

lect

C
198

**ESTUDIO DE UNA ECUACIÓN
DE REACCIÓN-DIFUSIÓN**

por

ARTURO DE PABLO MARTÍNEZ

Tesis Doctoral dirigida por
J. L. Vazquez Suarez

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Julio 1989

Reg. B. C. 43. 563



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	4
1 EXISTENCIA	
1.1 Introducción	10
1.2 El problema con reacción Lipschitz	12
1.3 Soluciones maximales y minimales	24
1.4 El caso $p \geq 1$	28
2 UNICIDAD	
2.1 Introducción	30
2.2 Casi unicidad	31
2.3 No unicidad y propagación finita	38
2.4 Difusión rápida	40
3 ONDAS VIAJERAS	
3.1 Introducción	43
3.2 Existencia de Ondas Viajeras	47
3.3 Clasificación de las Ondas Viajeras	54

4 ESTUDIO UNIDIMENSIONAL

4.1 Introducción	60
4.2 Propagación finita y velocidad mínima	64
4.3 La ecuación de la interfase. Comportamiento asintótico	74
4.4 Concavidad	77
4.5 Propagación para $m + p \neq 2$	83

5 ESTUDIO *N*-DIMENSIONAL

5.1 Introducción	87
5.2 La solución Minimal Absoluta	90
5.3 Comportamiento asintótico	93
5.4 Algunas soluciones explícitas en el caso crítico	97

6 APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DE FISHER

6.1 Introducción	103
6.2 Casi unicidad	106
6.3 Ondas Viajeras	109

REFERENCIAS	115
-------------------	-----

INTRODUCCIÓN

En esta memoria nos ocupamos de la ecuación de reacción-difusión

$$(1) \quad u_t = \Delta u^m + \lambda u^p,$$

donde $m > 1$, $p \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, y consideramos soluciones $u = u(x, t) \geq 0$ definidas en $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^N \times (0, \infty)$.

Ecuaciones de este tipo aparecen para diferentes valores de los parámetros m y p como modelos de diversos procesos de difusión, como por ejemplo la propagación térmica con conductividad dependiendo de la temperatura en medios reactivos ($\lambda > 0$) o absorbentes ($\lambda < 0$), cf. [RK], [ZR], [HV2] y sus referencias.

La importancia de estos modelos simplificados radica no sólo en su posible aplicación directa, sino en que sirven también de ejemplo para analizar situaciones más complejas (cf. [A2], [Be], [GM], [ZR] y otros). De hecho estas consideraciones explican la atención prestada en la literatura al caso de difusión pura, la ecuación de los medios porosos (E.M.P.)

$$(2) \quad u_t = \Delta u^m.$$

(véase los *surveys* [A1], [P]).

La ecuación con absorción $\lambda < 0$ ha sido estudiada recientemente por diversos autores ([RK], [PT], [HV1] y otros). Aquí las soluciones son subsoluciones de la E.M.P. y las propiedades de propagación serán muy parecidas a este caso.

Dentro del caso de difusión con reacción, $\lambda > 0$, hay que distinguir tres situaciones. En primer lugar en la ecuación con $p > 1$ (y $m = 1$) el principal objeto de estudio es la aparición de un fenómeno de explosión en tiempo finito, es decir las soluciones existen en un intervalo acotado de tiempo $0 < t < T$ y cierta norma de u tiende a ∞ cuando $t \rightarrow T$ ([Fu], [W], [EK]). En el caso de difusión lenta $m > 1$ tenemos un cuadro muy similar de la situación ([GKMS]). La novedad aquí es la propagación con velocidad finita, una propiedad que caracteriza a la E.M.P. Por otro lado el caso $p = 1$ se puede reducir mediante un cambio de variables a esta E.M.P. (véase [MP]).

En esta memoria nos centraremos en el caso $p < 1$. Señalemos que los exponentes negativos también serán considerados, con la convención de que u^p es cero donde u se anule. Notemos que el término de difusión no lineal Δu^m implica una difusividad $D(u) = mu^{m-1}$, mientras que el término u^p tiene asociado un coeficiente de reacción $R(u) = u^{p-1}$. Vemos pues que si $m > 1$ y $p < 1$, $D(u) \rightarrow 0$ y $R(u) \rightarrow \infty$ cuando $u \rightarrow 0$. Es por ello que nuestra situación se describe con el nombre de *difusión lenta con reacción fuerte*.

Nuestro interés es estudiar el equilibrio entre estos dos efectos opuestos. Como veremos este equilibrio dependerá del signo de $m + p - 2$.

—0—

En cuanto a la organización del trabajo, hemos dividido esta memoria en seis capítulos, que resumiremos ahora brevemente. Hemos dejado para la introducción a cada capítulo una presentación más detallada de los resultados allí obtenidos.

En primer lugar en el Capítulo I desarrollamos la teoría de existencia de solución para el problema de Cauchy asociado

$$(3) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + \lambda u^p & \text{en } \mathbf{R}^N \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{en } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Debido a la posible falta de unicidad de solución para este problema, establecemos en este capítulo la existencia de unas soluciones particulares, las soluciones maximales y las soluciones minimales del problema de Cauchy, que serán las que estudiaremos después en detalle. Estas soluciones se construirán mediante aproximación del problema (3) reemplazando el término de reacción por una función regular.

En el Capítulo II estudiamos cuándo estas soluciones maximales y minimales son de hecho soluciones distintas. Veremos que las soluciones minimales tienen la propiedad de propagación finita en algunos casos, mientras que las soluciones maximales son siempre positivas. Demostraremos unicidad de soluciones positivas para todo m y p , multiplicidad de soluciones para un valor inicial dado que se anule en algún conjunto en el caso $m + p \geq 2$, e introduciremos el concepto de casi unicidad para el caso $m + p < 2$: el problema de Cauchy tiene solución única salvo que el dato inicial sea $u_0 \equiv 0$.

En el tercer Capítulo construimos una familia especial de soluciones, las ondas viajeras, que nos servirán en el cuarto Capítulo para estudiar las propiedades de propagación de las soluciones de (1) en una dimensión espacial. Para ello estudiaremos cuáles de estas ondas viajeras son soluciones maximales o minimales. En particular en este cuarto Capítulo estudiaremos la propiedad de propagación finita para las soluciones minimales, la aparición de una frontera libre que separa las regiones $\{u > 0\}$ y $\{u = 0\}$, la regularidad y ecuación que verifica esta frontera libre, así como el comportamiento asintótico, tanto de las soluciones como de su frontera libre. Mostraremos que existe un exponente crítico en la reacción, $p = 2 - m$, que evidenciará un comportamiento muy particular.

En el Capítulo V realizamos un estudio más general en varias dimensiones de las mismas cuestiones de propagación y comportamiento asintótico. Encontramos aquí una nueva solución autosemejante E que es minimal en el sentido

absoluto siguiente: salvo la solución trivial $u \equiv 0$ y módulo traslaciones en el espacio y en el tiempo, E es la mínima solución de la ecuación (1). Esta solución representará un fenómeno que es conocido en inglés con el nombre de efecto *hair-trigger*.

Finalmente en el Capítulo VI aplicaremos las técnicas desarrolladas en estos cinco capítulos anteriores y estudiaremos una ecuación de tipo Fisher

$$(4) \quad u_t = \Delta u^m + \lambda u^p(1 - u).$$

Esta ecuación aparece como una generalización del modelo introducido por Fisher ($m = p = 1$) y modeliza procesos de interés en aplicaciones biológicas (cf. [GM], [A2] y otros). Estudiaremos existencia, unicidad, propiedades de propagación y existencia de ondas viajeras para esta nueva ecuación.

La mayoría de los resultados contenidos en esta memoria están recogidos en los trabajos [dPV1] y [dPV2]. Sin embargo son nuevos los Teoremas 4.8, 5.5 y 6.2.

—0—

Lo primero que destaca al empezar a estudiar el problema (3) es la ausencia de referencias en el caso $p < 1$, donde la falta de unicidad y comparación (véase [GKMS]) ha restado interés a su estudio. Sólo podemos apoyarnos en el trabajo [AE] sobre la ecuación del calor con reacción fuerte ($m = 1, 0 < p < 1$), donde se demuestra casi unicidad. Sin embargo la introducción de las soluciones maximales y minimales (idea poco original en sí, pero interesante de aplicar en este caso), permite abrir el camino.

Señalamos como más relevante el estudio realizado en dimensión uno del caso crítico $m + p = 2$, cf. §4. En particular la existencia de ondas viajeras en este caso refleja con gran exactitud el comportamiento de las soluciones minimales de (3). Aunque el estudio de las ondas viajeras en §3 se hace utilizando métodos

de E.D.O., su aplicación a la descripción de las demás soluciones se basa en métodos de E.D.P.

Destacamos también la demostración en §2 de la unicidad de soluciones positivas del problema (3), y su fácil aplicación a otras situaciones.

Por otro lado, el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de (3) se hace en §5.3 sólo para soluciones acotadas. En [AE] se trata un caso un poco más general para la ecuación del calor con reacción y se construye una solución autosemejante no radial como modelo de comportamiento para cada dato inicial.

—0—

Quisiera concluir esta introducción agradeciendo a mi director Juan Luis Vazquez todo el tiempo que me ha dedicado en el desarrollo de este trabajo y todo lo que me ha enseñado estos años de cómo se piensa en matemáticas. Él ha sabido introducirme en el mundo de las Ecuaciones, y ha sabido despertar mi interés por otros mundos de las Matemáticas.

También quiero agradecer el apoyo que he recibido de todos mis compañeros (y la mayoría incluso amigos), que siempre han estado dispuestos a prestarme cualquier tipo de ayuda, y han aguantado mis momentos malos. En particular es obligado mencionar a Jesús y Elena, con los que comparto despacho (que es más de lo que parece), y a Antonio, con el que también lo compartí.

Julio de 1989

CAPÍTULO I

EXISTENCIA

1.1. Introducción

1.2. El problema con reacción Lipschitz

1.3. Soluciones maximales y minimales

1.4. El caso $p \geq 1$

1.1. Introducción

En este primer capítulo abordamos la cuestión de existencia de solución para el problema de Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} (1.1) & u_t = \Delta u^m + u^p & (x, t) \in \mathbf{Q}_T = \mathbf{R}^N \times (0, T) \\ (1.2) & u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

en dimensión espacial $N \geq 1$ y con exponentes $m > 1$, $p \in \mathbf{R}$. Consideraremos soluciones no negativas, definidas en un intervalo maximal de tiempo $(0, T)$, $0 < T \leq \infty$. Supondremos siempre $u_0 \geq 0$.

Debido a la degeneración del término de difusividad $D(u) = mu^{m-1}$ en los puntos donde u se anula, las soluciones no pueden ser clásicas si por ejemplo el dato inicial tiene soporte compacto. Así pues utilizaremos el concepto de solución débil. Diremos que $u \in C(\mathbf{Q}_T)$ es una solución débil del problema (P) si para todo $0 \leq t \leq T$ y toda función test $\varphi \in C^\infty(\mathbf{Q}_T)$ tal que $\varphi(\cdot, s)$ tiene soporte compacto para cada $0 \leq s \leq T$, se verifica la identidad

$$(1.3) \quad \int_{\mathbf{R}^N} u(t)\varphi(t) = \int_{\mathbf{R}^N} u_0\varphi(0) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} [u\varphi_t + u^m\Delta\varphi + u^p\varphi](s) ds$$

(escribimos $u(t) = u(x, t)$ cuando no haya ambigüedad). De la misma forma definimos subsolución (resp. supersolución) del problema (P) reemplazando la igualdad en (1.3) por " \leq " (resp. " \geq ") para $\varphi \geq 0$.

La principal dificultad que aparece al tratar el problema (P) proviene del hecho de que el término de reacción $f(u) = u^p$ no es una función Lipschitz si $p \neq 1$. Cuando $p < 1$ el problema reside en los valores $u \approx 0$, mientras que si $p > 1$ la reacción no es lipschitziana salvo que la solución esté acotada. En este caso $p > 1$, el coeficiente de reacción $R(u) = u^{p-1}$ es tanto mayor cuanto

mayor es la densidad u , y aparecerán fenómenos de explosión en tiempo finito (cf. (1.50)). Sin embargo tenemos existencia y unicidad de solución hasta este posible tiempo de explosión (§1.4).

En esta memoria nos centraremos principalmente en el caso $p < 1$. En primer lugar hacemos notar dos propiedades que distinguen a esta ecuación de la ecuación de los medios porosos $f(u) \equiv 0$ y de la ecuación con absorción $f(u) = -u^p$. Por un lado la influencia del término de reacción $f(u) = +u^p$ si $p < 1$ se manifiesta en la falta en general de unicidad de solución para el problema de Cauchy (P), cf. (1.47). Por otro lado existen ejemplos que muestran que tampoco hay un principio general de comparación, cf. §3.3 (véase también [GKMS; pp.46-47]). La posibilidad de comparar soluciones ha sido una técnica fundamental en el estudio de ecuaciones parabólicas, en especial la ecuación del calor y la ecuación de los medios porosos. Buscaremos entonces una familia de soluciones particulares de (P) que gocen de la propiedad de comparación.

Para establecer la existencia de este tipo de soluciones, primero sustituiremos el problema (P) por un problema aproximado reemplazando el término de reacción $f(u)$ por una función $f_\epsilon(u)$ lipschitziana en el origen. Probaremos existencia, unicidad y un principio de comparación en este caso.

En el momento de pasar al límite las soluciones aproximadas, la cuestión es qué solución del problema (P) obtenemos. En el Teorema 1.2 elegiremos la forma de aproximar (P) y probaremos la existencia y unicidad de dos soluciones particulares, la solución *maximal* y la solución *minimal* del problema de Cauchy, a la vez que estableceremos el siguiente tipo de comparación:

- i) Toda solución de (P) se encuentra entre la solución maximal y la solución minimal.
- ii) Dadas dos soluciones maximales (resp. minimales) de la ecuación (1.1), si en un tiempo dado una está por encima de la otra, estará siempre por encima a partir de ese tiempo.

En el siguiente capítulo estudiaremos las condiciones bajo las que estas dos soluciones son en realidad dos soluciones distintas.

1.2. El problema con reacción Lipschitz

Dado $m > 1$ y $N \geq 1$ consideramos el problema de Cauchy

$$(P') \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + f(u) & \text{en } Q_T = \mathbf{R}^N \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{en } \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

para algún $0 < T \leq \infty$ y donde el término de reacción viene dado por una función Lipschitz $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $f(0) = 0$.

Para un dato inicial $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$, Brézis y Crandall [BC] probaron la existencia de una única función $u \in C([0, T]; L^1(\mathbf{R}^N)) \cap L^\infty(Q_T)$ solución global del problema (P') (es decir, satisfaciendo la identidad análoga a (1.3) para el problema (P') y para todo $T > 0$).

Datos iniciales más generales fueron tratados por Bénilan, Crandall y Pierre [BCP] en el problema sin reacción, $f \equiv 0$, donde consideran la condición

$$(1.4) \quad \sup_{R \geq 1} R^{-(N + \frac{2}{m-1})} \int_{B_R} u_0 < \infty,$$

y demuestran que existe una única solución (local en el tiempo) de la E.M.P. con dato inicial u_0 .

Para aplicar a nuestro problema las técnicas empleadas en [BCP], consideramos en primer lugar las funciones

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \rho_0(x) &= (1 + |x|^2)^{\frac{1}{m-1}}, \\ \rho(x, t) &= t^{-\gamma} (1 + |x|^2)^{\frac{1}{m-1}}, \quad \gamma = (m - 1 + 2/N)^{-1}. \end{aligned}$$

Demostraremos aquí la existencia de una única solución (local en el tiempo) del problema (P') con $f \not\equiv 0$ siempre que el dato inicial esté acotado *en media* por ρ_0 . Más aún, la solución estará acotada en Q_T por ρ (efecto regularizante).

Más precisamente consideramos la cantidad

$$(1.6) \quad \|g\|_r = \sup_{R \geq r} R^{-N} \int_{B_R} \frac{|g|}{\rho_0},$$

que define una norma equivalente para cada $r \geq 1$, y sea también $\|g\|_* = \lim_{r \rightarrow \infty} \|g\|_r$. Ahora, dado $T > 0$ definimos los espacios

$$(1.7) \quad \begin{aligned} E_0 &= \{g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N) : \|g\|_* < \infty\} \\ X_T &= \{g \in L^1_{loc}(\mathbf{Q}_T) : g(\cdot, t) \in E_0 \forall 0 < t < T\} \\ Y_T &= \{g \in L^1_{loc}(\mathbf{Q}_T) : g/\rho \in L^\infty(\mathbf{Q}_T)\}, \end{aligned}$$

y finalmente sea $E_T = X_T \cap Y_T$. Probaremos el siguiente resultado

TEOREMA 1.1.

- (i) Dado $u_0 \in E_0$ existe una única solución débil $u \in E_T$ del problema (P') definida en un intervalo maximal de tiempo $(0, T)$ donde $T = T(\|u_0\|_*)$.
- (ii) Si $u, v \in E_T$ son una subsolución y una supersolución de (P'), respectivamente, entonces

$$(1.8) \quad u_0 \leq v_0 \quad \text{en } \mathbf{R}^N \quad \implies \quad u \leq v \quad \text{en } \mathbf{Q}_T.$$

DEMOSTRACIÓN:

Existencia. Comenzamos aproximando el dato inicial $u_0 \in E_0$ mediante el truncamiento

$$(1.9) \quad u_{0n}(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } |x| \leq n, u_0(x) < n, \\ n & \text{si } |x| \leq n, u_0(x) \geq n, \\ 0 & \text{si } |x| > n, \end{cases}$$

de forma que $u_{0n} \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$. Obsérvese que para $r \geq 1$ se tiene

$$(1.10) \quad u_{0n} \nearrow u_0, \quad \|u_{0n}\|_r \nearrow \|u_0\|_r \quad \text{si } n \nearrow +\infty.$$

Sea u_n la única solución del problema (P') con dato inicial u_{0n} dada por [BC; Teor. 3].

Por otro lado sea k la constante de Lipschitz de la función f . Mediante el cambio de variables introducido en [MP],

$$(1.11) \quad \begin{aligned} x &\longrightarrow x \\ t &\longrightarrow \tau = \frac{e^{k(m-1)t} - 1}{k(m-1)} \\ u(x, t) &\longrightarrow w(x, \tau) = e^{-kt}u(x, t), \end{aligned}$$

vemos que la función w_n definida a partir de u_n es una subsolución de la E.M.P. Podemos aplicar entonces el Lema 1.4 de [BCP] y obtener que w_n verifica las estimaciones

$$w_n(x, t) \leq cR^{\frac{2}{m-1}}t^{-\gamma} \|w_n(\cdot, 0)\|_r^{\frac{2\gamma}{N}},$$

donde $\gamma = (m-1 + 2/N)^{-1}$, y para $|x| < R$, $1 \leq r \leq R$, $0 < t \leq c\|w(\cdot, 0)\|_r^{1-m}$, y

$$\|w_n(\cdot, t)\|_r \leq c(T)\|w_n(\cdot, 0)\|_r$$

para cada $r \geq 1$, $0 < t \leq c\|w_n(\cdot, 0)\|_r^{1-m}$. Deshaciendo el cambio (1.11) y teniendo en cuenta que $w_n(\cdot, 0) = u_{0n}$ obtenemos la estimación en Y_T

$$(1.12) \quad u_n(x, t) \leq cR^{\frac{2}{m-1}}\chi(t)\|u_{0n}\|_r^{\frac{2\gamma}{N}}$$

para $|x| < R$, $1 \leq r \leq R$ y

$$0 < t < T_r(u_0) = \frac{1}{k(m-1)} \log[1 + ck(m-1)\|u_0\|_r^{1-m}],$$

con la función

$$(1.13) \quad \chi(t) = e^{kt} \left[\frac{e^{k(m-1)t} - 1}{k(m-1)} \right]^{-\gamma},$$

y también la estimación en X_T

$$(1.14) \quad \|u_n(\cdot, t)\|_r \leq c(T)\|u_0\|_r.$$

Estas estimaciones permiten considerar el límite (localmente acotado)

$$(1.15) \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Es fácil ver que u es una solución débil de (P') en Q_T donde

$$(1.16) \quad T \geq \lim_{r \rightarrow \infty} T_r(u_0) = \frac{1}{k(m-1)} \log[1 + ck(m-1)\|u_0\|_*^{1-m}].$$

y verifica, gracias a (1.10)

$$(1.17) \quad u(x, t) \leq c\chi(t)(1 + |x|^2)^{\frac{1}{m-1}} \|u_0\|_*^{\frac{2\gamma}{N}}, \quad \text{en } Q_T,$$

$$(1.18) \quad \|u(\cdot, t)\|_* \leq c\|u_0\|_*, \quad \text{para } 0 < t < T.$$

Finalmente, observando que $\chi(t) \approx t^{-\gamma}$ para $t \approx 0$, estas estimaciones implican $u \in E_T$.

Por otro lado, di Benedetto [dB] y Sacks [S] probaron la continuidad de las soluciones de (P').

Comparación. Sea $T > 0$ y $u, v \in E_T$ una subsolución y una supersolución respectivamente, del problema (P'). A partir de la definición y restando las desigualdades que verifican u y v , obtenemos, para cada $0 < \tau \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} (u-v)(t)\varphi(t) &\leq \int_{\mathbf{R}^N} (u-v)(\tau)\varphi(\tau) + \\ &+ \int_{\tau}^t \int_{\mathbf{R}^N} [(u-v)\varphi_t + (u^m - v^m)\Delta\varphi + (f(u) - f(v))\varphi](s) ds, \end{aligned}$$

donde $\varphi \in C^\infty(Q_T)$ es cualquier función test con soporte compacto en x .

Si ponemos

$$a = \begin{cases} \frac{u^m - v^m}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ mu^{m-1} & \text{si } u = v, \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \frac{f(u) - f(v)}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ k & \text{si } u = v, \end{cases}$$

la anterior desigualdad se convierte en

$$(1.18) \quad \int_{\mathbf{R}^N} (u-v)(t)\varphi(t) \leq \int_{\mathbf{R}^N} (u-v)(\tau)\varphi(\tau) + \\ + \int_{\tau}^t \int_{\mathbf{R}^N} [(u-v)(\varphi_t + a\Delta\varphi + b\varphi)](s) ds.$$

Elegiremos adecuadamente la función test φ . Primero aproximamos las funciones a y b por funciones regulares

$$(1.19) \quad \begin{aligned} a_\varepsilon &\in C^\infty(\mathbf{Q}_T) && \text{con } \varepsilon \leq a_\varepsilon \leq a + \varepsilon \\ b_\varepsilon &\in C^\infty(\mathbf{Q}_T) && \text{con } 0 \leq b_\varepsilon \leq k. \end{aligned}$$

Fijamos $R_0 > 0$ y $R \gg R_0$ y para cada dato $\theta \in C_0^\infty(B_{R_0})$ con $0 \leq \theta \leq 1$ consideramos el problema de tiempo inverso,

$$(1.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + a_\varepsilon \Delta \varphi + b_\varepsilon \varphi = 0 & \text{en } \mathbf{Q}_{Rt} = B_R \times (0, t) \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial B_R \times [0, t] \\ \varphi(\cdot, t) = \theta & \text{en } B_R. \end{cases}$$

Este es un problema parabólico no degenerado y posee una única solución $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{Q}_{Rt})$ (véase [LSU; Teor. IV.5.1]). Más aún, utilizando la supersolución explícita $g(x, s) = e^{kT}$, y el principio del máximo ([LSU; Teor. III.7.2]), tenemos φ_ε acotada en \mathbf{Q}_{Rt} independientemente de τ y R . Sin embargo $\varphi = \varphi_\varepsilon$ no es todavía una función test admisible, y consideramos una función de corte en ∂B_R definida, para cada $\eta > 0$ suficientemente pequeño por

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \psi_\eta &\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) && \text{con } 0 \leq \psi_\eta \leq 1, \\ \psi_\eta &\equiv 1 && \text{en } B_{R-2\eta}, \quad \psi_\eta \equiv 0 && \text{fuera de } B_{R-\eta}, \\ |\nabla \psi_\eta| &\leq \frac{c}{\eta}, && |\Delta \psi_\eta| \leq \frac{c}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Introduciendo $\varphi = \varphi_\varepsilon \psi_\eta$ en (1.18) obtenemos

$$\begin{aligned}
 (1.21) \quad \int_{B_{R_0}} (u-v)(t)\theta &\leq \int_{B_R} (u-v)(\tau)\psi\varphi_\varepsilon(\tau) + \\
 &+ \int_\tau^t \int_{B_R} (u-v)(a-a_\varepsilon)\psi\Delta\varphi_\varepsilon + \\
 &+ \int_\tau^t \int_{B_R} (u-v)(b-b_\varepsilon)\psi\varphi_\varepsilon + \\
 &+ \int_\tau^t \int_{B_R} (u^m-v^m)(2\nabla\psi\nabla\varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon\Delta\psi).
 \end{aligned}$$

Denominaremos estas cuatro integrales por I_1, I_2, I_3 e I_4 , que acotaremos por separado en función de ε, R y τ . La letra c denotará distintas constantes dependiendo de los demás parámetros del problema, m, N, k, T y las normas de u y v en E_T .

La estrategia será primero hacer I_2 e I_3 tender a cero con $\varepsilon \rightarrow 0$; después estimar I_4 independientemente de $\varepsilon > 0$ y hacer que se anule con $R \rightarrow \infty$, y finalmente observar que se puede pasar al límite en I_1 , que es negativo en $\tau = 0$ por hipótesis.

Comencemos estimando I_2 .

$$(1.23) \quad I_2 \leq \left(\int_\tau^t \int_{B_R} a_\varepsilon |\Delta\varphi_\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\tau^t \int_{B_R} |u-v|^2 \frac{|a-a_\varepsilon|^2}{a_\varepsilon} \right)^{1/2}.$$

Para estimar el primer factor multiplicamos la ecuación en (1.20) por $\Delta\varphi_\varepsilon$, e

integramos en Q_{Rt} ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla \varphi_\varepsilon(\tau)|^2 + \int_\tau^t \int_{B_R} a_\varepsilon |\Delta \varphi_\varepsilon|^2 &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla \theta|^2 - \int_\tau^t \int_{B_R} b_\varepsilon \varphi_\varepsilon \Delta \varphi_\varepsilon \leq \\ &\leq c + \frac{1}{2} \int_\tau^t \int_{B_R} a_\varepsilon |\Delta \varphi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} \int_\tau^t \int_{B_R} \frac{b_\varepsilon^2 \varphi_\varepsilon^2}{a_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Despejando y utilizando (1.19) obtenemos

$$(1.24) \quad \int_\tau^t \int_{B_R} a_\varepsilon |\Delta \varphi_\varepsilon|^2 \leq \int_{B_R} |\nabla \theta|^2 + cTR^N k^2 e^{kT} \varepsilon^{-1} \leq c(R) \varepsilon^{-1}.$$

Ahora construimos la aproximación a_ε para controlar el segundo factor.

Sea $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una aproximación de la identidad en \mathbb{R}^{N+1} y sea \bar{a} la extensión de a a \mathbb{R}^{N+1} . Definimos

$$a_\varepsilon = a_{\varepsilon,j} = \bar{a} * \alpha_j + \varepsilon.$$

Las estimaciones que se obtengan para la solución de (1.20) no dependerán de j , por lo que seguirán siendo válidas para

$$a_\varepsilon = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{\varepsilon,j} = \bar{a} + \varepsilon.$$

Dividimos el dominio Q_{Rt} en dos regiones

$$Q_\varepsilon^1 = \{(x, s) \in Q_{Rt} : a_\varepsilon(x, s) \leq \sqrt{\varepsilon}\},$$

$$Q_\varepsilon^2 = Q_{Rt} - Q_\varepsilon^1.$$

y estimamos la integral en cada una de estas regiones.

En Q_ε^1 tenemos

$$\frac{|a - a_\varepsilon|^2}{a_\varepsilon} \leq \varepsilon,$$

mientras

$$|u - v|^2 \leq a^{\frac{2}{m-1}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{m-1}}.$$

En Q_ε^2 tenemos

$$\frac{|a - a_\varepsilon|^2}{a_\varepsilon} \leq \varepsilon^{3/2},$$

mientras que $u, v \in Y_T$ verifican

$$|u - v|^2 \leq cR^{\frac{2}{m-1}} \tau^{-2\gamma}.$$

Poniendo juntas estas estimaciones con (1.24) obtenemos

$$(1.25) \quad I_2 \leq c(R, \tau)c(\varepsilon) \quad \text{con } c(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Igualmente es fácil elegir la aproximación b_ε de manera que

$$(1.26) \quad I_3 \leq c(R, \tau)c(\varepsilon) \quad \text{con } c(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Estimemos ahora I_4 . En primer lugar tenemos, para $x \in B_R$,

$$(1.27) \quad \int_\tau^t |u^m - v^m| \leq cR^{\frac{2m}{m-1}} \tau^{1-m\gamma}.$$

Por otro lado, para cada $0 < s < t$,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |2\nabla\psi_\eta \nabla\varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon \Delta\psi_\eta| &\leq c \int_{B_R - B_{R-2\eta}} \left(\frac{|\nabla\varphi_\varepsilon|}{\eta} + \frac{\varphi_\varepsilon}{\eta^2} \right) \leq \frac{c}{\eta} \int_{B_R - B_{R-2\eta}} |\nabla\varphi_\varepsilon| \\ &\leq cR^{N-1} \sup_{B_R - B_{R-2\eta}} |\nabla\varphi_\varepsilon| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} cR^{N-1} \sup_{\partial B_R} |\nabla\varphi_\varepsilon| \end{aligned}$$

(nótese que $\varphi_\varepsilon = 0$ en ∂B_R , por lo que $\sup_{B_R - B_{R-2\eta}} |\varphi_\varepsilon| \leq \eta \sup_{B_R - B_{R-2\eta}} |\nabla\varphi_\varepsilon|$).

Así pues la cuarta integral es

$$(1.28) \quad I_4 \leq c(\tau) R^{N-1 + \frac{2m}{m-1}} \sup_{\substack{x \in \partial B_R \\ 0 < s < t}} |\nabla \varphi_\varepsilon(x, s)|.$$

Debemos controlar entonces $|\nabla \varphi_\varepsilon|$ en ∂B_R , y lo haremos mediante comparación con dos supersoluciones explícitas del problema (1.20) que construimos ahora.

Sea

$$g(x, s) = e^{h(s)} (1 + |x|^2)^{-\beta},$$

donde h es una función tal que $h(s) > 0$ para $0 < s < t$ y $h(t) = 0$, y $\beta > 0$ es una constante a determinar. Es fácil comprobar que se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s} &= h' g \\ \Delta g &\leq \frac{c}{1 + |x|^2} g, \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\partial g}{\partial s} + a_\varepsilon \Delta g + b_\varepsilon g \leq \left(h' + \frac{ca_\varepsilon}{1 + |x|^2} + k \right) g.$$

Como $0 \leq a_\varepsilon \leq \max\{mu^{m-1}, mv^{m-1}\} + \varepsilon$, y $u, v \in Y_T$, podemos elegir la función

$$(1.29) \quad h(s) = \int_s^t \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{ca_\varepsilon(x, \xi)}{1 + |x|^2} d\xi + (k+1)(t-s),$$

para tener

$$\frac{\partial g}{\partial s} + a_\varepsilon \Delta g + b_\varepsilon g < 0 \quad \text{en } Q_{Rt}.$$

Estudiemos g en la frontera parabólica de Q_{Rt} .

$$\begin{aligned} g &\geq 0 = \varphi_\varepsilon && \text{en } \partial B_R \times (0, t) \\ g &= (1 + |x|^2)^{-\beta} \geq \\ &\geq (1 + R_0^2)^{-\beta} \theta = (1 + R_0^2)^{-\beta} \varphi_\varepsilon && \text{en } s = t, x \in B_R. \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el principio del máximo al problema (1.20), tenemos la primera estimación para φ_ε ,

$$(1.30) \quad \varphi_\varepsilon \leq (1 + R_0^2)^\beta g \leq e^{h(s)} \left(\frac{1 + R_0^2}{1 + |x|^2} \right)^\beta \quad \text{en } Q_{Rt}.$$

(Notemos que esta estimación es independiente de $\tau > 0$ así como de $\varepsilon > 0$).

Para acotar φ_ε cerca de la frontera consideramos la nueva función

$$g^*(x, s) = de^{h(s)}\Gamma(|x|),$$

donde h es como antes, $d > 0$ una constante a determinar, y

$$\Gamma(\rho) = \begin{cases} \rho^{2-N} - R^{2-N} & \text{si } N \geq 3 \\ \log \frac{R}{\rho} & \text{si } N = 2 \\ R - \rho & \text{si } N = 1. \end{cases}$$

En $B_R - B_{R-1}$ tenemos que g^* es armónica para cada $0 < s < t$, a la vez que $\frac{\partial g^*}{\partial s} = h'g^*$. Así, igual que antes,

$$\frac{\partial g^*}{\partial s} + a_\varepsilon \Delta g^* + b_\varepsilon g^* < 0$$

en $(B_R - B_{R-1}) \times (0, t)$. Además, eligiendo $d = \frac{(1 + R_0^2)^\beta}{\Gamma(R-1)[1 + (R-1)^2]^\beta}$, tenemos

$$\begin{aligned} g^* &= 0 = \varphi_\varepsilon && \text{en } \partial B_R \times (0, t) \\ g^* &= (1 + R_0^2)^\beta g \geq \varphi_\varepsilon && \text{en } \partial B_{R-1} \times (0, t) \\ g^* &\geq 0 = \varphi_\varepsilon && \text{en } s = t, x \in B_R - B_{R-1}. \end{aligned}$$

De nuevo por el principio del máximo,

$$(1.31) \quad \varphi_\varepsilon \leq g^* \quad \text{en } (B_R - B_{R-1}) \times (0, t)$$

Como $\varphi_\varepsilon = g^* = 0$ en la frontera ∂B_R para todo $0 < s < t$, se debe verificar

$$\frac{\partial g^*}{\partial \nu} \leq \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{en } \partial B_R$$

para todo $0 < s < t$, donde $\partial/\partial \nu$ denota la derivada normal exterior. Por tanto, y usando la definición de d ,

$$(1.30) \quad \sup_{\substack{x \in \partial B_R \\ 0 < s < t}} |\nabla \varphi_\varepsilon| \leq \sup_{\substack{x \in \partial B_R \\ 0 < s < t}} \left| \frac{\partial g^*}{\partial \nu} \right| = de^{h(t)} |\Gamma'(R)| = \\ = c \frac{(1 + R_0^2)^\beta |\Gamma'(R)|}{[1 + (R - 1)^2]^\beta \Gamma(R - 1)} \leq cR^{-2\beta}.$$

Volviendo a (1.28), si tomamos $\beta > \frac{N-1}{2} + \frac{m}{m-1}$, tenemos

$$(1.33) \quad I_4 \leq c(\tau)c(R) \quad \text{con } c(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Finalmente nos fijamos en I_1 . La estimación (1.30) independiente de $\varepsilon > 0$, junto con la condición $u, v \in Y_T$ permite pasar al límite $R \rightarrow \infty$, mientras que la condición $u, v \in X_T$ permite pasar al límite $\tau \rightarrow 0$, obteniendo

$$(1.34) \quad \int_{B_{R_0}} (u - v)(t)\theta \leq c \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \int_{B_R} \frac{(u - v)_+(\tau)}{(1 + |x|^2)^\beta} = c \int_{\mathbf{R}^N} \frac{(u_0 - v_0)_+}{(1 + |x|^2)^\beta} = 0.$$

Ahora aproximamos θ a la función signo de $(u - v)(t)$ en B_{R_0} y concluimos la comparación $u \leq v$ en B_{R_0} para todo $0 \leq t \leq T$ y $R_0 > 0$. La unicidad se sigue de forma inmediata. ■

OBSERVACIÓN:

La importancia de la condición de crecimiento (1.4) radica en que es también una condición necesaria para la existencia de solución del problema (P'). Basta observar que las soluciones de (P') son supersoluciones de la E.M.P., y para esta ecuación la necesidad de (1.4) fue probada por Aronson y Caffarelli [AC].

Por otro lado, la dependencia funcional del tiempo de definición de la solución en términos de la cantidad $\|u_0\|_*$ es óptima en el caso de la E.M.P., como muestra el siguiente ejemplo.

Si el dato inicial es

$$(1.35) \quad u_0(x) = (A + B|x|^2)^{\frac{1}{m-1}}, \quad A, B > 0,$$

tenemos $\|u_0\|_* = B^{\frac{1}{m-1}}$, y la solución explícita

$$(1.36) \quad u(x, t) = \left[A \left(\frac{T}{T-t} \right)^{\gamma(m-1)} + B \frac{T}{T-t} |x|^2 \right]^{\frac{1}{m-1}}$$

con $T = \frac{\gamma(m-1)}{2mNB}$ muestra que u explota para $t = c\|u_0\|_*^{1-m}$.

Esta observación, junto con (1.16) nos da, para las soluciones de (P'),

$$(1.37) \quad \frac{1}{k(m-1)} \log[1 + c_1 k(m-1)\|u_0\|_*^{1-m}] \leq T \leq c_2 \|u_0\|_*^{1-m}.$$

Finalmente, si el dato inicial verifica

$$(1.38) \quad u_0(x) = o(\rho_0(x)) = o(|x|^{\frac{2}{m-1}}) \quad \text{para } |x| \text{ grande,}$$

la solución de (P') dada por el Teorema 1.1 está definida para todo tiempo, pues $\|u_0\|_* = 0$. (Para una mirada más detallada a las propiedades de los espacios involucrados en este teorema la mejor referencia es por supuesto [BCP]).

1.3. Soluciones maximales y minimales para $p < 1$

Utilizaremos en esta sección el Teorema 1.1 para estudiar el problema de Cauchy (P) en el caso $p < 1$. El resultado principal es el siguiente

TEOREMA 1.2.

Dada $u_0 \in E_0$ existen dos funciones $\bar{u}, \underline{u} \in E_T$ soluciones débiles del problema (P) definidas en un intervalo maximal de tiempo $(0, T)$ con $T = T(\|u_0\|_*)$, y tales que cualquier otra solución $u \in E_T$ de (P) verifica

$$(1.39) \quad \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad \text{en } Q_T.$$

Definición 1.3.

Las funciones \bar{u} y \underline{u} se denominarán solución maximal y solución minimal respectivamente.

DEMOSTRACIÓN:

Construiremos la solución maximal mediante una aproximación del problema (P) "por arriba" con un problema que verifique las hipótesis del Teorema 1.1. Análogamente la solución minimal se construirá aproximando "por abajo".

Primero construimos la solución maximal. Para ello consideramos, para cada $\varepsilon > 0$ la función (linealización de la reacción),

$$(1.40) \quad f_\varepsilon(s) = \min\{s^p, \varepsilon^{p-1}s\} = \begin{cases} \varepsilon^{p-1}s & \text{si } 0 \leq s \leq \varepsilon \\ s^p & \text{si } s \geq \varepsilon, \end{cases}$$

y el problema de Cauchy

$$(P^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + f_\varepsilon(u) & \text{en } Q_T \\ u(\cdot, 0) = u_0 + \varepsilon & \text{en } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Nótese que f_ε es Lipschitz continua con constante $k_\varepsilon = \varepsilon^{p-1}$. Por el Teorema 1.1 existe una única solución $w^\varepsilon \in E_{T_\varepsilon}$ con $T_\varepsilon = T(\|u_0\|_*, k_\varepsilon)$. Una primera comparación con la subsolución $u \equiv \varepsilon$ nos da $w^\varepsilon \geq \varepsilon$. En particular si $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ tenemos $f_{\varepsilon_1}(w^{\varepsilon_2}) = f_{\varepsilon_2}(w^{\varepsilon_2})$, y así w^{ε_1} es una supersolución del problema (P^{ε_2}) , por lo que $w^{\varepsilon_1} \leq w^{\varepsilon_2}$. Concluimos que se puede extender el intervalo de definición de w^{ε_1} hasta T_{ε_2} y $w^{\varepsilon_1} \in E_{T_{\varepsilon_2}}$. Ahora observamos que

$$(1.41) \quad T_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon^{p-1}(m-1)} \log [1 + c\varepsilon^{p-1}(m-1)\|u_0\|_*^{1-m}] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} T = c\|u_0\|_*^{1-m},$$

por lo que cada w^ε está definida en $(0, T)$ y $w^\varepsilon \in E_T$. Por otro lado $\{w^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ es una sucesión decreciente de funciones positivas para $\varepsilon \searrow 0$. Podemos definir el límite

$$(1.42) \quad \bar{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w^\varepsilon \geq 0.$$

Claramente \bar{u} es solución débil de (P). A partir de la estimación (1.17) tenemos

$$\bar{u}(x, t) \leq c(1 + |x|^2)^{\frac{1}{m-1}} e^{k_\varepsilon t} \left[\frac{e^{k_\varepsilon(m-1)t} - 1}{k_\varepsilon(m-1)} \right]^{-\gamma} \|u_0\|_*^{\frac{2\gamma}{N}}$$

para todo $\varepsilon > 0$, por lo que (haciendo $\varepsilon \rightarrow \infty$, que implica $k_\varepsilon \rightarrow 0$,

$$(1.43) \quad \bar{u}(x, t) \leq c(1 + |x|^2)^{\frac{1}{m-1}} t^{-\gamma} \|u_0\|_*^{\frac{2\gamma}{N}},$$

y por tanto $\bar{u} \in E_T$. Vamos a demostrar que \bar{u} es solución maximal. Sea $u \in E_T$ cualquier otra solución del problema (P) y consideremos la función

$$u^\varepsilon = \max\{u, \varepsilon\}.$$

Por la desigualdad de Kato [K],

$$\Delta[(u^\varepsilon)^m] \geq \text{sign}^+(u - \varepsilon)\Delta u^m,$$

así que

$$\begin{aligned} (u^\varepsilon)_t &= \text{sign}^+(u - \varepsilon)u_t = \text{sign}^+(u - \varepsilon)\Delta u^m + \text{sign}^+(u - \varepsilon)u^n \\ &\leq \Delta[(u^\varepsilon)^m] + f_\varepsilon(u^\varepsilon) \end{aligned}$$

en $\mathcal{D}'(\mathbf{Q}_T)$ y u^ε es una subsolución de (P). Como además $u^\varepsilon(x, 0) \leq u_0(x) + \varepsilon$, concluimos con el Teorema 1.1 que $u^\varepsilon \leq w^\varepsilon$, lo que implica $u \leq \bar{u}$.

Para construir la solución minimal consideramos el problema aproximado

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} w_t = \Delta w^m + f_\varepsilon(w) & \text{en } \mathbf{Q}_T \\ w(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

con f_ε igual que en (1.40). Como antes existe una única solución débil $w_\varepsilon \in E_T$ con T dado por (1.39) (nótese que $w_\varepsilon \leq \bar{u}$ para todo $\varepsilon > 0$). La solución minimal es ahora el límite

$$(1.44) \quad \underline{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon$$

Además $f_\varepsilon(s) \leq s^p$ implica que toda solución del problema (P) es una super-solución de (P_ε) , y obtenemos igualmente la comparación. ■

OBSERVACIÓN:

A partir de (1.41) y por la observación al Teorema 1.1 vemos que el tiempo maximal de definición de las soluciones de (P) verifica

$$(1.45) \quad c_1 \|u_0\|_*^{1-m} \leq T \leq c_2 \|u_0\|_*^{1-m}.$$

Proposición 1.3.

Sean $u_0^1, u_0^2 \in E_0$ y consideremos las soluciones maximales y minimales correspondientes a estos datos iniciales, $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \underline{u}^1, \underline{u}^2 \in E_T$. Entonces

$$(1.46) \quad u_0^1 \leq u_0^2 \text{ en } \mathbf{R}^N \implies \bar{u}^1 \leq \bar{u}^2 \text{ y } \underline{u}^1 \leq \underline{u}^2 \text{ en } \mathbf{Q}_T.$$

DEMOSTRACIÓN:

La demostración es inmediata ya que la comparación se verifica para las soluciones aproximadas $w^{1,\varepsilon}, w^{2,\varepsilon}, w_\varepsilon^1$ y w_ε^2 . ■

Estos conceptos de solución maximal y minimal tienen interés sólo cuando proporcionan soluciones distintas, es decir, cuando la unicidad falla para el problema (P). Por ejemplo, si consideramos el dato inicial $u_0 \equiv 0$, tenemos la familia de soluciones

$$(1.47) \quad U(x, t; \tau) = [(1-p)(t-\tau)]_+^{\frac{1}{1-p}} \quad \tau \geq 0,$$

además de la solución trivial $u \equiv 0$. Evidentemente la solución minimal es $\underline{u}(x, t) \equiv 0$. Para calcular la solución maximal observamos que si $\tau < 0$, la función $U(x, t; \tau)$ es la única solución del problema (P^ε) con $u_0 \equiv 0$ y $\varepsilon = U(x, 0; \tau) = [(1-p)|\tau|]_+^{\frac{1}{1-p}} > 0$, y por tanto supersolución de nuestro problema. Haciendo tender $\tau \rightarrow 0$ obtenemos que la solución maximal es

$$(1.48) \quad \bar{u}(x, t) = U(x, t; 0) = [(1-p)t]_+^{\frac{1}{1-p}}.$$

Como consecuencia tenemos

Corolario 1.4.

La solución maximal \bar{u} del problema (P) es estrictamente positiva en $\mathbf{R}^N \times (0, T(\|u_0\|_))$. De hecho $\bar{u}(x, t) \geq [(1-p)t]_+^{\frac{1}{1-p}} > 0$.*

DEMOSTRACIÓN:

Úsese la Proposición 1.3 con $U(x, t; 0)$. ■

La cuestión de unicidad para el problema (P) será tratada en el siguiente capítulo. En particular, utilizando este corolario, la solución maximal será distinta de la solución minimal en los casos en que probemos una propiedad de propagación finita para las soluciones minimales.

Por otro lado, podemos establecer una estimación uniforme del crecimiento de las soluciones para datos acotados utilizando la solución $U(x, t; \tau)$ con $\tau < 0$.

Corolario 1.5.

Sea u una solución de (P) con $\|u_0\|_\infty = M$. Entonces

$$(1.49) \quad u(x, t) \leq [(1-p)(t+t_0)]_+^{\frac{1}{1-p}} \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

donde $t_0 = M^{1-p}/(1-p)$.

1.4. Caso $p \geq 1$

Cuando $p > 1$ la función $f(u) = u^p$ es Lipschitz continua sólo en intervalos acotados. Por tanto si u no es acotada el Teorema 1.1 no podrá aplicarse. De hecho las soluciones del problema (P) presentan en general un fenómeno de explosión en tiempo finito incluso para datos iniciales acotados. La función

$$(1.50) \quad u(x, t) = [(p-1)(T-t)]^{-\frac{1}{p-1}}$$

es una solución de (P) para $0 < t < T$ con dato inicial constante, que explota para $t = T$.

No estudiaremos aquí la cuestión de explosión (véase por ejemplo [GKMS]). Sólo resaltamos que usando el Teorema 1.1 y la función (1.50) como supersolución, obtenemos para cada $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ una única solución $u \in L^\infty(Q_T)$ donde T viene dado por $\|u_0\|_\infty = c_p T^{-\frac{1}{p-1}}$.

Finalmente el caso $p = 1$ puede reducirse a la ecuación de los medios porosos mediante el cambio de escala (1.11).

CAPÍTULO II

UNICIDAD

- 2.1. Introducción
- 2.2. Casi unicidad
- 2.3. No unicidad y propagación finita
- 2.4. Difusión rápida

2.1. Introducción

Como ya hemos visto en el capítulo anterior, si el dato inicial es $u_0 \equiv 0$ y $p < 1$, el problema (P) admite un continuo de soluciones nonegativas

$$U(x, t; \tau) = \nu_*(t - \tau)_+^\alpha$$

donde $\nu_* = (1 - p)^{\frac{1}{1-p}}$, $\alpha = 1/(1 - p)$ y $\tau \geq 0$ es arbitrario. En [AE] Aguirre y Escobedo probaron que en el caso de difusión lineal $m = 1$ y con $0 < p < 1$ este era el único caso de bifurcación, es decir, el problema (P) admite una única solución no negativa salvo si el dato inicial es $u_0 \equiv 0$. Llamaremos a esta propiedad *casi unicidad*. Además todas las soluciones no negativas que comienzan con dato cero vienen dadas por la familia anterior además de la solución cero.

La prueba del resultado de casi unicidad de [AE] se basa en una estimación inferior de las soluciones para evitar la falta de regularidad de $f(u) = u^p$ para valores pequeños. Por otro lado, en este caso $m = 1$ es decisiva una expresión explícita de la solución a través del núcleo de Gauss, cosa que no es posible si $m \neq 1$. En nuestro caso, el Corolario 1.4 nos dice que las soluciones maximales del problema (P) verifican $\bar{u} \geq \nu_* t^\alpha$. La estrategia que seguiremos será probar que toda solución que verifique esta estimación es una solución maximal, y después estudiar para qué datos iniciales es cierta la estimación.

Sin pérdida de generalidad, y por lo visto en el capítulo anterior, consideraremos siempre funciones continuas como datos iniciales. También supondremos que se verifica la condición de crecimiento (1.38) de forma que las soluciones están definidas en todo $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^N \times (0, \infty)$.

El comportamiento será muy distinto dependiendo del equilibrio entre la difusividad $D(u) = mu^{m-1}$ y el coeficiente de reacción $R(u) = u^{p-1}$, en particular dependerá del signo de $m + p - 2$. En primer lugar obtenemos que si $m + p < 2$ el efecto de la reacción es decisivo, produciendo casi unicidad y velocidad infinita de propagación. Extendemos así el resultado de [AE] a difusión no lineal $m > 1$.

TEOREMA 2.1.

Sea $p < 2 - m < 1$. El problema (P) admite una única solución salvo si $u_0 \equiv 0$, en cuyo caso la solución es $u \equiv 0$ ó $u = U(x, t; \tau)$ para algún $\tau \geq 0$.

La mayor novedad se produce sin embargo en la dirección contraria, es decir en la región $2 - m \leq p < 1$, donde la difusividad implicará propagación finita mientras que el coeficiente de reacción provocará no unicidad para todo dato inicial que se anule en alguna bola.

TEOREMA 2.2.

Sea $2 - m \leq p < 1$. El problema (P) admite una única solución si y sólo si el soporte de u_0 es todo \mathbf{R}^N .

La prueba de unicidad para datos positivos en ambos casos constituirá un método de demostración, basado en tres lemas, que será aplicado posteriormente en dos nuevas situaciones. En particular en §2.4 probaremos casi unicidad para la ecuación con difusión rápida, $m \leq 1, p < 1$.

2.2. Casi unicidad

El primer resultado establece un crecimiento mínimo tanto de las soluciones de (1.1) como de su soporte.

Lema 2.3.

Sea u una solución de la ecuación (1.1) en \mathbf{Q} tal que $u(x_0, t_0) > 0$ en un punto $(x_0, t_0) \in \mathbf{Q}$. Entonces

$$(2.1) \quad u(x_0, t) \geq c_1(t - t_0)^\alpha \quad \forall t > t_0,$$

$$(2.2) \quad u(x, t) > 0 \quad \forall t > t_0, |x - x_0| < c_2(t - t_0)^\beta,$$

donde $\alpha = 1/(1 - p)$, $\beta = (m - p)/(2(1 - p))$, y las constantes $c_1, c_2 > 0$ dependen sólo de m, p y N .

DEMOSTRACIÓN:

La demostración se basa en la construcción de una subsolución explícita. Sin embargo, y como ya hemos visto, la comparación entre subsoluciones y supersoluciones del problema (P) no es inmediata. Consideraremos entonces la ecuación aproximada

$$(2.3) \quad u_t = \Delta u^m + f_\varepsilon(u),$$

donde $f_\varepsilon(s) = \min\{s^p, \varepsilon^{p-1}s\}$, $\varepsilon > 0$. Buscamos subsoluciones para esta ecuación y obtendremos una subsolución explícita en forma autosemejante (véase §5.1).

Si escribimos $w(x, t) = t^\alpha \varphi(|x|t^{-\beta})$, y sustituimos w en la ecuación anterior, debemos tener $\alpha = 1/(1 - p)$, $\beta = (m - p)/(2(1 - p))$, y la ecuación (2.3) se transforma en términos de $\varphi = \varphi(\xi)$ en

$$(2.4) \quad \alpha\varphi - \beta\xi\varphi' = (\varphi^m)'' + \frac{N-1}{\xi}(\varphi^m)' + h_\varepsilon(t, \varphi),$$

donde $h_\varepsilon(t, \varphi) = \min\{\varphi^p, \varepsilon^{p-1}t\varphi\}$. Supongamos que se verifica

$$(2.5) \quad h_\varepsilon(t, \varphi) \geq (\alpha + \beta N)\varphi.$$

Una subsolución particular de (2.4) se obtiene inmediatamente resolviendo la ecuación

$$(2.6) \quad (\varphi^m)'' + \beta(\xi\varphi)' + \frac{N-1}{\xi}[(\varphi^m)' + \beta\xi\varphi] = 0,$$

que nos da la función

$$(2.7) \quad \varphi(\xi) = (A - B\xi^2)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

donde $B = (m-1)\beta/2m$ y $A > 0$. Obsérvese que $\varphi^m \in C^1([0, \infty))$ y φ es subsolución débil de (2.4). La condición (2.5) se satisface si $A = (\alpha + \beta N)^{-\frac{m-1}{1-p}}$ y tomamos tiempos $t \geq t_\varepsilon = (\alpha + \beta N)\varepsilon^{1-p}$.

La función w así obtenida es una subsolución de la ecuación (2.3), mientras que toda solución de nuestra ecuación (1.1) es a su vez supersolución de (2.3). Para aplicar el Teorema 1.1 debemos comparar los datos iniciales.

Supongamos por simplicidad $(x_0, t_0) = (0, 0)$, de forma que $u(0, t) > 0$ para $t > 0$. Es claro que para cada $\tau > 0$ podemos elegir $\varepsilon > 0$ de forma que

$$w(x, t_\varepsilon) \leq u(x, \tau) \quad \text{en } \mathbf{R}^N.$$

Entonces

$$w(x, t + t_\varepsilon) \leq u(x, t + \tau) \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

y haciendo $\tau \rightarrow 0$,

$$(2.8) \quad w(x, t) \leq u(x, t) \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

que implica (2.1) y (2.2) con $c_1 = A^{\frac{1}{m-1}}$, $c_2 = \sqrt{A/B}$. ■

Ahora estamos en condiciones de extender a $m > 1$, $p < 1$ la estimación crucial de [AE].

Lema 2.4.

Sea u una solución de la ecuación (1.1) tal que $u > 0$ en Q . Entonces

$$(2.9) \quad u(x, t) \geq \nu_* t^\alpha \quad \text{en } Q.$$

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando el Lema 2.1 en cada punto $(x_0, t_0) \in Q$, tenemos

$$(2.10) \quad u(x, t) \geq c_1 t^\alpha \quad \text{en } Q,$$

para alguna constante $c_1 = c_1(m, p, N) > 0$. Queremos mejorar c_1 y obtener exactamente ν_* . Para ello fijamos $\tau > 0$ y definimos la función $w(x, t) = u(x, t + \tau)$. Observemos que w es la única solución del problema (P) con dato inicial $w(x, 0) = u(x, \tau) \geq c_1 \tau^\alpha > 0$. El Corolario 1.4 implica entonces

$$w(x, t) \geq \nu_* t^\alpha \quad \text{en } Q,$$

es decir

$$u(x, t) \geq \nu_*(t - \tau)^\alpha \quad \text{en } \mathbf{R}^N \times [\tau, \infty).$$

Finalmente hacemos tender $\tau \rightarrow 0$. ■

Lema 2.5.

Sea u una solución del problema (P) tal que $u \geq \nu_* t^\alpha$ en Q . Entonces u es la solución maximal de (P).

DEMOSTRACIÓN:

Sea v la solución maximal de (P). Fijemos $T > 0$ y pongamos $Q_T = \mathbf{R}^N \times (0, T)$. Restando la identidad (1.3) para u y v tenemos, para cada $0 \leq t \leq T$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(t) \varphi(t) = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} [(v - u) \varphi_t + (v^m - u^m) \Delta \varphi + (v^p - u^p) \varphi](s) ds \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C^\infty(Q_T)$ con soporte compacto en x . Si ponemos, igual que en la demostración del Teorema 1.1

$$a = \begin{cases} \frac{v^m - u^m}{v - u} & \text{si } v \neq u \\ mu^{m-1} & \text{si } v = u, \end{cases}$$

la anterior igualdad se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(t)\varphi(t) &= \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(s)(\varphi_t + a\Delta\varphi)(s)ds + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} (v^p - u^p)(s)\varphi(s)ds. \end{aligned}$$

El crecimiento de u y v para $|x| \rightarrow \infty$ dado por Y_T permite aplicar la función test

$$\varphi(x, s) = e^{h(s)}(1 + |x|^2)^{-\gamma}$$

con $\delta > 1/(m - 1) + N/2$, aunque no es de soporte compacto. Eligiendo

$$h(s) = \int_s^T \sup_{x \in \mathbf{R}^N} \frac{a(x, \xi)}{1 + |x|^2} d\xi,$$

obtenemos otra vez $\varphi_t + a\Delta\varphi < 0$, y como $v \geq u$,

$$(2.12) \quad \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(t)\varphi(t) \leq \int_0^t \left(\int_{\mathbf{R}^N} (v^p - u^p)(s)\varphi(s) \right) ds.$$

(Notemos que saber por anticipado $v \geq u$ juega un papel crucial aquí).

Supongamos ahora primero $p > 0$. La estimación (2.9) implica

$$(2.13) \quad 0 \leq (v^p - u^p)(s) \leq \frac{p}{u^{1-p}(s)}(v - u)(s) \leq \frac{p}{1-p} \frac{(v - u)(s)}{s}$$

que introducido en (2.12) nos lleva a

$$(2.14) \quad \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(t)\varphi(t) \leq \frac{p}{1-p} \int_0^t \left(\int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(s)\varphi(s) \right) s^{-1} ds.$$

Llamando $f(t)$ al segundo miembro de (2.14), esta desigualdad se puede escribir como

$$tf'(t) \leq \frac{p}{1-p} f(t).$$

Dado $\varepsilon > 0$ integramos en $\varepsilon \leq t \leq T$ y tenemos

$$(2.15) \quad f(t) \leq f(\varepsilon)(t/\varepsilon)^{\frac{p}{1-p}}.$$

Por otro lado, de (2.12) podemos obtener

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} (v-u)(s)\varphi(s) &\leq \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^N} (v^p - u^p)(\tau)\varphi(\tau) \right) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^N} \varphi(\tau) \right)^{1-p} \left(\int_{\mathbf{R}^N} (v-u)(\tau)\varphi(\tau) \right)^p d\tau \leq \\ &\leq c(T) \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^N} (v-u)(\tau)\varphi(\tau) \right)^p d\tau, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq s \leq T$. Esto implica

$$\int_{\mathbf{R}^N} (v-u)(s)\varphi(s) \leq [c(T)(1-p)s]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Ahora podemos estimar $f(\varepsilon)$.

$$f(\varepsilon) \leq c(T) \int_0^\varepsilon s^{\frac{1}{1-p}-1} ds = c(T)\varepsilon^{\frac{1}{1-p}}.$$

Introduciendo esto en (2.15), (2.14) obtenemos

$$0 \leq \int_{\mathbf{R}^N} (v-u)(t)\varphi(t) \leq f(t) \leq c(T)\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

i.e. $u \equiv v$ in \mathbf{Q}_T para todo $T > 0$. Si $p \leq 0$ esta conclusión se deduce directamente de (2.12) ■

Este lema prueba unicidad de una solución positiva del problema (P). En particular toda solución es positiva si el dato inicial lo es (cf. Lema 2.3). Más aún, este lema se puede aplicar también si el dato inicial es positivo en un subconjunto denso de \mathbf{R}^N , por lo que tenemos probada la afirmación de unicidad del Teorema 2.2. Probaremos ahora que si $m + p < 2$, todo dato inicial no trivial produce una solución positiva, completando el Teorema 2.1. En la siguiente sección veremos que este no es el caso cuando $m + p \geq 2$, y probaremos la parte de no unicidad del Teorema 2.2.

Lema 2.6.

Si $m + p < 2$ y $u_0 \not\equiv 0$, toda solución del problema (P) es positiva en Q.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos por traslación que el soporte de u_0 contiene al origen. Para cada $t \geq 0$ consideramos el radio de la mayor bola, centrada en el origen, contenida en el soporte de $u(\cdot, t)$. Por el Lema 2.3 tenemos que este radio es

$$r(t) \geq c_2 t^\beta,$$

donde $\beta = (m - p)/2(1 - p) < 1$ y $c_2 = c_2(m, p, N)$. Como podemos aplicar el Lema 2.3 en cada punto $(x_0, t_0) \in \text{sop}(u)$, fijamos $t > 0$ y para cada $k \in \mathbf{N}$ obtenemos

$$r(t/k) \geq c_2(t/k)^\beta, \quad r(2t/k) \geq 2c_2(t/k)^\beta, \quad \dots, \quad r(t) \geq k^{1-\beta} c_2 t^\beta.$$

Concluimos haciendo tender $k \rightarrow \infty$. ■

Sólo falta, para completar la demostración del Teorema 2.1, considerar el caso $u_0 \equiv 0$. Aplicamos el Lema 2.5 a la función $w(x, t) = u(x, t + \tau)$, donde $\tau = \sup\{t \geq 0 : u(x, t) = 0 \forall x \in \mathbf{R}^N\}$, y obtenemos $w(x, t) = \nu_* t^\alpha$. ■

2.3. No unicidad y propagación finita

Completamos ahora la demostración del Teorema 2.2 probando que en el caso $m + p \geq 2$ las soluciones minimales del problema (P) tienen la propiedad de propagación finita en el sentido siguiente:

Lema 2.7.

Sea $m + p \geq 2$ y $u_0 \geq 0$ tal que $u_0(x) \equiv 0$ en $B(x_0, R)$. Sea u la solución minimal del problema (P). Entonces existe $\tau > 0$ suficientemente pequeño de manera que

$$(2.16) \quad u(x, t) \equiv 0 \quad \text{en } B(x_0, R/6), \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

DEMOSTRACIÓN:

Utilizaremos un argumento de comparación a través de una nueva variable $v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$, que será utilizada posteriormente con frecuencia. En términos de v la ecuación (1.1) se convierte en

$$(2.17) \quad v_t = (m-1)v\Delta v + |\nabla v|^2 + \mu v^\delta$$

con $\delta = (m+p-2)/(m-1) \in [0, 1)$ y $\mu = m((m-1)/m)^\delta$. Consideremos la función

$$(2.18) \quad w(x, t) = a(ct + r - b)_+, \quad r = |x - x_0|,$$

donde $a, b, c > 0$ son constantes a elegir adecuadamente. Primero fijamos $b = R/3$ y $c\tau = R/6$, de manera que

$$(2.19) \quad w(x, t) \equiv 0 \quad \text{para } r < R/6, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Ahora si $u \leq K$ en $r < R$, $0 \leq t \leq \tau$, eligiendo $a = 6K/R$, tenemos

$$v(x, t) \leq w(x, t) \quad \text{para } r = R/2, 0 \leq t \leq \tau.$$

Por otro lado si $0 < r \leq R/2$ y $0 \leq t \leq \tau$ tenemos

$$w \leq a/3$$

$$w\Delta w \leq 2(N-1)a^2$$

$$w^\delta \leq 1 + w.$$

Es fácil comprobar entonces que si $c > 0$ es suficientemente grande, w es una supersolución de la ecuación (2.17). Así $z = (\frac{m-1}{m}w)^{\frac{1}{m-1}}$ es una supersolución de la ecuación (1.1). Como u es solución minimal, tenemos

$$u(x, t) \leq z(x, t) \quad \text{para } r < R/2, 0 \leq t \leq \tau.$$

En particular (2.19) implica (2.16). ■

OBSERVACIÓN:

Una supersolución como (2.18) fue utilizada en [CF2] para probar (2.16) en el caso de la E.M.P.

2.4. Difusión rápida

Mostraremos en esta sección cómo el método desarrollado en §2.1 para probar unicidad se puede extender para tratar también el caso de *difusión lineal* $m = 1$ y de *difusión rápida* $m < 1$. Por razones técnicas consideraremos sólo difusión *no demasiado rápida*, precisamente

$$(2.20) \quad m > m_0 = \max \left\{ p, \frac{(N-2)_+}{N} \right\},$$

pues nuestro interés es solamente pasar a través de la barrera $m = 1$.

Para comenzar observamos que el Teorema 1.2 se puede adaptar con ligeros cambios al caso $m_0 < m \leq 1$, $p < 1$, obteniendo la existencia de una solución maximal y una solución minimal del problema (P), junto con un principio de comparación. Tenemos además que aquí todas las soluciones son positivas ya que son supersoluciones de la ecuación de los medios porosos (véase Aronson-Bénilan [AB; Teor.3]).

TEOREMA 2.8.

Si $p < 1$ y $m_0 < m \leq 1$ el problema (P) tiene la propiedad de casi unicidad.

DEMOSTRACIÓN:

Seguiremos el esquema de demostración introducido en la Sección 2.1 y demostraremos los Lemas 2.3, 2.4 y 2.5, pues el Lema 2.6 no es necesario aquí.

Etapa 1. Si resolvemos la ecuación (2.6) cuando $m \leq 1$ obtenemos la sub-solución explícita $w(x, t) = t^\alpha \varphi(|x|t^{-\beta})$, con α y β como antes y con el perfil

$$(2.21) \quad \varphi(\xi) = \begin{cases} Ae^{-\frac{\xi^2}{4}} & \text{si } m = 1 \\ A(1 + B\xi^2)^{-\frac{1}{1-m}} & \text{si } m_0 < m < 1, \end{cases}$$

donde $A = (\alpha + \beta N)^{-\frac{1}{1-p}}$ y $B = (1 - m)\beta/2mA$. Nótese que $m > p$ implica $B > 0$. Observemos también que φ es positiva en $[0, \infty)$, y antes de la comparación debemos tener en cuenta que las soluciones de (P), de nuevo como supersoluciones de la EMP, satisfacen cierto crecimiento mínimo para $|x| \rightarrow \infty$:

$$(2.22) \quad u(x, t) \geq \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy & \text{si } m = 1 \\ ct^{\frac{1}{1-m}} (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{1-m}} & \text{si } m_0 < m < 1 \end{cases}$$

(cf. Herrero-Pierre [HP; Teor.2.4] para $m < 1$, donde es necesario $m > (N - 2)_+/N$).

Ahora es un ejercicio comprobar que dado cualquier $x_0 \in \mathbf{R}^N$ y cualquier $\tau > 0$, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$w(x - x_0, \varepsilon) \leq u(x, \tau) \quad \text{en } \mathbf{R}^N,$$

que implica

$$w(x - x_0, t) \leq u(x, t) \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

y en particular

$$(2.23) \quad u(x, t) \geq At^\alpha \quad \text{en } \mathbf{Q}.$$

Etapas 2. De nuevo es inmediato obtener la estimación (2.9) a partir de (2.23).

Etapas 3. En la demostración del Lema 2.5 sólo existe un cálculo que depende de m , y es estimar $a = (v^m - u^m)/(v - u)$. Pero a partir de (2.9) tenemos

$$0 \leq a(x, s) \leq m[(1 - p)s]^{-\frac{1-m}{1-p}}.$$

Así, si tomamos la función test

$$\varphi(x, s) = \exp[k(T^{\frac{m-p}{1-p}} - s^{\frac{m-p}{1-p}})](1 + |x|^2)^{-\gamma}$$

tenemos que para k suficientemente grande se verifica $\varphi_t + a\Delta\varphi < 0$. (Hemos usado otra vez $m > p$). El resto de la demostración es exactamente la misma. ■

CAPÍTULO III

ONDAS VIAJERAS

3.1. Introducción

3.2. Existencia de Ondas Viajeras

3.3. Clasificación de las Ondas Viajeras

3.1. Introducción

Comenzaremos el estudio de las propiedades de propagación de las soluciones del problema (P) describiendo el comportamiento de un tipo especial de soluciones, las *ondas viajeras*, que jugará un papel clave en el estudio del fenómeno de propagación.

Una solución de tipo onda viajera, que denominaremos O.V., es una solución de (1.1) de la forma

$$(3.1) \quad u(x, t) = \varphi(\xi), \quad \xi = x \cdot \nu - ct \in \mathbf{R},$$

donde ν es un vector unitario de \mathbf{R}^N que define la *dirección de propagación* de la onda, $c \in \mathbf{R}$ es la *velocidad* de propagación y $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ es el *perfil* de la onda.

El problema de buscar O.V. es un problema unidimensional, por lo que consideraremos en este capítulo la ecuación (1.1) en dimensión espacial $N = 1$ sin más que suponer $\nu = (1, 0, \dots, 0)$.

Consideraremos entonces el problema de buscar soluciones en la forma $u(x, t) = \varphi(x - ct)$, $c \in \mathbf{R}$ de la ecuación

$$(3.2) \quad u_t = (u^m)_{xx} + \lambda u^p,$$

donde $m > 1$, $p \in \mathbf{R}$ y $\lambda > 0$. Escribimos el coeficiente λ en el término de reacción para resaltar la diferencia de comportamiento de nuestra ecuación ($\lambda > 0$) con la E.M.P. ó ecuación de difusión pura ($\lambda = 0$) y la ecuación con absorción ($\lambda < 0$).

Estamos interesados en las ondas viajeras *finitas* (O.V.F.), es decir tales que $\varphi(\xi) = 0$ para $\xi \leq \xi_0$ ó $\xi \geq \xi_0$. Consideraremos dos ondas equivalentes si se diferencian en una traslación $\xi \rightarrow \xi + \xi_0$ ó en una simetría $\xi \rightarrow -\xi$, cambios de variable bajo los que la ecuación (1.1) permanece invariante. Supondremos entonces $\varphi(\xi) = 0$ para $\xi \geq 0$. Descartaremos siempre la solución trivial $\varphi \equiv 0$.

El estudio de las ondas viajeras es fácil en el caso $\lambda = 0$; para cada $c \neq 0$ existe una única O.V.F. que se propaga con esa velocidad. También existen O.V. no finitas, positivas: para cada $a > 0$ existe una O.V. dada por un perfil $\varphi = \varphi_a \in C^\infty(\mathbf{R})$, con $\varphi(-\infty) = \infty$, $\varphi(+\infty) = a$ y $\varphi' < 0$, y también existe una O.V. constante $\varphi \equiv a$ (cf. [A1]). Estas soluciones no juegan sin embargo ningún papel en el estudio de la propagación finita. Las O.V. finitas en este caso $\lambda = 0$ son explícitas y la manera natural de describirlas es a través de una nueva variable, la variable *presión*, que ya ha sido introducida en §2.2

$$(3.3) \quad v = \frac{m}{m-1} u^{m-1},$$

y que juega un papel importante en los fenómenos de difusión descritos por la E.M.P. También será fundamental en la descripción de las O.V. en nuestra ecuación $\lambda > 0$, por lo que mantendremos la denominación de presión.

En términos de v las O.V. mencionadas para $\lambda = 0$ son los *frentes lineales*

$$(3.4) \quad \begin{aligned} v_c(x, t) &= c(ct - x)_+, & c > 0, \\ v_c(x, t) &= -c(ct - x)_+, & c < 0. \end{aligned}$$

(v_c avanza hacia la derecha si $c > 0$ mientras que retrocede si $c < 0$).

Si escribimos $v(x, t) = \psi(\xi) = \frac{m}{m-1} \varphi^{m-1}(\xi)$, el perfil de estas ondas es, para cada $c \in \mathbf{R}$

$$(3.5) \quad \psi_c(\xi) = (-c\xi)_+.$$

El caso de absorción $\lambda < 0$ ha sido estudiado recientemente por Herrero y Vazquez [HV2]. Aquí aparecen tres tipos de ondas: ondas de calentamiento, cuyo soporte se expande, ondas de enfriamiento con soporte que se contrae, y

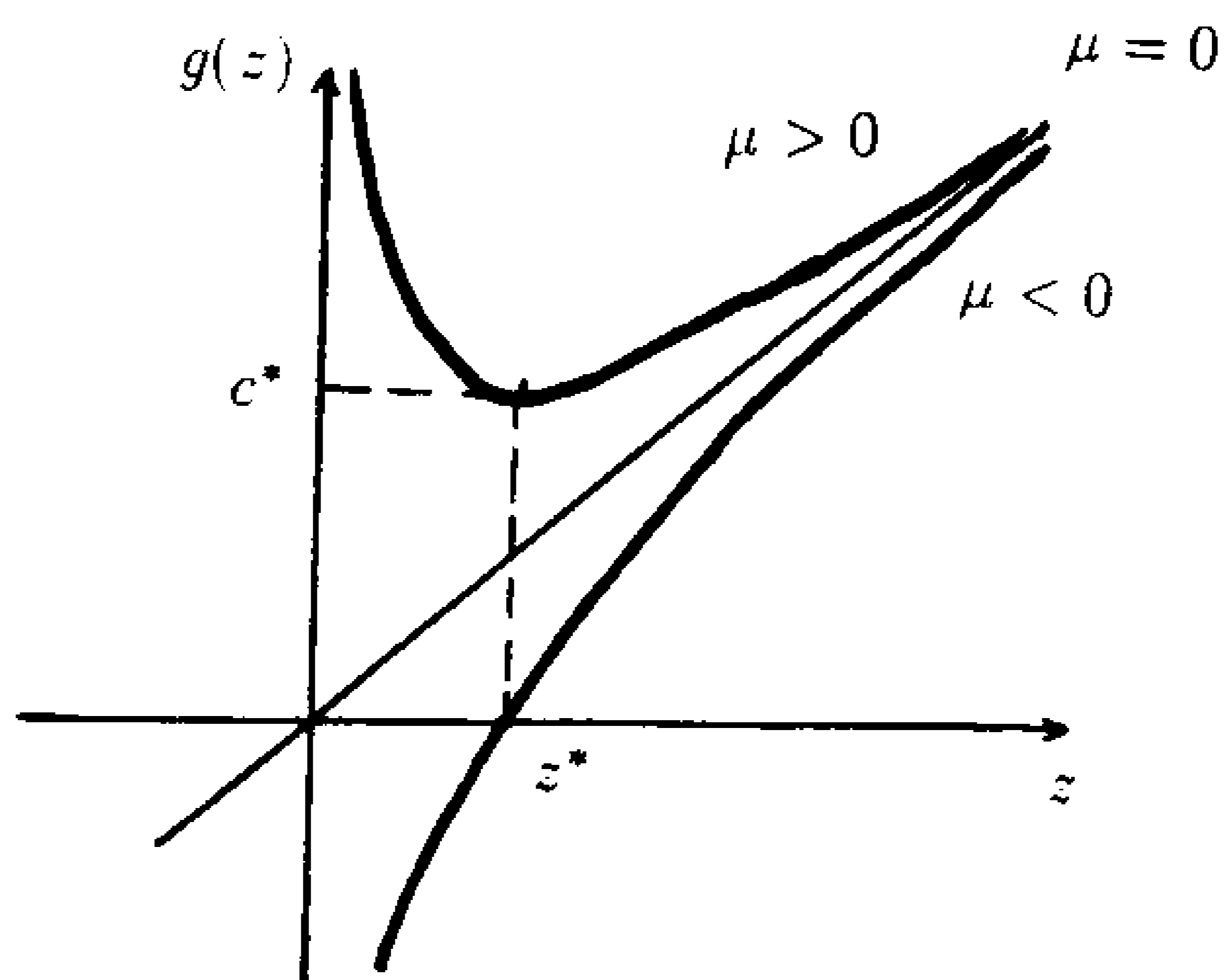


Fig. 3.1 $g(z) = z + \frac{\mu}{z}$.

ondas estacionarias. La existencia de O.V. de cada tipo depende de m y p , y en los dominios correspondientes existe una única solución para cada velocidad. Sus perfiles se comportan, para $\xi \approx 0$ como una potencia de $(-c\xi)_+$ según la relación entre m y p .

La situación es muy diferente en el caso de reacción $\lambda > 0$. Si escribimos la ecuación (3.2) en términos de la presión, obtenemos

$$(3.6) \quad v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 + \mu v^\delta.$$

donde $\delta = (m+p-2)/(m-1)$ y $\mu = \lambda m((m-1)/m)^\delta$ (véase §2.2).

Buscando ahora ondas lineales en la forma

$$(3.7) \quad v_c(x, t) = z(ct - x)_+, \quad z, c > 0.$$

necesariamente $\delta = 0$, es decir $m+p=2$, mientras que c y z deben satisfacer la relación

$$(3.8) \quad c = z + \frac{\mu}{z} \equiv g(z).$$

(Sustituyendo $(-z, -c)$ por (z, c) obtenemos la onda reflejada que viaja con velocidad negativa $-c$).

Vemos que para $\mu < 0$ existe una única onda viajera para cada valor de $c \in \mathbb{R}$ (ondas de calentamiento para $z > z^* = \sqrt{|\mu|}$, ondas de enfriamiento si $z < z^*$ y ondas estacionarias si $z = z^*$). Sin embargo para $\mu > 0$ existe una velocidad mínima $c^* = 2\sqrt{\mu}$ tal que existen ondas viajeras sólo si $c \geq c^*$, exactamente una si $c = c^*$ y dos si $c > c^*$. Si $\mu = 0$ recuperamos las O.V. (3.4). Observemos que si $\mu \neq 0$, mediante el cambio de escala $x = x_1/\sqrt{|\mu|}$, $t = t_1/|\mu|$, podemos normalizar $|\mu| = 1$, lo que implica $|\lambda| = 1/m$. En este caso los valores críticos son $c^* = 2$, $z^* = 1$.

Probaremos que este esquema refleja el gráfico general de las O.V. para la ecuación (3.2) con $\lambda > 0$, y probaremos que existen O.V. sólo en el caso $m+p = 2$ y sólo para velocidades $c \geq c^*$, y que además son finitas (cf. Teorema 3.1).

En el siguiente capítulo utilizaremos las O.V. construidas en éste para estudiar la propagación de las soluciones del problema (P) en dimensión espacial $N = 1$. Para ello utilizaremos argumentos de comparación con estas O.V.F. por lo que primero caracterizamos en el Teorema 3.2 cuáles de estas ondas son maximales o minimales. Por el Corolario 1.4 las O.V.F. no pueden ser soluciones maximales. Probaremos que existe una familia de ondas viajeras minimales que viene dada por la rama derecha de la curva $c = g(z)$ de la Fig. 3.1.

3.2. Existencia de Ondas Viajeras

TEOREMA 3.1.

La ecuación (3.2) con $m > 1$, $\lambda = 1/m$ admite soluciones de tipo O.V. sólo si $m + p = 2$. En este caso existe una velocidad crítica $c^* = 2$ tal que

- (i) no existen O.V. con velocidad $0 < c < 2$;
- (ii) existe una única O.V. con $c = 2$;
- (iii) existen infinitas O.V. para cada $c > 2$.

Estas ondas son finitas y sus perfiles son funciones decrecientes $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$.

El conjunto de las O.V. con velocidades negativas se puede obtener por reflexión espacial, como ya hemos visto. Por otro lado, las O.V. consideradas son soluciones $u(x, t)$ globales, es decir definidas en $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \times [0, \infty)$. Ondas viajeras locales, definidas sólo en una región $\xi_1 < x - ct < \xi_2$, existen también para $m + p \neq 2$. De hecho estas O.V. locales serán de utilidad en argumentos de comparación local.

DEMOSTRACIÓN:

Si escribimos $u(x, t) = \varphi(\xi)$ con $\xi = x - ct$ ($c \geq 0$ por el comentario anterior), la ecuación (3.2) se convierte en

$$(3.9) \quad -c\varphi' = (\varphi^m)'' + \frac{1}{m}\varphi^p,$$

donde $' = d/d\xi$. Buscamos soluciones de la ecuación (3.9) en sentido débil (es decir, u es solución en sentido débil de (3.2), de manera que φ y $(\varphi^m)'$ deben ser continuas en todo \mathbf{R} , en particular $(\varphi^m)'$ debe anularse donde φ lo haga. Es claro también que las soluciones serán regulares en el conjunto donde sean positivas.

Reduciremos el estudio de la ecuación (3.9) al estudio de un plano de fases, para lo cual introduciremos las variables correspondientes a la densidad y el flujo

$$(3.10) \quad X = \varphi, \quad Y = -(\varphi^m)'$$

Así (3.9) se puede escribir como

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{dX}{d\xi} = -\frac{1}{m}X^{1-m}Y \\ \frac{dY}{d\xi} = -\frac{c}{m}X^{1-m}Y + \frac{1}{m}X^p. \end{cases}$$

Las trayectorias de este sistema son las soluciones de

$$(3.12) \quad \frac{dY}{dX} = c - X^{m+p-1}Y^{-1} \equiv F(X, Y).$$

Aunque sólo estamos interesados en el semiplano $X \geq 0$ (soluciones u de (3.2) positivas), para completar el gráfico de las trayectorias a todo el plano (X, Y) , interpretamos las variables (3.10) para $X \leq 0$ como

$$X = \varphi, \quad Y = -(|\varphi|^{m-1}\varphi)',$$

y la ecuación de las trayectorias es

$$\frac{dY}{dX} = c - |X|^{m+p-2}XY^{-1}.$$

Por tanto el semiplano $X \leq 0$ se obtiene por reflexión $X \rightarrow -X$, $Y \rightarrow -Y$.

Consideramos trayectorias admisibles las soluciones $(X(\xi), Y(\xi))$ de (3.11) definidas para todo $\xi \in \mathbf{R}$ tales que Y se anula siempre que X lo hace.

Por otro lado observemos que

$$(3.13) \quad \frac{Y(\xi)}{X(\xi)} = -\frac{(\varphi^m)'(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\left(\frac{m}{m-1}\varphi^{m-1}\right)'(\xi) = -\psi'(\xi)$$

por lo que el plano de fases introducido permite relacionar de forma directa el comportamiento de las trayectorias $(X(\xi), Y(\xi))$ con la pendiente del perfil $\psi(\xi)$ de la presión.

Caso crítico $m + p = 2$. En este caso (3.11) se convierte en un sistema lineal. Mediante el cambio de parámetro dado por la relación implícita

$$d\tau = \frac{1}{m} X^{1-m} d\xi,$$

este sistema es

$$(3.14) \quad \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -Y \\ \frac{dY}{d\tau} = X - cY. \end{cases}$$

El punto crítico $(0,0)$ es un foco si $c < c^* = 2$ (un centro si $c = 0$) y un nodo si $c \geq 2$.

Si $0 < c < 2$ las soluciones de (3.14) son espirales dobles alrededor del origen, enrollándose con τ (y con ξ) en sentido contrario al de las agujas del reloj.

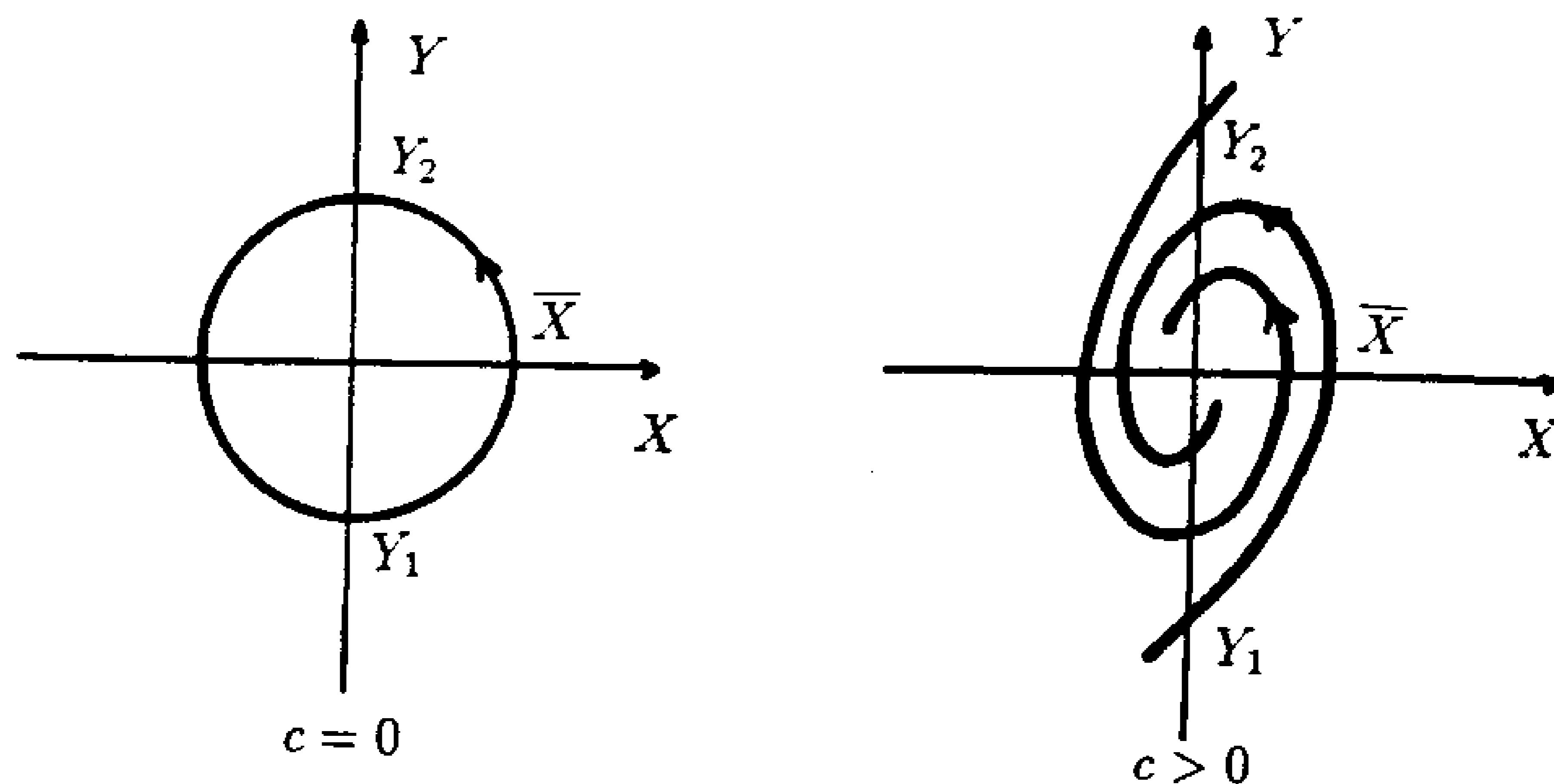


Fig. 3.2 $m + p = 2, 0 \leq c < 2$.

Cada parte de trayectoria en el semiplano $X \geq 0$ conecta dos puntos en el eje vertical, $(0, Y_1), (0, Y_2)$ con $Y_1 < 0 < Y_2$. Es fácil ver que si $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}$ son tales que $Y(\xi_1) = Y_1, Y(\xi_2) = Y_2$, entonces $\xi_2 - \xi_1 < \infty$. Para ello sea $\xi_1 < \bar{\xi} < \xi_2$ el valor del parámetro para el que la trayectoria corta al eje X , y sea $(\bar{X}, 0)$ ese punto de corte. Denotemos por $Y_-(X)$ la curva que une $(0, Y_1)$ con $(\bar{X}, 0)$, y

por $Y_+(X)$ la que une $(\bar{X}, 0)$ con $(0, Y_2)$. Usando (3.11) tenemos

$$\begin{aligned}\xi_2 - \xi_1 &= (\xi_2 - \bar{\xi}) + (\bar{\xi} - \xi_1) = \\ &= \int_{\bar{X}}^0 \frac{-mX^{m-1}}{Y_+(X)} dX + \int_0^{\bar{X}} \frac{-mX^{m-1}}{Y_-(X)} dX.\end{aligned}$$

En primer lugar la integral en $X = 0$ no ofrece problemas pues $|Y_{\pm}(0)| > 0$. Para $X \approx \bar{X}$, y a partir de (3.12) podemos deducir que Y_{\pm} se comporta como

$$Y_{\pm}(X) \approx \pm \bar{X} \sqrt{\bar{X} - X}, \quad X \approx \bar{X},$$

por lo que ambas integrales son finitas. El correspondiente perfil $\varphi(\xi)$ es una solución local de (3.9) en $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ con forma de parábola invertida, que deja de verificar la ecuación en la frontera $\xi = \xi_1$ y $\xi = \xi_2$. Si $c = 0$ las trayectorias son circunferencias pero el mismo argumento implica que tampoco son admisibles.

Si $c = 2$, integrando (3.12) obtenemos la familia de trayectorias

$$(3.15) \quad Y - X = k \exp\left(\frac{X}{Y - X}\right), \quad k \in \mathbf{R}.$$

Si $k = 0$, (3.15) se reduce a la recta $Y = X$, que corresponde (vía (3.13)) al frente lineal

$$(3.16) \quad \psi(\xi) = (-\xi)_+, \quad \xi = x - 2t$$

obtenido en (3.7). Para $k < 0$ obtenemos trayectorias que entran en el origen con pendiente uno partiendo de puntos $(0, Y_1)$ con $Y_1 < 0$, y que definen soluciones $\varphi(\xi)$ en un intervalo (ξ_1, ξ_2) igual que antes, fallando la ecuación (3.9) en $\xi = \xi_1$. Para $k > 0$ obtenemos de manera análoga soluciones en $(-\infty, \bar{\xi}_2)$, donde ahora la ecuación falla en $\xi = \bar{\xi}_2$. En resumen no existen trayectorias admisibles si $k \neq 0$.

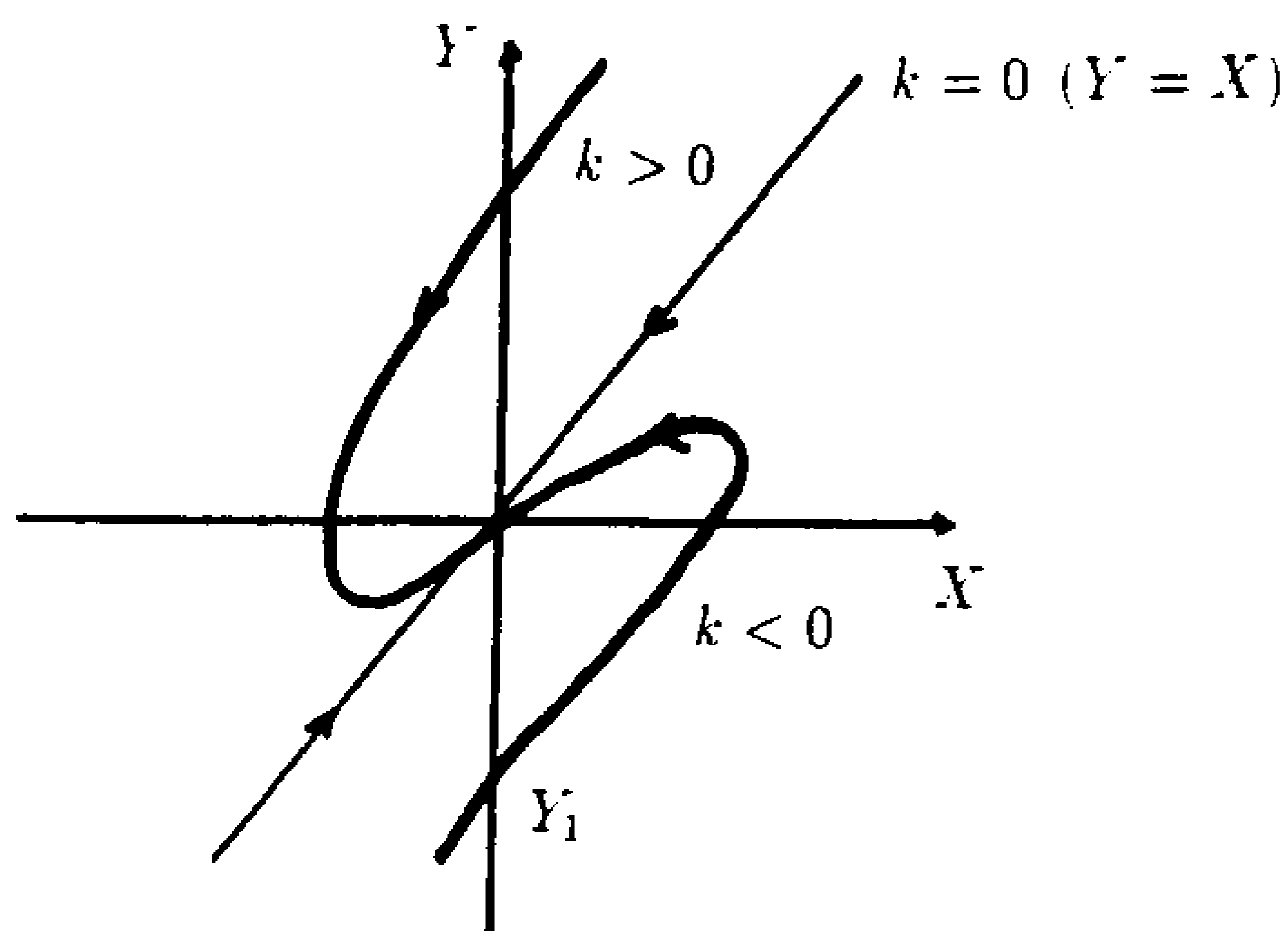


Fig. 3.3 $m + p = 2, \quad c = 2.$

Finalmente si $c > 2$ la ecuación (3.12) se puede integrar también, y obtenemos las trayectorias dadas por

$$|Y - z_1 X|^{z_1} = k |Y - z_2 X|^{z_2},$$

para $0 \leq k \leq \infty$, y donde z_1 y z_2 son las dos soluciones de

$$(3.17) \quad z^2 - cz + 1 = 0$$

(recordemos la relación (3.8)). Por las mismas razones que en el caso $c = 2$ las únicas trayectorias admisibles son

$$(3.18) \quad (Y - z_1 X)^{z_1} = k (z_2 X - Y)^{z_2},$$

para $0 \leq k \leq \infty$ y con $0 \leq z_1 X \leq Y \leq z_2 X$.

Los casos límite $k = 0, +\infty$ representan dos líneas rectas correspondientes a los frentes lineales

$$(3.19) \quad \psi_{z_1}(\xi) = z_1(-\xi)_+, \quad \psi_{z_2}(\xi) = z_2(-\xi)_+, \quad \xi = x - ct, \quad c > 2.$$

Para cada $0 < k < +\infty$ obtenemos una solución $Y_k(X)$ que entra en el origen con pendiente z_1 , que verifica $z_1 X < Y_k(X) < z_2 X$ para $X > 0$, y que se

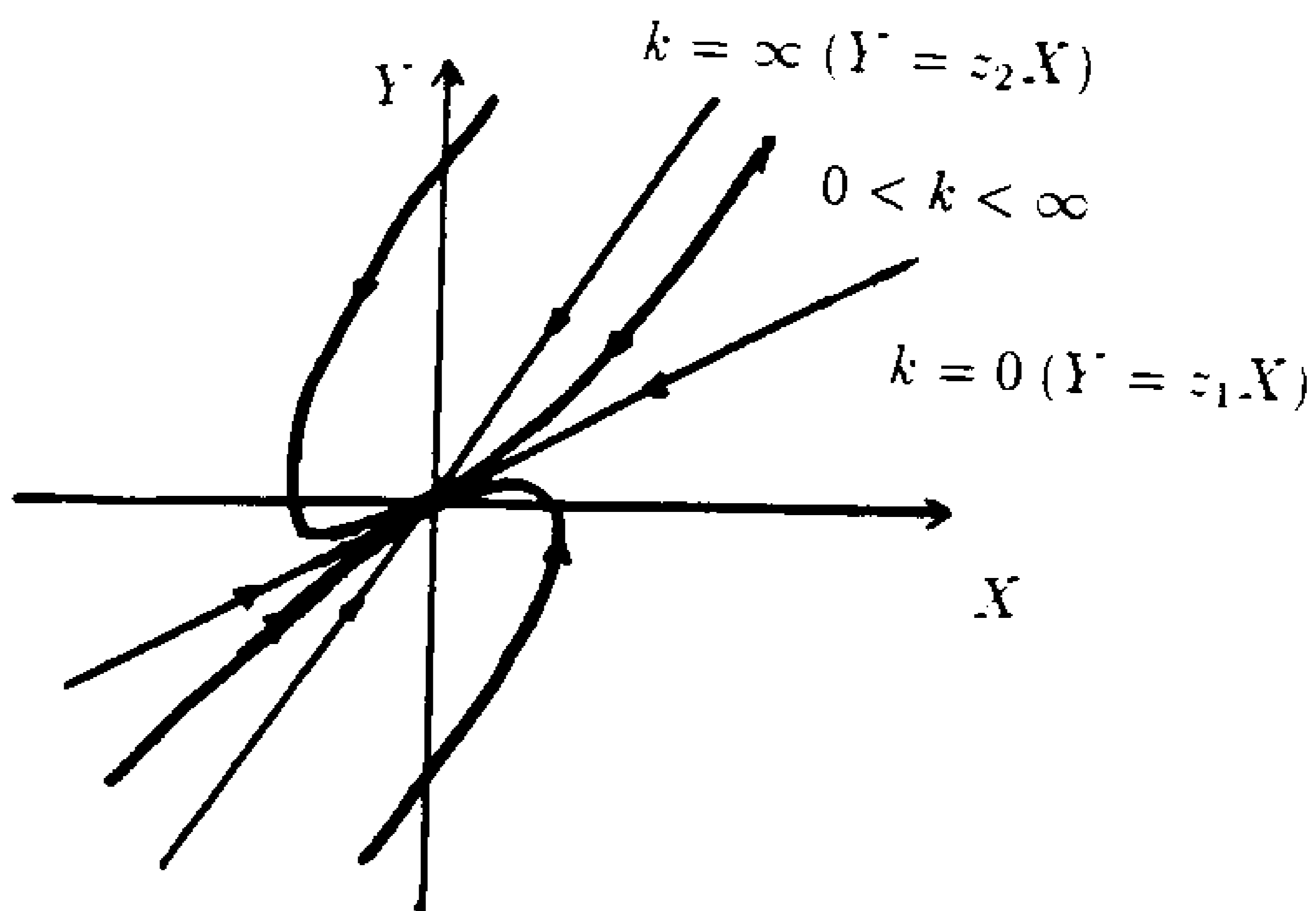


Fig. 3.4 $m + p = 2, c > 2.$

comporta como $Y = z_2 X$ para X grande. De nuevo por (3.13) obtenemos las O.V. con perfil

$$(3.20) \quad \begin{aligned} z_1(-\xi)_+ \leq \psi_k(\xi) \leq z_2(-\xi)_+ \\ z_1 \leq -\psi'_k(\xi) \leq z_2, \end{aligned}$$

que en particular implica que son finitas con perfil decreciente.

Caso $m + p \neq 2$. Vamos a ver ahora que si $m + p \neq 2$ no existen soluciones admisibles de (3.12). En primer lugar, si $c = 0$ la ecuación se puede integrar explícitamente obteniendo

$$(3.21) \quad \frac{1}{2} Y^2 + \frac{1}{m+p} X^{m+p} = a \in \mathbf{R}$$

($\frac{1}{2} Y^2 + \log X = a$ si $m + p = 0$). Esta fórmula representa trayectorias que no entran en el origen (cerradas si $m + p > 2$, tendiendo $Y \rightarrow \infty$ cuando $X \rightarrow 0$ si $m + p < 2$), y que recorren un intervalo finito de $\xi \in \mathbf{R}$, por lo que no son admisibles.

Para estudiar velocidades positivas, observamos que $F(X, Y) = dY/dX$ se anula a lo largo de la curva

$$Y = h(X) \equiv \frac{1}{m} X^{m+p-1}$$

y que verifica

$$\begin{aligned} 0 < F < c & \quad \text{si } 0 < h(X) < Y, \\ F > c & \quad \text{si } Y < 0 < X, \\ F < 0 & \quad \text{si } 0 < Y < h(X). \end{aligned}$$

Obtenemos aquí espirales dobles que entran en el origen con pendiente c si $m + p > 2$, espirales que rodean el origen si $1 < m + p < 2$ ó trayectorias que tienden a $Y = \pm\infty$ cuando se acercan al eje vertical si $m + p \geq 1$. En cualquier caso producen soluciones no admisibles.

En resumen, sólo existen O.V. en el caso $m + p = 2$ y para velocidades $c \geq 2$, y éstas vienen dadas por los perfiles (en presión) (3.16), (3.19) y (3.20). ■

OBSERVACIÓN:

Notemos que todas las funciones obtenidas verifican la condición de crecimiento en $|x|$ (1.38). De hecho esta condición en términos de la presión implica un crecimiento menor de cuadrático, y todas las O.V. construidas tienen un crecimiento lineal.

3.3. Clasificación de las Ondas Viajeras

En esta sección caracterizaremos, de acuerdo a la Definición 1.3, las O.V. obtenidas en la sección anterior. Demostraremos el siguiente resultado

TEOREMA 3.2.

Existe una rama de soluciones minimales en el conjunto de O.V. obtenidas en el Teorema 3.1 que corresponde a los frentes lineales (3.7), (3.8) con $c \geq c^$ y $z \geq z^*$. Las demás O.V. no son ni maximales ni minimales.*

Antes de la demostración es interesante observar que la rama citada en el Teorema 3.2 es la rama derecha de la curva $c = g(z)$ en la Fig 3.1. Por otro lado, el comportamiento de las dos ramas de esa curva cuando $c \rightarrow \infty$ es cualitativamente muy distinto. En la rama derecha tenemos $z = z_2(c) \approx c$ para c grande, por lo que

$$v_c(x, t) = \psi_{z_2}(x - ct) \approx c(ct - x)_+$$

es decir, el frente lineal de la E.M.P. Podemos decir que es la rama "buena". En la rama izquierda $z = z_1(c) \approx 1/c$ y

$$v_c(x, t) = \psi_{z_1}(x - ct) \approx t_+$$

que es la solución maximal (tras el cambio de variable a presión) $U(x, t; 0)$ de (1.48).

La demostración del teorema la haremos en cuatro lemas, de los que el cuarto, el correspondiente a $v_* = v_{c^*}$ tendrá que esperar hasta el siguiente capítulo. Notemos también que nos referimos indistintamente a la variable densidad o a la variable presión al hablar del carácter minimal o maximal de una solución.

Lema 3.3.

Si $c > 2$, el frente lineal $v_{z_2}(x, t) = z_2(ct - x)_+$ con $z_2 = \frac{1}{2}(c + \sqrt{c^2 - 4})$ es una solución minimal.

DEMOSTRACIÓN:

La prueba se basará en la construcción de soluciones de tipo O.V. para el problema aproximado (P_ϵ) del Capítulo I que estén cercanas a v_{z_2} .

Nos planteamos el problema de encontrar soluciones $u(x, t) = \varphi_\epsilon(x - c_\epsilon t) = \varphi_\epsilon(\xi_\epsilon)$ de la ecuación

$$(3.22) \quad u_t = (u^m)_{xx} + f_\epsilon(u)$$

con f_ϵ igual que en aquel capítulo, $f_\epsilon(s) = \frac{1}{m} \min\{s^p, \epsilon^{p-1}s\}$, y para velocidades $2 < c_\epsilon \nearrow c$. Utilizaremos también el plano de fases (3.10). La ecuación satisfecha por las trayectorias $Y(X)$ análoga a (3.12) es ahora

$$(3.23) \quad \frac{dY}{dX} = c_\epsilon - mX^{m-1}f_\epsilon(X)Y^{-1},$$

con la condición $Y(0) = 0$. Observando el estudio para $m + p > 2$ hecho en el Teorema 3.1 cerca del origen ($f_\epsilon(X) = \frac{1}{m}\epsilon^{p-1}X$ para $X < \epsilon$), vemos que existe una trayectoria que entra en $(0,0)$ con pendiente $c_\epsilon > 0$. Sea Y_ϵ esta trayectoria. Consideremos también las soluciones $0 < z_{1,\epsilon} < z_{2,\epsilon}$ de la ecuación

$$(3.24) \quad z^2 - c_\epsilon z + 1 = 0.$$

Una primera comparación con funciones test de la forma $Y = MX$ nos da

$$(3.25) \quad z_{2,\epsilon}X \leq Y_\epsilon(X) \leq c_\epsilon X.$$

Pongamos $h(X) = Y_\epsilon(X) - z_{2,\epsilon}X$. Usando (3.23), (3.24) y (3.25) y el hecho de que $f_\epsilon(X) = \frac{1}{m}X^{2-m}$ para $X \geq \epsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} h'(X) &= c_\epsilon - \frac{X}{Y_\epsilon} - z_{2,\epsilon} = \frac{z_{1,\epsilon}Y_\epsilon - X}{Y_\epsilon} = \\ &= \frac{z_{1,\epsilon}h(X)}{Y_\epsilon} \leq \frac{z_{1,\epsilon}}{z_{2,\epsilon}} \frac{h(X)}{X} \end{aligned}$$

para $X \geq \varepsilon$. Integrando de ε a X tenemos

$$h(X) \leq h(\varepsilon) \left(\frac{X}{\varepsilon} \right)^{\alpha_\varepsilon},$$

con $\alpha_\varepsilon = \frac{z_{1,\varepsilon}}{z_{2,\varepsilon}}$. Como $h(\varepsilon) \leq z_{1,\varepsilon}\varepsilon$ tenemos

$$(3.26) \quad Y_\varepsilon(X) \leq z_{2,\varepsilon} X \left[1 + \alpha_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{X} \right)^{1-\alpha_\varepsilon} \right],$$

Pero $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon = z_1/z_2 < 1$, así que (3.26) junto con (3.25) da la convergencia (uniforme sobre compactos) $Y_\varepsilon(X) \rightarrow Y(X) = z_2 X$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Obtendremos ahora la convergencia de las OV. De la relación diferencial satisfecha por X e Y (véase (3.11)), tenemos

$$-\xi_\varepsilon(X) = \int_0^X \frac{ms^{m-1}}{Y_\varepsilon(s)} ds,$$

que podemos estimar mediante (3.25), (3.26):

$$\begin{aligned} -\xi_\varepsilon(X) &\leq \frac{m}{m-1} \frac{X^{m-1}}{z_{2,\varepsilon}}, \\ -\xi_\varepsilon(X) &\geq \int_{\sqrt{\varepsilon}}^X \frac{ms^{m-2}}{z_{2,\varepsilon} \left[1 + \alpha_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{s} \right)^{1-\alpha_\varepsilon} \right]} ds \geq \\ &\geq \frac{m}{m-1} \frac{X^{m-1} - \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}}{z_{2,\varepsilon} \left[1 + \alpha_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1-\alpha_\varepsilon}{2}} \right]}, \end{aligned}$$

para $\varepsilon < \min\{X, X^2\}$. Esto implica, para cada perfil $\psi_\varepsilon = \frac{m}{m-1} X^{m-1}(\xi_\varepsilon)$,

$$(3.27) \quad z_{2,\varepsilon}(-\xi_\varepsilon)_+ \leq \psi_\varepsilon(\xi_\varepsilon) \leq z_{2,\varepsilon}(1 + \delta_\varepsilon)(-\xi_\varepsilon)_+ + \tau_\varepsilon$$

donde $\delta_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1-\alpha_\varepsilon}{2}}$, $\tau_\varepsilon = \frac{m}{m-1} \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}$. Por tanto

$$\psi_\varepsilon(x - c_\varepsilon t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} z_2(ct - x)_+ = v_{z_2}(x, t).$$

Por otro lado tenemos que comparar los datos iniciales. Para ello observamos que podemos elegir c_ε cuidadosamente de manera que $(1 + \delta_\varepsilon)z_{2,\varepsilon} \leq z_2$. De hecho tenemos

$$z_2 - z_{2,\varepsilon}(1 + \delta_\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \left[c - \left(1 + \varepsilon^{\frac{1-\alpha_\varepsilon}{2}} \right) c_\varepsilon \right],$$

y como

$$\frac{1 - \alpha_\varepsilon}{2} = \frac{z_{2,\varepsilon} - z_{1,\varepsilon}}{2z_{2,\varepsilon}} > \beta \equiv \frac{z_2 - z_1}{4z_2},$$

siempre que $\varepsilon > 0$ sea suficientemente pequeño, podemos elegir

$$c_\varepsilon = (1 + \varepsilon^\beta)^{-1} c.$$

(Notemos que β depende sólo de c). Ahora definimos

$$v_\varepsilon(x, t) = \psi_\varepsilon(x + a_\varepsilon - c_\varepsilon t)$$

con $a_\varepsilon = \tau_\varepsilon/z_2$. Tenemos pues que v_ε verifica

- $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_{z_2}$,
- $v_\varepsilon(\cdot, 0) \leq v_{z_2}(\cdot, 0)$,
- la densidad u_ε asociada a v_ε es solución de (3.22).

Por tanto v_{z_2} es solución minimal. ■

Lema 3.4.

Si $c > 2$, el frente lineal $v_{z_1}(x, t) = z_1(ct - x)_+$ con $z_1 = \frac{1}{2}(c - \sqrt{c^2 - 4})$ no es una solución minimal.

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos la O.V. crítica $v_*(x, t) = (2t - x)_+$. Primero, puesto que $z_1 < 1$,

$$v_{z_1}(x, 0) \leq v_*(x, 0) \quad \text{en } \mathbf{R}.$$

Pero al ser $c > 2$, v_{z_1} avanza más rápidamente que v_* y

$$v_{z_1}(x, t) > v_*(x, t) \quad \text{para } (1 + z_1)t < x < ct, t > 0. \quad \blacksquare$$

Lema 3.5.

Si $c > 2$ las O.V. intermedias v_k de perfil (3.20) no son soluciones minimales.

DEMOSTRACIÓN:

La prueba es análoga a la anterior comparando con v_* , pero aquí la comparación no puede ser global.

Como $-(v_k)_x(0,0) = z_1 < 1$ existe una constante $a > 0$ suficientemente pequeña tal que

$$v_k(x,0) < v_*(x,0) \quad \text{para } -a \leq x.$$

Por otro lado, si $t_0 > 0$ es también suficientemente pequeño, tenemos

$$v_k(-a,t) \leq v_*(-a,t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_0.$$

Ahora comparamos en $A = (-a, \infty) \times (0, t_0)$. Si v_k fuese minimal podríamos construir una sucesión aproximante $v_{k,\epsilon}$ verificando $v_{k,\epsilon} \leq v_*$ en A , por lo que el límite sería $v_k \leq v_*$, en contradicción con la propagación de la interfase (de nuevo v_k avanza más deprisa que v_*). ■

OBSERVACIÓN:

El argumento usado en esta última demostración nos provee de un *principio de comparación local* para soluciones minimales que será utilizado más adelante en diversas situaciones.

Para completar la demostración del Teorema 3.2 probaremos en el siguiente capítulo que v_* es también una solución minimal.

CAPÍTULO IV

ESTUDIO UNIDIMENSIONAL

4.1. Introducción

4.2. Propagación finita y velocidad mínima

4.3. La ecuación de la interfase. Comportamiento asintótico

4.4. Concavidad

4.5. Propagación para $m + p \neq 2$

4.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la propagación de soluciones del problema de Cauchy (P) en dimensión espacial $N = 1$. En el Lema 2.7 establecimos la propiedad de propagación finita para las soluciones minimales en el caso $m + p \geq 2$ y estudiaremos aquí la existencia de una *frontera libre o interfase* que separa la región donde la solución es positiva de la región donde es cero. Nos dedicaremos especialmente a describir con detalle el comportamiento de esta interfase.

Utilizaremos en lo que sigue, y de forma esencial, las soluciones de tipo onda viajera construidas en el capítulo anterior. Por ello es fácil intuir, viendo el gráfico de existencia de las O.V. en el Teorema 3.1, que el caso crítico $m + p = 2$ presentará un comportamiento notable. La mayor parte de este capítulo estará dedicada a este caso crítico. En la Sección 4.5 mostraremos cómo el estudio de la propagación en el caso supercrítico $m + p > 2$ se reduce a aplicar las técnicas desarrolladas en el caso crítico. Sin embargo el comportamiento en este rango se parecerá más a la E.M.P. Finalmente el caso subcrítico $m + p < 2$ carece de interés en el contexto de la propagación finita debido al Lema 2.6.

Para describir el comportamiento de la frontera libre consideramos un dato inicial $u_0 \in E_0$ (E_0 definido en (1.7)) y la solución minimal u del problema (P) asociada. Para cada $t \geq 0$ definimos el conjunto de positividad de la solución

$$(4.1) \quad P(t) = \{x \in \mathbf{R} : u(x, t) > 0\}.$$

Supondremos siempre por simplicidad que u_0 es continua y que $P(0)$ está acotado por la derecha.

Una consecuencia del Lema 2.7 es que para cada $t \geq 0$ el conjunto $P(t)$ está también acotado por la derecha, y aparecerá por tanto una curva

$$(4.2) \quad s(t) = \sup P(t),$$

que es lo que denominamos *interfase derecha*. De la misma forma se puede estudiar una posible interfase izquierda. Supondremos también por traslación $s(0) = 0$.

Existe una gran cantidad de literatura referente al estudio de la interfase en dimensión uno para la E.M.P. (véase por ejemplo [A1] y sus referencias).

En primer lugar, es fácil probar, igual que en la EMP, que la curva $x = s(t)$ es una función continua y creciente (cf. Teorema 4.1, Lema 4.10).

Sin embargo la particularidad de la ecuación (3.2) y en el caso crítico $m+p = 2$ radica en la existencia de una velocidad mínima de propagación. Consideraremos siempre la ecuación (3.2) normalizada, $\lambda = 1/m$. Probaremos en el Teorema 4.2 que $s(t)$ se propaga con velocidad al menos $c^* = 2$.

Por otro lado, el mecanismo de la propagación se explica mediante una relación entre la velocidad de la interfase y la pendiente de la solución cerca de ella. En la E.M.P. esta relación es

$$(4.3) \quad s'(t) = -v_x(s(t), t),$$

donde $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$ es la presión asociada a u y el término de la derecha se entiende como $\lim_{x \nearrow s(t)} -v_x(x, t)$.

En el marco del flujo de un fluido a través de un medio poroso la función del segundo miembro representa la *velocidad local* de difusión del fluido, y (4.3) expresa el hecho de que la difusión es la única causa del movimiento del frente. Es lo que se denomina *ecuación de la interfase*.

Para nuestra ecuación (3.2) probaremos también una ecuación para la interfase que relacione las dos funciones de (4.3). Si $m + p = 2$ los dos efectos, la reacción y la difusión, son del mismo orden, y cada uno implicará la presencia de un término en la ecuación. Por otro lado, la ecuación llevará también implícito el fenómeno de propagación con velocidad mínima.

En el Teorema 4.5 probaremos la ecuación de la interfase siguiente

$$(4.4) \quad s'(t) = -v_x + \frac{1}{-v_x}$$

$$(4.5) \quad -v_x(s(t), t) \geq 1 \quad \text{para todo } t > 0,$$

siempre que el término $-v_x$ esté definido.

En el caso $m+p > 2$ el efecto de la difusión es más fuerte que el de la reacción, y se verifica (4.3) (cf. Lema 4.11). La velocidad mínima es cero.

Otro fenómeno que presenta la interfase en la E.M.P. es la existencia de un tiempo $0 \leq t^* < \infty$ llamado *tiempo de espera*, que depende del comportamiento del dato inicial cerca de la frontera, tal que la interfase se mantiene estacionaria hasta ese tiempo, es decir

$$s(t) \equiv 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq t^*.$$

El Teorema 4.2 implica que no existe tiempo de espera para las interfases del problema (P) si $m+p=2$. De hecho $s'(t) \geq 2$ para $t \geq 0$. Se puede demostrar también que no existe tiempo de espera en el caso $m+p > 2$ y que se tiene $s'(t) > 0$ para $t > 0$, pero pospondremos la prueba hasta tratar el caso más general de dimensión $N \geq 1$ donde obtendremos un control más preciso del crecimiento de la interfase (cf. Teorema 5.5).

Los mismos argumentos de comparación empleados en la demostración de la fórmula (4.4) servirán también para describir el comportamiento asintótico de la interfase para $m+p=2$ (cf. Teorema 4.6). En particular probaremos que si el dato inicial tiene soporte compacto, la pendiente de las interfases es asintóticamente ± 2 . Más aún, si el dato inicial es suficientemente plano, estas interfases son exactamente dos rectas con pendiente ± 2 (cf. Corolario 4.7).

En la Sección 4.4 estudiaremos una propiedad de concavidad tanto para las soluciones minimales de (P) como para las interfases. Esta concavidad garantizará también la existencia del límite en (4.4). Obtendremos una estimación superior para v_{xx} en términos de la concavidad v_0'' del dato inicial.

Supongamos que v_0 tiene soporte compacto y sean $s_i(t)$, $i = 1, 2$ las interfaces que delimitan el conjunto de positividad $P(t)$. Si el dato inicial verifica

$$v_0''(x) \leq -c_0 < 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(P(0)),$$

Bénilan y Vazquez prueban en [BV] que la solución de la E.M.P. verifica para todo $t > 0$,

$$(4.6) \quad v_{xx} \leq \frac{-c_0}{1 + (m+1)c_0 t} \quad \text{en } P(t),$$

y también

$$(4.7) \quad (-1)^i [s_i''(t) + \frac{mc_0}{1 + (m+1)c_0 t} s_i'(t)] \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, \infty).$$

En el Teorema 4.8 demostraremos que la misma estimación (4.6) es cierta para las soluciones minimales del problema (P) con $m + p = 2$, mientras que en lugar de (4.7) tenemos aquí

$$(4.8) \quad (-1)^i s_i''(t) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, \infty).$$

El Corolario 4.7 muestra que (4.8) no se puede mejorar.

Probaremos también la concavidad para el caso $m + p > 2$ en el Lema 4.12.

4.2. Propagación finita y velocidad mínima

Fijado $m > 1$ consideremos el problema

$$(4.9) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + \frac{1}{m}u^{2-m} \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Sea $u_0 \in E_0$ continua tal que $\sup\{x \in \mathbf{R} : u_0(x) > 0\} = 0$. Consideremos la solución minimal u de (4.9) y sea $v = \frac{m}{m-1}u^{m-1}$ la presión asociada. Sea $x = s(t)$ la interfase de u definida en (4.1), (4.2). Primero probaremos el siguiente resultado

TEOREMA 4.1.

Existe una función continua $d : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con $d(0) = 0$ tal que para todo $t_2 \geq t_1 \geq 0$ se tiene

$$(4.10) \quad 0 \leq s(t_2) - s(t_1) \leq d(t_2 - t_1) < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN:

Utilizaremos comparación con los frentes lineales obtenidos en §3.2.

Sea $x_1 = s(t_1)$, $\xi \leq x_1$ y pongamos

$$M = \max_{x \geq \xi} v(x, t_1), \quad N = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} v(\xi, t), \quad L = \max\{M, N\}.$$

Consideremos los frentes lineales

$$v_{z,\delta}(x, t) = z[c(t - t_1) - (x - x_1 - \delta)]_+,$$

donde $\delta > 0$, $z = L/\delta$, $c = g(z) = z + 1/z$. Tenemos,

$$\begin{aligned} v_{z,\delta}(x, t_1) &\geq \frac{M}{\delta}(\delta + x_1 - x) \geq M \geq v(x, t_1) && \text{para } \xi \leq x \leq x_1, \\ v_{z,\delta}(x, t_1) &\geq 0 = v(x, t_1) && \text{para } x \geq x_1, \\ v_{z,\delta}(\xi, t) &\geq \frac{N}{\delta}(\delta + x_1 - \xi) \geq N \geq v(\xi, t) && \text{para } t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned}$$

Aplicando el principio de comparación local a ambas soluciones v y $v_{z,\delta}$ en la región $A = (\xi, \infty) \times (t_1, t_2)$, tenemos

$$v_{z,\delta}(x, t) \geq v(x, t)$$

en A . Por tanto, la comparación entre las interfases de ambas funciones implica

$$s(t) \leq c(t - t_1) + x_1 + \delta$$

para todo $t_1 \leq t \leq t_2$, es decir

$$s(t_2) - s(t_1) \leq g(L/\delta)(t_2 - t_1) + \delta.$$

Ahora elegimos δ para minimizar esta cantidad y obtenemos

$$(4.11) \quad s(t_2) - s(t_1) \leq k(t_2 - t_1)^{1/2}.$$

El hecho de que s es creciente se sigue de la misma propiedad para la E.M.P. (véase [A1]), ya que las soluciones de nuestro problema son supersoluciones de aquella ecuación. ■

Mostraremos ahora que el soporte de la solución no sólo se expande, sino que lo hace con una velocidad no menor que $c^* = 2$.

TEOREMA 4.2.

Para todo $t_2 > t_1 \geq 0$ se tiene

$$(4.12) \quad \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \geq 2.$$

DEMOSTRACIÓN:

Etapa 1. Comenzaremos construyendo O.V. locales para la ecuación aproximada (3.22) con velocidades por debajo de la velocidad mínima $c^* = 2$.

Mediante un cambio de escala reduciremos el estudio de la ecuación (3.22) con la reacción aproximada f_ϵ a una reacción fija f_1 . Después rescalaremos de nuevo las O.V. construidas.

Sea

$$(4.13) \quad f(s) = f_1(s) = \begin{cases} \frac{1}{m}s & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ \frac{1}{m}s^{2-m} & \text{si } s \geq 1; \end{cases}$$

y la ecuación

$$(4.14) \quad u_t = (u^m)_{xx} + f(u).$$

Pongamos $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ con $0 < c < 2$, $c \approx 2$. Con X e Y como en (3.10) buscamos trayectorias solución de la ecuación

$$\frac{dY}{dX} = c - mX^{m-1}f(X)Y^{-1} \equiv F(X, Y)$$

para $X \geq 0$ tales que $Y(0) = 0$.

Como $f(X) = \frac{1}{m}X$ para $X \approx 0$, nos encontramos en el caso $m + p > 2$ del Teorema 3.1 y sabemos que existe una trayectoria $Y = Y(X)$ que entra en el origen con pendiente $Y'(0) = c$ y que verifica además

$$(4.15) \quad 0 \leq Y(X) \leq cX$$

Sin embargo $f(X) = \frac{1}{m}X^{2-m}$ para $X \geq 1$, por lo que el comportamiento de la trayectoria se parecerá, al alejarse del origen, al caso $m + p = 2$, $c < 2$, y ésta pasará al cuarto cuadrante y posteriormente al tercero. Para precisar este comportamiento utilizaremos comparación con dos funciones test en los dos cuadrantes, $X, Y \geq 0$ e $Y \leq 0 \leq X$. Sea además $Y = Y_1(X)$ la parte de trayectoria en el primer cuadrante e $Y = Y_2(X)$ la parte en el cuarto cuadrante.

Consideremos la función

$$H(X) = MX - LX^\alpha$$

donde $M, L > 0$ y $\alpha > 1$ son constantes a determinar, y compararemos en el dominio $X \geq 1$ donde H sea positiva, es decir $X \leq (M/L)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. La primera restricción es pues $M > L$.

En ese intervalo tenemos $F(X, Y) = c - X/Y$, por lo que

$$\begin{aligned} H' - F(X, H) &= \\ &= \frac{X}{H(X)} \left[L^2 \alpha X^{2(\alpha-1)} - L(\alpha M + M - c)X^{\alpha-1} + M(M - c) + 1 \right]. \end{aligned}$$

El factor entre corchetes es una función cuadrática en $X^{\alpha-1}$ con discriminante

$$D = (\alpha M + M - c)^2 - 4\alpha(M(M - c) + 1).$$

Si elegimos $1 < \alpha < 4/c^2$ y $\delta = M - c > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que este discriminante es negativo, y por tanto

$$H'(X) - F(X, H) > 0$$

para $1 \leq X < (M/L)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Por otro lado queremos tener

$$H(1) = M - L \geq c \geq Y_1(1),$$

así que elegimos $L = M - c$. Concluimos entonces, por comparación,

$$(4.16) \quad Y_1(X) \leq (c + \delta)X - \delta X^\alpha$$

para $1 \leq X < B \leq B_1 = ((c + \delta)/\delta)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, y con

$$Y_1(B) = 0.$$

De manera análoga obtenemos que la curva Y_2 que parte del punto $(B, 0)$ verifica

$$(4.17) \quad Y_2(X) \geq (c+1)X - D_1$$

para $0 \leq X \leq B$, donde $D_1 = (c+2)B_1$. En particular $Y_2(0) = -D > -D_1$ y $Y_2'(0) = c$.

Finalmente es fácil ver, usando las estimaciones (3.35), (3.36), (3.37) y la relación diferencial (3.11), que la trayectoria $Y = Y_1 \cup Y_2$ recorre un intervalo finito del parámetro ξ , como en la demostración del Teorema 3.1, o el Lema 3.3.

Una vez completada la trayectoria, podemos ver la forma del correspondiente perfil φ ó ψ a través de (3.13). En ambas variables es una parábola invertida definida en un intervalo finito (ξ_0, ξ_1) , y tenemos $\varphi \leq B_1$. Podemos suponer por traslación $\xi_1 = 0$.

Etapa 2. Ahora definimos las ondas rescaladas. Para cada $\varepsilon > 0$ consideramos la función

$$(4.18) \quad \varphi_\varepsilon(\xi) = \varepsilon \varphi(\varepsilon^{1-m} \xi)$$

que verifica

$$(4.19) \quad \begin{cases} (\varphi_\varepsilon^m)'' + c\varphi_\varepsilon' + f_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 0 & \text{para } \xi_0 \leq \xi \leq 0, \\ \varphi_\varepsilon(\xi_0) = \varphi_\varepsilon(0) = 0, \end{cases}$$

donde $f_\varepsilon(s) = \varepsilon^{2-m} f_1(s/\varepsilon)$ es la misma función que en (1.33). Además tenemos

$$(4.20) \quad \varphi_\varepsilon \leq B_1 \varepsilon, \quad |\xi_0| \leq k\varepsilon^{m-1}.$$

Etapa 3. Observando que el cambio de escala (4.18) es una reducción tanto de la función como de su soporte, utilizaremos estas pequeñas ondas para comparar con nuestra solución por debajo.

Dado el dato inicial u_0 supongamos que es positivo en un intervalo, digamos $u_0(x) > 0$ para $r < x < 0$. Fijemos $x_1 \in (r, 0)$. Tal y como hemos construido φ_ε (en especial por (4.20)), es claro que existe $\varepsilon > 0$ y $x_2 \in (r, x_1)$ tales que

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x - x_1) &< u_0(x) && \text{para } x_2 < x < x_1, \\ \varphi_\varepsilon(0) &= \varphi_\varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}$$

Pero ahora observamos que las funciones φ_ε son sólo soluciones locales, es decir, las ondas correspondientes $u_\varepsilon(x, t) = \varphi_\varepsilon(x - ct)$ verifican la ecuación en (4.9) sólo en la banda $\xi_0 < x - ct < 0$, y dejan de verificarla en la frontera de esta región. Por tanto tenemos que probar un principio de comparación ad hoc en esta región.

Lema 4.3.

En las hipótesis anteriores

$$(4.22) \quad u(\xi + ct, t) \geq \varphi_\varepsilon(\xi - x_1)$$

para todo $t > 0$, $x_2 \leq \xi \leq x_1$.

DEMOSTRACIÓN:

Primero compararemos φ_ε con u_δ donde u_δ es, para cada $\delta > 0$, la única solución (positiva y regular) del problema

$$(4.23_\delta) \quad \begin{cases} (u_\delta)_t = (u_\delta^m)_{xx} + f_\varepsilon(u_\delta) & \text{en } \mathbf{Q} \\ u_\delta(x, 0) = u_0(x) + \delta & \text{en } \mathbf{R}. \end{cases}$$

Si (4.22) es cierto para la solución de (4.23_δ), también lo será, pasando al límite para la única solución de (4.23_{δ=0}). Como nuestra solución u es una supersolución de este último problema, concluimos la demostración. Nos centraremos pues en probar (4.22) para u_δ , $\delta > 0$.

Pongamos

$$\begin{aligned} w(\xi, t) &= u_\delta(\xi + ct, t) \\ w_\varepsilon(\xi, t) &= \varphi_\varepsilon(\xi - x_1). \end{aligned}$$

A partir de (4.21) y (4.23_δ), vemos que ambas funciones satisfacen la ecuación

$$z_t = (z^m)_{\xi\xi} + cz_\xi + f_\varepsilon(z)$$

en sentido débil. Por tanto la diferencia $w_\varepsilon - w$ satisface la identidad

$$(4.24) \quad \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)(t)\eta(t) = \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)(0)\eta(0) + \\ + \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \{(w_\varepsilon^m - w^m)\eta_{\xi\xi} - c(w_\varepsilon - w)\eta_\xi + [f_\varepsilon(w_\varepsilon) - f_\varepsilon(w)]\eta\}(s) ds.$$

Consideraremos como función test una aproximación regular de la función $\text{sign}(w_\varepsilon^m - w^m)$. Por ejemplo sea $j = j_n \in C^\infty(\mathbf{R})$ creciente y tal que

$$j(s) = 1 \quad \text{si } s \geq 1/n, \quad j(s) = 0 \quad \text{si } s \leq 1/2n,$$

y pongamos $\eta = j(w_\varepsilon^m - w^m)$.

Primero vamos a comparar los valores de w_ε y w en la frontera de nuestro dominio.

En $t = 0$, $x_2 \leq \xi \leq x_1$ tenemos

$$w(\xi, 0) = u_\delta(\xi, 0) = u_0(\xi) + \delta$$

$$w_\varepsilon(\xi, 0) = \varphi_\varepsilon(\xi - x_1),$$

por lo que, por (4.21)

$$w_\varepsilon(\xi, 0) < w(\xi, 0).$$

En $\xi = x_1, x_2$, $t \geq 0$ se verifica

$$w(x_1, t), w(x_2, t) \geq \delta > 0$$

$$w_\varepsilon(x_1, t) = w_\varepsilon(x_2, t) = 0.$$

Ahora introducimos los datos frontera en (4.24), y pasamos al límite $n \rightarrow \infty$ utilizando el Lema de Fatou, obteniendo, formalmente

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w) j(w_\varepsilon^m - w^m)(0) \longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)_+(0) = 0, \\
 & \bullet \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon^m - w^m) j(w_\varepsilon^m - w^m)_{\xi\xi} = \\
 & \quad = - \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} |(w_\varepsilon^m - w^m)_\xi|^2 j'(w_\varepsilon^m - w^m)_{\xi\xi} \leq 0, \\
 & \bullet -c \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w) j(w_\varepsilon^m - w^m)_\xi = c \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)_\xi j(w_\varepsilon^m - w^m) \\
 & \quad \longrightarrow c \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} [(w_\varepsilon - w)_+]_\xi = c \int_0^T (w_\varepsilon - w)_+|_{x_1}^{x_2} = 0, \\
 & \bullet \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} [f_\varepsilon(w_\varepsilon) - f_\varepsilon(w)] j(w_\varepsilon^m - w^m) \longrightarrow \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} [f_\varepsilon(w_\varepsilon) - f_\varepsilon(w)]_+ \leq \\
 & \quad \leq k \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)_+.
 \end{aligned}$$

Como conclusión tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)_+(t) \leq k \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} (w_\varepsilon - w)_+(s) ds.$$

que implica

$$w_\varepsilon(\xi, t) \leq w(\xi, t) \quad \text{para } x_2 \leq \xi \leq x_1, t \geq 0. \quad \blacksquare$$

Etapla 4. Con este lema podemos completar la demostración del Teorema 4.2. Las desigualdades (4.22) y (4.21) implican

$$s(t) \geq ct - x_1,$$

donde $c < 2$ puede ser cualquier velocidad próxima a 2, y $x_1 < 0$ puede estar todo lo cercano al origen que queramos. Deducimos entonces (4.22) para $t_1 = 0$. El caso general se obtiene mediante la traslación $t \rightarrow t - t_1$, $x \rightarrow x - s(t_1)$. \blacksquare

Para finalizar esta sección vamos a utilizar las O.V. locales construidas en la demostración del Teorema 4.2 para completar la clasificación de las O.V. globales del Teorema 3.1. Sólo nos quedaba por tratar el caso v_* .

TEOREMA 4.4.

El frente lineal $v_(x, t) = (2t - x)_+$ es una solución minimal.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea \underline{v} la solución minimal correspondiente al dato inicial $v_*(x, 0) = (-x)_+$. Tenemos que probar que $\underline{v} \geq v_*$ en \mathbf{Q} .

Sea $x_0 < 0$ un punto fijo. Consideremos la O.V. local de perfil ψ construido en el teorema anterior con velocidad $c < 2$, $c \approx 2$. Como $-\psi'(0) = c > 1$ y ψ está acotado, existen tres puntos $x_1 < x_2 < x_3 < 0$ tales que

$$\hat{\psi}(x) \equiv \psi(x - x_3) \leq -x$$

para todo $x_1 \leq x \leq x_3$ y

$$\hat{\psi}(x_1) = \hat{\psi}(x_3) = 0$$

$$\hat{\psi}(x_2) = -x_2.$$

Consideremos ahora el cambio de escala correspondiente a la variable presión en (4.18),

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{m-1} \hat{\psi}(\varepsilon^{1-m} x).$$

Tomando $\varepsilon = (x_0/x_2)^{\frac{1}{m-1}}$ tenemos

$$\psi_\varepsilon(x) \leq -x$$

para todo $x_0 x_1/x_2 \leq x \leq x_0 x_3/x_2$ y

$$\psi_\varepsilon(x_0) = -x_0$$

$$\psi_\varepsilon(x_0 x_1/x_2) = \psi_\varepsilon(x_0 x_3/x_2) = 0.$$

Entonces podemos aplicar el Lema 4.3 para obtener

$$\underline{v}(x_0 + ct, t) \geq \psi_\varepsilon(x_0) = -x_0 = v_*(x_0 + 2t, t)$$

para todo $t \geq 0$. Finalmente hacemos $c \nearrow 2$. ■

4.3. Ecuación de la interfase. Comportamiento asintótico

Probaremos en esta sección la ecuación que verifica la interfase $x = s(t)$ de la solución minimal de (4.9), así como el comportamiento asintótico de la misma.

En las hipótesis de la sección anterior, sea (x_0, t_0) un punto de la interfase y supongamos que se verifica

$$(4.25) \quad - \lim_{x \nearrow x_0} v_x(x, t_0) = z(t_0) < \infty.$$

TEOREMA 4.5.

$$(4.26) \quad s'(t_0) = \begin{cases} g(z(t_0)) \equiv z(t_0) + \frac{1}{z(t_0)} & \text{si } z(t_0) \geq 1 \\ 2 & \text{si } 0 \leq z(t_0) \leq 1. \end{cases}$$

(Escribimos siempre $s'(t)$ en lugar de $D^+s(t)$ por simplicidad).

En el siguiente capítulo veremos que en realidad la situación $-v_x < 1$ no puede darse para $t > 0$, y probaremos (4.4), (4.5) en la Proposición 5.2, como una aplicación de la solución minimal absoluta allí construida. Como consecuencia tenemos que la ecuación de la interfase para las soluciones minimales del problema crítico (4.9) queda representada por la rama derecha de la curva $c = g(z)$ de la Fig. 3.1.

DEMOSTRACIÓN:

La demostración utilizará comparación con los frentes lineales (3.7) (véase Knerr [Kn] para la E.M.P.).

Sea primero $z = z(t_0) > 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon < x_0$ tal que

$$v_{z-\varepsilon}(x - x_0, 0) \leq v(x, t_0) \leq v_{z+\varepsilon}(x - x_0, 0)$$

para todo $x \geq x_\varepsilon$, donde $v_r(x, t) = r[g(r)t - x]_+$. Además existe $\delta > 0$ tal que

$$v_{z-\varepsilon}(0, t - t_0) \leq v(x_0, t) \leq v_{z+\varepsilon}(0, t - t_0)$$

para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$. Ahora notemos que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, $v_{z-\varepsilon}$ es solución minimal, y como v también lo es, podemos aplicar el principio de comparación local en $A = (x_\varepsilon, \infty) \times (t_0, t_0 + \delta)$ y obtener

$$v_{z-\varepsilon}(x - x_0, t - t_0) \leq v(x, t) \leq v_{z+\varepsilon}(x - x_0, t - t_0)$$

en A . Mirando a la interfase de estas tres funciones, tenemos

$$g(z - \varepsilon)\delta + s(t_0) \leq s(t_0 + \delta) \leq g(z + \varepsilon)\delta + s(t_0),$$

por lo que haciendo $\delta \rightarrow 0$

$$g(z - \varepsilon) \leq D^+s(t_0) \leq g(z + \varepsilon),$$

y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concluimos $D^+s(t_0) = g(z)$.

Para $z \leq 1$ utilizamos el mismo argumento con el frente lineal $v_{1+\varepsilon}$ y obtenemos $D^+s(t_0) \leq 2$. La estimación inferior se deduce del Teorema 3.7. ■

En cuanto al comportamiento asintótico de la interfase probaremos el siguiente resultado.

TEOREMA 4.6.

Supongamos que se verifica

$$(4.27) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{v_0(x)}{|x|} = z < \infty.$$

Entonces la interfase $x = s(t)$ es asintóticamente lineal y $s(t)/t \rightarrow c$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde

$$(4.28) \quad c = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \geq 1 \\ 2 & \text{si } z \leq 1. \end{cases}$$

En particular si v_0 tiene soporte compacto la pendiente asintótica de las interfaces derecha e izquierda es ± 2 .

DEMOSTRACIÓN:

La prueba sigue el mismo esquema de comparación que el teorema anterior.

Si $z > 1$, para cada $\varepsilon > 0$ existen dos constantes $a_\varepsilon, b_\varepsilon > 0$ tales que

$$v_{z-\varepsilon}(x + a_\varepsilon, 0) \leq v(x, 0) \leq v_{z+\varepsilon}(x - b_\varepsilon, 0)$$

en \mathbf{R} . Por tanto, y usando el principio de comparación (esta vez en todo \mathbf{Q}) tenemos

$$v_{z-\varepsilon}(x + a_\varepsilon, t) \leq v(x, t) \leq v_{z+\varepsilon}(x - b_\varepsilon, t),$$

de donde se sigue

$$g(z - \varepsilon)t - a_\varepsilon \leq s(t) \leq g(z + \varepsilon)t + b_\varepsilon$$

para todo $t > 0$. Finalmente

$$g(z - \varepsilon) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{t} \leq g(z + \varepsilon),$$

y hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$. El caso $z \leq 1$ se concluye como en el Teorema 4.5. ■

Si el dato inicial es suficientemente plano, el mismo método de comparación nos da una descripción exacta de las interfaces, que resultan ser dos líneas rectas.

Corolario 4.7.

Supongamos que el dato inicial v_0 tiene soporte compacto $\overline{P(0)} = [a, b]$ y que además verifica

$$(4.29) \quad v_0(x) \leq \min\{x - a, b - x\}.$$

Entonces las interfaces $s_i(t)$, $i = 1, 2$ son dos líneas rectas,

$$(4.30) \quad \begin{aligned} s_1(t) &= a - 2t \\ s_2(t) &= b + 2t. \end{aligned}$$

4.4. Concavidad

Sea u la solución minimal del problema crítico (4.9) y sea v su presión. Supongamos que v_0 tiene soporte compacto y que es cóncava, más precisamente

$$(4.31) \quad v_0''(x) \leq -c_0 < 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(P(0)).$$

TEOREMA 4.8.

i) $v(\cdot, t)$ es cóncava para cada $t > 0$ y

$$(4.32) \quad v_{xx}(x, t) \leq \frac{-c_0}{1 + (m+1)c_0 t} \quad \text{en } P(t).$$

ii) Las interfaces $s_i(t)$ son cóncavas,

$$(4.33) \quad (-1)^i s_i''(t) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, \infty).$$

Una demostración directa de esta estimación estudiando la ecuación que satisface v_{xx} tropezaría con la singularidad que presenta este término a través de un punto (x_0, t_0) de la frontera libre, debido al salto de la primera derivada v_x (en función de $|s'(t_0)|$) en $x = x_0$. Utilizaremos en su lugar una técnica empleada en [BV] para demostrar la concavidad de las soluciones de la E.M.P. que se basa en una fórmula de Lie-Trotter-Kato de composición de semigrupos [BI].

La demostración de [BV] se basa en la estrategia siguiente

- i) Descomponer el problema en dos problemas independientes y establecer una estimación para la concavidad de cada una de las soluciones.
- ii) Comprobar que existe una fórmula de composición que produce la solución del problema completo a partir de las dos soluciones separadas.
- iii) Componer las estimaciones obtenidas para deducir una estimación de la concavidad de la solución.

Seguiremos aquí el mismo esquema y descompondremos el problema (4.9) en dos problemas independientes, tomando por separado el término de difusión y el término de reacción.

Para el primer problema la estimación de la concavidad (4.6) viene dada precisamente por el trabajo citado [BV]. El segundo problema se puede integrar explícitamente y obtener también fácilmente la estimación. Sin embargo, en el momento de componer las dos soluciones para recuperar la solución de (4.9) observamos que una condición necesaria es que el término de reacción sea una función lipschitziana (véase [BI]).

El primer paso que seguiremos será sustituir el problema (4.9) por el problema aproximado (P_ε) con reacción lipschitziana f_ε . Entonces descompondremos este problema en dos problemas. Obtendremos estimaciones de la concavidad de las soluciones y de la solución que resulte de la composición. Finalmente estas estimaciones serán independientes de ε y serán válidas para el límite de las soluciones aproximadas, que es precisamente la solución minimal de (4.9).

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos el problema de reacción-difusión

$$(P_{rd}) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + f(u) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

con $f(s) = f_\varepsilon(s) = \frac{1}{m} \min\{\varepsilon^{1-m}s, s^{2-m}\}$, y sean también los problemas independientes

$$(P_d) \quad \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

$$(P_r) \quad \begin{cases} u_t = f(u) \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases}$$

Consideremos los semigrupos $S_d(t)$ y $S_r(t)$ asociados a los problemas (P_d) y (P_r) , es decir, los operadores que asocian a u_0 la solución de (P_d) y (P_r) respectivamente,

$$(4.34) \quad S_d(t)(u_0)(x) = u_d(x, t), \quad S_r(t)(u_0)(x) = u_r(x, t).$$

Fijemos $t > 0$ y definamos para cada $n, j \in \mathbf{N}$, $n \geq j$, la función

$$(4.36) \quad u_{(n,j)} = [S_d(t/n)S_r(t/n)]^j(u_0)$$

que resulta de aplicar alternadamente ambos semigrupos (fórmula de composición de Lie-Trotter-Kato).

Observando que el operador

$$(4.36) \quad -(u^m)_{xx} - f(u) + ku$$

es un operador m -acretivo en $L^1(\mathbf{R})$ si k es mayor que la constante de Lipschitz de f (cf. [C]), el Teorema 1 de [BI] nos asegura que el límite

$$(4.37) \quad \hat{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{(n,n)}$$

está bien definido y produce la solución del problema compuesto (P_{rd}).

Sea ahora $v_{(n,j)} = \frac{m}{m-1} u_{(n,j)}^{m-1}$ y $\hat{v} = \frac{m}{m-1} \hat{u}^{m-1}$. Obtendremos cotas para la concavidad

$$(4.38) \quad \hat{y} = \sup_{P(t)} \hat{v}_{xx}$$

estimando la concavidad en cada iteración

$$(4.39) \quad y_{(n,j)} = \sup_{P(t)} (v_{(n,j)})_{xx}.$$

Para ello estudiamos los problemas (P_d) y (P_r) por separado.

En primer lugar tenemos que en el problema (P_d) la presión v_d verifica (4.6) ([BV; Teor.1]). Por otro lado, la presión v_r asociada a (P_r) viene dada para cada $x \in P(0)$ por la fórmula implícita

$$(4.40) \quad t_+ = \int_{v_0(x)}^{v_r(x,t)} \frac{ds}{h(s)},$$

donde

$$h(s) = m \left(\frac{m-1}{m} s \right)^{\frac{m-2}{m-1}} f \left(\left(\frac{m-1}{m} s \right)^{\frac{1}{m-1}} \right) = \min \left\{ \left(\frac{m-1}{m} \right) \varepsilon^{1-m} s, 1 \right\}.$$

Además $P(t) \equiv P(0)$.

De aquí se obtiene

$$(v_r)_{xx} = [h'(v_r) - h'(v_0)] \frac{h(v_r)(v_0')^2}{h^2(v_0)} + \frac{h(v_r)}{h(v_0)} v_0''.$$

Observando que $h(s)$ es positiva, creciente y cóncava tenemos

$$(4.41) \quad (v_r)_{xx}(x, t) \leq v_0''(x) \leq -c_0.$$

Con estas estimaciones tenemos, utilizando (4.36)

$$y_{(n,0)} = -c_0$$

$$y_{(n,j)} = \frac{-c_0}{1 + (m+1)c_0 j t/n}$$

para cada $n \geq j \geq 1$. Pasando al límite, $j = n$, $n \rightarrow \infty$ concluimos

$$\hat{y} = \frac{-c_0}{1 + (m+1)c_0 t}.$$

Estudiaremos ahora la concavidad de la interfase derecha $x = s_2(t)$, que escribiremos para simplificar sin el subíndice. La interfase izquierda se trata de la misma forma.

Sea $t_0 > 0$ fijo y sea $-v_x(s(t_0), t_0) = z$. Si $z \leq 1$, como $v_{xx} < 0$ podemos aplicar el Corolario 4.7 y tenemos

$$s(t) = s(t_0) + 2t$$

para $t \geq t_0$, y no hay nada que demostrar. Supongamos entonces $z > 1$.

En primer lugar tenemos, por el Teorema 4.4

$$s'(t_0) = g(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Consideremos entonces el frente lineal

$$v_z(x, t) = z[g(z)(t - t_0) - (x - s(t_0))]_+$$

cuya interfase es, para $t \geq t_0$

$$\eta(t) = s(t_0) + g(z)(t - t_0).$$

Como v es cóncava se tiene $v(x, t_0) \leq v_z(x, t_0)$, y por ser solución minimal, $v(x, t) \leq v_z(x, t)$ para todo $t \geq t_0$.

Podemos ahora comparar sus interfases:

$$s(t_0) = \eta(t_0)$$

$$s'(t_0) = g(z) = \eta'(t_0)$$

$$s(t) \leq \eta(t) \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Como conclusión $s''(t_0) \leq 0$. ■

OBSERVACIÓN:

En la ecuación de los medios porosos, la existencia de una estimación de la convexidad de la forma $v_{xx}(\cdot, t) \geq -c(t)$ implica que la interfase $x = s(t)$ es una función regular gobernada por la fórmula (4.3). En nuestro caso no es posible obtener una tal estimación, sin embargo hemos visto que si el dato inicial es cóncavo, se tiene $v_{xx}(\cdot, t) \leq 0$ en $P(t)$, que será suficiente para probar la regularidad de la frontera libre.

Proposición 4.9.

En la hipótesis del Teorema 4.8, las interfases $(-1)^i s_i(t)$ son funciones diferenciables, crecientes y cóncavas, y verifican la ecuación (4.4).

DEMOSTRACIÓN:

La estimación (4.32) implica que la función

$$x \mapsto v_x(x, t) + \frac{c_0 x}{1 + (m+1)c_0 t}$$

es decreciente para cada $t > 0$ fijo. Por tanto existe el límite

$$v_x(s_2(t), t) = \lim_{x \nearrow s_2(t)} v_x(x, t),$$

y verifica (4.5). Por otro lado notemos que una función cóncava y no negativa $v(\cdot, t)$ que no se anula idénticamente necesariamente tiene una derivada negativa en el extremo derecho, y $s_2'(t) > 0$. Esta positividad junto con la concavidad de $v(\cdot, t)$ permite repetir los argumentos de [CF1; Teor.2.2] para establecer la regularidad de $s_2(t)$. La interfase izquierda $s_1(t)$ se trata de la misma forma. ■

4.5. Propagación para $m + p \neq 2$

Aquí distinguiremos cuatro casos de acuerdo a la relación entre los exponentes m y p , a saber, $p < 2 - m$, $2 - m < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

En primer lugar si $p = 1$, mediante la transformación (1.11) el problema (P) se reduce a la E.M.P.

Si $p > 1$, toda solución u del problema (P) es una subsolución local, en un entorno de cada punto $(s(t_0), t_0)$ de la interfase, donde u es pequeña, de la ecuación con $p = 1$, por lo que de nuevo la propagación es la misma que en el caso de los medios porosos.

Si $p < 2 - m$ hemos probado en el Lema 2.6 que toda solución que es positiva en un punto $(x_0, t_0) \in \mathbf{Q}$ es positiva en todo $\mathbf{R} \times (t_0, \infty)$, es decir, se propaga con velocidad infinita. Hagamos notar que es posible una demostración sencilla en dimensión $N = 1$ de este hecho haciendo uso del Teorema 4.2.

Queda entonces por estudiar el caso $1 > p > 2 - m$. En este rango tenemos propagación finita (cf. Lema 2.7), y demostraremos la ecuación para la interfase y la concavidad de la solución. Los tres resultados se reducirán a aplicar las técnicas empleadas en el caso crítico $m + p = 2$, y presentaremos las pruebas sin gran detalle, resaltando sólo las diferencias con ese caso.

Consideremos pues el problema (P) con $N = 1$, $2 - m < p < 1$ y un dato inicial $u_0 \in E_0$ con soporte acotado por la derecha. Sea u la solución minimal, v su presión y $x = s(t)$ la interfase como en (4.2).

Lema 4.10.

La curva $s(t)$ es continua y creciente.

DEMOSTRACIÓN:

Sea (x_0, t_0) un punto en la interfase. Si $\varepsilon, \delta > 0$ son suficientemente pequeños tenemos (por la continuidad de u) $u \leq 1$ en un entorno $A = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (t_0, t_0 + \delta)$, y por tanto u es una subsolución en A de la ecuación (1.1) con exponente crítico $p = 2 - m$. Una comparación local en A muestra que la prueba del Teorema 4.1 es válida en esta situación. ■

Lema 4.11.

Sea $x_0 = s(t_0)$. Entonces

$$(4.42) \quad s'(t_0) = -v_x(x_0, t_0)$$

siempre que el miembro de la derecha exista.

DEMOSTRACIÓN:

Hemos visto en §3.2 que si $m + p \geq 2$, para cada $c > 0$ existe una trayectoria solución de (3.12) que entra en el origen con pendiente c . Esta trayectoria define una O.V. local con perfil ψ_c (en presión), que verifica $-\psi'_c(0) = c$. Podemos entonces aplicar comparación local en la misma forma que en el Teorema 4.5 para obtener (4.42). ■

Lema 4.12.

Si el dato inicial es cóncavo en su dominio, para cada $t > 0$ la solución minimal $v(\cdot, t)$ es también cóncava y verifica (4.32).

DEMOSTRACIÓN:

La demostración del caso $m + p = 2$ es aplicable aquí palabra por palabra sin más que sustituir la función $f(u)$ correspondiente en (P_r) , con lo que obtenemos la fórmula (4.40) con

$$h(s) = \min \left\{ \left(\frac{m-1}{m} s \right) \varepsilon^{p-1}, \left(\frac{m-1}{m} s \right)^{\frac{m+p-2}{m-1}} \right\}.$$

Entonces (4.41) se verifica también pues $h(s)$ es de nuevo positiva, creciente y cóncava ya que $(m + p - 2)/(m - 1) \in (0, 1)$. ■

OBSERVACIÓN:

Para el problema con absorción Vazquez [V] prueba una estimación análoga de la concavidad de la solución. Sin embargo hay que hacer notar que aquí el rango de exponentes en que es válida la concavidad es el opuesto, es decir, $p > 1$.

CAPÍTULO V

ESTUDIO N -DIMENSIONAL

5.1. Introducción

5.2. La solución Minimal Absoluta

5.3. Comportamiento asintótico

5.4. Algunas soluciones explícitas en el caso crítico

5.1. Introducción

Trataremos en este capítulo el caso general del problema (P) en dimensión espacial $N \geq 1$. Nos centraremos en el comportamiento asintótico de las soluciones de (P) y la regularidad y propagación de las interfaces.

Estudiaremos por separado el comportamiento de las soluciones maximales y minimales y en ambos casos encontraremos una solución especial autosemejante que servirá de modelo de comportamiento tanto de las soluciones como de las interfaces.

Haremos uso esencial de la invariancia de la ecuación (1.1) bajo una cierta transformación. Más precisamente, si $u(x, t)$ es una solución de (1.1), la función

$$(5.1) \quad u_k(x, t) = k^{-\alpha} u(k^\beta x, kt)$$

es también una solución para cada $k > 0$ si

$$(5.2) \quad \alpha = \frac{1}{1-p}, \quad \beta = \frac{m-p}{2(1-p)}.$$

Es interesante buscar soluciones de (1.1) invariantes mediante el cambio de escala (5.1), lo que llamaremos *soluciones autosemejantes*. En este caso, si $w = w_k$ para todo $k > 0$ podemos escribir $k = 1/t$ y así w se puede representar como

$$(5.3) \quad w(x, t) = t^\alpha \varphi(xt^{-\beta})$$

donde $\varphi(\xi) = w(\xi, 1)$ es el *perfil* de la solución. Introduciendo (5.3) en (1.1) vemos que φ debe verificar la ecuación elíptica

$$(5.4) \quad \alpha\varphi - \beta\xi \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi^m + \varphi^p.$$

Una solución particular de esta ecuación es $\varphi \equiv \nu_* = (1 - p)^{\frac{1}{1-p}}$. Utilizando el Lema 2.4 probaremos que el comportamiento asintótico de las soluciones maximales del problema (P) viene dado por este perfil constante,

$$(5.5) \quad u(x, t) \approx \nu_* t^\alpha \quad \text{para } t \rightarrow \infty,$$

cf. Proposición 5.3.

Este resultado completa el caso $m + p < 2$ gracias al Teorema 2.1.

Sin embargo si $m + p \geq 2$ existen soluciones no triviales de (5.4) con soporte compacto. En particular encontraremos una solución φ_E de (5.4) que define mediante (5.3) una función E solución *minimal absoluta* de (1.1) en el sentido siguiente:

Si u es una solución no trivial de (1.1) existe $(x_0, t_0) \in \mathbf{Q}$ tal que

$$(5.6) \quad u(x, t) \geq E(x - x_0, t - t_0) \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

cf. Teorema 5.1. La función φ_E es radialmente simétrica, $\varphi_E(\xi) = \varphi(|\xi|)$, con φ decreciente, cóncava y de soporte compacto $[0, \xi_0]$. La solución minimal E es entonces

$$(5.7) \quad E(x, t) = t^\alpha \varphi(|x|t^{-\beta}).$$

Comienza con dato inicial cero, tiene el orden de crecimiento de la solución maximal (1.48),

$$(5.8) \quad E(0, t) = \rho t^\alpha,$$

y su soporte es, para cada $t > 0$, la bola

$$(5.9) \quad P_E(t) = B(0, \xi_0 t^\beta).$$

Las constantes ρ, ξ_0 se pueden estimar inferiormente por el Lema 2.3. Notemos que (5.6), (5.8) y (5.9) implican que toda solución de (P), así como su soporte, tienen un crecimiento mínimo. En particular no existe tiempo de espera (véase §4.1 para $N = 1$).

En el caso crítico $m + p = 2$ tenemos $\beta = 1$ y el soporte $\Omega_E = \{P_E(t), t \geq 0\}$ es un cono, es decir E se propaga con velocidad $\xi_0 > 0$. Por (5.6) toda solución de (1.1) se propaga con velocidad al menos ξ_0 (véase §4.2 para $N = 1$ donde $\xi_0 = 2\sqrt{m}$).

Construiremos la función E mediante un procedimiento de cambio de escala utilizando (5.1), y la misma construcción nos dará el comportamiento asintótico de las soluciones minimales de (P) con dato inicial de soporte compacto

$$(5.10) \quad u(x, t) \approx E(x, t) \quad \text{para } t \rightarrow \infty,$$

$$(5.11) \quad P(t) = \text{sop } u(\cdot, t) \approx B(0, \xi_0 t^\beta) \quad \text{para } t \rightarrow \infty,$$

cf. Teoremas 5.4 y 5.6.

Notemos que si el dato inicial es positivo se verifica (5.5) en lugar de (5.10) y $P(t) \equiv \mathbf{R}^N$ para todo $t > 0$.

Probaremos también una estimación del crecimiento local de la interfase, que nos dará continuidad Hölder en el tiempo, cf. Teorema 5.5.

En la Sección 5.4 construiremos una solución explícita $Z(x, t)$ para el caso crítico $m + p = 2$ en la forma autosemejante (5.3) y con soporte compacto en x . Sin embargo, y sorprendentemente, la solución minimal E no coincide con esta solución explícita.

5.2. La solución Minimal Absoluta

TEOREMA 5.1.

Existe una única solución no trivial $E \in C(\mathbf{Q})$ de la ecuación (1.1) tal que cualquier solución $u \in C(\mathbf{Q})$ de (1.1) con $u(x_0, t_0) > 0$ para algún $(x_0, t_0) \in \mathbf{Q}$ verifica

$$(5.12) \quad u(x, t) \geq E(x - x_0, t - t_0) \quad \text{en } \mathbf{Q}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Etapa 1. Sea $w_0 \neq 0$ una función fija no negativa con soporte compacto y sea $w \in C(\mathbf{Q})$ la solución minimal del problema (P) con dato inicial w_0 .

Para cada $k > 0$ consideramos la función rescalada w_k dada por (5.1), (5.2), que es una solución de (P) con dato inicial $w_{0,k}(x) = k^{-\alpha} w_0(k^\beta x)$.

Si $\|w_0\|_\infty = M$, por el Corolario 1.5 tenemos

$$0 \leq w_k(x, t) \leq \left[(1-p)t + \frac{M^{1-p}}{k} \right]^{\frac{1}{1-p}}.$$

Por tanto las funciones w_k están uniformemente acotadas en cada banda $\mathbf{Q}_T = \mathbf{R}^N \times [0, T]$, y podemos aplicar los resultados de [S] y [dB] para concluir que la familia $\{w_k\}_{k>0}$ es equicontinua en \mathbf{Q}_T . Por un proceso diagonal y el Teorema de Ascoli-Arzelá encontramos una subsucesión $\{w_{k_j}\}$ y una función $E \in C(\mathbf{Q})$ tal que w_{k_j} converge a E en $C(\mathbf{Q})$ cuando $k_j \rightarrow \infty$ para todo $T > 0$. Es fácil comprobar que E es de hecho una solución de (1.1) con dato inicial cero.

Aplicando el Lema 2.3 a cada w_{k_j} obtenemos que E no es la solución nula y que satisface (2.1) y (2.2).

Etapa 2. Probaremos ahora que E es minimal en el sentido (5.12).

Supongamos por simplicidad $u(0, t) > 0$ para todo $t > 0$. Observando el cambio de escala (5.1), que es una contracción si $k > 1$ tanto de la función como de su soporte, es claro que para cada $\tau > 0$ existe k_0 suficientemente grande tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene

$$w_{0,k} \leq u(x, \tau) \quad \text{en } \mathbf{R}^N.$$

Como w_k es también una solución minimal si w lo es,

$$w_k(x, t) \leq u(x, t + \tau) \quad \text{en } \mathbf{R}^N.$$

Pasando al límite, primero $k_j \rightarrow \infty$ y después $\tau \rightarrow 0$ tenemos $E \leq u$ en \mathbf{Q} .

Etapa 3. El hecho de ser E minimal implica unicidad y por tanto el límite no depende del dato inicial w_0 elegido, y toda la sucesión $\{w_k\}$ converge a E .

Además como

$$w_{kl}(x, t) = (kl)^{-\alpha} w((kl)^\beta x, (kl)t) = k^{-\alpha} w_l(k^\beta x, kt),$$

podemos hacer $l \rightarrow \infty$ para tener

$$E(x, t) = k^{-\alpha} E(k^\beta x, kt)$$

para todo $k > 0$, y E es autosemejante. La unicidad implica también que E es radialmente simétrica y se puede escribir en la forma (5.7).

El perfil φ_E tiene soporte compacto si $m + p \geq 2$ por el Lema 2.7, y este soporte se puede estimar inferiormente por (2.2).

Por otro lado, si $m + p < 2$ el Teorema 2.1 implica $\varphi_E \equiv \nu_*$. ■

OBSERVACIÓN:

Resaltemos la diferencia de nuestra aproximación indirecta a la ecuación elíptica (5.4) con la demostración directa de existencia de solución para la ecuación con absorción (véase [BPT], [PT]).

Obtendremos también, como una primera aplicación de esta solución minimal absoluta en dimensión $N = 1$, la estimación (4.4) para las soluciones minimales del problema crítico (4.9), y completaremos la ecuación de la interfase.

Proposición 5.2.

Sea u la solución minimal de (4.9) y sea v su presión. Si $x = s(t)$ es la interfase derecha se tiene,

$$(5.13) \quad -v_x(s(t), t) \geq 1 \quad \text{para todo } t > 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $V(x, t) = \frac{m}{m-1} E^{m-1}(x/\sqrt{m}, t/m)$ la solución minimal absoluta en variable presión y normalizada. Por construcción se tiene

$$(5.14) \quad \text{sop}V(\cdot, t) = [-2t, 2t] \quad t \geq 0,$$

$$(5.15) \quad V_x(-2t, t) = -V_x(2t, t) = 1 \quad t > 0.$$

Sea ahora $x_0 = s(t_0)$ y supongamos por reducción al absurdo $-v_x(x_0, t_0) < 1$. Por el Teorema 4.5 tenemos que existe $\tau > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$s(t) = x_0 + 2t \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau.$$

Por otro lado, por el Teorema 5.1

$$v(x, t) \geq V(x - x_0, t - t_0) \quad \text{en } \mathbb{Q}.$$

Como las interfases de estas dos funciones coinciden en $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, y por (5.15), tenemos

$$-v_x(s(t), t) \geq 1 \quad \text{para } t_0 < t \leq t_0 + \tau. \quad \blacksquare$$

5.3. Comportamiento asintótico

Para las soluciones maximales el resultado es fácil de obtener.

Proposición 5.3.

Sea u la solución maximal del problema (P) con $u_0 \geq 0$ acotada. Entonces

$$(5.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} u(x, t) = \nu_*$$

uniformemente en $x \in \mathbf{R}^N$.

DEMOSTRACIÓN:

Utilizando los Corolarios 1.4 y 1.5 tenemos

$$\nu_* t^\alpha \leq u(x, t) \leq \nu_*(t + t_0)^\alpha \quad \text{en } Q,$$

donde $\nu_* t_0^\alpha = \|u_0\|_\infty$. ■

En cuanto a las soluciones minimales, la construcción de la solución minimal absoluta E nos da también de forma directa el comportamiento asintótico.

TEOREMA 5.4.

Sea u la solución minimal del problema (P) con $u_0 \geq 0$ de soporte compacto. Entonces

$$(5.17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} |u(x, t) - E(x, t)| = 0$$

uniformemente en $x \in \mathbf{R}^N$.

DEMOSTRACIÓN:

Por el Teorema 5.1 tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |k^{-\alpha} u(k^\beta x, kt) - E(x, t)| = 0$$

uniformemente en conjuntos de la forma $\mathbf{R}^N \times [0, T]$. Como E es autosemejante esto implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-\alpha} |u(k^\beta x, kt) - E(k^\beta x, kt)| = 0.$$

Poniendo $t = 1$, $y = k^\beta x$ y $k = t$ obtenemos (5.17) ■

Antes de estudiar el comportamiento asintótico de la interfase nos fijaremos en el comportamiento local. Para ello definiremos el entorno de anchura $\varepsilon > 0$ de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^N$ mediante

$$(5.18) \quad A + \varepsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

Probaremos entonces el siguiente resultado de regularidad.

TEOREMA 5.5.

Sea u una solución minimal de (1.1) y $P(t)$ el conjunto de positividad para cada $t > 0$. Si $P(0)$ está acotado existen dos constantes $d_1, d_2 > 0$ tales que para cada $t \geq 0$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeño se tiene

$$(5.19) \quad P(t) + d_1 \delta^\beta \subset P(t + \delta) \subset P(t) + d_2 \delta^{\frac{1}{2}}.$$

DEMOSTRACIÓN:

La primera inclusión se deduce de (5.12) y (5.9), donde $d_1 = \xi_0$.

Para la segunda inclusión nos fijamos de nuevo en la demostración de la propiedad de propagación finita (Lema 2.7).

Sea $(x, t) \in \mathbf{Q}$ tal que $u(x, t) = 0$ y con $\text{dist}(x, P(t)) = \delta > 0$. Considerando la función (2.18) probamos en aquel lema que si $c > 0$ se elige suficientemente grande se tiene

$$\text{dist}(x, P(t + \delta/6c)) \geq \delta/6 > 0.$$

Pero ahora observamos que basta escoger $c = k/\delta$, con lo que concluimos (5.19). ■

OBSERVACIÓN:

Nótese la analogía de la estimación superior (5.19) con (4.11), así como la demostración de ambas. Notemos también que (5.19) implica que la interfase se puede describir mediante una función G en la forma

$$(5.20) \quad \partial\{P(t) : t \geq 0\} \equiv \{t = G(x) : x \in \mathbf{R}^N\}$$

donde $G : \mathbf{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ verifica

$$(5.21) \quad 0 < G(x) < \infty \quad x \notin \overline{P(0)},$$

$$(5.22) \quad d_1|x_1 - x_2|^2 \leq |G(x_1) - G(x_2)| \leq d_2|x_1 - x_2|^{\frac{1}{\beta}} \quad \begin{array}{l} x_1, x_2 \notin \overline{P(0)} \\ |x_1 - x_2| < \delta. \end{array}$$

En particular G es una función Hölder continua.

Finalmente probaremos (5.11). Supongamos que el soporte inicial contiene al origen. Para cada $t \geq 0$ definimos las cantidades

$$(5.23) \quad \begin{aligned} R(t) &= \sup\{|x| : x \in P(t)\} \\ r(t) &= \inf\{|x| : x \notin \overline{P(t)}\}, \end{aligned}$$

que representan respectivamente la menor bola centrada en el origen que contiene a $P(t)$ y la mayor bola contenida en $P(t)$.

Suponemos $0 < r(0) \leq R(0) < \infty$.

TEOREMA 5.6.

En las hipótesis anteriores

$$(5.24) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\beta} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\beta} R(t) = \xi_0,$$

donde $\xi_0 = \xi_0(m, p, N)$ está definido en (5.9).

DEMOSTRACIÓN:

De nuevo (5.12) y (5.9) implican

$$(5.25) \quad r(t) \geq \xi_0 t^\beta$$

En la otra dirección, es fácil elegir $t_0 > 0$ dependiendo de $R(0)$ y $\|u_0\|_\infty$ de manera que

$$u_0(x) \leq E(x, t_0) \quad \text{en } \mathbf{R}^N,$$

y como u es una solución minimal,

$$u(x, t) \leq E(x, t + t_0) \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

lo que implica

$$(5.26) \quad R(t) \leq \xi_0(t + t_0)^\beta.$$

Finalmente (5.25) y (5.26) implican (5.24). ■

5.4. Algunas soluciones explícitas en el caso crítico

Una herramienta de gran utilidad en el estudio de la ecuación de los medios porosos es la posibilidad de comparación con una familia explícita de soluciones de tipo fuente que aparecen cuando se considera una masa de Dirac $u_0 = M\delta$ como dato inicial. Estas son las llamadas soluciones de *Barenblatt* [B].

$$(5.27) \quad B_L(x, t) = t^{-\lambda} \left[L - K \frac{|x|^2}{t^{\frac{2\lambda}{N}}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}$$

donde $\lambda = (m - 1 + 2/N)^{-1}$, $K = (m - 1)\lambda/2mN$ y $L = L(M) > 0$. La importancia de estas soluciones radica en el hecho de que son autosemejantes, $B_L(x, t) = k^\lambda B_L(k^{\frac{\lambda}{N}} x, kt)$ y en que reflejan el comportamiento asintótico de las soluciones de la E.M.P. (cf. [FK]).

Hemos visto en §5.3 que en nuestra ecuación con reacción (1.1) el modelo de comportamiento asintótico de las soluciones minimales con soporte compacto es una solución autosemejante *no singular* $E(x, t)$. Por otro lado esta solución E no es explícita, aunque (5.7), (5.8) y (5.9) describen por completo su gráfico.

En esta sección encontraremos que en el caso crítico la ecuación (1.1) admite soluciones explícitas análogas a (5.27) distintas de E . Comenzaremos con una solución no singular en la forma autosemejante (5.3).

$$(5.28) \quad Z(x, t) = t^{\frac{1}{m-1}} \left[C - K \frac{|x|^2}{t^2} \right]_+^{\frac{1}{m-1}}$$

con K como antes y $C = (m - 1)/[\lambda(m - 1) + 1]$. Observemos que Z es una solución de (1.1) en su conjunto de positividad y que $Z^m(\cdot, t) \in C^1(\mathbf{R}^N)$ para todo $t > 0$, por lo que Z es una solución débil del problema (P) en \mathbf{Q} con dato nulo. Notemos también que $m + p = 2$ implica $\alpha = 1/(m - 1)$, $\beta = 1$ y $m - 1 = 1 - p$, y así Z tiene el mismo crecimiento (tanto la función como

su soporte) que E . Podríamos pensar que Z es la solución E . Sin embargo probaremos que Z no es una solución minimal y por tanto no coincide con E .

Antes de mostrar el carácter de Z , observamos que podemos considerar esta función sumergida en una familia $\{Z_L\}$ de soluciones de tipo fuente del problema (P) con dato inicial $Z_L(\cdot, 0) = M(L)\delta$ y $Z = Z_0$ se puede ver como una solución (no trivial) con $M(0) = 0$.

Para resaltar la analogía de esta familia con las soluciones de Barenblatt escribiremos dos expresiones para Z_L ,

$$(5.29) \quad \begin{aligned} Z_L(x, t) &= t^{\frac{1}{m-1}} \left[C + Lt^{-\gamma} - K \frac{|x|^2}{t^2} \right]_+^{\frac{1}{m-1}} \\ &= t^{-\lambda} \left[L + Ct^\gamma - K \frac{|x|^2}{t^{\frac{2\lambda}{N}}} \right]_+^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned}$$

con las mismas constantes que antes y $\gamma = \lambda(m-1) + 1$, $L \geq 0$. Una familia como (5.29) fue obtenida por Kershner [Ke] para la ecuación con absorción.

Proposición 5.7.

Las soluciones Z_L , $L \geq 0$ no son ni maximales ni minimales.

DEMOSTRACIÓN:

Para cada $L \geq 0$ el conjunto de positividad de Z_L viene dado por

$$(5.30) \quad P(t) = B(0, s(t))$$

donde

$$(5.31) \quad s(t) = s_L(t) = t \sqrt{C/K + Lt^{-\gamma}/K}.$$

Claramente entonces Z_L no puede ser una solución maximal. Para probar que tampoco es minimal utilizaremos comparación con las soluciones de tipo onda viajera (3.1) construidas en §3.1. En particular utilizaremos la O.V. que se propaga con velocidad mínima, por ejemplo a lo largo del eje x_1 ,

$$u_*(x, t) = \mu_* [c_* t - x_1]_+^{\frac{1}{m-1}}$$

con $c_* = 2\sqrt{m}$, $\mu_* = ((m-1)/\sqrt{m})^{\frac{1}{m-1}}$. Sea ahora $t_0 > 0$ fijo. Es claro que existe $t_1 > 0$ tal que

$$Z_L(x, t_0) \leq u_*(x, t_1) \quad \text{en } \mathbf{R}^N.$$

Observemos sin embargo que $s'(t) \geq \sqrt{C/K} = c$ y $c > c_*$, es decir Z_L se propaga más deprisa que u_* , por lo que después de un tiempo finito

$$T = \frac{c_* t_1 - s(t_0)}{c - c_*} \geq 0$$

Z_L adelantará a u_* ,

$$Z_L(x, t + t_0) > u_*(x, y + t_1) \quad \text{si } t > T, \quad \begin{array}{l} |x| < s(t + t_0) \\ x_1 > c_*(t + t_1). \end{array}$$

Por tanto Z_L no es una solución minimal. ■

OBSERVACIÓN:

Si $L = 0$ podemos tomar $t_0 = t_1 = T = 0$.

Por otro lado hacemos notar que la fórmula (5.29) tiene también sentido si consideramos el parámetro $L < 0$. Obtenemos en este caso soluciones de (1.1) que comienzan con dato inicial cero y que permanecen cero hasta un tiempo $t_1 = (|L|/C)^{\frac{1}{\gamma}}$. Podemos entonces definir la nueva solución

$$(5.32) \quad \tilde{Z}(x, t) = Z_L(x, t + t_1).$$

que crece desde $t = 0$. Sea ahora $0 < t \ll t_1$. Tenemos que $\tilde{Z}(x, t)$ es casi constante en su soporte y

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}(x, t) &\approx \tilde{Z}(0, t) = (t + t_1)^{\frac{1}{m-1}} [C - |L|(t + t_1)^{-\gamma}]^{\frac{1}{m-1}} \approx \\ &\approx [C(t + t_1) - |L|t_1^{1-\gamma}(1 - (\gamma-1)t/t_1)]^{\frac{1}{m-1}} = \\ &= [(m-1)t]^{\frac{1}{m-1}} = U(x, t; 0). \end{aligned}$$

Así pues \tilde{Z} se comporta para tiempos pequeños como la solución maximal (1.48). Por supuesto, si $t \rightarrow \infty$, \tilde{Z} se comporta como $Z = Z_0$.

Finalmente es interesante observar el comportamiento de estas soluciones en dimensión $N = 1$ y comprobar los Teoremas 4.5, 4.6 y 4.8. Para ello utilizaremos la variable presión $W = \frac{m}{m-1} Z^{m-1}$ y consideramos el cambio de escala $(x, t) \rightarrow (x/\sqrt{m}, t/m)$ que normaliza la ecuación en la forma (4.9).

En este caso tenemos la familia (5.29) dada por

$$(5.34) \quad W(x, t) = \left[\frac{m+1}{2m} t + Lt^{-\frac{m-1}{m+1}} - \frac{|x|^2}{2(m+1)t} \right]_+, \quad L \in \mathbb{R}.$$

La interfase es $\{x = \pm s(t)\}$ donde

$$(5.35) \quad s(t) = t \sqrt{\frac{(m+1)^2}{m} + 2(m+1)Lt^{-\frac{2m}{m+1}}}.$$

Es fácil comprobar que $s'(t)$ y $r(t) = -W_x(s(t), t)$ verifican para todo $t > 0$

$$(5.36) \quad s'(t) = r(t) + \frac{1}{r(t)}.$$

Sin embargo existe un tiempo $t_2 = (2mL/(m^2 - 1))_+^{\frac{m+1}{2m}}$ tal que

$$(5.37) \quad \begin{aligned} r(t) &\geq 1 && \text{si } 0 < t \leq t_2, \\ r(t) &< 1 && \text{si } t > t_2. \end{aligned}$$

Por tanto vemos que se satisface la ecuación de la interfase (4.26) sólo en el intervalo de tiempo $0 < t \leq t_2$. Si $L \leq 0$ ésta no se satisface nunca.

Más aún,

$$(5.38) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{t} = \frac{m+1}{\sqrt{m}} > 2,$$

y no se verifica el Teorema 4.6.

En cuanto a la concavidad tenemos

$$(5.39) \quad y(t) \equiv W_{xx}(x, t) = \frac{-1}{(m+1)t},$$

para $t > 0$, lo que implica, para $t, t_0 > 0$

$$(5.40) \quad y(t + t_0) = \frac{-1}{(m + 1)(t + t_0)} = \frac{y(t_0)}{1 + (m + 1)y(t_0)t},$$

y se verifica exactamente la igualdad en (4.32). Pero por otro lado,

$$(5.41) \quad s''(t) = r'(t) \left[1 - \frac{1}{r^2(t)} \right],$$

y por (5.37) se verifica (4.33) sólo para $0 < t \leq t_2$ si $L > 0$. Si $L \leq 0$ se tiene $s''(t) = 0$ para todo $t > t_1$.

CAPÍTULO VI

APLICACION A LA ECUACION DE FISHER

6.1. Introducción

6.2. Casi unicidad

6.3. Ondas Viajeras

6.1. Introducción

En este capítulo aplicaremos las técnicas desarrolladas en el estudio de la ecuación (1.1) y consideraremos la *ecuación de Fisher generalizada*

$$(6.1) \quad u_t = \Delta u^m + u^p(1 - u)$$

con $m > 1$, $p \in \mathbf{R}$ y $0 \leq u \leq 1$.

El caso $m = p = 1$ fue introducido por Fisher [F] y estudiado posteriormente por Kolmogoroff, Petrovsky y Piscounoff [KPP]. El principal objeto de estudio era la existencia de ondas viajeras y su aplicación al comportamiento de las soluciones. De hecho fue el primer ejemplo de ecuación de difusión donde aparecía el fenómeno de propagación con una velocidad mínima $c^* > 0$. En este caso existe una única O.V. $u(x, t) = \varphi(x \cdot \nu - ct)$ para cada $c \geq c^*$ tal que $\varphi(-\infty) = 1$ y $\varphi(+\infty) = 0$.

Un comportamiento análogo presenta la ecuación degenerada ($m > 1$, $p = 1$), donde Aronson [A2] prueba la existencia de una velocidad mínima $c^*(m) > 0$ y una única O.V. para cada $c \geq c^*$ que conecta los estados $u = 1$ con $u = 0$.

En este trabajo consideraremos todos los posibles valores $p \in \mathbf{R}$ y demostraremos la existencia de una velocidad mínima $c^*(m + p - 2) > 0$ y de una única O.V. para cada $c \geq c^*$ que conecta 1 con 0 (cf. Teorema 6.3). Estas O.V. son finitas si y sólo si $p < 1$ ó $c = c^*$.

Antes de considerar en la Sección 6.3 el problema de buscar soluciones de tipo O.V. para la ecuación (6.1), presentaremos en primer lugar y a grandes rasgos cómo se deduce el comportamiento de las soluciones a partir del estudio realizado para la ecuación (1.1). La cuestión de unicidad merecerá estudio aparte en la Sección 6.2.

Si $p \geq 1$, como el término de reacción $f(s) = [s^p(1-s)]_+$ es una función Lipschitz, podemos aplicar el Teorema 1.1 y obtener para cada dato inicial u_0 medible con $0 \leq u_0 \leq 1$ una única solución débil u de (6.1) definida en \mathbf{Q} con $u(\cdot, 0) = u_0$. Además, como $\bar{w} = 1$ y $\underline{w} = 0$ son dos soluciones particulares tenemos, gracias a (1.8), $0 \leq u(x, t) \leq 1$ en \mathbf{Q} .

Para $p < 1$ podemos adaptar la demostración del Teorema 1.2 con ligeras modificaciones y obtener la existencia de una solución maximal y una solución minimal de (6.1) para cada dato inicial $0 \leq u_0 \leq 1$ medible. Estas soluciones pueden ser distintas como muestra el ejemplo $u_0 \equiv 0$. En este caso la solución minimal es trivialmente $\underline{u} \equiv 0$, y la solución maximal análoga a (1.48) es la función $\bar{u}(x, t) = T(t)$ definida implícitamente por

$$(6.2) \quad t_+ = \int_0^{T(t)} \frac{ds}{s^p(1-s)}.$$

Igual que en §1.3 tenemos como primera consecuencia

Proposición 6.1.

i) *Las soluciones maximales de (6.1) son estrictamente positivas en \mathbf{Q} y verifican*

$$(6.3) \quad \bar{u}(x, t) \geq T(t) > 0 \quad \text{en } \mathbf{Q}.$$

ii) *Toda solución de (6.1) verifica*

$$(6.4) \quad 0 \leq u(x, t) \leq T(t + t_0) \quad \text{en } \mathbf{Q},$$

$$\text{donde } t_0 = \int_0^{\|u(\cdot, 0)\|_\infty} \frac{ds}{s^p(1-s)}.$$

OBSERVACIÓN:

Si $\|u(\cdot, 0)\|_\infty = 1$ tenemos $t_0 = \infty$ y $T(t + t_0) \equiv 1$.

En lo que respecta a la propagación de las soluciones notemos que toda solución de (6.1) es una subsolución de (1.1), por lo que si $m + p \geq 2$ tenemos propagación con velocidad finita y existencia de frontera libre para las soluciones minimales de (6.1). Por otro lado, cerca de esta frontera libre, donde u es pequeña, el término de reacción se comporta como la potencia pura y obtenemos las propiedades locales análogas a la ecuación (1.1).

Más precisamente, si $0 \leq u \leq \varepsilon$ en un entorno de un punto de la interfase, u es una supersolución de la ecuación

$$u_t = \Delta u^m + \mu u^p$$

en ese entorno, donde $\mu = 1 - \varepsilon$. En este caso es fácil probar el comportamiento local (5.17) de la interfase, que implica un crecimiento mínimo de la misma. En particular si $m + p = 2$ tenemos una velocidad mínima de propagación que viene dada de nuevo por ξ_0 .

En dimensión $N = 1$ podemos probar también la ecuación de la interfase (4.26), (4.39) mediante comparación local con los frentes lineales

$$v_{r,\varepsilon}(x, t) = r[g_\varepsilon(r)t - x]_+$$

donde

$$g_\varepsilon(r) = r + \frac{m(1 - \varepsilon)}{r}.$$

Finalmente si $m + p < 2$ tenemos velocidad infinita de propagación. (Aunque en este punto esta conclusión es casi inmediata, aparecerá también como consecuencia de la estimación (6.10)).

En la siguiente sección obtendremos estimaciones más precisas sobre el crecimiento de la solución y su interfase (del tipo del Lema 2.3), que junto con la estimación (6.3) nos servirán para atacar la cuestión de unicidad. Probaremos los resultados análogos a los Teoremas 2.1 y 2.2.

6.2. Casi unicidad

Consideremos el problema de Cauchy en dimensión $N \geq 1$

$$(6.5) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p(1-u) \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

con $p < 1 < m$ y $0 \leq u_0 \leq 1$.

TEOREMA 6.2.

- i) Si $m + p < 2$ el problema (6.5) tiene la propiedad de casi unicidad. Además si $u_0 \equiv 0$ la solución es $u \equiv 0$ ó $u = T(t + \tau)$ para algún $\tau \geq 0$.
- ii) Si $m + p \geq 2$ el problema (6.5) tiene solución única si y sólo si el soporte de u_0 es todo \mathbf{R}^N .

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos la parte de unicidad de soluciones positivas igual que en §2.2 en tres etapas. La propiedad de propagación infinita para $m + p < 2$ completará i) y la propagación finita para $m + p \geq 2$ completará ii).

Etapas 1. Demostraremos en primer lugar las estimaciones análogas a (2.1) y (2.2). Utilizaremos para ello también una subsolución explícita de la ecuación (6.1). Sin embargo en este contexto el término autosemejante tiene un significado especial.

Consideremos la función

$$(6.6) \quad w(x, t) = T(t)\varphi(\xi), \quad \xi = |x|T^{-\gamma(t)}\sqrt{1-T(t)},$$

con $\gamma = (m - p)/2$ y $T(t)$ la solución maximal (6.2). Obviando el paso a través de la ecuación aproximada, el perfil $\varphi(\xi)$ debe ser una subsolución de la ecuación elíptica

$$(6.7) \quad \varphi - \left(\gamma + \frac{1}{2} \frac{T}{1-T}\right)\xi\varphi' = (\varphi^m)'' + \frac{N-1}{\xi}(\varphi^m)' + \varphi^p \frac{1-T\varphi}{1-T}.$$

Imponiendo la condición

$$(6.8) \quad \varphi^{1-p} \leq \frac{1 - T\varphi}{1 + \gamma N - (\gamma N + 1/2)T}$$

vemos que la misma función que en aquella ocasión, $\varphi(\xi) = (A - B\xi^2)_+^{\frac{1}{m-1}}$ nos sirve de subsolución. Ahora es un ejercicio escoger A y B para que se verifique (6.8).

Como conclusión tenemos, igual que en el Lema 2.3, si $u(0, t) > 0$ para todo $t > 0$,

$$(6.9) \quad u(0, t) \geq c_1 T(t) \quad \forall t > 0,$$

$$(6.10) \quad u(x, t) > 0 \quad \forall t > 0, |x| < c_2 \frac{T^\gamma(t)}{\sqrt{1 - T(t)}}.$$

Notemos que si $t \approx 0$ recuperamos (2.1) y (2.2). En particular (6.10) implica la velocidad infinita de propagación si $m + p < 2$ (cf. Lema 2.6).

Etapas 2. Si ahora $u(x, t) > 0$ en \mathbf{Q} , el argumento del Lema 2.4 junto con (6.9) y (6.3) implican

$$(6.11) \quad u(x, t) \geq T(t) \quad \text{en } \mathbf{Q}.$$

Etapas 3. Probaremos ahora que si una solución u de (6.5) verifica (6.11) es la solución maximal de ese problema.

Sea v la solución maximal de (6.5). En primer lugar tenemos, por la definición de solución débil, e igual que en (2.12),

$$(6.12) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(t) \varphi(t) \leq \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} [(v^p(1 - v) - u^p(1 - u))](s) \varphi(s) ds \end{aligned}$$

para toda función test $\varphi \in C^\infty(\mathbf{Q})$ y todo $0 \leq t < \infty$.

Si $p \leq 0$ esta desigualdad implica inmediatamente $u \equiv v$ en Q . Supongamos $p > 0$.

Fijamos ahora una constante $0 < l_0 < 1$ y sea $t_0 = \int_0^{l_0} \frac{ds}{s^{p(1-s)}}$. Entonces tenemos

$$(6.13) \quad [(1 - l_0)(1 - p)t]^{\frac{1}{1-p}} \leq T(t) \leq l_0 \quad \text{si } 0 \leq t \leq t_0.$$

Por tanto, y usando (6.11) tenemos, para $s \leq t_0$

$$(6.14) \quad [v^p(1 - v) - u^p(1 - u)](s) \leq \frac{p}{u^{1-p}(s)}(v - u)(s) \leq \\ \leq \frac{p}{(1 - l_0)(1 - p)} \frac{(v - u)(s)}{s}.$$

Aplicando esto a (6.12) llegamos a

$$(6.15) \quad \int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(t)\varphi(t) \leq \frac{p}{(1 - l_0)(1 - p)} \int_0^t \left(\int_{\mathbf{R}^N} (v - u)(s)\varphi(s) \right) s^{-1} ds.$$

Ahora basta escoger $0 < l_0 < 1 - p$ para concluir, de la misma forma que en el Lema 2.4, $u \equiv v$ para $0 \leq t \leq t_0$. Un argumento iterativo completa la prueba para todo $t \geq 0$. ■

6.3 Ondas Viajeras

Nos concentraremos ahora en buscar soluciones de tipo onda viajera para la ecuación (6.1), es decir, buscaremos soluciones $\varphi(\xi)$, $\xi = x - ct \in \mathbf{R}$ de la ecuación

$$(6.16) \quad -c\varphi' = (\varphi^m)'' + \frac{1}{m}\varphi^p(1 - \varphi),$$

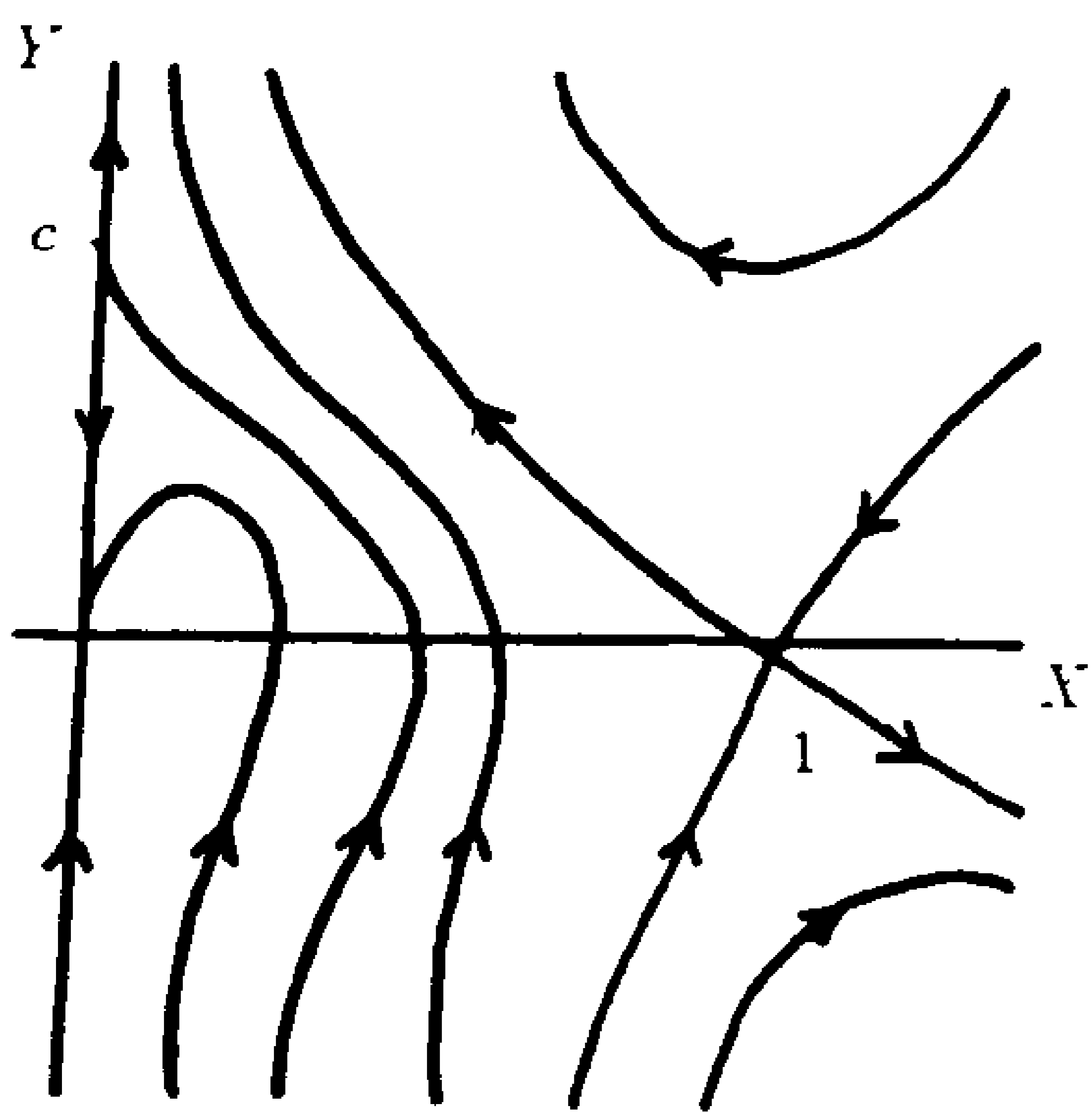
tales que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(-\infty) = 1$ y $\varphi(+\infty) = 0$. Hemos normalizado de nuevo la ecuación con el coeficiente $1/m$ para comparar los resultados con los obtenidos en §3.2. Denominaremos a estas ondas *de cambio de fase* pues unen los estados $\varphi = 1$ y $\varphi = 0$. Pueden ser *finitas* ($\varphi(\xi) = 0$ para $\xi \geq \xi_0$ ó $\varphi(\xi) = 1$ para $\xi \leq \xi_1$) o *positivas* ($\varphi(\xi) > 0$ para todo $\xi \in \mathbf{R}$).

En el caso $m = p = 1$ existe una velocidad mínima $c^* = 2$ tal que no existen O.V. si $0 < c < c^*$ y existe una única O.V. (positiva) para cada $c \geq c^*$ (cf. [KPP]).

Si $m > 1$, $p = 1$ también existe una velocidad mínima $c^*(m) > 0$ tal que no existen O.V. si $0 < c < c^*$, existe una única O.V. (finita) si $c = c^*$ y existe una única O.V. (positiva) para cada $c > c^*$ (cf. [A2], [AW]). Por ejemplo si $m = 2$ demuestran que la velocidad mínima es $c^*(2) = 1/\sqrt{2}$ mediante la solución explícita

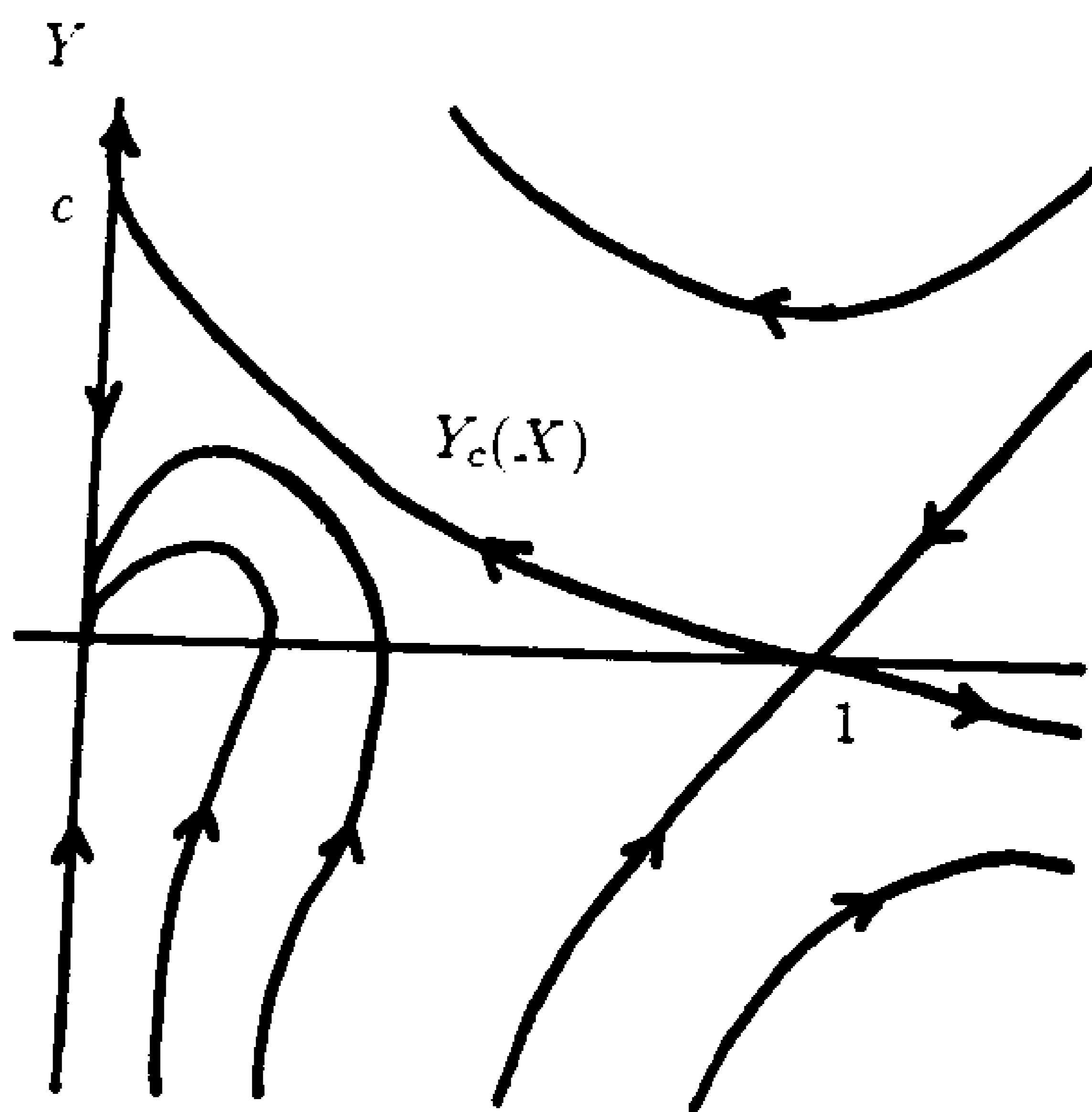
$$(6.17) \quad \varphi(\xi) = [1 - e^{\frac{\xi}{2\sqrt{2}}}]_+.$$

Al extender estos resultados y tratar todos los posibles valores de $p \in \mathbf{R}$ veremos que la existencia de O.V. dependerá del signo de $\sigma \equiv m + p - 2$.



6.1.a $0 < c < c^*(\sigma)$.

6.1.b $c = c^*(\sigma)$.



6.1.c $c > c^*(\sigma)$.

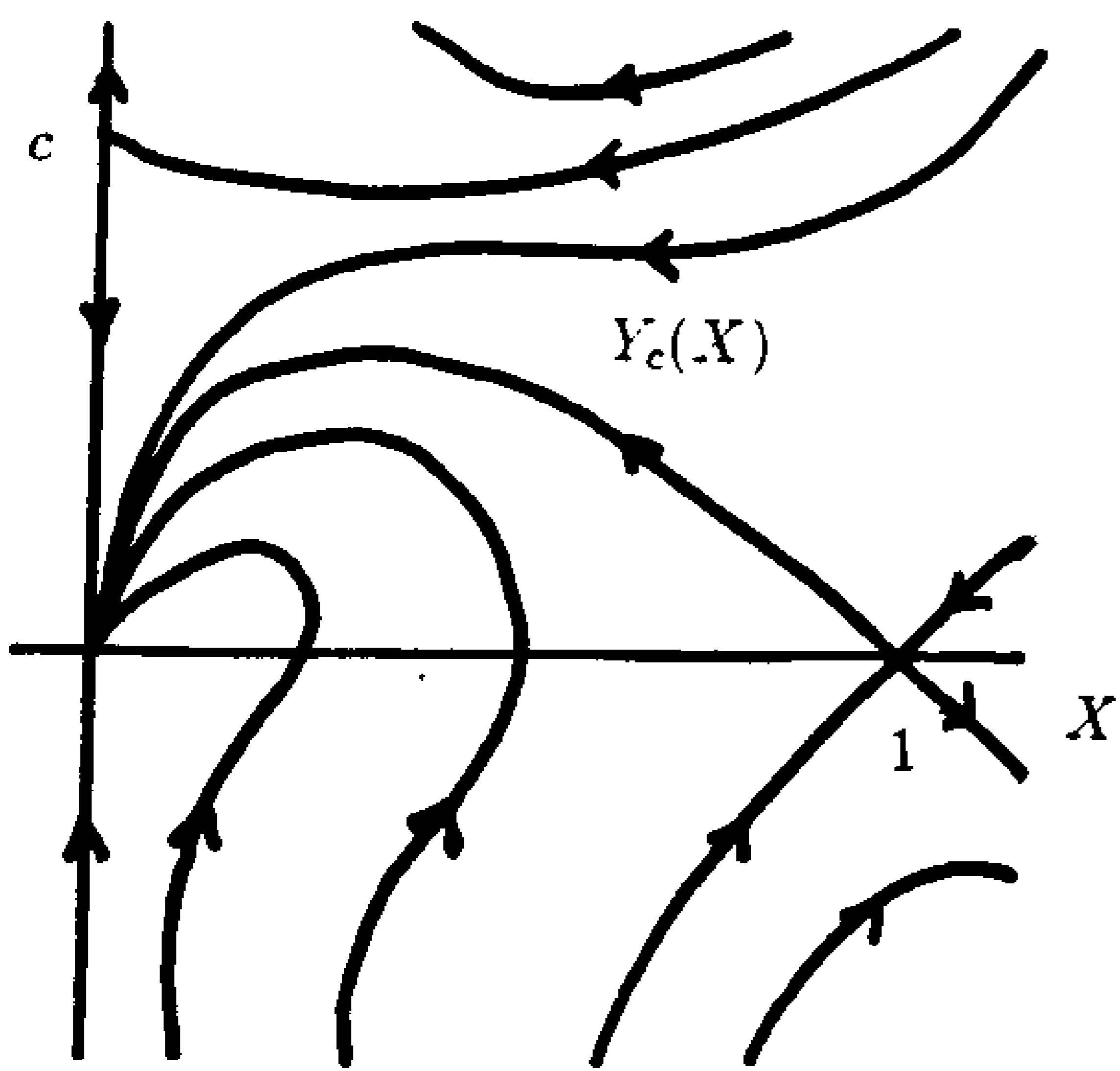


Fig. 6.1 $\sigma = m + p - 2 > 0, c > 0$.

TEOREMA 6.3.

La ecuación (6.16) admite soluciones globales si y sólo si $\sigma \equiv m + p - 2 \geq 0$. Además si $\sigma \geq 0$ existe una velocidad crítica $c^*(\sigma) > 0$ tal que

- i) no existen O.V. si $0 < c < c^*$
- ii) existe una única O.V. para cada $c \geq c^*$.

La O.V. con $c = c^*$ es finita. Las O.V. con $c > c^*$ son finitas si y sólo si $p < 1$. Finalmente $c^*(\sigma)$ es decreciente y $c^*(\sigma) \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$. En particular $c^*(0) = 2$, $c^*(1) = 1/\sqrt{2}$.

OBSERVACIÓN:

Para $\sigma = 1$ y $c = 1/\sqrt{2}$ la O.V. viene dada por un perfil φ explícito.

DEMOSTRACIÓN:

Igual que en §3.2 analizaremos un plano de fases asociado a la ecuación (6.16), pero aquí introducimos las nuevas variables

$$(6.18) \quad X = \varphi, \quad Y = \left(-\frac{m}{m-1}\varphi^{m-1}\right)',$$

que corresponden a la densidad y la derivada de la presión. Con estas variables, y mediante el cambio $d\tau = \frac{1}{m}X^{1-m}d\xi$ para evitar la singularidad en $X = 0$, la ecuación (6.16) se traduce en el sistema

$$(6.19) \quad \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -XY \\ \frac{dY}{d\tau} = X^\sigma(1-X) - Y(c-Y). \end{cases}$$

Los puntos críticos de este sistema son $(X, Y) = (0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, c)$. Representamos el plano de fases en la Fig. 6.1.

Buscamos trayectorias admisibles de (6.19), es decir soluciones de

$$(6.20) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{c-Y}{X} - \frac{X^{\sigma-1}(1-X)}{Y} \equiv F(X, Y, c)$$

definidas en $0 \leq X \leq 1$ que conecten el punto $(1, 0)$ con el eje $X = 0$. Observemos que para que φ sea solución global de (6.16) es necesario $0 \leq Y(0) < \infty$. Por tanto las únicas posibilidades son $(0, 0)$ y $(0, c)$.

Caso $m + p > 2$. La existencia de una velocidad crítica $c^*(\sigma) > 0$ se obtiene por comparación con subsoluciones para c pequeño y supersoluciones para c grande, junto con la monotonía de F respecto de c e Y . Cuando c crece la trayectoria que entra en el punto $(0, c)$ y la trayectoria que sale de $(1, 0)$ en la Fig. 6.1.a se acercan una a la otra y en un valor crítico $c^* = c^*(\sigma)$ ambas coinciden. Este valor es único pues $\partial F / \partial c > 0$. Además $c^*(\sigma)$ decrece cuando σ crece. Como resultado obtenemos una trayectoria $Y_{c^*}(X)$ que conecta los puntos de silla $(1, 0)$ y $(0, c)$.

Para ver que la O.V. correspondiente $\varphi_{c^*}(\xi)$ es finita observamos el comportamiento de la trayectoria cerca de estos puntos críticos,

$$(6.21) \quad Y_{c^*}(0) = c^*, \quad Y_{c^*}(X) \approx M(\sigma)(1 - X) \quad \text{para } X \approx 1.$$

Entonces, usando la relación diferencial

$$(6.22) \quad d\xi - mX^{m-1}d\tau = -mX^{m-2}Y^{-1}dX,$$

vemos que $\xi \rightarrow \xi_0 < \infty$ cuando $X \rightarrow 0$, mientras que $0 < \varphi_{c^*}(\xi) < 1$ para todo $\xi < \xi_0$, $\varphi_{c^*}(-\infty) = 1$, $\varphi_{c^*}(\xi) = 0$ para todo $\xi \geq \xi_0$. Podemos suponer por traslación $\xi_0 = 0$. Así tenemos la primera O.V.F. que verifica

$$(6.23) \quad \left(-\frac{m}{m-1}\varphi_{c^*}^{m-1}\right)'(0) = c^*.$$

Por otro lado, a partir de (6.20) tenemos que $Y = Y_{c^*}(X)$ verifica

$$\begin{aligned} (Y^2)' &\geq -2X^{\sigma-1}(1-X), \\ (XY^2)' &= (2c^* - Y)Y - 2X^\sigma(1-X) \leq \\ &\leq c^{*2} - 2X^\sigma(1-X). \end{aligned}$$

Integrando desde $(0, c^*)$ hasta $(1, 0)$ obtenemos la estimación siguiente de la velocidad crítica,

$$(6.24) \quad \sqrt{\frac{2}{(\sigma+1)(\sigma+2)}} \leq c^*(\sigma) \leq \sqrt{\frac{2}{\sigma(\sigma+1)}}.$$

En particular $c^*(\sigma) \rightarrow 0$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$. Para obtener una estimación más precisa de la velocidad mínima cuando $\sigma \rightarrow 0$ observamos que $F = dY/dX$ se anula a lo largo de la gráfica

$$(6.25) \quad (c - Y)Y = X^\sigma(1 - X).$$

Esta gráfica consiste en dos curvas que unen los puntos $(0,0)$ con $(0,c)$ y $(1,0)$ con $(1,c)$ si $0 < c < c_0(\sigma)$ y que unen $(0,0)$ con $(1,0)$ y $(0,c)$ con $(1,c)$ si $c > c_0(\sigma)$. Para $c = c_0(\sigma) = 2\sqrt{\sigma^\sigma/(\sigma+1)^{\sigma+1}}$ estas dos curvas se cruzan en un punto $(X, Y) = (\sigma/(\sigma+1), c/2)$. Estudiando el signo de F en las diferentes regiones de $[0, 1] \times [0, c]$ vemos que no puede existir una trayectoria que conecte $(0, c)$ con $(1,0)$ si $c \geq c_0(\sigma)$. Entonces

$$(6.26) \quad c^*(\sigma) \leq c_0(\sigma) = 2\sqrt{\frac{\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}}}.$$

Notemos que $c_0(\sigma) \leq 2$.

Para $c > c^*(\sigma)$ tenemos una trayectoria $Y_c(X)$ que conecta el punto silla $(1,0)$ con el nodo $(0,0)$. Esta trayectoria entra en el origen por encima de la curva (6.25), y por tanto

$$(6.27) \quad Y_c(X) > \frac{1}{c}X^\sigma \quad \text{para } X \approx 0.$$

Usando esta estimación vemos que la integral de (6.22) es finita para $X \approx 0$ si $p < 1$ y la O.V.F. φ_c definida verifica

$$(6.27) \quad \left(-\frac{m}{m-1}\varphi_c^{m-1}\right)'(0) = 0.$$

En este caso $p < 1$ vemos que φ_c no verifica la ecuación de la interfase (4.39) y no puede ser por tanto una solución minimal. Por el contrario cuando $p \geq 1$ la única solución debe satisfacer (4.39) por lo que (6.28) no puede ser cierto en ningún punto $\xi_0 < \infty$ tal que $\varphi_c(\xi_0) = 0$. Obtenemos así que la O.V. φ_c con $c > c^*(\sigma)$ es finita si y sólo si $p < 1$.

Para $\sigma = 1$ y $c = 1/\sqrt{2}$ la ecuación (6.20) admite la solución explícita recta $Y(X) = c(1 - X)$, que integrada nos da la O.V.F. definida por

$$(6.29) \quad m\sqrt{2}(-\xi)_+ = \int_0^{\varphi(\xi)} \frac{ds}{s^{2-m}(1-s)}.$$

Por tanto $c^*(1) = 1/\sqrt{2}$. Cuando $m = 2$ y $p = 1$ (6.29) se reduce a (6.17).

Caso $m + p = 2$. Sabemos por §6.1 que en este caso sólo hará falta considerar velocidades $c \geq 2$. Por otro lado la gráfica (6.25) se convierte aquí en una parábola

$$(6.30) \quad X = Y^2 - cY + 1.$$

Esta parábola une los puntos $(1,0)$ y $(1,c)$ y corta al eje vertical en dos puntos $(0, z_i)$, $0 < z_1 \leq z_2$ ($z_1 = z_2 = 1$ si $c = 2$). Es fácil ver que existe una única trayectoria por debajo de esta parábola que conecta $(1,0)$ con $(0, z_1)$. Esta trayectoria corresponde a una O.V.F. φ_c que verifica

$$(6.31) \quad \left(-\frac{m}{m-1}\varphi_c^{m-1}\right)'(0) = z_1.$$

Por supuesto si $c > 2$ esta O.V. no satisface la ecuación de la interfase (4.26) y no corresponde a una solución minimal.

Caso $m + p < 2$. Un análisis local alrededor del origen en el plano de fases permite concluir, igual que en §3.2, que no existen O.V. globales y positivas que conecten los estados 1 y 0. ■

OBSERVACIÓN:

No es difícil probar que las O.V. dependen continuamente de ξ , c y σ (cf. [HV2; Teor.6] para el caso de absorción). En particular cuando $\sigma \rightarrow 0$ la O.V. cambia la ecuación de la interfase al pasar al límite. La trayectoria que une $(1,0)$ con $(0,c)$ para $\sigma > 0$ en la Fig. 6.1.b pasa a unir $(1,0)$ con $(0,c/2)$ para $\sigma = 0$, y aparece una capa límite entre $(0,c/2)$ y $(0,c)$.

REFERENCIAS

- [AE] J. Aguirre y M. Escobedo, *A Cauchy problem for $u_t - \Delta u = u^p$ with $0 < p < 1$* , Annales Fac. Sci. Toulouse **8**, 2 (1986), 175–203.
- [A1] D.G. Aronson, *The porous medium equation*, in “Some Problems in Non-linear Diffusion,” (A. Fasano and M. Primicerio, Eds.), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1986.
- [A2] ———, *Density-dependent interaction-diffusion systems*, in “Proc. Adv. Seminar on Dynamics and Modelling of Reactive Systems,” Academic Press, N.Y., 1980.
- [AB] D.G. Aronson y Ph. Bénilan, *Regularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbf{R}^N* , C. R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 103–105.
- [AC] D.G. Aronson y L. Caffarelli, *The initial trace of a solution of the porous medium equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 351–366.
- [AW] D.G. Aronson y H.F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation*, in “Partial Differential Equations and Related Topics,” Lecture Notes in Math., Springer, N.Y., 1975, pp. 5–49.
- [B] G.I. Barenblatt, *On self-similar motions of compressible fluids in porous media*, Prikl. Mat. Mech. **16** (1952), 679–698.
- [Be] J. Bear, “Dynamics of fluids in Porous Media,” American Elsevier Publishing Company Inc., N.Y., 1972.
- [dB] E. di Benedetto, *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*, Indiana Univ. Math. J. **32**, 1 (1983), 83–118.
- [BV] Ph. Bénilan y J.L. Vazquez, *Concavity of solutions of the porous medium equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **299**, 1 (1987), 81–93.
- [BI] Ph. Bénilan y S. Ismail, *Générateur de semi-groupes non linéaires et la formule de Lie-Trotter*, Annales Fac. Sci. Toulouse **7** (1985), 151–160.

- [BCP] Ph. Bénilan, M.G. Crandall and M. Pierre, *Solutions of the porous medium equation in \mathbf{R}^N under optimal conditions on initial values*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 51–87.
- [BC] H. Brézis y M.G. Crandall, *Uniqueness of solution of the initial value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$* , J. Math pures et appl. **58** (1979), 153–163.
- [BPT] H. Brézis y L.A. Peletier y D. Terman, *A very singular solution of the heat equation with absorption*, Arch. Rational Mech. Anal. **95** (1986), 185–209.
- [CF1] L. Caffarelli y A. Friedman, *Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of a gas in a porous medium*, Amer. J. Math. **101** (1979), 1191–1218.
- [CF2] —————, *Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math. J. **29**, 3 (1980), 361–391.
- [C] M.G. Crandall, *An introduction to evolution governed by accretive operators*, in “Dynamical Systems, an International Symposium,” (L. Cesari et al. Eds.), Academic Press, N.Y., 1976, pp. 131–165.
- [EK] M. Escobedo y O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation*, J. of Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl. (1987).
- [F] R.A. Fisher, *The advance of advantageous genes*, Ann. of Eugenics **7** (1937), 355–369.
- [FK] A. Friedman y S. Kamin, *The asymptotic behaviour of gas in an n -dimensional porous medium*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1981), 551–563.
- [Fu] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, **13** (1966), 109–124.
- [GKMS] V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, A.P. Mikhailov y A.A Samarskii, “Blow-up Solutions in problems for Quasilinear Parabolic equations,” Izd. Nauka, Moscu, 1987.
- [GM] M.E. Gurtin y R.C. MacCamy, *On the diffusion of biological populations*, Math. Bios. **33** (1977), 35–49.
- [HP] M.A. Herrero y M. Pierre, *The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 145–158.

- [HV1] M.A. Herrero y J.L. Vazquez, *The one-dimensional nonlinear heat equation with absorption: regularity of solutions and interfaces*, SIAM J. Math. Anal. **18**, 1 (1987), 149-167.
- [HV2] —————, *Thermal waves in absorbing media*, J. of Diff. Eq. **74**, 2 (1988), 218-233.
- [K] T. Kato, *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. **13** (1972), 133-148.
- [Ke] R. Kershner, *The behavior of temperature fronts in media with nonlinear thermal conductivity under absorption*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **33**, 5 (1978), 44-51.
- [Kn] B.F. Knerr, *The porous medium equation in one dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 381-415.
- [MP] L.K. Martinson y K.B. Pavlov, *Thermal localization in nonlinear heat conduction*, Zh. Vychisl. Mat i Mat. Fiz. **12**, 4 (1972), 1048-1053.
- [KPP] A. Kolmogoroff, I. Petrovsky y N. Piscounoff, *Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bull. Univ. Moskov, Ser. Internat., Sec A **1**, 6 (1937), 1-25.
- [LSU] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov y N.N. Uralceva, "Linear and quasilinear equations of parabolic type," Translations of Math. monographs, AMS, 1968.
- [OKC] O.A. Oleinik, A.S. Kalashnikov y Y.L. Chzhou, *The Cauchy and boundary problems for equations of type of unsteady filtration*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **22** (1958), 687-704.
- [dPV1] A. de Pablo y J.L. Vazquez, *Travelling waves and finite propagation in a reaction-diffusion equation*, Preprint.
- [dPV2] —————, *The balance between strong reaction and slow diffusion*, Preprint.
- [P] L.A. Peletier, *The porous media equation*, in "Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences," (H. Amann et al., Eds.), Pitman, London, 1981, pp. 229-241.
- [PT] L.A. Peletier y D. Terman, *A very singular solution of the porous media equation with absorption*, J. of Diff. Eq. **65** (1986), 396-410.

- [RK] P. Rosenau y S. Kamin, *Thermal waves in an absorbing and convecting medium*, *Physica* **8 D** (1983), 273–283.
- [S] P.E. Sacks, *The initial and boundary problem for a class of degenerate parabolic equations*, *Comm. on PDE* **8** (1983), 693–733.
- [V] J.L. Vazquez, *Convexity properties of the solutions of nonlinear heat equations*, in “Contributions to nonlinear PDE,” (Díaz & Lions Eds.), Pitman Lecture Notes, 1987.
- [W] F.B. Weissler, *Existence and non-existence of global solutions for a semi-linear heat equation*, *Israel J. of Math.* **38** (1981), 29–39.
- [ZR] Y.B. Zeldovich y Y.P. Raizer, “Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena,” Academic Press, 1966.

Recebo
de la Facultad
de Doctorado

Universidad
de México

Alfonso Carrillo
México, 11 - Octubre - 1979

[Signature]

[Signature]

[Signature]

Miguel Henao

[Signature]