

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

*Problemas parabólicos no lineales:
de los fenómenos de explosión al
comportamiento asintótico*

CRISTINA BRÄNDLE CERQUEIRA

11 de septiembre de 2006

Tesis doctoral dirigida por D. Fernando Quirós Gracián y D. Juan Luis Vázquez Suárez

*A mi abuelo, que me enseñó a sumar.
Y a mi abuela, que enseñó a sumar a tantos otros.*

“Hasta el infinito y más allá”

Buzz Lightyear. Toy Story

Prefacio

Podrá suceder que volváis a vuestra tesis incluso decenas de años más tarde. Pues habrá sido como vuestro primer amor y os resultará difícil olvidarla. En el fondo, habrá sido la primera vez que hacéis un trabajo científico serio y riguroso, lo cual como experiencia no es poco.

Umberto Eco. Cómo se hace una tesis

Problemas parabólicos no lineales:
de los fenómenos de explosión al comportamiento asintótico

Así se titula esta Memoria. Y encontrar un título apropiado que defina en pocas palabras su contenido no ha sido tarea fácil. Al final hemos optado por éste, que, aunque quizá algo ambiguo, responde al único objetivo de intentar agrupar bajo un mismo nombre los distintos problemas que aquí tratamos.

La Memoria consta de tres partes muy distintas entre sí, en las que se resuelven distintos problemas abiertos dentro del campo de las ecuaciones parabólicas no lineales. Los temas que nos ocupan son:

- explosión en problemas de reacción-difusión;
- soluciones de viscosidad para difusión no lineal;
- difusión en dominios espaciales con agujeros.

Dada la distinta naturaleza de los problemas aquí estudiados, se hace necesario usar técnicas muy diferentes para abordar cada uno de ellos. Existen sin embargo

dos herramientas comunes utilizadas en todas las partes de la Memoria: la comparación con subsoluciones y supersoluciones y la autosemejanza. Estas técnicas, habituales en la literatura, se aplicarán con objetivos diferentes en cada caso. Las usaremos, en la Parte I, para determinar si las soluciones de un determinado problema están acotadas en todo tiempo finito o no, en la Parte II para definir la noción de solución o para determinar el decaimiento de la solución en la Parte III.

La Parte I de esta Memoria está dedicada a estudiar la formación de singularidades en problemas parabólicos con difusión no lineal, tanto desde el punto de vista analítico como numérico. En concreto nos preguntamos, en los capítulos 2 y 3, si para un sistema con dos ecuaciones de reacción-difusión acopladas de forma no lineal es posible que una de las componentes tienda a infinito en tiempo finito, que explote, mientras que la otra permanece acotada. En trabajos previos, J. P. Pinasco y J. D. Rossi por un lado y J. D. Rossi y F. Quirós por el otro estudian, en [94] y [97] respectivamente, los mismos problemas que los tratados en estos capítulos pero restringiéndose a difusión lineal. Esta restricción permite hacer uso de fórmulas de representación, que no están indicadas en el caso de difusión no lineal, por lo que se hace necesario modificar las técnicas. En el Capítulo 4 volvemos a considerar un sistema de dos ecuaciones de reacción-difusión, pero ahora sus dos componentes explotan simultáneamente. Este fenómeno resulta quizá más complicado de tratar que el de la explosión no simultánea, estudiada en los capítulos anteriores, y por ello nos restringimos al caso lineal. En el Capítulo 2 y en el 3 hay una componente que está acotada y que por tanto podemos considerar asintóticamente (según nos acercamos al tiempo de explosión) constante, limitándonos así a estudiar el problema escalar. Esto no es posible cuando las dos componentes tienden a infinito simultáneamente. Los resultados obtenidos en el Capítulo 4 completan los trabajos previos de M. Pedersen y Z. Lin, [92], J. D. Rossi, [102] y S. Zheng, B. Liu y F. Li, [115], cubriendo además los casos críticos, de los que nada se sabía hasta el momento. Finalmente, en el Capítulo 5, desarrollamos un esquema numérico adaptativo para problemas parabólicos que presentan singularidades. En concreto el método reproduce el comportamiento de las soluciones del problema estudiado en el Capítulo 3. Las dificultades del análisis se deben, fundamentalmente, a que los teoremas de convergencia usuales no incluyen casos singulares como los que aquí se analizan.

El trabajo que presentamos en la primera parte de la Memoria ha sido realizado en colaboración con Julio D. Rossi, tanto en la Universidad Autónoma de Madrid como durante una visita de investigación a la Pontificia Universidad Católica de Chile y a la Universidad de Buenos Aires. Aunque ligados por medio de una idea común, la explosión de soluciones en tiempo finito, los cuatro capítulos son independientes entre sí y cada uno de ellos ha dado lugar a un artículo de investigación, véanse [18], [19], [20] y [21]

- CAPÍTULO 2: *The role of nonlinear diffusion in non-simultaneous blow-up.*
J. Math. Anal. Appl. **308** (2005), 92–104.
(con F. Quirós y J.D. Rossi).
- CAPÍTULO 3: *Non-simultaneous blow-up for a quasilinear parabolic system with reaction at the boundary.*
Comm. Pure Appl. Anal. **4** (2005), no. 3, 523–536.
(con F. Quirós y J.D. Rossi).
- CAPÍTULO 4: *A complete classification of simultaneous blow-up rates.*
Appl. Math. Lett. **19** (2006), no. 7, 607–611.
(con F. Quirós y J.D. Rossi).
- CAPÍTULO 5: *An adaptive numerical method to handle blow-up in a parabolic system.*
Numer. Math. **102** (2005), no. 1, 39–59.
(con F. Quirós y J.D. Rossi).

El Apéndice A complementa la primera parte de Memoria. En él se resume brevemente otro método numérico adaptativo que resulta apropiado para el estudio de fenómenos de explosión en problemas de evolución. El trabajo aquí presentado fue realizado durante una estancia de investigación en la Universidad de Buenos Aires en colaboración con Pablo Groisman y Julio D. Rossi y ha dado lugar a la siguiente publicación, [17]:

- *Fully discrete adaptive methods for a blow-up problem.*
Math. Models Methods Appl. Sci, M3AS. **14** (2004), no. 10, 1425–1450.
(con P. Groisman y J.D. Rossi).

En [25], L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez estudian las soluciones de viscosidad para la ecuación de los medios porosos escrita en la variable presión. Una continuación natural de este trabajo se presenta en la Parte II, donde se añade un coeficiente no lineal a la ecuación presentada en [25]. Las dificultades técnicas que aparecen en este caso surgen del hecho de que no hay una familia explícita de soluciones que se pueda usar para comparar, como ocurría en [25], y tendremos que conformarnos con usar subsoluciones y supersoluciones. Además, al igual que en ese trabajo, la demostración de la unicidad de soluciones no es directa, sino que requiere el paso por la variable densidad. La transformación de presión a densidad, que ahora no es tan inmediata como en el caso lineal y requiere de un estudio detallado, proporcionará una de las herramientas más importantes en el desarrollo de la teoría.

Esta parte de la Memoria consta de tres capítulos, capítulos 6, 7 y 8, en los que desarrollamos los resultados publicados en el siguiente artículo, [23]:

- *Viscosity solutions for quasilinear degenerate parabolic equations of porous medium type.*

Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 3, 817–860.

(con J.L. Vázquez).

En la Parte III de la Memoria se caracteriza el comportamiento de la solución de la ecuación de los medios porosos en un dominio exterior cuando el dato de frontera es de tipo Dirichlet homogéneo. Este estudio surge como continuación del trabajo anterior publicado por F. Quirós y J. L. Vázquez, [101], donde se analiza el comportamiento asintótico de la misma ecuación, pero tomando como dato de frontera una función no trivial que no depende del tiempo. Una de las dificultades principales que aparece en nuestro estudio es la necesidad de construir subsoluciones del problema que aseguren que la solución no se hace idénticamente cero, fenómeno que no podía suceder en [101] debido al dato de frontera. Es más, como la solución con dato de frontera cero tiende a cero, se hace necesario realizar un cambio de escala espacial para poder “ver” el límite. Al igual que en [101] la técnica principal que se utiliza para caracterizar el comportamiento asintótico es la de *matching*, o combinación de desarrollos asintóticos. No obstante, la forma en la que se usa difiere de un trabajo a otro, ya que, si en [101] se caracteriza el

comportamiento cerca de la frontera libre a partir del comportamiento en el interior del dominio, en nuestro caso se invierte la implicación. Es decir, el comportamiento cerca de la frontera libre ayudará a determinar el comportamiento de la solución en el interior.

Los resultados que presentamos han dado lugar a un artículo de investigación, que ha sido enviado para su posible publicación, [22]:

- *Asymptotic behaviour of the porous media equation in domains with holes.*
(con F. Quirós y J.L Vázquez).

Si bien es verdad que las tres partes son, en cuanto a su contenido, muy distintas entre sí, hemos querido unificar su estructura. Así, cada parte está compuesta por una Introducción, donde se plantea el problema y se resumen los resultados, capítulos intermedios en los que se desarrolla la teoría y un capítulo final, titulado Conclusiones y comentarios, en el que, además de matizar algunos aspectos del problema tratado, se proponen problemas abiertos.

A lo largo de esta Memoria presentamos el trabajo realizado durante los últimos seis años. Corría el verano del año 2000 cuando, entre chapuzones y largas tardes al sol, me planteaba la posibilidad de empezar a trabajar en una empresa o de entrar en el mundo universitario, un mundo con el que siempre había convivido y con el que, al mismo tiempo, siempre había soñado. Al final pudo más la pasión y aquí estoy. El tiempo pasa rápido, pero no ha sido en vano. Durante estos años he tenido tiempo para aprender, para viajar, para trabajar e incluso para disfrutar. Seis años que han concluido con la escritura de esta Memoria y la cual, probablemente, no habría visto la luz si, no sólo durante seis años, sino durante veintiocho, yo no hubiera recibido la ayuda y el apoyo de la gente que está a mi alrededor.

Las primeras palabras de agradecimiento tienen que ser sin lugar a duda para mis padres. Gracias por todo lo que habéis hecho por mí; gracias por apoyarme

en cualquier decisión que haya tomado; gracias por aconsejarme. En definitiva, gracias por estar siempre ahí donde os haya podido necesitar.

A Juan Luis: gracias por el tiempo que me has dedicado y por todo lo que me has enseñado.

A Fernando: gracias por escucharme, por preocuparte por mí, por ayudarme y por tener tanta paciencia conmigo. Gracias por todas las horas que hemos pasado garabateando papeles, en la pizarra o delante del ordenador.

Julio, a ti te quiero dar las gracias por todos los buenos momentos que hemos pasado trabajando juntos. Gran parte de esta Memoria es fruto del entusiasmo que me has transmitido.

A la gente de la Pontificia Universidad Católica de Chile y de la Universidad de Buenos Aires tengo que agradecerles su hospitalidad. Gracias Martin, gracias Patu por hacerme sentir como en casa.

Uno de mis más gratos recuerdos escolares es el “Fenster öffnen, hier stinkt!”¹ con el que empezaban siempre las clases de F. Crevoisier. Gracias por ayudarme a dar mis primeros pasos en el apasionante mundo de las matemáticas.

Gracias Maite por todos los consejos que me has dado durante nuestras largas charlas, ya fuese tomando café o en una apasionante tarde de compras. Te echo de menos.

Para la mayoría de la gente trabajar resulta duro. Cuando en tu lugar de trabajo tienes buenos amigos, todo es mucho más sencillo. Gracias Chema, Dani, Javi, Pablo, Raúl y Ana, por acogerme en vuestra panda. Gracias Fernando y Jose, porque resulta agradable comer con compañía. Lola, gracias por tu apoyo. Cristina y Elena, gracias por aguantar mi música y mi incansable parloteo durante el tiempo que hemos compartido despacho.

Portu y Ana, “los amigos”. Pasamos horas y horas juntos: en el fondo del mar o en la cima de una montaña, en el cine y en el teatro, cenando en un sitio fino o en la tasquilla de debajo de casa... y creo que nunca lograré que entendáis en qué consiste mi trabajo; gracias de todas formas por escucharme. Gracias también por las risas, sin las cuales todo se haría cuesta arriba.

Gracias Ana, porque con tus pocos meses de vida, ya eres lo más importante

¹¡Abrid las ventanas, aquí apesta!

que tengo en la mía. Gracias también porque la mayor motivación que puedo tener después de un largo día de trabajo es saber que al volver a casa encontraré tus pequeñas manitas y tu gran sonrisa.

Y por último a ti Gonzalo: porque sobran los motivos y las palabras nunca podrán expresar todo mi agradecimiento, simplemente, gracias por estar siempre a mi lado.

Madrid, junio 2006

Índice

Prefacio	I
I Explosión en sistemas de reacción-difusión	1
Introducción	3
1. Definiciones	17
1.1. Planteamiento del problema	18
1.2. Definiciones	19
2. Sistemas con fuentes de calor en el interior	23
2.1. Preliminares	24
2.2. Tasas no simultáneas	26
2.3. Conjunto de explosión no simultáneo	30
2.4. Explosión no simultánea, $m > 1$	33
2.5. Explosión no simultánea, $0 < m < 1$	36
2.6. El problema de Neumann	40
3. Sistemas con flujos a través de la frontera	43
3.1. Preliminares	44
3.2. Tasas no simultáneas	46
3.3. Explosión en un problema escalar auxiliar	52
3.4. Conjunto de explosión no simultáneo	58
3.5. Explosión no simultánea	60
3.6. Explosión simultánea	67

4. Tasas de explosión simultánea	69
4.1. Preliminares	70
4.2. Tasas simultáneas	72
4.3. Hueco (i.a)	74
4.4. Hueco (ii)	76
5. Un método numérico adaptativo para tratar un sistema parabólico	79
5.1. Preliminares	80
5.2. El método adaptativo	86
5.3. Resultados auxiliares	88
5.4. Propiedades de la solución numérica adaptativa	95
5.5. Tasas simultáneas	113
5.6. Experimentos numéricos	116
5.7. Un método que mueve puntos	119
Conclusiones y comentarios	121
II Soluciones de viscosidad	129
Introducción	131
6. Preliminares	137
6.1. Definiciones	138
6.2. Primeras propiedades de las soluciones de viscosidad	141
6.3. La transformación densidad-presión	146
6.4. Ejemplos de subsoluciones y supersoluciones	152
7. Construcciones	159
7.1. Existencia de la solución de viscosidad maximal	160
7.2. Propiedades del soporte	165
7.3. Convoluciones con supremos e ínfimos	170
8. Teoremas principales de la teoría de soluciones de viscosidad	175
8.1. Preliminares	176
8.2. Comparación de soluciones de viscosidad estrictamente separadas	177
8.3. Existencia de la solución de viscosidad minimal.	187
8.4. Unicidad general, comparación de soluciones y dependencia continua.	190

8.5. Definiciones	194
Conclusiones y comentarios	199
III La ecuación de los medios porosos en un dominio con agujeros	203
Introducción	205
9. Preliminares	213
9.1. Definiciones	214
9.2. Ley de conservación	215
9.3. Subsoluciones y supersoluciones	216
10. Comportamiento asintótico de la solución	223
10.1. Límite exterior	224
10.2. Límite interior	229
10.3. Formulación global	235
Conclusiones y comentarios	239
IV Apéndices	245
A. Un método totalmente discreto	247
A.1. Preliminares	248
A.2. El método adaptativo	250
A.3. Propiedades de la solución numérica adaptativa	254
B. Continuidad de las soluciones de la ecuación de filtración	257
B.1. Preliminares	258
B.2. Teorema de Continuidad	259
C. Comportamiento exterior de la EMP. Un ejemplo radial	263
C.1. Preliminares	264
C.2. Resultados numéricos	265
Bibliografía	269

I

*Explosión en sistemas de
reacción-difusión*

Introducción

Una de las propiedades más notables que distinguen a los problemas de evolución no lineales de los lineales es la posibilidad de formación de singularidades a partir de datos regulares para los que se puede establecer una teoría de existencia, unicidad y dependencia continua para pequeños intervalos de tiempo. Consideremos un modelo sencillo en el que aparece un término de reacción,

$$\begin{cases} u' = u^p, \\ u(0) = u_0 > 0, \end{cases}$$

con $p > 1$. Esta ecuación tiene como única solución

$$u(t) = C_p(T - t)^{-\frac{1}{p-1}}, \quad C_p = (p - 1)^{-\frac{1}{p-1}}$$

con $T = u_0^{1-p}(p - 1)^{-1}$.

En este ejemplo tan simple puede verse que la solución u está bien definida para todo $0 < t < T$, mientras que

$$\limsup_{t \nearrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

Cuando esto ocurre decimos que u explota (*blow-up* en la literatura inglesa). En general, si $u' = f(u)$, donde f es positiva, creciente y regular, la condición de Osgood, [91],

$$\int^{+\infty} \frac{1}{f} < +\infty,$$

es necesaria y suficiente para que $u(t)$ explote en tiempo finito T en el sentido anterior.

Un ejemplo sencillo de una ecuación de evolución en la que no aparecen singularidades si los datos son regulares lo proporciona la ecuación del calor,

$$u_t = \Delta u, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty).$$

Como el valor de la solución u tiende a igualarse en el todo el espacio a medida que pasa el tiempo (se difunde), en ocasiones también se denota a esta ecuación con el nombre de ecuación de difusión.

En vista de estos dos ejemplos anteriores uno se puede preguntar qué le ocurrirá a la solución de una ecuación en la que se combinan términos de difusión con términos de reacción.

¿Está la solución definida globalmente? ¿hay explosión?

En otras palabras, nos planteamos si en la evolución de la ecuación “gana” el término de difusión o si por el contrario el efecto de la reacción se ve reducido por la difusión.

Centrémonos en el siguiente modelo de reacción-difusión

$$u_t = \Delta u + u^p,$$

para describir las principales cuestiones que surgen en el estudio de este tipo de ecuaciones.

¿Hay explosión para algún dato?, ¿explotan todas las soluciones o sólo algunas?, ¿para qué datos explotan las soluciones?

Para nuestro problema modelo se sabe que hay soluciones que explotan si y sólo si $p > 1$. El valor crítico $p = 1$ se conoce como exponente de existencia global. Además, si $1 < p \leq p_c = \frac{N+2}{N}$ todas las soluciones clásicas no negativas (no triviales) explotan en tiempo finito, mientras que si $p > p_c$ hay soluciones globales y soluciones que explotan. Un problema para el cual explotan todas las soluciones se llama un problema de Fujita y el número p_c se conoce como exponente de Fujita.

¿Cuándo se produce la explosión?

Diremos que hay explosión cuando T , el tiempo en el que la solución se hace infinita, es una cantidad finita. Existen otros tipos de explosión, la explosión en

tiempo infinito o grow-up y la explosión instantánea, pero no serán objeto de estudio en esta Memoria.

¿Dónde se produce la explosión?

Para una solución que explota en tiempo finito es interesante poder definir el conjunto espacial de puntos donde la solución se hace infinito. Cuando el problema está definido en \mathbb{R}^N existen tres alternativas: explosión puntual, en la que el conjunto de explosión tiene medida del Lebesgue N -dimensional cero; explosión regional, en la que la medida de dicho conjunto es finita y positiva, y explosión global, en la que la solución explota en todo punto. Estas nociones se adaptan fácilmente al caso en que el problema no está definido en todo el espacio.

Para el problema modelo la explosión es siempre puntual. Sin embargo, hay otros problemas de evolución para los que hay una mayor diversidad de comportamientos. Como ejemplo tenemos la ecuación de medios porosos con reacción,

$$u_t = \Delta u^m + u^p, \quad m > 1, p > 1.$$

La explosión es puntual si $p > m$, regional si $p = m$ y global si $p < m$.

¿Cómo se produce la explosión?

En la respuesta a esta pregunta aparecen dos aspectos importantes: la tasa de explosión de u , esto es, la velocidad a la que tiene lugar la explosión y el perfil de explosión, es decir, la forma espacial de la solución cerca del tiempo de explosión.

Para el problema modelo (con $m = 1$) se prueba que las soluciones que explotan en tiempo T lo hacen con la misma velocidad que la solución plana que explota en ese mismo instante,

$$\lim_{t \nearrow T} (T - t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(\cdot, t)\|_\infty = (p - 1)^{\frac{1}{1-p}}.$$

La teoría matemática de explosión comenzó en la década de 1960 con los trabajos de Kaplan [80] y Fujita [62], [63]; aunque no existe todavía una teoría completa, lo que por otra parte puede resultar casi imposible dada la cantidad y variedad de problemas que existen, sí se han realizado estudios exhaustivos en algunos modelos. Existen algunos libros que muestran muchos de los resultados conocidos y que contienen extensas listas de referencias, por ejemplo [12], [104].

Sin embargo, éste es un campo muy activo en el que hay continuamente nuevos resultados. Algunos de ellos están recogidos en [43], [64] y [85].

Todas la referencias arriba detalladas se centran, en mayor o menor medida, en problemas escalares. Existen también numerosos trabajos que se ocupan de la explosión en sistemas parabólicos de reacción-difusión, ya sea en problemas definidos en todo el espacio ([50]) o en dominios acotados ([27], [49], [60]), así como en sistemas acoplados a través de su frontera mediante flujos no lineales ([41], [42], [96], [113], [114]). Todos ellos consideran difusiones lineales y se centran fundamentalmente en encontrar curvas de Fujita y curvas de existencia global. En el caso de difusiones no lineales, determinar curvas de Fujita es un problema difícil que sólo ha sido resuelto en casos particulares, [95], [104].

Comencemos considerando un ejemplo sencillo, en el que hay dos ecuaciones de reacción-difusión,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, \\ v_t = \Delta v + v^q, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T),$$

con dato inicial (u_0, v_0) no negativo. Este ejemplo resulta quizá un poco artificial, ya que las ecuaciones están desacopladas y por tanto se pueden estudiar simplemente los dos problemas escalares y combinar los resultados. Es fácil ver que para que haya soluciones que exploten, basta con que o bien $p > 1$ o bien $q > 1$. Obsérvese que para que el par (u, v) explote, basta con que lo haga una de sus dos componentes. Además, si se cumple al menos una de las condiciones

$$1 < p \leq \frac{N+2}{N}, \quad 1 < q \leq \frac{N+2}{N},$$

entonces todas las soluciones explotan.

La situación es más compleja, y más interesante, si en las ecuaciones del ejemplo anterior intercambiamos los términos de reacción. Es decir, consideramos un sistema cuyas ecuaciones están acopladas, y en el que por tanto no se puede tratar cada ecuación de forma independiente,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p, \\ v_t = \Delta v + u^q, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T),$$

con dato inicial (u_0, v_0) no negativo. En [48] se demuestra que hay soluciones que explotan si y sólo si $pq > 1$. Además todas las soluciones no triviales explotan si se cumplen las dos condiciones siguientes

$$pq > 1, \quad \gamma := \frac{\max\{p, q\} + 1}{pq - 1} \geq \frac{N}{2},$$

mientras que si $\gamma < \frac{N}{2}$ hay tanto soluciones que explotan como soluciones globales.

Es evidente que si una de las componentes del sistema anterior permanece acotada, la otra también lo está. Por consiguiente, ambas componentes explotan cuando nos acercamos al tiempo de explosión. Eso no sucede así en todos los sistemas.

Si la solución de un sistema explota, no hay en principio ningún motivo por el cual todas las componentes deban ir a infinito en el tiempo de explosión. Puede suceder que algunas componentes permanezcan acotadas y otras no, fenómeno que denominaremos explosión no simultánea (*blow-up* no simultáneo). Para que esto sea posible, el acoplamiento entre las distintas componentes del sistema tiene que ser “débil”, de manera que las componentes que explotan no arrastren consigo a las otras. Para ilustrar este fenómeno consideremos un sistema totalmente acoplado que combina la ecuación del calor con términos de reacción no lineales,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p_{11}} v^{p_{12}}, \\ v_t = \Delta v + u^{p_{21}} v^{p_{22}}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T),$$

con dato inicial (u_0, v_0) no negativo y exponentes $p_{ij} \geq 0$. El sistema tiene soluciones que explotan (véase [50]) si y sólo si se cumple alguna de las condiciones

$$p_{11} > 1, \quad p_{22} > 1, \quad (p_{11} - 1)(p_{22} - 1) - p_{12}p_{21} < 0.$$

En [97] se demuestra que si $p_{11} > p_{21} + 1$ existen datos iniciales tales que una de las componentes del sistema permanece acotada mientras que la otra explota.

De esta exposición podemos concluir que, cuando se trata con sistemas, además de las preguntas planteadas para los problemas escalares, surgen otras adicionales, relacionadas estrictamente con este tipo de problemas.

¿Explotan todas las componentes del sistema simultáneamente o sólo lo hacen algunas, mientras que las otras permanecen acotadas?

Y para que se dé esta última posibilidad,

¿cómo de débil tiene que ser el acoplamiento entre las ecuaciones?

No es posible dar una respuesta a estas preguntas que sea válida para todos los problemas. Por ello, se hace necesario estudiar cada caso por separado, usando ideas y técnicas distintas adaptadas a cada problema concreto. Aunque se conocen bastantes resultados para el caso de difusión lineal (véase [94], [97] y las referencias que aparecen en estos trabajos), quedan aún muchos interrogantes cuando se trata de difusión no lineal.

En esta primera parte de la Memoria estudiamos formación de singularidades en sistemas, centrándonos fundamentalmente en el caso de difusión no lineal.

En el Capítulo 2 estudiamos un sistema de dos ecuaciones parabólicas con difusión no lineal con términos fuente no lineales,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}v^{p_{12}}, \\ v_t = (v^n)_{xx} + u^{p_{21}}v^{p_{22}}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T),$$

siendo $p_{ij} \geq 0$ y los exponentes de difusión, m y n , estrictamente positivos.

En [104] se analizan la posibilidad de explosión no simultánea de este mismo sistema, pero restringido a soluciones planas, es decir, independientes de x ,

$$\begin{cases} u' = u^{p_{11}}v^{p_{12}}, \\ v' = u^{p_{21}}v^{p_{22}}. \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que que las soluciones de este problema exploten resulta ser la misma que la obtenida para el caso de difusión lineal. Además, se prueba que si $p_{11} > p_{21} + 1$, entonces la componente u explota mientras que v permanece acotada.

A la vista de esta condición, nos planteamos determinar la posible influencia de la difusión en la explosión no simultánea. Para ello distinguiremos dos casos: difusión lenta y difusión rápida. La difusividad de la componente u viene dada por mu^{m-1} , por tanto, cuando $m > 1$, para valores de u próximos a cero, la difusión es lenta, ya que el término u^{m-1} es pequeño. Si por el contrario $m < 1$, la difusión es rápida. Claramente los conceptos de difusión lenta y rápida en función de $m > 1$ y $m < 1$ se invierten cuando u es grande.

En primer lugar veremos que cuando $m > 1$ la misma condición dada para las soluciones planas, también caracteriza la explosión no simultánea. Es decir, la difusión no influye en la explosión no simultánea y las soluciones se comportan como las planas. La idea que hay detrás de este fenómeno es que si u es grande, la difusividad mu^{m-1} es rápida y por tanto las soluciones se “hacen planas”.

Teorema. *Sea $m \geq 1$. Si u explota y v permanece acotada, entonces $p_{11} > p_{21} + 1$. Recíprocamente, si $p_{11} > p_{21} + 1$, entonces existen datos iniciales tales que u explota y v permanece acotada.*

Uno se podría preguntar si las soluciones planas caracterizan siempre la explosión no simultánea en este problema. Y la respuesta es no. Una novedad importante que aporta este capítulo a la teoría general es que aparecen condiciones para caracterizar la explosión no simultánea que dependen de la difusión. Ésta tiene gran relevancia si $m < 1$ e influye notablemente en la posibilidad de aparición de explosión no simultánea. Intuitivamente se puede pensar que los valores de u próximos a infinito no se difunden, por ser mu^{m-1} pequeño. Las soluciones son entonces “poco planas”, “se hacen picudas”.

Teorema. *Sea $0 < m < 1$. Si u explota y v permanece acotada, entonces $p_{11} > \max\{1, p_{21} + \frac{m+1}{2}\}$.*

La demostración del recíproco de este resultado tiene dificultades técnicas que no hemos sido capaces de superar. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado parcial.

Teorema. *Sea $0 < m < 1$. Si $p_{11} > \max\{1, p_{21} + \frac{m+1}{2}\}$ y además $p_{12} = 0$, entonces existen datos iniciales tales que u explota y v permanece acotada.*

Este resultado, en el que las ecuaciones se desacoplan parcialmente imponiendo la condición $p_{12} = 0$, parece indicar, no obstante, que el teorema será cierto en el caso general.

Obsérvese que cuando $0 < m < 1$ el rango de parámetros en el que es posible la explosión no simultánea aumenta con respecto a las planas. Es decir, hay una región en la que no es posible que las soluciones planas tengan explosión no simultánea, y sin embargo sí existen soluciones no planas tales que una componente explota y la otra no.

El resto de los capítulos de esta parte de la Memoria están dedicados a estudiar otro problema modelo: si en el Capítulo 2 la reacción se producía dentro del dominio mediante términos fuente no lineales, en los capítulos 3, 4 y 5 la reacción se debe a un flujo no lineal a través de la frontera. En particular, en el Capítulo 3 estudiamos la posibilidad de explosión no simultánea de las soluciones de

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, \\ v_t = (v^n)_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T),$$

acopladas mediante términos no lineales en uno de los extremos del intervalo

$$\begin{cases} -(u^m)_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -(v^n)_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T),$$

y con flujo cero en el otro extremo,

$$\begin{cases} (u^m)_x(L, t) = 0, \\ (v^n)_x(L, t) = 0, \end{cases} \quad t \in (0, T).$$

Al igual que en el problema anterior, es natural preguntarse cuál será la influencia de la difusión en la explosión no simultánea. Uno se podría plantear incluso si el hecho de que el sistema esté definido en un intervalo acotado influye de alguna manera en las condiciones de los exponentes para que haya explosión o si por el contrario éstas serán las mismas que las del problema definido en toda la recta real.

En [98] se demuestra que para el problema definido en la semirrecta positiva, u explota y v permanece acotada, si y sólo si $2p_{21} < 2p_{11} - (m + 1)$. Como veremos, esta condición coincide, cuando $p_{11} > m$, con la de explosión no simultánea del sistema estudiado en nuestro caso. Esto se debe fundamentalmente a la estructura espacial de la componente que explota, u : cuando $p_{11} > m$ la explosión se concentra en el origen y el comportamiento de la solución lejos de ese punto no tiene ninguna

relevancia. Desde el punto de vista de la explosión se puede pensar que u no “ve” lo que pasa lejos del cero y la condición en $x = L$ no influye de manera alguna en el comportamiento de explosión de u . Sin embargo, si $p_{11} \leq m$, la condición para que haya explosión no simultánea (en el problema definido en el intervalo acotado, Capítulo 3) es bien distinta. En esta caso la difusión no influye y se tiene que u explota y v permanece acotada si $2p_{21} < p_{11} - 1$.

Teorema. *Si u explota y v permanece acotada, entonces $2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$. Recíprocamente, si $2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$, entonces existen datos iniciales tales que u explota y v permanece acotada.*

En esta situación uno se podría preguntar también si existe algún rango de parámetros para el cual u explota y v permanece acotada para todos los datos iniciales. En este sentido presentamos aquí los primeros resultados conocidos en la literatura sobre este fenómeno. Si bien es verdad que no cubren todos los posibles casos de explosión no simultánea, sirven al menos de ejemplo para la ilustrar lo que podría ser la teoría general.

La explosión es siempre no simultánea si, además de existir la posibilidad de que u explote y v permanezca acotada, se da alguna de las siguientes condiciones:

- u explota y v no puede explotar por sí misma, (punto (i) del teorema);
- u y v pueden explotar por sí mismas, (punto (ii) del teorema).

Teorema. *Supongamos que se cumple la condición de explosión no simultánea $2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$. Si además se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

$$(i) \quad p_{22} \leq \min\left\{1, \frac{n+1}{2}\right\};$$

$$(ii) \quad p_{22} > \min\left\{1, \frac{n+1}{2}\right\}, \quad 2p_{12} \geq \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}$$

y además o bien $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$, o bien $p_{21} = 0$ y $m \geq 1$;

entonces u explota y v permanece acotada para todo dato inicial positivo.

Obsérvese que el punto (ii) del teorema introduce algunas restricciones adicionales y no cubre todos los posibles casos en los que cada componente puede explotar por sí misma.

Una vez estudiadas todas las posibilidades de explosión no simultánea parece razonable plantearse también si existen datos tales que las dos componentes exploten simultáneamente o incluso si lo hacen para todos los datos iniciales.

Teorema. *Si las condiciones $2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$ y $2p_{12} < \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}$ se verifican simultáneamente, entonces hay datos iniciales tales que la explosión es no simultánea y además existe al menos una solución con explosión simultánea.*

Si por otro lado no se da ninguna condición que haga posible la explosión no simultánea, pero sí hay soluciones que explotan, es inmediato que las dos componentes del sistema tienen que tender a infinito en el mismo tiempo, y la explosión es simultánea.

Cuando la explosión es no simultánea, determinar la tasa de explosión de la componente que explota se reduce a estudiar el problema escalar considerando la componente que permanece acotada como un coeficiente congelado, pero que depende del tiempo. Cuando la explosión es simultánea el análisis es más complicado y sólo hay resultados parciales que caracterizan la tasa de explosión de ambas componentes. En el Capítulo 4, nos centramos en este problema, pero en el caso simplificado en el cual la difusión es lineal. En concreto estudiamos las tasas de explosión simultánea para el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ v_t = v_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T),$$

con flujo no lineal en $x = 0$

$$\begin{cases} -u_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -v_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T),$$

y flujo cero en el otro extremo del intervalo, $x = L$.

Existen numerosos resultados parciales (véase [92], [102], [115]) que determinan las tasas cuando la explosión del sistema es simultánea, aunque dejan algunos rangos de parámetros por cubrir. En todos estos trabajos, las tasas quedan definidas mediante potencias de $(T - t)$. Sin embargo, esto no es siempre así. En los casos críticos, en los que se pasa de explosión simultánea a explosión no simultánea y que hasta ahora nunca habían sido estudiados, mostramos que aparecen tasas logarítmicas.

Teorema. *Si la explosión es simultánea, entonces $u(0, t)$ se comporta como $f(t)$ y $v(0, t)$ lo hace como $g(t)$, siendo f y g solución del sistema de ecuaciones ordinarias siguiente:*

$$\begin{cases} f' = f^{2p_{11}-1} g^{2p_{12}}, \\ g' = f^{2p_{21}} g^{2p_{22}-1}. \end{cases}$$

Los resultados presentados hasta aquí responden en mayor o menor medida a las preguntas planteadas en páginas anteriores. Para completar el estudio, sería interesante intentar responder a las mismas preguntas pero desde la óptica del análisis numérico. En concreto, nos planteamos dar una respuesta afirmativa a la siguiente cuestión:

¿Existen métodos numéricos que reproduzcan las principales propiedades de explosión?

Uno de los objetivos de los métodos numéricos para problemas de explosión es intentar reproducir las propiedades cualitativas de la solución del problema que se está aproximando. En [7] y [70] se pueden encontrar largas listas de referencias sobre métodos numéricos para problemas con explosión.

Cuando se intentan aplicar los esquemas numéricos “clásicos” de malla espacial fija a problemas con flujo en la frontera, se observa que en algunos casos no se reproducen correctamente las condiciones de explosión (véase [53]). Se hace entonces necesario desarrollar un método en el cual la malla no sea fija: es decir, un método que añada puntos a la malla según un determinado criterio, [54].

El Capítulo 5 está dedicado precisamente al estudio numérico de un problema con flujo en la frontera. Concretamente intentamos reproducir numéricamente las

propiedades de explosión del problema planteado en el Capítulo 3.

Para definir el esquema numérico consideramos dos particiones independientes del intervalo de definición del problema $(0, L)$ y buscamos aproximaciones numéricas $(U(t), V(t))$ de la verdadera solución $(u(x, t), v(x, t))$, que sean solución del sistema de ecuaciones ordinarias que resulta al discretizar las derivadas espaciales del problema continuo utilizando diferencias finitas centradas con paso no uniforme y manteniendo la variable t continua.

La idea fundamental del método adaptativo consiste en que, dependiendo del número de veces que se refinan las mallas, infinitas o finitas veces, existen dos posibles ecuaciones diferenciales ordinarias que rigen el comportamiento de U' . De la misma forma, también habrá dos ecuaciones diferentes que determinen el comportamiento de V' . Integrando el sistema apropiado en cada caso recuperamos los resultados descritos en el Capítulo 3 para el problema continuo.

Teorema. *El método numérico descrito en el Capítulo 5 reproduce correctamente las condiciones de explosión, explosión no simultánea y explosión simultánea del problema descrito en el Capítulo 3. Además, cuando la explosión es no simultánea la tasa de explosión y el conjunto de explosión de la componente que explota coinciden con los del problema continuo.*

Por otro lado recordemos que en el caso continuo sólo obtuvimos resultados parciales para describir las condiciones que producen siempre explosión no simultánea. Estos resultados se pueden completar cuando se hace el estudio del método numérico, cubriendo todo el rango de exponentes, lo que nos lleva a conjeturar que el mismo resultado será correcto en el problema continuo.

Teorema. *La explosión es siempre no simultánea si y sólo si $2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$ y $2p_{12} \geq \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}$.*

Cuando se trata de estudiar las tasas de explosión simultánea, el estudio numérico también mejora los resultados conocidos para el problema continuo. En el caso discreto, integrando los cuatro sistemas de ecuaciones ordinarias que describen el comportamiento de la solución, resulta sencillo calcular las tasas de explosión.

Teorema. *Supongamos que U y V explotan simultáneamente. Si $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$ o $m = n = 1$, entonces las tasas de explosión numéricas coinciden con las continuas.*

Dado que no se conocen todas las tasas de explosión simultánea para el problema continuo, en general no podremos identificar las tasas numéricas con las continuas. Cabe destacar sin embargo, que las tasas numéricas coinciden con las continuas cuando estas últimas se conocen. Gracias a este hecho podemos conjeturar tasas continuas en rangos donde en principio son desconocidas.

1

Definiciones

El objetivo de este capítulo es simplemente definir los conceptos relacionados con la explosión no simultánea, que serán necesarios en los capítulos posteriores.

Contenido

1.1. Planteamiento del problema	18
1.2. Definiciones	19

1.1 Planteamiento del problema

Consideremos dos ecuaciones parabólicas con difusión no lineal de la forma

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, \\ v_t = (v^n)_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T), \quad (1.1)$$

con m y n constantes positivas. El intervalo de definición espacial (a, b) puede ser bien toda la recta real, \mathbb{R} , o bien un intervalo acotado, digamos $(0, L)$ y la constante T denota el tiempo máximo de existencia de la solución, que puede ser en principio, finito o infinito.

En esta parte de la Memoria nos planteamos estudiar cómo influye el comportamiento de una componente de la solución en la otra y en particular nos centraremos en la formación de singularidades en tiempo finito. A la vista de las ecuaciones (1.1) este planteamiento no tiene mucho sentido, ya que la solución de este problema está bien definida para $t \in (0, \infty)$. Además, como las ecuaciones están totalmente desacopladas, cada una de ellas es independiente de la otra y no cabe la posibilidad de influencias entre las componentes de la solución.

Por tanto para poder proseguir con nuestro estudio, lo primero que nos ocupa es modificar convenientemente el problema (1.1) para obtener un sistema en el que las ecuaciones estén acopladas. Para ello consideraremos dos términos $u^{p_{11}}v^{p_{12}}$ y $u^{p_{21}}v^{p_{22}}$ distintos de cero, y con p_{11} , p_{12} , p_{21} y p_{22} constantes no negativas. Una primera idea es añadir estos términos a las ecuaciones, de manera que éstas queden acopladas mediante términos fuente,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}v^{p_{12}}, \\ v_t = (v^n)_{xx} + u^{p_{21}}v^{p_{22}}, \end{cases} \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T).$$

Otra posibilidad es mantener las ecuaciones de (1.1) sin modificar y conseguir que el sistema quede acoplado introduciendo términos de flujo a través de la frontera (que supondremos en $x = 0$)

$$\begin{cases} -(u^m)_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -(v^n)_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T).$$

En cualquiera de los dos casos obtenemos un sistema de dos ecuaciones parabólicas acopladas mediante términos de reacción no lineales. Para terminar de

definir el problema consideramos unos datos iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in (a, b),$$

que supondremos siempre estrictamente positivos, continuos y acotados.

1.2 Definiciones

Dado un sistema de ecuaciones parabólicas como los descritos en la sección anterior, nos interesa saber si es posible que las soluciones tiendan a infinito en tiempo finito o incluso si es posible que una tienda a infinito en tiempo finito y la otra no.

Definición 1.1 Diremos que la solución (u, v) del sistema de ecuaciones parabólicas es global si T es infinito.

Si por el contrario T es finito, entonces

$$\limsup_{t \nearrow T} \{ \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty} \} = \infty,$$

y diremos que la solución explota.

Si la solución de un sistema de dos ecuaciones explota, no hay en principio ningún motivo por el cual las dos componentes, u y v , deban tender a infinito simultáneamente en el tiempo de explosión T . De hecho, pueden existir datos iniciales para los cuales una de las componentes explota, mientras que la otra permanece acotada.

Definición 1.2 Diremos que hay explosión no simultánea en el sistema de ecuaciones parabólicas si o bien u explota y v permanece acotada, o bien v explota y u permanece acotada.

Para fijar ideas y facilitar la lectura, supondremos, siempre que no se diga lo contrario, cuando hablemos de explosión no simultánea que es u la componente que explota y v la que está acotada.

Cuando u explota y v permanece acotada parece lógico pensar que u se comporta como la solución de un problema escalar en el que v es un coeficiente congelado que depende del tiempo. En esta situación uno puede estar interesado en conocer en qué puntos tiende u a infinito.

Definición 1.3 Definimos el conjunto de explosión de u como

$$B(u) = \{x : \text{existe } x_n \rightarrow x, t_n \nearrow T \text{ con } u(x_n, t_n) \rightarrow \infty\}.$$

Si la explosión está localizada en un número finito de puntos, diremos que la explosión es puntual. Cuando la solución explota en todos los puntos donde el problema está definido, la explosión es global. Finalmente, si la explosión se produce en un subconjunto de medida positiva estrictamente contenido en el intervalo de definición del problema diremos que la explosión es regional.

También sería interesante conocer cómo tiende u a infinito y si es posible caracterizar el comportamiento de u mediante una función elemental.

Definición 1.4 Definimos la tasa de explosión de u como la velocidad a la que u se hace infinito en T en el siguiente sentido: existe una constante positiva, C_\star , tal que

$$\lim_{t \nearrow T} \frac{\|u(\cdot, t)\|_\infty}{g(t)} = C_\star,$$

siendo g una función elemental.

En general no podremos determinar la constante C_\star y tendremos que contentarnos con dar estimaciones de la forma

$$c \leq \frac{\|u(\cdot, t)\|_\infty}{g(t)} \leq C,$$

con c y C constantes positivas.

En la mayoría de los problemas que estudiamos la tasa es de tipo potencia, es decir

$$c \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty (T - t)^\gamma \leq C, \quad \gamma > 0.$$

Sin embargo esto no es siempre así: se conocen casos en los que la tasa puede ser un logaritmo o incluso un productos de logaritmos y potencias.

A lo largo de los capítulos que componen esta parte de la Memoria usaremos la siguiente notación: mediante \mathbb{R}_+ denotaremos al intervalo $(0, \infty)$. Las constantes C y c serán positivas y podrán cambiar su valor de una línea a otra o incluso dentro de la misma línea. Finalmente $f \sim g$ significará que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 f \leq g \leq C_2 f$.

Los programas utilizados para realizar los cálculos numéricos han sido realizados todos con MATLAB[®].

Sistemas con fuentes de calor en el interior

Este capítulo está dedicado al estudio de un sistema de ecuaciones parabólicas que consta de dos ecuaciones de reacción-difusión totalmente acopladas mediante términos fuente y con difusión de tipo potencia. Bajo hipótesis adecuadas en los datos iniciales demostramos que en ocasiones puede haber explosión no simultánea. Las condiciones para que haya explosión no simultánea dependen fuertemente de los parámetros de difusión y de hecho observamos que aparecen diferencias sustanciales entre el caso de difusión rápida y el de difusión lenta.

Contenido

2.1. Preliminares	24
2.2. Tasas no simultáneas	26
2.3. Conjunto de explosión no simultáneo	30
2.4. Explosión no simultánea, $m > 1$	33
2.5. Explosión no simultánea, $0 < m < 1$	36
2.6. El problema de Neumann	40

2.1 Preliminares

Consideremos soluciones (u, v) del sistema parabólico no lineal

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}v^{p_{12}}, \\ v_t = (v^n)_{xx} + u^{p_{21}}v^{p_{22}}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \quad (2.1)$$

con datos iniciales continuos, acotados y simétricos

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

y supongamos que $p_{ij} \geq 0$ y $m, n > 0$. En este rango de parámetros las difusiones pueden ser degeneradas o singulares a nivel cero. Es más, los términos de reacción no son necesariamente Lipschitz, lo que puede producir fenómenos de no unicidad. Para evitar estas dificultades técnicas, supondremos que $u_0, v_0 \geq \delta > 0$. Esto no supone ninguna restricción significativa, ya que nuestro objetivo es estudiar el comportamiento del sistema para valores grandes de la solución. Además, esta condición en los datos iniciales permite considerar las soluciones en sentido clásico. Es habitual encontrar ciertas restricciones de monotonía en este tipo de problemas, [104], que nosotros también impondremos. A saber, supondremos que u_0, v_0 son datos iniciales simétricos y decrecientes en $|x|$, y tales que $u_t, v_t \geq 0$.

Un caso particular del problema (2.1) es el de las soluciones planas. Es decir, soluciones independientes de x y que por tanto satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} u'(t) = u^{p_{11}}(t)v^{p_{12}}(t), \\ v'(t) = u^{p_{21}}(t)v^{p_{22}}(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

con dato inicial $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0$.

Comparando las soluciones del problema (2.1) con soluciones planas que explotan y con soluciones planas globales, es fácil concluir que las soluciones del problema (2.1) explotan si y sólo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las siguientes condiciones

$$p_{11} > 1, \quad p_{22} > 1, \quad (p_{11} - 1)(p_{22} - 1) - p_{12}p_{21} < 0.$$

Una vez que sabemos cuándo hay explosión, nuestro siguiente paso es caracterizar el rango de parámetros para los que ocurre explosión no simultánea en el problema (2.1)–(2.2).

La posibilidad de explosión no simultánea del problema (2.1)–(2.2) se menciona por primera vez en [104], aunque en este trabajo los autores se restringen las soluciones planas. Existen soluciones (u, v) del sistema (2.3) tales que u explota y v está acotada si y sólo si

$$p_{11} > p_{21} + 1.$$

Resulta razonable que en esta condición no aparezca ningún parámetro de difusión (m o n), ya que las soluciones planas tampoco dependen de ella. Surgen entonces de manera natural las siguientes preguntas:

¿hay explosión no simultánea de soluciones no planas fuera de este rango de parámetros?

Y en caso afirmativo,

¿cómo influye la difusión en la condición de explosión no simultánea?

En el caso de difusión lineal $m = n = 1$ (estudiado en [97]), la respuesta a la primera pregunta es no. La condición necesaria (con ciertas restricciones en el dato inicial) y suficiente para la existencia de explosión no simultánea vuelve a ser $p_{11} > p_{21} + 1$.

Queda entonces pendiente responder a estas dos preguntas cuando la difusión es no lineal. En la Sección 2.4 estudiamos el caso $m > 1$ y veremos que la respuesta a la primera pregunta vuelve a ser negativa. Es decir, la condición para que u explote y v esté acotada es de nuevo $p_{11} > p_{21} + 1$.

Podemos responder afirmativamente a la primera pregunta cuando el coeficiente de difusión de la solución que explota es menor que uno, $0 < m < 1$. En la Sección 2.5 veremos que, con la restricción adicional $p_{12} = 0$, la condición para que haya explosión no simultánea es

$$p_{11} > \max \left\{ 1, p_{21} + \frac{m+1}{2} \right\}.$$

Obsérvese que el parámetro de difusión m aparece explícitamente en esta condición.

Por lo tanto, si $0 < m < 1$ hay explosión no simultánea en un rango de parámetros para el cual este fenómeno no es posible en el caso de soluciones planas. Conjeturamos que este resultado será también cierto sin la hipótesis adicional

$p_{12} = 0$. Sin embargo, la demostración de este hecho parece delicada, como se verá en la Sección 2.5.

2.2 Tasas no simultáneas

El punto clave para obtener las condiciones de explosión no simultánea es el estudio detallado del comportamiento de u cuando v está acotada. Para ello podemos considerar a v como un coeficiente congelado. Además, como las soluciones son simétricas, u se puede ver como una solución que explota del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}h, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.4)$$

con $u_x \leq 0$, $u_t \geq 0$. La función $h = h(x, t) \geq c > 0$, que sustituye a v , está acotada, es continua y satisface $h_x \leq 0$, $h_t \geq 0$. El comportamiento de las soluciones del problema (2.4) es bien conocido cuando $h = 1$,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.5)$$

véase por ejemplo [104]. En el caso general, como h está acotada tanto superior como inferiormente, esperamos que la solución de (2.4) se comporte como la de (2.5).

Esta observación justifica que introduzcamos los siguientes números

$$\alpha = \frac{1}{p_{11} - 1}, \quad \beta = \frac{p_{11} - m}{2(p_{11} - 1)},$$

determinados por la estructura autosemejante del problema (2.5). Obsérvese que en el rango de explosión de (2.4), $p_{11} > 1$, α es estrictamente mayor que cero. En este caso, cuando $\alpha > 0$, el problema (2.5) posee una solución autosemejante de la forma

$$U(x, t) = (T - t)^{-\alpha} F\left(\frac{x}{(T - t)^\beta}\right), \quad (2.6)$$

que además satisface

$$U(x, t) \leq Cx^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \quad (2.7)$$

véase [104].

Como dijimos anteriormente, esperamos que las soluciones de (2.4) se comporten como las de (2.5): demostramos a continuación que la explosión tiene estructura autosemejante, incluso si $h \neq 1$.

Lema 2.1 *Sea $p_{11} > 1$ y sea u una solución de (2.4). Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$u(0, t) \leq C(T - t)^{-\alpha}. \quad (2.8)$$

Demostración. Sea $M(t) = \|u(\cdot, t)\|_\infty = u(0, t)$. Siguiendo la técnica de cambios de escala introducida en [74], definimos

$$\phi_M(y, s) = \frac{1}{M(t)} u(ay, bs + t), \quad y \geq 0, \quad \frac{-t}{b} \leq s \leq 0,$$

donde

$$a = M^{\frac{m-p_{11}}{2}}, \quad b = M^{1-p_{11}}.$$

Los parámetros a y b están elegidos de forma que la familia $\{\phi_M\}$ resulte ser solución de la misma ecuación que u ,

$$(\phi_M)_s = (\phi_M^m)_{yy} + \phi_M^{p_{11}} h_M, \quad (2.9)$$

con $h_M(y, s) = h(ay, bs + t)$. Obsérvese además que, como u explota, $M \nearrow \infty$ cuando $t \nearrow T$. Por otro lado, como $p_{11} > 1$, tenemos $b \searrow 0$.

Supongamos que existe una constante positiva C tal que para todo M suficientemente grande se tiene que

$$(\phi_M)_s(0, 0) \geq C > 0. \quad (2.10)$$

Entonces, reescribiendo (2.10) en términos de M , obtenemos

$$M^{-p_{11}} M' \geq C.$$

Integrando esta última expresión entre t y T y usando que $M \nearrow \infty$ cuando $t \nearrow T$, deducimos la tasa de explosión (2.8).

Para concluir la demostración del lema queda entonces pendiente probar la afirmación (2.10).

La prueba se basa fundamentalmente en el hecho de que $\{\phi_M\}$ es una familia uniformemente acotada de soluciones de (2.9). La cota uniforme $0 \leq \phi_M \leq 1$ es consecuencia de la monotonía en tiempo de la solución $u_t \geq 0$. El hecho de tener una cota uniforme para ϕ_M es crucial para continuar con el argumento, ya que, como es bien conocido, las soluciones uniformemente acotadas de (2.9) resultan ser equicontinuas en subconjuntos compactos de su dominio, [46]. Así, utilizando el Lema de Ascoli-Arzelà, dada una sucesión $\{\phi_{M_j}\}$, existe una función continua Φ y una subsucesión, que denotamos de nuevo por $\{\phi_{M_j}\}$, tal que $\phi_{M_j} \rightarrow \Phi$ uniformemente en $[0, L] \times [-S, 0]$ cuando $M_j \rightarrow \infty$, (obsérvese que para cualquier $S < 0$ el dominio contiene un conjunto compacto de la forma $[0, L] \times [-S, 0]$ si M es suficientemente grande).

Se cumple también que $\Phi(0, 0) = 1$. Por tanto, existe un entorno de $(0, 0)$, U , tal que $\Phi > \frac{1}{2}$ en U . Como la convergencia es uniforme en \bar{U} (podemos suponer que \bar{U} es compacto), tenemos que $\frac{1}{4} \leq \phi_{M_j} \leq 1$ en \bar{U} para j grande. Deducimos entonces que las funciones ϕ_{M_j} son soluciones de ecuaciones uniformemente parabólicas en \bar{U} . Como además están uniformemente acotadas, obtenemos gracias a las estimaciones tipo Schauder, [87], que

$$\|\phi_{M_j}\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}} \leq C \quad \text{en } \bar{U},$$

lo que nos permite pasar al límite en las derivadas de la ecuación (2.9).

El razonamiento se concluye por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sucesión $\{\phi_{M_j}\}$ tal que $(\phi_{M_j})_s(0, 0) \rightarrow 0$. Pasando al límite en (2.9),

$$\Phi_s = (\Phi^m)_{yy} + K\Phi^{p_{11}}, \quad K = \lim_{t \nearrow T} h_M(y, s),$$

con $\Phi_s(0, 0) = 0$. Por otro lado, como $\Phi_s \geq 0$ y $(\Phi_s)_y(0, 0) = 0$, obtenemos, por el Lema de Hopf, que $\Phi_s \equiv 0$. Es decir Φ no depende de s . Por lo tanto, Φ es una solución no negativa de

$$\begin{cases} (\Phi^m)_{yy} + K\Phi^{p_{11}} = 0, \\ \Phi_y \leq 0, \\ \Phi(0) = 1, \end{cases}$$

y en consecuencia, Φ^m es cóncava. Es más, como $K > 0$, tiene que existir al menos un punto donde Φ^m sea estrictamente cóncava; si no fuese así tendríamos $\Phi^{p_{11}} \equiv 0$, que es imposible, ya que $\Phi(0) = 1$. Finalmente, de la concavidad estricta de Φ^m , concluimos que Φ^m tiene que cortar al eje y , y obtenemos una contradicción con el hecho de que Φ es no negativa. \square

Lema 2.2 *Sea $p_{11} > 1$ y sea u una solución de (2.4). Entonces existen constantes $C, c > 0$ tal que*

$$u(x, t) \geq C(T - t)^{-\alpha}, \quad x \leq c(T - t)^\beta. \quad (2.11)$$

Demostración. Como h está acotada, u es subsolución de

$$u_t = (u^m)_{xx} + Cu^{p_{11}}.$$

Consideremos una solución plana de este último problema con el mismo tiempo de explosión, T , que u . Por tanto

$$u(0, t) > C(T - t)^{-\alpha}, \quad (2.12)$$

para todo $t \in (0, T)$. Si no fuese así, debería existir un tiempo t_0 en el cual u estuviese por debajo de la solución plana. Pero esto implicaría que las soluciones tendrían que tener distintos tiempos de explosión, contrariamente a nuestra hipótesis.

El siguiente paso consiste en extender la estimación (2.12) a conjuntos de la forma $x \leq c(T - t)^\beta$. Para ello observamos que u es una supersolución de

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ u(0, t) = C(T - t)^{-\alpha}, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (2.13)$$

El problema (2.13) tiene una solución autosemejante, U , con tiempo de explosión finito T . Esta solución U es de la forma (2.6), (véase [57] para $m = 1$, [68], [69] para $m > 1$ y [52] para $0 < m < 1$).

Introducimos la función \tilde{u} como un cambio de escala en U , $\tilde{u}(x, t) = AU(Bx, t)$. La idea consiste en elegir A y B de forma que \tilde{u} y u se puedan comparar. Tomando

$A = B^\gamma$, con $\gamma = \frac{2}{1-m}$, tenemos que \tilde{u} satisface el siguiente problema

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = (\tilde{u}^m)_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ \tilde{u}(0, t) = AU(0, t) = AC(T-t)^{-\alpha}, & t \in (0, T), \\ \tilde{u}(x, 0) = AU(A^{\frac{1}{\gamma}}x, 0), & x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Si elegimos ahora A suficientemente pequeño, por comparación, $\tilde{u}(x, t) \leq u(x, t)$. Por tanto,

$$u(x, t) \geq A(T-t)^{-\alpha} F\left(\frac{A^{\frac{1}{\gamma}}x}{(T-t)^\beta}\right) \geq cA(T-t)^{-\alpha}$$

para $x \leq \xi_0 A^{-\frac{1}{\gamma}}(T-t)^\beta$, donde $c = \min_{\xi \in [0, \xi_0]} F(\xi)$. Si cogemos ξ_0 pequeño, el perfil autosemejante es mayor que una constante positiva y por tanto concluimos que $c > 0$. \square

2.3 Conjunto de explosión no simultáneo

Los resultados obtenidos hasta ahora, Lema 2.1 y Lema 2.2, junto con el comportamiento de las soluciones autosemejantes en el origen, son las únicas herramientas necesarias para la demostración de los teoremas de explosión no simultánea. No obstante, por completitud, continuamos con el estudio del comportamiento de u , describiendo su estructura espacial cerca del origen cuando el tiempo está próximo al tiempo de explosión. Como consecuencia obtenemos el conjunto de explosión de u .

Sea

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \frac{1}{3}), \\ -3x^2 + 3x - \frac{1}{3}, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 1 - x, & x \in (\frac{2}{3}, 1). \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$ definimos $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon\phi(\varepsilon^2x)$.

Lema 2.3 *Sea $p_{11} > 1$ y sea u una solución de (2.4) con $u_x < 0$. Si $p_{11} > m$, y*

$$1 < \gamma < \frac{p_{11} - (1 - m)}{m},$$

entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$u(x, t) \leq \left(C \int_0^x \phi_\varepsilon(s) ds \right)^{\frac{-1}{m(\gamma-1)}} \quad (2.14)$$

para $(x, t) \in [0, \varepsilon^{-2}] \times [0, T)$.

En [58] y en [61] se demuestran resultados similares para un problema con reacción en la frontera y para $m = 1$ respectivamente. Las técnicas que se utilizan en ambos casos se pueden adaptar para la demostración de este lema.

Demostración. Definimos

$$J(x, t) = w_x(x, t) + \phi_\varepsilon(x)w^\gamma(x, t),$$

donde $w = u^m$ y afirmamos que

$$J \leq 0 \quad \text{en } [0, \varepsilon^{-2}] \times [0, T). \quad (2.15)$$

Supongamos demostrada la desigualdad (2.15). Entonces, integrando, tenemos que

$$\int_0^x \frac{w_s}{w^\gamma} ds \leq - \int_0^x \phi_\varepsilon(s) ds,$$

lo que implica

$$\frac{1}{1-\gamma} w(x, t)^{1-\gamma} \leq - \int_0^x \phi_\varepsilon(s) ds.$$

De esta última relación se obtiene (2.14) si $\gamma > 1$.

Tenemos que demostrar por tanto (2.15). La idea para ello es aplicar el Principio del Máximo a J .

La función w verifica

$$g'(w)w_t = w_{xx} + w^{\frac{p_{11}}{m}} h, \quad g(w) = w^{\frac{1}{m}}.$$

Teniendo en cuenta además que $w_x = J - \phi_\varepsilon w^\gamma$ obtenemos que

$$\begin{aligned} g'J_t - J_{xx} + \left(\frac{1-m}{m} \right) \frac{w_x}{w} J_x &= bJ - \phi_\varepsilon'' w^\gamma + w^{\frac{p_{11}}{m}} h_x \\ &+ \frac{p_{11} - 1 - m\gamma + m}{m} w^{\frac{p_{11}}{m} + \gamma - 1} h \phi_\varepsilon \\ &+ \frac{2m\gamma + m - 1}{m} w^{2\gamma - 1} \phi_\varepsilon \phi_\varepsilon' - \gamma \frac{m\gamma - 1}{m} w^{3\gamma - 2} \phi_\varepsilon^3, \end{aligned}$$

donde b es una función acotada en $0 < x < \varepsilon^{-2}$ y $0 < t < T$. De este modo

$$g'J_t - J_{xx} + \left(\frac{1-m}{m}\right) \frac{w_x}{w} J_x - bJ \leq 0$$

si

$$\begin{aligned} \frac{\phi_\varepsilon'' w^\gamma - h_x w^{\frac{p_{11}}{m}}}{\phi_\varepsilon} + \frac{p_{11} - 1 - m\gamma + m}{m} w^{\frac{p_{11}}{m} + \gamma - 1} h \\ - \frac{2m\gamma + m - 1}{m} w^{2\gamma - 1} \phi_\varepsilon' + \gamma \frac{m\gamma - 1}{m} w^{3\gamma - 2} \phi_\varepsilon^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como $h_x \leq 0$ y $m\gamma < p_{11} - (1 - m)$, esta última desigualdad es cierta si

$$\left(\frac{p_{11} - m\gamma - 1 + m}{m}\right) w^{\frac{p_{11}}{m}} h \geq \left(\frac{2m\gamma + m - 1}{m}\right) \varepsilon^3 \phi'(\varepsilon^2 x) - \frac{\varepsilon^4 \phi''(\varepsilon^2 x) w}{\phi(\varepsilon^2 x)},$$

para lo que basta tomar ε suficientemente pequeño.

Resumiendo, en las hipótesis del Lema 2.3, obtenemos que

$$g'J_t - J_{xx} + \left(\frac{1-m}{m}\right) \frac{w_x}{w} J_x - bJ \leq 0, \quad (2.16)$$

para ε suficientemente pequeño.

Por otro lado, como $w_x(0, t) = 0$ y $w_x(x, 0) < 0$, tenemos que

$$J(0, t) = 0, \quad J(\varepsilon^{-2}, t) \leq 0, \quad J(x, 0) < 0. \quad (2.17)$$

Concluimos finalmente de (2.16) y (2.17), aplicando el Principio del Máximo a J , que $J \leq 0$, como habíamos conjeturado. \square

Corolario 2.4 *Sea $p_{11} > 1$ y sea u una solución de (2.4) con $u_x < 0$. Si $p_{11} > m$, entonces existe una constante $C > 0$, que depende únicamente de ε , p_{11} y m , tal que*

$$u(x, t) \leq Cx^{\frac{-2}{m(\gamma-1)}}, \quad (x, t) \in \left[0, \frac{1}{3\varepsilon^2}\right] \times [0, T]. \quad (2.18)$$

Observación 2.1 Si $m \geq 1$ se tiene que $p_{11} \leq p_{11} - (1 - m)$. Podemos tomar entonces $m\gamma = p_{11}$ y obtener que

$$u(x, t) \leq Cx^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (x, t) \in \left[0, \frac{1}{3\varepsilon^2}\right] \times [0, T].$$

Es decir, u tiene el mismo decaimiento cerca del origen que la solución autosemejante del problema (2.5), véase la fórmula (2.7).

El lema que enunciamos a continuación describe el conjunto de explosión de u , $B(u)$, cuando v está acotada; es decir, cuando la explosión es no simultánea. Como era de esperar, el signo de β , que depende de la relación entre p_{11} y m , determina el conjunto de explosión, incluso si $h(x, t) \neq 1$.

Lema 2.5 *Sea u una solución de (2.4). El conjunto de explosión de u viene dado por*

$$B(u) = \begin{cases} \{0\}, & \beta > 0 \quad (p_{11} > m), \\ [0, L], & \beta = 0 \quad (p_{11} = m), \\ \overline{\mathbb{R}}_+, & \beta < 0 \quad (p_{11} < m). \end{cases}$$

Demostración. El conjunto de explosión de u se deduce directamente de la estimación (2.18) si $\beta > 0$.

Para determinar el conjunto de explosión cuando $\beta \leq 0$ utilizamos un problema auxiliar del cual se conoce el conjunto de explosión. Como dijimos en la demostración del Lema 2.2, u es una supersolución de

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ u(0, t) = C(T - t)^{-\alpha}, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Por comparación, si \tilde{u} es una solución de este problema, se tiene que $u \leq \tilde{u}$ y por tanto $B(\tilde{u}) \subseteq B(u)$.

En [33] y [67] se demuestra que $B(\tilde{u}) = \overline{\mathbb{R}}_+$, si $\beta < 0$ y $B(\tilde{u}) = [0, \tilde{L}]$ si $\beta = 0$. Como consecuencia se obtiene el conjunto de explosión de u , $B(u)$. \square

2.4 Explosión no simultánea, $m > 1$

Llegados a este punto tenemos las herramientas necesarias para demostrar los resultados de explosión no simultánea para el problema (2.1)–(2.2). Empecemos por la difusión lenta, por ser este el caso en el que la explosión no simultánea se produce en el mismo rango de exponentes que en las soluciones planas.

Teorema 2.6 *Sea $m \geq 1$. Si u explota y v permanece acotada, entonces*

$$p_{11} > p_{21} + 1.$$

Recíprocamente, si $p_{11} > p_{21} + 1$, entonces existen datos iniciales (u_0, v_0) tales que u explota y v permanece acotada.

Dado que $p_{21} \geq 0$, para tener explosión no simultánea, necesitamos en particular que $p_{11} > 1$, de manera que u pueda explotar por sí misma. La condición $p_{11} > p_{21} + 1$ afirma que p_{21} es pequeño comparada con p_{11} y por tanto, cuando u explota no arrastra necesariamente a v consigo.

Demostración. Como v está acotada, la función u es una subsolución de

$$u_t = (u^m)_{xx} + Cu^{p_{11}} \quad (2.19)$$

que tiene tiempo de explosión finito. Comparando con una solución plana de (2.19) con dato inicial $u(x, 0) = \|u_0\|_\infty$, es fácil ver que las soluciones de (2.19) son globales en tiempo si $p_{11} \leq 1$. Por lo tanto, como u explota, se tiene que tener $p_{11} > 1$.

El siguiente paso consiste en demostrar que $p_{11} > p_{21} + 1$. Para ello, sustituimos la tasa de explosión (2.11) en la ecuación de v ,

$$v_t \geq (v^n)_{xx} + v^{p_{22}} \frac{C}{(T-t)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \chi_{\{x \leq c(T-t)^\beta\}}.$$

La idea que tenemos en mente es transformar adecuadamente esta expresión para poder utilizar la Fórmula de Representación para la ecuación del calor. Definimos por tanto $w = v^n$, que está acotada, es estrictamente positiva, verifica $w_t \geq 0$, $w_x \leq 0$ y además

$$cw_t \geq \frac{1}{n} w^{\frac{1-n}{n}} w_t \geq w_{xx} + w^{\frac{p_{22}}{n}} \frac{C}{(T-t)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \chi_{\{x \leq c(T-t)^\beta\}}.$$

La constante que aparece delante de la derivada temporal no tiene ninguna importancia. Por tanto, por simplicidad, la omitiremos en lo que sigue.

Consideremos ahora el siguiente problema, cuya solución z está por debajo de w ,

$$\begin{cases} z_t = z_{xx} + C(T-t)^{-\frac{p_{21}}{p_{11}-1}} \chi_{\{x \leq c(T-t)^\beta\}}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ z_x(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ z(x, 0) = z_0(x) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (2.20)$$

con C una constante apropiada. Supondremos además que $z_x \leq 0$ y $z_t \geq 0$. Para calcular la solución de (2.20) podemos usar la Fórmula de Representación para la ecuación del calor, véase [59]. Sea Γ la Solución Fundamental de la ecuación del calor,

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} z(0, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t) z_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t-\tau) \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \chi_{\{y \leq c(T-\tau)^\beta\}} dy d\tau \\ &\geq \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t-\tau) \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \chi_{\{y \leq c(T-\tau)^\beta\}} dy d\tau. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables

$$y = \sqrt{t-\tau} s, \quad dy = \sqrt{t-\tau} ds, \quad (2.21)$$

obtenemos

$$z(0, t) \geq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \int_0^{c(T-\tau)^{\beta-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s^2}{4}} ds d\tau.$$

Como $m > 1$, el límite de integración $c(T-\tau)^{\beta-\frac{1}{2}}$ tiende a ∞ a cuando $\tau \nearrow T$, por ser en este caso $\beta < \frac{1}{2}$. Entonces

$$z(0, t) \geq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} d\tau.$$

Si $p_{11} \leq p_{21} + 1$ esta última integral diverge cuando $t \nearrow T$, lo que implica que z explota. Si z explota, v , que está por encima, también tiene que explotar. Pero eso es contradictorio, ya que v está acotada. Queda demostrado entonces que $p_{11} > p_{21} + 1$.

El recíproco es inmediato: necesitamos construir datos iniciales tales que u explote y v esté acotada cuando $p_{11} > p_{21} + 1$. Para ello basta tomar datos iniciales independientes de x . Estos datos producen soluciones planas, que como ya dijimos, explotan de forma no simultánea en ese rango de exponentes. \square

2.5 Explosión no simultánea, $0 < m < 1$

El problema más interesante, por ser en este caso el resultado distinto del obtenido para las soluciones planas, es el de la difusión rápida, $0 < m < 1$. Es en este caso cuando la difusión cobra importancia y en la condición para que haya explosión no simultánea aparece el parámetro de difusión m .

Teorema 2.7 *Sea $0 < m < 1$. Si u explota y v permanece acotada, entonces*

$$p_{11} > \max \left\{ 1, p_{21} + \frac{m+1}{2} \right\}.$$

Sería interesante poder demostrar un resultado similar al Teorema 2.6, en el que la condición $p_{11} > p_{21} + 1$ es necesaria y suficiente para que haya datos iniciales tales que la explosión es no simultánea. Sin embargo, sólo hemos sido capaces de probar el recíproco del Teorema 2.7 en el caso concreto $p_{12} = 0$. Pensamos que este caso particular debería ilustrar el comportamiento general.

Teorema 2.8 *Sea $0 < m < 1$. Si $p_{11} > \max\{1, p_{21} + \frac{m+1}{2}\}$ y además $p_{12} = 0$, entonces existen datos iniciales (u_0, v_0) tales que u explota y v permanece acotada.*

Demostración del Teorema 2.7. Las ideas principales en la demostración de este teorema son iguales que las utilizadas en la prueba del Teorema 2.6. De hecho, la condición $p_{11} > 1$ se obtiene de la misma forma.

Para demostrar que $2p_{11} > 2p_{21} + m + 1$, volvemos a utilizar la solución z del problema (2.20). Como ahora $\beta > \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
z(0, t) &\geq \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} e^{-\frac{s^2}{4}} \chi_{\{s \leq (T-\tau)^\beta (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\}} ds d\tau \\
&\geq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \int_0^{c(T-\tau)^{\beta-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s^2}{4}} ds d\tau \geq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}-\beta+\frac{1}{2}}} d\tau.
\end{aligned}$$

Si

$$\frac{p_{21}}{p_{11}-1} - \beta + \frac{1}{2} \geq 1,$$

la última integral diverge cuando $t \nearrow T$, lo que produce una contradicción con el hecho de que v esté acotada. Utilizando la expresión explícita de β , concluimos que $2p_{11} > 2p_{21} + m + 1$. \square

Para demostrar el Teorema 2.8 no podemos volver a utilizar las ideas planteadas en la prueba del Teorema 2.6, ya que si queremos construir soluciones con explosión no simultánea fuera del rango $p_{11} > p_{21} + 1$, tenemos que buscar entre las soluciones que no son planas. Es aquí donde nos vemos obligados a introducir la restricción $p_{12} = 0$. Gracias a esta condición tenemos la posibilidad de usar una solución autosemejante, U , de (2.5) como componente u . Esto tiene la ventaja de que la estructura espacial de la solución autosemejante es conocida, lo que es crucial para la demostración del teorema. La mayor dificultad a la hora de eliminar la restricción $p_{12} = 0$ es demostrar que las soluciones de (2.4) con $h \neq 1$ tienen una estructura espacial aproximadamente autosemejante. Recuérdese, Observación 2.1, que sólo se conoce la estimación $u(x, t) \leq Cx^{\frac{\alpha}{\beta}}$ en el caso $m > 1$.

Además del comportamiento autosemejante de U , al igual que en los teoremas anteriores, también estamos interesados en utilizar la Fórmula de Representación para la ecuación del calor para manejar más fácilmente la componente v . En el siguiente resultado auxiliar, Lema 2.9, se establece la condición de explosión no simultánea cuando una de las componentes tiene difusión lineal y la otra es autosemejante.

Sea (U, z) una solución de

$$\begin{cases} U_t = (U^m)_{xx} + U^{p_{11}}, \\ z_t = z_{xx} + z^{\frac{p_{22}}{n}} U^{p_{21}}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \quad (2.22)$$

con

$$\begin{cases} U_x(0, t) = 0, \\ z_x(0, t) = 0, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (2.23)$$

y dato inicial estrictamente decreciente

$$\begin{cases} U(x, 0) = U_0(x), \\ z(x, 0) = z_0(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.24)$$

Elegimos datos iniciales tales que U es autosemejante y $z_t \geq 0$. Obsérvese que las soluciones planas quedan excluidas de este problema gracias a la hipótesis de monotonía estricta sobre el dato inicial. Supongamos también que $z_0 \geq \delta > 0$.

Lema 2.9 *Sea $0 < m < 1$. Si $p_{11} > \max\{1, p_{21} + \frac{m+1}{2}\}$, entonces existen datos iniciales (U_0, z_0) tales que U explota y z permanece acotada.*

Demostración. El hecho de que U satisfaga (2.6) y (2.7) implica que

$$U(x, t) \leq \begin{cases} C(T-t)^{-\alpha}, & x \leq c(T-t)^\beta, \\ Cx^{-\frac{\alpha}{\beta}}, & x > c(T-t)^\beta. \end{cases}$$

Obsérvese que en el rango de parámetros en el que estamos trabajando los exponentes verifican $\alpha, \beta > 0$.

Supongamos primero que $p_{22} > n$ y fijemos un dato inicial z_0 de forma que $\|z_0\|_\infty < \frac{1}{4}$.

Afirmamos que $z(x, t) \leq z(0, t) \leq 1$ para todo $0 \leq t < T$. Supongamos que esta afirmación no es cierta y sea entonces $t_0 < T$ el primer tiempo en el que $z(0, t_0) = 1$. Usando nuevamente la Fórmula de Representación se tiene que

$$\begin{aligned} z(0, t) &= \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t) z_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t - \tau) z^{\frac{p_{22}}{n}}(y, \tau) U^{p_{21}}(y, \tau) dy d\tau \\ &\leq z_0(0) + z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t - \tau) \frac{C}{(T - \tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \chi_{\{y \leq c(T-\tau)^\beta\}} dy d\tau \\ &\quad + z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}_+} \Gamma(y, t - \tau) C y^{-\frac{2p_{21}}{p_{11}-m}} \chi_{\{y > c(T-\tau)^\beta\}} dy d\tau \\ &= z_0(0) + z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t) I_1(t) + z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t) I_2(t). \end{aligned}$$

Para estimar las integrales I_1 e I_2 hacemos de nuevo el cambio de variables dado por (2.21). Obtenemos

$$I_1(t) \leq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}}} \int_0^{(T-\tau)^\beta(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s^2}{4}} ds d\tau \leq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-1}-\beta+\frac{1}{2}}} d\tau,$$

$$I_2(t) \leq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-m}}} \int_{c(T-\tau)^\beta(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-\frac{s^2}{4}} s^{-\frac{2p_{21}}{p_{11}-m}} ds d\tau \leq \int_0^t \frac{C}{(T-\tau)^{\frac{p_{21}}{p_{11}-m}}} d\tau.$$

Como $m < 1$, tenemos $\beta > \frac{1}{2}$. Esto, junto con $2p_{21} < 2p_{11} - (m + 1)$, implica que tanto I_1 como I_2 están uniformemente acotadas en $[0, t_0]$. Es más, se puede conseguir que sean tan pequeñas como sea necesario eligiendo T suficientemente pequeño. Así, si elegimos U_0 grande, de forma que el tiempo de explosión, T , de

$$U(x, t) = (T - t)^{-\alpha} F\left(\frac{x}{(T - t)^\beta}\right)$$

sea pequeño, tenemos que

$$z(0, t) \leq z_0(0) + \frac{1}{2} z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t). \quad (2.25)$$

Como $z(0, t) \leq 1$ para $0 \leq t \leq t_0$, $z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t) \leq z(0, t)$ y por tanto

$$z(0, t_0) \leq z_0(0) + \frac{1}{2} z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t_0) \leq z_0(0) + \frac{1}{2} z(0, t_0).$$

Concluimos que $z(0, t_0) \leq \frac{1}{2}$, lo que conduce a una contradicción.

Para el caso $p_{22} \leq n$ razonamos de forma análoga al caso $p_{22} > n$. Elegimos un dato inicial z_0 tal que $1 \leq \|z_0\|_\infty \leq 2$. Entonces $z(0, t) \geq 1$ para todo t . Sea $t_0 < T$ el primer tiempo en el que $z(0, t_0) = 6$. Si ese tiempo no existe, concluimos que z está acotada para todo tiempo $0 \leq t < T$, y el resultado es inmediato. Por el contrario, si en algún momento z alcanza el nivel 6, de la misma forma que en el caso anterior, obtenemos que $z(0, t)$ verifica (2.25) para $0 \leq t \leq t_0$ y además $z^{\frac{p_{22}}{n}}(0, t) \leq z(0, t)$. Pero esto implica que

$$3 = \frac{1}{2} z(0, t_0) \leq z_0(0) \leq 2,$$

que es de nuevo a una contradicción.

Resumiendo, en cualquiera de los dos casos, tanto si $p_{22} > n$ como si $p_{22} \leq n$, concluimos que U explota y que z está acotada. \square

Demostración del Teorema 2.8. El Lema 2.9 garantiza que podemos escoger datos iniciales U_0 y z_0 tales que U explota y que la componente z de la solución de (2.22)–(2.24) esté acotada. Por lo tanto, si z está acotada, $\bar{v} = z^{\frac{1}{n}}$ también lo está. Por otro lado, \bar{v} , que es solución de

$$\begin{cases} n\bar{v}^{n-1}v_t = (\bar{v}^n)_{xx} + \bar{v}^{p_{22}}U^{p_{21}}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ \bar{v}_x(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \bar{v}(x, 0) = z_0^{\frac{1}{n}}(x), & x \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

es además una supersolución acotada de

$$cv_t = (v^n)_{xx} + v^{p_{22}}U^{p_{21}}.$$

La constante que aparece delante de v_t no tiene ninguna relevancia y se puede eliminar mediante un cambio de variables. Mediante un argumento de comparación, cualquier solución v de (2.1) con dato inicial pequeño, verifica $v \leq \bar{v}$ y por tanto concluimos que v está acotada. \square

2.6 El problema de Neumann

Para finalizar este capítulo estudiamos la explosión no simultánea en el problema de Neumann. Es decir, consideramos soluciones del mismo sistema parabólico (2.1) pero definido en un intervalo acotado,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}v^{p_{12}}, & (x, t) \in (-L, L) \times (0, T), \\ v_t = (v^n)_{xx} + u^{p_{21}}v^{p_{22}}, & \end{cases} \quad (2.26)$$

con condiciones Neumann en la frontera

$$\begin{cases} (u^m)_x(-L, t) = (u^m)_x(L, t) = 0, \\ (v^n)_x(-L, t) = (v^n)_x(L, t) = 0, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (2.27)$$

y dato inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in (-L, L). \quad (2.28)$$

Al igual que en las secciones anteriores supondremos que u_0 y v_0 son datos iniciales estrictamente positivos, continuos, acotados, simétricos y decrecientes en $(0, L)$.

Teorema 2.10 *Los teoremas 2.6, 2.7 y 2.8 son también ciertos para el problema (2.26)–(2.28).*

La prueba de este teorema es sustancialmente igual que la de los teoremas anteriores. No obstante, si bien todos los resultados demostrados a lo largo del capítulo siguen siendo válidos, algunas de las técnicas utilizadas tienen que ser adaptadas a este nuevo problema.

Empecemos por el Lema 2.1. Si $\beta \geq 0$ la demostración es cierta adaptándola al intervalo $(0, L)$. Sin embargo, si $\beta < 0$, la definición de ϕ_M adaptada al intervalo $(0, L)$,

$$\phi_M(y, s) = \frac{1}{M(t)} u(ay, bs + t), \quad 0 \leq y \leq \frac{L}{a}, \quad \frac{-t}{b} \leq s \leq 0,$$

tiene el inconveniente de que el intervalo espacial se contrae a cero cuando $t \nearrow T$, (recuérdese la definición de $a = M^{\frac{m-p_{11}}{2}}$). Para evitar esta contracción realizamos una extensión periódica par a toda la recta real positiva, lo cual es posible ya que $(u^m)_x(0, t) = (u^m)_x(L, t) = 0$. En esta nueva situación podemos aplicar el Lema 2.1 de la Sección 2.2.

En lo que al Lema 2.2 se refiere, éste sigue siendo cierto si redefinimos el problema (2.13) al intervalo acotado $[0, L]$ añadiendo simplemente la condición de frontera $(u^m)_x(L, t) = 0$. Como $U_x \leq 0$, la solución autosemejante de (2.13) en \mathbb{R}_+ es una subsolución del problema restringido al intervalo.

Demostración del Teorema 2.10. Dado que la prueba de este teorema es muy parecida a la de los teoremas 2.6, 2.7 y 2.8, mostraremos únicamente las principales diferencias que aparecen. Éstas surgen a la hora de obtener la condición de explosión no simultánea $p_{11} > p_{21} + 1$ (respectivamente $2p_{11} > 2p_{21} + m + 1$). Consideramos el siguiente problema de contorno,

$$\begin{cases} z_t = z_{xx} + C(T-t)^{\frac{-p_{21}}{p_{11}-1}} \chi_{\{x \leq c(T-t)^\beta\}}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ z_x(0, t) = z_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ z(x, 0) = z_0(x) = v_0^n(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (2.29)$$

Como la idea es copiar las pruebas anteriores tenemos que extender el problema a toda la recta real positiva. Para ello definimos una función continua, positiva y decreciente, \hat{z}_0 , tal que $\hat{z}_0(x) = z_0(x)$ en $[0, L]$. Si z es solución de (2.29) con

dato inicial z_0 y \hat{z} es la solución extendida a \mathbb{R}_+ con dato inicial \hat{z}_0 , un argumento de comparación en $[0, L] \times [0, T)$ nos permite concluir que $z(x, t) \geq \hat{z}(x, t)$. El argumento final de la demostración es como en los teoremas anteriores utilizando la función \hat{z} y el problema (2.20). \square

Sistemas con flujos a través de la frontera

En este capítulo nos encontramos de nuevo ante un sistema de dos ecuaciones parabólicas con difusión no lineal pero esta vez definidas en un dominio acotado. En este caso las dos ecuaciones están acopladas en la frontera mediante términos de reacción no lineales. Al igual que en el Capítulo 2 caracterizamos, en el caso de soluciones crecientes en tiempo, el conjunto de parámetros para el cual es posible que haya explosión no simultánea. Además encontramos condiciones en los exponentes, para los que la explosión es siempre no simultánea, sea cual sea el dato inicial. Finalmente demostramos que, en el rango de exponentes donde cada componente puede explotar por sí misma, hay datos iniciales concretos que producen explosión no simultánea.

Contenido

3.1. Preliminares	44
3.2. Tasas no simultáneas	46
3.3. Explosión en un problema escalar auxiliar	52
3.4. Conjunto de explosión no simultáneo	58
3.5. Explosión no simultánea	60
3.6. Explosión simultánea	67

3.1 Preliminares

Nos centramos ahora en el estudio de la formación de singularidades en tiempo finito de las soluciones (u, v) de un sistema parabólico formado por dos ecuaciones de tipo medios porosos

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, \\ v_t = (v^n)_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \quad (3.1)$$

acopladas de forma no lineal en uno de los extremos del intervalo

$$\begin{cases} -(u^m)_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -(v^n)_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (3.2)$$

y con flujo cero en el otro extremo,

$$\begin{cases} (u^m)_x(L, t) = 0, \\ (v^n)_x(L, t) = 0, \end{cases} \quad t \in (0, T). \quad (3.3)$$

Los datos iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in (0, L), \quad (3.4)$$

los supondremos continuos y acotados. Al igual que en el Capítulo 2 consideraremos todos los posibles parámetros $m, n > 0$, $p_{ij} \geq 0$ y supondremos que los datos iniciales son estrictamente positivos para evitar problemas de unicidad, [34]. Supondremos también que los datos iniciales son compatibles con las condiciones de contorno, de forma que las soluciones se pueden entender en sentido clásico. Como es habitual en este tipo de problemas haremos la hipótesis adicional de monotonía $u_t, v_t \geq 0$, que en este caso se da si $(u_0^m)'' \geq 0$ y $(v_0^n)'' \geq 0$.

Obsérvese que, gracias a la condición de flujo cero en la frontera (3.3), las soluciones de (3.1)–(3.4) se pueden extender al intervalo $(0, 2L)$ mediante una simetría. Obtenemos así soluciones del mismo problema, pero sustituyendo la condición en $x = L$ por una condición en $x = 2L$ de la forma

$$\begin{cases} (u^m)_x(2L, t) = u^{p_{11}}(2L, t)v^{p_{12}}(2L, t), \\ (v^n)_x(2L, t) = u^{p_{21}}(2L, t)v^{p_{22}}(2L, t), \end{cases} \quad t \in (0, T).$$

Recíprocamente, las soluciones simétricas de este último problema son soluciones del problema original, (3.1)–(3.4). Esta correspondencia entre las soluciones tiene la ventaja de que permite trasladar los resultados de un problema al otro.

En los últimos años ha habido un creciente interés por el estudio de explosión debido a términos de reacción en la frontera, tanto para problemas escalares como para sistemas, véase por ejemplo [31], [56] y las referencias que incluyen. Sin embargo, poco se sabe aún acerca de la explosión no simultánea en sistemas. La primera mención a un problema de este tipo la encontramos en [94], donde se analiza (3.1)–(3.4) con $m = n = 1$. Posteriormente, en [98], se estudia la explosión no simultánea del mismo par de ecuaciones (3.1) pero definidas en \mathbb{R}_+ en vez de en un intervalo, y con las mismas condiciones de contorno en el origen, (3.2).

Entre los objetivos de este capítulo está el caracterizar el rango de exponentes para el cual es posible que haya explosión no simultánea, Sección 3.5

Como primer paso sería interesante saber bajo qué condiciones hay soluciones no triviales de (3.1)–(3.4) que explotan. En [113], [114] se demuestra que al menos una de las dos componentes, u o v , explota si y sólo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las siguientes condiciones

$$p_{11} > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}, \quad p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\},$$

$$p_{12}p_{21} > \left(\min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\} - p_{11} \right) \left(\min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\} - p_{22} \right).$$

Desgraciadamente, este resultado sólo caracteriza la explosión del problema, pero nada afirma sobre la posibilidad de explosión no simultánea.

La condición necesaria y suficiente para que existan datos iniciales tales que u explota y v permanece acotada viene dada por

$$2p_{21} < \max \{ p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1) \}.$$

Obviamente, intercambiando los papeles de u y v , obtenemos que la condición para que haya soluciones tales que v explota y u permanece acotada es

$$2p_{12} < \max \{ p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1) \}.$$

La condición de explosión no simultánea depende de la relación entre p_{11} y m . De hecho, cambia bruscamente al pasar por el valor $p_{11} = m$. Veremos que

esto no es casual, sino que está fuertemente relacionado con la tasa de explosión no simultánea. Resulta notable además que, cuando $p_{11} < m$, la difusión influye fuertemente a través del parámetro m en la condición.

Llegados a este punto, uno se podría plantear cómo influyen los datos iniciales en la explosión no simultánea. Es decir,

¿hay algún rango de exponentes para el cual la explosión es siempre no simultánea, independientemente de los datos iniciales?

La respuesta a esta pregunta es sí, como veremos en la Sección 3.5.

Una vez caracterizada completamente la explosión no simultánea nos planteamos determinar la posibilidad de explosión simultánea. Veremos que, aunque el conjunto de datos iniciales para los que es posible la explosión no simultánea es grande, existen, en el rango de parámetros en el que la explosión simultánea es posible, soluciones excepcionales que explotan simultáneamente.

3.2 Tasas no simultáneas

Como ya hicimos notar en el Capítulo 2, el conocimiento de las tasas de explosión no simultánea es una herramienta clave a la hora de determinar la explosión no simultánea.

Para poder determinar esta tasa, volvemos a considerar a $v^{p_{12}}(0, t)$ como un coeficiente congelado. Por tanto u es una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -(u^m)_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)h(t), & t \in (0, T), \\ (u^m)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.5)$$

donde h es una función continua, acotada, creciente y estrictamente positiva. El

caso concreto en el que h es una constante,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -(u^m)_x(0, t) = Cu^{p_{11}}(0, t), & t \in (0, T), \\ (u^m)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.6)$$

ha sido ampliamente estudiado, véase [58]. Se sabe que las soluciones de este último problema explotan si y sólo si

$$p_{11} > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}.$$

Por comparación, las soluciones de (3.5) explotan si y sólo si se cumple la misma restricción sobre p_{11} .

Como consecuencia de la hipótesis de monotonía en tiempo, $u_t \geq 0$, se tiene que $(u^m)_{xx} \geq 0$ y por lo tanto

$$\min_{x \in [0, L]} (u^m)_x(x, t) = (u^m)_x(0, t). \quad (3.7)$$

Es más, como $u_x \leq 0$, tenemos que

$$\max_{x \in [0, L]} u(x, t) = u(0, t). \quad (3.8)$$

Deducimos entonces que si u explota en tiempo finito T , $\{0\}$ tiene que pertenecer al conjunto de explosión de u .

Como dijimos anteriormente, la condición para que se produzca explosión no simultánea, $2p_{21} < \max \{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m+1)\}$, depende fuertemente de la difusión y cambia al cruzar el valor $p_{11} = m$. Este comportamiento se justifica analizando la tasa de explosión de u cuando v está acotada,

$$C_1 \leq (T-t)^\gamma u(0, t) \leq C_2, \quad (3.9)$$

para $0 < t < T$, C_1 y C_2 constantes positivas y con

$$\gamma = \frac{1}{\max \{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m+1)\}}.$$

Obsérvese que γ , y por tanto la tasa, cambia precisamente al pasar por el valor $p_{11} = m$. Según esta observación, resulta razonable entonces que estudiemos la tasa de explosión de u atendiendo a la relación entre p_{11} y m .

Empecemos con el caso $p_{11} < m$. Veamos en primer lugar que cuando u explota, $B(u) = [0, L]$. Además, u explota con la misma velocidad en todos los puntos.

Lema 3.1 *Sea $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y sea u una solución de (3.5). Si $p_{11} < m$, entonces para toda $c < 1$ existe un tiempo $t_0 = t_0(c) < T$ tal que*

$$cu(0, t) \leq u(x, t) \leq u(0, t), \quad x \in [0, L], \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (3.10)$$

En particular $B(u) = [0, L]$.

Para demostrar este lema usaremos ideas de [55].

Demostración. La desigualdad de la derecha, $u(x, t) \leq u(0, t)$, es consecuencia directa de (3.8).

Para demostrar la otra desigualdad, $cu(0, t) \leq u(x, t)$, usamos la relación (3.7). Gracias al Teorema del Valor Medio, obtenemos que existe un valor $\xi \in (0, x)$ tal que

$$\begin{aligned} u^m(x, t) - u^m(0, t) &= x(u^m)_x(\xi, t) \geq x(u^m)_x(0, t) \\ &= -xu^{p_{11}}(0, t)h(t) \geq -CLu^{p_{11}}(0, t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u^m(x, t) \geq u^m(0, t) (1 - CLu^{p_{11}-m}(0, t)).$$

Obtenemos finalmente que

$$u^m(x, t) \geq c^m u^m(0, t),$$

con $c < 1$. Esta última desigualdad se obtiene a partir de

$$1 - CLu^{p_{11}-m}(0, t) \geq c^m$$

para t próximo a T , que es cierto por ser $p_{11} - m < 0$ y explotar $u(0, t)$ con $u_t(0, t) \geq 0$. \square

De hecho, este lema afirma algo más: el perfil en el tiempo de explosión es plano.

Corolario 3.2 *Sea $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y sea u una solución de (3.5). Si $p_{11} < m$, entonces*

$$\lim_{t \nearrow T} \frac{u(x, t)}{u(0, t)} = 1, \quad x \in [0, L].$$

Observación 3.1 Las condiciones $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y $p_{11} < m$ solamente son compatibles si $m > 1$. En ese caso, $\min\{1, \frac{m+1}{2}\} = 1$.

Lema 3.3 Sea $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y sea u una solución de (3.5). Si $p_{11} < m$, entonces se verifica

$$C_1 \leq (T - t)^{\frac{1}{p_{11}-1}} u(0, t) \leq C_2,$$

para $0 < t < T$.

Demostración. Como primer paso para demostrar el lema, observamos que la masa

$$F(t) = \int_0^L u(x, t) dx$$

se comporta como $u(0, t)$. Es decir, existen constantes C_1 y C_2 tal que

$$C_1 u(0, t) \leq F(t) \leq C_2 u(0, t), \quad 0 < t < T. \quad (3.11)$$

En efecto, de (3.8) obtenemos inmediatamente que $F(t) \leq Lu(0, t)$. Por otra parte, dado $c < 1$, la desigualdad de la izquierda en (3.11) se deduce fácilmente para $t_0(c) \leq t \leq T$: basta integrar (3.10) para obtener $cLu(0, t) \leq F(t)$. Para extender esta desigualdad a $(0, t_0(c))$ tomamos una constante c_1 , suficientemente pequeña, y tal que

$$F(t) = \int_0^L u(x, t) dx \geq \int_0^L u(x, 0) dx \geq \frac{c_1}{cL} \int_0^L u(x, t_0(c)) dx.$$

Usando (3.10) y la monotonía en tiempo de u , llegamos a la conclusión de que

$$\frac{C_1}{cL} \int_0^L u(x, t_0(c)) dx \geq \frac{C_1}{cL} \int_0^L cu(0, t_0(c)) dx \geq C_1 u(0, t_0(c)) \geq C_1 u(0, t),$$

para $t \leq t_0(c)$.

Queda así demostrada la cadena de desigualdades (3.11). Al ser entonces la masa $F(t)$ y $u(0, t)$ equivalentes, para demostrar el lema, basta probar desigualdades similares a (3.9) para $F(t)$.

Para todo $t < T$ la masa satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^L u_t(x, t) dx = \int_0^L (u^m)_{xx}(x, t) dx \\ &= (u^m)_x(L, t) - (u^m)_x(0, t) = h(t)u^{p_{11}}(0, t). \end{aligned}$$

Como h está acotada inferiormente, usando una de las desigualdades de (3.11) se tiene que

$$F'(t) \geq Cu^{p_{11}}(0, t) \geq C(F(t))^{p_{11}}.$$

Finalmente, integrando en (t, T) deducimos la estimación superior

$$F(t) \leq C(T-t)^{-\frac{1}{p_{11}-1}}.$$

La estimación inferior $F(t) \geq C(T-t)^{-\frac{1}{p_{11}-1}}$ se obtiene de forma similar, utilizando que h está acotada superiormente y la otra desigualdad de (3.11). \square

Lema 3.4 Sea $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y sea u una solución de (3.5). Si $p_{11} \geq m$, entonces se verifica

$$C_1 \leq (T-t)^{\frac{1}{2p_{11}-(m+1)}} u(0, t) \leq C_2,$$

para $0 < t < T$.

Demostración. La idea de esta prueba es la misma que la del Lema 2.1 del Capítulo 2. Esbozamos únicamente las ligeras diferencias y remitimos al lector al capítulo anterior para los detalles.

Sea $M(t) = \max u(\cdot, t)$ y sea

$$\phi_M(y, s) = \frac{1}{M(t)} u(ay, bs + t), \quad 0 \leq y \leq \frac{L}{a}, \quad \frac{-t}{b} \leq s \leq 0,$$

con

$$a = M^{m-p_{11}}, \quad b = M^{m+1-2p_{11}}.$$

Cuando $t \nearrow T$, $M \nearrow \infty$. Además en las hipótesis del lema, $2p_{11} > m + 1$ y por lo tanto $b \searrow 0$. Es más, si $p_{11} > m$ entonces $a \searrow 0$; por otro lado, $a = 1$ si $p_{11} = m$. Para el argumento que sigue es importante que el intervalo de definición de y no se contraiga a cero, como ocurriría aquí si $p_{11} < m$. Obsérvese que en la demostración del Lema 2.1 del Capítulo 2 no tenemos que tener esta precaución, ya que el problema original está definido en \mathbb{R}_+ y por tanto $y \geq 0$.

Una vez demostrado que existe una constante positiva C tal que para todo M suficientemente grande se tiene que

$$(\phi_M)_s(0, 0) \geq C > 0, \tag{3.12}$$

la tasa (3.9) se obtiene reescribiendo (3.12) en términos de M ,

$$c \leq M^{m-2p_{11}}(t)M'(t) \leq C,$$

e integrando esta última expresión entre t y T .

La demostración de (3.12) sigue los mismos pasos que el Lema 2.1. Usamos el hecho de que $\{\phi_M\}$ es una familia uniformemente acotada de soluciones de

$$\begin{cases} (\phi_M)_s = (\phi_M^m)_{yy}, & (y, s) \in (0, \frac{L}{a}) \times (-\frac{t}{b}, 0), \\ -(\phi_M^m)_y(0, s) = \phi_M^{p_{11}}(0, s)h(bs + t), & s \in (-\frac{t}{b}, 0), \\ (\phi_M^m)_y(\frac{L}{a}, s) = 0, & s \in (-\frac{t}{b}, 0), \end{cases}$$

para concluir que es equicontinua, véase [46], [117], y así pasar al límite (a lo largo de una subsucesión), $\phi_{M_j} \rightarrow \Phi$ cuando $M_j \rightarrow \infty$. Las estimaciones de tipo Schauder permiten pasar al límite en la ecuación que verifican las funciones ϕ_{M_j} . Así, la función $w = \Phi_s$ satisface $w_s = (m\Phi^{m-1}w)_{yy}$ en el conjunto de positividad de Φ . Es más,

$$-(m\Phi^{m-1}w)_y(0, s) = p_{11}\Phi^{p_{11}-1}w(0, s)h(T).$$

Por otro lado tenemos que $(\phi_{M_j})_s(0, 0) \rightarrow \Phi_s(0, 0)$, lo que implica que $\Phi_s(0, 0) = 0$. Además, como $u_t \geq 0$, $w = \Phi_s \geq 0$. Por lo tanto, w tiene un mínimo en $(0, 0)$ y, por el Lema de Hopf, $w \equiv 0$.

Obtenemos finalmente que Φ es una solución estacionaria no negativa de la ecuación de los medios porosos, $(\Phi^m)_{yy} = 0$. Integrando obtenemos que

$$\Phi^m(y) = c_1y + c_2.$$

Además, como $\Phi(0) = 1$,

$$-(\Phi^m)'(0) \geq \Phi^{p_{11}}(0)h(T) = h(T),$$

y así

$$\Phi^m(y) \leq 1 - h(T)y.$$

Concluimos entonces el argumento, tanto si $p_{11} > m$, como si $p_{11} = m$, con una contradicción. Si $p_{11} > m$, Φ se hace negativa, mientras que si $p_{11} = m$, o bien Φ se hace negativa o bien no verifica la condición $(\Phi^m)'(L) = 0$. \square

3.3 Explosión en un problema escalar auxiliar

Gracias a la sección anterior, sabemos que si u explota y v permanece acotada, u verifica la tasa de explosión no simultánea (3.9). Por tanto v es una supersolución de

$$\begin{cases} v_t = (v^n)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T_0), \\ -(v^n)_x(0, t) = cv^{p_{22}}(0, t)(T - t)^{-\gamma p_{21}}, & t \in (0, T_0), \\ (v^n)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T_0), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.13)$$

con c una constante positiva y T_0 el tiempo máximo de existencia de v .

El punto clave de esta sección es demostrar que, para que v esté acotada hasta tiempo T (el tiempo de explosión de u), γp_{21} tiene que ser más pequeño que $\frac{1}{2}$.

Teorema 3.5 *Si $\gamma p_{21} \geq \frac{1}{2}$, entonces toda solución no trivial y no negativa de (3.13) explota en tiempo finito $T_0 \leq T$.*

Teorema 3.6 *Si $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$, entonces dado $\varepsilon > 0$ y un dato inicial v_0 existe T suficientemente pequeño tal que la solución de (3.13) cumple*

$$\sup_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \|v_0\|_{\infty} + \varepsilon.$$

En particular, v está acotada.

Obsérvese que si v permanece acotada hasta tiempo $t = T$, parece lógico esperar que se comporte como una solución del problema

$$\begin{cases} v_t = (v^n)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -(v^n)_x(0, t) = c(T - t)^{-\gamma p_{21}}, & t \in (0, T), \\ (v^n)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.14)$$

Al igual que en el problema (3.13), para que la solución v de (3.14) esté acotada hasta tiempo T , γp_{21} tiene que ser menor que $\frac{1}{2}$.

Teorema 3.7 *Si $\gamma p_{21} \geq \frac{1}{2}$, entonces toda solución no trivial y no negativa de (3.14) explota en tiempo T .*

Teorema 3.8 Si $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$, entonces dado $\varepsilon > 0$ y un dato inicial v_0 existe T suficientemente pequeño tal que la solución de (3.14) cumple

$$\sup_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_\infty \leq \|v_0\|_\infty + \varepsilon. \quad (3.15)$$

En particular, v está acotada.

Observación 3.2 Los teoremas anteriores siguen siendo válidos si aparece una constante $C > 0$ delante de v_t .

Los teoremas 3.5 y 3.6 son consecuencia directa de estos dos últimos resultados.

Demostración del Teorema 3.5. El hecho de que estemos considerando datos iniciales estrictamente positivos y soluciones monótonas en tiempo, permite afirmar que la solución v de (3.13) es una supersolución de (3.14) con $\gamma p_{21} \geq \frac{1}{2}$. Como todas las soluciones no triviales y no negativas de este último problema explotan en tiempo T , Teorema 3.7, por comparación v también tiene que explotar. El tiempo de explosión de v no es necesariamente T , sino que puede ser anterior, $T_0 \leq T$. \square

Demostración del Teorema 3.6. Dado $\varepsilon > 0$ y un dato inicial v_0 fijo, sea z una solución de (3.14) con dato inicial $z(x, 0) = v_0(x)$ y c suficientemente grande. Eligiendo T pequeño, como por hipótesis $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$, el Teorema 3.8 implica que z cumple la propiedad (3.15). Por lo tanto es una supersolución de (3.13). Por comparación $v \leq z$. Concluimos entonces que v también tiene que satisfacer la condición (3.15). \square

Para terminar la sección queda entonces pendiente demostrar los teoremas 3.7 y 3.8. Empecemos para ello probando que el problema (3.14) cumple una propiedad de contracción en L^∞ .

Lema 3.9 Sean v_1 y v_2 dos soluciones de (3.14) y supongamos que sus datos iniciales están ordenados, $v_1(x, 0) \geq v_2(x, 0)$. Entonces

$$\|v_1(\cdot, t_2) - v_2(\cdot, t_2)\|_\infty \leq \|v_1(\cdot, t_1) - v_2(\cdot, t_1)\|_\infty, \quad (3.16)$$

para $0 \leq t_1 < t_2 < T$.

Demostración. Si $v_1(x, 0) \geq v_2(x, 0)$, la comparación muestra que $v_1 \geq v_2$. Definamos

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \frac{v_1^n(x, t) - v_2^n(x, t)}{v_1(x, t) - v_2(x, t)} & \text{si } v_1(x, t) \neq v_2(x, t), \\ nv_1^{n-1}(x, t) & \text{si } v_1(x, t) = v_2(x, t). \end{cases}$$

Se tiene entonces que la diferencia $w = v_1 - v_2 \geq 0$ es una solución de la ecuación parabólica

$$\begin{cases} w_t = (\Phi(x, t)w)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (t_1, t_2), \\ -(\Phi(x, t)w)_x(0, t) = 0, & t \in (t_1, t_2), \\ (\Phi(x, t)w)_x(L, t) = 0, & t \in (t_1, t_2), \\ w(x, t_1) = v_1(x, t_1) - v_2(x, t_1), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Por tanto, el máximo de w en $[t_1, t_2] \times [0, L]$ se alcanza en la frontera parabólica de este dominio. Veamos que en cada uno de los casos posibles se concluye el resultado (3.16).

Si el máximo está localizado en $t = t_1$, el resultado se sigue de forma inmediata (recuérdese que $w = v_1 - v_2 \geq 0$).

Si por el contrario el máximo se alcanza en los puntos $x = 0$ o $x = L$, el Lema de Hopf implica que $w \equiv 0$, y por tanto la monotonía de $\|w(\cdot, t)\|_\infty$ es trivial. \square

Observación 3.3 El Lema de Hopf se puede utilizar en este contexto, ya que, por ser $v_1 > 0$ en un entorno del punto de máximo, la ecuación es uniformemente parabólica en ese entorno.

Esta propiedad de contracción que acabamos de demostrar implica que el Teorema 3.7 (y en consecuencia el Teorema 3.5) es cierto considerando cualquier dato inicial.

Corolario 3.10 *O bien todas las soluciones de (3.14) están acotadas hasta tiempo T , o bien todas explotan en tiempo T .*

Demostración. Sea v_1 una solución de (3.14) y v_2 la solución de (3.14) con dato inicial trivial, $v_2(x, 0) = 0$. Entonces, por comparación, $v_1(x, t) \geq v_2(x, t)$. Como la diferencia $\|v_1(\cdot, t) - v_2(\cdot, t)\|_\infty$ no crece con el tiempo, véase (3.16), se tiene

$$\|v_1(\cdot, T) - v_2(\cdot, T)\|_\infty \leq \|v_1(\cdot, 0) - v_2(\cdot, 0)\|_\infty = \|v_1(\cdot, 0)\|_\infty.$$

Como $v_1(\cdot, 0)$ está acotada, concluimos de esta relación que cualquier solución v_1 explota en tiempo $t = T$ si y sólo si v_2 explota en tiempo T . \square

Lema 3.11 *El Teorema 3.7 es cierto en el caso lineal, $n = 1$.*

Para demostrar este lema usaremos algunas ideas que aparecen en [98].

Demostración. El Teorema 3.7 afirma que todas las soluciones de (3.14) explotan en tiempo T si $\gamma p_{21} > \frac{1}{2}$. Para probar el lema, gracias al corolario anterior, podemos restringirnos a demostrar que la solución con dato inicial trivial explota, ya que entonces cualquier otra solución con cualquier otro dato inicial también explotará.

Sea \mathcal{G} la Función de Green para el problema (3.14). Se tiene entonces que

$$\mathcal{G}(x, y, t, s) = \Gamma(x - y, t - s) + \mathcal{H}(x, y, t, s),$$

donde Γ es la Solución Fundamental para la ecuación del calor (recuérdese que $n = 1$),

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

y $\mathcal{H}(x, y, t, s)$ es la solución de

$$\begin{cases} \mathcal{H}_s(x, y, t, s) + \mathcal{H}_{yy}(x, y, t, s) = 0, & (y, s) \in (0, L) \times (0, T), \\ \mathcal{H}_y(x, 0, t, s) = \Gamma_x(x, t - s), & s \in (0, T), \\ \mathcal{H}_y(x, L, t, s) = \Gamma_x(x - L, t - s), & s \in (0, T), \\ \mathcal{H}(x, y, t, t) = 0, & y \in (0, L). \end{cases}$$

El hecho de que $|\mathcal{H}(0, 0, t, s)|$ esté acotada, implica, usando la Fórmula de Representación y la Función de Green, que

$$v(0, t) \geq C \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{1}{2}}(T-s)^{\gamma p_{21}}} - C \geq C \int_0^t \frac{ds}{(T-s)^{\gamma p_{21} + \frac{1}{2}}} - C. \quad (3.17)$$

Como por hipótesis $\gamma p_{21} \geq \frac{1}{2}$, v explota en tiempo T . \square

Lema 3.12 *El Teorema 3.8 es cierto en el caso lineal, $n = 1$.*

Demostración. Dado ahora cualquier dato inicial v_0 , para probar el Teorema 3.8 cuando $n = 1$, escribimos la solución v como suma de dos funciones $v = v_1 + v_2$.

Tomamos entonces v_1 una solución de la ecuación del calor con flujo cero y dato inicial $v_1(x, 0) = v_0(x)$ y v_2 una solución de (3.14) (con $n = 1$) y dato inicial $v_2(x, 0) = 0$. De la desigualdad (3.17) obtenemos que

$$v_2(x, t) \leq CT^{\frac{1}{2} - \gamma p_{21}}.$$

Por otro lado, de la teoría general de la ecuación del calor tenemos que

$$v_1(x, t) \leq v_0(x).$$

De estas dos desigualdades concluimos que

$$v(x, t) \leq v_0(x) + CT^{\frac{1}{2} - \gamma p_{21}},$$

que implica la condición (3.15) si T es pequeño. \square

Para extender los resultados a una n general, volvemos a utilizar argumentos usados previamente en [98]. El punto clave en la demostración consiste en construir supersoluciones de la ecuación del calor. Para ello sólo hay que tener en cuenta que, si v está acotada, como además es estrictamente positiva,

$$0 < c \leq nv^{n-1} \leq C, \quad (3.18)$$

para cualquier n .

Demostración del Teorema 3.7. Supongamos que v es una solución de (3.14) acotada hasta tiempo T y sea $z = v^n$. La función z , que también está acotada, es solución de

$$\begin{cases} \frac{1}{n} z^{\frac{1-n}{n}} z_t = z_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -z_x(0, t) = c(T - t)^{-\gamma p_{21}}, & t \in (0, T), \\ z_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ z(x, 0) = v_0^n(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Gracias al Corolario 3.10 sabemos que o bien todas las soluciones explotan o bien ninguna de ellas lo hace. Podemos elegir por tanto, sin pérdida de generalidad, cualquier dato inicial $z(x, 0)$. Sea entonces $z(x, 0) \geq \delta > 0$ tal que $z_{xx}(x, 0) \geq 0$. Así, $z_t \geq 0$ y $z(x, t) \geq \delta$ para todo t . Como z está acotada y es estrictamente positiva, cumple la condición (3.18). Como consecuencia, z es una supersolución

acotada de la ecuación del calor con un flujo en la frontera que viene dado por la expresión $c(T-t)^{-\gamma p_{21}}$. Por comparación, la solución \bar{z} de

$$\begin{cases} C\bar{z}_t \geq \bar{z}_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -\bar{z}_x(0, t) = c(T-t)^{-\gamma p_{21}}, & t \in (0, T), \\ \bar{z}_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \bar{z}(x, 0) \geq \delta, & x \in (0, L), \end{cases}$$

está por debajo de z , $\bar{z} \leq z$. Pero entonces z , y por lo tanto v , no puede estar acotada, ya que según el Lema 3.11, la solución \bar{z} de este último problema explota en tiempo T . \square

Demostración del Teorema 3.8. Dado un dato inicial v_0 , sea z una solución de (3.14) con $n = 1$, $z_0(x) = v_0^n(x)$, y una constante $k(z_0)$, que determinaremos más adelante, delante de z_t ,

$$\begin{cases} k(z_0)z_t = z_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -z_x(0, t) = c(T-t)^{-\gamma p_{21}}, & t \in (0, T), \\ z_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ z(x, 0) = v_0^n(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Sea $\bar{v} = z^{\frac{1}{n}}$, entonces

$$\begin{cases} k(z_0)n\bar{v}^{n-1}\bar{v}_t = (\bar{v}^n)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -(\bar{v}^n)_x(0, t) = c(T-t)^{-\gamma p_{21}}, & t \in (0, T), \\ (\bar{v}^n)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \bar{v}(x, 0) = z_0^{\frac{1}{n}}(x) = v_0(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

Como $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$, podemos tomar T suficientemente pequeño y de forma que $z(x, t) \leq \|z_0\|_\infty + \varepsilon$. Como z también está acotado lejos del cero, digamos por δ , y $z_t > 0$, tenemos, independientemente del valor de $n > 0$, tomando δ de forma apropiada y $k^{-1}(z_0) = n(\|z_0\|_\infty + \varepsilon)^{\frac{n-1}{n}}$, que

$$k(z_0)n\bar{v}^{n-1} \leq 1.$$

Por lo tanto \bar{v} es una supersolución del problema (3.14). Así,

$$\sup_{0 < t < T} \|v(\cdot, t)\|_\infty \leq \sup_{0 < t < T} \|\bar{v}(\cdot, t)\|_\infty \leq (\|v_0\|_\infty^n + \varepsilon)^{\frac{1}{n}},$$

de donde se concluye (3.15). \square

Observación 3.4 La masa $\int_0^L v$ satisface

$$\int_0^L v(x, t) dx - \int_0^L v_0(x) dx = \int_0^t c(T - \tau)^{-\gamma p_{21}} d\tau.$$

Por lo tanto, una solución de (3.14) permanece acotada en la norma L^1 hasta tiempo T si y sólo si $\gamma p_{21} < 1$. Esta condición difiere de la obtenida para la explosión en la norma L^∞ , $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$.

3.4 Conjunto de explosión no simultáneo

Consideremos las ecuaciones (3.1) definidas en la recta real, [98]. La condición de explosión no simultánea en este caso es simplemente

$$2p_{21} < 2p_{11} - (m + 1).$$

Obsérvese que ésta coincide con la condición de explosión no simultánea del problema definido en el intervalo $[0, L]$

$$2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$$

cuando $p_{11} > m$. En este caso, el conjunto de explosión no simultáneo de u sólo contiene al origen (véase el Lema 3.13) al igual que ocurre en el problema definido en \mathbb{R}_+ . Esta estructura espacial explica la coincidencia en la condición de explosión no simultánea. De forma informal se puede entender de la siguiente manera: como la explosión se produce únicamente en el origen, la singularidad no “ve” lo que pasa lejos de ese punto y por lo tanto la condición en $x = L$ no contribuye al comportamiento de explosión del problema (3.1)–(3.4) cuando $p_{11} > m$. Por tanto, ambos problemas son “iguales”.

Lema 3.13 *Si u explota y v permanece acotada, entonces el conjunto de explosión de u viene dado por*

$$B(u) = \begin{cases} \{0\}, & p_{11} > m, \\ [0, \hat{L}] \subseteq [0, L], & p_{11} = m, \\ [0, L], & p_{11} < m. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el problema auxiliar

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = c(T - t)^{-\gamma}, & t \in (0, T), \\ (u^m)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.19)$$

y distingamos los casos $p_{11} \leq m$ y $p_{11} > m$. Como en cualquiera de los dos casos se verifica la tasa (3.9), u puede ser vista, según la desigualdad de (3.9) que se considere, como una supersolución o como una subsolución de (3.19).

Empecemos por el caso $p_{11} \leq m$. Si u es una supersolución de (3.19) y \tilde{u} una subsolución del mismo problema, por comparación $B(\tilde{u}) \subseteq B(u)$.

La idea es entonces buscar una subsolución de (3.19), con un conjunto de explosión conocido, y del cual podamos concluir el Lema 3.13.

Sea \tilde{u} la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T), \\ u(0, t) = c(T - t)^{-\gamma}, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.20)$$

que en particular es subsolución de (3.19). El conjunto de explosión de las soluciones de (3.20) ha sido descrito en [33] y [67]. En estos trabajos se demuestra que, si $p_{11} = m$, el conjunto de explosión de \tilde{u} es $B(\tilde{u}) = [0, \tilde{L}]$ mientras que $B(\tilde{u}) = \mathbb{R}_+$, si $p_{11} < m$. En cualquiera de los dos casos obtenemos el conjunto correcto $B(u)$.

El razonamiento es similar cuando $p_{11} > m$. Si u es una subsolución que explota de (3.19), buscamos una solución \tilde{u} del mismo problema, cuyo conjunto de explosión sea conocido, ya que por comparación $B(u) \subseteq B(\tilde{u})$.

Sea \tilde{u} entonces una solución de (3.19). Si $m \geq 1$ se sabe que (véase [58]) $B(\tilde{u}) = \{0\}$.

Si $m < 1$ la conclusión no se obtiene de forma tan sencilla. Consideremos la solución particular \tilde{u} construida en [28]. Es decir, en este caso \tilde{u} es una solución de $\tilde{u}_t = (\tilde{u}^m)_{xx}$ definida en $(x, t) \in (0, 2L) \times (0, \infty)$, con dato inicial u_0 (extendido al intervalo $(0, 2L)$ por simetría), y tal que $\tilde{u}(x, t) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0, 2L$ para todo t . Según [28] esta solución es una solución maximal del problema, $\tilde{u}(x, t) \geq u(x, t)$. Además \tilde{u} está acotada en el interior del intervalo $(0, 2L)$. Como u explota y está por debajo de \tilde{u} , su conjunto de explosión sólo puede ser $B(\tilde{u}) = \{0\}$. \square

3.5 Explosión no simultánea

Encontrar una condición sobre los exponentes del problema que conduzca a la explosión no simultánea requiere de un razonamiento análogo al dado en la Sección 2.4 del Capítulo 2. Por un lado hace falta una condición que permita a u explotar por sí misma, sin la ayuda de v . Esto es posible si

$$p_{11} > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\},$$

véase [58]. Por otro lado hace falta que p_{21} sea pequeño comparado con p_{11} . De esta forma cuando u explota no tiene por qué arrastrar a v con ella.

Teorema 3.14 *Si u explota y v permanece acotada, entonces*

$$2p_{21} < \max \{ p_{11} - 1, 2p_{11} - (m+1) \}. \quad (3.21)$$

Recíprocamente, si se cumple la condición (3.21) entonces dado v_0 , existe un dato inicial u_0 tal que u explota y v permanece acotada.

Observación 3.5 Como $p_{21} \geq 0$, la condición (3.21) implica en particular que $p_{11} > \min \{ 1, \frac{m+1}{2} \}$.

Demostración. Por hipótesis v está acotada superiormente para todo $0 < t < T$. La componente u es entonces una subsolución de (3.5) y por tanto es necesario que $p_{11} > \min \{ 1, \frac{m+1}{2} \}$ para que explote, [58] y Sección 3.2.

Por otro lado, como u explota y v está acotada, se verifica la tasa de explosión no simultánea (3.9). Utilizando la cota inferior

$$u(0, t) \geq C(T - t)^{-\gamma}$$

en la ecuación de v , obtenemos que v es una supersolución de (3.13). Gracias al Teorema 3.5 concluimos que $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$ y por tanto (3.21).

Para demostrar el enunciado recíproco fijemos en primer lugar un dato inicial v_0 tal que $\|v_0\|_\infty = N$.

Como $p_{11} > \min \{ 1, \frac{m+1}{2} \}$, según vimos en la Sección 3.1 (véase también [113] y [114]), las soluciones de (3.1)–(3.4) explotan. Además, si el dato inicial u_0 se

elige suficientemente grande, la explosión del problema (3.1)–(3.4) ocurre en un tiempo T pequeño.

Como siguiente paso veamos que v está acotada, y que por tanto u tiene que ser la componente que explota.

Supongamos que esta afirmación es falsa y que t_0 es el primer tiempo en el que v toca la altura $2N$. Si tal tiempo t_0 no existe, el resultado es inmediato, ya que en ese caso

$$\|v(\cdot, t)\|_\infty \leq 2N.$$

Podemos suponer por tanto que $t_0 < T$.

Como v está acotada, al menos hasta t_0 , para cualquier tiempo $t \in [0, t_0]$, u es una solución de (3.5) con $\delta \leq h(t) \leq 2N$. En esta situación, la tasa de explosión no simultánea de u , (3.9), es válida sólo hasta t_0 . Utilizando la cota superior

$$u(0, t) \leq C(T - t)^{-\gamma}$$

en la ecuación de v , obtenemos que v es una subsolución de (3.13) para $t \leq t_0$. El objetivo es por tanto extender la acotación de v hasta T .

Sea \bar{v} la solución de (3.13) con el mismo dato inicial v_0 . Por el Teorema 3.5, como $\gamma p_{21} < \frac{1}{2}$, \bar{v} no explota. Es más, como hemos elegido el dato inicial u_0 para que el tiempo de explosión, T , sea pequeño, $\bar{v}(0, t_0) < \frac{3N}{2}$. Pero entonces

$$2N = v(0, t_0) \leq \bar{v}(0, t_0) < \frac{3N}{2},$$

que es contradictorio y nos permite concluir entonces que v está acotada hasta tiempo T . \square

El Teorema 3.14 describe cuándo hay datos iniciales tales que u explota y v permanece acotada. Sin embargo, en ocasiones el resultado se puede mejorar obteniendo condiciones para las cuales la explosión es siempre no simultánea. Esto es así, por ejemplo, si v no puede explotar sin la ayuda de u .

Teorema 3.15 *Supongamos que se cumple la condición (3.21). Si*

$$p_{22} \leq \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\},$$

entonces u explota y v permanece acotada para todo dato inicial.

Demostración. Como se cumple (3.21), en particular $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y por tanto u explota. Sabemos, gracias al Teorema 3.14, que existen datos iniciales tales que v está acotada. Sin embargo esto no es suficiente: nuestro objetivo es demostrar que la explosión es no simultánea, sea cual sea el dato inicial.

Una vez que sabemos que u explota, existen dos posibilidades:

- la componente u explota sola;
- las componentes u y v explotan simultáneamente.

Veamos que esta segunda opción no puede ocurrir.

En primer lugar obsérvese que el tiempo de explosión se puede hacer tan pequeño como sea necesario, simplemente redefiniendo el dato inicial como el valor que toma la solución en $T - \varepsilon$. Sea v_0 el dato inicial en $T - \varepsilon$ elegido de forma que $\|v_0\|_\infty = N$.

El razonamiento concluye igual que el de la prueba del Teorema 3.14, tomando el primer tiempo t_0 en el que $v(0, t_0) = 2N$ y llegando a una contradicción.

Sin embargo en este caso el resultado es válido para cualquier dato inicial. El hecho de trasladar el punto de partida a $T - \varepsilon$ permite cubrir todos los posibles datos iniciales $v_0 \geq \delta > 0$ eligiendo diferentes valores para N . \square

Recordemos que la condición para que haya datos iniciales tales que v explota y u permanece acotada es

$$2p_{12} < \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}. \quad (3.22)$$

Si esta condición no se cumple,

$$2p_{12} \geq \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\} \quad (3.23)$$

y v explota; entonces u tiene que explotar también.

Pensamos que la explosión debería ser siempre no simultánea cuando se dé la condición $p_{22} > \min\{1, \frac{n+1}{2}\}$ junto con (3.21) y (3.23). En este rango de exponentes la explosión puede ser no simultánea, pero al mismo tiempo cada componente tiene la posibilidad de explotar por sí misma, sin la influencia de la otra.

Mostramos dos resultados parciales que introducen algunas restricciones adicionales en las condiciones arriba mencionadas, pero que creemos deberían ilustrar el caso general.

Teorema 3.16 *Supongamos que se cumple la condición (3.21). Si además se cumple (3.23) y*

$$p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\}$$

con $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$, entonces u explota y v permanece acotada para todo dato inicial.

Obsérvese que este teorema caracteriza completamente la explosión no simultánea si $m, n \leq 1$. En este caso las condiciones $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y $p_{22} > \min\{1, \frac{n+1}{2}\}$ implican en particular $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$. Por tanto estas hipótesis no imponen ninguna restricción adicional.

Demostración. La condición $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ junto con $p_{11} \geq m$ implican que $2p_{11} > m+1$. Además (3.21) es simplemente $2p_{21} < 2p_{11} - (m+1)$. Análogamente, $2p_{22} > n+1$. Trivialmente a partir de (3.23) obtenemos que $2p_{12} \geq 2p_{22} - (n+1)$.

Supongamos que existe un dato inicial (u_0, v_0) , tal que u y v explotan simultáneamente en tiempo T . Siguiendo la técnica utilizada previamente en [96], definimos

$$M(t) = \max u(\cdot, t) \quad \text{y} \quad N(t) = \max v(\cdot, t).$$

Además, para $t < T$, consideramos

$$\begin{aligned} \varphi_M(y, s) &= \frac{1}{M(t)} u(ay, bs + t), & 0 < y < \frac{L}{a}, & \quad -\frac{t}{b} < s < 0, \\ \psi_N(y, s) &= \frac{1}{N(t)} v(cy, ds + t), & 0 < y < \frac{L}{c}, & \quad -\frac{t}{d} < s < 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

con

$$a = \frac{M^{m-p_{11}}}{N^{p_{12}}}, \quad b = \frac{M^{-2p_{11}+m+1}}{N^{2p_{12}}}, \quad c = \frac{N^{n-p_{22}}}{M^{p_{21}}}, \quad d = \frac{N^{-2p_{22}+n+1}}{M^{2p_{21}}}.$$

En este punto es importante que $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$, ya que para poder seguir con el argumento es necesario que a y c no tiendan a infinito cuando $M, N \nearrow \infty$, para que los intervalos de definición de y no se contraigan a cero.

Utilizando las mismas ideas que en el Lema 3.4 (véase también [96]) se puede ver fácilmente que

$$c \leq (\varphi_M)_s(0, 0) \leq C, \quad c \leq (\psi_N)_s(0, 0) \leq C. \quad (3.25)$$

Si reescribimos las expresiones (3.25) en términos de M y N , obtenemos que

$$\begin{cases} M^{m-2p_{11}} M' \geq CN^{2p_{12}}, \\ N^{n-2p_{22}} N' \leq CM^{2p_{21}}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Supongamos en primer lugar que $2p_{12} > 2p_{22} - (n + 1)$. Integrando el sistema (3.26) entre 0 y t obtenemos

$$C - CM(t)^{2p_{21}-2p_{11}+m+1} \geq CN(t)^{2p_{12}-2p_{22}+n+1} - C.$$

Como hay explosión simultánea, M y N tienden a infinito cuando $t \nearrow T$. Por otro lado $2p_{21} < 2p_{11} - (m + 1)$ y $2p_{12} > 2p_{22} - (n + 1)$. Así llegamos a una contradicción, ya que el lado izquierdo de la desigualdad es una constante, mientras que el derecho tiende a infinito.

De la misma forma, si $2p_{12} = 2p_{22} - (n + 1)$, obtenemos

$$C - CM(t)^{2p_{21}-2p_{11}+m+1} \geq C \ln N(t) - C,$$

que es nuevamente imposible.

Concluimos entonces que no hay datos iniciales para los cuales la explosión es simultánea. O lo que es lo mismo, que para todos los datos iniciales la explosión es no simultánea. Como se cumplen las condiciones (3.21) y (3.23), tiene que ser u necesariamente la componente que explota y v la que está acotada. \square

Teorema 3.17 *Supongamos que se cumple la condición (3.21). Si además se cumple (3.23) y*

$$p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\}$$

con $p_{21} = 0$ y $m \geq 1$, entonces u explota y v permanece acotada para todo dato inicial.

Demostración. Como $p_{21} = 0$, v es solución de

$$\begin{cases} v_t = (v^n)_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T_v), \\ -(v^n)_x(0, t) = v^{p_{22}}(0, t), & t \in (0, T_v), \\ (v^n)_x(L, t) = 0, & t \in (0, T_v), \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.27)$$

siendo T_v el tiempo de explosión de v . Obsérvese que v tiene que explotar, por ser $p_{22} > \min\{1, \frac{n+1}{2}\}$, [58].

El problema (3.27) es de la forma del estudiado en la Sección 3.2, (3.6). Sabemos entonces que la tasa de explosión de v viene dada por

$$c(T_v - t)^{-\eta} \leq v(0, t) \leq C(T_v - t)^{-\eta},$$

con

$$\eta = \frac{1}{\max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}},$$

véase la Sección 3.2 y también [58].

Empecemos probando el teorema para $m = 1$ y luego veamos cómo generalizarlo a $m > 1$.

Si $m = 1$, utilizando la tasa de explosión de v en la ecuación de u , tenemos que u es una supersolución de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T_u), \\ -u_x(0, t) = Cu^{p_{11}}(T_v - t)^{-\eta p_{12}}, & t \in (0, T_u), \\ u_x(L, t) = 0, & t \in (0, T_u), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (3.28)$$

con $\eta p_{12} \geq \frac{1}{2}$. Si \tilde{u} es una solución de este último problema, gracias al Teorema 3.5, sabemos que tiene que explotar en un tiempo $T_{\tilde{u}} \leq T_v$. Por comparación u también explota, digamos en un tiempo T , que además es tal que $T \leq T_{\tilde{u}}$.

Nuestro propósito es ver que el tiempo $T_{\tilde{u}}$ es estrictamente menor que T_v , y que por tanto $T \leq T_{\tilde{u}} < T_v$. De esta forma, aunque v explote, u siempre lo hará antes y la explosión será no simultánea.

Como \tilde{u} es una solución de (3.28), podemos utilizar la Fórmula de Representación,

$$\tilde{u}(0, t) \geq C \int_0^t \frac{\tilde{u}^{p_{11}}(0, s)}{(T_v - s)^{\eta p_{12}}(t - s)^{\frac{1}{2}}} ds \geq C \int_0^t \frac{\tilde{u}^{p_{11}}(0, s)}{(T_v - s)^{\eta p_{12} + \frac{1}{2}}} ds.$$

Sea

$$w(t) = \int_0^t \frac{\tilde{u}^{p_{11}}(0, s)}{(T_v - s)^{\eta p_{12} + \frac{1}{2}}} ds,$$

y por tanto

$$w'(t) = \frac{\tilde{u}^{p_{11}}(0, t)}{(T_v - t)^{\eta p_{12} + \frac{1}{2}}}.$$

Por otro lado, como $\tilde{u}(0, t) \geq Cw(t)$, tenemos que

$$\frac{w'(t)}{w^{p_{11}}(t)} \geq \frac{C}{(T_v - t)^{\eta p_{12} + \frac{1}{2}}}.$$

Integrando esta última expresión en (t, T_v) obtenemos

$$\frac{C}{w^{p_{11}-1}(T_v)} \leq C - \int_t^{T_v} \frac{C}{(T_v - s)^{\eta p_{12} + \frac{1}{2}}} ds = C - I(t).$$

Y así,

$$cw(T_v) \geq (C - I(t))^{-\frac{1}{p_{11}-1}}.$$

Como $I(t)$ diverge cuando $t \nearrow T_v$, tiene que existir un tiempo $T_0 < T_v$, tal que $C = I(T_0)$ y por tanto $w(T_0) \geq \infty$. Es decir, w explota como muy tarde en tiempo T_0 .

Por otro lado, como $\tilde{u}(0, t) \geq w(t)$, el tiempo de explosión de \tilde{u} es anterior al de w . Concluimos de esta forma que $T \leq T_{\tilde{u}} \leq T_0 < T_v$.

El siguiente paso consiste en extender la demostración a $m > 1$. El punto clave de la demostración es el mismo que el del Teorema 3.7: encontrar una cota similar a (3.18) para u ,

$$0 < c \leq mu^{m-1}. \quad (3.29)$$

De esta expresión y definiendo $z = u^m$, obtenemos que z es una supersolución de la ecuación del calor, (3.28). Como ya hemos demostrado el resultado para $m = 1$, z tiene que explotar en tiempo $T_0 < T_v$. Por lo tanto u explota en tiempo $T \leq T_0 < T_v$ y la explosión es siempre no simultánea. \square

Observación 3.6 Este teorema no se puede extender a $m < 1$ usando esta demostración, ya que en este caso la cota (3.29) es falsa.

Volvamos de nuevo al problema definido en \mathbb{R}_+ , [98]. Como apuntamos anteriormente, su comportamiento es similar al de (3.1)–(3.4) cuando $p_{11} > m$. Para corroborar este hecho, obsérvese que el Teorema 3.16 es cierto también para el problema estudiado en [98]. Es más, se puede demostrar en ambos casos de la misma forma.

Teorema 3.18 *Sea $2p_{21} < 2p_{11} - (m + 1)$. Si se cumple (3.23) y*

$$p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\},$$

entonces las soluciones del problema (3.1)–(3.2) y (3.4) definido en \mathbb{R}_+ verifican que u explota y v permanece acotada para todo dato inicial.

En este caso las restricciones adicionales del Teorema 3.16, $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$, se obtienen trivialmente a partir de las hipótesis del teorema, $2p_{21} < 2p_{11} - (m + 1)$ y $p_{22} > \min\{1, \frac{n+1}{2}\}$.

3.6 Explosión simultánea

En los casos en los que es posible la explosión no simultánea esperamos que el conjunto de datos iniciales para el cual de hecho ocurre sea grande. Veremos que es un conjunto abierto en la topología L^∞ . Además, conjeturamos que debería ser un conjunto denso, al menos en algún rango de exponentes.

Teorema 3.19 *Supongamos que se cumple la condición (3.21). El conjunto de datos iniciales tales que u explota y v permanece acotada es abierto en la topología L^∞ .*

Demostración. Sea (u, v) una solución tal que u explota en tiempo T y v permanece acotada hasta ese tiempo, digamos $v \leq C$.

Como u explota en tiempo T , tiene que ser grande en un tiempo cercano anterior $T - \varepsilon$. Por otro lado, como la solución (u, v) está acotada hasta ese tiempo, por continuidad con respecto a los datos iniciales, existe un entorno de $(u_0(x), v_0(x))$ en L^∞ tal que, si el dato inicial de (\hat{u}, \hat{v}) está contenido en ese entorno y además $\hat{u}_t \geq 0$, entonces \hat{u} es grande y $\hat{v} \leq C + 1$ en el tiempo $T - \varepsilon$.

El razonamiento de la prueba del Teorema 3.14 nos permite concluir que \hat{u} explota y \hat{v} permanece acotada. \square

Sin embargo, el hecho de que el conjunto de datos iniciales donde es posible la explosión no simultánea sea grande no excluye la posibilidad de que haya explosión

simultánea en algún rango de parámetros. Por ejemplo, si además de haber explosión no simultánea, cada una de las componentes puede explotar por sí misma, es decir si

$$2p_{21} < \text{máx} \{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}$$

y

$$2p_{12} < \text{máx} \{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\},$$

existen datos iniciales para los cuales hay explosión simultánea.

Teorema 3.20 *Si las condiciones (3.21) y (3.22) se verifican simultáneamente, entonces existe una solución (u, v) con explosión simultánea.*

Demostración. Como se verifica la condición (3.21), existe un dato inicial (u_0, v_0) tal que u explota y v permanece acotada. De la misma forma, la condición (3.22) implica que existe otro dato inicial (\hat{u}_0, \hat{v}_0) , tal que v explota y u permanece acotada.

Para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ consideremos (u_λ, v_λ) la solución de (3.1)–(3.4) con dato inicial

$$(\hat{u}_0\lambda + (1 - \lambda)u_0, \hat{v}_0\lambda + (1 - \lambda)v_0),$$

y definamos

$$A = \{\lambda \in [0, 1] : u_\lambda \text{ explota y } v_\lambda \text{ está acotada}\},$$

$$B = \{\lambda \in [0, 1] : v_\lambda \text{ explota y } u_\lambda \text{ está acotada}\}.$$

Los conjuntos A y B son no vacíos, ya que $0 \in A$ y $1 \in B$. Por otro lado, el Lema 3.19 implica que A y B son abiertos. Utilizando un argumento de conexión deducimos que existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda_0 \notin A \cup B$. Como $(u_{\lambda_0}, v_{\lambda_0})$ no puede ser una solución acotada, ya que en el rango de parámetros que estamos considerando las soluciones explotan (véase [113] y [114]), hemos construido una solución con explosión simultánea. \square

Tasas de explosión simultánea

En los capítulos anteriores estudiamos fenómenos de explosión no simultánea en problemas con difusión no lineal. Nos centramos ahora en describir las tasas de explosión simultánea pero restringiéndonos a un sistema de dos ecuaciones del calor acopladas de forma no lineal a través de la frontera.

Contenido

4.1. Preliminares	70
4.2. Tasas simultáneas	72
4.3. Hueco (i.a)	74
4.4. Hueco (ii)	76

4.1 Preliminares

Consideremos de nuevo el problema estudiado en el Capítulo 3, (3.1)–(3.4), pero en el caso particular en el que la difusión es lineal, $m = n = 1$,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ v_t = v_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T). \quad (4.1)$$

En uno de los extremos del intervalo el flujo es no lineal,

$$\begin{cases} -u_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -v_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (4.2)$$

y en el otro extremo el flujo es cero,

$$\begin{cases} u_x(L, t) = 0, \\ v_x(L, t) = 0, \end{cases} \quad t \in (0, T). \quad (4.3)$$

Los datos iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in (0, L), \quad (4.4)$$

los supondremos continuos y acotados. Las hipótesis restantes que supusimos en el Capítulo 3 seguirán siendo válidas para este problema.

Obsérvese que las condiciones de explosión, explosión no simultánea y explosión simultánea descritas en el capítulo anterior son ciertas también para el problema (4.1)–(4.4). De hecho, por ser el caso $m = n = 1$ un caso particular de la difusión no lineal, algunas de estas condiciones ya se conocían con anterioridad (véase [112] para las condiciones de explosión y [94] para la explosión no simultánea). No obstante, por completitud y con el fin de facilitar la lectura, las enunciamos aquí de nuevo.

Las soluciones de (4.1)–(4.4) explotan si y sólo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las condiciones siguientes

$$p_{11} > 1, \quad p_{22} > 1, \quad p_{12}p_{21} > (1 - p_{11})(1 - p_{22}),$$

véase [112].

Por otro lado, si

$$p_{11} > p_{21} + 1$$

hay datos iniciales para los que u explota y v permanece acotada. Análogamente, si

$$p_{22} > p_{12} + 1$$

v explota y u permanece acotada, véase [94] y el Teorema 3.14.

Según el Teorema 3.16, si se cumplen simultáneamente las condiciones

$$p_{11} > p_{21} + 1 \quad \text{y} \quad p_{22} \leq p_{12} + 1,$$

o bien

$$p_{22} > p_{12} + 1 \quad \text{y} \quad p_{11} \leq p_{21} + 1,$$

entonces la explosión es siempre no simultánea.

Si

$$p_{11} \leq p_{21} + 1 \quad \text{y} \quad p_{22} \leq p_{12} + 1,$$

no es posible que haya explosión no simultánea. Sin embargo, como se da la condición $p_{12}p_{21} > (1 - p_{11})(1 - p_{22})$, las soluciones explotan. La explosión tiene que ser por tanto siempre simultánea.

Finalmente falta mencionar el caso en el que la explosión no simultánea y la simultánea pueden coexistir. Esto ocurre si

$$p_{11} > p_{21} + 1 \quad \text{y} \quad p_{22} > p_{12} + 1,$$

como vimos en el Teorema 3.20.

En la Sección 3.2 del Capítulo 3 estudiamos la tasa de explosión cuando la explosión es no simultánea. Vimos que ésta coincide con la del problema escalar, en el que la componente que explota se sustituye por una constante.

¿Cuál es la tasa de explosión cuando la explosión es simultánea?

Existen algunos resultados parciales, que enunciamos a continuación, que responden a esta pregunta.

Sean

$$\alpha_1 = \frac{1 + p_{12} - p_{22}}{2(p_{12}p_{21} - (1 - p_{11})(1 - p_{22}))}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + p_{21} - p_{11}}{2(p_{12}p_{21} - (1 - p_{11})(1 - p_{22}))}.$$

En [92] se estudia el caso

$$p_{11} < 1 + p_{21}, \quad p_{22} < 1 + p_{12} \quad \text{y} \quad p_{12}p_{21} > (1 - p_{11})(1 - p_{22}).$$

Si se cumple o bien $p_{11} < 1$ cuando $p_{11} \leq p_{22} + p_{21} - p_{12}$ o bien $p_{22} < 1$ cuando $p_{22} \leq p_{11} + p_{12} - p_{21}$, se demuestra que las tasas simultáneas viene dadas por

$$u(0, t) \sim (T - t)^{-\alpha_1}, \quad v(0, t) \sim (T - t)^{-\alpha_2}. \quad (4.5)$$

Estas condiciones incluyen el caso $p_{11} < 1, p_{22} < 1, p_{12}p_{21} > (1 - p_{11})(1 - p_{22})$, estudiado previamente en [102] bajo ciertas hipótesis de regularidad adicionales en los datos iniciales.

Recientemente se ha extendido este resultado a

$$p_{11} \geq 1 \quad \text{y} \quad p_{22} \geq 1, \quad \text{con} \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

En [115] se demuestra, adaptando a sistemas el método de cambio de escalas descrito en [74], véase también [30], [98] y [116], que en este caso las tasas de explosión simultánea son nuevamente (4.5).

Sin embargo, estos dos resultados no cubren todo el rango de parámetros donde la explosión simultánea es posible. El objetivo de este capítulo es completar este estudio.

Para ello veremos que cuando la explosión es simultánea el máximo de la solución, $(u(0, t), v(0, t))$, se comporta como la solución de un sistema de de ecuaciones ordinarias.

4.2 Tasas simultáneas

Si bien es verdad que existen resultados parciales, véanse [92] y [115], que describen las tasas cuando la explosión es simultánea, todavía quedan algunas incógnitas por resolver. El siguiente teorema enuncia de forma general cómo tienen que ser estas tasas y da una respuesta global, tanto para los casos conocidos como para los desconocidos.

Teorema 4.1 *Si la explosión de (4.1)–(4.4) es simultánea, entonces*

$$u(0, t) \sim f(t) \quad y \quad v(0, t) \sim g(t),$$

donde f y g son solución de

$$\begin{cases} f' = f^{2p_{11}-1} g^{2p_{12}}, \\ g' = f^{2p_{21}} g^{2p_{22}-1}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Si $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, la integración directa de este sistema muestra que las tasas de explosión son nuevamente (4.5), siempre y cuando la explosión sea simultánea.

Podría parecer a priori que las tasas estarán siempre descritas por la expresión (4.5). Sin embargo, esto no es cierto cuando algún α_i se anula; en estos casos aparecen tasas logarítmicas. Este cambio en la tasa es razonable, ya que se da precisamente en el límite entre la explosión simultánea y la no simultánea.

Por ejemplo, cuando los parámetros cruzan la línea crítica $p_{11} = p_{21} + 1$ (siendo $p_{22} < 1 + p_{12}$), v pasa de explotar con una tasa que es una potencia pura

$$v(0, t) \sim (T - t)^{-\alpha_2},$$

a estar acotada. Entre estas dos situaciones α_2 vale cero. La componente v explota en ese momento de una forma más débil dada por

$$v(0, t) \sim (-\ln(T - t))^{\frac{1}{2(p_{12}+1-p_{22})}}. \quad (4.7)$$

La componente u tampoco explota a lo largo de esa línea crítica de la forma esperada

$$u(0, t) \sim (T - t)^{-\alpha_1},$$

sino que su tasa también sufre una corrección logarítmica,

$$u(0, t) \sim (T - t)^{-\frac{1}{2(p_{11}-1)}} (-\ln(T - t))^{\frac{p_{12}}{2(p_{12}+1-p_{22})(p_{11}-1)}}. \quad (4.8)$$

Obsérvese que la parte que corresponde a la potencia pura de $(T - t)$ en la tasa de u coincide con la tasa de explosión no simultánea de u (véase (3.9)). Es más, α_1 tiende a $\frac{1}{2(p_{11}-1)}$ cuando $p_{11} \nearrow p_{21} + 1$.

En el punto en el que las dos líneas críticas, $p_{11} = p_{21} + 1$ y $p_{22} = p_{12} + 1$, se cortan, recuperamos las potencias puras en las tasas,

$$u(0, t) \sim (T - t)^{-\frac{1}{2(p_{11}-1+p_{12})}}, \quad v(0, t) \sim (T - t)^{-\frac{1}{2(p_{22}-1+p_{21})}}. \quad (4.9)$$

Como hemos mencionado antes, el Teorema 4.1 tiene carácter general. Subdividiremos la demostración en distintos lemas según los huecos para los cuales todavía no se conoce el resultado. Describamos primero con detalle cuáles son esos huecos, véase la Figura 4.1:

- (i.a) $p_{11} < 1$ y $1 \leq p_{22} < p_{11} + p_{12} - p_{21}$ si $p_{12} > p_{21}$ o
- (i.b) $p_{22} < 1$ y $1 \leq p_{11} < p_{22} + p_{21} - p_{12}$ si $p_{21} > p_{12}$;
- (ii) $p_{11} = p_{21} + 1$ y $p_{22} \leq p_{12} + 1$;
- (iii) $p_{22} = p_{12} + 1$ y $p_{11} \leq p_{21} + 1$.

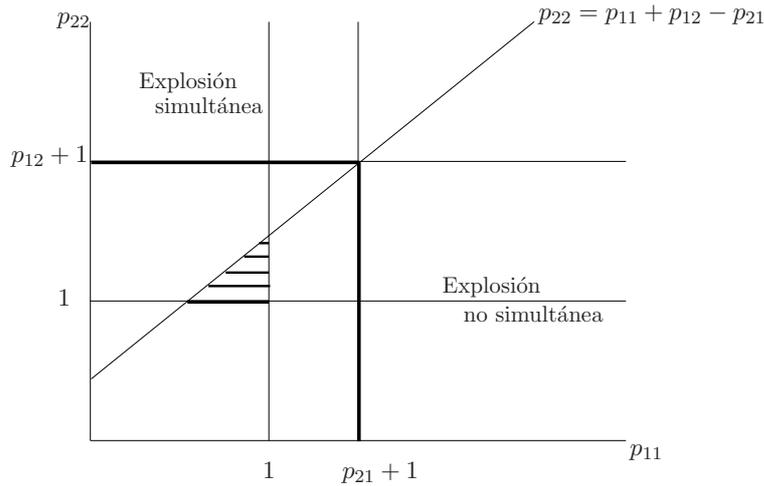


Figura 4.1: — Huecos para $p_{12} > p_{21}$

4.3 Hueco (i.a)

Dada la simetría que existe entre los huecos (i.a) y (i.b), probamos el Teorema 4.1 únicamente para uno de los dos (el (i.a)), siendo la otra demostración

similar.

Lema 4.2 Si $p_{11} < 1$ y $1 \leq p_{22} < p_{11} + p_{12} - p_{21}$, entonces se cumple la condición (4.5), siempre y cuando $p_{12} > p_{21}$.

Demostración. Si $p_{22} \leq p_{11} + p_{12} - p_{21}$, gracias a los resultados previos descritos en [92], sabemos que se cumplen la tasa inferior para u y la superior para v

$$u(0, t) \geq C(T - t)^{-\alpha_1}, \quad v(0, t) \leq C(T - t)^{-\alpha_2}. \quad (4.10)$$

Queda entonces pendiente probar las desigualdades contrarias.

Utilizando la tasa superior de v en la ecuación de u , tenemos que u verifica

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ -u_x(0, t) \leq Cu^{p_{11}}(0, t)(T - t)^{-\alpha_2 p_{12}}, & t \in (0, T), \\ u_x(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, L). \end{cases}$$

De este problema obtenemos directamente la tasa superior para u ,

$$u(0, t) \leq C(T - t)^{-\alpha_1},$$

usando la Proposición 1 de [102].

Para obtener la tasa inferior para v , en vez de utilizar su ecuación, como viene siendo habitual, volvemos a usar la ecuación que satisface u .

De la Fórmula de Representación para la ecuación del calor y la relación de salto, véase [59], obtenemos

$$u(0, t) \sim \int_0^t u^{p_{11}}(0, s) \frac{v^{p_{12}}(0, s)}{(t - s)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Como $u(0, t) \sim (T - t)^{-\alpha_1}$,

$$(T - t)^{-\alpha_1} \sim \int_0^t (T - s)^{-\alpha_1 p_{11}} \frac{v^{p_{12}}(0, s)}{(t - s)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Integrando por partes y usando que v es creciente en tiempo tenemos,

$$u(0, t) \leq Cu(0, t_1) + Cv^{p_{12}}(0, t) \int_{t_1}^t \frac{(T - s)^{-\alpha_1 p_{11}}}{(t - s)^{\frac{1}{2}}} ds.$$

Por tanto, multiplicando a ambos lados de la desigualdad por $(T - t)^{\alpha_1}$,

$$\frac{u(0, t) - Cu(0, t_1)}{(T - t)^{-\alpha_1}} \leq Cv^{p_{12}}(0, t)(T - t)^{\alpha_1} \int_{t_1}^t \frac{(T - s)^{-\alpha_1 p_{11}}}{(t - s)^{\frac{1}{2}}} ds. \quad (4.11)$$

Podemos elegir t_1 (que dependerá de t) de forma que

$$\frac{u(0, t) - Cu(0, t_1)}{(T - t)^{-\alpha_1}} \geq k_1$$

y

$$(T - t)^{-\alpha_2 p_{12} + \alpha_1} \int_{t_1}^t \frac{(T - s)^{-\alpha_1 p_{11}}}{(t - s)^{\frac{1}{2}}} ds \leq k_2,$$

para constantes $k_1, k_2 > 0$. Por tanto, de (4.11) obtenemos

$$k_1 \leq v^{p_{12}}(0, t)(T - t)^{\alpha_2 p_{12}} k_2,$$

que implica la tasa inferior para v . □

Observación 4.1 Como ya mencionamos anteriormente, en [102] se hacen hipótesis de regularidad sobre los datos iniciales que no son necesarias en nuestro caso. Sin embargo, la Proposición 1 de [102], que utilizamos en esta prueba, es cierta sin esas restricciones.

4.4 Hueco (ii)

Para rellenar el hueco (ii) distinguiremos dos casos, $p_{22} < p_{12} + 1$ y $p_{22} = p_{12} + 1$. El hueco (iii) se trata de forma similar.

Lema 4.3 Si $p_{11} = p_{21} + 1$ y $p_{22} < p_{12} + 1$, entonces se cumplen las condiciones (4.7) y (4.8).

Demostración. Para la demostración de este lema volvemos a usar las técnicas de [96], utilizadas también previamente en la prueba del Teorema 3.16.

Definamos $M(t) = u(0, t)$ y $N(t) = v(0, t)$ y dos funciones φ y ψ como en (3.24) para $t < T$,

$$\begin{aligned} \varphi_M(y, s) &= \frac{1}{M(t)} u(ay, bs + t), & 0 < y < \frac{L}{a}, & \quad -\frac{t}{b} < s < 0, \\ \psi_N(y, s) &= \frac{1}{N(t)} v(cy, ds + t), & 0 < y < \frac{L}{c}, & \quad -\frac{t}{d} < s < 0, \end{aligned}$$

con

$$a = \frac{M^{1-p_{11}}}{N^{p_{12}}}, \quad b = a^2, \quad c = \frac{N^{1-p_{22}}}{M^{p_{21}}}, \quad d = c^2.$$

Como $p_{11} > 1$, a y b tienden a cero cuando $t \nearrow T$. Para poder utilizar las ideas de la prueba del Teorema 3.16, también necesitamos que c y d tiendan a cero. Esto es trivialmente cierto si se cumple la condición $p_{22} \geq 1$. Veamos que si $p_{22} < 1$, entonces c y d también tienden a cero.

Si $p_{22} < 1$ existe una constante K suficientemente grande tal que

$$Ku^\gamma > v, \quad \gamma < \min \left\{ 1, \frac{p_{21}}{1-p_{22}} \right\},$$

En efecto, sea $w = Ku^\gamma$. Es fácil ver que, como $\gamma < 1$, w es una supersolución de la ecuación del calor,

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= K\gamma u^{\gamma-1} u_t - K\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2}(u_x)^2 - K\gamma u^{\gamma-1} u_{xx} \\ &= -K\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2}(u_x)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como K es suficientemente grande, existe un tiempo t_0 fijo, próximo a T tal que $w(x, t_0) > v(x, t_0)$. El objetivo es demostrar que esta desigualdad es cierta para todo t próximo a T .

Supongamos entonces que existe un primer tiempo t_1 y un punto $x_1 \in [0, L]$ tal que $w(x_1, t_1) = v(x_1, t_1)$. Si tal punto x_1 existe, por el Principio del Máximo tenemos que $x_1 = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} -w_x(0, t) &= -K(u^\gamma)_x(0, t) = K\gamma u^{p_{11}+\gamma-1}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -v_x(0, t) &= u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t). \end{aligned}$$

Como $p_{11} = p_{21} + 1$ y $p_{22} < p_{12} + 1$, se tiene que, al estar t_1 próximo a T ,

$$(w - v)_x(0, t_1) = u^{p_{21}}(0, t_1)v^{p_{22}}(0, t_1)(1 - \gamma v^{p_{12}+1-p_{22}}(0, t_1)) < 0,$$

lo que conduce a una contradicción.

Por tanto $w = Ku^\gamma > v$ para t cercano a T . Así,

$$d^{\frac{1}{2}} = c = \frac{N^{1-p_{22}}}{M^{p_{21}}} \leq CM^{\gamma(1-p_{22})-p_{21}} \rightarrow 0,$$

cuando M tiende a infinito.

Una vez que sabemos que a , b , c y d tienden a cero, podemos demostrar (véase [74], [96] o la prueba del Teorema 3.16 para los detalles) que

$$C_1 \leq (\varphi_M)_s(0, 0) \leq C_2, \quad C_1 \leq (\psi_N)_s(0, 0) \leq C_2. \quad (4.12)$$

Si reescribimos esta expresión en términos de M y N obtenemos que

$$\begin{cases} M^{1-2p_{11}} M' \sim CN^{2p_{12}}, \\ N^{1-2p_{22}} N' \sim CM^{2p_{21}}. \end{cases}$$

y recordando la definición de M y N , concluimos que u y v se comportan como las soluciones del sistema (4.6) y por tanto sus respectivas tasas de explosión son (4.8) y (4.7). \square

Observación 4.2 Las tasas (4.7) y (4.8) se obtienen encontrando una relación entre u y v : es fácil ver, utilizando las ecuaciones que determinan el comportamiento de u y v , (4.6), y las relaciones entre los exponentes, que

$$(u^{2-2p_{11}}(0, t)v^{-2p_{12}}(0, t))' \sim (2 - 2p_{11}) - 2p_{12}v^{2p_{22}-2-2p_{12}}(0, t) \sim C$$

Integrando esta relación en (t, T) y usando que la solución explota simultáneamente se obtiene que

$$u^{2-2p_{11}}(0, t)v^{-2p_{12}}(0, t) \sim (T - t). \quad (4.13)$$

Si se despeja u y se sustituye en la ecuación que describe el comportamiento de v , se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para v que, al integrarla, produce la tasa (4.7). Para calcular la tasa de u , basta con sustituir la obtenida para v en (4.13).

Lema 4.4 Si $p_{11} = p_{21} + 1$ y $p_{22} = p_{12} + 1$, entonces se cumple la condición (4.9).

Demostración. La prueba de este lema se basa en las mismas ideas que la demostración del lema anterior. Los mismos cálculos que nos permitieron probar que $Ku^\gamma > v$ se pueden repetir, tomando ahora $\gamma = 1$, para ver que $u \sim v$. También se pueden utilizar de nuevo las ideas de [74], que en este caso resultan incluso más sencillas, ya que como $p_{11}, p_{22} > 1$, se tiene automáticamente que $a, b, c, d \rightarrow 0$. La relación entre u y v junto con (4.12) nos proporciona las tasas. \square

5

Un método numérico adaptativo para tratar un sistema parabólico

Una vez establecidos los resultados analíticos de explosión en sistemas parabólicos, nos enfrentamos al problema de reproducirlos numéricamente. En primer lugar observamos que los métodos usuales de malla fija no son apropiados para aproximar este tipo de problemas cerca de los puntos de explosión. Presentamos en este capítulo un método adaptativo en espacio que reproduce correctamente el comportamiento de la solución continua del problema estudiado en el Capítulo 3.

Contenido

5.1. Preliminares	80
5.2. El método adaptativo	86
5.3. Resultados auxiliares	88
5.4. Propiedades de la solución numérica adaptativa	95
1. Convergencia del esquema numérico	97
2. Explosión numérica	103
3. Explosión no simultánea	105
4. Conjunto de explosión no simultáneo	109
5. Explosión simultánea	112
5.5. Tasas simultáneas	113
5.6. Experimentos numéricos	116
5.7. Un método que mueve puntos	119

5.1 Preliminares

En el Capítulo 3 estudiamos un sistema definido en un intervalo acotado compuesto por dos ecuaciones cuasilineales de tipo parabólico y con difusión no lineal de tipo potencia,

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, \\ v_t = (v^n)_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T). \quad (5.1)$$

Las ecuaciones estaban acopladas mediante un flujo no lineal en uno de los extremos del intervalo y tenían flujo cero en el otro extremo,

$$\begin{cases} (u^m)_x(0, t) = 0, \\ (v^n)_x(0, t) = 0, \end{cases} \quad t \in (0, T), \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} (u^m)_x(L, t) = u^{p_{11}}(L, t)v^{p_{12}}(L, t), \\ (v^n)_x(L, t) = u^{p_{21}}(L, t)v^{p_{22}}(L, t), \end{cases} \quad t \in (0, T). \quad (5.3)$$

Los datos iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ v(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad x \in (0, L), \quad (5.4)$$

los suponíamos regulares, acotados y estrictamente positivos, $f(x), g(x) \geq \delta > 0$.

Obsérvese que por consistencia con algunos trabajos previos, [53], [54], que tratan el estudio numérico de problemas con flujo a través de la frontera, hemos intercambiado las condiciones (3.2) y (3.3): en este nuevo problema el flujo es cero en el extremo izquierdo del intervalo, (5.3), mientras que el flujo no lineal se produce a través del extremo derecho, (5.2).

Las hipótesis iniciales del problema son las habituales. Los parámetros m y n son positivos y $p_{ij} \geq 0$. Para no tener problemas de regularidad, supondremos que los datos iniciales son, además de estrictamente positivos, compatibles con los datos de frontera. En cuanto a la monotonía del problema, supondremos que los datos iniciales son crecientes y que las soluciones crecen con el tiempo, $u_t, v_t > 0$.

Existen numerosos trabajos que estudian aproximaciones numéricas de soluciones que explotan en problemas de evolución, véase por ejemplo [1], [15], [17], [24], [51], [90], el trabajo recopilatorio [7] y las referencias que incluyen. Sin embargo, en general, sólo consideran el caso escalar.

El objetivo de este capítulo es desarrollar un esquema numérico que reproduzca las propiedades de explosión del sistema (5.1)–(5.4) de forma apropiada.

Antes de ocuparnos del desarrollo del método numérico, resumamos brevemente los resultados de explosión obtenidos en el Capítulo 3 para el problema (5.1)–(5.4), véase también [113], [114]:

1. Las soluciones explotan si y solo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} p_{11} &> \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}, & p_{22} &> \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\}, \\ p_{12}p_{21} &> \left(\min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\} - p_{11} \right) \left(\min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\} - p_{22} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Las soluciones globales son no acotadas.

2. Existen datos iniciales (f, g) tales que u explota y v permanece acotada si y solo si

$$2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}. \quad (5.6)$$

La condición para que haya soluciones tales que v explota y u está acotada es

$$2p_{12} < \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}. \quad (5.7)$$

Es más, el conjunto de datos iniciales para los cuales hay explosión no simultánea es abierto en la topología L^∞ .

3. Si u explota y v permanece acotada la tasa de explosión no simultánea de u viene dada por

$$u(0, t) \sim (T - t)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}}, \quad (5.8)$$

En ese caso, el conjunto de explosión no simultáneo de u es

$$B(u) = \begin{cases} \{L\}, & p_{11} > m, \\ [\hat{L}, L], & p_{11} = m, \\ [0, L], & p_{11} < m. \end{cases}$$

4. Si se cumple (5.6) junto con alguna de las dos condiciones siguientes

- (i) $p_{22} \leq \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\}$;
- (ii) $p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\}$, $2p_{12} \geq \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n+1)\}$, $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$,

entonces u explota y v permanece acotada para todo dato inicial.

5. Si se cumplen conjuntamente las condiciones (5.6) y (5.7), entonces existen datos iniciales tales que u y v explotan simultáneamente.

La primera idea que nos viene a la cabeza cuando se trata de reproducir numéricamente las propiedades del sistema (5.1)–(5.4) es considerar un esquema semi-discreto, obtenido al discretizar la variable espacial y manteniendo la variable temporal t continua. Como las ecuaciones en (5.1) no están acopladas, podemos usar una malla distinta para cada una de las componentes del sistema.

Por tanto, consideramos dos conjuntos de nodos, $\{x_0, \dots, x_N\}$, $\{y_0, \dots, y_M\}$, con $x_0 = 0 = y_0$, $x_N = L = y_M$, y buscamos aproximaciones numéricas

$$\begin{aligned} U(t) &= (u_0(t), \dots, u_N(t)) \approx (u(x_0, t), \dots, u(x_N, t)), \\ V(t) &= (v_0(t), \dots, v_M(t)) \approx (v(y_0, t), \dots, v(y_M, t)), \end{aligned}$$

que sean solución del sistema de ecuaciones ordinarias siguiente,

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_0 = \frac{2}{h_1^2}(u_1^m - u_0^m), \\ u'_i = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h_{i+1}} - \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h_i} \right), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ u'_N = \frac{2}{h_N^2}(u_{N-1}^m - u_N^m) + \frac{2}{h_N} u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_0 = \frac{2}{l_1^2}(v_1^n - v_0^n), \\ v'_j = \frac{2}{l_{j+1} + l_j} \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{l_{j+1}} - \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right), \quad 1 \leq j \leq M-1, \\ v'_M = \frac{2}{l_M^2}(v_{M-1}^n - v_M^n) + \frac{2}{l_M} u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

donde $h_i = x_i - x_{i-1}$, $l_j = y_j - y_{j-1}$ y con dato inicial

$$u_i(0) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad v_j(0) = g(y_j), \quad 0 \leq j \leq M.$$

Sea \mathcal{T} el tiempo máximo de existencia de la solución numérica. Al igual que en el caso continuo, si $\mathcal{T} < \infty$, se tiene que

$$\lim_{t \nearrow \mathcal{T}} \{\|U(t)\|_\infty + \|V(t)\|_\infty\} = \infty,$$

y diremos que la solución numérica explota. Si una de las dos componentes explota y la otra permanece acotada se produce lo que se conoce con el nombre de explosión numérica no simultánea.

Siguiendo las técnicas usadas en [53], donde se estudia el comportamiento numérico del problema escalar con flujo no lineal a través de la frontera, podemos probar que, si U o V son grandes, sus máximos, situados en $x = L$, satisfacen

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Por tanto concluimos que (véase también [71]):

1. Las aproximaciones numéricas (U, V) explotan si y solo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las siguientes condiciones

$$p_{11} > 1, \quad p_{22} > 1, \quad p_{12}p_{21} > (1 - p_{11})(1 - p_{22}).$$

2. Existen datos iniciales $(U(0), V(0))$ tales que U explota y V permanece acotada si y solo si

$$p_{21} < p_{11} - 1.$$

3. Si U explota y V permanece acotada, la tasa de explosión de U viene dada por

$$\|U(t)\|_\infty \sim (\mathcal{T} - t)^{-\frac{1}{p_{11}-1}}.$$

En ese caso, el conjunto de explosión de U es

$$B(U) = \begin{cases} [x_{\bar{i}}, L], & p_{11} > m, \\ [0, L], & p_{11} \leq m, \end{cases}$$

donde \bar{i} es un número entero determinado únicamente por p_{11} y m . El conjunto de explosión, $B(U)$, se entiende como el conjunto de explosión de la interpolada de Lagrange, U^I , de U en los nodos de la malla.

Deducimos por tanto de esta enumeración que el esquema (5.9) no es el apropiado para aproximar el problema (5.1)–(5.4): no reproduce correctamente ni las condiciones de explosión ni las de explosión no simultánea, ni tampoco la tasa. El conjunto de explosión sólo es correcto si $p_{11} < m$.

Desafortunadamente concluimos que el método semidiscreto de malla fija no nos conduce al resultado deseado. Esto hace que nos planteemos la pregunta,

¿existe algún método numérico que reproduzca correctamente las condiciones de explosión y explosión no simultánea, así como las tasas y el conjunto de explosión?

Y si es así,

¿por qué funciona bien?

La respuesta a la primera pregunta es afirmativa. Inspirados en [54], desarrollamos un esquema adaptativo que reproduce correctamente el comportamiento de las soluciones de (5.1)–(5.4), como veremos en la Sección 5.4. Es más, el método también es capaz de reproducir las tasas de explosión simultáneas estudiadas en el Capítulo 4.

Contestamos a la segunda pregunta de forma heurística. El método adaptativo funciona bien, porque preserva la invariancia por cambios de escala del problema continuo.

Por ejemplo, cuando u explota en un único punto, $x = L$, y v permanece acotada, la componente u se comporta como una solución autosemejante de la forma

$$u = (T - t)^{-\alpha} F(\xi), \quad \xi = (L - x)(T - t)^{-\beta},$$

con

$$\alpha = \frac{1}{2p_{11} - (m + 1)}, \quad \beta = \frac{p_{11} - m}{2p_{11} - (m + 1)},$$

véase [58]. Como en este caso, el de explosión puntual, p_{11} es mayor estricto que m , según el Teorema 5.6, se tiene que tener que la solución obtenida con el método

adaptativo se comporta de la siguiente forma,

$$u_N \sim (\mathcal{T} - t)^{-\alpha}$$

si h es suficientemente pequeño. Si por otro lado, a la hora de adaptar la malla, los sucesivos pasos espaciales, $h_N^{(k)}$, son elegidos de forma apropiada (según la fórmula (5.13)), se reproduce el comportamiento autosemejante numéricamente,

$$h_N^{(k)} \sim (\mathcal{T} - t_k)^\beta.$$

Es más, cuando las tasas de explosión simultáneas son conocidas, tenemos que

$$h_N^{(k)} \sim u_N^{m-p_{11}} v_M^{-p_{12}} \sim (\mathcal{T} - t_k)^{-(m-p_{11})\alpha_1 + p_{12}\alpha_2} \sim (\mathcal{T} - t_k)^{\beta_1},$$

y

$$l_M^{(k)} \sim u_N^{-p_{21}} v_M^{n-p_{22}} \sim (\mathcal{T} - t_k)^{-(n-p_{22})\alpha_2 + p_{21}\alpha_1} \sim (\mathcal{T} - t_k)^{\beta_2},$$

donde

$$\beta_1 = \frac{(m - p_{11})(n + 1 - 2p_{22}) + p_{12}(-2p_{21} + m - 1)}{(2p_{11} - m - 1)(2p_{22} - n - 1) - 4p_{12}p_{21}},$$

$$\beta_2 = \frac{(n - p_{22})(m + 1 - 2p_{11}) + p_{21}(-2p_{12} + n - 1)}{(2p_{11} - m - 1)(2p_{22} - n - 1) - 4p_{12}p_{21}}.$$

Obsérvese que estos valores de α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son los esperados de la homogeneidad del problema.

En [3] y en [71] se estudian las condiciones de explosión y explosión no simultánea para sistemas con difusión lineal sin prestar atención a las tasas. Estos sistemas se discretizan en espacio utilizando un método de malla fija, lo que implica que la evolución de la aproximación numérica se rige por el sistema (5.10),

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, con este sistema no se obtienen las tasas correctas de explosión no simultánea, ni siquiera en el caso en el que la difusión es lineal. Es más, incluso cuando se trabaja con el problema escalar la tasa es incorrecta y resulta necesario desarrollar un esquema adaptativo, véase [54].

El método adaptativo que describimos en las siguientes secciones afirma que la evolución de la solución numérica viene determinada por el sistema

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{2p_{11}-1} v_M^{2p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-1}, \end{cases}$$

cuando $m = n = 1$.

Uno se podría preguntar por qué si en [3] y en [71] se está utilizando un sistema erróneo para determinar el comportamiento de la solución se obtienen condiciones correctas de explosión. El hecho es que, casualmente, las condiciones sobre los exponentes para que haya explosión o explosión no simultánea cuando la difusión es lineal coinciden para ambos sistemas. Esto no es así si la difusión es no lineal.

5.2 El método adaptativo

Sean $h_i^{(0)}$ y $l_j^{(0)}$ con $1 \leq i \leq N(0)$ y $1 \leq j \leq M(0)$ las longitudes de los pasos de las mallas iniciales.

El hecho de que los datos iniciales verifiquen $(f^m)'' , (g^n)'' \geq \varepsilon > 0$, nos permite afirmar que $u'_i(0), v'_j(0) > 0$ si el parámetro de la malla

$$h := \max_{i,j} \{h_i^{(0)}, l_j^{(0)}\}$$

es suficientemente pequeño. Por tanto, tomando h pequeño, es posible elegir dos constantes r y q , tal que en $t = 0$ se verifiquen las condiciones

$$r u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}} < u'_N, \quad (5.11)$$

y

$$q u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n} < v'_M. \quad (5.12)$$

El método adaptativo funciona de la siguiente forma: resolvemos el sistema de ecuaciones ordinarias (5.9) siempre y cuando se satisfagan estas desigualdades. Si en algún momento (5.11) deja de cumplirse, añadimos un punto a la malla de U . Si por el contrario es (5.12) la condición que se viola, añadimos el punto a la malla de V . El nuevo punto se añade de forma que las desigualdades se verifiquen otra vez.

Obsérvese que con este método el número de nodos de (5.9) depende del tiempo, $N = N(t)$, $M = M(t)$.

Este procedimiento produce una sucesión de tiempos de refinado $\{t_k\}_{k=0}^K$, siendo K finito o infinito. Entre dos de estos tiempos se verifica siempre el sistema (5.9). El método comienza con $t_0 = 0$ y, si $K < \infty$, termina en $t_K = \mathcal{T}$. Para simplificar la notación, si $t \in (t_k, t_{k+1})$ escribiremos $h_N^{(k)}$ y $l_M^{(k)}$ en vez de $h_{N(t)}$ y $l_{M(t)}$.

Una vez esbozado el funcionamiento del método adaptativo, el siguiente paso que nos ocupa es describir detalladamente cómo se añaden los puntos a la malla.

Para ello definimos

$$R(t; h_N) := \frac{\frac{2}{h_N^2}(u_{N-1}^m(t) - u_N^m(t)) + \frac{2}{h_N}u_N^{p_{11}}(t)v_M^{p_{12}}(t)}{u_N^{2p_{11}-m}(t)v_M^{2p_{12}}(t)},$$

$$Q(t; l_M) := \frac{\frac{2}{l_M^2}(v_{M-1}^n(t) - v_M^n(t)) + \frac{2}{l_M}u_N^{p_{21}}(t)v_M^{p_{22}}(t)}{u_N^{2p_{21}}(t)v_M^{2p_{22}-n}(t)}.$$

Así, imponer las condiciones (5.11) y (5.12) es equivalente a

$$R(t; h_N) > r, \quad Q(t; l_M) > q.$$

Supongamos que una de estas dos condiciones, digamos la de R , no se cumple para todo $t > 0$. Sea entonces t_k el primer tiempo en el que R alcanza la tolerancia r ,

$$R(t_k; h_N^{(k-1)}) = r.$$

Es en este momento cuando tenemos que añadir un punto z entre x_{N-1} y $x_N = L$ a la malla de x . Por tanto la nueva longitud del paso es $h_N^{(k)} = L - z$.

Para poder continuar con el método tenemos que asignarle un valor, $u_z(t_k)$, al nuevo nodo. Lo elegimos de forma que se cumpla

$$\frac{1}{h_N^{(k-1)}}(u_{N-1}^m(t_k) - u_N^m(t_k)) = \frac{1}{h_N^{(k)}}(u_z^m(t_k) - u_N^m(t_k)).$$

Como veremos, esta elección es crucial para el buen funcionamiento del esquema adaptativo.

Veamos a qué conclusión llegamos usando la nueva malla $\{x_0, \dots, x_{N-1}, z, x_N\}$:

$$\begin{aligned} R(t_k; h_N^{(k)}) &= \frac{\frac{2}{(h_N^{(k)})^2}(u_z^m(t_k) - u_N^m(t_k)) + \frac{2}{h_N^{(k)}}u_N^{p_{11}}(t_k)v_M^{p_{12}}(t_k)}{u_N^{2p_{11}-m}(t_k)v_M^{2p_{12}}(t_k)} \\ &= \frac{\frac{2}{h_N^{(k-1)}}(u_{N-1}^m(t_k) - u_N^m(t_k)) + 2u_N^{p_{11}}(t_k)v_M^{p_{12}}(t_k)}{h_N^{(k)} u_N^{2p_{11}-m}(t_k)v_M^{2p_{12}}(t_k)} \\ &= \frac{h_N^{(k-1)}}{h_N^{(k)}} R(t_k; h_N^{(k-1)}) = \frac{h_N^{(k-1)}}{h_N^{(k)}} r > r. \end{aligned}$$

Al introducir este nuevo punto en la malla hemos conseguido que R vuelva a estar por encima de la tolerancia r , con lo que el método continúa de la forma descrita hasta que o bien R o bien Q alcancen sus respectivas tolerancias.

Obsérvese que en la descripción que hemos hecho del método todavía queda cierta libertad en la elección de la longitud $h_N^{(k)}$.

Sea

$$\mathcal{H} = (u_N^{p_{11}-m}(t_k)v_M^{p_{12}}(t_k))^{-1}$$

y sea

$$\begin{aligned} h_N^{(k)} &= \mathcal{H}, & \mathcal{H} < h_N^{(k-1)}, \\ h_N^{(k)} &= \frac{h_N^{(k-1)}}{2}, & \mathcal{H} \geq h_N^{(k-1)}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Como dijimos anteriormente, esta elección tiene la ventaja de que preserva las propiedades de cambio de escala del problema continuo cuando $p_{11} > m_1$. En este caso, gracias a la monotonía en tiempo de u_N, v_M , se tiene que $\mathcal{H} < h_N^{(k-1)}$. De este modo, la definición de $h_N^{(k)}$ siempre será la expresión (5.13) cuando p_{11} sea mayor que m .

5.3 Resultados auxiliares

Desarrollamos ahora una serie de herramientas que serán de gran utilidad para poder probar que el método adaptativo que hemos construido en la sección anterior reproduce correctamente el comportamiento de las soluciones de (5.1)–(5.4).

En primer lugar veamos que la solución numérica tiene las mismas propiedades de monotonía que la continua.

Lema 5.1 *Si $u'_i(0) > 0$ para $0 \leq i \leq N(0)$, entonces $u'_i(t) > 0$ para $0 \leq i \leq N(t)$ y $t \geq 0$.*

Demostración. Empecemos demostrando el lema para malla fija.

El caso $i = N$ es inmediato, ya que la monotonía en tiempo se sigue directamente de la condición (5.11).

Sea \bar{t} el primer tiempo tal que $u'_i(\bar{t}) = 0$ para algún valor de i . Si $i \neq 0$,

$$0 \geq u''_i(\bar{t}) \geq \frac{2C}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{u'_{i+1}(\bar{t})}{h_{i+1}} + \frac{u'_{i-1}(\bar{t})}{h_i} \right) \geq 0.$$

Por lo tanto, para no llegar a una contradicción, $u'_{i-1}(\bar{t})$ y $u'_{i+1}(\bar{t})$ tienen que ser cero. Finalmente, razonando de la misma forma repetidas veces, concluimos que $u'_N(\bar{t}) = 0$, que es una contradicción.

Deducimos entonces que $u'_i(\bar{t}) > 0$ para todo tiempo y todo valor de $i \neq 0$.

Cuando $i = 0$ el resultado se concluye análogamente, calculando en este caso el valor de $u''_0(\bar{t})$.

Para generalizar el resultado al problema adaptativo, basta observar que el valor de la solución numérica en el nuevo punto de la malla es tal que se conserva la monotonía estricta en el tiempo de refinado t_k . Por lo tanto, la demostración hecha para malla fija sigue siendo válida en $t \in [t_k, t_{k+1}]$. \square

Lema 5.2 *Si $u_i(0) < u_{i+1}(0)$ para $0 \leq i \leq N(0) - 1$, entonces $u_i(t) < u_{i+1}(t)$ para $0 \leq i \leq N(t) - 1$ y $t > 0$.*

Demostración. Al igual que en la demostración del lema anterior, probamos el resultado para malla fija. La generalización al método adaptativo se hace de la misma forma.

La prueba de este resultado se basa principalmente en la monotonía demostrada en el lema previo, Lema 5.1.

Empecemos considerando el caso $i = 0$. Gracias al Lema 5.1, sabemos que $u'_0 > 0$. Por tanto, de la ecuación que rige el comportamiento del nodo,

$$u'_0 = \frac{2}{h_1^2}(u_1^m - u_0^m),$$

obtenemos que $u_1 > u_0$.

El argumento se concluye por inducción. Supongamos demostrado que para todo t , $u_i > u_{i-1}$ y sea \bar{t} el primer tiempo tal que $u_i(\bar{t}) = u_{i+1}(\bar{t})$ para algún valor de i comprendido entre 1 y $N-1$. Entonces, usando de nuevo la monotonía estricta $u'_i > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 < u'_i(\bar{t}) &= \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{u_{i+1}^m(\bar{t}) - u_i^m(\bar{t})}{h_{i+1}} - \frac{u_i^m(\bar{t}) - u_{i-1}^m(\bar{t})}{h_i} \right) \\ &= \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(-\frac{u_i^m(\bar{t}) - u_{i-1}^m(\bar{t})}{h_i} \right) < 0. \end{aligned}$$

Queda demostrado de esta forma que $u_i(t) < u_{i+1}(t)$ para todo t . □

Observación 5.1 Para la componente V también se cumplen estas dos propiedades de monotonía, Lema 5.1 y Lema 5.2.

Nuestro siguiente objetivo consiste en determinar las condiciones sobre los parámetros del sistema para los cuales R y Q están acotadas o no.

Como veremos más adelante, Sección 5.4, el esquema numérico adaptativo se comporta como uno de entre cuatro posibles sistemas de ecuaciones. El hecho de que R y Q estén acotadas o no determina cuál de los cuatro sistemas es el que rige el comportamiento de la solución.

Lema 5.3 *Supongamos que la componente U explota.*

- (i) *Si $p_{11} \geq m$, entonces R está acotada.*
- (ii) *Si $p_{11} < m$ y V está acotada, entonces R no está acotada.*
- (iii) *Si V está acotada, entonces Q está acotada.*

Demostración. (i) Utilizando que V está acotada inferiormente y la monotonía en i de u_i , es fácil obtener una cota superior para R ,

$$R(t; h_N) \leq \frac{2u_N^{p_{11}}(t)}{h_N u_N^{2p_{11}-m}(t) v_M^{p_{12}}(t)} \leq \frac{C}{h_N} u_N^{m-p_{11}}(t). \quad (5.14)$$

Para continuar a partir de esta cota para R , observamos que hay dos posibilidades:

- la malla no se refina nunca;
- la malla se refina al menos una vez.

En el primero de los casos, $h_N \geq c > 0$. Como $p_{11} > m$, es fácil ver que R tiene que estar acotada.

Si, por el contrario, la malla se refina al menos una vez, el resultado no se obtiene de forma tan directa a partir de (5.14), ya que cuando t es grande, h_N tiende a cero y u_N a infinito. Utilizando entonces la expresión explícita de h_N , (5.13), y la monotonía en tiempo de U y V , tenemos que

$$R(t; h_N^{(k)}) \leq \frac{2u_N^{p_{11}-m}(t_k) v_M^{p_{12}}(t_k)}{\frac{1}{r} u_N^{p_{11}-m}(t) v_M^{p_{12}}(t)} \leq 2r$$

para todo $t_k \leq t \leq t_{k+1}$.

(ii) Antes de probar este apartado del lema, mostramos un cálculo sencillo hecho para el problema continuo, que creemos debería ayudar a comprender el caso discreto. Por otro lado, usaremos, tanto para el caso continuo como para el discreto, que la componente v , respectivamente V , está acotada inferiormente y por tanto la sustituiremos por una constante. De esta forma pretendemos hacer más sencilla la lectura.

Sea $w(t) = \int_0^L u^m(x, t) dx$. Derivando con respecto a t tenemos que

$$w'(t) = \int_0^L m u^{m-1}(x, t) (u^m)_{xx}(x, t) dx.$$

Recordemos de la Sección 3.2 del Capítulo 3 que, como consecuencia de la monotonía en tiempo de la solución, $u_t > 0$, el máximo de u y el de u_x están en $x = L$.

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} w'(t) &= mu^{m-1}(L, t)(u^m)_x(L, t) - \int_0^L m(u^{m-1})_x(u^m)_x dx \\ &\geq Cu^{p_{11}+m-1}(L, t) - C \int_0^L m(u^{m-1})_x(L, t)(u^m)_x(L, t) dx \\ &\geq Cu^{p_{11}+m-1}(L, t) - Cu^{2p_{11}-1}(L, t). \end{aligned}$$

Finalmente, como $p_{11} < m$, tenemos que $p_{11} + m - 1 > 2p_{11} - 1$, y esto que implica que

$$w'(t) \geq Cu^{p_{11}+m-1}(L, t) - Cu^{2p_{11}-1}(L, t) \sim u^{p_{11}+m-1}(L, t). \quad (5.15)$$

Estos mismos cálculos se pueden repetir para el caso discreto. Definamos el análogo de w como

$$\tilde{w} = \frac{h_1}{2}u_0^m + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2}u_i^m + \frac{h_N}{2}u_N^m.$$

Derivando con respecto a t y utilizando la fórmula dada en (5.9) para u'_i obtenemos,

$$\begin{aligned} \tilde{w}' &= mu_0^{m-1} \left(\frac{u_1^m - u_0^m}{h_1} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} mu_i^{m-1} \left(\frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h_{i+1}} - \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h_i} \right) \\ &\quad + mu_N^{m-1} \left(\frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_N} + u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

El siguiente paso consiste en adaptar la integración por partes al problema discreto. Para ellos utilizamos la fórmula de sumación por partes

$$\sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i)b_i = a_N b_N - a_1 b_1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_{i+1}(b_{i+1} - b_i),$$

con

$$a_{i+1} = \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h_{i+1}}, \quad a_i = \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h_i}, \quad b_i = mu_i^{m-1}.$$

Después de usar que tanto el máximo de u_i como el de a_i se encuentran en el nodo $i = N$, obtenemos

$$\tilde{w}' \geq -Lm \left(\frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_N} \right) \left(\frac{u_N^{m-1} - u_{N-1}^{m-1}}{h_{N-1}} \right) + mu_N^{m+p_{11}-1}.$$

Si comparamos esta última expresión con (5.15) observamos que nos falta un término de la forma $u_N^{2p_{11}-1}$. Éste se obtiene a partir de

$$\left(\frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_N}\right) \left(\frac{u_N^{m-1} - u_{N-1}^{m-1}}{h_{N-1}}\right) \quad (5.17)$$

usando de nuevo la localización de los máximos y el Teorema del Valor Medio. Veamos cómo:

En primer lugar obsérvese que

$$0 < u'_N = \frac{-2\left(\frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_N} + u_N^{p_{11}}\right)}{h_N},$$

de donde se obtiene que

$$u_N^{p_{11}} > \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_N}. \quad (5.18)$$

Por lo tanto, el primer término de (5.17) se puede acotar superiormente por $u_N^{p_{11}}$.

Es para acotar el segundo término donde usamos el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_N^{m-1} - u_{N-1}^{m-1}}{h_{N-1}}\right) &= \left(\frac{(u_N^m)^{\frac{m-1}{m}} - (u_{N-1}^m)^{\frac{m-1}{m}}}{h_{N-1}}\right) \\ &= \frac{m}{m-1} \xi^{\frac{m-1}{m}-1} \left(\frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_{N-1}}\right), \end{aligned}$$

donde ξ es un valor intermedio entre u_{N-1}^m y u_N^m . Así, gracias a la localización del máximo de u_i y a la expresión (5.18),

$$\frac{m}{m-1} \xi^{\frac{m-1}{m}-1} \left(\frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{h_{N-1}}\right) \leq \frac{m}{m-1} (u_N^m)^{-\frac{1}{m}} u_N^{p_{11}} \leq C u_N^{p_{11}-1}.$$

Resumamos brevemente el resultado obtenido. Acotamos (5.17) inferiormente por $u_N^{2p_{11}-1}$, gracias a lo cual concluimos que

$$\tilde{w}' \geq -C u_N^{2p_{11}-1} + C u_N^{m+p_{11}-1} \sim u_N^{m+p_{11}-1},$$

que es el mismo resultado que obtuvimos en el caso continuo.

Por otro lado, del Principio del Máximo discreto, [47], aplicado a la ecuación satisfecha por $(u_i^m)'$, concluimos que existe $\bar{t} < \mathcal{T}$ tal que

$$\max_i (u_i^m)'(t) = (u_N^m)'(t)$$

para todo $t \geq \bar{t}$.

Por lo tanto, podemos sustituir en la fórmula (5.16) cada $(u_i^m)'$ por $(u_N^m)'$ para obtener $\tilde{w}'(t) \leq C(u_N^m)'(t)$. Así,

$$u_N^{m+p_{11}-1} \sim \tilde{w}' \leq C u_N^{m-1} u_N',$$

que implica

$$u_N'(t) \geq C u_N^{p_{11}}(t), \quad t \geq \bar{t}.$$

Sustituyendo esta desigualdad en la fórmula de R tenemos que

$$R = \frac{u_N'}{u_N^{p_{11}} u_N^{p_{11}-m} v_M^{2p_{12}}} \rightarrow \infty \quad \text{cuando } u_N \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

(iii) Supongamos primero que la malla de V no se refina nunca. Como u_N explota y v_j está acotada y es monótona en j ,

$$Q \leq \frac{C}{l_M} u_N^{-p_{21}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } u_N \rightarrow \infty.$$

Esto contradice el hecho de que $Q > q$ y por lo tanto la malla se refina al menos una vez.

La prueba concluye como en el apartado (i), utilizando la expresión explícita de l_M (que se define de forma análoga a h_N) en la definición de Q . \square

Resulta razonable pensar a partir de este último lema que el hecho de que R y Q estén acotadas o no está fuertemente relacionado con el número de veces que se refina la malla.

Lema 5.4 (i) *Dado $\Theta > 0$ existen constantes $r_0 = r_0(\Theta, f, g)$ y $q_0 = q_0(\Theta, f, g)$ tal que para todo $r < r_0$ y $q < q_0$ no se refina ninguna de las dos mallas antes de que (U, V) alcance el nivel Θ .*

(ii) *Si U explota y $p_{11} > m$, entonces la malla de U se refina infinitas veces.*

(iii) *Si U explota y V está acotada y además $p_{11} < m$, entonces la malla de U se refina como mucho un número finito de veces.*

Demostración. (i) La prueba se deduce directamente de la igualdad (5.19): las cantidades involucradas están acotadas inferiormente. También están acotadas superiormente en términos de Θ y del dato inicial. Si \bar{t} es el primer tiempo en el

que la solución alcanza el nivel Θ , entonces $R(t) \geq r_0$ para $t \in [0, \bar{t}]$. El mismo razonamiento es válido para Q .

(ii)–(iii) Las pruebas son inmediatas a partir de (5.14) y (5.19), respectivamente. \square

Para terminar la sección enunciamos un lema que determina las condiciones para que en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias concreto se produzca explosión o explosión no simultánea. Este sistema representa a los que en la próxima sección describiremos como responsables del comportamiento de la solución del esquema numérico adaptativo.

Lema 5.5 *Sea (w, z) una solución de*

$$\begin{cases} w' = w^{q_{11}} z^{q_{12}}, \\ z' = w^{q_{21}} z^{q_{22}}, \end{cases} \quad (5.20)$$

con $q_{ij} \geq 0$.

(i) *Hay soluciones que explotan si y sólo si los exponentes q_{ij} verifican alguna de las siguientes condiciones*

$$q_{11} > 1, \quad q_{22} > 1, \quad q_{12}q_{21} > (1 - q_{11})(1 - q_{22}). \quad (5.21)$$

(ii) *Existen datos iniciales $(w(0), z(0))$ tales que w explota y z permanece acotada si y sólo si*

$$q_{21} < q_{11} - 1.$$

(iii) *Para todo dato inicial positivo, w explota y z permanece acotada si y sólo si los exponentes q_{ij} verifican*

$$q_{21} < q_{11} - 1 \quad \text{y} \quad q_{12} \geq q_{22} - 1. \quad (5.22)$$

Demostración. El resultado se obtiene por integración directa. Véase [104] para los detalles. \square

5.4 Propiedades de la solución numérica adaptativa

Como hemos mencionado repetidas veces en las secciones previas, el comportamiento de la solución numérica adaptativa viene determinado por unos sistemas

de ecuaciones diferenciales ordinarias concretos. Seamos más precisos en esta afirmación.

En función de que R esté acotada superiormente o no, la ecuación que rige el comportamiento de u'_N estará dada por

$$u'_N \sim u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}} \quad \text{o} \quad u'_N \sim u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}},$$

respectivamente. De la misma manera, v'_M tiene un comportamiento determinado por

$$v'_M \sim u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}} \quad \text{o} \quad v'_M \sim u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n}.$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos los cuatro posibles sistemas antes mencionados.

Integrando el sistema apropiado en cada caso recuperamos los resultados descritos en el Capítulo 3 para el problema continuo. Obsérvese que no imponemos a priori ninguno de los cuatro posibles sistemas, ya que no sabemos cuál dará el comportamiento correcto de la solución sin conocer previamente dicha solución.

Teorema 5.6 *Sea (u, v) una solución de (5.1)–(5.4) monótona en tiempo y en espacio y sea (U, V) la aproximación numérica a esa solución obtenida mediante el método numérico adaptativo descrito en las secciones anteriores. Para todo $\Theta > 0$ existen valores $r_0 = r_0(\Theta, f, g)$, $q_0 = q_0(\Theta, f, g)$ tales que, si $r < r_0$ y $q < q_0$, entonces (U, V) converge uniformemente en $[0, L] \times [0, \bar{T}]$ a (u, v) cuando $h \rightarrow 0$, siendo \bar{T} en primer tiempo en el que (u, v) toca el nivel Θ . Es más:*

- (i) *Las aproximaciones numéricas (U, V) explotan si y sólo si se cumple alguna de las condiciones descritas en (5.5).*
- (ii) *Existen datos iniciales $(U(0), V(0))$ tales que U explota y V permanece acotada si y sólo si se cumple la condición (5.6). Además, el conjunto de datos iniciales para los cuales hay explosión no simultánea es abierto en la topología de L^∞ .*
- (iii) *Si U explota y V permanece acotada, la tasa de explosión de U viene dada por*

$$\|U(t)\|_\infty \sim (\mathcal{T} - t)^{-\gamma},$$

con γ descrito en (5.8). En esta situación, el conjunto de explosión de U es

$$B(U) = \begin{cases} \{L\}, & p_{11} > m, \\ B(U) = [0, L], & p_{11} \leq m. \end{cases}$$

- (iv) Hay explosión no simultánea siempre, es decir U explota y V permanece acotada independientemente de los datos iniciales, si y sólo si se cumple la condición (5.6), pero no se cumple (5.7).
- (v) Si se cumplen las condiciones (5.6) y (5.7), entonces hay datos iniciales tales que U y V explotan simultáneamente.

Obsérvese que el rango de exponentes para el cual la explosión es siempre no simultánea (descrito en el punto (iv) del Teorema 5.6) extiende al rango conocido para el problema continuo (véanse los puntos 4 y 5 en la página 82). Recordemos que este resultado para el problema continuo no cubría todos los posibles casos de explosión no simultánea. Dado que el método numérico reproduce correctamente el resto de propiedades (puntos 1 a 3 de la página 81), parece razonable pensar que este resultado podría ser correcto para completar el estudio del problema continuo.

Dada la extensión del Teorema 5.6, para facilitar la lectura, lo desglosaremos en distintos lemas, que demostraremos independientemente.

1. Convergencia del esquema numérico. Dado que la explosión está definida en L^∞ , resulta natural que busquemos la convergencia en esta norma. Aunque existen demostraciones del teorema de convergencia basadas en estimaciones de energía, [47], por completitud, probamos de nuevo el resultado. Utilizamos aquí una técnica basada en argumentos de comparación.

Definición 5.1 Diremos que (\bar{U}, \bar{V}) es una supersolución estricta de (5.9) si satisface el sistema (5.9) sustituyendo las igualdades (=) por mayores estrictos (>).

Definición 5.2 Diremos que $(\underline{U}, \underline{V})$ es una subsolución estricta de (5.9) si satisface el sistema (5.9) sustituyendo las igualdades (=) por menores estrictos (<).

Lema 5.7 Sean (\bar{U}, \bar{V}) y $(\underline{U}, \underline{V})$ una supersolución estricta y una subsolución estricta respectivamente de (5.9) tales que

$$\bar{u}_i(0) > \underline{u}_i(0), \quad 0 \leq i \leq N(0),$$

$$\bar{v}_j(0) > \underline{v}_j(0), \quad 0 \leq j \leq M(0).$$

Entonces

$$\bar{u}_i(t) > \underline{u}_i(t), \quad 0 \leq i \leq N(t),$$

$$\bar{v}_j(t) > \underline{v}_j(t), \quad 0 \leq j \leq M(t),$$

mientras la supersolución y la subsolución existan.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que el lema no es cierto y sea

$$\bar{t} := \sup\{t : \bar{U}(t) > \underline{U}(t), \bar{V}(t) > \underline{V}(t)\} < \infty.$$

Entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un nodo i tal que $\bar{u}_i(\bar{t}) = \underline{u}_i(\bar{t})$, $\bar{u}_k(\bar{t}) \geq \underline{u}_k(\bar{t})$ para $k \neq i$ y $\bar{v}_j(\bar{t}) \geq \underline{v}_j(\bar{t})$, para todo j .

Veamos cómo obtenemos una contradicción cuando i es tal que $1 \leq i \leq N - 1$. Utilizando las definiciones de supersolución estricta y subsolución estricta obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \bar{u}'_i(\bar{t}) - \underline{u}'_i(\bar{t}) \\ &> \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{\bar{u}_{i+1}^m(\bar{t}) - \underline{u}_{i+1}^m(\bar{t})}{h_{i+1}} + \frac{\bar{u}_{i-1}^m(\bar{t}) - \underline{u}_{i-1}^m(\bar{t})}{h_i} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

que es una contradicción.

Obviamente, los casos $i = 0$ y $i = N$ se tratan de la misma forma utilizando las ecuaciones que describen el comportamiento de estos nodos. \square

Observación 5.2 Se puede hacer el mismo razonamiento si \bar{t} es el primer tiempo tal que $\bar{v}_j(\bar{t}) = \underline{v}_j(\bar{t})$, $\bar{v}_k(\bar{t}) \geq \underline{v}_k(\bar{t})$ y $\bar{u}_i(\bar{t}) \geq \underline{u}_i(\bar{t})$ para algún nodo j , $k \neq j$ y todo i .

Lema 5.8 Sea (u, v) una solución de (5.1)–(5.4) y sea (U, V) su aproximación numérica calculada con el método adaptativo. Para todo Θ positivo existen valores

$r_0 = r_0(\Theta, f, g)$ y $q_0 = q_0(\Theta, f, g)$ tales que, si $r < r_0$, $q < q_0$ y h es suficientemente pequeño, entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq \bar{T}} \max_{i,j} (|u(x_i, t) - u_i(t)| + |v(y_j, t) - v_j(t)|) \leq Ch, \quad (5.23)$$

donde \bar{T} es el primer tiempo en el que (u, v) alcanza el nivel Θ .

Demostración. Dividiremos la prueba en dos pasos. En primer lugar demostraremos que hay convergencia para un problema con los términos no lineales truncados. El segundo paso consiste en demostrar que en realidad las truncaciones no han surtido efecto y que por tanto la convergencia demostrada corresponde al problema original.

PASO 1 Sean $\hat{w} = u^m$, $\hat{z} = v^n$ y

$$\kappa = \kappa(\Theta) := \sup_{0 < t < \bar{T}} \max\{\|\hat{w}(\cdot, t)\|_\infty, \|\hat{z}(\cdot, t)\|_\infty\}.$$

Definimos las funciones de truncación, acotadas y con regularidad \mathcal{C}^1 , F_{ij}^κ , de la siguiente forma

$$F_{ij}^\kappa(s) = s^{\frac{p_{ij}}{m_j}}, \quad s \leq \kappa + \frac{1}{2}$$

y consideramos \hat{w}^κ y \hat{z}^κ soluciones de

$$\begin{cases} ((\hat{w}^\kappa)^{\frac{1}{m}})_t = (\hat{w}^\kappa)_{xx}, \\ (\hat{w}^\kappa)_x(0, t) = 0, \\ (\hat{w}^\kappa)_x(L, t) = F_{11}^\kappa(\hat{w})F_{12}^\kappa(\hat{z}), \end{cases} \quad \begin{cases} ((\hat{z}^\kappa)^{\frac{1}{n}})_t = (\hat{z}^\kappa)_{xx}, \\ (\hat{z}^\kappa)_x(0, t) = 0, \\ (\hat{z}^\kappa)_x(L, t) = F_{21}^\kappa(\hat{w})F_{22}^\kappa(\hat{z}). \end{cases} \quad (5.24)$$

Sea (W^κ, Z^κ) la aproximación adaptativa de $(\hat{w}^\kappa, \hat{z}^\kappa)$. Entonces (W^κ, Z^κ) es solución del sistema

$$\begin{cases} ((w_0^\kappa)^{\frac{1}{m}})' = \frac{2}{h_1^2}((w_1^\kappa) - (w_0^\kappa)), \\ ((w_i^\kappa)^{\frac{1}{m}})' = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{(w_{i+1}^\kappa) - (w_i^\kappa)}{h_{i+1}} - \frac{(w_i^\kappa) - (w_{i-1}^\kappa)}{h_i} \right), \\ ((w_N^\kappa)^{\frac{1}{m}})' = \frac{2}{h_N^2}((w_{N-1}^\kappa) - (w_N^\kappa)) + \frac{2}{h_N} F_{11}^\kappa(w_N^\kappa) F_{12}^\kappa(z_M^\kappa), \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq N-1$, con ecuaciones análogas para las derivadas de z_j^κ .

Veamos en primer lugar que la aproximación (W^κ, Z^κ) está acotada hasta tiempo \bar{T} , siendo la cota independiente de las mallas espaciales.

La solución (W^κ, Z^κ) es una subsolución estricta de una discretización, hecha utilizando diferencias finitas con malla fija, del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} ((\hat{w}^\kappa)^{\frac{1}{m}})_t = (\hat{w}^\kappa)_{xx} + 1, \\ (\hat{w}^\kappa)_x(0, t) = 0, \\ (\hat{w}^\kappa)_x(L, t) = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)^{\frac{p_{11}}{m} + \frac{p_{12}}{n}}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} ((\hat{z}^\kappa)^{\frac{1}{n}})_t = (\hat{z}^\kappa)_{xx} + 1, \\ (\hat{z}^\kappa)_x(0, t) = 0, \\ (\hat{z}^\kappa)_x(L, t) = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)^{\frac{p_{21}}{m} + \frac{p_{22}}{n}}. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Dado que el sistema no está acoplado y que el flujo a través de la frontera es constante, un resultado de convergencia clásico, implica, gracias a la cota para (5.25), convergencia uniforme para las aproximaciones numéricas si h es suficientemente pequeño. Por comparación (W^κ, Z^κ) está acotado hasta \bar{T} .

Por otro lado, si (W^κ, Z^κ) está acotado hasta \bar{T} , el método no refina cuando $r < r_0$, $q < q_0$, véase el Lema 5.4. Por lo tanto, basta demostrar el resultado de convergencia (5.23) para $(\hat{w}^\kappa, \hat{z}^\kappa)$ y su aproximación numérica (W^κ, Z^κ) utilizando una discretización de malla fija.

Como mencionamos anteriormente, la demostración del resultado de convergencia (5.23) se hace utilizando un argumento de comparación con supersoluciones estrictas.

Para ello definimos en primer lugar las funciones de error

$$e_i(t) = w_i^\kappa(t) - \hat{w}_i^\kappa(t), \quad \epsilon_j(t) = z_j^\kappa(t) - \hat{z}_j^\kappa(t),$$

donde $\hat{w}_i^\kappa(t)$ y $\hat{z}_j^\kappa(t)$ representan a las soluciones de (5.24) evaluadas en los nodos de la malla,

$$\hat{w}_i^\kappa(t) = \hat{w}^\kappa(x_i, t), \quad \hat{z}_j^\kappa(t) = \hat{z}^\kappa(y_j, t).$$

Sea

$$\bar{t} = \sup\{t : 0 \leq t < \bar{T}, \max_i |e_i(t)| \leq 1, \max_j |\epsilon_j(t)| \leq 1\}.$$

El objetivo es ver qué ecuaciones verifican las funciones de error en el intervalo de tiempo $[0, \bar{t}]$ para después encontrar supersoluciones estrictas a estos problemas.

Si $1 \leq i \leq N - 1$, la función de error satisface

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}(w_i^\kappa)^{\frac{1-m}{m}} e'_i &\leq \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1}} - \frac{e_i - e_{i-1}}{h_i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{m} (\hat{w}_i^\kappa)' \left((w_i^\kappa)^{\frac{1-m}{m}} - (\hat{w}_i^\kappa)^{\frac{1-m}{m}} \right) + Ch \\ &\leq \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1}} - \frac{e_i - e_{i-1}}{h_i} \right) + C \xi_i^{\frac{1-2m}{m}} |e_i| + Ch, \end{aligned}$$

donde ξ_i es un valor intermedio entre w_i^κ y \hat{w}_i^κ . Como $\hat{w}_i^\kappa(t)$ es positiva y acotada y además en $t \in [0, \bar{t}]$ la función de error e_i es menor que uno, w_i^κ también está acotada. Entonces,

$$e'_i \leq \frac{2C}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1}} - \frac{e_i - e_{i-1}}{h_i} \right) + C|e_i| + Ch.$$

De forma similar obtenemos que la ecuación para la derivada de la función de error en el primer nodo es

$$e'_0 \leq \frac{2C}{h_1^2} (e_1 - e_0) + C|e_0| + Ch.$$

Finalmente, para obtener la ecuación de la derivada del último nodo usamos de nuevo el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}(w_N^\kappa)^{\frac{1-m}{m}} e'_N &\leq \frac{2}{h_N^2} (e_{N-1} - e_N) \\ &\quad + \frac{2}{h_N} (F_{11}^\kappa(w_N^\kappa) F_{12}^\kappa(z_M^\kappa) - F_{11}^\kappa(\hat{w}_N^\kappa) F_{12}^\kappa(\hat{z}_M^\kappa)) + C|e_N| + Ch \\ &\leq \frac{2}{h_N^2} (e_{N-1} - e_N) + \frac{2}{h_N} \left(F_{11}^\kappa(w_N^\kappa) (F_{12}^\kappa(z_M^\kappa) - F_{12}^\kappa(\hat{z}_M^\kappa)) \right. \\ &\quad \left. + (F_{11}^\kappa(w_N^\kappa) - F_{11}^\kappa(\hat{w}_N^\kappa)) F_{12}^\kappa(\hat{z}_M^\kappa) \right) + C|e_N| + Ch \\ &\leq \frac{2}{h_N^2} (e_{N-1} - e_N) + \frac{2}{h_N} (C|\epsilon_M| + C|e_N|) + C|e_N| + Ch. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como w_N^κ está acotada tanto superior como inferiormente en $[0, \bar{t}]$,

$$e'_N \leq \frac{2C}{h_N^2} (e_{N-1} - e_N) + \frac{2C}{h_N} (|\epsilon_M| + |e_N|) + C|e_N| + Ch.$$

Obviamente, haciendo cálculos similares se obtienen las ecuaciones que verifican las derivadas de la función de error ϵ_j .

Concluimos que las funciones de error son subsolución en $t \in [0, \bar{t}]$ de

$$\begin{cases} e'_0 = \frac{2C}{h_1^2}(e_1 - e_0) + C|e_0| + Ch, \\ e'_i = \frac{2C}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1}} - \frac{e_i - e_{i-1}}{h_i} \right) + C|e_i| + Ch, \\ e'_N = \frac{2C}{h_N^2}(e_{N-1} - e_N) + \frac{2C}{h_N}(|e_N| + |\epsilon_M|) + C|e_N| + Ch, \end{cases} \quad (5.26)$$

junto con las ecuaciones correspondientes para ϵ_j . Obsérvese que este sistema posee un principio de comparación (que se demuestra como el Lema 5.7).

Definamos ahora las supersoluciones estrictas que servirán para comparar: eligiendo constantes C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 de forma apropiada, pero independientemente de h , las funciones

$$\varphi_i(t) = h(C_1 \exp(C_2 t) + C_3)(\exp(2C_4 x_i) - C_5 x_i),$$

$$\psi_j(t) = h(C_1 \exp(C_2 t) + C_3)(\exp(2C_4 y_j) - C_5 y_j),$$

son supersoluciones estrictas de (5.26). En particular, basta tomar C_2 y C_4 suficientemente grandes. Además $\varphi_i(0)$ y $\psi_j(0)$ están trivialmente por encima del dato inicial, ya que $|e_i(0)|, |\epsilon_j(0)| = 0$. Así, aplicando el principio de comparación,

$$e_i(t) \leq \varphi_i(t), \quad \epsilon_j(t) \leq \psi_j(t).$$

Este mismo argumento se puede usar también para $-e_i, -\epsilon_j$ y finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} |e_i(t)| &\leq \varphi_i(t) \leq Ch \exp(C\bar{T}), \\ |\epsilon_j(t)| &\leq \psi_j(t) \leq Ch \exp(C\bar{T}), \end{aligned} \quad t \in [0, \bar{t}].$$

De esta forma hemos demostrado el resultado de convergencia (5.23) para funciones con no linealidades truncadas hasta \bar{t} . Por otro lado, como $|e_i|, |\epsilon_i| \leq \frac{1}{2}$ para $t \in [0, \bar{t}]$ y h suficientemente pequeño, podemos extender el resultado hasta $\bar{t} = \bar{T}$.

PASO 2 La solución $(\hat{w}, \hat{z}) = (u^m, v^n)$ coincide con la solución $(\hat{w}^\kappa, \hat{z}^\kappa)$ de (5.24) hasta \bar{T} , ya que por hipótesis, hasta este tiempo, (\hat{w}, \hat{z}) está acotada por κ . Por

lo tanto, gracias al resultado obtenido en el primer paso de esta demostración, (W^κ, Z^κ) converge a la solución original (\hat{w}, \hat{z}) hasta \bar{T} . Así, si h es pequeño,

$$w_N^\kappa \leq \kappa + \frac{1}{2}, \quad z_M^\kappa \leq \kappa + \frac{1}{2}.$$

Estas cotas implican que la truncación para el problema numérico no surte efecto, es decir, $(W^\kappa, Z^\kappa) = (W, Z)$. Por tanto (W, Z) converge uniformemente a (\hat{w}, \hat{z}) hasta \bar{T} y concluimos el resultado (5.23). \square

2. Explosión numérica. El primer paso para el estudio de las propiedades de explosión del método adaptativo, consiste en determinar las condiciones sobre los exponentes del problema para que haya explosión.

Lema 5.9 *Las aproximaciones numéricas (U, V) explotan en tiempo finito si y sólo si los exponentes p_{ij} verifican alguna de las siguientes condiciones*

$$p_{11} > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}, \quad p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\},$$

$$p_{12}p_{21} > \left(\min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\} - p_{11} \right) \left(\min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\} - p_{22} \right).$$

Demostración. \Rightarrow Supongamos en primer lugar que $p_{11} > \frac{m+1}{2}$. La integración directa de la ecuación que describe el método,

$$u'_N \geq r u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}} \geq c u_N^{2p_{11}-m}, \quad (5.27)$$

implica explosión.

Si por el contrario $p_{11} > 1$, utilizando el sistema (5.9) y la monotonía en i de u_i , obtenemos que la masa

$$w(t) = \int_0^L U^I(x, t) dx = \frac{h_1}{2} u_0(t) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} u_i(t) + \frac{h_N}{2} u_N(t).$$

satisface

$$w' = u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}} \geq C w^{p_{11}}. \quad (5.28)$$

Recordemos que U^I denota la interpolada de Lagrange de U . Como estamos suponiendo que $p_{11} > 1$, w no está definida globalmente. Por lo tanto, observando

la definición de w , concluimos que u_N tampoco puede estar definida globalmente y por lo tanto explota.

Resumamos el resultado obtenido hasta ahora: Las aproximaciones numéricas (U, V) explotan si

$$p_{11} > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\} \quad \text{o si} \quad p_{22} > \min \left\{ 1, \frac{n+1}{2} \right\}.$$

Obsérvese que la prueba en este último caso es análoga a la hecha para p_{11} .

Supongamos finalmente que $p_{12}p_{21} > (\min\{1, \frac{m+1}{2}\} - p_{11})(\min\{1, \frac{n+1}{2}\} - p_{22})$, pero que sin embargo $p_{11} \leq \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$ y $p_{22} \leq \min\{1, \frac{n+1}{2}\}$. Los mínimos de estas condiciones se obtienen en uno u otro valor dependiendo de los valores de m y n . Por este motivo, distinguiremos distintos casos en la demostración.

En cada uno de los cuatro posibles casos, la demostración se basa en probar que u_N y v_M (o las masas $w(t)$ y $z(t)$ de $U^I(\cdot, t)$ y $V^I(\cdot, t)$, respectivamente) son supersoluciones de determinados sistemas de ecuaciones. Gracias al Lema 5.5, podemos ver que las soluciones de estos sistemas explotan y por comparación, las supersoluciones también tienen que hacerlo.

Veamos finalmente cuáles son los sistemas apropiados en cada caso para realizar esta comparación.

$$\begin{aligned} \bullet m > 1, n > 1: & \begin{cases} w' = cw^{p_{11}} z^{p_{12}}, \\ z' = cw^{p_{21}} z^{p_{22}}. \end{cases} & \bullet m > 1, n \leq 1: & \begin{cases} w' = cw^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v_M' = cw^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n}. \end{cases} \\ \bullet m \leq 1, n > 1: & \begin{cases} u_N' = cu_N^{2p_{11}-m} z^{2p_{12}}, \\ z' = cu_N^{p_{21}} z^{p_{22}}. \end{cases} & \bullet m \leq 1, n \leq 1: & \begin{cases} u_N' = cu_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}}, \\ v_M' = cu_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n}. \end{cases} \end{aligned}$$

⊞ Para demostrar el recíproco supongamos que no se verifica ninguna de las condiciones sobre los exponentes descritas en el lema.

Veamos en primer lugar que en esta situación las componentes U y V no pueden explotar solas. Supongamos para ello que V está acotada y que U explota. Si $p_{11} \geq m$, R está acotada y por tanto

$$u_N' \leq Cu_N^{2p_{11}-m},$$

véase el Lema 5.3. Si, por el contrario, $p_{11} < m$, $R \rightarrow \infty$ y el método refina como mucho un número finito de veces, Lema 5.3 y Lema 5.4. Esto implica que

$h_N \geq c > 0$, y por tanto

$$u'_N \leq C u_N^{p_{11}}.$$

En cualquiera de los dos casos, como $p_{11} \leq \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$, por integración obtenemos que U no puede explotar.

Concluimos entonces que las dos componentes tienen que explotar simultáneamente. Para terminar la demostración, usamos de nuevo un argumento de comparación. En este caso u_N y v_M son subsoluciones de uno de los siguientes sistemas, que dependen de la acotación o no de R y Q .

$$\begin{aligned} \bullet R, Q \rightarrow \infty: & \begin{cases} u'_N = c u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_M = c u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}. \end{cases} & \bullet R \rightarrow \infty, Q \leq C: & \begin{cases} u'_N = c u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_M = c u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n}. \end{cases} \\ \bullet R, Q \leq C: & \begin{cases} u'_N = c u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}}, \\ v'_M = c u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n}. \end{cases} & \bullet R \leq C, Q \rightarrow \infty: & \begin{cases} u'_N = c u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}}, \\ v'_M = c u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}. \end{cases} \end{aligned}$$

En cada uno de los cuatro casos, utilizando el Lema 5.5, la relación de los exponentes conduce a soluciones acotadas. Por lo tanto, como u_N y v_M son subsoluciones de estos sistemas, también tienen que estar acotadas. \square

3. Explosión no simultánea. Nos enfrentamos ahora con el problema de encontrar condiciones sobre los exponentes de (5.1)–(5.4) para los cuales U explota y V está acotada. Gracias al método adaptativo construido en la Sección 5.2 podemos demostrar que se reproducen correctamente las propiedades del problema continuo, ya que la condición necesaria y suficiente para que haya datos iniciales tales que la explosión es no simultánea viene dada por

$$2p_{21} < \max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}. \quad (5.29)$$

La condición para que V explote y U permanezca acotada es, como cabría esperar,

$$2p_{12} < \max\{p_{22} - 1, 2p_{22} - (n + 1)\}. \quad (5.30)$$

Lema 5.10 *Si U explota y V permanece acotada, entonces se cumple la condición (5.29). Además,*

$$u_N(t) \geq C(\mathcal{T} - t)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}}. \quad (5.31)$$

Demostración. Como el máximo de la condición (5.29) depende de la relación entre p_{11} y m parece razonable que distingamos estos dos casos en el desarrollo de esta prueba.

Empecemos suponiendo que $p_{11} \geq m$. En este caso, R está acotada y por tanto de la ecuación que describe el método adaptativo tenemos que

$$u'_N \leq C u_N^{2p_{11}-m}. \quad (5.32)$$

Si $2p_{11} - m \leq 1$, u_N está acotada, una contradicción.

Si $p_{11} < m$ la malla se refina únicamente un número finito de veces. Del sistema (5.9) obtenemos

$$u'_N \leq C u_N^{p_{11}}. \quad (5.33)$$

A partir de esta desigualdad deducimos que p_{11} tiene que ser mayor estricto que 1 para que u_N explote.

De estos dos casos, $p_{11} > m$ y $p_{11} \leq m$, concluimos que la condición necesaria para que U explote es

$$p_{11} > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}.$$

Para demostrar la tasa inferior (5.31), basta integrar en cada uno de los dos casos las desigualdades (5.32) y (5.33) en el intervalo (t, \mathcal{T}) y utilizar que u_N explota.

Por ejemplo, si $p_{11} \geq m$ haciendo un cambio de variables tenemos

$$\int_t^{\mathcal{T}} \frac{u'_N}{u_N^{2p_{11}-m}} = \int_{u_N(t)}^{u_N(\mathcal{T})} \frac{ds}{s^{2p_{11}-m}} \leq C(\mathcal{T} - t).$$

De esta última desigualdad y usando que en este caso $2p_{11} - m \geq 1$ y que además $u_N(\mathcal{T})$ tiende a infinito, obtenemos finalmente

$$u_N(t) \geq C(\mathcal{T} - t)^{-\frac{1}{2p_{11}-m-1}}.$$

El último paso de esta demostración consiste en encontrar la condición para que sea posible la explosión no simultánea. Para ello utilizamos, además de que V está acotada tanto superior como inferiormente, la tasa inferior para u_N , (5.31), en la ecuación del método adaptativo que describe el comportamiento de v_M ,

$$v'_M \geq q u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n} \geq C(\mathcal{T} - t)^{-2p_{21}\gamma}.$$

Integrando esta desigualdad, como V está acotada, concluimos que $2p_{21}\gamma < 1$, es decir (5.29). \square

Lema 5.11 *Si se cumple la condición (5.29), entonces dado $V(0)$ existe un dato inicial $U(0)$ tal que U explota y V permanece acotada. Además*

$$u_N(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\max\{p_{11} - 1, 2p_{11} - (m + 1)\}}. \quad (5.34)$$

Demostración. Como ya hemos mencionado repetidas veces, el hecho de que $p_{21} \geq 0$, implica, gracias a la condición (5.29), que $p_{11} > \min\{1, \frac{m+1}{2}\}$, y por tanto la solución (U, V) explota, Lema 5.9. La idea de la demostración pasa por ver que V está acotada y que por tanto tiene que ser U la componente que explota.

Distingamos de nuevo los casos $p_{11} \geq m_1$ y $p_{11} < m$. En el primer caso integramos la desigualdad (5.27),

$$u'_N \geq r u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}} \geq c u_N^{2p_{11}-m}$$

en el intervalo (t, \mathcal{T}) y utilizamos que en este caso la condición (5.29) es simplemente $2p_{11} > m + 1$, para obtener la tasa (5.34).

Si $p_{11} < m$ hacemos un razonamiento similar, pero esta vez integrando la expresión (5.28),

$$w' = u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}} \geq C w^{p_{11}}.$$

Para ver que w y u_N son equivalentes, necesitamos saber que el método refina la malla de U un número finito de veces y para que esto sea cierto es necesario que V esté acotada.

Veamos entonces que V está acotada para alguna elección de los datos iniciales. Supongamos que V no está acotada y que hay un primer tiempo $\bar{t} < \mathcal{T}$ tal que $v_M(\bar{t}) = 3v_M(0)$.

Como v_M está acotada en $[0, \bar{t}]$, u_N y w son equivalentes hasta ese tiempo y por tato se verifica la tasa,

$$u_N(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\gamma}, \quad 0 < t < \bar{t} \quad (5.35)$$

Además, el hecho de que v_M esté acotada implica que Q también lo está, Lema 5.3. Por tanto, gracias a la tasa (5.35)

$$v'_M \leq C u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n} \leq C(\mathcal{T} - t)^{-2p_{21}\gamma} v_M^{2p_{22}-n}.$$

Sabemos por otro lado que se cumple la condición (5.29). Por tanto, si \mathcal{T} es suficientemente pequeño (lo cual se puede conseguir tomando $U(0)$ suficientemente grande), $v_M(\bar{t}) < 2v_M(0)$, que es una contradicción.

Concluimos así que V está acotada para todo $t < \mathcal{T}$ y por tanto la tasa (5.35) es cierta para $t < \mathcal{T}$. \square

Lema 5.12 *Si se cumple la condición de explosión no simultánea (5.29), entonces el conjunto de datos iniciales para los cuales U explota y V permanece acotada es abierto en la topología L^∞ .*

Demostración. La demostración es igual que la del Lema 3.19 del Capítulo 3. \square

Finalmente para terminar esta sección demostramos el punto (iv) del Teorema 5.6, donde se muestra cuáles son las condiciones que tienen que cumplir los exponentes para que la explosión sea siempre no simultánea.

Lema 5.13 *La explosión es siempre no simultánea, es decir U explota y V permanece acotada independientemente de los datos iniciales, si y sólo si se cumple la condición (5.29) pero no se cumple (5.30)*

Demostración. \implies El hecho de que U explote y V permanezca acotada implica, gracias al Lema 5.10, que se cumple la condición (5.29) sean cuales sean los datos iniciales.

Por otro lado, supongamos que se cumple la condición (5.30). Entonces utilizando el análogo del Lema 5.11 para V , sabemos que existen datos iniciales para los cuales V explota y U permanece acotada. Pero esto es imposible, ya que como acabamos de demostrar, independientemente de los datos iniciales elegidos, U explota y V no. Concluimos por tanto que la condición (5.30) no se puede cumplir.

\impliedby El resultado se sigue directamente del Lema 5.5. Veamos cómo.

Eligiendo unos exponentes determinados, q_{ij} , (u_N, v_M) es solución (sustituyendo los $=$ por \sim) del sistema (5.20).

Por ejemplo, si R está acotada y Q no lo está, (u_N, v_M) es solución de

$$\begin{cases} u'_N \sim cu_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}}, \\ v'_M \sim cu_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}, \end{cases} \quad (5.36)$$

con los siguientes exponentes q_{ij}

$$q_{11} = 2p_{11} - m, \quad q_{12} = 2p_{12}, \quad q_{21} = p_{21}, \quad q_{22} = p_{22}.$$

Por otro lado, como se cumple la condición (5.29), sabemos que existen datos iniciales para los cuales U explota y V permanece acotada. El hecho de que haya explosión no simultánea aplicado al sistema (5.36) implica, por el Lema 5.5, que

$$q_{21} < q_{11} - 1.$$

Un razonamiento análogo se puede hacer con la condición (5.30). Como ésta no se cumple, no hay datos iniciales tales que V explota y U permanece acotada. Se tiene entonces necesariamente que

$$q_{12} \geq q_{22} - 1.$$

Resumamos el resultado obtenido: según el punto (iii) del Lema 5.5, estas dos condiciones sobre los exponentes implican que la solución del sistema (5.36) es tal que u_N explota y v_M permanece acotada para todos los datos iniciales. Por tanto hay explosión no simultánea siempre. \square

Observación 5.3 Como dijimos anteriormente, el Lema 5.13 generaliza los resultados conocidos para el problema continuo, teoremas 3.16 y 3.17 del Capítulo 3.

4. Conjunto de explosión no simultáneo. El conjunto de explosión de U , entendido como el conjunto de explosión de su interpolada de Lagrange, U^I , depende de la relación entre p_{11} y m . Cuando $p_{11} > m$ el método refina infinitas veces la malla y la explosión es puntual. En este caso, como veremos, la demostración se basa en la propagación de la explosión a lo largo de los nodos. Por el contrario, cuando $p_{11} < m$ la malla se refina como mucho un número finito de veces. Por tanto, se puede considerar que a partir de un determinado tiempo la malla está fija. En este caso veremos que la explosión es global. El caso $p_{11} = m$ es ligeramente más delicado, ya que no podemos asegurar cuántas veces se refina la malla, Lema 5.4.

Lema 5.14 Sea i un entero tal que $i < N(\bar{t})$, para algún tiempo $\bar{t} < \mathcal{T}$. Si

$$u_i(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\alpha_i}$$

y $\alpha_{i-1} = \alpha_i m - 1$, entonces

$$u_{i-1}(t) \leq \begin{cases} C(\mathcal{T} - t)^{-\alpha_{i-1}}, & \alpha_{i-1} > 0, \\ C_1 - C_2 \ln(\mathcal{T} - t), & \alpha_{i-1} = 0, \\ C, & \alpha_{i-1} < 0. \end{cases}$$

Demostración. Si $i > 1$, gracias a la monotonía de u_i en i ,

$$\begin{aligned} u'_{i-1}(t) &= \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{u_i^m(t) - u_{i-1}^m(t)}{h_i} - \frac{u_{i-1}^m(t) - u_{i-2}^m(t)}{h_{i-1}} \right) \\ &\leq C u_i^m \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\alpha_i m}. \end{aligned}$$

Integrando entre 0 y t la desigualdad

$$u'_{i-1}(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\alpha_i m}$$

y teniendo en cuenta que $\alpha_{i-1} = \alpha_i m - 1$, se obtiene el resultado deseado.

Si $i = 1$ utilizamos la ecuación para u'_0 ,

$$u'_0 = \frac{2}{h_1^2} (u_1^m - u_0^m).$$

El resultado se concluye con el mismo razonamiento que en el caso $i > 1$. \square

Observación 5.4 Este lema afirma en particular que si $\alpha_{i-1} < 0$, entonces u_{i-1} tiene que estar acotado. Si por el contrario $\alpha_{i-1} \geq 0$, entonces no se puede asegurar cuál es el comportamiento de u_{i-1} : puede explotar o no.

Corolario 5.15 Sea x_i un nodo tal que $u_i(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\alpha_i}$ con $\alpha_i > 0$ y sea I el primer entero tal que $\alpha_{i-I} \geq 0$ y $\alpha_{i-(I+1)} < 0$. Entonces hay como mucho $I + 1$ nodos a la izquierda de x_i que podrían explotar.

Observación 5.5 Los nodos que pueden explotar son $u_{i-I}, u_{i-(I-1)}, \dots, u_{i-1}$ y u_i .

Lema 5.16 Sea $p_{11} > m$. Si U explota y V permanece acotada, entonces el conjunto de explosión de U es $B(U) = \{L\}$.

Demostración. Sea \bar{i} un entero tal que $\bar{i} < N(\bar{t})$, para algún tiempo $\bar{t} < \mathcal{T}$.

Sea \hat{i} otro entero tal que $\hat{i} > \bar{i}$. Como $p_{11} > m$, el método refina la malla infinitas veces, y por tanto podemos elegir \hat{i} de forma que haya $I + 1$ nodos entre $x_{\bar{i}}$ y $x_{\hat{i}}$ para t próximo a \mathcal{T} , siendo I un entero a determinar.

Por otro lado, debido a la monotonía en i de U y gracias a la tasa no simultánea (5.34), tenemos que

$$u_{\hat{i}}(t) \leq u_N(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\frac{1}{2p_{11} - m - 1}}.$$

Por tanto, $u_{\hat{i}}(t) \leq C(\mathcal{T} - t)^{-\alpha_{\hat{i}}}$, con

$$\alpha_{\hat{i}} = \frac{1}{2p_{11} - m - 1} > 0.$$

En esta situación, la idea es aplicar el resultado del Corolario 5.15 para demostrar que el nodo $x_{\bar{i}}$ no puede explotar.

Para ello, definimos I como el primer entero tal que $\alpha_{\hat{i}-I} \geq 0$ y $\alpha_{\hat{i}-(I+1)} < 0$. Usando el Corolario 5.15, deducimos que $u_{\bar{i}}$ tiene que estar acotado, ya que hemos elegido \hat{i} de forma que entre $x_{\bar{i}}$ y $x_{\hat{i}}$ haya $I + 1$ nodos.

Finalmente concluimos la demostración observando que, como $h_N \rightarrow 0$, el nodo $x_{\bar{i}}$ se puede elegir tan próximo a $x = L$ como sea necesario. Así, los nodos que explotan tienen que colapsar todos en $x = L$. \square

Lema 5.17 *Sea $p_{11} < m$. Si U explota y V permanece acotada, entonces el conjunto de explosión de U es $B(U) = [0, L]$.*

Demostración. Gracias al Lema 5.3 sabemos que, si $p_{11} < m$, el método refina la malla como mucho un número finito de veces. Existe entonces un tiempo \bar{t} a partir del cual la malla es fija. Como V está acotada podemos usar las ideas descritas en [53] para el problema escalar para demostrar que el conjunto de explosión de U es todo el intervalo $[0, L]$, y por tanto la explosión es global. \square

Para completar el estudio del conjunto de explosión no simultáneo, queda pendiente demostrar que cuando $p_{11} = m$ la explosión también es global. Como dijimos anteriormente, en este caso, se distinguen dos posibles situaciones: o bien la malla se refina infinitas veces o bien se refina como mucho un número finito de veces.

Lema 5.18 *Sea $p_{11} = m$. Si U explota y V permanece acotada, entonces el conjunto de explosión de U es $B(U) = [0, L]$.*

Demostración. Empecemos estudiando el caso en el que la malla se refina un número finito de veces. En esta situación, como ya mencionamos en la prueba del Lema 5.17, la malla permanece fija a partir de un cierto tiempo. Remitimos por tanto de nuevo al lector a [53] para demostrar que el conjunto de explosión es global.

Cuando la malla se refina un número infinito de veces, gracias a las tasas de explosión no simultánea podemos definir las variables autosemejantes

$$\begin{cases} y_i(s) = (\mathcal{T} - t)^\gamma u_i(t), \\ (\mathcal{T} - t) = e^{-s}. \end{cases}$$

que están acotadas. Utilizando de nuevo las técnicas descritas en [53] se puede demostrar la convergencia de estas variables a un perfil positivo, y concluir que el conjunto de explosión de U es global. \square

5. Explosión simultánea. Finalmente, para terminar la demostración del Teorema 5.6, estudiamos la posibilidad de explosión simultánea. Al igual que en el caso continuo, aunque el conjunto de datos iniciales para los que hay explosión no simultánea es grande, existen datos excepcionales tales que U y V explotan simultáneamente. Esto es así si (5.29) y (5.30) se cumplen al mismo tiempo. Obsérvese que de nuevo se reproduce correctamente el comportamiento del caso continuo, Teorema 3.20. Es más, la demostración de ambos resultados es igual.

Lema 5.19 *Si se cumplen las condiciones (5.29) y (5.30), entonces hay datos iniciales tales que U y V explotan simultáneamente.*

Demostración. La prueba de este resultado es igual que la demostración del Teorema 3.20 en el Capítulo 3. \square

5.5 Tasas simultáneas

En el Capítulo 4 describimos las tasas simultáneas (continuas) para el caso concreto $m = n = 1$ completando los estudios previos de [92], [102] y [115]. No obstante, poco se sabe para el caso de difusión no lineal. En el caso discreto, integrando los cuatro sistemas de ecuaciones ordinarias que describen el comportamiento de la solución (véase la Página 96), resulta sencillo calcular las tasas de explosión. Aunque en general no podremos identificar las tasas numéricas obtenidas como las correspondientes a un rango de parámetros concreto, existen casos excepcionales (por ejemplo, si $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$) en los que sí es posible reconocerlas. Obsérvese que en estos casos, en los que la identificación entre tasas numéricas y tasas continuas es posible, se reproduce correctamente el comportamiento del problema continuo.

Teorema 5.20 *Supongamos que U y V explotan simultáneamente. Si $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$ o $m = n = 1$, entonces las tasas de explosión numéricas coinciden con las continuas.*

Solamente hay dos situaciones posibles para que haya explosión simultánea: o se cumplen las condiciones (5.29) y (5.30), o no se cumple ninguna de las dos. En el primer caso la explosión simultánea es excepcional, Lema 5.19, mientras que en el segundo, no existe la posibilidad de que haya explosión no simultánea y las soluciones explotan simultáneamente.

Consideremos los números

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{2p_{22} - 2p_{12} - n - 1}{(2p_{11} - m - 1)(2p_{22} - n - 1) - 4p_{12}p_{21}}, \\ \alpha_2 &= \frac{2p_{11} - 2p_{21} - m - 1}{(2p_{11} - m - 1)(2p_{22} - n - 1) - 4p_{12}p_{21}}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

Lema 5.21 *Supongamos que U y V explotan simultáneamente con α_1 y α_2 positivos. Si $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$ entonces se verifican las tasas*

$$u_N(t) \sim (\mathcal{T} - t)^{-\alpha_1}, \quad v_M(t) \sim (\mathcal{T} - t)^{-\alpha_2}.\tag{5.38}$$

Demostración. Como $p_{11} \geq m$ y U explota, R está acotada, Lemma 5.3. De la misma forma, como $p_{22} \geq n$ y V explota, Q está acotada.

En esta situación, R y Q acotadas, u_N y v_M se comportan como las soluciones de

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{2p_{11}-m} v_M^{2p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-n}. \end{cases}$$

Integrando este sistema y teniendo en cuenta que hay explosión simultánea, tenemos que v_M se comporta como una potencia positiva de u_N

$$v_M \sim u_N^{\frac{2p_{21}-2p_{11}+m+1}{2p_{12}-2p_{22}+n+1}}. \quad (5.39)$$

Para obtener la tasa de u_N , basta sustituir esta expresión en la ecuación de u'_N ,

$$u'_N \sim u_N^{2p_{11}-m} u_N^{2p_{12} \frac{2p_{21}-2p_{11}+m+1}{2p_{12}-2p_{22}+n+1}}$$

e integrar entre (t, \mathcal{T}) . Operando con los exponentes se concluye que

$$u_N(t) \sim (\mathcal{T} - t)^{-\alpha_1}.$$

La tasa de v_M se puede deducir de dos maneras diferentes. Se puede despejar en la relación (5.39) u_N en función de v_M ,

$$u_N \sim v_M^{\frac{2p_{12}-2p_{22}+n+1}{2p_{21}-2p_{11}+m+1}},$$

y luego proceder como se hizo para la tasa de u_N : se sustituye esta última expresión en la ecuación de v'_M y se integra.

La otra forma de obtener la tasa de v_M es si cabe más sencilla. Consiste simplemente en sustituir en (5.39) la tasa de u_N y operar con los exponentes. \square

Observación 5.6 El hecho de que los exponentes α_1 y α_2 definidos en (5.37) sean positivos es crucial para demostrar el lema. Recordemos, Capítulo 4, que en los casos patológicos en los que algún α_i se anula, aparecen tasas logarítmicas. De hecho, si $\alpha_2 = 0$ y $2p_{12} \leq \max\{p_{22}-1, 2p_{22}-(n+1)\}$, una demostración similar a la esbozada en la Observación 4.2, viendo ahora que $(u^{m+1-2p_{11}}(0, t)v^{-2p_{12}}(0, t))' \sim C$, muestra las tasas logarítmicas en este caso.

Lema 5.22 *Supongamos que U y V explotan simultáneamente. Si $m = n = 1$ entonces se las tasas numéricas coinciden con las continuas.*

Demostración. La idea de la demostración pasa por ver que u_N y v_M se comportan como las soluciones de

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{2p_{11}-1} v_M^{2p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{2p_{21}} v_M^{2p_{22}-1}, \end{cases}$$

que resulta ser el mismo sistema de ecuaciones ordinarias que aparecía en el Capítulo 4, Teorema 4.1, para describir las tasas continuas.

Supongamos primero que la explosión simultánea se produce porque se cumplen las condiciones (5.29) y (5.30). Como $m = n = 1$ estas condiciones se escriben simplemente como

$$p_{21} < p_{11} - 1, \quad p_{12} < p_{22} - 1,$$

y por tanto, en particular, $p_{11} \geq 1$ y $p_{22} \geq 1$.

Obsérvese que en este caso obtenemos que R y Q están acotadas, de donde se concluye el resultado.

Veamos entonces qué pasa si no se cumple ninguna de las condiciones (5.29) y (5.30).

El objetivo es de nuevo demostrar que R y Q están acotadas. Hagamos un argumento de reducción al absurdo distinguiendo los tres posibles casos en los que negamos el que R y Q estén acotadas.

(a) Q está acotada y R no está acotada: u_N y v_M se comportan como soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{2p_{11}-1} v_M^{2p_{12}}. \end{cases}$$

Como hicimos en la demostración del lema anterior, integramos este sistema para obtener una relación entre u_N y v_M , que en este caso es

$$v_M^{p_{12}-2(p_{22}-1)} \sim u_N^{2p_{21}-(p_{11}-1)}.$$

Por hipótesis $p_{21} \geq p_{11} - 1$, por tanto, el exponente de u_N , $2p_{21} - p_{11} + 1$ es positivo. Esto implica que $p_{12} - 2p_{22} + 2$ también tiene que ser positivo, ya que si no fuese así, la explosión no podría ser simultánea.

Así,

$$R \leq \frac{C}{u_N^{p_{11}-1} v_M^{p_{12}}} \leq \frac{C}{u_N^{p_{11}-1+p_{12} \frac{2p_{21}-p_{11}+1}{p_{12}-2p_{22}+2}}}.$$

Como el exponente de u_N en esta última desigualdad resulta ser positivo, concluimos que R está acotada, lo que contradice la hipótesis inicial.

(b) R está acotada y Q no está acotada: se razona igual que en el caso (a).

(c) R y Q no están acotadas: u_N y v_M se comportan entonces como soluciones de

$$\begin{cases} u'_N \sim u_N^{p_{11}} v_M^{p_{12}}, \\ v'_M \sim u_N^{p_{21}} v_M^{p_{22}}. \end{cases}$$

La conclusión se obtiene como en los casos anteriores. Integrando el sistema se encuentra una relación entre u_N y v_M , lo que permite deducir que R está acotada.

En cualquiera de los tres casos hemos llegado a una contradicción, por tanto R y Q tienen que estar acotadas. La demostración concluye utilizando la misma técnica que en la prueba del Lema 5.21. \square

5.6 Experimentos numéricos

Mostramos a continuación que los resultados presentados en las secciones previas se pueden observar cuando se implementa el método numérico.

En los experimentos numéricos hemos usado un integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias apropiado para problemas stiff para integrar en tiempo. Consideremos el intervalo espacial $[0, 1]$, discretizado con una malla inicial de tamaño $h = \frac{1}{100}$. Como datos iniciales hemos elegido $f(x) = Ax^{\frac{2}{m}}$, $g(x) = Bx^{\frac{2}{n}}$, tomando las constantes A y B de forma que estos datos sean compatibles con las condiciones de frontera. Obsérvese que estos datos iniciales producen soluciones crecientes en tiempo.

Los parámetros r y q tienen que ser menores que $R(0, h_N)$ y $Q(0, l_M)$, respectivamente. Con la elección que hemos hecho de los datos iniciales estas dos cantidades, $R(0, h_N)$ y $Q(0, l_M)$, son independientes tanto del paso como de los parámetros del sistema, p_{ij} , m y n . De hecho ambas cantidades valen 0.5. Tomamos por tanto $r = q = 0.25$.

En primer lugar mostramos un experimento de explosión no simultánea. Para ello hemos elegido los siguientes parámetros, $m = 2$, $n = 0.5$, $p_{11} = 4$, $p_{12} = 0.5$, $p_{21} = 1.5$ y $p_{22} = 0.5$.

En la Figura 5.1 comparamos la tasa de explosión del método adaptativo con la tasa del método de mallas fijas.

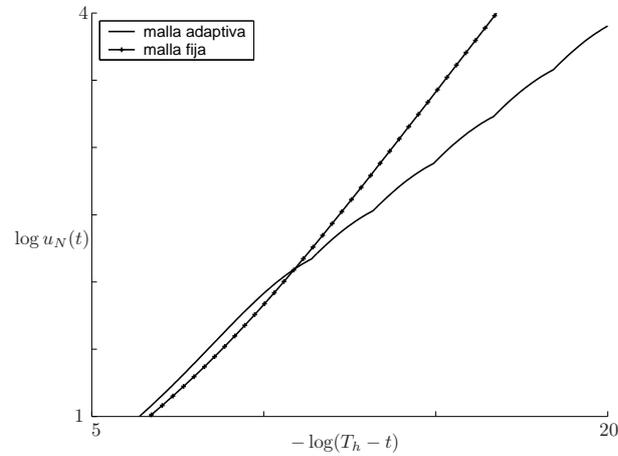


Figura 5.1: Tasas de explosión no simultáneas

Para poder ver con mayor claridad la diferencia hemos utilizado escalas logarítmicas. Así, si

$$u_N \sim (\mathcal{T} - t)^\gamma,$$

tomando logaritmos en esta expresión, tenemos que la pendiente de la curva representa al exponente γ que aparece en la tasa.

Obsérvese que en un principio las dos curvas son similares y no se distingue la pendiente correcta hasta que el método no empieza a refinar.

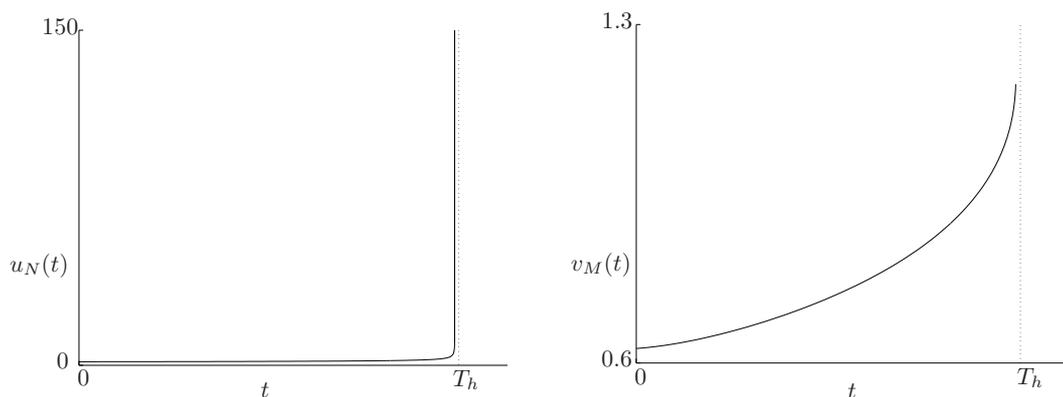


Figura 5.2: Explosión no simultánea

En la Figura 5.2 representamos el máximo de U y el de V como función del tiempo. Se observa claramente que U explota y V permanece acotada.

La última figura relacionada con la explosión no simultánea (Figura 5.3) muestra, utilizando de nuevo escalas logarítmicas, cómo se añaden los puntos a la malla. La pendiente en este caso es el exponente que aparece en la definición de h_N , (5.13).

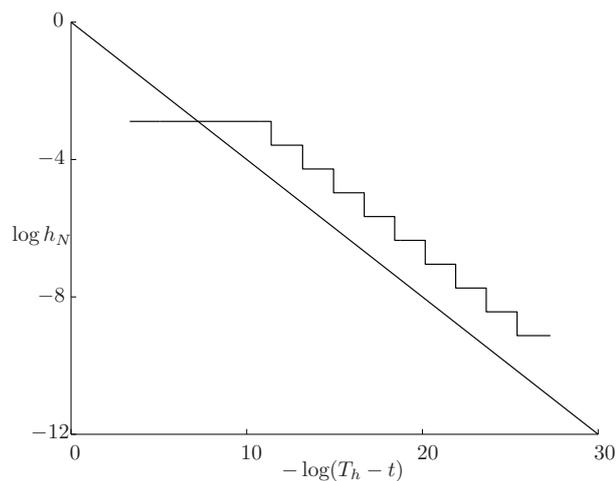


Figura 5.3: Comportamiento autosemejante del paso

Finalmente mostramos un caso de explosión simultánea con los parámetros $m = 2$, $n = 0.5$, $p_{11} = 0.7$, $p_{12} = 1$, $p_{21} = 1$ y $p_{22} = 0.5$.

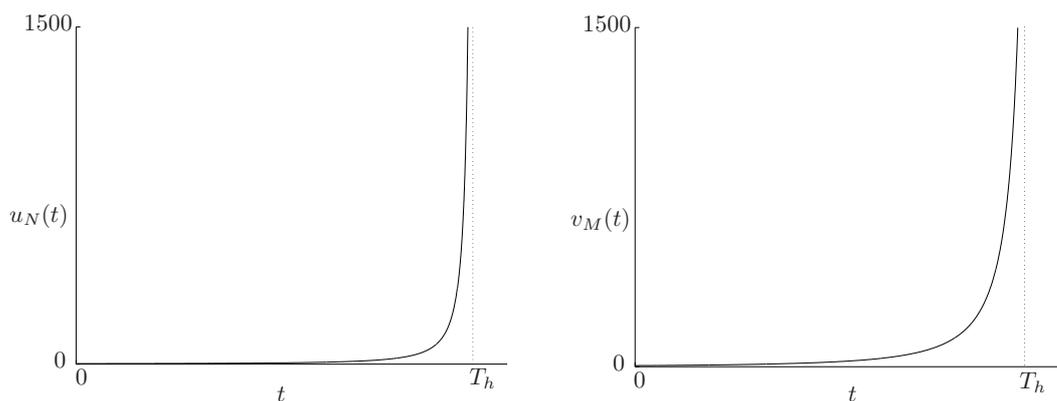


Figura 5.4: Explosión simultánea

5.7 *Un método que mueve puntos*

Para terminar este capítulo hacemos una rápida mención a otra forma de construir un método adaptativo. En vez de añadir puntos para redefinir la malla cuando el tiempo está próximo al tiempo de explosión, éstos se mueven acercándose al punto donde se produce la singularidad, véase [54].

La ventaja de mover puntos frente a añadirlos es obvia: el tamaño de la malla permanece constante en el tiempo.

El método está inspirado en el algoritmo para mover las mallas desarrollado en [24]. En nuestro caso podemos favorecernos además del hecho de que conocemos a priori la localización espacial de la singularidad, $x = L$. En vez de mover todos los nodos de la malla, concentramos simplemente un número fijo de puntos cerca de la frontera, manteniendo el resto de la malla fija.

Los teoremas principales de este capítulo, el Teorema 5.6 y el Teorema 5.20, siguen siendo válidos con este esquema numérico.

Conclusiones y comentarios

1. *Sistemas con fuentes de calor en el interior.* Uno de los aspectos a nuestro juicio más relevante demostrado en el Capítulo 2 es que, cuando el parámetro de difusión m del problema

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + u^{p_{11}}v^{p_{12}}, \\ v_t = (v^n)_{xx} + u^{p_{21}}v^{p_{22}}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T),$$

es menor que 1, las condiciones para que u explote y v permanezca acotada en tiempo finito T incluyen al rango de explosión no simultánea para las soluciones planas. De hecho demostramos, Teorema 2.7, que si u explota y v permanece acotada, entonces

$$p_{11} > \max \left\{ 1, p_{21} + \frac{m+1}{2} \right\}.$$

Para demostrar el recíproco de este resultado, se hace necesario conocer el comportamiento de la componente que explota cerca del origen. Recordemos que el Corolario 2.4 asegura que existe una constante $C > 0$ tal que

$$u(x, t) \leq Cx^{\frac{-2}{m(\gamma-1)}}, \quad 1 < \gamma < \frac{p_{11} - (1-m)}{m}.$$

cerca de $x = 0$ y para todo $t \in (0, T)$. Esta condición es óptima si $m \geq 1$, ya que entonces podemos tomar $m\gamma = p_{11}$ y obtener que u tiene un decaimiento autosemejante cerca del origen

$$u(x, t) \leq Cx^{-\frac{\alpha}{\beta}} = Cx^{-\frac{2}{p_{11}-m}}.$$

Sin embargo, cuando $m < 1$ esta última desigualdad no tiene por qué ser cierta. Es por ello que nos vemos obligados a imponer la condición $p_{12} = 0$ para demostrar

el Teorema 2.8. En esta situación, la primera ecuación del sistema queda desacoplada de la segunda. Esto nos permite utilizar una solución autosemejante, U , del problema, que en particular verifica

$$U(x, t) \leq Cx^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T).$$

Sería deseable poder demostrar un resultado similar al Teorema 2.6 para el caso $0 < m < 1$, sin tener que imponer ninguna hipótesis adicional sobre los exponentes del sistema, como hacemos en el Teorema 2.8. De hecho, nos gustaría probar el siguiente resultado

Teorema. *Sea $0 < m < 1$. Existen datos iniciales (u_0, v_0) tales que u explota y v permanece acotada si y sólo si*

$$p_{11} > \max \left\{ 1, p_{21} + \frac{m+1}{2} \right\}.$$

El hecho de que el resultado sea cierto si $p_{12} = 0$ nos hace pensar que también se cumplirá en el caso general. Sin embargo, como ya hemos mencionado antes, creemos que la demostración pasa por encontrar una prueba que muestre que u decae, al menos cerca del origen, como $x^{-\frac{\alpha}{\beta}}$, cuando $0 < m < 1$.

2. Sistemas con flujos a través de la frontera. Los resultados que se exponen en el Capítulo 3 presentan como novedad fundamental la aparición de condiciones sobre los exponentes de un sistema de forma que la explosión de las soluciones es siempre no simultánea.

Sin embargo, el resultado que se muestra en la Sección 3.5 es parcial. Pensamos que una caracterización completa de la explosión no simultánea debería pasar por demostrar una relación entre la componente u y la componente v de la forma

$$v \sim u^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},$$

donde los exponentes α_1 y α_2 dependen de los parámetros del problema (m, n, p_{ij}) . Y así, gracias a esta relación, poder concluir la explosión no simultánea, según sea el signo de $\alpha_1\alpha_2$.

3. Métodos numéricos. El método numérico que desarrollamos en el Capítulo 5 se basa en discretizar la variable espacial y utilizar después un integrador numérico para resolver el sistema de ecuaciones ordinarias que resulta. Este hecho no supone pérdida de generalidad en los resultados que obtenemos (que se enuncian para t , la variable temporal, continua), ya que el integrador numérico que proporciona MATLAB[®] es de un orden muy superior al de la discretización espacial que definimos.

En el Apéndice A estudiamos un problema escalar mediante un método numérico totalmente discreto. Para la discretización espacial utilizamos la misma idea que la presentada en el Capítulo 5 y usamos un método de orden 2 para discretizar la variable temporal. Esta elección proporciona, sin duda, un método menos preciso que el del Capítulo 5, donde se integra la variable temporal con integradores numéricos de mayor orden. Para obtener una mayor precisión cuando usamos un esquema totalmente discreto, deberíamos discretizar la variable temporal con un método Runge-Kutta de mayor orden. Sin embargo, esto complica considerablemente la notación y las demostraciones.

Concluimos así que la idea expuesta en el Capítulo 5 para estudiar el problema numérico proporciona resultados muy precisos y resulta sencilla en la notación y programación.

4. Tasas simultáneas. En el Capítulo 4 se determinan las tasas de explosión de la solución de un sistema con difusión lineal, con un flujo de tipo no lineal a través de la frontera. Demostramos que, si las dos componentes del sistema explotan simultáneamente, entonces se comportan como las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} f' = f^{2p_{11}-1}g^{2p_{12}}, \\ g' = f^{2p_{21}}g^{2p_{22}-1}. \end{cases}$$

Inspirados en este resultado, nos gustaría poder demostrar uno similar para el problema descrito en el Capítulo 3, en el que la difusión es no lineal.

Teorema. Si u y v explotan simultáneamente, entonces

$$u(0, t) \sim f(t) \quad y \quad v(0, t) \sim g(t),$$

donde f y g son solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{cases} f' = f^{q_{11}} g^{q_{12}}, \\ g' = f^{q_{21}} g^{q_{22}}. \end{cases}$$

Un primer resultado parcial en este sentido se presenta en el Capítulo 5, donde se demuestra que si las aproximaciones numéricas de este problema, U y V , explotan simultáneamente, y además $p_{11} \geq m$ y $p_{22} \geq n$ entonces

$$u_N(t) \sim (\mathcal{T} - t)^{-\alpha_1}, \quad v_M(t) \sim (\mathcal{T} - t)^{-\alpha_2},$$

con

$$\alpha_1 = \frac{2p_{22} - 2p_{12} - n - 1}{(2p_{11} - m - 1)(2p_{22} - n - 1) - 4p_{12}p_{21}} > 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{2p_{11} - 2p_{21} - m - 1}{(2p_{11} - m - 1)(2p_{22} - n - 1) - 4p_{12}p_{21}} > 0.$$

Al igual que a la hora de caracterizar la explosión no simultánea del problema, pensamos que la prueba de un teorema que describa las tasas simultáneas se debería basar en encontrar una relación de la forma $v \sim u^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$. Además, según los resultados obtenidos en el Capítulo 4, pensamos que, en los casos límite, en los que $\alpha_1\alpha_2 = 0$ deberían aparecer tasas logarítmicas.

5. Sistemas de mayor orden. Otro problema interesante de abordar sería el del estudio de un sistema (3×3):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ v_t = v_{xx}, \\ w_t = w_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T),$$

con flujo no lineal en el que todas las ecuaciones estén acopladas

$$\begin{cases} -u_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t)w^{p_{13}}(0, t), \\ -v_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t)w^{p_{23}}(0, t), \\ -w_x(0, t) = u^{p_{31}}(0, t)v^{p_{32}}(0, t)w^{p_{33}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T).$$

En el espíritu del Capítulo 3 las preguntas naturales que surgen son

¿es posible dar condiciones sobre los exponentes del problema para que una componente explote y las otras no?

Recíprocamente, si una de las componentes explota y las otras están acotadas

¿qué relación hay entre los exponentes?

Es más,

¿existe alguna condición sobre los exponentes del problema para que dos componentes exploten simultáneamente y la otra permanezca acotada?

El conocimiento de las tasas, simultáneas y no simultáneas, nos permitirá dar respuesta a estas preguntas.

Veamos un ejemplo: supongamos que u y v explotan simultáneamente y que w permanece acotada. Entonces, gracias a los resultados del Capítulo 4, podemos determinar las tasas de explosión de u y de v . Éstas se pueden sustituir en la ecuación de w para así, siguiendo las técnicas descritas en el Capítulo 3, caracterizar los exponentes del problema.

6. *Avalancha térmica.* Otra posible extensión para el problema con flujo a través de la frontera es el estudio de la avalancha térmica y la posible continuación después de la explosión. Centrémonos en un problema concreto: consideremos dos ecuaciones lineales

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ v_t = v_{xx}, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times (0, T),$$

acopladas mediante un flujo no lineal en la frontera

$$\begin{cases} -u_x(0, t) = u^{p_{11}}(0, t)v^{p_{12}}(0, t), \\ -v_x(0, t) = u^{p_{21}}(0, t)v^{p_{22}}(0, t), \end{cases} \quad t \in (0, T).$$

Como es habitual, los datos iniciales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

los supondremos continuos y acotados. Además imponemos también condiciones de monotonía, $u_t, v_t \geq 0$.

Inspirados en el trabajo previo [99], en el que se estudia la continuación después de la explosión de un problema escalar, nos preguntamos si es posible que haya una extensión no trivial de la solución para tiempos posteriores al tiempo máximo de definición del problema, $t > T$. En tal caso diremos que la explosión es incompleta. Si por el contrario, tal extensión no es posible, hablaremos de explosión completa.

Siguiendo las ideas expuestas en [99] sustituimos las condiciones de frontera del problema original por las truncaciones

$$f_n^{ij}(x) = \min\{x^{p_{ij}}, n^{p_{ij}}\}.$$

lo que produce soluciones (u_n, v_n) definidas globalmente.

La idea que reside detrás de esta construcción es la de poder extender la solución después del tiempo T tomando el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \bar{u}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \bar{v}.$$

El primer resultado que proponemos en este sentido afirma que la explosión es siempre completa en ambas componentes.

Teorema. *La explosión del sistema con flujo no lineal a través de la frontera es siempre completa. Es decir,*

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & 0 < t < T, \\ \lim_{t \nearrow T} u(x, t), & t = T, \\ \infty, & t > T, \end{cases} \quad \bar{v}(x, t) = \begin{cases} v(x, t), & 0 < t < T, \\ \lim_{t \nearrow T} v(x, t), & t = T, \\ \infty, & t > T. \end{cases}$$

Dado que la explosión es completa en ambas componentes (incluso si la explosión es no simultánea), en $t = T$ se produce la propagación instantánea de la singularidad. Este fenómeno, descrito en [99] y [100] para problemas escalares, se conoce con el nombre de avalancha térmica. De forma matemática se describe como una discontinuidad entre los perfiles de explosión,

$$u(x, T^-) = \lim_{t \nearrow T} u(x, t) \quad \text{y} \quad v(x, T^-) = \lim_{t \nearrow T} v(x, t),$$

y el valor que la solución toma después,

$$u(x, T^+) = v(x, T^+) = +\infty.$$

Por tanto el siguiente problema que uno se puede plantear es el de caracterizar la avalancha térmica cerca de $t = T$. Con el fin de centrarnos en un problema concreto, supongamos que los exponentes del problema implican que la explosión es no simultánea. En este caso, la transición entre $v(x, T^-)$, que es finita en todo punto, y $v(x, T^+)$, que es infinita en todo punto, se hace todavía más notable y hace que el problema sea más interesante.

Expongamos a continuación a grandes rasgos cuál sería la idea del resultado a demostrar: sea $t_u(n)$ el primer tiempo en el que $u_n(0, t) = n$ y $t_v(n)$ el primer tiempo en el que $v_n(0, t) = n$. Obsérvese que, como la explosión es no simultánea, si n es grande se tiene que

$$t_u(n) < T < t_v(n).$$

El siguiente teorema que enunciamos relaciona la diferencia entre estos tiempos.

Teorema. *Sea n suficientemente grande. Entonces*

(i) *El primer tiempo en el que $u_n(0, t) = n$, $t_u(n)$, verifica*

$$T - t_u(n) \sim \frac{1}{n^{2(p_{11}-1)}}.$$

(ii) *El primer tiempo en el que $v_n(0, t) = n$, $t_v(n)$, verifica*

$$t_v(n) - T \sim \begin{cases} \frac{1}{n^{2p_{21}}}, & p_{22} > 1, \\ \frac{n^{2(1-p_{22})}}{n^{2p_{21}}}, & p_{22} < 1, \\ \frac{\ln n}{n^{2p_{21}}}, & p_{22} = 1. \end{cases}$$

II

Soluciones de viscosidad

Introducción

El estudio de la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones elípticas y parabólicas dentro del marco de la teoría de viscosidad tiene como base la comparación con supersoluciones y subsoluciones. Esta teoría comenzó a utilizarse en la década de 1980 en ecuaciones de primer orden, [36], [38]. Posteriormente se desarrolló una amplia teoría para ecuaciones completamente no lineales, [26], [37], la cual fue extendida a ecuaciones parabólicas, [110], [111].

Una de las mayores ventajas que presenta la teoría de soluciones de viscosidad es que permite que funciones que son únicamente continuas sean soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales de primer y segundo orden. Esto permite demostrar teoremas muy generales de existencia y unicidad y proporciona una gran flexibilidad a la hora de pasar al límite en diferentes contextos.

Ejemplos clásicos en los que se utiliza esta teoría son la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t = F(|\nabla u|),$$

y su aproximación difusiva

$$u_t = F(|\nabla u|) + \varepsilon \Delta u, \quad \varepsilon > 0,$$

donde ∇u denota el gradiente espacial de la función $u = u(x, t)$ y Δu es el laplaciano espacial, véase [37]. Sin embargo, las ecuaciones degeneradas no se adaptan bien a la teoría de viscosidad clásica, ya que no existen familias de supersoluciones y subsoluciones lo suficientemente amplias que se puedan utilizar como funciones test. El objetivo de esta parte de la Memoria es desarrollar un concepto de solución de viscosidad apropiado para tratar estos problemas en el caso parabólico. Para

ello nos centraremos en la siguiente ecuación:

$$u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2.$$

Los resultados de la teoría clásica de soluciones de viscosidad se adaptan bien al estudio de esta ecuación siempre que $a(u)$ sea regular, acotada por arriba y esté lejos del cero por abajo,

$$0 < C_1 \leq a(u) \leq C_2,$$

ya que en este caso la ecuación es cuasilineal uniformemente parabólica. Si por el contrario $a(u)$ es continua y positiva para $u > 0$, pero se anula en $u = 0$, la ecuación resultante es degenerada, y generaliza la aproximación difusiva de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Obsérvese que el hecho de que la ecuación sea degenerada puede dar lugar a la aparición de fronteras libres, lo que a su vez da lugar a pérdida de generalidad. Es decir, las soluciones no son necesariamente clásicas cuando aparecen fronteras libres. Sin embargo, el problema está bien puesto en la clase de las funciones continuas.

Como primer paso en nuestro estudio, consideremos una función a lineal de la forma

$$a(u) = \sigma u$$

con σ una constante positiva. El concepto de solución de viscosidad para esta ecuación, así como sus propiedades se estudia en [25]. Si $u = 0$ esta ecuación es degenerada y el concepto de solución de viscosidad definido en [37] no es apropiado para este problema. Es por ello que se hace necesario definir un nuevo concepto de solución de viscosidad. Se demuestra entonces que en esta clase de soluciones (soluciones de viscosidad no negativas y acotadas) el problema de Cauchy está bien puesto.

El punto fundamental del estudio hecho en [25] es que, mediante la relación

$$u = \frac{m}{m-1} \rho^{m-1},$$

la ecuación $u_t = \sigma u \Delta u + |\nabla u|^2$ se puede transformar en la ecuación de los medios porosos,

$$\rho_t = \Delta \rho^m,$$

donde $m = \sigma + 1$ y ρ representa la densidad del gas. Esta última relación se escribe en forma de divergencia, y es bien conocido que en esta forma posee una teoría débil, [5], [93], [106]. La transformación de u a ρ es necesaria para completar la prueba de unicidad de soluciones de viscosidad.

Una vez estudiado el problema en el que $a(u)$ es lineal, $a(u) = \sigma u$, el siguiente paso consiste en extender los resultados de [25] al caso no lineal. Para ello supondremos que a verifica las siguientes hipótesis:

(H1) Problema degenerado en $u = 0$: la función $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase \mathcal{C}^1 si $u > 0$, es continua en $u = 0$ y

$$a(u) = 0 \quad \text{si } u = 0, \quad a(u) > 0 \quad \text{si } u > 0.$$

(H2) Crecimiento sublineal de a cerca de $u = 0$: para todo $M > 0$ existe una constante $k = k(M)$ tal que

$$a(u) \leq ku$$

para todo $0 \leq u \leq M$.

La generalidad de estas hipótesis introduce algunas dificultades adicionales con respecto al estudio hecho en [25]: no se pueden utilizar las soluciones clásicas de frontera libre para comparar, ya que éstas no tienen por qué existir. Además, la transformación a la correspondiente ecuación de tipo divergencia

$$\rho_t = \Delta \Phi(\rho)$$

no es inmediata y requiere un estudio detallado.

El objetivo final de esta parte de la Memoria es demostrar el siguiente teorema.

Teorema. *Bajo las condiciones (H1), (H2), el problema*

$$\begin{cases} u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

con u_0 continuo, acotado y no negativo, está bien planteado en la clase de soluciones de viscosidad acotadas, continuas y no negativas. Además, el Principio del Máximo se puede aplicar a las soluciones de viscosidad.

Para poder demostrar este teorema se necesita desarrollar primero la teoría de viscosidad apropiada para el problema que estamos considerando: definiciones, transformación densidad-presión, construcción de subsoluciones y supersoluciones, etc. La transformación-densidad presión es crucial en la demostración del teorema, ya que, al igual que en [25], la prueba de unicidad no es directa. Debemos probar primero que existe una ecuación de filtración asociada al problema.

Teorema. *La solución de viscosidad coincide con la transformada de la solución débil continua de la ecuación de filtración asociada,*

$$\rho_t = \Delta\Phi(\rho).$$

Después de un primer capítulo, Capítulo 6, en el que se establecen los fundamentos de las soluciones de viscosidad, dedicamos el Capítulo 7 a describir cómo construir soluciones de viscosidad a partir de otras dadas. Para un dato inicial u_0 definimos una función \bar{u} como un límite decreciente de soluciones clásicas, u_ε , con dato inicial estrictamente positivo, $u_{0,\varepsilon}(x) \geq u_0(x) + \varepsilon$,

$$\bar{u}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t).$$

Teorema. *La función \bar{u} es solución de viscosidad del problema. Es más, es la solución de viscosidad maximal.*

También definimos nuevas subsoluciones y supersoluciones de viscosidad a partir de otras ya existentes, tomando supremos e ínfimos en bolas. Estas construcciones, que denominaremos convoluciones de supremos e ínfimos, tendrán especial relevancia en el Capítulo 8, donde demostraremos la comparación de soluciones de viscosidad con datos iniciales estrictamente separados, en el sentido de la Definición 6.5.

Teorema. *Sea u una subsolución de viscosidad y v una supersolución de viscosidad. Supongamos que los datos iniciales u_0 y v_0 están estrictamente separados. Entonces u y v permanecen ordenadas en todo tiempo posterior.*

Este teorema permite construir, para un dato inicial u_0 dado, la solución de viscosidad minimal. Ésta se define como límite de soluciones maximales, \bar{u}_n , de problemas con datos iniciales estrictamente separados,

$$\underline{u}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n \leq \bar{u},$$

donde \bar{u} es la solución maximal asociada al problema con dato inicial u_0 .

Teorema. *Dado u_0 , sea $\{u_{0,n}\}$ una sucesión creciente de datos iniciales estrictamente separados. Si $u_{0,n} \nearrow u_0$ cuando n tiende a infinito, entonces \underline{u} es la solución de viscosidad minimal.*

La construcción de las soluciones de viscosidad maximales y minimales proporciona finalmente las herramientas necesarias para demostrar el teorema principal de esta parte de la Memoria (véase el enunciado en la Página 133). Dedicaremos la Sección 8.4 del Capítulo 8 a probar este resultado.

Para concluir esta introducción comentemos algunos resultados conocidos relacionados con las soluciones de viscosidad.

En primer lugar obsérvese que en [76] se establece la equivalencia entre soluciones de viscosidad y soluciones en el sentido de las distribuciones para ecuaciones elípticas lineales de orden dos. Por otro lado la equivalencia entre soluciones de viscosidad y soluciones débiles de la ecuación p -Laplaciana

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$$

para $1 < p < \infty$ ha sido demostrada en [78]. Estos autores también prueban la equivalencia de soluciones de la versión parabólica de este problema.

El hecho de que el operador de segundo orden degenera en función de u dificulta considerablemente el desarrollo hecho en los capítulos posteriores para la ecuación

$$u_t = a(u) \Delta u + |\nabla u|^2.$$

En este sentido en [81] se hace un estudio detallado de las soluciones de viscosidad de los problemas de Hele-Shaw y de Stefan. Dichas soluciones se obtienen como límite de las soluciones de viscosidad de la ecuación de los medios porosos, [25].

Existen numerosos trabajos recientes que se centran en el estudio de existencia, unicidad, continuidad y otras propiedades de las soluciones de viscosidad de ecuaciones parabólicas (degeneradas o no) no lineales de la forma

$$u_t = F(x, t, u, Du, D^2u),$$

véase por ejemplo [11], [16], [32] o [77]. Todos ellos imponen hipótesis de monotonía a la función F con respecto a la variable u . Este tipo de restricción no tiene sentido en nuestro caso.

En [14], [89] se estudia la existencia de soluciones de una versión generalizada de la ecuación que nosotros consideramos. A diferencia del trabajo desarrollado aquí, que se centra fundamentalmente en comprobar la unicidad de soluciones, en [14], [89] se prueba la existencia de soluciones de viscosidad de

$$u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2 + F(u),$$

así como diversas estimaciones de continuidad.

Para concluir nos gustaría comentar que el libro [10] incluye algunas aplicaciones de la teoría de viscosidad, como por ejemplo control óptimo determinístico o problemas de perturbación singular para ecuaciones elípticas. Consúltese también [8] para ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman y [88] para ecuaciones estocásticas.

6

Preliminares

En primer lugar nos centraremos en establecer los principios básicos de la teoría de soluciones de viscosidad para el problema que queremos estudiar. Además de definir los conceptos de supersolución y subsolución de viscosidad, así como de determinar sus primeras propiedades, haremos una descripción detallada de un tipo de subsoluciones y de supersoluciones especiales (Barenblatt y ondas viajeras esféricas), que utilizaremos para comparar. Dedicaremos también especial atención al estudio de la denominada transformación densidad-presión. Esta transformación permitirá, en posteriores capítulos, establecer un resultado de unicidad.

Contenido

6.1. Definiciones	138
6.2. Primeras propiedades de las soluciones de viscosidad	141
1. Soluciones no negativas	142
2. Soluciones positivas	144
6.3. La transformación densidad-presión	146
1. Ejemplos	151
6.4. Ejemplos de subsoluciones y supersoluciones	152
1. Funciones Barenblatt	153
2. Ondas viajeras esféricas	154
3. Supersoluciones que explotan	157

6.1 Definiciones

Denotemos por Q al dominio espacio-temporal $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ y consideremos soluciones continuas, acotadas y no negativas definidas en Q del problema

$$u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2, \quad (6.1)$$

con dato inicial continuo, acotado y no negativo

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (6.2)$$

Impondremos condiciones de regularidad muy generales sobre la función a : en primer lugar, para que el problema sea degenerado en $u = 0$ supondremos que $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase \mathcal{C}^1 si $u > 0$, continua en $u = 0$ y

$$a(u) = 0 \quad \text{si } u = 0, \quad a(u) > 0 \quad \text{si } u > 0.$$

Además, queremos que a tenga crecimiento sublineal cerca de $u = 0$. Es decir, para todo $M > 0$ existe una constante $k = k(M)$ tal que

$$a(u) \leq ku$$

para todo $0 \leq u \leq M$. Esto es equivalente a suponer que $\frac{a(u)}{u}$ está localmente acotado.

Fijemos en primer lugar la notación que vamos a utilizar a lo largo de los siguientes capítulos. Denotaremos por $\mathcal{C}(D)$ al espacio de las funciones continuas definidas en el dominio D . Este dominio representará bien un dominio del espacio \mathbb{R}^N o bien un dominio espacio-temporal de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. El subespacio de funciones continuas y acotadas en D será $\mathcal{C}_b(D)$. Mediante $f \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ denotaremos a una función f dos veces diferenciable en x y una en t . Es decir, $f \in \mathcal{C}_{x,t}^{2,1}(Q)$. Una bola abierta en \mathbb{R}^N con radio r y centro x_0 , se representará por $\mathcal{B}_r(x_0)$ y si la bola es cerrada, $\overline{\mathcal{B}}_r(x_0)$. Un entorno parabólico de un punto $P_0 = (x_0, t_0) \in Q$ es un cilindro de la forma $\Omega = \mathcal{B}_r(x_0) \times (t_0 - \tau, t_0] \subset Q$ para $r, \tau > 0$.

Definición 6.1 Una función u de clase $\mathcal{C}^{2,1}(Q)$ es una solución clásica de (6.1) si la ecuación $u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$ se satisface en todo Q . Una subsolución clásica satisface la desigualdad $u_t \leq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$ y una supersolución clásica, $u_t \geq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$.

Definición 6.2 Una función continua y no negativa u definida en Q es una sub-solución de viscosidad de (6.1) si y sólo si toda función $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$, que toca a u por arriba en un punto (x_0, t_0) , satisface

$$\varphi_t \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 \quad (6.3)$$

en (x_0, t_0) .

Observación 6.1 Diremos que φ toca a u por arriba en un punto $P_0 = (x_0, t_0)$ si $\varphi - u$ alcanza un mínimo local cero en un entorno parabólico Ω de P_0 . Es decir, $u \leq \varphi$ en Ω y $u = \varphi$ en P_0 .

Observación 6.2 Reemplazando φ por

$$\psi = \varphi + \delta((x - x_0)^4 + (t - t_0)^2), \quad \delta > 0,$$

se obtiene que $\psi - u$ alcanza en el punto P_0 un mínimo local estricto cero. Con este cambio, las derivadas de φ en P_0 que aparecen en la fórmula (6.3) permanecen inalteradas y por tanto podemos sustituir φ por ψ en la Definición 6.2.

La definición de supersolución presenta alguna diferencia con respecto a la definición en la teoría clásica de viscosidad, ya que tiene que tener en cuenta el efecto que produce el hecho de que la ecuación sea degenerada. Debido a este fenómeno hemos de introducir primero el concepto de solución clásica de frontera libre. Este tipo de soluciones serán de gran utilidad, ya que las utilizaremos como funciones test.

Definición 6.3 Una función u continua y no negativa definida en Q es una solución clásica de frontera libre de (6.1) si:

- (i) la función u es positiva en un conjunto abierto $P(u) \subset Q$, donde además es regular y es solución de (6.1) en sentido clásico.
- (ii) La frontera del conjunto de positividad, $\Gamma = \partial P \cap Q$, denominada frontera libre, es una hipersuperficie regular en espacio-tiempo y además se cumple $u \in \mathcal{C}^{2,1}(P \cup \Gamma)$.

(iii) Se verifica la condición dinámica en Γ ,

$$\nu = |\nabla u|, \quad (6.4)$$

donde ν denota la velocidad normal de avance de la frontera.

Definición 6.4 Diremos que una solución clásica de frontera libre se mueve si cumple la condición adicional

(iv) $\nabla u \neq 0$ en Γ .

Modificando ligeramente la Definición 6.3 podemos definir también subsoluciones y supersoluciones clásicas de frontera libre: si en la condición (i) sustituimos la ecuación por la siguiente desigualdad

$$u_t \leq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$$

y en (iii) cambiamos (6.4) por $\nu \leq |\nabla u|$ obtenemos una subsolución clásica de frontera libre. Las supersoluciones clásicas de frontera libre se obtienen de la misma forma, sustituyendo en este caso las igualdades por \geq .

En lo que sigue y para facilitar la escritura supondremos que las soluciones, supersoluciones y subsoluciones clásicas de frontera libre siempre se mueven y por tanto no lo mencionaremos. Haremos notar explícitamente que no se mueven, cuando éste sea el caso.

Definición 6.5 Diremos que u y v están estrictamente separadas (o equivalentemente, que u está estrictamente separada de v), y lo denotaremos mediante $u \prec v$, si

(i) el soporte de u , $\text{sop}(u)$, es un compacto de \mathbb{R}^N que además verifica

$$\text{sop}(u) \subset \text{Int}(\text{sop}(v)).$$

(ii) Dentro del soporte de u las funciones u y v están estrictamente ordenadas,

$$u(x) < v(x).$$

Definición 6.6 Una función continua y no negativa u definida en Q es una supersolución de viscosidad de (6.1) si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Toda función $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ que toca a u por abajo en un punto (x_0, t_0) con $u(x_0, t_0) > 0$ satisface

$$\varphi_t \geq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en (x_0, t_0) .

- (ii) Ninguna subsolución clásica de frontera libre (que se mueve) v que está estrictamente separada de u en un tiempo $t = t_1 \geq 0$, $v(x, t_1) \prec u(x, t_1)$, puede cruzar a u en un tiempo posterior. Es decir, $v(x, t) \leq u(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t > t_1$.

Observación 6.3 En [25] se introduce por primera vez la idea de comparación con soluciones de frontera libre. Nótese que la definición utilizada en este contexto es ligeramente más débil que la presentada en [25], ya que utiliza subsoluciones. Sin embargo resulta muy conveniente para el desarrollo de la teoría.

En este sentido es necesario hacer hincapié en que en los resultados que aparecen en secciones posteriores sólo se utilizará un tipo concreto de subsoluciones de frontera libre: las funciones Barenblatt introducidas en la Sección 6.4. Por tanto, el punto (ii) de la Definición 6.6 se puede formular utilizando la comparación con esta familia concreta de subsoluciones. Veremos en el Capítulo 8 que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 6.7 Una función continua y no negativa u definida en Q es una solución de viscosidad de (6.1) si es al mismo tiempo subsolución de viscosidad y supersolución de viscosidad.

6.2 Primeras propiedades de las soluciones de viscosidad

Una vez establecidas las definiciones básicas de la teoría de viscosidad, el siguiente paso consiste en comprobar que estas definiciones son consistentes con la teoría clásica para ecuaciones parabólicas cuasilineales no degeneradas. Gracias a

esta teoría (véase [84]) se tiene que, si $a(u)$ es regular y positiva para $u > 0$ y el dato inicial u_0 es estrictamente positivo, continuo y acotado, entonces la ecuación (6.1) tiene una única solución clásica acotada, $u > 0$.

1. Soluciones no negativas. Empecemos el análisis considerando soluciones no negativas. Este es el caso más desfavorable (frente al de soluciones positivas), ya que las ecuaciones pueden ser degeneradas y no se puede aplicar la teoría clásica, [84], antes mencionada.

Lema 6.1 *Una función no negativa $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ es subsolución de viscosidad de (6.1) si y sólo si u es subsolución clásica.*

Demostración. $\boxed{\implies}$ Supongamos primero que u es una subsolución de viscosidad. Entonces toda función $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ que toca a u por arriba en (x_0, t_0) verifica

$$\varphi_t \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en el punto (x_0, t_0) .

Por otro lado, como u es de clase $\mathcal{C}^{2,1}$ en Q podemos tomar $u = \varphi$, y por tanto se tiene

$$u_t \leq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$$

en Q en sentido clásico.

$\boxed{\impliedby}$ Sea u una subsolución clásica de (6.1) y φ una función de clase $\mathcal{C}^{2,1}(Q)$ tal que $\varphi - u$ tiene un mínimo local cero en un punto (x_0, t_0) . En esta situación, en (x_0, t_0) se verifica lo siguiente:

$$\varphi = u, \quad \nabla\varphi = \nabla u, \quad \varphi_t \leq u_t, \quad \Delta\varphi \geq \Delta u.$$

Por tanto,

$$\varphi_t \leq u_t \leq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2 \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en (x_0, t_0) y u resulta ser una subsolución de viscosidad. \square

Lema 6.2 *Sea u una subsolución clásica de frontera libre (que no se mueve). Entonces u es en particular una subsolución de viscosidad.*

Demostración. Consideremos una función $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ que toca a u por arriba en $P_0 = (x_0, t_0)$.

Como u es una subsolución clásica de frontera libre, si $u(P_0) > 0$, se tiene

$$u_t \leq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$$

en P_0 y la demostración concluye como en el lema anterior.

Supongamos ahora que el punto de contacto P_0 es tal que $u(P_0) = 0$. Es decir, P_0 es un punto de la frontera libre de u .

Si $|\nabla u| = 0$ en P_0 , se cumple también que $\varphi = |\nabla \varphi| = 0$ y $\varphi_t \leq 0$. Así,

$$\varphi_t \leq 0 = a(\varphi)\Delta \varphi + |\nabla \varphi|^2,$$

de donde se deduce que u es subsolución de viscosidad. \square

Observación 6.4 Es obvio que si $\nabla u \neq 0$ en la frontera libre, la función φ no puede tocar a u por arriba y el resultado se concluye sin ningún tipo de comparación.

La pregunta natural que surge a continuación es si existe algún resultado análogo a los lemas 6.1 y 6.2 para supersoluciones. Con las herramientas que poseemos hasta el momento, la respuesta es negativa: aunque existen resultados parciales, al ser la definición de supersolución de viscosidad más restrictiva que la de las subsoluciones, los resultados que se obtienen son en general más débiles.

Lema 6.3 *Sea u una función no negativa de clase $\mathcal{C}^{2,1}(Q)$. Si u es supersolución de viscosidad de (6.1), entonces u es supersolución clásica.*

Demostración. Si u es una supersolución de viscosidad regular, utilizando el mismo argumento que en la demostración del Lema 6.1, concluimos que, en un punto de positividad en el que φ toca a u por abajo, φ verifica

$$\varphi_t \geq a(\varphi)\Delta \varphi + |\nabla \varphi|^2.$$

Tomando $\varphi = u$ concluimos que u es supersolución clásica.

Por otro lado, si P_0 es un punto en el que u vale 0, como u es no negativa, u tiene que alcanzar un mínimo en P_0 . Necesariamente se tiene que cumplir entonces que

$u = \nabla u = u_t = 0$, $a(u) = 0$, de forma que u cumple la definición de supersolución clásica de forma trivial. \square

demostrar un análogo al Lema 6.2 para supersoluciones no resulta tan sencillo. El motivo fundamental es que no se puede demostrar la comparación con subsoluciones clásicas de frontera libre sin probar primero un Principio del Máximo para ecuaciones degeneradas. Posponemos este resultado a la Sección 8.5 del Capítulo 8.

2. Soluciones positivas. La situación descrita anteriormente mejora notablemente cuando tanto los datos iniciales como la solución son estrictamente positivos, ya que en este caso se puede aplicar la teoría de soluciones cuasilineales uniformemente parabólicas, [84].

Dado un dato inicial u_0 , continuo en \mathbb{R}^N y tal que

$$0 < \varepsilon \leq u_0 \leq M,$$

podemos resolver el problema (6.1)–(6.2) aplicando esta teoría. Obtenemos así una solución clásica acotada, u , que verifica

$$0 < \varepsilon < u < M.$$

Es fácil ver que en este caso las nociones de solución de viscosidad y solución clásica coinciden.

Lema 6.4 *Sea $u \in C(\overline{Q})$ una solución de viscosidad de (6.1) positiva y acotada. Si $u_0(x) \geq \varepsilon > 0$, entonces u es una solución clásica en Q . Además $u \geq \varepsilon$ y es única.*

Demostración. Consideremos una solución de tipo Barenblatt B , (véase la Sección 6.4, fórmula (6.13)). Modificando los parámetros, τ , C y x_0 que intervienen en su definición podemos además de trasladarla en espacio, aumentar o disminuir su soporte y su altura. Así, si u es una solución de viscosidad y $u_0 \geq \varepsilon > 0$, podemos conseguir que $u_0(x) > B(x - x_0, 0; \tau, C) \geq 0$. Comparando ambas funciones según el punto (ii) de la definición de supersolución, Definición 6.6, obtenemos que

$$u(x, t) > B(x - x_0, t; \tau, C) \geq 0.$$

Como u resulta ser uniformemente positiva, entonces también es uniformemente parabólica, y en consecuencia de clase $\mathcal{C}^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}$. Se tiene por tanto que u es la única solución clásica, véase [110], [111]. \square

Observación 6.5 El mismo resultado es válido si la ecuación está definida en un cilindro espacio-temporal acotado, Ω , con dato estrictamente positivo y continuo en la frontera parabólica.

Terminamos esta sección, dedicada a las primeras propiedades de las soluciones de viscosidad, demostrando un Principio Débil del Máximo para soluciones de viscosidad positivas.

Lema 6.5 Sean u_1 y u_2 una subsolución de viscosidad y una solución clásica de (6.1) respectivamente, definidas ambas en un cilindro espacio-temporal cerrado y acotado, Ω . Si $u_1 \leq u_2$ en $\Gamma = \partial\Omega$, entonces $u_1 \leq u_2$ en Ω .

Demostración. Gracias a la teoría clásica de ecuaciones cuasilineales, podemos construir una familia de soluciones clásicas u_ε de la ecuación,

$$(u_\varepsilon)_t = a(u_\varepsilon)\Delta u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon, \quad (6.5)$$

con dato de frontera

$$u_\varepsilon = u_2 + \varepsilon$$

y tal que aproximen a u_2 por arriba.

Se tiene que, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε converge a u_2 de forma monótona decreciente y localmente uniforme.

Supongamos ahora que u_ε toca a u_1 por arriba en un punto P_1 de Ω . Entonces, por definición de subsolución de viscosidad,

$$(u_\varepsilon)_t \leq a(u_\varepsilon)\Delta u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2.$$

Concluimos de esta última expresión que

$$(u_\varepsilon)_t < a(u_\varepsilon)\Delta u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon,$$

desigualdad que contradice a la ecuación (6.5).

Por lo tanto u_ε y u_1 no se pueden tocar en Ω , $u_1 < u_\varepsilon$. Pasando al límite obtenemos el resultado deseado, $u_1 \leq u_2$ en Ω . \square

Lema 6.6 Sean v_1 y v_2 una supersolución de viscosidad positiva y una solución clásica de (6.1) respectivamente, definidas ambas en un cilindro espacio-temporal cerrado y acotado, Ω . Si $v_2 \leq v_1$ en $\Gamma = \partial\Omega$, entonces $v_2 \leq v_1$ en Ω .

Demostración. La idea de la demostración es la misma que la del lema anterior: aproximamos v_2 por debajo por soluciones v_ε de

$$(v_\varepsilon)_t = a(v_\varepsilon)\Delta v_\varepsilon + |\nabla v_\varepsilon|^2 - \varepsilon,$$

con dato de frontera

$$v_\varepsilon = v_2 - \varepsilon > 0,$$

y aplicamos la definición de supersolución de viscosidad a v_ε . Concluimos el resultado pasando al límite en ε . \square

6.3 La transformación densidad-presión

En algunos momentos, durante el desarrollo de la teoría de viscosidad, necesitaremos usar argumentos basados en la teoría débil. Esta teoría se aplica a una variable estrechamente relacionada con u , la densidad ρ , que se obtiene a partir de u mediante una transformación funcional. Este procedimiento permite cambiar la ecuación original, en forma de no divergencia, por una ecuación en forma de divergencia, para la que la teoría débil es bien conocida.

Seamos más concretos: transformamos soluciones $u \geq 0$ de la ecuación (6.1) en soluciones $\rho = \mathcal{T}(u)$ de la ecuación de filtración asociada

$$\rho_t = \Delta\Phi(\rho), \tag{6.6}$$

para alguna función real Φ creciente, que obviamente está definida en términos de \mathcal{T} y de la función $a(u)$ que aparece en (6.1).

El problema directo, es decir, encontrar ρ a partir de u no parece inmediato. Sin embargo, la transformación ha sido estudiada con detalle en el sentido inverso.

Para hacer una primera aproximación al problema que nos ocupa, supongamos que Φ es una potencia,

$$\Phi(\rho) = \rho^m, \quad m > 1.$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de los medios porosos; ρ es la densidad del gas y u , que representa la presión, viene dada por la fórmula

$$u = \frac{m}{m-1} \rho^{m-1}.$$

Así, la ecuación (6.1) se escribe de la forma

$$u_t = (m-1)u\Delta u + |\nabla u|^2.$$

Esta transformación se usa por ejemplo en [5] para establecer propiedades de las soluciones de la ecuación de los medios porosos, como la velocidad de propagación finita o la regularidad óptima.

En el contexto general de la ecuación de filtración con función Φ , la relación entre u y ρ es más complicada. Ésta viene dada por

$$u = \mathcal{P}(\rho) \equiv \int_c^\rho \frac{\Phi'(s)}{s} ds, \quad (6.7)$$

que representa lo que hemos venido llamando transformación densidad-presión. La constante $c \geq 0$ es arbitraria y la tomaremos igual a cero si la integral es convergente. En caso contrario $c > 0$.

Para darle sentido a la fórmula (6.7) consideramos la clase \mathcal{F} de funciones crecientes y continuas, $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, de clase \mathcal{C}^2 en $(0, \infty)$ y tal que $\Phi(0) = 0$ y $\Phi'(\rho) > 0$ para todo $\rho > 0$. De hecho, para centrarnos mejor en el problema que tenemos entre manos, supondremos que la integral (6.7) es convergente en $\rho = 0$. Esto restringe \mathcal{F} a una subclase \mathcal{F}_0 de funciones Φ , en la cual trabajaremos.

Bajo estas hipótesis se puede ver fácilmente que \mathcal{P} es una biyección estrictamente creciente de $[0, \infty)$ en un intervalo I de la recta real. Si $\mathcal{P}(\rho) \rightarrow \infty$ cuando $\rho \rightarrow \infty$, el intervalo I es de la forma $[0, \infty)$, mientras que es finito, $I = [0, h)$, en caso contrario. No obstante, obsérvese que como estamos considerando únicamente soluciones acotadas, no tenemos que ocuparnos en este análisis del problema cuando $\rho \rightarrow \infty$. Concluimos entonces que existe una transformación inversa

$$\rho = \mathcal{P}^{-1}(u)$$

definida para todo $u \in I$. Además, las funciones \mathcal{P} y \mathcal{P}^{-1} son \mathcal{C}^1 para $u, \rho > 0$ y continuas hasta cero.

Establecemos en el siguiente resultado la relación que existe entre ambas ecuaciones en sentido clásico, véase también [83].

Lema 6.7 Sea $\rho \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ una solución clásica no negativa de (6.6) con $\Phi \in \mathcal{F}_0$. Si u se define mediante la fórmula (6.7), $u = \mathcal{P}(\rho)$, entonces u es una solución clásica no negativa de

$$u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2, \quad (6.8)$$

con valores en I , y donde $a(u)$ viene dada por

$$a(u) = \Phi'(\mathcal{P}^{-1}(u)) > 0. \quad (6.9)$$

Demostración. El resultado se obtiene fácilmente gracias a las hipótesis de regularidad.

Si $\rho > 0$ entonces

$$u_t = \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \rho_t \quad \text{y} \quad \nabla u = \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \nabla \rho,$$

de forma que

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \rho_t = \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \Delta \Phi(\rho) = \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \operatorname{div}(\Phi'(\rho) \nabla \rho) = \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \operatorname{div}(\rho \nabla u) \\ &= \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \rho \Delta u + \frac{\Phi'(\rho)}{\rho} \nabla \rho \nabla u = \Phi'(\rho) \Delta u + |\nabla u|^2 = a(u) \Delta u + |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

con $\Phi'(\rho) = a(u)$. □

Más adelante veremos, Proposición 7.5, que esta relación se puede extender para obtener una correspondencia entre soluciones débiles de la ecuación de filtración y soluciones de viscosidad de (6.1).

El siguiente paso consiste en asegurarnos de que la transformación se puede invertir. Es decir, queremos comprobar que podemos obtener ρ a partir de u . Como las ecuaciones que definen a ρ , (6.6), y a u , (6.8), quedan caracterizadas por las funciones Φ y $a(u)$ respectivamente, sólo es necesario comprobar que la aplicación dada por $\mathcal{A} : \Phi \mapsto \mathcal{P} \mapsto a$, definida para $\Phi \in \mathcal{F}_0$, se puede invertir en algún contexto.

Lema 6.8 (i) La imagen de la aplicación $\mathcal{A} : \Phi \mapsto a$, definida para $\Phi \in \mathcal{F}_0$, es el conjunto $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ de funciones $a : [0, h) \rightarrow \mathbb{R}_+$, tales que $a(u)$ es \mathcal{C}^1 y positiva para $u > 0$ y $\int a^{-1}(u) du$ diverge cuando $u \rightarrow 0$.

(ii) Para toda función $a \in \mathcal{A}$, su imagen inversa es una familia uniparamétrica de funciones de \mathcal{F}_0 de la forma $\{\Phi_k(s) : k > 0\}$, donde

$$\Phi_k(s) = k \Phi_1\left(\frac{s}{k}\right).$$

(iii) La función $\Phi(s)$ es de clase \mathcal{C}^r , $r \geq 1$, para $s > 0$ si y sólo si $a(u) \in \mathcal{C}^{r-1}$ para $u > 0$.

Demostración. Dada una función a , obtenida a partir de Φ , y \mathcal{P} , que también se deduce de Φ , queremos ver que $a \in \mathcal{A}$ y que podemos recuperar la función Φ original, salvo un parámetro.

En primer lugar obsérvese que

$$\Phi'(s) = a(\mathcal{P}(s)), \quad \Phi'(s) = s \mathcal{P}'(s)$$

para todo $s > 0$. Por lo tanto, de la relación (6.7) obtenemos que

$$\frac{1}{s} = \frac{\mathcal{P}'(s)}{a(\mathcal{P}(s))}.$$

Aquí hemos utilizado como variable la letra s en vez de ρ para enfatizar que estamos interesados en la dependencia funcional. Si escribimos u en lugar de $\mathcal{P}(s)$ e integramos esta última expresión obtenemos que

$$\int \frac{ds}{s} = \int \frac{du}{a(u)}.$$

Por tanto, como $\rho = \mathcal{P}^{-1}(u)$,

$$\mathcal{P}^{-1}(u) = k \exp\left(\int \frac{du}{a(u)}\right).$$

De esta forma \mathcal{P}^{-1} queda identificada salvo por la constante de integración $k > 0$. Sea por tanto \mathcal{P}_k la función con constante k . Entonces $(\mathcal{P}_k)^{-1}(u) = k(\mathcal{P}_1)^{-1}(u)$, lo que implica que

$$\mathcal{P}_k(s) = \mathcal{P}_1\left(\frac{s}{k}\right).$$

Una vez que hemos determinado \mathcal{P}^{-1} en función de a , el siguiente paso consiste el calcular Φ a partir de \mathcal{P} . Esto se puede hacer gracias a la relación

$$\Phi'(s) = s \mathcal{P}'(s).$$

Al igual que antes, tenemos que comprobar las constantes de integración. Como $\Phi(0) = \mathcal{P}(0) = 0$, obtenemos que

$$\Phi_k(s) = k\Phi_1\left(\frac{s}{k}\right).$$

Finalmente, la fórmula (6.9) implica que a es una función de clase \mathcal{C}^1 , positiva para $u > 0$ y que además la integral

$$\int_c^u \frac{du}{a(u)}$$

diverge cuando $c \rightarrow 0$.

Bajo estas condiciones \mathcal{P}^{-1} es diferenciable para $u > 0$ y $\mathcal{P}^{-1}(0) = 0$, lo que significa que $\Phi \in \mathcal{F}_0$. \square

El siguiente paso dentro del estudio de la transformación densidad-presión consiste en establecer condiciones suficientes sobre Φ que aseguren que las hipótesis impuestas sobre $a(u)$ en la Página 138 se verifican. Nótese que como $a(\mathcal{P}(s)) = \Phi'(s)$, en particular tenemos que $a'(\mathcal{P}(s))\mathcal{P}'(s) = \Phi''(s)$. Del hecho de que $\Phi'(s) = s\mathcal{P}'(s)$ deducimos finalmente que

$$a'(\mathcal{P}(s)) = \frac{s\Phi''(s)}{\Phi'(s)}. \quad (6.10)$$

Proposición 6.9 (i) *La función Φ es convexa si y sólo si a es monótona creciente.*

(ii) *Supongamos que Φ es positiva y que además existe una constante $C > 0$ tal que*

$$s\Phi''(s) \leq C\Phi'(s). \quad (6.11)$$

Entonces $a'(u) \leq C$, y por tanto $a(u) \leq Cu$.

Demostración. (i) Es consecuencia directa de las definiciones de a y Φ .

(ii) Según la fórmula (6.10), de la hipótesis $s\Phi''(s) \leq C\Phi'(s)$ obtenemos que

$$a'(\mathcal{P}(s)) \leq C.$$

De esta última expresión, tomando $u = \mathcal{P}(s)$ e integrando, concluimos el resultado: $a(u) \leq Cu$. \square

Observación 6.6 En [39], [40] se utiliza la condición

$$c\Phi'(s) \leq s\Phi''(s) \leq C\Phi'(s),$$

ligeramente más restrictiva que la utilizada aquí, (6.11), para desarrollar la teoría de la ecuación de filtración.

1. Ejemplos. Para concluir esta sección dedicada al estudio de la transformación densidad-presión mostramos varios ejemplos, que creemos ilustran la teoría general.

(i) Ecuación de los medios porosos: Como ya mencionamos al principio de esta sección, es fácil ver que la ecuación (6.6) con $\Phi(\rho) = c\rho^m$, produce una función a de la forma

$$a(u) = (m - 1)u.$$

(ii) Función exponencial: Supongamos ahora que Φ es $\Phi(\rho) = e^{-\frac{1}{\rho}}$. Entonces

$$a'(u) = \frac{\rho\Phi''(\rho)}{\Phi'(\rho)} = \frac{1}{\rho} - 2, \quad (6.12)$$

de forma que $a'(u) \rightarrow \infty$ cuando u y ρ tienden a 0. Además a es cóncava cerca de $u = 0$.

Seamos más precisos. Como

$$u = \mathcal{P}(\rho) = \int_0^\rho \frac{e^{\frac{1}{s}} \frac{1}{s^2}}{s} ds \sim \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho}}$$

cuando $\rho \rightarrow 0$ y en una primera aproximación se obtiene que

$$\log \frac{1}{u} = \frac{1}{\rho}.$$

Por tanto, sustituyendo en (6.12) e integrando,

$$a'(u) \sim \log \frac{1}{u}, \quad a(u) \sim u \log \frac{1}{u}.$$

Este ejemplo no queda cubierto por la teoría de soluciones de viscosidad que desarrollamos aquí, ya que $\frac{a(u)}{u}$ no está localmente acotado.

(iii) Comportamiento casi lineal: En el lado opuesto del ejemplo anterior se encuentra el caso en el que Φ es casi lineal. Es decir,

$$\Phi(\rho) \sim \frac{\rho}{\ln^\alpha \rho},$$

con $\alpha > 1$ para que la propagación sea finita. Así, cuando $\rho \rightarrow 0$, obtenemos

$$a(u) = \frac{1 - \alpha \ln^{-1} \rho}{\ln^\alpha \rho} \sim \frac{1}{\ln^\alpha \rho}.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, utilizando una aproximación para u ,

$$u = \mathcal{P}(\rho) \sim (1 - \alpha)^{-1} \ln^{1-\alpha}(\rho),$$

cuando $\rho \rightarrow 0$, se tiene finalmente que

$$a(u) \sim \gamma u^{1+\beta},$$

con constantes

$$\gamma = (1 - \alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{\alpha - 1} > 0.$$

Para concluir, queremos ilustrar la transformación inversa. Para ello tomamos la transformación inversa $a(u) = u^2$, es decir $\beta = 1$ y $\gamma = 1$. En esta situación,

$$\rho = \mathcal{P}^{-1}(u) \sim k e^{-\frac{1}{u}}.$$

Eligiendo el caso particular $k = 1$, se tiene que

$$\Phi'(\rho) = \frac{1}{\ln^2(\rho)}$$

y por tanto, cuando $\rho \rightarrow 0$,

$$\Phi(\rho) \sim \frac{\rho}{\ln^2(\rho)}.$$

Observación 6.7 La transformación densidad-presión se puede aplicar a una clase de funciones Φ más generales, sin necesidad de imponer la restricción de que $\mathcal{P}(\rho)$ sea finita en $\rho = 0$. De esta forma se cubre el caso conocido como difusión rápida, estudiado por ejemplo en [29].

6.4 Ejemplos de subsoluciones y supersoluciones

Si bien es verdad que la familia de subsoluciones y supersoluciones que podemos utilizar como funciones test es amplia, en la práctica, y para el desarrollo de la teoría sólo usaremos dos ejemplos concretos de funciones: las funciones Barenblatt y las ondas viajeras esféricas. Estas dos familias de funciones son modelos clásicos de soluciones explícitas de la ecuación de los medios porosos.

1. Funciones Barenblatt. El ejemplo principal de funciones que usaremos como test lo proporcionan las funciones Barenblatt.

Lema 6.10 Sea $B(x, t; \tau, C)$ la familia de funciones

$$B(x, t; \tau, C) = \frac{(C(t + \tau)^{2\lambda} - K|x|^2)_+}{(t + \tau)}, \quad (6.13)$$

con λ, K, C, τ constantes positivas. Supongamos que $a(u) \leq ku$ para alguna constante $k > 0$ en el rango $u \in [0, \text{máx } B]$. Si $\lambda = (kN + 2)^{-1}$ y $2K = \lambda$, entonces $B(x, t; \tau, C)$ es una subsolución clásica de (6.1).

Demostración. Queremos ver que se cumple $B_t \leq a(B)\Delta B + |\nabla B|^2$ en el conjunto de puntos en los que $B > 0$.

Por un lado tenemos que

$$B_t = (2\lambda - 1)C(t + \tau)^{2\lambda-2} + K|x|^2(t + \tau)^{-2}.$$

Para $a(B)\Delta B + |\nabla B|^2$ obtenemos una cota inferior usando que $a(B) \leq kB$ y $2\lambda - 1 = -kN\lambda$,

$$\begin{aligned} a(B)\Delta B + |\nabla B|^2 &= -2KN(t + \tau)^{-1}a(B) + |2Kx(t + \tau)^{-1}|^2 \\ &\geq -\lambda NkC(t + \tau)^{2\lambda-2} + \lambda Nk(t + \tau)^{-2}K|x|^2 + 4K^2(t + \tau)^{-2}|x|^2 \\ &= (2\lambda - 1)C(t + \tau)^{2\lambda-2} + 2K^2(nk + 2)|x|^2(t + \tau)^{-2} \\ &= (2\lambda - 1)C(t + \tau)^{2\lambda-2} + \lambda K\lambda^{-1}|x|^2(t + \tau)^{-2}. \end{aligned}$$

Esta estimación, junto con la obtenida para B_t , implican que B es una subsolución clásica de (6.1). \square

El hecho de que la ecuación (6.1) sea invariante por traslaciones en espacio y tiempo nos permite construir nuevas subsoluciones trasladando las funciones Barenblatt, (6.13), de forma arbitraria en espacio y tiempo.

Corolario 6.11 En las hipótesis del Lema 6.10, las funciones $B(x, t; \tau, C)$ son subsoluciones de viscosidad de (6.1).

Demostración. Es una consecuencia directa del Lema 6.1. \square

Corolario 6.12 *En las hipótesis del Lema 6.10, las funciones $B(x, t; \tau, C)$ son subsoluciones clásicas de frontera libre de (6.1).*

Demostración. Gracias al Lema 6.10 sabemos que B es una subsolución clásica. Además, como la frontera libre viene dada por la expresión

$$|x| = \left(\frac{C}{K}\right)^{\frac{1}{2}}(t + \tau)^\lambda,$$

concluimos que no hay puntos estacionarios. Por tanto B es una subsolución clásica de frontera libre (que se mueve). \square

2. Ondas viajeras esféricas. El segundo ejemplo de funciones que usaremos para comparar es la familia de ondas viajeras. Creemos conveniente para facilitar el desarrollo de la teoría considerar primero el caso de una dimensión espacial. Así, obtenemos ondas viajeras planas de la forma

$$u_1(x, t) = A(x + ct - b)_+, \quad u_2(x, t) = A(-x + ct - b)_+, \quad (6.14)$$

con constantes A , b y c positivas.

Se puede ver con un cálculo sencillo que las ondas viajeras definidas mediante la fórmula (6.14) son, siempre y cuando $0 < A \leq c$, supersoluciones clásicas de frontera libre definidas en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. La primera de ellas se mueve hacia la izquierda con velocidad c , mientras que la segunda lo hace hacia la derecha, también a velocidad c . Es más, si $A = c$, tanto u_1 como u_2 son soluciones clásicas de frontera libre.

Lema 6.13 *Las ondas viajeras planas definidas mediante la fórmula (6.14) son límite de una sucesión monótona de soluciones clásicas positivas.*

Demostración. La demostración es igual para las dos funciones u_1 y u_2 . Centrémonos en una de ellas.

El primer paso consiste en reescribir la fórmula $u(x, t) = A(x + ct - b)_+$ como

$$u = f(\eta), \quad \eta = A(x + ct - b).$$

Si $A = c$, u es una solución clásica de frontera libre ya que f satisface la relación $f' = a(f)f'' + (f')^2$ siempre que $f > 0$. Nótese que en este contexto mediante $'$ denotamos la diferenciación con respecto a η .

Continuamos la demostración utilizando un razonamiento usual en este tipo de argumentos: aproximamos f por ondas viajeras positivas f_ε , tales que $f < f_\varepsilon$ y

$$f_\varepsilon(-\infty) = \varepsilon, \quad f'_\varepsilon(-\infty) = 0. \quad (6.15)$$

Gracias a la transformación densidad-presión descrita en la Sección 6.3, podemos escribir la ecuación que verifica f_ε como

$$\rho'_\varepsilon = (\Phi(\rho_\varepsilon))''. \quad (6.16)$$

Integrando (6.16) se obtiene $\rho_\varepsilon = \Phi'(\rho_\varepsilon) + K$. La constante K se ajusta usando las condiciones de frontera (6.15),

$$(\rho_\varepsilon - \varepsilon_1) = \Phi'(\rho_\varepsilon),$$

donde ε_1 es la densidad correspondiente a la presión ε . Integrando de nuevo, concluimos que

$$\int_{\rho_0}^{\rho_\varepsilon} \frac{\Phi'(\rho_\varepsilon)}{\rho_\varepsilon - \varepsilon_1} d\rho_\varepsilon = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi.$$

La primera integral diverge cuando $\rho_\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$, ya que $\Phi'(\varepsilon_1) > 0$ (véase la Sección 6.3). Por tanto, obtenemos una solución clásica ρ_ε de (6.16), que es siempre positiva. También se observa que ρ'_ε y $(\Phi(\rho_\varepsilon))''$ son positivas y que $\frac{(\Phi(\rho_\varepsilon))'}{\rho_\varepsilon} \rightarrow 1$ cuando $\eta \rightarrow \infty$.

Para recuperar de nuevo f_ε no hay más que deshacer la transformación. Concluimos que f_ε , que es mayor que ε , es estrictamente creciente y además es tal que $f'_\varepsilon(\eta) \rightarrow 1$ cuando $\eta \rightarrow \infty$. Si $A = c$, la función asociada u_ε es una solución clásica positiva de (6.1). Si $A < c$ se obtiene una supersolución.

El último paso consiste en pasar al límite cuando ε decrece a cero. Así obtenemos que $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$ uniformemente sobre conjuntos compactos y por tanto $f_\varepsilon \rightarrow f$. \square

Cuando se trabaja en más variables espaciales se puede extender el concepto de onda viajera definido para dimensión uno simplemente sustituyendo en la fórmula (6.14) el argumento x por x_1 . De forma más general, se puede escribir $(x \cdot \mathbf{e})$, donde \mathbf{e} es el vector unitario que denota la dirección de movimiento de la onda

plana. Sin embargo, esta generalización no es suficiente. En capítulos posteriores necesitaremos también otro tipo de supersoluciones, las ondas viajeras esféricas, definidas mediante la fórmula

$$u(x, t) = A(|x| + ct - b)_+, \quad (6.17)$$

en $\mathcal{R} = \{|x| < R, -T < t < 0\}$, con constantes A , b y c positivas. Estas ondas viajeras tienen simetría radial en espacio y un agujero en el soporte que se rellena según pasa el tiempo. Obsérvese que el soporte de u nunca sobrepasa la bola $\mathcal{B}_{\frac{R}{2}}(0)$ si $2b > R$.

Lema 6.14 *Supongamos que $a(u) \leq ku$, $k > 0$ constante, para $0 \leq u \leq M$, $\frac{R}{2} \leq b < R$ y que*

$$\frac{c}{A} \geq 1 + 2k(N-1) \left(1 - \frac{b}{R}\right). \quad (6.18)$$

Entonces la onda viajera esférica (6.17) es una supersolución clásica de frontera libre de (6.1) en \mathcal{R} .

Demostración. En primer lugar tenemos que ver que en el conjunto en el que u es positiva, $|x| > b - ct$, se cumple

$$u_t \geq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2.$$

Es decir, queremos comprobar que se verifica

$$cA \geq a(u) \frac{A(N-1)}{|x|} + A^2,$$

en todos los puntos de \mathcal{R} donde $u > 0$. Como $a(u) \leq ku$, basta con ver que

$$k(N-1)u \leq (c-A)|x|.$$

Por otro lado, como $|x| < R$ y $t < 0$, tenemos que

$$u = A(|x| + ct - b) \leq A(R - b).$$

Es más, $2|x| \geq R$ en los puntos en los que $u > 0$. Concluimos por tanto la siguiente condición

$$k(N-1)A(R-b) \leq (c-A)\frac{R}{2},$$

que resulta ser suficiente para que u sea supersolución.

La condición de frontera libre, $\nu \geq |\nabla u| \neq 0$, se comprueba fácilmente. Basta con observar que gracias a (6.18) se tiene $\nu = c > A = |\nabla u|$. \square

Lema 6.15 *Las ondas viajeras esféricas definidas mediante la fórmula (6.17) son límite de una sucesión monótona de soluciones clásicas positivas.*

Demostración. Retomemos la aproximación f_ε de f definida previamente para dimensión uno. En este caso usamos la condición que relaciona a A y a c , (6.18), y como $N > 1$, observamos que aparece un término de primer orden adicional,

$$(N - 1)a(f)\frac{f'(\eta)}{|x|},$$

con signo positivo (que es “malo”). Sin embargo, a pesar de tener el signo malo, esta expresión es, para ε suficientemente pequeño, uniformemente similar al término

$$(N - 1)a(u)\frac{A}{|x|}$$

considerado en el Lema 6.14. Por tanto f_ε sigue siendo una supersolución si las hipótesis del Lema 6.14 se satisfacen y ε es pequeño. La prueba concluye como en el Lema 6.13. \square

3. Supersoluciones que explotan. Finalmente construimos una familia de supersoluciones, \mathcal{U} , que, si bien no tienen gran relevancia en la teoría de viscosidad, servirán para controlar la altura máxima de todas las soluciones.

Para definir estas supersoluciones añadimos la hipótesis $a(u) \leq ku$ para $u \geq 0$.

Lema 6.16 *La función \mathcal{U} definida mediante la fórmula*

$$\mathcal{U}(x, t) = M + b\frac{|x|^2}{T - t} + ct, \quad (6.19)$$

donde M y T son constantes arbitrarias, es una supersolución clásica estricta en el dominio $\mathcal{S} = \mathbb{R}^N \times (0, \frac{T}{2})$, si las constantes b y c se eligen convenientemente.

Observación 6.8 Nótese que debido al término $\frac{1}{T-t}$ estas funciones explotan, es decir, se hacen infinito, en tiempo finito.

Demostración. Para comprobar que \mathcal{U} es supersolución estricta del problema tenemos que imponer condiciones en b y en c de forma que

$$\mathcal{U}_t > a(\mathcal{U})\Delta\mathcal{U} + |\mathcal{U}|^2.$$

Así, se tiene que cumplir que

$$b|x|^2(T-t)^{-2} + c > 2a(\mathcal{U})Nb(T-t)^{-1} + 4b^2(T-t)^{-2}|x|^2.$$

Manipulando esta última desigualdad y usando la hipótesis $a(\mathcal{U}) \leq k\mathcal{U}$ observamos que tenemos que comprobar que

$$b|x|^2 + c(T-t)^2 > 2Nbk(b|x|^2 + (M+ct)(T-t)) + 4b^2|x|^2.$$

Controlemos por separado los términos en los que aparece x^2 y los que dependen del tiempo.

Para los términos con x^2 basta tomar $2b(Nk+2) < 1$, que se cumple si b es suficientemente pequeño. En cuanto a los términos con dependencia temporal, como en el dominio \mathcal{S} se tiene que $0 < t < \frac{T}{2}$, basta con elegir

$$c\frac{T}{2} > 2Nbk(M + c\frac{T}{2}).$$

Así,

$$2NbkM < c\frac{T}{2}(1 - 2Nbk). \quad (6.20)$$

En lo que sigue fijaremos M y T y tomaremos $b = \varepsilon > 0$ pequeño de forma que los valores aceptables de cT son también $\mathcal{O}(\varepsilon)$. \square

Construcciones

Si en el capítulo anterior establecíamos los principios básicos de la teoría de soluciones de viscosidad, éste está dedicado a construir las herramientas necesarias para demostrar los resultados principales de dicha teoría. Uno de los puntos relevantes será la construcción de la solución de viscosidad maximal, que resultará de gran importancia en capítulos posteriores. Por otro lado, las construcciones geométricas hechas con supremos e ínfimos de subsoluciones y supersoluciones de viscosidad tendrán un papel fundamental en la demostración del Teorema 8.2 en el Capítulo 8.

Contenido

7.1. Existencia de la solución de viscosidad maximal	160
7.2. Propiedades del soporte	165
7.3. Convoluciones con supremos e ínfimos	170

7.1 Existencia de la solución de viscosidad maximal

Llegados a este punto estamos en condiciones de construir, a partir de un dato inicial u_0 dado, una solución de viscosidad concreta. Es más, veremos que esta construcción proporciona una solución que es maximal entre todas las soluciones de viscosidad (con dato inicial u_0) no negativas y acotadas.

Dado un dato inicial $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, no negativo y acotado, $0 \leq u_0(x) \leq M$, empezamos construyendo una solución de (6.1)–(6.2) con dato inicial estrictamente positivo y acotado

$$u_{0,\varepsilon}(x) \geq u_0(x) + \varepsilon.$$

Gracias a la teoría de ecuaciones cuasilineales uniformemente parabólicas, [84], sabemos que la solución $u_\varepsilon \geq \varepsilon$, asociada a $u_{0,\varepsilon}$ es una solución clásica. Es más, si los datos iniciales están ordenados, es decir $u_{0,\varepsilon'} < u_{0,\varepsilon}$ si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, por el Principio del Máximo para soluciones clásicas, las soluciones también están ordenadas, $u_{\varepsilon'} \leq u_\varepsilon$ si $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Obtenemos así una sucesión monótona y acotada de soluciones clásicas de (6.1)–(6.2). Pasando al límite cuando ε decrece a cero concluimos que existe el límite

$$\bar{u}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t), \quad (7.1)$$

que es una función no negativa y acotada.

La definición de \bar{u} , como límite de soluciones con dato inicial $u_{0,\varepsilon}(x) = u_0(x) + \varepsilon$, debería ser, en principio, suficiente. Sin embargo, para el correcto desarrollo de la teoría será conveniente que definamos $u_{0,\varepsilon}$ como sigue

$$u_{0,\varepsilon}(x) = \begin{cases} u_0(x) + \varepsilon, & |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}, \\ M + \varepsilon, & |x| \geq \frac{2}{\varepsilon}, \end{cases}$$

extendiéndolo de forma continua en $\frac{1}{\varepsilon} < |x| < \frac{2}{\varepsilon}$. Esta definición resultará útil, porque necesitaremos un control del comportamiento de la solución en el infinito para demostrar el resultado de maximalidad. Después de probar el resultado veremos que la forma concreta de aproximar la solución maximal no es relevante y deducimos por tanto que la definición original de $u_{0,\varepsilon}$ también produce una solución maximal.

Proposición 7.1 *La función \bar{u} definida mediante (7.1) es una solución de viscosidad de (6.1)–(6.2).*

Demostración. Como primer paso para demostrar este resultado, veamos que \bar{u} es una función continua. En lugar de hacer un estudio de la regularidad de la ecuación, deducimos la continuidad de \bar{u} como consecuencia de:

- la transformación densidad-presión (véase Sección 6.3) que transforma soluciones de la ecuación (6.1) en soluciones de la ecuación de filtración asociada, $\rho_t = \Delta\Phi(\rho)$;
- la continuidad de las soluciones ρ de la ecuación de filtración, que se describe con detalle en el Apéndice B.

Obsérvese que, debido a la monotonía de la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ y a la continuidad de las funciones \bar{u} y u_ε , la convergencia en (7.1) es localmente uniforme.

Una vez demostrado que el límite \bar{u} es continuo, el siguiente paso consiste en ver que es una subsolución de viscosidad.

Para ello consideremos una función test $\varphi \in C^{2,1}(Q)$ tal que $\varphi - \bar{u}$ tiene un mínimo local cero en un punto P_0 (supongamos, sin pérdida de generalidad, $P_0 = (0, 0)$) de un entorno parabólico $\Omega = \mathcal{B}_r(0) \times (-r^2, 0]$, con r pequeño. Como comentamos en la Observación 6.2, reemplazando φ por $\psi = \varphi + \delta(x^4 + t^2)$ podemos asegurar que $v = \psi - \bar{u}$ tiene un mínimo estricto cero en Ω , precisamente en el punto P_0 . Además $v|_\Gamma \geq \delta r^4$, siendo Γ la frontera parabólica de Ω .

Por otro lado sabemos que $u_\varepsilon \rightarrow \bar{u}$ uniformemente. Podemos tomar por tanto

$$|u_\varepsilon - \bar{u}| \leq \delta \frac{r^4}{4}$$

y definir, para una constante c_ε que determinaremos luego, la función

$$v_\varepsilon = \psi_\varepsilon - u_\varepsilon = (\psi + c_\varepsilon) - u_\varepsilon.$$

Bajo estas hipótesis tenemos que

$$v_\varepsilon(P_0) \leq \frac{\delta r^4}{4} + c_\varepsilon \quad \text{y} \quad v_\varepsilon|_\Gamma \geq \frac{3\delta r^4}{4} + c_\varepsilon = \delta_1.$$

Concluimos entonces que v_ε tiene que alcanzar su mínimo en Ω en un punto interior, P_ε . Si elegimos c_ε de forma tal que $\psi_\varepsilon(P_\varepsilon) = u_\varepsilon(P_\varepsilon)$, entonces v_ε tiene un mínimo local cero en P_ε .

Por último, como las funciones u_ε son soluciones clásicas estrictamente positivas de (6.1)–(6.2), son también soluciones de viscosidad. Así,

$$(\psi_\varepsilon)_t \leq a(\psi_\varepsilon)\Delta\psi_\varepsilon + |\nabla\psi_\varepsilon|^2 \quad \text{en } P_\varepsilon.$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ podemos escoger $r \rightarrow 0$ de forma que $P_\varepsilon \rightarrow P_0$ y $c_\varepsilon \rightarrow 0$. Por tanto, pasando al límite en esta última desigualdad, obtenemos que

$$\varphi_t \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 \quad \text{en } P_0.$$

Queda así demostrado que \bar{u} es una subsolución de viscosidad.

Para demostrar que \bar{u} es una supersolución de viscosidad usamos la misma idea que la que hemos utilizado para ver que es subsolución, considerando una función test φ , tal que $\varphi - \bar{u}$ tiene un máximo local cero.

Siguiendo la definición de supersolución de viscosidad, Definición 6.6, falta por comprobar que toda subsolución clásica de frontera libre que está por debajo de \bar{u} en un tiempo t_1 , no puede cruzar a \bar{u} en un tiempo t_2 posterior.

Sea v una subsolución clásica de frontera libre tal que $v(x, t_1) < \bar{u}(x, t_1)$. Gracias a la construcción de \bar{u} y a la monotonía estricta de la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ tenemos que $u_\varepsilon(x, t) > \bar{u}(x, t)$, y por tanto

$$v(x, t_1) < \bar{u}(x, t_1) < u_\varepsilon(x, t_1).$$

Por otro lado, como las funciones u_ε son clásicas y positivas y v también es clásica en los puntos en los que es positiva, el Principio del Máximo implica que v y u_ε no se pueden tocar. Así,

$$u_\varepsilon(x, t_2) > v(x, t_2)$$

(véase la demostración de la Proposición 7.3 para más detalles). Finalmente, pasando al límite cuando ε tiende a cero, tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t_2) = \bar{u}(x, t_2) \geq v(x, t_2).$$

Concluimos la demostración observando que, como \bar{u} es al mismo tiempo subsolución y supersolución, es una solución de viscosidad. \square

Para probar el resultado de maximalidad de \bar{u} necesitamos un lema técnico previo.

Lema 7.2 *Sea u una solución de viscosidad acotada tal que $u_0(x) \leq M$, Entonces $u(x, t) \leq M$ en Q .*

Demostración. Supongamos que la solución de viscosidad que estamos considerando está acotada por la cantidad $M_2 > M$. Sea entonces k el supremo de $\frac{a(u)}{u}$ para $0 \leq u < M_2 + 1$.

Fijemos un tiempo $T > 0$ y para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño consideremos la función

$$\mathcal{U}(x, t) = M' + b \frac{|x|^2}{T' - t} + ct,$$

con parámetros $M' = M + \varepsilon$, $T' = 2T$, $b = \varepsilon$ y $c = \mathcal{O}(\varepsilon)$ elegidos según (6.20). De esta forma \mathcal{U} es una supersolución clásica estricta de $\mathcal{U}_t = a(\mathcal{U})\Delta\mathcal{U} + |\mathcal{U}|^2$ en $\mathcal{S} = \mathbb{R}^N \times (0, T)$, siempre y cuando \mathcal{U} sea menor que $M_2 + 1$. En estas condiciones \mathcal{U} es inicialmente mayor que u . Además, ambas funciones están separadas para valores grandes de $|x|$ uniformemente en $0 < t < T$.

Por tanto, si \mathcal{U} no es estrictamente mayor que u en \mathcal{S} , tiene que existir un primer punto $P_1 = (x_1, t_1)$, con $x_1 \in \mathbb{R}^N$ y $0 < t_1 < T$, en el que \mathcal{U} toque a u por arriba. En ese punto podemos aplicar la definición de subsolución de viscosidad a u con función test \mathcal{U} para obtener

$$(\mathcal{U})_t(P_1) \leq a(\mathcal{U}(P_1))\Delta\mathcal{U}(P_1) + |\nabla\mathcal{U}(P_1)|^2.$$

Esta desigualdad contradice el hecho de que \mathcal{U} sea una supersolución estricta en un entorno parabólico de P_1 (en el que $\mathcal{U} \leq M_2 + 1$).

Concluimos que

$$u(x, t) < \mathcal{U}(x, t) = M + \varepsilon + \varepsilon \frac{|x|^2}{2T - t} + \mathcal{O}(\varepsilon)t$$

en \mathcal{S} . Por tanto, haciendo tender ε a cero, obtenemos finalmente que $u(x, t) \leq M$ en \mathcal{S} . \square

Proposición 7.3 *La solución de viscosidad \bar{u} definida mediante (7.1) es la solución de viscosidad maximal del problema de Cauchy (6.1)–(6.2).*

Demostración. Sea \hat{u} otra solución de viscosidad de (6.1) con dato inicial u_0 . El objetivo es demostrar que $\bar{u} \geq \hat{u}$. Para ello comparamos en primer lugar \hat{u} con la familia u_ε cuyo límite es \bar{u} . Obsérvese que en $t = 0$ los datos iniciales satisfacen $u_{0,\varepsilon} > u_0$ y por tanto sólo tenemos que probar que u_ε está por encima de \hat{u} para $t > 0$.

En primer lugar nótese que la posibilidad de que \hat{u} salte por encima de u_ε y que los puntos de cambio de signo se muevan hacia infinito cuando $t \rightarrow 0$, queda descartada por el lema anterior y por la propia construcción de u_ε .

Por tanto, si u_ε no está siempre por encima de \hat{u} , tiene que existir un primer punto P_0 en el que \hat{u} toca a u_ε por abajo, es decir la diferencia entre ambas funciones, $\hat{u} - u_\varepsilon$, alcanza un máximo local cero. Como u_ε es positiva, \hat{u} también tiene que serlo en un entorno de P_0 . Se sigue entonces que hay un entorno parabólico de P_0 en el que ambas funciones son positivas, y por tanto regulares. Además, \hat{u} y u_ε están ordenadas en ese entorno. El Principio Fuerte del Máximo implica que u_ε y \hat{u} no se pueden tocar en P_0 . Esto es una contradicción que descarta la hipótesis de que \hat{u} toque a u_ε por abajo. Por lo tanto, $u_\varepsilon > \hat{u}$ en Q .

Finalmente, pasando al cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos que

$$\bar{u} = \lim u_\varepsilon \geq \hat{u}$$

para todo tiempo. Concluimos así que \bar{u} es la solución maximal de (6.1)–(6.2). \square

A continuación demostramos una de las principales propiedades de las soluciones maximales: están ordenadas en función de los datos iniciales.

Proposición 7.4 *Sean \bar{u} y \hat{u} dos soluciones maximales con datos iniciales ordenados, $\bar{u}_0(x) \geq \hat{u}_0(x)$ para todo x en \mathbb{R}^N , entonces*

$$\bar{u}(x, t) \geq \hat{u}(x, t)$$

para (x, t) en Q .

Demostración. Sean \bar{u}_0 y \hat{u}_0 dos datos iniciales tales que $\bar{u}_0(x) \geq \hat{u}_0(x)$ y consideremos los datos iniciales $\bar{u}_{0,\varepsilon}(x) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \geq \hat{u}_0(x) + \varepsilon = \hat{u}_{0,\varepsilon}(x)$. Gracias al

Principio del Máximo tenemos que $\bar{u}_\varepsilon(x, t) \geq \hat{u}_\varepsilon(x, t)$. El resultado para soluciones maximales,

$$\bar{u}(x, t) \geq \hat{u}(x, t),$$

se concluye pasando al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Proposición 7.5 *La imagen de la transformación densidad-presión definida en el Lema 6.7 aplicada a la solución débil acotada de (6.6), contiene a la solución de viscosidad maximal de la ecuación (6.1) obtenida en (7.1).*

Demostración. Dado un dato inicial $\rho_0 \geq 0$ continuo y acotado, lo aproximamos por datos iniciales positivos $\rho_{0,\varepsilon}(x)$. La única condición que imponemos sobre la familia $\rho_{0,\varepsilon}$ es que aproxime a ρ_0 uniformemente y de forma monótona por arriba cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. La teoría de ecuaciones parabólicas cuasilineales, [84], afirma que el problema de Cauchy $\rho_t = \Delta\Phi(\rho)$ asociado a cada $\rho_{0,\varepsilon}$ tiene una única solución. Además las soluciones ρ_ε son clásicas y forman una sucesión decreciente. Gracias a los resultados de regularidad demostrados en [45] y [103], sabemos que ρ , el límite de ρ_ε , es una solución continua, (véase el Apéndice B). Por tanto, la sucesión $\{\rho_\varepsilon\}$ converge localmente uniformemente a ρ .

Por otro lado, gracias la Lema 6.7, tenemos que la función $u_\varepsilon = \mathcal{P}(\rho_\varepsilon)$ es una solución clásica de (6.1). Pasando al límite cuando ε decrece a cero, obtenemos finalmente que

$$\bar{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}(\rho_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^{\rho_\varepsilon} \frac{\Phi'(s)}{s} ds = \int_c^\rho \frac{\Phi'(s)}{s} ds,$$

por tanto $\bar{u} = \mathcal{P}(\rho)$ y el límite es localmente uniforme. \square

7.2 Propiedades del soporte

Dedicamos esta sección a estudiar el soporte de la soluciones de viscosidad y determinar sus propiedades fundamentales.

Proposición 7.6 *Sea u una supersolución de viscosidad. Entonces el soporte de u es no decreciente en tiempo. Es más, si $u_0 \not\equiv 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{sop}(u(\cdot, t)) = \mathbb{R}^N$.*

Demostración. Sea u una supersolución de viscosidad y sea (x_0, t_0) un punto tal que $u(x_0, t_0) > 0$. Queremos ver que $u(x_0, t) > 0$ para $t > t_0$.

Sea B una subsolución tipo Barenblatt tal que

$$u(x_0, t_0) > B(x - x_0, 0; \tau, C).$$

Del punto (ii) de la definición de supersolución de viscosidad, Definición 6.6, concluimos que B está por debajo de u en todo tiempo posterior a t_0 . Por tanto

$$u(x_0, t) > B(x - x_0, t - t_0; \tau, C) > 0, \quad t > t_0.$$

La demostración termina usando las propiedades del soporte de las funciones Barenblatt. \square

Proposición 7.7 *Sea u una solución de viscosidad. Entonces el soporte de u se expande de forma continua.*

Demostración. Basta restringirnos a analizar el movimiento en $t = 0$. Seamos más concretos: dado $\varepsilon > 0$ y un radio $R \gg 0$, tenemos que encontrar $\tau > 0$ tal que $\text{sop}(u(\cdot, t)) \cap \mathcal{B}_R(0)$ esté incluido en un entorno de radio ε de $\text{sop}(u_0) \cap \mathcal{B}_R(0)$ si $0 < t < \tau$.

Sea entonces $x_0 \in \mathcal{B}_R(0)$ un punto que está a distancia ε de $\text{sop}(u_0) \cap \mathcal{B}_R(0)$. Queremos ver que $u(x_0, t)$ es cero para $0 < t < \tau$; es decir, que x_0 no está en el conjunto de positividad de u . Para demostrarlo utilizamos un argumento de comparación con las ondas viajeras esféricas construidas en la Sección 6.4. La idea fundamental de la prueba es que estas ondas viajeras tienen velocidad de propagación finita.

Sea $u_{A,c,R,b,T}$ la onda viajera definida en el conjunto $\{|x| < R, -T < t < 0\}$ mediante la fórmula (6.17) y consideremos

$$W(x, t) = u_{A,c,\varepsilon,\frac{\varepsilon}{2},\tau}(x - x_0, t - \tau).$$

Como los parámetros A , c y τ todavía no se han determinado, los elegimos de forma que en $t = 0$ se cumpla $u_0(x) \leq W(x, 0)$ en la bola $\mathcal{B}_\varepsilon(x_0)$, y que además $W(x, t) \geq M = \|u\|_\infty$ en la frontera parabólica del cilindro en el que está definido W . Por tanto, además de las condiciones impuestas en el Lema 6.14 sobre los

parámetros que aseguran que W es supersolución, también se tiene que cumplir que $A(\varepsilon - c\tau - b) \geq M$. Todo ello implica que si ε es pequeño, A tiene que ser grande y por tanto c también es grande (ya que $c > A$) y τ muy pequeño.

Por otro lado la construcción de las ondas esféricas, Lema 6.15, implica que W es límite decreciente de supersoluciones positivas regulares, W_δ . Así $W_\delta > W \geq M$ en la frontera parabólica y $W_\delta(x, 0) > W(x, 0) \geq u_0(x)$. Utilizando un argumento de comparación concluimos que $W_\delta(x_0, t) > u(x_0, t)$ para $0 \leq t \leq \tau$ y por tanto, pasando al límite, $W(x_0, t) \geq u(x_0, t)$.

Para concluir la demostración obsérvese que $W(x_0, t) = A(-c\tau - b)_+ = 0$ y por tanto,

$$u(x_0, t) \leq W(x_0, t) = 0$$

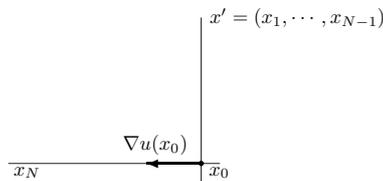
para todo $0 \leq t \leq \tau$. □

El siguiente aspecto que nos ocupa es demostrar que, bajo ciertas condiciones sobre la forma de la solución cerca de la frontera libre, su soporte se mueve inmediatamente.

Lema 7.8 *Sea u una solución de viscosidad tal que $u_0 \in C^2$ en su soporte, Ω_0 , y $|\nabla u_0| \neq 0$ cerca de un punto $x_0 \in \Gamma_0 = \partial\Omega_0$. Entonces, en $t = 0$ y cerca de x_0 , la frontera libre de u se mueve inmediatamente en la dirección exterior.*

Demostración. Para dar mayor claridad a la exposición dividiremos la demostración en cinco pasos.

PASO 1 Sea x_0 un punto de Γ_0 . Mediante una traslación y una rotación de los ejes podemos suponer que $x_0 = 0$ y que $\nabla u(x_0)$ apunta en la dirección negativa del eje x_N .



Como por hipótesis $|\nabla u_0| \neq 0$ en x_0 , podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_N(x)} \neq 0, \quad \text{para } x \text{ cercano a } x_0.$$

El Teorema de la Función Implícita implica que existe un entorno, U , del punto $(x_{01}, \dots, x_{0N-1}, u) = (x'_0, u) = (0, 0) \in \mathbb{R}^N$ y una función $\varphi \in C^2(U)$ tal que se verifica lo siguiente: si (x', u) es un punto de U con $x' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$,

entonces la función

$$\Phi(x', u) = (x', \varphi(x', u))$$

es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^2 de U en su imagen, V , que resulta ser un entorno de $x_0 = 0$, y $\Phi(0, 0) = x_0 = 0$. Además, $\Gamma_0 \cap V$ es la imagen de $U \cap \{u = 0\}$ por Φ , con ecuación

$$x_N = \varphi(x', u),$$

y $\Omega_0 \cap V = \Phi(U \cap \{u < 0\})$; es decir $x_N < \varphi(x', u)$ para $(x', u) \in U$.

PASO 2 Gracias a la regularidad \mathcal{C}^1 del dato inicial, la superficie dada mediante $z = u_0(x)$ tiene un plano tangente en $x_0 = 0$, de ecuación

$$z = \nabla u_0(x_0) \cdot x.$$

Como además $\nabla u_0(x_0) \neq 0$, el plano no es horizontal. Utilizando la notación simplificada que hemos introducido al principio de la demostración, podemos escribir la ecuación del plano como

$$z = -\alpha x_N, \quad \alpha = -\frac{\partial u_0}{\partial x_N}(0).$$

Por otro lado, como $u_0 \in \mathcal{C}^2$ en su soporte y $\nabla u_0 \neq 0$ cerca de $x_0 = 0$, la curvatura de Γ_0 cerca de x_0 es finita, $0 \leq k_0 < \infty$. Concluimos por tanto que Ω_0 tiene la propiedad de bola interior con una bola de radio $R = \frac{1}{k_0}$ en x_0 .

PASO 3 Sea \mathcal{B}_1 una bola centrada en $x_0 = 0$ de radio δ y sea B la subsolución de tipo Barenblatt, definida en (6.13), elegida de forma que B casi toque a x_0 . Además, también podemos elegir las constantes que definen a B para que su soporte inicial, $\text{sup}(B(x, 0))$, sea una pequeña bola \mathcal{B}' contenida en $\Omega_0 \cap \mathcal{B}_1$.

PASO 4 El objetivo de este paso es demostrar que la superficie $z = B(x, 0)$ se puede poner por debajo de $z = u_0(x)$. Es decir, que

$$u_0(x) > B(x, 0), \quad x \in \mathcal{B}'.$$

Afirmamos que si $|\nabla B(x_0, 0)|$ es suficientemente pequeño, supongamos por ejemplo que $2|\nabla B(x_0, 0)| < \alpha$, entonces para todo $x \in \mathcal{B}_1$, el plano tangente a B en x_0 está por debajo del plano tangente a u_0 en x_0 y por tanto $B(x, 0)$ está por debajo de $u_0(x)$ en $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}'$. Para comprobar esta afirmación consideramos la proyección $x_1 = (x'_N, x')$ del punto $x = (x_N, x')$ sobre $\partial \mathcal{B}'$ y paralela al eje x_N . También

definimos $x_2 = (x''_N, x')$ como la proyección de x en Γ_0 , paralela al eje x_N y tal que $x_N < x'_N < x''_N < 0$. Por el Teorema de Taylor, si $x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}'$ podemos escribir,

$$u_0(x) \sim u_0(x_2) + \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_2)(x_N - x''_N) \sim \alpha(x''_N - x_N),$$

$$B(x, 0) \sim B(x_1, 0) + \frac{\partial B}{\partial x_N}(x_1)(x_N - x'_N) \leq \frac{\alpha}{2}(x'_N - x_N).$$

El hecho de que $x'_N - x_N < x''_N - x_N$ implica que $B(x, 0) < u_0(x)$ para todo $x \in \mathcal{B}'$, véase la Figura 7.1.

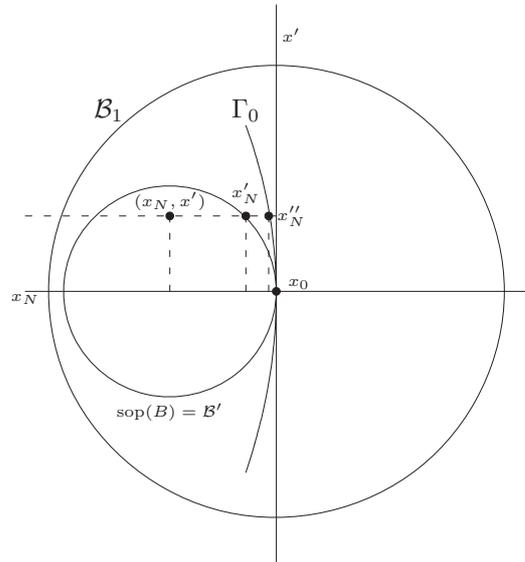


Figura 7.1: Soporte de B y frontera libre de u

PASO 5 Para concluir la demostración observamos en primer lugar que la frontera libre de B se mueve inmediatamente. Por otro lado, como B y u están estrictamente separadas en $t = 0$, B no puede cruzar a u en un tiempo posterior, $t > 0$. Como consecuencia, la frontera libre de u también se tiene que mover inmediatamente en $t = 0$. \square

7.3 Convoluciones con supremos e ínfimos

Dada una subsolución de viscosidad u y un radio $r > 0$, definimos la función \bar{v}_r como

$$\bar{v}_r(x, t) = \sup_{\bar{\mathcal{B}}_r(x, t)} u(y, \tau), \quad (7.2)$$

donde $\bar{\mathcal{B}}_r(x, t) = \{(y, \tau) : |y - x|^2 + (\tau - t)^2 \leq r^2\}$ es una bola cerrada definida en el dominio espacio-temporal.

De forma similar, dada una supersolución de viscosidad u , definimos

$$\underline{v}_r(x, t) = \inf_{\bar{\mathcal{B}}_r(x, t)} u(y, \tau). \quad (7.3)$$

Estas construcciones, ya utilizadas en [25], son subsolución y supersolución de viscosidad, respectivamente. Esto, junto con las propiedades geométricas demostradas en los lemas 7.10 y 7.11, se utilizará en el capítulo siguiente para demostrar el teorema de comparación, Teorema 8.2.

Lema 7.9 *Las funciones \bar{v}_r y \underline{v}_r son, respectivamente, subsolución de viscosidad y supersolución de viscosidad de (6.1) para $t \geq r$.*

Demostración. En primer lugar nótese que la condición $t \geq r$ es necesaria para que las bolas espacio-temporales, $\bar{\mathcal{B}}_r(x, t)$, que aparecen en las fórmulas (7.2) y (7.3) estén definidas para tiempos positivos. Una vez hecha esta observación centrémonos en demostrar que las funciones son subsolución y supersolución de viscosidad.

Empecemos con \bar{v}_r . Dado un punto $P_0 = (x_0, t_0)$ del dominio, sea $P_1 = (x_1, t_1)$ el punto de $\bar{\mathcal{B}}_r(P_0)$ donde se alcanza el supremo usado en la definición de $\bar{v}_r(P_0)$. Definimos la función trasladada

$$u_h(x, t) = u(x + h_1, t + h_2),$$

donde $h_1 = x_1 - x_0$ y $h_2 = t_1 - t_0$. Como u es subsolución de viscosidad, es inmediato ver que u_h también lo es en el dominio trasladado. Además se tiene que $u_h(P_0) = u(P_1) = \bar{v}_r(P_0)$ y por la definición de \bar{v}_r como un supremo, $u_h \leq \bar{v}_r$ en un entorno parabólico de P_0 .

Supongamos ahora que φ es una función test que toca a \bar{v}_r por arriba en P_0 . Entonces, φ también toca a u_h por arriba en P_0 y como $u_h \leq \bar{v}_r$, la diferencia $u_h - \varphi$ tiene un máximo local cero en P_0 en un entorno de P_0 . Concluimos que

$$\varphi_t \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en P_0 , por ser u_h subsolución de viscosidad. Obtenemos así que $\bar{v}_r(x, t)$ también es subsolución de viscosidad.

Para demostrar que \underline{v}_r es una supersolución de viscosidad usamos la misma idea para cubrir la primera parte de la definición.

Sin embargo, esto no es suficiente. Necesitamos comprobar también la condición (ii) de la Definición 6.6; es decir, la comparación con subsoluciones clásicas de frontera libre.

Sea por tanto v una subsolución clásica de frontera libre, tal que

$$v(x, t_0) \prec \underline{v}_r(x, t_0).$$

Obsérvese en primer lugar que, si $h = (h_1, h_2)$, la definición (7.3) es equivalente a tomar el ínfimo de las funciones trasladadas

$$\underline{v}_r(x, t) = \inf_{|h| \leq r} u_h(y, \tau),$$

con $u_h(y, \tau) = u(y + h_1, \tau + h_2)$, para $|h| \leq r$. Se cumple entonces que

$$v(x, t_0) \prec \underline{v}_r(x, t_0) \leq u_h(x, t_0).$$

Como las funciones trasladadas u_h son supersoluciones de viscosidad, tenemos que $v(x, t) \leq u_h(x, t)$ para $t \geq t_0$ y finalmente, tomando el ínfimo sobre los valores $|h| \leq r$, obtenemos el resultado deseado. \square

Como hemos comentado antes, estas construcciones serán de gran utilidad en la demostración del Teorema 8.2. Son de relevancia no sólo por el hecho de que sean subsolución y supersolución de viscosidad, sino por la regularidad de su frontera.

Lema 7.10 *El conjunto de positividad de \bar{v}_r tiene en todos los puntos de su frontera la propiedad de bola interior con una bola de radio r . El soporte de \underline{v}_r tiene la propiedad de bola exterior con una bola de radio r .*

Demostración. Sea $\mathcal{P}(\bar{v}_r)$ el conjunto de positividad de \bar{v}_r y $P_0 = (x_0, t_0)$ un punto de su frontera, $\partial\mathcal{P}(\bar{v}_r)$.

Como P_0 está en la frontera del conjunto de positividad de \bar{v}_r , por la definición de \bar{v}_r como supremo, se concluye de forma inmediata que $u = 0$ en la bola cerrada de radio r centrada en P_0 . Además, tiene que existir un punto P_1 a distancia r de P_0 que esté en la frontera del conjunto de positividad de u . Claramente se cumple $\bar{v}_r(P_1) > 0$.

El siguiente paso consiste en probar que la bola de radio r centrada en P_1 está contenida en $\mathcal{P}(\bar{v}_r)$, y por tanto que es la bola interior a la frontera de \bar{v}_r mencionada en el enunciado del lema.

Como $P_1 \in \partial\mathcal{P}(u)$, por definición existe una sucesión de puntos $P_{1_n} \rightarrow P_1$, tales que $u(P_{1_n}) > 0$. Sea P' un punto que dista de P_1 menos que r , $d(P', P_1) < r$; es decir, $P' \in \mathcal{B}_r(P_1)$. Además, existe n suficientemente grande tal que $d(P_{1_n}, P') < r$.

Finalmente, como

$$\bar{v}_r(P') = \sup_{\mathcal{B}_r(P')} u(P) \geq u(P_{1_n}) > 0$$

concluimos que P' pertenece al conjunto de positividad de \bar{v}_r y por tanto, al ser P' arbitrario, la bola $\mathcal{B}_r(P_1)$ está contenida en el conjunto de positividad de \bar{v}_r .

La segunda afirmación que se enuncia en el lema se demuestra de manera similar. \square

Lema 7.11 *En los puntos de la frontera del soporte de u donde están centradas las bolas del Lema 7.10 se cumple el enunciado complementario: hay una bola exterior en el primer caso y una bola interior en el segundo.*

Demostración. Veamos cómo demostrar la primera parte del lema. La segunda afirmación se prueba de forma análoga.

Queremos ver que en todo punto P_1 de la frontera de u que sea el centro de una bola interior de radio r para la frontera del conjunto de positividad de \bar{v}_r , hay una bola exterior de radio r para el soporte de u .

Sea P_1 un punto de la frontera de u y P_0 el punto de la frontera de \bar{v}_r considerado en la demostración del Lema 7.10. Se cumple entonces que $d(P_1, P_0) = r$ y además $\text{sop}(u) \cap \mathcal{B}_r(P_0) = \emptyset$. Si no fuese así, $\bar{v}_r(P_0) > 0$, que es una contradicción con el

hecho de que P_0 esté en la frontera de \bar{v}_r . Por tanto la bola $\mathcal{B}_r(P_0)$ es una bola exterior para el soporte de u . \square

En el posterior desarrollo de la teoría de soluciones de viscosidad no será suficiente la construcción de supersolución dada por (7.3). Necesitaremos hacer una ligera modificación y considerar el ínfimo sobre bolas cuyo radio disminuye según pasa el tiempo. Definimos por tanto \underline{v}_r como

$$\underline{v}_{r,\delta}(x, t) = \inf_{\bar{B}_{r-\delta t}(x, t)} u(y, \tau).$$

Si $\delta > 0$, la función $\underline{v}_{r,\delta}$ sigue siendo una supersolución de viscosidad y el Lema 7.9 es cierto siempre que $\delta t < r$. El argumento es similar al hecho en la demostración de este lema: dado un punto P_0 hay un punto P_1 a distancia (en espacio-tiempo) menor o igual que $r_0 = r - \delta t_0$, en el cual

$$\underline{v}_{r,\delta}(P_0) = u(P_1).$$

Podemos definir de nuevo la trasladada $u_h(P) = u(P + h)$ con $h = P_0 - P_1$ para obtener que $\underline{v}_{r,\delta}(P_0) = u_h(P_0)$. Sea Ω un entorno parabólico de P_0 . Entonces, para un punto $P \in \Omega$ se tiene que $t \leq t_0$, de forma que $d(P + h, P) \leq r_0 \leq r$, y por tanto

$$u_h(P) = u(P + h) \geq \underline{v}_{r,\delta}(P).$$

Concluimos así que, como u_h es una supersolución de viscosidad, $\underline{v}_{r,\delta}$ también tiene que serlo.

También se puede demostrar fácilmente el Lema 7.11 para esta nueva supersolución: dado un punto $P_0 = (x_0, t_0)$ de la frontera libre de $\underline{v}_{r,\delta}$, podemos demostrar que la bola de radio $r_0 = r - \delta t_0$ centrada en P_0 es una bola interior para el conjunto de positividad de u con tangencia en un punto P_1 .

Sin embargo, la propiedad de bola exterior para el soporte de $\underline{v}_{r,\delta}$, Lema 7.11, no es inmediata, ya que el radio de la bola sobre la cual se toma el ínfimo cambia con el tiempo.

Lema 7.12 *Dados los puntos $P_0 = (x_0, t_0)$ y $P_1 = (x_1, t_1)$ definidos anteriormente, el conjunto de puntos para los cuales podemos asegurar que $\underline{v}_{r,\delta}$ es igual a 0, incluye la region delimitada por el elipsoide*

$$S = \{(x, t) : (x - x_1)^2 + (t - t_1)^2 = (r - \delta t)^2\}$$

que pasa por P_0 . En consecuencia, existe una bola exterior para $\text{sop}(\underline{v}_{r,\delta})$ en P_0 , pero con un radio menor que r_0 .

Observación 7.1 Dados los puntos P_0 y P_1 , el hiperplano H tangente a la superficie S en P_0 depende de δ . De hecho, siempre tiene la misma proyección sobre el plano $t = t_0$: una esfera N -dimensional de radio $|x_0 - x_1| = r_0 \cos \beta$, donde β denota el ángulo formado por el vector P_1P_0 con el hiperplano espacial dado por $t = \text{constante}$.

Sin embargo, la componente temporal de la normal unitaria a H en \mathbb{R}^{N+1} viene dada por $\mathbf{n}_{N+1}(P_0) = \sin(\theta_\delta)$, donde

$$\tan(\theta_\delta) = \frac{\sin \beta + \delta}{\cos \beta}, \quad (7.4)$$

que crece cuando δ crece.

Nótese que $\tan(\theta_\delta)$ es precisamente la velocidad a la que la proyección espacial avanza con el tiempo.

Teoremas principales de la teoría de soluciones de viscosidad

En este capítulo demostramos los teoremas fundamentales de la teoría de soluciones de viscosidad para ecuaciones cuasilineales parabólicas no degeneradas: unicidad, comparación y dependencia continua de los datos iniciales. Para ello veremos primero que soluciones de viscosidad con datos iniciales estrictamente separados están ordenadas en tiempos posteriores. Gracias a este resultado podremos construir soluciones minimales que, junto con las maximales, nos permitirán demostrar la unicidad. Después de probar los teoremas de comparación y de dependencia continua para soluciones de viscosidad, estableceremos definiciones equivalentes a la de supersolución de viscosidad. Esto nos ayudará a completar algunos de los resultados enunciados en el Capítulo 6.

Contenido

8.1. Preliminares	176
8.2. Comparación de soluciones de viscosidad estrictamente separadas	177
8.3. Existencia de la solución de viscosidad minimal.	187
8.4. Unicidad general, comparación de soluciones y dependencia continua. . .	190
8.5. Definiciones	194

8.1 Preliminares

Una vez establecidas las bases de la teoría de viscosidad para ecuaciones parabólicas cuasilineales degeneradas, capítulos 6 y 7, nos enfrentamos a demostrar uno de los teoremas fundamentales de esta parte de la memoria, el Teorema 8.1. Veremos a lo largo de este capítulo que el problema que estamos estudiando,

$$u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2, \quad (x, t) \in Q \quad (8.1)$$

con dato inicial continuo, acotado y no negativo

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (8.2)$$

está bien puesto en la clase de las funciones continuas: existe una única solución que depende continuamente de los datos. Además, se demuestra el teorema de comparación de soluciones.

Como ya dijimos en la Introducción de esta parte de la Memoria, el hecho de que las hipótesis sobre a sean muy generales, véase la Página 138, introduce ciertas dificultades adicionales en el estudio de las soluciones de viscosidad de este problema: no se pueden utilizar las soluciones clásicas de frontera libre para comparar, ya que éstas no tienen por qué existir. Además, como vimos en el Capítulo 6, la transformación densidad-presión no es inmediata.

Teorema 8.1 *Bajo las hipótesis (H1) y (H2) el problema (8.1)–(8.2) está bien puesto en la clase de soluciones de viscosidad acotadas, continuas y no negativas. Es más, la solución de viscosidad coincide con la transformada de la solución débil continua de la ecuación de filtración asociada,*

$$\rho_t = \Delta\Phi(\rho).$$

El Principio del Máximo se puede aplicar a las soluciones de viscosidad.

Para demostrar el teorema empezaremos viendo que las soluciones de viscosidad estrictamente separadas se pueden comparar. Gracias a este resultado podremos construir las soluciones de viscosidad minimales, que junto con las soluciones maximales y la transformación densidad-presión, nos permitirán demostrar la unicidad y el teorema de comparación de soluciones de viscosidad. Finalmente demostraremos la dependencia continua de los datos.

8.2 Comparación de soluciones de viscosidad estrictamente separadas

Si una subsolución de viscosidad y una supersolución de viscosidad poseen datos iniciales estrictamente separados, entonces están ordenadas en tiempos posteriores. Para probar este resultado, enunciado con precisión en el siguiente teorema, utilizamos las construcciones de supremos e ínfimos descritas en el Capítulo 7. En particular, usaremos las construcciones geométricas demostradas en los lemas 7.10 y 7.11, ya que necesitaremos hacer un análisis geométrico detallado, inspirado en [25], de los posibles puntos de contacto entre las soluciones.

Teorema 8.2 *Sea u una subsolución de viscosidad y v una supersolución de viscosidad de (8.1). Supongamos que los datos iniciales u_0 y v_0 están estrictamente separados, $u_0 \prec v_0$ si $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces u y v permanecen ordenadas para todo tiempo*

$$u(x, t) \leq v(x, t), \quad (x, t) \in Q = \mathbb{R}^N \times (0, \infty).$$

Demostración. Desglosamos la demostración en 5 pasos.

PASO 1 SUPREMOS E ÍNFIMOS. Sea $\delta > 0$ y $r > 0$ pequeño, tal que $r \gg \delta$. Basándonos en las construcciones hechas en el Capítulo 7, introducimos las siguientes funciones

$$W(x, t) = \inf_{\bar{B}_{r-\delta t}(x, t)} v(y, \tau),$$

definida en $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (t', T)$, con $t' = \frac{r}{1+\delta}$ y $T = \frac{r}{\delta}$, y

$$Z(x, t) = \sup_{\bar{B}_r(x, t)} u(y, \tau),$$

definida en $\mathbb{R}^N \times (r, T)$. Si δ y r son pequeños y $t \leq \frac{r}{\delta}$, se verifica que:

- W es una supersolución de viscosidad y Z es una subsolución de viscosidad de (8.1) en $Q_T = \mathbb{R}^N \times (r, T)$;
- $Z(\cdot, r) \prec W(\cdot, r)$.

La primera de estas dos afirmaciones quedó demostrada en la Sección 7.3 del Capítulo 7. La segunda es consecuencia de la separación estricta de los datos y de la Proposición 7.7, que asegura que el soporte de u no se puede expandir de forma discontinua en $t = 0$. En efecto, si el soporte de u no se expande de forma discontinua en $t = 0$, en un tiempo pequeño $t = r > 0$, seguirá verificándose que

$$u(\cdot, r) \prec v(\cdot, r), \quad 0 \leq t \leq r.$$

Gracias a la continuidad de las soluciones y a la construcción de Z y W , tenemos que, si r es pequeño,

$$Z(\cdot, r) \prec W(\cdot, r).$$

La idea de la demostración del teorema es la siguiente: probar que W está por encima de Z para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $r < t < T$ y para toda elección de r y δ suficientemente pequeños. Entonces, haciendo tender primero $\delta \rightarrow 0$ y luego $r \rightarrow 0$, concluimos que $u \leq v$.

Supongamos por tanto que existe un primer punto en el que W y Z se tocan e intentemos llegar a una contradicción.

PASO 2 CONTACTO INTERIOR. Veamos en primer lugar que el posible punto de contacto, P_0 , entre W y Z no puede estar en el interior.

Supongamos entonces que en dicho punto Z es positiva, lo que implica que W también lo es, $Z(P_0) = W(P_0) > 0$. Entonces, ambas funciones son positivas en un entorno parabólico de P_0 , digamos Ω . Además, están separadas en la frontera de Ω .

En esta situación podemos encontrar dos soluciones clásicas positivas, z y w , definidas en $\partial\Omega$ como $z = Z + \varepsilon_1$ y $w = W - \varepsilon_2$, con ε_1 y ε_2 tales que $z < w$ en $\partial\Omega$. Aplicando el Principio Fuerte del Máximo para soluciones clásicas a z y w , obtenemos que $z(P_0) < w(P_0)$. Por otro lado, el Lema 6.5, junto con el hecho de que $Z < z$ en $\partial\Omega$, implica que $Z(x, t) \leq z(x, t)$ en Ω . De forma análoga, gracias al Lema 6.6 tenemos que $w(x, t) \leq W(x, t)$ en Ω .

Resumiendo,

$$Z(P_0) \leq z(P_0) < w(P_0) \leq W(P_0),$$

de donde concluimos que W no puede tocar a Z por arriba en un punto en el que ambas funciones son positivas.

PASO 3 CONTACTO EN LA FRONTERA LIBRE. Una vez demostrado que el punto de contacto entre W y Z no puede estar en el interior, veamos que tampoco puede estar en la frontera.

Supongamos que el primer punto, $P_0 = (A_0, t_0)$, en el que Z y W se tocan está situado en la frontera libre (es decir, en la frontera del conjunto de positividad). El objetivo del resto de esta demostración es ver que, si $r < t_0 < T$, tal punto no puede existir.

Si P_0 es un punto de la frontera libre de Z , se cumple que $Z(P_0) = W(P_0) = 0$. Según vimos en el Capítulo 7, el soporte de Z tiene una bola interior de radio r , mientras que el soporte de W tiene una bola exterior de radio $r' < r - \delta t_0$.

Por otro lado, como el primer punto de contacto entre los soportes de ambas funciones ocurre en t_0 , para todo tiempo anterior, $t < t_0$, el soporte de Z tiene que estar incluido en el soporte de W . Esto significa que las dos bolas antes mencionadas son disjuntas para $t < t_0$. En P_0 pueden ser tangentes o no. Es decir, los hiperplanos tangentes en P_0 pueden ser iguales o distintos en función de la tangencia de las bolas. No obstante, en cualquiera de las dos situaciones, los hiperplanos tangentes tienen una proyección espacial común y tienen que estar ordenados en tiempo de forma que se cumpla la inclusión de los soportes.

Existe un punto $P_1 = (A_1, t_1)$ de la frontera libre de u a distancia r de P_0 . Esto se comprueba fácilmente recordando la definición de Z como un supremo: existe una bola de radio r centrada en P_0 en la que $u = 0$. A distancia $r + \varepsilon$ de P_0 y cerca del punto P_1 , la función u tiene que ser positiva en algún sitio. Si no fuese así, y u fuese 0 en esa región, P_0 no podría estar en la frontera de Z .

También sabemos, gracias a la definición de W , que existe otro punto, digamos $P_2 = (A_2, t_2)$, situado en la frontera libre de v y que dista $r_0 = r - \delta t_0$ de P_0 .

Como hemos dicho anteriormente, para $\delta > 0$, el hiperplano que acota la bola exterior de la frontera libre de W en P_0 no puede ser perpendicular a la línea que une P_0 con P_2 . Por tanto los puntos P_1 , P_0 y P_2 no están alineados. Sin embargo, las proyecciones espaciales de los hiperplanos en t_0 tienen que coincidir, lo que implica que las proyecciones espaciales de P_1 , P_0 y P_2 sí que están alineadas.

Antes de continuar con la demostración del Teorema 8.2, demostremos primero un lema que determina la posición del hiperplano tangente a la frontera libre de Z en P_0 .

Lema 8.3 *Sea H un hiperplano definido en espacio-tiempo tangente a la frontera libre de Z en P_0 . Entonces H no es ni vertical ni horizontal.*

Demostración. La prueba de este lema consta de dos partes: primero veremos que H no puede ser vertical y luego que no es horizontal.

Para ver que el hiperplano H no es vertical, usamos en primer lugar la definición de W como el ínfimo de v tomado en bolas de la forma $\mathcal{B}_{r-\delta t}(x, t)$. En esta situación podemos afirmar que la diferencia entre las velocidades de propagación de los soportes de W y v es δ : las bolas $\mathcal{B}_{r-\delta t}(x, t)$ disminuyen según pasa el tiempo. Así, en tiempo t tienen radio $r - \delta t$, mientras que en una unidad de tiempo posterior su radio es $r - \delta(t + 1)$. Restando estas dos expresiones obtenemos la diferencia δ entre las velocidades de propagación de los soportes.

Por otro lado, la Proposición 7.7 implica que el soporte de v no se contrae y por tanto, tampoco lo hacen ni el soporte de Z y ni el de W . En consecuencia, podemos asegurar que Z y W se mueven hacia delante con una velocidad mayor o igual que δ en P_0 . De esta forma hemos conseguido descartar la posibilidad de que haya un hiperplano tangente vertical a los soportes de Z y W en P_0 .

La demostración de que el hiperplano H tampoco puede ser horizontal se basa en un argumento de cambio de escala y en la comparación con ondas viajeras.

Supongamos que existe un hiperplano tangente horizontal en P_0 . Mediante una traslación en los ejes podemos suponer que $P_0 = (0, -r)$ y $P_1 = (0, 0)$. El hiperplano horizontal tangente al soporte de Z en P_0 es entonces de la forma $t = -r$ y además la bola exterior al soporte de u en P_1 tiene tangencia horizontal. Por continuidad, para todo $\delta > 0$ pequeño, existe un cilindro

$$C_\lambda = \{(x, t) : |x| \leq \lambda, -\lambda^2 \leq t \leq 0\}$$

en el que $u \leq \delta$.

El siguiente paso consiste en definir en el cilindro C_1 , mediante un cambio de escala de la función u , una nueva subsolución, u_λ , del problema (8.1):

$$u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Obsérvese que esta función vale cero en la base del cilindro C_1 , es decir en $t = -1$, y además es menor que δ en la frontera lateral.

Finalmente, si δ es muy pequeño, la frontera libre de u no puede llegar a $x = 0$ en $t = 0$. Esto produce una contradicción con la propiedad de propagación finita. Para comprobar este hecho, basta con construir una supersolución con simetría radial, que se mueva desde la frontera hacia el interior muy lentamente,

$$u_1(r, t) = A(r + ct - 1 + \varepsilon)_+,$$

con $A \geq \frac{\varepsilon}{\delta}$ y c y ε pequeños. Comparando u y u_1 en C_1 concluimos que $P_1 = (0, 0)$ no puede ser un punto de la frontera libre de u , lo que va contra su definición. \square

Demostración del Teorema 8.2 (continuación).

PASO 4 COMPORTAMIENTO LINEAL DE LA FRONTERA. Antes de establecer el comportamiento lineal de la frontera libre de Z , fijemos una nueva notación.

Por comodidad trasladamos los ejes, de forma que P_0 se convierta en el punto $(0, t_0)$ y elegimos las coordenadas espaciales para que la dirección positiva del eje x_1 apunte en la dirección del vector $\overline{A_0A_1}$, que es la proyección espacial de $\overline{P_0P_1}$. Supongamos también que $x = (x_1, x')$, con $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Sea H el hiperplano tangente a la bola interior de Z en P_0 .

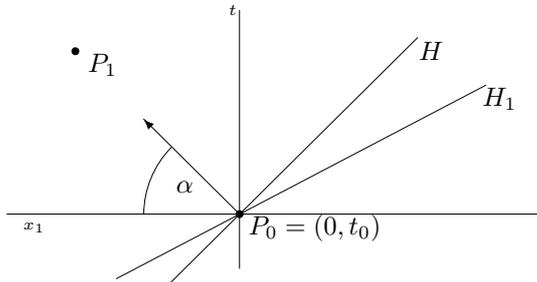


Figura 8.1: Disposición de los puntos

El vector normal interior a H en P_0 lo denotamos por (\mathbf{e}_1, m) , siendo $m = \tan \alpha$ para algún ángulo α entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. En esta situación, m es la velocidad de avance de la frontera libre de Z y $P_1 = (d_1, 0, t_0 + r \sin \alpha)$, con $d_1 = r \cos \alpha$, es un punto de la frontera libre de u . La velocidad de avance de H_1 , el hiperplano tangente a W en P_0 , es menor o igual que

m . Esta velocidad queda determinada por el ángulo, β , formado por $\overline{P_0P_2}$ y su proyección espacial, según la fórmula (7.4). En cualquier caso, $\beta < \alpha$.

Lema 8.4 *Se tiene la siguiente estimación no tangencial cerca del punto P_0*

$$Z(x, t_0) > m(1 - \varepsilon)(x_1)_+, \tag{8.3}$$

y cuando $x_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ en un cono no tangencial.

Observación 8.1 Un cono espacial no tangencial en 0 es un cono K definido en \mathbb{R}^N , con vértice en cero, eje \mathbf{e}_1 y abertura menor que $\frac{\pi}{2}$.

Demostración. La demostración del Lema 8.4 se basa en un argumento de contradicción.

Supongamos entonces que la desigualdad (8.3) no es cierta y que, por tanto, para una sucesión de puntos $A_n = (x_{1_n}, x'_n)$ que converge a $0 \in \mathbb{R}^N$ y que está en un cono no tangencial K en 0 existe $\varepsilon > 0$ fijo tal que

$$Z(Q_n) \leq m(1 - \varepsilon)(x_{1_n})_+, \tag{8.4}$$

siendo $Q_n = (A_n, t_0)$.

De la condición (8.4) y de la definición de Z como un supremo concluimos que la función u tiene que ser menor o igual que $\mu_n = m(1 - \varepsilon)x_{1_n}$ en una bola $\mathcal{B}_r(Q_n)$ centrada en Q_n . Además, u se anula en otra bola del mismo radio, pero centrada en $P_0 = (0, t_0)$, véase la Figura 8.2.

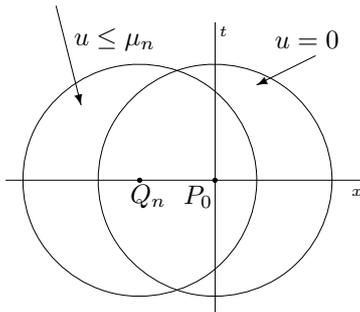


Figura 8.2: Valores de la función u .

El siguiente paso consiste en extender la region en la que u se anula. Por un lado sabemos que v se anula en el punto P_2 , ya que éste está situado en su frontera libre. Además, P_2 dista $r - \delta t_0$ de P_0 en la dirección del vector $-(\mathbf{e}_1, \tan \beta)$. De la definición de W como un ínfimo se sigue que, para $t = t_0$, W vale cero en la bola espacial \mathcal{B}' de radio $0 < d_2 < r - \delta t_0$ centrada en el punto $Q' = -d_2 \mathbf{e}_1$. En efecto,

cualquier bola de radio $r - \delta t_0$ centrada en un punto P' de \mathcal{B}' tiene que incluir al punto P_2 y además el ínfimo de v en esa bola tiene que ser 0. Por tanto, W se tiene que anular en P' . Como, por otro lado, $Z \leq W$ en $t = t_0$, Z también se anula en P' . De nuevo, por la definición de Z como el supremo de u en bolas de radio r , concluimos que u se anula en el conjunto Σ formado por la unión de las bolas espacio-temporales de radio r centradas en \mathcal{B}' .

Nos enfrentamos ahora al punto crucial de la demostración de este lema: definir el conjunto L_λ , donde analizaremos el comportamiento de u . Concluiremos entonces que u se anula en un entorno del punto P_1 , llegando así a una contradicción.

Para $x_{1_n} = \lambda > 0$ pequeño, consideramos el conjunto espacio-temporal $L = L_\lambda$, en el que se tiene $u \leq \mu_\lambda = m(1 - \varepsilon)\lambda$. Describimos la estructura del conjunto detallando las partes que componen su frontera.

Por un lado tenemos las “tapas”, que pertenecen a los hiperplanos $t = t_1 - \tau$ y $t = t_1$. También hay una parte de la frontera, cercana al origen, formada por porciones de la frontera de Σ que contienen al punto P_1 . Esto corresponde a una superficie cóncava en la que $u = 0$. Por último, en el lado opuesto, la frontera está formada por parte de la frontera de la bola $\mathcal{B}_r(Q_n)$, la esfera $S_r(Q_n)$, donde sabemos, por el análisis hecho previamente, que $u \leq \mu_\lambda$.

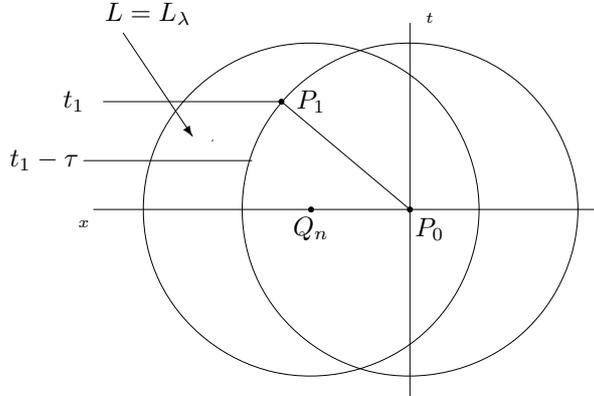


Figura 8.3: El conjunto L_λ en espacio-tiempo.

Cuando λ tiende a 0, el conjunto L_λ adopta, alrededor de P_1 , la forma de una cuña de profundidad λ y ancho $\mathcal{O}(\sqrt{\lambda})$. En efecto, asintóticamente, alrededor de P_1 , esta cuña es como la región entre dos planos paralelos que avanzan a velocidad $m > 0$. De esta afirmación se concluye la profundidad λ . Además, los planos están curvados en tiempo y hacia el origen espacial, lo que complica el estudio, pero finalmente se deduce la estimación $\mathcal{O}(\sqrt{\lambda})$.

Una vez descrito L_λ , analizamos u como solución de (8.1) en este conjunto. Veamos que si se cumple la condición (8.4), para x_{1_n} suficientemente pequeño, entonces u se tiene que anular en un entorno de P_1 , llegando así a una contradicción. La prueba concluye por comparación de u con una supersolución de la forma

$$\tilde{u}(x, t) = A(|x| + ct - b)_+,$$

con parámetros A , b y c todavía por determinar.

Para facilitar la exposición, desplazamos el eje t de forma que $t_1 = t_0 + r \operatorname{sen} \alpha$ se transforme en el $t_1 = 0$ y el punto P_1 en $(d_1, 0, 0)$. Elegimos la velocidad c y la pendiente A de la onda viajera esférica \tilde{u} próximas a m

$$c = m \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right), \quad A = m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right), \quad (8.5)$$

y tal que

$$\frac{c}{A} > 1.$$

Además, escogemos $b = d_1 + \lambda\varepsilon > d_1$, lo que asegura que en $t = 0$ la función \tilde{u} se anula tanto en P_1 ,

$$\tilde{u}(P_1) = \tilde{u}(d_1, 0, 0) = A(d_1 - b)_+ = m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) (d_1 - d_1 - \lambda\varepsilon)_+ = 0,$$

como en un entorno de este mismo punto.

Dado el dominio $\mathcal{R} = \{|x| < R, -\tau < t < 0\}$, con $R > d_1$ y τ pequeño, gracias al Lema 6.14, sabemos que, si b está próximo a R y es tal que

$$b < R, \quad \frac{R - b}{R} \ll \varepsilon,$$

entonces \tilde{u} es una supersolución de (8.1) en \mathcal{R} . De hecho, eligiendo A y c según (8.5) se cumple la condición (6.18) y por tanto \tilde{u} es una supersolución clásica de frontera libre en \mathcal{R} .

Como último paso de la demostración comparamos la función \tilde{u} con u en el conjunto $L_{\lambda, \tau} = L_\lambda \cap \{-\tau \leq t \leq 0\}$ para λ y τ mucho menores que ε . De hecho, fijamos ε pequeño, τ mucho menor y $6\lambda = m\varepsilon\tau$.

Empecemos la comparación en la parte inferior de $L_{\lambda, \tau}$, donde $t = -\tau$. El hecho de que hayamos elegido los parámetros A , b y c de forma que $\tilde{u} \geq m(1 - \varepsilon)\lambda$ siempre que u sea positiva, implica automáticamente que $\tilde{u} \geq u$. Para probar esta afirmación obsérvese que $u = 0$ en una bola espacial $\mathcal{B}_{d(\tau)}(0)$ de radio

$$d(\tau) = d_1 + m\tau + \mathcal{O}(\tau^2).$$

Por tanto, $\tilde{u} \geq u$ en $t = -\tau$ si

$$\tilde{u} = m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(|x| - m \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \tau - b\right)_+ \geq m(1 - \varepsilon)\lambda,$$

lo cual es cierto bajo nuestras hipótesis. En efecto, basta con sustituir b por su valor, $b = d_1 + \lambda\varepsilon$, y tener en cuenta que $6\lambda = m\varepsilon\tau$. Así,

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\geq m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(d_1 + m\tau + \mathcal{O}(\tau^2) - m\tau + \frac{m\varepsilon\tau}{3} - d_1 - \lambda\varepsilon\right)_+ \\ &\geq m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) (2\lambda - \lambda\varepsilon)_+ \geq m(1 - \varepsilon)\lambda = u. \end{aligned}$$

En la frontera interior de $L_{\lambda,\tau}$ la comparación resulta ser más sencilla, ya que $u = 0 \leq \tilde{u}$.

Finalmente, para analizar el comportamiento de u en la frontera exterior de $L_{\lambda,\tau}$, observamos que ésta está formada por puntos (x_1, x', t) de la esfera $S_r(Q_n)$, dados por

$$|x_1 - \lambda|^2 + |x' - k\lambda|^2 + (t + r \operatorname{sen} \alpha)^2 = r^2.$$

Dado que estamos trabajando en un cono no tangencial, se puede acotar k independientemente de λ . Por tanto

$$\begin{aligned} |x|^2 &= x_1^2 + (x')^2 \\ &= 2x_1\lambda + 2x'k\lambda - \lambda^2(1 + k^2) - t^2 - 2tr \operatorname{sen} \alpha + r^2(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \quad (8.6) \\ &= 2x_1\lambda + 2x'k\lambda - \lambda^2(1 + k^2) - t^2 - 2tr \operatorname{sen} \alpha + d_1^2. \end{aligned}$$

En esta parte de la frontera, se cumple en una primera aproximación que

$$x_1 \approx d_1 = r \cos \alpha,$$

además de la cota

$$x' = \mathcal{O}(\sqrt{\lambda}).$$

Así, si $t \in (-\tau, 0)$ y despreciando los términos de orden superior en λ , y por tanto en t , obtenemos que

$$|x| \approx d_1 + \lambda + m(-t).$$

Este hecho se comprueba fácilmente comparando esta última expresión con (8.6), suprimiendo los términos de orden superior y recordando que $r \operatorname{sen} \alpha = d_1 m$. Obtenemos por tanto que \tilde{u} es mayor que u si

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\approx m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(d_1 + \lambda + m(-t) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) mt - d_1 - \lambda\varepsilon\right)_+ \\ &= m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{3} mt - \lambda\varepsilon\right)_+ = m \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \left(\lambda(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{3} m|t|\right)_+ \\ &\geq m(1 - \varepsilon)\lambda. \end{aligned}$$

Concluimos que $u \leq \tilde{u}$ en la frontera parabólica de $L_{\lambda,\tau}$, y por tanto $u \leq \tilde{u}$ en $L_{\lambda,\tau}$. Esto implica que u se anula en un entorno de P_1 , contradicción a la que deseábamos llegar. De esta forma queda demostrada la desigualdad (8.3). \square

Demostración del Teorema 8.2 (continuación).

PASO 5 CONCLUSIÓN. Gracias a la estimación (8.3), que determina que el comportamiento de la frontera libre de Z cerca del punto P_0 es lineal, podemos describir el movimiento de las fronteras libres. En estas condiciones colocamos una subsolución de tipo Barenblatt, B , por debajo de Z en t_0 , de forma que casi toque a P_0 y tenga velocidad m , como el hiperplano H . Además elegimos B para que cruce al mismo hiperplano cuando avanza con una velocidad menor $m' < m$, después de un corto intervalo de tiempo. De forma más precisa: podemos asegurar que para un intervalo de tiempo pequeño, $t_0 + \tau_1 \leq t \leq t_0 + \tau_2$, el soporte de B cubre a la bola espacial centrada en P_0 y de radio $m'(t - t_0)$. Obsérvese que acercando B a P_0 podemos elegir τ_1 y τ_2 tan pequeños como sea necesario.

El siguiente paso consiste en traspasar esta información a v . Como Z está por debajo de W en t_0 , la función Barenblatt B también lo está. Por tanto, por la definición de W como el ínfimo de v en bolas de radio $r - \delta t$, se puede colocar una copia de B debajo de v . Para ello sólo hace falta desplazar B una distancia menor o igual que $r_0 = r - \delta t_0$ en espacio-tiempo. Como v es una supersolución de viscosidad, la propiedad de comparación con subsoluciones clásicas de frontera libre asegura que B tiene que permanecer por debajo de v en tiempos posteriores. Además, como el soporte de B se mueve a lo sumo con velocidad m en el intervalo de tiempo que estamos considerando, concluimos que el soporte de v crece hasta distar al menos m' veces incremento de tiempo de todos los puntos situados a distancia menor que r_0 de P_0 .

De lo expuesto en el párrafo anterior deducimos que el soporte de W se expande al menos con velocidad $m' + \delta$. Como δ es arbitrario (recuérdese que se tomó pequeño en la Página 177), podemos elegirlo de forma que $m' + \delta > m$, lo que es una contradicción con el hecho de que exista un hiperplano tangente H_1 a W en P_0 cuya velocidad de avance sea menor o igual que m (véase Figura 8.1).

Gracias a esta última contradicción deducimos que no puede haber ningún punto de contacto entre Z y W , lo que concluye la prueba del Teorema 8.2. \square

8.3 Existencia de la solución de viscosidad minimal.

Gracias al Teorema 8.2 demostrado en la sección anterior y a la existencia de la solución de viscosidad maximal (véase el Capítulo 7) podemos construir un nuevo tipo de soluciones de viscosidad: las soluciones minimales.

Para llevar a cabo esta construcción consideramos el límite de soluciones maximales en el siguiente sentido: sea u_0 un dato inicial general para (6.1)–(6.2), y \bar{u} la solución de viscosidad maximal asociada a este problema. Consideremos también una sucesión $\{u_{0,n}\}$ de datos iniciales para la misma ecuación (6.1) y tal que

$$u_{0,1} \prec u_{0,2} \prec \dots \prec u_{0,n} \prec \dots \prec u_0. \quad (8.7)$$

Nótese que cada uno de los problemas definido con uno de estos datos iniciales,

$$\begin{cases} u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2, \\ u(x, 0) = u_{0,n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8.8)$$

tiene una solución de viscosidad maximal asociada, digamos \bar{u}_n . Gracias al Teorema 8.2, se tiene entonces que

$$\bar{u}_1 \leq \bar{u}_2 \leq \dots \leq \bar{u}_n \leq \dots \leq \bar{u}.$$

Pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$ definimos

$$\underline{u}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n \leq \bar{u}. \quad (8.9)$$

Proposición 8.5 *Sea $\{u_{0,n}\}$ una sucesión de datos iniciales para (8.8) definida por (8.7). Si $u_{0,n} \nearrow u_0$ cuando n tiende a infinito, entonces \underline{u} es la solución de viscosidad minimal de (6.1)–(6.2).*

Demostración. Como primer paso obsérvese que la continuidad del límite (8.9) se obtiene utilizando el mismo argumento de regularidad que en la Proposición 7.1. Por otro lado, debido a la continuidad del límite y a la monotonía de la sucesión $\{u_{0,n}\}$, la convergencia de $u_{0,n}$ a u_0 es localmente uniforme. Además, los soportes de $u_{0,n}$ también convergen; es decir, $\text{sop}(u_{0,n}) \rightarrow \text{sop } u_0$, en el sentido de la distancia entre conjuntos.

Para probar que \underline{u} es una solución de viscosidad se usa un razonamiento similar al que se utilizó para demostrar que el límite de soluciones clásicas es una solución de viscosidad (Proposición 7.1). Sólo detallaremos aquí cómo comprobar el segundo punto de la definición de supersolución de viscosidad, por ser ésta la parte más delicada.

Sea v una subsolución clásica de frontera libre tal que $v(x, 0) \prec u_0(x)$. Gracias a la convergencia de los soportes y a la de los datos iniciales, para n suficientemente grande podemos encontrar un dato inicial $u_{0,n}$ de forma que

$$v(x, 0) \prec u_{0,n}(x) \prec u_0(x).$$

Como además $u_{0,n}$ es el dato inicial del problema con solución maximal de viscosidad \bar{u}_n , tenemos que

$$v(x, t) \leq \bar{u}_n(x, t).$$

Finalmente, por la construcción de \underline{u} como el límite de soluciones de viscosidad maximales, obtenemos

$$v(x, t) \leq \underline{u}(x, t).$$

Veamos por último que \underline{u} es minimal. Sea \tilde{u} otra solución de viscosidad del problema (6.1) con en mismo dato inicial u_0 . Como por hipótesis $u_{0,n} \prec u_0$, podemos utilizar el Teorema 8.2 para concluir que la solución maximal asociada al problema con dato $u_{0,n}$ verifica $\bar{u}_n \leq \tilde{u}$. Pasando al límite en esta última expresión obtenemos finalmente que

$$\underline{u} \leq \tilde{u},$$

lo que implica que \underline{u} es solución de viscosidad minimal de (6.1)–(6.2). \square

Observación 8.2 La existencia de las soluciones de viscosidad maximal y minimal ha sido obtenida para datos acotados y continuos generales. Esto supondrá una simplificación para demostrar el resultado de unicidad: todas las posibles soluciones del problema (6.1)–(6.2) están encajonadas entre la maximal y la minimal.

Observación 8.3 Ambas soluciones comparten la propiedad de construirse como el límite, localmente uniforme, de soluciones regulares.

Observación 8.4 El mismo argumento usado en la Proposición 7.5 se aplica para ver que la solución minimal es la transformada de una solución débil del problema de filtración asociado.

En la siguiente sección demostraremos un resultado de unicidad general, Teorema 8.7. No obstante, en las condiciones actuales, tenemos las herramientas necesarias para enunciar otro resultado, menos general, pero cuya demostración, que se basa en el Teorema 8.2 para soluciones estrictamente separadas, es más directa, ya que no requiere utilizar la transformación densidad-presión.

Proposición 8.6 *Sea u una solución de viscosidad tal que $u_0 \in C^2$ en la clausura de su conjunto de positividad, Ω_0 , y $|\nabla u_0| \neq 0$ cerca de un punto $x_0 \in \Gamma_0 = \partial\Omega_0$. Entonces, la solución de viscosidad de (6.1) es única y coincide con la solución débil del problema de filtración asociado (6.6).*

Observación 8.5 Las hipótesis impuestas sobre u_0 coinciden con las del Lema 7.8, y por tanto la frontera libre de u se mueve inmediatamente.

Demostración. Sean \bar{u} y \underline{u} una solución de viscosidad maximal y una minimal, respectivamente, de (6.1). La idea de la demostración es ver que $\underline{u} \equiv \bar{u}$, lo que implica, dado que cualquier posible solución u verifica $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ (véase la Observación 8.2), la unicidad de soluciones.

Bajo las condiciones impuestas sobre el dato inicial u_0 , usamos la invarianza bajo cambios de escala de la ecuación para definir

$$u_\varepsilon(x, t) = (1 + \varepsilon)\underline{u}(x, (1 + \varepsilon)t).$$

La función u_ε es otra solución de viscosidad de (6.1) con dato inicial

$$u_{\varepsilon,0}(x) = u_\varepsilon(x, 0) = (1 + \varepsilon)u_0(x).$$

Obsérvese que el hecho de que $u_{\varepsilon,0}(x) > u_0(x)$ implica que la frontera libre de $u_{\varepsilon,0}$ también se tiene que mover inmediatamente, como lo hace la de u_0 . Concluimos así que, para algún $\tau(\varepsilon) > 0$ pequeño, las soluciones u_ε y \bar{u} están estrictamente separadas en el siguiente sentido

$$u_\varepsilon(x, \tau) > \bar{u}(x, 0), \quad \text{sop}(\bar{u}(\cdot, 0)) \subset \text{Int}(\text{sop}(u_\varepsilon(\cdot, \tau))). \quad (8.10)$$

Para comprobar esta afirmación basta elegir $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{sop}(\bar{u}(\cdot, 0)) \subset \text{Int}(\text{sop}(\underline{u}(\cdot, \tau'))),$$

para algún $\tau' > 0$ pequeño. Si ahora definimos

$$u_\varepsilon(x, \tau) = (1 + \varepsilon)\underline{u}(x, \tau') = (1 + \varepsilon)\underline{u}(x, (1 + \varepsilon)\tau)$$

concluimos (8.10).

Por último, del Teorema 8.2 se sigue que \bar{u} tiene que estar por debajo de u_ε para todo $t \geq \tau$ y todo $\varepsilon > 0$. En el límite, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos $\bar{u} \leq \underline{u}$, lo que implica la unicidad. \square

8.4 *Unicidad general, comparación de soluciones y dependencia continua.*

La unicidad de soluciones para el problema (6.1)–(6.2) enunciada en el Teorema 8.1 sólo se puede demostrar (hasta donde nosotros sabemos) utilizando la transformación \mathcal{T} definida en la Sección 6.3 del Capítulo 7 y un resultado de unicidad para el problema de filtración asociado.

Sean \bar{u} y \underline{u} una solución de viscosidad maximal y una minimal, respectivamente, de (6.1), con dato inicial, u_0 , no negativo, continuo y acotado. Al igual que en la prueba de la Proposición 8.6, el objetivo es demostrar que $\bar{u} \equiv \underline{u}$. Para ello utilizamos la transformación a la ecuación de filtración: tanto \bar{u} como \underline{u} tienen una solución débil de (6.6) asociada, $\bar{\rho}$ y $\underline{\rho}$, construidas gracias a la transformación densidad-presión en la Sección 6.3. Gracias a estas funciones demostramos la unicidad de soluciones de viscosidad.

Teorema 8.7 *Sean $\bar{\rho}$ y $\underline{\rho}$ dos soluciones débiles, no negativas, continuas y ordenadas de la ecuación de filtración (6.6), $\rho_t = \Delta\Phi(\rho)$, con el mismo dato inicial. Entonces si Φ es Lipschitz en el rango donde las soluciones están definidas, $\bar{\rho}$ y $\underline{\rho}$ son iguales.*

Demostración. Sea $\rho(x, t) = \bar{\rho}(x, t) - \underline{\rho}(x, t) \geq 0$. Como $\bar{\rho}$ y $\underline{\rho}$ tienen el mismo

dato inicial, $\rho(x, 0) = 0$. Consideremos

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x, t) \varphi(x) dx$$

para alguna función $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ regular, que definiremos más adelante. Integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{\rho} - \underline{\rho}) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\Phi(\bar{\rho}) - \Phi(\underline{\rho})) \varphi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Delta \varphi (\Phi(\bar{\rho}) - \Phi(\underline{\rho})) dx. \end{aligned}$$

En esta situación, si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\psi \geq 0$, elegimos φ como la solución de la ecuación

$$-\Delta \varphi + \varphi = \psi,$$

que existe, es única y además verifica $\varphi > 0$ y $\int \varphi dx = \int \psi dx$.

Usando ahora el hecho de que Φ es monótona y Lipschitz obtenemos

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\Phi(\bar{\rho}) - \Phi(\underline{\rho})) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\Phi(\bar{\rho}) - \Phi(\underline{\rho})) dx \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{\rho} - \underline{\rho}) \varphi dx \leq K \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi dx = KM(t), \end{aligned}$$

siendo K una cota superior de Φ' en el rango de $\bar{\rho}$ y $\underline{\rho}$. Nótese que, como $\psi \geq 0$, el término

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\Phi(\bar{\rho}) - \Phi(\underline{\rho})) dx$$

es negativo y por tanto se puede despreciar.

Finalmente, como $M(0) = 0$, la ecuación

$$M'(t) \leq KM(t)$$

implica que $M \equiv 0$. De esta forma concluimos la unicidad de soluciones de (6.6) y por tanto también la unicidad de soluciones de viscosidad. \square

Teorema 8.8 Sean u_1 y u_2 respectivamente una subsolución de viscosidad y una supersolución de viscosidad de (6.1), con datos iniciales $u_{0,1}$ y $u_{0,2}$, tales que

$$u_{0,1}(x) \leq u_{0,2}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Entonces u_1 y u_2 permanecen ordenadas en todo tiempo posterior,

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

Demostración. Sea u una solución de viscosidad de (6.1) con dato inicial u_0 , tal que

$$u_{0,1}(x) \leq u_0(x) \leq u_{0,2}.$$

Dividimos la prueba en dos pasos: primero veremos que la subsolución u_1 está por debajo de u y luego que u_2 está por encima de u .

Para ver que $u_1(x, t) \leq u(x, t)$ siempre que $u_{0,1}(x) \leq u_0(x)$ recordemos que para construir las soluciones maximales definimos una sucesión $\{u_\varepsilon\}$ de soluciones clásicas de (6.1) con dato inicial $u_{0,\varepsilon}(x) \geq u_0(x) + \varepsilon > u_0(x)$. Como demostramos en la Sección 7.1 del Capítulo 7 el límite, u , de esta sucesión es la solución de viscosidad maximal del problema y por tanto, según el Teorema 8.7, la única solución.

Por otro lado, una vez fijado $\varepsilon > 0$, utilizando la teoría de ecuaciones parabólicas cuasilineales, [84], podemos aproximar u_ε por arriba por una solución regular $\varphi = \varphi_{\varepsilon,\delta}$ de la ecuación

$$\varphi_t = a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 + \delta, \quad (8.11)$$

y con el mismo dato inicial $u_{0,\varepsilon}$. Además, cuando $\delta \rightarrow 0$, la función $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ converge a u_ε de forma monótona decreciente y localmente uniforme.

Supongamos ahora que φ toca a u_1 por arriba en un punto $P_1 = (x_1, t_1)$. Por la definición de subsolución de viscosidad (Definición 6.2), tenemos que

$$\varphi_t \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en P_1 , lo que contradice la fórmula (8.11). Concluimos por tanto que φ y u_1 no se pueden tocar y así $u_1 < \varphi = \varphi_{\varepsilon,\delta}$. Si hacemos tender primero δ a 0 y después ε , obtenemos finalmente que

$$u_1(x, t) \leq u(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

Para ver que $u \leq u_2$ utilizamos la definición de solución minimal. Dado u_0 , inspirados en la construcción hecha en la Sección 8.3, aproximamos u_0 por una sucesión de datos iniciales de (6.1), de forma que

$$v_{0,1} \prec v_{0,2} \prec \dots \prec v_{0,n} \prec \dots \prec u_0 \leq u_{0,2}.$$

Gracias al Teorema 8.2, sabemos que

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u_2. \quad (8.12)$$

También tenemos por otro lado que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u$, siendo u la solución minimal de (6.1) y por tanto única. Pasando al límite en la ecuación (8.12) obtenemos

$$u(x, t) \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

Queda así demostrado el teorema de comparación para soluciones de viscosidad con datos iniciales ordenados. \square

Teorema 8.9 *Sea u una solución de viscosidad y $\{u_n\}$ una sucesión de soluciones de viscosidad tal que la sucesión de sus datos iniciales $\{u_{0,n}\}$ está uniformemente acotada y converge localmente uniformemente al dato u_0 . Entonces u_n converge a u de forma localmente uniforme.*

Demostración. Una vez demostrado el Teorema 8.8, podemos reducir esta prueba al caso de sucesiones $\{u_n\}$ monótonas.

Consideremos datos iniciales $u_{0,n}$ con soporte compacto y tales que la sucesión $\{u_{0,n}\}$ converge a u_0 por abajo. Supongamos también que los datos iniciales, y por tanto las soluciones asociadas, están ordenados. De esta forma, como $\{u_n\}$ es una sucesión monótona y acotada tiene límite, el cual, debido a la convergencia de los datos iniciales, tiene que ser necesariamente la solución de viscosidad u .

Sea ahora $\{u_{0,n}\}$ una sucesión decreciente de datos iniciales positivos definidos por

$$u_{0,n} \geq u_0 + \frac{1}{n}$$

que converge a u_0 por arriba. Obsérvese que estos datos iniciales son estrictamente positivos, y por tanto no tienen soporte compacto. Sin embargo, la idea de la demostración es la misma que en el caso anterior. Como los datos están ordenados, las soluciones asociadas también tienen que estarlo. Por la convergencia de $u_{0,n}$ a u_0 concluimos que u_n tiene que converger a u . \square

8.5 Definiciones

En el Capítulo 6 dejamos algunos problemas, referentes a la equivalencia entre supersoluciones de viscosidad y supersoluciones clásicas, sin resolver. A continuación nos centraremos en estudiar la posibilidad de debilitar el concepto de supersolución de viscosidad para poder completar así estos resultados.

Definición 8.1 Una función continua y no negativa u definida en Q es una supersolución débil de viscosidad de (6.1) si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Toda función $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ que toca a u por abajo en un punto (x_0, t_0) con $u(x_0, t_0) > 0$ satisface

$$\varphi_t \geq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en (x_0, t_0) .

- (ii) Ninguna subsolución de tipo Barenblatt B que está estrictamente separada de u en un tiempo $t = t_1 \geq 0$, $v(x, t_1) \prec u(x, t_1)$, puede cruzar a u en un tiempo posterior. Es decir, $v(x, t) \leq u(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t > t_1$.

Definición 8.2 Una función continua y no negativa u definida en Q es una supersolución estricta de viscosidad de (6.1) si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) Toda función $\varphi \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ que toca a u por abajo en un punto (x_0, t_0) con $u(x_0, t_0) > 0$ satisface

$$\varphi_t \geq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en (x_0, t_0) .

- (ii) Ninguna subsolución clásica de frontera libre v (que no se mueve) que está estrictamente separada de u en un tiempo $t = t_1 \geq 0$, $v(x, t_1) \prec u(x, t_1)$, puede cruzar a u en un tiempo posterior. Es decir, $v(x, t) \leq u(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t > t_1$.

Obsérvese que estas dos definiciones coinciden en el primer punto con la de supersolución de viscosidad.

Proposición 8.10 *Sea u una función continua, acotada y no negativa. Entonces son equivalentes*

- (i) u es una supersolución de viscosidad de (6.1).
- (ii) u es una supersolución débil de viscosidad de (6.1).
- (iii) u es una supersolución estricta de viscosidad de (6.1).

Demostración.

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Claramente, de las definiciones se concluye que una supersolución estricta de viscosidad es una supersolución de viscosidad y que ésta es a su vez una supersolución débil de viscosidad.

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(iii)}}$ Veamos ahora que una supersolución débil de viscosidad es una supersolución estricta de viscosidad.

Sea u una supersolución débil de viscosidad y v una subsolución clásica de frontera libre que está estrictamente separada de u en el tiempo inicial $t = 0$.

La idea de la demostración es la siguiente: queremos demostrar que $u \leq v$ en Q ; es decir, que si u y v están separadas inicialmente, v no puede cortar a u en un tiempo posterior. Para ello consideramos \tilde{v} una subsolución de viscosidad con el mismo dato inicial que v . Veamos que $v \leq \tilde{v}$ en Q y luego que $\tilde{v} \leq u$ en Q , con lo que la proposición quedaría demostrada.

Como v es una subsolución clásica de frontera libre, por el Lema 6.2 sabemos que v es en particular una subsolución de viscosidad. Concluimos por tanto, gracias al Teorema 8.8, que $v \leq \tilde{v}$ en Q .

Por otro lado, como u y \tilde{v} están estrictamente separadas inicialmente, podemos repetir la misma demostración que se usó para probar el Teorema 8.2 para ver que $\tilde{v} \leq u$ en Q . Obsérvese que para ello sólo utilizamos un argumento de comparación con funciones Barenblatt; es decir no hizo falta usar la definición de supersolución de viscosidad, sino sólo el punto (ii) de la definición de supersolución débil de viscosidad, Definición 8.1. Por tanto $\tilde{v} \leq u$ en Q lo que implica que $v \leq u$ en Q . \square

En el Capítulo 6 vimos, Lema 6.1, que una función $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ no negativa es subsolución de viscosidad si y sólo si es subsolución clásica. Además también

vimos, Lema 6.2, que si u es subsolución clásica de frontera libre entonces u es en particular una subsolución de viscosidad.

El final de este capítulo está dedicado a encontrar resultados análogos a los establecidos en el Capítulo 6 para subsoluciones, para supersoluciones. Para ello nos resultará de gran utilidad el haber relajado la definición de supersolución de viscosidad, demostrando la equivalencia entre las distintas nociones de supersolución. Empecemos recordando que, según el Lema 6.3, si $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ es una supersolución de viscosidad de (6.1) entonces u es una supersolución clásica. Veamos ahora que el recíproco también es cierto.

Proposición 8.11 *Sea $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ una supersolución clásica. Entonces u es una supersolución de viscosidad.*

Demostración. Gracias a la Proposición 8.10, basta con ver que u cumple la definición de supersolución débil de viscosidad.

Consideremos una función test φ de clase $\mathcal{C}^{2,1}$ tal que $\varphi - u$ tiene un máximo local cero en un punto (x_0, t_0) en el que u es positiva. Razonando como en la demostración del Lema 6.1 se tiene que

$$\varphi_t \leq u_t \leq a(u)\Delta u + |\nabla u|^2 \leq a(\varphi)\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2$$

en (x_0, t_0) , de donde concluimos que se verifica el punto (i) de la Definición 8.1.

Comprobamos ahora que se cumple el punto (ii): sea $B(x, t)$ una subsolución clásica de frontera libre de tipo Barenblatt que está estrictamente separada de u en $t = 0$. Veamos que u y B no se pueden tocar en un tiempo posterior.

Como tanto u como B son clásicas, aplicando el Principio del Máximo concluimos que el posible punto de contacto no puede estar en el interior. Tampoco puede estar en la frontera libre, ya que la supersolución u tiene en esos puntos gradiente cero.

La supersolución clásica u es por tanto una supersolución de viscosidad. \square

Proposición 8.12 *Sea $u \in \mathcal{C}^{2,1}(Q)$ una supersolución clásica de frontera libre. Entonces u es una supersolución de viscosidad.*

Demostración. Si u es una supersolución clásica de frontera libre comprobamos que u es una supersolución de viscosidad comparándola con una Barenblatt B modificada, de forma que

$$B_t \leq a(B)\Delta B + \varepsilon|\nabla B|^2,$$

con $\varepsilon < 1$. En esta situación, la velocidad de propagación de B viene dada por

$$\nu = \varepsilon|\nabla B|.$$

Supongamos que B y u están estrictamente separadas en $t = 0$. El argumento habitual, usado también en la demostración anterior, nos permite concluir que B y u no se pueden tocar en el conjunto de positividad.

El contacto tampoco puede ser en la frontera libre. Si existiese un punto de contacto P entre ambas funciones se tendría que cumplir $|\nabla B| \leq |\nabla u|$ en P . Por otro lado, como B está inicialmente separada de u , para que pueda existir un punto de contacto la velocidad de B tiene que ser mayor o igual que la de u . Ambas situaciones no pueden coexistir, por tanto u y B no se cruzan y u es una supersolución de viscosidad. \square

Conclusiones y comentarios

1. *Unicidad. No unicidad.* Uno de los puntos fundamentales para demostrar el resultado de unicidad general, Teorema 8.7, es la transformación densidad-presión descrita en la Sección 6.3 del Capítulo 6. De hecho, la demostración de este teorema es indirecta: probamos la unicidad de soluciones de viscosidad demostrando primero la unicidad de las soluciones de la ecuación de filtración asociada. Este hecho no es algo excepcional de la ecuación estudiada en esta parte de la Memoria. Incluso en [25], donde se estudia un caso más sencillo, tampoco se da una demostración directa (utilizando únicamente técnicas de soluciones de viscosidad) de que el problema esté bien puesto.

Obviamente sería deseable encontrar una demostración para el Teorema 8.7 que se base sólo en la noción de solución de viscosidad y no requiera usar la transformación densidad-presión.

Por otro lado, obsérvese que existen ejemplos de ecuaciones relacionadas con la estudiada aquí, en los que no hay unicidad ni para las soluciones débiles ni para las de viscosidad.

Para ilustrar este hecho consideremos el caso límite en el que el término cuadrático del gradiente de la ecuación desaparece. Tomemos además $a(u) = u$. La ecuación resultante,

$$u_t = u\Delta u,$$

ya fue propuesta en [25] por presentar dificultades a la hora de desarrollar la teoría: aunque las herramientas construidas nos permiten definir para cada dato inicial la solución de viscosidad maximal y la minimal, no hay unicidad dentro de la clase de soluciones de viscosidad con dato inicial continuo y no negativo.

2. Contraejemplo. El objetivo del ejemplo que mostramos a continuación es ilustrar la importancia de controlar el comportamiento de la frontera libre a la hora de definir las soluciones de viscosidad.

Si se suprime el punto (ii) en la definición de supersolución de viscosidad, Definición 6.6, y no se añade otro equivalente, el concepto de solución de viscosidad resulta muy vago, lo que puede implicar la pérdida de unicidad.

Consideremos la ecuación de los medios porosos un dominio acotado, Ω ,

$$\begin{cases} \rho_t = \Delta \rho^m, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \rho = 0, & (x, t) \in \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty), \end{cases}$$

con $m > 1$. Tomamos como dato inicial una función no trivial

$$\rho(\cdot, 0) = \rho_0 \in L^1(\Omega), \quad \rho_0 \geq 0.$$

Este problema tiene una única solución débil no negativa que depende de forma continua de los datos en la norma $L^1(\Omega)$. Además, en [6] se demuestra que existe una única solución autosemejante de la ecuación de los medios porosos, que describe el comportamiento asintótico de todas las soluciones de este problema de Cauchy-Dirichlet. Esta solución autosemejante es de variables separadas,

$$\tilde{\rho}(x, t) = t^{-\alpha} f(x), \quad \alpha = \frac{1}{m-1},$$

donde f es una solución estacionaria de

$$\Delta f^m + \alpha f = 0.$$

En [6] también se prueba que si f^m es una solución acotada de esta ecuación, entonces $f^m \in C^\infty(\Omega)$. Por otro lado, el Principio del Máximo implica que f^m es estrictamente positiva en Ω , a no ser que sea idénticamente cero. Véase también [108] para los detalles.

El siguiente paso consiste en extender la solución clásica $\tilde{\rho}$ a todo el espacio. Para ello definimos

$$\tilde{\rho}(x, t) = 0, \quad x \notin \Omega, \quad t > 0.$$

Sea \tilde{u} la función obtenida a partir de $\tilde{\rho}$ a través de la transformación densidad-presión descrita en el Capítulo 6:

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \mathcal{T}^{-1}(\tilde{\rho}), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ 0, & x \notin \Omega, \quad t > 0. \end{cases}$$

Gracias al Lema 6.7 sabemos que \tilde{u} es una solución clásica de

$$\tilde{u}_t = a(\tilde{u})\Delta\tilde{u} + |\nabla\tilde{u}|^2$$

en Ω , siempre que $\tilde{\rho}$ sea una solución clásica de la ecuación de filtración asociada. Es decir, \tilde{u} es clásica en $\Omega \times (0, \infty)$. Por otro lado, como \tilde{u} se anula fuera de Ω también es solución clásica ahí. Esto implica en particular que \tilde{u} es solución de viscosidad en Ω y fuera de Ω .

Queda por tanto pendiente estudiar el comportamiento de \tilde{u} en $\Sigma = \partial\Omega$, donde no hemos comprobado aún si es supersolución de viscosidad. De hecho, la condición (ii) de la definición es falsa en los puntos de Σ : toda subsolución clásica de frontera libre, v , que está estrictamente separada de \tilde{u} en un cierto tiempo t tiene que cruzar a \tilde{u} en un tiempo posterior. Esto es así porque el soporte de v se expande con el tiempo, mientras que el de \tilde{u} permanece fijo.

Concluimos por tanto que \tilde{u} no es una solución de viscosidad. La solución de viscosidad “verdadera” se obtiene a través de la transformación densidad-presión aplicada a la solución débil del problema.

3. Otros datos iniciales. Generalización de la ecuación. Una posible generalización del problema que estudiamos podría consistir en tomar un dato inicial u_0 cualquiera, es decir que no estuviera necesariamente acotado.

Otra posible extensión del estudio hecho en esta parte de la Memoria consistiría en generalizar la ecuación a una de la forma

$$u_t = a(x, u)\Delta u + b(x, u)F(|\nabla u|^2),$$

con condiciones apropiadas sobre a , b y F .

Los métodos desarrollados en los capítulos anteriores se basan fundamentalmente en la construcción de subsoluciones y supersoluciones para poder utilizar técnicas de comparación. Es por ello que nos inclinamos a pensar que las técnicas descritas no se puedan utilizar directamente para describir las soluciones de viscosidad de la ecuación generalizada.

III

*La ecuación de los medios
porosos en un dominio con
agujeros*

Introducción

La ecuación de los medios porosos,

$$u_t = \Delta u^m, \quad m > 1,$$

ha sido objeto de estudio sistemático desde mediados del siglo pasado. Una de sus principales propiedades es la de velocidad de propagación finita: si el dato inicial del problema tiene soporte compacto, la solución también lo tiene para cualquier tiempo posterior y aparece un frente, denominado frontera libre, que separa la región donde la solución es positiva de la zona donde es cero.

Una de los posibles aspectos a estudiar es el comportamiento asintótico de la solución. Para ello, uno intenta contestar, entre otras, a estas preguntas:

¿existe alguna función que determine el comportamiento de la solución de la ecuación de los medios porosos cuando el tiempo es grande?

Y si es así,

¿cuál es esta función?

Si la ecuación de los medios porosos está definida en todo \mathbb{R}^N con $t > 0$, tomando datos iniciales $u_0 \geq 0$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ se puede demostrar que existe una constante $C_0 > 0$ tal que u se comporta como B_{C_0} cuando $t \rightarrow \infty$ (véase [107] y las referencias que incluye), donde

$$B_C(x, t) = t^{-\alpha} \left(C - \frac{\beta(m-1)}{2m} \frac{|x|^2}{t^{2\beta}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} = t^{-\alpha} F_C(xt^{-\beta}),$$

es una solución autosemejante conocida como solución de Barenblatt. La función F_C se denomina perfil y los exponentes α y β , que se denominan usualmente

exponentes de autosemejanza, vienen dados por

$$\alpha = \frac{N}{N(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{1}{N(m-1)+2}.$$

En concreto se prueba que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - B_{C_0}(x, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|u(x, t) - B_{C_0}(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Además, como para este problema existe una ley de conservación de masas, la convergencia en norma L^1 implica en particular que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} B_{C_0}(x, t) dx.$$

El comportamiento de la solución de la ecuación de los medios porosos es bien distinto si la ecuación se define en un dominio exterior, ya que entonces también influyen los datos de frontera. El objetivo de esta parte de la Memoria es dar respuesta a las preguntas anteriores cuando se considera el problema de Dirichlet con dato de frontera homogéneo.

Un problema similar al que nos ocupará aquí ya fue propuesto en [101]. En ese trabajo se estudia el comportamiento de la ecuación de los medios porosos en $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$, siendo $G \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera regular. No es necesario que el abierto G sea conexo, lo que implica que puede haber uno o varios agujeros. El dato de frontera, g , es de tipo Dirichlet no trivial y no depende del tiempo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = g(x), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

El comportamiento asintótico de la solución queda determinado utilizando la técnica de *matching* o *matched asymptotics*¹.

En primer lugar se muestra que en las variables originales, x y t , la solución se estabiliza a una solución estacionaria, $H^{\frac{1}{m}}$, del problema, siendo la función H una

¹Conexión de desarrollos asintóticos.

solución de la ecuación de Laplace en el dominio exterior Ω , con dato de frontera g . Esto es lo que se conoce con el nombre de límite interior.

Por otro lado, haciendo un cambio de escala apropiado, se demuestra que en la región cercana a la frontera libre el comportamiento asintótico de la solución, que denominaremos límite exterior, viene dado por una solución autosemejante de la ecuación de los medios porosos, que resulta ser singular en $x = 0$, para todo t . Esta solución está completamente determinada salvo por una constante, que se ajusta utilizando *matching* con el límite interior.

En [82] se hace un primer estudio sobre el comportamiento asintótico de la solución del problema cuando el dato de frontera es idénticamente cero, tanto para $N \geq 3$ como para $N = 2$. Los resultados que se presentan son formales y se limitan al caso radial.

Inspirados en la técnica de *matching* usada en [101], abordamos el problema estudiado en [82] cuando $N \geq 3$, considerando datos y dominios generales,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

La solución u de este problema se comporta de maneras muy distintas dependiendo de la dimensión N . Así, distinguimos tres casos diferentes: N mayor, igual y menor que 2. Para $N \geq 3$ la masa asintótica no es cero, mientras que si $N = 1$, dicha masa tiende a cero como una potencia del tiempo,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2m}}),$$

(véase [79]). En el caso intermedio, $N = 2$, estudiado recientemente en [66], se muestra la transición entre ambos comportamientos, ya que en este caso la masa tiende a cero en una escala logarítmica.

Una primera herramienta necesaria para estudiar el comportamiento de u se obtiene en la Sección 9.2, donde demostramos una ley de conservación. Al contrario que en el caso del problema definido en todo el espacio, donde la masa, $\int_{\mathbb{R}^N} u(x, t) dx$, se conserva, la solución u del problema en el dominio exterior pier-

de masa con el tiempo. Sin embargo, veremos que hay una cierta cantidad,

$$I(t) = \int_{\Omega} f(x)u(x, t) dx,$$

con f una función armónica concreta que definiremos en la Sección 9.2, que sí se conserva. Esta ley de conservación permitirá calcular, en el Capítulo 10, la masa asintótica de u .

Por otro lado, necesitaremos construir subsoluciones y supersoluciones que nos permitan identificar tanto el decaimiento de la solución, como su tasa de expansión. Las supersoluciones se obtienen directamente tomando una Barenblatt con una constante C suficientemente grande. Para las subsoluciones no es tan sencillo. Debido al dato de frontera y al soporte compacto de u , nos vemos obligados a combinar dos familias de subsoluciones de la ecuación de los medios porosos para poder construir una subsolución del problema completo. Finalmente, gracias a estas construcciones, veremos que u decae como $\mathcal{O}(t^{-\alpha})$, mientras que su soporte se expande como $\mathcal{O}(t^{\beta})$, siendo α y β los exponentes de autosemejanza de las soluciones fuente de la ecuación de los medios porosos.

En vista de esta afirmación, para poder estudiar el comportamiento asintótico de u cerca de su frontera libre necesitamos hacer un cambio de escala, según los exponentes α y β , que amplifique el tamaño de la solución y “acerque” la frontera desde el infinito. Definimos por tanto la nueva función

$$v_{\text{ext}}(y, \tau) = t^{\alpha}u(yt^{\beta}, t), \quad \tau = \log t.$$

En el Capítulo 10 demostramos que v_{ext} converge al perfil $F_{C_{\star}}$ de una solución Barenblatt con constante $C_{\star}, B_{C_{\star}}$.

Teorema. *Sea $N \geq 3$ y u una solución débil de la ecuación de los medios porosos en el dominio exterior Ω con dato de frontera trivial. Entonces existe una constante C_{\star} tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha} |u(x, t) - B_{C_{\star}}(x, t)| = 0$$

uniformemente en conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq \delta t^{\beta}\}$, $\delta > 0$.

Obsérvese que la convergencia es uniforme en una región exterior que llega hasta la frontera libre.

La constante límite C_* se calcula en términos del dato inicial del problema mediante la fórmula

$$C_* = \left(\frac{1}{k(m, N)} \int_{\Omega} H(x) u_0(x) dx \right)^{2(m-1)\beta},$$

donde $k(m, N)$ es una constante y H es una función armónica que vale 1 en infinito y 0 en $\partial\Omega$.

Como la masa no se conserva, es natural preguntarse cuánta masa se pierde por la frontera fija del dominio. Esta cantidad se calcula mediante la proyección del dato inicial sobre una determinada función armónica (véase la Observación 10.1) que mide la capacidad del agujero G . Una de las conclusiones a nuestro juicio más importantes de esta parte de la Memoria es que, en una primera aproximación, esta es la única influencia que tiene la estructura del dominio sobre el comportamiento asintótico de la solución.

Finalmente, para concluir la caracterización del comportamiento de u en el exterior, analizamos el movimiento de su frontera libre.

Corolario. *La frontera libre de u se comporta cuando t tiende a infinito como la frontera libre de la solución de Barenblatt B_{C_*} .*

Completamos el estudio del comportamiento asintótico de la solución de la ecuación de los medios porosos en el dominio exterior Ω viendo qué sucede en la región interior, es decir, cerca de los agujeros. En este caso el cambio de escala que necesitamos es más sencillo: basta con amplificar la solución con el factor t^α , manteniendo la variable espacial fija (es decir, un cambio cuasi-estacionario). Así, demostramos que

$$v_{\text{int}}(x, t) = t^\alpha u(x, t)$$

converge al estado estacionario

$$H_C(x) = C^{\frac{m}{m-1}} H(x).$$

Teorema. Sea $N \geq 3$ y u una solución débil de la ecuación de los medios porosos en el dominio exterior Ω con dato de frontera trivial. Entonces el comportamiento asintótico interior de u queda determinado por el estado estacionario H_{C_\star} , donde

$$H_{C_\star}(x) = C_\star^{\frac{m}{m-1}} H(x).$$

Obsérvese que en las posibles componentes acotadas de Ω el límite que se obtiene es trivial. De hecho, la ecuación de los medios porosos en un dominio acotado con dato de frontera Dirichlet homogéneo decae como $\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{m-1}})$ (nótese que $\alpha < \frac{1}{m-1}$). Más precisamente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t^{\frac{1}{m-1}} u(x, t) - F(x)| = 0,$$

para una determinada función F , véase [108].

Aunque existe toda una familia de funciones armónicas H_C , que se distinguen entre sí mediante el parámetro C , sólo una de ellas define el comportamiento asintótico de u . Ajustando la constante C mediante la técnica de *matching* con la solución de Barenblatt que da el comportamiento exterior obtenemos que la función armónica correcta es precisamente la que tiene altura en el infinito $C = C_\star$.

Comparando la técnica de *matching* usada en [101] y la que utilizamos aquí se observa que el sentido de las implicaciones es distinto: en [101] el límite interior queda completamente determinado mediante la función g y se usa el *matching* para describir el límite exterior, mientras que en nuestro caso usamos esta técnica para obtener el límite interior a partir del exterior.

Una vez caracterizado el comportamiento de la solución cuando el tiempo tiende a infinito en términos de su límite exterior y su límite interior, surge de forma natural la siguiente pregunta:

¿existe alguna función explícita que determine de forma global el comportamiento de la solución cuando el tiempo es grande?

La respuesta a esta pregunta es sí: la función

$$U_G(x, t) = (B_{C_\star}(x, t) - t^{-\alpha} C_\star^{\frac{1}{m-1}} (1 - H^{\frac{1}{m}}(x)))_+,$$

que se caracteriza, entre otras cosas, por valer cero en la frontera de Ω y por tener soporte compacto, nos permitirá, en la última sección del Capítulo 10, determinar globalmente el comportamiento de u .

Teorema. *Sea $N \geq 3$ y u una solución débil de la ecuación de los medios porosos en el dominio exterior Ω con dato de frontera trivial. Entonces,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha |u(x, t) - U_G(x, t)| = 0,$$

uniformemente en $x \in \Omega$.

Concluimos esta Introducción recordando los resultados obtenidos en [79] para el caso $N = 1$. Después de hacer una extensión impar, se identifica el problema original con otro en el que el dato inicial cambia de signo y tiene masa cero, $\int_{\mathbb{R}} u_0 = 0$. Se demuestra entonces que la solución converge uniformemente a un perfil antisimétrico, la solución dipolo D , introducida previamente en [9]. Concretamente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha |u(x, t) - D(x, t)| = 0,$$

uniformemente en \mathbb{R} , donde

$$D(x, t) = t^{-\alpha} F(xt^{-\beta}),$$

con

$$\alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = \frac{1}{2m}$$

y F una determinada función.

Obsérvese que en dimensión $N = 1$ no es necesario considerar por separado las regiones interior y exterior, ya que la solución dipolo proporciona directamente la formulación global. Nótese también que los exponentes α y β no coinciden con los de dimensión superior lo que corrobora el hecho de que el efecto que produce el agujero en el dominio en el comportamiento de la solución es distinto cuando se trata de $N = 1$ o $N \geq 3$.

Preliminares

Dedicamos este capítulo a establecer las herramientas que serán necesarias para determinar el comportamiento asintótico de la solución de la ecuación de los medios porosos en un dominio exterior. Después de definir el concepto de solución, demostramos una ley de conservación para este problema. Finalmente, construimos las subsoluciones y supersoluciones que permitirán demostrar la tasa de decaimiento de la solución y de avance de su frontera libre.

Contenido

9.1. Definiciones	214
9.2. Ley de conservación	215
9.3. Subsoluciones y supersoluciones	216
1. Supersoluciones	216
2. Subsoluciones	217

9.1 Definiciones

Sea $G \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera regular y sea $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$. En principio no supondremos que G sea conexo, de forma que puede representar uno o varios agujeros en \mathbb{R}^N . El objetivo de esta parte de la Memoria es estudiar el comportamiento asintótico de la ecuación de los medios porosos (EMP en lo que sigue) en el dominio exterior Ω con dato cero en la frontera,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (9.1)$$

donde $m > 1$. Supondremos que los datos iniciales u_0 pertenecen a $L^1(\Omega)$, son no negativos (y no triviales) en Ω y de soporte compacto en $\overline{\Omega}$. Esta última hipótesis implica que el soporte de $u(\cdot, t)$ también permanece acotado en todo tiempo posterior, $t > 0$ (propiedad de propagación finita, que se deduce fácilmente por comparación con soluciones definidas en todo el espacio). El hecho de que u tenga soporte compacto nos permite estudiar el comportamiento con el tiempo de su frontera libre,

$$\Gamma(t) = \partial\{x \in \Omega : u(x, t) > 0\} \setminus \partial\Omega. \quad (9.2)$$

Además, gracias a la regularización $L^1 - L^\infty$, [13], [105], [109], podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Fijemos en primer lugar la notación que utilizaremos a lo largo de esta parte de la Memoria. Denotaremos mediante c a una constante positiva que puede cambiar su valor de una línea a otra o incluso dentro de la misma línea. Al igual que en la Parte II, $\mathcal{B}_r(x_0)$ es la bola abierta de radio r y centro x_0 . Nos centraremos únicamente en el caso de dimensión espacial $N \geq 3$ y por tanto de aquí en adelante no volveremos a mencionarlo explícitamente. Los casos $N = 1$ y 2 fueron estudiados previamente en [79] y [66] y por tanto no son objeto de esta Memoria.

Definición 9.1 Sea $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ y sea $u \in C((0, T] : L^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ una función definida en $\overline{\Omega_T}$. Diremos que u es una solución débil de (9.1) en $[0, T]$ si para cada función test, $\phi \in C^{1,0}(\overline{\Omega_T}) \cap C^{2,1}(\Omega_T)$, de soporte compacto en $\overline{\Omega_T}$, que además verifique $\phi \geq 0$ en Ω_T y $\phi = 0$ en $\partial\Omega \times (0, T]$, u satisface la identidad

integral

$$\int_{\Omega} u(x, t) \phi(x, t) dx = \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ u^m(x, t) \Delta \phi(x, t) + u(x, t) \phi_t(x, t) \right\} dx dt \\ + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x, 0) dx,$$

para $0 \leq t \leq T$.

Definición 9.2 Sea $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ y sea $u \in C((0, T] : L^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$ una función definida en $\overline{\Omega_T}$. Diremos que u es una solución débil de (9.1) en $[0, \infty)$ si es una solución débil en el sentido de la Definición 9.1 en cualquier intervalo $[0, T]$.

Definimos subsoluciones y supersoluciones de (9.1) como es habitual: reemplazamos en la definición de solución la igualdad por desigualdades; \leq para la definición de subsolución y \geq para la de supersolución.

9.2 Ley de conservación

Como ya dijimos en la Introducción, la masa total de la solución de la ecuación de los medios porosos definida en \mathbb{R}^N se conserva. Esto no es así en el problema (9.1), ya que parte de la masa de u se pierde a través de los agujeros del dominio. No obstante, veremos que existe una masa asintótica para la solución, que calcularemos explícitamente utilizando la expresión (10.1) en la fórmula (10.5).

Demostremos a continuación que para el problema (9.1) hay una ley de conservación modificada en la que la cantidad que se conserva representa a la la masa con un peso.

Sea f una función armónica definida en Ω y tal que $f = 0$ en la frontera de Ω . Inspirados en [82] introducimos la siguiente cantidad,

$$I(t) = \int_{\Omega} f(x) u(x, t) dx.$$

Veamos que I no depende del tiempo.

Lema 9.1 *La función I es un invariante integral. Es decir,*

$$I(0) = \int_{\Omega} f(x)u_0(x) dx = \int_{\Omega} f(x)u(x, t) dx = I(t).$$

Demostración. Consideremos la derivada de I con respecto a t e integremos por partes en Ω ,

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} f \Delta u^m = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial u^m}{\partial \nu} - u^m \frac{\partial f}{\partial \nu} \right),$$

siendo ν la normal exterior. Obsérvese que para obtener la última igualdad usamos que u es de soporte compacto en Ω .

Por otro lado, como u^m y f son, por definición, cero en $\partial\Omega$, concluimos que

$$\frac{dI}{dt} = 0. \quad (9.3)$$

Esta última igualdad implica finalmente que I no depende del tiempo y que por tanto se conserva. \square

9.3 Subsoluciones y supersoluciones

Para caracterizar el comportamiento asintótico de la solución cuando el tiempo es grande, necesitamos construir subsoluciones y supersoluciones del problema (9.1). Gracias a estas funciones podremos ver que u decae como $\mathcal{O}(t^{-\alpha})$, mientras que su soporte se expande como $\mathcal{O}(t^{\beta})$, siendo

$$\alpha = \frac{N}{N(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{1}{N(m-1)+2}. \quad (9.4)$$

1. Supersoluciones. Consideremos la familia de funciones de tipo Barenblatt

$$B_C(x, t) = t^{-\alpha} \left(C - \frac{\beta(m-1)}{2m} \frac{|x|^2}{t^{2\beta}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} = t^{-\alpha} F_C(\xi),$$

con $C > 0$ y $\xi = xt^{-\beta}$. Es bien sabido que estas funciones son soluciones de la EMP en todo el espacio. El parámetro C depende de la masa total de B_C ; más concretamente, la masa $M_C = \int_{\mathbb{R}^N} B_C(x, t) dx$ se relaciona con C mediante la fórmula

$$M_C = k(m, N) C^{\frac{1}{2(m-1)\beta}}, \quad (9.5)$$

donde

$$k(m, N) = 2\pi^{\frac{N}{2}}\beta \left(\frac{2m}{\beta(m-1)} \right)^{\frac{N}{2}} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{\sigma}{2\beta})}, \quad \sigma = \frac{1}{m-1}, \quad (9.6)$$

véase [107].

Dado que B_C es solución de la EMP en todo el espacio, es fácil ver que es una supersolución del problema que estamos considerando aquí, (9.1), para C grande y $t \geq \bar{t} > 0$: dado un tiempo positivo \bar{t} , basta con escoger C suficientemente grande, de forma que $B_C(\cdot, \bar{t})$ esté por encima de $u(\cdot, \bar{t})$. Nótese que esto es posible, porque $u(\cdot, \bar{t})$ es una función acotada y de soporte compacto.

2. Subsoluciones. Las funciones Barenblatt no se pueden usar como subsoluciones del problema: si bien es verdad que tomando C suficientemente pequeño, una traslación apropiada permite colocarlas por debajo de u en un determinado tiempo, la propiedad de expansión de su soporte implica que en un tiempo posterior serán positivas en la frontera fija $\partial\Omega$ y por tanto dejarán de estar por debajo de u .

Otra posibilidad, que elimina el inconveniente presentado por las funciones Barenblatt en la frontera fija, es considerar la familia de funciones

$$H_A(x, t) = At^{-\alpha} \left(1 - \left(\frac{R_-}{|x|} \right)^{N-2} \right)_+^{\frac{1}{m}},$$

donde R_- es una constante positiva mayor que 1. Estas funciones son subsoluciones de la EMP, ya que su m -ésima potencia es armónica en su soporte y $(H_A)_t \leq 0$. Además, valen 0 en la frontera de Ω y tienen el decaimiento esperado, $t^{-\alpha}$. Sin embargo no son de soporte compacto, luego tampoco se pueden usar como subsoluciones de (9.1).

La idea por tanto para construir una subsolución del problema es combinar estas dos familias de funciones, desechando de cada una las propiedades que le impiden ser subsolución de (9.1).

Un primer intento consiste en definir la subsolución tomando el mínimo entre B_C y H_A . Como cada una de estas funciones es subsolución de la ecuación, sólo tenemos que comprobar que el ángulo que forman al intersecarse sea el correcto. Sin embargo, esto no es así. Según se observa en la Figura 9.1 ambas funciones se

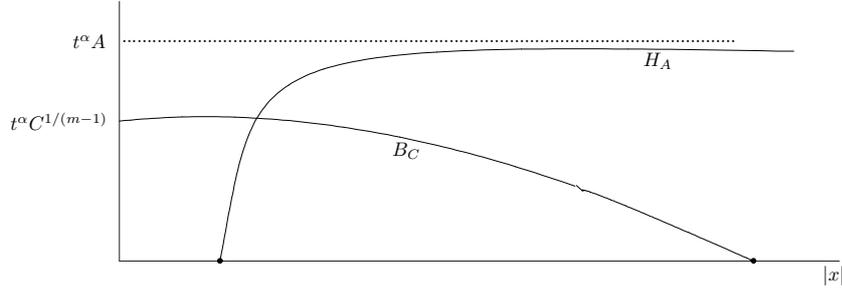


Figura 9.1: Subsoluciones

cortan formando un pico hacia arriba, que es el ángulo “malo” para construir la subsolución.

Modificando ligeramente H_A antes de “pegarla” con B_C , podemos por un lado aprovechar el hecho de que B_C y H_A sean subsolución, y por otro conseguir que intersequen con el ángulo correcto. Veamos cómo hacerlo.

Para un retardo $\tau > 0$, consideramos

$$\widehat{H}_{A(t),\tau}(x,t) = A(t)(t+\tau)^{-\alpha} \left(1 - \left(\frac{R_-}{|x|} \right)^{N-2} - \frac{a(|x| - r_1)_+^4}{(t+\tau)^{4\gamma}} \right)_+^{\frac{1}{m}},$$

$$B_{C_0,\tau}(x,t) = (t+\tau)^{-\alpha} \left(C_0 - \frac{\beta(m-1)}{2m} \frac{|x|^2}{(t+\tau)^{2\beta}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}},$$

siendo R_- , r_1 , a , C_0 , y γ constantes positivas y $\gamma < \beta$. Sea $\sigma > 0$, y definamos

$$A(t) = 2C_0^{\frac{1}{m-1}}(1 + (t+\tau)^{-\sigma}).$$

En esta situación el máximo de $\widehat{H}_{A(t),\tau}$ es siempre mayor que el de $B_{C_0,\tau}$. Sea $R_+(t)$ el radio de la interfase exterior de $\widehat{H}_{A(t),\tau}$ y $B_+(t)$ el radio de la interfase de $B_{C_0,\tau}$. Veremos durante la demostración del Lema 9.2 que si los parámetros se eligen de forma apropiada, entonces $\widehat{H}_{A(t),\tau}$ y $B_{C_0,\tau}$ intersecan con el ángulo correcto en un punto $r_*(t)$, que verifica $R_+(t) < r_*(t) < B_+(t)$, véase la Figura 9.2.

En estas condiciones definimos

$$\varphi_{C_0,\tau}(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| < R_- \text{ o } |x| > B_+(t), \\ \widehat{H}_{A(t),\tau}(x,t), & R_- \leq |x| \leq r_*(t), \\ B_{C_0,\tau}(x,t), & r_*(t) \leq |x| \leq B_+(t), \end{cases}$$

que resulta ser la subsolución de (9.1) en $(x, t) \in \Omega \times (t_0, \infty)$ que buscábamos.

Lema 9.2 *Existe un tiempo $t_0 > 0$ suficientemente grande y un retardo τ , constantes C_0 pequeña y $\sigma < 4\gamma - 1$ tal que*

$$\varphi_{C_0, \tau}(x, t) < u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0.$$

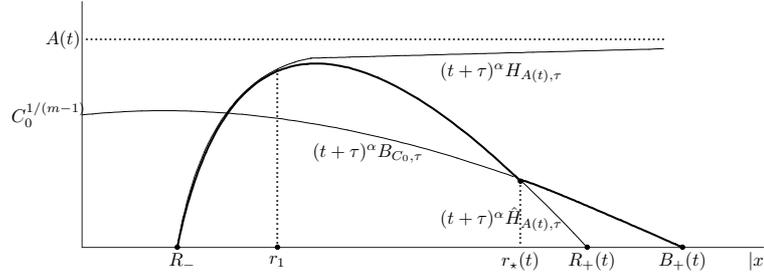


Figura 9.2: Subsolución $\varphi_{C_0, \tau}$

Demostración. Desglosaremos la prueba en tres pasos: veremos en primer lugar que existe un tiempo \bar{t} tal que $\varphi_{C_0, \tau}$ es subsolución de la EMP para todo tiempo posterior $t \geq \bar{t}$. Demostraremos a continuación que u y $\varphi_{C_0, \tau}$ están ordenadas inicialmente. Para ello comprobamos que existen $t_0 \geq \bar{t}$, un retardo τ y constantes R_-, r_1, a y C_0 tal que $u(x, t_0)$ está por encima de $\varphi_{C_0, \tau}(x, t_0)$. Finalmente, probaremos que $\varphi_{C_0, \tau}(x, t)$ está bien definida; es decir, que el ángulo de intersección entre $H_{A(t), \tau}$ y $B_{C_0, \tau}$ es el correcto, no sólo inicialmente, sino para todo tiempo $t \geq t_0$.

PASO 1 Como $B_{C_0, \tau}$ es solución de la EMP, obtenemos directamente que $\varphi_{C_0, \tau}$ también lo es (y es por tanto subsolución) en $r_*(t) \leq |x| \leq B_+(t)$.

Por otro lado, la definición de $\hat{H}_{A(t), \tau}$ implica que, como $H_{A(t), \tau}$ es subsolución, sólo tenemos que comprobar el caso $r_1 < |x| < r_*$ y $t \geq \bar{t}$. Dicho de otra forma, definiendo $r = |x|$ y $\hat{H}(r, t) = \hat{H}_{A(t), \tau}(x, t)$ tenemos que ver que

$$\hat{H}_t - \frac{N-1}{r}(\hat{H}^m)_r - (\hat{H}^m)_{rr} \leq 0, \quad r_1 < r < r_*, \quad t \geq \bar{t}.$$

Esto se obtiene fácilmente si \bar{t} es suficientemente grande teniendo en cuenta simplemente que $\sigma < 4\gamma - 1$.

PASO 2 Sea $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{A_+}(0) \setminus \mathcal{B}_{A_-}(0)$ un anillo tal que, para un tiempo fijo $t_0 \geq \bar{t}$, suficientemente grande, $\bar{\mathcal{A}} \subset \text{Int}(\text{sop}(u(\cdot, t_0)))$, véase [6].

Fijamos $R_- = A_-$ y $A_- < r_1 < A_+$ y elegimos C_0 , que mide la altura de $\varphi_{C_0, \tau}$, de forma que u_0 esté por encima de $\varphi_{C_0, \tau}$ en t_0 ; es decir, necesitamos que $A(t) < \min u(\cdot, t_0)$ dentro del anillo \mathcal{A} .

Una vez determinada la altura de $\varphi_{C_0, \tau}$ debemos ajustar su soporte inicial para que esté contenido en el soporte de u y poder así utilizar un argumento de comparación. Obsérvese que todavía no hemos elegido los parámetros a y τ .

Por tanto, para que

$$\text{sop}(\varphi_{C_0, \tau}(\cdot, t_0)) = [R_-, B_+(t_0)] \subset \text{Int}(\text{sop}(u(\cdot, t_0))),$$

imponemos en primer lugar que

$$B_+(t_0) = (cC_0)^{\frac{1}{2}}(t_0 + \tau) = A_+.$$

Esto determina el valor de τ . El valor de a se fija de forma que la subsolución esté bien definida inicialmente; es decir, elegimos a para que la construcción hecha con las funciones $B_{C_0, \tau}$ y $H_{A(t), \tau}$ produzca el ángulo de intersección correcto. Para ello es necesario que

$$R_+(t_0) < B_+(t_0). \quad (9.7)$$

Así, como $R_+(t)$ verifica

$$R_+(t) < r_1 + \frac{(t + \tau)^\gamma}{a^{\frac{1}{4}}}, \quad (9.8)$$

basta con escoger a de forma que

$$r_1 + \frac{(t_0 + \tau)^\gamma}{a^{\frac{1}{4}}} < B_+(t_0)$$

para que se cumpla la condición (9.7).

PASO 3 Asegurar que el ángulo de intersección entre $B_{C_0, \tau}$ y $H_{A(t), \tau}$ en r_* es el correcto y así poder definir $\varphi_{C_0, \tau}$ en todo tiempo, no sólo requiere que se cumpla la condición (9.7) inicialmente, sino que también es necesario que $R_+(t) < B_+(t)$ para $t \geq t_0$.

Gracias a (9.8), basta con comprobar para ello que

$$r_1 + \frac{(t + \tau)^\gamma}{a^{\frac{1}{4}}} < B_+(t).$$

Definamos

$$F(t) = r_1 + \frac{(t + \tau)^\gamma}{a^{\frac{1}{4}}} - B_+(t).$$

De la condición (9.7) sabemos que $F(t_0) < 0$. Supongamos que existe un primer tiempo t_1 tal que $F(t_1) = 0$. Entonces, como $\gamma < \beta$,

$$F'(t_1) = \frac{\gamma(t_1 + \tau)^{\gamma-1}}{a^{\frac{1}{4}}} - B_+(t_1)\beta(t_1 + \tau)^{-1} = B_+(t_1)(t_1 + \tau)^{-1}(\gamma - \beta - \gamma r_1) < 0,$$

que es una contradicción.

Concluimos así que $\varphi_{C_0, \tau}$ es subsolución del problema (9.1). Además, como está por debajo de u_0 en t_0 , un argumento de comparación permite concluir que u y $\varphi_{C_0, \tau}$ tienen que estar ordenadas en cualquier tiempo posterior $t \geq t_0$. \square

Comportamiento asintótico de la solución

En este capítulo demostramos que el comportamiento para tiempos grandes de la solución de la EMP en el dominio exterior queda determinado por una Barenblatt lejos de la frontera fija y cerca de la frontera libre. Por otro lado, lejos de la frontera libre, en el interior, la solución se comporta como una función cuya m -ésima potencia es armónica. Esta función queda totalmente determinada por su altura en infinito, la cual se obtiene a partir del límite exterior usando la técnica de *matching*. Para concluir los resultados presentados en el capítulo definimos una función que describe el comportamiento de la solución globalmente.

Contenido

10.1. Límite exterior	224
10.2. Límite interior	229
10.3. Formulación global	235

10.1 Límite exterior

Consideremos una solución de Barenblatt, B_{C_\star} , con constante C_\star definida mediante la fórmula

$$C_\star = \left(\frac{1}{k(m, N)} \int_{\Omega} H(x) u_0(x) dx \right)^{2(m-1)\beta}, \quad (10.1)$$

donde H es la única función armónica que vale 0 en la frontera de Ω y tiende a 1 cuando $|x|$ tiende a infinito, y $k(m, N)$ es la constante que relaciona C_\star con la masa de B_{C_\star} (véanse las fórmulas (9.5), (9.6) y [107]).

Teorema 10.1 *Sea $N \geq 3$. Si u es la solución débil de (9.1), entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha |u(x, t) - B_{C_\star}(x, t)| = 0$$

uniformemente en conjuntos de la forma $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq \delta t^\beta\}$, $\delta > 0$.

Demostración. Estructuramos la prueba en varios pasos: en primer lugar, utilizamos un cambio de escala para demostrar que el Teorema 10.1 es cierto para subsucesiones. A continuación veremos que el límite a lo largo de cualquier subsucesión es una Barenblatt y que en particular tiene que ser la Barenblatt con constante C_\star , B_{C_\star} . Como el resultado es cierto independientemente de la subsucesión elegida, esto implica finalmente que el teorema es cierto sin ninguna restricción.

PASO 1 CAMBIO DE ESCALA Y COMPACIDAD. Definimos

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t), \quad (10.2)$$

con α y β constantes dadas por la fórmula (9.4). Como las soluciones Barenblatt son invariantes bajo este cambio de escala, existe una constante, digamos \tilde{C} , tal que $B_{\tilde{C}}$ acota a la familia $\{u_\lambda\}$ uniformemente. Por tanto, gracias a los resultados de compacidad para la EMP demostrados en [46], [117], existe una subsucesión $\{\lambda_k\}$ y una función u_∞ tal que

$$u_{\lambda_k} \rightarrow u_\infty$$

uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times (0, \infty)$. Es más, u_∞ es una solución débil de la EMP en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times (0, \infty)$.

PASO 2 EL LÍMITE ES UNA BARENBLATT. Veamos a continuación que u_∞ es una función tipo Barenblatt.

Gracias a las subsoluciones y supersoluciones construidas en el capítulo anterior, sabemos que existen constantes C , τ , t_0 y C_0 , tales que

$$\varphi_{C_0, \tau}(x, t - t_0) < u(x, t) < B_C(x, t),$$

para t grande. Si cambiamos la escala de esta última expresión (según la fórmula (10.2)) y pasamos al límite cuando $\lambda_k \rightarrow \infty$ obtenemos que u_∞ está acotada por arriba y por abajo por soluciones de Barenblatt,

$$B_{C_0} \leq u_\infty \leq B_C, \quad x \neq 0. \tag{10.3}$$

Concluimos de esta relación que u_∞ es una solución no trivial de la EMP en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $t > 0$, y que además está acotada para todo tiempo positivo. Esto implica, al ser $N \geq 3$, que se puede eliminar la singularidad; es decir, se puede definir u_∞ como solución de la EMP para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

La demostración de esta última afirmación utiliza un argumento estándar: sea ψ una función de corte tal que $0 \leq \psi \leq 1$, que se anula cerca de $x = 0$ y que vale 1 en $|x| \geq 1$ y definamos $\psi_r(x) = \psi(\frac{x}{r})$. Escribamos a continuación la formulación débil de la EMP con respecto a la función test $\phi(x, t) = \zeta(x, t)\psi_r(x)$ con $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$. Obsérvese que, como $\phi = 0$ cerca de $x = 0$, ésta es una función test admisible para la solución de la EMP con una singularidad acotada. La prueba concluye tomando el límite cuando r tiende a 0, ya que, como u_∞ está acotada, obtenemos que u_∞ es una solución de la EMP para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

La relación (10.3) también implica que

$$\text{sop } B_{C_0} \subseteq \text{sop } u_\infty \subseteq \text{sop } B_C,$$

y por tanto, en $t = 0$, tenemos que $\text{sop}(u_\infty(x, 0)) = \{0\}$. Como la traza inicial es una medida finita, [39], concluimos que tiene que ser un múltiplo de una delta. Por tanto, u_∞ es una solución de tipo Barenblatt, llamémosla B_{C_\star} , con constante C_\star que verifica $C_0 \leq C_\star \leq C$.

PASO 3 CONVERGENCIA A LO LARGO DE SUBSUCESIONES. La invarianza por el cambio de escala (10.2) de las funciones de Barenblatt, implica que

$$\begin{aligned} |u_{\lambda_k}(y, 1) - B_{C_\star}(y, 1)| &= \lambda_k^\alpha |u(\lambda_k^\beta y, \lambda_k) - B_{C_\star}(\lambda_k^\beta y, \lambda_k)| \\ &= \lambda_k^\alpha |u(x, \lambda_k) - B_{C_\star}(x, \lambda_k)|, \end{aligned}$$

para λ_k grande y con $x = \lambda_k^\beta y$. Por tanto, de la convergencia uniforme de u_{λ_k} a B_{C_\star} cuando $\lambda_k \rightarrow \infty$ en conjuntos de la forma $\{|y| \geq \delta\}$ deducimos, tomando $\lambda_k = t_k$, que el resultado enunciado en el Teorema 10.1 es cierto para subsucesiones.

PASO 4 CONCLUSIÓN. El último paso de la demostración consiste en ver que, independientemente de la subsucesión elegida, el parámetro C_\star de la función límite viene dado por (10.1).

Gracias a la ley de conservación (9.3) obtenemos que

$$\int_{\Omega} H(x)u_0(x) dx = \int_{\Omega} H(x)u(x, t_k) dx$$

donde H es la función armónica definida en la Página 224. Obsérvese que, conocido el dato inicial, la primera integral se puede calcular de forma tan precisa como se desee. Para la integral de la derecha tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H(x)u(x, t_k) dx = & \\ & \underbrace{\int_{\{|x| \leq \delta t_k^\beta\} \cap \Omega} H(x)u(x, t_k) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\{|x| \geq \delta t_k^\beta\}} H(x)u(x, t_k) dx}_{I_2} \end{aligned} \tag{10.4}$$

para cualquier $\delta > 0$ y t_k suficientemente grande. Veamos cómo estimar las integrales I_1 e I_2 .

Acotando u por una Barenblatt y usando que $H \leq 1$, obtenemos

$$I_1 \leq t_k^{-\alpha} \int_{\{|x| \leq \delta t_k^\beta\} \cap \Omega} F_C(xt_k^{-\beta}) dx \leq \int_{\{|\xi| \leq \delta\}} F_C(\xi) d\xi,$$

donde F_C es el perfil de una Barenblatt con constante C . Así, $\lim_{t_k \rightarrow \infty} I_1$ puede hacerse tan pequeño como sea necesario simplemente tomando δ pequeño.

Para calcular I_2 hacemos de nuevo el cambio de variables $x = \xi t_k^\beta$ y pasamos al límite cuando $t_k \rightarrow \infty$ utilizando el resultado de convergencia uniforme para

subsucesiones. Como $\alpha = N\beta$, obtenemos

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} I_2 = \int_{\{|\xi| \geq \delta\}} \lim_{t_k \rightarrow \infty} H(\xi t_k^\beta) u(\xi t_k^\beta, t_k) t_k^{N\beta} d\xi = \int_{\{|\xi| \geq \delta\}} F_{C_\star}(\xi) d\xi.$$

Finalmente, pasando al límite en la expresión (10.4) y haciendo tender $\delta \rightarrow 0$, concluimos que

$$\int_{\Omega} H(x) u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F_{C_\star}(\xi) d\xi = M_{C_\star} = k(m, N) C_\star^{\frac{1}{2(m-1)\beta}}, \quad (10.5)$$

donde $k(m, N)$ es la constante dada por (9.6) y M_{C_\star} es la masa asintótica de u . Nótese que este resultado es independiente de la sucesión $\{t_k\}$ elegida. \square

Observación 10.1 (Pérdida de masa) La masa asintótica de u coincide con la masa de la solución de Barenblatt con constante límite C_\star . Esta afirmación se comprueba fácilmente con cálculos similares a los realizados en el último paso de la demostración anterior. Así, la cantidad de masa perdida en el proceso, $M_P(u)$, viene dada por

$$M_P(u) := \int_{\Omega} u_0(x) dx - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} (1 - H(x)) u_0(x) dx > 0.$$

Si definimos una nueva función, Φ , como $\Phi(x) = 1 - H(x)$, entonces, la cantidad de masa perdida es

$$M_P(u) = \int_{\Omega} u_0(x) \Phi(x) dx.$$

De esta expresión se concluye que la geometría del dominio influye en el comportamiento asintótico mediante la proyección del dato inicial sobre Φ , que representa así la capacidad de G . Este hecho se justifica mediante la teoría del potencial, ya que Φ es la función armónica definida en Ω que vale 1 en $\partial\Omega$ y 0 en infinito. Dicho en otras palabras, Φ mide la capacidad de G mediante la fórmula (véase por ejemplo [65])

$$\text{cap}_{1,2}(G) = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 dx.$$

Para concluir el análisis del comportamiento exterior de u estudiamos el avance de su frontera libre cuando t es grande. Para ello definimos

$$m_+(t) = \max_{x \in \Gamma(t)} |x|, \quad m_-(t) = \min_{x \in \Gamma(t)} |x|,$$

donde $\Gamma(t)$ es la frontera libre de u , véase (9.2) para su definición.

Corolario 10.2 Sea $N \geq 3$. Si u es la solución débil de (9.1), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_+(t)}{t^\beta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m_-(t)}{t^\beta} = \left(\frac{2mC_\star}{\beta(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ obtenemos de forma inmediata, escribiendo el Teorema 10.1 en las variables del cambio de escala, que

$$\frac{m_-(t)}{t^\beta} \geq \left(\frac{2mC_\star}{\beta(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon, \quad (10.6)$$

para t suficientemente grande.

Veamos ahora como encontrar una cota superior para $m_+(t)t^{-\beta}$. De lo expuesto anteriormente sabemos que la masa asintótica de la solución es M_{C_\star} . Por tanto, para un tiempo suficientemente grande t_1 se tiene que

$$M(u(\cdot, t_1)) \leq M_{C_\star} + \varepsilon,$$

véase la Observación 10.1.

Consideremos ahora la solución \hat{u} de la EMP definida en todo \mathbb{R}^N con dato inicial

$$\hat{u}(x, t_1) = \begin{cases} u(x, t_1), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Sea $\hat{\Gamma}(t)$ la frontera libre de \hat{u} en tiempo t y $\hat{m}_+(t) = \max_{x \in \hat{\Gamma}(t)} |x|$. Es fácil ver que para $t \geq t_1$, \hat{u} es una supersolución del problema que estamos tratando y por tanto

$$\hat{m}_+(t) \geq m_+(t).$$

Además, como la solución del problema definido en todo el espacio conserva la masa, véase [107], \hat{u} tiene que estar siempre por debajo de la función de Barenblatt de masa $M_{C_\star} + \varepsilon$. Así,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{m}_+(t)}{t^\beta} \leq \left(\frac{2m(C_\star + \varepsilon)}{\beta(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10.7)$$

Finalmente, como $m_-(t) \leq m_+(t) \leq \hat{m}_+(t)$ y ε es arbitrariamente pequeño, combinando las expresiones (10.6) y (10.7) deducimos el resultado. \square

10.2 Límite interior

Gracias al estudio hecho hasta el momento sabemos que u decae como $\mathcal{O}(t^{-\alpha})$, ya que las subsoluciones y supersoluciones construidas en el Capítulo 9, que acotan a u inferior y superiormente respectivamente, tienen este decaimiento. En esta situación es natural preguntarse cuál será el perfil asintótico de la solución si cambiamos su escala según este factor.

A lo largo de esta sección daremos respuesta de forma rigurosa a esta pregunta. Previamente haremos algunas cuentas formales con el fin de ilustrar las ideas que residen detrás de los resultados.

Sea $v = t^\alpha u$. Entonces v es solución de la ecuación

$$\Delta v^m = t^{-2\beta}(tv_t - \alpha v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

con el mismo dato de frontera que u ,

$$v = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Supongamos momentáneamente que $t^{-2\beta+1}v_t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como $t^{-2\beta}\alpha v$ también tiende a 0, esperamos entonces que el límite de v^m sea una solución no trivial de la ecuación de Laplace en Ω con dato de frontera Dirichlet homogéneo. Todas las posibles soluciones de este problema son múltiplos de la función H . Por tanto quedan completamente definidas por su altura en infinito. Para calcular dicha altura utilizamos la técnica de *matching*: determinamos la altura del límite interior en infinito haciéndola coincidir con la ya conocida altura del límite exterior en cero.

Teorema 10.3 *Sea $N \geq 3$. Si u es la solución débil de (9.1), entonces el comportamiento asintótico interior de u viene dado por el estado estacionario H_{C_\star} , donde*

$$H_{C_\star}(x) = C_\star^{\frac{m}{m-1}} H(x).$$

Más concretamente, dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta = \delta(\varepsilon)$ y $t_{\text{int}} = t_{\text{int}}(\varepsilon, \delta)$ tales que

$$|t^{\alpha m} u^m(x, t) - H_{C_\star}(x)| \leq \varepsilon$$

para todo $|x| \leq \delta t^\beta$, $x \in \Omega$ y $t > t_{\text{int}}$.

Observación 10.2 Del enunciado del teorema deducimos que la convergencia es uniforme en conjuntos de la forma $|x|t^{-\beta} \leq \lambda(t)$, $x \in \Omega$, para cualquier función positiva $\lambda(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$.

Como primer paso, antes de demostrar el teorema, veamos que $t^{\alpha m} u^m(x, t)$ converge en media a $H_{C_\star}(x)$. Para ello definamos

$$W_T(\cdot, \tau) = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} w(\cdot, s) ds,$$

donde

$$w(x, \tau) = t^{\alpha m} u^m(x, t), \quad \tau = \log t. \quad (10.8)$$

Lema 10.4 Dados $\varepsilon > 0$ y $T > 0$ existen $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ y $\tau_{\text{int}} = \tau_{\text{int}}(\varepsilon, T, \delta)$ tales que

$$|W_T(x, \tau) - H_{C_\star}(x)| \leq \varepsilon \quad (10.9)$$

para todo $|x| \leq \delta e^{\beta\tau}$, $x \in \Omega$ y $\tau > \tau_{\text{int}}$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sabemos, gracias a la convergencia exterior (Teorema 10.1), que para todo $\delta > 0$, existe un tiempo $t_0 = t_0(\delta)$, que depende de δ , tal que, para $t \geq t_0$ se tiene

$$F(\delta) - \varepsilon \leq t^\alpha u(\delta t^\beta, t) \leq F(\delta) + \varepsilon, \quad (10.10)$$

donde $F(\delta) = (C_\star - K\delta^2)_+^{\frac{1}{m-1}}$, $K > 0$ constante, es el perfil de la función Barenblatt límite, B_{C_\star} .

Consideremos el dominio $\Omega_\tau = \Omega \cap \mathcal{B}_{R(\tau)}(0)$, con $R(\tau) = \delta e^{\beta\tau}$. La función w , definida mediante (10.8), es solución de

$$\begin{cases} -\Delta w = -e^{-2\beta\tau}(v_\tau - \alpha v), & (x, \tau) \in \Omega_\tau \times (0, \infty), \\ w = 0, & (x, \tau) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ w = g, & (x, \tau) \in \partial\mathcal{B}_{R(\tau)}(0) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Obsérvese que de (10.10) deducimos que la restricción, g , de w a $\partial\mathcal{B}_{R(\tau)}$, verifica

$$(F(\delta) - \varepsilon)^m \leq g(x, \tau) \leq (F(\delta) + \varepsilon)^m,$$

para $\tau \geq \tau_0 = \log t_0$.

La idea de la demostración pasa por escribir w utilizando la Fórmula de Representación para la ecuación de Laplace y acotar las integrales resultantes en términos de ε , δ y T .

Sea por tanto τ un coeficiente congelado y \mathcal{G} la Función de Green para el dominio Ω_τ . Así, dado $x_0 \in \Omega_\tau$, consideramos

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{G} = \delta_{x_0}, & x \in \Omega_\tau, \\ \mathcal{G} = 0, & x \in \partial\Omega_\tau, \end{cases}$$

donde δ_{x_0} denota la medida de Dirac que dota de masa unidad al punto x_0 . La función w se escribe entonces como

$$w(x, \tau) = - \int_{\partial B_{R(\tau)}(0)} g \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega_\tau} e^{-2\beta\tau} (v_\tau - \alpha v) \mathcal{G} dx.$$

Afirmamos entonces que, para $T > 0$ fijo y $|x| \leq \delta e^{\beta\tau}$, se tiene

$$\left| \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} w(x, s) ds - H_{C_\star}(x) \right| \leq \varepsilon + c(\varepsilon + \delta) + \frac{c\delta^2(1 + e^{(N-2)\beta T})}{T} + c\delta^2, \quad (10.11)$$

de donde se concluye el lema.

Obsérvese en primer lugar que, como

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} w(x, s) ds - H_{C_\star}(x) \right| &\leq \frac{1}{T} \left(\underbrace{\left| - \int_\tau^{\tau+T} \int_{\partial B_{R(s)}(0)} g \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu} d\sigma ds - H_{C_\star}(x) \right|}_{|I_1|} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left| \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} e^{-2\beta s} (v_s - \alpha v) \mathcal{G} dx ds \right|}_{|I_2|} \right), \end{aligned}$$

la idea para demostrar (10.11) es acotar independientemente las integrales I_1 e I_2 .

Empecemos estimando I_1 en términos de T , δ y ε . Como $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \nu}$ es una cantidad

negativa en $\partial\mathcal{B}_{R(\tau)}(0)$, para $\tau \geq \tau_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq -\int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\partial\mathcal{B}_{R(s)}(0)} (F(\delta) + \varepsilon)^m \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\nu} d\sigma ds - H_{C_\star}(x) \\ &\leq -\int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\partial\mathcal{B}_{R(s)}(0)} (F^m(0) + c_1\delta + c_2\varepsilon) \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\nu} d\sigma ds - H_{C_\star}(x) \\ &= -\int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\partial\mathcal{B}_{R(s)}(0)} F^m(0) \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\nu} d\sigma ds - H_{C_\star}(x) + c(\varepsilon + \delta) \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\partial\mathcal{B}_{R(s)}(0)} \frac{-\partial\mathcal{G}}{\partial\nu} d\sigma ds, \end{aligned}$$

siendo c_1 y c_2 constantes positivas. Continuamos con el argumento observando que, por un lado

$$-\int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\partial\mathcal{B}_{R(s)}(0)} F^m(0) \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\nu} d\sigma ds$$

es la solución, digamos \widehat{H} , de la ecuación de Laplace en Ω_τ que es igual a 0 en $\partial\Omega$ y vale $F^m(0) = C_\star^{\frac{m}{m-1}}$ en $\partial\mathcal{B}_{R(\tau)}(0)$ y por el otro

$$\int_{\partial\mathcal{B}_{R(s)}(0)} \frac{-\partial\mathcal{G}}{\partial\nu} d\sigma ds = 1.$$

Entonces, podemos acotar I_1 por

$$I_1 \leq \int_{\tau}^{\tau+T} (\widehat{H}(x; \tau) - H_{C_\star}(x)) ds + c(\varepsilon + \delta) \int_{\tau}^{\tau+T} ds,$$

Para concluir obsérvese que \widehat{H} converge uniformemente a H_{C_\star} cuando $\tau \rightarrow \infty$; por tanto, si $\tau \geq \tau_0$ es suficientemente grande, $\widehat{H}(\cdot; \tau) - H(\cdot) \leq \varepsilon$. Así obtenemos que

$$I_1 \leq T\varepsilon + Tc(\varepsilon + \delta).$$

Procediendo de forma similar tenemos que $I_1 \geq -T\varepsilon - Tc(\varepsilon + \delta)$ y concluimos así que

$$|I_1| \leq T\varepsilon + Tc(\varepsilon + \delta).$$

Encontrar una cota para I_2 requiere más esfuerzo, ya que pasa por estimar las integrales de la Función de Green. Utilizamos en primer lugar la propiedad de semiconvexidad de la solución de la EMP,

$$u_t \geq -\frac{u}{(m-1)t},$$

véase por ejemplo [106] para los detalles. Esta expresión se reescribe para $v = t^\alpha u$ como

$$v_\tau \geq \frac{-2\beta v}{(m-1)}.$$

Por tanto sumando y restando $\frac{-2\beta v}{(m-1)}$ y utilizando que v está acotada obtenemos,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left| \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} e^{-2\beta s} \left(v_s + \frac{2\beta}{m-1} v \right) \mathcal{G} \, dx \, ds \right| \\ &\quad + \left| \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} e^{-2\beta s} \left(\frac{2\beta}{m-1} + \alpha \right) v \mathcal{G} \, dx \, ds \right| \\ &\leq \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} \left((e^{-2\beta s} v)_s + \frac{2\beta m}{m-1} v e^{-2\beta s} \right) \mathcal{G} \, dx \, ds + c \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} e^{-2\beta s} \mathcal{G} |v| \, dx \, ds \\ &\leq \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} (e^{-2\beta s} v)_s \mathcal{G} + c e^{-2\beta s} \mathcal{G} \, dx \, ds + c \int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} e^{-2\beta s} \mathcal{G} \, dx \, ds. \end{aligned}$$

Sea ahora R_0 el radio de una bola estrictamente contenida en \overline{G} , $\mathcal{B}_{R_0}(0)$, y consideremos el anillo $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{B}_{R(\tau)}(0) \setminus \mathcal{B}_{R_0}(0)$. Por comparación obtenemos que $\mathcal{G} \leq \mathcal{G}_A$ en Ω_τ , siendo \mathcal{G}_A la Función de Green para \mathcal{A}_τ . Por tanto,

$$|I_2| \leq \underbrace{\int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} \left((e^{-2\beta s} v)_s + \frac{2\beta m}{m-1} v e^{-2\beta s} \right) \mathcal{G}_{A_s} \, dx \, ds}_{I_{21}} + c \underbrace{\int_\tau^{\tau+T} \int_{\Omega_s} e^{-2\beta s} \mathcal{G}_{A_s} \, dx \, ds}_{I_{22}}.$$

Usando la expresión explícita de \mathcal{G}_{A_τ} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{A_\tau}(x; x_0) &= c \left(|x - x_0|^{2-N} - \left(\frac{R(\tau)}{|x_0|} \right)^{N-2} |I_{R(\tau)}(x_0) - x|^{2-N} \right. \\ &\quad \left. - |x - I_{R_0}(x_0)|^{2-N} + \left(\frac{R(\tau)}{|I_{R_0}(x_0)|} \right)^{N-2} |I_{R(\tau)}(I_{R_0}(x_0)) - x|^{2-N} \right) \\ &\leq c \left(|x - x_0|^{2-N} + R^{2-N}(\tau) \left| 1 - \frac{|x| R_0^2}{R^2(\tau) |x_0|} \right|^{2-N} \right), \end{aligned}$$

con $I_R(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^2 x$, obtenemos

$$\int_{\mathcal{A}_\tau} \mathcal{G}_{A_\tau} \, dx \leq c(R(\tau))^2 = c\delta^2 e^{2\beta\tau},$$

y por tanto

$$I_{22} \leq c \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-2\beta s} \int_{\Omega_s} \mathcal{G}_{\mathcal{A}_s} dx ds \leq c \int_{\tau}^{\tau+T} e^{-2\beta s} \int_{\mathcal{A}_s} \mathcal{G}_{\mathcal{A}_s} dx ds \leq c\delta^2 T.$$

Para encontrar una estimación para la integral I_{21} obsérvese que para τ suficientemente grande (cómo de grande depende únicamente de G) se tiene

$$\left| 1 - \frac{|x|R_0^2}{R^2(\tau)|x_0|} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Así, manipulando las integrales y usando la monotonía de R , se obtiene que

$$I_{21} \leq c \overbrace{\int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\Omega_s} (e^{-2\beta s} v)_s |x - x_0|^{2-N} dx ds}^{\mathcal{I}} + cR^{2-N}(\tau) \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\Omega_s} (e^{-2\beta s} v)_s dx ds + c \int_{\tau}^{\tau+T} \int_{\Omega_s} \frac{2\beta m}{m-1} v e^{-2\beta s} \mathcal{G}_{\mathcal{A}_s} dx ds.$$

El último término de esta expresión se puede estimar usando la misma idea que se utilizó para I_{22} . Para acotar \mathcal{I} intercambiamos el orden de integración:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\leq c \int_{\Omega_{\tau+T}} |x - x_0|^{2-N} \int_{\sigma(x)}^{\tau+T} (e^{-2\beta s} v)_s ds dx \\ &\quad + cR^{2-N}(\tau) \int_{\Omega_{\tau+T}} \int_{\sigma(x)}^{\tau+T} (e^{-2\beta s} v)_s ds dx \leq c\delta^2(1 + e^{(N-2)\beta T}), \end{aligned}$$

para una función σ concreta.

La estimación para I_2 es por tanto

$$|I_2| \leq c\delta^2(1 + e^{(N-2)\beta T}) + cT\delta^2.$$

Resumamos el resultado obtenido: si $|x| \leq \delta e^{\beta\tau}$ y τ es suficientemente grande, entonces

$$\frac{1}{T}(|I_1| + |I_2|) \leq \varepsilon + c(\delta + \varepsilon) + \frac{c\delta^2(1 + e^{(N-2)\beta T})}{T} + c\delta^2,$$

lo que prueba la afirmación (10.11). En consecuencia, tomando $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ suficientemente pequeño, demostramos también el lema. \square

Una vez probada la convergencia en media, la demostración del Teorema 10.3 resulta ser un lema de cálculo.

Demostración del Teorema 10.3. Argumentemos por contradicción suponiendo que existe una sucesión de puntos $\{(x_n, \tau_n)\}$ con $\tau_n \rightarrow \infty$ tal que

$$|x_n|e^{-\beta\tau_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad w(x_n, \tau_n) \geq H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon.$$

Usemos de nuevo la propiedad de semiconvexidad para la EMP, escrita ahora en términos de w ,

$$w_\tau \geq -Cw,$$

con C una constante positiva. Integrando esta expresión entre τ_n y $\tau_n + s$ concluimos que

$$w(x_n, \tau_n + s) \geq w(x_n, \tau_n)e^{-Cs} \geq (H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon)e^{-Cs}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} W_T(x_n, \tau_n) &\geq \frac{1}{T}(H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon) \int_0^T e^{-Cs} ds = \frac{1}{T}(H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon) \left(\frac{1 - e^{-CT}}{C} \right) \\ &\geq (H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon)(1 - CT) \geq (H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon}{H_{C_*}(x_n) + 2\varepsilon} \right) \\ &= H_{C_*}(x_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

si $CT < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2C_*^{m-1}}, \frac{1}{4}\right\}$.

De esta forma llegamos a una contradicción con el resultado obtenido en el Lema 10.4, quedando así demostrado el teorema. \square

10.3 *Formulación global*

En las dos secciones anteriores hemos presentado los resultados que describen el comportamiento asintótico de la solución de (9.1) mediante una formulación en el exterior, cerca de la frontera libre, y un límite interior, cerca de los agujeros. Sin embargo, hasta el momento no hemos podido dar ninguna representación global para el límite de u cuando t tiende a infinito.

La formulación global del comportamiento asintótico de u se obtiene combinando los teoremas 10.1 y 10.3. Para ello consideremos la función

$$U_G(x, t) = \left(B_{C_*}(x, t) - t^{-\alpha} C_*^{\frac{1}{m-1}} (1 - H^{\frac{1}{m}}(x)) \right)_+. \quad (10.12)$$

Esta aproximación global se caracteriza por valer 0 en la frontera fija del dominio y por tener soporte compacto. Además su interfase exterior se comporta, cuando t es grande, como la frontera libre de B_{C_\star} , y por tanto como la frontera libre de u .

Teorema 10.5 *Sea C_\star la constante dada por (10.1) y U_G la función definida en (10.12). Entonces, si u es la solución débil de (9.1) se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha |u(x, t) - U_G(x, t)| = 0,$$

uniformemente en $x \in \Omega$.

Demostración. Como $B_{C_\star}(x, t) = t^{-\alpha} F_{C_\star}(xt^{-\beta})$, de la definición de U_G tenemos que

$$\begin{aligned} t^\alpha |u(x, t) - U_G(x, t)| &\leq |t^\alpha u(x, t) - C_\star^{\frac{1}{m-1}} H^{\frac{1}{m}}(x)| + |C_\star^{\frac{1}{m-1}} - F_{C_\star}(xt^{-\beta})| \\ &= |t^\alpha u(x, t) - H_{C_\star}^{\frac{1}{m}}(x)| + |C_\star^{\frac{1}{m-1}} - F_{C_\star}(xt^{-\beta})|. \end{aligned}$$

Para estimar el primer valor absoluto usamos la convergencia uniforme del límite interior, Teorema 10.3. El segundo valor absoluto se acota utilizando la definición de F_{C_\star} . Concluimos entonces que, dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ y un tiempo t_{int} tales que

$$t^\alpha |u(x, t) - U_G(x, t)| \leq \varepsilon$$

si $|x| \leq \delta(\varepsilon)t^\beta$ y $t \geq t_{\text{int}}$.

Una vez vista la convergencia cerca de la frontera fija, analizamos la convergencia lejos de ésta, cerca de la frontera libre. Razonando de forma similar al caso anterior, obtenemos que

$$t^\alpha |u(x, t) - U_G(x, t)| \leq t^\alpha |u(x, t) - B_{C_\star}(x, t)| + |C_\star^{\frac{1}{m-1}} (1 - H^{\frac{1}{m}}(x))|.$$

Se sigue del Teorema 10.1 y del comportamiento en el infinito de H que, para todo $\delta > 0$, y en particular para $\delta(\varepsilon)$, existe un tiempo t_{ext} tal que

$$t^\alpha |u(x, t) - U_G(x, t)| \leq \varepsilon$$

si $|x| \geq \delta(\varepsilon)t^\beta$ y $t \geq t_{\text{ext}}$.

Combinando estas dos estimaciones concluimos la convergencia global de u a U_G , es decir en $x \in \Omega$, para $t \geq \max\{t_{\text{ext}}, t_{\text{int}}\}$. \square

Observación 10.3 Existe una region donde el límite exterior y el interior se superponen, véase la Figura 10.1. Es decir, si δ es suficientemente pequeño, se tiene que

$$t^\alpha |B_{C_\star} - t^{-\alpha} H_{C_\star}^{\frac{1}{m}}| \leq \varepsilon,$$

en la región

$$\frac{1}{\delta} < |x| < \delta t^\beta.$$

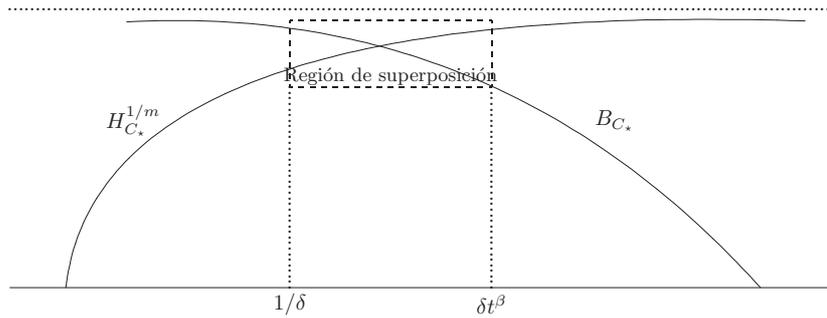


Figura 10.1: Región de superposición de límites

Este hecho se comprueba fácilmente utilizando el comportamiento de B_{C_\star} cerca del origen y el de H_{C_\star} en infinito. Obsérvese en primer lugar que

$$t^\alpha |B_{C_\star} - t^{-\alpha} H_{C_\star}^{\frac{1}{m}}| \leq |t^\alpha B_{C_\star} - C_\star^{\frac{1}{m-1}}| + |H_{C_\star}^{\frac{1}{m}} - C_\star^{\frac{1}{m-1}}|. \quad (10.13)$$

Así, si $|x| \leq \delta t^\beta$ con δ pequeño, tenemos que

$$|t^\alpha B_{C_\star} - C_\star^{\frac{1}{m-1}}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado,

$$|H_{C_\star}^{\frac{1}{m}} - C_\star^{\frac{1}{m-1}}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

si $|x| > \frac{1}{\delta}$ y δ pequeño.

Estas dos estimaciones nos permiten acotar la expresión (10.13) y concluir que

$$t^\alpha |B_{C_\star} - t^{-\alpha} H_{C_\star}^{\frac{1}{m}}| \leq \varepsilon$$

si $|x|$ pertenece a la región $(\frac{1}{\delta}, \delta t^\beta)$ para δ pequeño.

De forma análoga se demuestra que, si $x \in (\frac{1}{\delta}, \delta t^\beta)$, δ es pequeño y t es suficientemente grande, entonces u se comporta simultáneamente como el límite exterior y el interior.

Para concluir el capítulo demostramos que también hay convergencia de u a la aproximación global U_G en norma $L^1(\Omega)$.

Corolario 10.6 Sean u y U_G como en el Teorema 10.5. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - U_G(x, t)\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Demostración. En primer lugar obsérvese que, como tanto la frontera libre de u como la de U_G se propagan como $\mathcal{O}(t^\beta)$, existe una constante C tal que ambas funciones se anulan en el conjunto $|x| \geq Ct^\beta$. Por tanto, utilizando el teorema de convergencia a la aproximación global, Teorema 10.5, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x, t) - U_G(x, t)| dx \\ &= \int_{|x| \leq Ct^\beta} |u(x, t) - U_G(x, t)| dx + \int_{|x| \geq Ct^\beta} |u(x, t) - U_G(x, t)| dx \\ &\leq \int_{|x| \leq Ct^\beta} t^{-\alpha} \varepsilon dx = t^{-\alpha} \varepsilon (Ct^\beta)^N = C^N \varepsilon \end{aligned}$$

para t suficientemente grande. El hecho de que ε sea arbitrariamente pequeño implica la convergencia en $L^1(\Omega)$. \square

Observación 10.4 En esta parte de la Memoria hemos trabajado con datos iniciales de soporte compacto, y por tanto este resultado de convergencia en L^1 se enuncia y demuestra para esta clase de datos. Sin embargo, se puede extender a datos iniciales más generales, $u_0 \in L^1(\Omega)$, utilizando un argumento de densidad, véase [107].

Conclusiones y comentarios

1. Capacidad. Dado un conjunto acotado Q , la capacidad de Q se define como el límite de las capacidades de una sucesión anidada de conjuntos acotados regulares que aproximan a Q . Equivalentemente, utilizando la caracterización variacional, se define la capacidad de Q como

$$\text{cap}_{1,2}(Q) = \inf_{\Phi \in K} \int |\nabla \Phi|^2,$$

donde $K = \{\Phi \in C_0^1(\mathbb{R}^N) : \Phi = 1 \text{ en } Q\}$, véanse por ejemplo [65], [86].

Podemos calcular la pérdida de masa de la solución de los problemas definidos en cada uno de los dominios de la sucesión que aproxima a Q en términos de su capacidad. Si la capacidad límite es 0, entonces el problema límite, definido en Q , no pierde masa.

2. p -Laplaciano. Consideremos ahora soluciones u de la ecuación p -laplaciana de evolución (EPL en lo que sigue),

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

con $p > 2$.

Al igual que sucedía en el caso de la EMP con las funciones Barenblatt, para la EPL también existen unas soluciones fuente. Estas son de la forma

$$B_C(x, t) = t^{-\alpha_p} \left(C - k \left(\frac{|x|}{t^{\beta_p}} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} \right)_+^{\frac{p-1}{p-2}},$$

donde

$$\alpha_p = \frac{N}{N(p-2) + p}, \quad \beta_p = \frac{1}{N(p-2) + p}, \quad k = \frac{p-2}{p} \beta_p^{\frac{1}{p-1}}.$$

La constante C de la solución fuente se relaciona con la masa M de la solución mediante la siguiente expresión,

$$C = c(p, N) M^{\frac{p(p-2)}{p-1} \beta_p}.$$

En este caso también podemos definir una función Φ_p que mide la p -capacidad del agujero G ; es decir, Φ_p es una función p -armónica, que vale 1 en $\partial\Omega$ y tiende a 0 cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Nos gustaría demostrar un resultado análogo al Teorema 10.5 para la solución u de la EPL.

Teorema. *Sea u una solución de la EPL. Existe una constante C_p tal que*

$$U_p(x, t) = B_{C_p}(x, t) - t^{-\alpha_p} C_p^{\frac{p-2}{p-1}} \Phi_p(x)$$

es una aproximación global para u ; es decir,

$$t^{\alpha_p} |u(x, t) - U_p(x, t)| \rightarrow 0$$

uniformemente cuando $t \rightarrow \infty$.

Recordemos que uno de los puntos fundamentales en el análisis del comportamiento asintótico de la EMP fue determinar la masa límite de la solución, o lo que es equivalente, determinar la constante asintótica C_* . El cálculo de dicha constante se realizó utilizando la ley de conservación demostrada en la Sección 9.2 del Capítulo 9. Intentemos reproducir esta idea para la EPL. Para ello definimos

$$I(t) = \int_{\Omega} f(x) u(x, t) dx.$$

Como u es de soporte compacto, integrando por partes en Ω obtenemos que

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega} f u_t dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla f \cdot \nabla u dx.$$

Obsérvese que, llegados a este punto, no podemos continuar con el mismo desarrollo que el hecho para la EMP. La principal dificultad que nos encontramos es que el operador p -laplaciano no es autoadjunto.

Podríamos demostrar por tanto, al igual que hicimos para la EMP, que el límite exterior es una solución fuente B_C a lo largo de subsucesiones, pero al no conocer la masa asintótica, no podemos concluir la convergencia independientemente de la subsucesión escogida.

3. Hot spots. Una posible extensión de los resultados presentados en esta parte de la memoria consiste en determinar los *hot spots*, $\mathcal{H}(t)$, del problema (9.1); es decir, estudiar el movimiento de los puntos determinados por

$$\mathcal{H}(t) = \{x \in \bar{\Omega} : u(x, t) = \max_{y \in \bar{\Omega}} u(y, t)\},$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Cuando $N = 1$, el comportamiento de $\mathcal{H}(t)$ se concluye directamente de la convergencia de u a la solución dipolo.

Sea

$$\mathcal{H}_+(t) = \sup_{x \in \mathcal{H}(t)} |x|, \quad \mathcal{H}_-(t) = \inf_{x \in \mathcal{H}(t)} |x|.$$

Si llamamos ξ_* al único punto donde el perfil del dipolo alcanza un máximo, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}_\pm(t)}{t^{\frac{1}{2m}}} = \xi_*.$$

Para N general, sólo se conocen resultados parciales para el caso $m = 1$. En [75], se prueba que si $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{B}_R(0)$ entonces

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}_\pm(t)}{t^{\frac{1}{N}}} = (2(N-2)R^{N-2})^{\frac{1}{N}}, & N \geq 3, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}_\pm(t)}{(t \log t)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}, & N = 2. \end{cases}$$

En el caso que nos ocupa a nosotros, $m > 1$ y $N \geq 3$, la existencia de la aproximación global U_G , véase el Teorema 10.5, implica que los *hot spots* se localizan en la región donde el comportamiento exterior y el interior se superponen. Se verifica

además que

$$\mathcal{H}_{\pm}(t) \rightarrow \infty, \quad \frac{\mathcal{H}_{\pm}(t)}{t^{\beta}} \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Aunque el comportamiento exacto de $\mathcal{H}(t)$ es un problema abierto, conjeturamos que deberá ser como el caso de una dimensión espacial: $\mathcal{H}(t)$ se deberá mover como el máximo de la aproximación global,

$$\mathcal{H}_{\pm}(t) \sim \mathcal{O}(t^{\frac{2\beta}{N}}).$$

4. Datos de frontera con decaimiento rápido. Otro aspecto a tener en cuenta es el análisis del comportamiento de u cuando se sustituye el dato de frontera trivial por uno de la forma

$$0 \leq u(x, t) \leq ct^{-\sigma}, \quad x \in \partial\Omega,$$

con $\sigma \geq \alpha$. En este caso se pueden seguir utilizando las funciones tipo Barenblatt como supersoluciones. Por tanto el teorema de convergencia sigue siendo cierto y además la frontera libre se mueve como $\mathcal{O}(t^{\beta})$.

Por otro lado, si

$$u(x, t) = \psi(x)t^{-\sigma}, \quad x \in \partial\Omega,$$

donde $\sigma \in (-\infty, \frac{1}{m})$ y ψ es una función no trivial, no negativa y acotada, la frontera libre de u se mueve como $\mathcal{O}(t^{\beta m(1-\sigma(m-1))})$, véase [101].

A la vista de estos dos resultados se observa que todavía no está cubierto todo el rango de posibles valores para σ , ya que falta por estudiar el caso en el que u decae como

$$0 \leq u(x, t) \leq ct^{-\sigma}, \quad x \in \partial\Omega,$$

para $\sigma \in [\frac{1}{m}, \alpha)$.

5. Ecuación del calor y difusión rápida. Otros datos iniciales. El problema (9.1) restringido a $m = 1$, es decir, la ecuación del calor, y con datos iniciales de la forma

$$u_0 \sim C|x|^{-\gamma}, \quad \gamma > 0$$

se estudia en [72], tanto para $\gamma > N$ como para $\gamma \leq N$.

Si $\gamma > N$ se obtienen resultados similares a los descritos en esta parte de la memoria, exceptuando los relativos al comportamiento de la frontera libre. Las técnicas descritas en los capítulos anteriores permiten extender estos resultados a datos más generales, $u_0 \in L^1(\Omega)$, e incluso desarrollar la misma teoría para el problema con difusión rápida ($m < 1$).

En el caso $\gamma \leq N$ las demostraciones presentadas en [72] dependen de la linealidad del problema y por tanto no se pueden aplicar cuando $m \neq 1$. Sin embargo, el caso $m \neq 1$ sí se puede tratar con las herramientas descritas en esta Memoria para datos iniciales de soporte compacto. Se puede demostrar que el comportamiento exterior de la solución viene dado por una solución autosemejante de la EMP, definida en todo el espacio y con el decaimiento apropiado en infinito. Estas soluciones autosemejantes, construidas en [4], se unen, utilizando la técnica de *matching*, con la solución cuasi-estacionaria que define el comportamiento en el interior. El agujero del dominio no produce ningún efecto sobre el desarrollo exterior, ya que es insignificante comparado con el tamaño de la solución en infinito.

IV

Apéndices

A

Un método totalmente discreto

Este apéndice pretende recoger los resultados obtenidos cuando se discretiza totalmente, en espacio y en tiempo, una ecuación parabólica con difusión no lineal y con un flujo no lineal de tipo potencia a través de la frontera.

Contenido

A.1. Preliminares	248
A.2. El método adaptativo	250
1. Discretización espacial	250
2. Discretización temporal	251
3. Refinado de la malla	253
A.3. Propiedades de la solución numérica adaptativa	254

A.1 Preliminares

Como ya comentamos en el capítulo dedicado a conclusiones y comentarios de la Parte I de esta Memoria, al estudiar un método numérico diseñado para resolver problemas parabólicos, no sólo se debe discretizar la variable espacial, sino que también ha de tenerse en cuenta la discretización temporal. En el método utilizado en el Capítulo 5 se consideraba la variable t continua y se discretizaba únicamente en espacio. Para completar el estudio queremos presentar brevemente un método adaptativo totalmente discreto para un problema con una única ecuación parabólica y flujo no lineal a través de la frontera. El objetivo es el mismo que nos planteábamos en el Capítulo 5: reproducir correctamente las propiedades de explosión de un problema dado.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = (u^m)_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ (u^m)_x(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ (u^m)_x(1, t) = u^p(1, t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

con un dato inicial $u(x, 0) = f(x)$, $x \in (0, 1)$, estrictamente positivo y compatible con los datos de frontera.

Antes de desarrollar el método totalmente discreto para (A.1), resumamos brevemente los resultados continuos conocidos para este problema, véase [58] para los detalles:

1. Para todo dato inicial positivo, las soluciones explotan si y solo si

$$p > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}.$$

2. Si u explota la tasa de explosión viene dada por

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T-t)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\max\{p-1, 2p-(m+1)\}}.$$

3. El conjunto de explosión es, [35], [58],

$$B(u) = \begin{cases} [0, 1], & 1 < p \leq m, \\ \{1\}, & p > m. \end{cases}$$

Observación A.1 En el caso que tratamos aquí no aparece la posibilidad de explosión regional por ser el intervalo de definición del problema pequeño. Si trabajamos en $[0, L]$ con L grande y $p = m$ la explosión es regional.

Un primer intento para aproximar el problema (A.1) es el realizado en [53], que considera un esquema semidiscreto basado en la discretización espacial con malla fija de tamaño h y manteniendo la variable temporal continua. Los resultados obtenidos se enuncian a continuación:

1. La aproximación numérica U explota si y solo si $p > 1$.
2. La tasa de explosión de U viene dada por

$$\|U(t)\|_\infty \sim (T_h - t)^{-\frac{1}{p-1}},$$

donde T_h denota el tiempo de explosión de U .

3. El conjunto de explosión de U es

$$B(U) = [1 - Kh, 1],$$

siendo K una constante que depende sólo de p y de m . Al igual que en el Capítulo 5, $B(U)$ se entiende como el conjunto de explosión de la interpolada de Lagrange, U^I , de U en los nodos de la malla.

Se observa por tanto que el esquema con malla fija no reproduce correctamente las propiedades de explosión de la solución continua del problema (A.1) cuando $p > m$.

El objetivo del apéndice es desarrollar un método adaptativo en espacio, inspirado en [54] y en las ideas descritas en el Capítulo 5, que permita reproducir el comportamiento de la solución continua. La discretización espacial se combina con una discretización temporal basada en ideas de [2]. Para la integración temporal presentamos extensamente un método de Euler explícito con paso de tiempo adaptativo. Se comentará brevemente cómo adaptar la técnica descrita en [2] a un método Euler implícito.

Observación A.2 Aunque los métodos explícitos no son adecuados para resolver discretizaciones de problemas parabólicos, ya que éstos dan lugar a problemas stiff, los hemos utilizado aquí, por ser más sencillos a la hora de ilustrar la teoría general.

Este apéndice pretende únicamente ilustrar cómo construir un método adaptativo totalmente discreto; por tanto sólo enunciaremos los resultados más significativos. El Teorema A.1 muestra que el método que desarrollamos reproduce correctamente las propiedades de explosión del problema (A.1). El lector interesado puede encontrar los detalles y las demostraciones en [17].

A.2 El método adaptativo

El esquema adaptativo totalmente discreto que describimos a continuación se construye siguiendo tres pasos:

- discretización espacial;
- discretización temporal adaptativa;
- refinado de la malla espacial.

1. **Discretización espacial.** Siguiendo la misma idea que la descrita en el Capítulo 5 consideramos el conjunto de nodos, $\{x_0, \dots, x_N\}$ con $x_0 = 0$, $x_N = 1$, y buscamos una aproximación numérica

$$U(t) = (u_0(t), \dots, u_N(t)) \approx (u(x_0, t), \dots, u(x_N, t))$$

que sea solución del sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} u'_0 = \frac{2}{h_1^2}(u_1^m - u_0^m), \\ u'_i = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h_{i+1}} - \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h_i} \right), & 1 \leq i \leq N-1, \\ u'_N = \frac{2}{h_N^2}(u_{N-1}^m - u_N^m) + \frac{2}{h_N} u_N^p, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

donde $h_i = x_i - x_{i-1}$ y con dato inicial

$$u_i(0) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq N.$$

2. Discretización temporal. Para discretizar la variable temporal se pueden utilizar diversos métodos. Describiremos aquí con detalle un esquema de Euler explícito y explicaremos brevemente el método de Euler implícito. Aunque no nos centraremos aquí en métodos Runge-Kutta de mayor orden, éstos también se pueden usar para la integración temporal. La idea para ello es la misma que mostramos a continuación.

Fijemos primero la notación. Sea $U^j = (u_1^j, \dots, u_N^j)$ la discretización de $U(t)$ en un tiempo t^j y τ_j el paso de tiempo adaptativo, que será elegido por el método usado para la discretización temporal. Se cumple entonces que

$$t^j = \sum_{k=1}^j \tau_k.$$

Método de Euler explícito. Inspirados en [2], elegimos el paso de tiempo τ_j según la siguiente regla

$$\begin{aligned} \tau_j (u_N^j)^{2p-m} &= \lambda, & p > m, \\ \tau_j (u_N^j)^p &= \lambda, & p \leq m, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde el parámetro del método, λ , tiene que ser pequeño para que se cumpla una determinada condición de estabilidad propia los métodos explícitos. Obsérvese que, según esta definición, el paso de la discretización temporal τ_j decrece cuando la solución crece (es decir, según avanza el tiempo t).

Aplicando entonces el método de Euler explícito a (A.2), obtenemos

$$\begin{cases} \frac{u_0^{j+1} - u_0^j}{\tau_j} = \frac{2}{h_1^2} ((u_1^j)^m - (u_0^j)^m), \\ \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau_j} = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{(u_{i+1}^j)^m - (u_i^j)^m}{h_{i+1}} - \frac{(u_i^j)^m - (u_{i-1}^j)^m}{h_i} \right), \\ \frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau_j} = \frac{2}{h_N^2} ((u_{N-1}^j)^m - (u_N^j)^m) + \frac{2}{h_N} (u_N^j)^p, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

con $1 \leq i \leq N - 1$.

Método de Euler implícito. De forma análoga al esquema explícito definimos el método implícito. Elegimos τ_j según la fórmula (A.3), sin imponer ahora ninguna restricción sobre el tamaño del parámetro λ . En este caso, la parte correspondiente

a la discretización de $(u^m)_{xx}$ se evalúa en el tiempo t^{j+1} . Así, el sistema (A.2) se convierte en

$$\begin{cases} \frac{u_0^{j+1} - u_0^j}{\tau_j} = \frac{2}{h_1^2} ((u_1^{j+1})^m - (u_0^{j+1})^m), \\ \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau_j} = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{(u_{i+1}^{j+1})^m - (u_i^{j+1})^m}{h_{i+1}} - \frac{(u_i^{j+1})^m - (u_{i-1}^{j+1})^m}{h_i} \right), \\ \frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau_j} = \frac{2}{h_N^2} ((u_{N-1}^{j+1})^m - (u_N^{j+1})^m) + \frac{2}{h_N} (u_N^j)^p, \end{cases}$$

con $1 \leq i \leq N - 1$.

Nótese que este método no es totalmente implícito, ya que la discretización de la condición de frontera no lineal u^p se evalúa en tiempo t^j , cuando debería ser evaluada en t^{j+1} . Este hecho evita, cuando $m = 1$, tener que resolver un sistema no lineal en cada paso. Si $m \neq 1$ no aporta ninguna ventaja, ya que en este caso la no linealidad aparece también a través del término de difusión $(u^m)_{xx}$.

Métodos de cualquier orden. Describamos brevemente cómo construir métodos de cualquier orden con un paso de tiempo adaptativo. Siguiendo las ideas descritas en [2] introducimos una nueva variable temporal $s = s(t)$ para el problema semidiscreto (A.2), de forma que $\widehat{U}(s) = U(t(s))$. Elegimos s para que $\widehat{U}(s)$ esté definida globalmente y así poder usar un método de paso de tiempo fijo. El cambio de escala viene dado por

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{u_N^\eta(s)}, \\ t(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

donde el parámetro η se elegirá más adelante en función de p y m .

En estas condiciones reescribimos el sistema (A.2) en términos de \widehat{U} y s como

$$\begin{cases} \hat{u}_N^\eta \hat{u}'_0 = \frac{2}{h_1^2} (\hat{u}_1^m - \hat{u}_0^m), \\ \hat{u}_N^\eta \hat{u}'_i = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{\hat{u}_{i+1}^m - \hat{u}_i^m}{h_{i+1}} - \frac{\hat{u}_i^m - \hat{u}_{i-1}^m}{h_i} \right), \quad 1 \leq i \leq N - 1, \\ \hat{u}_N^\eta \hat{u}'_N = \frac{2}{h_N^2} (\hat{u}_{N-1}^m - \hat{u}_N^m) + \frac{2}{h_N} \hat{u}_N^p, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

con $\hat{u}_i(0) = f(x_i)$, $0 \leq i \leq N$.

La idea del método consiste en definir discretizaciones temporales adaptativas para el sistema (A.2) a partir de esquemas con paso fijo λ para (A.5)–(A.6). Veamos cómo hacerlo con un ejemplo concreto.

Si discretizamos (A.5) con un método de Euler explícito, obtenemos

$$\begin{cases} \frac{t^{j+1} - t^j}{\lambda} = \frac{1}{(u_{N+1}^j)^\eta}, \\ t(0) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

El sistema (A.6) se convierte entonces en

$$\begin{cases} \hat{u}_N^\eta \frac{\hat{u}_0^{j+1} - \hat{u}_0^j}{\lambda} = \frac{2}{h_1^2} ((\hat{u}_1^j)^m - (\hat{u}_0^j)^m), \\ \hat{u}_N^\eta \frac{\hat{u}_i^{j+1} - \hat{u}_i^j}{\lambda} = \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{(\hat{u}_{i+1}^j)^m - (\hat{u}_i^j)^m}{h_{i+1}} - \frac{(\hat{u}_i^j)^m - (\hat{u}_{i-1}^j)^m}{h_i} \right), \\ \hat{u}_N^\eta \frac{\hat{u}_N^{j+1} - \hat{u}_N^j}{\lambda} = \frac{2}{h_N^2} ((\hat{u}_{N-1}^j)^m - (\hat{u}_N^j)^m) + \frac{2}{h_N} (\hat{u}_N^j)^p, \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

con $1 \leq i \leq N - 1$. Si definimos ahora $\tau_j = t^{j+1} - t^j$, y denotamos $U^j = \hat{U}^j$, entonces (A.8) coincide con el esquema (A.4) descrito anteriormente. Además, si

$$\eta = \begin{cases} 2p - m, & p > m, \\ p, & p \leq m, \end{cases}$$

de (A.7) obtenemos que el paso de tiempo adaptativo, τ_j , verifica la definición dada en (A.3).

3. Refinado de la malla. El método utilizado para refinar la malla espacial utiliza la técnica que describimos en el Capítulo 5: se añade un nuevo punto a la malla cada vez que una cierta cantidad alcanza una tolerancia dada.

Centrémonos en el caso en el que la discretización temporal se realiza utilizando un método de Euler explícito y consideremos únicamente el caso $p > m$, ya que, cuando $p \leq m$ el esquema con paso fijo reproduce correctamente las condiciones de explosión del sistema continuo.

Siguiendo los argumentos del Capítulo 5, podemos elegir una constante r tal que la condición

$$r(u_N^j)^{2p-m} \leq \frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau_j} \quad (\text{A.9})$$

se verifique inicialmente. La idea que reside detrás de esta elección es la de conseguir que el problema discreto tenga la misma tasa de explosión que el problema continuo.

Por otro lado, como la ecuación que describe el comportamiento del último nodo es

$$u_N^{j+1} - u_N^j = \tau_j \left(\frac{2}{h_N^2} ((u_{N-1}^j)^m - (u_N^j)^m) + \frac{2}{h_N} (u_N^j)^p \right), \quad (\text{A.10})$$

la expresión (A.9) es equivalente a

$$r(u_N^j)^{2p-m} \leq \frac{2}{h_N^2} ((u_{N-1}^j)^m - (u_N^j)^m) + \frac{2}{h_N} (u_N^j)^p \leq c_2 (u_N^j)^{2p-m}. \quad (\text{A.11})$$

Así, si definimos

$$R(j; h_N) = \frac{\frac{2}{h_N^2} ((u_{N-1}^j)^m - (u_N^j)^m) + \frac{2}{h_N} (u_N^j)^p}{(u_N^j)^{2p-m}},$$

siguiendo los argumentos descritos en el Capítulo 5, tendremos que añadir un nuevo punto a la malla espacial siempre que $R(j; h_N) \leq r$.

A.3 Propiedades de la solución numérica adaptativa

Sea $u_{h,\lambda}$ la solución numérica de (A.1), obtenida por interpolación en espacio y tiempo a partir de U^j . Recordemos que h denota el tamaño de la malla espacial y λ es el parámetro de la discretización temporal. De forma análoga a la definición de explosión en el problema continuo, diremos que $u_{h,\lambda}$ explota si existe un tiempo finito $T_{h,\lambda}$ tal que

$$\lim_{t \nearrow T_{h,\lambda}} \|u_{h,\lambda}(\cdot, t)\|_\infty = \infty.$$

Nótese que si $T_{h,\lambda}$ es el tiempo de explosión de la solución numérica, se tiene que

$$T_{h,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k. \quad (\text{A.12})$$

Observación A.3 La solución del método numérico explota en tiempo finito si $u_N^j \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$ y además la serie (A.12) converge.

El resultado que enunciamos a continuación afirma que la solución numérica obtenida al discretizar (A.1) mediante un método adaptativo (diferencias finitas en espacio y Euler explícito en tiempo), reproduce correctamente las propiedades de explosión de la solución continua, u .

Teorema A.1 *Sea u una solución de (A.1) creciente en espacio, suficientemente regular y que explota en tiempo T y sea $u_{h,\lambda}$ la aproximación numérica obtenida con el método adaptativo descrito en la Sección A.2. Entonces para $\tau > 0$, $0 < \tau < T$, $u_{h,\lambda}$ converge uniformemente a u en conjuntos de la forma $[0, 1] \times [0, T - \tau]$. Es más:*

(i) *La solución numérica $u_{h,\lambda}$ explota si y sólo si*

$$p > \min \left\{ 1, \frac{m+1}{2} \right\}.$$

(ii) *Si $u_{h,\lambda}$ explota en tiempo $T_{h,\lambda}$, su tasa de explosión viene dada por*

$$\|u_{h,\lambda}(\cdot, t)\|_\infty \sim (T_{h,\lambda} - t)^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\max\{p-1, 2p-(m+1)\}}.$$

(iii) *Cuando $u_{h,\lambda}$ explota su conjunto de explosión viene dado por*

$$B(u_{h,\lambda}) = \begin{cases} \{1\}, & p > m, \\ [0, 1], & p \leq m. \end{cases}$$

Demostremos también la convergencia del tiempo de explosión discreto al continuo, obteniendo en el caso $m = 1$ una cota para $|T_{h,\lambda} - T|$ en términos de h y λ .

Teorema A.2 *Sean T y $T_{h,\lambda}$ los tiempos de explosión de u y $u_{h,\lambda}$ respectivamente. Entonces,*

$$\lim_{(h,\lambda) \rightarrow (0,0)} |T_{h,\lambda} - T| = 0.$$

Es más, si $m = 1$, existen $\alpha > 0$ y $C > 0$ tales que

$$|T_{h,\lambda} - T| \leq C(h^2 + \lambda)^\alpha.$$

La idea principal de la demostración de la segunda parte de este teorema (el caso $m = 1$) es encontrar una supersolución, \bar{e} para la ecuación que verifica el error, e , y de forma que

$$\bar{e}(x, t) \leq C(h^2 + \lambda)(T - t)^{-\eta}. \quad (\text{A.13})$$

Esto permite encontrar una cota, en función de h y λ , para $|T_{h,\lambda} - T|$.

El resultado cuando $m \neq 1$ no es tan fuerte, ya que sólo afirma que $|T_{h,\lambda} - T|$ tiende a cero, pero no determina cómo lo hace. No hemos podido demostrar el resultado análogo al del caso $m = 1$, ya que para construir la supersolución \bar{e} y obtener la cota (A.13) se usó la linealidad de la ecuación que verifica el error.

B

Continuidad de las soluciones de la ecuación de filtración

Resumimos aquí los resultados relacionados con la continuidad de soluciones de la ecuación de filtración. Recordemos que dicha ecuación se usó repetidas veces en la Parte II para definir la transformación densidad-presión.

Contenido

B.1. Preliminares	258
B.2. Teorema de Continuidad	259

B.1 Preliminares

La posible continuidad de las soluciones débiles de la ecuación de filtración

$$\rho_t = \Delta\Phi(\rho) \tag{B.1}$$

en función de las condiciones impuestas sobre Φ ha sido ampliamente estudiada, véase por ejemplo [45], [46], [103], [117].

Como vimos en el Capítulo 6 (Sección 6.3), gracias a la transformación

$$u = \mathcal{P}(\rho) \equiv \int_c^\rho \frac{\Phi'(s)}{s} ds$$

podemos convertir soluciones u de

$$u_t = a(u)\Delta u + |\nabla u|^2$$

en soluciones ρ de (B.1). La relación entre ambas ecuaciones queda determinada por la fórmula

$$a(u) = \Phi'(\mathcal{P}^{-1}(u)) > 0. \tag{B.2}$$

Esta definición introduce algunas restricciones que tendrán que ser tenidas en cuenta a la hora de estudiar la posible continuidad de la solución ρ . Entre estas limitaciones cabe destacar la impuesta por la condición

$$a(u) \leq ku \tag{B.3}$$

introducida en la Sección 6.1.

La teoría para la ecuación de filtración (B.1) está enunciada para funciones Φ tales que Φ' está localmente acotada, tanto superior como inferiormente, véase [46] y [117]. Obsérvese que los resultados presentados en estos trabajos no se pueden utilizar en nuestro caso: la definición de Φ' , (B.2), junto con la hipótesis (B.3) no nos permite asegurar que Φ' esté acotada inferiormente.

Afortunadamente esta situación queda cubierta por [45] y [103], como veremos en la siguiente sección.

Antes de enunciar el Teorema B.1, que asegura la continuidad de soluciones de la ecuación (B.1) bajo nuestras hipótesis, recordemos la importancia que de hecho

tiene que tales soluciones sean continuas, recordando los resultados en los que es necesaria dicha regularidad y esbozando su demostración.

La continuidad de las soluciones de (B.1) se usa por primera vez en la Proposición 7.1, que afirma la existencia de soluciones de viscosidad maximales. La demostración de esta proposición comenzaba probando que la función \bar{u} es una función continua. Luego se vería que además es una solución de viscosidad.

Es para probar que \bar{u} es continua donde utilizamos la continuidad de ρ . En lugar de hacer un estudio de la regularidad de la ecuación, se obtiene el resultado como consecuencia de la transformación densidad-presión, que permite transformar las funciones u_ε en soluciones ρ_ε , y de la continuidad de las soluciones de la ecuación de filtración.

También se utiliza la continuidad de ρ en la demostración de la Proposición 7.5. Recordemos que para demostrar esta proposición partíamos de un dato inicial $\rho_0 \geq 0$ continuo y acotado, que era aproximado por datos iniciales positivos $\rho_{0,\varepsilon}(x)$.

En esta situación, la teoría de ecuaciones parabólicas cuasilineales, [84], afirma que el problema de Cauchy (B.1) asociado a cada $\rho_{0,\varepsilon}$ tiene una única solución. Además las soluciones ρ_ε son clásicas y forman una sucesión decreciente, cuyo límite ρ es continuo (como veremos a continuación). Por tanto, la sucesión $\{\rho_\varepsilon\}$ converge localmente uniformemente a ρ .

B.2 Teorema de Continuidad

Para poder establecer la continuidad de las soluciones de la ecuación de filtración (B.1) utilizando [45], en primer lugar definimos

$$v = \Phi(\rho), \quad \beta = \Phi^{-1}.$$

Así, reescribimos (B.1) como

$$\beta(v)_t - \Delta v = 0. \tag{B.4}$$

Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N . Definimos el dominio cilíndrico $\Omega_T \equiv \Omega \times (0, T)$, para $T > 0$.

Definición B.1 Diremos que la función $v \in L^2_{\text{loc}}(0, T; W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega))$ es una solución débil de (B.4) si

$t \rightarrow \beta(v(\cdot, t))$ es débilmente continua en $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \beta(v)\varphi(x, s) dx \Big|_{s=t_1}^{s=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} -\beta(v)\varphi_t + \nabla v \cdot \nabla \varphi dx ds = 0$$

para toda función test $\varphi \in W^{1,2}_{\text{loc}}(0, T; L^2_{\text{loc}}(\Omega)) \cap L^2_{\text{loc}}(0, T; W^{1,2}_0(\Omega))$.

Obsérvese que, debido a la definición de β como $\beta = \Phi^{-1}$, ésta hereda las propiedades de Φ . Es decir:

- la función $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase $\mathcal{C}^2(0, \infty)$;
- para todo $v > 0$ se verifica $\beta' > 0$;
- $\beta(0) = 0$;
- β está acotada sobre compactos;
- $\beta'(v) \geq C$, por ser $\Phi'(\rho) = a(u) \leq C$.

Esta última condición aparece en [45] como necesaria para poder establecer que las soluciones débiles acotadas v son continuas y que además tienen un módulo uniforme de continuidad. Enunciamos a continuación el teorema que aparece en [45].

Teorema B.1 (E. DiBenedetto, V. Vespri, [45]) *Sea v una solución débil de la ecuación de filtración (B.4) en el sentido de la Definición B.1. Supongamos que β verifica las hipótesis anteriores y que*

$$\|v\|_{\infty, \Omega_T} \leq M.$$

Entonces v es continua en Ω_T .

Además, para cada compacto $\mathcal{K} \subset \Omega_T$, existe un módulo uniforme de continuidad. Es decir, existe una función continua, no negativa y estrictamente creciente $\omega : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$s \rightarrow \omega_{\text{datos}, \mathcal{K}}(s), \quad \omega_{\text{datos}, \mathcal{K}}(0) = 0.$$

Esta función que se puede determinar a priori únicamente en función de los datos y de la distancia de \mathcal{K} a la frontera parabólica de Ω_T , es tal que

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq \omega_{\text{datos}, \mathcal{K}}(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}),$$

para todo par de puntos $(x_i, t_i) \in \mathcal{K}$, $i = 1, 2$.

En la situación que hemos descrito, para poder aplicar este teorema y poder asegurar que ρ es continua, falta comprobar que v , la solución débil de (B.4), verifica

$$\|v\|_{\infty, \Omega_T} \leq M,$$

con $M > 0$ una constante. Para demostrar este hecho, basta observar que $v = \Phi(\rho)$, de donde obtenemos, utilizando de nuevo la definición de Φ' , que $\|\Phi(\rho)\|_{\infty, \Omega_T} \leq M$.

Por tanto concluimos que v es continua. Esta continuidad se traslada automáticamente a la solución ρ de (B.1) usando que β es continua y que además $\rho(x, t) = \beta(v(x, t))$. De esta forma obtenemos el módulo de continuidad para soluciones ρ acotadas de la ecuación de filtración.

C

Comportamiento exterior de la EMP. Un ejemplo radial

En este apéndice pretendemos ilustrar los resultados descritos en la Parte III de la Memoria. Utilizando un ejemplo con simetría radial calculamos explícitamente la constante asintótica del problema e implementamos un método numérico que permite observar tanto la convergencia de la solución a su límite exterior y a su límite interior como el avance de la frontera libre.

Contenido

C.1. Preliminares	264
C.2. Resultados numéricos	265

C.1 Preliminares

Sea $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{G}$ con G la bola de radio 1 centrada en el origen, $\mathcal{B}_1(0)$. El objetivo de este apéndice es estudiar el comportamiento de

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

cuando u_0 es un dato inicial radial.

Obsérvese que, como tanto el dominio de definición del problema como el dato inicial tienen simetría radial, la solución u del problema también es radial. En consecuencia, el problema que estamos estudiando, (C.1), se puede reescribir como

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{rr} + \frac{N-1}{r} u_r, & (r, t) \in (1, \infty) \times (0, \infty), \\ u(1, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ u(r, 0) = u_0(r), & r \in (1, \infty). \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Centrémonos en el caso concreto en el que el dato inicial es

$$u_0(r) = ((1-r)(r-10))_+.$$

Tomemos $N = 3$ y $m = 2$. Los exponentes de autosemejanza α y β , que describen el decaimiento de la solución y la velocidad de avance de la frontera libre respectivamente, son entonces

$$\alpha = \frac{N}{N(m-1)+2} = \frac{3}{5}, \quad \beta = \frac{1}{N(m-1)+2} = \frac{1}{5}.$$

Con estos parámetros y teniendo en cuenta la simetría radial del problema, la solución de Barenblatt que describe el comportamiento exterior de u es

$$B_{C_\star}(r, t) = t^{-\alpha} \left(C_\star - \frac{\beta(m-1)}{2m} \frac{r^2}{t^{2\beta}} \right)_+^{\frac{1}{m-1}} = t^{-\frac{3}{5}} \left(C_\star - \frac{1}{20} \frac{r^2}{t^{\frac{2}{5}}} \right)_+^{\frac{1}{2}}.$$

El límite interior viene dado por la función armónica

$$t^{-\alpha} (H_{C_\star}(r))^{\frac{1}{m}} = t^{-\alpha} C_\star^{\frac{1}{m-1}} (H(r))^{\frac{1}{m}} = t^{-\frac{3}{5}} C_\star \left(1 - \frac{1}{r} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Obsérvese que, de las dos expresiones anteriores, se deduce que para determinar exactamente el comportamiento cuando t tiende a infinito de u es necesario conocer la constante asintótica del problema, C_* . En este ejemplo concreto, utilizando la fórmula (10.1), obtenemos

$$\begin{aligned} C_* &= \left(\frac{1}{k(m, N)} \int_{\Omega} H(x) u_0(x) dx \right)^{2(m-1)\beta} \\ &= \left(\frac{4\pi}{k(m, N)} \int_1^{10} (r-1)^2 (10-r)r dr \right)^{\frac{2}{5}} \approx 9.705, \end{aligned}$$

siendo $k(m, N) = 20^{\frac{3}{2}} \cdot 8 \cdot \frac{\pi}{15} \approx 149.8627$.

C.2 Resultados numéricos

Utilizando un esquema numérico apropiado podemos aproximar la solución del problema radial (C.2) e ilustrar así su comportamiento asintótico. El método numérico que implementamos consta de tres pasos:

- *front tracking*; ¹
- discretización espacial;
- discretización temporal.

El algoritmo de *front tracking* que usamos para determinar la frontera libre utiliza ideas descritas en [44] y [73]. La discretización de la variable r se hace mediante un esquema en diferencias finitas manteniendo la variable t continua. Resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que resulta con el integrador ODE15s que proporciona MATLAB® para este tipo de problemas.

Mostramos en primer lugar, Figura C.1, como evoluciona la solución con el tiempo. La línea punteada representa la solución en el tiempo $t = 10^4$. Representamos mediante “punto-raya” a la solución en $t = 10^5$. El resto de las líneas, las de

¹Una posible traducción al español sería “persecución de la frontera”. Preferimos el término anglosajón, por ser más habitual.

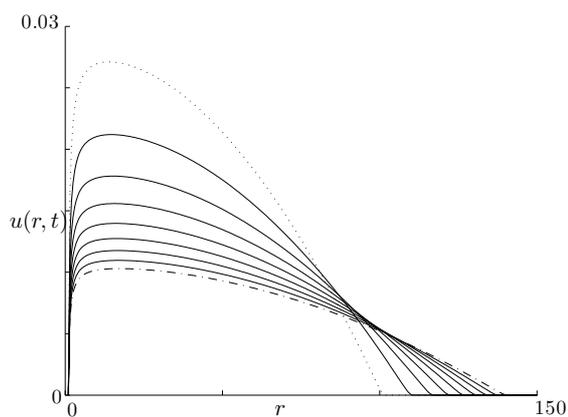


Figura C.1: Evolución de u

trazo continuo, corresponden a tiempos intermedios entre 10^4 y 10^5 . En la figura se observa que la solución decrece y la frontera libre crece según avanza el tiempo.

Una vez vista la evolución temporal de la solución nos centramos en mostrar su comportamiento asintótico. Para ello dibujamos en las escalas correspondientes al límite interior y exterior la solución del problema obtenida para el tiempo $t = 10^4$.

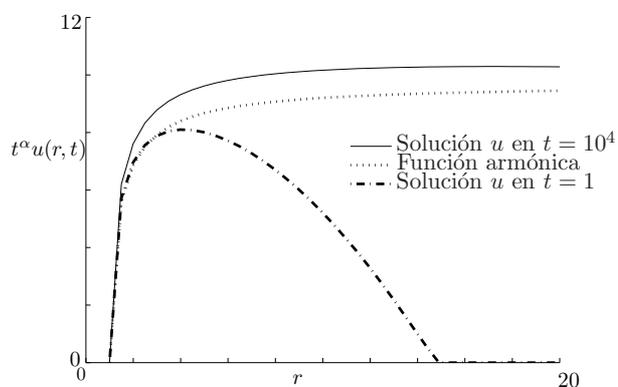


Figura C.2: Límite interior

En la Figura C.2 dibujamos la solución multiplicada por t^α . Obsérvese que, según lo expuesto en el Capítulo 10, u converge a la solución estacionaria

$$H_{C_\star}^{\frac{1}{m}}(r) = C_\star \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

que está representada por medio de la línea punteada.

La Figura C.3 muestra el límite exterior. Se observa que u converge a la función correcta, que en este caso corresponde a una Barenblatt con constante C_* . En la escala que usamos en esta figura, la frontera interior se contrae a cero. Esto significa que el agujero del dominio es cada vez más pequeño y según pasa el tiempo deja de influir en el comportamiento de la solución.

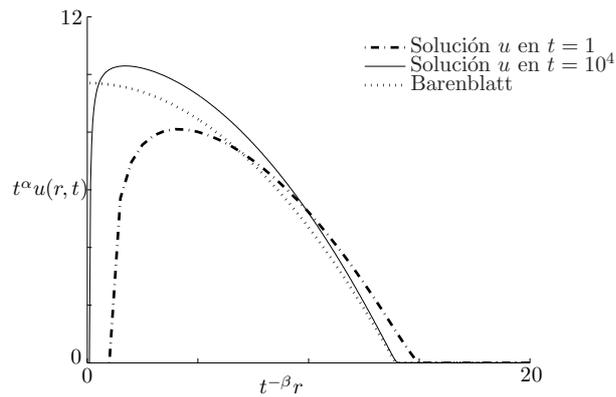


Figura C.3: Límite exterior

Obsérvese que tanto H_{C_*} como B_{C_*} se conocen de antemano y por tanto no es necesario calcularlas numéricamente.

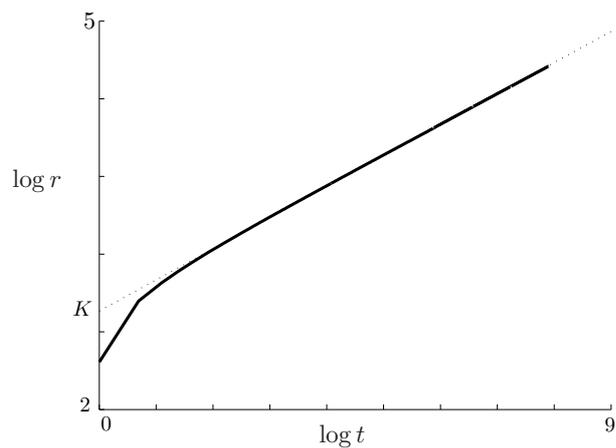


Figura C.4: Frontera libre

Finalmente nos centramos en la frontera libre. Gracias al Corolario 10.2 sabemos que la frontera libre de u crece como $x \sim t^\beta$, para t suficientemente grande. De forma más precisa, se comporta como t^β multiplicada por una constante concreta. En nuestro caso esta constante es aproximadamente 13.932. Este hecho se ilustra en la Figura C.4: dibujando la frontera libre en escalas logarítmicas podemos observar que converge a una recta de pendiente $\beta = 0.2$ y con ordenada en el origen $K \approx \log(13.932)$.

Bibliografía

- [1] Abia, L. M.; López-Marcos, J. C.; Martínez, J. *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*. Appl. Numer. Math. **26** (1998), no. 4, 399–414.
- [2] Acosta, G.; Durán, R. G.; Rossi, J. D. *An adaptive time step procedure for a parabolic problem with blow-up*. Computing **68** (2002), no. 4, 343–373.
- [3] Acosta, G.; Fernández Bonder, J.; Groisman, P.; Rossi, J. D. *Simultaneous vs. non-simultaneous blow-up in numerical approximations of a parabolic system with non-linear boundary conditions*. M2AN Math. Model. Numer. Anal. **36** (2002), no. 1, 55–68.
- [4] Alikakos, N. D.; Rostamian, R. *On the uniformization of the solutions of the porous medium equation in \mathbf{R}^N* . Israel J. Math. **47** (1984), no. 4, 270–290.
- [5] Aronson, D. G. *The porous medium equation*. Nonlinear Diffusion Problems (Montecatini Terme, 1985) 1–46. Springer. Berlin (1986).
- [6] Aronson, D. G.; Peletier, L. A. *Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains*. J. Differential Equations **39** (1981), no. 3, 378–412.
- [7] Bandle, C.; Brunner, H. *Blowup in diffusion equations: a survey*. J. Comput. Appl. Math. **97** (1998), no. 1-2, 3–22.
- [8] Bardi, M.; Capuzzo-Dolcetta, I. “Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations”. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc. Boston, MA (1997). With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.
- [9] Barenblatt, G.; Zel’dovich, I. B. *On dipole-type solution in problems of unsteady filtration of gas in a polytropic system*. Prikl. Mat. i. Mekh. **21** (1957), 718–720.

- [10] Barles, G. “Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi”. *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*, **vol. 17** Springer-Verlag. Paris (1994).
- [11] Barles, G.; Rouy, E.; Souganidis, P. E. *Remarks on the Dirichlet problem for quasilinear elliptic and parabolic equations*. *Remarks on the Dirichlet problem for quasilinear elliptic and parabolic equations* (1999), 209–222.
- [12] Bebernes, J.; Eberly, D. “Mathematical problems from combustion theory”. *Applied Mathematical Sciences*, **vol. 83** Springer-Verlag New York (1989).
- [13] Bénilan, P. *Opérateurs accretifs et semi-groupes dans les espaces L^p ($1 \leq p \leq \infty$)*. *France-Japan Seminar, Tokyo* (1976), .
- [14] Bénilan, P.; Maliki, M. *Approximation de la solution de viscosité d’un problème d’Hamilton-jacobi*. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **9** (1996), 369–383.
- [15] Berger, M.; Kohn, R. V. *A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions*. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), no. 6, 841–863.
- [16] Bourgoing, M. *$C^{1,\beta}$ regularity of viscosity solutions via a continuous-dependence result*. *Adv. Differential Equations* **9** (2004), 447–480.
- [17] Brändle, C.; Groisman, P.; Rossi, J. D. *Fully discrete adaptive methods for a blow-up problem*. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **14** (2004), no. 10, 1425–1450.
- [18] Brändle, C.; Quirós, F.; Rossi, J. D. *An adaptive numerical method to handle blow-up in a parabolic system*. *Numer. Math.* **102** (2005), no. 1, 39–59.
- [19] Brändle, C.; Quirós, F.; Rossi, J. D. *Non-simultaneous blow-up for a quasilinear parabolic system with reaction at the boundary*. *Commun. Pure Appl. Anal.* **4** (2005), no. 3, 523–536.
- [20] Brändle, C.; Quirós, F.; Rossi, J. D. *The role of non-linear diffusion in non-simultaneous blow-up*. *J. Math. Anal. Appl.* **308** (2005), no. 1, 92–104.
- [21] Brändle, C.; Quirós, F.; Rossi, J. D. *A complete classification of simultaneous blow-up rates*. *Appl. Math. Lett.* **19** (2006), no. 7, 607–611.
- [22] Brändle, C.; Quirós, F.; Vázquez, J. L. *Asymptotic behaviour of the porous media equation in domains with holes*. *Enviado para su posible publicación* (2006).
- [23] Brändle, C.; Vázquez, J. L. *Viscosity solutions for quasilinear degenerate parabolic equations of porous medium type*. *Indiana Univ. Math. J.* **54** (2005), no. 3, 817–860.

- [24] Budd, C. J.; Huang, W.; Russell, R. D. *Moving mesh methods for problems with blow-up*. SIAM J. Sci. Comput. **17** (1996), no. 2, 305–327.
- [25] Caffarelli, L.; Vázquez, J. L. *Viscosity solutions for the porous medium equation*. 13–26. Proc. Sympos. Pure Math., **vol. 65** Amer. Math. Soc. Providence, RI (1999).
- [26] Caffarelli, L. A.; Cabré, X. “Fully nonlinear elliptic equations”. American Mathematical Society Colloquium Publications, **vol. 43** American Mathematical Society. Providence, RI (1995).
- [27] Caristi, G.; Mitidieri, E. *Blow-up estimates of positive solutions of a parabolic system*. J. Differential Equations **113** (1994), no. 2, 265–271.
- [28] Chasseigne, E.; Vázquez, J. L. *Theory of extended solutions for fast-diffusion equations in optimal classes of data. Radiation from singularities*. Arch. Ration. Mech. Anal. **164** (2002), no. 2, 133–187.
- [29] Chasseigne, E.; Vázquez, J. L. *The pressure equation in the fast diffusion range*. Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), no. 3, 873–917.
- [30] Chlebík, M.; Fila, M. *From critical exponents to blow-up rates for parabolic problems*. Rend. Mat. Appl. **19** (1999), no. 4, 449–470.
- [31] Chlebík, M.; Fila, M. *Some recent results on blow-up on the boundary for the heat equation*. Evolution equations: existence, regularity and singularities (Warsaw, 1998), 61–71. Banach Center Publ., **vol. 52** Polish Acad. Sci. Warsaw (2000).
- [32] Cockburn, B.; Gripenberg, G.; Londen, S.-O. *Continuous dependence on the nonlinearity of viscosity solutions of parabolic equations*. J. Differential Equations **170** (2001), 180–187.
- [33] Cortázar, C.; Elgueta, M. *Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation*. Nonlinear Anal. **13** (1989), no. 1, 33–41.
- [34] Cortázar, C.; Elgueta, M.; Rossi, J. D. *Uniqueness and nonuniqueness for the porous medium equation with non linear boundary conditions*. Differential Integral Equations **16** (2003), no. 10, 1215–1222.
- [35] Cortázar, M. C.; Elgueta, M.; Venegas, O. *On the blow-up set for $u_t = (u^m)_{xx}$, $m > 1$, with nonlinear boundary conditions*. Monatsh. Math. **142** (2004), no. 1-2, 45–56.
- [36] Crandall, M. G.; Evans, L. C.; Lions, P.-L. *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), no. 2, 487–502.

- [37] Crandall, M. G.; Ishii, H.; Lions, P.-L. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), no. 1, 1–67.
- [38] Crandall, M. G.; Lions, P.-L. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 1, 1–42.
- [39] Dahlberg, B. E. J.; Kenig, C. E. *Nonnegative solutions of generalized porous medium equations*. Rev. Mat. Iberoamericana **2** (1986), no. 3, 267–305.
- [40] Dahlberg, B. E. J.; Kenig, C. E. *Nonnegative solutions of the initial-Dirichlet problem for generalized porous medium equations in cylinders*. J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 2, 401–412.
- [41] Deng, K.; Fila, M.; Levine, H. A. *On critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions*. Acta Math. Univ. Comenian. **63** (1994), no. 2, 169–192.
- [42] Deng, K. *Global existence and blow-up for a system of heat equations with nonlinear boundary conditions*. Math. Methods Appl. Sci. **18** (1995), no. 4, 307–315.
- [43] Deng, K.; Levine, H. A. *The role of critical exponents in blow-up theorems: The sequel*. J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), no. 1, 85–126.
- [44] DiBenedetto, E.; Hoff, D. *An interface tracking algorithm for the porous medium equation*. Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), no. 2, 463–500.
- [45] DiBenedetto, E.; Vespri, V. *On the singular equation $\beta(u)_t = \Delta u$* . Arch. Rational Mech. Anal. **132** (1995), no. 3, 247–309.
- [46] DiBenedetto, E. *Continuity of weak solutions to a general porous medium equation*. Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 1, 83–118.
- [47] Durán, R. G.; Etcheverry, J. I.; Rossi, J. D. *Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition*. Discr. and Cont. Dyn. Sys. **4** (3) (1998), 497–506.
- [48] Escobedo, M.; Herrero, M. A. *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system*. J. Differential Equations **89** (1991), no. 1, 176–202.
- [49] Escobedo, M.; Herrero, M. A. *A semilinear parabolic system in a bounded domain*. Ann. Mat. Pura Appl. **165** (1993), no. 4, 315–363.
- [50] Escobedo, M.; Levine, H. A. *Critical blow up and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*. Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), no. 1, 47–100.

- [51] Fernández Bonder, J.; Rossi, J. D. *Blow-up vs. spurious steady solutions*. Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 1, 139–144.
- [52] Ferreira, R.; Pablo, A.de; Quirós, F.; Rossi, J. D. *The blow-up profile for a fast diffusion equation with a nonlinear boundary condition*. Rocky Mountain J. Math. **33** (2003), no. 1, 123–146.
- [53] Ferreira, R.; Groisman, P.; Rossi, J. D. *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition*. Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (2002), no. 4, 461–483.
- [54] Ferreira, R.; Groisman, P.; Rossi, J. D. *Adaptive numerical schemes for a parabolic problem with blow-up*. IMA J. Numer. Anal. **23** (2003), no. 3, 439–463.
- [55] Ferreira, R.; Quirós, F.; Rossi, J. D. *The balance between nonlinear inwards and outwards boundary flux for a nonlinear heat equation*. J. Differential Equations **184** (2002), no. 1, 259–282.
- [56] Fila, M.; Filo, J. *Blow-up on the boundary: a survey*. Singularities and differential equations (Warsaw, 1993) 67–78. Banach Center Publ., **vol. 33** Polish Acad. Sci. Warsaw (1996).
- [57] Fila, M.; Quittner, P. *The blow-up rate for the heat equation with a nonlinear boundary condition*. Math. Methods Appl. Sci. **14** (1991), no. 3, 197–205.
- [58] Filo, J. *Diffusivity versus absorption through the boundary*. J. Differential Equations **99** (1992), no. 2, 281–305.
- [59] Friedman, A. “Partial differential equations of parabolic type”. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1964).
- [60] Friedman, A.; Giga, Y. *A single point blow-up for solutions of semilinear parabolic systems*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), no. 1, 65–79.
- [61] Friedman, A.; McLeod, B. *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*. Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), no. 2, 425–447.
- [62] Fujita, H. *On the blowing up of solutions of the cauchy problem for $u_t = \delta u + u^{1+\alpha}$* . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124.
- [63] Fujita, H. *On the nonlinear equations $\delta u + e^u = 0$ and $\partial v / \partial t = \delta v + e^v$* . Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 132–135.
- [64] Galaktionov, V. A.; Vázquez, J. L. *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), no. 2, 399–433. Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999).

- [65] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. “Elliptic partial differential equations of second order”. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **vol. 224** Springer-Verlag. Berlin (1983).
- [66] Gilding, B. H.; Goncerzewicz, J. *Large-time behaviour of solutions of the exterior-domain cauchy-dirichlet problem for the porous media equation with homogeneous boundary data*. Monatsh. Math, to appear.
- [67] Gilding, B. H.; Herrero, M. A. *Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction with peaking*. Math. Ann. **282** (1988), no. 2, 223–242.
- [68] Gilding, B. H.; Peletier, L. A. *On a class of similarity solutions of the porous media equation*. J. Math. Anal. Appl. **55** (1976), no. 2, 351–364.
- [69] Gilding, B. H.; Peletier, L. A. *On a class of similarity solutions of the porous media equation. II*. J. Math. Anal. Appl. **57** (1977), no. 3, 522–538.
- [70] Groisman, P.; Rossi, J. *Aproximando soluciones que explotan*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. **26** (2003), 35–56.
- [71] Groisman, P.; Quirós, F.; Rossi, J. D. *Non-simultaneous blow-up in a numerical approximation of a parabolic system*. Comput. Appl. Math. **21** (2002), no. 3, 813–831.
- [72] Herraiz, L. A. *A nonlinear parabolic problem in an exterior domain*. J. Differential Equations **142** (1998), no. 2, 371–412.
- [73] Hoff, D. *A linearly implicit finite-difference scheme for the one-dimensional porous medium equation*. Math. Comp. **45** (1985), no. 171, 23–33.
- [74] Hu, B.; Yin, H. M. *The profile near blowup time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition*. Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), no. 1, 117–135.
- [75] Ishige, K. *Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the dirichlet boundary condition*. Preprint.
- [76] Ishii, H.; Lions, P.-L. *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*. J. Differential Equations **83** (1990), no. 1, 26–78.
- [77] Jakobsen, E. R.; Karlsen, K. H. *Continuous dependence estimates for viscosity solutions of fully nonlinear degenerate parabolic equations*. J. Differential Equations **183** (2002), no. 2, 497–525.

- [78] Juutinen, P.; Lindqvist, P.; Manfredi, J. J. *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation*. SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), no. 3, 699–717 (electronic).
- [79] Kamin, S.; Vázquez, J. L. *Asymptotic behaviour of solutions of the porous medium equation with changing sign*. SIAM J. Math. Anal. **22** (1991), no. 1, 34–45.
- [80] Kaplan, S. *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*. Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 305–330.
- [81] Kim, I. C. *Uniqueness and existence results on the Hele-Shaw and the Stefan problems*. Arch. Ration. Mech. Anal. **168** (2003), no. 4, 299–328.
- [82] King, J. R. *Integral results for nonlinear diffusion equations*. J. Engrg. Math. **25** (1991), no. 2, 191–250.
- [83] Knerr, B. F. *The porous medium equation in one dimension*. Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), no. 2, 381–415.
- [84] Ladyzhenskaya, O. A.; Solonnikov, V. A.; Ural'tseva, N. “Linear and quasilinear equations of parabolic type”. Transl. Math. Monographs, **vol. 23** Amer. Math. Soc. Providence (1968).
- [85] Levine, H. A. *The role of critical exponents in blowup theorems*. SIAM Rev. **32** (1990), no. 2, 262–288.
- [86] Lieb, E. H.; Loss, M. “Analysis”. Graduate Studies in Mathematics, **vol. 14** American Mathematical Society. Providence, RI (2001).
- [87] Lieberman, G. M. “Second order parabolic differential equations”. World Scientific Publishing Co. Inc. River Edge, NJ (1996).
- [88] Lions, P.-L.; Souganidis, P. E. *Fully nonlinear stochastic pde with semilinear stochastic dependence*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 8, 617–624.
- [89] Maliki, M. *Viscosity solution for a degenerate parabolic problem*. Partial differential equations, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **229** (2002), 249–258.
- [90] Nakagawa, T. *Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$* . Appl. Math. Optim. **2** (1975/76), no. 4, 337–350.
- [91] Osgood, W. F. *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung*. Monats. Math. Phys. **9** (1898), 331–345.

- [92] Pedersen, M.; Lin, Z. *Blow-up estimates of the positive solution of a parabolic system*. J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), no. 2, 551–563.
- [93] Peletier, L. A. *The porous media equation*. Applications of nonlinear analysis in the physical sciences (Bielefeld, 1979) 229–241. Surveys Reference Works Math., vol. 6 Pitman. Boston, Mass. (1981).
- [94] Pinasco, J. P.; Rossi, J. D. *Simultaneous versus non-simultaneous blow-up*. New Zealand J. Math. **29** (2000), no. 1, 55–59.
- [95] Qi, Y.-W.; Levine, H. A. *The critical exponent of degenerate parabolic systems*. Z. Angew. Math. Phys. **44** (1993), no. 2, 249–265.
- [96] Quirós, F.; Rossi, J. D. *Blow-up sets and Fujita type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear boundary conditions*. Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 1, 629–654.
- [97] Quirós, F.; Rossi, J. D. *Non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system*. Z. Angew. Math. Phys. **52** (2001), no. 2, 342–346.
- [98] Quirós, F.; Rossi, J. D. *Non-simultaneous blow-up in a nonlinear parabolic system*. Adv. Nonlinear Stud. **3** (2003), no. 3, 397–418.
- [99] Quirós, F.; Rossi, J. D.; Vázquez, J. L. *Complete blow-up and thermal avalanche for heat equations with nonlinear boundary conditions*. Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 1-2, 395–424.
- [100] Quirós, F.; Rossi, J. D.; Vázquez, J. L. *Thermal avalanche for blowup solutions of semilinear heat equations*. Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 1, 59–98.
- [101] Quirós, F.; Vázquez, J. L. *Asymptotic behaviour of the porous media equation in an exterior domain*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), no. 2, 183–227.
- [102] Rossi, J. D. *The blow-up rate for a system of heat equations with non-trivial coupling at the boundary*. Math. Methods Appl. Sci. **20** (1997), no. 1, 1–11.
- [103] Sacks, P. E. *Continuity of solutions of a singular parabolic equation*. Nonlinear Anal. **7** (1983), no. 4, 387–409.
- [104] Samarskii, A. A.; Galaktionov, V. A.; Kurdyumov, S. P.; Mikhailov, A. P. “Blow-up in quasilinear parabolic equations”. de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 19 Walter de Gruyter & Co. Berlin (1995). Translated from the 1987 Russian original by Michael Grinfeld and revised by the authors.

- [105] Vázquez, J. L. *Smoothing and decay estimates for nonlinear parabolic equations of porous medium type*. Lecture Notes, Oxford Univ. Press. To appear.
- [106] Vázquez, J. L. *An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation*. Shape optimization and free boundaries (Montreal, PQ, 1990) 347–389. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. **380** Kluwer Acad. Publ. Dordrecht (1992).
- [107] Vázquez, J. L. *Asymptotic behaviour for the porous medium equation posed in the whole space*. J. Evol. Equ. **3** (2003), no. 1, 67–118. Dedicated to Philippe Bénilan.
- [108] Vázquez, J. L. *The Dirichlet problem for the porous medium equation in bounded domains. Asymptotic behavior*. Monatsh. Math. **142** (2004), no. 1-2, 81–111.
- [109] Véron, L. *Coercivité et propriétés régularisantes des semi-groupes non linéaires dans les espaces de banach*. Ann. Fac. Sci. Toulouse **1** (1979), 171–200.
- [110] Wang, L. *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations. I*. Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 1, 27–76.
- [111] Wang, L. *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations. II*. Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 2, 141–178.
- [112] Wang, M. X. *Parabolic systems with nonlinear boundary conditions*. Chinese Sci. Bull. **40** (1995), no. 17, 1412–1414.
- [113] Wang, M. *Fast-slow diffusion systems with nonlinear boundary conditions*. Nonlinear Anal. **46** (2001), no. 6, Ser. A: Theory Methods, 893–908.
- [114] Wang, M.; Wang, S. *Quasilinear reaction-diffusion systems with nonlinear boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. **231** (1999), no. 1, 21–33.
- [115] Zheng, S.; Liu, B.; Li, F. *Blow-up rate estimates for a doubly coupled reaction-diffusion system*. J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), no. 2, 576–595.
- [116] Zheng, S.; Song, X.; Jiang, Z. *Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux*. J. Math. Anal. Appl. **298** (2004), no. 1, 308–324.
- [117] Ziemer, W. P. *Interior and boundary continuity of weak solutions of degenerate parabolic equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), no. 2, 733–748.