica sea unitariamente implementable y, de hecho, los momentos  $V_{p_1}^{\vec{n}, \epsilon}$  y  $\pi_{\tilde{d}_{\vec{n}, \epsilon, \tilde{\epsilon}}}$  se definen de tal modo que dichas posibles contribuciones desaparezcan, eliminando de paso una libertad existente en su fijación [63, 66].

Antes de proceder a la cuantización del sistema, conviene comentar que el cálculo explícito de las contribuciones cuadráticas al modo cero de la ligadura escalar proporciona términos adicionales que, no obstante, se pueden reabsorber mediante redefiniciones apropiadas de los multiplicadores de Lagrange [63, 66]. Con una notación obvia para los nuevos multiplicadores, el hamiltoniano total admite la siguiente expresión:

$$H = \bar{N}_0 e^{-3\tilde{\alpha}} \tilde{H} + \sum_{\vec{n}, \epsilon} G_{\vec{n}, \epsilon} V_{p_2}^{\vec{n}, \epsilon} + \sum_{\vec{n}, \epsilon} \left( K_{\vec{n}, \epsilon} V_{p_3}^{\vec{n}, \epsilon}, \quad (5.9) \right.$$

donde, recordemos,  $V_{p_2}^{\vec{n}, \epsilon}$  y  $V_{p_3}^{\vec{n}, \epsilon}$  son las ligaduras perturbativas abelianizadas. Con estos elementos básicos de la teoría clásica, podemos proceder a la representación cuántica de cada sector del sistema siguiendo las ideas del formalismo híbrido.

## 2 Cuantización de lazos híbrida

En esta sección, abordamos la cuantización del modelo anterior siguiendo las pautas del formalismo híbrido (consúltense las Refs. [60–63] para más detalles acerca de este



enfoque al tratamiento de perturbaciones cosmológicas dentro del marco de la LQC). Como ya hemos mencionado en los Preliminares, la estrategia de cuantización de este modelo se basa en la hipótesis de que existe un régimen de la dinámica cuántica en el que los efectos de gravedad cuántica afectan fundamentalmente a la geometría homogénea, mientras que es una buena aproximación describir las perturbaciones empleando representaciones más convencionales (como las representaciones de Fock de la teoría cuántica de campos ordinaria). En esta sección, asumimos que esta hipótesis está bien fundamentada y cuantizamos el modelo que describe el sistema cosmológico completo al orden de truncación considerado, adoptando una representación de gravedad cuántica para los grados de libertad geométricos del sector homogéneo y representaciones de Fock para las inhomogeneidades. Finalmente, representamos las ligaduras como operadores sobre el espacio de Hilbert cinemático del sistema y las imponemos siguiendo el programa de Dirac [28].

En la formulación original del enfoque híbrido, la única asunción acerca de la cuantización escogida para el sector homogéneo es que proporciona una representación de las relaciones de conmutación canónicas clásicas tal que los operadores geométricos conmuten con los asociados al campo material (como ocurre clásicamente). Como consecuencia, el espacio de Hilbert cinemático asociado al sector homogéneo completo se puede escribir como el producto tensorial de los espacios de Hilbert sobre los que están definidos los operadores geométricos y los de campo,  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ . En lo referente a las perturbaciones, se asume una cuantización de Fock (aunque el formalismo es extensible a otras elecciones [63]) tal que los operadores que las representan conmutan con los del sector homogéneo. Esto, junto con una prescripción apropiada de orden de factores, es todo lo necesario para construir formalmente la teoría cuántica general presentada en la Ref. [63].

Cabe enfatizar que, en efecto, el formalismo híbrido no requiere en absoluto que se particularice a una cierta cuantización de la geometría homogénea y, en este sentido, trasciende las barreras de la LQC. No obstante, de aquí en adelante, nos centraremos en el caso en el que se selecciona una representación polimérica para la geometría homogénea.

## 2.1 Representación cuántica del sector homogéneo

Comencemos especificando la representación para el modo cero del inflatón y para la geometría homogénea, cuantizando posteriormente la contribución homogénea a la ligadura escalar y discutiendo las ambigüedades que aparecen en ella.

En lo que concierne al campo material, tomamos una representación de Schrödinger usual en la que el operador de campo  $\hat{\tilde{\varphi}}$  actúa multiplicativamente y el operador de momento  $\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}$  actúa como una derivada generalizada. El espacio de Hilbert cinemático asociado al contenido material es, entonces,  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}} = L^2(\mathbb{R}, d\tilde{\varphi})$ .

En lo referente a la geometría homogénea, tomamos una representación polimérica siguiendo las ideas de la LQC. Más concretamente, seguimos la prescripción de dinámica mejorada propuesta en la Ref. [44] (en la que se introduce una longitud fiducial mínima para reflejar el hecho de que existe un autovalor mínimo no nulo en el espectro del operador de área en la LQC) y apelamos a la prescripción MMO [45]

para resolver la ambigüedad existente en la selección de un orden de factores en la cuantización de productos de funciones del espacio de fases que no conmutan bajo corchetes de Poisson. Además, empleamos el esquema de regularización alternativo propuesto por Dapor y Liegener para cuantizar la contribución gravitacional al modo cero de la ligadura escalar.

Como hemos explicado a lo largo de esta tesis, el procedimiento seguido en la LQC consiste en describir los grados de libertad gravitacionales empleando la conexión  $\mathfrak{su}(2)$  de Ashtekar-Barbero y la tríada densitizada, que forman un par canónico, en lugar del factor de escala y su momento asociado. Dada la homogeneidad y la isotropía del sistema cosmológico considerado como fondo homogéneo, toda la información dinámica resulta estar codificada en dos variables constantes en cada sección espacial: una variable de conexión  $c$  y una variable de tríada  $p$ . La implementación de la dinámica mejorada lleva a considerar un par de variables alternativo,  $(c, p) \rightarrow (b, v)$ , donde  $b$  es clásicamente proporcional al ritmo de expansión y  $v$  es proporcional al volumen físico del Universo. Se puede ver que su relación con el factor de escala logarítmico  $\tilde{\alpha}$  y su momento canónicamente conjugado es la siguiente:

$$e^{\tilde{\alpha}} = \left( \frac{3\gamma\sqrt{\Delta}}{2\sigma} |v| \right)^{1/3} = \left( \frac{3l_0}{4\pi G} \right)^{1/2} V^{1/3}, \quad (5.10)$$

$$\pi_{\tilde{\alpha}} = -\frac{3}{2}bv, \quad (5.11)$$

donde  $\sigma^2 = 4\pi G/(3l_0^3)$  (véase el pie de página 24) y, recordemos,  $V = 2\pi G\gamma\sqrt{\Delta}|v|$  es el volumen físico del Universo. Las variables  $(b, v)$  constituyen un par canónico, con corchetes de Poisson proporcionales a la identidad:  $\{b, v\} = 2$ . Dado que la conexión no posee un análogo cuántico bien definido en la LQG (como consecuencia del hecho de que la representación cuántica del álgebra de holonomías y flujos no es continua), es necesario considerar en su lugar sus holonomías, dadas en última instancia por exponenciales complejas de la variable  $b$ , para las cuales la notación usual es  $\mathcal{N}_{\pm n\bar{\mu}} = \exp(\pm i n b / 2)$  (donde contemplamos mayormente valores enteros de  $n$ ). Por tanto, estos elementos de holonomía y la variable de tríada (o el volumen) desempeñan el papel de operadores fundamentales en la teoría cuántica.

El espacio de Hilbert cinemático asociado a la geometría homogénea,  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ , viene dado por la envoltura lineal de los autoestados del volumen  $|v\rangle$  completada con respecto al producto interno discreto  $\langle v|v'\rangle = \delta_{v,v'}$  [40]. En la base de autoestados del volumen, la acción de los operadores fundamentales es sencilla: por un lado, el volumen actúa trivialmente por multiplicación y, por otro lado, los operadores de holonomía generan desplazamientos constantes en la etiqueta del estado sobre el que actúan,  $\hat{\mathcal{N}}_{\pm n\bar{\mu}} |v\rangle = |v \pm n\rangle$ .

A continuación, promovamos el hamiltoniano asociado a un operador sobre el espacio de Hilbert descrito en el párrafo anterior. El operador cuántico resultante proporciona la contribución homogénea al modo cero de la ligadura. Dado que, como hemos comentado, la variable de conexión no tiene un análogo cuántico bien definido, el primer paso en la cuantización de la ligadura escalar homogénea  $H_{|0}$  es su reexpresión en términos de las holonomías fundamentales, procedimiento que

suele llamarse *regularización*. No obstante, actualmente no existe un consenso en la comunidad acerca de cómo se debe regularizar el hamiltoniano, sino que existen varias propuestas alternativas que conducen a teorías cuánticas distintas. En esta tesis, consideramos principalmente las dos más prominentes: la que se ha empleado habitualmente en la LQC homogénea [44] y la propuesta más recientemente por Dapor y Liegener en la Ref. [88]. Conviene destacar una vez más que la diferencia esencial entre ellas es que la segunda involucra el tratamiento independiente de la contribución lorentziana sin apelar a las simetrías del sistema [88, 90, 91], mientras que la primera explota la homogeneidad y la planitud espacial para reescribir la parte lorentziana en términos de la euclídea [44, 45] (por lo que no puede ser aplicada sin modificación a escenarios más generales en los que dichas simetrías no están presentes). En este sentido, se podría aducir que la propuesta de Dapor y Liegener es más cercana al procedimiento seguido en el marco de la LQG, donde cada parte de la ligadura hamiltoniana requiere una regularización separada. Dado que no se tiene seguridad de que la LQC capture la dinámica cosmológica de la LQG, resulta interesante examinar diferentes alternativas para determinar el grado de robustez de las predicciones físicas estándar (e.g., las referentes al mecanismo de resolución de la singularidad inicial).

Con esta motivación en mente, pasemos a investigar la cuantización híbrida de inhomogeneidades perturbativas que se propagan en un fondo homogéneo e isótropo descrito por el modelo de la LQC resultante de considerar el esquema de regularización alternativo de Dapor y Liegener. El operador de ligadura asociado (véase el Capítulo 3) se construyó por primera vez en la Ref. [176] empleando la prescripción de simetrización MMO. Como se muestra en esa referencia, la versión densitizada del operador hamiltoniano del fondo sin perturbar viene dado por  $(\hat{\pi}_\varphi^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)})/2$ , con [176]

$$\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} = - \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^2 \left( \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^2 - \frac{1 + \gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 + \frac{3l_0^3}{2\pi G} \hat{V}^2 \hat{W} \right) \left( \quad \right) \quad (5.12)$$

Aquí, el operador de potencial de campo se ha de entender, como cualquier función del modo cero del inflatón, como el operador multiplicativo  $\hat{W} = \bar{W}(\hat{\varphi})$ . Adicionalmente, el operador  $\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}$  (para cualquier valor entero de  $n$ ) se define como<sup>25</sup>

$$\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}} = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \hat{V}^{1/2} \left[ \widehat{\text{sgn}(v)}, \hat{\mathcal{N}}_{n\bar{\mu}}^c - \hat{\mathcal{N}}_{-n\bar{\mu}}^c \right]_+ \hat{V}^{1/2}, \quad (5.13)$$

donde, empleando la notación introducida en el capítulo anterior,  $[\cdot, \cdot]_+$  denota el anticonmutador de operadores.

Este operador, que está densamente definido en  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ , exhibe las siguientes propiedades. En primer lugar, aniquila el estado singular asociado al autovalor nulo del operador de volumen y deja invariante su complemento ortogonal  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}}$ . En segundo lugar, la acción del operador de ligadura deja invariantes los subespacios de Hilbert asociados a valores positivos y negativos del parámetro de volumen  $v$ .

<sup>25</sup>Nótese la diferencia en la representación de las potencias del volumen con respecto al operador obtenido originalmente en la Ref. [176], que es consecuencia de la elección de una prescripción distinta para la representación del inverso de la longitud coordenada mínima,  $1/\bar{\mu}$ . Para más detalles al respecto, consúltese el apéndice de la Ref. [180] o, equivalentemente, el Apéndice A de esta tesis.

Más precisamente, su acción superselecciona subespacios de Hilbert  $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm$  con soporte en semirredes de paso cuatro  $\{\pm(\varepsilon + 4n), n \in \mathbb{N}\}$  [176, 180], en los que el volumen posee un autovalor mínimo en valor absoluto, ya sea  $\varepsilon$  o  $-\varepsilon$ , dependiendo del signo del volumen en la semirred en cuestión. De aquí en adelante, particularizaremos la discusión a estados pertenecientes a  $\mathcal{H}_\varepsilon^+$  con un  $\varepsilon \in (0, 4]$  fijo.

Dado que las inhomogeneidades introducidas en el sistema son de carácter perturbativo, parece razonable requerir que su inclusión no modifique los sectores de superselección del modelo sin perturbar. Por este motivo, tendremos en cuenta la estructura comentada de estos sectores homogéneos en la representación de las contribuciones perturbativas cuadráticas al modo cero de la ligadura hamiltoniana.

## 2.2 Representación de Fock de las perturbaciones e implementación cuántica de las ligaduras perturbativas

En lo referente a las perturbaciones, consideramos una cuantización de Fock, seleccionada salvo equivalencias unitarias al requerir que el vacío sea invariante bajo las isometrías espaciales del fondo y que la dinámica cuántica sea implementable mediante un operador unitario. Además, también se podrían imponer condiciones adicionales que restrinjan más aún la elección de representación, como la buena definición de los operadores construidos a partir de los elementales.

Notablemente, la representación cuyas variables de creación y destrucción asociadas se corresponden con osciladores armónicos de frecuencia constante  $\omega_n$  forma parte de la familia de representaciones unitariamente equivalentes seleccionada por los criterios de la invariancia del vacío y de la unitariedad de la dinámica cuántica. En lo que sigue, partimos de esta representación por simplicidad, aunque nada impediría emplear cualquier otra (potencialmente con mejores propiedades físicas) en la misma clase de equivalencia, de acuerdo con el comentario al final del párrafo anterior. Los espacios de Fock correspondientes a los modos de Mukhanov-Sasaki y a los modos tensoriales serán denotados por  $\mathcal{F}_S$  y  $\mathcal{F}_T$ , respectivamente. Una base ortonormal de estos espacios viene dada por los estados etiquetados por un número de ocupación (entero y no negativo) por modo. Los operadores de creación y destrucción asociados a un cierto modo actúan de la forma usual, aumentando o disminuyendo el número de ocupación correspondiente en una unidad.

Para completar el programa de cuantización, aún es necesario representar cuánticamente las ligaduras del sistema e imponerlas a nivel cuántico, requiriendo que los estados físicos sean aniquilados por todas ellas. Nótese que, en la descripción invariante de gauge del sistema propuesta en la Ref. [63] (e ilustrada muy esquemáticamente en la Sec. 4 de los Preliminares), las ligaduras conmutan bajo corchetes de Poisson, lo cual posibilita su imposición consistente, siempre y cuando sus análogos cuánticos conmuten también [28].

Lidiemos en primer lugar con las ligaduras perturbativas lineales, cuya implementación cuántica ya era tenida en mente en la construcción del formalismo clásico. Para el sector parametrizado por  $\{V_l^{\vec{n}, \epsilon}\}_{l=2,3}$ , seleccionamos una cuantización tal que las variables de momento (es decir, las ligaduras perturbativas lineales) actúen como

derivadas generalizadas con respecto a sus variables de configuración asociadas, a saber,  $\{V_{q_l}^{\vec{n}, \epsilon}\}_{l=2,3}$ . En una cuantización tal, la anulación clásica de las ligaduras perturbativas tiene una contrapartida cuántica simple, a saber, que los estados físicos no pueden depender de las variables de configuración de esta parte del sector inhomogéneo del sistema. Por consiguiente, es inmediato ver que la imposición de las ligaduras perturbativas lineales equivale a la restricción a un espacio de representación dado por  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}} \otimes \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}} \otimes \mathcal{F}_S \otimes \mathcal{F}_T$ . Nótese, sin embargo, que este espacio de Hilbert no es el físico, ya que el modo cero de la ligadura hamiltoniana aún debe ser representado e impuesto.

Centremos nuestra atención de ahora en adelante en la versión densitizada del modo cero de la ligadura escalar,  $\tilde{H}$  [45, 176]. En vista de la Ec. (5.3) y de la definición de  $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$  (5.12), se obtiene de forma inmediata un operador de la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathcal{I}}_{\tilde{\varphi}}^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - \hat{\Theta}_e^S - \hat{\Theta}^T - \widehat{\Theta}_o^S \pi_{\tilde{\varphi}} \right) \left( \quad \right) \quad (5.14)$$

donde los operadores involucrados en su definición se construirán en detalle en las subsecciones siguientes.

## 2.3 Prescripciones de orden de factores

La aparición de cantidades que clásicamente no conmutan bajo corchetes de Poisson en la Ec. (5.14) (en particular, en las contribuciones cuadráticas en las perturbaciones) requiere de la especificación de una prescripción de orden de factores en su representación cuántica. Para una mayor claridad, enumeramos y discutimos a continuación las prescripciones adoptadas.

- i. Los productos de la forma  $f(\tilde{\varphi})\pi_{\tilde{\varphi}}$  vienen representados cuánticamente por un operador de la forma  $\frac{1}{2}[f(\hat{\tilde{\varphi}}), \hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}]_+$ , donde  $f$  es una función arbitraria. La aplicación inmediata de esta regla implica que, en concreto,  $\widehat{\Theta}_o^S \pi_{\tilde{\varphi}} = \frac{1}{2}[\hat{\Theta}_o^S, \hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}]_+$  en la Ec. (5.14).

Adicionalmente, adoptamos una simetrización algebraica de las potencias del volumen (o del inverso del volumen) cuando aparecen en forma de productos con funciones de  $bv$ , que típicamente surgen como resultado de la regularización. De manera explícita:

- ii. Los productos de la forma  $V^r g(bv)$ , donde  $r \in \mathbb{R}$  y  $g$  es una función arbitraria, se representan mediante el operador  $\hat{V}^{r/2} \hat{g} \hat{V}^{r/2}$ .

La única cuestión que queda por abordar es la representación cuántica de las propias funciones de  $bv$ , la cual requiere una consideración más detallada. Por un lado, cabe recordar que el producto  $bv$  es clásicamente proporcional al momento canónicamente conjugado al factor de escala logarítmico [véase la Ec. (5.11)]. En vista de esta observación y del formalismo desarrollado hasta este punto, existe un

candidato natural para el análogo cuántico del *cuadrado* de esta cantidad. Efectivamente, en virtud de la definición de  $\mathcal{H}_0^{(2)}$  y del esquema de regularización considerado [compárense las Ecs. (5.2) y (5.12)], podemos establecer simplemente que

$$\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}^2 = \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + 2e^{\widehat{6\tilde{\alpha}}\hat{W}} = - \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^2 \left( \hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\tilde{\mu}}^2 \right) \quad (5.15)$$

Dado que  $\hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}$  y  $\hat{\Omega}_{4\tilde{\mu}}$  generan respectivamente desplazamientos de dos y cuatro unidades en la etiqueta de los autoestados del volumen [véase la Ec. (5.13)], esta representación de  $\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}^2$  deja directamente invariantes los sectores de superselección del modelo sin perturbar.

Antes de seguir adelante, nótese que, si bien sería posible adoptar la misma representación para  $\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}^2$  que en la Ref. [63] (es decir, considerando un operador proporcional a  $\hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2$ ), esta definición resultaría no solo menos natural, sino también menos conveniente que la propuesta en la Ec. (5.15). Por un lado, aunque  $\hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2$  sí que es una representación de  $(bv)^2$  (salvo una cierta constante multiplicativa irrelevante), no sería consistente con el procedimiento de regularización seleccionado para escribir la ligadura escalar homogénea en términos de holonomías de la conexión. Por otro lado, aunque ignorásemos esta aparente inconsistencia y empleásemos regularizaciones distintas para representar cuánticamente el mismo objeto, la definición que hemos propuesto en la Ec. (5.15) tiene mejores propiedades de inversión. En efecto, es bien sabido que el autovalor cero pertenece al espectro de  $\hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2$ , lo cual podría acarrear problemas en el cómputo del operador inverso. En cambio,  $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)}$  es no negativo sobre soluciones a la ligadura homogénea, por lo que también lo es  $\hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + 2e^{\widehat{6\tilde{\alpha}}\hat{W}}$  siempre y cuando el potencial del inflatón lo sea (lo cual ocurre en los casos más interesantes físicamente, como aquel en el que el potencial se reduce a un término de masa). Por consiguiente, es trivial concluir que el único problema en el que puede que existan sutilezas a la hora de invertir el operador  $\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}^2$  con la propuesta presente es en los ceros del potencial y solo si el término cinético del campo escalar se anula en ellos a orden cero en una expansión perturbativa. Las condiciones que se tienen que dar para encontrar una situación similar a la alcanzada con la definición de la Ref. [63] son mucho más restrictivas. Al final de la Sec. 2.4 discutiremos un argumento más que apoya la elección de la nueva propuesta.

Considerando los motivos anteriores, seleccionamos la representación de  $\pi_{\tilde{\alpha}}^2$  proporcionada por la Ec. (5.15)<sup>26</sup>. Por tanto, toda potencia par de  $\pi_{\tilde{\alpha}}$  es cuantizada como sigue:

- iii. Las potencias pares del momento asociado al factor de escala logarítmico,  $\pi_{\tilde{\alpha}}^{2k}$  (para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ), se representan por operadores

$$(\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}^2)^k = \left( \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + 2e^{\widehat{6\tilde{\alpha}}\hat{W}} \right)^k = \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^{2k} \left( -\hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2 + \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\tilde{\mu}}^2 \right)^k. \quad (5.16)$$

<sup>26</sup>En el capítulo siguiente, llamaremos a esta forma de representar cuánticamente el cuadrado del momento del factor de escala logarítmico *prescripción A*. En cambio, denominaremos *prescripción B* a la consistente en adoptar la definición propuesta en la Ref. [63], que, como hemos aducido, parece desfavorecida conceptual y teóricamente.

La representación de las potencias impares, no obstante, no es tan inmediata, ya que carecemos de una definición de  $\hat{\pi}_{\hat{\alpha}}$  que emerja de forma natural en el formalismo. En efecto, es obvio que cualquier potencia impar del momento se puede reexpresar como una potencia par (para las que ya tenemos una representación) multiplicada por el propio momento  $\pi_{\hat{\alpha}}$ . Por lo tanto, si consideramos una representación  $\hat{\Xi}$  de dicho momento, es posible adoptar una simetrización algebraica en las potencias pares y representar la potencia restante por el operador  $\hat{\Xi}$ , resultando en un operador de la forma

$$\widehat{\pi_{\hat{\alpha}}^{2k+1}} = |\hat{\pi}_{\hat{\alpha}}^2|^{k/2} \hat{\Xi} |\hat{\pi}_{\hat{\alpha}}^2|^{k/2}, \quad (5.17)$$

donde  $|\hat{A}|$  representa el valor absoluto del operador  $\hat{A}$ . Recordemos que  $\hat{\pi}_{\hat{\alpha}}^2$  es un operador no-negativo sobre soluciones a la ligadura hamiltoniana homogénea, por lo que los valores absolutos en la definición anterior serían innecesarios si se ignorasen las perturbaciones.

Nótese que, hasta el momento, no hemos discutido cómo definir  $\hat{\Xi}$ . Cerremos esta subsección con un breve comentario al respecto. Una restricción formal sobre las posibles definiciones de dicho operador es que debe generar desplazamientos en el volumen de múltiplos enteros de cuatro unidades dado que, en caso contrario, no dejaría invariantes los sectores de superselección  $\mathcal{H}_{\epsilon}^{\pm}$ . En la Ref. [63], se sugirió una representación en la que, salvo constantes multiplicativas,  $\hat{\Xi}$  no es sino  $\hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}$ . Cabe enfatizar que, aunque sea empleado a menudo para representar cuánticamente el parámetro de Hubble, este último operador no emerge de forma natural en el contexto de la regularización estándar. Puesto que, en el caso analizado, dicho operador no necesita ser introducido *ad hoc*, sino que aparece como consecuencia de la regularización independiente de la contribución lorentziana, parece razonable adoptar la misma representación aquí:

- iv. Las potencias impares del momento asociado al factor de escala logarítmico,  $\pi_{\hat{\alpha}}^{2k+1}$  (para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$ ), se representan por operadores

$$\widehat{\pi_{\hat{\alpha}}^{2k+1}} = \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^{2k} \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 \quad \hat{\Xi} \quad \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2 \quad \quad , \quad (5.18)$$

donde  $\hat{\Xi}$  es un operador seleccionado de manera que respete las reglas de superselección definidas por la acción de la ligadura homogénea, como es el caso de  $-3\hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}/(8\pi G\gamma)$ .

Con esto, queda finalizada la caracterización de las prescripciones de orden de factores que son necesarias para representar cuánticamente las contribuciones de origen perturbativo que intervienen en el modo cero de la ligadura hamiltoniana, cuya cuantización completaremos en la siguiente sección.

## 2.4 Cuantización de las contribuciones perturbativas

Finalmente, empleemos las reglas de orden de factores presentadas y discutidas en la sección anterior para abordar la representación cuántica de las contribuciones

perturbativas cuadráticas al modo cero de la ligadura escalar, que reciben el nombre de hamiltoniano de Mukhanov-Sasaki y hamiltoniano tensorial. Para ello, representemos en primer lugar las funciones del espacio de fases homogéneo recogidas en las Ecs. (5.6)-(5.8) mediante operadores densamente definidos en el espacio de Hilbert homogéneo  $\mathcal{H}_e^\pm \otimes L^2(\mathbb{R}, d\tilde{\varphi})$ .

Comencemos por considerar la función  $\vartheta_o$ , introducida en la Ec. (5.6), que contiene la única potencia impar del momento  $\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}$ . Representando el factor de escala mediante la potencia apropiada del operador de volumen y siguiendo las prescripciones comentadas, se alcanza el siguiente resultado:

$$\hat{\vartheta}_o = -12l_0^2 \hat{W}_{,\tilde{\varphi}} \hat{V}^{2/3} \hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\tilde{\mu}}^2 \hat{\Xi}^{-1/2} \hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\tilde{\mu}}^2 \hat{V}^{2/3}, \quad (5.19)$$

donde  $\hat{\Xi}$  es el operador discutido al final de la sección anterior.

Las tres funciones restantes son considerablemente más sencillas. Por un lado, la función  $\vartheta_e$  no es más que el cuadrado del factor de escala y, por consiguiente, su contrapartida cuántica es simplemente proporcional al operador de volumen:

$$\hat{\vartheta}_e = \frac{3l_0}{4\pi G} \hat{V}^{2/3}. \quad (5.20)$$

Las funciones  $\vartheta_e^q$  y  $\vartheta_T^q$  son funciones análogas: la primera aparece en el sector de las perturbaciones escalares y la segunda, en el sector tensorial. La de origen escalar, introducida en la Ec. (5.7), se cuantiza como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_e^q = & \frac{4\pi G}{3l_0} \left[ \frac{\hat{1}}{\hat{V}} \right]^{1/3} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \left\{ \left( 9 + 32\pi^2 G^2 \left( \hat{\Omega}_{2\tilde{\mu}}^2 - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\tilde{\mu}}^2 \right)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \right) \left[ \frac{\hat{1}}{\hat{V}} \right]^{1/3} \right. \\ & \left. + \left( \frac{3l_0}{4\pi G} \right)^2 \left( \hat{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} - 4\hat{W} \right) \right\}^{4/3}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde el operador inverso de volumen se define de la forma estándar en la LQC [véanse las Ecs. (3.17) y (3.18)]. La representación cuántica de  $\vartheta_T^q$ , función definida en la Ec. (5.8), es menos complicada, conduciendo a

$$\hat{\vartheta}_T^q = \frac{4\pi G}{3l_0} \left[ \frac{\hat{1}}{\hat{V}} \right]^{1/3} \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} \left[ \frac{\hat{1}}{\hat{V}} \right]^{1/3} - \left( \frac{3l_0}{2\pi G} \right)^2 \hat{W} \hat{V}^{4/3}. \quad (5.22)$$

Llegados a este punto, se puede presentar un argumento adicional a favor de la definición considerada de  $\hat{\pi}_{\tilde{\alpha}}^2$  frente a la adopción de la propuesta de la Ref. [63]. Clásicamente, el primer término de  $\vartheta_T^q$  se obtiene del término análogo de  $\vartheta_e^q$  en el límite en el que el potencial de campo se anula. En efecto,

$$19 - 18 \frac{\mathcal{H}_0^{(2)}}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} = \frac{19\pi_{\tilde{\alpha}}^2 - 18\mathcal{H}_0^{(2)}}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} = \frac{\pi_{\tilde{\alpha}}^2 + 36e^{6\tilde{\alpha}} \bar{W}}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2}, \quad (5.23)$$



que tiende a uno cuando  $\bar{W} \rightarrow 0$ , recuperando el primer término de la Eq. (5.8). Esta relación clásica solo sigue presente en la teoría cuántica si se representa  $\pi_{\tilde{\alpha}}^2$  de acuerdo con la Ec. (5.15): la relación entre los dos términos es violada en la teoría cuántica si se conserva la definición de la Ref. [63].

En conclusión, hemos representado  $\vartheta_o, \vartheta_e, \vartheta_e^q$  y  $\vartheta_T^q$  mediante operadores cuánticos densamente definidos en  $\mathcal{H}_\varepsilon^\pm \otimes L^2(\mathbb{R}, d\tilde{\varphi})$ , lo cual equivale a proporcionar una cuantización de los hamiltonianos de Mukhanov-Sasaki y tensorial recordando que las variables perturbativas invariantes de gauge se representan con ayuda de los operadores de creación y destrucción sobre  $\mathcal{F}_S \otimes \mathcal{F}_T$ . Esta cuantización, junto con la de la contribución homogénea discutida en la Sec. 2.1, permite la representación de la ligadura hamiltoniana completa a primer orden perturbativo no trivial.

### 3 Ligadura maestra y masas perturbativas

En esta sección, estudiamos la existencia de una cierta clase de soluciones al modo cero de la ligadura escalar (5.14). En concreto, estamos interesados en soluciones que satisfagan el siguiente ansatz de separación de variables en la función de ondas [63]:

$$\Psi = \Gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}) \psi(\mathcal{N}, \tilde{\varphi}). \quad (5.24)$$

En otras palabras, consideramos estados cuánticos cuyas funciones de onda asociadas pueden ser factorizadas de tal manera que se separe su dependencia en la geometría homogénea (representada simbólicamente por  $\tilde{\alpha}$ ) de su dependencia en los modos perturbativos (representada simbólicamente por  $\mathcal{N}$ , que ha de entenderse como una nomenclatura colectiva para los números de ocupación correspondientes tanto a las perturbaciones escalares como a las tensoriales). Nótese que, a priori, se permite la posibilidad de que cada una de las partes de la función de onda exhiba una cierta dependencia en  $\tilde{\varphi}$  que, en ciertos regímenes de la dinámica, se puede interpretar como un tiempo interno. Sin embargo, cabe enfatizar que, en la discusión de la dinámica cuántica de las perturbaciones que sigue, no es necesaria asunción alguna acerca del uso de un reloj interno o de la relación entre las tasas de variación de cada uno de los factores con respecto a  $\tilde{\varphi}$ .

Adicionalmente, como parte del ansatz propuesto, solo consideramos estados de la geometría homogénea cuya evolución cuántica con respecto a  $\tilde{\varphi}$  es unitaria. En otras palabras, estados tales que  $\Gamma(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}) = \hat{U}(\tilde{\alpha}; \tilde{\varphi}) \chi(\tilde{\alpha})$ , donde  $\hat{U}$  es un operador unitario y  $\chi(\tilde{\alpha})$  es una condición inicial de norma unidad en  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ . Teniendo esto en cuenta, el resultado de sustituir el ansatz (5.24) en la ligadura cuántica  $\hat{H}\Psi = 0$  es

$$\left\{ \left( \hat{\mathcal{H}}_0^2 - \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} + [\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}, \hat{\mathcal{H}}_0] \right) \Gamma \right\} \left( \psi + 2(\hat{\mathcal{H}}_0 \Gamma)(\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} \psi) + \Gamma(\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}^2 \psi) - \frac{1}{2} [\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} - \hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\Theta}_o^S](\Gamma \psi) \right. \\ \left. - \left\{ \hat{\Theta}_e^S + \frac{1}{2} [\hat{\Theta}_o^S, \hat{\mathcal{H}}_0]_+ + \hat{\Theta}^T \right\} (\Gamma \psi) - \hat{\Theta}_o^S \{ \Gamma(\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} \psi) \} \right) = 0, \quad (5.25)$$

donde  $\hat{\mathcal{H}}_0$  es un operador autoadjunto definido como  $\hat{\mathcal{H}}_0 = [\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}, \hat{U}] \hat{U}^{-1}$ .

La siguiente hipótesis es que, con la elección de estado geométrico considerada, es una buena aproximación ignorar la posible existencia de transiciones en la geometría homogénea mediadas por el modo cero de la ligadura escalar. Esto implica que solo el término diagonal es relevante al tomar el producto interno del lado izquierdo de la Ec. (5.25) con un estado de la geometría homogénea  $\Gamma \in \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{grav}}$ . Esta aproximación es buena siempre y cuando las dispersiones relativas de los operadores geométricos relevantes sean pequeñas en el estado cuántico  $\Gamma$  considerado. Los operadores que han de cumplir la condición anterior son aquellos que acompañan a los términos independientes  $\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}^2 \psi$ ,  $\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} \psi$  y  $\psi$  (en este último caso distinguiendo entre las contribuciones perturbativas cuadráticas en los modos de configuración y las contribuciones cuadráticas en las variables de momento). De la discusión anterior se desprende que estas son condiciones sobre un número finito de operadores que actúan sobre el sector geométrico del espacio de Hilbert cinemático. Sus expresiones precisas se pueden derivar de la misma manera que en la Sec. 5.3 de la Ref. [63], alcanzando un resultado idéntico salvo por la presencia de perturbaciones tensoriales (que no se consideran en dicho trabajo) y por las diferencias en las definiciones de los operadores  $\vartheta$  (que son fruto de la adopción de un esquema de regularización distinto).

En definitiva, tomando el término diagonal mencionado en el párrafo anterior y teniendo en consideración esta última hipótesis, es fácil obtener la siguiente ligadura maestra sobre las perturbaciones:

$$\begin{aligned} & \hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}^2 \psi + \left( 2\langle \hat{\mathcal{H}}_0 \rangle_{\Gamma} - \langle \hat{\Theta}_o^S \rangle_{\Gamma} \right) \left( \hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} \psi \right. \\ & \left. = \left[ \langle \hat{\Theta}_e^S \rangle + \frac{1}{2} [\hat{\Theta}_o^S, \hat{\mathcal{H}}_0]_+ + \hat{\Theta}^T \right]_{\Gamma} + \mathbf{i} \langle d_{\tilde{\varphi}} \hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{1}{2} d_{\tilde{\varphi}} \hat{\Theta}_o^S \rangle_{\Gamma} + \langle \hat{\mathcal{H}}_0^{(2)} - (\hat{\mathcal{H}}_0)^2 \rangle_{\Gamma} \right) \psi, \end{aligned} \quad (5.26)$$

que es cuadrática tanto en las variables perturbativas de configuración como en sus momentos canónicos asociados. En la ecuación anterior,  $\langle \hat{O} \rangle_{\Gamma}$  denota el valor esperado de un cierto operador  $\hat{O}$  en  $\Gamma$  y  $d_{\tilde{\varphi}} \hat{O} = \mathbf{i} [\hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} - \hat{\mathcal{H}}_0, \hat{O}]$ . Cabe notar que, siguiendo el procedimiento presentado aquí, toda la dependencia del modo cero de la ligadura hamiltoniana en la geometría homogénea se ha visto reemplazada por valores esperados en dicha geometría. Por consiguiente, los efectos procedentes de la cuantización de la geometría según el programa de la LQC están codificados en dichos valores esperados.

Está claro entonces que, una vez que aceptamos que las transiciones en la geometría homogénea son ignorables, la ecuación (5.26) gobierna la dinámica de las perturbaciones para estados que verifican el ansatz (5.24). Esta ecuación se puede entender de forma alternativa como el resultado de imponer que un cierto operador de ligadura  $\hat{C}_{\text{per}}^r$  sobre  $\mathcal{H}_{\text{kin}}^{\text{matt}} \otimes \mathcal{F}_S \otimes \mathcal{F}_T$  se anule. La expresión de dicho operador es de la forma

$$\hat{C}_{\text{per}}^r = \hat{\pi}_{\tilde{\varphi}}^2 + D_{\Gamma}(\tilde{\varphi}) \hat{\pi}_{\tilde{\varphi}} + E_{\Gamma}(\tilde{\varphi}) - \langle \hat{\Theta}_e^S \rangle + \frac{1}{2} [\hat{\Theta}_o^S, \hat{\mathcal{H}}_0]_+ - \frac{\mathbf{i}}{2} d_{\tilde{\varphi}} \hat{\Theta}_o^S + \hat{\Theta}^T \rangle_{\Gamma}, \quad (5.27)$$

donde  $D_{\Gamma}$  y  $E_{\Gamma}$  son dos funciones dependientes exclusivamente de  $\Gamma$  y del modo cero del campo escalar, cuyas expresiones precisas son irrelevantes para el presente análisis. Este operador de ligadura proporciona de forma inmediata las ecuaciones de

Heisenberg para los modos perturbativos ( $\hat{V}_{q_1}^{\vec{n},\epsilon}$ ,  $\hat{V}_{p_1}^{\vec{n},\epsilon}$ ,  $\hat{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}}$  y  $\hat{\pi}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}}$ ), que son lineales. En lo que sigue, consideramos sus contrapartidas clásicas directas para estudiar la propagación de las perturbaciones invariantes de gauge sobre la geometría homogénea de fondo dentro del marco de esta descripción aproximada.

En virtud de la densitización de la ligadura considerada y de la definición de la función lapso, se puede comprobar que, al orden perturbativo dominante,  $\hat{C}_{\text{per}}$  genera reparametrizaciones temporales en la variable temporal  $\bar{T}$ , relacionada clásicamente con el tiempo coordinado  $t$  mediante la expresión  $dt = \sigma e^{3\bar{\alpha}} d\bar{T}$  [63]. Además, la forma de la ligadura sugiere la introducción de un tiempo conforme  $\eta_\Gamma$  adaptado a la geometría homogénea cuántica asociada con el estado  $\Gamma$ , definido por  $l_0 d\eta_\Gamma = \langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma d\bar{T}$ . En lo referente a este cambio de variable temporal, cabe notar dos cuestiones. En primer lugar, la positividad del operador  $\hat{\vartheta}_e$  [véase la Ec. (5.20)] garantiza que el cambio de tiempo  $\bar{T} \rightarrow \eta_\Gamma$  es monótono. En segundo lugar, es fundamental notar que este cambio de tiempo no tendría significado alguno si la derivada  $d\eta_\Gamma/d\bar{T}$  fuese un operador, lo cual pone en valor la importancia de la presencia de los valores esperados sobre  $\Gamma$ , que desempeñan un papel fundamental en la buena definición de la dinámica perturbativa descrita a continuación.

Llegados a este punto de la discusión, estamos en la posición idónea para calcular las ecuaciones dinámicas asociadas a cada una de las variables perturbativas tomando los conmutadores apropiados con el generador de la dinámica cuántica o calculando directamente los corchetes de Poisson con su contrapartida clásica, si estamos interesados en estudiar las ecuaciones dinámicas clásicas correspondientes. De acuerdo con nuestros comentarios, seguimos este último camino:

$$d_{\eta_\Gamma} V_{q_1}^{\vec{n},\epsilon} = \frac{l_0}{2\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma} \left\{ V_{q_1}^{\vec{n},\epsilon}, C_{\text{per}} \right\} = l_0 V_{p_1}^{\vec{n},\epsilon}, \quad (5.28)$$

$$d_{\eta_\Gamma} \tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}} = \frac{l_0}{2\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma} \left\{ \tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}}, C_{\text{per}} \right\} = l_0 \pi_{\tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}}}, \quad (5.29)$$

donde  $C_{\text{per}}$  es el análogo clásico de  $\hat{C}_{\text{per}}$  (que resulta de tratar el momento del campo escalar y los modos perturbativos como objetos clásicos) y  $d_{\eta_\Gamma}$  denota la derivada con respecto al tiempo conforme [63]. Llevando a cabo una derivada más con respecto a  $\eta_\Gamma$ , tenemos

$$d_{\eta_\Gamma}^2 V_{q_1}^{\vec{n},\epsilon} = \frac{l_0^2}{2\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma} \left\{ V_{q_1}^{\vec{n},\epsilon}, C_{\text{per}} \right\} = -(\tilde{\omega}_n^2 + M^S) V_{q_1}^{\vec{n},\epsilon}, \quad (5.30)$$

$$d_{\eta_\Gamma}^2 \tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}} = \frac{l_0^2}{2\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma} \left\{ \tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}}, C_{\text{per}} \right\} = -(\tilde{\omega}_n^2 + M^T) \tilde{d}_{\vec{n},\epsilon,\bar{\epsilon}}, \quad (5.31)$$

donde  $\tilde{\omega}_n^2 = l_0^2 \omega_n^2$  y  $M^S$  y  $M^T$  son las masas dependientes del fondo (y, por tanto, del tiempo<sup>27</sup>) que gobiernan la dinámica de las perturbaciones escalares y tensoriales,

<sup>27</sup>Nótese que, a pesar de que se haya adoptado una notación simplificada donde este hecho no aparece reflejado explícitamente, la dependencia temporal de estas masas tiene su origen en la aparición de valores esperados en la geometría homogénea cuántica asociada al estado  $\Gamma$ .

respectivamente:

$$M^S = l_0^2 \frac{\langle \hat{\vartheta}_e^q \rangle_\Gamma + \frac{1}{2} \langle [\hat{\vartheta}_o, \hat{\mathcal{H}}_0]_+ \rangle_\Gamma - \frac{i}{2} \langle d_{\tilde{\varphi}} \hat{\vartheta}_o \rangle_\Gamma}{\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma}, \quad M^T = l_0^2 \frac{\langle \hat{\vartheta}_T^q \rangle_\Gamma}{\langle \hat{\vartheta}_e \rangle_\Gamma}. \quad (5.32)$$

El término imaginario que aparece en  $M^S$  depende del potencial de campo y, en la práctica, suele ser extremadamente pequeño en las situaciones de interés físico [63], por lo que asumimos que es una buena aproximación ignorarlo de aquí en adelante. Las ecuaciones dinámicas obtenidas [Ecs. (5.30) y (5.31)] son de tipo oscilador armónico generalizado sin fricción y con masas dependientes del tiempo (a través de la evolución del fondo) que codifican correcciones resultantes de la naturaleza cuántica de la geometría de ese fondo. Asimismo, se trata de ecuaciones hiperbólicas en el límite ultravioleta, en el que la contribución de la frecuencia es dominante.

Antes de concluir esta sección, conviene echar la vista atrás y recopilar de manera concisa todas las hipótesis que se han considerado en la deducción de las ecuaciones que dictan la dinámica de las perturbaciones. En primer lugar, hemos considerado un ansatz para las soluciones al modo cero de la ligadura según el cual las funciones de onda asociadas admiten una factorización en la que se separa su dependencia en la geometría homogénea de su dependencia en las perturbaciones, permitiendo que ambos factores de la función de onda dependan del inflatón. En segundo lugar, hemos centrado el estudio en soluciones para las que la parte geométrica de la función de onda obedece una evolución unitaria, y hemos ignorado la posibilidad de que el modo cero de la ligadura hamiltoniana medie transiciones cuánticas en dicha parte geométrica. Hemos comentado que la validez de esta última aproximación depende matemáticamente de la pequeñez de las dispersiones relativas de un número finito de operadores geométricos en el estado cuántico considerado. Por último, hemos asumido implícitamente que las ecuaciones de Heisenberg para los modos perturbativos pueden ser deducidas directamente en la representación de Fock asociada con las variables perturbativas seleccionadas de tal modo que la evolución cuántica de las perturbaciones invariantes de gauge tenga un análogo clásico generado por  $C_{\text{per}}$ .

Para finalizar, considérense estados  $\Gamma$  que se encuentren muy picados sobre las trayectorias dinámicas de la LQC efectiva. Entonces, los valores esperados sobre la geometría homogénea se pueden estimar mediante la evaluación directa en dichas trayectorias. Esta estimación resulta en las denominadas *masa efectiva escalar* y *masa efectiva tensorial*, que adoptan las expresiones que siguen en el contexto de la LQC efectiva:

$$M^S = l_0^2 \frac{\vartheta_e^q + \vartheta_o \pi_{\tilde{\varphi}}}{\vartheta_e}, \quad (5.33)$$

$$M^T = l_0^2 \frac{\vartheta_T^q}{\vartheta_e}. \quad (5.34)$$

Como se puede observar de forma inmediata a partir de la expresión de  $\vartheta_T^q$  (5.8), la masa efectiva tensorial no se ve afectada por la posible ambigüedad en la regularización de las potencias negativas del momento del factor de escala logarítmico. No obstante, el caso de la masa efectiva escalar es otro, ya que contiene contribuciones

tanto de  $\vartheta_o$  (5.6) como de  $\vartheta_e^q$  (5.7), las cuales sí que dependen de potencias negativas de dicho momento. El hecho de que estas potencias requieran ser regularizadas de forma previa a su cuantización y a su posterior evaluación sobre las trayectorias dinámicas efectivas implica que el esquema de regularización adoptado deja una huella en la propagación de las perturbaciones. Por ende, es posible confrontar las dos propuestas para la representación cuántica de  $\pi_{\alpha}^2$  discutidas en la Sec. 2.3 — a saber, la sugerida en la Ec. (5.15) y la de la Ref. [63] — a través de un análisis comparativo de la masa efectiva escalar.

## 4 Conclusión

En este capítulo, hemos discutido la aplicación del formalismo híbrido [63] para el tratamiento cuántico de perturbaciones cosmológicas al caso en el que se considera un procedimiento de regularización alternativo para la ligadura escalar homogénea, discutiendo cómo combinar una cuantización de Fock de los grados de libertad físicos asociados a las perturbaciones con el formalismo de la LQC que resulta de aplicar un esquema de regularización distinto del estándar en el campo.

Basándonos en trabajos previos (véanse las Refs. [63, 66, 170]), hemos partido de una descripción canónica del sistema clásico (dado por perturbaciones escalares y tensoriales en torno a una cosmología de FLRW con secciones espaciales trestoroidales planas mínimamente acoplada a un campo escalar sujeto a un cierto potencial) a orden perturbativo dominante en términos de variables invariantes de gauge para las perturbaciones. La manera en la que se construye dicha descripción clásica de partida facilita enormemente la imposición de las ligaduras perturbativas lineales a nivel cuántico, que equivale simplemente a requerir que los estados físicos solo dependan de las variables invariantes de gauge que describen las perturbaciones y de las variables que describen la geometría de fondo. No obstante, estas variables siguen sujetas a una ligadura global, a saber, el modo cero de la ligadura hamiltoniana (que contiene, además del término puramente homogéneo, contribuciones cuadráticas en las perturbaciones).

Asumiendo que disponemos de una cuantización de Fock satisfactoria de las perturbaciones invariantes de gauge y una descripción cuántica consistente de los grados de libertad de la geometría homogénea en la que uno de los operadores fundamentales es el volumen físico del Universo (o, equivalentemente, el factor de escala), la cuantización híbrida del modelo clásico se asienta en la definición de dos operadores geométricos necesarios para la representación cuántica del modo cero de la ligadura: el momento canónico asociado al factor de escala logarítmico y su cuadrado. Solo el segundo de ellos tiene una representación natural en el formalismo, ya que aparece en la contribución gravitacional a la ligadura escalar homogénea, donde su forma depende del esquema de regularización empleado en la construcción del operador para esa ligadura. No obstante, hemos argumentado que, una vez seleccionada una representación para el cuadrado de dicho momento en la construcción de la ligadura homogénea, lo natural es tomar la misma representación en las contribuciones perturbativas a la ligadura hamiltoniana global.

El operador geométrico restante que aparece en las contribuciones perturbativas y que, por tanto, es necesario definir es, como ya hemos adelantado, el que representa al propio momento canónico asociado al factor de escala logarítmico. A diferencia de su cuadrado (que no contiene información sobre su signo, por ejemplo), este operador no aparece previamente en el formalismo y, por consiguiente, es necesario introducirlo en este punto, imponiendo que satisfaga ciertos requerimientos físicos. A modo de ejemplo, si uno quiere poder entender la introducción de inhomogeneidades de manera perturbativa, un requisito sobre este operador es que deje invariantes los sectores de superselección de la teoría cuántica homogénea. En efecto, en caso contrario, las contribuciones perturbativas a la ligadura global modificarían la estructura básica misma del modelo cuántico que describe la geometría de fondo.

Dicho esto, cabe mencionar que, aunque la necesidad de introducir este operador da lugar a una ambigüedad en la cuantización del modelo clásico, es de esperar que los efectos de seleccionar un operador u otro sean pequeños en las situaciones físicas de interés, ya que solo aparece en un término en el que va acompañado de la derivada del potencial de campo, que es extremadamente pequeña, e.g., en situaciones en las que domina el término cinético del campo escalar (que son de gran interés en la LQC [33]) o en regímenes inflacionarios.

Una vez representado cuánticamente el modo cero de la ligadura escalar, hemos investigado la existencia de soluciones que verifiquen un cierto ansatz de factorización que permite separar la dependencia en las perturbaciones de la dependencia en la geometría homogénea en las funciones de onda asociadas. Junto con la hipótesis de que se pueden despreciar las transiciones en la geometría homogénea mediadas por el modo cero de la ligadura, este ansatz conduce a la obtención de una ligadura maestra para las perturbaciones que involucra valores esperados de los operadores geométricos en el estado cuántico asociado a la geometría homogénea, a través de los cuales la naturaleza cuántica de la gravedad afecta a la propagación de las perturbaciones cosmológicas. A continuación, hemos discutido cuál es el parámetro temporal con respecto al cual la ligadura maestra genera evolución y hemos deducido las ecuaciones que gobiernan la dinámica de las perturbaciones. Para concluir, hemos identificado dos masas dependientes del tiempo que determinan el comportamiento de las perturbaciones escalares y tensoriales, cuyos valores hemos estimado en el régimen de validez de la LQC efectiva. Dado que la masa que interviene en las ecuaciones dinámicas correspondientes a las perturbaciones escalares se ve afectada por la ambigüedad comentada en la representación del momento canónico asociado al factor de escala logarítmico, hemos propuesto que un análisis de las propiedades de dicha masa en situaciones de interés físico es un buen procedimiento para discernir los efectos genuinos de dicha ambigüedad.

## Capítulo 6

# Efectos de la regularización alternativa en las masas efectivas de perturbaciones cosmológicas

Una vez estudiada la aplicación del formalismo híbrido [60–64, 66] al caso en el que la geometría homogénea se regulariza empleando el procedimiento propuesto por Dapor y Liegener [88, 90], parece natural preguntarse cómo se ven afectadas por el esquema de regularización adoptado las propiedades de las masas dependientes del fondo que intervienen en las ecuaciones de propagación de las perturbaciones. No solo eso, también es interesante comparar los resultados obtenidos en el formalismo híbrido con aquellos que se obtienen de otros enfoques al tratamiento de perturbaciones cosmológicas dentro del marco de la LQC, como el formalismo de la métrica vestida [67–70]. En el contexto de la regularización estándar, un estudio comparativo de las masas efectivas evaluadas en el instante del rebote (que, por ser el instante en el que el volumen físico del Universo alcanza un mínimo global, se considera un punto privilegiado para fijar condiciones iniciales) se llevó a cabo en la Ref. [182]. En dicho trabajo, se determinó que las masas deducidas con el enfoque híbrido son positivas para una cierta clase de potenciales en escenarios de dominio cinético en el rebote (situación de gran interés en la LQC efectiva, ya que, en dichos casos, es posible recuperar un buen ajuste del fondo cósmico de microondas reteniendo efectos cuánticos a gran escala), mientras que las masas análogas obtenidas con el formalismo de la métrica vestida son negativas en dicho caso. Esta diferencia es de gran importancia, ya que, para que unas condiciones iniciales dadas estén bien planteadas, a menudo es necesario que las masas efectivas sean positivas en el instante en el que se fijan dichas condiciones iniciales (este es el caso, e.g., si se quiere definir estados adiabáticos para longitudes de onda arbitrarias [30, 31, 65, 68–70]). En vista de estos resultados, cabe preguntarse si se alcanza una conclusión similar en el contexto del modelo de la LQC que resulta de adoptar la propuesta de regularización de Dapor y Liegener. Conviene recordar que, en dicho modelo, emerge un régimen asintóticamente de Sitter en la rama cosmológica anterior al rebote, que también es de interés potencial desde el punto de vista de la fijación de condiciones iniciales. En este capítulo, abordamos estas cuestiones, generalizando los estudios comparativos

que existían previamente en la literatura [182] al caso en el que se emplea el esquema de regularización alternativo. Más concretamente, calculamos y analizamos las masas efectivas percibidas por las perturbaciones en los formalismos híbrido y de la métrica vestida, discutiendo sus propiedades en las dos regiones de interés para la fijación de condiciones iniciales: el instante del rebote y el régimen de Sitter emergente.

Este capítulo, que recoge los resultados principales de la Ref. [183], está estructurado de la siguiente manera. En la Sec. 1, partimos de los resultados del capítulo anterior para obtener expresiones de las masas dependientes del fondo que gobiernan la dinámica de las perturbaciones, distinguiendo entre las dos prescripciones discutidas para la definición del cuadrado del momento asociado al factor de escala logarítmico. A continuación, en la Sec. 2, derivamos las expresiones análogas en el contexto del formalismo de la métrica vestida, de tal modo que podamos proceder a comparar las propiedades de las masas resultantes de ambos formalismos en distintos regímenes de interés físico. En la Sec. 3, evaluamos las masas en el instante del rebote y estudiamos su positividad. Un análisis similar en el régimen de Sitter asintótico se presenta en la Sec. 4. Para concluir, resumimos los resultados principales del capítulo en la Sec. 5.

## 1 Masas efectivas híbridas

En esta sección, centramos el estudio en estados cuánticos asociados al fondo homogéneo para los que la descripción efectiva de la LQC homogénea e isotropa es válida. En la práctica, como consecuencia del procedimiento de regularización, esta descripción efectiva se puede obtener reemplazando el parámetro de Hubble por funciones sinusoidales de dicho parámetro [39, 71, 184]. En lo que sigue, omitimos todo detalle acerca de la teoría cuántica (tratada en los capítulos anteriores), y nos concentramos directamente en la contrapartida efectiva de todas las cantidades relevantes. Para una discusión en mayor profundidad de la teoría cuántica subyacente, consúltense las Refs. [60–64, 66, 181].

Como vimos en la Sec. 4 de los Preliminares, el formalismo híbrido se asienta sobre una descripción hamiltoniana clásica del sistema en términos de variables que son invariantes de gauge, truncada a orden cuadrático en las perturbaciones. Recordemos, a modo de resumen, que en el sector homogéneo, las variables canónicas empleadas son el factor de escala logarítmico  $\tilde{\alpha}$  y su momento canónico asociado  $\pi_{\tilde{\alpha}}$ , que describen la geometría de fondo (dada por una cosmología de FLRW con secciones espaciales trestoroidales planas), además de un par canónico adicional  $(\tilde{\varphi}, \pi_{\tilde{\varphi}})$ , correspondiente al modo cero del campo escalar mínimamente acoplado que hace las veces de contenido material y que está sujeto a un cierto potencial  $W(\tilde{\varphi})$ . En el sector inhomogéneo, en el que se incluyen perturbaciones escalares y tensoriales tanto de la métrica como del campo escalar, se distinguen dos subsectores. Por un lado, en lo que se refiere a las perturbaciones escalares, las variables empleadas son los llamados modos de Mukhanov-Sasaki<sup>28</sup>,  $v_{\vec{n},\epsilon}$  y  $\pi_{v_{\vec{n},\epsilon}}$ , donde  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 - \{0\}$  es el vector de onda (cuya primera componente no nula ha de ser positiva) y  $\epsilon = \pm$  denota la paridad. Por otro

<sup>28</sup>Como ya hemos visto, el resto de grados de libertad correspondientes a las perturbaciones



lado, las perturbaciones tensoriales admiten una descripción en términos de ciertos modos  $\tilde{d}_{\tilde{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}$  y  $\pi_{\tilde{d}_{\tilde{n},\epsilon,\tilde{\epsilon}}}$  invariantes de gauge en el sentido de los potenciales de Bardeen [165], donde la etiqueta adicional  $\tilde{\epsilon} = +, \times$  está vinculada con la polarización del modo. Una vez impuestas las ligaduras perturbativas lineales (véase el pie de página 28) y al orden perturbativo considerado, las variables canónicas se ven constreñidas por una única ligadura global, a saber, el modo cero de la ligadura hamiltoniana, compuesto por una contribución homogénea y por correcciones cuadráticas en las perturbaciones. Siguiendo el proceso descrito en el capítulo anterior (véanse las Refs. [63, 181]), se pueden obtener las ecuaciones dinámicas que gobiernan la propagación de las perturbaciones escalares y tensoriales sobre la geometría de fondo. En dichas ecuaciones, que son de tipo oscilador armónico generalizado sin término de fricción, intervienen masas dependientes del tiempo (a través de la evolución del fondo), denominadas *masa efectiva escalar* y *masa efectiva tensorial*, cuyas expresiones son, respectivamente,

$$M^S = l_0^2 \frac{\vartheta_e^q + \vartheta_o \pi_{\tilde{\varphi}}}{\vartheta_e}, \quad M^T = l_0^2 \frac{\vartheta_T^q}{\vartheta_e}, \quad (6.1)$$

donde, recordemos,  $l_0$  es la longitud coordenada de los ciclos fundamentales de las secciones espaciales tres-toroidales y  $\vartheta_e^q, \vartheta_o, \vartheta_e$  y  $\vartheta_T^q$  son las funciones del espacio de fases homogéneo introducidas en las Ecs. (5.6)-(5.8). En vista de sus expresiones, es inmediato ver que ambas masas difieren en un término  $\mathcal{U}$  que se anula en ausencia de potencial de campo. En efecto,

$$M^S = M^T + \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = l_0^2 e^{2\tilde{\alpha}} \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + 36 \bar{W} \frac{\mathcal{H}_0^{(2)}}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} - 12 \bar{W}_{,\tilde{\varphi}} \frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{\pi_{\tilde{\alpha}}} \left( \quad (6.2)$$

donde  $\mathcal{U}$  se suele denominar *potencial de Mukhanov-Sasaki*. Además, recordemos que  $\bar{W}(\tilde{\varphi})$  está relacionado con el potencial de campo  $W(\tilde{\varphi})$  mediante la expresión  $\bar{W}(\tilde{\varphi}) = \sigma^4 W(\tilde{\varphi}/\sigma)$ , con  $\sigma^2 = 4\pi G/3l_0^3$ . Por último, en la ecuación anterior, se emplea la misma notación que en el capítulo anterior para las derivadas con respecto al modo cero del inflatón, según la cual la primera y segunda derivadas del potencial son  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}$  y  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$ , respectivamente.

Siguiendo las convenciones de la Ref. [182], procedemos a continuación a la reescritura de las masas efectivas en términos de la densidad de energía material  $\rho$  y la presión  $P$ , que se definen de la forma usual en términos del hamiltoniano material homogéneo:

$$\rho = \frac{H_{\text{matt}}}{V} = \frac{2\pi G}{3V^2} \left[ \pi_{\tilde{\varphi}}^2 + 2 \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^2 V^2 \frac{\bar{W}}{\sigma^2} \right] = \frac{3 \sin^2 b}{8\pi G \gamma^2 \Delta} [1 - (1 + \gamma^2) \sin^2 b], \quad (6.3)$$

$$P = - \frac{\partial H_{\text{matt}}}{\partial V} = \rho - \frac{3}{2\pi G} \frac{\bar{W}}{\sigma^2}. \quad (6.4)$$

---

escalares se puede codificar en las ligaduras perturbativas lineales abelianizadas [63] y en sus momentos canónicos asociados, que se imponen de forma trivial a nivel cuántico y que no desempeñan un papel relevante en la discusión actual.

En la última igualdad de la Ec. (6.3), hemos empleado que la ligadura homogénea (5.1) se anula ya que, al orden de truncación considerado, es posible ignorar la *backreaction* (o reacción inversa en español) de las perturbaciones en el cómputo de las masas efectivas. Además, hemos empleado la forma de la contribución geométrica  $\pi_{\bar{\alpha}}^2$  que resulta de seguir el programa de la LQC usando el procedimiento de regularización propuesto por Dapor y Liegener. Más concretamente, describiendo los grados de libertad gravitacionales mediante un par canónico compuesto por el volumen físico del Universo  $V$  y la variable clásicamente proporcional al parámetro de Hubble  $b$  [véanse las Ecs. (5.10) y (5.11)], el término  $\mathcal{H}_0^{(2)}$  (5.2) de la ligadura escalar homogénea (5.1) adopta el valor efectivo

$$\mathcal{H}_0^{(2)} = - \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^2 V^2 \left[ \frac{1}{\Delta} \left( \sin^2 b - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \sin^2 2b \right) + 2 \frac{\bar{W}}{\sigma^2} \right], \quad (6.5)$$

donde, recordemos,  $\Delta$  representa el gap de área en la LQG.

Con estas expresiones, es sencillo reescribir la masa efectiva tensorial en términos de la densidad de energía y de la presión:

$$M^T = V^{-4/3} \left[ \left( \frac{4\pi G}{3} \right)^2 \pi_{\bar{\alpha}}^2 - 6V^2 \frac{\bar{W}}{\sigma^2} \right] \left( -\frac{4\pi G}{3} V^{2/3} (\rho - 3P) \right). \quad (6.6)$$

No obstante, aún es necesario definir dos cantidades geométricas para obtener una expresión similar para la masa efectiva escalar (o, lo que es lo mismo, el potencial de Mukhanov-Sasaki): el inverso del momento canónico asociado al factor de escala logarítmico,  $1/\pi_{\bar{\alpha}}$ , y su cuadrado,  $1/\pi_{\bar{\alpha}}^2$ . La forma en la que se representan estos operadores está estrechamente relacionada con la teoría cuántica desarrollada en el capítulo anterior. Por un lado [181],

$$\frac{1}{\pi_{\bar{\alpha}}} = \frac{1}{\pi_{\bar{\alpha}}^2} \Xi, \quad (6.7)$$

donde  $\Xi$  es el análogo efectivo del operador que representa cuánticamente al momento  $\pi_{\bar{\alpha}}$ . De acuerdo con la propuesta de la Ref. [63],

$$\Xi = -\frac{3}{8\pi G \gamma \sqrt{\Delta}} V \sin 2b. \quad (6.8)$$

Por tanto, solo queda por definir la forma efectiva de  $1/\pi_{\bar{\alpha}}^2$ . Dado que existe una ambigüedad en la representación cuántica de este factor (que obviamente también afecta a su expresión efectiva), discutimos dos propuestas alternativas en el capítulo anterior (véase la Sec. 2.3 de dicho capítulo o, alternativamente, la Ref. [181]). A pesar de que una de ellas parece más natural desde el punto de vista conceptual y teórico, consideramos ambas opciones de aquí en adelante. Las expresiones de las masas efectivas asociadas a cada una de estas prescripciones se escribirán explícitamente en las Secs. 1.1 y 1.2 de este capítulo.

El potencial de Mukhanov-Sasaki (a partir del cual se puede obtener trivialmente la masa efectiva escalar con ayuda de la expresión ya discutida de la masa efectiva tensorial) viene dado por

$$\mathcal{U} = \frac{V^{2/3}}{\sigma^2} \left[ \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + 72 \frac{3}{4\pi G} \bar{W} \frac{V^2 \rho}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} - 12 \bar{W}_{,\tilde{\varphi}} \frac{\Xi \pi_{\tilde{\varphi}}}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} - 72 \left( \frac{3}{4\pi G \sigma} \right)^2 \bar{W}^2 \frac{V^2}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} \right], \quad (6.9)$$

donde solo resta reescribir  $\Xi$  y  $1/\pi_{\tilde{\alpha}}^2$  en términos de la densidad de energía y la presión. Dichas reescrituras se llevan a cabo de manera individualizada para cada una de las prescripciones consideradas en las Secs. 1.1 y 1.2. Nótese que, dado que la masa efectiva tensorial no depende de potencias inversas del momento asociado al factor de escala logarítmico, su valor efectivo coincide en ambas prescripciones. Por ende, nuestra discusión se limita a estudiar la masa efectiva escalar o, equivalentemente, el potencial de Mukhanov-Sasaki en lo que resta de sección.

## 1.1 Prescripción A

La primera opción para regularizar el cuadrado del inverso del momento asociado al factor de escala logarítmico consiste en seguir el mismo procedimiento que en el término gravitacional de  $\mathcal{H}_0^{(2)}$ , que es proporcional a  $\pi_{\tilde{\alpha}}^2$ . Efectivamente, empleando la Ec. (5.2), se puede definir  $1/\pi_{\tilde{\alpha}}^2$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} &= \left[ \mathcal{H}_0^{(2)} + 2 \left( \frac{3}{4\pi G} \right)^2 V^2 \frac{\bar{W}}{\sigma^2} \right]^{-1} = - \left( \frac{4\pi G \sqrt{\Delta}}{3} \right)^2 \frac{1}{V^2} \left( \sin^2 b - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \sin^2 2b \right)^{-1} \\ &= \frac{2\pi G}{3} \frac{1}{V^2 \rho}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde hemos sustituido el valor efectivo resultante de la propuesta de Dapor y Liegener en la segunda igualdad y luego hemos empleado que la ligadura homogénea se anula, ya que, al orden de truncación considerado, podemos ignorar la backreaction de las perturbaciones en el cálculo de las masas efectivas. En lo que resta de capítulo, esta forma de representar  $1/\pi_{\tilde{\alpha}}^2$  y su valor efectivo correspondiente serán referidos como la *prescripción A*. Junto con las Ecs. (6.7) y (6.8), la elección de esta opción implica que

$$\frac{\Xi}{\pi_{\tilde{\alpha}}^2} = \frac{2\pi G \sqrt{\Delta} \sin 2b}{3\gamma V} \left( \sin^2 b - \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \sin^2 2b \right)^{-1} = - \frac{1}{4\gamma \sqrt{\Delta}} \frac{\sin 2b}{V \rho}. \quad (6.11)$$

Por tanto, el potencial de Mukhanov-Sasaki se puede escribir como

$${}^{(A)}\mathcal{U} = \frac{V^{2/3}}{\sigma^2} \left( \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + 36 \bar{W} + \frac{3}{\gamma \sqrt{\Delta}} \sin 2b \frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}} \pi_{\tilde{\varphi}}}{V \rho} - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}^2}{\rho} \right) \quad (6.12)$$

donde habría que expresar  $\sin 2b$  en términos de  $\rho$ . Esto no se puede hacer de forma global, dado que la Ec. (6.3), que se puede utilizar para relacionar esta función

trigonométrica con la densidad de energía, admite dos soluciones distintas,

$$\sin^2 b_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \rho/\rho_B}}{2(1 + \gamma^2)}, \quad (6.13)$$

donde  $\rho_B$  es la densidad de energía máxima, que se alcanza en el instante del rebote:

$$\rho_B = \frac{3}{32\pi G\gamma^2(1 + \gamma^2)\Delta}. \quad (6.14)$$

La existencia de las dos soluciones mencionadas conduce a la aparición de dos ramas diferentes en la evolución, que resultan no poder unirse de manera arbitraria. En efecto, solo hay dos historias evolutivas posibles: o bien un rebote asimétrico une una rama asintóticamente de Sitter en contracción con una cosmología de FLRW plana en expansión, o bien el rebote asimétrico hace las veces de nexo entre una cosmología de FLRW plana en contracción con una rama asintóticamente de Sitter en expansión [90, 92]. En este caso, nos centramos en la primera solución, que no queda inmediatamente descartada por las observaciones. Entonces, en la Ec. (6.13), el signo positivo corresponde a la rama en contracción, mientras que el signo negativo queda asignado a la fase de la evolución posterior al rebote. Sustituyendo la expresión con el signo correspondiente en la Ec. (6.12), se obtienen los dos potenciales de Mukhanov-Sasaki (uno válido antes del rebote y otro, después) derivados de seleccionar la prescripción A para la representación de  $1/\pi_{\alpha}^2$ .

## 1.2 Prescripción B

Consideremos a continuación la segunda opción para la representación de  $1/\pi_{\alpha}^2$ . Aunque se trata de una posibilidad a priori admisible, la alternativa que denominamos de aquí en adelante *prescripción B* carece de la motivación que sustenta a la prescripción A. Siguiendo la propuesta de la Ref. [63], es posible emplear la misma representación de  $1/\pi_{\alpha}^2$  que en el formalismo estándar de la LQC, mezclando esquemas de regularización en un cierto sentido. Esto conduce al valor efectivo

$$\frac{1}{\pi_{\alpha}^2} = \left( \frac{4\pi G\gamma\sqrt{\Delta}}{3} \right)^2 \frac{1}{V^2 \sin^2 b}. \quad (6.15)$$

Para más detalles acerca de las características cuánticas de esta prescripción, véase el Capítulo 5 (o, alternativamente, la Ref. [181]). De esta manera, se obtiene trivialmente que

$$\frac{\Xi}{\pi_{\alpha}^2} = -\frac{4\pi G\gamma\sqrt{\Delta}\cos b}{3V \sin b}, \quad (6.16)$$

y, por consiguiente, el potencial de Mukhanov-Sasaki viene dado por la siguiente expresión efectiva:

$$\begin{aligned} {}^{(B)}\mathcal{U} = & \frac{V^{2/3}}{\sigma^2} \left( \bar{W}_{,\varphi\bar{\varphi}} + 96\pi G\gamma^2\Delta \frac{\bar{W}\rho}{\sin^2 b} \right. \\ & \left. + 16\pi G\gamma\sqrt{\Delta} \frac{\cos b}{\sin b} \frac{\bar{W}_{,\varphi}\pi\bar{\varphi}}{V} - \frac{72\gamma^2\Delta}{\sigma^2} \frac{\bar{W}^2}{\sin^2 b} \right). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Haciendo uso de la Ec. (6.13), se pueden reescribir las funciones trigonométricas de la variable  $b$  en términos de la densidad de energía del campo escalar teniendo en cuenta la salvedad mencionada en el caso de la prescripción A: dicha reescritura no puede llevarse a cabo de manera global y ha de hacerse separadamente para las ramas evolutivas anterior y posterior al rebote.

Uno de nuestros objetivos en lo restante de este capítulo es comparar las propiedades de las masas efectivas derivadas de las prescripciones A y B para verificar si la preferencia teórica por la prescripción A también se traduce en propiedades físicas más atractivas. Este análisis se abordará en las Secs. 3 y 4, donde también se considerará el valor efectivo de las masas obtenidas siguiendo el enfoque de la métrica vestida.

## 2 Masas efectivas en el formalismo de la métrica vestida

En esta sección, discutimos brevemente la obtención de las masas efectivas escalar y tensorial empleando el otro enfoque dominante en el tratamiento de las perturbaciones cosmológicas dentro del marco de la LQC: el formalismo de la métrica vestida. Para más detalles y discusiones en profundidad acerca de la motivación y desarrollo del formalismo en sí, consúltense las Refs. [67–70].

Este enfoque para la LQC inhomogénea se basa en un tratamiento separado de la cosmología homogénea de fondo y de las perturbaciones, ignorando los efectos perturbativos en la dinámica homogénea desde el comienzo. Uno obtiene en primer lugar las ecuaciones dinámicas que gobiernan la evolución de la geometría de fondo, de las cuales se extrae una métrica que queda “vestida” con las correcciones cuánticas más importantes en una especie de aproximación de campo medio. La dinámica de esta cosmología homogénea “vestida” se introduce entonces en el espacio de fases truncado que pretende describir el sistema perturbado al orden de aproximación considerado [68]. De este modo, las perturbaciones se pueden entender como campos de prueba que se propagan sobre un fondo homogéneo “vestido” con efectos cuánticos. Cabe notar que, como consecuencia de este procedimiento escalonado, uno carece de un hamiltoniano global que vincule el fondo homogéneo con las perturbaciones escalares y tensoriales. En su lugar, el formalismo cuenta con dos hamiltonianos, uno de los cuales genera la evolución de la cosmología de fondo, mientras que el otro da lugar a las ecuaciones del movimiento que gobiernan la propagación de las perturbaciones sobre un fondo tratado como una entidad fija [68, 69]. Esto contrasta con el enfoque del formalismo híbrido, en el que el sistema se cuantiza de manera global, tratando los sectores homogéneo e inhomogéneo de manera similar, salvo por el hecho de que se seleccionan representaciones cuánticas de naturalezas distintas para cada uno de ellos.

Haciendo uso de la notación de las Refs. [68, 69] y de la transformación de variables llevada a cabo en la Ref. [182] (la cual permite una comparación inmediata con los resultados del formalismo híbrido), se pueden obtener las ecuaciones dinámicas para las perturbaciones en el régimen efectivo de la LQC. Como en el caso del enfoque

híbrido, cuando se escriben en función del tiempo conforme, las ecuaciones resultantes son de tipo oscilador armónico generalizado sin término de fricción y con masas efectivas dependientes del tiempo (a través de la geometría de fondo) dadas por

$${}^{(D)}M^T = -\frac{(e^{\tilde{\alpha}})''}{e^{\tilde{\alpha}}} = -\frac{V''}{3V} + 2\left(\frac{V'}{3V}\right)^2, \quad (6.18)$$

$${}^{(D)}M^S = {}^{(D)}M^T + {}^{(D)}\mathcal{U}, \quad (6.19)$$

asociadas a la propagación de las perturbaciones escalares y tensoriales, respectivamente. En la ecuación anterior,  $V'$  y  $V''$  denotan la primera y segunda derivadas del volumen físico del Universo con respecto al tiempo conforme y  ${}^{(D)}\mathcal{U}$  es el potencial de Mukhanov-Sasaki en el formalismo de la métrica vestida, cuya expresión discutimos al final de esta sección.

Conviene reexpresar la masa efectiva tensorial en términos de la densidad de energía y la presión del inflatón. Para llevar a cabo el cómputo de la derivada de una cierta función del espacio de fases homogéneo con respecto al tiempo conforme en el formalismo de la métrica vestida, basta con calcular su corchete de Poisson con el hamiltoniano homogéneo que genera la evolución de la geometría de fondo. En el caso estudiado, donde la ligadura hamiltoniana homogénea efectiva se obtiene siguiendo el esquema de regularización de Dapor y Liegener, tenemos que

$$V' = -\frac{2\pi G}{3}V^{-2/3}\{V, \mathcal{H}_0^{(2)}\} = -\frac{3\gamma}{2\sqrt{\Delta}}V^{4/3}\sin 2b\left(1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\cos 2b\right) \quad (6.20)$$

De forma similar, derivando una vez más,

$$\begin{aligned} V'' = & -\frac{3\gamma^2}{\Delta}V^{5/3}\sin^2 b\left\{3\left[\cos 2b - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}(\cos^2 2b - \sin^2 2b)\right]\left(\left[1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\cos^2 b\right]\left(-4\cos^2 b\left(1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\cos 2b\right)^2\right)\right\} \\ & - 18\gamma^2V^{5/3}\frac{\bar{W}}{\sigma^2}\left[\cos 2b - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}(\cos^2 2b - \sin^2 2b)\right] \quad (6.21) \end{aligned}$$

Como resultado, la masa efectiva tensorial en el enfoque de la métrica vestida viene dada por

$$\begin{aligned} {}^{(D)}M^T = & \frac{\gamma^2}{\Delta}V^{2/3}\sin^2 b\left\{3\left[\cos 2b - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}(\cos^2 2b - \sin^2 2b)\right]\left(\left[1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\cos^2 b\right]\left(-2\cos^2 b\left(1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\cos 2b\right)^2\right)\right\} \\ & + 6\gamma^2V^{2/3}\frac{\bar{W}}{\sigma^2}\left[\cos 2b - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}(\cos^2 2b - \sin^2 2b)\right] \quad (6.22) \end{aligned}$$

Esta es una expresión complicada de los elementos de holonomía de la variable  $b$ , que pueden ser reexpresados en términos de  $\rho$  y  $P$ . Para ello, ha de emplearse la Ec.

(6.13), lo que lleva a dos expresiones analíticas distintas si se desea cubrir la historia evolutiva completa del Universo. Es inmediato ver que

$$\cos 2b_{\pm} - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}(\cos^2 2b_{\pm} - \sin^2 2b_{\pm}) = -\frac{1}{\gamma^2} + \frac{3}{1+\gamma^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_B}}\right) \left( +\frac{2}{\gamma^2(1+\gamma^2)} \frac{\rho}{\rho_B} \right), \quad (6.23)$$

$$1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \cos^2 b_{\pm} = -\frac{1}{2\gamma^2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_B}}\right) \left( \right) \quad (6.24)$$

$$1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \cos 2b_{\pm} = \pm \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_B}}, \quad (6.25)$$

$$\frac{\bar{W}}{\sigma^2} = \frac{2\pi G}{3}(\rho - P), \quad (6.26)$$

donde, recordemos, los signos positivo y negativo se corresponden, respectivamente, con la rama asintóticamente de Sitter en contracción y con la cosmología de FLRW en expansión. Sirviéndose de estas expresiones, es trivial reescribir  ${}^{(D)}M^T$  en la forma deseada.

Llegados a este punto, solo queda estudiar la masa efectiva escalar. Como en el enfoque híbrido, esta masa se puede obtener sumando la masa efectiva tensorial y el potencial de Mukhanov-Sasaki. Por tanto, dado que ya hemos examinado el caso de la masa efectiva asociada a las perturbaciones tensoriales, es suficiente con discutir la expresión del potencial de Mukhanov-Sasaki  ${}^{(D)}\mathcal{U}$ . En la práctica, dicha expresión se puede obtener a partir de la Ec. (6.9) mediante la sustitución del valor efectivo del momento canónico asociado al factor de escala logarítmico, escrito en términos de la densidad de energía material y del potencial del campo escalar. Imponiendo que el hamiltoniano homogéneo se anule sobre soluciones a la dinámica del fondo, la expresión que resulta del procedimiento descrito es

$${}^{(D)}\mathcal{U} = \frac{V^{2/3}}{\sigma^2} \left( \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + 36\bar{W} - s 4\sqrt{6\pi G} \frac{|\pi_{\tilde{\varphi}}|}{V} \frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}}{\sqrt{\rho}} - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}^2}{\rho} \right) \quad (6.27)$$

donde  $s$  denota el signo de  $\pi_{\tilde{\varphi}}/\pi_{\tilde{\alpha}}$ . Nótese que esta fórmula coincide con la encontrada empleando la prescripción A en el formalismo híbrido [véase la Ec. (6.12)] si se lleva a cabo la sustitución  $s \rightarrow -3\text{sgn}(\pi_{\tilde{\varphi}})\sin 2b/(4\gamma\sqrt{6\pi G\Delta\rho})$ .

Una vez especificadas las expresiones que adoptan las masas efectivas en el contexto del formalismo de la métrica vestida, podemos proceder al análisis de sus propiedades en los regímenes de interés físico desde el punto de vista de la fijación de condiciones iniciales. Dicho análisis comparativo constituye el contenido de las dos siguientes secciones.

### 3 Masas efectivas en el instante del rebote

En primer lugar, analicemos las propiedades de las masas efectivas introducidas en las secciones anteriores (tanto de las resultantes de ambas prescripciones en formalismo

híbrido, como de aquellas obtenidas en el enfoque de la métrica vestida) evaluadas en el instante del rebote. Más concretamente, queremos estudiar bajo qué circunstancias son positivas, siguiendo un procedimiento similar al presentado en la Ref. [182] en el contexto del esquema de regularización estándar.

Dado que el instante del rebote se caracteriza por corresponder al valor mínimo del volumen físico del Universo  $V$ , es fácil identificar en las Ecs. (6.20) y (6.21) que, en el rebote,

$$\sin^2 b_B = \frac{1}{2(1+\gamma^2)}, \quad (6.28)$$

donde el subíndice (o superíndice)  $B$  se emplea de ahora en adelante para etiquetar cantidades evaluadas en el instante del rebote (o, en inglés, *bounce*). En el modelo de la LQC resultante de aplicar el esquema de regularización de Dapor y Liegener, la solución de interés cosmológico es, como ya hemos comentado, aquella en la que la rama asintóticamente de Sitter aparece en la era anterior al rebote, en la cual la variable  $b$  únicamente adopta valores positivos [92, 95]. Por consiguiente, fijamos

$$b_B = \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}} \right) \quad (6.29)$$

de tal modo que seleccionamos el valor positivo de  $b_B$  más cercano a cero que es solución de la Ec. (6.28). En la solución discutida, se observa que  $b$  es una función monótonamente decreciente del tiempo propio, que alcanza su máximo en el infinito pasado y se anula asintóticamente en el infinito futuro [92, 95]. Evaluemos a continuación cada una de las masas efectivas definidas hasta el momento.

### 3.1 Formalismo híbrido: prescripción A

De acuerdo con la Ec. (6.6), la masa efectiva tensorial en el enfoque híbrido no se ve afectada por la ambigüedad en la representación de  $1/\pi\alpha^2$ , por lo que, independientemente de si se escoge la prescripción A o la prescripción B, adopta el siguiente valor en el instante del rebote:

$$M_B^T = -\frac{4\pi G}{3} V_B^{2/3} (\rho_B - 3P_B) = \frac{8\pi G}{3} V_B^{2/3} \left( \rho_B - \frac{9}{4\pi G\sigma^2} \bar{W}_B \right) \quad (6.30)$$

Como resultado, la masa efectiva tensorial es positiva en dicho instante siempre y cuando

$$\frac{3}{4\pi G\sigma^2} \bar{W}_B < \frac{\rho_B}{3}. \quad (6.31)$$

Es importante notar que la cota anterior equivale a requerir que la contribución cinética a la densidad de energía material sea superior a  $2\rho_B/3$  y, por consiguiente, al menos dos veces más grande que la contribución potencial. Como resultado, cuando la densidad de energía del inflatón se ve dominada por su contribución cinética



en el instante del rebote, la masa efectiva tensorial es estrictamente positiva en el formalismo híbrido. Esta conclusión es idéntica a la obtenida empleando el procedimiento de regularización estándar [182]. El hecho de que se alcance el mismo resultado incluso cuando se adoptan esquemas de regularización distintos lo dota de una mayor robustez.

Analicemos a continuación cuál es la situación de la masa efectiva escalar. Empleando la Ec. (6.12), tenemos que

$${}^{(A)}M_B^S = \frac{8\pi G}{3} V_B^{2/3} \times \left[ \left( \rho_B + \frac{3}{8\pi G \sigma^2} \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B + 30\bar{W}_B + \frac{3}{\gamma\sqrt{\Delta}} \sin 2b_B \frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}^B \pi_{\tilde{\varphi}}^B}{V_B \rho_B} - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_B^2}{\rho_B} \right) \right] \quad (6.32)$$

donde

$$\sin 2b_B = \frac{\sqrt{1 + 2\gamma^2}}{1 + \gamma^2}. \quad (6.33)$$

Para poder determinar las propiedades de positividad de esta masa de forma analítica, es necesario introducir ciertas restricciones en el potencial del campo escalar. Con la motivación de cubrir el caso del potencial de masa constante (que es de especial interés<sup>29</sup>, dada su simplicidad), centramos nuestra atención de ahora en adelante en potenciales que verifiquen las siguientes condiciones *en el instante del rebote*:

$$\bar{W}_B \geq 0, \quad \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B \geq 0. \quad (6.34)$$

Debido a la presencia de un término proporcional a  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}$  en la Ec. (6.32), requerimos adicionalmente que los potenciales de campo estudiados cumplan, *en el instante del rebote*,

$$|\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}^B| \leq C \sqrt{2\bar{W}_B \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}, \quad (6.35)$$

donde  $C = C(\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B)$  es una función positiva con un valor del orden de la unidad. Merece la pena notar que, de acuerdo con la motivación original mencionada para la introducción de estas condiciones, el potencial de masa constante pertenece a la familia de potenciales de campo que satisfacen los requisitos (6.34) y (6.35). Efectivamente, un término de masa constante resulta exhibir las propiedades (6.34) en cualquier instante de tiempo (y no solo en el del rebote) y verifica la identidad  $|\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}^B| = (2\bar{W}_B \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B)^{1/2}$ , por lo que la función  $C$  se reduce a la unidad en dicho

<sup>29</sup>Nótese que, aunque el potencial de masa constante parezca desfavorecido por observaciones recientes [185], todo el análisis que sustenta dichos resultados se ha llevado a cabo dentro del marco de la relatividad general y con una elección de vacío para las perturbaciones dada por el vacío de Bunch-Davies. Por consiguiente, conviene enfatizar que estos resultados no se pueden extrapolar de forma sencilla al caso de la LQC. En efecto, por un lado, las correcciones cuánticas de la LQC conducen a un menor cociente tensorial-escalar, aliviando parcialmente las restricciones derivadas de los datos experimentales [30]. Por otro lado, las correcciones cuánticas también alteran el ansatz del vacío de Bunch-Davies [33, 34].

caso. Antes de seguir adelante, cabe mencionar también que estas son las mismas condiciones sobre el potencial de campo que se consideraron en el contexto de la regularización estándar en la Ref. [182].

Haciendo uso de la definición de la densidad de energía material (6.3) en el instante del rebote, se puede mostrar que [182]

$$\frac{|\pi_{\tilde{\varphi}}^B| \sqrt{2\bar{W}_B}}{V_B} = \sqrt{\left( \frac{3}{\pi G} \bar{W}_B \left( \rho_B - \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \bar{W}_B \right) \right)} \quad (6.36)$$

La parte derecha de la ecuación anterior, entendida como una función del potencial  $\bar{W}_B$ , tiene un máximo local. Su valor en el máximo local da lugar a la cota superior  $|\pi_{\tilde{\varphi}}^B| \sqrt{2\bar{W}_B}/V_B \leq \sigma \rho_B$ , que, combinada con la condición (6.35), resulta en el hecho de que el valor absoluto del término proporcional a  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  en la Ec. (6.32) satisface lo siguiente:

$$\frac{|\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B \pi_{\tilde{\varphi}}^B|}{V_B \rho_B} \leq \sigma C \sqrt{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}. \quad (6.37)$$

Esta cota superior, junto con la observación de que la primera derivada del potencial puede adoptar cualquier signo, nos permite acotar inferior y superiormente el valor de la masa efectiva escalar en el instante del rebote. En efecto,  $P_- \leq {}^{(A)}M_B^S \leq P_+$ , donde

$$P_{\pm} = \frac{8\pi G}{3} V_B^{2/3} \rho_B \pm \frac{V_B^{2/3}}{\sigma^2} \left( \bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B + 30\bar{W}_B \pm \frac{3\sigma C}{\gamma \sqrt{\Delta}} \frac{\sqrt{1+2\gamma^2}}{1+\gamma^2} \sqrt{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B} - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_B^2}{\rho_B} \right) \quad (6.38)$$

han de entenderse como polinomios cuadráticos en  $\bar{W}_B$ . Las raíces de dichos polinomios, que llamaremos  $x_{\pm}(P_+)$  y  $x_{\pm}(P_-)$ , son

$$\frac{3}{4\pi G \sigma^2} x_{\pm}(P_{\pm}) = \frac{5 \pm \sqrt{\left( 3 \left( 3 + \frac{3}{\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}{\rho_B} \pm \frac{9C}{\pi G \sigma \gamma \sqrt{\Delta}} \frac{\sqrt{1+2\gamma^2}}{1+\gamma^2} \frac{\sqrt{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}}{\rho_B} \right)^2 - 12}}{12} \rho_B, \quad (6.39)$$

donde el signo  $\pm$  en el radicando se corresponde con  $P_{\pm}$ , respectivamente.

En el caso de un potencial de campo perteneciente a la familia que estamos considerando (que, en particular, tienen segundas derivadas no negativas en el instante del rebote), las dos raíces del polinomio  $P_+$  son reales. Por tanto, la cota superior  ${}^{(A)}M_B^S \leq P_+$  implica que la masa efectiva escalar en el instante del rebote es negativa al menos cuando  $P_+$  lo es o, lo que es lo mismo, cuando

$$\bar{W}_B \in \left[ 0, \frac{4\pi G \sigma^2}{3} \rho_B \right] \setminus \left( \left[ x_-(P_+), x_+(P_+) \right] \cap \left[ 0, \frac{4\pi G \sigma^2}{3} \rho_B \right] \right) \quad (6.40)$$

donde hemos empleado que, dado que la contribución cinética a la densidad de energía del campo escalar nunca es negativa, el valor máximo de  $\bar{W}$  en el instante del rebote

viene dado por  $4\pi G\sigma^2\rho_B/3$ . Puesto que  $x_-(P_+)$  es claramente negativo, la masa efectiva escalar es negativa al menos en la región definida por

$$\bar{W}_B \in \left( x_+(P_+), \frac{4\pi G\sigma^2\rho_B}{3} \right] \quad (6.41)$$

siempre y cuando  $x_+(P_+) < 4\pi G\sigma^2\rho_B/3$ . En caso contrario, la cota superior a la masa efectiva escalar no proporcionaría información alguna acerca de la existencia de una región de potenciales físicos en la que está garantizado que  $^{(A)}M_B^S$  es negativa.

Es sencillo darse cuenta de que  $x_+(P_+) < 4\pi G\sigma^2\rho_B/3$  si y solo si

$$w^2 + 4\sqrt{6}C\sqrt{\frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2}w - \frac{16}{3}} < 0, \quad (6.42)$$

donde  $w = (\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B)^{1/2}/(\pi G\sigma^2\rho_B)^{1/2} \in [0, \infty^+)$ . Esta desigualdad se verifica cuando  $w \in (w_-^{(A)}, w_+^{(A)}) \cap [0, \infty^+)$ , donde  $w_{\pm}^{(A)}$  son las raíces del polinomio que aparece en el lado izquierdo de la desigualdad anterior:

$$w_{\pm}^{(A)} = -2\sqrt{6}C\sqrt{\frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2}} \pm \sqrt{24C^2\frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{16}{3}}. \quad (6.43)$$

Dado que las raíces  $w_+^{(A)}$  y  $w_-^{(A)}$  son claramente positiva y negativa, respectivamente, existe una región del espacio de potenciales de campo en la que la masa efectiva escalar en el instante del rebote es negativa si y solo si la segunda derivada del potencial en ese instante [que ya hemos restringido a que no sea negativa en la condición (6.34)] es lo suficientemente pequeña:

$$\frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}{\pi G\sigma^2\rho_B} \in \left[ 0, \left( w_+^{(A)} \right)^2 \right) \quad (6.44)$$

Tomando  $C = 1$  y el valor estándar del parámetro de Immirzi ( $\gamma = 0.2375$ ), obtenemos que  $w_+^{(A)} \approx 0.505$ .

La restricción (6.44) admite valores de  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  en una vecindad de cero, que es un caso de especial interés. Dado que la región en la que está asegurado que la masa  $^{(A)}M_B^S$  es negativa se agranda a medida que  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  se aproxima a cero, su extensión máxima se alcanza en el límite en el que la segunda derivada del potencial de campo se anula en el rebote. En dicho caso límite, la masa efectiva escalar es negativa al menos en la región definida por

$$\frac{3}{4\pi G\sigma^2\rho_B}\bar{W}_B \in \left[ \frac{5+\sqrt{33}}{12}, 1 \right], \quad (6.45)$$

que representa aproximadamente un 10.5% del espacio de potenciales físicos.

Por otro lado, si las raíces de  $P_-$  son reales, lo cual ciertamente ocurre para valores de  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  en una vecindad de cero, la cota inferior  $^{(A)}M_B^S \geq P_-$  garantiza que la masa

efectiva escalar no es negativa al menos en el subespacio de potenciales físicos donde  $\bar{W}_B \in [x_-(P_-), x_+(P_-)] \cap [0, 4\pi G\sigma^2 \rho_B/3]$ . Sea  $R_-$  el radicando correspondiente a  $P_-$  en la Ec. (6.39). Entonces, si  $R_- < D$  para  $D = 0$ , ambas raíces  $x_{\pm}(P_-)$  son complejas. Además, la raíz menor  $x_-(P_-)$  es positiva siempre que  $0 \leq R_- < D$  para  $D = 25$  y la raíz mayor  $x_+(P_-)$  es menor que  $4\pi G\sigma^2 \rho_B/3$  si  $0 \leq R_- < D$  para  $D = 49$ . Como resultado, en función de qué valor adopte  $D$  con respecto a estos umbrales, se distinguen cuatro situaciones posibles: (a) si  $D < 0$ , ambas raíces son complejas y no se puede extraer ninguna información nueva de la cota inferior; (b) si  $0 \leq D < 25$ ,  $^{(A)}M_B^S$  no es negativa al menos cuando  $\bar{W}_B \in [x_-(P_-), x_+(P_-)]$ ; (c) si  $25 \leq D < 49$ ,  $^{(A)}M_B^S$  no es negativa al menos cuando  $\bar{W}_B \in [0, x_+(P_-)]$ ; y (d) si  $D \geq 49$ ,  $^{(A)}M_B^S$  no es negativa para todo  $\bar{W}_B \in [0, 4\pi G\sigma^2 \rho_B/3]$ .

Reescribiendo la igualdad  $R_- = -D$  como una ecuación polinómica cuadrática en la variable  $w = (\bar{W}_{\varphi\bar{\varphi}}^B)^{1/2}/(\pi G\sigma^2 \rho_B)^{1/2}$  (que no es negativa por construcción), es fácil ver para qué valores de la segunda derivada del potencial de campo se da cada una de las situaciones (a)-(d). Sean  $w_{\pm}(D)$  los ceros del polinomio resultante de esta reescritura, donde aún no se ha tenido en cuenta la restricción al semieje positivo impuesta por su definición. En primer lugar, haciendo uso de la definición de la densidad de energía (6.3), se puede verificar que el polinomio no posee raíces reales para valores de  $D$  tales que  $D < [33 - 72C^2(1+2\gamma^2)/(1+\gamma^2)]$ . Esta última cantidad resulta ser, aproximadamente,  $-42.8$  para  $C = 1$  y el valor estándar del parámetro de Immirzi. Por tanto, si los valores reales de  $C$  y  $\gamma$  residen en una vecindad de  $C = 1$  y  $\gamma = 0.2375$ , el polinomio cuadrático en  $w$  tiene dos raíces reales para cualquier  $D \geq 0$ . Es inmediato ver que la raíz menor no es negativa si y solo si  $D \leq 33$ . Además, para valores grandes de  $w$ , el polinomio es siempre positivo. Por tanto, es posible concluir que las situaciones (a)-(d) mencionadas en el párrafo anterior tienen lugar cuando: (a)  $w \in (w_-(0), w_+(0))$ , (b)  $w \in (w_-(25), w_-(0)] \cup [w_+(0), w_+(25))$ , (c)  $w \in [0, w_-(25)] \cup [w_+(25), w_+(49))$  y (d)  $w \geq w_+(49)$ .

En el caso especial en el que el potencial de campo viene dado simplemente por un término de masa constante, su segunda derivada es por supuesto constante y el valor de  $w$  queda únicamente determinado por la masa del inflatón. En los escenarios de interés para la fenomenología del fondo cósmico de microondas, esta masa es considerablemente pequeña (véanse las Refs. [30, 31]) y, consecuentemente, también lo es  $w$ . Por lo tanto, estos escenarios pertenecen a la situación (c). Entonces, de acuerdo con el análisis anterior, existe una región del espacio de potenciales físicos en el instante del rebote que contiene el valor  $\bar{W}_B = 0$  en el que la masa efectiva escalar no es negativa en dicho instante. Para los valores pequeños de la masa del inflatón mencionados anteriormente, dicha región se extiende hasta potenciales de campo cuyo valor en el instante del rebote es cercano a  $(5 + \sqrt{33})\pi G\sigma^2 \rho_B/9$  [es decir, el valor de  $x_+(P_-)$  para  $\bar{W}_{\varphi\bar{\varphi}}^B = 0$ ], que cubre el sector de las soluciones en las que la densidad de energía material está dominada cinéticamente.

En conclusión, las masas efectivas escalar y tensorial que resultan de emplear la prescripción A dentro del formalismo híbrido resultan ser inevitablemente positivas en el caso de interés en el que el potencial de campo y su segunda derivada son pequeños en el instante del rebote, encontrado en los escenarios de dominio cinético en los que es posible obtener buenos ajustes del fondo cósmico de microondas, admitiendo

al mismo tiempo la presencia de efectos cuánticos que afecten a las observaciones para grandes escalas angulares (correspondientes a multipolos bajos), donde parecen existir discrepancias entre las observaciones y las predicciones de la relatividad general [185–187].

### 3.2 Formalismo híbrido: prescripción B

Exploremos ahora las consecuencias de escoger la representación del cuadrado del inverso del momento canónico del factor de escala logarítmico de la Ref. [63], en lugar de escoger la representación natural proporcionada por la contribución gravitacional a la ligadura escalar homogénea. El análisis que sigue es muy similar al de la prescripción A, desarrollado en detalle en el apartado anterior. Por este motivo, simplemente notamos las diferencias entre ambos y escribimos los resultados con el fin de compararlos.

Por un lado, dado que la masa efectiva tensorial es independiente de la representación escogida para  $1/\pi_{\alpha}^2$ , su valor en el instante del rebote y los comentarios acerca de su positividad [véanse la Ec. (6.30) y el párrafo bajo ella] siguen siendo de aplicación en el caso presente. Por otro lado, en lo que se refiere a la masa efectiva escalar, es inmediato ver a partir de las Ecs. (6.17) y (6.30) que, en el instante del rebote,

$${}^{(B)}M_B^S = -\frac{8\pi G}{3}V_B^{2/3}\rho_B + \frac{V_B^{2/3}}{\sigma^2}\left(\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B + 12\bar{W}_B + 16\pi G\gamma\sqrt{1+2\gamma^2}\sqrt{\Delta}\frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}^B\pi_{\tilde{\varphi}}^B}{V_B} - \frac{144\gamma^2(1+\gamma^2)\Delta}{\sigma^2}\bar{W}_B^2\right). \quad (6.46)$$

Como en la sección anterior, concentrándonos en potenciales de campo que verifican las condiciones (6.34) y (6.35), concluimos que la masa efectiva escalar en el instante del rebote se puede acotar inferior y superiormente por dos polinomios cuadráticos en el potencial  $\bar{W}_B$ . En efecto,  $Q_- \leq {}^{(B)}M_B^S \leq Q_+$ , donde

$$Q_{\pm} = -\frac{8\pi G}{3}V_B^{2/3}\rho_B + \frac{V_B^{2/3}}{\sigma^2}\left(\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B + 12\bar{W}_B \pm \frac{3\sigma C}{2\gamma\sqrt{\Delta}}\frac{\sqrt{1+2\gamma^2}}{1+\gamma^2}\sqrt{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B} - \frac{144\gamma^2(1+\gamma^2)\Delta}{\sigma^2}\bar{W}_B^2\right). \quad (6.47)$$

Las raíces de estos polinomios, que denominaremos  $x_{\pm}(Q_+)$  y  $x_{\pm}(Q_-)$ , son

$$\frac{3x_{\pm}(Q_{\pm})}{4\pi G\sigma^2} = \frac{1 \pm \sqrt{2 + \frac{3}{8\pi G\sigma^2}\frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}{\rho_B} \pm \frac{9C}{16\pi G\sigma\gamma\sqrt{\Delta}}\frac{\sqrt{1+2\gamma^2}}{1+\gamma^2}\frac{\sqrt{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}}{\rho_B}}}{3}\rho_B, \quad (6.48)$$

donde el signo positivo en el interior de la raíz cuadrada corresponde al polinomio  $Q_+$  y el negativo, a  $Q_-$ . Dada nuestra restricción a potenciales cuyas segundas derivadas en el instante del rebote no son negativas, las dos raíces del polinomio  $Q_+$  resultan ser reales. Dado que, además,  $x_-(Q_+)$  es negativa, la cota superior a  ${}^{(B)}M_B^S$  implica que

la masa efectiva escalar es necesariamente negativa en el instante del rebote cuando el valor del potencial de campo en dicho instante pertenece al intervalo

$$\left( x_+(Q_+), \frac{4\pi G\sigma^2}{3}\rho_B \right] \quad (6.49)$$

siempre y cuando  $x_+(Q_+) < 4\pi G\sigma^2\rho_B/3$ . Esta condición se satisface claramente cuando la segunda derivada del potencial  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  es lo suficientemente pequeña. La condición suficiente encontrada para la existencia de una región del espacio de potenciales físicos en la que la masa efectiva escalar es negativa en el instante del rebote se puede traducir en el siguiente requisito sobre la segunda derivada del potencial del inflatón:

$$\frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B}{\pi G\sigma^2\rho_B} \in \left[ 0, \left( w_+^{(B)} \right)^2 \right) \quad (6.50)$$

con

$$w_+^{(B)} = -\sqrt{6}C\sqrt{\frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2}} + \sqrt{6C^2\frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{16}{3}}. \quad (6.51)$$

Tomando  $C = 1$  y el valor estándar de  $\gamma$ , obtenemos que  $w_+^{(B)} \approx 0.900$ , que es mayor que la cantidad análoga en el contexto de la prescripción A,  $w_+^{(A)}$ .

Nótese que el intervalo (6.50) incluye el caso relevante en el que la segunda derivada del potencial es muy cercana a cero y, por tanto, en ese caso, siempre existe una región donde está garantizado que la masa efectiva  $^{(B)}M_B^S$  es negativa. Además, dicha región alcanza su máxima extensión cuando  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  se anula idénticamente, situación en la que la Ec. (6.49) se reduce a

$$\frac{3}{4\pi G\sigma^2\rho_B}\bar{W}_B \in \left[ \frac{1+\sqrt{2}}{3}, 1 \right], \quad (6.52)$$

que representa aproximadamente un 19.5% del espacio de potenciales físicos.

Por otro lado, la cota inferior  $^{(B)}M_B^S \geq Q_-$  garantiza que la masa efectiva escalar es positiva en el instante del rebote al menos cuando el polinomio  $Q_-$  lo es. Como en el caso de la prescripción A, los valores de  $\bar{W}_B$  para los que el polinomio  $Q_-$  es positivo dependen del valor del radicando en la Ec. (6.48) correspondiente a  $Q_-$ , denotado por  $T_-$ , en comparación con una serie de umbrales. Es conveniente reescribir la igualdad  $T_- = D$  como una ecuación polinómica cuadrática en la variable  $w \in [0, \infty^+)$  con raíces  $w_{\pm}(D)$ . Se puede demostrar que dicha ecuación polinómica no tiene raíces reales para  $D < \{2 - 9C^2(1+2\gamma^2)/[4(1+\gamma^2)]\}$ , cota cuyo valor es  $-0.370$  para  $C = 1$  y el parámetro de Immirzi estándar. Por consiguiente, si  $C$  y  $\gamma$  están cerca de sus valores estándar, la ecuación  $T_- = D$  siempre tiene dos raíces reales para todo  $D \geq 0$ . Se distinguen cuatro situaciones distintas análogas a las encontradas con la prescripción A: (a) si  $w \in (w_-(0), w_+(0))$ , ambas raíces  $x_{\pm}(Q_-)$  son complejas y no se puede extraer información alguna; (b) si  $w \in (w_-(1), w_-(0)) \cup [w_+(0), w_+(1))$ ,

está asegurado que  ${}^{(B)}M_B^S$  no es negativa cuando  $\bar{W}_B \in [x_-(Q_-), x_+(Q_-)]$ ; (c) si  $w \in [0, w_-(1)] \cup [w_+(1), w_+(4)]$ ,  ${}^{(B)}M_B^S$  no es negativa cuando  $\bar{W}_B \in [0, x_+(Q_-)]$  y (d) si  $w \geq w_+(4)$ ,  ${}^{(B)}M_B^S$  no es negativa para todo valor físico del potencial de campo  $\bar{W}_B \in [0, 4\pi G\sigma^2\rho_B/3]$ .

Como ya comentamos en la subsección anterior, cuando el potencial se reduce a un término de masa constante, el valor de la masa determina de manera única el valor de la variable  $w$ . Esa masa (y, por consiguiente,  $w$ ) resulta ser extremadamente pequeña en los casos de interés en la LQC en lo que concierne a la fenomenología del fondo cósmico de microondas [31]. Como resultado, los escenarios que son de interés físico en este contexto pertenecen a la situación (c). Este hecho asegura que la masa efectiva escalar es positiva en el instante del rebote en el sector de dominio cinético. En efecto, cuando  $\bar{W}_{,\varphi\varphi}^B$  es muy pequeño, la masa efectiva escalar en el instante del rebote, es positiva siempre y cuando  $0 \leq \bar{W}_B < 4(1 + \sqrt{2})\pi G\sigma^2\rho_B/9$ .

Antes de finalizar esta subsección, comparemos las predicciones físicas asociadas a las prescripciones A y B. Más concretamente, parece interesante preguntarse cuál de las dos regiones en las que  $M_B^S$  es necesariamente negativa es más grande. En el caso límite en el que la segunda derivada del potencial de campo se anula, ya hemos comprobado que la prescripción B conduce a un intervalo de potenciales más grande en el que la masa efectiva escalar en el instante del rebote es necesariamente negativa [véanse las Ecs. (6.45) y (6.52)]. En realidad, esta comparación puede extenderse a escenarios más generales. Para verlo, basta con preguntarse si  $x_+(P_+)$  es mayor que  $x_+(Q_+)$  para algún valor de la segunda derivada del potencial relevante [es decir, para algún valor tal que tanto  $x_+(P_+)$  como  $x_+(Q_+)$  sean menores que  $4\pi G\sigma^2\rho_B/3$ ] y no solo para el caso en el que dicha segunda derivada se anula idénticamente. Si la respuesta resultase ser afirmativa, entonces  $x_+(P_+) - x_+(Q_+)$  debería ser mayor que cero, lo cual equivale a

$$1 + \sqrt{33 + 3w^2 + 12\sqrt{6}C \sqrt{\frac{1 + 2\gamma^2}{1 + \gamma^2}} w} - \sqrt{32 + 6w^2 + 12\sqrt{6}C \sqrt{\frac{1 + 2\gamma^2}{1 + \gamma^2}} w} > 0. \quad (6.53)$$

Esta desigualdad se verifica, como ya sabemos, cuando  $w^2 = 0$ . Además, se puede ver que el lado izquierdo decrece monótonamente a medida que crece  $w$ , anulándose para un cierto valor de  $w$  que llamaremos  $\bar{w}$ . Si  $\bar{w}$  fuese mayor que el menor de entre  $w_+^{(A)}$  y  $w_+^{(B)}$  [sabemos que, para  $C = 1$  y  $\gamma = 0.2375$ ,  $w_+^{(A)} < w_+^{(B)}$  y que, por tanto, lo mismo ocurre para valores de  $C$  y  $\gamma$  en una vecindad de los anteriores], entonces concluiríamos que  $x_+(P_+) > x_+(Q_+)$  para todos los valores relevantes de la segunda derivada del potencial de campo. De la desigualdad sobre estas líneas, se desprende que  $\bar{w}$  satisface la ecuación  $-9\bar{w}^4 + 24\bar{w}^2 + 48\sqrt{6}C \sqrt{(1 + 2\gamma^2)/(1 + \gamma^2)}\bar{w} + 128 = 0$ . Esto implica que  $\bar{w}$  es mayor que uno: en efecto, el primer término y el último ya requieren que  $\bar{w} > 1$  y los términos restantes solo incrementan el valor de  $\bar{w}$ . Por lo tanto, se puede comprobar que  $\bar{w}$  es mayor que  $w_+^{(A)}$  y  $w_+^{(B)}$ , por lo que queda

demostrado que  $x_+(P_+) > x_+(Q_+)$ , no solo en el límite de segundas derivadas del potencial nulas, sino también para todo valor finito relevante.

En resumen, aunque las masas efectivas escalar y tensorial evaluadas en el rebote son positivas en los casos de interés físico (es decir, aquellos en los que tanto el potencial de campo como su segunda derivada con pequeños), la adopción de la prescripción B resulta en un valor de la masa efectiva escalar en el instante del rebote que es necesariamente negativo en una región mayor que su análogo en la prescripción A. Por ende, se puede concluir que la prescripción A conduce a masas efectivas con propiedades más atractivas, en el sentido de que sus valores en el instante del rebote son positivos en un sector menos restringido del espacio de potenciales físicos.

### 3.3 Formalismo de la métrica vestida

Evaluemos ahora las masas efectivas correspondientes al formalismo de la métrica vestida en el instante del rebote y discutamos sus propiedades de positividad, comparándolas con aquellas obtenidas a partir de las prescripciones híbridas (estudiadas en las Secs. 3.1 y 3.2). Dadas las similitudes entre los análisis presentados en las subsecciones anteriores y el análisis que sigue a continuación, nos centramos principalmente en las diferencias que surgen en el proceso y proporcionamos los resultados para poder llevar a cabo una comparación con los del enfoque híbrido.

Por un lado, la masa efectiva tensorial en el instante del rebote puede deducirse a partir de la Ec. (6.22) haciendo uso de las Ecs. (6.23)-(6.26), lo que resulta en

$${}^{(D)}M_B^T = -4\pi G \frac{1 + 2\gamma^2}{1 + \gamma^2} V_B^{2/3} (\rho_B + P_B) = -\frac{16\pi^2 G^2}{3} \frac{1 + 2\gamma^2}{1 + \gamma^2} \frac{(\pi_{\tilde{\varphi}}^B)^2}{V_B^{4/3}}. \quad (6.54)$$

En la última igualdad, hemos introducido las definiciones de la densidad de energía material (6.3) y de la presión (6.4) en términos de las contribuciones cinética y potencial a la densidad de energía material. Nótese que la expresión resultante es manifiestamente negativa. Esto contrasta en gran medida con el resultado obtenido siguiendo el enfoque híbrido, donde la masa efectiva tensorial en el instante del rebote (6.30) es positiva en situaciones de dominio cinético. Esta negatividad de la masa efectiva tensorial en el formalismo de la métrica vestida también se encontró en la Ref. [182] dentro del contexto del esquema de regularización estándar en la LQC. De hecho, este resultado es inevitable en vista de la definición de la masa efectiva tensorial en el formalismo de la métrica vestida. En efecto, nótese que viene dada por el cociente de la segunda derivada del factor de escala y el propio factor de escala, salvo por un signo. Por tanto, como el factor de escala es una función cóncava en torno al rebote, no hay otra posibilidad salvo que la masa sea estrictamente negativa.

Por otro lado, a partir de la Ec. (6.27), es fácil ver que la masa efectiva escalar



evaluada en el instante del rebote se puede escribir de la siguiente manera:

$${}^{(D)}M_B^S = \frac{8\pi G}{3} V_B^{2/3} \left\{ \left( 3 \frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} \rho_B + \frac{3}{8\pi G \sigma^2} \left[ \bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B + \left( 36 + 6 \frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} \right) \bar{W}_B \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - s 4 \sqrt{6\pi G} \frac{\bar{W}_{,\dot{\varphi}}^B |\pi_{\dot{\varphi}}^B|}{V_B \sqrt{\rho_B}} - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_B^2}{\rho_B} \right] \right) \bar{W}_B \right. \\ \left. - s 4 \sqrt{6\pi G} \frac{\bar{W}_{,\dot{\varphi}}^B |\pi_{\dot{\varphi}}^B|}{V_B \sqrt{\rho_B}} - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_B^2}{\rho_B} \right\} \quad (6.55)$$

Una vez más, como en las subsecciones anteriores, nos limitamos a considerar de aquí en adelante potenciales de campo que satisfagan las condiciones (6.34) y (6.35). Para tales potenciales, el valor de la masa efectiva escalar en el instante del rebote queda acotado inferior y superiormente por dos polinomios  $K_{\pm}$  cuadráticos en  $\bar{W}_B$ :

$$K_{\pm} = \frac{8\pi G}{3} V_B^{2/3} \left\{ \left( 3 \frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} \rho_B + \frac{3}{8\pi G \sigma^2} \left[ \bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B + \left( 36 + 6 \frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} \right) \bar{W}_B \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \pm \frac{3\sigma C}{\gamma \sqrt{1+\gamma^2} \sqrt{\Delta}} \sqrt{\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_B^2}{\rho_B}} \right] \right) \bar{W}_B \right. \\ \left. \pm \frac{3\sigma C}{\gamma \sqrt{1+\gamma^2} \sqrt{\Delta}} \sqrt{\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B - 36 \frac{3}{4\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_B^2}{\rho_B}} \right\}, \quad (6.56)$$

cuyas raíces, que llamaremos  $x_{\pm}(K_+)$  y  $x_{\pm}(K_-)$ , vienen dadas por

$$\frac{3}{4\pi G \sigma^2 \rho_B} x_{\pm}(K_{\pm}) = \frac{1}{2} + \frac{1+2\gamma^2}{12(1+\gamma^2)} \\ \pm \frac{1}{12} \sqrt{\left( \left( 6 - \frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^2 + \frac{3}{\pi G \sigma^2} \frac{\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B}{\rho_B} \pm \frac{9C}{\pi G \sigma \gamma \sqrt{1+\gamma^2} \sqrt{\Delta}} \frac{\sqrt{\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B}}{\rho_B} \right)}, \quad (6.57)$$

donde el signo positivo en el interior de la raíz cuadrada corresponde a  $K_+$ . Puesto que, en la familia de potenciales considerados,  $\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B > 0$ , las raíces  $x_{\pm}(K_+)$  son reales. Por tanto, la cota superior a  ${}^{(D)}M_B^S$  implica que la masa efectiva escalar adopta necesariamente un valor negativo en el instante del rebote cuando

$$\bar{W}_B \in \left[ 0, \frac{4\pi G \sigma^2}{3} \rho_B \right] \setminus \left( \left( [x_-(K_+), x_+(K_+)] \cap \left[ 0, \frac{4\pi G \sigma^2}{3} \rho_B \right] \right) \right) \quad (6.58)$$

Si la segunda derivada  $\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B$  es lo suficientemente pequeña (como es el caso de las situaciones más interesantes desde el punto de vista de la fenomenología del fondo cósmico de microondas), es inmediato darse cuenta de que ambas raíces son positivas y de que  $x_-(K_+) < 4\pi G \sigma^2 \rho_B / 3 < x_+(K_+)$ . Por consiguiente, cuando  $\bar{W}_{,\dot{\varphi}\dot{\varphi}}^B$  es cercano a cero, la masa efectiva escalar en el instante del rebote es necesariamente negativa en la región del espacio de potenciales físicos en la que  $\bar{W}_B \in [0, x_-(K_+)]$ . Este intervalo es grande cuando la segunda derivada del potencial de campo en el instante del rebote es pequeña e incluye, notablemente, el régimen de dominio cinético en la densidad de energía del inflatón.

La única manera de evitar que la masa efectiva escalar sea negativa cuando el potencial de campo en el instante del rebote es despreciable frente a  $4\pi G \sigma^2 \rho_B / 3$  es que la segunda derivada del potencial de campo sea lo suficientemente grande como

para que  $x_-(K_+) < 0$ . De la Ec. (6.57) se deduce que esta condición se cumple si y solo si

$$\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B > \pi G \sigma^2 \rho_B \left( \sqrt{4C^2 + 8 \frac{1+2\gamma^2}{1+\gamma^2}} - 2\sqrt{6}C \right)^2 \quad (6.59)$$

Tomando  $C = 1$  y el valor estándar del parámetro de Immirzi, obtenemos que la segunda derivada del potencial evaluada en el instante del rebote ha de ser mayor que, aproximadamente,  $0.633\pi G \sigma^2 \rho_B$  para que la masa efectiva escalar no sea negativa en el rebote en escenarios de dominio cinético total.

Si las raíces del polinomio  $K_-$  resultan ser reales también (lo cual ciertamente ocurre para valores lo suficientemente pequeños de  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$ ), la cota inferior a  $^{(D)}M_B^S$  implica que la masa efectiva escalar es necesariamente positiva en el instante del rebote cuando  $K_-$  lo es. Como en el enfoque híbrido, el intervalo de valores del potencial de campo para el que la positividad de la masa efectiva escalar está garantizada depende del valor adoptado por el argumento de la raíz cuadrada de la Ec. (6.57) asociado al polinomio  $K_-$ , denotado por  $J_-$ . Reescribamos  $J_- - D$  como un polinomio cuadrático en  $w \in [0, \infty^+)$  con raíces reales  $w_{\pm}(D)$  (la realidad de las raíces se justifica, como en las secciones anteriores, restringiendo el estudio a valores de  $C$  y  $\gamma$  cercanos a los que hemos venido tratando como estándar). A partir de este polinomio, se puede observar que la raíz  $w_-(D)$  resulta ser siempre negativa y que  $w_+(D)$  siempre es positiva para valores de  $D$  por encima de un cierto umbral. Esto implica que, a diferencia del caso híbrido, solo se distinguen dos situaciones posibles, ya que los análogos de las situaciones (a) y (b) (véanse las Secs. 3.1 y 3.2) no se pueden dar. Las restantes son: (c) si  $w \in [0, w_+(D_+))$ , donde  $D_+ = [6 + (1 + 2\gamma^2)/(1 + \gamma^2)]^2$ , entonces  $^{(D)}M_B^S$  no es negativa para  $\bar{W}_B \in [x_-(K_-), 4\pi G \sigma^2 \rho_B/3]$  y (d) si  $w \geq w_+(D_+)$ ,  $^{(D)}M_B^S$  no es negativa para todo  $\bar{W}_B \in [0, 4\pi G \sigma^2 \rho_B/3]$ .

Como ya hemos discutido, en la situación en la que el potencial de campo se reduce a un término de masa constante, la segunda derivada del potencial es ciertamente constante y  $w$  queda fijado a partir del valor de la masa del campo escalar. Los escenarios de interés físico están caracterizados por un valor extremadamente pequeño de  $w$  [30] y, por ende, pertenecen al caso (c): la masa efectiva escalar en el rebote es necesariamente positiva solo cuando la densidad de energía material en el instante del rebote está dominada por su contribución potencial. En conclusión,  $M_B^S$  nunca puede ser positiva en el formalismo de la métrica vestida cuando tanto  $\bar{W}_B$  como  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^B$  son pequeños.

## 4 Masas efectivas en el régimen de Sitter

En esta última sección, analizamos las masas efectivas escalar y tensorial correspondientes a los formalismos híbrido y de la métrica vestida en la región asintóticamente de Sitter que emerge en la rama evolutiva anterior al rebote como resultado de adoptar la propuesta de regularización de Dapor y Liegener. Una vez evaluadas las masas,

llevamos a cabo un estudio individualizado de su comportamiento y de sus propiedades de positividad.

Como se puede ver en la expresión de la densidad de energía material (6.3), existen dos situaciones distintas en las que dicha cantidad se anula. Una de ellas corresponde a un parámetro de Hubble nulo ( $b = 0$ ), lo cual ocurre en la rama de FLRW para volúmenes grandes, mientras que la otra está asociada a un límite en el que el parámetro de Hubble es constante y de orden planckiano, que es la situación en la que estamos interesados en esta sección. Dicho límite está definido por  $b \rightarrow b_0 > 0$ , donde

$$\sin^2 b_0 = \frac{1}{1 + \gamma^2}. \quad (6.60)$$

Por tanto, en virtud del comentario que precede a la Ec. (6.29),

$$b_0 = \sin^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right) \quad (6.61)$$

Llevando a cabo una expansión en torno a  $b = b_0$ , se puede comprobar fácilmente que la densidad de energía efectivamente se hace cero asintóticamente. En efecto, se obtiene trivialmente que

$$\rho = \frac{3}{8\pi G \gamma^2 (1 + \gamma^2) \Delta} \left[ (2\gamma + (1 - 5\gamma^2)(b - b_0)) (b - b_0) + \mathcal{O}[(b - b_0)^3] \right] \quad (6.62)$$

donde el símbolo  $\mathcal{O}[\cdot]$  denota colectivamente términos del mismo orden que el argumento o de orden superior. Además, tomando el límite  $b \rightarrow b_0$  en la expresión del cuadrado del parámetro de Hubble, dada esencialmente por la Ec. (6.20), obtenemos

$$\lim_{b \rightarrow b_0} \left( \frac{V'}{3V^{4/3}} \right)^2 = \frac{1}{4\gamma^2 \Delta} \sin^2 2b_0 [1 - 2(1 + \gamma^2) \sin^2 b_0]^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad (6.63)$$

que es efectivamente proporcional a una constante cosmológica emergente  $\Lambda$  de orden planckiano,

$$\Lambda = \frac{3}{(1 + \gamma^2)^2 \Delta}. \quad (6.64)$$

## 4.1 Formalismo híbrido: prescripción A

Para poder caracterizar las propiedades de las masas efectivas en el régimen asintóticamente de Sitter empleando técnicas analíticas, es necesario restringir nuestro estudio a potenciales de campo que exhiban ciertos comportamientos asintóticos. En primer lugar, consideramos potenciales que sean *asintóticamente no-negativos*, lo cual implica que tanto la contribución cinética del campo escalar (que tampoco es negativa) como la del potencial se han de anular asintóticamente. Por tanto, el campo escalar debe tender asintóticamente a un cero del potencial,  $\lim_{b \rightarrow b_0} \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0$ .

De manera adicional, consideramos potenciales cuya primera derivada evaluada en la región asintótica sea despreciable frente a  $\sqrt{\Lambda}\pi_{\tilde{\varphi}}/V$ . Entonces, es posible emplear las ecuaciones dinámicas efectivas del fondo homogéneo (recordemos que, al orden de truncación considerado, las perturbaciones pueden ser ignoradas en el cómputo de las masas efectivas) para mostrar que, en el régimen asintótico, tanto  $\pi_{\tilde{\varphi}}/V$  como  $\tilde{\varphi}$  crecen exponencialmente con el tiempo propio  $t$ . Llevemos a cabo la comprobación con más detalle. Despreciando las contribuciones perturbativas, la dinámica homogénea viene dictada por las siguientes ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{3\gamma}{2\sqrt{\Delta}}V \sin 2b \left(1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \cos 2b\right) \quad (6.65)$$

$$\frac{db}{dt} = -3\gamma\sqrt{\Delta} \left(\frac{4\pi G}{3}\right)^2 \left(\frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}\right)^2, \quad (6.66)$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \frac{4\pi G}{3} \frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}, \quad (6.67)$$

$$\frac{d\pi_{\tilde{\varphi}}}{dt} = -\frac{3}{4\pi G\sigma^2} V \bar{W}_{,\tilde{\varphi}}. \quad (6.68)$$

Empleando estas ecuaciones, es inmediato ver que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}\right) = -\frac{3}{4\pi G\sigma^2} \bar{W}_{,\tilde{\varphi}} + \frac{3\gamma}{2\sqrt{\Delta}} \sin 2b \left(1 - \frac{1+\gamma^2}{\gamma^2} \cos 2b\right) \frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}, \quad (6.69)$$

que, asintóticamente, tiende a

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}\right)\right]_0 = -\frac{3}{4\pi G\sigma^2} (\bar{W}_{,\tilde{\varphi}})_0 + \sqrt{3\Lambda} \left(\frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}\right)_0, \quad (6.70)$$

donde el subíndice 0 denota el límite que caracteriza al régimen de Sitter asintótico. Por consiguiente, dado que, de acuerdo con las restricciones consideradas sobre los potenciales de campo,

$$\frac{3}{4\pi G\sigma^2} (\bar{W}_{,\tilde{\varphi}})_0 \ll \sqrt{3\Lambda} \left(\frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V}\right)_0, \quad (6.71)$$

concluimos que, como habíamos adelantado, el momento canónico asociado al campo escalar dividido por el volumen físico del Universo crece exponencialmente con el tiempo propio  $t$ :

$$\frac{\pi_{\tilde{\varphi}}}{V} \approx C_{dS} e^{\sqrt{3\Lambda}t}, \quad (6.72)$$

donde  $C_{dS}$  es una cierta constante de integración. Nótese que, dado que el inverso del volumen exhibe este mismo comportamiento asintóticamente [véase el límite apropiado de la Ec. (6.65)],  $\pi_{\tilde{\varphi}}$  ha de ser asintóticamente constante. Además, puesto que la derivada del inflatón con respecto al tiempo propio es proporcional a  $\pi_{\tilde{\varphi}}/V$  [véase la Ec. (6.67)] con una constante de proporcionalidad positiva, es inmediato

concluir que el campo escalar también crece exponencialmente con el tiempo propio en el pasado asintótico. En efecto,

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0 \approx \frac{4\pi G}{3\sqrt{3\Lambda}} C_{dSE} e^{\sqrt{3\Lambda}t}. \quad (6.73)$$

Como resultado, la proporción entre  $\tilde{\varphi}$  y  $\pi_{\tilde{\varphi}}/V$  es asintóticamente constante:

$$\lim_{b \rightarrow b_0} \frac{(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0)V}{\pi_{\tilde{\varphi}}} = \frac{4\pi G}{3\sqrt{3\Lambda}}. \quad (6.74)$$

La validez de este resultado queda sujeta a la verificación de la aproximación (6.71), que puede ser justificada, e.g., en el caso en el que el potencial viene dado simplemente por un término de masa constante  $\bar{W} = \frac{1}{2}\sigma^2 m^2 (\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0)^2$ , donde  $m$  es la masa del campo escalar. Para un potencial tal, la Ec. (6.71) se convierte en una condición sobre dicha masa:

$$\lim_{b \rightarrow b_0} \frac{3m^2}{4\pi G} \frac{(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0)V}{\pi_{\tilde{\varphi}}} \ll \sqrt{3\Lambda} \Leftrightarrow m^2 \ll 3\Lambda. \quad (6.75)$$

Por ende, vemos que el requisito (6.71) es válido en el caso del potencial de masa constante en los escenarios fenomenológicamente favorecidos por las observaciones del fondo cósmico de microondas, en los que  $m$  es muy pequeña (en particular, en comparación con la raíz cuadrada de la constante cosmológica planckiana) [31].

Adicionalmente, puesto que, en el régimen considerado, el inflatón se comporta como la raíz cuadrada de la contribución cinética a la densidad de energía material (dada, salvo un factor multiplicativo, por  $\pi_{\tilde{\varphi}}/V$ ) con una constante de proporcionalidad del orden de  $1/\sqrt{\Lambda}$  [véanse las Ecs. (6.3), (6.72) y (6.73)], es inmediato observar que el potencial de campo resulta ser despreciable frente a la densidad de energía material siempre y cuando varíe con el inflatón más rápido que su cuadrado o que lo haga con su cuadrado multiplicado por un factor mucho más pequeño que la constante cosmológica. Esta última condición se cumple en los escenarios favorecidos fenomenológicamente cuando el potencial se reduce a un término de masa constante, donde el potencial es cuadrático en el campo escalar pero el cuadrado de la masa es despreciable frente a  $\Lambda$ . En conclusión, de aquí en adelante, despreciamos la contribución del potencial a la densidad de energía material asintótica.

Merece la pena comentar que, si también se satisface asintóticamente la cota superior sobre  $|\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}|$  (6.35) que se empleó en el análisis de las masas en el instante del rebote, el requisito de que esta derivada sea mucho más pequeña que la raíz cuadrada de la energía cinética del campo escalar (6.71) resulta cumplirse si (i) el potencial del campo escalar es mucho menor que la energía cinética, lo cual está garantizado para la familia de potenciales descritos en el párrafo anterior, y (ii) la segunda derivada del potencial es asintóticamente finita, restricción que parece muy razonable imponer. En definitiva, para potenciales de la familia comentada para los que  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}$  es finito en el régimen de Sitter, es equivalente imponer el análogo de la cota superior (6.35) sobre  $|\bar{W}_{,\tilde{\varphi}}|$  o la cota superior alternativa (6.71), por lo que basta con imponer una de ellas.

Para sustentar los resultados del análisis planteado, hemos llevado a cabo una integración numérica de las ecuaciones efectivas que gobiernan la dinámica del fondo homogéneo para el caso de un campo escalar de masa  $m = 1.2 \cdot 10^{-6}$  en unidades geométricas (es decir, con  $G = 1$ ), que es del orden típico de las que conducen a espectros de potencia en la LQC compatibles con las observaciones del fondo cósmico de microondas [33]. Las condiciones iniciales de esta integración numérica (que se suelen fijar en el instante del rebote, ya que, al corresponderse con la sección espacial “privilegiada” de volumen mínimo, se suele considerar como una elección natural de tiempo inicial) son, de nuevo en unidades geométricas,  $\tilde{\varphi}_B = 0.97$  y  $V_B = (2\pi)^3$  (lo cual requiere la fijación de una cierta escala global de volúmenes). Empleando el hecho de que la ligadura escalar homogénea se ha de anular sobre soluciones y que  $b_B = \sin^{-1}[1/\sqrt{2(1+\gamma^2)}]$ , el valor del momento del campo escalar en el instante del rebote queda inmediatamente determinado a partir del resto de condiciones iniciales, ya que viene dado por  $\pi_{\tilde{\varphi}}^B = V_B[24\pi\rho_B - 9m^2(\tilde{\varphi}_B - \tilde{\varphi}_0)^2]^{1/2}/(4\pi)$ .

Los resultados de la integración numérica de las Ecs. (6.65)-(6.68) con las condiciones iniciales especificadas en el párrafo anterior se muestran en las Figs. 6.1-6.5. Para la obtención de estas representaciones gráficas, hemos empleado unidades geométricas y tomado, además de los valores estándar del parámetro de Immirzi y del gap de área, un valor de la longitud coordenada de los ciclos fundamentales de las secciones tres-toroidales  $l_0 = 2\pi$ . Adicionalmente, el origen del tiempo propio  $t = 0$  se ha hecho coincidir con el instante del rebote. La Fig. 6.1 muestra que la rama evolutiva anterior al rebote se aproxima a una fase de Sitter muy rápidamente, como queda de manifiesto por el hecho de que el parámetro de Hubble alcanza su valor asintótico constante tan solo unos pocos tiempos de Planck antes del rebote. Las Figs. 6.2 y 6.3 confirman que el volumen físico del Universo y el modo cero del inflatón exhiben un comportamiento en el pasado asintótico según lo esperado: el campo crece exponencialmente con el tiempo propio y el volumen se contrae al mismo ritmo. Esto conduce a un valor del momento del campo escalar aproximadamente constante, no solo asintóticamente, sino también a través del rebote, como desvela la Fig. 6.4. Este fenómeno se puede entender fácilmente cuando uno comprueba que el momento del inflatón es una constante del movimiento en el caso de un campo escalar sin masa [véase la Ec. (6.68)]. Por tanto, el considerar un campo escalar con una masa extremadamente pequeña solo rompe esta simetría ligeramente, lo que produce una variación muy lenta de  $\pi_{\tilde{\varphi}}$  en el caso estudiado. En último lugar, la Fig. 6.5 confirma que, en los escenarios de interés físico, el cociente  $(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0)V/\pi_{\tilde{\varphi}}$  tiende asintóticamente al valor constante predicho y que, por ende, ignorar la primera derivada del potencial de campo frente a  $\sqrt{\Delta}\pi_{\tilde{\varphi}}/V$  es una buena aproximación.

En vista de los resultados que se desprenden de este estudio analítico y numérico, despreciamos en lo que sigue el potencial del campo escalar con respecto a la energía cinética y, por consiguiente, con respecto a la propia densidad de energía material. No solo esto, también despreciamos la contribución de la primera derivada del potencial de campo frente a la raíz cuadrada de la densidad de energía material. Teniendo esto en cuenta, obtenemos que la masa efectiva tensorial en la era de Sitter viene dada

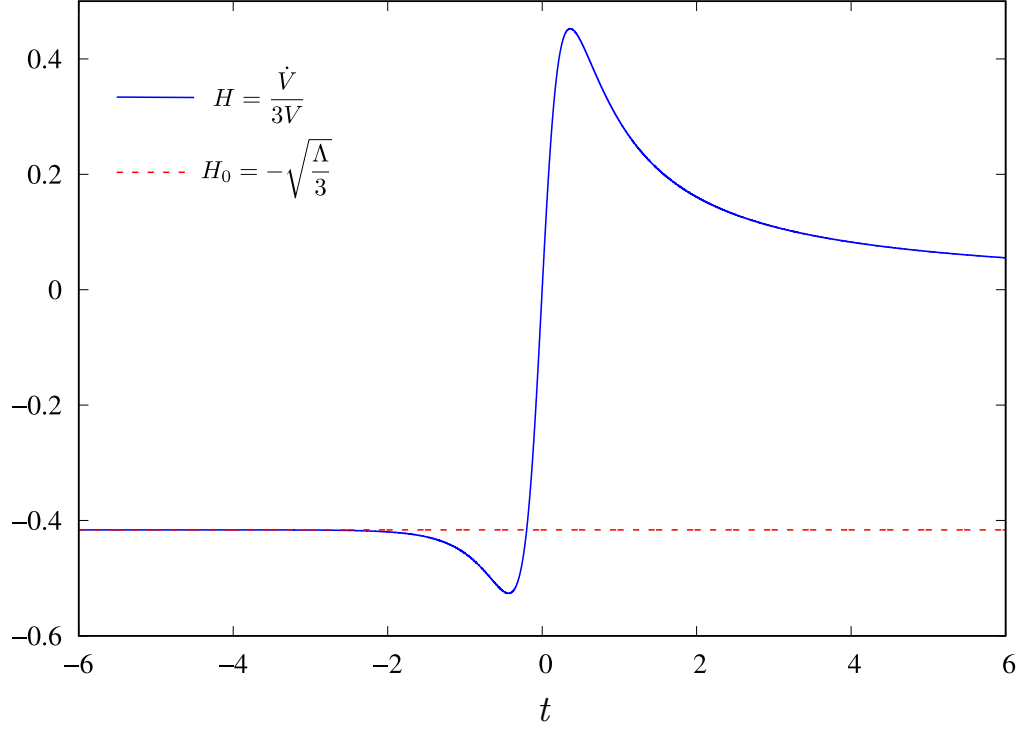


Figura 6.1: Valor del parámetro de Hubble como función del tiempo propio.

por [véanse las Ecs. (6.6) y (6.62), junto con la Ec. (6.4)]

$$\begin{aligned}
 M_{ds}^T &= \frac{8\pi G}{3} V^{2/3} \rho + \mathcal{O}[\bar{W}] \left( \right. \\
 &= \frac{V^{2/3}}{\gamma^2(1+\gamma^2)\Delta} \left[ \left( 2\gamma + (1-5\gamma^2)(b-b_0) \right) (b-b_0) + \mathcal{O}[\bar{W}, (b-b_0)^3] \right]. \quad (6.76)
 \end{aligned}$$

Nótese en primer lugar que esta masa efectiva es proporcional a  $V^{2/3}$ , que coincide con la potencia del volumen físico que aparece en el potencial de Mukhanov-Sasaki (6.12). Por consiguiente, la pequeñez relativa del potencial de Mukhanov-Sasaki en el régimen asintótico es independiente de este factor. Además, cabe enfatizar que el crecimiento asintótico de  $V^{2/3}$  hacia el pasado no es suficiente para compensar la anulación de la densidad de energía material en la masa efectiva tensorial, ya que dicha densidad de energía puede ser aproximada por su contribución cinética, que se anula asintóticamente como  $1/V^2$ .

El hecho de que la masa efectiva tensorial venga dada por la densidad de energía material multiplicada por un factor estrictamente positivo asegura que esta masa efectiva es positiva en la región asintótica bajo consideración, como se puede ver en el primer término en la expansión en potencias de  $b - b_0$  recordando que  $b - b_0 \leq 0$  como resultado del decrecimiento monótono de la variable  $b$  [92, 95] en la solución a la dinámica homogénea considerada. De manera adicional, es fácil ver que, para el valor estándar del parámetro de Immirzi, el término cuadrático en dicha expansión no destruye la positividad del término lineal, no solo para valores pequeños de  $b - b_0$ , sino en general (al menos, siempre y cuando el potencial de campo se pueda seguir

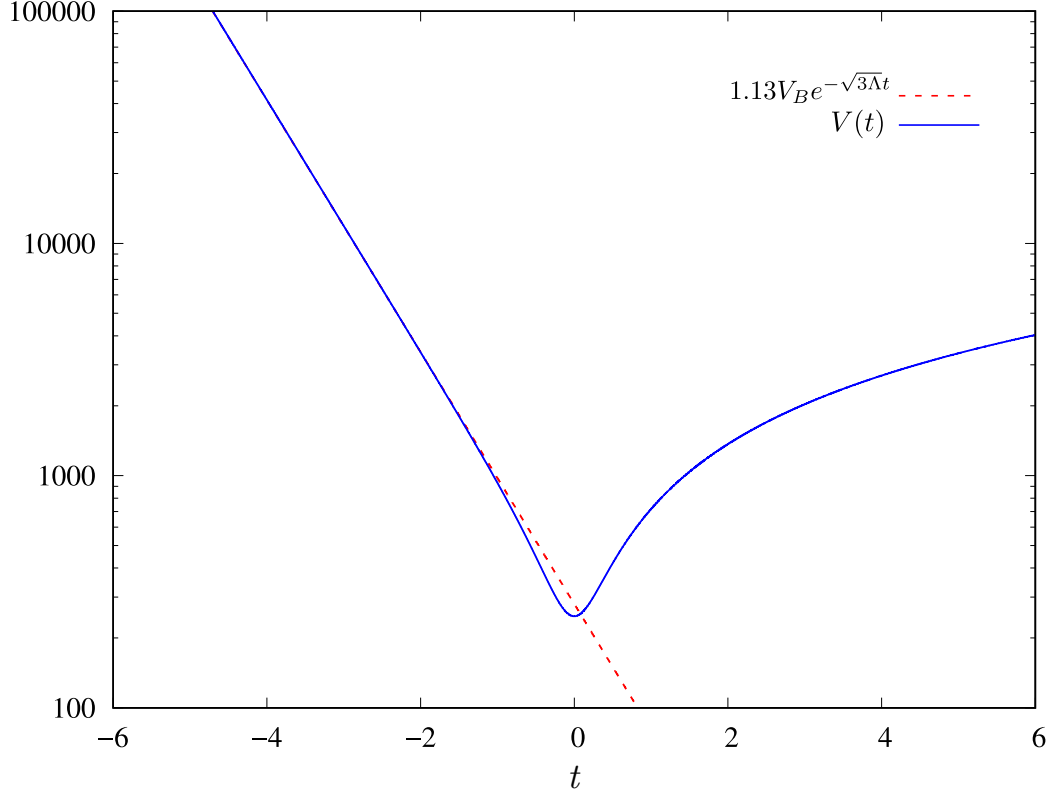


Figura 6.2: Valor del volumen en escala logarítmica como función del tiempo propio.

ignorando a este nivel). En efecto, el término cuadrático en la Ec. (6.76) es positivo si  $\gamma^2 < 1/5$ , condición que cumple holgadamente el cuadrado del parámetro de Immirzi estándar.

Estudiemos a continuación el potencial de Mukhanov-Sasaki (6.12) en el régimen de Sitter asintótico. Recordemos que, de acuerdo con su expresión, contiene contribuciones del potencial de campo, de su cuadrado, de su primera derivada y de su segunda derivada. De las consideraciones previas se sigue que el potencial de campo y su cuadrado se hacen cero en el pasado infinito y que, además, son despreciables asintóticamente frente a cualquier término del orden de la densidad de energía. Como resultado, en el régimen de Sitter, solo sobreviven las contribuciones de las dos primeras derivadas del potencial de campo. Si permitimos que el potencial de campo tenga una segunda derivada asintóticamente no nula, el primer término de la Ec. (6.12) ciertamente contribuye al valor asintótico del potencial de Mukhanov-Sasaki y, por ende, al de la masa efectiva escalar. En lo que concierne al término proporcional a  $\vec{W}_{,\tilde{\varphi}}$ , se distinguen dos situaciones dentro de la familia de potenciales de campo bajo consideración. Por un lado, si el potencial varía con el campo escalar más rápido que su cuadrado, su primera derivada variaría más rápido que el propio campo y, por tanto, se anularía en el límite asintótico más rápido que  $\rho^{1/2}$ . En dicho caso, el tercer término en la Ec. (6.12) se anularía en la región asintótica, conduciendo a un potencial  ${}^{(A)}\mathcal{U}_{dS} = V^{2/3}(\vec{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})_0/\sigma^2$ . Por otro lado, si el potencial varía precisamente con el cuadrado del campo escalar en la región asintótica (como en el caso de un potencial



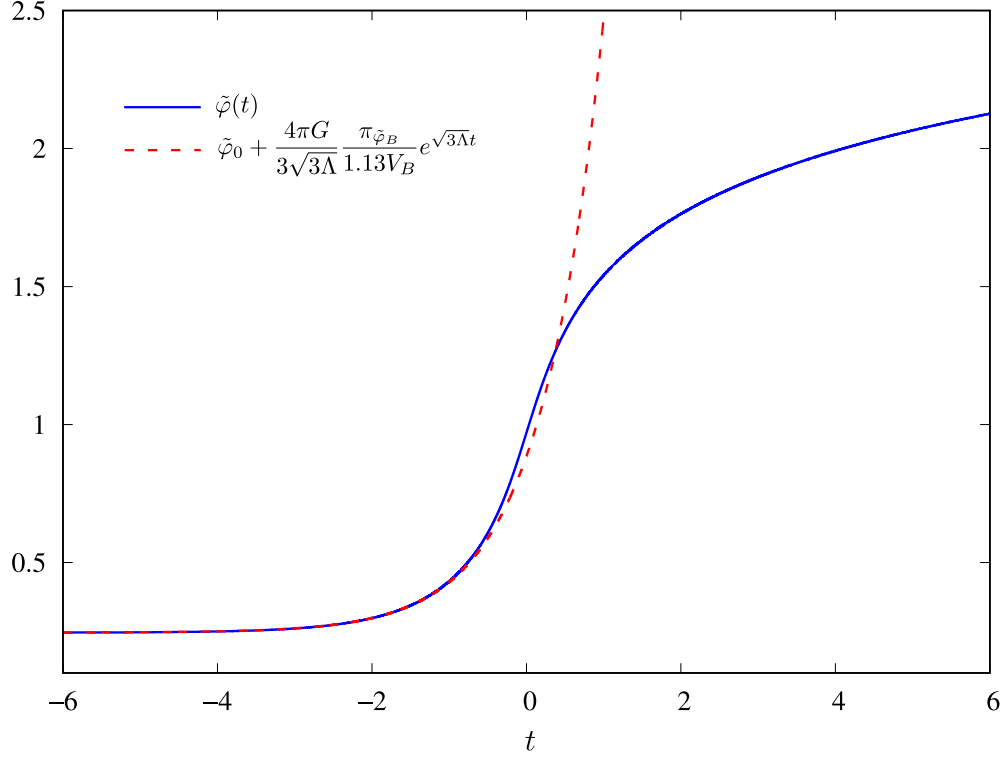


Figura 6.3: Valor del campo escalar como función del tiempo propio.

de masa constante), su primera derivada se anularía exactamente tan rápido como  $\sqrt{\rho}$ , lo cual llevaría a la supervivencia del tercer término en la Ec. (6.12). En efecto, para el caso de un potencial de masa constante como el considerado anteriormente,

$$\lim_{b \rightarrow b_0} \frac{\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} \pi_{\tilde{\varphi}}}{V\rho} = \frac{2\sigma^2 m^2}{\sqrt{3\Lambda}} = \frac{2}{3} \sigma^2 m^2 (1+\gamma^2) \sqrt{\Delta}, \quad (6.77)$$

donde hemos hecho uso de la definición de la densidad de energía material (6.3) ignorando la contribución del potencial, y de las Ecs. (6.72) y (6.73). Como resultado, en el caso de un término de masa constante, las contribuciones proporcionales a la primera y a la segunda derivada del potencial de campo son del mismo orden y el potencial de Mukhanov-Sasaki derivado de la adopción de la prescripción A en el enfoque híbrido (6.12) resulta venir dado asintóticamente por

$${}^{(A)}\mathcal{U}_{dS} \approx m^2 V^{2/3} \left[ 1 + \frac{2(1+\gamma^2)}{\gamma} \sin 2b_0 \right] \left( \frac{5}{3} m^2 V^{2/3} \right). \quad (6.78)$$

Cualquier potencial de campo que varíe cuadráticamente con el campo escalar en la región asintótica exhibe un comportamiento que se puede obtener reemplazando  $m^2$  por  $(\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})_0/\sigma^2$  en la ecuación anterior.

En conclusión, dado que la masa efectiva tensorial se anula asintóticamente, la introducción del potencial de Mukhanov-Sasaki conlleva la positividad de la masa efectiva escalar, siempre y cuando la segunda derivada del potencial de campo sea

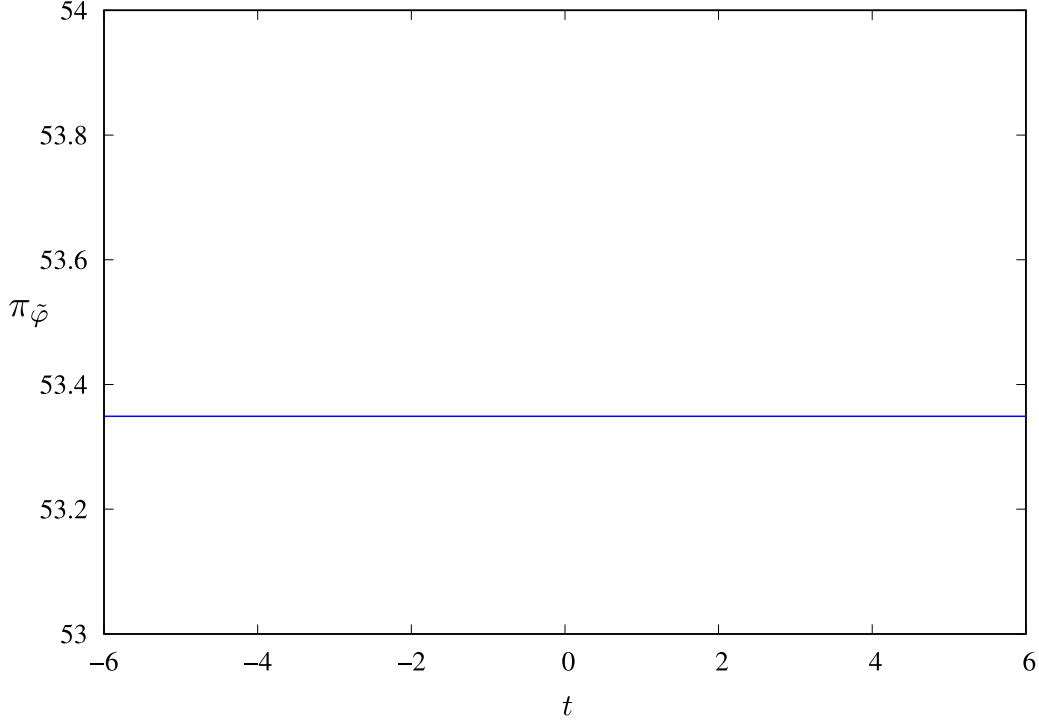


Figura 6.4: Valor del momento canónico asociado al campo escalar como función del tiempo propio.

asintóticamente positiva. Cabe enfatizar que, cuando los potenciales de campo son cuadráticos en la región asintótica (como, por ejemplo, en el caso de un potencial de masa constante), la contribución de su primera derivada también ha de ser tenida en cuenta, lo que refuerza la positividad de la masa efectiva escalar en el régimen considerado, dada nuestra asunción de que  $(\bar{W}_{,\varphi\varphi})_0 > 0$ .

## 4.2 Formalismo híbrido: prescripción B

Dado que la masa efectiva tensorial no depende de la prescripción adoptada para la representación cuántica de  $1/\pi_{\tilde{\alpha}}^2$  y su posterior evaluación efectiva, las conclusiones extraídas en la subsección anterior en lo referente a su comportamiento y a sus propiedades de positividad siguen siendo de aplicación [véanse la Ec. (6.76) y el párrafo bajo ella]. Además, si se verifican las restricciones sobre el potencial de campo introducidas en la subsección anterior, todos aquellos términos en el potencial de Mukhanov-Sasaki que difieren entre prescripciones resultan ser despreciables en el régimen de Sitter asintótico. De hecho, se puede demostrar que todos los términos de la Ec. (6.17) salvo el primero se pueden despreciar frente a la densidad de energía material, salvo factores de orden  $V^{2/3}$ , por lo que solo sobrevive asintóticamente la contribución de la segunda derivada del potencial de campo. Esto implica que el valor asintótico de la masa efectiva escalar es, de nuevo, positivo si  $(\bar{W}_{,\varphi\varphi})_0 > 0$ , condición que se cumple automáticamente en el caso del potencial de masa constante.

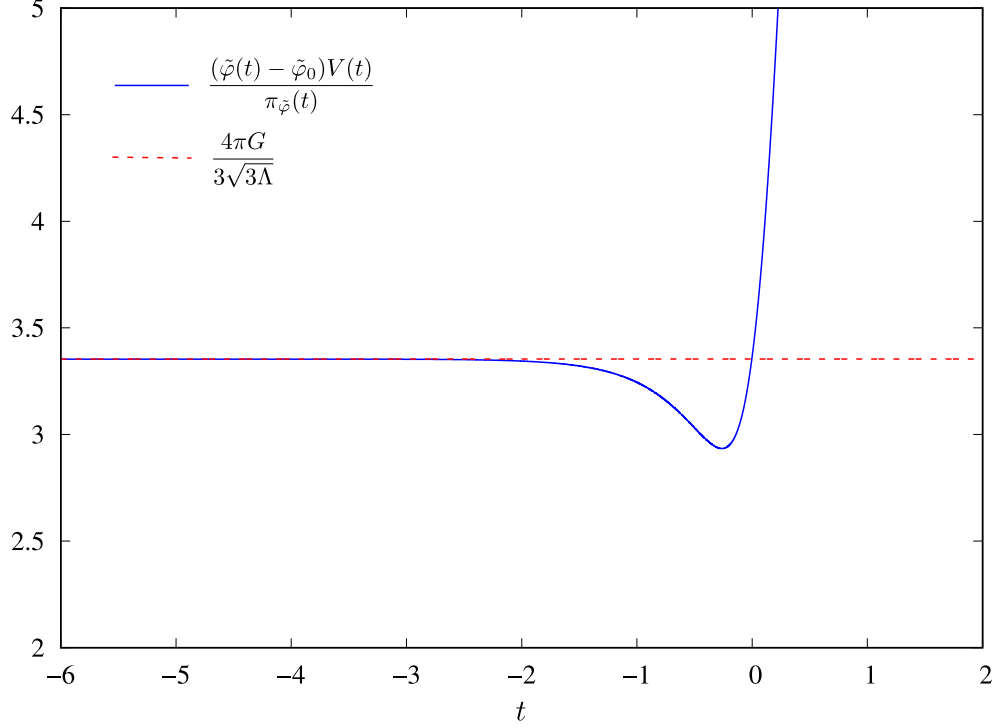


Figura 6.5: Valor del cociente  $(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_0)V/\pi_{\tilde{\varphi}}$  como función del tiempo propio.

### 4.3 Formalismo de la métrica vestida

Naturalmente, también es posible escribir la masa efectiva tensorial derivada del enfoque de la métrica vestida (6.22) en términos de la densidad de energía y del potencial de campo en la rama de Sitter. En efecto, esta reexpresión se puede llevar a cabo de manera sencilla empleando la Ec. (6.13) y las Ecs. (6.23)-(6.26), con el subíndice  $+$ . Dado que estamos interesados en su comportamiento en una vecindad del régimen de Sitter, es conveniente expandir la expresión resultante en una serie de potencias del cociente  $\rho/\rho_B$ , que se hace cada vez más pequeño a medida que uno se aproxima a la región de Sitter. El resultado de seguir los pasos descritos es

$$\begin{aligned}
 {}^{(D)}M_{dS}^T = & -2V^{2/3} \left[ \frac{\Lambda}{3} \left( \left( -\frac{1-5\gamma^2}{8\gamma^2} \frac{\rho}{\rho_B} \right) \left( \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{3\bar{W}}{\sigma^2(1+\gamma^2)} \left( \left( -5\gamma^2 - \frac{4-3\gamma^2}{2} \frac{\rho}{\rho_B} \right) \right) \left\{ \left( +\mathcal{O} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_B} \right)^2 \right] \right) \right\} \right) \right] \quad (6.79)
 \end{aligned}$$

Consideremos de nuevo las restricciones sobre la clase de potenciales de campo introducidas en la subsección anterior. Más concretamente<sup>30</sup>, tomemos potenciales asintóticamente no-negativos (de tal modo que tanto la contribución cinética a la densidad de energía material como la contribución del potencial se anulen en el pasado asintótico), asintóticamente despreciables frente a la contribución cinética

<sup>30</sup>Es importante tener en mente las consideraciones acerca de cuándo se verifican estas restricciones, también discutidas en la Sec. 4.1

(y, por tanto, frente a la propia densidad de energía) y cuya primera derivada sea asintóticamente muy pequeña con respecto a  $\sqrt{\Lambda}\pi_{\tilde{\varphi}}/V$  (y, por consiguiente, muy pequeña con respecto a la raíz cuadrada de la densidad de energía). En principio, admitimos también la posibilidad de que la segunda derivada del potencial de campo no sea despreciable asintóticamente. Considerando potenciales como los descritos, los términos proporcionales a  $\bar{W}$  en la Ec. (6.79) pueden despreciarse frente a aquellos que son lineales en  $\rho$ , lo cual conduce a

$${}^{(D)}M_{dS}^T = -\frac{2\Lambda}{3}V^{2/3} \left( \left( -\frac{1-5\gamma^2}{8\gamma^2} \frac{\rho}{\rho_B} \right) + \mathcal{O} \left[ \bar{W}, \frac{\rho^2}{\rho_B^2} \right] \right) \quad (6.80)$$

Observamos claramente que, en una vecindad del régimen de Sitter, donde  $\rho$  es mucho menor que  $\rho_B$ , la masa efectiva tensorial correspondiente al formalismo de la métrica vestida adopta un valor *negativo*. La primera corrección al valor límite, que es lineal en  $\rho/\rho_B$ , es positiva para valores del parámetro de Immirzi tales que  $\gamma^2 < 1/5$  (lo que incluye el caso del valor estándar). Por consiguiente, la negatividad de la masa efectiva tensorial se reduce a medida que uno se aleja del régimen de Sitter asintótico.

Por otro lado, siguiendo razonamientos como los planteados en las subsecciones anteriores, se puede comprobar de forma sencilla que todos los términos del potencial de Mukhanov-Sasaki (6.27) son asintóticamente despreciables frente al primero. Por tanto, encontramos un comportamiento similar al obtenido a partir del enfoque híbrido:

$${}^{(D)}\mathcal{U}_{dS} \approx V^{2/3} \frac{(\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})}{\sigma^2} \quad (6.81)$$

Como resultado inmediato, es posible lograr la positividad de la masa efectiva escalar en virtud de la contribución del potencial de Mukhanov-Sasaki siempre y cuando  $(\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}})_0$  sea mayor que cero y lo suficientemente grande. No obstante, esto no se puede lograr en los escenarios de interés físico en los que el inflatón está sujeto a un potencial de masa constante, con una masa mucho más pequeña que la raíz cuadrada de la constante cosmológica emergente. En efecto, en tal situación,  $\bar{W}_{,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}/\sigma^2$  es constante e igual a  $m^2$ , por lo que la contribución asociada es despreciable frente al valor límite de la masa tensorial. En este sentido, concluimos que, en los escenarios físicos favorecidos por la fenomenología del fondo cósmico de microondas, la positividad del potencial de Mukhanov-Sasaki resulta insuficiente para compensar la negatividad de la masa efectiva tensorial en el régimen de Sitter y alcanzar un valor asintótico positivo de la masa efectiva escalar.

## 5 Conclusión

En este capítulo, hemos extendido el análisis de la Ref. [182], en la que se investigaron y compararon las propiedades de positividad de las masas efectivas derivadas de los formalismos híbrido y de la métrica vestida en el instante del rebote, que proporciona un tiempo privilegiado desde el punto de vista de la fijación de condiciones iniciales para la dinámica cosmológica. A diferencia de en dicho trabajo, hemos considerado

aquí el esquema de regularización alternativo de Dapor y Liegener para la definición de la ligadura hamiltoniana homogénea. Por tanto, parece interesante determinar en qué medida el cambio de regularización modifica las conclusiones en lo que respecta a las propiedades de las masas en el rebote, así como extender el análisis al régimen emergente de Sitter.

Con estos objetivos en mente, hemos comenzado repasando los ingredientes esenciales del enfoque híbrido y del formalismo de la métrica vestida relevantes para el cálculo de las masas efectivas que gobiernan la dinámica de las perturbaciones (véanse las Secs. 1 y 2) y hemos escrito las expresiones explícitas de las masas efectivas escalar y tensorial en cada formalismo (distinguiendo entre las prescripciones A y B en el caso híbrido, relacionadas íntimamente con la estructura cuántica de la teoría e introducidas en la Ref. [181]). A continuación, hemos procedido a evaluar estas masas en los regímenes de interés físico desde el punto de vista de proporcionar condiciones iniciales para las perturbaciones: el instante del rebote y el régimen de Sitter asintótico.

Para poder extraer resultados cuantitativos, hemos centrado nuestra atención en potenciales de campo que verifican ciertas condiciones inspiradas en el caso del potencial de masa constante, que es el potencial estudiado más a fondo en el contexto de la LQC, aunque, naturalmente, el estudio presentado en este capítulo se podría extender a otras familias de potenciales [188–192]. No obstante, dado que los casos de interés desde el punto de vista de la fenomenológico en la LQC son aquellos en los que la densidad de energía del inflatón está cinéticamente dominada alrededor del rebote, la dinámica preinflacionaria resulta ser a grandes rasgos independiente del potencial de campo considerado. Por consiguiente, cabría esperar que, mientras se mantenga el dominio cinético en el rebote, los resultados correspondientes a considerar una familia de potenciales distinta sean cualitativamente similares. Por otro lado, en el caso del régimen de Sitter, sería necesario llevar a cabo una investigación numérica para estudiar las características de la dinámica asintótica y determinar hasta qué punto el papel desempeñado por el potencial es secundario.

En la Sec. 3, hemos comenzado evaluando cada una de las masas efectivas introducidas en las secciones previas en el instante del rebote. En el caso del formalismo híbrido, hemos concluido que la masa efectiva tensorial es estrictamente positiva en una variedad de situaciones que incluye el escenario de dominio cinético comentado. En lo referente a los potenciales de Mukhanov-Sasaki, cabe mencionar que las expresiones obtenidas difieren de la de la Ref. [182] en que poseen un término proporcional a la derivada del potencial de campo que no se anula en el instante de rebote. Esto complica el análisis de sus propiedades de positividad y requiere la introducción de ciertas asunciones acerca del valor absoluto de dicho término para poder proceder analíticamente. Con esta y otras condiciones poco restrictivas, hemos determinado cotas inferiores y superiores para las masas efectivas escalares que resultan de adoptar las prescripciones A y B. Estas cotas nos han permitido extraer información acerca de las regiones del espacio de potenciales de campo en las que las masas son necesariamente positivas o negativas. Hemos determinado que estas regiones existen siempre y cuando la segunda derivada del potencial sea lo suficientemente pequeña. Tanto en el caso de la prescripción A como en el de la prescripción B, las regiones en las que

las masas efectivas escalares son con certeza negativas se corresponden con escenarios de dominio del potencial de campo. Las regiones donde las masas son con seguridad positivas, sin embargo, están asociadas a las situaciones de dominio cinético que conducen a buenos ajustes al fondo cósmico de microondas. Las diferencias entre las prescripciones A y B son de carácter cuantitativo y sugieren que la prescripción A no solo está mejor fundamentada teóricamente [181], sino que también conduce a masas que exhiben mejores propiedades físicas. Por otro lado, en el caso del enfoque de la métrica vestida, obtenemos una masa efectiva tensorial que es estrictamente negativa en el instante del rebote. Además, la masa efectiva escalar resulta ser forzosamente negativa en el instante del rebote en un sector de soluciones que incluye las de dominio cinético, al menos para valores pequeños de la segunda derivada del potencial (aunque sería posible recuperar una masa efectiva escalar positiva si la segunda derivada del potencial de campo fuese suficientemente grande). Por ende, la masa efectiva escalar correspondiente al formalismo de la métrica vestida resulta ser negativa en el instante del rebote en los escenarios de interés físico, por lo que podrían encontrarse ciertas obstrucciones en la construcción de estados adiabáticos para todo el rango de longitudes de onda empleando métodos convencionales. Cabe destacar que los resultados resumidos hasta este punto coinciden a nivel cualitativo con los obtenidos en la Ref. [182]. En este sentido, podemos decir que estas conclusiones son robustas frente a cambios en el esquema de regularización adoptado para la definición de la ligadura escalar homogénea.

Por otro lado, hemos llevado a cabo un análisis similar de las propiedades de la masas efectivas evaluadas en el régimen de Sitter asintótico (véase la Sec. 4). De nuevo, hemos introducido ciertas restricciones razonables sobre el potencial de campo considerado para poder extraer resultados cuantitativos de manera analítica. Para motivar estas restricciones (que, en particular, nos han permitido despreciar las contribuciones del potencial y de su primera derivada frente a la densidad de energía material y su raíz cuadrada, respectivamente), hemos discutido analíticamente el comportamiento asintótico de las ecuaciones dinámicas efectivas para el fondo homogéneo, mostrando que el potencial de masa constante cumple todas las restricciones propuestas. Además, hemos complementado esta discusión con una integración numérica, verificando que un potencial de masa constante efectivamente satisface dichos requisitos en las situaciones de interés fenomenológico. En el caso híbrido, la masa efectiva tensorial se anula en el pasado asintótico y es positiva en una vecindad suya, con un comportamiento proporcional a la densidad de energía del campo escalar. En lo que se refiere al valor asintótico de la masa efectiva escalar, el hecho de que la masa tensorial se anule asintóticamente implica que el valor asintótico del potencial de Mukhanov-Sasaki es crucial. La masa efectiva escalar asociada a ambas prescripciones resulta ser positiva gracias a la contribución del potencial de Mukhanov-Sasaki si la segunda derivada del potencial de campo es positiva. Por otro lado, en lo que concierne al enfoque de la métrica vestida, hemos concluido que la masa efectiva tensorial es negativa en el pasado asintótico (pero esta negatividad se ve reducida a medida que uno se aleja del régimen de Sitter). Adicionalmente, la contribución del potencial de Mukhanov-Sasaki puede conducir a un valor asintótico positivo de la masa efectiva escalar si la segunda derivada del potencial de campo es positiva y

suficientemente grande, lo que ciertamente no es el caso para un campo escalar masivo con un valor de su masa constante del orden sugerido por las observaciones del fondo cósmico de microondas.

En vista de estos resultados, cabe concluir que el enfoque híbrido conduce a masas efectivas con mejores características, ya que son positivas tanto en el instante del rebote como en el régimen de Sitter asintótico, al menos para una cierta familia de potenciales y en los casos de interés físico. Las masas del formalismo de la métrica vestida, sin embargo, no pueden ser positivas en las situaciones de interés fenomenológico, ni en el instante del rebote ni en el régimen de Sitter emergente.

# Parte II

## Agujeros negros



# Capítulo 7

## Modelo efectivo de dos tiempos para agujeros negros estáticos

En este capítulo se recogen los resultados principales de las Refs. [193, 194], donde se explora una alternativa de dos tiempos a un modelo efectivo para la descripción de (la región interior de) agujeros negros de Schwarzschild propuesto recientemente por Ashtekar, Olmedo y Singh dentro del marco de la LQC [137, 138]. En el trabajo presentado a continuación abordamos una de las cuestiones que han sido objeto de crítica en lo referente al modelo original: la forma en la que se definen y tratan los parámetros de polimerización que regulan la introducción de efectos cuánticos en el sistema. Extendiendo las ideas de la Ref. [140] (cuyos autores notaron una inconsistencia en la derivación hamiltoniana de las ecuaciones dinámicas en lo que incumbe al tratamiento de los parámetros de polimerización), proponemos una definición alternativa más general de acuerdo con la cual los parámetros vienen dados por funciones de los dos hamiltonianos parciales, que resultan ser constantes sobre soluciones a la dinámica con valores coincidentes. Si bien una definición tal conduce al acoplamiento de dos sectores del espacio de fases que se habían considerado desacoplados hasta entonces, los parámetros resultantes son constantes del movimiento, en concordancia con las ideas de los trabajos originales [137, 138]. Teniendo en cuenta sus corchetes de Poisson no nulos con las variables canónicas, se alcanzan unas ecuaciones dinámicas considerablemente más complejas que las originales, cuya forma sugiere la introducción de dos redefiniciones temporales que conducen a la aparición natural de dos tiempos en el sistema. En lo que sigue, estudiamos las consecuencias de definir los parámetros de polimerización de la manera propuesta e investigamos la viabilidad del formalismo resultante desde el punto de vista de su capacidad para proporcionar una métrica espaciotemporal efectiva bien definida en la totalidad de la región interior.

El resto del capítulo está estructurado como sigue. En primer lugar, en la Sec. 1 motivamos e introducimos una nueva propuesta de definición de los parámetros de polimerización y derivamos las ecuaciones del movimiento que siguen de dicha propuesta, notando la conveniencia de ciertas redefiniciones de la variable temporal para reabsorber la complejidad dinámica resultante de la naturaleza no trivial de los parámetros considerados. A continuación, en la Sec. 2, indagamos la posible existencia de obstrucciones al formalismo presentado en la primera sección. Más

precisamente, el análisis presentado contiene: (1) un estudio de la integrabilidad de las funciones  $F_{ij}$  y de la invertibilidad de  $G_i$  (estas funciones serán definidas de manera precisa dentro de dos secciones) en la Sec. 2.1, (2) una discusión acerca de la imagen de las funciones  $G_i$  y de su relevancia en el análisis presente en la Sec. 2.2 y (3) un análisis de las propiedades de los factores  $C_{ij}$  a lo largo de las trayectorias dinámicas (véase la Sec. 2.3). En la Sec. 3, contemplamos la posibilidad de redefinir independientemente el origen de una de las variables temporales del formalismo y sopesamos el impacto de dicho procedimiento en la viabilidad del modelo propuesto. Una vez completado este análisis, llevamos a cabo en la Sec. 4 un breve estudio de la relación entre las variables temporales del formalismo en el régimen de masas grandes, buscando una reconciliación parcial de los resultados alcanzados con los obtenidos previamente en la literatura. Finalmente, en la Sec. 5 presentamos las conclusiones principales del capítulo.

## 1 Dinámica y redefiniciones temporales

De ahora en adelante, nos centramos en el estudio de la región interior de un agujero negro sin rotación ni carga. Dicha región exhibe la propiedad de que, a diferencia de la región exterior, admite una foliación en hipersuperficies espaciales de Cauchy *homogéneas*. Esto permite formular una descripción canónica de la dinámica de la región interior en términos de un espacio de fases de dimensión finita. En efecto, tras la imposición de la ligadura de Gauss, toda la información relevante se encuentra contenida en un total de cuatro variables constantes en cada sección espacial, que forman dos pares canónicos. El primero de estos pares, compuesto por la variable de conexión  $b$  y la variable de tríada  $p_b$ , codifica la información acerca de la dirección radial de las hipersuperficies espaciales, mientras que el segundo par, integrado por la variable de conexión  $c$  y la variable de tríada  $p_c$ , está relacionado con los grados de libertad angulares. Como en la Sec. 5 de los Preliminares, de aquí en adelante nos referimos a los sectores del espacio de fases coordinados por estos pares canónicos como el *sector radial* y el *sector angular*, respectivamente. Los corchetes de Poisson no nulos de las variables canónicas del sistema vienen dados por

$$\{b, p_b\} = -G\gamma, \quad \{c, p_c\} = 2G\gamma. \quad (7.1)$$

El elemento de línea espaciotemporal admite la siguiente expresión en términos de estas variables:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \frac{p_b^2}{L_o^2 |p_c|} dx^2 + |p_c| d\Omega^2, \quad (7.2)$$

donde la notación empleada se corresponde con la introducida en la Sec. 5 de los Preliminares. Recordemos que  $g_{\mu\nu}$  es la métrica espaciotemporal,  $N$  es la función lapso,  $x$  es una coordenada radial en la región interior,  $L_o$  es una longitud fiducial asociada a esta coordenada (por lo que los resultados físicos han de tener un límite  $L_o \rightarrow \infty$  bien definido) y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  es la métrica de la 2-esfera unidad en términos de los ángulos polar y azimutal,  $\theta$  y  $\phi$ .

Como resultado de las simetrías de la relatividad general, el sistema hereda una serie de ligaduras que vinculan las variables canónicas introducidas en el párrafo anterior. Puesto que ya se ha fijado la libertad correspondiente a la ligadura de Gauss en la definición de estas variables y se ha escogido una foliación en hipersuperficies homogéneas, la única ligadura no trivial es la ligadura hamiltoniana efectiva, que genera reparametrizaciones temporales y que ha de anularse sobre soluciones dinámicas. Tomando la función lapso

$$N = \frac{\gamma \delta_b \sqrt{|p_c|}}{\sin \delta_b b}, \quad (7.3)$$

asociada con una elección de tiempo  $t$  que denominaremos *tiempo coordinado*, hemos visto en los Preliminares que su producto con la ligadura hamiltoniana efectiva viene dado por [137, 138]

$$NH_{\text{eff}} = \frac{L_o}{G} (O_b - O_c), \quad (7.4)$$

$$O_b = -\frac{1}{2\gamma} \left( \frac{\sin \delta_b b}{\delta_b} + \frac{\gamma^2 \delta_b}{\sin \delta_b b} \right) \left( \frac{p_b}{L_o} \right), \quad (7.5)$$

$$O_c = -\frac{1}{\gamma} \frac{\sin \delta_c c}{\delta_c} \frac{p_c}{L_o}, \quad (7.6)$$

donde  $\delta_b$  y  $\delta_c$  son los parámetros de polimerización que introducen efectos cuánticos. En efecto, cuando se anulan idénticamente, el hamiltoniano efectivo se reduce al hamiltoniano de la relatividad general escrito en las variables apropiadas. Nótese que la elección de lapso considerada conduce a una ligadura hamiltoniana efectiva con una estructura muy simple: salvo por un factor multiplicativo constante, viene dada por la diferencia de los dos hamiltonianos parciales,  $O_b$  y  $O_c$ , cada uno de los cuales solo depende de las variables canónicas de su sector del espacio de fases asociado y de uno de los parámetros de polimerización. Por tanto, está claro que, si no se introduce una dependencia cruzada en los distintos sectores del espacio de fases a través de la definición de los parámetros de polimerización, la dinámica de los sectores radial y angular está desacoplada. Esta es precisamente la razón principal por la que la función lapso se fija<sup>31</sup> como en la Ec. (7.3).

Llegados a este punto, es necesario abordar la definición de los parámetros de polimerización,  $\delta_b$  y  $\delta_c$ . Como ya comentamos en la Sec. 5 de los Preliminares, de entre todo el espectro de elecciones posibles, el modelo propuesto en las Refs. [137, 138] se caracteriza por escoger una opción intermedia para la definición de los parámetros de polimerización: en lugar de tomar meras constantes o funciones arbitrarias del espacio

---

<sup>31</sup>Para ser más precisos, lo que se ha denominado en la literatura una fijación de la función lapso debería ser entendido como una reabsorción en el lapso de un factor que es una función del espacio de fases, mediante un procedimiento totalmente análogo al de un cambio de densitización de la ligadura hamiltoniana. Cabe mencionar que, como es bien sabido, un cambio de densitización tal tiene consecuencias en la teoría cuántica y, por tanto, sería interesante investigar si es posible establecer una relación uno a uno entre las soluciones a la ligadura y las soluciones a la ligadura densitizada. Es de esperar una contestación afirmativa, porque en nuestro sistema el cambio de densitización implica solamente un número finito de grados de libertad.

de fases, consideran parámetros *constantes a lo largo de las trayectorias dinámicas*. En otras palabras, el papel de los parámetros de polimerización viene desempeñado por *constantes del movimiento u observables de Dirac*. Por tanto, la primera pregunta que cabe hacerse es si el formalismo proporciona de manera natural alguna constante del movimiento a partir de la cual construir los parámetros de polimerización. La respuesta a esta pregunta resulta ser doblemente afirmativa, ya que no solo hay uno, sino dos: los hamiltonianos parciales  $O_b$  y  $O_c$ , cuyos valores *on-shell* (es decir, evaluados sobre soluciones a la dinámica) son constantes e iguales a un parámetro  $m$  relacionado con la masa ADM del agujero negro considerado [137, 138]. En vista de estas observaciones, los autores del modelo original propusieron tomar los parámetros de polimerización como funciones del parámetro de masa  $m$  (tratándolos de forma efectiva como números constantes), apoyando esta decisión mediante un argumento que involucra una extensión y posterior reducción del espacio de fases del sistema (véanse la Ref. [138] y el Capítulo 9 para más información al respecto). En cambio, los autores de la Ref. [140] argumentaron que el tratamiento propuesto en las Refs. [137, 138] es inconsistente con la premisa de seleccionar parámetros constantes a lo largo de una trayectoria dinámica cualquiera pero no constantes en todo el espacio de fases, inconsistencia que oscurece la relación entre el hamiltoniano efectivo propuesto y las ecuaciones dinámicas estudiadas. En su lugar, sugirieron tomar cada uno de los parámetros de polimerización como una función de su hamiltoniano parcial asociado y tener en cuenta la naturaleza no trivial de los parámetros en el cómputo de las ecuaciones dinámicas, sin ignorar sus corchetes de Poisson con las variables canónicas. De este modo, se tratan los parámetros de forma acorde al hecho de que no son números constantes, a la vez que se recuperan parámetros que son funciones de  $m$  sobre soluciones.

No obstante, dado que los dos hamiltonianos parciales adoptan el mismo valor constante a lo largo de cualquier trayectoria dinámica dada (a saber,  $m$ ), sus contribuciones sobre soluciones a la dinámica son indistinguibles. Por tanto, parece razonable pensar que la definición más general de los parámetros de polimerización debería permitir que cada uno de ellos dependa de ambos hamiltonianos parciales. De ahora en adelante, estudiamos las consecuencias de esta premisa, que pretende combinar los aspectos positivos de los dos enfoques descritos en el párrafo anterior, con el objetivo de verificar si es posible recuperar en cierta medida las propiedades atractivas del modelo original (en particular, en lo que se refiere a la resolución de la singularidad central [137–139]). Por consiguiente, tomamos parámetros de polimerización  $\delta_i$  definidos de la forma

$$\delta_i = f_i(O_b, O_c), \quad (7.7)$$

donde hemos empleado una notación compacta para referirnos a ambos parámetros de polimerización empleando un subíndice  $i$  que puede adoptar los valores  $b$  o  $c$ . En lo restante de este capítulo, emplearemos esta notación a menudo.

Es fundamental enfatizar que las definiciones anteriores introducen una dependencia cruzada en el hamiltoniano que rompe el desacoplamiento de los sectores radial y angular del espacio de fases, que era un rasgo común de las investigaciones previas

[137–140]. Obviamente, este hecho tiene un impacto en la forma de las ecuaciones del movimiento, cuya deducción abordamos a continuación.

En primer lugar, tenemos que

$$\partial_t i = s_i \frac{L_o}{G} (\{i, O_i\} - \{i, O_j\}), \quad (7.8)$$

donde, recordemos,  $t$  es la variable temporal asociada a la elección de función lapso considerada. De acuerdo con la notación empleada,  $i, j = b, c$ . Además,  $j \neq i$  y  $s_i$  es un signo definido como sigue:

$$s_b = +1, \quad s_c = -1. \quad (7.9)$$

El corchete de Poisson de la variable de conexión  $i$  con su hamiltoniano parcial respectivo,  $O_i$ , viene dado trivialmente por

$$\{i, O_i\} = \{i, p_i\} \frac{\partial O_i}{\partial p_i} + \frac{\partial O_i}{\partial \delta_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial O_i} \{i, O_i\} + \frac{\partial f_i}{\partial O_j} \{i, O_j\} \right). \quad (7.10)$$

Por otro lado, de forma similar, el corchete de Poisson cruzado es

$$\{i, O_j\} = \frac{\partial O_j}{\partial \delta_j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial O_i} \{i, O_i\} + \frac{\partial f_j}{\partial O_j} \{i, O_j\} \right). \quad (7.11)$$

Así, los corchetes de Poisson de las variables de conexión con cada uno de los hamiltonianos parciales se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones compuesto por las Ecs. (7.10) y (7.11). En forma matricial, este sistema de ecuaciones se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 - \Delta_{ii} & -\Delta_{ij} \\ -\Delta_{ji} & 1 - \Delta_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{i, O_i\} \\ \{i, O_j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{i, p_i\} \frac{\partial O_i}{\partial p_i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

donde hemos definido

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial O_i}{\partial \delta_i} \frac{\partial f_i}{\partial O_j}. \quad (7.13)$$

El sistema (7.12) tiene solución si y solo si

$$(1 - \Delta_{ii})(1 - \Delta_{jj}) - \Delta_{ij}\Delta_{ji} \neq 0. \quad (7.14)$$

Asumiendo que se cumple esta condición de invertibilidad, tenemos que

$$\begin{pmatrix} \{i, O_i\} \\ \{i, O_j\} \end{pmatrix} = \frac{\{i, p_i\} \frac{\partial O_i}{\partial p_i}}{(1 - \Delta_{ii})(1 - \Delta_{jj}) - \Delta_{ij}\Delta_{ji}} \begin{pmatrix} 1 - \Delta_{jj} \\ \Delta_{ji} \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Por ende, siguiendo un procedimiento totalmente análogo para obtener los corchetes de Poisson de las variables de tríada con cada hamiltoniano parcial, concluimos que

las ecuaciones dinámicas resultantes de la presente propuesta para la definición de los parámetros de polimerización son

$$\partial_t i = C_{ij} \left[ s_i \frac{L_o}{G} \{i, p_i\} \frac{\partial O_i}{\partial p_i} \right] \left( \quad \right) \quad (7.16)$$

$$\partial_t p_i = C_{ij} \left[ -s_i \frac{L_o}{G} \{i, p_i\} \frac{\partial O_i}{\partial i} \right] \left( \quad \right) \quad (7.17)$$

donde  $i$  y  $j$  son diferentes y los factores  $C_{ij}$  vienen dados por<sup>32</sup>

$$C_{ij} = \frac{1 - \Delta_{jj} - \Delta_{ji}}{(1 - \Delta_{ii})(1 - \Delta_{jj}) - \Delta_{ij}\Delta_{ji}}. \quad (7.18)$$

Recordemos que hemos asumido anteriormente que el denominador es distinto de cero. Es sencillo darse cuenta de que los objetos entre corchetes en las Ecs. (7.16) y (7.17) son las ecuaciones del movimiento que se obtendrían tratando los parámetros de polimerización como si fuesen meras constantes, ignorando sus corchetes de Poisson con las variables canónicas. Por tanto, los factores  $C_{ij}$  que aparecen multiplicando estas ecuaciones codifican toda la información acerca de la naturaleza no trivial de los parámetros como funciones del espacio de fases. Nótese que, en el momento en el que las funciones  $f_b(O_b, O_c)$  y  $f_c(O_b, O_c)$  se fijen (idealmente a partir de primeros principios o, alternativamente, haciendo uso de datos experimentales), estos factores dependientes del espacio de fases quedan totalmente determinados. No obstante, en este capítulo adoptamos un enfoque más modesto y solamente imponemos un conjunto mínimo de condiciones que han de verificar estos factores para que el análisis pueda llevarse a cabo. Concretamente, como veremos en detalle más adelante, exigimos únicamente que sean finitos y que, en el límite de masas grandes, sean tales que los parámetros de polimerización coincidan sobre soluciones con los considerados en las Refs. [137, 138].

En conclusión, la propuesta de definición de los parámetros de polimerización considerada se ve reflejada en la aparición de dos factores dependientes del espacio de fases,  $C_{bc}$  y  $C_{cb}$ , que intervienen de forma multiplicativa en las ecuaciones del movimiento. El hecho de que aparezcan precisamente como factores globales implica que pueden ser reabsorbidos mediante redefiniciones apropiadas de la variable temporal. Dado que hay dos factores dependientes del espacio de fases distintos, serán necesarias *dos* redefiniciones temporales, una por cada sector del espacio de fases. En efecto, toda la complejidad resultante de la naturaleza no trivial de los parámetros de polimerización se puede absorber definiendo

$$dt_i = C_{ij} dt, \quad (7.19)$$

donde  $t_b$  y  $t_c$  son las nuevas variables temporales, que denominaremos *tiempo radial* y *tiempo angular*, respectivamente. Cuando las ecuaciones dinámicas se reescriben en

---

<sup>32</sup>Cabe mencionar que, como es de esperar, estos factores se reducen a los obtenidos con la propuesta menos general de la Ref. [140] en el caso en el que las derivadas cruzadas se anulan o, en otras palabras, en el caso en el que  $\Delta_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ .

términos de estos dos tiempos en lugar del tiempo coordenado, se obtiene un conjunto de ecuaciones idéntico en forma al considerado en los artículos originales [137, 138]. No obstante, persiste una diferencia fundamental: las ecuaciones dinámicas están escritas en términos de dos variables temporales *a priori* distintas en lugar de una sola. A pesar de que estas redefiniciones temporales resulten útiles en este punto de la discusión, no se ha de perder de vista que es necesario que la métrica espaciotemporal admita una expresión en términos de un único tiempo en la totalidad de la región interior como condición para obtener una geometría efectiva bien definida.

A continuación procedamos a integrar las ecuaciones del movimiento que gobiernan la dinámica efectiva de la región interior. Dado que son formalmente idénticas a las de las Refs. [137, 138], podemos emplear las expresiones obtenidas en dichas referencias siempre y cuando sustituyamos el tiempo coordenado por el tiempo correspondiente a cada uno de los sectores del espacio de fases, lo que conduce a

$$\tan \frac{\delta_c c(t_c)}{2} = \frac{\gamma L_o \delta_c}{8m} e^{-2t_c}, \quad (7.20)$$

$$p_c(t_c) = 4m^2 \left( e^{2t_c} + \frac{\gamma^2 L_o^2 \delta_c^2}{64m^2} e^{-2t_c} \right) \left( \quad (7.21)$$

$$\cos \delta_b b(t_b) = \frac{1 + b_o \tanh \frac{b_o t_b}{2}}{1 + b_o^{-1} \tanh \frac{b_o t_b}{2}}, \quad (7.22)$$

$$p_b(t_b) = -2L_o m \frac{\sin \delta_b b(t_b)}{\gamma \delta_b} \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \delta_b b(t_b)}{\gamma^2 \delta_b^2}}, \quad (7.23)$$

donde  $b_o = \sqrt{1 + \gamma^2 \delta_b^2}$  y, de acuerdo con los convenios de las Refs. [137–139],  $b > 0$ ,  $p_b \leq 0$ ,  $c > 0$  y  $p_c \geq 0$ . Adicionalmente, la manera en la que se fijan las constantes de integración en dichas referencias es tal que el horizonte negro se localiza en  $t_b = 0$  (véase el Capítulo 8 para más detalles), instante en el que tanto la variable de conexión radial  $b$  como la variable de tríada radial  $p_b$  se anulan idénticamente. En principio, escogemos aquí el origen del tiempo angular (i.e.,  $t_c = 0$ ) de tal modo que coincida también con el horizonte, ya que esto facilita la comparación con trabajos previos. En la Sec. 3, volveremos a contemplar la libertad existente en la elección de este origen, libertad que desempeñará un papel fundamental en la discusión de la viabilidad del formalismo.

Antes de identificar qué intervalo de tiempos se corresponde con la región interior, notemos que las soluciones efectivas obtenidas presentan dos simetrías de reflexión (una por sector del espacio de fases). Por un lado, es fácil ver que el hamiltoniano parcial angular  $O_c$  es invariante bajo la transformación  $t_c \rightarrow \ln(\gamma L_o \delta_c / 8m) - t_c$ , que deja invariante la variable  $p_c$  y transforma  $\delta_c c$  en  $\pi - \delta_c c$ . Por otro lado, encontramos una situación completamente análoga en el sector radial del espacio de fases con la transformación  $t_b \rightarrow -(4/b_o) \operatorname{arctanh}(1/b_o) - t_b$ .

En el límite clásico en el que  $\delta_i \rightarrow 0$ , las soluciones efectivas se reducen a las de la relatividad general. Dado que los tiempos radial y angular han de coincidir en

un límite clásico adecuado (como comprobamos en la Sec. 4) y ser iguales al tiempo coordinado [como se puede deducir de la Ec. (7.19), junto con el hecho de que  $C_{ij} \rightarrow 1$  en el límite considerado], un cálculo sencillo [138] revela que las soluciones clásicas son<sup>33</sup>

$$c(t) = \frac{\gamma L_o}{4m} e^{-2t}, \quad (7.24)$$

$$p_c(t) = 4m^2 e^{2t}, \quad (7.25)$$

$$b(t) = \gamma \sqrt{|e^{-t} - 1|}, \quad (7.26)$$

$$p_b(t) = -2L_o m \frac{\sqrt{|e^{-t} - 1|}}{1 + \sqrt{|e^{-t} - 1|}}. \quad (7.27)$$

Es inmediato observar que la singularidad clásica se alcanza en el límite  $t \rightarrow -\infty$ , en el que las variables de tríada se anulan y las de conexión divergen. Por tanto, la región interior del agujero negro de Schwarzschild clásico se corresponde con el intervalo de tiempo coordinado  $(-\infty, 0)$ .

En la teoría efectiva (en la que los parámetros de polimerización son distintos de cero), se pueden identificar los intervalos temporales correspondientes a la región interior empleando un método similar. Sin embargo, como resultado de la inclusión de efectos de geometría cuántica, la singularidad clásica desaparece: no existe punto alguno a lo largo de las trayectorias dinámicas en el que las variables de conexión diverjan y las de tríada se anulen. De hecho, la variable de tríada  $p_c$  presenta un valor mínimo distinto de cero en cada trayectoria dinámica, correspondiente a un mínimo local que se alcanza para un valor del tiempo angular

$$t_c^T = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma L_o \delta_c}{8m}, \quad (7.28)$$

que es negativo para valores suficientemente grandes de la masa (o, equivalentemente, para valores suficientemente pequeños de los parámetros de polimerización), que son precisamente aquellos a cuya descripción está especialmente adaptado el modelo efectivo de las Refs. [137, 138]. Como ya hemos comentado en la Sec. 5 de los Preliminares, este valor crítico define una hipersuperficie espacial  $\mathcal{T}$ , que denominamos *superficie de transición* dada su interpretación física en las Refs. [137–139]. De la expresión de  $t_c^T$ , es obvio que tiende a menos infinito en el límite clásico ya comentado. Por tanto, se dice que la superficie de transición “reemplaza”, en este sentido, la singularidad central en la teoría efectiva. Por consiguiente, concluimos que la región interior clásica se corresponde con valores negativos del tiempo angular<sup>34</sup>, esta vez en el intervalo  $(t_c^T, 0)$ . Esto implica que una región nueva emerge como

<sup>33</sup>Nótese que, naturalmente, el límite de masa cero de la Ec. (7.24) no está bien definido, ya que la región interior del agujero desaparece en ese límite y, por tanto, no existe una solución clásica de Kantowski-Sachs que la describa.

<sup>34</sup>De ahora en adelante, empleamos indistintamente el tiempo angular o el tiempo radial, dependiendo de cuál sea más conveniente en cada punto de la discusión. Como veremos en la siguiente sección, la Ec. (7.19) se puede usar para obtener una relación implícita entre ambas variables temporales, que hace las veces de “diccionario” entre las dos descripciones alternativas.



resultado de la inclusión de efectos cuánticos en el sistema, a saber, aquella que se encuentra más allá de la superficie de transición y que corresponde a valores del tiempo angular  $t_c < t_c^T$ . Para poder analizar de manera significativa la forma en la que se ven modificadas las predicciones físicas del modelo [195] como resultado de la nueva propuesta de definición de los parámetros de polimerización (7.7), es necesario determinar previamente si el modelo conduce a una métrica espaciotemporal efectiva que esté bien definida en la totalidad de la región interior. Este estudio de viabilidad es el objetivo de la sección siguiente.

## 2 Estudio de las posibles obstrucciones

En esta sección, examinamos las posibles obstrucciones al formalismo de dos tiempos, que podrían impedir que la métrica efectiva esté bien definida en todos los puntos de la región interior, en el sentido de que no pueda ser expresada en términos de una única variable temporal (ni siquiera por parches). Las siguientes son condiciones necesarias para recuperar una métrica efectiva bien definida en la vecindad de un punto cualquiera de la región interior:

- a) Uno de los tiempos  $t_b$  o  $t_c$  puede ser reescrito en términos del otro.
- b) La componente temporal del elemento de línea efectivo se puede reescribir en términos de  $dt_b^2$  o  $dt_c^2$ , dependiendo de qué tiempo se pueda expresar como una función del otro.

Naturalmente, para cubrir la totalidad de la región interior, necesitamos que estas dos condiciones se cumplan en todos los puntos de dicha región.

A partir de las definiciones de los tiempos radial y angular [véase la Ec. (7.19)], se sigue inmediatamente que

$$dt^2 = \frac{dt_b^2}{C_{bc}^2} = \frac{dt_c^2}{C_{cb}^2}. \quad (7.29)$$

Por consiguiente, la contribución que es proporcional a  $dt^2$  en el elemento de línea efectivo se puede reescribir en términos del cuadrado del diferencial de la variable temporal apropiada siempre y cuando la inclusión del factor  $1/C_{ij}^2$  no introduzca comportamientos singulares. Esta cuestión se estudiará detenidamente en la Sec. 2.3.

Consideremos entonces la otra condición, es decir, si alguno de los tiempos se puede expresar como una función del otro. Para determinar si es posible hacerlo para al menos uno de los tiempos en una vecindad de cada punto de la región interior, es necesario analizar la relación implícita que existe entre ambas variables temporales. Dicha relación se puede obtener a partir de la igualdad

$$C_{cb} dt_b = C_{bc} dt_c, \quad (7.30)$$

que se obtiene trivialmente a partir de las definiciones de  $t_b$  y  $t_c$ . Puesto que el denominador del factor  $C_{ij}$  es simétrico bajo el intercambio de sus índices [como se

puede observar de forma inmediata en la Ec. (7.18)], solo los numeradores de estos factores,

$$F_{ij} = 1 - \frac{\partial O_j}{\partial \delta_j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial O_j} + \frac{\partial f_j}{\partial O_i} \right) \quad (7.31)$$

son de relevancia de cara a obtener la relación implícita entre los tiempos radial y angular<sup>35</sup>. De este modo, llevando a cabo una integración, la Ec. (7.30) conduce a

$$G_b(t_b) = \int_{t_b}^{\vartheta} F_{cb}(t'_b) dt'_b = \int_{t_c}^{\vartheta} F_{bc}(t'_c) dt'_c = G_c(t_c), \quad (7.32)$$

donde las funciones  $F_{ij}$  han de ser evaluadas en las soluciones dinámicas. Reescribiendo los parámetros de polimerización  $\delta_i = f_i(O_b, O_c)$  como funciones de las combinaciones lineales

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(O_b + O_c), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(O_b - O_c), \quad (7.33)$$

y asumiendo que las funciones resultantes son al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ , obtenemos que

$$F_{ij}|_{\text{on-shell}} = 1 - \frac{\partial f_j(m, 0)}{\partial m} \frac{\partial O_j}{\partial \delta_j} \Big|_{\text{on-shell}}, \quad (7.34)$$

donde  $|_{\text{on-shell}}$  denota la evaluación sobre las soluciones dinámicas. Hemos hecho uso de que  $\mu_1|_{\text{on-shell}} = m$  y  $\mu_2|_{\text{on-shell}} = 0$ . Además,  $\partial/\partial m$  denota la derivada parcial con respecto a  $\mu_1$  evaluada sobre soluciones. Como resultado, la relación implícita entre los tiempos radial y angular adopta la siguiente expresión:

$$-G_b(t_b) = t_b - \frac{\partial f_b}{\partial m} \int_0^{t_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b}(t'_b) dt'_b = t_c - \frac{\partial f_c}{\partial m} \int_0^{t_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c}(t'_c) dt'_c = -G_c(t_c), \quad (7.35)$$

donde hemos omitido las evaluaciones sobre soluciones para simplificar la notación. Como ya habíamos adelantado, esta expresión proporciona una relación implícita entre ambas variables temporales,  $G_b(t_b) = G_c(t_c)$ . En lo que sigue, analizamos esta relación en detalle.

Es obvio que el requisito de que la métrica efectiva se pueda escribir en términos de un único tiempo en toda la región interior impone una serie de condiciones sobre las funciones  $F_{ij}$  y  $G_i$ . En particular,

- i) Las primitivas  $G_i$  han de existir. Esto es equivalente a exigir que las funciones  $F_{ji}$  sean integrables.
- ii) Al menos una de las primitivas  $G_i$  ha de ser invertible en cada punto de la región interior.
- iii) Las imágenes de ambas funciones primitivas  $G_i$  han de coincidir en la totalidad de la región espaciotemporal considerada.

---

<sup>35</sup> Asumimos, por supuesto, que el denominador común de las funciones  $C_{ij}$  es finito y distinto de cero. Véase la Sec. 2.3.

En efecto, si existiese una subregión del interior donde las funciones  $F_{ij}$  no fuesen integrables o ninguna de las funciones  $G_i$  fuese invertible, claramente aparecerían obstrucciones que impedirían definir la métrica efectiva en términos de una única variable temporal en dicha subregión. Además, si las imágenes de las primitivas no se solapasen por completo, entonces existiría una subregión en la que la Ec. (7.35) no puede cumplirse, impidiendo que los tiempos radial y angular puedan ser relacionados entre sí.

En primer lugar, examinaremos las propiedades de integrabilidad e invertibilidad de las funciones relevantes en la Sec. 2.1. De este análisis extraeremos herramientas de gran utilidad para abordar el estudio de las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$  en la Sec. 2.2.

## 2.1 Integrabilidad e invertibilidad

Consideremos en primer lugar la integrabilidad de las funciones  $F_{ij}$ . La Ec. (7.35) muestra que la integrabilidad de estas funciones requiere que las derivadas  $\partial O_j / \partial \delta_j$  sean integrables. Puesto que cualquier función continua en un intervalo cerrado es integrable en dicho intervalo y las derivadas parciales  $\partial O_j / \partial \delta_j$  son continuas en su dominio por ser funciones elementales<sup>36</sup> tanto para  $j = b$  como para  $j = c$ , basta con comprobar que el intervalo de integración pertenece a su dominio para garantizar que son integrables en él.

Tomando las derivadas parciales de los hamiltonianos parciales con respecto a su parámetro de polimerización respectivo, tenemos que

$$\frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} = -\frac{1}{2\gamma} \left( 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b} \right) \left( \frac{\delta_b b \cos \delta_b b - \sin \delta_b b}{\delta_b^2} \frac{p_b}{L_o} \right), \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} = \frac{1 - \delta_c c \cos \delta_c c - \sin \delta_c c}{\gamma \delta_c^2} \frac{p_c}{L_o}. \quad (7.37)$$

Para valores finitos de los parámetros de polimerización, el dominio de  $\partial O_c / \partial \delta_c$  como función del tiempo angular es la totalidad de la recta real  $\mathbb{R}$  y, en particular, contiene el intervalo de tiempos correspondiente a la región interior. La misma afirmación es válida en el caso de  $\partial O_b / \partial \delta_b$  como función de  $t_b$ , como se puede comprobar fácilmente. Por tanto, ambas funciones son integrables, lo cual garantiza que las funciones primitivas  $G_i$  existen. Por supuesto, este resultado no implica que las funciones  $G_i(t_i)$  se puedan escribir en términos de funciones elementales, como veremos más adelante.

Procedemos ahora a discutir la invertibilidad de las funciones primitivas  $G_i$ , cuya existencia está garantizada en vista del argumento anterior. El teorema de la función inversa establece que, si una función es derivable en un cierto punto y su derivada es continua y distinta de cero, entonces la función es invertible en una vecindad de dicho punto. Dado que las funciones  $-F_{ji}(t_i)$ , que son las derivadas de  $G_i(t_i)$ , son continuas, el teorema asegura que las primitivas son localmente invertibles salvo en

<sup>36</sup>En otras palabras, se pueden obtener mediante un número finito de composiciones y combinaciones de las cuatro operaciones fundamentales de funciones elementales básicas (potencias, exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas e hiperbólicas directas e inversas).

torno a los ceros de las funciones  $F_{ji}(t_i)$ . Cabe enfatizar que la obtención de estos ceros será de gran utilidad para determinar el comportamiento y la forma de las funciones primitivas  $G_i$ , lo cual será crucial en lo que concierne a la discusión de sus imágenes más adelante.

Empecemos investigando los ceros de  $F_{bc}(t_c)$ . De acuerdo con las Ecs. (7.34) y (7.37) y teniendo en cuenta que  $p_c \sin \delta_c c$  es proporcional a  $O_c$  (y, por consiguiente, a  $m$  sobre soluciones), obtenemos que

$$\begin{aligned} F_{bc}(t_c) &= 1 - \frac{1}{\gamma L_o \delta_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial m} [\delta_c c(t_c) \cos \delta_c c(t_c) - \sin \delta_c c(t_c)] p_c(t_c) \\ &= 1 + \frac{m}{\delta_c} \frac{\partial f_c}{\partial m} - \frac{1}{\gamma L_o \delta_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial m} p_c(t_c) \delta_c c(t_c) \cos \delta_c c(t_c). \end{aligned} \quad (7.38)$$

En términos de  $x_c(t_c) = \tan[\delta_c c(t_c)/2] > 0$ , es sencillo mostrar que, para las soluciones discutidas en la Sec. 1,

$$p_c(t_c) = \frac{1}{2} \gamma L_o \delta_c m \frac{1 + x_c(t_c)^2}{x_c(t_c)}, \quad (7.39)$$

$$\delta_c c(t_c) = 2 \arctan x_c(t_c), \quad (7.40)$$

y, entonces,

$$\cos \delta_c c(t_c) = \frac{1 - x_c(t_c)^2}{1 + x_c(t_c)^2}. \quad (7.41)$$

Por ende, es posible reescribir  $F_{bc}$  como sigue:

$$F_{bc}(t_c) = 1 - \frac{m}{\delta_c} \frac{\partial f_c}{\partial m} \left[ \arctan x_c(t_c) \frac{1 - x_c(t_c)^2}{x_c(t_c)} - 1 \right] \quad (7.42)$$

Los ceros  $t_c^{\text{ext}}$  de  $F_{bc}(t_c)$  —es decir, los extremos locales de  $G_c(t_c)$ , en torno a los cuales esta función primitiva no se puede invertir unívocamente— verifican

$$\arctan x_c^0 \frac{1 - (x_c^0)^2}{x_c^0} = 1 + \frac{\delta_c}{m} \left( \frac{\partial f_c}{\partial m} \right)^{-1}, \quad (7.43)$$

con  $x_c^0 = x_c(t_c^{\text{ext}})$ .

Seguindo los argumentos de área mínima presentados en las Refs. [137, 138] y con el objetivo de buscar una reconciliación parcial con los resultados de dichos trabajos, seleccionamos las funciones involucradas en las definiciones de los parámetros de polimerización de tal modo que sus valores sobre soluciones satisfagan

$$\delta_b = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2\pi}\gamma^2 m} \right)^{1/3} + o(m^{-1/3}), \quad \delta_c = \frac{1}{2L_o} \left( \frac{\gamma \Delta^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/3} + o(m^{-1/3}), \quad (7.44)$$

donde, recordemos,  $\Delta = 4\sqrt{3}\pi G\gamma$  es el gap de área en la LQG y  $o(\cdot)$  denota términos subdominantes con respecto a la función entre paréntesis en el límite de

masas grandes,  $m \rightarrow \infty$ . Cabe notar que estos términos subdominantes aparecen como resultado del hecho de que las expresiones de las Refs. [137, 138] se deducen a partir de una serie de condiciones de área mínima en el límite de masas grandes, por lo que solo son válidas estrictamente para agujeros negros muy masivos. Por este motivo, se dice a menudo que el modelo AOS está especialmente diseñado para la descripción efectiva de agujeros negros con masas mucho mayores que la de Planck, clase a la que pertenecen los agujeros negros astrofísicos de los que se espera obtener eventualmente datos observacionales donde pudiera haber rastros de los efectos de la naturaleza cuántica de la gravedad.

Haciendo uso de las expresiones recién introducidas de los parámetros de polimerización sobre soluciones, tenemos inmediatamente que

$$\arctan x_c^0 \frac{1 - (x_c^0)^2}{x_c^0} = -2 + o(m^0). \quad (7.45)$$

Despreciando los términos subdominantes y recordando que  $x_c^0$  es estrictamente mayor que cero por definición, concluimos que solo existe una solución a esta ecuación. En la Fig. 7.1, se puede apreciar la representación gráfica de las funciones de los lados izquierdo y derecho de la ecuación anterior, cuya intersección marca el único cero de la función  $F_{bc}$ . Dicho cero resulta tener un valor aproximado  $x_c^0 \approx 2.2017$ .

La conclusión que se extrae de este argumento es que  $G_c(t_c)$  es invertible para todo  $t_c < 0$  salvo en una vecindad de

$$t_c^{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{8m[x_c^0 + o(m^0)]}{\gamma L_o \delta_c} = t_c^T - \frac{1}{2} \ln x_c^0 + o\left(\ln \frac{\delta_c}{m}\right) \quad (7.46)$$

Este valor del tiempo angular  $t_c$  es alcanzado más allá de la superficie de transición (en efecto,  $t_c^{\text{ext}} < t_c^T$  porque  $x_c^0$  es mayor que la unidad). Nótese también que el valor numérico de  $t_c^{\text{ext}}$  recibe correcciones subdominantes procedentes de los términos de orden superior que intervienen en las expresiones de los parámetros de polimerización sobre soluciones, como simboliza la presencia del término  $o[\ln(\delta_c/m)]$  en la ecuación mostrada. Como consecuencia de las comentadas propiedades de invertibilidad de  $G_c(t_c)$ , el tiempo angular se puede escribir en términos del radial como

$$t_c = G_c^{-1}[G_b(t_b)], \quad (7.47)$$

siempre y cuando  $t_c$  no se encuentre en una vecindad del valor crítico  $t_c^{\text{ext}}$ . No obstante, aún existe la posibilidad de que la métrica efectiva esté bien definida en dicha región si  $G_b$  es localmente invertible allí, de tal modo que el tiempo radial se pueda expresar en términos del angular. En efecto, sería posible lograr una descripción efectiva de la región interior en términos de una única variable temporal si se pudiesen combinar satisfactoriamente inversiones locales que cubran la totalidad de la región considerada. Esto, no obstante, impone restricciones severas en las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$ . Por ahora, estudiemos los ceros de la función restante,  $F_{cb}$ , y veamos si alguno de ellos se corresponde con  $t_c^{\text{ext}}$  con nuestras definiciones. Como ya hemos mencionado en un par de ocasiones, este análisis será de gran utilidad en el estudio posterior de la imagen de  $G_b$ .

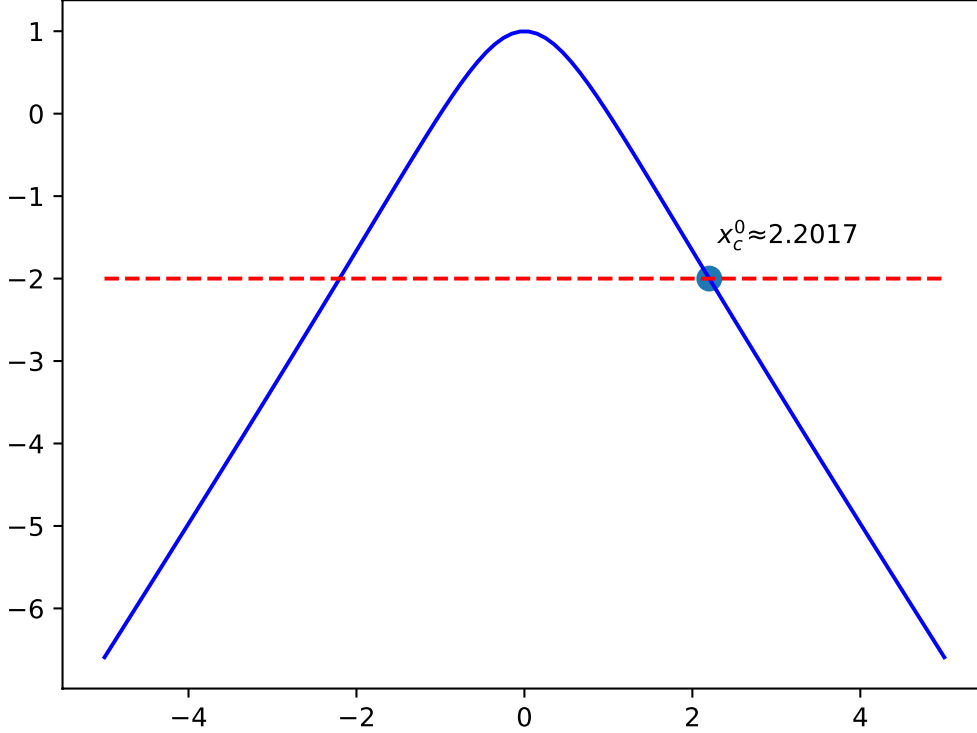


Figura-7.1: Lados izquierdo y derecho de la Ec. (7.45) como funciones de  $x_c$ . La curva azul continua representa el lado izquierdo, mientras que la línea roja discontinua representa el lado derecho. Las intersecciones de ambas curvas proporcionan los puntos en los que la función  $F_{bc}$  se anula. Dado que  $x_c^0 > 0$  por definición, solo la intersección en el semieje positivo es relevante en la presente discusión.

De acuerdo con las Ecs. (7.34) y (7.36), la función  $F_{cb}(t_b)$  admite una expresión de la forma

$$F_{cb}(t_b) = 1 + \frac{\partial f_b}{\partial m} \left[ 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b(t_b)} \right] \left( \delta_b b(t_b) \cos \delta_b b(t_b) - \sin \delta_b b(t_b) \right) \frac{p_b(t_b)}{2\gamma L_o \delta_b^2}. \quad (7.48)$$

La expresión del hamiltoniano parcial radial (7.5) implica que se satisface la siguiente identidad sobre soluciones:

$$\frac{\gamma^2 \delta_b}{\sin \delta_b b(t_b)^2} p_b(t_b) = -2\gamma L_o m - \frac{\sin \delta_b b(t_b)}{\delta_b} p_b(t_b). \quad (7.49)$$

Por tanto,

$$F_{cb}(t_b) = 1 - \frac{m}{\delta_b} \frac{\partial f_b}{\partial m} + \frac{1}{2\gamma L_o \delta_b} \frac{\partial f_b}{\partial m} \times \left\{ \left[ 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b(t_b)} \right] \left( \frac{\delta_b b(t_b) \cos \delta_b b(t_b)}{\delta_b} p_b(t_b) - 2 \frac{\sin \delta_b b(t_b)}{\delta_b} p_b(t_b) \right) \right\} \quad (7.50)$$

Empleando la forma de las soluciones dinámicas efectivas presentadas en la Sec. 1,  $\cos\delta_b b(t_b)$  se puede escribir como

$$\cos\delta_b b(t_b) = \frac{1 + b_o x_b(t_b)}{1 + b_o^{-1} x_b(t_b)^2} \quad (7.51)$$

donde  $-1 < x_b(t_b) = \tanh(b_o t_b/2) \leq 0$ . Nótese que, de la Ec. (7.51), se sigue que  $-b_o < \cos\delta_b b(t_b) \leq 1$ , con una cota inferior menor que la que es habitual en la función coseno de una variable real. Esta discrepancia apunta al hecho de que las variables canónicas radiales se hacen imaginarias a partir de un cierto punto en la evolución. Este fenómeno está íntimamente relacionado con la existencia de un horizonte más allá de la superficie de transición, que se ha interpretado como un horizonte blanco en el modelo original [137, 138]. En lo que sigue, nos centramos en valores del tiempo radial para los cuales la variable de conexión  $b$  es real y, por consiguiente, sus funciones trigonométricas están acotadas por los valores usuales. Dichos valores corresponden a  $x_b(t_b) \in [-2b_o/(1+b_o^2), 0]$ ,  $\delta_b b(t_b) \in [0, \pi]$  o, equivalentemente,

$$t_b \in [t_b^{\text{WH}}, 0] \quad \left( \quad t_b^{\text{WH}} = -\frac{4}{b_o} \operatorname{arctanh} \frac{1}{b_o}, \quad (7.52) \right.$$

donde  $t_b^{\text{WH}}$  designa la posición del horizonte blanco de acuerdo con la interpretación de las Refs. [137, 138]. A partir de ahora, restringimos la discusión a la región interior genuina, comprendida entre las fronteras identificadas como un horizonte negro y un horizonte blanco. Teniendo en cuenta esta restricción y la Ec. (7.23), tenemos que

$$\delta_b b(t_b) = \arccos \left[ \frac{1 + b_o x_b(t_b)}{1 + b_o^{-1} x_b(t_b)^2} \right] \quad (7.53)$$

$$\sin\delta_b b(t_b) = \gamma \delta_b \frac{\sqrt{-x_b(t_b)[2b_o + (1+b_o^2)x_b(t_b)]}}{b_o + x_b(t_b)}, \quad (7.54)$$

$$p_b(t_b) = -2L_o m \frac{[b_o + x_b(t_b)] \sqrt{-x_b(t_b)[2b_o + (1+b_o^2)x_b(t_b)]}}{b_o^2 [1 - x_b(t_b)^2]}. \quad (7.55)$$

Nótese que tanto  $p_b$  como  $\sin\delta_b b$  se anulan en el horizonte blanco. Introduciendo estas expresiones en la Ec. (7.50), se obtiene

$$F_{cb} = 1 - \frac{2m}{\delta_b} \frac{\partial f_b}{\partial m} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2b_o x_b + (1+b_o^2)x_b^2}{b_o^2(1-x_b^2)} + \frac{1}{2\sqrt{b_o^2-1}} \left[ 1 + \frac{(b_o+x_b)^2}{2b_o x_b + (1+b_o^2)x_b^2} \right] \right. \\ \left. \times \arccos \left( \frac{1+b_o x_b}{1+b_o^{-1} x_b} \right) \frac{(1+b_o x_b)}{b_o(1-x_b^2)} \sqrt{-x_b[2b_o + (1+b_o^2)x_b]} \right\}. \quad (7.56)$$

Como resultado, cualquier cero  $t_b^{\text{ext}}$  de  $F_{cb}$  ha de verificar, con  $x_b^0 = x_b(t_b^{\text{ext}})$  (y salvo términos correctivos subdominantes),

$$\frac{1}{2\sqrt{b_o^2-1}} \left[ \left( 1 + \frac{(b_o+x_b^0)^2}{2b_o x_b^0 + (1+b_o^2)(x_b^0)^2} \right) \arccos \left( \frac{1+b_o x_b^0}{1+b_o^{-1} x_b^0} \right) \right. \\ \left. \times \frac{(1+b_o x_b^0)}{b_o[1-(x_b^0)^2]} \sqrt{\left( x_b^0[2b_o + (1+b_o^2)x_b^0] + \frac{2b_o x_b^0 + (1+b_o^2)(x_b^0)^2}{b_o^2[1-(x_b^0)^2]} \right)} \right] = -2, \quad (7.57)$$

donde hemos hecho uso de la dependencia del orden dominante del parámetro de polimerización radial en la masa  $m$  sobre soluciones. En la Fig. 7.2, se puede apreciar los lados izquierdo y derecho de la ecuación anterior. Sus intersecciones, como en el caso angular, señalan (las imágenes bajo  $x_b$  de) los ceros de la función  $F_{cb}$ .

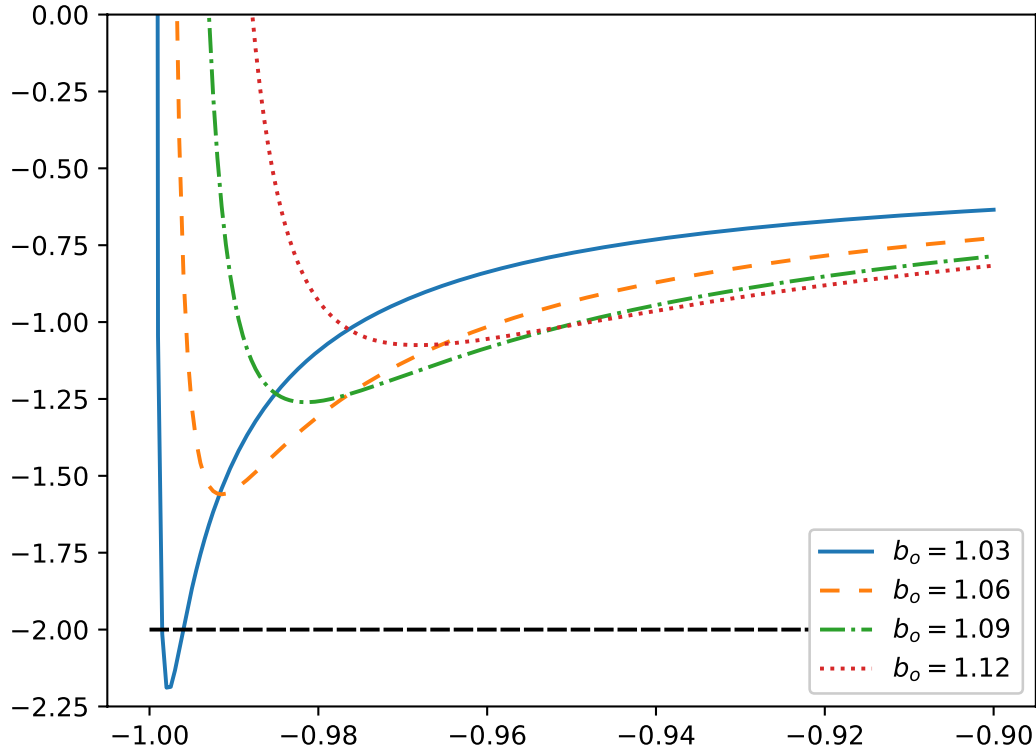


Figura 7.2: Lados izquierdo y derecho de la Ec. (7.57) como funciones de  $x_b^0$ . Las curvas se corresponden con el lado izquierdo de la Ec. (7.57) para distintos valores de la masa  $m$ , mientras que la línea negra discontinua representa el valor del lado derecho de la ecuación.

Inspeccionando la Fig. 7.2, es inmediato apreciar que, a medida que  $b_o$  se aproxima a uno (es decir, para valores pequeños de  $\delta_b$  o masas grandes), el lado izquierdo de la Ec. (7.57) presenta un mínimo que es cada vez más pronunciado y que se desplaza hacia valores cada vez más negativos de  $x_b^0$ . Como resultado, encontramos que  $F_{cb}$  no se anula en ningún punto de la región interior para valores de la masa  $m$  por debajo de un cierto umbral crítico. Numéricamente, observamos que dicho umbral corresponde a un valor aproximado de  $b_o$  de  $b_o^{\text{crit}} \approx 1.032$  (o, de forma totalmente equivalente, a un valor del parámetro de masa de aproximadamente unas 13 masas de Planck). En el caso de agujeros negros muy masivos (que es de especial interés por ser el tipo de agujeros a cuya descripción está especialmente adaptado el modelo),  $F_{cb}$  presenta dos ceros, que denominaremos  $x_{b,0}^{(1)}$  y  $x_{b,0}^{(2)}$ , tales que  $x_{b,0}^{(1)} > x_{b,0}^{(2)}$ . Por consiguiente, en



los casos comentados,  $G_b$  resulta ser localmente invertible en todos los puntos de la región interior salvo en una vecindad de aquellos correspondientes a los instantes  $t_{b,\text{ext}}^{(1)}$  y  $t_{b,\text{ext}}^{(2)}$  [asociados, respectivamente, con  $x_{b,0}^{(1)}$  y  $x_{b,0}^{(2)}$ ].

Verifiquemos a continuación si alguno de estos puntos equivale al valor del tiempo angular para el que la primitiva  $G_c$  no puede ser invertida para algún valor de  $m$ . Recordemos que la correspondencia entre los tiempos radial y angular está dictada por la relación implícita  $G_b(t_b) = G_c(t_c)$ . Por tanto, tenemos que determinar si  $G_c(t_c^{\text{ext}})$  difiere o no de  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(1)})$  y  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(2)})$  para cualquier valor (grande) de la masa. No obstante, dado que ni los ceros de  $F_{cb}(t_b)$  ni la propia función  $G_b(t_b)$  pueden ser escritos en términos de funciones elementales, tendremos que recurrir a argumentos y técnicas seminuméricos para llevar a cabo el análisis.

En el sector angular, es posible integrar  $F_{bc}(t_c)$  explícitamente. En efecto, salvo términos subdominantes,

$$\begin{aligned} G_c(t_c) &= -t_c + \frac{1}{3\gamma L_o \delta_c m} \int_{t_c}^{\rho} dt'_c [\delta_{cc}(t'_c) \cos \delta_{cc}(t'_c) - \sin \delta_{cc}(t'_c)] p_c(t'_c) \\ &= -t_c - \frac{1}{6} \int_{x_c(t_c)}^{x_c^{(0)}} dx_c \left[ \left( \frac{1}{x_c^2} - 1 \right) \left( \arctan x_c - \frac{1}{x_c} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.58)$$

Integrando por partes, alcanzamos la siguiente expresión:

$$G_c(t_c) = -t_c - \frac{1}{6} \left[ \frac{f_c^2(t_c) + 1}{x_c(t_c)} \arctan x_c(t_c) - \frac{x_c^2(0) + 1}{x_c(0)} \arctan x_c(0) \right] \quad (7.59)$$

En particular, el valor de la primitiva  $G_c(t_c)$  en su único extremo se obtiene reemplazando  $x_c(t_c)$  por  $x_c^0$  y teniendo que cuenta que  $x_c(0) = \gamma L_o \delta_c / (8m)$ . Del mismo modo que ocurre con  $x_c(0)$ , dicho valor depende de la masa  $m$  del agujero negro, tanto directamente como a través de su dependencia en  $\delta_c$ .

Sería deseable poder obtener una expresión similar para el resultado de evaluar la primitiva radial  $G_b$  en sus dos extremos. Sin embargo, como mencionamos anteriormente, ni siquiera parece posible escribir  $G_b$  en términos de funciones elementales, a pesar de que su existencia esté garantizada por las propiedades de integrabilidad discutidas al principio de esta subsección. Por completitud, la expresión de  $G_b(t_b)$  viene dada explícitamente por

$$\begin{aligned} G_b(t_b) &= -t_b - \frac{1}{6\gamma L_o \delta_b m} \int_{t_b}^{\rho} dt'_b \left[ \left( -\frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b(t'_b)} \right) [\delta_{bb}(t'_b) \cos \delta_{bb}(t'_b) - \sin \delta_{bb}(t'_b)] p_b(t'_b) \right. \\ &= -t_b + \frac{2}{3\gamma \delta_b} \int_{x_b(t_b)}^{\rho} dx'_b \left[ \left( +\frac{(b_o + x'_b)^2}{2b_o x'_b + (1 + b_o^2) x_b'^2} \right) \frac{(b_o + x'_b) \sqrt{|2b_o x'_b + (1 + b_o^2) x_b'^2|}}{b_o^3 (1 - x_b'^2)^2} \right. \\ &\times \left. \left[ \arccos \left( \frac{1 + b_o x'_b}{1 + b_o^{-1} x_b'} \right) \left( \frac{1 + b_o x'_b}{1 + b_o^{-1} x_b'} - \gamma \delta_b \frac{\sqrt{|2b_o x'_b + (1 + b_o^2) x_b'^2|}}{b_o + x'_b} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.60)$$

donde los términos subdominantes han sido omitidos. Dichos términos [inducidos por las correcciones ignoradas en la Ec. (7.44)] modificarían el factor que multiplica

la integral en la ecuación anterior, además de los parámetros  $b_o$  que aparecen en el integrando. Sea  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(a)})$  el resultado de evaluar la Ec. (7.60) en los ceros de  $F_{cb}(t_b)$ ,  $t_{b,\text{ext}}^{(a)}$  con  $a = 1, 2$ . Como en el caso de  $G_c(t_c^{\text{ext}})$ , los valores  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(a)})$  dependen de la masa  $m$ , esta vez tanto a través de su dependencia en  $\delta_b$  (directa e indirecta) como a través de la dependencia de los ceros de  $F_{cb}$  en  $m$  (recordemos que  $b_o$  interviene en la ecuación satisfecha por  $x_{b,0}^{(a)}$ ). Por consiguiente, para cada valor de la masa, será necesario resolver numéricamente la Ec. (7.57) y evaluar  $G_b$  en las soluciones, evaluación que también habrá de ser llevada a cabo empleando métodos numéricos. Este procedimiento permite representar las dos curvas correspondientes a  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(a)})$  como funciones de la masa  $m$ , cuyas intersecciones con  $G_c(t_c^{\text{ext}})$  indicarían la presencia de obstrucciones al formalismo en su versión actual. El resultado se puede encontrar en la Fig. 7.3.

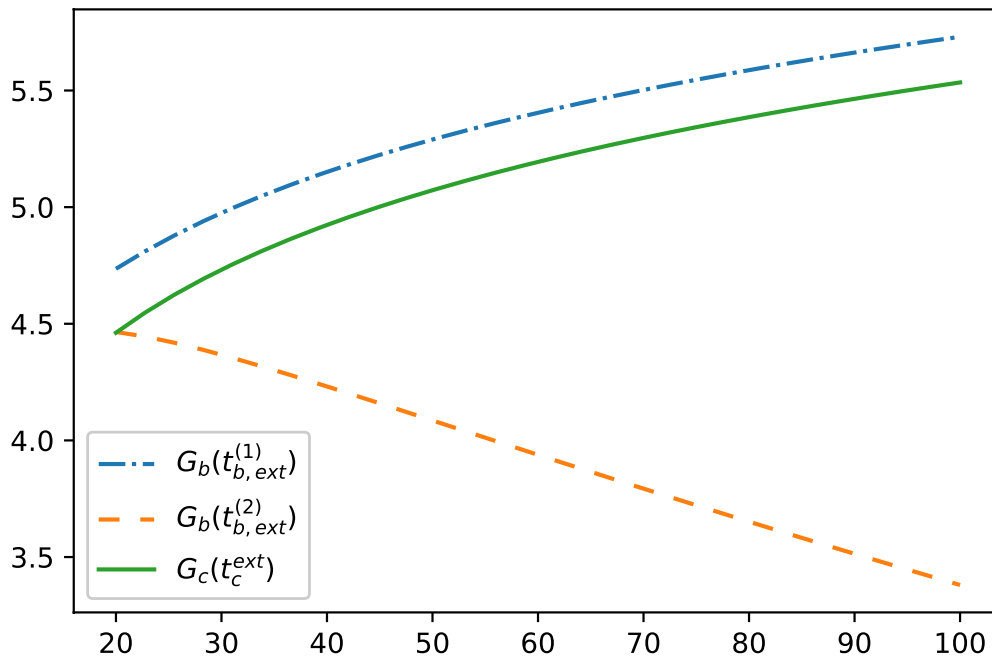


Figura-7.3: Primitivas evaluadas en los ceros de sus derivadas para valores de la masa  $m$  (representada en el eje horizontal) comprendidos entre 20 y 100 masas de Planck. Las curvas verde, azul y naranja se corresponden con  $G_c(t_c^{\text{ext}})$ ,  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(1)})$  y  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(2)})$ , respectivamente.

Las curvas recogidas en la Fig. 7.3 ponen de manifiesto que  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(1)})$  es mayor que  $G_c(t_c^{\text{ext}})$  en todo el intervalo estudiado de masas. La única intersección posible es, entonces, aquella entre las curvas asociadas a  $G_c(t_c^{\text{ext}})$  y  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(2)})$ . Dicha intersección resulta tener lugar para un valor aproximado de la masa  $m$  de unas 20 masas de Planck. Más allá de este valor, las curvas correspondientes a las primitivas  $G_i$

evaluadas en sus extremos no intersectan más, al menos en el rango de masas considerado. Además, el comportamiento presentado por estas curvas sugiere que esta conclusión se puede extrapolar también para valores mayores de la masa  $m$ .

Por consiguiente, los resultados obtenidos en esta sección garantizan que, en cada punto de la región interior genuina, es posible invertir localmente al menos una de las funciones primitivas  $G_b$  o  $G_c$  (en términos de sus argumentos respectivos) siempre y cuando la masa del agujero negro supere unas 20 masas de Planck, lo que ciertamente incluye todo el régimen de validez del modelo original propuesto en las Refs. [137, 138]. No obstante, como hemos comentado al principio de la sección, estas condiciones de integrabilidad e invertibilidad son necesarias pero no suficientes para asegurar la buena definición de la métrica espaciotemporal efectiva resultante de nuestro formalismo de dos tiempos en toda la región interior. En efecto, a estas alturas de la discusión, solo podemos concluir que es posible obtener una reformulación satisfactoria en términos de una única variable temporal en la región cubierta por los intervalos temporales correspondientes a la intersección de las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$  (siempre que nos concentremos en agujeros negros suficientemente masivos). Determinar si dicha región coincide o no con la totalidad de la región interior es precisamente el objetivo de la Sec. 2.2.

## 2.2 Imágenes de las funciones primitivas

Llegados a este punto, ya sabemos que  $G_b(t_b)$  y  $G_c(t_c)$  existen y que, para todo tiempo correspondiente a un punto de la región interior, al menos una de estas funciones es invertible si  $m$  es suficientemente grande. Sin embargo, esto no significa aún que la métrica efectiva se pueda definir satisfactoriamente en términos de un único tiempo en toda la región interior. Más concretamente, los resultados de invertibilidad local discutidos son insuficientes para reexpresar un tiempo en términos del otro si las imágenes de la región interior bajo  $G_b$  y  $G_c$  no coinciden. Efectivamente, la relación implícita  $G_b(t_b) = G_c(t_c)$  solo está bien definida para valores de los tiempos radial y angular que corresponden a la intersección de las imágenes de las dos funciones primitivas. Por tanto, para completar nuestra discusión acerca de la invertibilidad de la relación implícita entre las dos variables temporales de nuestro formalismo, procedamos en esta sección a estudiar las imágenes de las funciones  $G_i$ . Para este fin, serán de especial utilidad los resultados concernientes a los extremos de  $G_i$  obtenidos en la sección anterior.

Comencemos considerando el caso de la primitiva angular  $G_c$ , de la cual contamos con una expresión explícita en términos de funciones elementales. De acuerdo con dicha expresión (7.59), es inmediato apreciar que  $G_c(0) = 0$  y  $\lim_{t_c \rightarrow -\infty} G_c = -\infty$ . Adicionalmente, para valores pequeños del tiempo angular  $t_c$  (es decir, en la región cercana al horizonte negro), la función  $G_c$  es positiva y se comporta de manera esencialmente lineal. En cambio, para valores de  $t_c$  suficientemente negativos, su comportamiento se asemeja al de una función exponencial decreciente. Esto, junto con el hecho de que  $G_c$  es una función continua, implica que la primitiva angular presenta un número impar de extremos locales. De hecho, ya sabemos que esta función tiene un único extremo local: un máximo  $G_{c,\max} = G_c(t_c^{\text{ext}})$  para un valor del

tiempo angular  $t_c^{\text{ext}}$  para el que  $x_c(t_c^{\text{ext}}) \approx 2.2017$  [véanse las Ecs. (7.46) y (7.59)]. Como consecuencia, la imagen de la semirrecta negativa  $t_c \leq 0$ , que contiene a la región interior, bajo la primitiva angular es

$$\mathcal{R}(G_c) = (-\infty, G_{c,\text{max}}]. \quad (7.61)$$

Recuérdese que un horizonte blanco potencial se encuentra situado en un valor finito de  $t_b$  y, dadas las propiedades de continuidad de  $G_b$  y  $G_c$ , esta frontera también corresponde a un valor finito de  $t_c$ . Como resultado, la imagen de  $G_c$  restringida a la región interior genuina,  $\mathcal{R}(G_c)|_{\text{int}}$ , debe corresponderse con un intervalo acotado inferiormente por un valor finito.

De las expresiones de  $G_c$  (7.59) y de  $t_c^{\text{ext}}$  (7.46), es sencillo entender cómo la posición del máximo se ve afectada por una variación de la masa del agujero. En efecto, como ponen de manifiesto los signos de las derivadas de  $G_c$  y de  $t_c^{\text{ext}}$  con respecto a  $m$ , el máximo se ve desplazado hacia valores negativos de  $t_c$  y su altura crece a medida que la masa  $m$  aumenta. En lo que sigue, llevamos a cabo un análisis similar de  $G_b$  para comprender cuál es su comportamiento como función del tiempo radial  $t_b$  y cómo se ve modificado este comportamiento para distintos valores de  $m$ .

Con nuestra definición de  $G_b$ , escrita en la Ec. (7.60), esta función se anula en el horizonte negro. Además, como en el caso de su contrapartida angular, también resulta ser positiva y esencialmente lineal en una vecindad de dicha frontera. Su comportamiento asintótico, sin embargo, difiere enormemente del exhibido por  $G_c$ . En lugar de decrecer exponencialmente, se puede ver que tiende a infinito positivo. Como resultado, la imagen del semieje real negativo bajo  $G_b$  contendrá ciertamente la semirrecta real positiva,  $\mathcal{R}(G_b) \supseteq [0, \infty)$ . Si restringimos nuestra atención a la región interior genuina, esta conclusión se ve modificada. La afirmación precisa en dicho caso sería que  $\mathcal{R}(G_b)|_{\text{int}} \supseteq [0, G_{b,\text{sup}}]$ , donde  $G_{b,\text{sup}}$  denota el supremo de  $G_b$  en la región comprendida entre el horizonte negro y el horizonte blanco. Este supremo podría corresponder, o a su valor en uno de sus extremos  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(a)})$ , o a su valor en la frontera que se ha venido interpretando como un horizonte blanco,  $G_b(t_b^{\text{WH}})$ . En cualquier caso,  $G_{b,\text{sup}}$  es necesariamente finito dada la continuidad de la primitiva radial.

Adicionalmente, como ya hemos visto,  $G_b$  presenta dos extremos<sup>37</sup> en las soluciones de la Ec. (7.57). La única posibilidad compatible con la continuidad de  $G_b$  y con su comportamiento asintótico es que el extremo más cercano al horizonte negro sea un máximo y el más alejado, un mínimo. Su comportamiento a medida que el parámetro de masa  $m$  aumenta está ilustrado en la Fig. 7.4.

Observando esta gráfica con atención, concluimos que la diferencia en altura entre el máximo y el mínimo crece a medida que la masa se hace más grande y que ambos extremos se desplazan progresivamente hacia valores más negativos del tiempo radial  $t_b$ . Adicionalmente, se puede apreciar que el valor de la función  $G_b$  en su mínimo,  $G_{b,\text{min}}$ , se hace negativo una vez que la masa sobrepasa un valor crítico (de

<sup>37</sup>Los resultados numéricos sugieren que el horizonte blanco siempre se localiza más allá del extremo más alejado del horizonte negro, por lo que ambos extremos pertenecen a la región interior, al menos para valores de la masa en el intervalo estudiado.

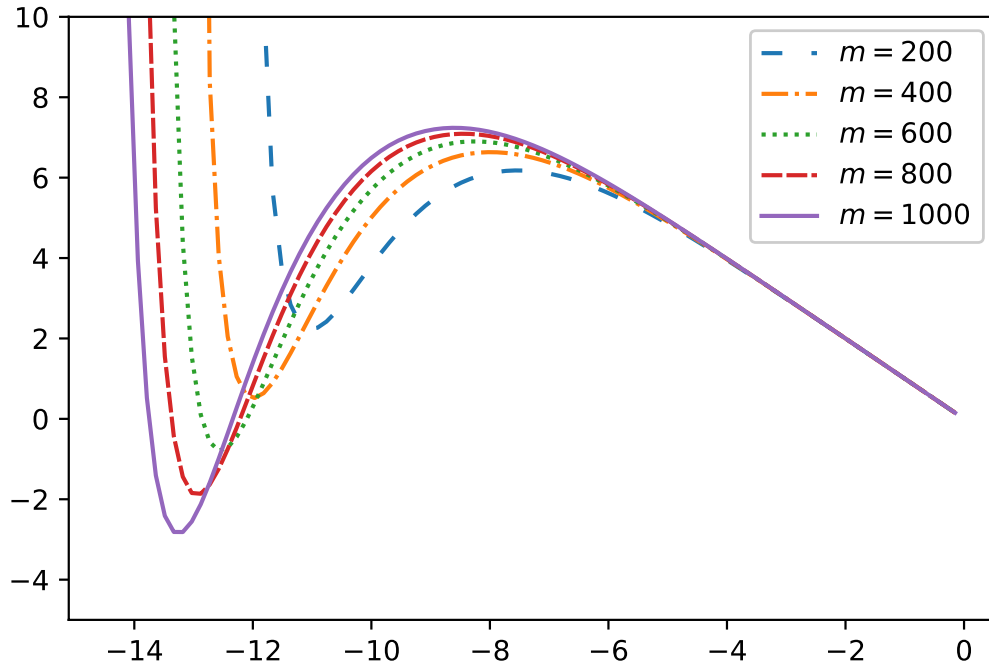


Figura 7.4:  $G_b$  como función del tiempo radial  $t_b$  para diferentes valores de la masa  $m$ . En la obtención numérica de esta figura, hemos tomado  $G = 1$ ,  $L_o = 1$  y los valores estándar de  $\gamma$  y  $\Delta$ .

aproximadamente 460 masas de Planck, como revelan nuestros resultados numéricos). Por consiguiente, para valores de la masa por encima de este umbral, la imagen de la primitiva radial sería de la forma

$$\mathcal{R}(G_b)|_{\text{int}} = [G_{b,\text{min}}, G_{b,\text{sup}}]. \quad (7.62)$$

Obviamente, la continuidad de  $G_b$  garantiza que  $G_{b,\text{min}}$  es finito para cualquier valor finito de la masa  $m$ . En consonancia con nuestros comentarios anteriores, la relación implícita que vincula los tiempos radial y angular implica que  $G_c(t_c)$  también ha de estar acotada inferiormente en la región estrictamente interior, siendo la cota inferior precisamente  $G_{b,\text{min}}$  en el sector de interés de masas grandes<sup>38</sup>. Cabe enfatizar que la razón que subyace a la existencia de esta cota inferior en la región interior es que la caracterización del horizonte blanco está basada en la anulación de  $b$  y  $p_b$  (como es también el caso del horizonte negro), de tal modo que su posición queda determinada de forma natural en término del tiempo radial [véase la Ec. (7.52)]. Teniendo este hecho en mente y dada la relación implícita entre las dos variables temporales, vemos

<sup>38</sup>De forma más general,  $\mathcal{R}(G_c)|_{\text{int}} = [G_{b,\text{inf}}, G_{c,\text{max}}]$ , donde el ínfimo de la primitiva radial  $G_{b,\text{inf}}$  es, o bien cero, o bien  $G_{b,\text{min}}$ , dependiendo de si la masa  $m$  supera o no el umbral de 460 masas de Planck mencionado anteriormente.

que, para agujeros negros suficientemente masivos: i)  $t_c$  decrece monótonamente hasta que alcanza un valor  $G_c^{-1}[G_b(t_{b,\text{ext}}^{(2)})]$ , donde  $G_c$  alcanza su valor mínimo<sup>39</sup>, y, entonces, ii)  $t_c$  empieza a crecer hasta que alcanza el valor  $G_c^{-1}[G_b(t_b^{\text{WH}})]$ , que marca el final de la región interior. En conclusión, para masas suficientemente grandes,

$$\mathcal{R}(G_c)|_{\text{int}} = [G_{b,\text{min}}, G_{c,\text{max}}], \quad \mathcal{R}(G_b)|_{\text{int}} = [G_{b,\text{min}}, G_{b,\text{sup}}], \quad (7.63)$$

donde  $G_{b,\text{sup}} = \max[G_b(t_b^{\text{WH}}), G_{b,\text{max}}]$ . Como consecuencia inmediata de comparar estas dos expresiones, toda discrepancia potencial entre las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$  en la región interior ha de estar situada en sus extremos superiores.

Una vez entendidos los comportamientos de  $G_b$  y  $G_c$ , nos encontramos en posición de concluir nuestro estudio comparativo de sus imágenes. Representando ambas funciones primitivas al mismo tiempo para un valor de la masa  $m$  mucho mayor que la masa de Planck (a saber,  $m = 5000$ ), obtenemos el resultado mostrado en la Fig. 7.5. Como se puede ver en dicha gráfica,  $G_b$  y  $G_c$  son esencialmente iguales hasta la superficie de transición, donde los efectos cuánticos gravitatorios dejan de ser despreciables. Por tanto, hasta dicha superficie,  $t_b \approx t_c$ , siendo mejor la aproximación cuanto más cerca se está del horizonte negro. En esta subregión, se puede lograr una reconciliación parcial de nuestro formalismo con el modelo original, ya que, en este régimen, las soluciones dinámicas son idénticas a las de las Refs. [137, 138]. No obstante, la variable temporal única en la que están escritas (i.e., el valor aproximadamente coincidente de  $t_b$  y  $t_c$ ) no es la considerada por los autores de las Refs. [137, 138], como queda de manifiesto por la presencia del factor  $1/C_{ij}^2$  en la componente temporal de la métrica efectiva, factor que será estudiado en la siguiente sección.

En contraste con los comentarios del párrafo anterior,  $G_b$  y  $G_c$  difieren enormemente más allá de la superficie de transición. En particular, como hemos mostrado, la primitiva radial presenta un segundo extremo en dicha subregión, lo cual conduce a una relación no monótona entre los dos tiempos, como ya discutimos en el párrafo bajo la Ec. (7.62). Además, se puede apreciar que  $G_{b,\text{sup}} > G_{c,\text{max}}$ , lo cual, de acuerdo con nuestros resultados numéricos, se cumple en todo el intervalo de masas considerado. En efecto, el valor de  $G_b$  en su máximo (que se corresponde con  $G_{b,\text{sup}}$  para masas grandes, según nuestro análisis) resulta ser siempre mayor que  $G_{c,\text{max}}$  en el rango de masas investigado (véase la Fig. 7.3). Además, en vista del comportamiento exhibido por las primitivas en el intervalo estudiado de valores de  $m$ , parece razonable esperar que  $G_{b,\text{sup}}$  siga siendo también mayor que  $G_{c,\text{max}}$  para agujeros negros con masas aún mayores.

Teniendo en cuenta estas observaciones, es fácil convencerse de que las imágenes de la región interior bajo las funciones  $G_c$  y  $G_b$ , tal y como están definidas en la Ec. (7.63), no coinciden para ningún valor finito de la masa en el intervalo considerado. En efecto, el hecho de que  $G_{b,\text{sup}}$  sea por definición mayor o igual al valor de  $G_b$  en su máximo, junto con el hecho de que esta última cantidad resulte superar el valor

<sup>39</sup>Es fácil darse cuenta de que este mínimo, donde  $dt_c/dt_b$  se anula, señala la presencia de un extremo local en el área de las 2-esferas coordenadas caracterizadas por un valor constante de  $x$ ,  $4\pi p_c(t_b)$ .

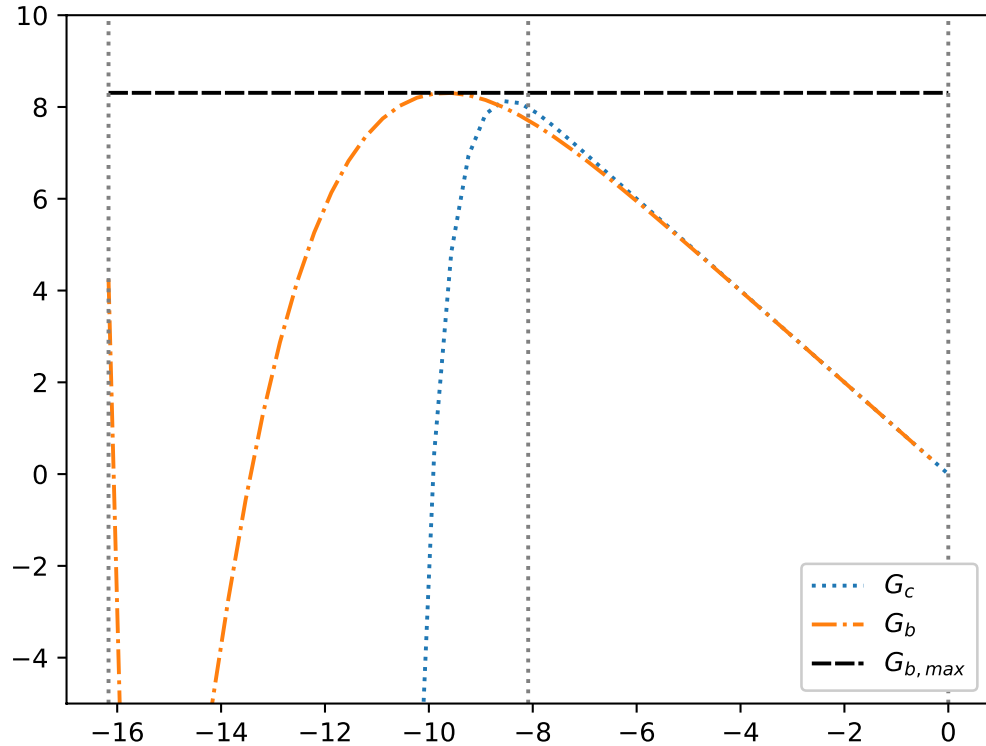


Figura 7.5:  $G_b$  y  $G_c$  como funciones de sus tiempos respectivos (identificados con la variable del eje horizontal) para  $m = 5000$ . Las líneas grises punteadas muestran, de izquierda a derecha, las posiciones del horizonte blanco, de la superficie de transición y del horizonte negro en las variables temporales en que se definen de manera natural (i.e., en tiempo radial, en el caso de los horizontes y en tiempo angular, en el caso de la superficie de transición). En la obtención numérica de esta figura, hemos tomado  $G = 1$ ,  $L_o = 1$  y los valores estándar de  $\gamma$  y  $\Delta$ .

de  $G_{c,max}$ , implica que existen valores del tiempo radial con una imagen positiva a los que no se les puede asociar un valor del tiempo angular. Por consiguiente, hemos de concluir que no es posible llevar a cabo una inversión satisfactoria de la relación implícita entre las dos variables temporales en la totalidad de la región interior.

Por lo tanto, a pesar de la integrabilidad de  $F_{ij}$  y de las buenas propiedades de invertibilidad local presentadas por las funciones primitivas  $G_i$ , el hecho de que la intersección de las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$  no cubra la región interior completa supone una *obstrucción* al formalismo derivado de nuestra propuesta de definición de los parámetros de polimerización (7.7). Efectivamente, el formalismo no puede abarcar la totalidad de la región estudiada (al menos en su forma presente), en el sentido de que no proporciona una métrica efectiva que esté bien definida en todas partes. La razón última que subyace a esta afirmación es que existe una subregión en la que no se

puede establecer una relación satisfactoria entre el tiempo radial y el tiempo angular, por lo que ninguno de ellos se puede expresar en términos del otro. No obstante, llegados a este punto, conviene recordar que existe una libertad en el formalismo que aún no hemos explotado, a saber, la de fijar libremente los orígenes de los dos tiempos independientemente. Como veremos en la Sec. 3, resulta que es posible hacer coincidir las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$  con una elección apropiada de estos orígenes, eliminando así la obstrucción que hemos encontrado para definir una geometría efectiva en la totalidad de la región interior.

### 2.3 Comportamiento de la componente métrica temporal

Por completitud, estudiemos en esta sección el comportamiento del factor  $C_{ij}$  (el inverso de cuyo cuadrado aparece en la componente temporal de la métrica) a lo largo de las trayectorias dinámicas, para asegurarnos de que no existen obstrucciones adicionales al formalismo de dos tiempos. De su expresión (7.18), sabemos que estos factores dependen exclusivamente de las derivadas de cada uno de los hamiltonianos parciales con respecto a su parámetro de polimerización asociado y de las derivadas de los parámetros de polimerización con respecto a los hamiltonianos parciales. Estos factores se pueden escribir como

$$C_{ij} = \frac{F_{ij}}{\zeta}, \quad \zeta = (1 - \Delta_{bb})(1 - \Delta_{cc}) - \Delta_{bc}\Delta_{cb}. \quad (7.64)$$

Dadas la estructura que presentan estos factores y la continuidad de todas las funciones involucradas, parece haber un total de tres situaciones que han de ser examinadas cuidadosamente para descartar la posibilidad de que estos factores sean una fuente adicional de obstrucciones, en el sentido de que conduzcan a singularidades o a degeneraciones en la métrica efectiva. En primer lugar, hay que considerar los puntos en los que  $F_{ij}$  se anula, que se corresponden a divergencias (posiblemente aparentes) en la métrica. En segundo lugar, también es importante estudiar los ceros del denominador  $\zeta$ , asociados con puntos en los que la métrica efectiva se vuelve degenerada (al menos en las coordenadas adoptadas). En tercer y último lugar, habría que contemplar la posibilidad de que  $F_{ij}$  y  $\zeta$  se anulen al mismo tiempo, lo cual conduciría a una situación indeterminada.

Como ya hemos visto, los puntos en los que las funciones  $F_{ij}$  se anulan son aquellos que los que las primitivas  $G_j$  no pueden ser invertidas localmente. Esto, junto con el hecho de que una potencia de  $F_{ij}$  interviene en la métrica efectiva solo cuando está escrita en términos del tiempo  $t_i$ , implica que estos ceros no constituyen un problema. Para mayor claridad, concentrémonos por un momento en el caso particular de la región en la que la métrica se puede escribir únicamente en términos del tiempo radial  $t_b$ :

$$ds^2 = -\frac{\gamma^2 \delta_b^2 p_c[t_c(t_b)] \zeta[t_b, t_c(t_b)]^2}{\sin^2 \delta_b b(t_b) F_{bc}[t_c(t_b)]^2} dt_b^2 + \frac{p_b^2(t_b)}{L_o^2 p_c[t_c(t_b)]} dx^2 + p_c[t_c(t_b)] d\Omega^2, \quad (7.65)$$

donde  $t_c(t_b)$  debe ser entendido como  $t_c(t_b) = G_c^{-1}[G_b(t_b)]$ . Es crucial tener en mente que la métrica efectiva solo se puede escribir de este modo cuando  $t_c$  no se encuentra



en la vecindad del único cero de  $F_{bc}$ , región donde  $G_c$  es invertible y  $t_c$  puede ser expresado en términos de  $t_b$ . Por tanto, es obvio que  $F_{bc}$  no se anula nunca en la región que puede ser cubierta por una métrica efectiva escrita en términos del tiempo radial. El mismo argumento se puede aplicar al caso en el que la métrica se escribe en términos del tiempo angular, en el que el factor potencialmente problemático es una potencia de  $F_{cb}$ .

Nótese que el hecho de que el comportamiento de  $F_{ij}$  sea inocuo permite descartar inmediatamente no solo la primera fuente potencial de obstrucciones mencionada en el párrafo bajo la Ec. (7.64), sino también la tercera (si el numerador no se anula en la región en la que la componente temporal de la métrica se puede escribir de la forma apropiada, naturalmente tampoco se podrá anular a la vez que el denominador). Por lo tanto, la única situación restante que podría no conducir a un buen comportamiento del factor  $1/C_{ij}^2$  es aquella en la que el denominador  $\zeta$  se anula en algún punto de la evolución. Recordemos que el valor de  $\zeta$  se ha asumido distinto de cero durante la deducción de las ecuaciones del movimiento. No obstante, una vez introducidas las redefiniciones temporales y resueltas las ecuaciones dinámicas, las soluciones efectivas están bien definidas incluso si  $\zeta = 0$ . Por consiguiente, podemos emplear un argumento de continuidad y extender nuestro formalismo de forma que abarque el caso en el que esta restricción desaparece para estudiar el comportamiento de  $\zeta$  a lo largo de una trayectoria dinámica dada cualquiera.

Los puntos en los cuales el denominador  $\zeta$  se hace cero vienen determinados por la ecuación

$$\left( \left( -\frac{\partial f_b}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \right) \left( \left( -\frac{\partial f_c}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \left( -\frac{\partial f_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \frac{\partial f_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \right) \right) \quad (7.66)$$

Recuérdese que, tras evaluar los parámetros de polimerización sobre soluciones y asumiendo que son al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\frac{\partial f_i}{\partial O_b} + \frac{\partial f_i}{\partial O_c} = \frac{\partial f_i}{\partial m}. \quad (7.67)$$

Entonces, podemos hacer uso de la libertad off-shell de nuestro formalismo para elegir libremente una de las derivadas que aparecen en el lado izquierdo de la ecuación, tras lo cual la derivada restante queda inmediatamente fijada por el requisito de que la suma de ambas sea igual a la derivada de los parámetros (7.44) con respecto a la masa. Expresando de este modo las derivadas no diagonales  $\partial f_i / \partial O_j$  (con  $i \neq j$ ), es posible reescribir la Ec. (7.66) de la siguiente manera:

$$\left( F_{bc} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \right) \frac{\partial f_b}{\partial O_b} + \left( F_{cb} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \frac{\partial f_c}{\partial O_c} + (F_{bc} + F_{cb} - F_{bc}F_{cb}) = 0, \quad (7.68)$$

donde los objetos entre paréntesis pueden ser entendidos como los coeficientes (en general, dependientes de la masa  $m$  y del espacio de fases) de una ecuación lineal en  $\partial f_b / \partial O_b$  y  $\partial f_c / \partial O_c$ . Por un lado, es inmediato darse cuenta de que  $F_{bc} = F_{cb} = 0$  es una solución trivial a la ecuación anterior. Sin embargo, como discutimos en la Sec. 2.3, las funciones  $F_{bc}$  y  $F_{cb}$  no se anulan simultáneamente en el régimen de interés del

modelo, donde  $m$  es muy grande con respecto a la masa de Planck. Por otro lado, está claro que, siempre y cuando los dos primeros coeficientes no se hagan cero al mismo tiempo, es posible explotar la libertad de nuestro formalismo para seleccionar  $\partial f_i / \partial O_i$  de tal modo que la ecuación anterior no se satisfaga (en otras palabras, de tal modo que  $\zeta \neq 0$ ). En realidad, es sencillo demostrar que los dos primeros coeficientes de la Ec. (7.68) no se pueden anular idénticamente en el mismo punto a lo largo de la evolución o, al menos, no de forma dañina. En primer lugar, las funciones  $F_{ij}$  no se hacen cero de forma simultánea. Por tanto, solo hay dos opciones para que estos coeficientes se anulen: A) que lo haga a la vez uno de los pares  $(F_{ij}, \partial O_j / \partial \delta_j)$ , o B) que lo hagan las dos derivadas  $\partial O_i / \partial \delta_i$ . La primera opción queda inmediatamente descartada porque, si  $\partial O_j / \partial \delta_j$  es cero, entonces  $F_{ij} = 1$  por definición. Si bien la segunda opción puede tener lugar (concretamente, en una vecindad del horizonte negro, donde ambas funciones primitivas exhiben un comportamiento esencialmente lineal), en tal caso ambas funciones  $F_{ij}$  serían iguales a la unidad y la Ec. (7.68) no se verificaría. Efectivamente, en dicha situación, el lado izquierdo de la Ec. (7.68) vendría dado por  $F_{bc} + F_{cb} - F_{bc}F_{cb}$ , que sería igual a uno y, por tanto, no se anularía. Concluimos entonces que basta siempre con seleccionar las derivadas off-shell  $\partial f_i / \partial O_i$  de manera adecuada para que el denominador  $\zeta$  sea distinto de cero a lo largo de cualquier trayectoria dinámica.

Los resultados obtenidos en esta sección aseguran que existe libertad suficiente en el formalismo de dos tiempos discutido para asegurar que, si el factor  $1/C_{ij}^2$  aparece en la componente puramente temporal de la métrica efectiva, dicho factor sea finito y distinto de cero. Esta es una diferencia fundamental con respecto al enfoque sugerido en la Ref. [140] (donde, recordemos, se argumenta que los parámetros de polimerización deberían definirse como funciones de sus hamiltonianos parciales correspondientes), cuyas ideas generaliza la propuesta desarrollada: en dicho trabajo, la ausencia de las derivadas cruzadas de los parámetros de polimerización hace que sea inevitable encontrar singularidades a lo largo de cualquier trayectoria dinámica.

En conclusión, la única obstrucción identificada a la forma presente del formalismo de dos tiempos no afecta a la componente temporal de la métrica, sino que es debida a ciertos impedimentos a la hora de obtener una inversión global de la relación implícita entre los tiempos radial y angular.

### 3 Redefinición del origen del tiempo angular

En la sección anterior, hemos argumentado que es aparentemente imposible extender el formalismo de tal modo que abarque la totalidad de la región interior de forma satisfactoria debido a la diferencia encontrada entre las imágenes de las dos funciones primitivas  $G_b$  y  $G_c$ . No obstante, cabe aún preguntarse si este problema se puede solventar haciendo uso de la libertad existente para fijar los orígenes de las variables temporales de forma independiente. Nótese que la forma en la que se fijan las constantes de integración en la resolución de las ecuaciones dinámicas en las Refs. [137, 138] incorpora el requisito de que las variables radiales  $b$  y  $p_b$  se anulen en  $t_b = 0$ , identificando esta superficie con el horizonte negro. Dado que hemos seguido

sus convenios a la hora de fijar las constantes de integración, también hemos fijado el horizonte negro en  $t_b = 0$ . Sin embargo, merece la pena enfatizar que este argumento no involucra el tiempo angular  $t_c$ . Por consiguiente, no es necesario identificar el horizonte negro también con  $t_c = 0$ , como hemos hecho hasta este momento. En la relatividad general, el carácter lineal de la relación entre los tiempos radial y angular hace que un desplazamiento constante de uno de los tiempos con respecto al otro sea irrelevante y, por simplicidad, dicho desplazamiento se hace igual a cero. En cambio, en el presente formalismo, la relación entre ambos tiempos es altamente no lineal, por lo que la situación es completamente distinta. En esta sección, consideramos la posibilidad de seleccionar un origen del tiempo angular diferente y discutimos si un procedimiento tal puede ayudar a resolver la obstrucción encontrada.

En primer lugar, recordemos que las definiciones de los tiempos radial y angular (7.19) involucran exclusivamente sus diferenciales. Una elección distinta del origen del tiempo angular, que solo conlleva un desplazamiento trivial a nivel de la parte angular de las soluciones dinámicas, resulta tener un impacto interesante en la relación implícita de ambas variables temporales, como hemos anticipado. En efecto, una modificación del origen del tiempo angular implica un cambio en uno de los límites de integración que intervienen en la definición de la función primitiva  $G_c$ . Si consideramos un nuevo origen  $t_c^0$ , la relación  $G_b(t_b) = G_c(t_c)$  se convierte en

$$G_b(t_b) = G_c(t_c) + G_m, \quad (7.69)$$

donde  $G_m = \int_0^{t_c^0} dt'_c F_{bc}(t'_c)$  es la contribución constante del intervalo de tiempos angulares comprendido entre el antiguo origen y el nuevo.

Mostremos a continuación que podemos lograr que  $G_m$  compense la diferencia entre  $G_{c,\max}$  y  $G_{b,\sup}$  y que, de esta manera, quede garantizado que las imágenes de la región interior bajo ambas funciones primitivas coincidan. Nótese que, para poder lograr tal cosa, es necesario elegir una  $G_m$  para cada valor de la masa  $m$ . En el sector de masas grandes, el supremo de  $G_b$  no es sino su valor en su máximo (véase, por ejemplo, la Fig. 7.5). Por tanto, teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, podemos adoptar una redefinición del origen del tiempo angular dependiente de la masa tal que

$$G_c(t_c^{\text{ext}}) + G_m = G_b(t_{b,\text{ext}}^{(1)}). \quad (7.70)$$

En efecto, nuestros resultados numéricos sugieren que esta redefinición se puede llevar a cabo con éxito para todas las masas en el sector de interés. Por un lado, observamos que la diferencia  $G_b(t_{b,\text{ext}}^{(1)}) - G_c(t_c^{\text{ext}})$ , que es positiva para masas grandes, no crece con la masa  $m$ . Por otro lado, extendiendo  $G_c(t_c)$  a valores positivos del tiempo angular y empleando la definición integral de  $G_m$  proporcionada bajo la Ec. (7.69), podemos convencernos de que esta cantidad puede tomar, al menos, todos los valores positivos menores o iguales que  $G_{c,\max}$ . Esto es suficiente para asegurar que los extremos superiores de las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$  se pueden hacer coincidir (véase la Fig. 7.3).

Tras este reajuste, se tiene que la relación implícita entre tiempos se cumple en una vecindad de los máximos ahora coincidentes de las funciones  $G_b$  y  $G_c$ , donde  $F_{bc}$  y  $F_{cb}$  se anulan simultáneamente. Además, no es difícil ver que es posible construir una

expresión local de uno de los tiempos en términos del otro expandiendo las funciones  $G_i$  en torno a sus máximos. En lo referente a la función  $C_{ij}$  que interviene en la componente temporal de la métrica efectiva (a la cual ya no se puede aplicar el argumento empleado en la sección anterior porque ahora  $F_{bc}$  y  $F_{cb}$  se anulan a la vez), tenemos que [véanse las definiciones de  $\Delta_{ij}$  (7.13),  $C_{ij}$  y  $\zeta$  (7.64)]

$$\frac{1}{C_{ij}} = \left(1 - \frac{\partial f_i}{\partial O_i} \frac{\partial O_i}{\partial \delta_i}\right) + \left(\left(1 - \frac{\partial f_j}{\partial O_j} \frac{\partial O_j}{\partial \delta_j}\right) \frac{F_{ji}}{F_{ij}} - F_{ji}\right). \quad (7.71)$$

De los tres términos en el lado derecho de la ecuación anterior, el primero y el tercero tienen límites bien definidos en la superficie donde  $G_b$  y  $G_c$  alcanzan sus máximos locales. Sin embargo, el segundo requiere un estudio más detallado, ya que una evaluación directa conduce a una indeterminación. Dada la forma de esta indeterminación, la única manera en la que  $1/C_{ij}$  podría exhibir un buen comportamiento es que el valor límite del cociente  $F_{ji}/F_{ij}$  sea finito y distinto de cero. Para calcular el límite de  $1/C_{ij}$ , obtengamos primero las expansiones de  $F_{bc}$  y  $F_{cb}$  en torno a los máximos de las funciones primitivas asociadas a cada uno de ellos. En el caso de  $F_{bc}$ , las expresiones relevantes para esta expansión son las siguientes:

$$p_c = \frac{1}{2} \gamma L_o \delta_c m \frac{1 + (x_c^0)^2}{x_c^0} + \gamma L_o \delta_c m \frac{1 - (x_c^0)^2}{x_c^0} (t_c - t_c^{\text{ext}}) + \mathcal{O}[(t_c - t_c^{\text{ext}})^2], \quad (7.72)$$

$$\delta_c c = 2 \arctan x_c^0 - \frac{4x_c^0}{1 + (x_c^0)^2} (t_c - t_c^{\text{ext}}) + \mathcal{O}[(t_c - t_c^{\text{ext}})^2], \quad (7.73)$$

$$\cos \delta_c c = \frac{1 - (x_c^0)^2}{1 + (x_c^0)^2} + \frac{8(x_c^0)^2}{[1 + (x_c^0)^2]^2} (t_c - t_c^{\text{ext}}) + \mathcal{O}[(t_c - t_c^{\text{ext}})^2], \quad (7.74)$$

$$\sin \delta_c c = \frac{2x_c^0}{1 + (x_c^0)^2} - \frac{4[1 - (x_c^0)^2]}{[1 + (x_c^0)^2]^2} (t_c - t_c^{\text{ext}}) + \mathcal{O}[(t_c - t_c^{\text{ext}})^2], \quad (7.75)$$

de tal manera que

$$\delta_c c \cos \delta_c c - \sin \delta_c c = \frac{2x_c^0}{1 + (x_c^0)^2} \left[ \arctan x_c^0 \frac{1 - (x_c^0)^2}{x_c^0} - 1 \right] \left( + 16 \arctan x_c^0 \frac{(x_c^0)^2}{[1 + (x_c^0)^2]^2} (t_c - t_c^{\text{ext}}) + \mathcal{O}[(t_c - t_c^{\text{ext}})^2] \right), \quad (7.76)$$

donde  $\mathcal{O}(\cdot)$  denota términos de un orden igual a o mayor que el de su argumento. Por tanto, recordando que  $x_c^0$  satisface la Ec. (7.45),

$$F_{bc}(t_c) = \left[ \frac{8}{3} \arctan x_c^0 \frac{x_c^0}{1 + (x_c^0)^2} - 2 \frac{1 - (x_c^0)^2}{1 + (x_c^0)^2} \right] (t_c - t_c^{\text{ext}}) + \mathcal{O}[(t_c - t_c^{\text{ext}})^2], \quad (7.77)$$

donde el coeficiente del orden dominante tiene un valor numérico aproximado de 2.4651. Para determinar el valor del límite de  $F_{ji}/F_{ij}$  en los máximos coincidentes, aún hemos de llevar a cabo una expansión similar de  $F_{cb}$  y después comparar los órdenes de los términos dominantes de ambas expansiones. Sin embargo, como viene siendo el caso en el sector radial, dicha expansión no puede hacerse de forma analítica,

ya que carecemos de una expresión cerrada para los ceros de  $F_{cb}$  (i.e., los extremos de  $G_b$ ). Un cálculo numérico realizado en Mathematica corrobora que el orden dominante en una expansión de  $F_{cb}$  en torno al máximo de  $G_b$  (o, en otras palabras, en torno a su cero más cercano al horizonte negro) es lineal en  $t_b - t_{b,\text{ext}}^{(1)}$ . Además, dicho cálculo revela también que, a diferencia de la situación encontrada en el sector angular, el coeficiente de dicha contribución depende de la masa  $m$ . En todo caso, dado que el coeficiente mencionado está relacionado con el valor de la segunda derivada de  $G_b$  en su máximo (en efecto, solo difieren en un signo) y que sabemos que el extremo en cuestión es un cero simple de la primera derivada, este coeficiente no se puede anular en el rango de masas considerado. Como resultado, el factor  $1/C_{ij}^2$  puede ser definido sin problemas (de hecho, tanto para  $i = b$  como para  $i = c$ ) en el punto donde se alcanzan los máximos ahora coincidentes de ambas funciones primitivas.

En vista de los resultados de esta sección, concluimos que una redefinición del origen del tiempo angular es suficiente para solventar la obstrucción que frustraba la extensión del formalismo a la totalidad de la región interior. En efecto, con ayuda de una redefinición dependiente del valor de la masa, hemos logrado hacer coincidir las imágenes de las funciones  $G_b$  y  $G_c$  para valores de la masa suficientemente grandes. Teniendo en cuenta esta coincidencia total de las imágenes de las primitivas, en combinación con las buenas propiedades de las funciones  $F_{ij}$ ,  $G_i$  y  $C_{ij}$ , no encontramos obstrucción alguna de cara a obtener una métrica efectiva bien definida en todos los puntos de la región comprendida entre las fronteras interpretadas como un horizonte negro y un horizonte blanco que aparecen en el modelo. La inversión global de tiempo puede ser construida, e.g., con la ayuda de un total de tres parches, expresando el tiempo angular en términos del tiempo radial en cada una de las regiones abarcadas por cada parche. En primer lugar, es posible escribir una métrica espaciotemporal efectiva bien definida del horizonte negro hasta la superficie de transición. En segundo lugar, otro parche puede cubrir la vecindad de los máximos coincidentes, solapándose con el parche anterior. En último lugar, sería necesario un tercer parche para describir la parte restante de la región interior, es decir, aquella que abarca desde una vecindad de los máximos coincidentes hasta el horizonte blanco.

## 4 Relación temporal en el límite de masas grandes

En esta sección, calculamos la forma de la relación temporal (7.35) en el límite de masas grandes. Este cálculo, junto con los resultados de la Sec. 2, ilustra cómo el límite de masas grandes y el límite de tiempos grandes no conmutan, lo cual pone sobre aviso sobre la necesidad de tratar con cuidado estos límites.

Empecemos notando que una consecuencia inmediata de los comportamientos observados para las funciones primitivas  $G_b$  y  $G_c$  es que los tiempos radial y angular no se pueden asumir iguales en general, ya que estas funciones (que dictan la relación implícita entre ambas variables temporales) difieren enormemente más allá de la superficie de transición (véase la Fig. 7.5). En efecto, solo se pueden lograr tiempos aproximadamente iguales en la región que abarca desde el horizonte negro hasta una vecindad de la superficie de transición, como ya comentamos anteriormente. No

obstante, ambas variables temporales deberían coincidir en el límite de masas grandes si se han de recuperar los resultados de la relatividad general en dicha situación límite, al menos en la región en la que son válidos dichos resultados einsteinianos. Además, dado que el modelo AOS original tiene un buen límite clásico, también cabe esperar una reconciliación parcial de nuestros resultados con los de dicho modelo. Por consiguiente, el estudio del límite de masas grandes de la relación temporal (7.35) que se lleva a cabo a continuación se puede entender, en cierto sentido, como una comprobación de consistencia.

Como se sigue trivialmente de la Ec. (7.35), la diferencia entre el tiempo radial y el tiempo angular (evaluada sobre soluciones) viene dada por

$$t_b - t_c = \frac{\partial f_b}{\partial m} \int_0^{t_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b}(t'_b) dt'_b - \frac{\partial f_c}{\partial m} \int_0^{t_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c}(t'_c) dt'_c. \quad (7.78)$$

Por tanto, para obtener la relación entre tiempos en el límite de masas grandes, basta con emplear la dependencia de los parámetros en la masa dada por la Ec. (7.44) y con llevar a cabo expansiones asintóticas de la derivada de cada uno de los hamiltonianos parciales con respecto a su parámetro de polimerización correspondiente. Puesto que los parámetros de polimerización son asintóticamente (es decir, en el límite de masas tendiendo a infinito) proporcionales a  $m^{-1/3}$ , tenemos que

$$\frac{\partial f_i}{\partial m} = -\frac{1-\delta_i}{3m} + o\left(\frac{\delta_i}{m}\right) \left( \quad (7.79)$$

donde hemos empleado la notación para designar términos subdominantes en el límite de masas grandes introducida bajo la Ec. (7.44). Con esto, solo resta discutir las formas asintóticas de  $\partial O_i/\partial \delta_i$  [véanse las Ecs. (7.36) y (7.37)].

Empecemos discutiendo la función del tiempo angular  $\partial O_c/\partial \delta_c$  (7.37). Haciendo uso de la forma de las soluciones dinámicas (7.20)-(7.23), es sencillo obtener las expansiones asintóticas de las funciones del espacio de fases relevantes. Por un lado, a partir de la Ec. (7.21), es trivial ver que

$$p_c(t_c) = 4e^{2t_c} m^2 + o(m^2) \left( \quad (7.80)$$

El caso de la variable de conexión  $c$  y de sus funciones trigonométricas es menos inmediato. Dado que la solución efectiva involucra la tangente de  $\delta_c c/2$ , hay que reescribir apropiadamente las funciones de la variable de conexión angular que intervienen en  $\partial O_c/\partial \delta_c$  en un paso previo a su expansión asintótica. Aplicando el procedimiento descrito a la función coseno y teniendo en cuenta la Ec. (7.20), alcanzamos el siguiente resultado:

$$\cos \delta_c c(t_c) = \frac{1 - \tan^2[\delta_c c(t_c)/2]}{1 + \tan^2[\delta_c c(t_c)/2]} = 1 - \frac{\gamma^2 L_o^2}{32e^{4t_c}} \frac{\delta_c^2}{m^2} + o\left(\frac{\delta_c^2}{m^2}\right) \left( \quad (7.81)$$

La expansión asintótica del resto de funciones trigonométricas de la variable de conexión se puede obtener fácilmente a partir de la expresión anterior recordando que, de acuerdo con los convenios de la Ref. [137-139],  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $p_b \leq 0$  y  $p_c \geq 0$ . Este

criterio, junto con el hecho de que los parámetros de polimerización son infinitamente pequeños en el régimen considerado, implica que todas las funciones trigonométricas relevantes son no negativas para masas muy grandes. Teniendo presentes todas estas consideraciones, un cálculo sencillo conduce a

$$\frac{\partial O_c}{\partial \delta_c}(t_c) = -\frac{\gamma^2 L_o^2}{48 e^{4t_c}} \frac{\delta_c}{m} + o\left(\frac{\delta_c}{m}\right) \quad (7.82)$$

cuyo término dominante va como  $m^{-4/3}$  [véase la Ec. (7.44)].

Llevemos ahora a cabo un cálculo completamente análogo con la función del tiempo radial  $\partial O_b / \partial \delta_b$  (7.36). Dada la forma de la solución (7.22),

$$\cos \delta_b b(t_b) = \frac{1 + b_o \tanh(b_o t_b / 2)}{1 + b_o^{-1} \tanh(b_o t_b / 2)} = 1 + C_1(t_b) \delta_b^2 + o(\delta_b^2) \quad (7.83)$$

donde  $C_1(t_b)$  se define como

$$C_1(t_b) = \gamma^2 \frac{\tanh(t_b / 2)}{1 + \tanh(t_b / 2)}. \quad (7.84)$$

Reescribiendo cada función de la variable de conexión  $b$  que aparece en la Ec. (7.36) como una expansión asintótica, obtenemos el siguiente comportamiento asintótico:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b(t_b)} \right] & \left( \frac{\delta_b b(t_b) \cos \delta_b b(t_b) - \sin \delta_b b(t_b)}{\delta_b^2} \right) \\ & = -\frac{2}{3} [2C_1(t_b) + \gamma^2] \left( \frac{C_1(t_b)}{\sqrt{2C_1(t_b)}} \delta_b + o(\delta_b) \right). \end{aligned} \quad (7.85)$$

Por último, el valor asintótico de  $p_b$  se puede extraer de la Ec. (7.23) introduciendo las expansiones apropiadas:

$$-\frac{1}{2} \frac{p_b(t_b)}{\gamma L_o} = \frac{\sqrt{-2C_1(t_b)}}{\gamma^2 - 2C_1(t_b)} m + o(m). \quad (7.86)$$

Por lo tanto,  $\partial O_b / \partial \delta_b$  presenta el siguiente comportamiento asintótico:

$$\frac{\partial O_b}{\partial \delta_b}(t_b) = -\frac{2}{3} C_1(t_b) \frac{\gamma^2 + 2C_1(t_b)}{\gamma^2 - 2C_1(t_b)} \delta_b m + o(\delta_b m), \quad (7.87)$$

cuyo término dominante va como  $m^{2/3}$ , dada la dependencia de  $\delta_b$  en el parámetro de masa (7.44).

Insertando los comportamientos asintóticos obtenidos en la expresión que dicta la diferencia entre el tiempo radial y el tiempo angular (7.78), llegamos a

$$\begin{aligned} t_b - t_c &= \frac{\partial f_b}{\partial m} \int_0^{t_b} dt'_b \left[ \left( \frac{2}{3} C_1(t'_b) \frac{\gamma^2 + 2C_1(t'_b)}{\gamma^2 - 2C_1(t'_b)} \delta_b m + o(\delta_b m) \right) \right] \left( \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial f_c}{\partial m} \int_0^{t_c} dt'_c \left[ \left( \frac{\gamma^2 L_o^2}{48 e^{4t'_c}} \frac{\delta_c}{m} + o\left(\frac{\delta_c}{m}\right) \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (7.88)$$

Dado que el término dominante de la integral angular, que va como  $\delta_c/m \sim m^{-4/3}$ , es subdominante con respecto al de la integral radial, que va como  $\delta_b m \sim m^{2/3}$ , concluimos que solo el sector radial contribuye a la relación temporal a primer orden en una expansión asintótica:

$$t_b - t_c = -\frac{2}{3}\gamma^2 \frac{\partial f_b}{\partial m} \left[ \int_0^{t_b} \frac{\tanh(t'_b/2)[1+3\tanh(t'_b/2)]}{1-\tanh^2(t'_b/2)} dt'_b \right] \left( \delta_b m + o(\delta_b^2) \right) \quad (7.89)$$

de tal modo que

$$t_c = t_b - \frac{1}{9}\gamma^2 (-3t_b + 3\sinh t_b + \cosh t_b - 1)\delta_b^2 + o(\delta_b^2) \quad (7.90)$$

Esta expresión proporciona la relación entre los tiempos radial y angular a primer orden en una expansión asintótica en el límite de masas grandes en la región entorno al horizonte negro donde dicho límite se espera que sea válido. Nótese que, cuando  $m$  se hace infinito (y, por tanto,  $\delta_i$  se anula), esta relación se reduce a una de igualdad:  $t_b = t_c$ . Notablemente, la primera corrección que aparece para masas grandes pero finitas es proporcional a  $\delta_b^2$  y se anula en el límite en el que  $t_b \rightarrow 0$  o, en otras palabras, en el horizonte negro. Esta propiedad claramente tiene relación con las expectativas de que el límite estudiado sea aplicable en una región que contiene ese horizonte, así como con el comentario más general que hicimos al principio de esta sección referente a los comportamientos similares de  $G_b$  y  $G_c$  en una vecindad del mismo.

Ahondando en este punto y para concluir esta sección, conviene explicar brevemente cómo encaja este resultado con la discusión general sobre la relación temporal llevada a cabo en las secciones anteriores. El hecho de que las funciones primitivas  $G_i$  presenten comportamientos completamente distintos más allá de la superficie de transición pone de manifiesto que la relación (7.90) para masas muy grandes pero finitas solo es válida para valores de las variables temporales cercanos al horizonte negro y en ningún caso para valores que correspondan a la región que se encuentra más allá de la superficie de transición. En esta última región, correspondiente a valores “grandes” del valor absoluto de las variables temporales, los tiempos radial y angular son muy diferentes para cualquier valor finito de la masa. Por consiguiente, si tomásemos el límite de tiempos grandes y, después, el de masas grandes, el resultado que alcanzaríamos sería completamente distinto al encontrado en la situación inversa: los dos límites no conmutan en general y deben ser tratados con cuidado. En efecto, como resultado de tomar el límite en el que la masa del agujero se hace infinita, el instante de tiempo correspondiente a la superficie de transición tiende a menos infinito, recuperándose la singularidad central clásica. Como consecuencia, dado que la región donde  $G_b$  y  $G_c$  tienen comportamientos que impiden la coincidencia aproximada de ambas variables temporales es aquella situada más allá de la superficie de transición en el modelo efectivo, dicha región desaparece por completo en el límite clásico  $m \rightarrow \infty$  y  $t_b = t_c$  para todo valor de los tiempos comprendidos en el intervalo  $(-\infty, 0)$ . Esto es consistente con el hecho de que se espera recuperar la dinámica relativista en el límite de masas grandes (que se corresponde con el límite clásico en el sentido de que los parámetros de polimerización, tal y como se han elegido,



se anulan en dicho límite). Adicionalmente, también se logra una reconciliación parcial con el modelo AOS original [137–139], ya que las soluciones dinámicas en este límite son idénticas en forma y, además, están escritas en una única variable temporal  $t = t_b \approx t_c$ . Cabe enfatizar, no obstante, que hablamos de una reconciliación *parcial*. Esto es debido a que, si bien se alcanza un formalismo de un solo tiempo con una dinámica idéntica, la variable temporal proporcionada por el límite coincidente de los tiempos radial y angular no coincide en general con la considerada en las Refs. [137–139], lo cual conduce a una geometría modificada con respecto a la del modelo AOS incluso en el límite de masas grandes. Este hecho deja una puerta abierta a la posibilidad de aliviar (quizá solo parcialmente) algunos de los problemas de los que adolece el modelo (véanse, por ejemplo, las Refs. [141, 142, 144]), reteniendo a su vez sus propiedades atractivas, en particular en lo que concierne a la resolución de la singularidad central clásica.

## 5 Conclusión

En este capítulo, hemos examinado la posibilidad de construir un formalismo hamiltoniano donde los parámetros de polimerización que regulan la introducción de efectos cuánticos en espaciotiempos de agujero negro sean tratados desde el principio como constantes del movimiento. La identificación de dichos parámetros con cantidades constantes a lo largo de las trayectorias dinámicas es una de las ideas centrales del modelo AOS [137, 138]. No obstante, la forma en la que se tratan los parámetros en estos trabajos no incorpora su naturaleza no trivial desde el principio: son tratados como meros números constantes en el cálculo de las ecuaciones dinámicas (más concretamente, ignorando sus corchetes de Poisson con las variables canónicas) y, solo posteriormente, se fijan de tal manera que coincidan con ciertas funciones de la masa del agujero negro, que no es sino el valor sobre soluciones de las dos constantes del movimiento proporcionadas de forma natural por el formalismo. Siguiendo y extendiendo las ideas de la Ref. [140], nosotros hemos propuesto definir los parámetros de polimerización como funciones de las dos constantes del movimiento que nos proporciona el modelo (que, sobre soluciones, tienen un valor constante común igual a la masa del agujero), requiriendo también que su valor on-shell coincida con los parámetros considerados en el modelo AOS original. La diferencia fundamental con respecto a la propuesta de la Ref. [140] es que, en dicho trabajo, se fija cada parámetro como una función de solo una de esas constantes, lo cual resulta en el desacoplamiento de los sectores radial y angular del espacio de fases. Sin embargo, dado que ambas constantes del movimiento tienen un valor coincidente cuando se evalúan sobre soluciones a la dinámica, hemos argumentado que sus contribuciones sobre la superficie de ligadura no deberían ser distinguibles y que, por tanto, la definición más general debería contemplar la posibilidad de que cada uno de estos parámetros dependa de ambas constantes del movimiento, rompiendo el desacoplamiento de los dos sectores del espacio de fases que había estado presente en la literatura hasta el momento.

En la Sec. 1, hemos deducido las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la región

interior teniendo en cuenta la naturaleza de los parámetros de polimerización como funciones del espacio de fases. Las ecuaciones resultantes son más complejas que las obtenidas en las Refs. [137, 138] y, de hecho, difieren de ellas en la presencia de dos factores dependientes del espacio de fases. Estos factores resultan poder ser reabsorbidos mediante dos redefiniciones de la variable temporal, una en el sector radial del espacio de fases y otra en el sector angular, lo que conduce formalmente a ecuaciones dinámicas idénticas a las de la Ref. [137, 138] pero escritas en dos tiempos distintos: los llamados tiempo radial y tiempo angular.

En la Sec. 2, hemos investigado si existen obstrucciones a la extensión de este formalismo alternativo de dos tiempos a la totalidad de la región interior (comprendida entre un horizonte negro y un horizonte blanco que se encuentra más allá de la superficie de transición regular que reemplaza la singularidad central en la teoría efectiva), en el sentido de que no se pueda obtener una métrica espaciotemporal efectiva que esté bien definida en todos y cada uno de los puntos de dicha región. Enfatizamos una vez más que este análisis de viabilidad es fundamental de cara a asentar sobre una base sólida cualquier estudio posterior de las propiedades físicas que se derivan del modelo. El objetivo principal de esta sección es el estudio de la relación implícita que vincula los tiempos radial y angular. Esta relación temporal es una pieza fundamental a la hora de construir una geometría efectiva bien definida, que debe ser reexpresable en función de una única variable temporal en cada punto de la región considerada. Para que esto sea posible, ciertas funciones  $F_{ij}$  han de ser integrables y al menos una de las funciones primitivas asociadas  $G_i$  ha de ser invertible en torno a cada punto de la región interior. Esta invertibilidad local es una condición necesaria pero no suficiente para pasar de un formalismo de dos tiempos a uno en términos de una única variable temporal en cada parche empleado para describir la geometría interior efectiva. Para que dicha reformulación en términos de un solo tiempo sea posible tiene que darse el requisito adicional de que las imágenes de las funciones  $G_i$  coincidan. El análisis de las propiedades de integrabilidad de  $F_{ij}$  y de invertibilidad local de  $G_i$  se ha llevado a cabo en la Sec. 2.1. Por un lado, puesto que las funciones  $F_{ij}$  son funciones elementales y la totalidad de la región interior pertenece a sus dominios, hemos determinado que son integrables y que, por tanto, está garantizada la existencia de las primitivas  $G_i$ . Por otro lado, estas funciones primitivas son invertibles en torno a todos los puntos de sus dominios a excepción de sus extremos respectivos: un único máximo en el caso de la primitiva angular  $G_c$  y un máximo y un mínimo en el caso de su contrapartida radial  $G_b$ . Para agujeros negros suficientemente masivos y tomando los orígenes de ambos tiempos de tal modo que coincidan con el horizonte negro del modelo, hemos mostrado que dichos extremos locales no coinciden, por lo que no hay situaciones en las que no dispongamos de al menos una función primitiva localmente invertible en cada punto de la región considerada. En la Sec. 2.2, hemos investigado las imágenes de la región interior bajo las funciones  $G_i$  y hemos concluido que existe una discrepancia entre ellas localizada en sus extremos superiores. Este hecho implica que existe una subregión que contiene los alrededores del máximo de  $G_b$  en la que no se puede establecer una equivalencia entre los tiempos radial y angular, impidiendo que nuestro formalismo abarque satisfactoriamente todo el interior. Por completitud, hemos estudiado en la Sec. 2.3 el comportamiento de los factores  $1/C_{ij}^2$

que intervienen en la componente temporal de la métrica, comprobando que no son una fuente adicional de obstrucciones: la libertad off-shell adicional por la que se caracteriza el formalismo posibilita que dichos factores sean finitos y distintos de cero a lo largo de toda la evolución.

Habiendo concluido este análisis, en la Sec. 3 hemos explorado la posibilidad de redefinir el origen del tiempo angular del sistema, discutiendo si un cambio tal tiene un impacto en las conclusiones de la sección anterior. Una redefinición de uno de los orígenes de las variables temporales conduce a una modificación de la relación temporal consistente en la aparición de una nueva contribución constante en la igualdad entre las funciones  $G_b$  y  $G_c$ . Hemos argumentado que es posible llevar a cabo una redefinición del origen del tiempo angular (que ha de ser dependiente de la masa del agujero) de tal modo que se hagan coincidir los extremos superiores de las imágenes de  $G_b$  y  $G_c$ . Así, la libertad de fijar independientemente los orígenes de cada uno de los tiempos resulta ser suficiente para solventar la única obstrucción identificada a la aplicación de nuestro formalismo en la totalidad de la región interior. Por tanto, no vemos impedimento alguno para obtener una métrica efectiva bien definida en toda la región de interés.

En último lugar, en la Sec. 4 hemos llevado a cabo un estudio de la relación temporal en el límite en el que la masa del agujero tiende a infinito, con el objetivo de comprobar si el modelo es consistente, en el sentido de que se recupere un comportamiento relativista en el que ambas variables temporales sean aproximadamente iguales. Hemos notado que, dadas las enormes diferencias entre las funciones primitivas más allá de la superficie de transición, solo es posible lograr dicha igualdad aproximada en la región que abarca desde el horizonte negro hasta una vecindad de la superficie de transición (donde los efectos cuánticos aún no son relevantes), hecho que pone de manifiesto la no conmutatividad de los límites de masas grandes y de tiempos grandes.

En conclusión, nuestra propuesta para la definición de los parámetros de polimerización parece conducir a una descripción efectiva viable de la región interior de agujeros negros sin rotación ni carga. En efecto, hemos mostrado que la totalidad de dicha región se puede cubrir con tres parches en los que es posible escribir una métrica espaciotemporal bien definida en términos de una única variable temporal. La libertad adicional que resulta de considerar una elección más general de parámetros es suficiente para garantizar que no se encuentran singularidades a lo largo de las trayectorias dinámicas, a diferencia de la situación alcanzada con otros modelos de dos tiempos previos [140]. Adicionalmente, hemos mostrado que es posible una reconciliación parcial con los resultados del modelo AOS en la región comprendida entre el horizonte negro y una vecindad de la superficie de transición, donde los tiempos radial y angular son aproximadamente iguales. La denominación “parcial” es clave, ya que nuestro modelo conduce a una geometría modificada con respecto a la de los trabajos originales incluso en el límite de masas grandes. Este hecho sugiere que quizá sea posible retener las buenas propiedades de dicho modelo, logrando a su vez aliviar algunos de los problemas de los que adolece [141, 144].

Para finalizar, recalquemos que nuestra motivación principal para la propuesta del modelo alternativo de dos tiempos considerado en este capítulo es compaginar

los resultados del modelo AOS original con un tratamiento hamiltoniano consistente de los parámetros de polimerización como constantes del movimiento genuinas que se pueda cuantizar más adelante. En este sentido, cabe mencionar que hay otras opciones disponibles. Por ejemplo, podríamos preguntarnos si es posible encontrar un camino alternativo a un formalismo hamiltoniano consistente que conduzca *exactamente* a las ecuaciones dinámicas consideradas en los trabajos originales [137, 138], para las cuales la geometría interior está bien definida y exhibe un número de propiedades atractivas. Desde este punto de vista, podría resultar esclarecedor examinar en detalle la extensión del espacio de fases sugerida por los autores de la Ref. [138] y determinar si una reducción apropiada puede conducir, por un lado, a la dinámica deseada y, por otro lado, a parámetros que sean manifiestamente constantes del movimiento.

## Capítulo 8

# Estudio del espacio de soluciones del modelo original

Una vez explorada la alternativa de construir un formalismo de dos tiempos para la descripción efectiva de la región interior de un agujero negro de Schwarzschild, centremos ahora nuestra atención en el modelo original tal y como fue presentado en las Refs. [137–139]. Dado el gran interés que ha suscitado en los últimos años y a pesar de los puntos debatibles que hemos mencionado [141–144], sería deseable poder construir una versión cuántica siguiendo las ideas de la LQC. Es bien sabido que la cuantización de un sistema está relacionada estrechamente con la caracterización de su espacio de soluciones. En el caso que nos ocupa, requerimos un entendimiento de la totalidad del espacio de soluciones del modelo AOS como paso previo a su cuantización. En los trabajos originales [137, 138], las constantes de integración que aparecen en la resolución de las ecuaciones del movimiento se fijaron de una forma muy concreta, atendiendo a que las soluciones efectivas tuviesen un límite clásico correcto. Dicha fijación restringe el análisis subsecuente a un subespacio del espacio de soluciones del modelo. En realidad, una inspección cuidadosa del argumento empleado para seleccionar las constantes de integración revela que la elección considerada es más restrictiva de lo necesario: el requisito de un límite clásico apropiado fija, a lo sumo, la parte dominante de las constantes de integración en el límite asintótico correspondiente. Este hecho abre enormemente el abanico de elecciones posibles compatibles con un límite razonable de las soluciones dinámicas cuando los parámetros de polimerización se anulan. Esto es interesante no solo desde la perspectiva de explorar el espacio completo de soluciones admisibles a las ecuaciones dinámicas del modelo AOS, sino también porque es posible que las desviaciones con respecto a los valores considerados anteriormente dejen una huella, e.g., en las propiedades termodinámicas del agujero negro. Por consiguiente, la motivación para discutir una elección general de constantes de integración es doble. Por un lado, permite analizar la totalidad del espacio de soluciones del modelo, lo cual es importante para llevar a cabo su cuantización en un paso posterior. Por otro lado, permite aclarar cuál es el papel físico desempeñado por las constantes de integración y cuál es su influencia, por ejemplo, sobre las propiedades termodinámicas de la solución y las distintas nociones de masa asociadas al espaciotiempo estudiado. En

este capítulo recogemos los resultados de esta investigación, que fueron publicados originalmente en la Ref. [196].

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sec. 1, escribimos las ecuaciones dinámicas y las resolvemos explícitamente con una elección general de las constantes de integración tanto en la región interior como en la región exterior (véanse las Secs. 1.1 y 1.2, respectivamente), mostrando que es posible establecer una unión aceptable entre ambas soluciones efectivas. Una vez obtenida esta solución global general, estudiamos sus propiedades termodinámicas en la Sec. 2, centrándonos especialmente en el cómputo de la temperatura de Hawking y en la discusión de la relación entre el radio de Schwarzschild y la masa hamiltoniana. En la Sec. 3, hacemos un comentario acerca del comportamiento de la solución general en el infinito espacial e investigamos la relación entre la masa hamiltoniana y otras nociones de masa asociadas al espaciotiempo considerado. Finalmente, resumimos los resultados principales del capítulo en la Sec. 4.

## 1 Soluciones generales a las ecuaciones dinámicas

Empecemos deduciendo las soluciones generales a las ecuaciones del movimiento obtenidas en las Refs. [137, 138]. En primer lugar, en la Sec. 1.1, integramos las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la región interior. En segundo lugar, en la Sec. 1.2, abordamos el caso de la región exterior y estudiamos el empalme de ambas soluciones en los horizontes del modelo.

### 1.1 Solución interior

Consideremos, como en el capítulo anterior, la región interior de un agujero negro sin rotación ni carga. En el modelo AOS [137, 138], la dinámica de las variables canónicas viene dictada por las siguientes ecuaciones:

$$c' = -2 \frac{\sin \delta_c c}{\delta_c}, \quad (8.1)$$

$$p'_c = 2p_c \cos \delta_c c, \quad (8.2)$$

$$b' = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sin \delta_b b}{\delta_b} + \frac{\gamma^2 \delta_b}{\sin \delta_b b} \right) \left( \quad (8.3)$$

$$p'_b = \frac{1}{2} p_b \cos \delta_b b \left( 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b} \right) \left( \quad (8.4)$$

donde, e.g.,  $c'$  denota aquí la derivada de la variable de conexión angular con respecto al tiempo coordinado  $t$ . Originalmente, estas ecuaciones fueron motivadas a partir de un hamiltoniano efectivo que constriñe las variables canónicas como resultado de la simetría bajo reparametrizaciones temporales heredada de la relatividad general. Con la elección de la función lapso de la Ec. (7.3), el producto de dicho lapso y la ligadura hamiltoniana efectiva  $H_{\text{eff}}$  viene dado, como ya hemos visto en varias ocasiones, por  $NH_{\text{eff}} = L_o(O_b - O_c)/G$ . Las expresiones de los hamiltonianos parciales radial  $O_b$

y angular  $O_c$  se pueden encontrar en las Ecs. (7.5) y (7.6), respectivamente. No obstante, en lo que sigue, no nos preocupamos por el modo en el que se hayan obtenido las ecuaciones (8.1)-(8.4) y nos centramos exclusivamente en la investigación de su espacio de soluciones.

Las ecuaciones dinámicas (8.1)-(8.4) se pueden integrar de forma sencilla siguiendo el mismo procedimiento que en la Ref. [138]. Empezando por las ecuaciones asociadas al sector angular, es fácil ver que las soluciones efectivas resultantes de la integración de las Ecs. (8.1) y (8.2) son

$$\tan \frac{\delta_c c(t)}{2} = C_1 e^{-2t} = \text{sgn}(C_1) x_c(t), \quad p_c(t) = \frac{1}{2} \bar{p}_c^0 \left[ x_c(t) + \frac{1}{x_c(t)} \right] \quad (8.5)$$

donde  $C_1$  y  $\bar{p}_c^0$  son constantes de integración reales distintas de cero y  $x_c(t) = |C_1| e^{-2t}$  es estrictamente positivo por definición. De manera similar, la solución a la ecuación dinámica correspondiente a la variable  $b$  (8.3) viene dada por

$$\cos \delta_b b(t) = b_o \tanh \left( \frac{1}{2} b_o t + C_2 \right) \quad (8.6)$$

donde, recordemos,  $b_o = \sqrt{1 + \gamma^2 \delta_b^2}$  y  $C_2$  es otra constante de integración real. Por último, para obtener  $p_b(t)$ , no es necesario integrar la Ec. (8.4), sino que basta con imponer que la ligadura escalar efectiva ha de anularse sobre soluciones. Empleando las otras tres soluciones efectivas recién obtenidas, es fácil ver que la imposición de la ligadura conduce a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} p_b(t) &= -2 \frac{\delta_b}{\delta_c} \frac{\sin \delta_b b(t)}{\gamma^2 \delta_b^2 + \sin^2 \delta_b b(t)} p_c(t) \sin \delta_c c(t) \\ &= -\frac{2\gamma L_o \delta_b m}{b_o^2} \frac{\sqrt{1 - b_o^2 \tanh^2 \left( \frac{1}{2} b_o t + C_2 \right)}}{1 - \tanh^2 \left( \frac{1}{2} b_o t + C_2 \right)} \text{sgn}[\sin \delta_b b(t)], \end{aligned} \quad (8.7)$$

donde  $m = \text{sgn}(C_1) \bar{p}_c^0 / (\gamma L_o \delta_c)$  es el valor coincidente (real y distinto de cero) de  $O_b$  y  $O_c$  sobre soluciones. El valor absoluto de esta constante del movimiento es proporcional a la masa ADM del agujero negro en el modelo AOS (véase la Ref. [139]). En lo que sigue, la denominaremos *masa hamiltoniana* para distinguirla de otras nociones de masa cuya relación con la masa hamiltoniana exploraremos en la Sec. 3.

Como conclusión, la solución interior queda determinada por tres constantes de integración reales<sup>40</sup> ( $C_1$ ,  $C_2$  y  $\bar{p}_c^0$ ) y dos parámetros de polimerización positivos ( $\delta_b$  y  $\delta_c$ ) que han de presentar un cierto comportamiento para masas grandes dictado por una serie de condiciones de área mínima (véase la discusión detallada en la Ref. [138]). Ya hemos visto que la constante  $\bar{p}_c^0$  está relacionada con la masa hamiltoniana,

<sup>40</sup>Recordemos que, adicionalmente,  $C_1$  y  $\bar{p}_c^0$  han de ser distintas de cero.

$\bar{p}_c^0 = \text{sgn}(C_1)\gamma L_o \delta_c m$ . Comentemos brevemente cuál es la interpretación física de las dos constantes de integración restantes,  $C_1$  y  $C_2$ .

En términos de las variables de conexión y de tríada, la métrica espaciotemporal efectiva adopta la forma

$$ds_{\text{int}}^2 = -\frac{\gamma^2 \delta_b^2 |p_c|}{\sin^2 \delta_b b} dt^2 + \frac{p_b^2}{L_o^2 |p_c|} dx^2 + |p_c| d\Omega^2, \quad (8.8)$$

donde hemos sustituido explícitamente la elección de función lapso considerada (7.3). En vista de esta expresión, es sencillo convencerse de que los instantes en los que  $p_b$  se anula —o  $\cos^2 \delta_b b = 1$ , de acuerdo con la Ec. (8.7)— se corresponden con horizontes de Killing asociados al campo vectorial de Killing  $\partial_x$ , más allá de los cuales las variables radiales pasan a ser imaginarias [137, 138]. En trabajos previos, la sección correspondiente a  $\cos \delta_b b = 1$  se ha relacionado con un horizonte negro, mientras que la que corresponde a  $\cos \delta_b b = -1$  se ha interpretado como un horizonte blanco<sup>41</sup>. Con una elección general de constantes como la considerada en este capítulo, dichos horizontes se encuentran situados en

$$t^{\text{BH}} = \frac{2}{b_o} (\text{arctanh } b_o^{-1} - C_2) \quad (8.9)$$

$$t^{\text{WH}} = -\frac{2}{b_o} (\text{arctanh } b_o^{-1} + C_2) \quad \left( t^{\text{BH}} - \frac{4}{b_o} \text{arctanh } b_o^{-1} \right). \quad (8.10)$$

Por lo tanto, la fijación de la constante de integración  $C_2$  determina la posición de ambos horizontes. Como consecuencia, podemos expresar la constante  $C_2$ , e.g., en términos del tiempo coordinado correspondiente al horizonte negro:

$$C_2 = \text{arctanh } b_o^{-1} - \frac{1}{2} b_o t^{\text{BH}}. \quad (8.11)$$

En lo que se refiere a la constante de integración  $C_1$ , empecemos mencionando que la variable de tríada angular  $p_c$  (cuya primera derivada temporal es proporcional a las expansiones de ciertos campos vectoriales nulos normales a las 2-esferas métricas caracterizadas por valores constantes de  $x$  y  $t$ ) desempeña un papel fundamental en el estudio de la estructura causal de la geometría interior efectiva [137, 138]. A lo largo de cualquier trayectoria dinámica,  $p_c$  se anula solo una vez en un instante que se corresponde a un mínimo local de la variable de tríada angular. Como ya hemos comentado, se ha argumentado que dicho instante se corresponde con una hipersuperficie que es el análogo efectivo regular de la singularidad central clásica y que separa una región atrapada de una anti-atrapada. Recordemos que esta hipersuperficie  $\mathcal{T}$  se ha venido denominando habitualmente como la *superficie de transición*. Un cálculo trivial muestra que se localiza en

$$t^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \ln |C_1|. \quad (8.12)$$

<sup>41</sup>La interpretación que se le asigna a cada sección es una cuestión de convenio. Sin pérdida de generalidad, seguimos el de las Refs. [137, 138], por el que se asigna valores del tiempo coordinado menores que el del horizonte negro a la región interior. Para más detalles al respecto, véase la discusión acerca de la unión de las soluciones interior y exterior en la Sec. 1.2.



Por tanto,  $C_1$  (o, más bien, su valor absoluto) se puede entender como la constante de integración cuyo valor dicta dónde se sitúa la superficie de transición. Antes de seguir adelante, notemos que es posible tomar el origen del tiempo coordinado de tal manera que coincida, por ejemplo, con el horizonte negro o con la superficie de transición. En dicho proceso, quedaría fijada, o bien la constante  $C_2$ , o bien la constante  $C_1$ , pero en ningún caso ambas.

Para concluir esta subsección, comentemos brevemente para qué valor de las constantes de integración se recupera el modelo AOS tal y como fue presentado en las Refs. [137, 138]. En dichos trabajos, las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se seleccionaron de una forma muy concreta. Por un lado, el horizonte negro fue identificado con la hipersuperficie  $t = 0$ , lo cual fija  $C_2^{\text{AOS}} = \text{arctanh } b_o^{-1}$ . Por otro lado, a la constante de integración restante se le asignó el valor  $C_1^{\text{AOS}} = \gamma L_o \delta_c / (8|m|)$ , que reproduce la relación clásica entre el área del horizonte y la masa hamiltoniana cuando  $|m| \gg L_o \delta_c$ . Como comentaremos en más detalle en la siguiente sección, esta restricción en el valor considerado de la constante  $C_1$  parece excesivo, dado que el requisito de un cierto límite clásico debería, a lo sumo, fijar la contribución dominante de la constante de integración cuando los parámetros de polimerización tienden a cero. Llegados a este punto, cabe notar que la elección de constantes de integración de las Refs. [137, 138] es tal que se verifica la relación  $8|\tilde{p}_c^0| C_1^{\text{AOS}} = (\gamma L_o \delta_c)^2$ . Por consiguiente, toda fijación de las constantes de integración que no satisfaga esta relación queda más allá del alcance de las investigaciones previas, por lo que queda abierta la pregunta de si existen comportamientos de la geometría efectiva que aún no hayan sido explorados.

## 1.2 Solución exterior y unión en los horizontes

Como hemos comentado en la sección anterior, existen dos instantes de tiempo a lo largo de cualquier trayectoria dinámica en la región interior en los que la variable  $p_b$  se anula y más allá de los cuales las variables radiales se vuelven imaginarias, cuyas contrapartidas espaciotemporales han sido interpretadas como horizontes que hacen las veces de fronteras de la región interior. Su existencia sugiere la pregunta de si el formalismo puede ser extendido más allá de los horizontes. Esta extensión fue ya discutida en las Refs. [137, 138], donde se propuso un enfoque basado en la foliación de la región exterior mediante hipersuperficies *temporales* homogéneas, logrando una descripción efectiva de dicha región basada también en un espacio de fases de dimensión finita. No obstante, como resultado del carácter temporal de las secciones con las que se exfolia la región exterior, la ligadura hamiltoniana efectiva que vincula a las variables canónicas definidas en el exterior (que denominaremos  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{p}_b$  y  $\tilde{p}_c$ ) genera una evolución *en la dirección radial* en lugar de una evolución temporal usual [138]. En la práctica, la contrapartida exterior de las ecuaciones dinámicas (8.1)–(8.4) resulta poder obtenerse directamente llevando a cabo los siguientes reemplazos:  $b \rightarrow \tilde{b}$ ,  $c \rightarrow \tilde{c}$ ,  $p_b \rightarrow \tilde{p}_b$  y  $p_c \rightarrow \tilde{p}_c$ . Para más detalles acerca de la extensión del formalismo a la región exterior, consúltese la Ref. [138].

Las soluciones a la dinámica de la región exterior pueden hallarse siguiendo un procedimiento completamente análogo al presentado en la sección anterior, que con-

duce a<sup>42</sup>

$$\tan\left[\frac{\tilde{\delta}_c \tilde{c}(t)}{2}\right] \left( -\tilde{C}_1 e^{-2t} = \text{sgn}(\tilde{C}_1) \tilde{x}_c(t), \right. \quad (8.13)$$

$$\tilde{p}_c(t) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\tilde{C}_1) \gamma L_o \tilde{\delta}_c \tilde{m} \left[ \tilde{x}_c(t) + \frac{1}{\tilde{x}_c(t)} \right] \left( \right. \quad (8.14)$$

$$\cosh\left[\tilde{\delta}_b \tilde{b}(t)\right] \left( -\tilde{b}_o \tanh\left(\frac{1}{2} \tilde{b}_o t + \tilde{C}_2\right), \right. \quad (8.15)$$

$$\tilde{p}_b(\tilde{t}) = -2 \frac{\tilde{\delta}_b}{\tilde{\delta}_c} \frac{\sinh\left[\tilde{\delta}_b \tilde{b}(t)\right]}{\gamma^2 \tilde{\delta}_b^2 - \sinh^2\left[\tilde{\delta}_b \tilde{b}(t)\right]} \left( \tilde{p}_c(t) \sin\left[\tilde{\delta}_c \tilde{c}(t)\right], \right. \quad (8.16)$$

donde  $\tilde{C}_1$ ,  $\tilde{C}_2$  y  $\tilde{m}$  son constantes de integración reales (siendo  $\tilde{C}_1$  y  $\tilde{m}$  distintas de cero) y  $\tilde{x}_c(t) = |\tilde{C}_1| e^{-2t}$ . Asimismo,  $\tilde{\delta}_b$  y  $\tilde{\delta}_c$  son dos parámetros de polimerización que podrían diferir de sus contrapartidas interiores y  $\tilde{b}_o = \sqrt{1 + \gamma^2 \tilde{\delta}_b^2}$ .

A priori, las soluciones interior y exterior son independientes. No obstante, para asignarles una interpretación física y construir una geometría espaciotemporal efectiva suave a partir de ellas, se lleva a cabo el siguiente procedimiento. Considérense los dos valores  $t^{\text{BH}}$  y  $\tilde{t}^{\text{BH}}$  tales que  $p_b(t^{\text{BH}}) = 0 = \tilde{p}_b(\tilde{t}^{\text{BH}})$ . Igualándolos entre sí (lo cual, en particular, implica que  $\tilde{C}_2 = \text{arctanh} \tilde{b}_o^{-1} - \frac{1}{2} \tilde{b}_o t^{\text{BH}}$ ), es posible empalmar las soluciones interior y exterior en la hipersuperficie  $t = t^{\text{BH}}$ . Dicha hipersuperficie separaría entonces la región interior, correspondiente a tiempos  $t^{\text{WH}} < t < t^{\text{BH}}$ , del exterior del agujero, correspondiente a  $t > t^{\text{BH}}$ .

Comentemos a continuación las características principales de la geometría resultante del empalme propuesto en el horizonte negro. Para ello, consideremos el siguiente cambio de variables para eliminar la singularidad aparente que resulta de nuestro uso de coordenadas de Schwarzschild. Concentrémonos, por ejemplo, en la métrica exterior, que admite una expresión de la forma  $ds_{\text{ext},2}^2 = -\tilde{f}_1(t) dx^2 + \tilde{f}_2(t) dt^2$ , con

$$\tilde{f}_1 = \frac{\tilde{p}_b^2}{L_o^2 |\tilde{p}_c|}, \quad \tilde{f}_2 = \frac{\gamma^2 \tilde{\delta}_b^2 |\tilde{p}_c|}{\sinh^2(\tilde{\delta}_b \tilde{b})}. \quad (8.17)$$

Nótese que hemos omitido la parte angular de la métrica por simplicidad, ya que no es relevante para el estudio de la geometría cercana al horizonte. Introduciendo la coordenada entrante de Eddington-Finkelstein  $v$ , se puede reescribir la métrica exterior como  $ds_{\text{ext},2}^2 = -\tilde{f}_1 dv^2 + 2(\tilde{f}_1 \tilde{f}_2)^{1/2} dv dt$ . A pesar de que  $\tilde{f}_1$  se anule en el horizonte, la métrica está bien definida en dicha frontera siempre y cuando su determinante sea distinto de cero, lo cual equivale a requerir que el producto  $\tilde{f}_1 \tilde{f}_2$  sea estrictamente positivo en una vecindad del horizonte negro. Es fácil comprobar

<sup>42</sup>Si bien las regiones interior y exterior se describen en general en términos de cartas coordenadas distintas, no introducimos una notación nueva para las coordenadas espaciotemporales en la región exterior por simplicidad. El contexto debería ser suficiente para disipar cualquier duda acerca de a qué carta nos referimos en cada momento.

que  $\tilde{f}_1 \tilde{f}_2$  adopta el valor  $4\tilde{m}^2$  en el horizonte, por lo que la métrica no es degenerada, siempre y cuando  $\tilde{m} \neq 0$  (lo cual ocurre por definición). Además, las constantes de integración asociadas a las soluciones efectivas en la región exterior se pueden seleccionar de tal modo que las componentes métricas sean al menos de clase  $\mathcal{C}^2$ . Esto se puede ver mediante un cálculo directo, que resulta en las siguientes primeras y segundas derivadas con respecto al tiempo coordinado:

$$\tilde{f}_1' \rightarrow \frac{8|\tilde{m}\tilde{r}|}{\gamma L_o \tilde{\delta}_c} \frac{\tilde{x}_c(t^{\text{BH}})}{1 + \tilde{x}_c^2(t^{\text{BH}})}, \quad (8.18)$$

$$\tilde{f}_1'' \rightarrow \frac{8|\tilde{m}\tilde{r}|}{\gamma L_o \tilde{\delta}_c} \frac{\tilde{x}_c(t^{\text{BH}})}{1 + \tilde{x}_c^2(t^{\text{BH}})} \left[ \frac{1}{2} \gamma^2 \tilde{\delta}_b^2 + 3 - 4 \frac{1 - \tilde{x}_c^2(t^{\text{BH}})}{1 + \tilde{x}_c^2(t^{\text{BH}})} \right] \left( \quad (8.19)$$

$$\left( \sqrt{\tilde{f}_1 \tilde{f}_2} \right)' \rightarrow 2|\tilde{m}\tilde{r}|, \quad (8.20)$$

$$\left( \sqrt{\tilde{f}_1 \tilde{f}_2} \right)'' \rightarrow 2|\tilde{m}\tilde{r}| \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 \tilde{\delta}_b^2 \right) \left( \quad (8.21)$$

Las expresiones que se alcanzan partiendo de la métrica interior son idénticas salvo por el reemplazo de las constantes y parámetros de polimerización tildados por sus contrapartidas sin tilde. Por consiguiente, concluimos que la métrica es (al menos) dos veces continuamente derivable y no degenerada si se llevan a cabo las identificaciones  $\delta_b = \tilde{\delta}_b$ ,  $\delta_c = \tilde{\delta}_c$ ,  $|C_1| = |\tilde{C}_1|$  y  $|\tilde{m}\tilde{r}| = |m| \neq 0$ .

Se puede llevar a cabo un empalme similar en el horizonte blanco, uniendo la solución interior con otra solución exterior definida para tiempos  $t < t^{\text{WH}}$ . Un argumento totalmente análogo conduce a un valor para la constante  $\tilde{C}_2$  dado por  $\text{arctanh } \tilde{b}_o^{-1} - \frac{1}{2} \tilde{b}_o t^{\text{WH}}$  y a fijar el resto de constantes de integración exigiendo que la geometría resultante sea no generada y al menos dos veces continuamente derivable a través del horizonte blanco.

En resumen, una elección general de las constantes de integración que aparecen en la resolución de las ecuaciones dinámicas del modelo AOS proporciona una geometría efectiva suave y no degenerada descrita por:

- Una solución exterior para tiempos  $t > t^{\text{BH}}$ , determinada por dos parámetros de polimerización y tres constantes de integración, a saber,  $|\tilde{m}\tilde{r}| = |m|$ ,  $|\tilde{C}_1| = |C_1|$  y  $\tilde{C}_2 = \text{arctanh } b_o^{-1} - \frac{1}{2} b_o t^{\text{BH}}$ .
- Una solución interior para tiempos  $t^{\text{WH}} < t < t^{\text{BH}}$ , caracterizada por dos parámetros de polimerización y un total de tres constantes de integración con valores  $|m|$ ,  $|C_1|$  y  $C_2 = \text{arctanh } b_o^{-1} - \frac{1}{2} b_o t^{\text{BH}}$ .
- Una solución exterior para  $t < t^{\text{WH}}$ , etiquetada por dos parámetros de polimerización y tres constantes de integración, con valores dados por  $|\tilde{m}\tilde{r}| = |m|$ ,  $|\tilde{C}_1| = |C_1|$  y  $\tilde{C}_2 = 3 \text{arctanh } b_o^{-1} - \frac{1}{2} b_o t^{\text{BH}}$ .

Como ya hemos explicado, los dos parámetros de polimerización pueden fijarse haciendo uso de ciertas condiciones de área mínima para los circuitos de holonomía, como se hizo en las Refs. [137, 138], donde los autores obtuvieron una expresión

de  $\delta_b$  y  $\delta_c$  en términos de  $|m|$  para agujeros lo suficientemente masivos. Las otras constantes, como hemos visto, tienen interpretaciones varias. En primer lugar,  $m$  es una constante del movimiento relacionada con la masa del agujero negro (véase la Sec. 3 para una visión más detallada al respecto). En segundo lugar, la constante  $C_2$  tiene que ver con la libertad de seleccionar el instante de tiempo correspondiente, e.g., al horizonte negro (quedando el horizonte blanco inmediatamente situado también). En tercer y último lugar, la constante de integración  $C_1$  está vinculada a la posición del único mínimo local de las variables de tríada angulares  $p_c$  y  $\tilde{p}_c$ .

Llegados a este punto de la discusión, estamos en posición de proporcionar un argumento para restringir los valores admisibles de la constante de integración  $C_1$ . Como sugiere la forma de la métrica efectiva (8.8),  $|p_c|$  (o  $|\tilde{p}_c|$ , dependiendo de si se trata de la región interior o de la exterior) es proporcional al área física de las 2-esferas métricas definidas por valores constantes de las coordenadas  $x$  y  $t$ . Para valores no nulos de los parámetros de polimerización,  $|p_c|$  resulta estar acotado inferiormente, alcanzando a lo sumo un mínimo local en la región interior en un cierto instante de tiempo coordinado. Si este mínimo local no tiene lugar en la región interior, el hecho de que  $|C_1| = |\tilde{C}_1|$  implica que  $|\tilde{p}_c|$  alcanza un mínimo en una (y solo en una) de las regiones exteriores. Nótese que, en efecto,  $-\ln|C_1|$  puede tomar cualquier valor real y, por tanto, también puede hacerlo el instante en el que se sitúa la superficie de transición  $t^T$ . Si, siguiendo criterios físicos, requiriésemos que la hipersuperficie asociada a un mínimo local del área física de las 2-esferas métricas se localice en la región interior, esto supondría una restricción sobre los valores admisibles de la constante de integración  $|C_1|$ . Efectivamente, este requerimiento se traduce directamente a pedir que

$$2t^{\text{BH}} - \frac{8}{b_o} \operatorname{arctanh} b_o^{-1} < \ln|C_1| < 2t^{\text{BH}}, \quad (8.22)$$

lo cual proporciona al menos una cota superior para  $|C_1| \exp(-2t^{\text{BH}})$ .

Si se requiere que el límite clásico del modelo sea compatible con las predicciones de la relatividad general (en las regiones en las que esta teoría mantiene su validez) al menos para masas grandes, se pueden deducir restricciones adicionales. Por ejemplo, para identificar el cuadrado del radio de Schwarzschild con  $|p_c(t^{\text{BH}})|$  en el límite en el que  $|m| \gg L_o \delta_c$ , es inmediato ver que hemos de tener que  $|C_1| \exp(-2t^{\text{BH}}) \sim \frac{\gamma L_o \delta_c}{8|m|}$  a orden dominante<sup>43</sup> en dicho límite. Este término dominante se reduce a  $C_1^{\text{AOS}}$  cuando se toma  $t^{\text{BH}} = 0$ . Sin embargo, podemos fijar la constante  $|C_1|$  de forma mucho menos restrictiva que en las Refs. [137, 138] permitiendo la existencia de términos correctivos en el límite de masas grandes:

$$|C_1| e^{-2t^{\text{BH}}} = \frac{\gamma L_o \delta_c}{8|m|} + o\left(\frac{L_o \delta_c}{|m|}\right) \quad (8.23)$$

donde  $o(\cdot)$  denota aquellos términos que son subdominantes con respecto a la cantidad entre paréntesis en el límite de agujeros negros muy masivos. Cabe enfatizar además

<sup>43</sup>Como mostraremos en la Sec. 3, la masa ADM del espaciotiempo asociado a cualquier solución se corresponde exactamente con  $|m|/G$ . Esto implica, por tanto, que el radio de Schwarzschild, definido de forma habitual como el producto de  $2G$  y la masa ADM, se reduce simplemente a  $2|m|$ .

que, en general, estos términos correctivos que se ignoraron en trabajos previos podrían incluso dominar en regímenes alejados del de masas grandes siempre y cuando se respeten las cotas (8.22).

## 2 Propiedades termodinámicas

Una vez que hemos mostrado que las soluciones interior y exterior pueden ser empalmadas satisfactoriamente en los horizontes negro y blanco del modelo, procedamos a estudiar sus propiedades termodinámicas. En esta sección, nos centraremos en las propiedades del horizonte negro, en un análisis similar al de la Ref. [139].

El campo vectorial  $\partial_x$  es un campo de Killing de la métrica con norma  $-\tilde{f}_1$  en la región exterior. Por consiguiente,  $\partial_x$  es de género tiempo en la región exterior y de género luz sobre el horizonte negro  $t = t^{\text{BH}}$ . Este hecho identifica la hipersuperficie  $t = t^{\text{BH}}$  como un horizonte de Killing. Para estudiar su termodinámica asociada, empecemos llevando a cabo una rotación de Wick  $x \rightarrow x_E = -ix$  en la métrica espaciotemporal exterior:

$$ds_{\text{ext}}^2 = \tilde{f}_1(t) dx_E^2 + \tilde{f}_2(t) dt^2 + |\tilde{p}_c| d\Omega^2. \quad (8.24)$$

Puesto que la métrica resultante es riemanniana y la norma del campo vectorial rotado  $\partial_{x_E}$  se hace cero en el horizonte, tenemos que el propio campo vectorial se anula idénticamente allí. Como consecuencia, en un vecindad del horizonte,  $\partial_{x_E}$  se asemeja al generador de una rotación en el plano  $t$ - $x_E$ . Ignorando la parte angular de la métrica y haciendo el cambio de variable  $R = [\tilde{f}_1(t)]^{1/2}$ , obtenemos de forma inmediata que

$$ds_{\text{ext},2}^2 = R^2 dx_E^2 + \frac{4\tilde{f}_1\tilde{f}_2}{(\tilde{f}_1')^2} dR^2. \quad (8.25)$$

Para asegurarnos de que la métrica anterior no presenta una singularidad cónica en el horizonte (i.e., en  $R = 0$ ), vamos a examinar el cociente entre la longitud física de una circunferencia de radio coordenado  $R = \delta R$  y su radio físico  $r$  a medida que  $\delta R$  tiende a cero. Asumiendo que la coordenada  $x_E$  es periódica con un período  $\mathcal{P}$ , llegamos a la siguiente expresión para este cociente<sup>44</sup>:

$$\lim_{\delta R \rightarrow 0} \frac{L}{r} = \lim_{t \rightarrow t^{\text{BH}}} \frac{\mathcal{P} \tilde{f}_1'(t)}{2\sqrt{\tilde{f}_1(t)\tilde{f}_2(t)}}. \quad (8.26)$$

Es sencillo comprobar que este límite está bien definido y es distinto de cero, ya que  $\lim_{t \rightarrow t^{\text{BH}}} \tilde{f}_1\tilde{f}_2 = 4m^2 > 0$  y  $\lim_{t \rightarrow t^{\text{BH}}} \tilde{f}_1' \neq 0$  para  $m \neq 0$ , como vimos en la Sec. 1.2. Haciendo uso de las fórmulas explícitas de dicha sección y pidiendo que el límite del cociente considerado sea igual a  $2\pi$ , concluimos que el período  $\mathcal{P}$  ha de adoptar un

<sup>44</sup>Asumimos que, cuando  $\delta R \rightarrow 0$ ,  $\tilde{f}_1'/(\tilde{f}_1\tilde{f}_2)^{1/2}$  es aproximadamente constante en el intervalo de integración involucrado en la obtención del radio físico.

valor no nulo muy concreto para que la métrica rotada sea regular en el horizonte. Como resultado de dicha periodicidad en el tiempo euclídeo<sup>45</sup>  $x_E$ , los campos de prueba cuánticos que se propaguen sobre la geometría exterior efectiva presentarán características de un estado térmico de temperatura [197]

$$T_H = \frac{1}{k_B \mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi k_B |m|} \left\{ \frac{8|m| \tilde{x}_c(t^{\text{BH}})}{\gamma L_o \delta_c [1 + \tilde{x}_c^2(t^{\text{BH}})]} \right\} \quad (8.27)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann. Con la elección de constantes de integración considerada en las Refs. [137, 138], la temperatura de Hawking encontrada se reduce a

$$T_H^{\text{AOS}} = \frac{1}{8\pi k_B |m| (1 + \epsilon_m)}, \quad (8.28)$$

con  $\epsilon_m = \gamma^2 L_o^2 \delta_c^2 / (64m^2)$ . Este es precisamente el resultado obtenido en la Ref. [139]. No obstante, cabe notar que una fijación más general de las constantes de integración sí que deja un rastro en la temperatura de los campos cuánticos que viven en la geometría exterior efectiva del modelo, resultando en una variación relativa

$$\frac{|T_H - T_H^{\text{AOS}}|}{T_H^{\text{AOS}}} = \frac{\tilde{x}_c(t^{\text{BH}})}{1 + \tilde{x}_c^2(t^{\text{BH}})} (\epsilon_m^{1/2} + \epsilon_m^{-1/2}) - 1. \quad (8.29)$$

En el límite  $L_o \delta_c \ll |m|$  considerado al final de la Sec. 1, un comportamiento relativista impone que  $\tilde{x}_c(t^{\text{BH}})$  y  $\epsilon_m^{1/2}$  sean pequeños y similares, como ilustra la Ec. (8.23). Entonces,  $\epsilon_m^{-1/2} \tilde{x}_c(t^{\text{BH}}) - 1$  —es decir, el cambio relativo de  $\tilde{x}_c(t^{\text{BH}})$  con respecto a  $\epsilon_m^{1/2}$ — proporciona una buena estimación de la variación relativa (8.29) en el régimen comentado. Naturalmente, el valor concreto que adopta esta cantidad depende de la forma en la que se seleccionan las constantes de integración. Aunque la contribución resultante debería ser pequeña con respecto a la unidad en el límite mencionado, es importante enfatizar que puede ser mayor que  $\epsilon_m$  y, por tanto, mayor que las correcciones que aparecen en el modelo AOS con respecto a la temperatura de Hawking relativista [véase la Ec. (8.28)].

No es complicado ver que la temperatura (8.27) depende de la relación entre el área física del horizonte negro y la masa hamiltoniana  $|m|$ , relación que depende a su vez de la forma en la que se fijan las constantes de integración que aparecen en las soluciones efectivas. Recordemos que este área viene dada por  $4\pi r_S^2$ , donde  $r_S^2 = |\tilde{p}_c(t^{\text{BH}})|$ . Una comparación directa con la métrica de Schwarzschild permite apreciar que  $r_S$  ha de tender al valor  $2|m|$  en el límite clásico en el que los parámetros de polimerización se anulan, lo cual justifica la notación empleada para designar esta cantidad. Partiendo de la expresión de  $|\tilde{p}_c(t^{\text{BH}})|$  y resolviendo una simple ecuación polinómica cuadrática, se puede reescribir  $\tilde{x}_c(t^{\text{BH}})$  en términos de  $r_S^2$ . Quedándonos con la solución que exhibe un límite clásico aceptable, tenemos que

$$\tilde{x}_c(t^{\text{BH}}) = |C_1| e^{-2t^{\text{BH}}} = \frac{r_S^2}{4m^2} \frac{4|m|}{\gamma L_o \delta_c} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{4m^2}{r_S^2} \right)^2 \left( \frac{\gamma L_o \delta_c}{4m} \right)^2} \right]. \quad (8.30)$$

<sup>45</sup>Nótese que  $x$  es una variable temporal en la región exterior.

Haciendo uso de esta expresión, es posible reescribir la temperatura de Hawking como

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B |m|} \frac{4m^2}{r_S^2}, \quad (8.31)$$

donde hemos reintroducido puntualmente la constante reducida de Planck  $\hbar$ . Por tanto, los efectos de gravedad cuántica están codificados en el cociente  $4m^2/r_S^2$ , cuyo valor no forzamos que sea igual a la unidad. El hecho de que este cociente pueda ser distinto de la unidad para valores finitos de la masa es una consecuencia de que, en general,  $|m|/G$  no tiene por qué coincidir con la masa  $M_H = r_S/2G$ , que denominaremos *masa del horizonte*. En efecto, la relación precisa entre estas dos masas depende tanto de  $C_1$  como de  $C_2$  (o, equivalentemente, de  $t^{\text{BH}}$ ):

$$M_H = \sqrt{\frac{\gamma L_o \delta_c}{8|m|} \left( |C_1| e^{-2t^{\text{BH}}} + \frac{e^{2t^{\text{BH}}}}{|C_1|} \right)} \frac{|m|}{G}. \quad (8.32)$$

Esto no quiere decir que  $|m|/G$  no coincida con otras nociones de masa, como la masa ADM, como veremos en la Sec. 3. Más bien, la situación que hemos encontrado pone de manifiesto que distintas definiciones de la masa que conducen al mismo resultado en el contexto de la relatividad general no tienen por qué coincidir en escenarios más generales. Teniendo en mente los comentarios expuestos bajo la Ec. (8.29), es fácil convencerse de que la desviación encontrada en el valor de la masa del horizonte está íntimamente relacionada con la desviación en la temperatura de Hawking discutida previamente. De hecho, un cálculo sencillo muestra que, en el límite  $L_o \delta_c \ll |m|$ , el término dominante de  $GM_H/|m| - 1$  es, o bien de orden  $\epsilon_m$ , o bien del mismo orden que la diferencia relativa entre temperaturas dada en la Ec. (8.29), dependiendo de cuál sea mayor de los dos en el régimen considerado para una cierta fijación admisible de las constantes de integración.

### 3 Comportamiento asintótico y nociones de masa

Discutamos ahora cuáles son los efectos de considerar una elección general de constantes de integración en el comportamiento asintótico y en las distintas nociones de masa correspondientes a la geometría efectiva resultante.

El comportamiento asintótico del modelo AOS original fue estudiado en las Refs. [139, 144], en las que se extrajo la conclusión de que la geometría exterior efectiva solo es asintóticamente plana *en un sentido elemental*. Efectivamente, la métrica exterior sí que se aproxima a una métrica plana en el infinito espacial, como se demostró en la Ref. [139], pero resulta no hacerlo lo suficientemente rápido como para verificar ciertas condiciones sobre el decaimiento de sus derivadas [139, 144]. El resultado en el marco más general presentado en este capítulo resulta ser análogo. Tras reexpresar la métrica en una forma mejor adaptada a un análisis de la región asintótica, podemos llevar a cabo una expansión asintótica de cada componente métrica para identificar las contribuciones dominantes en cada una de ellas. Del mismo modo que en el modelo

AOS original, encontramos que, si los parámetros de polimerización son distintos de cero, la componente temporal de la métrica diverge en el infinito espacial. En virtud de la interpretación física de los parámetros de polimerización, esto significa que aparece una divergencia en la métrica como resultado de la inclusión de efectos cuánticos en el sistema, independientemente de su tamaño. Siguiendo un procedimiento completamente análogo al presentado en la Ref. [139], es posible reabsorber el factor divergente mediante una redefinición de la variable temporal. Tras dicho cambio, es aparente que la métrica efectiva se aproxima a una métrica plana en el infinito espacial. No obstante, este cambio de tiempo también introduce ciertos términos relevantes para la derivada del tensor métrico, que impiden que la derivada de la métrica verifique las condiciones sobre ella que se requieren en la definición usual de planitud asintótica [2, 198].

Por otro lado, una noción de gran relevancia en los espaciotiempos de agujero negro es la de masa. En la relatividad general, existen múltiples propuestas para la asignación de una masa a una cierta geometría, muchas de las cuales involucran sus regiones asintóticas, como es el caso de la masa ADM. Para poder llevar a cabo una comparación, es interesante considerar otras definiciones de la masa para geometrías de agujero negro. Una noción que ha sido empleada en trabajos recientes involucra el tensor de Ricci de la métrica espacial inducida (consúltese la Ref. [199] para más detalles al respecto). Es bien sabido que, en el caso de la métrica de Schwarzschild (que es asintóticamente plana en el sentido usual), ambas definiciones de la masa conducen al mismo resultado. No obstante, esto no ha de ser necesariamente cierto en contextos más generales como el que nos ocupa, donde la inclusión de los parámetros de polimerización pretende capturar los efectos más relevantes de la naturaleza cuántica de la geometría.

Consideremos en primer lugar la masa ADM, que se define en términos de la parte espacial  $\tilde{q}_{ab}$  de la métrica efectiva en la región exterior. Para expresar la métrica en una forma más conveniente para el cálculo necesario, introduzcamos el cambio de coordenadas  $t \rightarrow \tilde{r} = \tilde{r}_S e^{(t-t^{\text{BH}})}$ , donde  $\tilde{r}_S^2 = \gamma L_o \delta_c |m| e^{2t^{\text{BH}}} / (2|C_1|)$ . Nótese que, si  $|C_1|$  se fija de forma que las soluciones efectivas resultantes tengan un buen límite clásico,  $\tilde{r}_S^2$  coincide a orden dominante con la constante  $r_S^2$  introducida en la sección anterior [véanse la Ec. (8.23) y el párrafo bajo la Ec. (8.28)]. En términos de la nueva coordenada radial  $\tilde{r}$  y del parámetro  $\epsilon = b_o - 1$ , la parte espacial del elemento de línea exterior  $\tilde{q}_{ab} dx^a dx^b$  (con  $\{x^a\}_{a=1,2,3} = \{\tilde{r}, \theta, \phi\}$ ) admite la expresión

$$\frac{(2+\epsilon+\epsilon\xi^{1+\epsilon})^2 \left(1+|C_1|^2 e^{-4t^{\text{BH}}} \xi^4\right)}{(1-\xi^{1+\epsilon})[(2+\epsilon)^2 - \epsilon^2 \xi^{1+\epsilon}]} \left( d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 \left(1+|C_1|^2 e^{-4t^{\text{BH}}} \xi^4\right) \left( d\Omega^2, \quad (8.33) \right.$$

donde  $\xi = \tilde{r}_S / \tilde{r}$ . Por otro lado, el cuadrado de la función lapso en la región exterior (que se puede obtener a partir de su contrapartida interior mediante las sustituciones detalladas en el primer párrafo de la Sec. 1.2) viene dado por

$$\tilde{N}^2 = \frac{4m^2 (1-\xi^{1+\epsilon})[(2+\epsilon)^2 - \epsilon^2 \xi^{1+\epsilon}] (2+\epsilon+\epsilon\xi^{1+\epsilon})^2}{\tilde{r}_S^2 16(1+\epsilon)^4 \left(1+|C_1|^2 e^{-4t^{\text{BH}}} \xi^4\right)} \xi^{-2\epsilon}. \quad (8.34)$$



Haciendo uso de estas expresiones, se puede calcular fácilmente la masa ADM, que se define como sigue [200]:

$$M_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \oint_{\tilde{r}} dS_d \sqrt{\det(\tilde{q})} \tilde{N} \tilde{q}^{ac} \tilde{q}^{bd} (\partial_c \tilde{q}_{ba} - \partial_b \tilde{q}_{ca}), \quad (8.35)$$

donde la integración debe realizarse sobre una 2-esfera de radio  $\tilde{r}$  constante y las derivadas parciales han de tomarse con respecto a las coordenadas cartesianas  $\{y^a\}$  de la métrica plana a la que la métrica espacial efectiva  $\tilde{q}_{ab}$  tiende asintóticamente. Adicionalmente,  $y^a dS_a = \tilde{r} d^2V$ , donde  $d^2V$  es el elemento de área de la 2-esfera considerada. Un cálculo directo conduce a

$$M_{\text{ADM}} = \frac{|m|}{G} \frac{\tilde{r}_S^{1+\epsilon} (2+\epsilon)^2}{4(1+\epsilon)^2} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \frac{\tilde{r}^2 \tilde{q}_{\tilde{r}\tilde{r}}(\tilde{r}) - \tilde{r} \partial_{\tilde{r}} \tilde{q}_{\theta\theta}(\tilde{r}) + \tilde{q}_{\theta\theta}(\tilde{r})}{\tilde{r}^{3+\epsilon}} = \frac{|m|}{G}. \quad (8.36)$$

La última igualdad mostrada es válida siempre y cuando  $\epsilon < 3$ , mientras que el límite asintótico diverge para valores  $\epsilon > 3$ , lo que implica una mala definición de esta noción de masa en tales casos. Notemos que los agujeros negros macroscópicos satisfacen por definición la condición  $\epsilon < 3$  [138]. Además, esta cota ha de ser respetada también si los efectos de gravedad cuántica son razonablemente pequeños. Restringiendo el análisis a situaciones de este tipo en las que la masa ADM está bien definida, concluimos que el parámetro que hemos venido denominando masa hamiltoniana es efectivamente proporcional a la masa ADM,  $|m| = GM_{\text{ADM}}$ . Cabe destacar que este resultado es idéntico al obtenido en la Ref. [139]. Esta propiedad notable es una consecuencia inmediata del hecho de que la masa ADM es independiente de los valores adoptados por las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ , en contraste con el caso de la masa del horizonte.

Para concluir, estudiemos la segunda definición de masa comentada anteriormente, a saber, la construida a partir del tensor de Ricci de la métrica espacial  $\tilde{\mathcal{R}}_{ab}^{(3)}$ . Dicha noción de masa, a la que nos referiremos como *masa de Ricci*, se define como

$$M_{\text{Ricci}} = \frac{1}{8\pi G} \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \oint_{\tilde{r}} d^2V \tilde{r} \tilde{N} \tilde{\mathcal{R}}_{ab}^{(3)} \hat{r}^a \hat{r}^b, \quad (8.37)$$

donde la integración se ha de llevar a cabo una vez más sobre una 2-esfera de radio  $\tilde{r}$  constante y  $\hat{r}^a$  es un campo vectorial radial de norma unidad. Dado que no interviene integración alguna en la dirección radial, basta con obtener el término dominante de la componente  $\tilde{r}\tilde{r}$  del tensor de Ricci. Esta es una tarea sencilla gracias a que la métrica espacial efectiva  $\tilde{q}_{ab}$  es diagonal. Teniendo en cuenta estas consideraciones, es sencillo mostrar que

$$M_{\text{Ricci}} = (1+\epsilon) M_{\text{ADM}} = (1+\epsilon) \left[ \frac{L_o \delta_c}{8|m|} |C_1| e^{-2t^{\text{BH}}} + \frac{e^{2t^{\text{BH}}}}{|C_1|} \right]^{-1/2} M_{\text{H}}. \quad (8.38)$$

Así pues, las tres definiciones de masa estudiadas, que coinciden cuando se aplican al espaciotiempo de Schwarzschild clásico, difieren en las soluciones efectivas consideradas. En el caso de las masas ADM y de Ricci, la diferencia encontrada está dada por

un factor global proporcional a  $\epsilon$  (y que, por tanto, encapsula los efectos cuánticos del modelo), que se anula en el límite clásico en el que los efectos cuánticos desaparecen. Una vez más, este resultado coincide con el alcanzado en la Ref. [139]. De manera notable, estas nociones de masa siguen estando bien definidas incluso en ausencia de planitud asintótica estándar (al menos mientras los efectos cuánticos sean pequeños) y los valores que resultan de cada una de ellas solo difieren ligeramente para agujeros negros masivos. El caso de la masa del horizonte es algo diferente, ya que su valor depende de la elección de las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ , o, más precisamente, de la combinación  $|C_1|e^{-2t_{\text{BH}}}$ .

## 4 Conclusión

En este capítulo hemos llevado a cabo un estudio del espacio de soluciones de las ecuaciones dinámicas del modelo AOS [137, 138], resolviéndolas y considerando una elección más general de constantes de integración. Dada la relación existente entre la cuantización de un sistema y la caracterización de su espacio de soluciones, este análisis (que estaba ausente en la literatura) es importante para disponer de una base robusta sobre la que completar el programa de cuantización en trabajos posteriores y poder interpretar sus consecuencias físicas. Además, hemos discutido cómo una fijación de las constantes de integración menos restrictiva que la impuesta en las Refs. [137, 138] afecta a las propiedades termodinámicas y a las distintas nociones de masa correspondientes a la geometría efectiva que se asocia con el modelo.

En la Sec. 1, hemos obtenido las soluciones generales a las ecuaciones del movimiento efectivas, tanto en la región interior (véase la Sec. 1.1) como en la región exterior (véase la Sec. 1.2). Cada una de estas soluciones depende de un total de tres constantes de integración y de dos parámetros de polimerización positivos (que son funciones de la masa hamiltoniana con comportamientos asintóticos dictados por ciertas condiciones de área mínima). A continuación, hemos abordado el estudio del empalme de ambas soluciones en los horizontes, exigiendo una geometría no degenerada y suficientemente suave, lo cual resulta en una relación entre las constantes de integración en el interior y en el exterior. Como consecuencia, la solución completa (válida tanto en la región interior como en las regiones exteriores que se encuentran más allá de los horizontes negro y blanco) viene caracterizada únicamente por tres constantes de integración (además de los dos parámetros de polimerización) con las siguientes interpretaciones físicas: la masa hamiltoniana, la posición del horizonte negro y la posición de la superficie de transición. También hemos comentado para qué valores de las constantes de integración se recuperan los resultados de las Refs. [137, 138] y hemos restringido los valores admisibles que puede adoptar una de las constantes pidiendo que la superficie de transición se encuentre en la región interior.

En la Sec. 2, hemos calculado explícitamente la temperatura de Hawking asociada al horizonte negro del modelo. Además, hemos mostrado que esta temperatura es proporcional al cociente del área del horizonte y la masa hamiltoniana, que depende de la elección de constantes de integración y que no tiene por qué coincidir con el de la relatividad general. Hemos concluido que la forma en la que se fijan las constantes

de integración deja una huella en la termodinámica del modelo efectivo. De hecho, hemos observado que la diferencia relativa entre la temperatura general encontrada en este capítulo y la temperatura en el modelo AOS original puede ser incluso mayor que la desviación relativa entre esta segunda y la temperatura puramente relativista.

Finalmente, en la Sec. 3, hemos comentado que la estructura asintótica en el escenario considerado en este capítulo es análoga a la analizada en la Ref. [139]. Por otro lado, hemos calculado los valores de dos nociones distintas de masa que resultan coincidir cuando se aplican al espaciotiempo de Schwarzschild: la masa ADM y la que hemos denominado como masa de Ricci. En el caso que nos ocupa, hemos comprobado que la masa ADM y la masa de Ricci no coinciden exactamente. Ambas masas difieren en un término (pequeño para agujeros macroscópicos) que se anula en el límite en el que desaparecen los efectos cuánticos. Este es el mismo resultado que se obtuvo en la Ref. [139] con la fijación de constantes más restrictiva allí adoptada.

Tras disponer de esta comprensión del espacio de soluciones dinámicas, sería interesante determinar si es posible reconciliar las ecuaciones del movimiento estudiadas con un formalismo canónico en el que los parámetros de polimerización sean tratados como constantes del movimiento genuinas. Esto permitiría establecer una conexión clara entre el hamiltoniano efectivo propuesto y las ecuaciones dinámicas cuyo espacio de soluciones hemos caracterizado. Con esta motivación en mente, uno de los caminos explorables implica un examen cuidadoso del procedimiento presentado en la Ref. [137], donde se considera una cierta extensión del espacio de fases y su reducción posterior. Este examen es uno de los objetivos del siguiente capítulo.

## Capítulo 9

# Formalismo hamiltoniano y cuantización polimérica

En este capítulo examinamos el argumento empleado en la Ref. [138] para motivar las ecuaciones dinámicas consideradas en el modelo AOS original desde una perspectiva canónica. Dicho argumento involucra una extensión del espacio de fases en el que se toman los parámetros de polimerización como variables canónicas adicionales sujetas a dos ligaduras que dictan su relación con la masa del agujero negro mediante ciertas funciones. Estas ligaduras se imponen en un paso posterior para reducir el espacio de fases extendido y conducen a un espacio de fases del mismo número de dimensiones que el de partida pero cuya relación mutua no es del todo transparente. Entender con precisión esta relación es fundamental si se desea ir más allá de una descripción meramente efectiva y formular una versión cuántica del modelo. De hecho, el modelo AOS —inspirado por la situación encontrada en la aplicación de la LQC a contextos cosmológicos, donde la dinámica cuántica de ciertas familias de estados gaussianos está bien aproximada por una dinámica efectiva [44]— pretende describir el comportamiento semiclásico de ciertos estados en una descripción cuántica de agujeros negros sin rotación ni carga. No obstante, en ausencia de una teoría cuántica tal, el modelo reposa sobre la *hipótesis* de que existen estados cuánticos cuyo comportamiento semiclásico puede ser descrito de esa forma efectiva. Para poder comprobar la validez de esta hipótesis y dotar de cierta solidez a la afirmación de que el modelo captura correcciones cuánticas de lazos, es necesario construir una teoría cuántica partiendo de una formulación hamiltoniana clásica del sistema que conduzca al modelo AOS tras la implementación de un procedimiento de regularización apropiado. Con esta perspectiva en mente, este capítulo tiene dos objetivos principales. Por un lado, determinar cuál es la relación entre el espacio resultante de reducir el espacio de fases extendido propuesto en la Ref. [138] y el espacio de fases asociado a la región interior de un agujero negro en la relatividad general. Por otro lado, una vez entendida dicha relación, proceder a la cuantización del modelo, empleando el formalismo extendido como punto de partida, para investigar la forma y algunas de las propiedades de los estados físicos.

El contenido de este capítulo, que recoge los resultados publicados originalmente en la Ref. [201], está estructurado de la siguiente manera. En la Sec. 1, resumimos

muy brevemente las bases del modelo AOS (conectándolo con la teoría clásica en la que se basa) e introducimos la extensión del espacio de fases propuesta en la Ref. [138] para motivar las ecuaciones dinámicas desde una perspectiva hamiltoniana, que generalizamos al principio de la Sec. 2. A continuación, reducimos el espacio de fases extendido mediante una fijación del gauge y estudiamos el efecto que tiene esta reducción sobre el álgebra de variables de conexión y de triada, mostrando que el espacio de fases resultante no es equivalente al espacio de fases del modelo correspondiente a la relatividad general. Esta inequivalencia, que había pasado desapercibida con anterioridad, resulta ser clave para una deducción hamiltoniana consistente de las ecuaciones dinámicas. En la Sec. 3, abordamos la cuantización polimérica del modelo partiendo del formalismo asociado al espacio de fases extendido. Haciendo uso de las técnicas habituales de la LQC, construimos una representación cuántica del análogo del álgebra de holonomías y flujos y, tras llevar a cabo un procedimiento de regularización apropiado, promovemos las ligaduras del sistema a operadores cuánticos sobre el espacio de Hilbert cinemático. En la Sec. 4, caracterizamos formalmente los estados físicos aniquilados por los operadores de ligadura y discutimos cuáles son algunas de las condiciones necesarias para que el sector de masas grandes presente propiedades físicas razonables. Por último, en la Sec. 5, resumimos los resultados más importantes del capítulo.

## 1 Modelo extendido

En esta sección, empezamos resumiendo brevemente algunos aspectos del sistema clásico en el que está basado el modelo AOS. A continuación, introducimos el modelo efectivo propiamente dicho y consideramos la extensión del espacio de fases propuesta en la Ref. [138], incluyendo los parámetros de polimerización (junto con sus momentos canónicamente conjugados) como variables canónicas adicionales.

### 1.1 Modelo clásico de partida y dinámica efectiva

Como en los capítulos anteriores, consideremos la región interior de un agujero negro de Schwarzschild. Como hemos comentado, con una elección apropiada de coordenadas [103], esta región es isométrica a una cosmología de Kantowski-Sachs [173–175]. Empleando variables de Ashtekar-Babero para describir los grados de libertad gravitacionales [véanse las Ecs. (2.45) y (2.46)], hemos visto que toda la información dinámica está contenida en cuatro variables constantes en las secciones espaciales, que forman dos pares canónicos:  $(b, p_b)$  y  $(c, p_c)$ . En términos de estas variables, el elemento de línea espaciotemporal se escribe como

$$ds^2 = -N(\tau)^2 d\tau^2 + \frac{p_b^2(\tau)}{L_o^2 |p_c(\tau)|} dx^2 + |p_c(\tau)| d\Omega^2, \quad (9.1)$$

donde  $N(\tau)$  es la función lapso y  $\tau$  es la variable temporal asociada.

En la relatividad general, las variables introducidas verifican un álgebra canónica con corchetes de Poisson dados por  $\{b, p_b\} = G\gamma$  y  $\{c, p_c\} = 2G\gamma$ . Además, han de

satisfacer una ligadura hamiltoniana de la forma

$$H_{\text{KS}}[N] = N \frac{b}{\gamma \sqrt{|p_c|}} \frac{L_o}{G} (O_b^{\text{KS}} - O_c^{\text{KS}}) \left( \right. \quad (9.2)$$

$$O_b^{\text{KS}} = -\frac{p_b}{2\gamma L_o} \left( b + \frac{\gamma^2}{b} \right) \left( \right. \quad (9.3)$$

$$O_c^{\text{KS}} = \frac{cp_c}{\gamma L_o}. \quad (9.4)$$

Por tanto, como ya sabemos, con la elección de lapso  $N = \gamma \sqrt{|p_c|}/b$  los sectores radial y angular del espacio de fases se desacoplan dinámicamente. Además, los hamiltonianos parciales  $O_b^{\text{KS}}$  y  $O_c^{\text{KS}}$  son constantes del movimiento e iguales sobre soluciones. Cuando la geometría de Kantowski-Sachs se emplea para describir la región interior de un agujero de Schwarzschild en la relatividad general, el valor absoluto del valor constante de los hamiltonianos parciales sobre soluciones se corresponde con la masa ADM del agujero negro considerado.

En la LQC homogénea e isótropa, una variedad de resultados bien establecidos indican que una clase amplia de estados físicos se encuentran picados en las trayectorias dinámicas generadas por un hamiltoniano efectivo [39, 40, 44]. Dicho hamiltoniano efectivo se puede obtener reemplazando la variable de conexión  $c$  del modelo en cuestión por  $\sin(\bar{\mu}c)/\bar{\mu}$  [71], donde  $\bar{\mu}$  es un parámetro de polimerización dependiente del espacio de fases de origen cuántico. Motivados por estos resultados, los autores de las Refs. [137, 138] asumieron una descripción efectiva de la región interior cuya dinámica, con la elección de lapso comentada, es generada por  $NH_{\text{eff}} = L_o(O_b - O_c)/G$  [véanse las Ecs. (7.4)-(7.6)], hamiltoniano efectivo que en lo que sigue llamaremos simplemente<sup>46</sup>  $H_{\text{AOS}}^{\text{eff}}$ . Si los parámetros de polimerización del modelo,  $\delta_b$  y  $\delta_c$ , son números constantes o funciones de  $O_b$  y/o  $O_c$ , es sencillo comprobar que los hamiltonianos efectivos parciales siguen siendo constantes del movimiento con un valor sobre soluciones coincidente, que llamamos  $m$ . En los trabajos en los que se presentó originalmente el modelo, se afirma que este hamiltoniano efectivo proporciona las siguientes ecuaciones dinámicas para las variables de conexión y de tríada [137, 138]:

$$b' = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sin \delta_b b}{\delta_b} + \frac{\gamma^2 \delta_b}{\sin \delta_b b} \right) \left( \right. \quad c' = -2 \frac{\sin \delta_c c}{\delta_c}, \quad (9.5)$$

$$p'_b = \frac{p_b}{2} \cos \delta_b b \left( 1 - \frac{\gamma^2 \delta_b^2}{\sin^2 \delta_b b} \right) \left( \right. \quad p'_c = 2p_c \cos \delta_c c, \quad (9.6)$$

donde, como en el capítulo anterior,  $'$  denota la derivada con respecto al tiempo coordinado (asociado a la elección de lapso introducida) y los parámetros son tales que su comportamiento en el límite de masas  $|m|$  grandes viene dado por la Ec. (7.44). La resolución de estas ecuaciones dinámicas conduce a la geometría interior efectiva estudiada en las Refs. [137, 138] y en el capítulo anterior. A pesar de sus

<sup>46</sup>De esta manera, evitamos arrastrar la notación en la que se refleja explícitamente que es el resultado de la absorción de una cierta función del espacio de fases en el lapso para lograr el desacoplo dinámico de los sectores radial y angular.

propiedades interesantes, la deducción hamiltoniana de estas ecuaciones es oscura. En efecto, sirviéndonos de la estructura simpléctica de las cosmologías de Kantowski-Sachs [véanse los corchetes de Poisson detallados en el párrafo anterior a la Ec. (9.2)], la única forma de obtener estas ecuaciones a partir del hamiltoniano efectivo  $H_{\text{AOS}}^{\text{eff}}$  (7.4) es tratar los parámetros de polimerización  $\delta_b$  y  $\delta_c$  como números constantes. Este procedimiento parece estar en contradicción con el hecho de que estos parámetros de polimerización habrían de tomarse en realidad como constantes del movimiento: se identifican con funciones de la masa  $m$ , que es una constante del movimiento que toma un valor distinto en cada trayectoria dinámica. Como resultado de esta dependencia en el espacio de fases, las funciones de  $m$  no se comportan como números constantes bajo corchetes de Poisson, sino que tienen corchetes no nulos con las variables canónicas. Como ya hemos comentado en profundidad, esta tensión ha sido objeto de debate en una serie de trabajos [140, 193, 194].

## 1.2 Espacio de fases extendido

Ante la situación descrita, los autores de la Ref. [138] propusieron un argumento para motivar las ecuaciones dinámicas anteriores desde un punto de vista canónico en el que se tratan los parámetros de polimerización como constantes del movimiento. Más concretamente, propusieron una extensión del espacio de fases de Kantowski-Sachs  $\Gamma_{\text{KS}}$  y de su dinámica. A continuación, ilustramos brevemente este procedimiento, presentado en la Ref. [138].

En primer lugar, se define un espacio de fases extendido  $\Gamma_{\text{ext}}$  de dimensión ocho que incluye, además de los pares canónicos  $(b, p_b)$  y  $(c, p_c)$ , dos pares canónicos adicionales  $(\delta_b, p_{\delta_b})$  y  $(\delta_c, p_{\delta_c})$ , compuestos por los parámetros de polimerización y unos momentos canónicamente conjugados. Los corchetes de Poisson no nulos de estos dos últimos pares de variables son

$$\{\delta_b, p_{\delta_b}\} = 1, \quad \{\delta_c, p_{\delta_c}\} = 1. \quad (9.7)$$

El hamiltoniano en el espacio de fases extendido adopta la forma

$$\underline{N}H_{\text{AOS}}^{\text{eff}} + \lambda_b \Phi_b + \lambda_c \Phi_c, \quad (9.8)$$

donde  $\underline{N}$ ,  $\lambda_b$  y  $\lambda_c$  son multiplicadores de Lagrange y las nuevas ligaduras  $\Phi_b$  y  $\Phi_c$  adoptan las expresiones

$$\Phi_b = O_b - \mathcal{F}_b(\delta_b), \quad \Phi_c = O_c - \mathcal{F}_c(\delta_c), \quad (9.9)$$

para un cierto par de funciones  $\mathcal{F}_b$  y  $\mathcal{F}_c$ , que han de ser al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ . En principio, la única restricción sobre sus valores [resultante del comportamiento asintótico de los parámetros de polimerización (7.44)] es que han de verificar

$$\mathcal{F}_b(\delta_b) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2\pi\gamma^2\delta_b^3}}, \quad \mathcal{F}_c(\delta_c) = \frac{\gamma\Delta^2}{32\pi^2(L_o\delta_c)^3}, \quad (9.10)$$

a orden dominante en el límite de masas  $|m|$  grandes (o, lo que es equivalente, en el límite de valores absolutos de los parámetros de polimerización pequeños). Claramente, todas las ligaduras que integran el hamiltoniano (9.8) conmutan entre sí, por lo que forman un conjunto de primera clase y se pueden interpretar como los generadores de las simetrías del sistema.

Es fácil comprobar que la dinámica generada por el hamiltoniano (9.8) en el subespacio de  $\Gamma_{\text{ext}}$  coordinado por  $(b, p_b)$  y  $(c, p_c)$  está gobernada por las ecuaciones dinámicas del modelo AOS [Ecs. (9.5) y (9.6)] si los multiplicadores de Lagrange se fijan de tal manera que  $\underline{N} = 1$  y  $\lambda_c = \lambda_b = 0$ .

Otra forma alternativa de obtener estas ecuaciones dinámicas consiste en i) imponer las ligaduras  $\Phi_b$  y  $\Phi_c$  para eliminar los grados de libertad asociados a los pares  $(\delta_b, p_{\delta_b})$  y  $(\delta_c, p_{\delta_c})$  y ii) calcular la dinámica en el espacio de fases  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  resultante de la reducción del sistema, siempre que en la elección de gauge considerada se tenga que  $\lambda_b = \lambda_c = 0$ . En la Ref. [138], se considera una fijación de gauge de este tipo. Por tanto, parece natural preguntarse cuál es la relación entre el espacio de fases reducido  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  y el de partida  $\Gamma_{\text{KS}}$ . De hecho, la respuesta a esta pregunta es crucial para entender cómo se pueden obtener canónicamente las ecuaciones dinámicas del modelo AOS a partir de una descripción efectiva de cosmologías de Kantowski-Sachs.

## 2 Reducción del espacio de fases

En esta sección, consideramos reducciones del espacio de fases extendido  $\Gamma_{\text{ext}}$  que eliminan los grados de libertad asociados a  $(\delta_b, p_{\delta_b})$  y  $(\delta_c, p_{\delta_c})$  y que se traducen en multiplicadores de Lagrange  $\lambda_b$  y  $\lambda_c$  nulos, de tal manera que las ecuaciones dinámicas de las Refs. [137, 138] gobiernen la dinámica reducida. Además, investigamos la relación existente entre el espacio de fases que resulta de esta clase de reducciones y el espacio de fases de Kantowski-Sachs  $\Gamma_{\text{KS}}$ .

En lo que sigue, consideramos un hamiltoniano total ligeramente distinto al de la Ec. (9.8) pero igual de válido en  $\Gamma_{\text{ext}}$ , con el objetivo de generalizar trabajos previos. Recordemos que los dos hamiltonianos parciales son constantes del movimiento con el mismo valor  $m$  sobre soluciones [193, 194]. Esta indistinguibilidad en la superficie de ligadura hace que  $m$  pueda identificarse tanto con  $O_b$  como con  $O_c$ . Por consiguiente, parece natural considerar el hamiltoniano más general

$$H_{\text{ext}}^{\text{eff}} = \underline{N} H_{\text{AOS}}^{\text{eff}} + \lambda_b \Psi_b + \lambda_c \Psi_c, \quad (9.11)$$

donde las nuevas ligaduras  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$  adoptan la forma

$$\Psi_b = \mathcal{K}_b(O_b, O_c) - \delta_b, \quad \Psi_c = \mathcal{K}_c(O_b, O_c) - \delta_c, \quad (9.12)$$

para un par de funciones  $\mathcal{K}_b$  y  $\mathcal{K}_c$  lo suficientemente suaves. *A priori*, la única restricción sobre sus valores resulta, de nuevo, del comportamiento asintótico que han de exhibir los parámetros de polimerización:

$$\mathcal{K}_b(m, m) = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2\pi\gamma^2 m}} \right)^{1/3}, \quad \mathcal{K}_c(m, m) = \frac{1}{2L_o} \left( \frac{\gamma\Delta^2}{4\pi^2 m} \right)^{1/3}. \quad (9.13)$$



Como en el caso del hamiltoniano discutido en la Sec. 1.2, las tres ligaduras de las que se compone el hamiltoniano  $H_{\text{ext}}^{\text{eff}}$  forman un conjunto de primera clase que genera las simetrías del sistema.

## 2.1 Fijación del gauge: álgebra de Dirac

Para eliminar los grados de libertad asociados con los parámetros de polimerización, se pueden introducir, además de las ligaduras  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$ , condiciones de fijación del gauge asociado con sus momentos canónicos  $p_{\delta_b}$  y  $p_{\delta_c}$ . Adoptando la misma estrategia que se siguió en la Ref. [138], consideremos las condiciones de fijación del gauge  $\chi_b = 0$  y  $\chi_c = 0$ , con

$$\chi_b = P_{\delta_b} - \mathcal{G}_b(O_b, O_c), \quad \chi_c = P_{\delta_c} - \mathcal{G}_c(O_b, O_c), \quad (9.14)$$

donde  $\mathcal{G}_b$  y  $\mathcal{G}_c$  son dos funciones suficientemente suaves. Además,  $P_{\delta_b}$  y  $P_{\delta_c}$  son variables de momento canónicamente conjugadas a  $\delta_b$  y  $\delta_c$ , respectivamente, definidas de modo que conmuten bajo corchetes de Poisson con los hamiltonianos parciales  $O_b$  y  $O_c$ . De hecho, es posible encontrar un cambio de variables  $(b, p_b, c, p_c) \rightarrow (O_b, P_b, O_c, P_c)$ , donde  $P_b$  y  $P_c$  son variables de momento asociadas a los hamiltonianos parciales, de tal manera que se obtiene un conjunto canónico para la totalidad del espacio de fases extendido junto con  $(\delta_b, P_{\delta_b}, \delta_c, P_{\delta_c})$ . En el Apéndice B, se recogen las definiciones de las variables involucradas en la transformación canónica mencionada, que se describe en un mayor grado de detalle en la Ref. [138]. En lo que concierne a la discusión presente, solo necesitamos saber que los momentos  $P_{\delta_b}$  y  $P_{\delta_c}$  dependen exclusivamente de las variables de sus sectores respectivos del espacio de fases y que difieren de los momentos originales  $p_{\delta_b}$  y  $p_{\delta_c}$  en términos independientes de ellos (véase el Apéndice B o la Ref. [138]):

$$P_{\delta_b} = P_{\delta_b}(b, p_b, \delta_b, p_{\delta_b}), \quad \frac{\partial P_{\delta_b}}{\partial p_{\delta_b}} = 1, \quad (9.15)$$

$$P_{\delta_c} = P_{\delta_c}(c, p_c, \delta_c, p_{\delta_c}), \quad \frac{\partial P_{\delta_c}}{\partial p_{\delta_c}} = 1. \quad (9.16)$$

Las ligaduras  $\Psi_b$ ,  $\Psi_c$ ,  $\chi_b$  y  $\chi_c$  forman un conjunto de segunda clase, lo cual indica que las condiciones introducidas proporcionan una buena fijación del gauge. En efecto, el álgebra de Poisson que verifican estas ligaduras viene dado por

$$\{\chi_b, \Psi_b\} = 1, \quad \{\chi_c, \Psi_c\} = 1, \quad \{\chi_b, \Psi_c\} = 0, \quad (9.17)$$

$$\{\chi_c, \Psi_b\} = 0, \quad \{\chi_b, \chi_c\} = 0, \quad \{\Psi_b, \Psi_c\} = 0. \quad (9.18)$$

Adicionalmente, para que la fijación del gauge esté bien planteada, debe ser estable bajo la evolución generada por el hamiltoniano  $H_{\text{ext}}^{\text{eff}}$ , lo cual implica una condición sobre los valores de  $\lambda_b$  y  $\lambda_c$  (que han de ser tales que los cuatro corchetes de las ligaduras con el hamiltoniano se anulen débilmente). Un cálculo sencillo muestra que esta estabilidad dinámica se da si y solo si  $\lambda_b = \lambda_c = 0$ .

Tras la fijación del gauge descrita, los pares  $(\delta_b, P_{\delta_b})$  y  $(\delta_c, P_{\delta_c})$  se reducen a funciones del resto del espacio de fases. En este sentido, el espacio de fases extendido

$\Gamma_{\text{ext}}$  de ocho dimensiones se ve reducido a un espacio de fases  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  de cuatro dimensiones. Naturalmente, el álgebra canónica de funciones en  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  se obtiene a partir del *pullback* de la estructura simpléctica en  $\Gamma_{\text{ext}}$ . En la práctica, esto se puede hacer de forma explícita reemplazando los corchetes de Poisson por corchetes de Dirac [28]. Si  $\{\cdot, \cdot\}$  son los corchetes de Poisson en el espacio de fases que está sujeto al conjunto de ligaduras de segunda clase  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (\Psi_b, \Psi_c, \chi_b, \chi_c)$ , los corchetes de Dirac  $\{\cdot, \cdot\}_D$  de dos funciones arbitrarias  $f$  y  $g$  del espacio de fases reducido se definen como [28]

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{\mu, \nu=1}^4 \left( \{f, \varphi_\mu\} (M^{-1})_{\mu\nu} \{ \varphi_\nu, g\} \right), \quad (9.19)$$

donde  $M$  es la matriz  $4 \times 4$  con elementos  $(M)_{\mu\nu} = \{\varphi_\mu, \varphi_\nu\}$ . En el caso que nos ocupa,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_2 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & 0_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

En la ecuación anterior,  $0_2$  y  $\mathbb{I}_2$  denotan, respectivamente, las matrices nula e identidad de orden dos.

Tras la reducción del espacio de fases, el álgebra de Dirac de las variables  $O_b, P_b, O_c$  y  $P_c$  en  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  se puede calcular fácilmente. Obtenemos que

$$\{O_b, P_b\}_D = 1, \quad \{O_c, P_c\}_D = 1, \quad \{O_b, O_c\}_D = 0, \quad (9.21)$$

$$\{P_b, P_c\}_D = \sum_{a=b,c} \left( \frac{\partial \mathcal{G}_a}{\partial O_b} \frac{\partial \mathcal{K}_a}{\partial O_c} - \frac{\partial \mathcal{G}_a}{\partial O_c} \frac{\partial \mathcal{K}_a}{\partial O_b} \right) \quad (9.22)$$

Por tanto, está claro que, para elecciones generales del gauge (es decir, para funciones arbitrarias  $\mathcal{G}_a$  y  $\mathcal{K}_a$ ), el álgebra resultante deja de ser canónica en el espacio de fases reducido, ya que el último corchete de Dirac es, en general, distinto de cero.

## 2.2 Inequivalencia con el espacio de fases de partida

En el argumento en el que se propuso originalmente la formulación del modelo AOS asociada al espacio de fases extendido [138], se asumió que una elección de gauge tal que  $\{P_b, P_c\}_D = 0$  conduce a un espacio de fases reducido  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  simplectomórfico al espacio de fases de Kantowski-Sachs  $\Gamma_{\text{KS}}$ . No obstante, la validez de una asunción tal se ve oscurecida por el hecho de que los parámetros de polimerización, que intervienen en la definición de los hamiltonianos parciales, son funciones de los propios hamiltonianos parciales. En efecto, en lo que sigue, demostramos explícitamente que  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  y  $\Gamma_{\text{KS}}$  son espacios de fases inequivalentes, incluso si se fija el gauge de tal modo que se cumpla que  $\{P_b, P_c\}_D = 0$ . Para ello, examinamos el álgebra de Dirac satisfecha por las variables de conexión y de tríada en  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  y mostramos que, a diferencia de lo que ocurre en  $\Gamma_{\text{KS}}$ , estas variables no forman pares canónicos.

Centramos nuestra atención en fijaciones del gauge que garanticen la conmutatividad de  $P_b$  y  $P_c$  bajo corchetes de Dirac. En otras palabras, restringimos el análisis a funciones  $\mathcal{G}_b$  y  $\mathcal{G}_c$  que satisfacen

$$\frac{\partial \mathcal{G}_b}{\partial O_b} \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} - \frac{\partial \mathcal{G}_b}{\partial O_c} \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_b} = \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial O_c} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} - \frac{\partial \mathcal{G}_c}{\partial O_b} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_c}. \quad (9.23)$$

Una aplicación directa de las Ecs. (9.19) y (9.20) conduce a los siguientes corchetes de Dirac no nulos para las variables de conexión y de tríada en  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$ :

$$\{b, p_b\}_D = G\gamma \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \right) \left( \quad \right) \quad (9.24)$$

$$\{c, p_c\}_D = 2G\gamma \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \left( \quad \right) \quad (9.25)$$

$$\{b, c\}_D = 2G^2\gamma^2 \left( \frac{\partial P_{\delta_c}}{\partial p_c} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial p_b} - \frac{\partial P_{\delta_b}}{\partial p_b} \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial p_c} \right) \left( \quad \right) \quad (9.26)$$

$$\{b, p_c\}_D = 2G^2\gamma^2 \left( \frac{\partial P_{\delta_b}}{\partial p_b} \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial c} - \frac{\partial P_{\delta_c}}{\partial c} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial p_b} \right) \left( \quad \right) \quad (9.27)$$

$$\{c, p_b\}_D = 2G^2\gamma^2 \left( \frac{\partial P_{\delta_c}}{\partial p_c} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial b} - \frac{\partial P_{\delta_b}}{\partial b} \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial p_c} \right) \left( \quad \right) \quad (9.28)$$

$$\{p_b, p_c\}_D = 2G^2\gamma^2 \left( \frac{\partial P_{\delta_c}}{\partial c} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial b} - \frac{\partial P_{\delta_b}}{\partial b} \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial c} \right) \left( \quad \right) \quad (9.29)$$

como se puede demostrar fácilmente haciendo uso de las propiedades de  $P_{\delta_b}$  y  $P_{\delta_c}$  comentadas en las Ecs. (9.15) y (9.16), y teniendo en cuenta que conmutan con los hamiltonianos parciales en el espacio de fases extendido  $\Gamma_{\text{ext}}$ . Claramente, los corchetes  $\{b, p_b\}_D$  y  $\{c, p_c\}_D$  resultan no ser constantes para una elección general de las funciones  $\mathcal{K}_b$  y  $\mathcal{K}_c$ . En particular, si  $\mathcal{K}_b$  y  $\mathcal{K}_c$  solo son funciones de su hamiltoniano parcial respectivo (como ocurre en la Ref. [138]), el resto de corchetes de Dirac (9.26)–(9.29) se anula, pero las variables de conexión siguen sin presentar corchetes canónicos con las de tríada. En efecto, los únicos casos no triviales en los que se recuperan valores constantes para  $\{b, p_b\}_D$  y  $\{c, p_c\}_D$  son aquellos en los que las funciones  $\mathcal{K}_b$  y  $\mathcal{K}_c$  son independientes de  $O_b$  y  $O_c$ , respectivamente. Sin embargo, en estos casos es fácil convencerse de que los corchetes restantes no pueden ser todos cero. Por último, el caso trivial en el que  $\mathcal{K}_b$  y  $\mathcal{K}_c$  son funciones constantes queda excluido por la propia construcción del modelo. Por ello, concluimos que las variables de conexión y de tríada no pueden formar un conjunto canónico en  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$ . Una consecuencia inmediata de esta conclusión es que el espacio de fases reducido es inequivalente al espacio de fases de Kantowski-Sachs.

Notablemente, el cambio en la estructura canónica de  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  con respecto a la de  $\Gamma_{\text{KS}}$  es precisamente el necesario para reconciliar la dinámica del modelo AOS con un hamiltoniano efectivo  $\underline{N}H_{\text{AOS}}^{\text{eff}}$  donde los parámetros cuánticos  $\delta_b$  y  $\delta_c$  vienen dados por funciones del espacio de fases que se comportan como constantes del movimiento sobre soluciones. Efectivamente, tras la imposición de las ligaduras  $\Psi_b = \Psi_c = 0$ , los corchetes de Dirac entre las variables  $b$  y  $p_b$  y los hamiltonianos parciales admiten las

siguientes expresiones:

$$\{b, O_b\}_D = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial O_b}{\partial p_b} \left( \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \{b, p_b\}_D + \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \left( \frac{\partial O_c}{\partial c} \{b, c\}_D + \frac{\partial O_c}{\partial p_c} \{b, p_c\}_D \right) \right) \right], \quad (9.30)$$

$$\{b, O_c\}_D = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial O_b}{\partial p_b} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \{b, p_b\}_D + \left( \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \right) \left( \frac{\partial O_c}{\partial c} \{b, c\}_D + \frac{\partial O_c}{\partial p_c} \{b, p_c\}_D \right) \right) \right], \quad (9.31)$$

$$-\{p_b, O_b\}_D = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial O_b}{\partial b} \left( \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \{b, p_b\}_D + \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \left( \frac{\partial O_c}{\partial c} \{c, p_b\}_D - \frac{\partial O_c}{\partial p_c} \{p_b, p_c\}_D \right) \right) \right], \quad (9.32)$$

$$-\{p_b, O_c\}_D = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial O_b}{\partial b} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \{b, p_b\}_D + \left( \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \right) \left( \frac{\partial O_c}{\partial c} \{c, p_b\}_D - \frac{\partial O_c}{\partial p_c} \{p_b, p_c\}_D \right) \right) \right], \quad (9.33)$$

con la función  $\beta$  definida como

$$\beta = \left( \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \right) \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_c} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{K}_b}{\partial O_c} \frac{\partial \mathcal{K}_c}{\partial O_b} \frac{\partial O_b}{\partial \delta_b} \frac{\partial O_c}{\partial \delta_c} \right), \quad (9.34)$$

que asumimos distinta de cero, seleccionando apropiadamente  $\mathcal{K}_b$  y  $\mathcal{K}_c$  si es necesario. Las ecuaciones análogas aplicadas a las variables del sector angular se pueden obtener reemplazando  $(b, p_b, \delta_b, O_b, \mathcal{K}_b)$  por  $(c, p_c, \delta_c, O_c, \mathcal{K}_c)$ . Insertando los valores de los corchetes de Dirac entre las variables de conexión y de tríada y teniendo en cuenta una vez más que  $P_{\delta_b}$  y  $P_{\delta_c}$  conmutan con los hamiltonianos parciales en el espacio de fases extendido, obtenemos

$$\{b, O_b\}_D = G\gamma \frac{\partial O_b}{\partial p_b}, \quad \{p_b, O_b\}_D = -G\gamma \frac{\partial O_b}{\partial b}, \quad (9.35)$$

$$\{c, O_c\}_D = 2G\gamma \frac{\partial O_c}{\partial p_c}, \quad \{p_c, O_c\}_D = -2G\gamma \frac{\partial O_c}{\partial c}, \quad (9.36)$$

siendo los corchetes restantes  $\{b, O_c\}_D$ ,  $\{p_b, O_c\}_D$ ,  $\{c, O_b\}_D$  y  $\{p_c, O_b\}_D$  iguales a cero. Dado que estos corchetes de Dirac definen los flujos hamiltonianos en el espacio de fases reducido, las ecuaciones mostradas sobre estas líneas gobiernan la dinámica reducida de las variables de conexión y de tríada. Es trivial comprobar que, de hecho, conducen exactamente a las ecuaciones dinámicas que se obtienen del hamiltoniano efectivo  $H_{\text{AOS}}^{\text{eff}}$  en una cosmología de Kantowski-Sachs cuando se tratan los parámetros de polimerización como constantes puras (siendo identificados *a posteriori* con funciones del valor de la masa  $m$  en cada solución). En otras palabras, las ecuaciones alcanzadas reproducen con exactitud la dinámica del modelo AOS para

la región interior de un agujero negro sin rotación ni carga. Vemos que, después de todo, resulta posible recuperar las ecuaciones del movimiento estudiadas en las Refs. [137, 138] con una deducción hamiltoniana rigurosa en la que los parámetros se tratan como constantes del movimiento genuinas gracias a la discrepancia encontrada entre las estructuras simplécticas en  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$  y en  $\Gamma_{\text{KS}}$ .

Antes de proceder a la cuantización del modelo, cabe pararse a comentar el contraste que presentan el enfoque seguido en el contexto de agujeros negros y el adoptado en el estudio de las cosmologías de Bianchi I (véanse la primera sección del Capítulo 3 y el Capítulo 4). En el primero de estos casos, hemos insistido en gran medida en que las ecuaciones dinámicas deben poder ser obtenidas a partir de un hamiltoniano efectivo mediante un formalismo canónico consistente en el que los parámetros de polimerización sean tratados de forma acorde a su naturaleza no trivial como funciones del espacio de fases desde el principio. No obstante, el procedimiento seguido en la implementación de la dinámica mejorada en cosmologías homogéneas pero anisótropas es muy distinto. En el estudio de sistemas cosmológicos en general, debido a que tomar parámetros de polimerización constantes resulta en propiedades físicas indeseables [43], se propuso adjudicarles una dependencia en el espacio de fases deducida al requerir que los circuitos de holonomía involucrados en la definición del hamiltoniano efectivo encierren un área física mínima [44], requisito que introduce en la LQC la información acerca de que existe un gap de área en la LQG. Sin embargo, en el proceso de cuantización de la ligadura escalar de cosmologías de Bianchi I (y, en particular, en su regularización), hemos ignorado la naturaleza no trivial de los parámetros de polimerización<sup>47</sup>. Solo una vez regularizado el hamiltoniano, identificamos los parámetros con las funciones del espacio de fases resultantes de la imposición de ciertas condiciones de área mínima sin una demostración sin elementos *ad hoc* de la validez de este procedimiento. En el contexto del estudio de agujeros negros, motivados por la potencial relevancia del escenario físico estudiado, hemos insistido en buscar una justificación a esta identificación motivada por un tratamiento canónico acorde desde el principio con la naturaleza no trivial de los parámetros, lo cual hemos logrado mediante una extensión del espacio de fases, dotando a la propuesta de una mayor consistencia. Obtener una justificación parecida en el caso de las cosmologías de Bianchi I (quizá siguiendo un procedimiento similar al empleado en el contexto de agujeros negros) es un problema abierto que sería interesante abordar en trabajos futuros.

### 3 Cuantización polimérica

De la discusión presentada en la sección anterior, parece evidente que una deducción hamiltoniana de las ecuaciones dinámicas requiere del uso de un álgebra simpléctica en la que las variables de Ashtekar-Barbero no son canónicas, a diferencia de lo que ocurre en la relatividad general. De hecho, dependiendo de cómo se fijen los parámetros de polimerización como funciones de los hamiltonianos parciales  $O_b$  y  $O_c$ ,

<sup>47</sup>Más concretamente, en el cómputo del corchete de Poisson de  $A_a^i$  con  $\{H_E^{\text{BI}}, V\}$  que lleva de la Ec. (3.2) a la Ec. (3.3), no hemos tenido en cuenta la dependencia de  $\bar{\mu}_i$  en las variables de tríada.

dicha álgebra puede ser muy complicada. En efecto, puede incluso darse el caso de que diferentes componentes de la conexión o de la tríada densitizada no conmuten entre sí. Un álgebra tal no se presta fácilmente a una representación cuántica sobre un espacio de Hilbert, al menos empleando las técnicas habituales de la cuantización polimérica. No obstante, hemos visto que la dinámica del modelo AOS se puede recuperar a partir de un hamiltoniano efectivo  $H_{\text{ext}}^{\text{eff}}$  en el espacio de fases extendido  $\Gamma_{\text{ext}}$ , por lo menos para una clase amplia de condiciones de fijación del gauge asociado a las ligaduras  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$ . Además, en el espacio de fases extendido  $\Gamma_{\text{ext}}$ , las variables de conexión y de tríada sí que componen un (sub)conjunto canónico. En este sentido, la línea de ataque más prometedora para la cuantización polimérica de la región interior de un agujero negro que conduce al modelo AOS es la que consiste en partir del siguiente hamiltoniano efectivo en  $\Gamma_{\text{ext}}$ :

$$H_{\text{ext}} = \underline{N} \frac{L_o}{G} (O_b^{\text{KS}} - O_c^{\text{KS}}) + \lambda_b \Psi_b^{\text{KS}} + \lambda_c \Psi_c^{\text{KS}}, \quad (9.37)$$

donde  $O_b^{\text{KS}}$  y  $O_c^{\text{KS}}$  son los hamiltonianos parciales densitizados<sup>48</sup> de las cosmologías de Kantowski-Sachs en la relatividad general [véase la Ec. (9.2)] y las ligaduras  $\Psi_b^{\text{KS}}$  y  $\Psi_c^{\text{KS}}$  se definen como

$$\Psi_b^{\text{KS}} = \mathcal{K}_b (O_b^{\text{KS}}, O_c^{\text{KS}}) \left( \delta_b, \quad \Psi_c^{\text{KS}} = \mathcal{K}_c (O_b^{\text{KS}}, O_c^{\text{KS}}) \left( \delta_c. \quad (9.38)$$

Estas últimas incorporan la elección de parámetros de polimerización que permite recuperar el modelo AOS en el régimen en el que dichos parámetros tienen valores absolutos pequeños [véanse las expresiones de los parámetros para masas grandes (7.44) y la Ec. (9.13)]. En lo que sigue, procedemos a cuantizar el álgebra canónica del espacio de fases extendido y a construir representaciones cuánticas de cada una de las ligaduras que integran el hamiltoniano  $H_{\text{ext}}$ .

En la LQG, se busca una representación del álgebra de holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero (con componentes  $A_a^i$ ) a lo largo de aristas y de los flujos de la tríada densitizada (con componentes  $E_i^a$ ) a través de superficies [22, 23]. Por un lado, en un espaciotiempo de tipo Kantowski-Sachs [véase la expresión de la métrica (9.1)], si nos centramos en superficies delimitadas por aristas paralelas a las direcciones coordenadas  $x$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , toda la información dinámica contenida en los flujos de la tríada densitizada queda descrita por las variables  $p_b$  y  $p_c$ . Por otro lado, los elementos de matriz de las holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero a lo largo de aristas en las direcciones coordenadas  $x$  y  $\theta$  están completamente caracterizados por exponenciales complejas de la forma

$$\mathcal{N}_{\mu_b} = e^{i b \mu_b / 2}, \quad \mathcal{N}_{\mu_c} = e^{i c \mu_c / 2}, \quad \mu_b, \mu_c \in \mathbb{R}. \quad (9.39)$$

Las holonomías a lo largo de aristas en la dirección  $\phi$  exhiben una dependencia más complicada en las variables de conexión  $b$  y  $c$  debido a la dependencia de  $A_\phi^i$  en el ángulo polar  $\theta$  [véase la Ec. (2.45)]. No obstante, dichas holonomías no son necesarias para la cuantización polimérica del sistema y, por lo tanto, no incluimos su

---

<sup>48</sup>Véase el pie de página 31.

expresión explícita aquí. Las exponenciales complejas  $\mathcal{N}_{\mu_b}$  y  $\mathcal{N}_{\mu_c}$  capturan pues toda la información relevante pertinente a la conexión gravitacional. Estas exponenciales satisfacen un álgebra con las variables de tríada que se puede interpretar como dos copias del álgebra que aparece en la descripción de cosmologías homogéneas e isotropas en la LQC [42]. Su representación triádica se suele denominar representación polimérica y se define en dos copias del espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable en la recta real con la medida de integración discreta [153]. Más concretamente, denominando este espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\text{LQC}}^{\text{kin}}$  y designando los elementos de una base de  $\mathcal{H}_{\text{LQC}}^{\text{kin}}$  de autoestados de la tríada mediante los kets  $|\mu_b, \mu_c\rangle$  con  $\mu_b, \mu_c \in \mathbb{R}$ , la representación polimérica del álgebra de Poisson de los pares  $(\mathcal{N}_{\mu_b}, p_b)$  y  $(\mathcal{N}_{\mu_c}, p_c)$  viene dada por [103]

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'_b} |\mu_b, \mu_c\rangle = |\mu_b + \mu'_b, \mu_c\rangle, \quad \hat{p}_b |\mu_b, \mu_c\rangle = \frac{G\gamma\mu_b}{2} |\mu_b, \mu_c\rangle, \quad (9.40)$$

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu'_c} |\mu_b, \mu_c\rangle = |\mu_b, \mu_c + \mu'_c\rangle, \quad \hat{p}_c |\mu_b, \mu_c\rangle = G\gamma\mu_c |\mu_b, \mu_c\rangle. \quad (9.41)$$

Para los pares canónicos restantes,  $(\delta_b, p_{\delta_b})$  y  $(\delta_c, p_{\delta_c})$ , adoptamos una representación de Schrödinger continua, con espacios de Hilbert dados simplemente por  $L^2(\mathbb{R}, d\delta_b)$  y  $L^2(\mathbb{R}, d\delta_c)$ . De esta manera, queda completada la cuantización del álgebra canónica en  $\Gamma_{\text{ext}}$  según un procedimiento completamente análogo al empleando en sistemas cosmológicos homogéneos e isotropos mínimamente acoplados a un campo escalar. En definitiva, el espacio de Hilbert cinemático de la teoría se puede escribir como el producto tensorial  $\mathcal{H}_T^{\text{kin}} = \mathcal{H}_{\text{LQC}}^{\text{kin}} \otimes L^2(\mathbb{R}, d\delta_b) \otimes L^2(\mathbb{R}, d\delta_c)$ . Una base generalizada de este espacio de Hilbert, a la que nos referiremos en ocasiones como la *base polimérica*, viene dada por los elementos  $|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle$ , normalizados de tal manera que

$$\langle \mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c | \mu'_b, \mu'_c, \delta'_b, \delta'_c \rangle = \delta_{\mu_b, \mu'_b} \delta_{\mu_c, \mu'_c} \delta(\delta_b - \delta'_b) \delta(\delta_c - \delta'_c), \quad (9.42)$$

donde  $\delta_{y, y'}$  es la delta de Kronecker y  $\delta(y - y')$  es la delta de Dirac. Llegados a este punto, el siguiente paso en la cuantización del sistema consiste en promover las tres ligaduras que lo restringen a operadores cuánticos sobre el espacio de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}_T^{\text{kin}}$ .

La representación del álgebra de holonomías y flujos presentada en las Ecs. (9.40) y (9.41) tiene la propiedad de que no es continua, por lo que no es posible definir operadores para las variables de conexión [26]. Dado que los hamiltonianos parciales de las cosmologías de Kantowski-Sachs dependen de potencias de estas variables, su promoción a operadores cuánticos requiere una regularización previa. Para ello, seguimos el procedimiento que es estándar en el campo de la LQC [22, 23, 78] y que ya hemos descrito en detalle en los capítulos anteriores. Tras imponer las simetrías del sistema, toda la dependencia del hamiltoniano en la conexión de Ashtekar-Barbero se puede reescribir en términos de (la versión integrada de) su tensor de curvatura asociado. Como ya hemos visto, se pueden obtener las distintas componentes de este tensor mediante el cálculo de holonomías en torno a circuitos cerrados contenidos en los distintos planos coordinados en el límite en el que el área física de dichos circuitos se reduce tanto como es físicamente posible [78]. En el Apéndice C, mostramos explícitamente la manera de llevar a cabo la regularización de la ligadura hamiltoniana

de Kantowski-Sachs, usando la prescripción seguida en el modelo AOS para fijar un área mínima [138]. En resumen, el hamiltoniano se regulariza postulando la existencia de un área física mínima para los circuitos de holonomía y truncando la expresión de las holonomías en torno a dichos circuitos a orden dominante en el tamaño de sus aristas, que están relacionadas íntimamente con los parámetros de polimerización  $\delta_b$  y  $\delta_c$ . Tras un cálculo sencillo, la versión regularizada del hamiltoniano de Kantowski-Sachs resulta poder escribirse precisamente como  $H_{\text{AOS}}^{\text{eff}}$  —que, recordemos, se corresponde con el objeto que denominábamos  $NH_{\text{eff}}$  en capítulos anteriores (7.4). Puesto que este hamiltoniano efectivo contiene versiones regularizadas ( $O_b$  y  $O_c$ ) de los hamiltonianos parciales  $O_b^{\text{KS}}$  y  $O_c^{\text{KS}}$ , prescribimos que la regularización de las ligaduras  $\Psi_b^{\text{KS}}$  y  $\Psi_c^{\text{KS}}$  se obtiene simplemente reemplazándolas por  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$ , dadas en la Ec. (9.12).

Las versiones regularizadas de los hamiltonianos parciales dependen de las variables de conexión únicamente a través de exponenciales complejas de la forma  $\mathcal{N}_{2\delta_b}$  y  $\mathcal{N}_{2\delta_c}$ , por lo que es posible construir operadores que los representen cuánticamente usando la base de elementos generalizados  $|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle$  y la representación polimérica de las Ecs. (9.40) y (9.41). Definamos en primer lugar la representación de las funciones trigonométricas  $\sin \delta_b b$  y  $\sin \delta_c c$  mediante su acción en un elemento de dicha base:

$$\widehat{\sin \delta_b b} |\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle = \frac{1}{2i} (|\mu_b + 2\delta_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle - |\mu_b - 2\delta_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle), \quad (9.43)$$

$$\widehat{\sin \delta_c c} |\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle = \frac{1}{2i} (|\mu_b, \mu_c + 2\delta_c, \delta_b, \delta_c\rangle - |\mu_b, \mu_c - 2\delta_c, \delta_b, \delta_c\rangle). \quad (9.44)$$

A continuación, siguiendo las reglas de orden de factores de la prescripción MMO (véase la Ref. [45] o el Capítulo 3), introduzcamos los operadores

$$\hat{\Omega}_b^{\delta_b} = \frac{1}{2\delta_b} |\hat{p}_b|^{1/2} \left[ \widehat{\sin \delta_b b} \widehat{\text{sgn}(p_b)} + \widehat{\text{sgn}(p_b)} \widehat{\sin \delta_b b} \right] |\hat{p}_b|^{1/2}, \quad (9.45)$$

$$\hat{\Omega}_c^{\delta_c} = \frac{1}{2\delta_c} |\hat{p}_c|^{1/2} \left[ \widehat{\sin \delta_c c} \widehat{\text{sgn}(p_c)} + \widehat{\text{sgn}(p_c)} \widehat{\sin \delta_c c} \right] |\hat{p}_c|^{1/2}, \quad (9.46)$$

para valores fijos y no nulos<sup>49</sup> de  $\delta_b$  y  $\delta_c$ , respectivamente, donde se emplea el teorema espectral para definir la representación cuántica de las funciones de las variables de tríada  $p_b$  y  $p_c$ .

Notemos que los operadores  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  aniquilan los estados correspondientes a  $p_b = 0$  y  $p_c = 0$  y los desacoplan del resto de estados del espacio de Hilbert cinemático. Adicionalmente, estos operadores no mezclan estados correspondientes a etiquetas  $\mu_b$  o  $\mu_c$  con distinto signo, por lo que de aquí en adelante nos centramos en estados tales que  $\mu_b > 0$  y  $\mu_c > 0$  sin pérdida de generalidad. En cada autoespacio generalizado de los parámetros cuánticos  $\hat{\delta}_b$  y  $\hat{\delta}_c$  con autovalores  $(\delta_b, \delta_c)$  fijos y distintos de cero, las acciones de los operadores  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  solo relacionan, respectivamente, elementos

<sup>49</sup>Puesto que  $\delta_b = 0$  y  $\delta_c = 0$  son puntos irrelevantes en el espacio de funciones de cuadrado integrable con respecto a la medida de Lebesgue, no es necesaria una definición detallada de los operadores  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  para valores nulos de los parámetros de polimerización para ningún fin práctico.



generalizados de la base polimérica de la forma

$$|(\varepsilon_b + 2n_b)|\delta_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle, \quad \varepsilon_b \in (0, 2], \quad (9.47)$$

$$|\mu_b, (\varepsilon_c + 2n_c)|\delta_c, \delta_b, \delta_c\rangle, \quad \varepsilon_c \in (0, 2], \quad (9.48)$$

donde tanto  $n_b$  como  $n_c$  son números naturales. Por tanto, en cada uno de estos autoespacios generalizados, la acción de los operadores  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  deja invariantes sectores de superselección claramente separables y etiquetados por pares  $(\varepsilon_b, \varepsilon_c)$ . En lo que sigue, consideramos uno cualquiera de estos sectores en cada autoespacio generalizado de los parámetros cuánticos. Además, asumimos por conveniencia que el operador  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  admite un inverso en cada sector de superselección. Entonces, podemos adoptar las siguientes representaciones de los hamiltonianos parciales en el espacio de Hilbert cinemático, caracterizadas por sus acciones sobre los elementos de la base considerada:

$$\begin{aligned} \hat{O}_b|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle &= \hat{O}_b^{\delta_b}|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle \\ &= -\frac{1}{2\gamma L_o} \left[ \hat{\Omega}_b^{\delta_b} + \gamma^2 |\hat{p}_b| \left( \hat{\Omega}_b^{\delta_b} \right)^{-1} |\hat{p}_b| \right] |\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle, \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\hat{O}_c|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle = \hat{O}_c^{\delta_c}|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle = \frac{1}{\gamma L_o} \hat{\Omega}_c^{\delta_c}|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle. \quad (9.50)$$

Si bien son admisibles otras representaciones, la aquí propuesta es especialmente simple y requiere un número mínimo de operadores básicos independientes para la definición de la versión cuántica de las ligaduras. Para obtener la representación de la ligadura hamiltoniana del modelo, basta con llevar a cabo la substracción de ambos operadores y multiplicar el resultado por el factor constante  $L_o/G$  [véase la Ec. (9.37)]. Esta ligadura desacopla inmediatamente todo estado asociado a variables de tríada nulas. En este sentido, en vista de la expresión de la métrica espaciotemporal (9.1), se puede decir que la singularidad central clásica desaparece ya a este nivel en la teoría cuántica (de forma totalmente análoga a la situación encontrada en el contexto cosmológico con la singularidad del Big Bang).

En lo que se refiere a las ligaduras restantes  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$ , podemos promoverlas a operadores cuánticos simplemente haciendo uso del teorema espectral para definir las funciones  $\mathcal{K}_b(\hat{O}_b, \hat{O}_c)$  y  $\mathcal{K}_c(\hat{O}_b, \hat{O}_c)$ . Para estas definiciones (y para la sección siguiente), asumimos que los operadores  $\hat{O}_b$  y  $\hat{O}_c$  son, al menos, esencialmente autoadjuntos. Claramente, dado que los hamiltonianos parciales determinan la masa del agujero negro en la teoría clásica, esta hipótesis es bastante razonable desde el punto de vista físico.

## 4 Estados físicos

La estrategia habitual para encontrar estados físicos en la LQC consiste en adoptar el enfoque de Dirac para la cuantización de sistemas ligados [28, 39, 40]. Dado un cierto espacio de Hilbert cinemático y una representación cuántica de las ligaduras, uno se suele centrar en el dual algebraico de un subconjunto denso del espacio de

Hilbert, en el que los operadores de ligadura se definen por sus acciones adjuntas. Los estados físicos se buscan allí requiriendo que sean aniquilados por los adjuntos de los operadores de ligadura. Finalmente, el conjunto de estados físicos se dota de una estructura de espacio de Hilbert mediante la introducción de un producto interno apropiado. En esta sección, seguimos este procedimiento para caracterizar formalmente los estados físicos de nuestra cuantización del modelo de Kantowski-Sachs extendido.

Dado que, en la búsqueda de los estados físicos de la teoría, resulta de gran utilidad conocer las propiedades espectrales de los operadores de ligadura, trabajamos de aquí en adelante con las siguientes hipótesis (para más detalles acerca del análisis espectral de operadores lineales en un espacio de Hilbert, véanse las Refs. [4, 12]):

- i) Para todo valor de los parámetros  $\delta_b$  y  $\delta_c$ , los operadores  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  son autoadjuntos (o pueden ser reemplazados por extensiones autoadjuntas únicas). Así, sus espectros son reales y solo contienen una parte continua y/o una parte puntual.
- ii) Las partes puntuales de los espectros de  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  son discretas. Esto implica que cada autovalor es un punto aislado en la recta real y tiene una multiplicidad finita.
- iii) Las partes continuas de los espectros de  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  son absolutamente continuas, es decir, no contienen una parte singular en la que la medida espectral no sea equivalente a la de Lebesgue.

Estas tres hipótesis parecen razonables, ya que son verificadas por la mayor parte de los operadores hamiltonianos de teorías cuánticas físicas.

Llegados a este punto, cabe mencionar que el operador  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  exhibe una propiedad notable que será de una importancia clave en lo que sigue: su espectro resulta ser independiente del valor del parámetro  $\delta_c$  en cualquier sector de superselección dado —recordemos, caracterizado por una etiqueta  $\varepsilon_c \in (0, 2]$ . Para mostrar que esta afirmación es cierta, consideremos el siguiente cambio de base polimérica en cada autoespacio generalizado de los operadores  $\hat{\delta}_b$  y  $\hat{\delta}_c$ :

$$|\mu_b, \mu_c, \delta_b, \delta_c\rangle \rightarrow |\tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c, \delta_b, \delta_c\rangle, \quad \tilde{\mu}_b = \frac{\mu_b}{|\delta_b|}, \quad \tilde{\mu}_c = \frac{\mu_c}{|\delta_c|}. \quad (9.51)$$

Por un lado, bajo la acción del operador triádico angular  $\hat{p}_c$ , los elementos generalizados de la nueva base se ven multiplicados por  $G\gamma|\delta_c|\tilde{\mu}_c$ . Por consiguiente, la acción del operador  $|\hat{p}_c|/|\delta_c|$  (o la de cualquier potencia fraccional de él), es independiente del valor del parámetro  $\delta_c$ . Por otro lado, el operador  $\widehat{\sin(|\delta_c|c)}$  simplemente genera desplazamientos de dos unidades en la etiqueta  $\tilde{\mu}_c$  de los elementos de la nueva base y la acción de  $\widehat{\text{sgn}(p_c)}$  tampoco depende del valor de  $\delta_c$ . En definitiva, la acción de  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  [dada por la Ec. (9.46)] es efectivamente independiente del valor fijo de  $\delta_c$  correspondiente al autoespacio generalizado donde se define. Por ello, lo mismo ocurre con su espectro. Naturalmente, esta afirmación también es válida en el caso del operador  $\hat{O}_c^{\delta_c}$ , ya que solo difiere de  $\hat{\Omega}_c^{\delta_c}$  en un factor multiplicativo constante e independiente del parámetro de polimerización angular.

Es obvio que el espectro de  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  también es independiente del valor fijo de  $\delta_b$  asociado al autoespacio generalizado en el que se define, ya que la forma de este operador es totalmente análoga a la de su contrapartida angular. Sin embargo, en contraste con el caso anterior, esta conclusión no se extiende al operador hamiltoniano parcial  $\hat{O}_b^{\delta_b}$ . De la definición de este operador (9.49), se puede observar que, salvo constantes multiplicativas irrelevantes, su acción sobre un estado generalizado  $|\tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c, \delta_b, \delta_c\rangle$  difiere de la de  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  en la acción de un operador proporcional al producto simetrizado del inverso de  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  y de una cierta potencia de  $|\hat{p}_b|/|\delta_b|$ . De acuerdo con nuestra discusión, las acciones de todos estos operadores son independientes de  $\delta_b$ . No obstante, el factor de proporcionalidad mencionado en el segundo término de la acción de  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  resulta ser  $\gamma^2 \delta_b^2$ . Dicho esto, dada la naturaleza de la dependencia comentada en el parámetro de polimerización radial, parece razonable esperar que, al menos, la acción de  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  varíe suavemente con  $\delta_b$ . Además, cabría esperar también que el término que contiene la contribución de  $\delta_b^2$  pueda ser tratado como una perturbación de  $\hat{\Omega}_b^{\delta_b}$  cuando  $|\delta_b|$  es lo suficientemente pequeño.

Puesto que asumimos que los operadores  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  son autoadjuntos, podemos emplear el teorema espectral para descomponer cualquier estado perteneciente al espacio de Hilbert cinemático en términos de sus autofunciones generalizadas [4, 12]. Por consiguiente, teniendo en cuenta las hipótesis consideradas en lo que concierne a las propiedades espectrales de estos operadores, cualquier elemento  $\langle \psi |$  dual al subconjunto de estados generados por los elementos de la base reescalada  $|\tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c, \delta_b, \delta_c\rangle$  admite una expresión de la forma

$$\int_{\mathbb{R}} d\delta_b \int_{\mathbb{R}} d\delta_c \iint_{\mathbb{R}} D\rho_{\delta_b} \iint_{\mathbb{R}} Dm \sum_{\tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c} \left( \psi(\delta_b, \delta_c, \rho_{\delta_b}, m) e_{\rho_{\delta_b}}^{\varepsilon_b}(\tilde{\mu}_b) \bar{e}_m^{\varepsilon_c}(\tilde{\mu}_c) \langle \tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c, \delta_b, \delta_c | \right). \quad (9.52)$$

Antes de seguir adelante, expliquemos esta fórmula. En primer lugar, consideramos un único sector de superselección de la base polimérica reescalada que es el mismo en todos los subespacios generalizados asociados a valores fijos de los parámetros  $\delta_b$  y  $\delta_c$ , a saber, el correspondiente al par  $(\varepsilon_b, \varepsilon_c)$ . Permitir que estas etiquetas dependan de los parámetros de polimerización parece artificial si en lo que estamos interesados es en estudiar la dinámica física del sistema, ya que la acción de los hamiltonianos parciales (y, por tanto, la de todos los operadores de ligadura) respeta estos sectores de superselección. Además, en muchas discusiones dentro del marco de la LQC, es habitual asumir que los resultados finales acerca de los observables físicos no son sensibles a la elección de sector de superselección [44, 45, 202]. Las sumas sobre  $\tilde{\mu}_b$  y  $\tilde{\mu}_c$  en la ecuación anterior se han de llevar a cabo sobre las semirredes asociadas respectivamente a las etiquetas  $\varepsilon_b$  y  $\varepsilon_c$  [véanse las Ecs. (9.47) y (9.48)]. Además, las medidas de integración  $D\rho_{\delta_b}$  y  $Dm$  se corresponden con las medidas espectrales asociadas con  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$ , mientras que  $\rho_{\delta_b}$  y  $m$  denotan puntos en sus espectros respectivos. La notación empleada enfatiza el hecho de que la medida espectral asociada a  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  es independiente del parámetro  $\delta_c$  y que los autovalores de este operador están relacionados directamente con la masa del agujero negro. Por otra parte,  $e_{\rho_{\delta_b}}^{\varepsilon_b}(\tilde{\mu}_b)$  y  $\bar{e}_m^{\varepsilon_c}(\tilde{\mu}_c)$  son, respectivamente, las autofunciones de los operadores  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  en la representación polimérica con nuestra elección de base generali-

zada. A diferencia del caso de  $\bar{e}_m^{\varepsilon c}(\tilde{\mu}_c)$  y en consonancia con nuestra discusión previa, es natural esperar que las autofunciones  $e_{\rho_{\delta_b}}^{\varepsilon b}(\tilde{\mu}_b)$  dependan del valor del parámetro  $\delta_b$ . Por simplicidad, nuestra notación no refleja explícitamente esta dependencia. En último lugar, en virtud de las propiedades espectrales de los operadores hamiltonianos que hemos asumido, cabe mencionar que siempre es posible reescribir las medidas espectrales  $D\rho_{\delta_b}$  y  $Dm$  en términos de la medida discreta y de la de Lebesgue, respectivamente. El cambio a estas medidas más familiares viene dado por la llamada *derivada de Radon-Nikodym* [203], que puede ser reabsorbida en la definición de las autofunciones  $e_{\rho_{\delta_b}}^{\varepsilon b}(\tilde{\mu}_b)$  y  $\bar{e}_m^{\varepsilon c}(\tilde{\mu}_c)$ . Por conveniencia, en lo que sigue llevamos a cabo esta reabsorción sin modificación alguna de la notación.

La imposición simultánea de los tres operadores de ligadura del sistema —a saber,  $\hat{O}_b = \hat{O}_c$ ,  $\hat{\Psi}_b$  y  $\hat{\Psi}_c$ — conduce a que la función de onda  $\psi$  haya de ser de la forma

$$\psi(\delta_b, \delta_c, \rho_{\delta_b}, m) = \xi(m) \delta_D[\delta_b - \mathcal{K}_b(m, m)] \delta_D[\delta_c - \mathcal{K}_c(m, m)] \delta_D(m - \rho_{\delta_b}), \quad (9.53)$$

*a priori* sin restricciones sobre la función  $\xi$ . En la ecuación anterior,  $\delta_D$  denota una distribución delta generalizada, cuya naturaleza (ya sea continua o discreta) depende de la medida de integración del espacio funcional donde se define. Discutamos las restricciones que imponen estas distribuciones sobre los estados físicos.

Consideremos un valor fijo (pero, por lo demás, arbitrario) del parámetro  $\delta_b$ . Sean  $\text{Sp}_b[\delta_b]$  y  $\text{Sp}_c$  los espectros respectivos de los operadores  $\hat{O}_b^{\delta_b}$  y  $\hat{O}_c^{\delta_c}$ . En principio, estos espectros podrían incluso depender de las semirredes de superselección escogidas en la construcción de los operadores hamiltonianos. Recordemos que el espectro de  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  no depende del valor de  $\delta_c$  y que la semirred correspondiente ha sido fijada para todos los valores posibles del par  $(\delta_b, \delta_c)$ . Dicho esto, es inmediato ver que la última delta en la Ec. (9.53) restringe la búsqueda de estados físicos a la intersección de ambos espectros. De acuerdo con las hipótesis consideradas, esta intersección contendrá de manera general intervalos continuos y un cierto conjunto de puntos aislados en la recta real. Por un lado, los intervalos mencionados resultan necesariamente del solapamiento de las partes continuas de  $\text{Sp}_b[\delta_b]$  y  $\text{Sp}_c$ . Por otro lado, el conjunto de puntos aislados recibe dos contribuciones: la intersección de la parte discreta (continua) de  $\text{Sp}_b[\delta_b]$  con la parte continua (discreta) de  $\text{Sp}_c$  y la intersección excepcional de las partes discretas de ambos espectros. Llamemos  $\text{ISp}[\delta_b]$  al subconjunto formado por esta última contribución y por los intervalos continuos comentados. Dado que puntos aislados en la parte continua de  $\text{Sp}_b[\delta_b]$  o  $\text{Sp}_c$  tienen medida cero, limitamos nuestras consideraciones a aquellas contribuciones en las que la integración sobre los autovalores generalizados  $\rho_{\delta_b}$  y  $m$  en la Ec. (9.52) se restringe a  $\text{ISp}[\delta_b]$ . Por consiguiente, este conjunto proporciona el soporte de los estados aniquilados por el operador de ligadura hamiltoniana de nuestro modelo.

Habiendo entendido las restricciones que impone la última delta en la Ec. (9.53) sobre los estados físicos, centrémonos ahora en el resto de distribuciones delta, que involucran los parámetros de regularización. Para ello, es conveniente definir el siguiente par de funciones:

$$\tilde{\mathcal{K}}_b(m) = \mathcal{K}_b(m, m), \quad \tilde{\mathcal{K}}_c(m) = \mathcal{K}_c(m, m), \quad m \in \mathbb{R}. \quad (9.54)$$

En lo referente a la segunda delta que aparece en la Ec. (9.53), mientras que el dominio de  $\tilde{\mathcal{K}}_c$  contenga  $\text{ISp}[\delta_b]$  (lo cual está garantizado por la construcción de esta función), siempre existe algún  $\delta_c \in \mathbb{R}$  que coincide con el valor resultante de  $\tilde{\mathcal{K}}_c(m)$ . Sin embargo, el valor de  $\tilde{\mathcal{K}}_b$  cuando se aplica a un punto arbitrario de  $\text{ISp}[\delta_b]$  no tiene por qué coincidir con  $\delta_b$ , como requiere la primera distribución delta de la Ec. (9.53). En vista de esta imposición y considerando todos los valores de  $\delta_b$  posibles, se sigue que el soporte de los estados físicos se restringe al subconjunto de  $\text{Sp}_c$  dado por

$$\text{CSp} = \left\{ m \in \text{ISp}[\delta_b = \tilde{\mathcal{K}}_b(m)] \right\} \quad (9.55)$$

En otras palabras,  $m$  pertenece a  $\text{CSp}$  si se encuentra, o bien en la intersección de las partes absolutamente continuas de  $\text{Sp}_c$  y  $\text{Sp}_b[\tilde{\mathcal{K}}_b(m)]$ , o bien en la intersección de las partes discretas de estos dos conjuntos. En definitiva, este argumento lleva a concluir que los estados físicos deberían admitir la siguiente expresión formal:

$$\langle \psi | = \int_{\text{CSp}} Dm \xi(m) \sum_{\tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c} \left( \tilde{\epsilon}_m^{\tilde{\mu}_b} \right)_{\delta_b = \tilde{\mathcal{K}}_b(m)} \tilde{\epsilon}_m^{\tilde{\mu}_c} \langle \tilde{\mu}_b, \tilde{\mu}_c, \delta_b = \tilde{\mathcal{K}}_b(m), \delta_c = \tilde{\mathcal{K}}_c(m) |. \quad (9.56)$$

Por ende, los estados físicos del sistema están completamente caracterizados por funciones de onda  $\xi$  con soporte en el conjunto espectral  $\text{CSp}$ : los perfiles de onda físicos del modelo AOS cuántico son simplemente funciones de la masa del agujero negro, con valores admisibles que han de pertenecer a un subconjunto muy concreto de la recta real determinado por las propiedades espectrales de los operadores cuánticos de la teoría. La medida  $Dm$  es un candidato natural para dotar a este conjunto de estados físicos con una estructura de Hilbert. En efecto, el espacio de Hilbert físico se puede tomar como el espacio de funciones  $\xi$  de cuadrado integrable sobre la masa del agujero negro. Por último, los observables físicos vienen dados por operadores lineales apropiados en este espacio de Hilbert. Algunos ejemplos obvios son el operador multiplicativo que representa cuánticamente la masa del agujero negro y los operadores de traslación entre puntos de  $\text{CSp}$ .

Para concluir esta sección, hagamos un breve comentario acerca de la viabilidad de que  $\text{CSp}$  contenga puntos de valor arbitrariamente grande que pertenezcan a conjuntos  $\text{ISp}[\delta_b]$  asociados a valores pequeños de  $|\delta_b|$ . Esta parte del soporte de los estados físicos es de especial interés, ya que se corresponde simultáneamente con masas grandes y parámetros de polimerización pequeños en valor absoluto. Es evidente que dicha región ha de existir para que la teoría cuántica sea físicamente satisfactoria. En primer lugar, recordemos que la función  $\tilde{\mathcal{K}}_b$  presenta el comportamiento dado en la Ec. (9.13) para valores grandes del valor absoluto de su argumento. Por consiguiente, para valores muy grandes de  $|m|$ , se trata de una función monótonamente decreciente, por lo que la correspondencia entre autovalores  $m$  y parámetros  $\delta_b$  es uno a uno (una afirmación similar es válida en el caso de  $\tilde{\mathcal{K}}_c$  y  $\delta_c$ ). Adicionalmente, esta correspondencia asigna claramente valores pequeños de  $|\delta_b|$  a valores grandes de  $|m|$ . Esto quiere decir que los estados físicos de la teoría pueden describir agujeros negros realistas, con masas que pueden tomar valores arbitrariamente grandes y que se asignan a parámetros de polimerización con valores absolutos pequeños, solo si

la unión de los conjuntos  $\text{ISp}[\delta_b]$  para valores pequeños de  $|\delta_b|$  contiene un intervalo continuo no acotado superiormente en valor absoluto. Esta condición se traduce a su vez en una restricción importante sobre las propiedades espectrales admisibles para los operadores  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  y  $\hat{O}_b^{\delta_b}$ . El espectro del primer operador ha de contener una parte absolutamente continua no acotada superiormente en valor absoluto, mientras que el espectro del segundo también ha de contener una parte absolutamente continua para valores pequeños de  $|\delta_b|$  tal que no esté acotada superiormente en valor absoluto cuando dicho parámetro es despreciable. En definitiva, vemos que solo ciertos operadores hamiltonianos con un tipo muy concreto de espectro conducen a una teoría cuántica capaz de describir agujeros negros realistas. De hecho, cabe mencionar que, si en una investigación futura se lleva a cabo un análisis espectral de estos operadores, se pueden emplear nuestros resultados para juzgar de manera inmediata si sus definiciones son físicamente aceptables. Lo que es más, si las ambigüedades en el orden de factores resultan ser irrelevantes para las propiedades espectrales de los hamiltonianos parciales, nuestros resultados realmente proporcionan un método para poner a prueba la cuantización polimérica misma del modelo.

## 5 Conclusión

En este capítulo, hemos obtenido una formulación hamiltoniana consistente del modelo AOS para la descripción efectiva de una extensión cuántica de lazos del interior de un agujero negro sin rotación ni carga. Disponiendo de un marco hamiltoniano tal, hemos procedido a la cuantización del sistema siguiendo las técnicas de la LQC y hemos llevado a cabo un estudio preliminar de los estados físicos de la teoría cuántica. Nuestros resultados dan respuesta a una serie de controversias sobre la viabilidad del modelo, debatidas desde que este se propuso en las Refs. [137, 138], a saber, si la deducción hamiltoniana de sus ecuaciones dinámicas es consistente con la identificación de los parámetros de polimerización con constantes del movimiento.

Tras una breve introducción del modelo y de la extensión del espacio de fases propuesta en la Ref. [138] (véase la Sec. 1), hemos mostrado en la Sec. 2 que, para deducir esta dinámica a partir de una formulación hamiltoniana, o bien hemos de abandonar la estructura simpléctica del sistema en la relatividad general, o bien hemos de extender el espacio de fases incluyendo los parámetros de polimerización (junto con momentos apropiadamente definidos) a modo de variables canónicas adicionales. En efecto, resulta imposible reproducir la formulación puramente relativista del sistema mediante una fijación del gauge y la reducción subsecuente del espacio de fases extendido, ya que las variables de conexión y de tríada dejan de verificar un álgebra canónica tras dicha reducción. Puesto que el álgebra relativista de conexiones y tríadas es la base fundamental de la construcción de la LQG como una teoría de holonomías y flujos, hemos decidido abordar la cuantización del sistema partiendo del espacio de fases extendido, donde se incluyen ligaduras adicionales que dictan la relación entre los parámetros de polimerización y constantes del movimiento.

Haciendo uso de la prescripción MMO, hemos representado el hamiltoniano parcial angular mediante un operador cuántico en una representación polimérica (véase la Sec.

3).- Notablemente, la contrapartida radial de dicho operador es el único ingrediente necesario para construir una representación del hamiltoniano parcial radial y, con ello, completar el proceso para promover la ligadura hamiltoniana a un operador sobre el espacio de Hilbert cinemático del sistema. Además, empleando las definiciones propuestas para los hamiltonianos parciales cuánticos, también hemos podido representar las ligaduras restantes, que fijan los parámetros  $\delta_b$  y  $\delta_c$ . Esta cuantización del modelo nos ha permitido discutir formalmente en la Sec. 4 la expresión general de los estados físicos, a condición de que los operadores hamiltonianos parciales presenten ciertas propiedades espectrales razonables. Más específicamente, hemos asumido que son (esencialmente) autoadjuntos y que sus espectros solo contienen partes discretas y absolutamente continuas. Basándonos en construcciones similares en contextos cosmológicos, nos hemos centrado en los mismos sectores de superselección en todas las contribuciones a los estados físicos. Con esta restricción, el espectro del hamiltoniano parcial  $\hat{O}_c^{\delta_c}$  resulta ser completamente independiente del valor del parámetro  $\delta_c$ . Por tanto, los estados físicos resultan poder ser caracterizados por una función de onda de la masa del agujero negro con soporte en un subconjunto específico del espectro del hamiltoniano parcial radial. Dicho subconjunto del espectro radial se puede entender como aquella parte de su intersección con el espectro angular que se asigna consistentemente a valores del parámetro  $\delta_b$ . Para finalizar, hemos discutido cuáles son los requisitos para que dicho subconjunto abarque el sector de interés astrofísico de agujeros negros muy masivos. La condición principal es que los espectros de los operadores que representan los hamiltonianos parciales contengan un intervalo continuo que no esté acotado superiormente en valor absoluto, tanto en el caso del espectro angular (que es independiente del valor del parámetro de polimerización asociado) como en el del espectro radial para valores de  $\delta_b$  despreciablemente pequeños en valor absoluto. Para determinar si se dan o no estas condiciones, es necesario llevar a cabo un análisis espectral de los operadores, lo que se abordará en trabajos futuros. La verificación de estos requisitos, junto con una elección apropiada de las funciones que relacionan la masa del agujero negro con los parámetros de polimerización (como, por ejemplo, del tipo propuesto en la Ref. [138]), garantizaría inmediatamente la existencia de estados físicos correspondientes a agujeros negros muy masivos con efectos cuánticos locales pequeños.

Nuestro trabajo constituye un avance importante hacia la construcción de una descripción cuántica de la región interior de un agujero negro sin rotación ni carga. Una teoría tal es necesaria para estudiar cómo los fenómenos gravitacionales cuánticos afectan a la propagación de perturbaciones en torno a geometrías de agujero negro. Dichas perturbaciones son de gran interés físico, ya que se pueden emplear, por ejemplo, en la descripción del *ringdown* de la señal asociada a una onda gravitatoria producida en el colapso de dos agujeros negros sin rotación. Ya existe un número de trabajos en el contexto del modelo AOS en los que se abordan estas cuestiones (véanse las Refs. [125, 146, 147]). No obstante, en todas las investigaciones citadas se asume que la dinámica perturbativa está gobernada por las ecuaciones relativistas, aunque con una métrica de fondo que no es exactamente la de Schwarzschild. Para entender genuinamente cómo la naturaleza cuántica de la gravedad afecta a la propagación de ondas gravitacionales en el modelo considerado, es imperativo cuantizar el sistema de

manera global, tratando las contribuciones geométricas y perturbativas al hamiltoniano de forma similar. Un procedimiento tal podría conducir a ecuaciones dinámicas para las perturbaciones que difieran de sus contrapartidas relativistas, como resulta ser el caso en el contexto análogo en cosmología (véase, e.g., la Ref. [182] o los Capítulos 5 y 6). El trabajo presentado en este capítulo proporciona las primeras bases teóricas sólidas sobre las que construir este ambicioso programa.



# Capítulo 10

## Conclusiones de la tesis

Los resultados presentados en esta tesis suponen un avance considerable en dos frentes relacionados y de máximo interés desde el punto de vista de la extracción de predicciones físicas a partir de la aplicación de las técnicas de gravedad cuántica de lazos, en el contexto de la disciplina que se conoce como cosmología cuántica de lazos. Por un lado, hemos examinado detalladamente un procedimiento alternativo de regularización de la ligadura hamiltoniana más cercano al empleado en el contexto de la gravedad cuántica de lazos y lo hemos aplicado a una variedad de sistemas cosmológicos, investigando en qué medida las predicciones físicas de la cosmología cuántica de lazos son robustas bajo esta ambigüedad. El reto final de esta investigación es el análisis del efecto de esta ambigüedad en la propagación de perturbaciones en torno a una cosmología homogénea e isótropa con secciones espaciales planas acoplada mínimamente a un campo escalar sujeto a un cierto potencial (sistema que, de acuerdo con las observaciones, es aproximadamente válido para describir la dinámica primordial del Universo). Por otro lado, hemos estudiado los fundamentos teóricos de un modelo propuesto recientemente para la descripción efectiva de agujeros negros sin rotación ni carga que pretende capturar correcciones de origen cuántico mediante la inclusión de dos parámetros de polimerización. Más concretamente, hemos investigado si es factible reconciliar el modelo con un tratamiento hamiltoniano consistente de dichos parámetros, acorde al requisito de que sean constantes del movimiento. Para ello, hemos seguido dos caminos. En primer lugar, hemos explorado la posibilidad de definir los parámetros como funciones de las dos constantes del movimiento que aparecen de forma inmediata en el modelo, lo que conduce a ecuaciones dinámicas más complejas que sugieren la consideración de un formalismo de dos tiempos. En segundo lugar, hemos examinado una extensión del espacio de fases de Kantowski-Sachs y su posterior reducción, con lo que hemos conseguido recuperar de manera consistente una dinámica reducida gobernada por las ecuaciones del movimiento del modelo original, gracias a una modificación de la estructura simpléctica con respecto a la del espacio de fases de partida en la relatividad general. En vista de estos resultados, hemos abordado la cuantización del modelo (ahora con una motivación canónica sólida) y hemos discutido la expresión formal de los estados físicos de la teoría cuántica resultante. Esto supone un primer paso hacia un programa para la potencial extracción de predicciones en lo que respecta a la emisión

y propagación de ondas gravitacionales en eventos de colisión de agujeros negros sin rotación.

## Resultados específicos

- Hemos llevado a cabo la cuantización del modelo de la cosmología cuántica de lazos homogénea e isótropa que resulta de la adopción del esquema de regularización alternativo sugerido por Dapor y Liegener, empleando la prescripción MMO de orden de factores. Hemos concluido que la teoría cuántica resultante sigue presentando las propiedades que hacen atractiva a esta prescripción en el marco de la cosmología cuántica de lazos estándar. De manera más precisa, hemos encontrado que, si bien la regularización independiente de la contribución lorentziana conduce a un operador hamiltoniano con una acción cualitativamente distinta sobre la base de autoestados del operador de volumen (porque esta acción vincula ahora un total de cinco autoestados del volumen con volúmenes separados en cuatro unidades), esto no impide el desacoplamiento del análogo cuántico de la singularidad inicial clásica y la superselección de subespacios de Hilbert idénticos a los del formalismo estándar. Además, hemos mostrado que la simplicidad de la estructura de los sectores de superselección (que, según los comentarios anteriores, tienen soporte en semirredes discretas de paso cuatro) posibilita la determinación de las autofunciones del operador hamiltoniano construido con la regularización alternativa a partir de los valores en los dos primeros puntos de la semirred asociada al sector de superselección. Aunque el número de datos libres parezca duplicarse con respecto al caso estándar, esto permite en cualquier caso que siga siendo posible obtener estas autofunciones de forma exacta y computacionalmente eficiente, a diferencia de la situación encontrada con otras prescripciones de orden de factores. La duplicación de datos libres puede explicarse por la existencia de una familia uniparamétrica de extensiones autoadjuntas del operador hamiltoniano, como han mostrado análisis de otros autores.
- Por primera vez en la literatura, hemos aplicado el nuevo procedimiento de regularización a la cuantización de cosmologías de Bianchi-I, que se pueden entender como la generalización anisótropa inmediata de los sistemas cosmológicos estudiados con anterioridad. En efecto, hemos regularizado la ligadura escalar correspondiente sin recurrir a las simetrías de las secciones espaciales y la hemos representado cuánticamente mediante un operador sobre el espacio de Hilbert cinemático del sistema, siguiendo las reglas de la prescripción MMO y adoptando un orden de factores general para las potencias del operador de volumen. La complejidad de la acción del operador hamiltoniano que resulta de este procedimiento no ha impedido extraer conclusiones acerca de la estructura de los sectores de superselección de la teoría. En contraste con el caso isótropo, hemos concluido que la forma funcional de la parte lorentziana conduce a una extensión de los sectores de superselección, ya que la acción repetida del operador hamiltoniano lorentziano resulta vincular estados con etiquetas de distinto signo. A pesar de la extensión identificada, los nuevos sectores de superselección presentan una estructura muy

similar a la de sus contrapartidas euclídeas y retienen la propiedad de que son separables. Finalmente, hemos discutido el mecanismo que impide esta extensión de los sectores de superselección en el límite isótropo y hemos observado que la diferencia clave entre estas dos situaciones es el número de grados de libertad triádicos independientes.

- Hemos construido un marco teórico para el tratamiento de perturbaciones cosmológicas en torno a un fondo homogéneo e isótropo, cuya contribución geométrica se regulariza siguiendo el esquema propuesto recientemente por Dapor y Liegener. Para ello, hemos empleado el formalismo de la cosmología cuántica híbrida, cuyo diseño ya se prestaba a la consideración inmediata de distintas representaciones de la geometría homogénea. Partiendo de un formalismo clásico canónico en términos de variables invariantes de gauge para las perturbaciones, hemos representado cuánticamente las ligaduras que integran el hamiltoniano del sistema a orden cuadrático en las variables perturbativas. En lo que se refiere al modo cero de la ligadura hamiltoniana, este procedimiento ha requerido la definición de dos operadores geométricos dignos de mención: los análogos cuánticos del momento del factor de escala logarítmico de la cosmología de fondo y de su cuadrado. Para ello, hemos propuesto dos definiciones alternativas, teniendo una de ellas una motivación teórica más sólida. Además, hemos estudiado una clase de soluciones físicamente interesantes a las ligaduras cuánticas que satisfacen un cierto *ansatz* de separación de variables. Con un número controlado de hipótesis, hemos deducido una ligadura maestra que gobierna la propagación de las perturbaciones. Finalmente, hemos estudiado las ecuaciones del movimiento que genera la contrapartida clásica de esa ligadura maestra, obteniendo ecuaciones de tipo oscilador armónico sin fricción, hiperbólicas en el régimen ultravioleta y con masas dependientes del tiempo (a través de la evolución del fondo) que encapsulan los efectos de la naturaleza cuántica de la gravedad (entre los que se incluyen aquellos relacionados con la consideración del procedimiento de regularización alternativo).
- Hemos estudiado las propiedades de positividad de las masas dependientes del tiempo correspondientes a los dos enfoques predominantes para el tratamiento de perturbaciones cosmológicas dentro del marco de la cosmología cuántica de lazos estándar: el formalismo híbrido y el formalismo de la métrica vestida. Este estudio extiende un análisis similar existente en la literatura para las masas obtenidas con la regularización estándar del hamiltoniano. Hemos escrito explícitamente las masas efectivas escalares y tensoriales que resultan de la aplicación del nuevo esquema de regularización siguiendo tanto el enfoque híbrido (con ambas propuestas de definición del cuadrado del momento del factor de escala logarítmico) como el de la métrica vestida, que presentan diferencias conceptuales importantes. Tras evaluarlas en los instantes más interesantes para la fijación de condiciones iniciales para la dinámica perturbativa, hemos llevado a cabo un análisis de su positividad con ciertas asunciones sobre el potencial al que está sujeto el modo cero del campo que hace las veces de inflatón. En el instante del rebote, las conclusiones que hemos extraído son cualitativamente idénticas a las obtenidas en el contexto de la regularización estándar: el formalismo híbrido conduce a masas efectivas

que son positivas en los escenarios que son fenomenológicamente relevantes de acuerdo con las observaciones del fondo cósmico de microondas, mientras que las masas del formalismo de la métrica vestida son generalmente negativas. Además, nuestros resultados ponen de manifiesto que la propuesta de definición del cuadrado del momento del factor de escala logarítmico con una fundamentación teórica más sólida conduce a una masa efectiva escalar con mejores propiedades. En la era de Sitter que emerge en la rama evolutiva anterior al rebote con el nuevo esquema de regularización, y que se presenta como otro candidato para la fijación de condiciones iniciales, hemos sido capaces de llevar a cabo un análisis similar usando una serie de hipótesis cuya validez para el caso de un potencial de masa constante hemos comprobado mediante una integración numérica de las ecuaciones dinámicas. Hemos concluido que las masas efectivas híbridas son también no negativas en este régimen para situaciones de dominio cinético, mientras que las correspondientes al enfoque de la métrica vestida son necesariamente negativas en los escenarios de interés físico. Estas propiedades, tanto en el instante del rebote como en la era de Sitter, ponen de relieve que el formalismo híbrido conduce a masas efectivas con mejores propiedades físicas —que permiten, por ejemplo, la construcción de estados adiabáticos para todas las longitudes de onda.

- En el ámbito de los agujeros negros, hemos abordado una de las críticas que ha recibido un modelo propuesto recientemente por Ashtekar, Olmedo y Singh (AOS) para la descripción efectiva de agujeros negros de Schwarzschild. En efecto, hemos investigado cómo reconciliar el modelo original con un tratamiento hamiltoniano estándar en el que los parámetros de polimerización sean tratados como genuinas funciones del espacio de fases que son constantes a lo largo de las trayectorias dinámicas. Para ello, hemos propuesto una estrategia más general para definir los parámetros como constantes del movimiento, rompiendo el desacoplamiento de dos sectores del espacio de fases que era una propiedad asumida en todas las investigaciones previas. Tras obtener las ecuaciones dinámicas que siguen de una definición tal, hemos observado que toda la complejidad producida por la naturaleza no trivial de los parámetros se ve contenida en un par de factores que pueden ser reabsorbidos mediante dos redefiniciones temporales, lo que conduce a la aparición de dos tiempos. Hemos discutido la viabilidad de un formalismo con estas características desde el punto de vista de su capacidad de proporcionar una métrica espaciotemporal efectiva que esté bien definida en la totalidad de la región comprendida entre los horizontes (de agujero) negro y blanco del modelo. Con este objetivo, hemos analizado detalladamente una relación implícita que vincula ambos tiempos para determinar en qué situaciones se puede expresar uno de ellos en términos del otro. Hemos concluido que es posible superar las obstrucciones encontradas haciendo uso de la libertad para definir independientemente el origen de cada una de las variables temporales del sistema, logrando así cubrir toda la región de interés mediante tres parches en los que es posible reexpresar la métrica efectiva en términos de un único tiempo, al menos para agujeros negros muy masivos. De hecho, la libertad adicional de nuestro formalismo de dos tiempos permite garantizar que la geometría efectiva resultante es regular y no degenerada a

lo largo de cualquier trayectoria dinámica, a diferencia de lo encontrado en trabajos anteriores. Finalmente, hemos llevado a cabo una comprobación de consistencia, según la cual ambos tiempos —que, en general, resultan ser aproximadamente similares solo en la región que abarca desde el horizonte negro hasta una vecindad de la superficie de transición— coinciden en el límite de masas infinitas, con lo que es posible recuperar los resultados de la relatividad general.

- Adicionalmente, hemos estudiado la totalidad del espacio de soluciones viables a las ecuaciones dinámicas del modelo original, lo cual es importante si se desea formular una versión cuántica eventualmente. Hemos examinado cuidadosamente el procedimiento de integración de las ecuaciones del movimiento que rigen la dinámica de las regiones interior y exterior del agujero, considerando la elección más general de constantes de integración. Este estudio modifica en partes sustanciales el análisis que se había llevado a cabo en la literatura, en el que se fijaban las constantes de integración apelando a un buen comportamiento en el límite clásico pero imponiendo restricciones excesivas al hacerlo. Hemos determinado que, exigiendo que las soluciones interior y exterior se puedan unir suavemente en los horizontes, la geometría total viene determinada por tres constantes de integración —una correspondiente a la masa ADM, otra asociada a la posición de los horizontes y la última relacionada con la localización de la superficie de transición. Hemos determinado que una fijación general de las constantes de integración como la considerada aquí deja huellas en las propiedades termodinámicas del sistema. En efecto, hemos mostrado que la temperatura de Hawking obtenida podría diferir de la hallada con la elección original más de lo que esta última varía con respecto a la puramente relativista. Finalmente, hemos discutido cómo distintas nociones de masa, que conducen a valores idénticos cuando se aplican al caso del espaciotiempo de Schwarzschild, pueden discrepar en situaciones más generales, como la considerada.
- Hemos demostrado que se pueden recuperar exactamente las ecuaciones dinámicas del modelo AOS siguiendo un procedimiento en el que se extiende el espacio de fases de Kantowski-Sachs (con el que se puede describir clásicamente la región interior de un agujero negro sin rotación ni carga) mediante la inclusión de los parámetros de polimerización como variables canónicas adicionales, con la posterior reducción mediante la imposición de dos ligaduras que dictan la expresión de los parámetros como funciones del espacio de fases restante. En efecto, esto es posible gracias a que la estructura simpléctica del espacio de fases reducido no es equivalente a la del espacio de partida en la relatividad general, ya que las variables de conexión y de tríada dejan de satisfacer un álgebra canónica tras la reducción. El álgebra reducida es tal que las contribuciones que resultan de tener en cuenta que los parámetros no son meros números constantes se cancelan. Con ello, hemos logrado dotar estas ecuaciones de una solidez de la que carecían, esclareciendo cómo resultan de un cálculo hamiltoniano consistente en el que se tiene en consideración la naturaleza no trivial de los parámetros como funciones del espacio de fases.
- Ya con un fundamento hamiltoniano riguroso para las ecuaciones dinámicas y con un buen entendimiento de su espacio de soluciones, hemos abordado la cuantización

del modelo partiendo del formalismo clásico que se basa en el espacio de fases extendido. En este formalismo se incluyen un total de tres ligaduras: la ligadura hamiltoniana y las dos ligaduras que dictan la dependencia de los parámetros cuánticos en el resto del espacio de fases. Notablemente, para llevar a cabo la representación cuántica de las ligaduras que restringen el sistema siguiendo las reglas de la prescripción MMO, solo hemos necesitado definir dos operadores geométricos, que además tienen una estructura completamente análoga, aunque cada uno de ellos actúa en un sector distinto de los dos del espacio de fases correspondiente a las geometrías. Asumiendo ciertas propiedades espectrales para los operadores que representan los dos hamiltonianos parciales del sistema, hemos discutido la expresión formal de los estados físicos de la teoría, que resultan estar totalmente caracterizados por funciones de onda de la masa del agujero negro con soporte en un subconjunto muy concreto del espectro del hamiltoniano parcial radial. Asimismo, hemos discutido cuáles son los requisitos que han de verificar los espectros de estos hamiltonianos parciales cuánticos para que existan estados físicos que describan agujeros negros muy masivos. Una vez que se disponga de un análisis espectral de dichos operadores, los resultados obtenidos permitirán discernir la admisibilidad física del modelo.

Los resultados recogidos en esta tesis sientan las bases teóricas necesarias para afianzar nuestro entendimiento de los efectos que deja la ambigüedad existente en la regularización de la ligadura hamiltoniana en los observables de carácter cosmológico. Asimismo, estos resultados abren el camino a un estudio riguroso de agujeros negros dentro del marco de la teoría cuántica de lazos, del que se podrían extraer potencialmente predicciones observacionales con las que poner a prueba la teoría subyacente, por ejemplo sobre la emisión de ondas gravitacionales en los últimos estadios de procesos de colisión.

# Publicaciones

La investigación conducente a la redacción de la presente tesis doctoral ha dado lugar a la publicación de un total de ocho artículos en revistas internacionales:

- A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Martín-Benito–Mena Marugán–Olmedo prescription for the Dapor-Liegener model of loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **99**, 083505 (2019).
- A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Dapor-Liegener formalism of loop quantum cosmology for Bianchi I spacetimes, *Phys. Rev. D* **101**, 023520 (2020).
- L. Castelló Gomar, A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Primordial perturbations in the Dapor-Liegener model of hybrid loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **102**, 083524 (2020).
- A. García-Quismondo, G. A. Mena Marugán y G. Sánchez-Pérez, The time-dependent mass of cosmological perturbations in loop quantum cosmology: Dapor–Liegener regularization, *Class. Quantum Grav.* **37**, 195003 (2020).
- A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Exploring alternatives to the Hamiltonian calculation of the Ashtekar-Olmedo-Singh black hole solution, *Front. Astron. Space Sci.* **8**, 701723 (2021).
- A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Two-time alternative to the Ashtekar-Olmedo-Singh black hole interior, *Phys. Rev. D* **106**, 023532 (2022).
- B. Elizaga Navascués, A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Space of solutions of the Ashtekar-Olmedo-Singh effective black hole model, *Phys. Rev. D* **106**, 063516 (2022).
- B. Elizaga Navascués, A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Hamiltonian formulation and loop quantization of a recent extension of the Kruskal spacetime, *Phys. Rev. D* **106**, 043531 (2022).

Conviene aclarar que, aunque el primero de estos artículos fue publicado antes del periodo académico correspondiente al Doctorado, se incluye aquí por pertenecer a la misma línea de investigación.

# Referencias

- [1] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity* (Chicago University Press, Chicago, 1984).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloe, *Quantum Mechanics* (John Wiley & Sons, Nueva York, 1977), Vol. 1.
- [4] A. Galindo y P. Pascual, *Quantum Mechanics I* (Springer-Verlag, Berlín, 1990).
- [5] N. D. Birrel y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [6] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago University Press, Chicago, 1994).
- [7] S. W. Hawking, Black hole explosions, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [8] P. C. W. Davies, Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics, *J. Phys. A* **8**, 609 (1975).
- [9] W. G. Unruh, Notes on black-hole evaporation, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [10] L. Parker, Quantized fields and particle creation in expanding universes. I, *Phys. Rev.* **183**, 1057 (1969).
- [11] L. Parker, Quantized fields and particle creation in expanding universes. II, *Phys. Rev. D* **3**, 346 (1971).
- [12] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis* (Academic Press, San Diego, 1980).
- [13] J. Cortez, G. A. Mena-Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, Criteria for the determination of time dependent scalings in the Fock quantization of scalar fields with a time dependent mass in ultrastatic spacetimes, *Phys. Rev. D* **86**, 104003 (2012).
- [14] J. Cortez, G. A. Mena-Marugán, J. Olmedo y J. M. Velhinho, A uniqueness criterion for the Fock quantization of scalar fields with time-dependent mass, *Class. Quantum Grav.* **28**, 172001 (2011).
- [15] L. Castelló-Gomar, J. Cortez, D. Martín-de-Blas, G. A. Mena-Marugán y J. M. Velhinho, Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields in spatially flat cosmological spacetimes, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 001 (2012).



- [16] J. Cortez, L. Fonseca, D. Martín-de Blas y G. A. Mena-Marugán, Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields under mode preserving canonical transformations varying in time, *Phys. Rev. D* **87**, 044013 (2013).
- [17] J. Cortez, D. Martín-de Blas, G. A. Mena-Marugán y J. M. Velhinho, Massless scalar field in de Sitter spacetime: Unitary quantum time evolution, *Class. Quantum Grav.* **30**, 075015 (2013).
- [18] L. Castelló-Gomar y G. A. Mena-Marugán, Uniqueness of the Fock quantization of scalar fields and processes with signature change in cosmology, *Phys. Rev. D* **89**, 084052 (2014).
- [19] M. B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987), Vol. 1.
- [20] L. Modesto y L. Rachwal, Nonlocal quantum gravity: A review, *Int. J. Mod. Phys. D* **26**, 1730020 (2017).
- [21] R. Loll, Quantum gravity from causal dynamical triangulations: A review, *Class. Quantum Grav.* **37**, 013002 (2020).
- [22] A. Ashtekar y J. Lewandowski, Background independent quantum gravity: A status report, *Class. Quantum Grav.* **21**, R53 (2004).
- [23] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [24] A. Ashtekar, New variables for classical and quantum gravity, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [25] J. Fernando Barbero, Real polynomial formulation of general relativity in terms of connections, *Phys. Rev. D* **49**, 6935 (1994).
- [26] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão y T. Thiemann, Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom, *J. Math. Phys.* **36**, 6456 (1995).
- [27] B. S. DeWitt, Quantum theory of gravity. I. The canonical theory, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [28] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School Monograph Series, Nueva York, 1964), Vol. 2.
- [29] M. Bojowald, G. Calcagni y S. Tsujikawa, Observational constraints on loop quantum cosmology, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 211302 (2011).
- [30] I. Agullo y N. A. Morris, Detailed analysis of the predictions of loop quantum cosmology for the primordial power spectra, *Phys. Rev. D* **92**, 124040 (2015).
- [31] L. Castelló-Gomar, G. A. Mena-Marugán, D. Martín-de Blas y J. Olmedo, Hybrid loop quantum cosmology and predictions for the cosmic microwave background, *Phys. Rev. D* **96**, 103528 (2017).
- [32] E. Wilson-Ewing, Testing loop quantum cosmology, *C. R. Phys.* **18**, 207 (2017).

- [33] B. Elizaga-Navascués, D. Martín-de Blas y G. A. Mena-Marugán, The vacuum state of primordial fluctuations in hybrid loop quantum cosmology, *Universe* **4**, 98 (2018).
- [34] A. Ashtekar, B. Gupt, D. Jeong y V. Sreenath, Alleviating the tension in cosmic microwave background using Planck-scale physics, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 051302 (2020).
- [35] B.-F. Li, J. Olmedo, P. Singh y A. Wang, Primordial scalar power spectrum from the hybrid approach in loop cosmologies, *Phys. Rev. D* **102**, 126025 (2020).
- [36] B. Elizaga-Navascués y G. A. Mena-Marugán, Analytical investigation of pre-inflationary effects in the primordial power spectrum: From general relativity to hybrid loop quantum cosmology, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09**, 030 (2021).
- [37] I. Agullo, D. Kranas y V. Sreenath, Anomalies in the cosmic microwave background from a cosmic bounce, *Gen. Relativ. Gravit.* **53**, 17 (2021).
- [38] M. Bojowald, Loop quantum cosmology, *Living Rev. Relativity* **11**, 4 (2008).
- [39] A. Ashtekar y P. Singh, Loop quantum cosmology: A status report, *Class. Quantum Grav.* **28**, 213001 (2011).
- [40] G. A. Mena-Marugán, A brief introduction to loop quantum cosmology, *AIP Conf. Proc.* **1130**, 89 (2009).
- [41] K. Banerjee, G. Calcagni y M. Martín-Benito, Introduction to loop quantum cosmology, *SIGMA* **8**, 016 (2012).
- [42] A. Ashtekar, M. Bojowald y J. Lewandowski, Mathematical structure of loop quantum cosmology, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 233 (2003).
- [43] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, Quantum nature of the big bang: An analytical and numerical investigation, *Phys. Rev. D* **73**, 124038 (2006).
- [44] A. Ashtekar, T. Pawłowski y P. Singh, Quantum nature of the big bang: Improved dynamics, *Phys. Rev. D* **74**, 084003 (2006).
- [45] M. Martín-Benito, G. A. Mena-Marugán y J. Olmedo, Further improvements in the understanding of isotropic loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **80**, 104015 (2009).
- [46] A. Ashtekar, T. Pawłowski, P. Singh y K. Vandersloot, Loop quantum cosmology of  $k = -1$  FRW models, *Phys. Rev. D* **75**, 024035 (2007).
- [47] L. Szulc, W. Kamiński y J. Lewandowski, Closed FRW model in loop quantum cosmology, *Class. Quantum Grav.* **24**, 2621 (2007).
- [48] T. Pawłowski y A. Ashtekar, Positive cosmological constant in loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **85**, 064001 (2012).
- [49] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, Loop quantum cosmology of Bianchi type-I models, *Phys. Rev. D* **79**, 083535 (2009).

- [50] A. Ashtekar y E. Wilson-Ewing, Loop quantum cosmology of Bianchi type II models, *Phys. Rev. D* **80**, 123532 (2009).
- [51] E. Wilson-Ewing, Loop quantum cosmology of Bianchi type IX models, *Phys. Rev. D* **82**, 043508 (2010).
- [52] D. W. Chiou, Loop quantum cosmology in Bianchi type I models: Analytical investigation, *Phys. Rev. D* **75**, 024029 (2007).
- [53] D. W. Chiou, Effective dynamics, big bounces and scaling symmetry in Bianchi type I loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **76**, 124037 (2007).
- [54] M. Martín-Benito, G. A. Mena-Marugán y T. Pawłowski, Loop quantization of vacuum Bianchi I cosmology, *Phys. Rev. D* **78**, 064008 (2008).
- [55] M. Martín-Benito, G. A. Mena-Marugán y T. Pawłowski, Physical evolution in loop quantum cosmology: The example of the vacuum Bianchi I model, *Phys. Rev. D* **80**, 084038 (2009).
- [56] L. J. Garay, M. Martín-Benito y G. A. Mena-Marugán, Hybrid quantum Gowdy cosmology: Combining loop and Fock quantizations, *Phys. Rev. D* **78**, 083516 (2008).
- [57] M. Martín-Benito y G. A. Mena-Marugán, Hybrid quantum cosmology: Combining loop and Fock quantizations, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 2820 (2009).
- [58] L. J. Garay, M. Martín-Benito y G. A. Mena-Marugán, Inhomogeneous loop quantum cosmology: Hybrid quantization of the Gowdy model, *Phys. Rev. D* **82**, 044048 (2010).
- [59] M. Martín-Benito, G. A. Mena-Marugán y E. Wilson-Ewing, Hybrid quantization: From Bianchi I to the Gowdy model, *Phys. Rev. D* **82**, 084012 (2010).
- [60] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena-Marugán y J. Olmedo, Hybrid quantization of an inflationary universe, *Phys. Rev. D* **86**, 024003 (2012).
- [61] M. Fernández-Méndez, G. A. Mena-Marugán y J. Olmedo, Hybrid quantization of an inflationary model: The flat case, *Phys. Rev. D* **88**, 044013 (2013).
- [62] L. Castelló-Gomar, M. Fernández-Méndez, G. A. Mena-Marugán y J. Olmedo, Cosmological perturbations in hybrid loop quantum cosmology: Mukhanov-Sasaki variables, *Phys. Rev. D* **90**, 064015 (2014).
- [63] L. Castelló-Gomar, M. Martín-Benito y G. A. Mena-Marugán, Gauge-invariant perturbations in hybrid quantum cosmology, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 045 (2015).
- [64] L. Castelló-Gomar, M. Martín-Benito y G. A. Mena-Marugán, Quantum corrections to the Mukhanov-Sasaki equations, *Phys. Rev. D* **93**, 104025 (2016).
- [65] D. Martín de Blas y J. Olmedo, Primordial power spectra for scalar perturbations in loop quantum cosmology, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06**, 029 (2016).

- [66] F. Benítez-Martínez y J. Olmedo, Primordial tensor modes of the early Universe, *Phys. Rev. D* **93**, 124008 (2016).
- [67] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, Quantum gravity extension of the inflationary scenario, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 251301 (2012).
- [68] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, Extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the Planck era, *Phys. Rev. D* **87**, 043507 (2013).
- [69] I. Agullo, A. Ashtekar y W. Nelson, The pre-inflationary dynamics of loop quantum cosmology: Confronting quantum gravity with observations, *Class. Quantum Grav.* **30**, 085014 (2013).
- [70] I. Agullo, W. Nelson y A. Ashtekar, Preferred instantaneous vacuum for linear scalar fields in cosmological spacetimes, *Phys. Rev. D* **91**, 064051 (2015).
- [71] V. Taveras, Corrections to the Friedmann equations from loop quantum gravity for a universe with a free scalar field, *Phys. Rev. D* **78**, 064072 (2008).
- [72] P. Singh, Curvature invariants, geodesics, and the strength of singularities in Bianchi I loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **85**, 104011 (2012).
- [73] S. Saini y P. Singh, Geodesic completeness and the lack of strong singularities in effective loop quantum Kantowski-Sachs spacetime, *Class. Quantum Grav.* **33**, 245019 (2016).
- [74] S. Saini y P. Singh, Resolution of strong singularities and geodesic completeness in loop quantum Bianchi II spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **34**, 235006 (2017).
- [75] S. Saini y P. Singh, Generic absence of strong singularities in loop quantum Bianchi IX spacetimes, *Class. Quantum Grav.* **35**, 065014 (2018).
- [76] P. Tarrío, M. Fernández-Méndez y G. A. Mena-Marugán, Singularity avoidance in the hybrid quantization of the Gowdy model, *Phys. Rev. D* **88**, 084050 (2013).
- [77] P. Singh, Are loop quantum cosmos never singular?, *Class. Quantum Grav.* **26**, 125005 (2009).
- [78] T. Thiemann, Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity, *Phys. Lett.* **380B**, 257 (1996).
- [79] T. Thiemann, Quantum Spin Dynamics (QSD), *Class. Quantum Grav.* **15**, 839 (1998).
- [80] M. Assanioussi, J. Lewandowski e I. Mäkinen, New scalar constraint operator for loop quantum gravity, *Phys. Rev. D* **92**, 044042 (2015).
- [81] E. Alesci, M. Assanioussi y J. Lewandowski, Curvature operator for loop quantum gravity, *Phys. Rev. D* **89**, 124017 (2014).
- [82] J. Engle, Relating loop quantum cosmology to loop quantum gravity: Symmetric sectors and embeddings, *Class. Quantum Grav.* **24**, 5777 (2007).

- [83] J. Brunnemann y T. A. Koslowski, Symmetry reduction of loop quantum gravity, *Class. Quantum Grav.* **28**, 245014 (2011).
- [84] J. Engle, Embedding loop quantum cosmology without piecewise linearity, *Class. Quantum Grav.* **30**, 085001 (2013).
- [85] T. Pawłowski, Observations on interfacing loop quantum gravity with cosmology, *Phys. Rev. D* **92**, 124020 (2015).
- [86] C. Beetle, J. Engle, M. E. Hogan y P. Mendça, Diffeomorphism invariant cosmological sector in loop quantum gravity, *Class. Quantum Grav.* **34**, 225009 (2017).
- [87] J. Yang, Y. Ding y Y. Ma, Alternative quantization of the Hamiltonian in loop quantum cosmology, *Phys. Lett.* **682B**, 1 (2009).
- [88] A. Dapor y K. Liegener, Cosmological effective Hamiltonian from full loop quantum gravity dynamics, *Phys. Lett.* **785B**, 506 (2018).
- [89] K. Giesel y T. Thiemann, Algebraic quantum gravity (AQG): I. Conceptual setup, *Class. Quantum Grav.* **24**, 2465 (2007).
- [90] M. Assanioussi, A. Dapor, K. Liegener y T. Pawłowski, Emergent de Sitter epoch of the quantum cosmos from loop quantum cosmology, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 081303 (2018).
- [91] M. Assanioussi, A. Dapor, K. Liegener y T. Pawłowski, Emergent de Sitter epoch of the loop quantum cosmos: A detailed analysis, *Phys. Rev. D* **100**, 084003 (2019).
- [92] B.-F. Li, P. Singh y A. Wang, Towards cosmological dynamics from loop quantum gravity, *Phys. Rev. D* **97**, 084029 (2018).
- [93] B.-F. Li, P. Singh y A. Wang, Qualitative dynamics and inflationary attractors in loop cosmology, *Phys. Rev. D* **98**, 066016 (2018).
- [94] B.-F. Li, P. Singh y A. Wang, Genericness of pre-inflationary dynamics and probability of the desired slow-roll inflation in modified loop quantum cosmologies, *Phys. Rev. D* **100**, 063513 (2019).
- [95] J. de Haro, The Dapor-Liegener model of loop quantum cosmology: A dynamical analysis, *Eur. Phys. J. C* **78**, 926 (2018).
- [96] I. Agullo, Primordial power spectrum from the Dapor-Liegener model of loop quantum cosmology, *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 91 (2018).
- [97] K. Liegener y P. Singh, Gauge invariant bounce from loop quantum gravity, *Class. Quantum Grav.* **37**, 085015 (2020).
- [98] J. Yang, C. Zhang y Y. Ma, Loop quantum cosmology from an alternative Hamiltonian, *Phys. Rev. D* **100**, 064026 (2019).
- [99] L. Modesto, The Kantowski-Sachs spacetime in loop quantum gravity, *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 2235 (2006).

- [100] L. Modesto, Loop quantum black hole, *Class. Quantum Grav.* **23**, 5587 (2006).
- [101] L. Modesto, Gravitational collapse in loop quantum gravity, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 357 (2008).
- [102] A. Ashtekar y M. Bojowald, Black hole evaporation: A paradigm, *Class. Quantum Grav.* **22**, 3349 (2005).
- [103] A. Ashtekar y M. Bojowald, Quantum geometry and the Schwarzschild singularity, *Class. Quantum Grav.* **23**, 391 (2006).
- [104] D. Cartin y G. Khanna, Wave functions for the Schwarzschild black hole interior, *Phys. Rev. D* **73**, 104009 (2006).
- [105] M. Bojowald, D. Cartin y G. Khanna, Lattice refining loop quantum cosmology, anisotropic models, and stability, *Phys. Rev. D* **76**, 064018 (2007).
- [106] C. G. Boehmer y K. Vandersloot, Loop quantum dynamics of the Schwarzschild interior, *Phys. Rev. D* **76**, 1004030 (2007).
- [107] M. Campiglia, R. Gambini y J. Pullin, Loop quantization of spherically symmetric midisuperspaces: The interior problem, *AIP Conf. Proc.* **977**, 52 (2008).
- [108] S. Sabharwal y G. Khanna, Numerical solutions to lattice-refined models in loop quantum cosmology, *Class. Quantum Grav.* **25**, 085009 (2008).
- [109] D. W. Chiou, Phenomenological loop quantum geometry of the Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D* **78**, 064040 (2008).
- [110] D. W. Chiou, Phenomenological dynamics of loop quantum cosmology in Kantowski-Sachs spacetime, *Phys. Rev. D* **78**, 044019 (2008).
- [111] J. Brannlund, S. Kloster y A. DeBenedictis, Evolution of  $\Lambda$  black holes in the minisuperspace approximation of loop quantum gravity, *Phys. Rev. D* **79**, 084023 (2009).
- [112] R. Gambini, J. Olmedo y J. Pullin, Quantum black holes in loop quantum gravity, *Class. Quantum Grav.* **31**, 095009 (2014).
- [113] R. Gambini y J. Pullin, Hawking radiation from a spherical loop quantum gravity black hole, *Class. Quantum Grav.* **31**, 115003 (2014).
- [114] N. Dadhich, A. Joe y P. Singh, Emergence of the product of constant curvature spaces in loop quantum cosmology, *Class. Quantum Grav.* **32**, 185006 (2015).
- [115] H. M. Haggard y C. Rovelli, Quantum gravity effects outside the horizon: spark black to white hole tunneling, *Phys. Rev. D* **92**, 104020 (2015).
- [116] A. Joe y P. Singh, Kantowski-Sachs spacetime in loop quantum cosmology: Bounds on expansion and shear scalars and the viability of quantization prescriptions, *Class. Quantum Grav.* **32**, 015009 (2015).
- [117] A. Corichi y P. Singh, Loop quantization of the Schwarzschild interior revisited, *Class. Quantum Grav.* **33**, 055006 (2016).

- [118] M. Campiglia, R. Gambini, J. Olmedo y J. Pullin, Quantum self-gravitating collapsing matter in a quantum geometry, *Class. Quantum Grav.* **33**, 18LT01 (2016).
- [119] J. Cortez, W. Cuervo, H. A. Morales-Técotl y J. C. Ruelas, Effective loop quantum geometry of Schwarzschild interior, *Phys. Rev. D* **95**, 064041 (2017).
- [120] J. Olmedo, S. Saini y P. Singh, From black holes to white holes: A quantum gravitational, symmetric bounce, *Class. Quantum Grav.* **34**, 225011 (2017).
- [121] A. Yonika, G. Khanna y P. Singh, Von-Neumann stability and singularity resolution in loop quantized Schwarzschild black hole, *Class. Quantum Grav.* **35**, 045007 (2018).
- [122] E. Bianchi, M. Christodoulou, F. D'Ambrosio, H. M. Haggard y C. Rovelli, White holes as remnants: A surprising scenario for the end of a black hole, *Class. Quantum Grav.* **35**, 225003 (2018).
- [123] N. Bodendorfer, F. M. Mele y J. Münch, Effective quantum extended spacetime of polymer Schwarzschild black hole, *Class. Quantum Grav.* **36**, 195015 (2019).
- [124] E. Alesci, S. Bahrami y D. Pranzetti, Quantum gravity predictions for black hole interior geometry, *Phys. Lett.* **797B**, 134908 (2019).
- [125] M. Bouhmadi-López, S. Brahma, C.-Y. Chen, P. Chen y D.-h. Yeom, A consistent model of non-singular Schwarzschild black hole in loop quantum gravity and its quasinormal modes, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **07**, 066 (2020).
- [126] M. Bojowald, Black hole models in loop quantum gravity, *Universe* **6**, 125 (2020).
- [127] J. Ben Achour, S. Brahma, S. Mukohyama y J.-P. Uzan, Towards consistent black-to-white hole bounces from matter collapse, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09**, 020 (2020).
- [128] R. Gambini, J. Olmedo y J. Pullin, Spherically symmetric loop quantum gravity: Analysis of improved dynamics, *Class. Quantum Grav.* **37**, 205012 (2020).
- [129] J. G. Kelly, R. Santacruz y E. Wilson-Ewing, Effective loop quantum gravity framework for vacuum spherically symmetric spacetimes, *Phys. Rev. D* **102**, 106024 (2020).
- [130] W.-C. Gan, N. O. Santos, F.-W. Shu y A. Wang, Properties of the spherically symmetric polymer black holes, *Phys. Rev. D* **102**, 124030 (2020).
- [131] J. G. Kelly, R. Santacruz y E. Wilson-Ewing, Black hole collapse and bounce in effective loop quantum gravity, *Class. Quantum Grav.* **38**, 04LT01 (2021).
- [132] N. Bodendorfer, F. M. Mele y J. Münch, Mass and horizon Dirac observables in effective models of quantum black-to-white hole transition, *Class. Quantum Grav.* **38**, 095002 (2021).
- [133] N. Bodendorfer, F. M. Mele y J. Münch,  $(b, v)$ -type variables for black-to-white hole transitions in effective loop quantum gravity, *Phys. Lett.* **819B**, 136390 (2021).

- [134] J. Münch, Causal structure of a recent loop quantum gravity black hole collapse model, *Phys. Rev. D* **104**, 046019 (2021).
- [135] A. Alonso-Bardaji, D. Brizuela y R. Vera, An effective model for the quantum Schwarzschild black hole, *Phys. Lett.* **829B**, 137075 (2022).
- [136] A. Alonso-Bardaji, D. Brizuela y R. Vera, Nonsingular spherically symmetric black hole model with holonomy corrections, *Phys. Rev. D* **106**, 024035 (2022).
- [137] A. Ashtekar, J. Olmedo y P. Singh, Quantum transfiguration of Kruskal black holes, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 241301 (2018).
- [138] A. Ashtekar, J. Olmedo y P. Singh, Quantum extension of the Kruskal spacetime, *Phys. Rev. D* **98**, 126003 (2018).
- [139] A. Ashtekar y J. Olmedo, Properties of a recent quantum extension of the Kruskal geometry, *Int. J. Mod. Phys. D* **29**, 2050076 (2020).
- [140] N. Bodendorfer, F. M. Mele y J. Münch, A note on the Hamiltonian as a polymerisation parameter, *Class. Quantum Grav.* **36**, 187001 (2019).
- [141] M. Bojowald, Comment (2) on “Quantum transfiguration of Kruskal black holes”, arXiv:1906.04650.
- [142] M. Bojowald, No-go result for covariance in models of loop quantum gravity, *Phys. Rev. D* **102**, 046006 (2020).
- [143] D. Arruga, J. Ben Achour y K. Noui, Deformed general relativity and quantum black holes interior, *Universe* **6**, 039 (2020).
- [144] M. Bouhmadi-López, S. Brahma, C.-Y. Chen, P. Chen y D.-h. Yeom, Asymptotic non-flatness of an effective black hole model based on loop quantum gravity, *Phys. Dark Univ.* **30**, 100701 (2020).
- [145] S. Devi, A. Nagarajan S, S. Chakrabarti y B. R. Majhi, Shadow of quantum extended Kruskal black hole and its superradiance property, arXiv:2105.11847 (2021).
- [146] R. G. Daghigh, M. D. Green y G. Kunstatter, Scalar perturbations and stability of a loop quantum corrected Kruskal black hole, *Phys. Rev. D* **103**, 084031 (2021).
- [147] D. del-Corral y J. Olmedo, Breaking of isospectrality of quasinormal modes in nonrotating loop quantum gravity black holes, *Phys. Rev. D* **105**, 064053 (2022).
- [148] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (John Wiley & Sons, Nueva York, 1962).
- [149] S. W. Hawking y C. J. Hunter, The gravitational Hamiltonian in the presence of non-orthogonal boundaries, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2735 (1996).
- [150] G. Immirzi, Real and complex connections for canonical gravity, *Class. Quantum Grav.* **14**, L177 (1997).



- [151] A. Ashtekar, J.-C. Baez y K. Krasnov, Quantum geometry of isolated horizons and black-hole entropy, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4**, 1 (2000).
- [152] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann y T. Thiemann, Uniqueness of diffeomorphism invariant states on holonomy-flux algebras, *Comm. Math. Phys.* **267**, 703 (2006).
- [153] J.-M. Velhinho, The quantum configuration space of loop quantum cosmology, *Class. Quantum Grav.* **24**, 3745 (2007).
- [154] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum y E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [155] J. Grain, The perturbed universe in the deformed algebra approach of loop quantum cosmology, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1642003 (2016).
- [156] S. Gielen y L. Sindoni, Quantum cosmology from group field theory condensates: A review, *SIGMA* **12**, 082 (2016).
- [157] E. Alesci y F. Cianfrani, Quantum reduced loop gravity and the foundation of loop quantum cosmology, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1642005 (2016).
- [158] B. Elizaga-Navascués y G. A. Mena-Marugán, Hybrid loop quantum cosmology: An overview, *Front. Astron. Space Sci.* **8**, 624824 (2021).
- [159] A. A. Starobinsky, Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the Universe, *JETP Lett.* **30**, 682 (1979).
- [160] A. H. Guth, Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [161] A. D. Linde, A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy, and primordial monopole problems, *Phys. Lett.* **108B**, 389 (1982).
- [162] A. D. Linde, Chaotic inflation, *Phys. Lett.* **129B**, 177 (1983).
- [163] A. R. Liddle y D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [164] J. Martin, Inflationary cosmological perturbations of quantum-mechanical origin, *Lect. Notes Phys.* **669**, 199 (2005).
- [165] J.-M. Bardeen, Gauge invariant cosmological perturbations, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980).
- [166] M. Sasaki, Gauge invariant scalar perturbations in the new inflationary universe, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 394 (1983).
- [167] H. Kodama y M. Sasaki, Cosmological perturbation theory, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984).
- [168] V. Mukhanov, Quantum theory of gauge invariant cosmological perturbations, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94**, 1 (1988).

- [169] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [170] D. Langlois, Hamiltonian formalism and gauge invariance for linear perturbations in inflation, *Class. Quantum Grav.* **11**, 389 (1994).
- [171] E. J. C. Pinho y N. Pinto-Neto, Scalar and vector perturbations in quantum cosmological backgrounds, *Phys. Rev. D* **76**, 023506 (2007).
- [172] F. T. Falciano y N. Pinto-Neto, Scalar perturbations in scalar field quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **79**, 023507 (2009).
- [173] R. Kantowski y R. K. Sachs, Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models, *J. Math. Phys.* **7**, 443 (1966).
- [174] E. Weber, Kantowski–Sachs cosmological models as big-bang models, *J. Math. Phys.* **26**, 1308 (1985).
- [175] K. S. Adhav, V. G. Mete, A. S. Nimkar y A. M. Pund, Kantowski-Sachs cosmological model in general theory of relativity, *Int. J. Theor. Phys.* **47**, 2314 (2008).
- [176] A. García-Quismondo y G. A. Mena-Marugán, Martín-Benito–Mena-Marugán–Olmedo prescription for the Dapor–Liegener model of loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **99**, 083505 (2019).
- [177] A. Ashtekar, A. Corichi y P. Singh, Robustness of key features of loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **77**, 024046 (2008).
- [178] W. Kamiński y J. Lewandowski, The flat FRW model in loop quantum cosmology: Self-adjointness, *Class. Quantum Grav.* **25**, 035001 (2008).
- [179] W. Kamiński y J. Lewandowski, Physical time and other conceptual issues of quantum gravity on the example of loop quantum cosmology, *Class. Quantum Grav.* **26**, 035012 (2009).
- [180] A. García-Quismondo y G. A. Mena-Marugán, Dapor–Liegener formalism of loop quantum cosmology for Bianchi I spacetimes, *Phys. Rev. D* **101**, 023520 (2020).
- [181] L. Castelló-Gomar, A. García-Quismondo y G. A. Mena-Marugán, Primordial perturbations in the Dapor–Liegener model of hybrid loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **102**, 083524 (2020).
- [182] B. Elizaga Navascués, D. Martín de Blas y G. A. Mena-Marugán, Time-dependent mass of cosmological perturbations in the hybrid and dressed metric approaches to loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **97**, 043523 (2018).
- [183] A. García-Quismondo, G. A. Mena-Marugán y G. Sánchez-Pérez, The time-dependent mass of cosmological perturbations in loop quantum cosmology: Dapor–Liegener regularization, *Class. Quantum Grav.* **37**, 195003 (2020).
- [184] A. Ashtekar, M. Campiglia y A. Henderson, Path integrals and the WKB approximation in loop quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **82**, 124043 (2010).

- [185] Y. Akrami *et al.* (Planck Collaboration), Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, *Astron. Astrophys.* **641**, A10 (2020).
- [186] N. Aghanim *et al.* (Planck Collaboration), Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020).
- [187] Y. Akrami *et al.* (Planck Collaboration), Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck, *Astron. Astrophys.* **641**, A1 (2020).
- [188] B. Bonga y B. Gupta, Inflation with the Starobinsky potential in loop quantum cosmology, *Gen. Relativ. Gravit.* **48**, 71 (2016).
- [189] B. Bonga y B. Gupta, Phenomenological investigation of a quantum gravity extension of inflation with the Starobinsky potential, *Phys. Rev. D* **93**, 063513 (2016).
- [190] M. Shahalam, M. Al-Ajmi, R. Myrzakulov y A. Wang, Revisiting pre-inflationary universe of family of  $\alpha$ -attractor in loop quantum cosmology, *Class. Quantum Grav.* **37**, 195026 (2020).
- [191] B. Elizaga-Navascués, R. Jiménez-Llamas y G. A. Mena-Marugán, Primordial perturbations in kinetically dominated regimes of general relativity and hybrid quantum cosmology, *Phys. Rev. D* **104**, 103520 (2021).
- [192] S. Iteanu y G. A. Mena-Marugán, Mass of cosmological perturbations in the hybrid and dressed metric formalisms of loop quantum cosmology for the Starobinsky and exponential potentials, *Universe* **8**, 463 (2022).
- [193] A. García-Quismondo y G. A. Mena-Marugán, Exploring alternatives to the Hamiltonian calculation of the Ashtekar-Olmedo-Singh black hole solution, *Front. Astron. Space Sci.* **8**, 701723 (2021).
- [194] A. García-Quismondo y G. A. Mena-Marugán, Two-time alternative to the Ashtekar-Olmedo-Singh black hole interior, *Phys. Rev. D* **106**, 023532 (2022).
- [195] G. Ongole, H. Zhang, T. Zhu, A. Wang y B. Wang, Dirac observables in the 4-dimensional phase space of Ashtekar's variables and spherically symmetric loop quantum black holes, *Universe* **8**, 543 (2022).
- [196] B. Elizaga-Navascués, A. García-Quismondo y G. A. Mena-Marugán, Space of solutions of the Ashtekar-Olmedo-Singh effective black hole model, *Phys. Rev. D* **106**, 063516 (2022).
- [197] S. A. Fulling y S. N. M. Ruijsenaars, Temperature, periodicity and horizons, *Phys. Rep.* **152**, 135 (1987).
- [198] R. Geroch, *Asymptotic Structure of Space-Time* (Plenum, Nueva York, 1976).
- [199] A. Ashtekar y A. Magnon, From  $i^0$  to the 3+1 description of spatial infinity, *J. Math. Phys.* **25**, 2682 (1984).
- [200] T. Thiemann, Generalized boundary conditions for general relativity for the asymptotically flat case in terms of Ashtekar's variables, *Class. Quantum Grav.* **12**, 181 (1995).

- [201] B. Elizaga Navascués, A. García-Quismondo y G. A. Mena Marugán, Hamiltonian formulation and loop quantization of a recent extension of the Kruskal spacetime, *Phys. Rev. D* **106**, 043531 (2022).
- [202] G. A. Mena Marugán, J. Olmedo y T. Pawłowski, Prescriptions in loop quantum cosmology: A comparative analysis, *Phys. Rev. D* **84**, 064012 (2011).
- [203] P. Billingsley, *Probability and Measure* (John Wiley & Sons, Nueva York, 1995).

# Apéndice A: Órdenes de factores alternativos en la teoría isótropa

En este apéndice, presentamos una reformulación de la cuantización del modelo de Dapor y Liegener de cosmologías de FLRW espacialmente planas recogida en la Ref. [176], con el objetivo de adaptarla a la selección de una prescripción ligeramente distinta para la representación cuántica del inverso de la longitud fiducial mínima  $1/\bar{\mu}$  y de incorporar un orden de factores más general para las potencias del operador de volumen.

En lo que sigue, el objeto principal de estudio son cosmologías homogéneas e isótropas con secciones espaciales planas, por lo que los tres pares canónicos considerados en el Capítulo 4 se reducen a uno único  $(c, p)$  como resultado de la identificación de las tres direcciones espaciales, cuyo corchete de Poisson es  $\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$ . Los autoestados del volumen  $|v\rangle$  proporcionan una base del espacio de Hilbert cinemático del sistema  $\mathcal{H}^{\text{kin}}$  y la acción sobre ellos de los operadores fundamentales de la teoría cuántica es

$$\hat{V}|v\rangle = 2\pi G\gamma\sqrt{\Delta}|v||v\rangle, \quad \hat{N}_{\pm n\bar{\mu}}|v\rangle = |v \pm n\rangle, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\bar{\mu}$  es la longitud coordenada mínima de las aristas de los circuitos de holonomía, dada por la función del espacio de fases isótropo  $\bar{\mu} = \sqrt{\Delta/|p|}$ .

En el tipo de sistemas cosmológicos que estamos considerando, las contribuciones clásicas al hamiltoniano se pueden obtener inmediatamente a partir de las Ecs. (2.28) y (3.5) tomando el límite isótropo [176]. El resultado de dicho procedimiento es el siguiente:

$$H_E^{\text{FLRW}} = -\frac{3}{8\pi GV} \left( \text{sgn}(p)|p| \frac{1}{\bar{\mu}} \sin \bar{\mu} c \right)^2, \quad (\text{A.2})$$

$$H_L^{\text{FLRW}} = -\frac{3}{8\pi GV} \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \left( 2 \text{sgn}(p)|p| \frac{1}{\bar{\mu}} \sin \bar{\mu} c \cos \bar{\mu} c \right)^2. \quad (\text{A.3})$$

Seguindo las reglas de la prescripción MMO, cada una de estas contribuciones es

representada por un operador sobre el espacio de Hilbert cinemático  $\mathcal{H}^{\text{kin}}$  de la forma

$$\hat{H}_{E,L}^{\text{FLRW}} = \left[ \frac{\hat{1}}{\hat{V}} \right]^{1/2} \mathcal{H}_{E,L}^{\text{FLRW}} \left[ \frac{\hat{1}}{\hat{V}} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.4})$$

Las propiedades del operador inverso de volumen y la forma en la que interviene en la definición de los operadores euclídeo y lorentziano implican que se puede llevar a cabo una restricción al complemento ortogonal de los estados singulares  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$  de forma bien definida, permitiendo limitarnos al estudio de las versiones densitizadas de los operadores anteriores. En el Capítulo 3, dichos operadores densitizados se definen como sigue [176]:

$$\hat{\mathcal{H}}_E^{\text{FLRW}} = \frac{3}{8\pi G} \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^2, \quad \hat{\mathcal{H}}_L^{\text{FLRW}} = -\frac{3}{8\pi G} \frac{1+\gamma^2}{4\gamma^2} \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^2, \quad (\text{A.5})$$

donde, para cada valor entero de  $n$ ,

$$\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}} = \frac{1}{4i\sqrt{\Delta}} \left[ \frac{\hat{1}}{\sqrt{|\hat{\rho}|}} \right]^{-1/2} \widehat{\sqrt{|p|}} \left[ \widehat{\text{sgn}(p)}, \hat{\mathcal{N}}_{n\bar{\mu}} - \hat{\mathcal{N}}_{-n\bar{\mu}} \right]_+ \widehat{\sqrt{|p|}} \left[ \frac{\hat{1}}{\sqrt{|\hat{\rho}|}} \right]^{-1/2}. \quad (\text{A.6})$$

Recordemos que  $[\cdot, \cdot]_+$  es el anticonmutador de operadores.

La diferencia más importante entre la propuesta de cuantización adoptada en el Capítulo 3 y la presentada en el Capítulo 4 (salvando su aplicación a sistemas cosmológicos distintos) es la manera en la que el inverso de la longitud fiducial mínima se promueve a operador como parte de la definición del operador de ligadura. En el Capítulo 3, en el que se recogen los resultados de la Ref. [176], empleamos la definición más común en el contexto de la LQC isótropa [44, 45], a saber,

$$\frac{\hat{1}}{\bar{\mu}} \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[ \frac{\hat{1}}{\sqrt{|\hat{\rho}|}} \right] \right)^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

En cambio, el convenio más habitual dentro del marco de la LQC anisótropa (y, en particular, en el estudio de cosmologías de Bianchi I) no conduce exactamente a la definición dada sobre estas líneas en el límite isótropo. En efecto, la contrapartida isótropa de esta definición (empleada no solo en la Ref. [180], sino también en las Refs. [49, 54, 55], entre otras) viene dada por

$$\frac{\hat{1}}{\bar{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \widehat{\sqrt{|p|}}. \quad (\text{A.8})$$

Esta segunda opción para el operador de  $1/\bar{\mu}$  conduce a la aparición de potencias del volumen en el operador hamiltoniano densitizado [véanse, e.g., las Ecs. (4.4) y

(4.27)], mientras que, en la primera, intervienen potencias de los operadores  $\widehat{\sqrt{|p|}}$  y  $1/\widehat{\sqrt{|p|}}$  [véase la Ec. (A.6)]. En el presente apéndice, reescribimos la ligadura escalar completa asociada a cosmologías homogéneas e isotropas con secciones espaciales planas empleando la propuesta (A.8) y mostramos que los resultados derivados en la Ref. [176] (y presentados en el Capítulo 3 de esta tesis) son robustos bajo esta modificación. Para completar el análisis, consideramos también un orden de factores más general para las potencias del volumen, siguiendo las líneas de la discusión en la Sec. 2 del Capítulo 4.

Los operadores hamiltonianos euclídeo y lorentziano en su versión densitizada admiten una expresión similar a la de la Ec. (A.5), salvo por el hecho de que  $\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}$  tiene una forma funcional ligeramente distinta como resultado de las diferencias en la representación adoptada aquí. Sean  $\hat{\Omega}_{n\bar{\mu}}^{(\alpha)}$  (con  $n = 2, 4$ ) los nuevos operadores, donde  $\alpha$  es una etiqueta que refleja el orden de factores considerado en la representación de los productos de potencias del operador de volumen. En lo que sigue, escribimos sus expresiones explícitas y discutimos sus acciones sobre el espacio de Hilbert cinemático del sistema  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$ .

En lo que a la contribución euclídea se refiere (es decir, la parte correspondiente a  $n = 2$ ), la ambigüedad parametrizada por la etiqueta  $\alpha$  no aparece. En efecto, al intervenir únicamente un operador de holonomía en cada término de  $\hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^{(\alpha)}$ , parece natural ordenar las potencias del volumen empleando una simetrización algebraica, de tal manera que queden repartidas simétricamente a la izquierda y a la derecha de dicho operador de holonomía (que correspondería a tomar  $\alpha = 0$  en la notación empleada en el Capítulo 4). Entonces, sirviéndonos de la definición (A.8) (que conduce a representar  $|p|/\bar{\mu}$  a través del operador  $\hat{V}/\sqrt{\Delta}$ ), se obtiene la expresión

$$\text{sgn}(v)|p|\frac{1}{\bar{\mu}}\sin\bar{\mu}c \rightarrow \hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left[ \widehat{\text{sgn}(v)}, \hat{V}^{1/2} \widehat{\sin\bar{\mu}c} \hat{V}^{1/2} \right] \left( \quad \right) \quad (\text{A.9})$$

Con ayuda de la notación

$$\tilde{f}_{\pm}^{(n,\alpha)}(v) = \frac{\pi G \gamma}{2} s_{\pm}^{(n)}(v) |v|^{1/2-\alpha} v \pm \frac{n}{2}^{2\alpha} |v \pm n|^{1/2-\alpha}, \quad (\text{A.10})$$

$$s_{\pm}^{(n)}(v) = \text{sgn}(v) + \text{sgn}(v \pm n), \quad (\text{A.11})$$

se puede ver fácilmente que la acción del operador (A.9) sobre un elemento de la base de autoestados del volumen adquiere la forma

$$\hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^{(0)} |v\rangle = -\mathbf{i} \left\{ \tilde{f}_{+}^{(2,0)}(v) |v+2\rangle - \tilde{f}_{-}^{(2,0)}(v) |v-2\rangle \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Por tanto, la acción de la ligadura euclídea densitizada sobre  $\tilde{\mathcal{H}}^{\text{kin}}$  viene dada por

$$\frac{8\pi G}{3} \hat{\mathcal{H}}_E^{\text{FLRW}} |v\rangle = -\tilde{f}_+^{(2,0)}(v)\tilde{f}_+^{(2,0)}(v+2)|v+4\rangle + \left\{ \left[ \tilde{f}_+^{(2,0)}(v) \right]^2 + \left[ \tilde{f}_-^{(2,0)}(v) \right]^2 \right\} |v\rangle - \tilde{f}_-^{(2,0)}(v)\tilde{f}_-^{(2,0)}(v-2)|v-4\rangle, \quad (\text{A.13})$$

cuya estructura es idéntica a la de la acción del operador obtenido como resultado de tomar la definición alternativa de  $1/\bar{\mu}$  (véanse las Refs. [45, 176]). Efectivamente, se trata de una ecuación en diferencias finitas que vincula un cierto autoestado del volumen con otros dos asociados a autovalores del volumen que distan cuatro unidades del volumen de partida. Como resultado, la acción de la parte euclídea del operador hamiltoniano superselecciona subespacios de Hilbert con soporte en redes discretas de paso cuatro.

Cabe destacar que las funciones  $\tilde{f}$  presentan una serie de propiedades que ya exhibían las funciones análogas en las Refs. [45, 176]. Más concretamente, estas funciones verifican

$$\tilde{f}_-^{(n,\alpha)}(v) = 0 \quad \forall v \in (0, n], \quad \tilde{f}_+^{(n,\alpha)}(v) = 0 \quad \forall v \in [-n, 0). \quad (\text{A.14})$$

Estas propiedades son un resultado inmediato de las combinaciones de signos  $s_{\pm}^{(n)}(v)$ , cuya aparición (consecuencia de la simetrización del operador signo y de los operadores de holonomía) es un rasgo distintivo de la prescripción MMO. Como resultado del hecho de que estas funciones se anulan cuando se dan las condiciones antes comentadas, los factores que pesan las contribuciones en las que el signo del volumen cambia resultan anularse, por lo que la acción de la parte euclídea deja invariantes los sectores de volumen positivo y negativo. Esto implica que los sectores de superselección de la contribución euclídea no tienen soporte en redes discretas de paso cuatro, sino en *semirredes* discretas del mismo paso.

Pasemos ahora a considerar la parte lorentziana. Dado que cada uno de sus términos contiene dos operadores de holonomía, es posible adoptar diferentes órdenes de factores para las potencias del volumen, insertando parte de ellos entre los dos operadores de holonomía. Para tener en cuenta las distintas elecciones posibles, se introduce un parámetro  $\alpha$ . Siguiendo las reglas de la prescripción MMO y tomando la definición (A.8) para la representación del inverso de la longitud fiducial mínima, se obtiene

$$2\text{sgn}(v)|p| \frac{1}{\bar{\mu}} \sin \bar{\mu}c \cos \bar{\mu}c \rightarrow \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[ \widehat{\text{sgn}(v)}, \hat{V}^{1/2-\alpha} \widehat{\sin \bar{\mu}c} \hat{V}^{2\alpha} \widehat{\cos \bar{\mu}c} \hat{V}^{1/2-\alpha} \right]_+. \quad (\text{A.15})$$



De forma similar al caso euclídeo, cuando se toma  $\alpha = 0$ , se recupera la misma expresión que en la Ref. [176] salvo por los cambios resultantes de la consideración de una representación cuántica de  $1/\bar{\mu}$  ligeramente distinta. No obstante, tomamos en lo que sigue un valor arbitrario de  $\alpha$  entre 0 y  $1/2$ .

Es inmediato mostrar que la acción del operador  $\hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^{(\alpha)}$  sobre un elemento de la base de autoestados del volumen adopta la forma

$$\hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^{(\alpha)} |v\rangle = -\mathbf{i} \left\{ \tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v) |v+4\rangle - \tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v) |v-4\rangle \right\} \left( \mathbf{i} \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v) |v\rangle \right), \quad (\text{A.16})$$

donde

$$\tilde{g}_0^{(\alpha)}(v) = -\pi G \gamma |v|^{1-2\alpha} |v-2|^{2\alpha} - |v+2|^{2\alpha}. \quad (\text{A.17})$$

Como se puede ver en la expresión anterior, en la acción del operador  $\hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^{(\alpha)}$  aparece una contribución que no produce desplazamiento alguno en la etiqueta  $v$  del estado de partida y que no está presente en la acción de su contrapartida euclídea  $\hat{\Omega}_{2\bar{\mu}}^{(0)}$ . No obstante, cabe mencionar que el término comentado se anula en el límite en el que  $\alpha \rightarrow 0$ , como sería de esperar. Por tanto, en dicho límite, se recupera una acción muy similar a la obtenida en la Ref. [176], donde las únicas discrepancias aparecen como resultado de definir cuánticamente  $1/\bar{\mu}$  empleando la Ec. (A.8) (lo cual conduce al reemplazo de las funciones  $f$  por las funciones  $\tilde{f}$  definidas en este apéndice).

La acción del operador  $\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{FLRW}}$  que resulta de las expresiones anteriores es<sup>50</sup>

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi G}{3} \frac{4\gamma^2}{1+\gamma^2} \hat{\mathcal{H}}_L^{\text{FLRW}} |v\rangle = & -\tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v) \tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v+4) |v+8\rangle - \mathbf{i} \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v) \hat{\Omega}_{4\bar{\mu}}^{(\alpha)} |v\rangle \\ & + \left\{ \left[ \tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v) \right]^2 + \left[ \tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v) \right]^2 \right\} \left( |v\rangle - \tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v) \tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v-4) |v-8\rangle \right) \\ & - \tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v) \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v+4) |v+4\rangle + \tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v) \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v-4) |v-4\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

En vista de la acción anterior, se obtiene una ecuación en diferencias finitas que vincula un cierto autoestado del volumen sobre el que actúa la contribución lorentziana con un total de cuatro estados imagen cuyos volúmenes asociados difieren del de partida en cuatro u ocho unidades (tanto hacia valores más pequeños del volumen como hacia valores más grandes). Nótese que, a diferencia del caso del operador estudiado en el Capítulo 3 (véase la Ref. [176]), la acción de  $\hat{\mathcal{H}}_L^{\text{FLRW}}$  genera desplazamientos de más y menos cuatro unidades en el número cuántico del volumen. Naturalmente, estas contribuciones [junto con el último término de la primera línea de la Ec.

<sup>50</sup>Nótese que se omite la etiqueta  $\alpha$  en la notación para el operador que da la parte lorentziana por simplicidad.

(A.18)] se anulan idénticamente en el límite  $\alpha \rightarrow 0$ . Es evidente que, en este límite en el que se recupera un orden de factores en el que no se incluyen potencias del operador de volumen entre los dos operadores de holonomía, se obtiene una acción idéntica a la presentada en la Ref. [176], como habíamos anticipado.

Es fácil ver que los coeficientes de los términos en los que podría tener lugar un cambio de signo en el parámetro de volumen se anulan cuando dicho cambio de signo ocurre, por lo que la acción de esta versión del hamiltoniano lorentziano resulta garantizar también el desacoplamiento de la semirred de volumen positivo de aquella de volumen negativo. Por ende, los sectores de superselección de las partes euclídea y lorentziana de la ligadura hamiltoniana coinciden. Como consecuencia, el tratamiento independiente de la contribución lorentziana en el procedimiento de regularización de la ligadura escalar conduce a unas reglas de superselección en la teoría cuántica que son idénticas a las resultantes de seguir el esquema de regularización estándar en la LQC de cosmologías de FLRW planas. Además, dicha conclusión se mantiene incluso si se adoptan distintas representaciones de  $1/\bar{\mu}$  y se toma un orden de factores general para las potencias del operador de volumen (parametrizado por una etiqueta  $\alpha$ ), como ponen de manifiesto los resultados del Capítulo 3 en conjunción con los expuestos en este apéndice.

Por último, veamos cómo estos resultados quedan incorporados en la obtención de las autofunciones generalizadas de la ligadura escalar. Con las prescripciones adoptadas en el Capítulo 3, concluimos que el valor de las autofunciones generalizadas en cualquier punto de la semirred discreta correspondiente al sector de superselección considerado está determinado únicamente por su valor en los dos primeros puntos [176]. La expresión que permite su cómputo consta de dos términos, cada uno de ellos proporcional a uno de estos datos iniciales. Diseñamos una estrategia para calcular cada uno de los factores de proporcionalidad asociados (que solo dependen del sector de superselección bajo consideración y del autovalor  $\lambda$  correspondiente a la autofunción generalizada en cuestión) que consiste en la multiplicación repetida de ciertas funciones —denotadas  $F^{\pm 4}(v)$ ,  $F_{\lambda}^0(v)$  y  $F^{-8}(v)$ . La manera en que se deben combinar dichas funciones viene dictada por los caminos posibles que conectan dos números enteros mediante saltos de una, dos, tres y cuatro unidades [176]. El mismo razonamiento se puede aplicar al caso que nos ocupa. Las funciones resultantes —que denominaremos  $\tilde{F}_{\alpha}^{\pm 4}(v)$ ,  $\tilde{F}_{\lambda, \alpha}^0(v)$  y  $\tilde{F}_{\alpha}^{-8}(v)$ — difieren de las mencionadas anteriormente en dos aspectos. En primer lugar, las funciones  $f_{\pm}^{(n)}(v)$  se ven reemplazadas por  $\tilde{f}_{\pm}^{(n, \alpha)}(v)$ . En segundo lugar, como fruto del orden de factores más general considerado para las potencias del operador de volumen, aparecen nuevas contribuciones<sup>51</sup> en

<sup>51</sup>La aparición de estas contribuciones está directamente relacionada con la presencia de los

$\tilde{F}_\alpha^{\pm 4}(v)$  y  $\tilde{F}_{\lambda,\alpha}^0(v)$  proporcionales a  $\tilde{g}_0^{(\alpha)}(v)$ . El resultado final resulta ser

$$\tilde{F}_{\lambda,\alpha}^0(v) = \frac{4\gamma^2}{1+\gamma^2} \frac{\lambda - \left\{ \left[ \tilde{f}_+^{(2,0)}(v) \right]^2 + \left[ \tilde{f}_-^{(2,0)}(v) \right]^2 \right\}}{\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+8)\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+4)} \left( \right. \\ \left. + \frac{\left[ \tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v) \right]^2 + \left[ \tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v) \right]^2 - \left[ \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v) \right]^2}{\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+8)\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+4)}, \right. \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{F}_\alpha^{\pm 4}(v) = \frac{4\gamma^2}{1+\gamma^2} \frac{\tilde{f}_\mp^{(2,0)}(v \pm 4)\tilde{f}_\mp^{(2,0)}(v \pm 2)}{\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+8)\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+4)} \\ \pm \frac{\tilde{f}_\mp^{(4,\alpha)}(v \pm 4) \left[ \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v) + \tilde{g}_0^{(\alpha)}(v \pm 4) \right]}{\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+8)\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+4)} \left( \right. \quad (\text{A.20})$$

$$\tilde{F}_\alpha^{-8}(v) = - \frac{\tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v-8)\tilde{f}_+^{(4,\alpha)}(v-4)}{\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+8)\tilde{f}_-^{(4,\alpha)}(v+4)}. \quad (\text{A.21})$$

En la situación límite en la que  $\alpha \rightarrow 0$ , desaparecen todas las contribuciones nuevas proporcionales a  $\tilde{g}_0^{(\alpha)}$ . Por consiguiente, en dicho caso, las autofunciones generalizadas solo se ven modificadas con respecto a las discutidas en el Capítulo 3 por la sustitución  $f_\pm^{(n)}(v) \rightarrow \tilde{f}_\pm^{(n,\alpha)}(v)$ , fruto de la distinta definición del inverso de la longitud fiducial mínima como operador cuántico.

---

términos adicionales en la Ec. (A.18).

# Apéndice B: Nuevos momentos en el espacio de fases extendido

En la discusión de la fijación del gauge que conduce al espacio de fases reducido  $\bar{\Gamma}_{\text{ext}}$ , hemos introducido un nuevo conjunto de variables canónicas que posibilita una comparación más inmediata con la Ref. [138]. En lugar de los pares originales, compuestos por variables de conexión y de tríada, resulta conveniente tomar los propios hamiltonianos parciales  $O_b$  y  $O_c$  como variables de configuración, con variables de momento canónicamente conjugadas dadas por

$$P_b = -\frac{2L_o}{b_o} \tanh^{-1} \left( \frac{\cos \delta_b b}{b_o} \right) \left( -2L_o \ln \frac{\gamma |\delta_b|}{2} \right), \quad (\text{B.1})$$

$$P_c = -\frac{L_o}{2} \ln \frac{2p_c \sin \delta_c c}{\gamma L_o^2 \delta_c^2} \tan \frac{\delta_c c}{2}, \quad (\text{B.2})$$

donde, recordemos,  $b_o = \sqrt{1 + \gamma^2 \delta_b^2}$ . Es sencillo comprobar que  $O_b$ ,  $O_c$ ,  $P_b$  y  $P_c$  componen un conjunto canónico cuyos únicos corchetes de Poisson no nulos son  $\{O_b, P_b\} = 1$  y  $\{O_c, P_c\} = 1$ . El cambio de variables introducido se puede completar de tal modo que sea una transformación canónica en el espacio de fases extendido  $\Gamma_{\text{ext}}$  completo. Para ello, hemos de introducir dos nuevos momentos,  $P_{\delta_b}$  y  $P_{\delta_c}$ , que sean canónicamente conjugados a  $\delta_b$  y  $\delta_c$ , respectivamente, y que conmuten con los hamiltonianos parciales y sus momentos asociados. Es fácil verificar que las siguientes variables cumplen estos requisitos:

$$P_{\delta_b} = p_{\delta_b} - \frac{p_b}{\gamma \delta_b} \left( b - \frac{\sin \delta_b b}{\delta_b} - \frac{\gamma^2 \delta_b}{\sin \delta_b b} \right) \left( -\frac{\gamma p_b}{b_o^2 \sin \delta_b b} \left[ \left( \cos \delta_b b + \frac{1}{b_o} \tanh^{-1} \left( \frac{\cos \delta_b b}{b_o} \right) (b_o^2 - \cos^2 \delta_b b) \right) \right] \right) \quad (\text{B.3})$$

$$P_{\delta_c} = p_{\delta_c} - \frac{p_c}{2\gamma \delta_c} \left( c - \frac{\sin \delta_c c}{\delta_c} \right) \left( \right) \quad (\text{B.4})$$

# Apéndice C: Regularización del hamiltoniano de Kantowski-Sachs

En este apéndice, mostramos un procedimiento sistemático que conduce a la Ec. (7.4) como versión regularizada del hamiltoniano de Kantowski-Sachs haciendo uso únicamente de las técnicas usuales en la LQG [78] y de la prescripción del modelo AOS para la fijación del área física mínima.

La densidad hamiltoniana  $\mathcal{C}$  de la relatividad general admite la siguiente expresión en términos de las variables de Ashtekar-Barbero [véanse las Ecs. (2.22) y (2.23) para la versión integrada]:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{16\pi G\sqrt{\mathfrak{h}}} \left[ \epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k - 2(1+\gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right] E_i^a E_j^b, \quad (\text{C.1})$$

donde, recordemos,  $\mathfrak{h}$  es el determinante de la métrica espacial,  $F_{ab}^i$  es el tensor de curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero y  $K_a^i$  es la forma triádica de la curvatura extrínseca de las secciones espaciales. En el caso de las cosmologías de Kantowski-Sachs (isométricas a la región interior de un agujero negro de Schwarzschild), es inmediato comprobar que el determinante de la métrica espacial viene dado simplemente por  $\mathfrak{h} = p_b^2 |p_c| \sin^2 \theta / L_o^2$ . Además, imponiendo las simetrías que caracterizan estos espaciotiempos, obtenemos la identidad

$$2K_{[a}^i K_{b]}^j E_i^a E_j^b = \frac{1}{\gamma^2} \epsilon^{ij}{}_k F_{ab}^k E_i^a E_j^b + \frac{p_b^2}{\gamma^2 L_o^2} \sin^2 \theta. \quad (\text{C.2})$$

Teniendo estas expresiones en consideración y recordando la forma de las componentes de la tríada densitizada en el tipo de cosmologías que estamos estudiando [véase la Ec. (2.46)], alcanzamos una ligadura escalar densitizada de la forma

$$\mathcal{C} = \frac{1}{8\pi G\gamma^2 \sqrt{|p_c|}} \left[ p_c (F_{x\theta}^1 \sin \theta + F_{x\phi}^2) \left( \frac{p_b}{L_o} (\sin \theta + \gamma^2 \sin \theta - F_{\theta\phi}^3) \right) \right] \quad (\text{C.3})$$

En lo que sigue, abordamos la regularización de la expresión entre corchetes, adaptando técnicas de la LQG al sistema cosmológico considerado para reescribir las distintas

componentes del tensor de curvatura en términos de ciertas combinaciones de holonomías de la conexión (que, a diferencia de la propia conexión, tienen un análogo cuántico bien definido).

Para ello, empecemos considerando dos circuitos de holonomía  $h_{\square(x,\theta)}$  y  $h_{\square(x,\phi)}$  a lo largo de sendos rectángulos coordinados  $\square(x,\theta)$  y  $\square(x,\phi)$  contenidos en los planos  $x-\theta$  y  $x-\phi$ , respectivamente, que encierran las regiones  $(0, L_o\bar{\mu}_x) \times (0, \pi\bar{\mu}_\theta)$  y  $(0, L_o\bar{\mu}_x) \times (0, 2\pi\bar{\mu}_\phi)$ . Los parámetros  $\bar{\mu}_x$ ,  $\bar{\mu}_\theta$  y  $\bar{\mu}_\phi$ , que no son sino las longitudes coordinadas de las aristas de los circuitos considerados, se vincularán con el área física mínima permitida en el modelo en un paso posterior. Teniendo en cuenta la definición de la holonomía de la conexión de Ashtekar-Barbero a lo largo de una arista arbitraria  $e$ , es posible mostrar que

$$F_{x\theta}^i = -2 \lim_{\bar{\mu}_x, \bar{\mu}_\theta \rightarrow 0} \frac{\text{tr}[h_{\square(x,\theta)} \tau^i]}{\pi L_o \bar{\mu}_x \bar{\mu}_\theta} \left( F_{x\phi}^i = -2 \lim_{\bar{\mu}_x, \bar{\mu}_\phi \rightarrow 0} \frac{\text{tr}[h_{\square(x,\phi)} \tau^i]}{2\pi L_o \bar{\mu}_x \bar{\mu}_\phi} \right) \quad (\text{C.4})$$

donde, recordemos,  $\tau^i$  son los generadores de la representación fundamental de  $\text{SU}(2)$ . Explícitamente, tenemos que

$$2\text{tr}[h_{\square(x,\theta)} \tau^i] \begin{cases} \leftarrow \pi \delta_1^i \sin(\bar{\mu}_x c) \sin(\bar{\mu}_\theta b) + \mathcal{O}(3), & (\text{C.5}) \end{cases}$$

$$2\text{tr}[h_{\square(x,\phi)} \tau^i] \begin{cases} \leftarrow 2\pi \delta_2^i \sin(\bar{\mu}_x c) \sin(\bar{\mu}_\phi b) \sin\theta + \mathcal{O}(3), & (\text{C.6}) \end{cases}$$

donde  $\mathcal{O}(n)$  contiene términos proporcionales al producto de al menos  $n$  de los parámetros  $\bar{\mu}_x$ ,  $\bar{\mu}_\theta$  y  $\bar{\mu}_\phi$ , que son subdominantes en el límite en el que estos parámetros son pequeños. Como es habitual en la LQC [39, 40], regularizamos las contribuciones de  $F_{x\theta}^i$  y  $F_{x\phi}^i$  a la ligadura hamiltoniana densitizada eliminando el límite de área nula que aparece en la Ec. (C.4), prescribiendo así la existencia de un área física mínima distinta de cero en la teoría, y reemplazando las trazas que intervienen en dicha ecuación por los términos dominantes de las Ecs. (C.5) y (C.6).

El procedimiento para regularizar la contribución de las componentes  $F_{\theta\phi}^i$  del tensor de curvatura es ligeramente más complicado que en la LQC estándar. Esto es debido a la complejidad adicional de la expresión de la holonomía de la conexión a lo largo de aristas orientadas en la dirección  $\phi$  en términos de  $b$  y  $\theta$ . En particular, en lugar de las identidades sencillas que aplican al caso de las otras componentes del tensor de curvatura [véase la Ec. (C.4)], se tiene que

$$\iint_{\square_{n,\bar{n}}(\theta,\phi)} d\theta d\phi F_{\theta\phi}^i = -2\text{tr}[h_{\square_{n,\bar{n}}(\theta,\phi)} \tau^i] \left( \quad (\text{C.7}) \right)$$

a orden dominante en el límite de parámetros  $\bar{\mu}_\theta$  y  $\bar{\mu}_\phi$  pequeños. En la ecuación anterior,  $\square_{n,\bar{n}}(\theta,\phi)$  es el rectángulo coordinado del plano  $\theta-\phi$  que encierra la región

definida por  $(n\pi\bar{\mu}_\theta, n\pi\bar{\mu}_\theta + \pi\bar{\mu}_\theta) \times (2\tilde{n}\pi\bar{\mu}_\phi, 2\tilde{n}\pi\bar{\mu}_\phi + 2\pi\bar{\mu}_\phi)$ , para dos valores naturales cualesquiera de  $n$  y  $\tilde{n}$ . Explícitamente, tenemos que

$$2\text{tr}[h_{\square_{n,\tilde{n}}(\theta,\phi)}\tau^i] = \pi^3(1+2n)\delta_3^i[\bar{\mu}_\theta^2\bar{\mu}_\phi + \sin^2(\bar{\mu}_\theta b)\bar{\mu}_\phi] + 2\sin(\bar{\mu}_\theta b)\sin(\bar{\mu}_\phi b)\bar{\mu}_\theta + \mathcal{O}(4). \quad (\text{C.8})$$

En vista de este resultado, la prescripción propuesta para la regularización de la contribución de  $F_{\theta\phi}^i$  a la ligadura escalar densitizada es la siguiente. En la integración de  $\mathcal{C}$  sobre la 2-esfera unidad, la cubrimos con tantos rectángulos coordenados de la forma  $\square_{n,\tilde{n}}(\theta, \phi)$  como sea posible y reemplazamos  $\int_{\mathcal{S}^2} d\theta d\phi F_{\theta\phi}^i$  por

$$-\pi^3\delta_3^i M \left[ \frac{1}{\bar{\mu}_\phi} \right] \sum_{n=0}^{M[1/\bar{\mu}_\theta]-1} (1+2n)[\bar{\mu}_\theta^2\bar{\mu}_\phi + \sin^2(\bar{\mu}_\theta b)\bar{\mu}_\phi + 2\sin(\bar{\mu}_\theta b)\sin(\bar{\mu}_\phi b)\bar{\mu}_\theta] \quad (\text{C.9})$$

donde  $M[\cdot]$  denota el número natural inmediatamente mayor o igual que su argumento.

Como hemos mostrado, los parámetros  $\bar{\mu}_x$ ,  $\bar{\mu}_\theta$  y  $\bar{\mu}_\phi$  desempeñan un papel central en los dos esquemas de regularización que hemos introducido: definen las áreas coordenadas mínimas permitidas en el sistema, de tal modo que la contribución dinámica de la conexión de Ashtekar-Barbero se puede cuantizar de manera discreta. Por tanto, desde una perspectiva fundamental, es importante establecer una conexión entre el valor de estos parámetros y la teoría general que motiva su introducción. En el modelo AOS, esto se lleva a cabo vinculándolos de una forma muy concreta con el gap de área  $\Delta$  de la LQG. Concretamente, en cada solución efectiva, se pide que [138]

$$\Delta = 2\pi|\delta_c||\delta_b|p_b|_{\mathcal{T}}, \quad \Delta = 4\pi\delta_b^2|p_c|_{\mathcal{T}}, \quad (\text{C.10})$$

donde el subíndice  $\mathcal{T}$  denota una evaluación en la superficie de transición que reemplaza la singularidad central en el modelo efectivo. Los lados derechos de las dos igualdades en la ecuación anterior son las áreas físicas en la superficie de transición de los rectángulos coordenados  $\square(x, \phi)|_{\theta=\pi/2}$  y  $\square(\theta, \phi)$  que abarcan, respectivamente, las regiones coordenadas  $(0, L_o\bar{\mu}_x) \times (0, 2\pi\bar{\mu}_\phi)$  y  $(0, \pi\bar{\mu}_\theta) \times (0, 2\pi\bar{\mu}_\phi)$  de los planos que los contienen. Nótese, además, la inclusión de valores absolutos con respecto a las expresiones que aparecen en la Ref. [138] como resultado de que, si bien aquí permitimos que los parámetros de polimerización adopten valores reales, en dicha referencia se asume que no son negativos. Dado que estamos interesados en construir una teoría cuántica que conduzca al modelo AOS en un cierto régimen efectivo, parece natural adaptar esta prescripción al procedimiento de regularización discutido en

este apéndice. Por lo tanto, fijamos  $\bar{\mu}_x$ ,  $\bar{\mu}_\theta$  y  $\bar{\mu}_\phi$  en términos de los parámetros de polimerización  $\delta_b$  y  $\delta_c$  de tal manera que las áreas físicas de los rectángulos considerados coincidan con las que aparecen en la Ec. (C.10) evaluadas off-shell. Así, las ligaduras  $\Psi_b$  y  $\Psi_c$  son las que relacionan estas áreas con el valor mínimo  $\Delta$  permitido en la LQG. Una aplicación directa de esta prescripción conduce a

$$|\delta_c| = \bar{\mu}_x, \quad |\delta_b| = \bar{\mu}_\phi = \frac{\pi^2 \bar{\mu}_\theta^2}{4}. \quad (\text{C.11})$$

Si integramos el producto de la función lapso y la densidad hamiltoniana  $N\mathcal{C}$  sobre las hipersuperficies espaciales con topología  $I \times S^2$  de las cosmologías de Kantowski-Sachs, con  $I = [0, L_o]$ , y aplicamos las prescripciones detalladas a lo largo de este apéndice, obtenemos finalmente la siguiente expresión regularizada del hamiltoniano de Kantowski-Sachs:

$$H_{\text{KS}}^{\text{reg}}[N] = -N \frac{\sin \delta_b b}{\gamma \delta_b \sqrt{|\rho_c|}} [H_{\text{AOS}}^{\text{eff}} + \mathcal{O}(\delta_b)] \quad (\text{C.12})$$

donde  $\mathcal{O}(\delta_b)$  recoge términos de orden  $\delta_b$  o menores en el límite en el que el valor absoluto de este parámetro es pequeño. Teniendo en cuenta que estos términos correctivos subdominantes se anulan cuando se ignoran las correcciones cuánticas, simplemente se eliminan de la expresión de nuestra ligadura hamiltoniana regularizada. Por ende, salvo un factor global que puede ser reabsorbido mediante una elección apropiada de densitización, la regularización considerada del hamiltoniano de Kantowski-Sachs (basada en técnicas inspiradas en la LQG y en la prescripción del modelo AOS para la incorporación de un área física mínima distinta del cero) resulta en un hamiltoniano regularizado equivalente al del modelo AOS.

Antes de cerrar este apéndice, cabe mencionar que muchos de los reemplazos llevados a cabo en el esquema de regularización descrito anteriormente conllevan la fijación de ambigüedades que tienen análogos más simples en sistemas cosmológicos homogéneos e isótropos [39, 40]. Por ejemplo, en el procedimiento presentado, se escoge mantener ciertos términos subdominantes y despreciar otros, tanto en la expansión de las trazas involucradas en el cálculo de los circuitos de holonomía en el límite de áreas pequeñas, como en la expansión del hamiltoniano resultante en el límite en el que los parámetros de polimerización  $\delta_b$  y  $\delta_c$  son pequeños en valor absoluto. Estas elecciones se han hecho siguiendo un criterio principal: la simplicidad del resultado, teniendo en mente nuestro objetivo de abordar su cuantización polimérica posteriormente. Hasta donde sabemos, esta es la primera derivación explícita del hamiltoniano del modelo AOS a partir de una regularización del hamiltoniano asociado a cosmologías de Kantowski-Sachs basada en el uso de circuitos cerrados de holonomía.