

STORIA E DIDATTICA DELLA SCIENZA: CONCETTI ED ESEMPI

Paolo Caressa³

RESUMEN:

En este nota se discute por medio de ejemplos la interrelación entre historia y didáctica de la ciencia: después de haber introducido los argumentos clásicos que abogan la importancia del enfoque histórico por la didáctica de la ciencia, se introduce una metáfora geométrica por encuadrar la cuestión, que llamamos *triángulo conceptual*. Por medio de esa metáfora se analizan unos ejemplos de científicos que utilizaron la historia tanto por sus investigaciones cuanto por su enseñanza, y luego vamos a introducir las motivaciones que, según nosotros, son más significativas por la *integración* de la historia con la didáctica, presentando muchos ejemplos.

Palabras clave: historia de la ciencia

ABSTRACT:

In this note we discuss, by means of examples, the relation between history and didactics of science: after recalling the classical arguments which advocates the importance of the historical approach for the didactics of science, a geometrical metaphor is introduced to provide a conceptual framework, which we call *conceptual triangle*. By means of this metaphor we analyse some examples of scientists who used history both when performing their research and as a didactic tool. Next we introduce the motivations which, in our opinion, are more relevant to the *integration* of history with didactics, quoting several examples.

Keywords: history of science

1. INSEGNARE ATTRAVERSO LA STORIA

Il rapporto fra storia e didattica nell'insegnamento della scienza, e in particolare della matematica, è un connubio classico e ben riconosciuto: il valore dello studio della storia della scienza come ausilio alla didattica è talmente radicato da rendere le due discipline indissolubilmente associate nelle facoltà universitarie scientifiche. Infatti, gli esami di storia della matematica e della scienza sono solitamente inseriti nei piani di studi dell'indirizzo didattico delle facoltà scientifiche, mentre sono ignorati nei piani di studio degli altri indirizzi.

³ paolo.caressa@codin.it

Il motivo principale per il quale la storia della scienza fornisce un ausilio alla didattica è quasi scontato: da un lato infatti approfondire la storia di una disciplina aiuta a motivare le nozioni che, se impartite secondo un approccio puramente concettuale, calerebbero altrimenti dall'alto; d'altra parte studiare la storia di una disciplina consente di temperarne le asprezze per i discenti che si sentono meno portati o che hanno difficoltà con gli aspetti tecnici della materia.

Ma c'è, a mio parere, una motivazione fondamentale per legare lo studio della scienza alla sua storia: infatti la scienza è una *impresa collettiva*. A differenza della pittura, della letteratura e in qualche misura anche della musica, la scienza ha bisogno della sua storia per alimentarsi e progredire. È proverbiale l'*affermazione* di Newton “se ho potuto vedere lontano è perché stavo sulle spalle dei giganti”⁴: l'attività di uno scienziato non può non tenere conto dell'opera dei suoi predecessori e dei progressi dei suoi contemporanei, la scienza è basata sulla comunicazione ed è quindi un'attività eminentemente umana. Spesso si perde di vista questo fatto nel considerare invece la scienza come un mero catalogo di tecniche priva della carica di passione e umanità tipica della poesia, dell'arte o della musica.

Nella scuola secondaria esiste una divisione netta fra le materie che vengono insegnate per argomenti e quelle delle quali è insegnata la storia: le prime sono le materie scientifiche e le lingue, le altre le materie umanistiche. Per esempio si studia la trigonometria, la fisica, la biologia, la lingua inglese ma non la storia di queste discipline. Di contro si studia la storia della letteratura, la storia della filosofia, la storia dell'arte (colpevolmente non la storia della musica). In questo modo, il pensiero filosofico viene studiato sostanzialmente di pari passo con lo sviluppo della storia occidentale, in modo che lo studente possa naturalmente inquadrare gli autori e le correnti di pensiero nel loro contesto storico. Lo stesso è vero per la letteratura e le arti figurative.

Invece nel caso della matematica, per esempio, i programmi prevedono un ordinamento logico, scollegato dallo sviluppo storico, il che impedisce di intuire la presenza di un'evoluzione del pensiero matematico e quindi di guardare alla scienza come a una disciplina in divenire, e correlare le concezioni scientifiche delle varie epoche storiche con le altre correnti di pensiero. Vero è che l'ordine logico degli argomenti spesso

⁴ Lettera a Robert Hooke (1635-1703) del 5 febbraio 1676, cfr. Brewster (1855).

ripercorre l'ordine storico nel quale questi sono stati scoperti⁵, tuttavia questo è incidentale e in ogni caso il formalismo e l'interpretazione dei concetti fa sempre riferimento al pensiero corrente, o meglio alla rappresentazione del pensiero corrente presso la comunità didattica.

Come che sia, la distinzione fra ciò che va studiato storicamente e ciò che va studiato logicamente sembra quindi replicare la distinzione fra sapere umanistico e sapere scientifico. Una possibile spiegazione di questo fenomeno, che prescinde da considerazioni profonde sulla natura della cultura in Italia e in Europa, può essere il pregiudizio in base al quale certe discipline richiedono un talento e altre la semplice trasmissione di una tecnica. Questo corrisponde all'idea crociana, che tanti danni ha causato alla cultura italiana del Novecento, di una superiorità della conoscenza storico-umanistica rispetto a quella scientifica: quest'ultima si deve limitare a impartire conoscenze tecniche, trasmissibili e replicabili, laddove letteratura e filosofia volano nell'empireo dei concetti assoluti.

Tralasciando le farneticazioni crociane⁶, è certo che mentre si può insegnare la matematica, la fisica, la geografia, etc., non è chiaro come insegnare letteratura, arte o filosofia: di solito si riconosce che scrittori, artisti e anche filosofi possiedono un talento, un istinto, una predisposizione verso queste discipline che le rendono non trasmissibili con l'insegnamento (il che è incidentalmente vero anche per la matematica e le scienze in generale).

Questo è, ovviamente, vero fino a un certo punto, tuttavia volendo insegnare la poesia, la cosa più naturale sembra essere mostrare esempi di poesie, analizzarle, cercare di capire i meccanismi per mezzo dei quali i poeti compongono i loro versi, etc. E tuttavia è difficile pensare a un "compito in classe di poesia" che dia luogo a una valutazione oggettiva quanto un compito che chieda di studiare una funzione, risolvere un problema

⁵ Si pensi per esempio allo studio della fisica: si parte con la meccanica galileiana e newtoniana, quindi col Seicento, poi si studia la termodinamica, siamo quindi nel primo Ottocento, e infine ottica ed elettromagnetismo, pieno Ottocento, con cenni di relatività e fisica quantistica, e siamo alle soglie del Novecento; in mezzo c'è il passaggio fondamentale della sistematizzazione teorica della meccanica operata da Lagrange e Hamilton a cavallo fra Settecento e Ottocento, che ha fornito il quadro di riferimento per l'ottica, per la meccanica statistica e per la teoria quantistica, ma questo passaggio, che mostra come la generalizzazione delle idee della meccanica seicentesca consenta di sviluppare un formalismo in grado di abbracciare tutta la fisica ottocentesca e novecentesca (il formalismo lagrangiano e hamiltoniano), viene saltato e si perde un anello importante per capire la centralità della meccanica classica rispetto al resto della fisica.

⁶ Compendiate per esempio nella sua *Logica come scienza del concetto puro*, Laterza, 1920, specie pag.212 e sgg.

di fisica, etc. Anche in questo caso tuttavia le distinzioni nette sono fuorvianti: la musica, per esempio, richiede indubbiamente un talento naturale, ma consiste anche in un formalismo e una tecnica perfettamente trasmissibili.

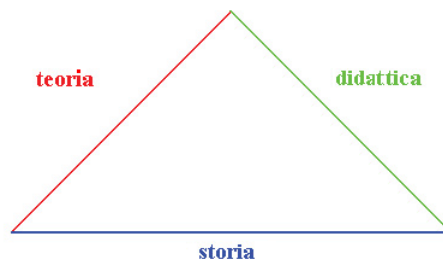
In ogni caso, dai programmi dell'ordinamento scolastico secondario, si ricava l'impressione che le discipline in qualche modo riconducibili alla *techné* siano da insegnarsi secondo un'organizzazione logica, mentre quelle riconducibili alla *episteme*, nell'impossibilità di essere trasmesse in maniera oggettivamente replicabile, possano solo essere esemplificate dall'opera degli ingegni consegnati alla storia. Ma questa suddivisione che vede matematica e fisica, per dirne due, relegate fra le aride discipline pratiche, fra le Arti Meccaniche piuttosto che fra le Arti Liberali, è un ossimoro storico: fra le Arti Liberali, nel *quadrivium*, troviamo infatti astronomia, aritmetica, geometria e musica!

Naturalmente non è proponibile di sostituire lo studio della trigonometria con lo studio della storia della trigonometria: una sostituzione tout-court non avrebbe senso. Piuttosto inquadrare lo studio della trigonometria nel suo contesto storico mostrerebbe una disciplina mutata numerose volte, che ha attraversato le epoche, dal mondo ellenistico al mondo islamico e medievale, e che si è intrecciata con l'astronomia e la geografia.

Tutto questo è lungi dall'essere semplice a livello di istruzione secondaria: in questa nota cerchiamo di analizzare la questione in astratto, fornendo un modello concettuale assai semplificato per una disciplina scientifica ed esplorandone, per mezzo di esempi, i possibili modi di impiego. Poiché è difficile esprimere idee realmente nuove in un campo così battuto e dibattuto come quello dei rapporti fra didattica e storia, si cercherà piuttosto di proporre un inquadramento sistematico della questione e, per mezzo di una metafora geometrica, di illustrare in modo sintetico i punti di vista più comunemente diffusi in merito ai benefici di un approccio storico alla didattica delle scienze.

2. LA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO CONCETTUALE

Consideriamo una disciplina di studio, per esempio una disciplina scientifica come la geometria, la termodinamica, la genetica, etc. Propongo di considerarne almeno tre aspetti, interconnessi, che mi piace sintetizzare in un *triangolo concettuale*



In questo triangolo ho rappresentato tre aspetti cruciali di una disciplina scientifica: per prima cosa la *teoria* in cui la disciplina è sistematizzata, per capirci l'esposizione logica e generale della teoria stessa; poi abbiamo la *didattica* della disciplina, che codifica la rappresentazione della teoria non nell'ordine logico ma secondo un ordine graduale utile all'apprendimento e alla comprensione del contenuto della teoria; infine abbiamo la *storia* della disciplina, che considera lo sviluppo storico, nel suo contesto culturale di riferimento, della teoria stessa.

Questi tre livelli sono ovviamente collegati fra loro ma possono facilmente essere distinti: una riprova ne è il fatto che danno solitamente luogo a tre distinti filoni di trattatistica. Da un lato abbiamo i testi di riferimento e a carattere enciclopedico, che servono a spiegare in maniera rapida, generale e il più possibilmente esauriente un argomento; abbiamo poi i testi didattici, concepiti per introdurre un neofita alla teoria, senza magari trattarne tutti gli aspetti, o senza approfondire le nozioni al loro massimo grado di completezza e generalità, ma mettendo per esempio l'accento sugli aspetti intuitivi, sugli esempi e sulle applicazioni. Infine abbiamo i testi che trattano la storia della disciplina.

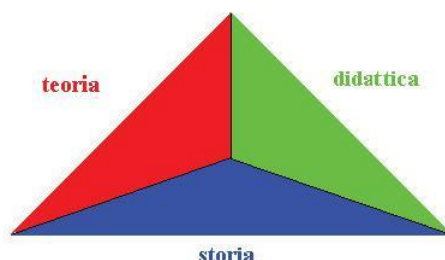
Ciascuno dei tre lati del triangolo concettuale ha una sua peculiarità e, infatti, le figure professionali che se ne occupano sono distinte: ci sono professionisti della teoria (come per esempio i ricercatori e gli scienziati), professionisti della didattica (i professori ai vari livelli di insegnamento), professionisti della storia (gli storici della disciplina appunto). Le differenze di obiettivo e contesto dei tre lati del triangolo di riverberano anche sui differenti approcci e sulle diverse formazioni dei professionisti che sono orientati su un lato piuttosto che su un altro.

Ovviamente non esistono solo i lati del triangolo, ne esiste anche il contenuto, i punti interni al suo perimetro, che corrispondono a diverse sfumature di ibridazione sia dal

punto di vista della disciplina, che della trattatistica che dei professionisti che se ne occupano.

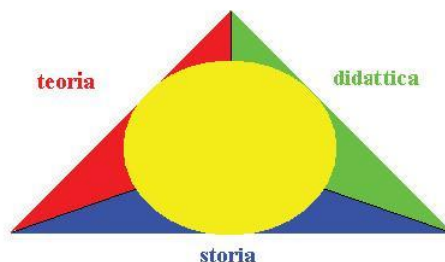
Molti libri di didattica pongono anche l'accento sulla storia, per mezzo di schede o appendici, e lo stesso vale per molti libri di teoria: un classico esempio di libro rigorosamente di teoria ma che contiene delle erudite note storiche è la serie di volumi di Bourbaki sulla matematica pura, le cui note in appendice ai singoli capitoli sono state compendiate in un libro a sé stante, cfr. Bourbaki (1960). Esistono poi trattazioni che cercano di mediare fra teoria e didattica, e così via.

Considerando anche il contenuto, possiamo arricchire il triangolo concettuale come segue:



Nella zona rossa troviamo il rigore e la precisione scientifica, nella zona verde l'intuizione e la motivazione della teoria, nella zona blu le radici e le ramificazioni in altri campi del sapere. O, se si vuole, nel rosso abbiamo il presente, ciò che la teoria è oggi alla luce delle conoscenze attuali, nel blu abbiamo il passato, la storia appunto, nel verde il futuro, dato che solo insegnando, e bene, un argomento possiamo trasmetterlo e farlo progredire verso qualcosa d'altro.

Il punto di equilibrio è l'incastro del triangolo, l'intersezione delle bisettrici: il trattato ideale e definitivo di qualsiasi teoria se esiste, si trova lì, e l'erudito per eccellenza, il dotto al quale rivolgersi senza dubbio per sapere qualcosa (o tutto) della teoria è lì che si colloca. Seguendo l'analogia geometrica, possiamo allora considerare la circonferenza centrata nell'incastro e tangente ai tre lati del triangolo (il cosiddetto incirchio) come la zona in cui i tre aspetti del triangolo concettuale si intrecciano nella maniera più equilibrata e felice, e, di contro, considerare gli spigoli del triangolo come il punto di incontro parziale di almeno due aspetti della disciplina.



Evidentemente è molto difficile collocarsi nella zona centrale del triangolo, tanto per i trattati che per i professionisti: in questa nota ci concentreremo sullo spigolo destro del triangolo, il punto di incontro fra storia e didattica, cercando di esplorarne la simmetria e di capire come, nel reciproco intreccio di questi due aspetti, si possa cercare di convergere verso l'incentro del triangolo concettuale.

Nel farlo, e questo in definitiva ci insegna la metafora del triangolo, non dobbiamo dimenticare che esiste anche un terzo lato, la teoria, che in qualche modo rappresenta il riferimento di ciò che la didattica vuole insegnare e di cui la storia vuole ricostruire lo sviluppo.

3. TEORIA, STORIA E DIDATTICA: FIGURE ESEMPLARI

Per esemplificare le relazioni fra teoria, didattica e storia che abbiamo discusso fin qui considereremo alcune figure esemplari ben note che hanno posto l'approccio storico al centro della loro attività scientifica e didattica.

Come la teoria e storia si possano intrecciare e aiutarsi reciprocamente è mostrato dall'opera di Ernst Mach (1838-1916), il cui celebre libro Mach (1992) contiene una esposizione delle teorie meccaniche analizzate nel loro contesto storico. Le idee di Mach sulla natura della scienza, che hanno dato luogo a forti polemiche ma che hanno avuto una influenza decisiva su molti pensatori del primo Novecento, a partire da Albert Einstein (1879-1955), consideravano la scienza come una "economia di pensiero", una attività volta a rapportare l'uomo col mondo che lo circonda, intendendo con mondo la totalità dei dati sensoriali direttamente accessibili.

Dunque Mach contesta la teoria atomica perché in qualche modo sfugge a questo empirismo critico, e considera la scienza come un fenomeno storicamente determinato. Naturalmente, questa concezione epistemologica gli attirò non solo simpatie ma anche illustri avversari, come Max Planck (1858-1947) che ne contestava la visione puramente empirica della scienza. Si può comunque parlare di un vero e proprio metodo storico

nell'attività scientifica di Mach (cfr. Dibattista (2009) pp.45sgg), che partiva dalle teorie emerse storicamente, anzi dall'opera degli scienziati più che dalle teorie intese come sforzo collettivo che travalica luoghi ed epoche, per costruire il proprio pensiero e la propria teoria scientifica elaborando dalle precedenti. In questo senso, teoria e storia sono correlate in una relazione che non vede il primato dell'una nei confronti dell'altra ma un reciproco scambio e, per certi versi, l'appartenenza a un unico tipo di attività intellettuale, che è poi il fare scienza, o meglio lo svilupparla, nell'intendimento di Mach.

Una reciprocità ancora più completa fra storia e teoria si trova nell'opera del fisico francese Pierre Duhem (1861-1916), che si occupò di idrodinamica, elasticità e termodinamica, oltre che di filosofia e storia della scienza, lasciando una monumentale opera, *Le système du monde: histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, in dieci volumi pubblicati fra il 1913 e il 1959.

Secondo Duhem, la scienza procede unicamente perché è in grado di utilizzare il bagaglio di conoscenze storicamente accumulato e dunque è nello studio della sua storia che può attingere le idee e gli spunti per progredire, anche nel senso di contrastare le teorie del passato, ma partendo dalla loro conoscenza, dalle loro motivazioni, dal loro sviluppo.

A maggior ragione Duhem sottolinea il valore della storia della scienza per il suo insegnamento, percorrendo quindi tutto il perimetro del triangolo concettuale e collocandosi a buon diritto assai vicino all'incentro, per quanto riguarda la fisica e la meccanica, le discipline che lo hanno visto come ricercatore, storico, filosofo e insegnante. Basterà citare dalle pagine conclusive del suo trattato Duhem (1906), pp.408-409:

Il metodo legittimo, sicuro, fecondo, per preparare uno spirito a ricevere una ipotesi fisica è il metodo storico. Ripercorrere le trasformazioni tramite le quali il materiale empirico si è incrementato, e la forma teorica si è delineata; descrivere la lunga collaborazione con la quale il senso comune e la logica deduttiva hanno analizzato questo materiale e modellato questa forma fino a che l'una non si è adattata esattamente all'altra, è il modo migliore, anzi il solo metodo, di dare a coloro che studiano la fisica una idea corretta e una visione chiara dell'organizzazione così complessa e così viva di questa scienza.

È interessante osservare come Duhem legghi l'approccio storico alla natura di scienza sperimentale della fisica, e in particolare alla formulazione di teorie sempre più capaci di spiegare i dati sperimentali accumulati col passare del tempo: a riprova di questo, nelle stesse pagine, Duhem sostiene che per la matematica non è così fondamentale la conoscenza storica quanto lo è per la fisica, relegandola al ruolo di "una curiosità legittima ma non essenziale per la comprensione della matematica".

Una figura coeva a Duhem è stato il grande matematico italiano Federigo Enriques (1871-1946), celebre per i suoi contributi alla geometria algebrica delle superficie. Le idee di Enriques in materia di storia della scienza sembrano estendere e generalizzare quelle di Duhem, del quale peraltro non condivideva l'approccio "convenzionalistico" tipico della scuola francese dell'epoca: tuttavia l'approccio storico allo studio delle teorie scientifiche fornisce, secondo il grande matematico livornese, la chiave d'accesso alla comprensione più completa del fenomeno scientifico.

La ricerca di Enriques sconfinava non soltanto nel campo della storia, ma anche in quello della filosofia, egemonizzata, in Italia agli inizi del Novecento, dal pensiero di Giovanni Gentile (1875-1944) e Benedetto Croce (1866-1952): quest'ultimo in particolare si scagliò con acrimonia contro le attività di Enriques in campo filosofico, bollando lo scienziato di diletterismo e trincerandosi dietro un antiscientismo programmatico che abbiamo già avuto modo di stigmatizzare. L'egemonia nel campo della scuola e della cultura della coppia Gentile-Croce chiuse la questione, esplosa in occasione del Congresso Internazionale di Filosofia svoltosi a Bologna nel 1911 e organizzato da Enriques: per una rievocazione della vicenda cfr. il volume di Guerraggio e Nastasi (1993).

Invece Enriques, a nostro avviso, ha buone probabilità di collocarsi nell'incrocio del triangolo concettuale per quel che riguarda le scienze esatte: la sua indiscussa genialità e vastità di interessi teorici, la profonda conoscenza della storia della scienza, testimoniata dalle sue importanti opere di storia del pensiero scientifico pubblicate negli anni '30, l'attenzione alle tematiche della didattica non solo universitaria ma anche relativamente all'istruzione secondaria, e soprattutto l'integrazione di tutte queste tre componenti in una visione unica di pensiero forniscono un grandioso esempio di "fare scienza" a tutti i livelli.

L'approccio di Enriques alla didattica è lo stesso utilizzato nel caso della teoria e della storia: da un lato si rifiuta il convenzionalismo propendendo per un contenuto intuitivo, psicologicamente fondato, come fondamento della conoscenza scientifica, dall'altro si guarda alla storia come a una fonte di ispirazione e di esempio. Questo approccio è particolarmente evidente nel celebre manuale scolastico Amaldi, Enriques (1903) che Enriques scrisse con Ugo Amaldi (1875-1957) per l'insegnamento della geometria nelle scuole secondarie, che fu pubblicato nel 1903 e ristampato in edizioni sempre più voluminose fino agli anni '50.

4. INTEGRARE LA STORIA NELLA DIDATTICA

Il connubio fra storia e didattica, si è detto, è stato esplorato a lungo: non è quindi il caso di ripetere in dettaglio i benefici che l'approccio storico può recare all'insegnamento delle scienze, e in particolare della matematica (cfr. e.g. Fauvel, van Maanen (2000), in particolare §7 e relativa bibliografia). Piuttosto va precisato che non si sta parlando qui dello studio della storia di una disciplina scientifica da affiancare alla disciplina stessa, obiettivo che è di facile realizzazione in ambito universitario ma che per varie esigenze è chiaramente dispersivo nell'insegnamento secondario, ma di far pesare l'approccio storico nella comprensione degli argomenti, specie se, come nel caso della matematica, è importante fornire concretezza e motivazioni per l'introduzione dei concetti teorici. D'altra parte uno studio effettivo della storia della scienza presuppone delle conoscenze scientifiche, il che sembra implicare che il modo migliore di introdurre la storia della scienza è di *integrarla* nell'insegnamento della disciplina teorica.

Naturalmente esistono anche i detrattori dell'approccio storico, la cui critica è sostanzialmente basata sulla differenza che esiste fra una disciplina scientifica e la storia di quella disciplina: studiare la storia della scienza, si dice, è altro che studiare la scienza, si tratta di materie distinte quanto la matematica e la filosofia nei corsi di educazione secondaria (la cui dicotomia, per inciso, è una finzione moderna: basti pensare all'intreccio fra il pensiero platonico e il pensiero geometrico antico).

Inoltre si obietta che spesso lo studio storico di un argomento scientifico potrebbe confondere lo studente, che non ha gli strumenti critici né per far corrispondere il linguaggio scientifico del passato con quello del presente né per discernere gli elementi presenti nell'esposizione storica ma che non sono confluiti nella forma finale della teoria.

Infine da più parti si mette in luce che, seppure l'integrazione dello studio di una materia scientifica con lo studio della sua storia possa avere dei vantaggi, questi vengono vanificati dal maggior tempo impiegato nell'insegnamento, dalla scarsità di risorse e ausili didattici a disposizione di insegnanti e studenti e dalle problematiche di formazione del corpo docente.

Viceversa, nei prossimi paragrafi fornirò alcuni esempi per ciascuno dei seguenti argomenti che, fra i molti possibili, mi paiono particolarmente interessanti per quanto riguarda l'apporto che la storia della scienza può dare alla didattica. Va sottolineato come questi argomenti riguardino in primo luogo i discenti ma in parte anche i docenti: è stato più volte rilevato come lo studio della storia della scienza possa fornire nuovi spunti e riaccendere interesse per la materia che si sta insegnando anche nei docenti.

- *Umanizzazione e storicizzazione della scienza*: legare una materia tecnica e astratta, che quindi potrebbe risultare arida, al mondo umano e in particolare allo sviluppo storico, contribuisce da un lato a “umanizzare” un argomento a prima vista scollegato da qualsiasi attività pratica, dall'altro a inquadrarlo in un contesto di pensiero. In particolare è stato più volte osservato come legare una nozione scientifica a un aneddoto e a dei personaggi storici possa rendere più attraente lo studio, fornendo una spinta emotiva dovuta alla curiosità.
- *Motivazione e strutturazione dei risultati scientifici*: fornire delle motivazioni storiche e umane per l'introduzione dei concetti teorici illustra come questi ultimi siano il prodotto di un processo di pensiero, che può aver coinvolto molti individui diversi, e non entità atemporalmente concepite esattamente nel modo col quale sono espresse nella trattatistica teorica. In particolare la comprensione di un risultato scientifico può essere facilitata dall'analisi della “storia dei tentativi” che hanno contribuito a generarlo.
- *Provvisorietà dei paradigmi scientifici*: mostrare come la scienza sia una attività in divenire, soggetta a mutamenti, mode, e anche condizionamenti politici, può contrastare l'immagine di cristallino dogmatismo che necessariamente emerge dalla trattatistica teorica, che presenta le nozioni organizzate secondo uno schema logico che è in realtà mutevole e non fissato una volta per tutte. In particolare la comprensione della complessità

dell'attività scientifica e l'idea che la scienza non procede in maniera lineare e senza interruzioni può essere sfatata analizzando l'avvicinarsi delle idee scientifiche poste a fondamento della spiegazione di un certo fenomeno o, nel caso delle scienze esatte, delle generalizzazioni e successive ramificazioni cui uno stesso concetto può aver dato luogo.

Nei prossimi paragrafi fornisco alcuni esempi tratti da capitoli classici e ben noti della storia della scienza, per cercare di illustrare i punti precedenti nell'ottica della didattica.

5. UMANIZZAZIONE E STORICIZZAZIONE DELLA SCIENZA

La scienza è indiscutibilmente un fenomeno umano: sebbene il suo scopo sia sostanzialmente di formulare in un quadro il più possibile unitario dei principi generali di comprensione quantitativa della realtà, o meglio di vari aspetti della realtà, è il prodotto di una impresa umana e collettiva. Vale la pena di sottolineare entrambi gli attributi: umana in quanto le persone che contribuiscono al progresso scientifico, per geniali o eccentriche che siano, sono *uomini in carne e ossa*⁷ a tutti gli effetti; collettiva in quanto non è possibile progresso scientifico nell'isolamento, e la scienza non può prescindere dalla comunicazione, sia fra ricercatori coevi ma distanti nello spazio, sia fra generazioni che si passano idee, problemi, soluzioni.

Come è possibile utilizzare la storia della scienza in questo senso? La risposta più semplice è data dall'inserimento di notizie e aneddoti sugli scienziati che hanno contribuito alla nozione in esame. Tuttavia, questa maniera tutto sommato agiografica di inserire elementi storici nella narrazione didattica può anche essere controproducente se non è svolta in maniera critica. Per esempio, a nostro avviso un grande beneficio viene dall'illustrazione degli errori e delle difficoltà degli scienziati nel formulare e comprendere i concetti esposti in maniera così immediata e chiara nei libri di testo, errori e difficoltà che spesso si replicano "in piccolo" nell'apprendimento degli studenti. Capire che un concetto complicato non può essere compreso immediatamente nemmeno dallo scienziato che lo ha consegnato alla storia può sollevare lo studente dalle ansie dovute alle difficoltà e fornire fiducia e motivazione.

⁷ Nel primo capitolo del suo *Del sentimento tragico de la vida*, (1912) Miguel de Unamuno (1864-1936) sostiene che lo studio di una teoria filosofica non può prescindere dallo studio della biografia del filosofo che l'ha prodotta.

Charles Darwin (1809-82) è giunto all'idea della selezione naturale, che costituisce il cuore della sua teoria dell'evoluzione, principalmente analizzando i dati e le esperienze fatte durante il suo celebre viaggio intorno al mondo a bordo del *Beagle*, ma anche ispirandosi alle teorie economico-politiche di Thomas Maltus (1766-1834). La maturazione del principio della selezione naturale ha quindi richiesto molti anni, cinque soltanto spesi a bordo del brigantino. Il diario di Darwin, da collegarsi alle sue pubblicazioni, prima fra tutte l'*Origine delle specie*⁸ (1859), offre una panoramica dell'evoluzione (è il caso di dirlo) dell'idea di selezione naturale, che fornisce il vero contributo del grande naturalista inglese alla teoria evolutiva⁹.

Uno studio della teoria dell'evoluzione non sembra poter prescindere dal suo sviluppo storico: da un lato il confronto con teorie precedenti, che in parte hanno in seguito dato vita a nuove idee come il lamarckismo, la cui versione settecentesca data da Jean-Baptiste Lamarck (1744-1829) si è rivelata erronea, alla luce dei primi studi sperimentali di genetica, e che tuttavia sembra aver percorso anche il concetto di *soft inheritance* nell'ambito della moderna epigenetica (cfr. e.g. Jablonka, Lamb (2005)). D'altra parte la "coincidenza" della scoperta pressoché contemporanea del meccanismo evolutivo da parte di Darwin e Wallace costituisce una convergenza tutt'altro che atipica, che serve a evidenziare come le idee scientifiche tendono a prodursi esattamente in certe circostanze storiche e geografiche.

Infine le polemiche seguite alla pubblicazione della teoria di Darwin e Wallace, polemiche il cui eco si fa sentire ancora oggi, non possono non essere considerate una parte essenziale per comprendere l'importanza e anche i concetti della teoria dell'evoluzione.

Direi che in questo caso è impossibile per la scienza ignorare la sua storia, specie a seguito delle controversie che, incredibilmente, la teoria dell'evoluzione continua a suscitare nell'insegnamento, in particolare in alcuni paesi come gli Stati Uniti e la Turchia¹⁰. Storicizzare la questione può forse servire anche a comprendere le resistenze

⁸Tutte le opere di Darwin, nelle varie edizioni e col corredo di molte traduzioni "d'epoca", si possono reperire sul sito <http://darwin-online.org.uk/>.

⁹Ricordiamo infatti che Alfred Russell Wallace (1823-1913) giunse in modo indipendente e nello stesso periodo alla teoria dell'evoluzione darwiniana, con dei distinguo a proposito del meccanismo di selezione naturale.

¹⁰Cfr. l'impressionante analisi in Miller, Scott, Okamoto (2006).

pregiudiziali che una teoria scientifica ormai consolidata può incontrare nella sua affermazione al di fuori della cerchia scientifica.

Un aspetto assolutamente salutare dello studio della scienza è l'accumulo della memoria storica degli errori scientifici e delle teorie che, rimaste per qualche tempo in auge, si sono poi rivelate erranee. Tralasciando l'evidente importanza filosofica di questo aspetto della storia della scienza, basti pensare al ruolo delle anomalie e delle crisi dei paradigmi scientifici nella concezione kuhniana dello sviluppo della scienza, è fondamentale per rendere conto dell'elemento umano dietro una teoria scientifica considerare gli errori che hanno portato a quella teoria, per non ingenerare il falso mito di una scienza che procede per accumulo incontrastato di conoscenza.

Esistono moltissimi esempi che illustrano come una teoria affermata abbia alla fine mostrato delle crepe tali da farla crollare, per esempio la teoria dell'etere crollata sotto le evidenze della relatività ristretta di Einstein. Ma è anche importante annotare i veri e propri falsi che hanno costellato la storia della scienza non meno che la storia dell'arte.

Un esempio tipico è la vicenda dell'uomo di Piltdown, paradigmatico per illustrare come un intero gruppo di scienziati affermati possa sbagliare clamorosamente sulla base di considerazioni derivanti dal contesto e non prettamente scientifiche.

Agli inizi del Novecento la conoscenza sull'evoluzione umana si basava sostanzialmente su tre tipi di fossili: l'Uomo di Cro-Magnon (anatomicamente come noi) rinvenuto in Francia, l'Uomo di Neanderthal (*Homo neanderthalensis*), rinvenuto in varie località di Germania e Belgio, e il "Pitecantropo" o Uomo di Giava (*Homo erectus*), il cui primo esemplare fu rinvenuto nel 1891 da Eugène Dubois (1858-1940), e del quale sarebbero stati scoperti numerosi altri fossili in Cina negli anni '20. Con grande sconforto della comunità scientifica britannica, non erano stati invece rinvenuti fossili nelle isole britanniche.

Tuttavia, fra il 1908 e il 1912, furono ritrovati a più riprese frammenti ossei di un cranio la cui mandibola era chiaramente scimmiesca, mentre il teschio sembrava umano. All'epoca non era uso praticare i protocolli attuali per l'estrazione di fossili da un sito, ma lo stesso valeva per i fossili precedenti. Solo nel 1953 fu definitivamente stabilito che si trattava di un falso, composto combinando ad arte un teschio umano medievale, una mandibola di orangio e denti fossili di scimpanzé.

Il lato sorprendente della vicenda è che insigni antropologi inglesi scommisero la loro reputazione sull'uomo di Piltdown, trascinati da pregiudizi nazionalisti, nel nome di una supposta (e infatti falsa) origine europea dell'Uomo: il più notevole studioso travolto dalla burla fu Sir Arthur Keith (1866-1955), le cui opere sono un ottimo esempio di come i pregiudizi di un'epoca, il tardo vittoranesimo coloniale, possano influenzare il talento di uno scienziato. In particolare è degno di nota che Keith rifiutò di considerare il cranio (autentico) di *Australopithecus africanus* rinvenuto da Raymond Dart (1893-1988) nel 1925 in Sud Africa come un antenato dell'uomo, considerandolo invece come una scimmia fossile, salvo doversi poi ricredere quando negli anni '40 Robert Broom (1866-1951) scoprì numerose altre testimonianze di australopithecine in Sud Africa.

Trattandosi di personalità scientifiche dal talento indiscusso, l'unica spiegazione del falso di Piltdown, durata per quaranta anni, è il contesto: gli scienziati sono, ripetiamo, uomini in carne e ossa, con le loro convinzioni e pregiudizi, influenzati dalle mode del tempo oltre che dall'educazione e dai casi della vita. Nell'ambiente ancora colonialista, nazionalista ed eurocentrico di inizio secolo non era difficile presumere che l'origine dell'Uomo dovesse ricercarsi nella propria madre patria e non nelle colonie.

6. MOTIVAZIONE E STRUTTURAZIONE DEI RISULTATI SCIENTIFICI

Una nozione scientifica, per esempio un teorema, tende a essere considerata per come viene esposta nel trattato dal quale la si sta apprendendo: di solito viene introdotta con una motivazione di ordine logico, ed illustrata con esempi contestualizzati per quella motivazione. Per esempio il teorema di Pitagora di norma viene studiato nel contesto degli elementi della geometria piana, esposta in modo sintetico nei manuali scolastici: il suo legame con la teoria dei numeri e con la nozione di distanza rimane completamente nascosto in questo tipo di trattazione.

Collocare un risultato scientifico nel flusso di pensiero che lo ha generato e nel quale si è mutato, e come vedremo nel caso del teorema di Pitagora questo flusso travalica le epoche, consente non solo di fornire motivazioni ulteriori per l'importanza del risultato al di là dell'ordine logico nel quale la teoria che lo contiene viene esposta, ma anche di dare sostanza, struttura, di estenderlo lungo la dimensione temporale e consentire di valutarne l'importanza anche dalla sua occorrenza in epoche e luoghi diversi.

Il teorema di Pitagora compare per la prima volta, nella geometria greca, negli *Elementi* di Euclide, come quarantasettesima proposizione del primo libro (cfr. Caressa (2012), §5): la tradizione ellenistica, specie quella tarda, lo attribuisce alla figura semi-mitica di Pitagora, filosofo ionico e fondatore di una setta religiosa nella Magna Grecia. Tuttavia le uniche fonti che ci parlano del filosofo di Samo sono molto tarde rispetto all'epoca in cui sarebbe vissuto, il IV secolo a.C.: per esempio ne parlano Vitruvio (I sec. a.C.), Diogene Laerzio (II-III sec d.C.), Giamblico (III-IV sec. d.C.), Proclo (V sec. d.C.), etc.

Nei manuali moderni, quando viene dimostrato, il teorema di Pitagora è presentato sostanzialmente nello stesso contesto nel quale lo troviamo presentato da Euclide, sebbene la dimostrazione euclidea sia spesso omessa, o sostituita con altre ritenute più semplici ma che fanno sempre appello al primo teorema di Euclide sui triangoli rettangoli¹¹, che negli *Elementi* figura come ottava proposizione del sesto libro. Tutto questo rende il teorema di Pitagora da un lato un corollario del teorema di Euclide, dall'altro un qualsiasi teorema sui triangoli rettangoli la cui fama è forse dovuta soltanto al nome dell'illustre filosofo ionico.

Tuttavia questo risultato ha una storia lunghissima, che affonda le radici nella preistoria. Per accennarvi, è necessario collegare il teorema al concetto di *terna pitagorica*: quest'ultima è una terna di interi positivi (a, b, c) tali che $a^2 + b^2 = c^2$; per esempio (3, 4, 5) è una terna pitagorica, mentre (4, 5, 6) non lo è. Negli *Elementi* di Euclide figura un algoritmo per generare tutte le terne pitagoriche, che sono infinite. Ovviamente una terna pitagorica determina le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo.

Le terne pitagoriche fanno la loro comparsa almeno milleduecento anni prima di Pitagora, dato che una lista di tali terne compare in una tavoletta cuneiforme babilonese dell'epoca del re Hammurabi (XVIII sec a.C.), cfr. Caressa (2012) §2. Alcuni studiosi sono persino giunti a sostenere che le terne pitagoriche erano utilizzate in epoca preistorica nella costruzione di circoli megalitici nel centro Europa, una tesi che non trova riscontri precisi e che viene generalmente considerata insostenibile (cfr. Caressa (2012) §1), sebbene recentemente alcune precise misurazioni sembrano attestare che il circolo di Stonehenge contenga simmetrie basate su alcune terne pitagoriche (cfr. Kaizinger (2011)).

¹¹In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo di lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Le terne pitagoriche figurano anche nei testi indiani chiamati *Shulbas sutras*, redatti fra l'VIII e il II secolo a.C., che contengono prescrizioni di natura religiosa e rituale, in particolare per quel che concerne le dimensioni degli altari: oltre alle terne pitagoriche, in questi antichi testi troviamo anche l'enunciato del teorema di Pitagora (cfr. Caressa (2012) §3). Poiché il termine *Shulbas sutras* allude alle regole per tendere delle corde, sembra naturale pensare che la scoperta del teorema per i triangoli rettangoli sia avvenuta in maniera "empirica" magari poggiando su prove fatte utilizzando le terne pitagoriche.

Dunque la storia del teorema di Pitagora sembra percorrere le epoche e i secoli: sicuramente i Babilonesi conoscevano le terne pitagoriche e forse avevano un algoritmo per costruirle, e conoscevano anche il teorema di Pitagora nella sua forma geometrica, in quanto lo troviamo utilizzato nella soluzione di alcuni problemi di calcolo di aree e lunghezze; gli Indiani, almeno un millennio appresso, utilizzavano non solo le terne ma anche il teorema di Pitagora, che ritroviamo nei testi cinesi, per esempio nel *Zhou bi suan jing* (I sec. a.C.), un trattato di astronomia che contiene una dimostrazione esemplificata dalla figura seguente, che illustra il teorema nel caso di un triangolo di lati (3, 4, 5) corrispondente a una terna pitagorica appunto.

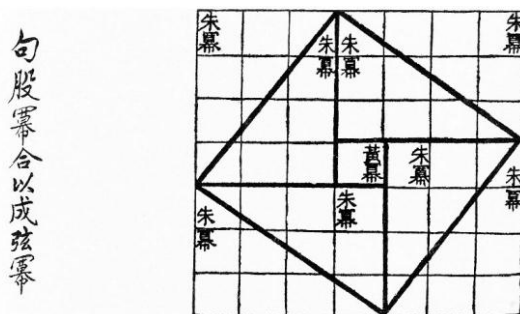


Figura 1 Illustrazione del teorema di Pitagora per il triangolo di lati (3; 4; 5) dal *Zhou bi suan jing*.

Il quadrato interno, i cui lati sono in grassetto, è quello costruito sull'ipotenusa 5 e ha area $5^2 = 25$, mentre il quadrato esterno ha come lato la somma dei lati dei cateti 3 e 4, cioè ha area $(3 + 4)^2 = 49 = 25 + 24$, cioè pari all'area del quadrato interno più 4 volte l'area $6 = (3 \times 4) / 2$ del triangolo, come si vede dalla figura. Dunque $25 + 4 \times (3 \times 4) / 2 = (3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \times (3 \times 4)$ che fornisce la relazione pitagorica $5^2 = 3^2 + 4^2$: il ragionamento è valido per qualsiasi triangolo rettangolo. Il teorema di Pitagora viene chiamato teorema del *gou-gu* (cioè dello gnomone) nella matematica cinese e ricorre

anche nei testi seguenti, come i famosi *Nove capitoli dell'arte matematica*, cfr. Caressa (2012) §7.

Una “dimostrazione grafica” ancora più immediata, basata sempre sull'equivalenza di aree, la si deve al matematico indiano Bhaskara II (1114-85 ca.) ed è illustrata nella figura 2. Come si vede il quadrato a destra ha come lato l'ipotenusa del triangolo, e contiene un quadrato centrale che ha come lato uno dei cateti; la figura a sinistra mostra come, spostando i triangoli e il quadrato centrale, si ottiene un'area pari alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

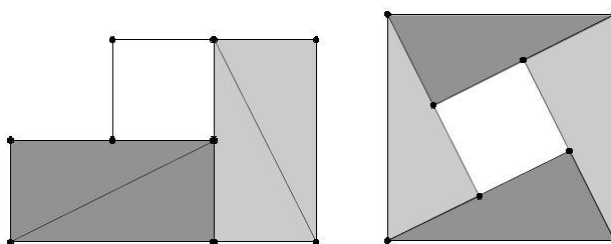


Figura 2 Dimostrazione di Bashkara del teorema di Pitagora.

Abbiamo ripercorso in qualche dettaglio la storia del teorema di Pitagora al di fuori del mondo greco, per mostrare come le dimostrazioni asiatiche, per esempio, basate sulle equivalenze di aree siano sicuramente più intuitive, e anche facilmente riconducibili a espressioni algebriche, rispetto alle costruzioni classiche della geometria ellenistica. Inoltre la relazione con le terne pitagoriche apre uno spiraglio sulla teoria elementare dei numeri, tanto per dirne una il celebre teorema di Fermat è una naturale generalizzazione del concetto di terna pitagorica.

Utilizzare elementi di questa storia e mostrare come uno stesso enunciato è suscettibile di motivazioni e dimostrazioni alternative fiorite presso culture lontane fra loro nel tempo e nello spazio è probabilmente il miglior modo di rendere conto del fatto che il teorema di Pitagora è una delle proposizioni fondamentali e fondanti dell'intera geometria, e che merita per intero la sua fama.

7. PROVVISORIETÀ DEI PARADIGMI SCIENTIFICI

L'ultimo aspetto che vogliamo evidenziare a proposito di una integrazione storica delle nozioni scientifiche impartite nell'insegnamento, non solo secondario ma in questo caso anche universitario, è la salutare iniezione di umiltà che viene inoculata dallo studio delle teorie del passato che non hanno resistito al vaglio di esperimenti più precisi, come

nel caso della meccanica newtoniana rispetto alla relatività o alla meccanica quantistica, o di teorie che consentivano una interpretazione più completa dei dati esistenti, come la teoria copernicana rispetto alla teoria tolemaica. La storia della scienza, che sia vista come un incrementale accumulo di nozioni e scoperte, o un processo sottoposto a “salti” improvvisi¹², consente in qualche senso di prendere le misure alle teorie scientifiche, calandole in un contesto e fornendole di inizio e fine: l’idea di una teoria definitiva non esiste nemmeno in matematica, anche se in questo caso più che sovvertire le teorie del passato è comune estenderle e generalizzarle, come nel caso della scoperta della geometria non euclidea, che non ha invalidato la geometria euclidea, bensì ha invalidato la concezione filosofica e pregiudiziale che la vedeva come l’unica geometria possibile.

Ogni teoria scientifica soggiace a una visione del mondo che, retroattivamente, contribuisce a consolidare, fondare o anche distruggere. La meccanica intesa come scienza dei corpi in movimento, eretta a sistema scientifico da Galileo e Newton, ha contribuito a delineare il paradigma determinista che ha dominato la scienza fino a tutto il secolo XIX: impostosi in maniera coerente e cosciente nel Settecento, si pensi alle celebri affermazioni di Pierre Simon de Laplace¹³ (cfr. Caressa (2010) §1.4), il determinismo si è esteso da concezione filosofia della meccanica a paradigma di interpretazione della realtà estendendosi a tutta la scienza in maniera così pervasiva che nemmeno l’affermazione delle correnti romantiche in letteratura e filosofia riuscirono a scalfirne il successo come chiave di interpretazione della realtà.

Ogni teoria ottocentesca per avere pretese di scientificità doveva essere deterministica, perché si pensava che la natura stessa lo fosse. Per questo motivo quando Albert Einstein rivoluzionò la concezione del tempo e dello spazio, un punto di non ritorno nella storia del pensiero scientifico e filosofico, con la teoria della relatività ristretta (1905) e più grandiosamente con la teoria della relatività generale (1916), continuò a muoversi nel solco della concezione deterministica della natura: la sua teoria estende la teoria di Galileo-Newton, che ne diviene un caso particolare valido entro i margini

¹²O un ragionevole mix fra questi due aspetti, cfr. Infeld (1972), p.16.

¹³“Una intelligenza che, a un dato istante, conosca tutte le forze che animano la natura, la posizione rispettiva degli enti che la compongono, se fosse così vasta da sottoporre questi dati all’analisi [matematica], abbraccerebbe nella medesima formula i movimenti dei più grandi corpi dell’universo, e quelli dei più effimeri atomi. Nulla sarebbe incerto per essa, e sia l’avvenire sia il passato sarebbero presente ai suoi occhi”, cfr. *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814, p.3.

sperimentali del mondo macroscopico¹⁴. Tant'è che per lanciare razzi e satelliti nello spazio si utilizza la teoria newtoniana, e il problema fondamentale del mondo, vale a dire la stabilità del sistema solare, si formula sempre usando la teoria newtoniana nella sua versione settecentesca. La relatività generale fa invece sentire i suoi effetti dove sono presenti velocità relativistiche, come nella comunicazione GPS, o distanze cosmiche, come nello studio delle stelle *pulsar* binarie (cfr. Doplicher (2010)).

Ma agli inizi del Novecento, la convergenza di istanze sperimentali e teoriche rese insostenibile la concezione deterministica per la meccanica dell'infinitamente piccolo: non ci addentreremo nella complicata storia degli albori della meccanica quantistica, ma ci contenteremo per il momento di osservare come si tratti di una rivoluzione non solo nel campo scientifico ma anche per quanto riguarda l'intera concezione del mondo, un cambiamento di paradigma paragonabile alla rivoluzione copernicana. In effetti molti concetti della fisica quantistica sono "contro-intuitivi", esattamente come ci pare strano pensare al fatto che la Terra si muova intorno al Sole mentre ci appare evidente esattamente il contrario. Fu soltanto nel 1925, dopo un ventennio di ricerche, che l'inconciliabile natura non deterministica, o per essere più precisi, intrinsecamente probabilistica, della nuova meccanica emerse, con il celebre lavoro di Werner Heisenberg (1901-76), col quale veniva sancito il suo principio di indeterminazione, una legge intrinseca nella natura delle cose osservabili, completamente nuova rispetto a tutto quello che la fisica e le scienze naturali in generale avevano concepito nei secoli del predominio determinista.

Uno dei più istruttivi e noti esempi di quanto la visione del mondo di uno scienziato possa influenzarne non solo l'interpretazione della realtà ma anche l'attività scientifica è dato dalla reazione di Einstein alla teoria quantistica: da un lato, nel periodo più fecondo della sua carriera di ricercatore, Einstein contribuì alla teoria dei quanti con il suo geniale articolo del 1905 nel quale proponeva l'esistenza del fotone per spiegare l'effetto fotoelettrico, esistenza confermata nel 1919 che gli valse il Nobel per la fisica nel 1921 (cfr. Einstein (1972)). D'altro canto l'interpretazione della teoria dei quanti proposta da Niels Bohr (1885-1962) e della sua scuola di Copenhagen trovarono l'opposizione di Einstein, che era già stato profondamente turbato dal principio di Heisenberg, una cui conseguenza era la rinuncia alla descrizione spazio-temporale dei

¹⁴Il limite sperimentale della legge di gravitazione newtoniana è di un millimetro: sotto questa dimensione non è noto se sia ancora valida, cfr. Doplicher (2010).

fenomeni fisici (almeno di quelli su scala microscopica) sostituendo la geometria dello spazio-tempo con l'algebra non commutativa degli operatori nello spazio di Hilbert¹⁵ (cfr. Heisenberg (1978)).

Lo scontro fra Einstein e i fondatori della fisica quantistica non riguarda i singoli risultati, ma la rinuncia al paradigma scientifico classico, la descrizione deterministica dei fenomeni usando la geometria dello spazio-tempo e il principio di causalità¹⁶: malgrado lo stesso Einstein, con la sua teoria della relatività, avesse abbattuto l'idea di uno spazio-tempo assoluto che persisteva dai tempi di Newton, la sua proposta alternativa restava sempre nelle linee del paradigma classico.

La contrapposizione fra Einstein e il paradigma cui soggiace la meccanica quantistica e la sua interpretazione non è semplicemente una questione di gusti personali o una semplice disputa filosofica, ma è alla base della principale questione aperta della fisica contemporanea, vale a dire la conciliazione, e possibilmente l'unificazione, di relatività e fisica quantistica, due teorie che hanno ottenuto delle spettacolari conferme sperimentali ma che sembrano irrimediabilmente incoerenti l'una con l'altra¹⁷.

La polemica Bohr-Einstein è dunque preziosa da un lato per evidenziare la differenza fra una teoria scientifica e il paradigma di pensiero che le fa da contorno, dall'altro per mostrare come scienziati che studiano, apparentemente, la "stessa" realtà possono dare luogo a teorie scientifiche ineccepibili e corrette, nei propri ambiti di validità empirica, ma irriducibilmente inconciliabili.

BIBLIOGRAFÍA

AMALDI, U., ENRIQUES, F. (1903): *Elementi di geometria*. Bologna: Zanichelli.

¹⁵Heisenberg ragionava in termini di matrici infinite, cioè operatori su uno spazio di serie convergenti, mentre Erwin Schrödinger (1887-1961) mostrò nel 1926 come formulare la teoria in termini di operatori su uno spazio di funzioni sommabili: l'equivalenza delle due teorie segue dall'isomorfismo dei relativi spazi di Hilbert, un teorema standard di analisi funzionale.

¹⁶Nel suo carteggio con Max Born (1882-1970), Einstein scrive in una lettera datata 29 aprile 1924 (cfr. Born, Einstein (1973), p.98): "Le idee di Bohr sulla radiazione mi interessano molto, ma non vorrei lasciarmi indurre ad abbandonare la causalità rigorosa senza aver prima lottato in modo assai diverso da come s'è fatto finora. L'idea che un elettrone esposto a una radiazione possa scegliere liberamente l'istante e la direzione in cui spiccare il salto è per me intollerabile. Se così fosse preferirei fare il ciabattino, o magari il croupier, anziché il fisico". In una lettera datata 4 dicembre 1926 figura la famosa frase (cfr. Born, Einstein (1973), p.109): "La meccanica quantistica è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. È una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare a fondo il segreto del gran Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi col mondo".

¹⁷Einstein formulò la sua principale obiezione alla fisica quantistica nel cosiddetto paradosso di Einstein-Podolski-Rosen, cfr. Doplicher (2010).

- BORN, M., EINSTEIN, A. (1973): *Scienza e vita. Lettere 1916-1955*, Boringhieri, Torino, tr. it. di *Briefwechsel 1916-1955*, Nymphenburger, München, 1969.
- BOURBAKI, N. (1960): *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.
- BREWSTER, D. (1855): *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, vol.1, Edimburgo: Thomas Constable & Co.
- CARESSA, P. (2010): *Piccola storia della matematica*, 2. Milano: Alphatest.
- CARESSA, P. (2012), *Piccola storia della matematica*, 1. Milano: Alphatest.
- DIBATTISTA, L. (2009): *Storia della scienza e didattica delle discipline scientifiche*. Roma: Armando.
- DOPLICHER, S. (2010): Scienza e conoscenza, etica e cultura: la prospettiva della fisica, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, 3, 271-309.
- DUHEM, P. (1906) : *La théorie physique, son objet, sa structure*. Paris : Chevalier & Rivière.
- EINSTEIN, A. (1972): *Teoria dei quanti di luce*, Newton-Compton, Roma, tr. it. di *Die Hypothese der Lichtquanten*. Stuttgart: Battenberg. 1965.
- FAUVEL, J., van MAANEN, J. eds. (2000): *History in mathematics education: An ICMI study*. Berlin: Springer.
- GUERRAGGIO, A., NASTASI, P. eds. (1993): *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1913*. Torino: Boringhieri.
- HEISENBERG, W. (1978): *Mutamenti nelle basi della scienza*, Boringhieri, Torino, tr. it. di *Wundlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft*. Stuttgart: Hirzel. 1959.
- INFELD, L. (1972): *Introduzione alla fisica moderna*, Editori Riuniti, Roma, trad. it. di *Nowe Drogi Nauki*. Warszawa: Mathesis Polska. 1957.
- JABLONKA, E., Lamb, M. (2005): *Evolution in Four Dimensions. Genetic, Epigenetic, Behavioral, and Symbolic Variation in the History of Life*. Cambridge: MIT Press.
- KAINZINGER, A. (2011): The mathematics in the structures of Stonehenge, *Arch. Hist. Exact Sci.* 65, 67-97.
- MACH, E. (1992), *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringhieri, Torino, tr. it. di *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch-dargestellt*. Leipzig, 1883.
- MILLER, J.D., SCOTT, E.C., OKAMOTO, S. (2006), Public acceptance of evolution, *Science*, 313, 765-766.