UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CARACTERIZACIÓN Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE ESCALA Y FILTROS DE PASO BAJO DE UN ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN

Ángel San Antolín Gil

Junio 2007

Tesis doctoral dirigida por:

D. Kazaros Kazarian y D. Patricio Cifuentes

Agradecimientos

Si me permiten, me gustaría agradecer a todas las personas que me han acompañado en este camino. En este momento pienso en mis directores de tesis, los profesores Patricio Cifuentes y Kazaros Kazarian, ya que son los que me han dado la oportunidad de introducirme en el mundo de la investigación y así poder realizar esta tesis. Por supuesto, no sólo me han ayudado en el aspecto laboral si no que entre otras muchas cosas, Kazaros me ha enseñado que se puede tener un punto de vista diferente, y Patricio que un orden es fundamental.

Me acuerdo del Profesor Peter Oswald y de su amabilidad durante una estancia breve en Alemania, y del Profesor Szilard Révész y de aquella anécdota que nos pasó.

Agradezco a mis compañeros y amigos en la universidad por las tertulias y el magnífico ambiente existente.

Mención especial hago de mi familia y de su apoyo incondicional aunque alguno no entendiera muy bien el por qué y a qué me dedicaba, estando a mi lado en los momentos difíciles y disfrutando cuando yo lo hacía.

Gracias a mi novia por su ayuda y por “soportar” mis conversaciones.

No me olvido de mis amigos porque me recuerdan que hay vida fuera de las matemáticas (¿o no?).

Un abrazo a todos ellos. Ángel.

Índice general

SUMMARY AND CONCLUSIONS

"CHARACTERIZATION AND PROPERTIES OF SCALING FUNCTIONS AND LOW PASS FILTERS OF A MULTIRESOLUTION ANALYSIS"

A multiresolution analysis (MRA) is a general method introduced by Mallat [59] and Meyer [60] for constructing wavelets. On $\mathbf{R}^n (n \geq 1)$, we will mean by an MRA a sequence of subspaces V_j, $j \in \mathbf{Z}$ of the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^n)$ that satisfies the following conditions:

(i) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad V_j \subset V_{j+1};$

(ii) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j \Leftrightarrow f(2\mathbf{x}) \in V_{j+1};$

(iii) $W = \overline{\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n) \quad \text{and} \quad \cap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{ \mathbf{0} \}$.

(iv) There exists a function $\phi \in V_0$, that is called *scaling function*, such that $\{ \phi(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \}$ is an orthonormal basis for V_0.

Our aim in this text is to study in depth the notion of MRA and understand better the behavior of scaling functions and related functions, as low pass filters and wavelets in $\mathbf{R}^n$.

We will study MRA in a more general context in $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, where instead of dyadic dilations one considers dilations given by a fixed linear map $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ such that $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, i.e. all entries of the corresponding matrix with respect the canonical basis of $\mathbf{R}^n$ are integers, and A is an expansive map, i.e. all (possibly complex) eigenvalues of A have absolute value strictly greater than 1. Given a such linear map A one defines an A-MRA as a sequence of subspaces V_j, $j \in \mathbf{Z}$ of the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^n)$ that satisfies the conditions (i), (iii), (iv) and

(ii_A) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j \Leftrightarrow f(A\mathbf{x}) \in V_{j+1},$

(see [14], [58], [34], [71], [75]).

This thesis consists of Introduction, five chapters and two appendixes. In Chapter 1 we give a complete characterization of scaling functions of an A-MRA. In Chapter 2 we obtain necessary and sufficient conditions of low pass filters associated with scaling functions of an A-MRA. In Chapter 3, we study minimally supported frequency scaling functions of an A-MRA. In Chapter 4 we compare the notion of A-approximate continuity for different linear maps A. In Chapter 5, the conditions in the definition of an MRA are relaxed. We give a complete characterization of functions which generate frame multiresolution analysis. Furthermore, we study shift invariant subspaces. Finally, we include two appendices. In Appendix A one can find some notions and basic properties which we have used in this text. The results of Appendix B are new. We present them separately because they are related mainly with Classical Analysis. We study new concepts introduced in this text for characterizing scaling functions.

Let us introduce some notation before formulating our results.

The natural numbers without the zero will be denoted by $\mathbf{N}$, and we will write $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Moreover, $\mathbf{R}$ and $\mathbf{C}$ will be the field of the real and the field of the complex numbers respectively. For $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, we will write $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ such that $x_i \in \mathbf{R}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

For $a \in \mathbf{R}$, $[a]$ is the integral part of a.

We will define $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \ : \ \parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel < r\}$, the ball of radius $r > 0$ with center in the point $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, where $\parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel = (\sum_{i=1}^n \mid x_i - y_i \mid^2)^{\frac{1}{2}}$. If the center is the origin, we will write B_r. Moreover, $Q_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \ :$ $\mid x_i - y_i \mid < r, \forall i = 1, ..., n\}$, and if the center of the cube is the origin, we will write Q_r.

Furthermore, $\mathbb{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ and sometimes, with some abuse of the notation we will consider also that $\mathbb{T}^n$ is the unit cube $[0, 1)^n$.

We will work with both real or complex vector spaces W. Let W_1 be a subspace of W and let $A : W \longrightarrow W$ be a linear map, then $A|_{W_1}$ will be the restriction to W_1 of the map A. Also if W is a space with inner product, the orthogonal complement of W_1 in W is $W_1^{\perp}$. Let W_1 and W_2 be two subspaces of W such that $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, we will denote de direct sum of W_1 and W_2 by $W = W_1 \oplus W_2$. If $A_\mu : W_\mu \longrightarrow W_\mu$, $\mu = 1, 2$ are linear maps, we will denote by $A_1 \otimes A_2$ the linear map defined on $W_1 \oplus W_2$ such that $(A_1 \otimes A_2)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = A_1\mathbf{w}_1 + A_2\mathbf{w}_2$, where $\mathbf{w}_\mu \in W_\mu$, $\mu = 1, 2$.

Let V and W be two finite dimensional vector spaces, the vector space of all linear maps $A : V \longrightarrow W$ will be denoted by $\mathcal{L}(V, W)$, if $V = W$ the notation will be $\mathcal{L}(V)$ and if $V = W = \mathbf{R}^n$ we will write $\mathcal{L}$. Furthermore, the set of all expansive linear maps $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ will be denoted by $\mathcal{LE}$ and we will write $\mathcal{LEP}$ if also A is a positive definite linear map.

Given $A \in \mathcal{L}$, we will use the same notation for the linear map and for the corresponding matrix associated to the canonical basis. We will write the absolute value of $\det A$, by $d_A = \mid \det A \mid$. If $d_A > 0$, A^* is the adjoint linear map of A. If also, $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, the induced map $\widehat{A} : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ of A will be the application such that given $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$, $\widehat{A}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{k}$ for a $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ such that $A\mathbf{x} + \mathbf{k} \in \mathbb{T}^n$.

One can observe easily that if $A \in \mathcal{LE}$ and $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, then its adjoint map A^* will have the same properties. We will consider the quotient groups $\mathbf{Z}^n/A(\mathbf{Z}^n)$ and $\mathbf{Z}^n/A^*(\mathbf{Z}^n)$. We have that

$$\operatorname{card}(\mathbf{Z}^n/A(\mathbf{Z}^n)) = \operatorname{card}(\mathbf{Z}^n/A^*(\mathbf{Z}^n)) = d_A \geq 2 \quad \text{(see [34] and [75, p. 109])}.$$

Let $\mathcal{E}_i$ and $\mathcal{E}_i^*$, $(0 \leq i \leq d_A - 1)$, be the distinct cosets of $\mathbf{Z}^n/A(\mathbf{Z}^n)$ and of $\mathbf{Z}^n/A^*(\mathbf{Z}^n)$ respectively, and let Δ_A and Δ_{A^*} be full collections of representatives of those cosets. To be precise, we will suppose that $\mathcal{E}_0 = A(\mathbf{Z}^n)$,

$\mathcal{E}_0^* = A^*(\mathbf{Z}^n)$, and that $\Delta_A = \{\mathbf{p}_i\}_{i=0}^{d_A-1}$, where $\mathbf{p}_i \in \mathcal{E}_i$ and $\Delta_{A^*} = \{\mathbf{p}_i^*\}_{i=0}^{d_A-1}$, where $\mathbf{p}_i^* \in \mathcal{E}_i^*$.

Let $E \subset \mathbf{R}^n$ be a set, then $AE = \{A\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \in E\}$. Moreover, if $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, $E + \mathbf{y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \ : \ \mathbf{x} \in E\}$. The complement of E in $\mathbf{R}^n$ will be $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$ and we will write $E_{\mathbb{T}^n} = \{\mathbf{x} \in [0,1)^n \ : \ \exists \mathbf{k}_\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n$ such that $\mathbf{x} + \mathbf{k}_\mathbf{x} \in E\}$.

The Lebesgue measure of $E \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, will be denoted as $\mid E \mid_n$. Furthermore, in this text we will call a set measurable if it is a Lebesgue measurable set. The volume of any measurable set E changes under A according to $\mid AE \mid_n = d_A \mid E \mid_n$.

Let $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ be a measurable function, we will say that f is a $\mathbf{Z}^n$-periodic function if $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, we have $f(\mathbf{x}+\mathbf{k}) = f(\mathbf{x})$. Furthermore, if we write $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ we will understand that f is defined on the whole space $\mathbf{R}^n$ as a $\mathbf{Z}^n$-periodic function. We will write the support of f by sop$f$. The translation by $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ of a function $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ will be denoted by $\tau_\mathbf{a} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$. We will denote by D_A the dilation operator $D_A f(\mathbf{x}) = d_A^{\frac{1}{2}} f(A\mathbf{x})$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$.

The inner product will be written $\langle \cdot, \cdot \rangle$, and we will write $\| \cdot \|$ to indicate a norm. (See Appendix A for more details about notation)

Chapter 1: Characterization of scaling functions in a Multiresolution Analysis

The main objective of Chapter 1 is to study the notion of a *Multiresolution Analysis*, $\{V_j \ : \ j \in \mathbf{Z}\}$, in $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, where the dilation is given by a fixed expansive linear map $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ such that $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. We will see that not all the conditions in the definition of an A-MRA are independent. We will fix our attention on scaling functions, and we will give a complete characterization of them. In this general case, it is easy see that the conditions presented in our characterization depend on the map A. The results in this chapter have been published in [16].

The problem to give a complete characterization of scaling functions of an MRA was posed in the paper by R. Strichartz [71], and was studied by several authors.

The novelty of our study is the type of necessary and sufficient conditions on a scaling function ϕ of an A-MRA for the union of all closed subspaces V_j, $j \in \mathbf{Z}$, to be dense in $L^2(\mathbf{R}^n)$. These conditions are given in terms of the Fourier transform of ϕ. In this text we adopt the convention that the Fourier transform of a function $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ is defined by

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} d\mathbf{x}.$$

The following result should be probably attributed to I. Daubechies (see [24]) who proved it for $n = 1$. (See also [46]).

Theorem (Daubechies). *Let V_j, $j \in \mathbf{Z}$ be a sequence of closed subspaces of $L^2(\mathbf{R})$ satisfying (i), (ii) and (iv) where $\widehat{\phi}$ is such that $\mid \widehat{\phi} \mid$ is continuous at the origin. Then the following two conditions are equivalent:*

$$\begin{array}{ll} a) & \widehat{\phi}(0) \neq 0; \\ b) & \overline{\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

C. de Boor, R. DeVore, A. Ron [6] proved the following result.
Teorema (de Boor, DeVore y Ron). *Let V_j, $j \in \mathbf{Z}$ be a sequence of closed subspaces of $L^2(\mathbf{R})$ satisfying (i), (ii) and (iv) with $n = 1$. Then the following two conditions are equivalent:*

$$\begin{array}{ll} a) & \cup_{j\in\mathbf{Z}}\ (2^j\ sop\ \widehat{\phi}) = \mathbf{R} \qquad a.e; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

Afterwards, E. Hernández and G. Weiss ([46, Theorem 5.2, p. 382], [45], [42]) proved the following result.
Theorem (Hernández and Weiss). *Let V_j, $j \in \mathbf{Z}$ be a sequence of closed subspaces of $L^2(\mathbf{R})$ satisfying (i), (ii) and (iv) with $n = 1$. Then the following two conditions are equivalent:*

$$\begin{array}{ll} a) & \lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}y)| = 1 \quad \text{for a.e. } y \in \mathbf{R}; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

Another necessary and sufficient condition has been given by R. A. Lorentz, W. R. Madych and A. Sahakian [56].
Theorem (Lorentz, Madych and Sahakian). *Let V_j, $j \in \mathbf{Z}$ be a sequence of closed subspaces of $L^2(\mathbf{R})$ satisfying (i), (ii) and (iv) with $n = 1$. Then the following conditions are equivalent:*

$$\begin{array}{ll} a) & \lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}y)| \quad \text{exists and is positive for a.e. } y \in \mathbf{R}; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}); \\ c) & \text{The set } \{y \in \mathbf{R} \ :\ |\ \widehat{\phi}(y)\ |> 0\} \text{ is dyadically absorbing,} \\ & \text{i.e., for a.e. } y \in \mathbf{R}, \text{ there exists a positive integer } j_0, \\ & \text{which may depend on } y, \text{ such that if } j \geq j_0 \text{ then } |\ \widehat{\phi}(2^{-j}y)\ |> 0. \end{array}$$

All of the above characterizations are "global" conditions. Our aim is to achieve "local" conditions and a bit deeper understanding of the relation between the behavior of the function $\widehat{\phi}$ in the neighborhood of the origin and condition (iii). In particular our result permits us to get rid of the assumption that $|\widehat{\phi}|$ is continuous at the origin in the Daubechies's Theorem.

We need the following definitions to formulate our results.
Definition 1. *It is said that $\mathbf{x}_0$ is a point of density for a set $E \subset \mathbf{R}^n$, $|E|_n > 0$, if*

$$\lim_{r\to 0} \frac{|E \cap B_r(\mathbf{x}_0)|_n}{|B_r(\mathbf{x}_0)|_n} = 1.$$

We set

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}_0) = \{E \subset \mathbf{R}^n \text{ measurable set } : \ \mathbf{x}_0 \text{ is a point of density for } E\}.$$

Furthermore, we will write $\mathcal{D}$ if $\mathbf{x}_0$ is the origin.
Definition 2. *Let $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ be a measurable function. We say that*

$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *is a point of approximate continuity of the function* f *if there exists* $E \subset \mathbf{R}^n$, $|E|_n > 0$, *such that* $\mathbf{x}_0$ *is a point of density for the measurable set* E *and*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

The notion of approximate continuity was introduced by A. Denjoy [26]. In the following result, we can find a relationship between measurable functions and points of approximate continuity of those functions (see also [61], [10]).

Theorem (Denjoy). *Let* f *be a finite measurable function defined on* $[a, b]$. *Then almost all points of* $[a, b]$ *are points of approximate continuity of* f.

Definition 3. *A measurable function* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *is said to be locally nonzero at the point* $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ *if for any* $\varepsilon > 0$, *there exists* r, $0 < r < 1$, *such that*

$$|\{\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0}) : f(\mathbf{x}) = 0\}|_n < \varepsilon |B_r(\mathbf{x_0})|_n.$$

Given $A \in \mathcal{LE}$, we define more general notions.

Definition 4. *Let* $A \in \mathcal{LE}$. *It is said that* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *is a point of* A*-density for a measurable set* $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, *if for all* $r > 0$,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{\mid E \bigcap (A^{-j} B_r + \mathbf{x}_0) \mid_n}{\mid A^{-j} B_r + \mathbf{x}_0 \mid_n} = 1.$$

Given $A \in \mathcal{LE}$ *and given a point* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, *we set*

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0) = \{E \subset \mathbf{R}^n \text{ measurable set } : \mathbf{x}_0 \text{ is a point of } A\text{-density for } E\}.$$

Furthermore, we will write $\mathcal{D}_A$ *when* $\mathbf{x}_0$ *is the origin.*

Observe that for any $j \in \mathbf{Z}$ and for any $r > 0$ we have the following equality $A^j B_r = (-A)^j B_r$, and thus:

Remark. Given $A \in \mathcal{LE}$, for any point $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, we have

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0) = \mathcal{D}_{-A}(\mathbf{x}_0).$$

Definition 5. *Let* $A \in \mathcal{LE}$ *and let* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ *be a measurable function. It is said that* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *is a point of* A*-approximate continuity of the function* f *if there exists a measurable set* $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, *such that* $\mathbf{x}_0$ *is a point of* A*-density for the set* E *and (1) holds.*

Definition 6. Let $A \in \mathcal{LE}$. A measurable function $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ is said to be $A-$*locally nonzero* at a point $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ if for any $\varepsilon > 0$ and for any $r > 0$ there exists $j \in \mathbf{N}$ such that

$$|\{\mathbf{x} \in A^{-j} B_r + \mathbf{x_0} : f(\mathbf{x}) = 0\}|_n < \varepsilon |A^{-j} B_r + \mathbf{x_0}|_n. \tag{2}$$

The main result of Chapter 1 is the following.

Theorem 1. *Let* $A \in \mathcal{LE}$ *such that* $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. *Let* V_j *be a sequence of closed subspaces in* $L^2(\mathbf{R}^n)$ *satisfying the conditions* (i), (ii$_A$) *and* (iv). *Then the following conditions are equivalent:*

($\mathbf{A_1}$) $W = \overline{\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$;

(**B₁**) $\widehat{\phi}$ —*the Fourier transform of the scaling function* ϕ— *is* A^**-locally nonzero at the origin;*

(**C₁**) *the origin is a point of* A^**-approximate continuity of the function* $|\widehat{\phi}|$ *if we set* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$.

As a consequence of Theorem 1, we obtain the following.
Theorem 2. *Let* V_j *be a sequence of closed subspaces in* $L^2(\mathbf{R}^n)$ *satisfying the conditions* (i), (ii) *and* (iv). *Then the following conditions are equivalent:*

(**A**) $W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$;

(**B**) $\widehat{\phi}$ —*the Fourier transform of the scaling function* ϕ— *is locally nonzero at the origin;*

(**C**) *the origin is a point of approximate continuity of the function* $|\widehat{\phi}|$, *setting* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$.

A complete characterization of scaling functions in an A-MRA is given in the following theorem. In this way we give a characterization of scaling functions in an A-MRA of the type the presented in Theorem 5.2 by Hernández and Weiss [46, p. 382] in the classical setting.
Theorem 3. *Let* $A \in \mathcal{LE}$ *such that* $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ *and let* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. *The following conditions are equivalent:*

(1) ϕ *is a scaling function of an A-MRA;*

(2) (α) *The function* $\widehat{\phi}$ *is* A^**-locally nonzero at the origin;*

(β)

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \textit{in a.e. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n; \tag{3}$$

(γ) *There exists* $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\| H \|_\infty \leq 1$, *called low pass filter, such that*

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(A^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) \qquad \textit{in a.e. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n; \tag{4}$$

(3) *(α^*) The origin is a point of* A^**-approximate continuity of* $|\widehat{\phi}|$, *setting* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$; *and the conditions ($\beta$) and ($\gamma$) hold.*

It turns out that the condition a) in the Theorem of Hernández and Weiss is stronger than condition (**C**) in Theorem 2 when $n = 1$. Moreover, the condition (**B**) in Theorem 2 when $n = 1$ is weaker than condition c) in the Theorem of Lorentz, Madych and Sahakian.
We give a result analogous to the Theorem of Denjoy.
Theorem 4. *Let* $A \in \mathcal{LE}$ *and let* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ *be a measurable function. Then almost all points of* $\mathbf{R}^n$ *are points of A-approximate continuity of* f.

Chapter 2: Characterization of low pass filters in a multiresolution analysis

We characterize the low pass filters associated with scaling functions of a multiresolution analysis in a general context when one considers the dilation given by a fixed expansive linear map $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ such that $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, (see [70]).

We recall that given $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, a scaling function of an A-MRA, then

$$\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}), \quad \text{in a.e. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \tag{5}$$

where $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ such that $\| H \|_\infty \leq 1$. This function H is called *low pass filter* associated with the scaling function ϕ.

For an MRA on $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, there are a number of sufficient conditions on a low pass filter H which allow to assert that the infinite product $\prod_{j=1}^\infty H(2^{-j}t)$ exists a.e. and is equal to the Fourier transform of the scaling function ϕ.

A. Cohen [18] gave the first necessary and sufficient conditions for a trigonometric polynomial H to be a low pass filter of an MRA on $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Cohen's conditions may be viewed as geometric restrictions on H. Afterwards, Cohen's approach was developed by E. Hernández and G. Weiss [46] and furthermore by M. Papadakis, H. Sikić and G. Weiss [62] and by R. F. Gundy [36], where the requirements on the function H were weakened. About the same time as Cohen's condition appeared, W. Lawton [54] gave another sufficient condition of a different nature when $H(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k e^{-2\pi i \mathbf{k}\xi}$. He constructed a specific matrix Q from the sequence $\{a_k\}_{k=0}^N$, and considered the subspace of eigenvectors of Q with eigenvalue one. If this subspace is of dimension one, then H is a low pass filter. The necessity of that condition was settled in 1990 by both Cohen (see [20]) and Lawton [55], independently, (see also [24, p. 182-193]). Following the ideas of Cohen and Lawton, more conditions when $n \geq 1$ and dyadic dilation appear in [53].

For the general case when the MRA is defined on $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, and for dilations given by a transformation A as described above, a generalization of Cohen's and Lawton's conditions was obtained by M. Bownik [7].

Thus, there are two distinct, but equivalent characterizations of low pass filters H if we assume it to be a trigonometric polynomial.

Characterizations of low pass filters for an MRA on $L^2(\mathbf{R})$ are already known. M. Papadakis, H. Sikić and G. Weiss [62] have formulated one of them. Another characterization is given by V. Dobrić, R. F. Gundy and P. Hitczenko [27] in probabilistic terms. Afterwards, R. F. Gundy [37] addressed on a slightly more general question: Describe low pass filters for a (possibly nonorthogonal) Riesz basis.

The problem of when a function $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ is a low pass filter was posed in the book by E. Hernández and G. Weiss [46].

Our study is based on the characterization of scaling functions obtained in Theorem 3 and on Lawton's strategy. Note that the conditions presented here are new even in the classical case, i.e., for an MRA on $L^2(\mathbf{R})$ and dyadic dilations.

Given $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ the continuous linear operator $P : L^1(\mathbb{T}^n) \to L^1(\mathbb{T}^n)$ given by

$$Pf(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{d_A - 1} \mid H(A^{*-1}(\mathbf{t} + \mathbf{p}_i^*)) \mid^2 f(A^{*-1}(\mathbf{t} + \mathbf{p}_i^*)) \tag{6}$$

is well defined. This operator was first introduced by M. Bownik [7] as a generalization of the analogous operator introduced for dyadic dilations by W. Lawton.

M. Bownik has proved the following.

A generalization of Lawton's theorem. *Let H be a trigonometric polynomial with $H(\mathbf{0})=1$ such that $\sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 = 1$, $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Let θ be a function such that $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} H(A^{*-j}\mathbf{t})$. Then the following conditions are equivalent:*

1) *The function θ is a scaling function of an A-MRA;*

2) *There is no non constant trigonometric polynomial invariant under the operator P.*

Moreover, we generalize the conditions appeared in [62] to our general context.

The first step for the study of low pass filters which give rise to a scaling function of an A-MRA is obvious: one should study the infinite product

$$\prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid . \tag{7}$$

Let us suppose that the infinite product (7) converges almost everywhere on $\mathbf{R}^n$. We are going to look for a scaling function ϕ for an A-MRA which satisfies the condition

$$\mid \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \mid = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid .$$

Hence, by Theorem 2 on characterization of scaling functions in a multiresolution analysis, we should also suppose that $\mid \widehat{\phi} \mid$ is A^*-locally nonzero at the origin. In order not to repeat those conditions let us introduce the class of Π_A which consists of all measurable functions on $\mathbf{R}^n$ such that $0 \le f(\mathbf{t}) \le 1$ a.e. on $\mathbf{R}^n$ and the origin is a point of A^*-approximate continuity of f when we set $f(\mathbf{0}) = 1$. The class Π_A will be denoted by Π when the origin is a point of approximate continuity of f.

The following results hold true.

Theorem 5. *Let $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ be a function such that the infinite product (7) converges almost everywhere on $\mathbf{R}^n$ and is A^*-locally non zero at the origin. Then the following conditions are equivalent:*

A) *The function θ, where $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$, is a scaling function of an A-MRA and $|H|$ is its associated low pass filter.*

B) *The only function $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \bigcap \Pi_A$ invariant under the operator P is the function $f \equiv 1$.*

As a consequence of Theorem 5 we can give a complete characterization of all low pass filters associated with scaling functions. We need the notion of a *filter multiplier* which was introduced in [76] for the one dimensional case.

Definition 7. *We will say that a measurable function m is a filter multiplier if whenever H is a low pass filter associated with a scaling function of an A-MRA, then mH is a low pass filter associated with a scaling function of an A-MRA.* In the above definition we avoid to introduce in the notation the letter A, because the class of filter multipliers is the same for all expansive linear maps $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ such that $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$.

Set

$$m_H(\mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{H(\mathbf{t})}{|H(\mathbf{t})|} & \text{if } |H(\mathbf{t})| \neq 0 \\ 0 & \text{if } |H(\mathbf{t})| = 0, \end{cases} \tag{8}$$

and let μ be any measurable function on $\mathbf{R}^n$ such that

$$\mid \mu(\mathbf{t}) \mid = 1 \quad \text{a.e. on } \mathbf{R}^n \text{ and } \quad m_H(\mathbf{t}) = \mu(A^*\mathbf{t})\overline{\mu(\mathbf{t})}, \tag{9}$$

where m_H is defined by (8).

Theorem 6. *Let $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ be a measurable function such that the infinite product (7) converges almost everywhere on $\mathbf{R}^n$ and is A^*-locally non zero at the origin. Then the following conditions are equivalent:*

- **(A)** *$\forall \mu$ verifying (9), $(\mu\widehat{\theta})^\vee$ is a scaling function of an A-MRA, where $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^\infty |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$, and H is its associated low pass filter.*
- **(B)** *The only function $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \bigcap \Pi_A$ invariant under the operator P is the function $f \equiv 1$.*

When $n = 1$ and for dyadic dilations, we will denote the operator P by

$$P_1 f(t) = \mid H(\frac{t}{2}) \mid^2 f(\frac{t}{2}) + \mid H(\frac{t+1}{2}) \mid^2 f(\frac{t+1}{2}). \tag{10}$$

In this case Theorem 6 implies the following Corollary

Corollary 7. *Let $H \in L^\infty(\mathbb{T})$ be a measurable function such that the infinite product $\prod_{j=1}^\infty |H(2^{-j}t)|$ converges almost everywhere on $\mathbf{R}$ and is locally non zero at the origin. Then the following conditions are equivalent:*

- **(a)** *$\forall \mu$ verifying (9), $(\mu\widehat{\theta})^\vee$ is a scaling function of an MRA, where $\widehat{\theta}(t) := \prod_{j=1}^\infty |H(2^{-j}t)|$ and H is its associated low pass filter.*
- **(b)** *The only function $f \in L^1(\mathbb{T}) \bigcap \Pi$ invariant under the operator P_1 is the function $f \equiv 1$.*

Chapter 3: Minimally supported frequency wavelets, scaling functions and low pass filters

We study scaling functions of an A-MRA such that the modulus of their Fourier transform is a characteristic function and the dilation is given by an expansive linear map $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ such that $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$.

We will say that a wavelet is a minimally supported frequency wavelet (MSF wavelet) if the modulus of its Fourier transform is a characteristic function (cf. [38], [29], [44], [43], [23], [22], [2], [35], [9]). Given a multiwavelet $\{\psi^{(d)} \in L^2(\mathbf{R}^n) \ : \ d = 1, ..., s\}$ associated with the fixed dilation A such that $\mid \widehat{\psi^{(d)}} \mid = \chi_{K_d}$ where $K_d \subset \mathbf{R}^n$, $d = 1, ..., s$, are measurable sets, it is well known that $\mid K_d \mid_n = 1$ for $d = 1, ..., s$, and consequently the measure of the support of $\widehat{\psi^{(d)}}$ is minimal for all $d = 1, ..., s$. Hence, this multiwavelet is called a minimally supported frequency (A-MSF) multiwavelet. In the same sense, we will say that ϕ is A-MSF scaling function when ϕ is a scaling function of an A-MRA such that $|\widehat{\phi}| = \chi_S$, where $S \subset \mathbf{R}^n$ is a measurable set. The set S is called a scaling function set. The wavelets (or multiwavelets) derived from multiresolution analysis with dilation A are called A-MRA wavelets (or multiwavelets).

Perhaps, from an applied point of view, minimally supported frequency A-MRA wavelets may not be very useful as they lack the regularity and localization properties, but, on the other hand, they are useful to understand a bit better the structure of the wavelets. A classical example in $L^2(\mathbf{R})$ is the Shannon wavelet, i.e. $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ such that

$$\widehat{\psi}(t) = e^{\pi i \mathbf{t}} \chi_I(t) \qquad \text{where} \quad I = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1].$$

We study also the scaling function sets S.

Papadakis, Sikić and Weiss [62] gave a characterization of such sets when $n = 1$ and for dyadic dilations.

In this direction, Gu and Han [35], proved

Theorem (Gu and Han). *Let A be a real $n \times n$ expansive matrix $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ and $d_A = 2$. Then there is an A-MRA wavelet set $E \subset \mathbf{R}^n$. That is, there is a measurable set E such that $(\frac{1}{|E|_n} \chi_E)^\vee$ is an A-MRA wavelet.*

They build a set E and from there, get a measurable set $S \subset \mathbf{R}^n$ where the function $\phi = (\chi_S)^\vee$ s is a scaling function of an A-MRA.

Without the added hypothesis $d_A = 2$, the proof of the following proposition is in fact contained in the proof of Theorem 4.2 of the article by Bownik, Rzeszotnik and Speegle [9].

Proposition (Bownik, Rzeszotnik and Speegle). *There exists a scaling function ϕ of an $A-MRA$ such that $\widehat{\phi} = \chi_E$ where $E \subset \mathbf{R}^n$ is a measurable set.*

Moreover they give, in particular, a characterization of scaling function sets. [9, Theorem 3.3].

As an easy consequence of Theorem 3 we give another characterization for the scaling function sets.

Corollary 8. *Let $A \in \mathcal{LE}$ such that $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ and let $E \subset \mathbf{R}^n$ be a measurable set. The following conditions are equivalent:*

- *(A^*) The function $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ such that $| \widehat{\phi} |= \chi_E$ is a scaling function of an A-MRA.*
- *(B^*) (a) $| E |_n = 1$ and $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ a.e.*
  - *(b) $E \in \mathcal{D}_{A^*}$.*
  - *(c) $A^{*-1}E \subset E$ a.e.*
- *(C^*) (b^*) The function $| \widehat{\phi} |= \chi_E$ is A^*-locally nonzero at the origin, and conditions (a) and (c) hold.*

We prove the following proposition in a constructive way.

Proposition 9. *Let $A \in \mathcal{LE}$ such that $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, there exists a measurable set $E \subset \mathbf{R}^n$ such that no neighborhood of the origin is contained in E, and the function $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ such that $\widehat{\phi} = \chi_E$ is a scaling function of an A-MRA.*

We give the following characterization of measurable sets $E \subset \mathbf{R}^n$, $E + \mathbf{Z}^n = E$ such that the function H where $| H |= \chi_E$ is a low pass filter associated with a scaling function of an A-MRA.

Theorem 10. *Let $A \in \mathcal{LE}$ such that $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, and let $E \subset \mathbf{R}^n$ be a measurable set such that $E = E + \mathbf{Z}^n$ and satisfies*

$$1 = \sum_{i=0}^{d_A - 1} \chi_E(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \qquad \text{in a.e. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{11}$$

The following conditions are equivalent:

- **(A)** *The function H such that $\mid H \mid = \chi_E$ is a low pass filter associated with a scaling function of an $A-MRA$.*
- **(B)** (α) *There exists a measurable set $K \subset E$ such that $K \in \mathcal{D}_{A^*}$ and $A^{*-1}K \subset K$ a.e.*
  (β) $\mid \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j} E \mid_n = 1$.
- **(C)** (α') *There exists a measurable set $K \subset E$ such that $A^{*-1}K \subset K$ a.e. and the function χ_K is A^*-locally nonzero at the origin, and condition (β) holds.*

In particular our result permits us to get rid of the assumption that H is continuous at the origin in the following theorem.
Theorem (Hernández, Wang and Weiss). *Let H be a 1-periodic measurable function defined on $\mathbf{R}$ such that H is continuous at 0 and $\mid H(0) \mid = 1$. Then H is a low pass filter for an 2-MSF wavelet if and only if $\mid H \mid = \chi_E$, where $E \subset \mathbf{R}$ is a measurable set that satisfies*

$$\chi_E(\xi) + \chi_E(\xi + \frac{1}{2}) = 1 \qquad a.e.\ \xi \in \mathbf{R} \quad and \quad \mid \bigcap_{j=1}^{\infty} 2^j E \mid_1 = 1.$$

Finally, we give examples of A-MSF (multi)-wavelets $\psi^{(d)}$, $d = 1, ..., s$, where the novelty is that the origin is not a point of continuity for some of the functions $\mid \widehat{\psi^{(d)}} \mid$, $d \in \{1, ..., s\}$.

Chapter 4: Equivalence of A-approximate continuity

If we compare the condition ($\mathbf{C_1}$) in Theorem 1 with the condition (**C**) in Theorem 3, it is not difficult to observe that if we consider the polar decomposition of a map A and have that all eigenvalues of the positive operator $\sqrt{A^*A}$ are equal, then it is easy to show that for those maps the conditions ($\mathbf{C_1}$) and (**C**) are equivalent. Moreover, if we observe the definitions of point of approximate continuity and point of A-approximate continuity of a measurable function, it is easy to see that we can find an expansive linear map $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ for which given a point in $\mathbf{R}^n$ there exists a measurable function $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ such that this point is a point of approximate continuity of f but it is not a point of A-approximate continuity of f and viceversa. The following problems are posed in [16].

Problem 1: Characterize those expansive linear maps A for which the concept of approximate continuity coincides with the concept of A-approximate continuity.

The following problem is a little bit more general.

Problem 2: Characterize those expansive linear maps A_1 and A_2 for which the concept of A_1-approximate continuity coincides with the concept of A_2-approximate continuity.
Remark. From the definition of point of approximate continuity of a measurable

function on $\mathbf{R}^n$, it is easy to see that given $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ and given a measurable set $E \subset \mathbf{R}^n$, then the point $\mathbf{x_0}$ is a point of approximate continuity for the function

$$f(\mathbf{x}) = \chi_{E\cup\{\mathbf{x_0}\}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in E \bigcup \{\mathbf{x_0}\} \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

if and only if $E \in \mathcal{D}(\mathbf{x_0})$.
An analogous remark is true for points of A-approximate continuity.

Moreover, clearly, $E \in \mathcal{D}$ (resp. $E \in \mathcal{D}_A$) if and only if $E + \mathbf{x_0} \in \mathcal{D}(\mathbf{x_0})$ (resp. $E + \mathbf{x_0} \in \mathcal{D}_A(\mathbf{x_0})$).

Thus, we can simplify our problems in the following way.

Problem 1: Characterize those expansive linear maps $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ for which $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.

Problem 2: Describe under what conditions on two expansive linear maps $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, we have that $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$.

We study the two problems above. Firstly, we give a complete solution to Problem 1. After that, we give an answer to Problem 2 in the particular case when the maps are defined on $\mathbf{R}^2$. Finally, we will give a solution to Problem 2 when the maps are defined on $\mathbf{R}^n$ and are expansive self-adjoint linear maps.

The following two theorems were obtained jointly with Professor Peter Oswald.

Theorem 11. *Let $A \in \mathcal{LE}$. Then $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$ if and only if A is a isotropic linear map, i.e., A is diagonalizable linear map and all its (complex) eigenvalues have the same absolute value.*

Theorem 12. *Let $A_1, A_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ be two expansive linear maps. Then if $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$ one of the three following assertions holds.*

(1) *A_1 and A_2 are isotropic linear maps.*

(2) *There exists two invertible real 2×2 matrices, C and D, $d_C > 0$, $d_D > 0$, such that $A_1 = C^{-1}A_1'C$ and $A_2 = D^{-1}A_2'D$, where the matrices corresponding to the linear maps A_1' and A_2' are respectively,*

$$A_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid,$$

$$A_2' = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \nu_1 \mid<\mid \nu_2 \mid,$$

$$\textit{with} \quad \frac{\log \mid \lambda_2 \mid}{\log \mid \lambda_1 \mid} = \frac{\log \mid \nu_2 \mid}{\log \mid \nu_1 \mid}$$

$$\textit{and} \quad CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad \textit{such that } a, b, d \in \mathbf{R}.$$

(3) *There exists two invertible 2×2 real matrices C and D, $d_C > 0$, $d_D > 0$ such that $A_1 = C^{-1}A_{\lambda,1}C$ and $A_2 = D^{-1}A_{\nu,1}D$, where the matrices corresponding to the linear maps $A_{\lambda,1}$ and $A_{\nu,1}$ are respectively*

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \mid \lambda \mid> 1,$$

$$A_{\nu,1} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbf{R} \quad |\nu| > 1,$$

$$\textit{where} \quad CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad \textit{with } a,b,d \in \mathbf{R},$$

$$\textit{and} \quad \frac{a}{d} = \frac{\nu \log |\nu|}{\lambda \log |\lambda|}.$$

The following result is a joint work with Professor Szilárd GY. Révész [65].
Theorem 13. *Let $A_1, A_2 \in \mathcal{LEP}$.*

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \textit{ such that } \quad A_1^s = A_2.$$

For a slightly more general result, let $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ be self-adjoint expansive linear maps, without assuming that they are positive. We now consider the diagonal matrices

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\mu)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(\mu)} & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(\mu)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i^{(\mu)} \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

where $A_\mu = C_\mu J_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1,2$, with some invertible linear mappings $C_1, C_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$. Let us denote

$$J'_\mu = \begin{pmatrix} |\lambda_1^{(\mu)}| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\lambda_2^{(\mu)}| & 0 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |\lambda_n^{(\mu)}| \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Then as a consequence of the above Theorem 13 we can assert the following.
Corollary 14. *Let $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ be self-adjoint expansive linear maps. Let $C_1, C_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ be such that $A_\mu = C_\mu J_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1,2$, where J_μ are the respective diagonal maps as in (12). Then*

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \textit{ such that } \quad (A'_1)^s = A'_2,$$

where $A'_\mu = C_\mu J'_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1,2$, with J'_μ as in (13).

Chapter 5: Characterization of scaling functions

The purpose of Chapter 5 is the characterization of the functions $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ which generate frame multiresolution analysis (FMRA) (cf. [13, p. 285]). This question for MRA and, later, for FMRA has been treated by several authors [6], [14], [46], [75], [13] and others). We obtain the characterization of scaling functions of a multiresolution analysis as a particular case. The fact that in the closed linear span of translates of a single function there exists a tight frame permits us to obtain the characterization of scaling functions for more general cases from our main result in Chapter 5.

Since the pioneer works on wavelets the conditions (i), (ii), (iii) y (iv) in a multiresoltuion analysis have been modified in order to attend different purposes required by applications. One of the most “suffered” conditions is condition (iv) which *a priori* looks independent from the previous three conditions. First, the requirement that $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ is an orthonormal basis for V_0 was weakened, requiring that the shifts of the scaling functions constitute a Riesz basis for V_0. Afterwards, the notion of a *frame multiresolution analysis* (FMRA) in $L^2(\mathbf{R})$ was formulated by J. Benedetto and S. Li [3]. An FMRA is a natural extension of the MRA and is obtained by replacing the condition (iv) with the following one:

(iv)* There exists a function $\phi \in V_0$, that is called *scaling function*, such that $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ is a frame for V_0.

The theory of frames was introduced by Duffin and Schaeffer [28].

Recently ([67], [25]), MRA generated by a scaling function ϕ, where the condition (iv) is replaced by the requirement that V_0 is the closed linear span of $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$, have been studied. Moreover, the notion of MRA has been extended to more general spaces as $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, [30], or Sobolev sapces [57].

We prove our main result in Chapter 5 for the more general context of an FMRA in $L^2(\mathbf{R}^n)$, however we only consider the dyadic case. We can get conditions in a general case where the dilations are given by a fixed expansive lineal map on $\mathbf{R}^n$ combining the approaches of Chapter 1 and Chapter 5, that we will show below.

In order to shorten the notation, we will consider $\frac{0}{0} = 0$ or $0\frac{1}{0} = 0$ in some expressions where such indeterminacy appears. Given $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, we denote

$$\Phi_\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \tag{14}$$

and denote

$$\mathcal{N}_\phi = \{\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n : \Phi_\phi(\mathbf{t}) = 0\}. \tag{15}$$

Let L be a subset of a complex, separable Hilbert space $\mathbb{H}$. The vector space generated by all finite linear combinations of elements in L is span$L$, the closure of span$L$ is $\overline{\text{span}}L$.

Definition 8. *A sequence $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ of elements in a Hilbert space $\mathbb{H}$ is a frame sequence if it is a frame for $\overline{span}\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Definition 9. *A function $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ generates an FMRA if $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ is a frame sequence and the subspaces*

$$V_j = \overline{span}\{D_2^j \tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}, \quad j \in \mathbf{Z} \tag{16}$$

of the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^n)$ satisfy the conditions (i) and (iii).

We prove the following result.

Theorem 15. *Let $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Then the following conditions are equivalent:*

($\mathbf{A_1}$) *ϕ generates an FMRA;*

($\mathbf{B}$) *(α) The function $\widehat{\phi}$ is locally nonzero at the origin;*

(β) There exist positive constants A and B such that

$$A \le \Phi_\phi(\mathbf{t}) \le B \quad a.e.\ on \quad \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{N}_\phi; \tag{17}$$

(γ) There exists $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, a 1-periodic function with respect to each variable, called low pass filter, such that

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\frac{\mathbf{t}}{2})\widehat{\phi}(\frac{\mathbf{t}}{2}) \qquad a.e.\ on\ \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{18}$$

(**C**) *(α^*) The origin is a point of approximate continuity of $|\ \widehat{\phi}\ |^2 / \Phi_\phi$, provided that we take $(|\ \widehat{\phi}(\mathbf{0})\ |^2 / \Phi_\phi(\mathbf{0})) = 1$; and the conditions (β) and (γ) hold.*

The corresponding result for MRA is just a direct corollary of the main result but we would like to formulate it for the sake of completeness.

Definition 10. *We will say that a function $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ generates an MRA if $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ is a Riesz sequence and the subspaces (16) of the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^n)$ satisfy the conditions (i) and (iii).*

We prove the following result.

Theorem 16. *Let $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Then the following conditions are equivalent:*

(A_1) *ϕ generates an MRA;*

(B_1) *The conditions (α), (γ) of Theorem 15 hold and*

(β_1) There exist positive constants A, B such that

$$A \le \Phi(\mathbf{t}) \le B \qquad a.e.\ in\quad \mathbb{T}^n. \tag{19}$$

(C_1) *The conditions (α^*), (γ) of Theorem 15 and (β_1) hold.*

If $\phi \in V_0$ is such that $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ is an orthonormal basis for V_0 we obtain Theorem 3.

A characterization of the scaling functions ϕ for MRA, when the condition (iv) is replaced by the following one:

(iv)** $V_0 = \overline{\mathrm{span}}\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$,

is the following

Theorem 17. *Let $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Then the following conditions are equivalent:*

(A_3) *The conditions (i),(ii), (iii) and (iv)** hold;*

(B_3) *The function $\widehat{\phi}$ is locally nonzero at the origin, and there exists $G_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, a $\mathbf{Z}^n$-periodic function, such that*

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t})\,(\Phi(\mathbf{t}))^{-1/2} = G_0(\mathbf{t}/2)\widehat{\phi}(\mathbf{t}/2)\,(\Phi(\mathbf{t}/2))^{-1/2} \qquad a.e.\ in\quad \mathbf{R}^n; \tag{20}$$

(C_3) *The origin is a point of approximate continuity of the function $|\widehat{\phi}|^2/\Phi_\phi$ if we set $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})|^2 \cdot (\Phi_\phi(\mathbf{0}))^{-1} = 1$, and there exists $G_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, a $\mathbf{Z}^n$-periodic function, such that (20) holds.*

Following papers related with this thesis were published and are submitted for publication

P. Cifuentes, K. S. Kazarian, A. San Antolín; *Characterization of scaling functions in a multiresolution analysis*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** No. 4

(2005), 1013-1023.

P. Cifuentes, K. S. Kazarian, A. San Antolín; *Characterization of scaling functions*, Wavelets and splines: Athens 2005, 152–163, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2006.

Sz. Gy. Révész, A. San Antolín; *A-Equivalence of self-adjoint linear maps.* (Submitted)

A. San Antolín; *Characterization of low pass filters in a multiresolution analysis.* (Submitted)

INTRODUCCIÓN

Si se pregunta a un geólogo sobre una forma de detectar petróleo, empezará hablando de estratos y capas terrestres a diferentes niveles de profundidad. Entonces, continuará comentando que existen varios métodos para determinar la densidad de estas. Uno de los más utilizados es el método sismográfico o sísmico que consiste en lo siguiente: En una zona en la previamente suponemos que puede haber presencia de hidrocarburos se perfora un pozo a una profundidad determinada. En él se hace estallar una pequeña carga que provoca una agitación en las capas terrestres. La explosión provoca unas ondas sonoras que se propagan en el interior de la tierra. Cuando esas ondas viajan sobre capas de diferente densidad su comportamiento varía. Algunas de ellas se reflejan y vuelven a la superficie y otras se refractan cambiando su velocidad de propagación. La llegada de las ondas a la superficie es recogida por los sismógrafos que transladan la información a una estación sismográfica. Esencialmente los simógrafos miden el tiempo que transcurre desde que fue emitida la onda tras la explosión hasta su llegada a la superficie. Con esta información podemos saber, por ejemplo, la profundidad, composición e inclinación de las capas profundas.

La herramienta principal que se usaba para estudiar los ecos recibidos desde 1960 era el *análisis de Fourier con ventanas*. Los resultados que se obtenían con este método no satisfacían al geofísico francés Jean Morlet, quien en 1975, propuso considerar sistemas en los que la anchura de la ventana fuera variable manteniendo constante el número de oscilaciones en cada ventana. De manera más precisa, propuso comenzar con una “onda pequeña” u “ondícula”, $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, y considerar el sistema de traslaciones y dilataciones

$$\{\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) : j, k \in \mathbf{Z}\} \tag{21}$$

de manera que la “onda pequeña”, ψ, se repite a todos los niveles 2^j con una amplitud adecuada al nivel.

Llamamos *ondícula ortonormal* en $\mathbf{R}$ a una función $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ tal que el sitema (21) es una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$.

J. Morlet empezó a trabajar con Alex Grossmann en 1981 con el fin de dar sentido a los experimentos sobre la búsqueda de petróleo. Los esfuerzos de estos dos ingenieros llegaron a oídos del matemático francés Yves Meyer, quien pensó que sería imposible usar una ondícula suave y bien localizada para analizar las señales con el sistema (21). Al querer probar que sólamente en algunas ocasiones poco interesantes el sistema (21) podía ser una base ortonormal de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, llevaron a P. G. Lemarié y a Y. Meyer, en 1985, a todo lo contrario, es decir, a construir las “ondículas” que Y. Meyer pensaba que no existían.

Obsérvese que de acuerdo con lo anterior, las ondículas son relativamente recientes, de principios de los años 80. Desde entonces la teoría de ondículas ha crecido considerablemente. De hecho, si se escribe la palabra "wavelet" en un buscador de internet, como por ejemplo en "Google", aparecerán mas de 2.500.000 enlaces, y si se escribe es "Mathscinet" aparecerán más de 4.000 artículos que incluyen la palabra "wavelet" en su título, y más de 6.500 artículos relacionados.

Existen varias razones para su presente éxito. Por un lado, el concepto de ondícula puede ser visto como una síntesis de ideas generadas durante los últimos cuarenta años en muy diversas disciplinas. Por ejemplo, ideas procedentes de la ingeniería aplicadas a la compresión de imágenes. Ideas procedentes de la física para el estudio de los estados coherentes los cuales son fundamentales en la mecánica cuántica, e ideas procedentes de las matemáticas puras en el estudio de los operadores de Calderón-Zygmund.

Por otro lado, las ondículas son una herramienta matemática relativamente simple y con una gran variedad de posibles aplicaciones, de hecho, han encabezado interesantísimas aplicaciones en el análisis de señales y en el análisis numérico.

Uno de los problemas que presentan las ondículas de Lemarié y Meyer es que tienen una expresión complicada y no se adaptan bien a los cálculos con ordenador. La posibilidad de usar las ondículas en la tecnología moderna partió de una idea de Stéphane Mallat. Se cuenta que durante tres días, en el otoño de 1986, S. Mallat e Y. Meyer sentaron las bases de un modelo llamado *Análisis Multirresolución.*

Un análisis multirresolución (MRA) es un método general introducido por Mallat [59] y Meyer [60] para la construcción de ondículas. En $\mathbf{R}^n, (n \geq 1)$ por MRA entenderemos una sucesión de subespacios cerrados V_j, $j \in \mathbf{Z}$, del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen las siguientes condiciones

(i) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad V_j \subset V_{j+1}$;

(ii) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j \Leftrightarrow f(2\mathbf{x}) \in V_{j+1}$;

(iii) $W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n) \quad$ y $\quad \cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{\mathbf{0}\}$;

(iv) Existe una función $\phi \in V_0$ tal que $\{ \ \phi(\mathbf{x}-\mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \ \}$ es una base ortonormal para V_0. A esta función ϕ se la llama *función de escala.*

Más información sobre el origen y aplicaciones de las ondículas puede verse en [24], [50], [46], [75], [41].

Consideraremos un MRA en un contexto más general sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, donde en vez de la dilatación diádica tendremos una dilatación dada por una aplicación lineal y expansiva fija $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Dada una aplicación lineal A que cumple las propiedades anteriores, definimos un A-MRA como una sucesión de subespacios cerrados V_j, $j \in \mathbf{Z}$, del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ (ver [58], [34],[71] [75]) que satisface las condiciones (i), (iii), (iv) y

(ii$_A$) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j \Leftrightarrow f(A\mathbf{x}) \in V_{j+1}$.

Esta tesis consta de una introducción, cinco capítulos y dos apéndices. En el Capítulo 1 damos una caracterización completa de las funciones de escala de un A-MRA. En el Capítulo 2 obtenemos condiciones necesarias y suficientes para los filtros de paso bajo asociados con funciones de escala de un A-MRA. En el Capítulo 3 estudiamos las funciones de escala de un A-MRA que tienen frecuencia con soporte minimal. En el Capítulo 4 hacemos una comparación de la noción de A-continuidad aproximativa para diferentes aplicaciones A. En el Capítulo 5 se relajarán las condiciones de MRA y trataremos los Frame-MRA y los subespacios invariantes por translaciones por enteros. Finalmente, incluimos dos apéndices. En el Apéndice A podemos encontrar conceptos y propiedades básicas que utilizaremos a lo largo del texto. Los resultados presentados en el Apéndice B son nuevos. Los escribimos aparte, porque están estrechamente relacionados con el Análisis Clásico. Estudiamos nuevas definiciones que introducimos en este texto para dar una caracterización de las funciones de escala de un A-MRA.

Empezaremos escribiendo la notación, definiciones y conceptos básicos que utilizaremos a lo largo del texto.

Denotaremos por $\mathbf{N}$ los números naturales sin el cero y $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Además $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$ serán los números reales y los complejos respectivamente. Por supuesto, un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, será $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ tal que $x_i \in \mathbf{R}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Si tenemos $a \in \mathbf{R}$, $[a]$ será la parte entera de a.

Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y dado $r > 0$, escribiremos la bola abierta de centro $\mathbf{x}$ y de radio r como $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \ : \ \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| < r\}$ donde $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = (\sum_{i=1}^n | x_i - y_i |^2)^{\frac{1}{2}}$. Si el centro de la bola es el origen, escribiremos B_r. Además, $Q_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \ : \ | x_i - y_i | < r, \forall i = 1, ..., n\}$, y si el centro del cubo es el origen, escribiremos Q_r.

Denotaremos $\mathbb{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ y alguna vez, con algún abuso de notación, consideraremos $\mathbb{T}^n = [0, 1)^n$.

Trabajaremos con espacios vectoriales W reales o complejos. Dado W_1 un subespacio vectorial de W y dada $A : W \longrightarrow W$ una aplicación lineal, denotaremos por $A|_{W_1}$ la restricción de la aplicación A sobre los elementos de W_1. Si además, W es un espacio con producto interior, denotaremos por $W_1^\perp$ al complemento ortogonal de W_1 en W. Sean W_1 y W_2 dos subespacios de W tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, escribiremos $W = W_1 \oplus W_2$ para indicar que W es suma directa de W_1 y W_2. Si $A_\mu W_\mu :\longrightarrow W_\mu$, $\mu = 1, 2$ son dos aplicaciones lineales, denotaremos por $A_1 \otimes A_2$ la aplicación lineal definida en $W_1 \oplus W_2$ tal que $(A_1 \otimes A_2)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = A_1\mathbf{w}_1 + A_2\mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_\mu \in W_\mu$, $\mu = 1, 2$.

Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, al espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales $A : V \longrightarrow W$ lo denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$, si tenemos que $V = W$, entonces la notación será $\mathcal{L}(V)$ y si $V = W = \mathbf{R}^n$, escribiremos simplemente $\mathcal{L}$. Además, denotaremos por $\mathcal{LE}$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ y escribiremos $\mathcal{LEP}$ si además A es definida positiva.

Dada $A \in \mathcal{L}$, utilizaremos la misma notación para la aplicación lineal y para su matriz asociada con respecto de la base canónica. Denotaremos por $d_A = | \det A |$, el módulo del determinante de A. Si $d_A > 0$, A^* será la aplicación adjunta de A. La aplicación $\widehat{A} : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ será la aplicación inducida de la aplicación A, es decir, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$, $\widehat{A}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{k}$ para algún $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $A\mathbf{x} + \mathbf{k} \in \mathbb{T}^n$.

Se puede observar fácilmente que dada $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, entonces su aplicación adjunta tendrá esas misma propiedades. Así, si consideramos los siguientes grupos cocientes $\mathbf{Z}^n / A\mathbf{Z}^n$ y $\mathbf{Z}^n / A^*\mathbf{Z}^n$, tenemos que

$$\text{card } (\mathbf{Z}^n / A\mathbf{Z}^n) = \text{card } (\mathbf{Z}^n / A^*\mathbf{Z}^n) = d_A \geq 2 \quad \text{(ver [34], [75, pág. 109])}.$$

Denotaremos por $\mathcal{E}_i$ y por $\mathcal{E}_i^*$, $i = 0, ..., d_A - 1$, las diferentes clases de equivalencia del grupo cociente $\mathbf{Z}^n/A\mathbf{Z}^n$ y de $\mathbf{Z}^n/A^*\mathbf{Z}^n$ respectivamente, y serán Δ_A y Δ_{A^*} colecciones completas de representantes de esas diferentes clases de equivalencia. Para ser precisos, $\mathcal{E}_0 = A(\mathbf{Z}^n)$ y $\mathcal{E}_0^* = A^*(\mathbf{Z}^n)$, donde podemos tomar por comodidad $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^* = \mathbf{0}$, y además, $\Delta_A = \{\mathbf{p}_i\}_{i=0}^{d_A-1}$ y $\Delta_{A^*} = \{\mathbf{p}_i^*\}_{i=0}^{d_A-1}$.

Dado $E \subset \mathbf{R}^n$, denotaremos $AE = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$. Además, dado $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, $E + \mathbf{y} = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \ : \ \mathbf{x} \in E\}$. El complementario de E en $\mathbf{R}^n$ será $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$ y escribiremos $E_{\mathbb{T}^n} = \{\mathbf{x} \in [0,1)^n \ : \ \exists \mathbf{k}_\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^n \text{ tal que } \mathbf{x} + \mathbf{k}_\mathbf{x} \in E\}$.

A lo largo de este texto, dado un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, denotaremos por $\mid E \mid_n$ la medida de Lebesgue de dicho conjunto, es más, nos referiremos como conjuntos medibles a todos aquellos conjuntos que son medibles con respecto a la medida de Lebesgue. De esta manera, el volumen de E cambia bajo A de acuerdo con $\mid AE \mid_n = d_A \mid E \mid_n$.

Sea una función medible $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$, diremos que f es $\mathbf{Z}^n$-periódica si $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se verifica que $f(\mathbf{x} + \mathbf{k}) = f(\mathbf{x})$, y si escribimos $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ entenderemos, además, que f está definida en todo el espacio $\mathbf{R}^n$ como una función $\mathbf{Z}^n$-periódica. Escribiremos el soporte de f como sop f. La traslación de una función $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ por $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ la denotaremos por $\tau_\mathbf{a} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ y por D_A al operador dilatación $D_A f(\mathbf{x}) = d_A^{\frac{1}{2}} f(A\mathbf{x})$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Denotaremos el producto interior en un espacio vectorial por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y escribiremos $\| \cdot \|$ para indicar la norma. (Ver Apéndice A para más detalles sobre la notación).

Recogemos y hacemos una descripción de los resultados más importantes que hemos obtenido.

Capítulo 1: Caracterización de las funciones de escala de un análisis multirresolución

En este capítulo estudiaremos el concepto de *Análisis Multirresolución*, $\{V_j \ : \ j \in \mathbf{Z}\}$, en $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, donde la dilatación viene dada por una aplicación lineal expansiva fija $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Veremos que no todas las condiciones que usualmente se piden para un A-MRA son independientes. Nuestra atención se centrará en el estudio de las funciones de escala y daremos una caracterización completa de ellas.

En el caso general, es fácil ver que las condiciones obtenidas dependen de la aplicación A.

Los resultados de este capítulo han sido publicados en [16].

El problema de dar una caracterización completa de las funciones de escala de un MRA fue propuesto por R. Strichartz en [71], y estudiado por varios autores.

Las condiciones se presentan sobre la transformada de Fourier de ϕ. En este texto, adoptamos el convenio de que la transformada de Fourier de la función $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ está definida por

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} d\mathbf{x}, \quad \text{(ver Apéndice A).}$$

Probablemente, el siguiente resultado, probado para $n = 1$, se debería atribuir a I. Daubechies (ver [24] y además [46]).

Teorema (Daubechies). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv) donde ϕ satisface que $|\,\widehat{\phi}\,|$ es continua en el origen. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} a) & \widehat{\phi}(0) \neq 0; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

C. de Boor, R. DeVore, A. Ron [6] probaron lo siguiente.
Teorema (de Boor, DeVore y Ron). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv).*
Entonces son equivalentes:

$$\begin{array}{ll} a) & \cup_{j\in\mathbf{Z}}\ (2^j\ sop\ \widehat{\phi}) = \mathbf{R} \qquad en\ c.t.p.; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

Después, E. Hernández y G. Weiss ([46, pág. 382], [45], [42]) probaron la siguiente caracterización.
Teorema (Hernández y Weiss). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv) para $n = 1$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} a) & \lim\limits_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}y)| = 1 \qquad para\ c.t.\ y \in \mathbf{R}; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

El teorema anterior está formulado de diferente manera a la que nos lo encontramos en [46, Teorema 5.2, pág. 382] , para indicar la parte esencial del resultado en el que estamos interesados.

Otras condiciones necesarias y suficientes han sido dadas por R.A. Lorentz, W.R. Madych y A. Sahakian [56].
Teorema (Lorentz, Madych y Sahakian). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv) para $n = 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} a) & \lim\limits_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}y)| \quad existe\ y\ es\ positivo\ para\ c.t.\ y \in \mathbf{R}; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}); \\ c) & El\ conjunto\ \{y \in \mathbf{R}\ :\ |\,\widehat{\phi}(y)\,| > 0\}\ es\ diádicamente\ absorbente, \\ & es\ decir,\ para\ casi\ todo\ y \in \mathbf{R},\ existe\ un\ entero\ positivo\ j_0, \\ & que\ puede\ depender\ de\ y,\ tal\ que\ si\ j \geq j_0\ entonces\ |\,\widehat{\phi}(2^{-j}y)\,| > 0. \end{array}$$

Todas las caracterizaciones anteriores presentan condiciones "globales", así, nuestro objetivo es encontrar condiciones "locales" y alcanzar un entendimiento algo más profundo de la relación entre el comportamiento de la función $\widehat{\phi}$ en un entorno del origen y la condición (iii). En particular, nuestro resultado permite deshacernos de la hipótesis de que $|\widehat{\phi}|$ es continua en el origen que aparece en el Teorema de Daubechies.

Necesitamos las siguientes definiciones para formular nuestro resultado.
Definición 1. *Se dice que* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *es un punto de densidad de un conjunto medible* $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, *si*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{\mid E \bigcap (B_r + \mathbf{x}_0) \mid_n}{\mid B_r + \mathbf{x}_0 \mid_n} = 1. \tag{22}$$

Denotamos

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}_0) = \{E \subset \mathbf{R}^n \text{ conjunto medible } : \mathbf{x}_0 \text{ es un punto de densidad de } E\},$$

y además escribiremos simplemente $\mathcal{D}$ si $\mathbf{x}_0$ es el origen.
Definición 2. *Sea* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ *una función medible. Se dice que* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *es un punto de continuidad aproximativa de la función* f *si existe un conjunto medible* $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, *tal que* $\mathbf{x}_0$ *es un punto de densidad del conjunto* E *y además,*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0). \tag{23}$$

El concepto de continuidad aproximativa fue introducido por A. Denjoy [26]. (para más información ver [61], [10]). El siguiente resultado de Denjoy nos da una relación entre funciones medibles y puntos de continuidad aproximativa de esas funciones (véanse [26], [61], [10]).
Teorema (Denjoy). *Dada* f *una función medible definida en el intervalo ce rrado* $[a, b]$ *y finita en casi todos los puntos, entonces casi todos los puntos de* $[a, b]$ *son puntos de continuidad aproximativa de la función* f.
Definición 3. *Una función medible* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *se dice que es localmente distinta de cero en el punto* $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ *si para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe* r, $0 < r < 1$, *tal que*

$$|\{\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0}) \ : \ f(\mathbf{x}) = 0\}|_n < \varepsilon |B_r(\mathbf{x_0})|_n.$$

Ahora, dada $A \in \mathcal{LE}$ definimos unos conceptos algo más generales.
Definición 4. *Sea* $A \in \mathcal{LE}$. *Se dice que* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *es un punto de* A*-densidad de un conjunto medible* $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, *si para cualquier* $r > 0$,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{\mid E \bigcap (A^{-j} B_r + \mathbf{x}_0) \mid_n}{\mid A^{-j} B_r + \mathbf{x}_0 \mid_n} = 1.$$

Dada $A \in \mathcal{LE}$ y dado un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, denotamos

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0) = \{E \subset \mathbf{R}^n \text{ conjunto medible } : \mathbf{x}_0 \text{ es un punto de } A\text{-densidad de } E\},$$

y escribiremos $\mathcal{D}_A$ cuando el punto $\mathbf{x}_0$ sea el origen.

Para cualquer $j \in \mathbf{Z}$ y para cualquier $r > 0$ tenemos la siguiente igualdad $A^j B_r = (-A)^j B_r$, por lo tanto:
Observación 1. Dada $A \in \mathcal{LE}$, para cualquier punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, tenemos que

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0) = \mathcal{D}_{-A}(\mathbf{x}_0).$$

Definición 5. *Sea* $A \in \mathcal{LE}$. *Sea* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ *una función medible. Se dice que* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ *es un punto de* A*-continuidad aproximativa de la función* f *si existe un conjunto medible* $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, *tal que* $\mathbf{x}_0$ *es un punto de* A*-densidad del conjunto* E *y además se cumple (23).*

Definición 6. Sea $A \in \mathcal{LE}$. Una función medible $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ se dice que es $A-$*localmente distinta de cero* en el punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $r > 0$, existe $j \in \mathbf{N}$ tal que

$$|\{\mathbf{x} \in A^{-j}B_r + \mathbf{x_0} : f(\mathbf{x}) = 0\}|_n < \varepsilon |A^{-j}B_r + \mathbf{x_0}|_n. \tag{24}$$

El principal resultado del Capítulo 1 es el siguiente.

Teorema 1. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$, una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen las condiciones* (i), (ii$_A$) *y* (iv). *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- **(A$_1$)** $W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$;
- **(B$_1$)** $\widehat{\phi}$ *—la transformada de Fourier de la función de escala ϕ— es A^*-localmente distinta de cero en el origen;*
- **(C$_1$)** *el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de la función $|\widehat{\phi}|$ si tomamos $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$;*

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del anterior resultado.

Teorema 2. *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$, una sucesión de subespacios cerrados en $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisface las condiciones* (i), (ii) *y* (iv). *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- **(A)** $W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$;
- **(B)** $\widehat{\phi}$ *—la transformada de Fourier de la función de escala ϕ— es localmente distinta de cero en el origen;*
- **(C)** *El origen es un punto de continuidad aproximativa de la función $|\widehat{\phi}|$ siempre que tomemos $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$.*

Una caracterización completa de las funciones de escala en un A-MRA viene escrita en el siguiente teorema. De esta manera conseguimos dar la caracterización de las funciones de escala de un A-MRA de forma análoga a la dada en [46, Teorema 5.2, pág. 382].

Teorema 3. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ y sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- **(1)** *ϕ es la función de escala de un A-MRA;*
- **(2)** (α) *La función $\widehat{\phi}$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen;*

  (β)
$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n; \tag{25}$$

  (γ) *Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\| H \|_\infty \leq 1$, llamada filtro de paso bajo, tal que*
$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(A^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n; \tag{26}$$

- **(3)** *(α^*) El origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $|\widehat{\phi}|$ si tomamos $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$; y, además tenemos las condiciones (β) y (γ).*

A través de la tesis se puede observar que la condición $a)$ del Teorema de Hernández y Weiss es más fuerte que la condición (**C**) del Teorema 2 cuando $n = 1$. Además, la condición (**B**) del Teorema 2 cuando $n = 1$ es más débil que la condición $c)$ del Teorema de Lorentz, Madych y Sahakian.

Obtenemos un resultado análogo al Teorema de Denjoy.

Teorema 4. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible. Entonces casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ es un punto de A-continuidad aproximativa de f.*

Capítulo 2: Caracterización de los filtros de paso bajo en un análisis multirresolución

Caracterizamos los filtros de paso bajo asociados con funciones de escala de un A-MRA donde la dilatación $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal expansiva tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$.

Recordamos que dada $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ una función de escala de un A-MRA, entonces

$$\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}), \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \tag{27}$$

donde H es una función de $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\| H \|_\infty \leq 1$. A esta función H se la llama *filtro de paso bajo* asociado a la función de escala ϕ.

Para un MRA en $L^2(\mathbf{R})$, se pueden encontrar varias condiciones suficientes sobre los filtros de paso bajo para los cuales el producto infinito $\Pi_{j=1}^\infty H(2^{-j}t)$ exista en c.t.p. y sea igual a la transformada de Fourier de una función de escala ϕ.

A. Cohen [18] dio las primeras condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio trigonométrico H sea un filtro de paso bajo asociado a una función de escala de algún MRA. Estas condiciones de Cohen involucran la estructura del conjunto de ceros de H. Continuando con las mismas ideas, Hernández y Weiss [46], y después M. Papadakis, H. Sikić y G. Weiss [62] y R. F. Gundy [36] presentan unas condiciones necesarias y suficientes donde las hipótesis sobre la función H se debilitan.

Más o menos al mismo tiempo que aparecieron las condiciones de Cohen, Lawton [54] dió una condición suficiente de muy distinta naturaleza cuando $H(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k e^{-1\pi i k\xi}$. Él construye una cierta matriz M a partir de la sucesión $\{a_k\}_{k=0}^N$ y considera el subespacio generado por los autovectores de M asociados con el autovalor uno. Si este subespacio tiene dimensión uno, entonces H es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún MRA. Que la condición de Lawton era también necesaria fue probado en 1990 tanto por Cohen (ver [20]) como por Lawton [55] de forma independiente.

En el caso general en el que trabajamos, es decir, cuando el espacio es $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, y dilatación A, una generalización del Teorema de Cohen y del Teorema de Lawton aparece escrita por M. Bownik en [7].

Además, en el artículo de Lagarias y Wang [53] aparecen más condiciones necesarias y suficientes para polinomios trigonométricos siguiendo las ideas originales de Cohen y Lawton.

De la discusión anterior se concluye que existen, esencialmente, dos formas distintas pero equivalentes de dar la solución a la caracterización de los filtros de paso bajo cuando son polinomios trigonométricos.

El problema de dar condiciones necesarias y suficientes a una función arbitraria $H \in L^2(\mathbb{T}^n)$ para que sea filtro de paso bajo está propuesto en las notas del final del Capítulo 7 del libro de Hernández y Weiss [46].

Para un MRA definido en $L^2(\mathbf{R})$ y con dilatación diádica, aparecen varias caracterizaciones diferentes en la literatura. Papadakis, Sikić y Weiss [62] han formulado una de ellas. Dobrić, Gundy e Hitczenko [27] dieron otra en términos probabilísticos. Además, Gundy [37] trata una cuestión ligeramente más general: describir los filtros de paso bajo para una (posiblemente no ortogonal) base de Riesz.

A priori, si tenemos una caracterización de las funciones de escala de un MRA, una forma trivial para obtener una caracterización de los filtros de paso bajo H es la siguiente: Se define el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} \mid H(2^{-j}t) \mid$ que supongamos que existe y es no trivial, llamamos $\widehat{\phi}(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(2^{-j}t) \mid$ y reescribimos todas las condiciones que $\widehat{\phi}$ debería satisfacer de acuerdo con la caracterización de las funciones de escala que tengamos.

Por lo tanto, en el actual estado de conocimiento es un riesgo intentar dar una descripción de todas esas funciones $H \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ que son filtros de paso bajo para algún A-MRA. De todas formas, hemos decidido presentar los resultados de nuestro intento, entendiendo que la principal dificultad es encontrar una formulación adecuada que nos sirva para ese propósito.

Parece que nuestra formulación está cerca de la versión final, si es que existe. Nuestras esperanzas están basadas en el hecho de que las condiciones obtenidas son suficientemente simples y que su formulación, incluso para el caso general de A-MRA, no es complicada.

Empezaremos desde la caracterización de las funciones de escala obtenida en el Teorema 3 y seguiremos la estrategia de Lawton. Hacemos notar que las condiciones presentadas aquí son nuevas incluso en el caso clásico, es decir, para un MRA definido en $L^2(\mathbf{R})$ y con dilatación diádica.

Dada $H \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, el siguiente operador lineal y continuo

$$P : L^1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{T}^n)$$

tal que

$$Pf(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*)) \mid^2 f(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))$$

está bien definido. El operador anterior fue introducido por M. Bownik como una generalización de un operador análogo introducido para el caso diádico en dimensión uno por W. Lawton.

Una generalización del Teorema de Lawton. *Sea $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación lineal expansiva tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Sea H un polinomio trigonométrico definido en $\mathbf{R}^n$ tal que $\sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 = 1$ $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ y con $H(\mathbf{0}) = 1$. Sea la función θ tal que su transformada de Fourier es $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) = \Pi_{j=1}^{\infty} H(A^{*-j}\mathbf{t})$.*

Las dos siguientes condiciones son equivalentes.

(1) *θ es una función de escala de algún A-MRA.*

(2) *No existe ningún polinomio trigonométrico no constante que sea un punto fijo del operador P.*

El primer paso para el estudio de los filtros de paso bajo asodiados con una función de escala de un A-MRA es obvio: Se debería estudiar el producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid . \tag{28}$$

Supongamos que el producto infinito (28) converge en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$. Vamos a buscar una función de escala ϕ para un A-MRA que satisface la condición de que

$$\mid \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \mid = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid .$$

Así, por el Teorema 3, deberíamos además suponer que $\mid \widehat{\phi} \mid$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen. Con ánimo de no repetir condiciones, introducimos la clase Π_A que consiste en todas las funciones medibles definidas en $\mathbf{R}^n$ tales que $0 \leq f(\mathbf{t}) \leq 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ y el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de f si tomamos $f(\mathbf{0}) = 1$. La clase Π_A será denotada por Π cuando el origen sea un punto de continuidad aproximativa de f.

Probamos el siguiente resultado.

Teorema 5. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ una función tal que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$ converge en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ y es A^*-localmente distinto de cero en el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

A) *La función θ, donde $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$, es una función de escala de un A-MRA y $|H|$ es su filtro de paso bajo asociado.*

B) *La única función $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \bigcap \Pi_A$ que es un punto fijo del operador P es la función $f \equiv 1$.*

Como una consecuencia del Teorema 5, podemos dar una caracterización completa de los filtros de paso bajo asociados con funciones de escala. Para ello, necesitamos la noción de *multiplicador de filtros*, la cual para el caso unidimensional fue introducida en [76].

Definición 7. *Se dice que una función medible m es un multiplicador de filtros si cuando H es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA, entonces mH es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA.*

En la definición anterior, evitamos introducir la letra A, porque la clase de multiplicadores de filtros es la misma para todas las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$.

Sea

$$m_H(\mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{H(\mathbf{t})}{|H(\mathbf{t})|} & \text{si } |H(\mathbf{t})| \neq 0 \\ 0 & \text{si } |H(\mathbf{t})| = 0, \end{cases} \tag{29}$$

y sea μ cualquier función medible definida en $\mathbf{R}^n$ tal que

$$\mid \mu(\mathbf{t}) \mid = 1 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \text{ y } \quad m_H(\mathbf{t}) = \mu(A^*\mathbf{t})\overline{\mu(\mathbf{t})}, \tag{30}$$

donde m_H está definida por (29).

Teorema 6 *$A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$ converge en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ y es A^*-localmente* *distinto de cero en el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A) *$\forall\mu$ que verifica (30), $(\mu\widehat{\theta})^{\vee}$ es función de escala de algún A-MRA, donde $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$, y H es su filtro de paso bajo asociado.*

(B) *La única función $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \bigcap \Pi_A$ que es un punto fijo del operador P es la función $f \equiv 1$.*

Cuando $n = 1$ y tenemos una dilatación diádica, al operador P se le denotará P_1 donde

$$P_1 f(t) = \mid H(\frac{t}{2}) \mid^2 f(\frac{t}{2}) + \mid H(\frac{t+1}{2}) \mid^2 f(\frac{t+1}{2}). \tag{31}$$

En este caso, el Teorema 6 implica lo siguiente.

Corolario 7. *Sea $H \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ tal que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} |H(2^{-j}t)|$ converge en casi todo punto de $\mathbf{R}$ y es localmente distinto de cero en el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalenes:*

(a) *$\forall\mu$ que verifica (30), $(\mu\widehat{\theta})^{\vee}$ es una función de escala de algún MRA, donde $\widehat{\theta}(t) := \prod_{j=1}^{\infty} |H(2^{-j}t)|$ y H es su filtro de paso bajo asociado.*

(b) *La única función $f \in L^1(\mathbb{T}) \bigcap \Pi$ que es un punto fijo del operador P_1 es la función $f \equiv 1$.*

Capítulo 3: Ondículas, funciones de escala y filtros de paso bajo con soporte minimal en la frecuencia

Estudiamos propiedades de las funciones de escala de un A-MRA tales que el módulo de su transformada de Fourier es una función característica y la dilatación $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal expansiva tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$.

Un tipo de ondículas que ha interesado a varios autores son aquellas cuya transformada de Fourier es una función característica. A estas ondículas se les llama ondículas con soporte minimal en la frecuencia (cf. [38], [29], [44], [43], [23], [22], [2], [35], [9]).

Dada una familia de ondículas asociada con una dilatación fija A, $\{\psi^{(d)} \in L^2(\mathbf{R}^n) \ : \ d = 1, ..., s\}$ tal que $\mid \widehat{\psi^{(d)}} \mid = \chi_{K_d}$ donde $K_d \subset \mathbf{R}^n$, $\forall d \in \{1, ..., s\}$, son conjuntos medibles, es bien sabido que $\mid K_d \mid_n = 1$, $\forall d \in \{1, ..., s\}$, y como consecuencia el soporte de $\widehat{\psi^{(d)}}$, $\forall d \in \{1, ..., s\}$, tiene medida minimal. Así, a estas multiondículas se les llama multiondículas con soporte minimal en la frecuencia (A-MSF). En el mismo sentido ϕ es A-MSF función de escala cuando ϕ es una función de escala de algún A-MRA tal que $|\widehat{\phi}| = \chi_S$, donde $S \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible.

Quizás, desde el punto de vista de las aplicaciones, este tipo de ondículas no tiene demasiado interés debido en gran parte a la falta de regularidad, pero, por otro lado, nos son de gran utilidad para comprender más profundamente la estructura de las ondículas en general. Un ejemplo clásico de una MSF ondícula es la ondícula de Shanon, es decir, la función $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ tal que

$$\widehat{\psi}(t) = e^{\pi i \mathbf{t}} \chi_I \qquad \text{donde} \quad I = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} 1].$$

Estudiamos las A-MSF funciones de escala de algún A-MRA, en particular, estudiaremos los conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$ para los que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $|\widehat{\phi}| = \chi_E$ es una función de escala de algún A-MRA.

Papadakis, Sikić y Weiss [62] dan una caracterización de estos conjuntos en el caso particular $n = 1$ y dilatación diádica.

En esta dirección, Gu y Han [35] probaron lo siguiente.

Teorema (Gu y Han). *Sea A una matriz real y expansiva $n \times n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ y $d_A = 2$. Entonces existe un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ tal que $(\frac{1}{|E|_n}\chi_E)^\vee$ es una ondícula que surge de algún A-MRA.*

Además, a partir del conjunto E, construyen un conjunto medible $S \subset \mathbf{R}^n$ para el que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \chi_S(\mathbf{t})$ es una función de escala de algún A-MRA.

Sin la hipótesis adicional $d_A = 2$, la siguiente proposición está contenida en la prueba del Teorema 4.2 del artículo de Bownik, Rzeszotnik y Speegle [9].

Proposición (Bownik, Rzeszotnik y Speegle). *Sea una aplicación $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Existe un conjunto medible $S \subset \mathbf{R}^n$ para el que la función ϕ tal que $\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \chi_S(\mathbf{t})$ es una función de escala de algún A-MRA.*

Además, dan una caracterización de tales conjuntos S.

Como una consecuencia de la caracterización de las funciones de escala dada en el Teorema 3, damos una caracterización de los conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$ para los que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $|\widehat{\phi}| = \chi_E$ es una función de escala de algún A-MRA.

Corolario 8. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ y sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(A^*) La función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $|\widehat{\phi}| = \chi_E$ es una función de escala para algún A-MRA.

(B^*) (a) *$|E|_n = 1$ y $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ en c.t.p..*
(b) *$E \in \mathcal{D}_{A^*}$.*
(c) *$A^{*-1}E \subset E$ en c.t.p..*

(C^*) (b^*) *La función $|\widehat{\phi}| = \chi_E$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen, y además, se cumplen (a) y (c).*

Probamos la siguiente proposición de manera constructiva.

Proposición 9. *Dada $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$ que no contiene ningún entorno del origen y para el que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ definida mediante $\widehat{\phi} = \chi_E$ es una función de escala para algún A-MRA.*

Damos la siguiente caracterización para los conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$, $E + \mathbf{Z}^n = E$ tales que la función H tal que $|H| = \chi_E$ es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA.

Teorema 10. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que $E = E + \mathbf{Z}^n$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(A) *La función H tal que $|H| = \chi_E$ es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún $A-$MRA.*

(B) (α)
$$1 = \sum_{i=0}^{d_A-1} \chi_E(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{32}$$

(β) *Existe un conjunto medible $K \subset E$ tal que $A^{*-1}K \subset K$ en c.t.p. y $K \in \mathcal{D}_{A^*}$.*

(γ) $\mid \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E \mid_n = 1.$

(C) (β') *Existe un conjunto medible $K \subset E$ tal que $A^{*-1}K \subset K$ en c.t.p. y la función χ_K es A^*-localmene distinta de cero en el origen, y además, se cumplen (α) y (γ).*

En particular nuestro resultado nos permite quitar la hipótesis de continuidad en el origen de la función H en el siguiente teorema en [43].
Teorema (Hernández, Wang y Weiss). Sea H una función medible y 1-periódica definida en todo el espacio $\mathbf{R}$ tal que H es continua en el origen y $\mid H(0) \mid = 1$. Entonces H es un filtro de paso bajo asociado con una MSF ondícula si y solo si $\mid H \mid = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}$ es un conjunto medible que satisface

$$\chi_E(\xi) + \chi_E(\xi + \frac{1}{2}) = 1 \qquad \text{en c.t. } \xi \in \mathbf{R} \quad y \quad \mid \bigcap_{j=1}^{\infty} 2^j E \mid_1 = 1.$$

Finalmente daremos ejemplos de familias de A-MSF de ondículas $\psi^{(d)}$, $d = 1, ..., s$, donde la principal novedad es que el origen no será punto de continuidad de alguna de las funciones $\mid \widehat{\psi^{(d)}} \mid$, $d \in \{1, ..., s\}$.

Capítulo 4: Equivalencia de la A-continuidad aproximativa.

Si comparamos la condición ($\mathbf{C_1}$) del Teorema 1 y la condición ($\mathbf{C}$) del Teorema 2, no es difícil observar que si consideramos la descomposición polar de la aplicación lineal A y tenemos que todos los autovalores del operador positivo $\sqrt{A^*A}$ son iguales entonces las condiciones ($\mathbf{C_1}$) y ($\mathbf{C}$) son equivalentes. Además, si observamos las definiciones de punto de continuidad aproximativa y punto de A-continuidad aproximativa de una función medible, nos daremos cuenta, entre otras cosas, de que podemos encontrar alguna aplicación lineal expansiva $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para la que dado un punto de $\mathbf{R}^n$ existe una función medible $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que ese punto es un punto de continuidad aproximativa de f pero no es un punto de A-continuidad aproximativa de f, y además, por supuesto también ocurre el caso contrario. Con esta motivación, en [16] aparecen propuestos los siguientes problemas.

Problema 1: Dar una caracterización de las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para las cuales el concepto de continuidad aproximativa y el concepto de A-continuidad aproximativa coinciden.

El siguiente problema es algo más general.

Problema 2: Caracterizar las aplicaciones lineales expansivas A_1 y A_2 para las que ambos conceptos, el de A_1-continuidad aproximativa y el de A_2-continuidad aproximativa, coincidan.

Observación 2. A partir de la definición de punto de continuidad aproximativa de una función medible en $\mathbf{R}^n$ es fácil ver que dado un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ y dado un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, el punto $\mathbf{x_0}$ es un punto de continuidad aproximativa de la función

$$f(\mathbf{x}) = \chi_{E\cup\{\mathbf{x_0}\}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in E\bigcup\{\mathbf{x_0}\} \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

si y solo si $E \in \mathcal{D}(\mathbf{x_0})$.

El análogo de la Observación 2 se cumple para puntos de A-continuidad aproximativa.

Además, claramente, si $E \in \mathcal{D}$ (resp. $E \in \mathcal{D}_A$) entonces $E + \mathbf{x_0} \in \mathcal{D}(\mathbf{x_0})$ (resp. $E + \mathbf{x_0} \in \mathcal{D}_A(\mathbf{x_0})$).

Así, podemos simplificar nuestros problemas de la siguiente manera.

Problema 1: Dar una caracterización de las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para las cuales $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.

Problema 2: Describir bajo qué condiciones de dos aplicaciones lineales expansivas $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, tenemos que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$.

Estudiaremos los dos problemas anteriores. En primer lugar damos una solución completa al Problema 1. A continuación, damos una solución al Problema 2 cuando las aplicaciones lineales expansivas están definidas en $\mathbf{R}^2$. Por último, damos una solución al Problema 2 cuando las aplicaciones lineales expansivas están definidas en $\mathbf{R}^n$ y además son autoadjuntas.

Los dos siguientes teoremas fueron obtenidos conjuntamente con el profesor Peter Oswald.

Teorema 11. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Entonces $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$ si y solo A es una aplicación lineal isotrópica, es decir, A es diagonalizable y todos sus autovalores (complejos) tienen el mismo módulo.*

Teorema 12. *Sean $A_1, A_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dos aplicaciones lineales y expansivas. Entonces existen exactamente los siguientes casos en los que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$.*

(1) *A_1 y A_2 son isotrópicas.*

(2) *Existen dos matrices reales 2×2, C y D, $d_C > 0$ y $d_D > 0$, tales que $A_1 = C^{-1}A_1'C$ y $A_2 = D^{-1}A_2'D$, donde las matrices asociadas a las aplicaciones A_1' y A_2' son respectivamente,*

$$A_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid,$$

$$A_2' = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \nu_1 \mid<\mid \nu_2 \mid,$$

$$\text{con} \quad \frac{\log \mid \lambda_2 \mid}{\log \mid \lambda_1 \mid} = \frac{\log \mid \nu_2 \mid}{\log \mid \nu_1 \mid}$$

$$\acute{y} \quad CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad \text{tal que } a, b, d \in \mathbf{R}.$$

(3) *Existen dos matrices reales 2×2 C y D, $d_C > 0$, $d_D > 0$ tales que $A_1 = C^{-1}A_{\lambda,1}C$ y $A_2 = D^{-1}A_{\nu,1}D$, donde las matrices asociadas a las aplicaciones $A_{\lambda,1}$ y $A_{\nu,1}$ son respectivamente*

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \mid \lambda \mid> 1,$$

$$A_{\nu,1} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbf{R} \quad | \nu |> 1,$$

$$donde \quad CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad con\ a, b, d \in \mathbf{R},$$

$$\acute{y} \quad \frac{a}{d} = \frac{\nu \log | \nu |}{\lambda \log | \lambda |}.$$

El siguiente resultado se ha obtenido en un trabajo conjunto con el profesor Szilárd GY. Révész [65].
Teorema 13. *Sean* $A_1, A_2 \in \mathcal{LEP}$.

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \ tal\ que\ A_1^s = A_2.$$

Podemos enunciar ahora un resultado ligeramente más general.
Sean $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales expansivas y autoadjuntas, no necesariamente positivas. Consideramos $C_1, C_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales tales que $d_{C_1}, d_{C_2} > 0$ y $A_\mu = C_\mu J_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1, 2$, donde $J_1, J_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ son aplicaciones lineales con matrices asociadas,

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\mu)} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(\mu)} & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n^{(\mu)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i^{(\mu)} \in \mathbf{R}. \tag{33}$$

Además, denotamos

$$J'_\mu = \begin{pmatrix} | \lambda_1^{(\mu)} | & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & | \lambda_2^{(\mu)} | & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & | \lambda_n^{(\mu)} | \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Entonces como una consecuencia del Teorema 13 podemos afirmar lo siguiente.
Corolario 14. *Sean* $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *dos aplicaciones lineales expansivas y autoadjuntas. Sean* $C_1, C_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *dos aplicaciones lineales tales que* $d_{C_1}, d_{C_2} > 0$ *y* $A_\mu = C_\mu J_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1, 2$, *donde* J_μ *vienen definidas como en (33). Entonces*

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \ tal\ que \ (A'_1)^s = A'_2,$$

donde $A'_\mu = C_\mu J'_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1, 2$, *con* J'_μ *como en (34).*

Capítulo 5: Caracterización de funciones de escala en casos más generales

Damos una caracterización completa de las funciones $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ las cuales generan un *frame* análisis multirresolución. A partir del principal resultado de este capítulo se deduce la caracterización de las funciones de escala de un análisis multirresolución. El hecho de que en un subespacio cerrado de $L^2(\mathbf{R}^n)$ generado por los trasladados por enteros de una sola función existe un *tight frame*, nos pemite obtener la caracterización de las funciones de escala para casos más generales a partir de nuestro resultado principal de este capítulo.

Desde los trabajos pioneros sobre ondículas, las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) de un análisis multirresolución han sido modificadas para atender los diferentes propósitos requeridos por las aplicaciones. Una de las condiciones que más cambios ha tenido es la condición (iv), la cual *a priori* parece que es independiente de las demás. Primero, el requerimiento de que $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base ortonormal de V_0 fue debilitado imponiendo que los trasladados de la función de escala constituyen una base de Riesz de V_0. Después, la noción de *frame análisis multiresolución* (FMRA) en $L^2(\mathbf{R})$ fue formulado por J. Benedetto y S. Li [3]. Un FMRA es una extensión natural de un MRA y es obtenida reemplazando la condición (iv) por la siguiente condición:

(iv)* Existe una función $\phi \in V_0$, llamada *función de escala*, tal que $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es un *frame* de V_0.

Recientemente ([67], [25]), se han estudiado los MRA generados por una función de escala ϕ, donde la condición (iv) es reemplazada por el requerimiento que V_0 es el subespacio vectorial lineal cerrado generado por $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$. Además, se ha extendido el concepto de MRA a otros espacios como los $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, [30] o espacios de Sobolev [57].

Probamos nuestro resultado principal de este capítulo en un contexto algo más general que un FMRA en $L^2(\mathbf{R}^n)$, aunque sólo consideraremos el caso diádico. Se puede obtener el caso general donde la dilatación viene dada por una aplicación lineal en $\mathbf{R}^n$ si combinamos los resultados obtenidos en el Capítulo 1 y los que presentaremos en este capítulo.

La teoría de *frames* fue introducida por Duffin y Schaeffer [28].

Para facilitar la notación, consideraremos $\frac{0}{0} = 0$ ó $0\frac{1}{0} = 0$ en las expresiones donde aparezca esta indeterminación. Dada $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, definimos

$$\Phi_\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \tag{35}$$

y denotamos

$$\mathcal{N}_\phi = \{\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n : \Phi_\phi(\mathbf{t}) = 0\}. \tag{36}$$

Sea L un subconjunto de un espacio de Hilbert complejo y separable $\mathbb{H}$. El espacio vectorial generado por todas las combinaciones lineales de elementos de L es span$L$, y la clausura de span$L$ es $\overline{\text{span}}L$.

Definición 8. *Una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es una sucesión frame si es un frame de $\overline{span}\{h_n\}_{n=1}^\infty$.*

Definición 9. *Una función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ genera un FMRA si $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una sucesión frame y el subespacio*

$$V_j = \overline{span}\{D_2^j \tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}, \quad j \in \mathbf{Z} \tag{37}$$

del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ satisface la condición (i) y (iii).

Probamos lo siguiente.

Teorema 15. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(**A**) *ϕ genera un FMRA;*

(**B**) *(α) La función $\widehat{\phi}$ es localmente disitinta de cero en el origen;*
(β) Existen dos contantes positivas A y B tales que

$$A \leq \Phi_\phi(\mathbf{t}) \leq B \quad \text{en c.t.} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{N}_\phi; \tag{38}$$

(γ) Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, una función $\mathbf{Z}^n$-periódica, llamada filtro de paso bajo, tal que

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\frac{\mathbf{t}}{2})\widehat{\phi}(\frac{\mathbf{t}}{2}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{39}$$

(**C**) *(α^*) El origen es un punto de continuidad aproximativa de $|\ \widehat{\phi}\ |^2 / \Phi_\phi$ si tomamos $(|\ \widehat{\phi}(\mathbf{0})\ |^2 / \Phi_\phi(\mathbf{0})) = 1$ y además, tenemos las condiciones (β) y (γ).*

El resultado correspondiente para MRA es una consecuencia directa del anterior teorema, pero nos gustaría formularlo aquí en virtud de la completitud del texto.

Definición 10. *Se dice que una función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ genera un MRA si $\{\tau_\mathbf{k}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una sucesión de Riesz y el subespacio (37) del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ satisface las condiciones (i) y (iii).*

Probamos lo siguiente.

Teorema 16. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A_1) *ϕ genera un MRA;*

(B_1) *Se cumplen las condiciones (α), (γ) del Teorema 15 y*
(β_1) Existen dos constantes positivas A, B tales que

$$A \leq \Phi(\mathbf{t}) \leq B \quad \text{en c.t} \quad \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n. \tag{40}$$

(C_1) *Tenemos las condiciones (α^*), (γ) del Teorema 15 y además (β_1).*

Si la función $\phi \in V_0$ es tal que $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base ortonormal de V_0, obtenemos el Teorema 3 para el caso particular de dilataciones diádicas.

El siguiente teorema es una caracterización de las funciones de escala ϕ de un MRA, donde la condición (iv) se reemplaza por la siguiente

(iv)** $V_0 = \overline{\text{span}}\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$.

Teorema 17. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A_3) *Se cumplen Las condiciones (i),(ii), (iii) y (iv)**;*

(B_3) *La función $\widehat{\phi}$ es localmente disitinta de cero en el origen, y existe $G \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, una función $\mathbf{Z}^n$-periódica, tal que*

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t})\left(\Phi_\phi(\mathbf{t})\right)^{-1/2} = G(\mathbf{t}/2)\widehat{\phi}(\mathbf{t}/2)\left(\Phi_\phi(\mathbf{t}/2)\right)^{-1/2} \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n; \tag{41}$$

(C_3) *El origen es un punto de continuidad aproximativa de la función $|\widehat{\phi}|^2/\Phi$ si tomamos $(|\widehat{\phi}(\mathbf{0})|^2/\Phi(\mathbf{0})) = 1$, y existe $G \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, una función $\mathbf{Z}^n$-periódica, tal que se verifica (41).*

Los siguientes artículos relacionados con la tesis han sido publicados o enviados para su publicación

P. Cifuentes, K. S. Kazarian, A. San Antolín; *Characterization of scaling functions in a multiresolution analysis*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** No. 4 (2005), 1013-1023.

P. Cifuentes, K. S. Kazarian, A. San Antolín; *Characterization of scaling functions*, Wavelets and splines: Athens 2005, 152–163, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2006.

Sz. Gy. Révész, A. San Antolín; *A-Equivalence of self-adjoint linear maps.* (Enviado)

A. San Antolín; *Characterization of low pass filters in a multiresolution analysis.* (Enviado)

Capítulo 1

CARACTERIZACIÓN DE LAS FUNCIONES DE ESCALA EN UN ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN

En este capítulo estudiaremos el concepto de Análisis Multirresolución (MRA), que es un método general para construir ondículas y se basa en la existencia de una familia de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, que satisfacen ciertas propiedades. Veremos que las condiciones que usualmente se piden para un MRA no son todas independientes. Nuestra atención se centrará en el estudio de las funciones de escala y daremos una caracterización completa de ellas. Además, escribiremos nuestra caracterización de las funciones de escala de un MRA en un contexto general, donde en vez de tomar una dilatación diádica, consideramos una dilatación dada por una aplicación lineal expansiva fija $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. En el caso general, es fácil ver que las condiciones obtenidas dependen de la aplicación A. El principal propósito de este capítulo está relacionado con un resultado probado por E. Hernández and G. Weiss (cf. [46, p. 382], [45] [42]) y nuestro objetivo es alcanzar un entendimiento algo más profundo del comportamiento de la transformada de Fourier de una función de escala en un entorno del origen. Finalmente escribiremos una forma de construir una familia de ondículas que surgen de un MRA general.

1.1. Análisis Multirresolución

Un análisis multirresolución (MRA) es un método general introducido por Mallat [59] y Meyer [60] para la construcción de ondículas. En $\mathbf{R}^n, (n \geq 1)$ por MRA entenderemos una sucesión de subespacios cerrados V_j, $j \in \mathbf{Z}$, del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen las siguientes condiciones

(i) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad V_j \subset V_{j+1}$;

(ii) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j \Leftrightarrow D_2 f(\mathbf{x}) \in V_{j+1}$;

(iii) $W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$;

(iv) Existe una función $\phi \in V_0$ tal que $\{ \tau_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \}$ es una base ortonormal para V_0. A esta función ϕ se le llama *función de escala.*

Observación 1.1. Usualmente en la definición de MRA aparece la siguiente condición: $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{ \mathbf{0} \}$, pero no la hemos incluido en la definición ya que se sigue desde las condiciones (i),(ii) y (iv) (cf. por ejemplo [14], [46] para $n = 1$). Daremos la prueba para el caso general (ver Lema 1.9 más abajo).

Un ejemplo de subespacios V_j, $j \in \mathbf{Z}$ que satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) es

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \ : \ f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))}(x) \quad \text{donde } a_k \in \mathbf{R}\}.$$

En este caso se puede tomar $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ como una función de escala para este MRA. Llamaremos a este ejemplo el análisis multirresolución de Haar ya que está relacionado con la base de Haar para $L^2(\mathbf{R})$ (ver Apéndice A).

Consideraremos un MRA en un contexto general, donde en vez de tener una dilatación diádica, tendremos una dilatación dada por una aplicación lineal expansiva fija $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, es decir, todos los autovalores (posiblemente complejos) de A tienen módulo mayor que 1 y los elementos de la matriz asociada a A respecto de la base canónica son enteros.

Dada una aplicación lineal A que cumple las condiciones anteriores mencionadas, definimos un A-MRA como una sucesión de subespacios cerrados V_j, $j \in \mathbf{Z}$, del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ (ver [58], [34],[71] [75]) que satisface las condiciones (i), (iii), (iv) y

(ii$_A$) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j \Leftrightarrow D_A f(\mathbf{x}) \in V_{j+1}$.

Observación 1.2. La condición (ii$_A$) nos dice que $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es una base ortonormal de V_0 si y solo si dado $j \in \mathbf{Z}$, $\{D_A^j \tau_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es una base ortonormal de V_j.

Existe, formalmente, una definición más general de MRA donde se considera un retículo discreto $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ (un subgrupo discreto del grupo aditivo de $\mathbf{R}^n$ dado por todas las combinaciones lineales enteras de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, que forman base de Γ) y una dilatación dada por una aplicación lineal expansiva $M : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $M(\Gamma) \subset \Gamma$. Entonces el M-MRA relacionado se define como una sucesión de subespacios cerrados V_j^*, $j \in \mathbf{Z}$, de el espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisface las condiciones (i), (iii) y

(ii$_M$) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f(\mathbf{x}) \in V_j^* \Leftrightarrow D_M f(\mathbf{x}) \in V_{j+1}^*$.

(iv$_M$) Existe una función $\phi \in V_0^*$ tal que $\{ \tau_\gamma\phi(\mathbf{x}) \ : \ \gamma \in \Gamma \}$ es una base ortonormal para V_0. Esta función ϕ recibe el nombre de *función de escala.*

Si a partir del retículo Γ tomamos la aplicación lineal $C : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ que satisface

$$C\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_j \qquad 1 \le j \le n, \tag{1.1}$$

donde $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ es la base natural de $\mathbf{R}^n$, es decir, $C\Gamma = \mathbf{Z}^n$, obtenemos la siguiente propiedad (ver [71] y [75, p. 108]).

Proposición 1.3. *Sea* V_j^*, $j \in \mathbf{Z}$, *una sucesión de subespacios cerrados de* $L^2(\mathbf{R}^n)$. *Entonces* V_j^*, $j \in \mathbf{Z}$, *es un* M*-MRA si y solo si* V_j, $j \in \mathbf{Z}$, *es un* A*-MRA , donde* $V_j = \{f(C^{-1}\cdot) : f \in V_j^*\}$, *con la dilatación dada por la aplicación lineal* $A = CMC^{-1}$.

Observación 1.4. La matriz de la aplicación M respecto de la base $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ es la misma que la matriz de A respecto de $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$.

Demostración. Probamos la condición necesaria. Es evidente que si V_j^*, $j \in \mathbf{Z}$ es cerrado, entonces V_j, $j \in \mathbf{Z}$ es cerrado. Además, tenemos que comprobar que los V_j, $j \in \mathbf{Z}$, satisfacen las condiciones (i), (ii$_A$), (iii) y (iv).

Primero veamos que se verifica (i). Sea $j \in \mathbf{Z}$ y sea $f \in V_j$, desde la definición de V_j tenemos que $f(C\cdot) \in V_j^*$ y como $V_j^* \subset V_{j+1}^*$, entonces $f(C\cdot) \in V_{j+1}^*$. Finalmente, por la defınción de V_{j+1} podemos concluir que $f \in V_{j+1}$.

Veamos que se verifica (ii$_A$). Sea $f \in V_j$, desde la definición de V_j tenemos que $g(\cdot) := f(C\cdot) \in V_j^*$. Además, de acuerdo con la propiedad (ii$_M$), tenemos que $h(\cdot) := g(M\cdot) = f(CM\cdot) \in V_{j+1}^*$. Finalmente por la definición de V_{j+1} podemos concluir que $h(C^{-1}\cdot) = g(MC^{-1}\cdot) = f(CMC^{-1}\cdot) \in V_{j+1}$.

Veamos que se verifica (iii). Dada $h \in L^2(\mathbf{R}^n)$ es cierto que $h \in L^2(\mathbf{R}^n)$ si y solo si $h(C\cdot) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Como $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j^*} = L^2(\mathbf{R}^n)$ tenemos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f \in \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j^*$ tal que

$$\varepsilon > \int_{\mathbf{R}^n} \mid h(C\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid^2 d\mathbf{x} = d_C^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} \mid h(\mathbf{y}) - f(C^{-1}\mathbf{y}) \mid^2 d\mathbf{y},$$

y como $f(C^{-1}\cdot) \in \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ podemos concluir que $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$.

Por último, veamos que si $\phi \in V_0^*$ es una función de escala de algún M-MRA V_j^*, $j \in \mathbf{Z}$, entonces $\varphi(\mathbf{x}) := D_{C^{-1}}\phi(\mathbf{x})$ es una función de escala del A-MRA V_j, $j \in \mathbf{Z}$, asociado.

Tenemos que probar dos cosas, una de ellas es que $\{\varphi(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es un sistema ortonormal. Para ello dado $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\mathbf{x})\overline{\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{k})}d\mathbf{x} &= d_C^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(C^{-1}\mathbf{x})\overline{\phi(C^{-1}\mathbf{x} - C^{-1}\mathbf{k})}d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \phi(\mathbf{y})\overline{\phi(\mathbf{y} - C^{-1}\mathbf{k})}d\mathbf{y} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{0}}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta porque ϕ es función de escala de V_0 con retículo Γ, $C^{-1}\mathbf{Z}^n = \Gamma$, y además, como C es lineal y biyectiva, el único elemento $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $C^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

El segundo aspecto que nos falta por comprobar es que $\{\varphi(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es base de V_0, es decir, $\forall f \in V_0$ existe una única sucesión $\{a_\mathbf{k}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \in l^2(\mathbf{Z}^n)$ tal que

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_\mathbf{k}\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{k})$$

con convergencia en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Sea $f \in V_0$, entonces $g(\cdot) := f(C\cdot) \in V_0^*$ y como ϕ es función de escala de V_0^*, tenemos que existe una única sucesión $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \in l^2(\Gamma)$ tal que

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} b_\gamma\phi(\mathbf{x} - \gamma),$$

con convergencia en $L^2(\mathbf{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = g(C^{-1}\mathbf{x}) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma \phi(C^{-1}\mathbf{x}-\gamma) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} b_{C^{-1}\mathbf{k}} d_C^{1/2} d_C^{-\frac{1}{2}} \phi(C^{-1}\mathbf{x}-C^{-1}\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} b_{C^{-1}\mathbf{k}} d_C^{1/2} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{k}), \end{aligned}$$

con convergencia en $L^2(\mathbf{R}^n)$, donde $a_{\mathbf{k}} = b_{C^{-1}\mathbf{k}} d_C^{1/2}$, $\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n$, y como la sucesión $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \in l^2(\Gamma)$, entonces $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \in l^2(\mathbf{Z}^n)$. Por último, la unicidad de la sucesión $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ se sigue desde la unicidad de la sucesión $\{b_\gamma\}_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}$.

La demostración de la condición suficiente se realiza de forma análoga. □

A priori la condición (iv) parece independiente del resto de las condiciones en la definición de MRA y A-MRA. El siguiente resultado (cf. [24, p. 132], [71, p. 34]), muy conocido, proporciona una caracterización para que la función ϕ cumpla la condición (iv).

Lema A. *El sistema* $\{\ g(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\ \}$, *donde* $g\in L^2(\mathbf{R}^n)$, *es un sistema ortonormal si y solo si*

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{g}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n. \tag{1.2}$$

En este texto, adoptamos el convenio de que la transformada de Fourier (ver Apéndice A) de la función $f\in L^1(\mathbf{R}^n)\cap L^2(\mathbf{R}^n)$ está definida por

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle} d\mathbf{x}.$$

La siguiente proposición destaca una propiedad del subespacio V_0 de un A-MRA que no tiene ninguno de los demás V_j, $j\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, del mismo A-MRA. En el caso $n=1$ y con una dilatación diádica, podemos encontrar esta propiedad en [63].

Proposición 1.5. *Sea* $A\in\mathcal{LE}$ *tal que* $A\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{Z}^n$ *y sea* V *un subespacio cerrado no trivial del espacio de Hilbert complejo* $L^2(\mathbf{R}^n)$. *Supongamos que* $\exists\phi\in L^2(\mathbf{R}^n)$ *y existe* $j\in\mathbf{Z}\setminus\{\mathbf{0}\}$ *tal que el sistema* $\{d_A^{j/2}\phi(A^j\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$ *es una base ortonormal de* V. *Entonces no existe ninguna función* $f\in L^2(\mathbf{R}^n)$ *tal que el sistema* $\{f(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$ *sea una base ortonormal de* V.

En particular, de acuerdo con la Proposición 1.5, en un A-MRA dado, el subespacio V_0 es el único subespacio de entre todos los V_j, $j\in\mathbf{Z}$, que tiene una base ortonormal que consiste en los trasladados por elementos de $\mathbf{Z}^n$ de una única función.

Demostración. Haremos la prueba de forma indirecta para $j=1$. Supongamos que $\{f(\cdot-\mathbf{k})\ :\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$ y $\{d_A^{1/2}\phi(A\cdot-\mathbf{k})\ :\ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$ son bases ortonormales de V. Entonces desde la Observación 1.2 y desde el Lema A tenemos que

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{f}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n. \tag{1.3}$$

Por otro lado, como en particular tenemos que $d_A^{1/2}\phi(A\cdot) \in V$, entonces

$$d_A^{1/2}\phi(A\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}-\mathbf{k})$$

con convergencia en $L^2(\mathbf{R}^n)$ y $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |a_{\mathbf{k}}|^2 < \infty$. Si tomamos transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad anterior tenemos que

$$D_{A^*}^{-1}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = d_A^{-\frac{1}{2}}\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle}\widehat{f}(\mathbf{t}) = m_\phi(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t}), \tag{1.4}$$

en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, donde $m_\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle}$. Así, $m_\phi \in L^2(\mathbb{T}^n)$ ya que $\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |a_{\mathbf{k}}|^2 < \infty$ y el sistema $\{e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\cdot\rangle} : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Sea $\{\mathbf{p}_i^*\}_{i=0}^{d_A-1} \in \Delta_{A^*}$ como en la introducción. En virtud de la ecuación (1.3) tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} 1 &= d_A^{-1}\sum_{i=0}^{d_A-1}\sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(A^{*-1}[\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*]+\mathbf{q})|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{d_A-1}\sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Z}^n} |d_A^{-\frac{1}{2}}\widehat{\phi}(A^{*-1}[\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*+A^*\mathbf{q}])|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |d_A^{-\frac{1}{2}}\widehat{\phi}(A^{*-1}[\mathbf{t}+\mathbf{k}])|^2 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Así, desde la expresión (1.4) y como m_ϕ es $\mathbf{Z}^n$-periódica,

$$1 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |m_\phi(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2|\widehat{f}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = |m_\phi(\mathbf{t})|^2\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}|\widehat{f}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \qquad \text{para c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

De esta manera, desde la ortonormalidad del sistema $\{f(\cdot-\mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$, el Lema A nos dice que podemos concluir que

$$1 = |m_\phi(\mathbf{t})| \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n. \tag{1.5}$$

Por otro lado, de manera análoga a nuestro desarrollo en (1.4), obtenemos que $\forall g \in V$, $\exists m_g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que $\widehat{g}(\mathbf{t}) = m_g(\mathbf{t})\widehat{f}(\mathbf{t})$ en c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$, entonces desde (1.4) y (1.5) podemos escribir

$$\widehat{g}(\mathbf{t}) = m_g(\mathbf{t})\frac{1}{m_\phi(\mathbf{t})}d_A^{-1/2}\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n,$$

donde $m_g\frac{1}{m_\phi} \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Así, como $\{e^{2\pi i\langle \mathbf{k},\cdot\rangle} \ : \ \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^n)$, existe $\{b_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \in l^2(\mathbf{Z}^n)$ tal que

$$m_g(\mathbf{t})\frac{1}{m_\phi(\mathbf{t})} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} b_{\mathbf{k}}e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} \qquad \text{con convergencia en } L^2(\mathbb{T}^n).$$

De esta manera podemos escribir

$$\widehat{g}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} b_{\mathbf{k}}e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle}d_A^{-\frac{1}{2}}\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}),$$

con convergencia en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Si ahora tomamos antitransformada de Fourier a ambos lados de la anterior ecuación, tenemos

$$g(\mathbf{x}) = d_A^{1/2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} b_{\mathbf{k}}\phi(A\mathbf{x} - A\mathbf{k}) \quad \text{con convergencia en } L^2(\mathbf{R}^n),$$

con lo que el sistema $\{d_A^{1/2}\phi(A\mathbf{x} - A\mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es una base ortonormal de V, pero esto es una contradicción con que $\{d_A^{1/2}\phi(A\mathbf{x} - \mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es una base ortonormal de V.

Si $j > 1$, basta tomar la matriz $M = A^j$ y repetir los cálculos anteriores. Además, si $j < 0$, el resultado se sigue si aplicamos el caso anterior al subespacio $D^j_{A^*}V$ ya que $\{d_A^{j/2}\phi(A^j\mathbf{x} - \mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ y $\{f(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ son bases ortonormales de V si y solo si $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ y $\{d_A^{-j/2}f(A^{-j}\mathbf{x}-\mathbf{k}) \ : \ \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ son bases ortonormales de $D^j_{A^*}V$. $\square$

El principal objetivo en este texto es dar una caracterización completa de las funciones de escala de un A-MRA. Este problema fue propuesto por R. Strichartz en [71] y estudiado por varios autores.

La mayor dificultad que se han encontrado los autores que han estudiado este problema es dar las condiciones necesarias y suficientes de una función de escala ϕ de un A-MRA para que la unión de todos los subespacios cerrados V_j, $j \in \mathbf{Z}$, sea densa en $L^2(\mathbf{R}^n)$. Las condiciones se presentan sobre la transformada de Fourier de ϕ.

Posiblemente, el siguiente resultado, probado para $n = 1$, se debería atribuir a I. Daubechies (Ver [24], [46]).

Teorema (Daubechies). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv) donde ϕ satisface que $\mid \widehat{\phi} \mid$ es continua en el origen. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} a) & \widehat{\phi}(0) \neq 0; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

C. de Boor, R. DeVore, A. Ron [6] probaron lo siguiente.

Teorema (de Boor, DeVore y Ron). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv).*

Entonces son equivalentes:

$$\begin{array}{ll} a) & \cup_{j\in\mathbf{Z}}\ (2^j\ sop\ \widehat{\phi}) = \mathbf{R} \qquad en\ c.t.p.; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

E. Hernández y G. Weiss ([46, pág. 382], [45], [42]) probaron la siguiente caracterización.

Teorema (Hernández y Weiss). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv) para $n = 1$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} a) & \lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}y)| = 1 \qquad para\ c.t.\ y \in \mathbf{R}; \\ b) & \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \end{array}$$

El teorema anterior está formulado de diferente manera a la que nos lo encontramos en [46] para indicar la parte esencial del resultado en el que estamos interesados. Probaremos más adelante el Lema 1.7 para poder tener una formulación análoga a la dada por Hernández y Weiss en [46, Teorema 5.2, p. 382].

Podemos encontrar otras condiciones necesarias y suficientes dadas por R. A. Lorentz, W. R. Madych y A. Sahakian [56].

Teorema (Lorentz, Madych y Sahakian). *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R})$ que satisfacen (i), (ii) y (iv) para $n = 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}y)|$ *existe y es positivo para c.t.* $y \in \mathbf{R}$;

b) $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$;

c) *El conjunto* $\{y \in \mathbf{R} \ : \ | \widehat{\phi}(y) | > 0\}$ *es diádicamente absorbente, es decir, para casi todo* $y \in \mathbf{R}$, *existe un entero positivo* j_0, *que puede depender de* y, *tal que si* $j \geq j_0$ *entonces* $| \widehat{\phi}(2^{-j}y) | > 0$.

Todas las caracterizaciones anteriores presentan condiciones "globales", así, nuestro objetivo es encontrar condiciones "locales" y alcanzar un entendimiento algo más profundo de la relación entre el comportamiento de la función $\widehat{\phi}$ en un entorno del origen y la condición (iii). En particular, nuestro resultado permite deshacernos de la hipótesis de que $|\widehat{\phi}|$ es continua en el origen que aparece en el Teorema de Daubechies.

1.2. Propiedades de las funciones de escala

Diferentes versiones de los siguientes Lemas 1.6–1.7 han aparecido en varias publicaciones (cf. [24, pp. 131–132], [71, pp. 28–29]). Mencionamos [13] como una reciente referencia para el caso diádico cuando $n = 1$, para el caso general, ver [75].

Lema 1.6. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y suponemos que $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base ortonormal de V_0. Suponemos que $V_j, j \in \mathbf{Z}$, es una sucesión de subespacios cerrados en $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen la condición* (ii$_A$). *Entonces la función f está en V_j si y solo si existe una función $F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que*

$$D^j_{A^*}\widehat{f}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \quad \text{si} \quad j \in \mathbf{Z} \tag{1.6}$$

y

$$\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|F\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \tag{1.7}$$

Demostración. Sea $j \in \mathbf{Z}$ y sea $f \in V_j$. Entonces $D^j_{A^{-1}} f \in V_0$ y por nuestras hipótesis $D^j_{A^{-1}} f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}}\tau_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{t})$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$, donde $\{c_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \in l^2(\mathbf{Z}^n)$. Tomando transformadas de Fourier a ambos lados de la anterior expresión, obtenemos

$$D^j_{A^*}\widehat{f}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_k e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \qquad \text{en } L^2(\mathbf{R}^n).$$

Así, la igualdad (1.6) es cierta con $F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}$. Además se cumple la condición (1.7) ya que D_{A^*} es un operador unitario y las funciones $D^j_{A^{-1}}f$, F se representan mediante los mismos coeficientes respecto de los sistema ortonormales.

Recíprocamente, supongamos que para $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ se cumple (1.6), donde $F_j \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Si escribimos $F_j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}$, entonces resulta que

$$D^j_{A^{-1}}f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_k \tau_{\mathbf{k}}\phi(A^j\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n,$$

y por tanto $f \in V_j$. □

Lema 1.7. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y suponemos que $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base ortonormal de V_0. Sea $V_j, j \in \mathbf{Z}$, una sucesión de subespacios cerrados en $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen la condición* (ii$_A$). *Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

a) $\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad V_j \subset V_{j+1}$*;*

b) *Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\|H\|_\infty \le d_A^{1/2}$ tal que*

$$D_{A^*}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \textit{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n. \tag{1.8}$$

Demostración. Supongamos que tenemos **a**) entonces $\phi \in V_1$. Por el Lema 1.6 existe $H \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que $D_{A^*}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t})$, c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$. Sea

$$\Phi_\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_\phi(A^*\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in A^*\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \\
&\quad + \sum_{\mathbf{k}\notin A^*\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = d_A^{-1}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |D_{A^*}\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 + R(\mathbf{t}) \\
&= d_A^{-1}|H(\mathbf{t})|^2\Phi(\mathbf{t}) + R(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n,
\end{aligned}$$

donde $R(\mathbf{t})$ es no negativo. Ahora, el Lema A nos dice que

$$1 = \Phi(A^*\mathbf{t}) \ge d_A^{-1}|H(\mathbf{t})|^2\Phi(\mathbf{t}) \ge d_A^{-1}|H(\mathbf{t})|^2 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n,$$

y por lo tanto, $\| H \|_\infty \le d_A^{1/2}$.

Finalmente, para probar **b**)⇒**a**), sea $j \ge 0$ y $f \in V_j$, entonces, por el Lema 1.6, existe una función $F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$D^j_{A^*}\widehat{f}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = d_A^{-1/2}F(\mathbf{t})H(A^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

Así,

$$D^{j+1}_{A^*}\widehat{f}(\mathbf{t}) = F(A^*\mathbf{t})H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

Como $A^*\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ tenemos que $D_{A^*}F \in L^2(\mathbb{T}^n)$, así $HD_{A^*}F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ y por lo tanto, de acuerdo con el Lema 1.6 obtenemos que $f \in V_{j+1}$. Para el caso $j < 0$ la prueba es similar. □

A continuación vamos a demostrar un lema técnico de gran importancia para nuestros cálculos posteriores.

Lema 1.8. *Sea* $g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ *y sea* A *una aplicación lineal fija* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *tal que* $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, $d_A \neq 0$, *sea* $\{\mathbf{p}_i\}_{i=0}^{d_A-1} \in \Delta_A$ *y sea* $\hat{A} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ *la aplicación inducida. Entonces*

(*i*) $\int_{\mathbb{T}^n} g(\hat{A}\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{T}^n} g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

(*ii*) $\int_{[0,1]^n} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = d_A^{-1} \int_{[0,1]^n} \sum_{i=0}^{d_A-1} g(A^{-1}\mathbf{x} + A^{-1}\mathbf{p}_i)d\mathbf{x}$.

Demostración. Probamos (*i*). Sea $T_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $i = 0, ...d_A - 1$, definida por la ecuación $T_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}_i$, y sean las aplicaciones inducidas $\hat{A}_i^{-1} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ de las aplicaciones $A^{-1}T_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Afirmamos que las imágenes las aplicaciones $\hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n)$, $\forall i \in \{0, ..., d_A - 1\}$, son mutuamente disjuntas. Supongamos que nuestra afirmación no es cierta, así, $\exists i_1, i_2 \in \{0, ..., d_A - 1\}$, $i_1 \neq i_2$ y $\exists \mathbf{x_0} \in \mathbb{T}^n$ tal que $\mathbf{x_0} \in \hat{A}_{i_1}^{-1}(\mathbb{T}^n) \bigcap \hat{A}_{i_2}^{-1}(\mathbb{T}^n)$, y entonces

$$\exists \mathbf{y_0}, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{T}^n \quad \text{tal que} \quad \mathbf{x_0} = \hat{A}_{i_1}^{-1}(\mathbf{y_0}) \quad \text{y} \quad \mathbf{x_0} = \hat{A}_{i_2}^{-1}(\mathbf{z_0}).$$

Con lo que, $\exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $\mathbf{x_0} + \mathbf{a} = A_{i_1}^{-1}(\mathbf{y_0})$ y $\mathbf{x_0} + \mathbf{b} = A_{i_2}^{-1}(\mathbf{z_0})$. Por lo tanto $A(\mathbf{x_0}) + A(\mathbf{a}) = \mathbf{y_0} + \mathbf{p_{i_1}}$ y además $A(\mathbf{x_0}) + A(\mathbf{b}) = \mathbf{z_0} + \mathbf{p_{i_2}}$, entonces

$$A(\mathbf{a}) - \mathbf{y_0} - \mathbf{p_{i_1}} = A(\mathbf{b}) - \mathbf{z_0} - \mathbf{p_{i_2}}, \tag{1.9}$$

y como $\mathbf{y_0}, \mathbf{z_0} \in \mathbb{T}^n$ y $\mathbf{p_{i_1}}, \mathbf{p_{i_2}}, A(\mathbf{a}), A(\mathbf{b}) \in \mathbf{Z}^n$, obtenemos que $\mathbf{y_0} = \mathbf{z_0}$. Desde aquí hemos llegado a una contradicción ya que por (1.9) obtenemos una igualdad entre elementos de distintas clases de equivalencia de $\mathbf{Z}^n / A(\mathbf{Z}^n)$.

De manera similar se puede demostrar que dado $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^n$ existe un único $\mathbf{k_x} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{k_x} \in A_i^{-1}(\mathbb{T}^n)$, así, $\mid \hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n) \mid_n = \mid A_i^{-1}(\mathbb{T}^n) \mid_n$, y por lo tanto,

$$\mid \hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n) \mid_n = \int_{\hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n)} d\mathbf{x} = \int_{A_i^{-1}(\mathbb{T}^n)} d\mathbf{x} = d_A^{-1}, \quad 0 \le i \le d_A - 1.$$

Si juntamos todo lo anterior llegamos a que $\bigcup_{i=0}^{d_A-1} \hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n) = \mathbb{T}^n$. Si ahora denotamos $E_i = \hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n), 0 \le i \le d_A - 1$, entonces tendremos que $\hat{A}(E_i) = \mathbb{T}^n$ y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{T}^n} g(\hat{A}\mathbf{t})d\mathbf{t} = \sum_{i=0}^{d_A-1} \int_{E_i} g(\hat{A}\mathbf{t})d\mathbf{t} = \sum_{i=0}^{d_A-1} d_A^{-1} \int_{\mathbb{T}^n} g(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{T}^n} g(\mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

Probamos (*ii*). Como $\mathbb{T}^n = \bigcup_{i=0}^{d_A-1} \widehat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n)$ y además, los $\widehat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n)$ son disjuntos. Entonces

$$\int_{[0,1]^n} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{d_A^{-1}} \int_{\widehat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n)} g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i=0}^{d_A^{-1}} \int_{A_i^{-1}(\mathbb{T}^n)} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{d_A^{-1}} \int_{A^{-1}(\mathbb{T}^n + \mathbf{p}_i)} g(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

donde la segunda igualdad se debe a que g es $\mathbf{Z}^n$-periódica, a la definición de los $\widehat{A_i}$ y a que $\mid \hat{A}_i^{-1}(\mathbb{T}^n) \mid = \mid A_i^{-1}(\mathbb{T}^n) \mid = d_A^{-1}$, como habíamos visto en la demostración de (i). Si ahora hacemos el cambio de variable $A\mathbf{x} - \mathbf{p}_i = \mathbf{y}$, $i = 0, ..., d_A - 1$, obtenemos el resultado deseado. $\square$

El siguiente lema está relacionado con la Observación 1.1.

Lema 1.9. *Sea $V_j, j \in \mathbf{Z}$ un A-MRA. Entonces $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{\ \mathbf{0}\ \}$.*

Demostración. Sea $f \in \cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ y supongamos que $\|f\|_2 = 1$. Por el Lema 1.6 tenemos que para cada $j < 0$

$$D^{|j|}_{A^{*-1}} \widehat{f}(\mathbf{t}) = F_j(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n, \quad F_j \in L^2(\mathbb{T}^n)$$

y

$$\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|F_j\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}. \tag{1.10}$$

Así para cualquier $j < 0$

$$\widehat{f}(\mathbf{t}) = F_j((A^*)^{|j|}\mathbf{t}) D^{|j|}_{A^*}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{1.11}$$

Si probamos que para cualquier bola cerrada $B \subset \mathbf{R}^n$ que no contenga al origen,

$$\int_B |\widehat{f}(\mathbf{t})| d\mathbf{t} = 0 \tag{1.12}$$

entonces tendremos una contradicción con la condición de que la norma de la función f es uno y podremos dar por finalizada la demostración del lema.

Desde la igualdad (1.11) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_B |\widehat{f}(\mathbf{t})| d\mathbf{t} &= d_A^{|j|/2} \int_B |F_j((A^*)^{|j|}\mathbf{t}))\widehat{\phi}((A^*)^{|j|}\mathbf{t})| d\mathbf{t} \\
&\leq \left(d_A^{|j|} \int_B |F_j((A^*)^{|j|}\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right)^{1/2} \times \left(\int_B |\widehat{\phi}(A^{*|j|}\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(d_A^{-|j|} \int_{(A^*)^{|j|}B} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \times \left(\int_{(A^*)^{|j|}B} |\widehat{\phi}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que la aplicación A es expansiva y que la bola cerrada B no contiene al origen, obtenemos inmediatamente que

$$\int_{(A^*)^{|j|}B} |\widehat{\phi}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \to 0 \quad \text{cuando} \quad j \to -\infty. \tag{1.13}$$

Por otra parte, podemos encontrar un cubo con los lados paralelos a los ejes coordenados y con sus vértices en $\mathbf{Z}^n$ tal que $B \subset Q$. Entonces

$$d_A^j \int_{(A^*)^{|j|}Q} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_Q |F_j((A^*)^{|j|}\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}.$$

Como $F_j((A^*)^{|j|}\mathbf{y})$ es una función $\mathbf{Z}^n$-periódica, obtenemos

$$d_A^j \int_{(A^*)^{|j|}Q} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = |Q| \int_{\mathbb{T}^n} |F_j((A^*)^{|j|}\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Con lo que, desde la condición (i) del Lema 1.8,

$$d_A^j \int_{(A^*)^{|j|}Q} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = |Q| \int_{\mathbb{T}^n} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Así, la igualdad (1.10) y nuestras condiciones nos dicen que para cualquier $j < 0$,

$$d_A^j \int_{(A^*)^{|j|}Q} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq |Q|.$$

Desde aquí, para la bola fijada, B, la integral

$$d_A^j \int_{(A^*)^{|j|}B} |F_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq |Q| \quad \text{para cualquier} \quad j < 0.$$

Finalmente por (1.13) obtenemos (1.12). $\square$

La siguiente proposición enuncia una propiedad importante de la función de escala de un A-MRA.

Proposición 1.10. *Sea ϕ una función de escala de un A-MRA, entonces para cada conjunto medible y acotado $E \subset \mathbf{R}^n$,*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|(A^*)^{-j}E|_n} \int_{(A^*)^{-j}E} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} = 1. \tag{1.14}$$

Demostración. Tomamos $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $\widehat{f} = \chi_E$. Entonces por la identidad de Plancherel tenemos que

$$\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 = |E|_n.$$

Sea P_j la proyección ortogonal sobre V_j. De acuerdo con la propiedad (iii) en la difinición de A-MRA, es cierto que $\|f - P_j f\|_2 \to 0$ cuando $j \to \infty$. Entonces

$$\|P_j f\|_2^2 \to \|f\|_2^2 = |E|_n \quad \text{cuando } j \to \infty. \tag{1.15}$$

De acuerdo con las propiedades (ii$_A$) y (iv), la Observación 1.2 nos dice que el sistema $\{\ \phi_{j\mathbf{k}}\ \}_{j\in\mathbf{Z},\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$, donde

$$\phi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = d_A^{j/2}\phi(A^j\mathbf{x} - \mathbf{k}),$$

es una base ortonormal de V_j. Observamos que

$$\begin{aligned} \widehat{\phi_{j\mathbf{k}}}(\mathbf{t}) &= d_A^{\frac{j}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(A^j\mathbf{x} - \mathbf{k}) e^{-2\pi i\langle \mathbf{x},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{x} \\ &= d_A^{-\frac{j}{2}} e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},(A^*)^{-j}\mathbf{t}\rangle} \widehat{\phi}((A^*)^{-j}\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Así, $P_j f = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\langle f,\phi_{j\mathbf{k}}\rangle\phi_{j\mathbf{k}}$ y

$$\begin{aligned}
\|P_j f\|_2{}^2 &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} | < f,\phi_{j\mathbf{k}} > |^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{\phi_{j\mathbf{k}}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}\right|^2\\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n}\widehat{f}(\mathbf{t})\overline{\widehat{\phi_{j\mathbf{k}}}(\mathbf{t})}d\mathbf{t}\right|^2\\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|d_A^{-\frac{j}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\widehat{f}(\mathbf{t})e^{2\pi i\langle\mathbf{k},(A^*)^{-j}\mathbf{t}\rangle}\overline{\widehat{\phi}((A^*)^{-j}\mathbf{t})}d\mathbf{t}\right|^2\\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|d_A^{\frac{j}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\widehat{f}(A^{*j}\mathbf{y})\overline{\widehat{\phi}(\mathbf{y})}e^{2\pi i\langle\mathbf{k},\mathbf{y}\rangle}d\mathbf{y}\right|^2\\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|d_A^{\frac{j}{2}}\int_{(A^*)^{-j}E}\overline{\widehat{\phi}(\mathbf{y})}e^{2\pi i\langle\mathbf{k},\mathbf{y}\rangle}d\mathbf{y}\right|^2,
\end{aligned}$$

donde $(A^*)^{-j}E = \{\ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^n : A^{*j}\mathbf{y}\in E\ \}$.

Como A^* es expansiva, existe j_1 el número natural mínimo tal que si $j \geq j_1$, entonces $A^{*-j}E \subset [-1,1]^n$. Así, para cualquier $j \geq j_1$ la última suma es igual a

$$d_A^j\int|\chi_{(A^*)^{-j}E}(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t},$$

ya que los términos de la suma son los coeficientes de Fourier de la función $\widehat{\phi}\chi_{(A^*)^{-j}E}$. De esta manera por (1.15) obtenemos (1.14). □

Dada $A \in \mathcal{LE}$, sea $G_k = A^{-k}(\mathbf{Z}^n)$ para cada $k \in \mathbf{N}$ y denotamos $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Entonces probamos el siguiente lema.

Lema 1.11. *El conjunto G es denso en $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Es fácil observar que $\forall\mathbf{x}\in R^n$ y $\forall j\in\mathbf{N}$, existe $\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n$ tal que

$$\sqrt{n} \geq \| A^j\mathbf{x}-\mathbf{k} \| .$$

Por otro lado, de acuerdo con nuestra hipótesis, A es expansiva, existen dos constantes $C > 0$ y $\beta > 1$ tal que $\forall j \in \mathbf{N}$ y $\forall\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$,

$$\| A^j\mathbf{y} \| \geq C\beta^j \| \mathbf{y} \| .$$

De esta manera, $\forall\mathbf{x}\in R^n$ y $\forall j\in\mathbf{N}$, existe $\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n$ tal que

$$\sqrt{n} \geq \| A^j\mathbf{x}-\mathbf{k} \| = \| A^j(\mathbf{x}-A^{-j}\mathbf{k}) \| \geq C\beta^j \| \mathbf{x}-A^{-j}\mathbf{k} \| . \tag{1.16}$$

Nuestra prueba se concluye desde (1.16) si dado $\varepsilon > 0$ tomamos $j\in\mathbf{N}$ tal que $\frac{\sqrt{n}}{C}\frac{1}{\beta^j} < \varepsilon$.

□

El principal resultado de este capítulo es el siguiente.

Teorema 1.12. *Sea V_j, $j\in\mathbf{Z}$, una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen las condiciones* (i), (ii$_A$) *y* (iv). *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

($\mathbf{A_1}$) $W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$;

($\mathbf{B_1}$) $\widehat{\phi}$ *— la transformada de Fourier de la función de escala* ϕ*— es* A^**-localmente distinta de cero en el origen;*

($\mathbf{C_1}$) *el origen es un punto de* A^**-continuidad aproximativa de la función* $|\widehat{\phi}|$ *si tomamos* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$;

Demostración. Primero damos la prueba de la implicación $(\mathbf{B_1}) \Rightarrow (\mathbf{A_1})$. Observamos que W es invariante por traslaciones. Para empezar, probamos que W es invariante por traslaciones por vectores $\mathbf{v} \in G$. Fijamos algún $\mathbf{v} \in G$, entonces $\mathbf{v} \in G_l$ para algún $l \in \mathbf{N}$. Para cualquier $f \in W$ y $\forall\varepsilon > 0, \exists h \in V_{j_0}$ tal que $||f - h||_2 < \varepsilon$. Por (ii$_A$) tenemos que para todo $j \geq j_0$, $h \in V_j$ y entonces $h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c^j_{\mathbf{k}}\phi(A^j\mathbf{x} - \mathbf{k})$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$. Por lo tanto,

$$\tau_{\mathbf{v}}h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x} - \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c^j_{\mathbf{k}}\phi(A^j\mathbf{x} - A^j\mathbf{v} - \mathbf{k}) \quad \text{en } L^2(\mathbf{R}^n).$$

Si $j > \text{máx}\{\, l, j_0 \,\}$ entonces $A^j\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^n$ y en consecuencia $\tau_{\mathbf{v}}h \in V_j$, por lo tanto $\tau_{\mathbf{v}}f \in W$, es decir, W es invariante por traslaciones por vectores $\mathbf{v} \in G$. A partir de aquí, como el conjunto G es denso en $\mathbf{R}^n$, el subsespacio W es cerrado y el operador $\tau_{\mathbf{u}}$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$ es continuo, es inmediato que W es invariante por traslaciones.

Para probar que $W = L^2(\mathbf{R}^n)$ tomamos cualquier $g \in W^\perp$. Entonces para cada $f \in W$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, como W es invariante por traslaciones,

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y} - \mathbf{x})\overline{g(\mathbf{y})}d\mathbf{y} = 0$$

y así, por la identidad de Plancherel

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}\widehat{f}(\mathbf{y})\overline{\widehat{g}(\mathbf{y})}d\mathbf{y} = 0.$$

Esto prueba que la transformada de Fourier de $\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$ es identicamente cero, lo que nos lleva inmediatamente a que $\widehat{f}(\mathbf{y})\overline{\widehat{g}}(\mathbf{y}) = 0$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Si en particular tomamos $f(\mathbf{x}) = d_A^{j/2}\phi(A^j\mathbf{x}) \in V_j$, entonces

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) = d_A^{-\frac{j}{2}}\widehat{\phi}((A^*)^{-j}\mathbf{y})$$

y $\widehat{\phi}((A^*)^{-j}\mathbf{y})\overline{\widehat{g}(\mathbf{y})} = 0$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ o $\widehat{\phi}(\mathbf{t})\overline{\widehat{g}((A^*)^j\mathbf{t})} = 0$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. De acuerdo con nuestras hipótesis, para cualquier entero positivo N y $r > 1$ existe $k \in \mathbf{N}$ tal que

$$|\{\, \mathbf{t} \in (A^*)^{-k}B_r : \widehat{\phi}(\mathbf{t}) = 0 \,\}|_n < \frac{|(A^*)^{-k}B_r|_n}{N},$$

entonces

$$|\{\, \mathbf{t} \in (A^*)^{-k}B_r : \widehat{g}((A^*)^j\mathbf{t}) \neq 0 \,\}|_n < \frac{|(A^*)^{-k}B_r|_n}{N}$$

y desde aquí, tomando $j = k$ obtenemos

$$|\{\, \mathbf{y} \in B_r : \widehat{g}(\mathbf{y}) \neq 0, \,\}|_n < \frac{|B_r|_n}{N}. \tag{1.17}$$

Haciendo tender $N \to \infty$, obtenemos

$$|\{ \mathbf{y} \in B_r : \widehat{g}(\mathbf{y}) \neq 0 \}|_n = 0.$$

Así, $\widehat{g} = 0$ c.t.p., y por lo tanto, podemos concluir que $W^{\perp} = \{ \mathbf{0} \}$.

Ahora probamos la implicación $(\mathbf{A_1}) \Rightarrow (\mathbf{B_1})$. Sea cualquier $r > 0$ y denotamos $E_j = \{ \mathbf{t} \in (A^*)^{-j} B_r : \widehat{\phi}(\mathbf{t}) = 0 \}$ for $j \in \mathbf{N}$. Por el Lema A se sigue que

$$|\widehat{\phi}(\mathbf{t})| \leq 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n, \tag{1.18}$$

desde aquí,

$$|(A^*)^{-j} B_r|_n^{-1} \int_{(A^*)^{-j} B_r} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} = |(A^*)^{-j} B_r|_n^{-1} \int_{(A^*)^{-j} B_r \setminus E_j} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t}$$
$$\leq |(A^*)^{-j} B_r|_n^{-1} (|(A^*)^{-j} B_r|_n - |E_j|_n).$$

Aplicando la Proposición 1.10 obtenemos que $|(A^*)^{-j} B_r|_n^{-1} |E_j|_n \to 0$ cuando $j \to \infty$, lo que termina la prueba.

Para probar $(\mathbf{A_1}) \Rightarrow (\mathbf{C_1})$ demostraremos que se cumple la condición (2$^{\text{o}}$) del Teorema B.26 del Apéndice B, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $r > 0$,

$$\lim_{j \to \infty} \frac{|\{ \mathbf{y} \in (A^*)^{-j} B_r : \left||\widehat{\phi}(\mathbf{y})| - 1\right| < \varepsilon \}|_n}{|(A^*)^{-j} B_r|_n} = 1.$$

Si la implicación $(\mathbf{A_1}) \Rightarrow (\mathbf{C_1})$ no es cierta, entonces, teniendo en cuenta (1.18), obtenemos que existe $0 < \varepsilon_0 < 1$, $r_0 > 0$ y una sucesión creciente de números naturales $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$|\Gamma_j|_n = |\{ \mathbf{y} \in (A^*)^{-m_j} B_{r_0} : |\widehat{\phi}(\mathbf{y})| < 1 - \varepsilon_0 \}|_n \geq \varepsilon_0 |(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n.$$

De acuerdo con la Proposición 1.10 y la desigualdad (1.18) tenemos que

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{j \to \infty} |(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n^{-1} \int_{(A^*)^{-m_j} B_{r_0}} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \\
&= \lim_{j \to \infty} |(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n^{-1} \left(\int_{(A^*)^{-m_j} B_{r_0} \setminus \Gamma_j} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} + \int_{\Gamma_j} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} \right) \\
&\leq \lim_{j \to \infty} |(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n^{-1} \left(|(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n - |\Gamma_j|_n + (1 - \varepsilon_0)|\Gamma_j|_n \right) \\
&\leq \lim_{j \to \infty} |(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n^{-1} \left(|(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n - \varepsilon_0^2 |(A^*)^{-m_j} B_{r_0}|_n \right) \leq 1 - \varepsilon_0^2.
\end{aligned}$$

La contradicción obtenida finaliza la prueba.

La implicación $(\mathbf{C_1}) \Rightarrow (\mathbf{B_1})$ es trivial.

□

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del anterior resultado.

Teorema 1.13. *Sea V_j, $j \in \mathbf{Z}$, una sucesión de subespacios cerrados en $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisface las condiciones* (i), (ii) *y* (iv). *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A) $W = \overline{\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$*;*

(B) $\widehat{\phi}$ *—la transformada de Fourier de la función de escala* ϕ*— es localmente distinta de cero en el origen;*

(C) El origen es un punto de continuidad aproximativa de la función $|\widehat{\phi}|$ *siempre que tomemos* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$.

Una caracterización completa de las funciones de escala en un A-MRA viene escrita en el siguiente teorema, donde simplemente hemos recogido y ordenado adecuadamente los resultados anteriores. De esta manera conseguimos dar la caracterización de las funciones de escala de un A-MRA de forma análoga a la dada en [46, Teorema 5.2, p. 382].

Teorema 1.14. *Sea* $A \in \mathcal{LE}$ *tal que* $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ *y sea* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) ϕ *es la función de escala de un A-MRA;*

(2) (α) *La función* $\widehat{\phi}$ *es* A^**-localmente distinta de cero en el origen;*

(β)
$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n; \tag{1.19}$$

(γ) *Existe* $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\| H \|_\infty \leq 1$, *llamada filtro de paso bajo, tal que*

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(A^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n; \tag{1.20}$$

(3) *(α^*) El origen es un punto de* A^**-continuidad aproximativa de* $|\widehat{\phi}|$ *si tomamos* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$*; y, además tenemos las condiciones (β) y (γ).*

A partir del Teorema 1.14 es inmediato el siguiente resultado.

Teorema 1.15. *Sea* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1') ϕ *es la función de escala de un MRA;*

(2') (α) *La función* $\widehat{\phi}$ *es localmente distinta de cero en el origen;*

(β)
$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n; \tag{1.21}$$

(γ) *Existe* $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\| H \|_\infty \leq 1$, *llamada filtro de paso bajo, tal que*
$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(2^{-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(2^{-1}\mathbf{t}) \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n; \tag{1.22}$$

(3') *(α^*) El origen es un punto de continuidad aproximativa de* $|\widehat{\phi}|$ *si tomamos* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$*; y, además tenemos las condiciones (β) y (γ).*

Como otro corolario del Teorema 1.14 podemos dar las condiciones necesarias y suficientes de una función de escala de algún M-MRA donde las traslaciones se toman por elementos de un retículo general Γ.

Teorema 1.16. *Sea* $M \in \mathcal{LE}$ *tal que* $M\Gamma \subset \Gamma$*. Sea* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1*) ϕ *es la función de escala de un M-MRA.*

(2*) (α) *La función $\widehat{\phi}$ es M^*-localmente distinta de cero en el origen;*

(β)
$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+C^*\mathbf{k})|^2 = d_{C^*}^{-1} \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$$

donde C viene definida en (1.1);

(γ) *Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, con $\| H \|_\infty \leq 1$ y tal que*

$$\widehat{\phi}(M^*\mathbf{t}) = H(C^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

(3*) (α^*) *El origen es un punto de M^*-continuidad aproximativa de $|\widehat{\phi}|$ si tomamos $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$ y, además tenemos las condiciones (β) y (γ).*

Para la demostración de este teorema necesitamos los siguientes lemas técnicos.

Lema 1.17. *Sea $C \in \mathcal{L}$ e invertible. Sean $f, g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ funciones medibles tales que $g(\cdot) = d_C^{-\frac{1}{2}} f(C^{-1}\cdot)$. Entonces*

$$1 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{g}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \mid^2 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$$

si y solo si

$$d_C^{-1} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{f}(\mathbf{t}+C^*\mathbf{k}) \mid^2 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

Demostración. Como $\widehat{g}(\mathbf{t}) = d_C^{1/2}\widehat{f}(C^*\mathbf{t})$, la demostración es inmedata a partir de la igualdad

$$1 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{g}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \mid^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \mid d_{C^*}^{1/2}\widehat{f}(C^*\mathbf{t}+C^*\mathbf{k}) \mid^2 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n,$$

□

Lema 1.18. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y suponemos que $\{\tau_\gamma\phi\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una base ortonormal de V_0^*. Sea $V_j^*, j \in \mathbf{Z}$ una sucesión de subespacios cerrados en $L^2(\mathbf{R}^n)$ que satisfacen la condición* (ii$_M$). *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\forall j \in \mathbf{Z}, \quad V_j^* \subset V_{j+1}^*$;

(b) *Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\|H\|_\infty \leq d_M^{1/2}$ tal que*

$$D_{M^*}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(C^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n, \tag{1.23}$$

donde C está definida en (1.1).

Demostración. (**a**) $\Longleftrightarrow$ (**b**). Con la misma notación que en la Proposición 1.3, tenemos que

$$\forall j \in \mathbf{Z}, \quad V_j^* \subset V_{j+1}^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall j \in \mathbf{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1},$$

con lo que, equivalentemente desde el Lema 1.7, existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\|H\|_\infty \leq d_{A_1}^{1/2}$ tal que

$$d_A^{1/2}\widehat{\varphi}(A^*\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\varphi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

Pero, como $\widehat{\varphi}(\mathbf{t}) = d_{C^*}^{1/2}\widehat{\phi}(C^*\mathbf{t})$, tenemos de manera equivalente, que existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\|H\|_\infty \leq d_A^{1/2}$ tal que

$$d_A^{1/2}\widehat{\phi}(C^*A^*\mathbf{t}) = d_A^{1/2}\widehat{\phi}(M^*C^*\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(C^*\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n,$$

es decir,

$$d_M^{1/2}\widehat{\phi}(M^*\mathbf{t}) = H(C^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

□

Demostración del Teorema 1.16. **(1*)** $\Longleftrightarrow$ **(3*)**. En la demostración de la Proposición 1.3 hemos visto que ϕ es función de escala de un M-MRA con traslaciones por elementos del retículo Γ si y solo si $\varphi(\cdot) = d_C^{-\frac{1}{2}}\phi(C^{-1}\cdot)$, donde C es la aplicación lineal invertible definida en (1.1), es una función de escala de un A-MRA con traslaciones por elementos del retículo $\mathbf{Z}^n$.

Entonces, de manera equivalente φ satisface las condiciones escritas en (**3**) del Teorema 1.14, y finalmente la Proposición B.24 (ver Apéndice B), el Lema 1.17 y el Lema 1.18 nos dicen que tenemos equivalencia entre las anteriores condiciones y las condiciones de **(3*)** en el Teorema 1.16. La prueba de **(2*)** $\Longleftrightarrow$ **(1*)** se hace de manera análoga cambiando la Proposición B.24 por la Proposición B.33 (ver Apéndice B), Así terminamos la demostración. □

1.3. Construcción de ondículas a partir de un A-MRA

Recordamos que un A-MRA es un método general para construir familias de ondículas. En el caso $n = 1$ y con dilatación diádica el resultado de Stéphane Mallat [59] para construir una ondícula ortonormal a partir de un MRA dado es la siguiente (ver [24], [46, p. 57]).

Proposición 1.19. *Sea un MRA en $L^2(\mathbf{R})$ con m_0 el filtro de paso bajo asociado a la función de escala, ϕ, del MRA dado. La función $\psi \in V_1 \ominus V_0$, el complemento ortogonal de V_0 en V_1, es una ondícula ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$ si y sólo si*

$$\widehat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi}v(2\xi)\overline{m_0(\xi + \frac{1}{2})}\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{en c.t. } \xi \in \mathbf{R} \tag{1.24}$$

para alguna función medible $1-$periódica, v, tal que $\mid v(\xi) \mid= 1$ c.t. $\xi \in \mathbf{R}$.

En esta sección veremos cómo se construyen ondículas o familias de ondículas, en un contexto más general, concretamente, a partir de un A-MRA dado donde $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Para el caso diádico podemos encontrar una construcción análoga a la que presentaremos en estas líneas en [60] y [24]. En el mismo caso general que trataremos en esta sección, encontramos construcciones de familias de ondículas a partir de un A-MRA, en [75] y en [71].

Sea $\{V_j \ : \ j \in \mathbf{Z}\}$ un A-MRA en $L(\mathbf{R}^n)$ con función de escala ϕ. Desde el Lema 1.6 sabemos que si tenemos $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{d_A-1}$ funciones de V_1 entonces existen $F_0, F_1, ..., F_{d_A-1}$ funciones de $L^2(\mathbb{T}^n)$ tales que

$$D_{A^*}\widehat{\theta}_l(\mathbf{t}) = F_l(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad l = 0, ..., d_A - 1, \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{1.25}$$

De esta manera si denotamos $H_l = d_A^{-1/2} F_l$, $l = 0, ..., d_A - 1$, tenemos obviamente que

$$\widehat{\theta}_l(A^*\mathbf{t}) = H_l(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad l = 0, ..., d_A - 1, \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{1.26}$$

Proposición 1.20. *Sea ϕ una función de escala de algún A-MRA y sean las funciones $\theta_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y $H_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que se verifica (1.26). El sistema $\{\theta_0(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es un sistema ortonormal si y solo si*

$$\sum_{i=0}^{d_A-1} |H_0(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)|^2 = 1 \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$$

Demostración. La parte principal de la demostración consiste en calcular un producto escalar. Sean $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2} \in \mathbf{Z}^n$. Estamos interesados en

$$I := \langle \theta_0(\cdot + \mathbf{k_1}), \theta_0(\cdot + \mathbf{k_2}) \rangle.$$

Desde la identidad de Plancherel y las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{\theta}_0(\mathbf{t})|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, \mathbf{t} \rangle} d\mathbf{t} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |H_0(A^{*-1}\mathbf{t})|^2 |\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t})|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, \mathbf{t} \rangle} d\mathbf{t}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debida a las hipótesis.

Si hacemos el cambio de variable $\mathbf{t} = A^*\mathbf{s}$, entonces

$$\begin{aligned} I &= d_A \int_{\mathbf{R}^n} |H_0(\mathbf{s})|^2 |\widehat{\phi}(\mathbf{s})|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, A^*\mathbf{s} \rangle} d\mathbf{s} \\ &= d_A \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \int_{[0,1]^n + \mathbf{k}} |H_0(\mathbf{s})|^2 |\widehat{\phi}(\mathbf{s})|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, A^*\mathbf{s} \rangle} d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Como $A^*\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ y la función H_0 pertenece a $L^2(\mathbb{T}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} I &= d_A \int_{[0,1]^n} |H_0(\mathbf{s})|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, A^*\mathbf{s} \rangle} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{s} + \mathbf{k})|^2 d\mathbf{s} \\ &= d_A \int_{[0,1]^n} |H_0(\mathbf{s})|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, A^*\mathbf{s} \rangle} d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es cierta ya que como ϕ es función de escala de un A-MRA, entonces según el Lema A, tenemos que $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{s} + \mathbf{k})|^2 = 1$ en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$. Desde el Lema 1.8 (*ii*),

$$I = \int_{[0,1]^n} \sum_{i=0}^{d_A-1} |H_0(A^{*-1}(\mathbf{t} + \mathbf{p}_i^*))|^2 e^{-2\pi i \langle \mathbf{k_2} - \mathbf{k_1}, \mathbf{t} \rangle} d\mathbf{t}.$$

Así, si ponemos junto todo lo anterior conseguimos la siguiente igualdad,

$$\langle \theta_0(\cdot - \mathbf{k_1}), \theta_0(\cdot - \mathbf{k_2}) \rangle$$

$$= \int_{[0,1]^n} \sum_{i=0}^{d_A-1} |H_0(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))|^2 e^{-2\pi i\langle \mathbf{k_2}-\mathbf{k_1},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t}. \tag{1.27}$$

Interpretamos el lado derecho de la igualdad (1.27) como los correspondientes coeficientes de Fourier de la función $\sum_{i=0}^{d_A-1} |H_0(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))|^2$. Entonces si el sistema $\{\theta_0(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$ es un sistema ortonormal tenemos que $\sum_{i=0}^{d_A-1} |H_0(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))|^2 = 1$ c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$. Recíprocamente, si partimos de la condición $\sum_{i=0}^{d_A-1} |H_0(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))|^2 = 1$ c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$ obtenemos la ortonormalidad del sistema $\{\theta_0(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\}$. $\square$

Proposición 1.21. *Sea ϕ una función de escala de algún A-MRA y sean las funciones $\theta_0,\theta_1,...,\theta_m \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y $H_0,...,H_m \in L^2(\mathbb{T}^n)$, $m\le d_A-1$, tal que se verifica (1.26). Entonces el sistema $\{\theta_l(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n,\ l=0,1,...,m.\}$ es un sistema ortonormal si y solo si los vectores $\mathbf{v}_l(\mathbf{t}) = (H_l(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*))_{i=0}^{d_A-1}$ son ortonomales en $\mathbf{C}^{d_A}$ para casi todo punto $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Dados $l_1,l_2\in\{0,...,d_A-1\}$ y $\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}\in\mathbf{Z}^n$. De forma análoga a la demostración de la Proposición 1.20, tenemos que

$$\langle\theta_{l_1}(\cdot-\mathbf{k_1}),\theta_{l_2}(\cdot-\mathbf{k_2})\rangle$$

$$= \int_{[0,1]^n} \sum_{i=0}^{d_A-1} H_{l_1}(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))\overline{H_{l_2}(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))} e^{-2\pi i\langle \mathbf{k_2}-\mathbf{k_1},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t}. \tag{1.28}$$

Desde aquí, la prueba es análoga a la demostración de la Proposición 1.20. $\square$

Proposición 1.22. *Sea ϕ una función de escala de algún A-MRA $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$, y sean las funciones $\theta_0,\theta_1,...,\theta_{d_A-1}\in V_1$ y $H_0,...,H_{d_A-1}\in L^2(\mathbb{T}^n)$, tal que se verifica (1.26). El sistema $\{\theta_l(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n,\ l=0,1,...,d_A-1\}$ es una base ortonormal de V_1 si y solo si la matriz*

$$M(\mathbf{t}) = (H_l(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*))_{l,i=0}^{d_A-1}$$

es una matriz unitaria para casi todo $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$, es decir $M(\mathbf{t})M^*(\mathbf{t}) = I$ para casi todo $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$.

Demostración. A partir de la Proposición 1.21, sólo nos falta comprobar que el sistema $\{\theta_l(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n,\ l=0,1,...,d_A-1\}$ es una base ortonormal de V_1. Lo probaremos por reducción al absurdo. Tomamos d_A funciones $\theta_0,...,\theta_{d_A-1}$ de V_1 tales que $\{\theta_l(\cdot-\mathbf{k}) : \mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n,\ l=0,...,d_A-1\}$ es un sistema ortonormal pero no es una base de V_1. Entonces podemos tomar otra función $\theta_{d_A}\in V_1$ tal que $\|\ \theta_{d_A}\ \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 1$ y además, θ_{d_A} es ortogonal a todas las funciones $\theta_l(\cdot-\mathbf{k})$, $\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n$, $l=0,...,d_A-1$.

Desde (1.28), en la demostración de la Proposición 1.21, con $l_1 = d_A$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{d_A-1} H_{d_A}(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))\overline{H_l(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))} = 0 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n,$$

para todo $l=0,1,...,d_A-1$. Esto nos dice que tenemos (d_A+1) vectores ortogonales en $\mathbf{C}^{d_A}$, lo que es imposible. $\square$

Ya estamos preparados para hacer la construcción de una ondícula o una familia de ondículas asociada con un A- MRA, V_j, $j \in \mathbf{Z}$, con función de escala ϕ. Para cada $j \in \mathbf{Z}$ se define el subespacio cerrado W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} con el producto escalar en $L^2(\mathbf{R}^n)$, con lo que V_{j+1} es suma directa de los subespacios V_j y W_j, es decir, $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. De esta manera, como $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$ y $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n)$ podemos escribir

$$L^2(\mathbf{R}^n) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j. \tag{1.29}$$

Desde la condición (ii_A) de la definición de A-MRA tenemos que

$$\forall j \in \mathbf{Z}, \qquad f \in W_0 \Longleftrightarrow D_{A^j} f \in W_j.$$

Así, para encontrar una familia de ondículas asociadas con nuestro A-MRA es suficiente con construir una familia de funciones $\psi^{(l)} \in W_0$, $l \in I$, donde I es un conjunto finito de superíndices, tales que

$$\{\psi^{(l)}(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n,\ l \in I\}$$

es una base ortonormal de W_0. De esta manera

$$\{\psi^{(l)}(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n,\ l \in I\} \bigcup \{\phi(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$$

es una base ortonormal de V_1. Ahora, la Proposición 1.22 nos dice que la familia de ondículas asociadas con nuestro A-MRA tiene cardinalidad $d_A - 1$ y además nos sugiere una forma para encontrar las funciones de ese conjunto de ondículas. Tomamos $\theta_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$, y como hemos descrito en la Proposición 1.22, escogemos funciones medibles $\mathbf{Z}^n$-periódicas H_l, $l = 1, .., d_A - 1$ tales que la matriz

$$M(\mathbf{t}) = (H_l(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*))_{l,i=0}^{d_A-1}$$

sea una matriz unitaria para casi todo $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, es decir, tenemos que construir una matriz unitaria en casi todo punto cuya primera fila está dada. Si hacemos esto, por la Proposición 1.22 y por nuestra discusión anterior sobre las familias de ondículas asociados con nuestro A-MRA, podemos asegurar que

$$\{\psi^{(l)}(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n,\ l = 1, ..., d_A - 1\}$$

donde cada función $\psi^{(l)}$, $l = 1, ..., d_A - 1$ viene definida por

$$\widehat{\psi^{(l)}}(A^*\mathbf{t}) = H_l(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}), \tag{1.30}$$

es una familia de ondículas que surgen a partir de nuestro A-MRA.

Con todo lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema que podemos encontrar en [75].

Teorema 1.23. *Para todo A-MRA se asocia una familia de ondículas que consiste exactamente en $d_A - 1$ funciones.*

Existen ondículas que no surgen de un MRA. Un ejemplo de ello en $L^2(\mathbf{R})$ y con dilatación $A = 2$ es la ondícula dada por J. L. Journé que consiste en la función ψ que satisface $\mid \widehat{\psi} \mid = \chi_K$, donde

$$K = [-\frac{32}{7}\pi, -4\pi) \cup [-\pi, -\frac{4}{7}\pi) \cup (\frac{4}{7}\pi, \pi] \cup (4\pi, \frac{32}{7}\pi].$$

La comprobación de que la ondícula de J. L. Journé no surge a partir de un MRA la podemos encontrar, por ejemplo, en [46, pp. 64–65].

Capítulo 2

CARACTERIZACIÓN DE FILTROS DE PASO BAJO DE UN ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN

En este capítulo daremos condiciones necesarias y suficientes para los filtros de paso bajo asociados con funciones de escala de algún A-MRA donde la dilatación viene dada por una aplicación lineas expansiva fija $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$.

Recordamos que dada una función de escala $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, de un A-MRA, entonces

$$d_A^{-1/2}\phi(A^{-1}\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_k \phi(\mathbf{x}-\mathbf{k}), \tag{2.1}$$

con convergencia en $L^2(\mathbf{R}^n)$, donde

$$a_{\mathbf{k}} = d_A^{-1/2} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(A^{-1}\mathbf{x})\overline{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})}d\mathbf{x}. \tag{2.2}$$

Si tomamos transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad (2.1), tenemos que

$$\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}) = d_A^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle}\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}), \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n \tag{2.3}$$

donde

$$H(\mathbf{t}) = d_A^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle}$$

es una función de $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\| H \|_\infty \leq 1$. A esta función H se le llama *filtro de paso bajo* asociado a la función de escala ϕ (ver la condición (γ) del Teorema 1.14 del Capítulo 1).

Desde la definición de filtro de paso bajo, $|\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t})| \leq |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|$ en c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$, ya que $|H(\mathbf{t})| \leq 1$ en c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$.

Para un MRA definido en $Ł^2(\mathbf{R})$ y con dilatación diádica, se pueden encontrar condiciones suficientes sobre un filtro de paso bajo que permiten asegurar que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}t)$ existe en c.t.p. y es igual a la transformada de Fourier de una función de escala ϕ.

2.1. Introducción histórica

A. Cohen [18] dio las primeras condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio trigonométrico H sea un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún MRA definido en $Ł^2(\mathbf{R})$.

Teorema (Cohen). *Sea H un polinomio trigonométrico definido en $\mathbf{R}$ tal que $|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\frac{1}{2})|^2 = 1$ y con $H(0) = 1$. Además, sea θ la función tal que $\widehat{\theta}(\xi) = \Pi_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\xi)$.*

Las dos siguientes condiciones son equivalentes.

(1) *θ es función de escala de algún MRA.*

(2) *Existe un conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}$ tal que $K_{\mathbb{T}} = [0,1)$, que contiene un entorno del origen y tal que*

$$\inf_{j>0} \inf_{\xi \in K} \mid H(2^{-j}\xi) \mid > 0.$$

Continuando con las misma ideas, Hernández y Weiss [46], y después M. Papadakis, H. Sikić y G. Weiss [62] y R. F. Gundy [36] presentan unas condiciones necesarias y suficientes donde las hipótesis sobre la función H se debilitan.

Un corolario del Teorema de Cohen es el siguiente (ver [18], [46]).

Corolario. *Sea H un polinomio trigonométrico definido en $\mathbf{R}$ tal que satisface la ecuación $|H(\xi)|^2 + |H(\xi+\frac{1}{2})|^2 = 1$ $\forall \xi \in \mathbf{R}$ con $H(0) = 1$. Además, sea θ la función tal que $\widehat{\theta}(\xi) = \Pi_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\xi)$. Si H no tiene ceros en el intervalo $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ entonces θ es una función de escala de algún MRA.*

Además, en su tesis doctoral, Cohen [17] probó que una determinada estructura de los ceros del polinomio trigonométrico H es la raíz del problema.

Teorema. *Con las mismas condiciones que en el Teorema de Cohen, las condiciones (1) y (2) de dicho teorema son equivalentes a*

(3) *No existe un ciclo no trivial $\{\xi_1, ..., \xi_L\}$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para el operador $\xi \longrightarrow 2\xi$ (mod 1) tal que*

$$|H(\xi_l)| = 1 \qquad \forall l = 1, ..., L.$$

Más o menos al mismo tiempo que aparecieron las condiciones de Cohen, Lawton [54] dio una condición suficiente de muy distinta naturaleza cuando $H(\xi) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-2\pi i \mathbf{k}\xi}$. Él construye una cierta matriz M desde una sucesión $\{a_k\}_{k=0}^{N}$ y considera el subespacio generado por los autovectores de M asociados con el autovalor uno. Si este subespacio tiene dimensión uno, entonces H es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún MRA.

Que la condición de Lawton era una condición necesaria fue probada por ambos Cohen (ver [20]) y Lawton [55] de forma independiente. (Para más información mirar [24, pp. 182–193])

En el caso en el que trabajamos, es decir, cuando el MRA está definido en $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, y la dilatación viene dada por una aplicación lineal $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, una generalización del Teorema de Cohen es presentada por M. Bownik [7], además, aparece una generalización del Teorema de Lawton como sigue.

Dada $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ el siguiente operador lineal y continuo

$$P : L^1(\mathbb{T}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{T}^n)$$

tal que

$$Pf(\mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(A^{*-1}(\mathbf{t} + \mathbf{p}_i^*)) \mid^2 f(A^{*-1}(\mathbf{t} + \mathbf{p}_i^*))$$

está bien definido. Este operador fue introducido por M. Bownik como una generalización de un operador análogo introducido para el caso diádico en dimensión 1 por W. Lawton.

Una generalización del Teorema de Lawton. *Sea $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación lineal expansiva tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Sea H un polinomio trigonométrico definido en $\mathbf{R}^n$ tal que $\sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 = 1$ $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ y con $H(\mathbf{0}) = 1$. Sea la función θ tal que su transformada de Fourier es $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) = \Pi_{j=1}^{\infty} H(A^{*-j}\mathbf{t})$.*

Las dos siguientes condiciones son equivalentes.

(1) *θ es una función de escala de algún A-MRA.*

(2) *No existe ningún polinomio trigonométrico no constante que sea un punto fijo del operador P.*

Además, en el artículo de Lagarias y Wang [53] aparecen más condiciones necesarias y suficientes para polinomios trigonométricos siguiendo las ideas de Cohen y Lawton originales.

Desde la discusión anterior se concluye que existen, esencialmente, dos formas distintas pero equivalentes de dar la solución a la caracterización de los filtros de paso bajo cuando son polinomios trigonométricos.

El problema de dar condiciones necesarias y suficientes a una función arbitraria $H \in L^2(\mathbb{T}^n)$ para que sea filtro de paso bajo está propuesto en las notas del final del Capítulo 7 del libro de Hernández y Weiss [46].

Para un MRA definido en $L^2(\mathbf{R})$ y con dilatación diádica, en la literatura aparecen varias caracterizaciones diferentes. Papadakis, Sikić y Weiss [62] han formulado una de ellas. Dobrić, Gundy y Hitczenko [27] dieron otra en términos probabilísticos. Además, Gundy [37] trata una cuestión ligeramente más general: describir los filtros de paso bajo para una (posiblemente no ortogonal) base de Riesz.

A priori, si tenemos una caracterización de las funciones de escala de un MRA, una forma trivial para obtener una caracterización de los filtros de paso bajo H es la siguiente: Se define el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} \mid H(2^{-j}t) \mid$ que supongamos que existe y es no trivial, llamamos $\widehat{\phi}(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(2^{-j}t) \mid$ y reescribimos todas las condiciones que $\widehat{\phi}$ debería satisfacer de acuerdo con la caracterización de las funciones de escala que tengamos.

Por lo tanto, en el actual estado de conocimiento es un riesgo intentar dar una descripción de todas esas funciones $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ que son filtros de paso bajo para algún A-MRA. De todas formas, hemos decidido presentar los resultados de nuestro intento, entendiendo que la principal dificultad es encontrar una formulación adecuada que nos sirva para ese propósito.

Parece que nuestra formulación está cerca de la versión final, si es que existe. Nuestras esperanzas están basadas en el hecho de que las condiciones obtenidas son suficientemente simples y que su formulación, incluso para el caso general de A-MRA, no es complicada.

Empezaremos desde la caracterización de las funciones de escala obtenida en el Capítulo 1 y seguiremos la estrategia de Lawton. Hacemos notar que las condiciones presentadas aquí son nuevas incluso en el caso clásico, es decir, para un MRA definido en $L^2(\mathbf{R})$ y con dilatación diádica.

2.2. Resultados

Para una función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ dada, denotamos

$$\Phi_\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2. \tag{2.4}$$

El primer paso para el estudio de los filtros de paso bajo asodiados con una función de escala de un A-MRA es obvio: Se debería estudiar el producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid . \tag{2.5}$$

Supongamos que el producto infinito (2.5) converge en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$. Vamos a buscar una función de escala ϕ para un A-MRA que satisface la condición de que

$$\mid \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \mid = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid .$$

Así, por el Teorema 1.14 de caracterización de las funciones de escala del Capítulo 1, deberiamos además suponer que $\mid \widehat{\phi} \mid$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen. Con ánimo de no repetir condiciones, introducimos la clase Π_A que consiste en todas las funciones medibles definidas en $\mathbf{R}^n$ tales que $0 \leq f(\mathbf{t}) \leq 1$ en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ y el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de f si tomamos $f(\mathbf{0}) = 1$. La clase Π_A será denotada por Π cuando el origen sea un punto de continuidad aproximativa de f.

Probamos el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ una función tal que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$ converge en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ y es A^*-localmente distinto de cero en el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

A) *La función θ, donde $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$, es una función de escala de un A-MRA y $|H|$ es su filtro de paso bajo asociado.*

B) *La única función $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \bigcap \Pi_A$ que es un punto fijo del operador P es la función $f \equiv 1$.*

Como una consecuencia del Teorema 2.1, podemos dar una caracterización completa de los filtros de paso bajo asociados con funciones de escala. Para ello, necesitamos la noción de *multiplicador de filtros*, la cual para el caso unidimensional fue introducida en [76].

Definición 2.1. Se dice que una función medible m es un *multiplicador de filtros* si cuando H es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA, entonces mH es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA.

En la definición anterior, evitamos introducir la letra A, porque como veremos más adelante (ver la Proposition 2.8) la clase de multiplicadores de filtros es la misma para todas las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$.

Sea

$$m_H(\mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{H(\mathbf{t})}{|H(\mathbf{t})|} & \text{si } |H(\mathbf{t})| \neq 0 \\ 0 & \text{si } |H(\mathbf{t})| = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

y sea μ cualquier función medible definida en $\mathbf{R}^n$ tal que

$$| \mu(\mathbf{t}) |= 1 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \text{ y } \quad m_H(\mathbf{t}) = \mu(A^*\mathbf{t})\overline{\mu(\mathbf{t})}, \tag{2.7}$$

donde m_H está definida por (2.6) (ver la prueba de la Proposición 2.8 más abajo).

Teorema 2.2. *$A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que el producto infinito $\prod_{j=1}^\infty |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$ converge en casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ y es A^*-localmente distinto de cero en el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- **(A)** *$\forall\mu$ que verifica (2.7), $(\mu\widehat{\theta})^\vee$ es una función de escala de algún A-MRA, donde $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^\infty |H(A^{*-j}\mathbf{t})|$ y H es su filtro de paso bajo asociado.*
- **(B)** *La única función $f \in L^1(\mathbb{T}^n) \bigcap \Pi_A$ que es un punto fijo del operador P es la función $f \equiv 1$.*

Cuando $n = 1$ y tenemos una dilatación diádica, al operador P se le denotará P_1 donde

$$P_1 f(t) =| H(\frac{t}{2}) |^2 f(\frac{t}{2})+ | H(\frac{t+1}{2}) |^2 f(\frac{t+1}{2}). \tag{2.8}$$

En este caso, el Teorema 2.2 implica lo siguiente.

Corolario 2.3. *Sea $H \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que el producto infinito $\prod_{j=1}^\infty |H(2^{-j}t)|$ converge en casi todo punto de $\mathbf{R}$ y es localmente distinto de cero en el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalenes:*

- **(a)** *$\forall\mu$ que verifica (2.7), $(\mu\widehat{\theta})^\vee$ es una función de escala de algún MRA, donde $\widehat{\theta}(t) := \prod_{j=1}^\infty |H(2^{-j}t)|$ y H es su filtro de paso bajo asociado.*
- **(b)** *La única función $f \in L^1(\mathbb{T}) \bigcap \Pi$ que es un punto fijo del operador P_1 es la función $f \equiv 1$.*

2.3. Propiedades de los filtros de paso bajo

Como hemos mencionado al principio de la introducción, dado un A-MRA con función de escala ϕ, existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ que satisface la condición (γ) del Teorema 1.14 del Capítulo 1.

La siguiente proposición fue probada en [7] (ver además [59], [60], [24], [46] para el caso cuando $n = 1$ y tenemos una dilatación diádica).

Proposición B. *Sea H el filtro de paso bajo asociado a una función de escala de algún A-MRA. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{2.9}$$

El siguiente resultado está probado en [7] (ver [24] para el caso $n = 1$ y dilatación diádica).

Proposición C. *Sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ una función que verifica (2.9). Si el producto infinito $\prod_{j=1}^\infty \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid$ converge en casi todo punto, entonces $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) := \prod_{j=1}^\infty \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid$ pertenece a $L^2(\mathbf{R}^n)$ y $\| \widehat{\theta} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq 1$.*

El siguiente lema está demostrado en [7] (ver [24], [46] para el caso $n = 1$ y con dilatación diádica).

Lema D. *Sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ que satisface (2.9). Definimos, para todo $N \in \mathbf{N}$, una función $\Gamma_N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ por*

$$\Gamma_N(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})| \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(A^{*-N}\mathbf{t}) \qquad \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Entonces

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}} |\Gamma_N(\mathbf{t} + \mathbf{k})|^2 = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{2.10}$$

Para caracterizar los multiplicadores de filtros, necesitamos el siguiente lema probado por Gröchenig y Madych [34].

Lema E. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Entonces cualquier solución integrable de*

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Delta_A} \phi(A\mathbf{x} - \mathbf{k}) \tag{2.11}$$

es única salvo por multiplicaciones por una constante y está soportada en el compacto

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \ : \ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^\infty A^{-j}\mathbf{b}_j, \quad \mathbf{b}_j \in \Delta_A\}. \tag{2.12}$$

Si ϕ_h es una función con soporte compacto que satisface (2.11), entonces por el bien conocido Teorema de Paley-Wiener-Schwartz (ver [48] p. 181) tenemos que $\mid \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \ : \ \widehat{\phi_h}(\mathbf{t}) = 0\} \mid_n = 0$. Por lo tanto si tomamos $\widehat{\varphi} = \widehat{\phi_h}(\Phi_{\phi_h})^{-\frac{1}{2}}$, donde Φ_{ϕ_h} está definida por (2.4), entonces φ será una función de escala de un A-MRA (ver [6] sección 2) y tenemos la siguiente afirmación:

Afirmación 1. *Existe un filtro de paso bajo H asociado con una función de escala φ de algún A-MRA tal que $\mid \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \ : \ H(\mathbf{t}) = 0\} \mid_n = 0$.*

La prueba de la siguiente proposición está contenida en la demostración del Teorema 4.2 del artículo de Bownik, Rzeszotnik y Speegle [9] (ver además Capítulo 3).

Proposición F. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Existe una función de escala ϕ de un $A-MRA$ tal que $\widehat{\phi} = \chi_E$ donde $E \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible.*

Como una consecuencia directa del Teorema 1.14 en el Capítulo 1, y de la Proposición B, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea H el fitro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA. Entonces el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de la función $\mid H \mid$ si tomamos $\mid H(\mathbf{0}) \mid= 1$ y cualquier punto $A^{*-1}\mathbf{p}_i^*$, $i = 1, ...d_A - 1$, es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\mid H \mid$ si tomamos $\mid H(A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid= 0$.*

La siguiente proposición nos da una expresión del módulo de la transformada de Fourier de una función de escala de un A-MRA como un producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid$.

Proposición 2.5. *Sea H el fitro de paso bajo asociado con una función de escala, ϕ de algún A-MRA. Entonces*

$$\mid \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \mid= \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid, \qquad \textit{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{2.13}$$

Demostración. Desde la definición de filtro de paso bajo, dado $N \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = [\prod_{j=1}^{N} H(A^{*-j}\mathbf{t})]\widehat{\phi}(A^{*-N}\mathbf{t}) \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Por otro lado, de acuerdo con la condición (α^*) del Teorema 1.14, el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $|\widehat{\phi}|$ si tomamos $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})| = 1$. A partir de aquí, la Proposición B.30 del Apéndice B nos dice que existe una sucesión creciente de número naturales $\{j_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, tal que

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} |\widehat{\phi}(A^{*-j_N}\mathbf{t})| = 1 \qquad \text{para c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Además, como $|\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t})| \leq |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, podemos concluir que

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \mid \widehat{\phi}(A^{*-N}\mathbf{t}) \mid= 1, \qquad \text{para c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

De esta manera, si ponemos junto todo lo anterior, obtenemos que

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \prod_{j=1}^{N} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid= \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{\mid \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \mid}{\mid \widehat{\phi}(A^{*-N}\mathbf{t}) \mid} =\mid \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \mid \qquad \text{para c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

□

Una versión de la siguiente proposición aparece en [62] para el caso $n = 1$ y con dilatación diádica.

Proposición 2.6. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ que satisface (2.9). Además, sea $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, entonces* *i)* *para cada* $N \in \mathbf{Z}$*,* $\widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t}) \leq \widehat{\theta}(A^{*-N-1}\mathbf{t})$ *en c.t.p. de* $\mathbf{R}^n$*;*

ii) *los límites en las siguientes desigualdades existen para c.t.p. de* $\mathbf{R}^n$ *y*

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \widehat{\theta}(A^{*N}\mathbf{t}) \leq \widehat{\theta}(\mathbf{t}) \leq \lim_{N\to\infty} \widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t}) \leq 1;$$

iii) $\lim_{N\to\infty} \widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t})$ *es o bien* 0 *o bien* 1 *en c.t.* $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$*. Además, el primer caso ocurre si y solo si* $\widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t}) = 0$ *para todo* $N \in \mathbf{Z}$*.*

Demostración. La prueba de *i)* es una consecuencia inmediata de la definición de $\widehat{\theta}$ y del hecho de que $|H(\mathbf{t})| \leq 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$.

La propiedade *ii)* se sigue desde el hecho de que $0 \leq \widehat{\theta}(\mathbf{t}) \leq 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ y de la monotonicidad expresada en *i)*.

Para probar *iii)* observar que por la condición *ii)*, existe el $\lim_{N\to\infty} \widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t})$ $\forall \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \setminus G$ donde $G \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible tal que $|G|_n = 0$. Además, si denotamos $F = \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \ : \ \exists N \in \mathbf{Z}$ tal que $|H(A^{*N}\mathbf{t})| > 1\}$, desde nuestras hipótesis, $|F|_n = 0$.

Dado $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \setminus G$, es obvio que si $\widehat{\theta}(A^{*N}\mathbf{t}) = 0$ para todo $N \in \mathbf{Z}$, entonces $\lim_{N\to\infty} \widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t}) = 0$. Por otro lado, dado $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \setminus (G \cup F)$, si existe un $N_0 \in \mathbf{Z}$ tal que $\widehat{\theta}(A^{*-N_0}\mathbf{t}) \neq 0$, tenemos

$$0 < \widehat{\theta}(A^{*-N_0}\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j-N_0}\mathbf{t})| = \prod_{j=N_0+1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|,$$

entonces

$$\prod_{j=N_0+1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})| > 0 \qquad \forall N \geq N_0 + 1.$$

Así, cuando $N \geq N_0 + 1$ tenemos que

$$\widehat{\theta}(A^{*-N_0}\mathbf{t}) = \prod_{j=N_0+1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})| \widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t}) > 0,$$

y consecuentemente, como $\{\prod_{j=N_0+1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|\}_{N=N_0+1}^{\infty}$ es una sucesión no creciente tal que

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{j=N_0+1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})| = \widehat{\theta}(A^{*-N_0}\mathbf{t}),$$

podemos concluir que

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{\theta}(A^{*-N}\mathbf{t}) = \frac{\widehat{\theta}(A^{*-N_0}\mathbf{t})}{\prod_{j=N_0+1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})|} = 1.$$

□

Como una consecuencia de la Proposición2.6, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.7. *Sea $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que se verifica (2.9). Además, sea $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Entonces o bien la función $\widehat{\theta}$ no es A^*-localmente distinta de cero en el origen, o bien es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\theta}$ si tomamos $\widehat{\theta}(\mathbf{0}) = 1$.*

Demostración. Es suficiente probar que si $\widehat{\theta}$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen, entonces el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\widehat{\theta}$ si suponemos que $\widehat{\theta}(\mathbf{0}) = 1$. Desde nuestras hipótesis y de acuerdo con la Proposición B.34, existe una sucesión $\{N_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, $N_k > N_{k-1}$, tal que existe un $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $k \geq k_0$, tenemos que $\widehat{\theta}(A^{*-N_k}\mathbf{t}) \neq 0$, en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. desde la condición *iii*) de la Proposición 2.6, $\lim_{N\to\infty} |\widehat{\theta}(A^{-N}\mathbf{t})| = 1$ para c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Así, podemos concluir nuestra prueba directamente desde la Proposición B.28. □

La siguiente proposición generaliza una afirmación similar para el caso unidimensional probado en [76].

Proposición 2.8. *Una función medible m es un multiplicador de filtros si y solo si m es una función $\mathbf{Z}^n$-periódica y $\mid m(\mathbf{t}) \mid = 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Supongamos que m es una función medible $\mathbf{Z}^n$-periódica y $\mid m(\mathbf{t}) \mid = 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Afirmamos que existe una función medible $\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ tal que $\mid \mu(\mathbf{t}) \mid = 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ y

$$m(\mathbf{t}) = \mu(A^*\mathbf{t})\overline{\mu(\mathbf{t})}. \tag{2.14}$$

Tomamos el conjunto $F = B_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{*-j}B_1$, y observamos que $\mid F \mid_n > 0$. Sabemos que d_A es un número natural, así $d_A \geq 2$ y tendremos

$$\mid \bigcup_{j=1}^{\infty} A^{*-j}B_1 \mid_n \quad < \quad \sum_{j=1}^{\infty} d_A^{-j} \mid B_1 \mid_n = \frac{1}{d_A - 1} \mid B_1 \mid_n \leq \mid B_1 \mid_n,$$

donde la primera desigualdad es cierta porque cualquier conjunto $A^{*-j}B_1$ contiene un entorno del origen, y la última desigualdad es cierta ya que $d_A \geq 2$.

Después, observamos que

$$A^{*j}F \bigcap A^{*i}F = \emptyset \quad \text{si } j, i \in \mathbf{Z} \text{ y } i \neq j. \tag{2.15}$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, como A es una aplicación lineal expansiva, existe $N \in \mathbf{Z}$ tal que $\mathbf{x} \in A^{*-N}B_1$ y $\mathbf{x} \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} A^{*-j}B_1$. De esta manera, $\mathbf{x} \in A^{*-N}B_1 \setminus \bigcup_{j=N+1}^{\infty} A^{*-j}B_1 = A^{*-N}F$. Entonces $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} A^{*j}F = \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Ahora estamos preparados para construir una función medible μ tal que $|\mu(\mathbf{t})| = 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$ y se verifica (2.14). Primeramente definimos μ sobre F que sea una función medible tal que $|\mu(\mathbf{t})| = 1$ si $\mathbf{t} \in F$. Desde (2.15), si $\mathbf{x} \in A^*F$, podemos definir

$$\mu(\mathbf{x}) = m(A^{*-1}\mathbf{x})\mu(A^{*-1}\mathbf{x}), \tag{2.16}$$

y entonces (2.14) se satisface claramente para $\mathbf{t} \in F$. Así, paso a paso podemos definir μ sobre los conjuntos $F_N = \bigcup_{j=0}^{N} A^{*j}F$, y por lo tanto (2.14) es válida sobre F_N.

De una forma análoga, si $\mathbf{t} \in A^{*-1}F$ podemos definir

$$\mu(\mathbf{t}) = \mu(A^*\mathbf{t})\overline{m(\mathbf{t})}, \tag{2.17}$$

y entonces (2.14) será cierto para $\mathbf{t} \in A^{*-1}F$. Si continuamos paso a paso definiendo μ sobre los conjuntos $E_N = \bigcup_{j=1}^{N} A^{*-j}F$, de tal forma que se cumple la condición (2.14) sobre E_N, entonces terminamos la construcción.

Sea H un filtro de paso bajo asociado con una función de escala ϕ de algún A-MRA. Afirmamos que $\widetilde{H} = mH$ es un filtro de paso bajo asociado con la función de escala $\widetilde{\phi}$ donde $\widehat{\widetilde{\phi}} = \mu\widehat{\phi}$. Veamos que para $\widetilde{\phi}$ se satisfacen las condiciones del Teorema 1.14 en el Capítulo 1. Está claro que las condiciones (α) y (β) se verifican. Además,

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{\phi}}(A^*\mathbf{t}) &= \mu(A^*\mathbf{t})\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}) = \mu(A^*\mathbf{t})H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \\
&= \mu(A^*\mathbf{t})\overline{\mu(\mathbf{t})}H(\mathbf{t})\mu(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \\
&= m(\mathbf{t})H(\mathbf{t})\widehat{\widetilde{\phi}}(\mathbf{t}) = \widetilde{H}(\mathbf{t})\widehat{\widetilde{\phi}}(\mathbf{t}),
\end{aligned}$$

con lo que $\widetilde{\phi}$ también verifica la condición (γ) del Teorema 1.14.

Para probar la condición necesaria, suponemos que m es un multiplicador de filtros. Sea ϕ_E una función de escala de un A-MRA tal que $\widehat{\phi_E} = \chi_E$ donde $E \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible. Esta función de escala existe por la Proposición F. De acuerdo con la condición (γ) del Teorema 1.14, $H_E(\mathbf{t}) = \chi_{A^{*-1}E+\mathbf{Z}^n}(\mathbf{t})$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, será un filtro de paso bajo asociado con la función de escala ϕ_E. De esta manera, por la Proposición B, tenemos

$$|(A^{*-1}E - A^{*-1}\mathbf{p}_i^* + \mathbf{Z}^n)\bigcap(A^{*-1}E - A^{*-1}\mathbf{p}_l^* + \mathbf{Z}^n)|_n = 0, \tag{2.18}$$

$i, l \in \{0, ..., d_A - 1\}$, $i \neq l$, y además

$$\bigcup_{i\in\{0,...,d_A-1\}} (A^{*-1}E - A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) + \mathbf{Z}^n = \mathbf{R}^n \quad \text{en c.t.p. de } \mathbf{R}^n. \tag{2.19}$$

Al ser mH_E un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de un A-MRA, por la Proposición B

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{d_A-1} |\, m(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)H_E(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)\,|^2 \\
&= |m(\mathbf{t})|^2\chi_{A^{*-1}E+\mathbf{Z}^n}(\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^{d_A-1} |m(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i)|^2\chi_{A^{*-1}E-A^{*-1}\mathbf{p}_i+\mathbf{Z}^n}(\mathbf{t})
\end{aligned}$$

en c.t.p. de $\mathbf{R}^n$. Así, por (2.18) tenemos

$$|m(\mathbf{t})| = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in A^{*-1}E + \mathbf{Z}^n. \tag{2.20}$$

Por otro lado, sea H_h un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de un A-MRA tal que $|\ \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \ : \ H_h(\mathbf{t}) = 0\}\ |_n = 0$. Este filtro de paso bajo existe de acuerdo con nuestra Afirmación 1. Entonces, como mH_h es otro filtro de paso bajo de algún A-MRA, por la Proposición B y por (2.20),

$$|H_h(\mathbf{t})|^2 + \sum_{i=1}^{d_A-1} |m(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i)|^2|H_h(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i)|^2 = 1 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in A^{*-1}E + \mathbf{Z}^n.$$

Por lo tanto, como particularmente H_h satisface la Proposición B, tenemos

$$\sum_{i=1}^{d_A-1}(|m(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i)|^2-1)|H_h(\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i)|^2=0 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t}\in A^{*-1}E+\mathbf{Z}^n. \tag{2.21}$$

así, como habíamos supuesto que $|\{\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n\ :\ H_h(\mathbf{t})=0\}|_n=0$, desde (2.21) y por (2.19), podemos concluir que

$$|m(\mathbf{t})|=1 \qquad \text{para c.t. } \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

Al ser $H_h(\mathbf{t})\neq 0$ en c.t.p. de $\mathbf{R}^n$, y $H:=mH_h$ es un filtro de paso bajo de un A-MRA, entonces la función $m(\mathbf{t})=\frac{H(\mathbf{t})}{H_h(\mathbf{t})}$ está bien definida en c.t.p. de $\mathbf{R}^n$ como una función $\mathbf{Z}^n$-periódica. □

Como una consecuencia directa de la Proposición 2.8 podemos ver que una función medible H es un filtro de paso bajo de un A-MRA si y solo si $|\ H\ |$ es un filtro de paso bajo de algún A-MRA.

2.4. Prueba del Teorema 2.1.

Empecemos con la prueba de la implicación **A**) $\Longrightarrow$ **B**). Que $f\equiv 1$ es un punto fijo del operador P es una consecuencia inmediata de la Proposición B.

Supongamos que $f\in L^1(\mathbb{T}^n)\bigcap\Pi_A$ es un punto fijo del operador P.

Vamos a probar que

$$\int_{[0,1]^n} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\geq 1.$$

Esta condición anterior junto con la hipótesis $f\in\Pi_A$ nos dirán que $f\equiv 1$.

Si utilizamos la igualdad $Pf=f$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} &= \int_{[0,1]^n} P(f)(\mathbf{t})d\mathbf{t}\\ &= \int_{[0,1]^n}\sum_{i=0}^{d_A-1}|\ H(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))\ |^2\ f(A^{*-1}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*))d\mathbf{t}\\ &= d_A\int_{[0,1]^n}|\ H(\mathbf{t})\ |^2\ f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=d_A\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}|\ H(\mathbf{t})\ |^2\ f(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad es cierta por la condición (ii) del Lema 1.8, y la última igualdad es cierta porque tanto H como f son funciones $\mathbf{Z}^n$-periódicas.

Si hacemos el cambio de variable $A^*\mathbf{t}=\mathbf{v}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} &= \int_{\mathbf{R}^n}|\ H(A^{*-1}\mathbf{v})\ |^2\ f(A^{*-1}\mathbf{v})\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(A^{*-1}\mathbf{v})d\mathbf{v}\\ &= \int_{\mathbf{R}^n}|\ H(A^{*-1}\mathbf{t})\ |^2\ Pf(A^{*-1}\mathbf{t})\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(A^{*-1}\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta ya que $Pf=f$.

Iterando los cálculos anteriores y utilizando que $A^*\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{Z}^n$, entonces

$$\int_{[0,1]^n} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=\int_{\mathbf{R}^n}\prod_{j=1}^{N}|\ H(A^{*-j}\mathbf{t})\ |^2\ f(A^{*-N}\mathbf{t})\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(A^{*-N}\mathbf{t})d\mathbf{t}. \tag{2.22}$$

Definimos

$$\Gamma_N f(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{N} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid^2 f(A^{*-N}\mathbf{t})\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(A^{*-N}\mathbf{t}), \quad \text{para } N \in \mathbf{N}.$$

Como el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de la función $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}$ y de f, entonces el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}f$. Así, de acuerdo con la Proposición B.30 del Apéndice B, existe una sucesión creciente de números naturales $\{l_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, $l_N > l_{N-1}$ tal que

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \Gamma_{l_N} f(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid^2, \quad \text{para c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{2.23}$$

Finalmente, si aplicamos el Lema de Fatou, podemos aseguar que

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} &= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma_{l_N} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \geq \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{N\to\infty} \Gamma_{l_N} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{j=1}^{\infty} \mid H(A^{*-j}\mathbf{t}) \mid^2 d\mathbf{t} = \int_{\mathbf{R}^n} \mid \widehat{\theta}(\mathbf{t}) \mid d\mathbf{t} = 1, \end{aligned}$$

donde las tres últimas igualdades son ciertas por (2.23), por la Proposición 2.5 y porque θ es una función de escala.

Provbemos ahora la implicación **B**) $\Longrightarrow$ **A**). En primer lugar, obsérvese que podemos redefinir H en un conjunto de medida nula para que H satisfaga (4.37) para todo $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Podemos hacer esto ya que tenemos la igualdad $G = \bigcup_{i=0}^{d_A-1}(G + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)$ donde $G \subset \mathbb{T}^n$, $\mid G \mid_n = 0$, es el conjunto excepcional donde la igualdad (4.37) no se verifica. Que $G \subset \bigcup_{i=0}^{d_A-1}(G + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)$ es obvio. Para probar que $G \supset \bigcup_{i=0}^{d_A-1}(G + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)$, sea $\mathbf{s} \in \bigcup_{i=0}^{d_A-1}(G + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*)$, entonces $\exists l \in \{0, ..., d_A - 1\}$ tal que $\mathbf{s} = \mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_l^*$ donde $\mathbf{t} \in G$. Hallamos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{s} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t} + A^{*-1}(\mathbf{p}_l^* + \mathbf{p}_i^*)) \mid^2 \\ &= \sum_{j=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t} + A^{*-1}(\mathbf{p}_j^* + A^*\mathbf{k})) \mid^2 \\ &= \sum_{j=0}^{d_A-1} \mid H(\mathbf{t} + A^{*-1}(\mathbf{p}_j^*) \mid^2 \neq 1, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es cierta ya que $\{\mathbf{p}_l^* + \mathbf{p}_i^*\}_{i=0}^{d_A-1}$ recorre todas las clases de equivalencia de $\mathbf{Z}^n/A^*(\mathbf{Z}^n)$, la tercera igualdad se verifica porque H es una función $\mathbf{Z}^n$-periódica y tenemos la última desigualdad desde la definición del conjunto G.

Después, redefinimos $\mid H(\mathbf{t}) \mid = \frac{1}{\sqrt{d_A}}$ si $\mathbf{t} \in G$.

Por la Proposición C, tenemos que $\widehat{\theta} \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Tomamos la función Φ_θ definida por (2.4). Vamos a probar que Φ_θ es un punto fijo del operador P. Tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_\theta(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{\theta}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \mid^2 = \sum_{i=0}^{d_A-1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{p}_i^*+A^*\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{\theta}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \mid^2 \\ &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{\theta}(\mathbf{t}+\mathbf{p}_i^*+A^*\mathbf{q}) \mid^2 .\end{aligned}$$

Así, desde la definición de $\widehat{\theta}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi_\theta(\mathbf{t}) &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Z}^n} \mid H(A^{*-1}\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*+\mathbf{q}) \mid^2 \mid \widehat{\theta}(A^{*-1}\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*+\mathbf{q}) \mid^2 \\ &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(A^{*-1}\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 \sum_{\mathbf{q}\in\mathbf{Z}^n} \mid \widehat{\theta}(A^{*-1}\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*+\mathbf{q}) \mid^2 \\ &= \sum_{i=0}^{d_A-1} \mid H(A^{*-1}\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \mid^2 \Phi_\theta(A^{*-1}\mathbf{t}+A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) = P(\Phi_\theta)(\mathbf{t}),\end{aligned}$$

para c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$, donde la segunda igualdad es cierta porque H es una función $\mathbf{Z}^n$-periódica.

Si probamos que la función Φ_θ pertenece a $L^1(\mathbb{T}^n)\bigcap\Pi_A$, entonces por la condición **B)** del Teorema 2.1 tendremos que $\Phi_\theta(\mathbf{t})=1$ para c.t. $\mathbf{t}\in\mathbb{T}^n$. Así, por el Teorema 1.14, la función θ es una función de escala de algún A-MRA con filtro de paso bajo asociado H. Con lo que terminaremos la prueba del teorema si probamos que Φ_θ pertenece a $L^1(\mathbb{T}^n)\bigcap\Pi_A$.

Obviamente, $0\le\Phi_\theta(\mathbf{t})$ en c.t. $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$ y es una función $\mathbf{Z}^n$-periódica.

Definimos, para cada $N\in\mathbf{N}$, una función $\Gamma_N:\mathbf{R}^n\to[0,1]$ por

$$\Gamma_N(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{N} |H(A^{*-j}\mathbf{t})| \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(A^{*-N}\mathbf{t}) \qquad \mathbf{t}\in\mathbf{R}^n.$$

Dado cualquier $\mathbf{t}\in\mathbf{R}^n$ fijo, encontramos un $N_0\in\mathbf{N}$ tal que $\mathbf{t}\in A^{*N}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$ para todo $N\ge N_0$. Así, la sucesión $\{\Gamma_N(\mathbf{t})\}_{N=N_0}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente y no negativa que convergerá en todo punto y evidentemente coincidirá en c.t.p. de $\mathbf{R}^n$ con la función $\widehat{\theta}(\mathbf{t})$.

Así,

$$\begin{aligned}&\sup\ \mathrm{ess}_{\mathbf{t}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}\Phi_\theta(\mathbf{t}) \\ =\ &\lim_{N\to\infty} \sup\ \mathrm{ess}_{\mathbf{t}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\\ \mathbf{k}\in[-N,N]^n}} |\widehat{\theta}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \\ \le\ &\lim_{N\to\infty} \sup\ \mathrm{ess}_{\mathbf{t}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n\\ \mathbf{k}\in[-N,N]^n}} \mid \Gamma_{L_N}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \mid^2 \\ \le\ &\lim_{N\to\infty} \sup\ \mathrm{ess}_{\mathbf{t}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \mid \Gamma_{L_N}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \mid^2 = 1.\end{aligned}$$

donde $L_N\in\mathbf{N}$ tal que $\mathbf{t}+\mathbf{k}\in A^{*L_N}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$ para todo $\mathbf{t}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n$ y para todo $\mathbf{k}\in[-N,N]^n$, y además, la última igualdad es cierta por el Lema D.

Nos queda por probar que el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de Φ_θ si tomamos $\Phi_\theta(\mathbf{0}) = 1$. Por hipótesis, $\widehat{\theta}$ es A^*-localmente disitinta de cero en el origen, con lo que, de acuerdo con el Corolario 2.7, el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de la función $\widehat{\theta}$. Desde aquí, las desigualdades $\widehat{\theta}(\mathbf{t}) \leq \Phi_\theta(\mathbf{t}) \leq 1$ nos dicen que el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de Φ_θ si tomamos $\Phi_\theta(\mathbf{0}) = 1$. $\square$

Capítulo 3

ONDÍCULAS, FUNCIONES DE ESCALA Y FILTROS DE PASO BAJO CON SOPORTE MINIMAL EN LA FRECUENCIA

En este capítulo estudiaremos propiedades de funciones de escala de algún A-MRA tales que el módulo de su transformada de Fourier es una función característica y la dilatación $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal expansiva tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$.

El siguiente resultado nos proporciona una idea de cómo es el soporte de la transformada de Fourier de una ondícula o de una función de escala (cf. [46], p. 53).

Proposición A. *Sea* $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *tal que* $\{g(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ *es un sistema ortonormal. Entonces* $|$ *sop* $\widehat{g}\ |_n \geq 1$. *Además, se tiene la igualdad si y solo si* $|\ \widehat{g}\ | = \chi_S$ *donde* $S \subset \mathbf{R}^n$ *es algún conjunto medible.*

Demostración. Desde nuestras hipótesis, $\| \, g \, \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \| \, \widehat{g} \, \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 1$, y además, el Lema A del Capítulo 1 nos dice que $|\widehat{g}(\mathbf{t})| \leq 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, entonces

$$|\text{sop } \widehat{g}|_n = \int_{\text{sop } \widehat{g}} d\mathbf{t} \geq \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{g}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} = 1.$$

Por otro lado, si $|\text{sop } \widehat{g}|_n = 1$ y existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $|E|_n > 0$, tal que $|\widehat{g}(\mathbf{t})| < 1 \; \forall \; \mathbf{t} \in E$, tenemos una contradicción ya que

$$1 = \| \, \widehat{g} \, \|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \int_{\text{sop } \widehat{g}} |\widehat{g}(\mathbf{t})|^2 d\mathbf{t} < |\text{sop } \widehat{g} \setminus E| + |E| = 1.$$

De esta manera podemos concluir que $|\widehat{g}(\mathbf{t})| = 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \text{sop } \widehat{g}$. Finalmente, si $\{g(\cdot - \mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ es un sistema ortonormal y $|\ \widehat{g}\ | = \chi_S$, entonces tenemos

que
$$|S|_n = |\text{sop } \widehat{g}|_n = \| \widehat{g} \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 1.$$
$\square$

Un tipo de ondículas que han interesado a varios autores son aquellas cuya transformada de Fourier es una función característica. (cf. [38], [29], [44], [43], [23], [22], [2], [35], [9]). Quizás, este tipo de ondículas no tenga, hasta ahora, demasiado interés en aplicaciones debido en gran parte a la falta de regularidad, pero, por otro lado, nos son de gran utilidad para comprender más profundamente la estructura de las ondículas en general. Un ejemplo clásico es la ondícula de Shanon, es decir, la función $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ tal que

$$\widehat{\psi}(t) = e^{\pi i t}\chi_I \qquad \text{donde} \quad I = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1].$$

La Proposición A nos dice que dada una familia de ondículas $\psi^{(d)} \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $d = 1, ..., s$, asociada con una dilatación fija A y tal que $| \widehat{\psi^{(d)}} | = \chi_{K_d}$ donde $K_d \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible, resulta que el soporte de $\widehat{\psi^{(d)}}$ tiene medida minimal; en este sentido decimos que es una familia de ondículas con soporte minimal en la frecuencia (A-MSF ondículas). En la misma dirección y sentido ϕ es una$A$-MSF función de escala cuando ϕ es una función de escala de algún A-MRA, tal que $|\widehat{\phi}| = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible.

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar las A-MSF funciones de escala de algún A-MRA, en particular, estudiaremos los conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$ para los que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, tal que $| \widehat{\phi} | = \chi_E$, es una función de escala de algún A-MRA.

Papadakis, Sikić y Weiss [62] dan una caracterización de estos conjuntos en el caso particular $n = 1$ y dilatación diádica.

En esta dirección, Gu y Han [35] probaron lo siguiente.

Teorema (Gu y Han). *Sea A una matriz real y expansiva $n \times n$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$ y $d_A = 2$. Entonces existe un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ tal que $(\frac{1}{|E|_n}\chi_E)^{\vee}$ es una ondícula que surge de algún A-MRA.*

Además, a partir del conjunto E, construyen un conjunto medible $S \subset \mathbf{R}^n$ para el que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \chi_S(\mathbf{t})$ es una función de escala de algún A-MRA.

Sin la hipótesis adicional $d_A = 2$, la siguiente proposición está contenida en la prueba del Teorema 4.2 del artículo de Bownik, Rzeszotnik y Speegle [9].

Proposición (Bownik, Rzeszotnik y Speegle). *Sea una aplicación $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Existe un conjunto medible $S \subset \mathbf{R}^n$ para el que la función ϕ tal que $\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \chi_S(\mathbf{t})$ es una función de escala de algún A-MRA.*

Además, dan una caracterización de tales conjuntos S.

En este capítulo, daremos una caracterización diferente de esos conjuntos medibles E.

Para el caso cuando $n = 1$ y la dilatación es diádica, se conocen algunos ejemplos de funciones de escala ϕ de un MRA tales que el origen no es un punto de continuidad de $| \widehat{\phi} |$, (ver [24, pág. 143], [32]). En este capítulo, para cada dilatación A, expondremos ejemplos de funciones de escala ϕ de algún A-MRA tales que el origen no es un punto de continuidad de $| \widehat{\phi} |$. De esta manera, veremos otra forma de construir A-MSF funciones de escala y por tanto familias de ondículas.

Por otro lado, el filtro de paso bajo H asociado a la función de escala ϕ tal que $\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \chi_S(\mathbf{t})$, verifica que $\mid H \mid = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible. Además, recíprocamene, si un filtro de paso bajo H es tal que $\mid H \mid = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible, entonces H está asociado con una A-MSF función de escala. En virtud de esta relación tan estrecha entre las A-MSF funciones de escala y sus filtros de paso bajo asociados, también estamos interesados en el comportamiento de tales filtros.

En particular, nuestro estudio sobre los filtros de paso bajo nos permite quitar la hipótesis de continuidad en el origen de la función H en el siguiente teorema en [43].

Teorema (Hernández, Wang y Weiss). *Sea H una función medible y 1-periodica definida en todo el espacio $\mathbf{R}$ tal que H es continua en el origen y $\mid H(0) \mid = 1$. Entonces H es un filtro de paso bajo asociado con una MSF ondícula si y solo si $\mid H \mid = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}$ es un conjunto medible que satisface*

$$\chi_E(\xi) + \chi_E(\xi + \frac{1}{2}) = 1 \qquad \textit{en c.t. } \xi \in \mathbf{R} \quad \textit{y} \quad \mid \bigcap_{j=1}^{\infty} 2^j E \mid_1 = 1.$$

Finalmente daremos ejemplos de familias de A-MSF de ondículas $\psi^{(d)}$, $d = 1, ..., s$, donde la principal novedad es que el origen no será punto de continuidad de alguna de las funciones $\mid \widehat{\psi^{(d)}} \mid$, $d \in \{1, ..., s\}$.

3.1. Caracterización de A-MSF funciones de escala

Como una consecuencia de la caracterización de las funciones de escala dada en el Teorema 1.14 del Capítulo 1, mostraremos una caracterización de los conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$ para los que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $\mid \widehat{\phi} \mid = \chi_E$ es una función de escala de algún A-MRA.

Corolario 3.1. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ y sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(A^*) La función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $\mid \widehat{\phi} \mid = \chi_E$ es una función de escala para algún A-MRA.

(B^*) (a) *$\mid E \mid_n = 1$ y $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ en c.t.p.*
(b) *$E \in \mathcal{D}_{A^*}$.*
(c) *$A^{*-1}E \subset E$ en c.t.p.*

(C^*) (b^*) *La función $\mid \widehat{\phi} \mid = \chi_E$ es A^*- localmente distinta de cero en el origen, y además, se cumplen (a) y (c).*

Para realizar la demostración del corolario necesitamos la siguiente observación.

Observación 3.2. Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible. Entonces $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ en c.t.p., y $\mid E \mid_n = 1$, si y solo si

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_E(\mathbf{t} + \mathbf{k}) = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n.$$

Demostración del Corolario 3.1. $(A^*) \Longrightarrow (B^*)$. Al ser ϕ una función de escala de algún A-MRA, de acuerdo con el Teorema 1.14 del Capítulo 1, satisface las condiciones $(\mathbf{3})$ (α^*), (β) y (γ). Así, desde (β) sabemos que

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \chi_E(\mathbf{t}+\mathbf{k}) = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n,$$

con lo que, la Observación 3.2 nos dice que $\mid E \mid_n = 1$ y que $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ en c.t.p.

Desde la condición (γ), sabemos que existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$\chi_E(A^*\mathbf{t}) = \mid H(\mathbf{t}) \mid \chi_E(\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n,$$

con lo que $A^{*-1}E \subset E$ en c.t.p..

Finalmente, la condición (α^*) nos dice que el origen es un punto de A^*-continuidad aproximativa de χ_E si tomamos $\chi_E(\mathbf{0}) = 1$, así, en particular, el origen es un punto de A^*-densidad de E.

$(B^*) \Longrightarrow (C^*)$. Es trivial.

$(C^*) \Longrightarrow (A^*)$. Es suficiente con comprobar que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $\mid \widehat{\phi} \mid = \chi_E$, satisface las condiciones $(\mathbf{2})$ (α), (β) y (γ) del Teorema 1.14.

Como tenemos por hipótesis que $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ en c.t.p., y $\mid E \mid_n = 1$, por la Observación 3.2,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \chi_E(\mathbf{t}+\mathbf{k}) = 1 \qquad \text{en c.t.} \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n,$$

es decir, se verfica la condición (β).

Por otro lado, desde las hipótesis, la función $\mid \widehat{\phi} \mid = \chi_E$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen.

Así, nos falta probar la condición (γ), es decir, que existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\parallel H \parallel_\infty \leq 1$ y

$$\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Al ser el conjunto E el soporte de la función $\widehat{\phi}$, está bien definida la siguiente función

$$m(\mathbf{t}) = \begin{cases} \widehat{\phi}(A^*\mathbf{t})/\widehat{\phi}(\mathbf{t}) & \mathbf{t} \in E. \\ 0 & \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \setminus E. \end{cases}$$

Como por hipótesis tenemos que $\mid E \mid_n = 1$ y que $E_{\mathbb{T}^n} = [0,1]^n$ en c.t.p., podemos definir una función medible H que sea $\mathbf{Z}^n$-periódica a partir de la función m de la siguiente manera

$$H(\mathbf{t}) = \begin{cases} m(\mathbf{t}+\mathbf{k}_t) & \text{si } \exists \mathbf{k}_t \in \mathbf{Z}^n \text{ tal que } \mathbf{t}+\mathbf{k}_t \in E. \\ 0 & \text{si } \forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \text{ tenemos que } \mathbf{t}+\mathbf{k} \notin E. \end{cases}$$

De la definición de la función H, es evidente que $\parallel H \parallel_\infty \leq 1$ y que

$$\widehat{\phi}(A^*\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in E.$$

Así, para finalizar la prueba del corolario, sólamente nos falta comprobar que

$$0 = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \setminus E. \tag{3.1}$$

Para ello es suficiente con comprobar que $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tenemos que $\mid E \bigcap A^{*-1}E + \mathbf{k} \mid_n = 0$, pero efectivamente, esto anterior es cierto ya que como $A^{*-1}E \subset E$ en c.t.p., tenemos que $\mid E \bigcap A^{*-1}E + \mathbf{k} \mid_n \leq \mid E \bigcap (E + \mathbf{k}) \mid_n = 0$, donde la última igualdad se sigue de la Observación 3.2. □

Observación 3.3. Hemos visto que el filtro de paso bajo, H, asociado con una función de escala ϕ tal que $\mid \widehat{\phi} \mid$ es una función característica, satisface que $\mid H \mid$ es una función característica.

3.2. Construcción de A-MSF funciones de escala

Como hemos visto en la introducción de este capítulo, en [9] se prueba que para cualquier dilatación $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$ para el que la función ϕ definida mediante $\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \chi_E(\mathbf{t})$ es una función de escala de algún A-MRA. Nos preguntamos aquí si existen tales conjuntos con la propiedad añadida de que no contengan nungún entorno del origen. Construiremos los conjuntos E de forma ligeramente diferente a la contrucción dada [9].

Proposición 3.4. *Dada $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$ que no contiene ningún entorno del origen y para el que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, definida mediante $\widehat{\phi} = \chi_E$, es una función de escala para algún A-MRA.*

Para probar la Proposición 3.4 necesitamos los siguientes resultados previos.

Lema 3.5. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$ y sean $E, G \subset \mathbf{R}^n$ dos conjuntos medibles tal que $E_{\mathbb{T}^n} = G_{\mathbb{T}^n}$. Entonces $(AE)_{\mathbb{T}^n} = (AG)_{\mathbb{T}^n}$.*

Demostración. Por simetría en la notación, es suficiente ver que se verifica la inclusión $(AE)_{\mathbb{T}^n} \subset (AG)_{\mathbb{T}^n}$. Sea $\mathbf{x} \in E$ y sea $\mathbf{k_x} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{k_x} \in [0,1)^n$. Como $(E)_{\mathbb{T}^n} = (G)_{\mathbb{T}^n}$, entonces existe $\mathbf{k'_x} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{k_x} + \mathbf{k'_x} \in G$. Así, hemos probado que $\forall \mathbf{x} \in E$, $\exists \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ tal que

$$\mathbf{x} + \mathbf{k} \in G. \tag{3.2}$$

Por otro lado, sea $\mathbf{y} \in (AE)_{\mathbb{T}^n}$, entonces existe $\mathbf{k_y} \in \mathbf{Z}^n$ tal que $\mathbf{y} + \mathbf{k_y} \in AE$. Así, $A^{-1}\mathbf{y} + A^{-1}\mathbf{k_y} \in E$. Además, desde las hipótesis y (3.2), existe $\mathbf{k'_y} \in \mathbf{Z}^n$ tal que

$$A^{-1}\mathbf{y} + A^{-1}\mathbf{k_y} + \mathbf{k'_y} \in G,$$

con lo que $\mathbf{y} + \mathbf{k_y} + A\mathbf{k'_y} \in AG$.

Finalmente, como por hipótesis sabemos que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, tenemos que $\mathbf{k_y} + A\mathbf{k'_y} \in \mathbf{Z}^n$, y desde aquí, podemos concluir que $\mathbf{y} \in (AG)_{\mathbb{T}^n}$. □

Recordamos que nuestro objetivo en esta sección es encontrar un conjunto con todas la propiedades que nos indica la Proposición 3.4. Empezamos la construcción mencionando algunos hechos. Al ser $A \in \mathcal{LE}$, $\exists R > 0$ tal que $\bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}B_R \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$. Denotamos por $S := \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}B_R$ y observamos que $\mid AS \setminus S \mid_n > 0$ ya que A es expansiva.

Observación 3.6. Como A es expansiva $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$ entonces $A^{-j}B_R \subset B_R$, de esta manera podemos escribir $S = \bigcup_{j=0}^{j_0} A^{-j}B_R$.

Si ahora, para cada $l \in \{0, 1, 2, ...\}$ definimos $S_l = A^{-l}S \setminus A^{-l-1}S$, entonces podemos asegurar que S_l son disjuntos y que $S = \bigcup_{l=0}^{\infty} S_l$.

Como $| S \setminus A^{-1}S |_n > 0$, entonces $\exists r > 0$ y existe $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}^n$ tal que $B_r + \mathbf{y}_0$ está contenido en el interior de S_0 y además $| S_0 \setminus (B_r + \mathbf{y}_0) |_n > 0$.

Tomamos el siguiente conjunto $F \subset \mathbf{R}^n$,

$$F = \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0)$$

y definimos

$$E_0 = S \setminus F = \bigcup_{j=0}^{\infty} (S_j \setminus A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0)). \tag{3.3}$$

Observación 3.7. Tenemos que $| E_0 |_n > 0$ ya que para cada $j \in \mathbf{N}$, $A^{-j}(B_r + \mathbf{y}_0) \subset S_j$ con $| S_j \setminus A^{-j}(B_r + \mathbf{y}_0) |_n > 0$ y $B_{2^{-j}r} \subset B_r$.

Proposición 3.8. *El conjunto E_0 definido en (3.3) satisface las siguientes propiedades.*

a) $A^{-1}E_0 \subset E_0$.

b) $E_0 \in \mathcal{D}_{A^*}$.

Demostración. Para comprobar *a*), hallamos

$$\begin{aligned} A^{-1}E_0 &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (S_j \setminus A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0)) \\ &\subset \bigcup_{j=0}^{\infty} (S_j \setminus A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0)) = E_0, \end{aligned}$$

donde la inclusión es cierta porque los S_j son disjuntos y porque $B_r + \mathbf{y}_0 \subset S_0$.

Veamos *b*). Primero, observamos que el conjunto S satisface las condiciones de la Proposición B.7 en el Apéndice B. Ahora, como los S_j son disjuntos y $A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0) \subset S_j$, $j \in \{0, 1, 2, ...\}$, dado $l \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{| A^{-l}S \bigcap E_0 |_n}{| A^{-l}S |_n} &= \frac{| (\bigcup_{j=l}^{\infty} S_j) \bigcap (\bigcup_{j=0}^{\infty} (S_j \setminus A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0))) |_n}{| \bigcup_{j=l}^{\infty} S_j |_n} \\ &= \frac{| \bigcup_{j=l}^{\infty} (S_j \setminus A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0) |_n}{| \bigcup_{j=l}^{\infty} S_j |_n} \\ &= 1 - \frac{| \bigcup_{j=l}^{\infty} A^{-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0) |_n}{| \bigcup_{j=l}^{\infty} S_j |_n} = 1 - \sum_{j=l}^{\infty} \frac{| 2^{-j}A^{-j}B_r |_n}{d_A^{-l} \, | S |_n} \\ &= 1 - \frac{| B_r |_n}{d_A^{-l} \, | S |_n} \sum_{j=l}^{\infty} (2^n d_A)^{-j} \\ &= 1 - \frac{| B_r |_n}{| S |_n} 2^{-ln} \sum_{j=0}^{\infty} (2^n d_A)^{-j}. \end{aligned}$$

Desde aquí, al ser $d_A > 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty}(2^n d_A)^{-j}$ es covergente y podemos concluir que

$$\lim_{l\longrightarrow\infty} \frac{| A^{-l}S \bigcap E_0 |_n}{| A^{-l}S |_n} = 1,$$

con lo que, finalmente de acuerdo con la Proposición B.7 damos por finalizada la prueba de b). □

Lema 3.9. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible y acotado. Entonces existe un conjunto medible $F \subset AE \setminus E$ para el que*

$$\forall \mathbf{x} \in AE \setminus E,\ \exists \text{un único } \mathbf{q_x} \in \mathbf{Z}^n \text{ tal que } \mathbf{x} + \mathbf{q_x} \in F. \tag{3.4}$$

Demostración. Sea $\widetilde{F} = AE \setminus \cup_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}(E + \mathbf{k})$. Observar que $\widetilde{F}$ es un conjunto medible. Dado $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, denotamos por $Q_{\mathbf{k}} = [0,1)^n + \mathbf{k}$.

Definimos el conjunto medible F mediante:

Sea $\Omega : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}^n$ una aplicación biyectiva tal que si $j_1 < j_2$ entonces $\| \Omega(j_1) \| \leq \| \Omega(j_2) \|$.

Para cada $j \in \mathbf{N}$, tomamos los siguientes conjuntos medibles

$$\widetilde{F}_j = (\widetilde{F} \cap Q_{\Omega(j)}) - \Omega(j) \quad \text{y} \quad F_j = [\widetilde{F}_j \setminus \cup_{\substack{l\in\mathbf{N}\\ l<j}} \widetilde{F}_l] + \Omega(j).$$

Finalmente el conjunto $F = \cup_{j\in\mathbf{N}} F_j$ cumple (3.4). Además, como AE es acotado, ya que E es acotado y A es una aplicación lineal, entonces sólo tenemos, como mucho, un número finito de conjuntos F_j distintos del vacío, y por lo tanto podemos concluir que F es medible. □

Proposición 3.10. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Para cada $N \subset \mathbf{N_0}$ existe un conjunto medible $E_N \subset \mathbf{R}^n$ con las siguientes propiedades.*

i) $(E_N)_{\mathbb{T}^n} = (A^N E_0)_{\mathbb{T}^n}$.

ii) $| E_N |_n = | (E_N)_{\mathbb{T}^n} |_n$.

iii) $A^{-1}E_N \subset E_N$.

Demostración. Si $N = 0$, tomamos el conjunto E_0 definido en (3.3). A partir del conjunto E_0, definimos el conjunto

$$G_1 = AE_0 \setminus E_0. \tag{3.5}$$

Después, de acuerdo con el Lema 3.9, podemos tomar un conjunto medible $F_1 \subset G_1$ tal que

$$\forall \mathbf{x} \in (G_1)_{\mathbb{T}^n} \setminus (E_0)_{\mathbb{T}^n}\ \exists \text{ un único } \mathbf{q_x} \in \mathbf{Z}^n \text{ tal que } \mathbf{x} + \mathbf{q_x} \in F_1. \tag{3.6}$$

Finalmente, definimos el conjunto $E_1 \in \mathbf{R}^n$ como

$$E_1 = F_1 \bigcup E_0.$$

Si iteramos el proceso anterior, para cada $N \subset \mathbf{N_0}$ construimos un conjunto medible $E_N \subset \mathbf{R}^n$.

Ahora nos falta comprobar que estos conjuntos E_N, $N \in \mathbf{N_0}$ satisfacen las propiedades deseadas. Lo haremos por inducción en $N \in \mathbf{N_0}$.

Desde la definición de E_0 está claro que satisface las propiedades i) y ii). Además, la Proposición 3.8 nos dice que E_0 satisface la propiedad iii). Ahora, sea $N \geq 0$ y supongamos que el conjunto E_N satisface las tres propiedades anteriores, probaremos que el conjunto E_{N+1} también las satisface.

Primero, vamos a ver que E_{N+1} satisface la propiedad i). Desde la construcción de nuestro conjunto E_{N+1}, existen dos conjuntos medibles G_{N+1} y F_{N+1} definidos de forma análoga a (3.5) y a (3.6), respectivamene. Así,

$$(E_{N+1})_{\mathbb{T}^n} = (F_{N+1} \bigcup E_N)_{\mathbb{T}^n} = (G_{N+1} \bigcup E_N)_{\mathbb{T}^n} = (AE_N)_{\mathbb{T}^n}.$$

Finalmente, como el conjunto E_N satisface la propiedad i) y de acuerdo con el Lema 3.5, obtenemos que

$$(E_{N+1})_{\mathbb{T}^n} = (A^{N+1}E_0)_{\mathbb{T}^n}.$$

Veamos ahora que el conjunto E_{N+1} también satisface la propiedad ii). Desde su construcción,

$$\mid E_{N+1} \mid_n = \mid F_{N+1} \bigcup E_N \mid_n = \mid F_{N+1} \mid_n + \mid E_N \mid_n,$$

ya que $F_{N+1} \subset AE_N \setminus E_N$.

Además, es fácil observar que $\mid F_{N+1} \mid_n = \mid (F_{N+1})_{\mathbb{T}^n} \mid_n$, y como, también el conjunto E_N satisface la condición ii), es decir, $\mid E_N \mid_n = \mid (E_N)_{\mathbb{T}^n} \mid_n$, entonces

$$\begin{aligned} \mid E_{N+1} \mid_n &= \mid (F_{N+1})_{\mathbb{T}^n} \mid_n + \mid (E_N)_{\mathbb{T}^n} \mid_n = \mid (F_{N+1})_{\mathbb{T}^n} \bigcup (E_N)_{\mathbb{T}^n} \mid_n \\ &= \mid (F_{N+1} \bigcup E_{N+1})_{\mathbb{T}^n} \mid_n = \mid (E_{N+1})_{\mathbb{T}^n} \mid_n, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debida a que desde la definición de F_{N+1}, sabemos que $\mid (F_{N+1})_{\mathbb{T}^n} \bigcap (E_N)_{\mathbb{T}^n} \mid_n = 0$.

Finalmente vamos a comprobar que E_{N+1} satisface la propiedad iii).

$$\begin{aligned} A^{-1}E_{N+1} &\subset A^{-1}[(AE_N \setminus E_N) \bigcup E_N] \\ &\subset E_N \bigcup A^{-1}E_N \subset E_N \subset E_{N+1}, \end{aligned}$$

donde la tercera inclusión es cierta ya que el conjunto E_N satisface la propiedad iii), y la última inclusión es debida a la construcción del conjunto E_{N+1} a partir del conjunto E_N.

Observación 3.11. Existe $N_0 \in \mathbf{N_0}$ tal que $\mid E_{N_0} \mid_n = 1$, ya que al existir B una bola abierta en E_0, y como cada E_N, $N \in \mathbf{N_0}$, satisface la propiedad i), es decir, $(E_N)_{\mathbb{T}^n} = (A^N E_0)_{\mathbb{T}^n}$, tenemos que $(E_N)_{\mathbb{T}^n} \supset (A^N B)_{\mathbb{T}^n}$. Entonces, como la aplicación A es expansiva, podemos asegurar que existe un $N_0 \in \mathbf{N}$ minimal tal que se cumple que $\mid [0,1)^n \setminus (E_{N_0})_{\mathbb{T}^n} \mid_n \leq \mid [0,1)^n \setminus (A^{N_0}B)_{\mathbb{T}^n} \mid_n = 0$.

Como consecuencia, si $N \geq N_0$ entonces $E_N = E_{N_0}$.

$\square$

Demostración de la Proposición 3.4 Construimos conjuntos E_N, $N \in \mathbf{N_0}$, de forma análoga a los construidos en la demostración de la Proposición 3.10 si tenemos la aplicación A^*. Debido a la Observación 3.11, para demostrar la proposición es suficiente con comprobar que el conjunto E_{N_0} satisface las condiciones (B^*) (a), (b) y (c) del Corolario 3.1, y además, ver que el conjunto E_{N_0} no contiene ningún entorno abierto del origen.

La condición (a) se sigue desde la propiedad $ii)$ de la Proposición 3.10 y del hecho de que $|\ E_{N_0}\ |_n = 1$. La condición (b) se sigue de que $E_0 \subset E_{N_0}$ y $E_0 \in \mathcal{D}_{A^*}$ de acuerdo con la condición $b)$ de la Proposición 3.8. Además, la condición (c) sigue desde la propiedad $iii)$ de la Proposición 3.10 .

Sólo nos falta ver que el conjunto E_{N_0} no contiene ningún entorno abierto del origen. Efectivamente, nuestra afirmación es cierta ya que

$$\begin{aligned} E = E_{N_0} \subset A^{*N_0}E_0 &= A^{*N_0}(S \setminus F) = A^{*N_0}(\bigcup_{j=0}^{\infty} A^{*-j}B_R \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{*-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0)) \\ &= \bigcup_{j=-N_0}^{\infty} A^{*-j}B_R \setminus \bigcup_{j=-N_0}^{\infty} A^{*-j}(B_{2^{-j}r} + \mathbf{y}_0) \end{aligned}$$

con A^* una aplicación lineal y biyectiva . □

Como una consecuencia de la Proposición 3.4 obtenemos el siguiente resultado ya probado en [9].

Corolario 3.12. *Dada $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, existe un A-MRA.*

3.3. Filtros de paso bajo asociados con una A-MSF función de escala

En esta sección daremos una caracterización completa de los filtros de paso bajo asociados con una A-MSF función de escala. Vamos a estudiar los conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$, $E + \mathbf{Z}^n = E$ y tales que la función H tal que $|\ H\ | = \chi_E$ es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún A-MRA. De esta manera podemos dar las siguiente caracterización.

Teorema 3.13. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, y sea $E \subset \mathbf{R}^n$, $E = E + \mathbf{Z}^n$, un conjunto medible tal que*

$$1 = \sum_{i=0}^{d_A-1} \chi_E(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{3.7}$$

Las siguientes condiciones son equivalentes.

(A) *La función H tal que $|\ H\ | = \chi_E$ es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala de algún $A-MRA$.*

(B) (β) *Existe un conjunto medible $K \subset E$ tal que $A^{*-1}K \subset K$ y $K \in \mathcal{D}_{A^*}$.*

(γ) $|\ \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E\ |_n = 1.$

(C) (β') *Existe un conjunto medible $K \subset E$ tal que $A^{*-1}K \subset K$ y la función χ_K es A^*-localmene distinta de cero en el origen, y además, se cumple (γ).*

Para realizar la prueba del Teorema 3.13 necesitamos el siguientes lema previo.

Lema 3.14. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que $E = E + \mathbf{Z}^n$ y que satisface la condición (3.7). Si definimos $S = \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E$, entonces*

(i) $| S \cap (S + \mathbf{k}) |_n = 0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(ii) $| S |_n \leq 1$.

Demostración. Veamos que se cumple (i). Sea $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, denotamos $F_{\mathbf{k}} = S \cap (S + \mathbf{k})$. Desde el Lema A.17 del Apéndice A, sabemos que $\exists N \in \mathbf{N}$ tal que
$$\mathbf{k} = A^{*N-1}\mathbf{p}_i^* + A^{*N}\mathbf{q} \quad \text{con } 1 \leq i \leq d_A - 1 \text{ ý } \mathbf{q} \in \mathbf{Z}^n,$$
entonces, podemos escribir $F_{\mathbf{k}} = S \cap (S + A^{*N-1}\mathbf{p}_i^* + A^{*N}\mathbf{q})$.

De esta manera, desde la definición de S podemos asegurar que
$$F_{\mathbf{k}} \subset A^{*N}E \cap (A^{*N}E + A^{*N}\mathbf{q} + A^{*N-1}\mathbf{p}_i^*),$$
y como $E = E + \mathbf{Z}^n$, entonces
$$A^{*-N}F_{\mathbf{k}} \subset E \cap (E + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*).$$
Además, (3.7) implica que $| E \cap (E + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) |_n = 0$ con lo que $| A^{*-N}F_{\mathbf{k}} |_n = 0$ y consecuentemente
$$| F_{\mathbf{k}} |_n = | S \cap (S + \mathbf{k}) |_n = 0.$$
Veamos que se verifica (ii). Desde (i) sabemos que los conjuntos $S + \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, son mutuamente disjuntos en casi todo punto, entonces
$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_S(\mathbf{t} + \mathbf{k}) \leq 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{3.8}$$
Desde aquí, concluimos que
$$| S |_n = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_S(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \int_{[0,1]^n + \mathbf{k}} \chi_S(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_{[0,1]^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_S(\mathbf{t} + \mathbf{k})d\mathbf{t} \leq 1.$$
□

Demostración del Teorema 3.13. Empezamos demostrando $(\mathbf{A}) \Rightarrow (\mathbf{B})$. Al ser la función H tal que $| H | = \chi_E$, un filtro de paso bajo asociado con una función de escala ϕ de algún A-MRA. Entonces, por la Proposición 2.5,
$$| \widehat{\phi}(\mathbf{t}) | = | \prod_{j=1}^{\infty} H(A^{*-j}\mathbf{t}) | = \prod_{j=1}^{\infty} \chi_E(A^{*-j}\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} \chi_{A^{*j}E}(\mathbf{t}) \tag{3.9}$$
$$= \chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E}(\mathbf{t}) = \chi_S(\mathbf{t}), \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n, \tag{3.10}$$
donde $S = \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E$.

Como desde la condición (B^*) (b) del Corolario 3.1 tenemos que el origen es un punto de A^*-densidad del conjunto S, así, si tomamos $K = A^{*-1}S$, el Corolario B.14 del Apéndice B, nos dice que $K \in \mathcal{D}_{A^*}$. Además, por como hemos tomado K, vemos que satisface que $K \subset E$ y que $A^{*-1}K \subset K$.

Finalmente, la Proposición A de este capítulo nos dice que $| S |_n = 1$.

La demostración $(\mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{C})$ es trivial.

Probamos (**C**) $\Rightarrow$ (**A**). Sea la función ϕ tal que

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} |H(A^{*-j}\mathbf{t})| \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n, \tag{3.11}$$

donde $| H |= \chi_E$. Desde la hipótesis es evidente que $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Para comprobar que esta función ϕ es una función de escala para algún A-MRA es suficiente comprobar que satisface la condición (**2**) del Teorema 1.14 del Capítulo 1.

Desde (3.11) es evidente que

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = |H(A^{*-1}\mathbf{t})|\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Por otro lado, como $K \subset E$ y $K \subset A^*K$, tenemos que $K \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E$, y además, como la función χ_K es A^*-localmente distinta de cero en el origen entonces la función $| \widehat{\phi} |= \chi_{\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E}$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen.

Nos falta verificar que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} | \widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k}) |^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_E(\mathbf{t}+\mathbf{k}) = 1 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Desde la condición (i) del Lema 3.14, tenemos que los conjuntos $S+\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, son mutuamente disjuntos en c.t.p. Así,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_E(\mathbf{t}+\mathbf{k}) \leq 1 \quad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{3.12}$$

Por otro lado, desde nuestras hipótesis obtenemos que

$$1 =| S |_n = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_S(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \int_{[0,1]^n+\mathbf{k}} \chi_S(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_{[0,1]^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_S(\mathbf{t}+\mathbf{k})d\mathbf{t},$$

así, desde la desigualdad (3.12) podemos concluir que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \chi_S(\mathbf{t}+\mathbf{k}) = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n.$$

Hemos comprobado que $| H |$ es un filtro de paso bajo asociado con la función de escala ϕ de un A-MRA. Entonces, como consecuencia de la Proposición 2.8 del Capítulo 2, H es un filtro de paso bajo de algún A-MRA, con lo que hemos terminado la prueba del Teorema 3.13. $\square$

Observación 3.15. Desde la expresión (3.10) vemos que un filtro de paso bajo H tal que $| H |= \chi_E$ está asociado con alguna función de escala ϕ tal que $| \widehat{\phi} |= \chi_S$.

Como consecuencia de la caracterización anterior, conseguimos condiciones necesarias y suficientes de los filtros de paso bajo que nos recuerdan la caracterización dada por A. Cohen para polinomios trigonométricos.

Corolario 3.16. *Con las mismas hipótesis que en el Teorema 3.13. La condición* (**A**) *es equivalente a las siguientes.*

(D) (a) *Existe un conjunto medible* $K \subset \mathbf{R}^n$ *tal que* $| K |_n = 1$.

(*b*) *El origen es un punto de* A^**-densidad de* K.
(*c*) $A^{*-l}K \subset E$ *en c.t.p.* $\forall l \geq 1$.

(E) (*a*) *Existe un conjunto medible* $K \subset \mathbf{R}^n$ *tal que* $| K |_n = 1$.
(*b'*) *La función* χ_K *es* A^**-localmente distinta de cero en el origen.*
(*c*) $A^{*-l}K \subset E$ *en c.t.p.,* $\forall l \geq 1$.

Observación 3.17. El Corolario 3.16 nos dice que la función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $| \phi | = \chi_K$ es una función de escala cuyo filtro de paso bajo H satisface que $| H | = \chi_E$.

Demostración. Probamos (**A**) $\Longrightarrow$ (**D**). Basta tomar $K = S = \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E$ y observar que desde la condición (**B**) del Teorema 3.13, K cumple la condición (**D**).

La demostración (**D**) $\Longrightarrow$ **E** es inmediata.

Probamos (**E**) $\Longrightarrow$ (**A**). Para ello, es suficiente con comprobar que se satisface la condición (**C**) del Teorema 3.13.

Sea $K \subset \mathbf{R}^n$ que satisface las condiciones de (**E**). En particular, (*c*) nos dice que $A^{*-l}K \subset E$ en c.t.p. $\forall l \geq 1$, entonces $K \subset S = \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E$ en c.t.p., así, como $| K |_n = 1$, la condición (*ii*) del Lema 3.14 nos dice que

$$1 = | K |_n \leq | S |_n \leq 1,$$

es decir, $S = \bigcap_{j=1}^{\infty} A^{*j}E$ satisface la propiedad (**C**) (γ) del Teorema 3.13. Por otro lado, si tomamos $K' = A^{*-1}S$, entonces $K' \subset E$ y $A^{*-1}K' \subset K'$, y además, como la función χ_K es A^*-localmente distinta de cero en el origen entonces la función $\chi_{K'}$ es A^*-localmente distinta de cero en el origen (ver Proposición B.33 en Apéndice B). De esta manera, K' satisface la propiedad (**C**) (β'). □

El siguiente ejemplo nos muestra un ejemplo de un filtro de paso bajo H tal que el origen no es un punto de continuidad de $| H |$ cuando $n = 1$ y tenemos una dilatación diádica,

Ejemplo 1. La función $H = \chi_E$ es un filtro de paso bajo asociado con algún MRA, donde el conjunto $E \subset \mathbf{R}$ lo construimos de la siguiente manera. Sea

$$E_1 = [0, \frac{1}{4}] \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j-1}[0,1] + 2^{-j-1}) = [0, \frac{1}{4}] \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} (b_j[0,1] + a_j),$$

donde $a_j = 2^{-j-1}$ y $b_j = 2^{-4j-1}$.

Se observa que para cada $j \geq 2$, se cumple que $a_j > b_{j+1} + a_{j+1}$.

Sea, además, el siguiente conjunto,

$$E_2 = \bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j-1}[0,1] + 2^{-j-1} - 2^{-1}).$$

Definimos

$$E = E_1 \cup (-E_1) \cup E_2 \cup (-E_2) + \mathbf{Z}.$$

Para demostrar que nuestra m_0 es un filtro de paso bajo, es suficiente con comprobar que el conjunto

$$K = 2[E_1 \cup (-E_1) \cup E_2 \cup (-E_2)]$$

satisface la condición (**D**) del Corolario 3.16.

Por construción, es fácil ver que se cumple

$$\chi_E(\xi) + \chi_E(\xi + \frac{1}{2}) = 1.$$

Además, no es dificil comprobar que $| K |_1 = 1$.

Por otro lado, si comprobamos que $\frac{1}{2}K \subset K$, entonces $2^{-l}K \subset E$, $\forall l \geq 1$.

Comprobamos nuestro objetivo dividiendo el conjunto K en diferentes partes. El hecho de que $E_1 \subset 2E_1$ es consecuencia directa de que para cada $j \geq 2$ tenemos que

$$a_j = 2a_{j+1} \quad \text{y} \quad b_j + a_j > 2(b_{j+1} + a_{j+1}).$$

Por otro lado, como para $j = 2$, tenemos que

$$-\frac{191}{2^9} = b_2 + a_2 - \frac{1}{2} < -2(a_2 + b_2) = -\frac{130}{2^9},$$

entonces $E_2 \subset 2(-E_1)$.

Finalmente, por la simetría del conjunto K podemos concluir que $\frac{1}{2}K \subset K$.

Ahora, sólamente nos queda probar que el origen es un punto de densidad del conjunto K. Hallamos

$$\begin{aligned} \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{| K^c \bigcap [-2^{-j-1}, 2^{-j-1}] |_1}{| [-2^{-j-1}, 2^{-j-1}] |_1} &= \lim_{j \longrightarrow \infty} 2^{j+1} \sum_{l=j+2}^{\infty} 2^{-4l} \\ &= \lim_{j \longrightarrow \infty} 2^{j+1} 2^{-4(j+2)} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-4l} = 0, \end{aligned}$$

con lo que desde la Proposición B.7 podemos concluir que el origen es un punto de 2-densidad del conjunto K y por lo tanto $K \in \mathcal{D}$ (como veremos en el Capítulo 4).

Observación 3.18. La función ϕ tal que $\widehat{\phi} = \chi_K$ donde K es el conjunto definido en el Ejemplo 1 es una función de escala de algún MRA.

Un ejemplo de filtro de paso bajo en $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$, es el siguiente.

Ejemplo 2. Sea la dilatación dada por una matriz diagonal, A, $n \times n$, con todos los elementos de la diagonal iguales a 2. Afirmamos que la función $H \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que $H = \chi_G$ donde $G = E \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^{n-1} + \mathbf{Z}^n$ y E es el conjunto dado en el Ejemplo 1, es un filtro de paso bajo asociado con algún A-MRA.

3.4. Ejemplos de A-MSF ondículas que surgen a partir de algún A-MRA

En esta sección vamos a mostrar ejemplos de familias de A-MSF ondículas, $\{\psi^{(d)}\}_{d=1}^{d_A-1}$, tales que el origen no es un punto de continuidad de $| \widehat{\psi^{(d)}} |$ para algún $d \in \{1, ..., d_A - 1\}$. Construiremos estas ondículas a partir de una función de escala ϕ de algún A-MRA, con la propiedad de que el origen no es un punto de continuidad de $| \widehat{\phi} |$. Empezaremos escribiendo un lema que nos será de utilidad en los cálculos posteriores.

Lema 3.19. *Sea $E \subset \mathbf{R}$ tal que*

$$\chi_E(\xi) + \chi_E(\xi + \frac{1}{2}) = 1, \tag{3.13}$$

entonces

(i) $E = E + \mathbf{Z}$.

(ii) $E + \frac{1}{2} = E^c$.

Demostración. Veamos (i). Primero probamos que $E+1 \subset E$. Sea $\xi \in E$, desde la hipótesis (3.13) podemos asegurar que $\xi + \frac{1}{2} \notin E$. Desde aquí, de nuevo desde la igualdad (3.13) tenemos que

$$\chi_E(\xi + \frac{1}{2}) + \chi_E(\xi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1,$$

con lo que $\xi + 1 \in E$.

Ahora probamos que $E \subset E+1$. Sea $\xi \in E$, desde la hipótesis (3.13) podemos asegurar que

$$\chi_E(\xi - \frac{1}{2}) + \chi_E(\xi) = 1.$$

Entonces $\xi - \frac{1}{2} \notin E$. Desde aquí, de nuevo desde (3.13) tenemos que

$$\chi_E(\xi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + \chi_E(\xi - \frac{1}{2}) = 1,$$

con lo que $\xi - 1 \in E$.

Veamos (ii). Es evidente, desde la igualdad (3.13), que $E + \frac{1}{2} \subset E^c$ y que $E^c + \frac{1}{2} \subset E$. Por lo tanto, directamente desde (i), obtenemos que $E^c = E + \frac{1}{2}$. □

Ejemplo 3. Con la notación del Ejemplo 1, de acuerdo con la fórmula de Mallat [58], que vimos en el Capítulo 1, para la construcción de ondículas a partir de un MRA y de la condición (ii) del Lema 3.19, la función $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ tal que

$$\widehat{\psi}(\xi) = \chi_{2K \bigcap (2E+1)}(\xi) = \chi_{2K \bigcap 2E^c}(\xi) \tag{3.14}$$

es una ondícula.

Nos gustaría escribir con más detalle quién es $\widehat{\psi}$, para ello hallamos explícitamente $2K \bigcap 2E^c$.

Primero, escribimos quién es

$$2K \bigcap 2E^c \bigcap [0, \frac{1}{2}]$$

$$= ([0, \frac{1}{2}] \setminus \bigcup_{j=3}^{\infty} (2^{-4j+1}[0,1] + 2^{-j+1})) \bigcap (\bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j}[0,1] + 2^{-j}))$$

$$= \bigcup_{j=2}^{\infty} [2^{-j} + 2^{-4j-3}, 2^{-j} + 2^{-4j}].$$

Ahora calculamos explícitamente quién es

$$2K \bigcap 2E^c \bigcap [\frac{1}{2}, 1]$$

$$= ([\frac{1}{2}, 1] \setminus (2^{-8+1}[0,1] + 2^{-2+1})) \bigcap (-([0, \frac{1}{2}] \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j}[0,1] + 2^{-j})) + 1)$$

$$= ([130 \cdot 2^{-8}, 191 \cdot 2^{-8}]) \bigcup ([\frac{3}{4}, 1] \setminus \bigcup_{j=3}^{\infty} [1 - 2^{-j} - 2^{-4j}, 1 - 2^{-j}]).$$

Ahora buscamos una expresión de

$$2K \bigcap 2E^c \bigcap [1, \frac{3}{2}]$$

$$= 2(-(\bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j}[0,1]+2^{-j})-1)) \bigcap [1, \frac{3}{2}] \bigcap ([-1, -2^{-1}] \setminus (\bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j}[0,1]+2^{-j})-1)+2)$$

$$= ([382 \cdot 2^{-8}, \frac{3}{2}]) \bigcap ([1, \frac{3}{2}] \setminus ([\frac{5}{4}, 321 \cdot 2^{-8}] (\bigcup_{j=3}^{\infty} (2^{-4j}[0,1]+2^{-j}+1)))) = [382 \cdot 2^{-8}, \frac{3}{2}].$$

Finalmente hallamos,

$$2K \bigcap 2E^c \bigcap [\frac{3}{2}, 2]$$

$$= 2(-(\bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j}[0,1] + 2^{-j}) - 1)) \bigcap [\frac{3}{2}, 2] \bigcap (-(\bigcup_{j=2}^{\infty} (2^{-4j}[0,1] + 2^{-j})) + 2)$$

$$= \bigcup_{j=2}^{\infty} [2 - 2^{-j}, 2 - 2^{-j} - 2^{-4j-3}].$$

Si juntamos todos estos cálculos, por la simetría del conjunto K y del conjunto E respecto del origen, podemos escribir de la siguiente forma la transformada de Fourier de la ondícula ψ:

$$\widehat{\psi}(\xi) = \chi_{F_1}(\xi) + \chi_{-F_1}(\xi) + \chi_{F_2}(\xi) + \chi_{-F_2}(\xi) \tag{3.15}$$

$$+\chi_{F_3}(\xi) + \chi_{-F_3}(\xi) + \chi_{F_4}(\xi) + \chi_{-F_4}(\xi),$$

donde

$$F_1 = \bigcup_{j=2}^{\infty} [2^{-j} + 2^{-4j-3}, 2^{-j} + 2^{-4j}],$$

$$F_2 = ([130 \cdot 2^{-8}, 191 \cdot 2^{-8}]) \bigcup ([\frac{3}{4}, 1] \setminus \bigcup_{j=3}^{\infty} [1 - 2^{-j} - 2^{-4j}, 1 - 2^{-j}]),$$

$$F_3 = [382 \cdot 2^{-8}, \frac{3}{2}]$$

y

$$F_4 = \bigcup_{j=2}^{\infty} [2 - 2^{-j}, 2 - 2^{-j} - 2^{-4j-3}].$$

En un contexto más general, si la función medible H tal que $|H| = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto medible, es un filtro de paso bajo asociado con una función de escala ϕ de algún A-MRA, por la Proposición B del Capítulo 2, se cumple

$$1 = \sum_{i=0}^{d_A-1} \chi_E(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R^n}.$$

Así, por la Proposición A.16 (ver Apéndice A) y como por hipótesis $E = E + \mathbf{Z}^n$, obtenemos que si tomamos las funciones

$$H_d(\mathbf{t}) = H_0(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_d^*), \qquad d = 1, ..., d_A - 1, \tag{3.16}$$

tenemos que la matriz $M(\mathbf{t}) = (H_d(\mathbf{t} + A^{*-1}\mathbf{p}_i^*))_{d,i=0}^{d_A-1}$ es unitaria, es decir $M(\mathbf{t})M^*(\mathbf{t}) = I$, en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$.

Desde nuestra discusión en el Capítulo 1 para construir una familia de ondículas a partir de un A-MRA, tenemos que para construir una familia de A-MSF ondículas es suficiente con tomar funciones H_d, $d = 1, ..., d_A - 1$ como en (3.16) y definir funciones $\psi^{(d)}$, $d = 1, ..., d_{A^*} - 1$ tales que

$$\widehat{\psi^{(d)}}(\mathbf{t}) = H_d(A^{*-1}\mathbf{t})\widehat{\phi}(A^{*-1}\mathbf{t}), \quad d = 1, ..., d_A - 1. \tag{3.17}$$

El siguiente ejemplo muestra una familia de A-MSF ondículas en $L^2(\mathbf{R}^n)$ con dilatación diádica.

Ejemplo 4. Sea $H_0 = \chi_G$ donde G es el conjunto definido en el Ejemplo 2. Definimos las funciones H_d, $d = 1, ..., 2^n - 1$, como en (3.16) y por último, definimos las funciones $\psi^{(d)}$, $d = 1, ..., 2^n - 1$, como en (3.17). De esta manera $\{\psi^{(d)} \ : \ d = 1, ..., 2^n - 1\}$ es una familia de A-MSF ondículas. Aún más, es fácil comprobar que para algún $d \in \{1, ..., 2^n - 1\}$ tenemos que el origen no es un punto de continuidad de $|\ \widehat{\psi}^{(d)}\ |$.

Ejemplo 5. En el caso particular en el que tratemos con $A \in \mathcal{LE}$, tal que $d_A = 2$ y $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, si tomamos el conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ dado en la demostración de la Proposición 3.4 y tratamos con la función de escala ϕ tal que $\widehat{\phi} = \chi_E$, entonces la ondícula ψ que surgen a partir de esta función de escala de acuerdo con (3.17), verifica que $|\ \widehat{\psi}\ |$ tiene soporte minimal y no tiene como punto de continuidad al origen.

Capítulo 4

EQUIVALENCIA DE LA A-CONTINUIDAD APROXIMATIVA

Si comparamos la condición $\mathbf{C_1}$ del Teorema 1.12 y la condición $\mathbf{C}$ del Teorema 1.13 del Capítulo 1, no es difícil observar que si consideramos la descomposición polar de la aplicación lineal A y tenemos que todos los autovalores del operador positivo $\sqrt{A^*A}$ son iguales entonces las condiciones $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C}$ son equivalentes. Además, si observamos las definiciones de punto de continuidad aproximativa y punto de A-continuidad aproximativa de una función medible, nos daremos cuenta, entre otras cosas, de que podemos encontrar alguna aplicación lineal expansiva $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para la que dado un punto de $\mathbf{R}^n$ existe una función medible $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ tal que ese punto es un punto de continuidad aproximativa de f pero no es un punto de A-continuidad aproximativa de f, y además, por supuesto también ocurre el caso contrario (ver [16] *Remark 5*, pág. 1016). Un ejemplo es cualquier aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es diagonal de números reales y tales que al menos dos de los elementos de la diagonal tienen distintos valores absolutos. Esto nos dice que la definición de punto de A-continuidad aproximativa depende de la aplicación A que tengamos previamente. Como recordatorio, hacemos notar que aunque en el contexto de A-MRA hayamos impuesto la condición extra de que $A(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$, esta condición no es necesaria dentro de la definición de punto de A-continuidad aproximativa de una función medible. Con esta motivación, en [16] se proponen los siguientes problemas.

Problema 1: Dar una caracterización de las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para las que el concepto de continuidad aproximativa coincide con el concepto de A-continuidad aproximativa.

De forma más general,

Problema 2: Caracterizar las aplicaciones lineales expansivas A_1 y A_2 para que el concepto de A_1-continuidad aproximativa coincida con el concepto de A_2-continuidad aproximativa.

Observación 4.1. A partir de la definición de punto de continuidad aproximativa de una función medible en $\mathbf{R}^n$ es fácil ver que dado un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ y dado un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, el punto $\mathbf{x}_0$ es un punto de continuidad aproximativa de la función

$$f(\mathbf{x}) = \chi_{E\cup\{\mathbf{x_0}\}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in E\bigcup\{\mathbf{x_0}\} \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

si y solo si $E \in \mathcal{D}(\mathbf{x_0})$.

El análogo de la Observación 4.1 se cumple para puntos de A-continuidad aproximativa.

Además, claramente, $E \in \mathcal{D}$ (resp. $E \in \mathcal{D}_A$) si y solo si $E + \mathbf{x_0} \in \mathcal{D}(\mathbf{x_0})$ (resp. $E + \mathbf{x_0} \in \mathcal{D}_A(\mathbf{x_0})$).

Así, podemos simplificar nuestros dos problemas de la siguiente manera.

Problema 1: Dar una caracterización de las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para las que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.

Problema 2: Describir bajo qué condiciones de dos aplicaciones lineales expansivas $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, tendremos que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$.

El esquema que seguiremos en este capítulo será el siguiente: En primer lugar daremos una solución al Problema 1, a continuación daremos una solución al Problema 2 cuando las aplicaciones lineales expansivas están definidas en $\mathbf{R}^2$, y por último daremos una solución a nuestro Problema 2 cuando las aplicaciones lineales expansivas están definidas en $\mathbf{R}^n$ y además son autoadjuntas.

En este estudio tendrá gran importancia la forma especial que tienen las matrices elementales de Jordan de las aplicaciones lineales (ver Apéndice A), y por lo tanto el estudio de sus autovalores. Pero, al estar trabajando con aplicaciones lineales $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, no todas estas aplicaciones tienen autovalores reales, por eso en muchas ocasiones es conveniente extender la definición de la aplicación A sobre los complejos $\widetilde{A} : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ de la siguiente manera, dado $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$,

$$\widetilde{A}\mathbf{u} = A\mathbf{v} + iA\mathbf{w}.$$

Así ya podemos asegurar que $\widetilde{A}$ tendrá n autovalores complejos, por eso lo que debemos tener en mente a partir de este momento es que cuando hablemos de autovalores de A, estaremos pensando exactamente en los autovalores complejos de la aplicación extendida $\widetilde{A}$, aunque para facilitar nuestra notación y la mejor lectura del texto sigamos escribiendo A.

4.1. Equivalencia entre punto de Densidad y A-densidad

En esta sección expondremos nuestra respuesta al Problema 1. Los resultados se han obtenido en colaboración con el profesor Peter Oswald.

Una propiedad que nos servirá para simplificar algo más nuestro problema es la siguiente.

Proposición 4.2. *Sea $C \in \mathcal{L}$ con $d_C > 0$ y sea un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $| E |_n > 0$. Entonces, $E \in \mathcal{D}$ si y solo si $CE \in \mathcal{D}$, es decir $\mathcal{D} = C\mathcal{D}$ (la clase $\mathcal{D}$ es invariante por C y por C^{-1}).*

Demostración. $\Rightarrow$) Veamos la condición necesaria.

Sea $E \in \mathcal{D}$ y sea $C \in \mathcal{L}$ con $d_C > 0$, entonces existe $\delta > 0$, tal que $C^{-1}B_1 \subset B_\delta$. Desde aquí es fácil ver que para cualquier $r > 0$,

$$C^{-1}B_r \subset B_{\delta r}. \tag{4.1}$$

Sea $r > 0$, la inclusión (4.1) implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\mid (CE)^c \bigcap B_r \mid_n}{\mid B_r \mid_n} &= \frac{\mid C(E^c \bigcap C^{-1}B_r) \mid_n}{\mid B_r \mid_n} \\
&= \frac{\mid E^c \bigcap C^{-1}B_r \mid_n}{\mid C^{-1}B_r \mid_n} \leq \frac{\mid E^c \bigcap B_{\delta r} \mid_n}{\mid B_{\delta r} \mid_n} \frac{\mid B_{\delta r} \mid_n}{\mid C^{-1}B_r \mid_n} \\
&= d_C \delta^n \frac{\mid E^c \bigcap B_{\delta r} \mid_n}{\mid B_{\delta r} \mid_n} \longrightarrow 0 \text{ cuando } r \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

donde el último límite se cumple porque δ y d_C dependen únicamente de C y el origen es un punto de densidad de E.

$\Longleftarrow$) La condición suficiente se demuestra análogamente. □

4.1.1. Ejemplos de aplicaciones para las que hay equivalencia entre densidad y A-densidad

Daremos ejemplos de aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ para las que el concepto de punto de densidad coincide con el concepto de punto de A-densidad, es decir, tenemos que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.

Lema 4.3. *Sea $A \in \mathcal{L}$ tal que $AB_1 = B_R$, $R > 1$. Entonces $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$.*

Demostración. En primer lugar, observamos que por las hipótesis del lema, dado $j \in \mathbf{Z}$, tenemos que $A^jB_1 = B_{R^j}$, $R > 1$. Así, probar que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_A$ es trivial.

Probemos ahora que $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}$. Sea un conjunto $E \in \mathcal{D}_A$. Tenemos que demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \mid r \mid < \delta \text{ entonces, } \frac{\mid E^c \bigcap B_r \mid_n}{\mid B_r \mid_n} < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $E \in \mathcal{D}_A$, $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces

$$\frac{\mid E^c \bigcap A^{-j}B_1 \mid_n}{\mid A^{-j}B_1 \mid_n} < \varepsilon d_A^{-1}. \tag{4.3}$$

Nuestro objetivo es probar que para $\delta = R^{-j_0}$ se cumple la condición (4.2).

Sea $0 < r < \delta = R^{-j_0}$, como $AB_1 = B_R$, $R > 1$, $\exists j_r \geq j_0$ tal que $A^{-j_r-1}B_1 \subsetneq B_r \subseteq A^{-j_r}B_1$. Hallamos

$$\begin{aligned}
\frac{\mid E^c \bigcap B_r \mid_n}{\mid B_r \mid_n} &\leq \frac{\mid E^c \bigcap A^{-j_r}B_1 \mid_n}{\mid A^{-j_r}B_1 \mid_n} \frac{\mid A^{-j_r}B_1 \mid_n}{\mid B_r \mid_n} \\
&\leq \frac{\mid E^c \bigcap A^{-j_r}B_1 \mid_n}{\mid A^{-j_r}B_1 \mid_n} \frac{\mid A^{-j_r}B_1 \mid_n}{\mid A^{-j_r-1}B_1 \mid_n} = \frac{d_A \mid E^c \bigcap A^{-j_r}B_1 \mid_n}{\mid A^{-j_r}B_1 \mid_n},
\end{aligned}$$

y finalmente, desde (4.3) podemos asegurar que se verifica la expresión (4.2). □

A continuación, mostraremos algunos ejemplos de aplicaciones lineales, A, para las que $AB_1 = B_R$, $R > 1$.

Ejemplo 6. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$ tal que $Ax = ax$, donde $a \in \mathbf{R}$ y $\mid a \mid > 1$. Entonces, $AB_1 = B_{|a|}$.

Ejemplo 7. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid = \mid \lambda_i \mid,\ \forall i \in \{1, ...n\}.$$

Entonces $AB_1 = B_{|\lambda_1|}$.

Ejemplo 8. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ la aplicación lineal $A : \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}^{2n}$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_n & \beta_n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{pmatrix},$$

donde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$, $1 < \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2$, $\forall i \in \{1, ...n\}$.

Es fácil comprobar que $AB_1 = B_{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}$.

Ejemplo 9. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{R},\ 1 < \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2.$$

Entonces $AB_1 = B_{|\lambda|}$.

Ejemplo 10. Si consideramos la descomposición polar de la aplicación lineal $A \in \mathcal{LE}$ y tenemos que todos los autovalores λ_i del operador positivo $\sqrt{A^*A}$ son iguales y mayores que uno, entonces $AB_1 = B_{\lambda_1}$.

4.1.2. Ejemplos de aplicaciones A y de conjuntos E en los que $E \in \mathcal{D}_A$ pero $E \notin \mathcal{D}$

Veremos algunos casos particulares de aplicaciones $A \in \mathcal{LE}$ y de conjuntos medibles $E \in \mathbf{R}^n$ para los que el origen es un punto de A-densidad de E pero no es un punto de densidad de E.

Comencemos con algunos ejemplos donde tendremos $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$.

Ejemplo 11. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ cuya matriz asociada es la siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid < \mid \lambda_2 \mid. \tag{4.4}$$

Definimos el conjunto

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \mid x_1 \mid \geq \mid x_2 \mid\}.$$

Como para cualquier $r > 0$,

$$\frac{\mid E \bigcap Q_r \mid_2}{\mid Q_r \mid_2} = \frac{1}{2},$$

el origen no es un punto de densidad del conjunto E.

Afirmamos que $E \in \mathcal{D}_A$. Para comprobar nuestra afirmación observamos que la imagen de la recta $y = x$ por la aplicación A es la recta $y = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}x$. Por lo tanto,

$$\lim_{j\to\infty} \mid A^j E^c \bigcap Q_1 \mid_2 = 2 \lim_{j\to\infty} (\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^j = 0,$$

ya que $1 <\mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid$. Desde aquí, la Proposición B.3 (iv) y la Proposición B.7 nos dicen que $E \in \mathcal{D}_A$.

Ahora, veamos algunos ejemplos en $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.

Ejemplo 12. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ cuya matriz asociada es la siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_i \mid,\ i = 1, ...n,\ \mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid.$$

Sea el conjunto

$$E = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ \mid x_1 \mid\geq\mid x_2 \mid\}.$$

Como para cualquier $r > 0$,

$$\frac{\mid E \bigcap Q_r \mid_n}{\mid Q_r \mid_n} = \frac{1}{2},$$

el origen no es un punto de densidad del conjunto E. Pero, por otra parte, podemos asegurar que $E \in \mathcal{D}_A$ ya que el Lema B.11 nos dice que

$$E \in \mathcal{D}_A \iff F \in \mathcal{D}_M$$

donde $F \subset \mathbf{R}^2$ es el siguiente conjunto

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \mid x_1 \mid\geq\mid x_2 \mid\}$$

y $M : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ es la aplicación lineal con la siguiente matriz asociada,

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente, el Ejemplo 11 nos dice que $F \in \mathcal{D}_M$, con lo que podemos concluir que $E \in \mathcal{D}_A$.

Veamos a continuación otra serie de ejemplos que van a tener gran importancia a lo largo de este texto.

Ejemplo 13. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ cuya matriz asociada es la siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{R}$, ý $1 < \alpha_1^2 + \beta_1^2 < \alpha_2^2 + \beta_2^2$.

Dado $\delta > 0$, definimos el conjunto

$$E_\delta = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \;:\; x_3^2 + x_4^2 \leq \delta^2(x_1^2 + x_2^2)\}.$$

Afirmamos que $E_\delta \notin \mathcal{D}$ y que $E_\delta \in \mathcal{D}_A$.

Veamos que $E_\delta \notin \mathcal{D}$. Según el Lema 4.3, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_M$ donde $M : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ es la aplicación lineal tal que $M\mathbf{x} = 2\mathbf{x} = (2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4)$.

Es fácil ver que $| B_1 \bigcap E_\delta |_4 < | B_1 |_4$ y que $ME_\delta = E_\delta$. Así, se cumplen las condiciones de la Proposición B.9 y por lo tanto, $E \notin \mathcal{D}_M$. De esta manera, concluimos que $E \notin \mathcal{D}$.

Nos falta ver que $E_\delta \in \mathcal{D}_A$. No es difícil observar que $\lim_{\delta \longrightarrow \infty} \chi_{B_1 \bigcap E_\delta}(\mathbf{x}) = \chi_{B_1}(\mathbf{x})$ para c.t. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$, entonces, el teorema de la convergencia dominada nos dice que

$$\lim_{\delta \longrightarrow \infty} | B_1 \bigcap E_\delta |_4 = | B_1 |_4 .$$

Veamos además, que dado $\delta > 0$ tenemos que $E_{a\delta} \subset AE_\delta$, donde $a = (\frac{\alpha_2^2+\beta_2^2}{\alpha_1^2+\beta_1^2})^{\frac{1}{2}}$. Podemos escribir AE_δ de la siguiente manera.

$$AE_\delta = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 \\ -\beta_1 x_1 + \alpha_1 x_2 \\ \alpha_2 x_3 + \beta_2 x_4 \\ -\beta_2 x_3 + \beta_2 x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;:\; x_3^2 + x_4^2 \leq \delta^2(x_1^2 + x_2^2)\}.$$

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E_{a\delta}$, tal que $y_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$, $y_2 = -\beta_1 x_1 + \alpha_1 x_2$, $y_3 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 x_4$ e $y_4 = -\beta_2 x_3 + \beta_2 x_4$, donde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$. Observar que el sistema tiene solución. Así, tenemos que

$$(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(x_3^2 + x_4^2) \leq (\frac{\alpha_2^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2})\delta^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad x_3^2 + x_4^2 \leq \delta^2(x_1^2 + x_2^2),$$

y por lo tanto $\mathbf{y} \in AE_\delta$.

Si ahora iteramos el proceso anterior y juntamos todos los pasos anteriores, obtenemos que

$$| B_1 |_n \geq \lim_{j \longrightarrow \infty} | B_1 \bigcap A^j E_\delta |_n \geq \lim_{j \longrightarrow \infty} | B_1 \bigcap E_{a^j\delta} |_n = | B_1 |_n,$$

donde la última igualdad es cierta ya que $a > 1$. Finalmente, desde la Proposición B.7, $E_\delta \in \mathcal{D}_A$.

Ejemplo 14. De manera análoga al ejemplo anterior podemos probar que dada $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ cuya matriz asociada es la siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{R},\, 1 < \alpha^2 + \beta^2 \neq \lambda^2,$$

existen conjuntos $E \subset \mathbf{R}^3$ tal que $E \in \mathcal{D}_A$ y $E \notin \mathcal{D}$.

Ejemplo 15. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ cuya matriz asociada es la siguiente,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda \mid.$$

Sea el conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ tal que

$$E^c = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \lambda x_{n-1} \geq 0,\ x_n \geq 0\}.$$

Es fácil ver que este conjunto E no pertenece a $\mathcal{D}$. Veamos ahora que $E \in \mathcal{D}_A$.

Observar que podemos escribir la matriz $A = D + N$ donde D es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal igual a λ y N es una matriz subdiagonal superior con todos los elementos por encima de la diagonal principal iguales a 1. De esta manera, como la matriz diagonal D conmuta con cualquier otra matriz, dado $j \in \mathbf{N}$, tenemos que $A^j = \sum_{l=0}^{j} \frac{j!}{l!(j-l)!} D^{j-l} N^l$.

Así, si $j \geq n-1$,

$$A^j = \begin{pmatrix} \lambda^j & j\lambda^{j-1} & \frac{j!}{2!(j-2)!}\lambda^{j-2} & .. & ... & .. & .. & \frac{j!}{(n-1)!(j-n+1)!}\lambda^{j-n+1} \\ 0 & \lambda^j & j\lambda^{j-1} & \frac{j!}{2!(j-2)!}\lambda^{j-2} & ... & .. & .. & \frac{j!}{(n-2)!(j-n+2)!}\lambda^{j-n+2} \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda^j & j\lambda^{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda^j \end{pmatrix}.$$

Si fijamos $j \in \mathbf{N}$, $j \geq n-1$,

$$\begin{aligned} A^j E^c &= \{(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{j!}{l!(j-l)!}\lambda^{j-l} x_{l+1}, ..., \lambda^j x_{n-1} + j\lambda^{j-1} x_n, \lambda^j x_n) \in \mathbf{R}^n \\ &\quad : \ \lambda x_{n-1} \geq 0,\ x_n \geq 0\}, \end{aligned}$$

y si denotamos $y_i = \sum_{l=0}^{n-i} \frac{j!}{l!(j-l)!}\lambda^{j-l} x_{l+i}$, $i = 1, ..., n$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mid y_{n-1} \mid &= \mid \lambda^{j-1}(\lambda x_{n-1} + j x_n) \mid = \mid \lambda^{j-1} \mid\mid \lambda x_{n-1} + j x_n \mid \\ &\geq \mid \lambda^{j-1} \mid\mid j x_n \mid = \frac{j}{\mid \lambda \mid} \mid y_n \mid, \end{aligned}$$

donde la desigualdad es cierta porque $\lambda x_{n-1} \geq 0$, $x_n \geq 0$. De esta manera hemos probado que dado $j \in \mathbf{N}$, $j \geq n-1$,

$$A^j E^c \subset F_j := \{(y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n : \mid y_n \mid \leq \frac{\mid \lambda \mid}{j} \mid y_{n-1} \mid\}.$$

Para concluir la demostración hallamos

$$\begin{aligned} \limsup_{j \longrightarrow \infty} \mid A^j E^c \bigcap Q_1 \mid_n &\leq \limsup_{j \longrightarrow \infty} \mid F_j \bigcap Q_1 \mid_n \\ &= \limsup_{j \longrightarrow \infty} 2^{n-2} \int_{-1}^{1} \int_{-\frac{|\lambda|}{j}|y_{n-1}|}^{\frac{|\lambda|}{j}|y_{n-1}|} dy_n dy_{n-1} \\ &= \lim_{j \longrightarrow \infty} 2^{n-1} \int_{-1}^{1} \frac{\mid \lambda \mid}{j} \mid y_{n-1} \mid dy_{n-1} \\ &= \lim_{j \longrightarrow \infty} 2^{n-1} \frac{\mid \lambda \mid}{j} = 0, \end{aligned}$$

con lo que, finalmente, la condición (iv) de la Proposición B.3 y la Proposición B.7 nos dicen que $E \in \mathcal{D}_A$.

Ejemplo 16. Sea $A : \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}^{2n}$ una aplicación lineal con la siguiente matriz asociada,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $1 < \alpha^2 + \beta^2$. Para simplificar la notación, podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} M & I & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M & I & ... & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} & M & I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} & \mathbf{0} & M \end{pmatrix},$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribiremos los vectores en $\mathbf{R}^{2n}$ con la siguiente estructura $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)$ donde $\mathbf{x}_i = (x_{2i-1}, x_{2i})$, $i = 1, ..., n$.

Sea el conjunto $E \subset \mathbf{R}^{2n}$ tal que

$$E^c = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathbf{R}^{2n} \ : \ M\mathbf{x}_{n-1} \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}\},$$

donde las desigualdades para los vectores las entenderemos como desigualdades para cada una de sus componentes. Afirmamos que $E \in \mathcal{D}_A$ pero $E \notin \mathcal{D}$.

Como la aplicación M es composición de una rotación y una dilatación, entonces, para cualquier $r > 0$, la proporción

$$\frac{| E^c \bigcap B_r |_n}{| B_r |_n}$$

es una constante, con lo que $E \notin \mathcal{D}$.

Veamos ahora que $E \in \mathcal{D}_A$. Para ello, primero se comprueba por inducción que para cada $j \in \mathbf{N}$, $j \geq n-1$,

$$A^j = \begin{pmatrix} M^j & jM^{j-1} & \frac{j!}{2!(j-2)!}M^{j-2} & .. & ... & .. & .. & \frac{j!}{(n-1)!(j-n+1)!}M^{j-n+1} \\ 0 & M^j & jM^{j-1} & \frac{j!}{2!(j-2)!}M^{j-2} & ... & .. & .. & \frac{j!}{(n-2)!(j-n+2)!}M^{j-n+2} \\ .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & M^j & jM^{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & M^j \end{pmatrix}.$$

Entonces dado $j \in \mathbf{N}$, $j \geq n-1$,

$$\begin{aligned} A^j E^c \;\; = \;\; & \{(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{j!}{l!(j-l)!} M^{j-l}\mathbf{x}_{l+1}, ..., M^j\mathbf{x}_{n-1} + jM^{j-1}\mathbf{x}_n, M^j\mathbf{x}_n) \in \mathbf{R}^{2n} \\ & : \ M\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n \geq 0\}, \end{aligned}$$

y si denotamos $\mathbf{y}_i = \sum_{l=0}^{n-i} \frac{j!}{l!(j-l)!} M^{j-l}\mathbf{x}_{l+i}$, $i = 1, ..., n$, tenemos que

$$\begin{aligned}\| \mathbf{y}_{n-1} \| &= \| M^{j-1}(M\mathbf{x}_{n-1} + j\mathbf{x}_n) \| \\ &= (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{j-1}{2}} \| M\mathbf{x}_{n-1} + j\mathbf{x}_n \| \geq j(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{j-1}{2}} \| \mathbf{x}_n \| \\ &= j(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{-1}{2}} \| M^j\mathbf{x}_n \| = j(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{-1}{2}} \| \mathbf{y}_n \|,\end{aligned}$$

donde la desigualdad es cierta porque $M\mathbf{x}_{n-1} \geq \mathbf{0}$, ý $\mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}$. Con lo que hemos probado que dado $j \in \mathbf{N}$,

$$A^jE^c \subset F_j := \{(\mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \ : \ \| \mathbf{y}_n \| \leq (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{j} \| \mathbf{y}_{n-1} \|\}.$$

Para concluir la demostración, hallamos

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} | A^jE^c \bigcap B_1 |_n \leq \limsup_{j\longrightarrow\infty} | F_j \bigcap B_1 |_n$$

$$\leq C \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_{\|\mathbf{y}_{n-1}\|\leq 1} \int_{\|\mathbf{y}_n\|\leq(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{j}\|\mathbf{y}_{n-1}\|} d\mathbf{y}_n d\mathbf{y}_{n-1} = 0,$$

donde C es alguna constante positiva, con lo que finalmente, la Proposición B.3 (iv) y la Proposición B.7 nos dice que $E \in \mathcal{D}_A$.

4.1.3. Ejemplos de aplicaciones A y de conjuntos E en los que $E \in \mathcal{D}$ pero $E \notin \mathcal{D}_A$

En el apartado anterior hemos visto unos cuantos ejemplos de aplicaciones lineales $A \in \mathcal{LE}$ y de conjunto medibles $E \subset \mathbf{R}^n$ para los que el origen es un punto de A-densidad de E pero no es un punto de densidad de E. En este apartado nos proponemos mostrar algunos ejemplos del caso contrario, es decir, veremos aplicaciones $A \in \mathcal{LE}$ para las cuales existen conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^n$ tales que el origen es un punto de densidad de E pero no es un punto de A-densidad de E.

Ejemplo 17. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4). Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el siguiente conjunto,

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ | x_2 | \geq | x_1 |^{\alpha_A} \text{ donde } \alpha_A = \frac{\log | \lambda_2 |}{\log | \lambda_1 |}\}.$$

Afirmamos que el conjunto $E \in \mathcal{D}$ y que $E \notin \mathcal{D}_A$.

Para ver que $E \notin \mathcal{D}_A$ es suficiente con comprobar que se cumplen las hipótesis de la Proposición B.9. Como

$$| E^c \bigcap Q_1 |_2 = 4\int_0^1 x_1^{\alpha_A} dx_1 = \frac{4}{\alpha_A + 1} > 0,$$

entonces

$$| E \bigcap Q_1 |_2 < | Q_1 |_2 .$$

Ahora nos falta comprobar que $AE = E$. Primero comprobaremos la inclusión $AE \subset E$. Dado $(x_1, x_2) \in E$,

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix},$$

y como $(x_1, x_2) \in E$ con $\alpha_A = \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}$, obtenemos que

$$| \lambda_2 x_2 | = | \lambda_1 |^{\alpha_A} | x_2 | \geq | \lambda_1 x_1 |^{\alpha_A},$$

con lo que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E.$$

Además, tenemos que ver que $E \subset AE$. Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in E$, entonces $\mathbf{y} \in AE \Longleftrightarrow A^{-1}\mathbf{y} \in E$. Hallamos

$$A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} y_1 \\ \frac{1}{\lambda_2} y_2 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

y como $\alpha_A = \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}$ tenemos que

$$| \frac{1}{\lambda_2} y_2 | = | \frac{1}{\lambda_1} |^{\alpha_A} | y_2 | \geq | \frac{1}{\lambda_1} y_1 |^{\alpha_A},$$

y por lo tanto

$$A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in E.$$

De esta manera concluimos la demostración de nuestra primera afirmación.

A continuación probaremos que el origen es un punto de densidad del conjunto E. Para ello, dado $r > 0$ estimamos

$$| E^c \bigcap Q_r |_2 \leq 4 \int_0^r x_1^{\alpha_A} dx_1 = \frac{4r^{\alpha_A+1}}{\alpha_A + 1},$$

y a partir de aquí, como $\alpha_A > 1$ obtenemos que

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{| E^c \bigcap Q_r |_2}{| Q_r |_2} \leq \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{r^{\alpha_A - 1}}{\alpha_A + 1} = 0,$$

es decir, el origen es un punto de densidad del conjunto E.

Observación 4.4. Lo que hemos probado es que dado $\alpha > 1$, entonces $E_\alpha \in \mathcal{D}$, donde E_α es el siguente conjunto,

$$E_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ | x_2 | \geq | x_1 |^\alpha\}.$$

Veamos un ejemplo en $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.

Ejemplo 18. Sea una aplicación lineal, $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ que tiene la siguiente matriz asociada,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbf{R},\ 1 <| \lambda_i |,\ i = 1, ...n,\ | \lambda_1 |<| \lambda_2 |.$$

Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ el siguiente conjunto

$$E = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ | x_2 | \geq | x_1 |^{\alpha_A} \text{ donde } \alpha_A = \frac{\log | \lambda_2 |}{\log | \lambda_1 |}\}.$$

De manera análoga al Ejemplo 17 podemos ver que $E \in \mathcal{D}$

Veamos ahora que $E \notin \mathcal{D}_A$. El Lema B.11 nos dice que

$$E \in \mathcal{D}_A \iff F \in \mathcal{D}_M$$

donde $F \subset \mathbf{R}^2$ es el siguiente conjunto

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \mid x_2 \mid \geq \mid x_1 \mid^{\alpha_A}, \text{donde } \alpha_A = \frac{\log \mid \lambda_2 \mid}{\log \mid \lambda_1 \mid}\}.$$

y $M : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ es la aplicación lineal con la siguiente matriz asociada,

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente, el Ejemplo 17 nos dice que $F \notin \mathcal{D}_M$, con lo que $E \notin \mathcal{D}_A$.

4.1.4. Caracterización de las aplicaciones lineales A para las que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$

Ya estamos en disposición de dar la solución al **Problema 1**.

Teorema 4.5. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Entonces $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$ si y solo A es isotrópica, es decir, A es diagonalizable y todos sus autovalores (complejos) tienen el mismo módulo.*

Demostración. Dada $A \in \mathcal{LE}$, sabemos que la matriz asociada a la aplicación A es semejante a alguna matriz de la descomposición canónica de Jordan, es decir existe una matriz $n \times n$, C, con $d_C > 0$ tal que $A = CJC^{-1}$, donde J es una matriz $n \times n$ formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan (ver Apéndice A). El Lema B.13 nos dice que $\mathcal{D}_A = C\mathcal{D}_J$, y además, como por la Proposición 4.2 tenemos que si $\mathcal{D}_J \neq \mathcal{D}$ entonces $C\mathcal{D}_J \neq \mathcal{D}$, para la demostración del teorema es suficiente con probar que dada $J \in \mathcal{LE}$ tal que su matriz asociada está formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan, entonces $\mathcal{D}_J = \mathcal{D}$ si y solo si J es una matriz diagonal tal que todos sus elementos de la diagonal (reales o complejos) tienen el mismo módulo. Recordamos que como $J \in \mathcal{LE}$, entonces el módulo de cada elemento en la diagonal será mayor que 1 (ver Apéndice A).

Empezemos estudiando los posibles casos de matrices J que tenemos.

Si J es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal (reales o complejos) que tienen el mismo módulo R mayor que 1, entonces $JB_1 = B_R$, desde aquí el Lema 4.3 nos dice que $\mathcal{D}_J = \mathcal{D}$.

Por otro lado, si tenemos que J está compuesta por una de las matrices elementales de Jordan, $J_m(\mu)$, que corresponde al autovalor μ y que tiene orden $m \geq 2$, tenemos dos subcasos.

Si μ es real, el Lema B.11 y el Ejemplo 15 nos dicen que $\mathcal{D}_J \neq \mathcal{D}$. Y si μ es complejo, el Lema B.11 y el Ejemplo 16, que trata la forma real de Jordan con autovalores complejos (ver Apéndice A), también nos dicen que $\mathcal{D}_J \neq \mathcal{D}$.

El último caso es si J es una matriz diagonal con al menos dos de sus elementos en la diagonal (reales o complejos) que tienen diferentes módulos. Aquí, volvemos a distiguir tres subcasos. Si estos elementos en la diagonal son reales, el Lema B.11 y el Ejemplo 12 nos dicen que $\mathcal{D}_J \neq \mathcal{D}$. Si los elementos en la diagonal a los que nos referimos son complejos, el Lema B.11 y Ejemplo 13, que trata la forma real de Jordan con autovalores complejos, también nos dicen que $\mathcal{D}_J \neq \mathcal{D}$. Finalmente, si uno de los elementos de la diagonal es real y otro complejo, el Lema B.11 y el Ejemplo 14 nos dicen que $\mathcal{D} \neq D_A$. □

4.2. Equivalencia entre A-densidades de $\mathbf{R}^2$

En esta sección daremos una solución al **Problema 2** cuando las aplicaciones lineales expansivas A_1 y A_2 estén definidas en $\mathbf{R}^2$. Para ello, al igual que pasaba en la resolución del Problema 1, será de gran importancia estudiar qué ocurre con las aplicaciones lineales que tienen como matriz asociada las diferentes matrices elementales de Jordan que nos podemos encontrar. Los resultados se han obtenido en un trabajo conjunto con el profesor P. Oswald.

Empecemos viendo algunos casos particulares.

4.2.1. Ejemplos

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar algunos ejemplos concretos de aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ y de conjuntos medibles $E \subset \mathbf{R}^2$ para los que tendremos que $E \in \mathcal{D}_A$ o que $E \notin \mathcal{D}_A$.

Ejemplo 19. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4) y sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el conjunto tal que

$$E^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \geq -bx_1,\ x_2 \geq ax_1 \text{ con } a, b > 0\}.$$

Veamos que $E \in \mathcal{D}_A$. Como la imagen de una recta que pase por el origen $y = cx$ con $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ por la aplicación A es la recta $y = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} cx$, tenemos que

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \mid A^j E^c \bigcap Q_1 \mid_2 = \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{|\lambda_1|^j}{|\lambda_2|^j} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 0,$$

ya que $\mid \lambda_1 \mid < \mid \lambda_2 \mid$. De esta manera, la condición (iv) de la Proposición B.3 y la Proposición B.7 nos dicen que $E \in \mathcal{D}_A$.

De forma análoga podemos afirmar que $G \in \mathcal{D}_A$ donde $G = -E$.

Ejemplo 20. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4) y sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el conjunto tal que

$$E^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \geq 0,\ x_2 \leq ax_1 \text{ con } a > 0\}.$$

Vamos a comprobar que $E \notin \mathcal{D}_A$.

Empezamos observando que como $\mid \lambda_1 \mid < \mid \lambda_2 \mid$, existe $j_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\forall j \geq j_0$ tenemos que $0 < \frac{|\lambda_1|^j}{|\lambda_2|^j} < a$.

Sea $j \geq j_0$, hallamos

$$\mid E^c \bigcap A^{-j} Q_1 \mid_2 = \frac{1}{\mid \lambda_1 \mid^j \mid \lambda_2 \mid^j} - \frac{1}{2a \mid \lambda_2 \mid^{2j}},$$

entonces, como $0 < \frac{|\lambda_1|^j}{|\lambda_2|^j} < a$, obtenemos que

$$\frac{\mid E^c \bigcap A^{-j} Q_1 \mid_2}{\mid A^{-j} Q_1 \mid_2} = \frac{1}{4} - \frac{\mid \lambda_1 \mid^j}{8a \mid \lambda_2 \mid^j} \geq \frac{1}{8},$$

con lo que desde la Proposición B.7 podemos concluir que el origen no es un punto de $A-$densidad de E.

De una manera análoga a la del ejemplo anterior podemos comprobar que el siguiente ejemplo es cierto.

Ejemplo 21. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4). Sean los siguientes conjuntos $E_1, E_2, E_3 \subset \mathbf{R}^2$ tales que

$$
\begin{aligned}
E_1^c &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \leq 0, \ x_2 \geq -ax_1 \text{ con } a > 0\}, \\
E_2^c &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \leq 0, \ x_2 \geq ax_1 \text{ con } a > 0\}, \\
E_3^c &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \geq 0, \ x_2 \leq -ax_1 \text{ con } a > 0\}.
\end{aligned}
$$

Entonces $E_1, E_2, E_3 \notin \mathcal{D}_A$.

Lema 4.6. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4). Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto tal que E^c es un cono con vértice en el origen. Entonces $E \in \mathcal{D}_A$ si y solo si la recta $x_2 = 0$, excepto quizás el origen, está contenida en el interior de E.*

Demostración. Veamos la condición suficiente. De acuerdo con nuestra hipótesis, existe un conjunto $G \subset \mathbf{R}^2$, donde

$$G^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \geq -bx_1, \ x_2 \geq ax_1, \ \text{con } a, b > 0\}$$

y tal que $E^c \subset G^c$ o $E^c \subset -G^c$. Entonces, para cualquiera de los dos casos anteriores, la Proposición B.2 y el Ejemplo 19 nos dicen que el origen es un punto de $A-$densidad de E.

Haremos la demostración de la condición suficiente por reducción al absurdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe un punto $(p, 0) \in \mathbf{R}^2$, $p > 0$, tal que no pertenece al interior de E, entonces la semirrecta $\{(x_1, 0) \ : \ x_1 \geq 0\}$ no pertenece, excepto quizás el origen, a la clausura de E^c. De esta manera, existe un conjunto $G \subset \mathbf{R}^2$, donde

$$G^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \geq 0, \ x_2 \leq ax_1 \text{ con } a > 0\},$$

y tal que $E \subset G$ o $E \subset -G$. Entonces, para cualesquiera de los dos casos anteriores, desde la Proposición B.2 y el Ejemplo 20 podemos concluir que el origen no es un punto de $A-$densidad de E. $\square$

Ejemplo 22. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4). Dado $\alpha > \alpha_A = \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}$ definimos el conjunto

$$E_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \mid x_2 \mid \geq \mid x_1 \mid^\alpha\}.$$

Afirmamos que $E_\alpha \in \mathcal{D}_A$ ya que como la imagen de la curva $x_2 = x_1^\alpha$ por la aplicación A es la curva $x_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^\alpha} x_1^\alpha$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{j \to \infty} \mid A^j E_\alpha^c \bigcap Q_1 \mid_2 &= 4 \lim_{j \to \infty} \int_0^1 \frac{\mid \lambda_2 \mid^j}{\mid \lambda_1 \mid^{j\alpha}} x_1^\alpha dx_1 \\
&= \lim_{j \to \infty} \frac{\mid \lambda_2 \mid^j}{\mid \lambda_1 \mid^{j\alpha}} \frac{1}{(\alpha + 1)} = 0,
\end{aligned}
$$

ya que $\mid \lambda_2 \mid = \mid \lambda_1 \mid^{\alpha_A} < \mid \lambda_1 \mid^\alpha$. De esta manera, la condición (iv) de la Proposición B.3 y la Proposición B.7 nos dicen que $E_\alpha \in \mathcal{D}_A$.

Ejemplo 23. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.4). Dado $0 < \alpha < \alpha_A = \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}$ definimos el conjunto

$$E_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \;:\; \mid x_2 \mid \leq \mid x_1 \mid^\alpha\}.$$

Vamos a demostrar que $E_\alpha \in \mathcal{D}_A$. Para ello hallamos el siguiente límite,

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \mid A^j E_\alpha^c \bigcap Q_1 \mid_2 &= 4 \lim_{j\to\infty} \int_0^1 \frac{\mid \lambda_1 \mid^{j\alpha}}{\mid \lambda_2 \mid^j} x_2^{(\alpha)^{-1}} dx_2 \\ &= \lim_{j\to\infty} \frac{\mid \lambda_1 \mid^{j\alpha}}{\mid \lambda_2 \mid^j} \frac{1}{(\frac{1}{\alpha}+1)} = 0, \end{aligned}$$

ya que $\mid \lambda_2 \mid > \mid \lambda_1 \mid^\alpha$. De esta manera, la Proposición B.3 (iv) y la Proposición B.7 nos dicen que $E_\alpha \in \mathcal{D}_A$.

Ahora veremos algunos resultados que se pueden extraer directamente desde los dos ejemplos anteriores.

Lema 4.7. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ que tiene matriz asociada*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid, \mid \lambda_2 \mid. \tag{4.6}$$

Dado $\alpha > 0$ tomamos el conjunto $E_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ que viene dado por la siguiente expresión,

$$E_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } \mid x_2 \mid \geq \mid x_1 \mid^\alpha\}.$$

Entonces $E_\alpha \in \mathcal{D}_A$ si y solo si $\alpha > \alpha_A = \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}$.

Demostración. Distinguimos dos posibles casos. Si $\mid \lambda_1 \mid = \mid \lambda_2 \mid$, el Teorema 4.5 nos dice que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$ y desde la Observación 4.4 podemos afirmar que $E_\alpha \in \mathcal{D}$ si $\alpha > 1$. Por otro lado, si $\alpha \leq 1$, es fácil ver que $E_\alpha \subset E_1$, y como $E_1 \notin \mathcal{D}$, la Proposición B.2 nos dice que $E_\alpha \notin \mathcal{D}$.

Por otro lado, si $\mid \lambda_1 \mid \neq \mid \lambda_2 \mid$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $1 <\mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid$, entonces el resultado se obtiene a partir del Ejemplo 17, del Ejemplo 22 y del Ejemplo 23. $\square$

De manera análoga al anterior lema, podemos probar lo siguiente.

Lema 4.8. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ que tiene matriz asociada*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid, \mid \lambda_2 \mid. \tag{4.7}$$

Dado $\alpha > 0$ tomamos el conjunto $E_\alpha \subset \mathbf{R}^2$, que viene dado por la siguiente expresión,

$$E_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } \mid x_2 \mid \geq \mid x_1 \mid^\alpha\}.$$

Entonces $E_\alpha^c \in \mathcal{D}_A$ si y solo si $\alpha < \alpha_A = \frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|}$.

Ejemplo 24. Sea la aplicación lineal $A_{\lambda,a} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ con la siguiente matriz asociada,

$$A_{\lambda,a} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},\ 1 < \lambda,\ \ 0 < a. \tag{4.8}$$

Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el conjunto tal que

$$E^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \geq 0, x_2 \geq -bx_1, \text{ con } b > 0\}.$$

Probemos que $E \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,a}}$. Primero, por inducción vemos que, dado $j \in \mathbf{Z}$

$$A^j_{\lambda,a} = \begin{pmatrix} \lambda^j & ja\lambda^{j-1} \\ 0 & \lambda^j \end{pmatrix}.$$

Así, si tomamos $j \in \mathbf{N}$ tal que $abj > \lambda$, tenemos que la imagen de la recta $x_2 = -bx_1$ por la aplicación $A^j_{\lambda,a}$ es la recta $x_2 = \frac{-\lambda b}{\lambda - jab} x_1$, y además, la recta $x_2 = 0$ es invariante por $A^j_{\lambda,a}$. De esta manera,

$$\lim_{j\to\infty} | A^j E^c \bigcap Q_1 |_2 = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2} \frac{-\lambda b}{\lambda - jab} = 0.$$

Desde aquí, la condición (iv) de la Proposición B.3 y la Proposición B.7 nos dicen que $E \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,a}}$.

Observación 4.9. De forma análoga, podemos afirmar que el origen es un punto de $A_{\lambda,a}-$densidad de $G \subset \mathbf{R}^2$ donde $G = -E$.

Ejemplo 25. Sea $A_{\lambda,a} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.8). Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el conjunto tal que

$$E^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \leq -bx_1, x_2 \geq 0 \text{ con } b > 0\}.$$

De manera análoga al ejemplo anterior, tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} | A^j E^c \bigcap Q_1 |_2 = \frac{1}{2} | Q_1 |_2 .$$

Así, el origen no es un punto de $A_{\lambda,a}$-densidad del conjunto E.

Observación 4.10. De forma análoga, podemos afirmar que el origen no es un punto de $A_{\lambda,a}-$densidad de $G \subset \mathbf{R}^2$ donde $G = -E$.

Ejemplo 26. Sea $A_{\lambda,a} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ como en (4.8).

Sea $E_{\lambda,a} \subset \mathbf{R}^2$ el conjunto construido a partir del triángulo

$$T = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_1 \in [0,1], \ -x_1 \leq x_2 \leq 1\}$$

como sigue:

$$\begin{aligned} E_{\lambda,a} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_2 \leq 0\} \\ &\bigcup_{l\in\mathbf{Z}} A^l_{\lambda,a} T. \end{aligned}$$

Afirmamos que $E_{\lambda,a} \notin \mathcal{D}_{A_{\lambda,a}}$ ya que como evidentemente $A_{\lambda,a}E_{\lambda,a} \subset E_{\lambda,a}$, tenemos que

$$| Q_1 \bigcap A^j_{\lambda,a} E_{\lambda,a} | \leq | Q_1 \bigcap E_{\lambda,a} | < | Q_1 |_2,$$

donde la última desigualdad es cierta por la manera en la que hemos construido el conjunto $E_{\lambda,a}$.

Aunque ya hallamos terminado el ejemplo, para facilitar los cálculos sucesivos, permitannos tomarme la licencia de escribir el conjunto $E_{\lambda,a}$ de forma explícita como sigue:

$$\begin{aligned} E_{\lambda,a} &= \{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2 \ : \ x_1\geq 0\}\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \ : \ x_2\leq 0\} \\ & \bigcup_{\substack{l\in\mathbf{Z}\\ l<\frac{\lambda}{a}}}\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \ : \ x_1\in[\varpi_{l,a},0], \frac{\lambda x_1}{-\lambda+la}\leq x_2\leq \lambda^l\}, \end{aligned}$$

donde

$$x_2=\frac{\lambda x_1}{-\lambda+la}$$

es la recta que pasa por los puntos

$$\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad A^l_{\lambda,a}\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda^l+ja\lambda^{l-1}\\ \lambda^l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varpi_{l,a}\\ \gamma_{l,a}\end{pmatrix},$$

con $\varpi_{l,a}=-\lambda^l+ja\lambda^{l-1}$ y con $\gamma_{l,a}=\lambda^l$.

Ejemplo 27. Sean $1<\lambda\leq\nu$ y sea $0<b<\frac{\nu}{\lambda}\frac{\log\nu}{\log\lambda}$. Sean $A_{\lambda,1},A_{\nu,b}\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ con las siguientes matrices asociadas respectivamente,

$$A_{\lambda,1}=\begin{pmatrix} \lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}, \qquad A_{\nu,b}=\begin{pmatrix} \nu & b\\ 0 & \nu\end{pmatrix}.$$

Afirmamos que el conjunto $E_{\lambda,1}\subset\mathbf{R}^n$ definido en el Ejemplo 26 satisface que $E_{\lambda,1}\in\mathcal{D}_{A_{\nu,b}}$.

Empezamos observando que dados $j_1,j_2\in\mathbf{N}$, tal que $j_1<j_2$, la pendiente de la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A^{-j_1}_{\lambda,1}\binom{-1}{1}$ es menor que la pendiente de la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A^{-j_2}_{\lambda,1}\binom{-1}{1}$.

Por otro lado, dado $j\in\mathbf{N}$, tenemos que

$$\nu^{-j}=\lambda^{-j\frac{\log\nu}{\log\lambda}}\leq\lambda^{-[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]}. \tag{4.9}$$

Además, como $0<b<\frac{\nu}{\lambda}\log_\lambda\nu$ y $1<\lambda\leq\nu$, entonces para cada $j\in\mathbf{N}$, tenemos que la pendiente de la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A^{-[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]}_{\lambda,1}\binom{-1}{1}$,

$$x_2=\frac{-\lambda x_1}{\lambda+[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]},$$

es mayor que la pendiente de la recta que pasa por $A^{-j}_{\nu,b}\binom{-1}{1}$ y por $A^{-j}_{\nu,b}\binom{-1}{-1}$,

$$x_2=\frac{-\nu}{jb}x_1-\frac{\nu}{jb\nu^j}.$$

Por estas tres razones anteriores, dado $j\in\mathbf{N}$ tenemos que

$$\mid E^c_{\lambda,1}\bigcap A^{-j}_{\nu,b}Q_1\mid_2\leq\mid T_j\mid_2, \tag{4.10}$$

donde T_j es el triángulo encerrado por las rectas $x_2=0$, la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A^{-[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]}_{\lambda,1}\binom{-1}{1}$, y la recta que pasa por $A^{-j}_{\nu,b}\binom{-1}{1}$ y por $A^{-j}_{\nu,b}\binom{-1}{-1}$, en otras palabras, T_j es el triángulo con vértices en

$$(0,0), \quad (\frac{-1}{\nu^j},0), \quad (-\frac{\lambda+[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]}{\nu^{j-1}(-jb\lambda+\lambda\nu+\nu[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}])},\frac{\lambda}{\nu^{j-1}(-jb\lambda+\lambda\nu+\nu[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}])}).$$

Así,

$$| T_j |_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\nu^j}\frac{\lambda}{\nu^{j-1}(-jb\lambda + \lambda\nu + \nu[j\frac{\log\nu}{\log\lambda}])},$$

y como $0 < b < \frac{\nu}{\lambda}\log_\lambda \nu$ con $1 < \lambda \leq \nu$, tenemos que $j(\nu\frac{\log\nu}{\log\lambda} - b\lambda) + \lambda\nu - \nu > 0$, entonces

$$| T_j |_2 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\nu^j}\frac{\lambda}{\nu^{j-1}(-jb\lambda + \lambda\nu + \nu(j\frac{\log\nu}{\log\lambda} - 1))} \tag{4.11}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\nu^j}\frac{\lambda}{\nu^{j-1}(j(\nu\frac{\log\nu}{\log\lambda} - b\lambda) + \lambda\nu - \nu)}. \tag{4.12}$$

Ahora, desde las desigualdades (4.10) y (4.12) podemos decir que

$$\begin{aligned}\limsup_{j\longrightarrow\infty}\frac{| E^c_{\lambda,1}\bigcap A^{-j}_{\nu,b}Q_1 |_2}{| A^{-j}_{\nu,b}Q_1 |_2} &\leq \limsup_{j\longrightarrow\infty}\frac{| T_j |_2}{4\nu^{-2j}} \\ &\leq \lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{\lambda\nu}{2\cdot 4(j(\nu\frac{\log\nu}{\log\lambda} - b\lambda) + \lambda\nu - \nu)},\end{aligned}$$

y como $0 < b < \frac{\nu}{\lambda}\log_\lambda \nu$ con $1 < \lambda \leq \nu$, entonces

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{| E^c_{\lambda,1}\bigcap A^{-j}_{\nu,b}Q_1 |_2}{| A^{-j}_{\nu,b}Q_1 |_2} = 0.$$

Desde aquí, la Proposición B.7 nos dice que $E_{\lambda,1} \in \mathcal{D}_{A_{\nu,b}}$.

Ejemplo 28. Sean $1 < \lambda \leq \nu$ y sea $\frac{\nu}{\lambda}\frac{\log\nu}{\log\lambda} < b$. Sean $A_{\lambda,1}, A_{\nu,b} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ con la siguientes matrices asociadas respectivamente,

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_{\nu,b} = \begin{pmatrix} \nu & b \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que el conjunto $E_{\nu,b}$ definido como en el Ejemplo 26 satisface que $E_{\nu,b} \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$.

De manera análoga al ejemplo anterior, empezamos observando que dados $j_1, j_2 \in \mathbf{N}$ tal que $j_1 < j_2$, la pendiente de la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A^{-j_1}_{\nu,b}\binom{-1}{1}$ es menor o igual que la pendiente de la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A^{-j_2}_{\nu,b}\binom{-1}{1}$.

Por otro lado, dado $j \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\lambda^{-j} \leq \nu^{-[\frac{j}{\log_\lambda \nu}]}. \tag{4.13}$$

Además, como $\frac{\nu}{\lambda}\frac{\log\nu}{\log\lambda} < b$ existe $j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces

$$j(\frac{\lambda b}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}} - \nu) + \lambda\nu - \lambda b > 0.$$

De esta manera, podemos afirmar que si $j \geq j_0$, la pendiente de la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A_{\nu,b}^{-[\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]}\binom{-1}{1}$,

$$x_2 = \frac{-\nu x_1}{\nu + [\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]b},$$

es mayor que la pendiente de la recta que pasa por $A_{\lambda,1}^{-j}\binom{-1}{1}$ y por $A_{\lambda,1}^{-j}\binom{-1}{-1}$,

$$x_2 = \frac{-\lambda}{j}x_1 - \frac{\lambda}{j\lambda^j}.$$

Por estas tres razones anteriores, dado $j \in \mathbf{N}$, $j \geq j_0$, tenemos que

$$\mid E_{\nu,b}^c \bigcap A_{\lambda,1}^{-j} Q_1 \mid_2 \leq \mid T_j \mid_2, \tag{4.14}$$

donde T_j es el triángulo encerrado por las rectas $x_2 = 0$, la recta que pasa por $\binom{0}{0}$ y por $A_{\nu,b}^{-[\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]}\binom{-1}{1}$ y la recta que pasa por $A_{\lambda,1}^{-j}\binom{-1}{1}$ y por $A_{\lambda,1}^{-j}\binom{-1}{-1}$, o lo que es lo mismo, T_j es el triángulo con vértices en

$$(0,0), \quad (\frac{-1}{\lambda^j}, 0), \quad (-\frac{\nu + [\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]b}{\lambda^{j-1}(-j\nu + \lambda\nu + \lambda[\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]b)}, \frac{\nu}{\lambda^{j-1}(-j\nu + \lambda\nu + \lambda[\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]b)}).$$

Así, si $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned}
\mid T_j \mid_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^j}\frac{\nu}{\lambda^{j-1}(-j\nu + \lambda\nu + \lambda[\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}}]b)} && (4.15)\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^j}\frac{\nu}{\lambda^{j-1}(-j\nu + \lambda\nu + \lambda b(\frac{j}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}} - 1)} && (4.16)\\
&= \frac{\nu}{2\lambda^{2j-1}(j(\frac{\lambda b}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}} - \nu) + \lambda\nu - \lambda b)}. && (4.17)
\end{aligned}$$

Ahora, desde las desigualdades (4.14) y (4.17) podemos decir que

$$\begin{aligned}
\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\mid E_{\nu,b}^c \bigcap A_{\lambda,1}^{-j} Q_1 \mid_2}{\mid A_{\lambda,1}^{-j} Q_1 \mid_2} &\leq \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\mid T_j \mid_2}{4\lambda^{-2j}}\\
&\leq \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\nu\lambda}{8(j(\frac{\lambda b}{\frac{\log\nu}{\log\lambda}} - \nu) + \lambda\nu - \lambda b)} = 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta ya que $\frac{\nu}{\lambda}\log_\lambda \nu < b$.

Desde aquí, la Proposición B.7 nos dice que podemos afirmar que $E_{\nu,b} \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$.

Ejemplo 29. Sean $1 < \lambda \leq \nu$, y sean $A, M \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ con las siguientes matrices asociadas respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \nu & \frac{\nu}{\lambda}\frac{\log\nu}{\log\lambda} \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_M$.

Primero probaremos que $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_M$. Para ello, según la Proposición B.10 es suficiente con comprobar que si tomamos $c \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ tal que

$$\text{mín}\{\lambda^{-c}(-\lambda - c), \lambda^{-c-1}(-\lambda - c - 1)\} > -1, \tag{4.18}$$

y además, $\forall j \in \mathbf{N}$ tomamos l_j que sea la parte entera de $j\frac{\log\nu}{\log\lambda}$, es decir, $l_j = [j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]$, entonces se verifican las dos siguientes inclusiones,

$$A^{-l_j-c}Q_1 \subset M^{-j}Q_1, \tag{4.19}$$

y

$$M^{-j}Q_1 \subset A^{-l_j+c}Q_1. \tag{4.20}$$

Para ver que se verifica la inclusión (4.19), observamos que dado $j \in \mathbf{N}$,

$$A^{-l_j-c}Q_1 \subset M^{-j}Q_1 \quad \Longleftrightarrow \quad M^jA^{-l_j-c}Q_1 \subset Q_1.$$

Calculamos

$$M^jA^{-l_j-c} = \begin{pmatrix} \nu^j & j\nu^{j-1}\frac{\nu}{\lambda}\frac{\log\nu}{\log\lambda} \\ 0 & \nu^j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{-l_j-c} & (-l_j-c)\lambda^{-l_j-c-1} \\ 0 & \lambda^{-l_j-c} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nu^j\lambda^{-l_j-c} & \nu^j(-l_j-c)\lambda^{-l_j-c-1} + j\nu^j\lambda^{-l_j-c}\frac{1}{\lambda}\frac{\log\nu}{\log\lambda} \\ 0 & \nu^j\lambda^{-l_j-c} \end{pmatrix}$$

$$= \nu^j\lambda^{-l_j-c}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda}(-l_j-c+j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 4.11. Dado $j \in \mathbf{N}$, como $c > 1$, tenemos que

$$-l_j - c + j\frac{\log\nu}{\log\lambda} < 0.$$

Observación 4.12. Dado $j \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\nu^j\lambda^{-l_j-c} \le \nu^j\lambda^{-\log_\lambda \nu^j+1-c} = \nu^j\nu^{-j}\lambda^{1-c} = \lambda^{1-c} < 1$$

donde la última desigualdad es cierta porque $c \ge 2$ y $\lambda > 1$.

Por otro lado, como Q_1 es un conjunto convexo, la imagen de una recta por una aplicación lineal es otra recta y por la simetría respecto del origen de los conjuntos Q_1 y $M^jA^{-l_j-c}Q_1$, para ver que $M^jA^{-l_j-c}Q_1 \subset Q_1$, es suficiente con probar que

$$M^jA^{-l_j-c}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu^j\lambda^{-l_j-c}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}(-\lambda-l_j-c+j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) \\ 1 \end{pmatrix} \in Q_1 \tag{4.21}$$

y que

$$M^jA^{-l_j-c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \nu^j\lambda^{-l_j-c}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}(\lambda-l_j-c+j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) \\ 1 \end{pmatrix} \in Q_1. \tag{4.22}$$

Veamos que se cumple (4.21). Por la Observación 4.12, dado $j \in \mathbf{N}$, la segunda componente del punto en (4.21) es mayor que 0 y menor que 1. Ahora nos falta comprobar que la primera componente de dicho punto es mayor que -1 y menor que 0.

Que la primera componente de nuestro punto en (4.21) es menor que 0 se sigue desde la Observación 4.11 y de que $\nu, \lambda > 0$. Y que, además, es mayor que -1 se comprueba como sigue. La Observación 4.11 y la Observación 4.12 nos dicen que

$$\begin{aligned} & \nu^j \lambda^{-l_j-c-1}(-\lambda - l_j - c + j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) \\ \geq \ & \lambda^{-c+1-1}(-\lambda - l_j - c + j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) \\ \geq \ & \lambda^{-c}(-\lambda - j\frac{\log\nu}{\log\lambda} - c + j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) = \lambda^{-c}(-\lambda - c), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta ya que $l_j = [j\frac{\log\nu}{\log\lambda}]$. Finalmente, debido a como hemos tomado c en (4.18), en particular c satisface que $\lambda^{-c}(-\lambda - c) > -1$, entonces

$$\nu^j \lambda^{-l_j-c-1}(-\lambda - l_j - c + j\frac{\log\nu}{\log\lambda}) > -1,$$

con lo que hemos probado que se verifica (4.21).

A partir de aquí podemos afirmar que también se verifica (4.22) ya que las segundas componentes de los puntos en (4.21) y en (4.22) son las mismas y desde la Observación 4.11 podemos asegurar que el módulo de la primera componente de nuestro punto en (4.22) es menor que el módulo de la primera componente de nuestro punto en (4.21).

De manera análoga se puede comprbar que para cada $j \in \mathbf{N}$ se satisface la inclusión (4.20) o equivalentemente

$$A^{l_j-c}M^{-j}Q_1 \subset Q_1.$$

De esta manera, ya hemos demostrado que $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_M$.

La prueba de que $\mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}_A$ se hace de forma análoga al desarrollo anterior, ya que si tomamos $c \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ tal que

$$\min\{\lambda^{-1}\nu^{1-c}(-\lambda - c\frac{\log\nu}{\log\lambda}), \lambda^{-1}\nu^{-c}(-\lambda - \frac{\log\nu}{\log\lambda} - c\frac{\log\nu}{\log\lambda})\} > -1, \tag{4.23}$$

y además, si $\forall j \in \mathbf{N}$ tomamos l_j que sea la parte entera de $\frac{j}{\log_\lambda \nu}$, $l_j = [\frac{j}{\log_\lambda \nu}]$, entonces se verifican las dos siguientes inclusiones,

$$M^{-l_j-c}Q_1 \subset A^{-j}Q_1, \tag{4.24}$$

y

$$A^{-j}Q_1 \subset M^{-l_j+c}Q_1. \tag{4.25}$$

□

Corolario 4.13. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ con la siguiente matriz asociada,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},\ 1 < \lambda.$$

Sea $l \in \mathbf{N}$, entonces $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^l}$

4.2.2. Resultados

Ya estamos preparados para poder dar nuestra solución al **Problema 2** cuando las aplicaciones lineales expansivas están definidas en $\mathbf{R}^2$.

Teorema 4.14. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ con la matriz asociada*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R};\ 1 <\mid \lambda_1 \mid, \mid \lambda_2 \mid,$$

y sea otra aplicación $M : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ con la matriz asociada

$$M = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R};\ 1 <\mid \nu_1 \mid, \mid \nu_2 \mid.$$

Entonces, $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_M$ si y solo si

$$\alpha_A = \alpha_M \quad \text{donde } \alpha_A = \frac{\log \mid \lambda_2 \mid}{\log \mid \lambda_1 \mid} \text{ ý } \alpha_M = \frac{\log \mid \nu_2 \mid}{\log \mid \nu_1 \mid}.$$

Demostración. Haremos la prueba de la implicación necesaria por reducción al absurdo. Sin pérdida de generalidad suponemos que

$$\alpha_A < \alpha_M,$$

entonces, por Lema 4.7 $E_{\alpha_M} \in \mathcal{D}_A$ pero $E_{\alpha_M} \notin \mathcal{D}_M$ donde

$$E_{\alpha_M} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } \mid x_2 \mid \geq \mid x_1 \mid^{\alpha_M}\}.$$

Probaremos la implicación suficiente. El Corolario B.15 nos dice que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $1 < \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2$. Con esta simplificación, veamos que $\mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}_A$. Para ello, es suficiente con verificar que se cumplen las hipótesis de la Proposición B.10. Podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{\alpha_A} \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_1^{\alpha_A} \end{pmatrix}.$$

Así para cada $j \in \mathbf{N}$, existe $l_j \in \mathbf{N}$, $l_j \geq l_{j-1}$, tal que $l_j \longrightarrow \infty$ cuando $j \longrightarrow \infty$ y

$$\nu_1^{-l_j} \geq \lambda_1^{-j} > \nu_1^{-l_j-1}.$$

Además, como $\alpha_A > 0$, entonces

$$\nu_1^{-l_j \alpha_A} \geq \lambda_1^{-j\alpha_A} > \nu_1^{(-l_j-1)\alpha_A},$$

con lo que

$$\nu_2^{-l_j} \geq \lambda_2^{-j} > \nu_2^{(-l_j-1)}.$$

De esta manera podemos concluir que para cada $j \in \mathbf{N}$, existe $l_j \in \mathbf{N}$, $l_j \geq l_{j-1}$, tal que $l_j \longrightarrow \infty$ cuando $j \longrightarrow \infty$ y

$$M^{-l_j-1}Q_1 \subsetneq A^{-j}Q_1 \subseteq M^{-l_j}Q_1 \tag{4.26}$$

De manera análoga se demuestra que $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_M$. □

Un corolario del Teorema 4.14 es el siguiente.

Corolario 4.15. *Sea* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ *con la siguiente matriz asociada,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R};\ 1 <\mid \lambda_1 \mid, \mid \lambda_2 \mid;\ \mid \lambda_1 \mid \neq \mid \lambda_2 \mid,$$

y sea la aplicación $M = cA$, *con* $c \in \mathbf{R}$. *Entonces* $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_M$ *si y solo si* $\mid c \mid = 1$.

Demostración. Para probar la implicación suficiente, basta observar que $AQ_1 = MQ_1$.

Probamos la implicación necesaria. Como $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_M$, por el Teorema 4.14 tenemos que

$$\frac{\log \mid \lambda_2 \mid}{\log \mid \lambda_1 \mid} = \frac{\log \mid c\lambda_2 \mid}{\log \mid c\lambda_1 \mid},$$

y así,

$$(e^{\log|c\lambda_1|})^{\log|\lambda_2|/\log|\lambda_1|} = e^{\log|c\lambda_2|},$$

con lo que

$$\mid c\lambda_1 \mid^{\log|\lambda_2|/\log|\lambda_1|} = \mid c\lambda_2 \mid,$$

entonces, como $\mid \lambda_1 \mid^{\log|\lambda_2|/\log|\lambda_1|} = \mid \lambda_2 \mid$, tenemos que

$$\mid c \mid^{(\log|\lambda_2|/\log|\lambda_1|)-1} = 1,$$

y finalmente observando que $\frac{\log|\lambda_2|}{\log|\lambda_1|} \neq 1$, podemos concluir que $\mid c \mid = 1$. □

En el siguiente lema encontramos un resultado más preciso que el obtenido en el Teorema 4.14 en el caso en el que no tenemos igualdad entre $\mathcal{D}_A$ y $\mathcal{D}_M$.

Lema 4.16. *Sean* $A, M \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ *con las matrices asociadas, respectivamente,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R};\ 1 <\mid \lambda_1 \mid, \mid \lambda_2 \mid,$$

$$M = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R};\ 1 <\mid \nu_1 \mid, \mid \nu_2 \mid.$$

Si $\alpha_A \neq \alpha_M$ *entonces* $\mathcal{D}_A \nsubseteq \mathcal{D}_M$ *y* $\mathcal{D}_A \nsupseteq \mathcal{D}_M$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha_A > \alpha_M$.

Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el siguiente conjunto

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } \mid x_2 \mid > \mid x_1 \mid^{\alpha} \quad \alpha = \frac{\alpha_A + \alpha_M}{2}\}.$$

El Lema 4.7 nos dice que $E \in \mathcal{D}_M$ y que $E \notin \mathcal{D}_A$. De esta manera hemos probado que $\mathcal{D}_A \nsupseteq \mathcal{D}_M$.

Por otro lado, el Lema 4.8 nos dice que $E^c \notin \mathcal{D}_M$ y que $E^c \in \mathcal{D}_A$, por lo tanto $\mathcal{D}_A \nsubseteq \mathcal{D}_M$. □

Lema 4.17. *Sean $A, A' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tales que la matriz asociada a la aplicación A tiene la siguiente forma,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad 1 < \lambda_1 < \lambda_2,$$

y la matriz asociada a la aplicación A' es de la forma $A' = C^{-1}AC$. Entonces

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A'} \text{ si y solo si } \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad \text{con } a, b, d \in \mathbf{R}.$$

Demostración. Haremos la prueba de la implicación necesaria por reducción al absurdo. Supongamos que

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbf{R}, \text{ ý } c \neq 0.$$

Distinguiremos dos casos diferentes, si $d \neq 0$ o si $d = 0$.

En el caso $d \neq 0$, como

$$C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} dx \\ -cx \end{pmatrix},$$

la imagen por C^{-1} de la recta $x_2 = 0$ es la recta $x_2 = -\frac{c}{d}x_1$, con $\frac{c}{d} \neq 0$.

Tomamos el siguiente conjunto $E \subset \mathbf{R}^2$,

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } \mid x_2 \mid \leq \frac{5}{4} \mid \frac{c}{d} \mid\mid x_1 \mid \text{ ý } \mid x_2 \mid \geq \frac{3}{4} \mid \frac{c}{d} \mid\mid x_1 \mid\}.$$

El lema 4.6 y la Proposición B.8 nos dicen que $E \in \mathcal{D}_A$. Además, debido a la construcción y al Lema 4.6, sabemos que $CE \notin \mathcal{D}_A$, o equivalentemente, $E \notin C^{-1}\mathcal{D}_A$, y así, desde el Lema B.13 podemos concluir que $E \notin \mathcal{D}_{A'}$.

En el otro caso, es decir, cuando $d = 0$, se puede comprobar fácilmente que la imagen por C^{-1} de la recta $x_2 = 0$ es la recta $x_1 = 0$, y siguiendo un desarrollo análogo al caso anterior, sabemos que el conjunto $E \subset \mathbf{R}^2$ que viene dado por la siguiente expresión,

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } x_2 \leq\mid x_1 \mid\},$$

satisface que $E \in \mathcal{D}_A$ y que $E \notin \mathcal{D}_{A'}$.

Para probar la implicación suficiente, volvemos a distinguir dos casos.

Si $b = 0$. En este caso, es fácil observar que $A = A'$, entonces, obviamente $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A'}$.

Si $b \neq 0$ tenemos que

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{b}{a}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que a es distinto de cero ya que $c = 0$ y $d_C > 0$.

Entonces, para cada $j \in \mathbf{Z}$, tenemos

$$A'^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & \frac{b}{a}(\lambda_1^j - \lambda_2^j) \\ 0 & \lambda_2^j \end{pmatrix}.$$

Veamos que $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A'}$. Según nos indica la Proposición B.10, es suficiente con comprobar que $\exists c \in \mathbf{N}$, $\forall j \in \mathbf{N}$ tal que

$$A'^{-j}B_1 \subset A^{-j+c}B_1, \tag{4.27}$$

y que

$$A^{-j-c}B_1 \subset A'^{-j}B_1. \tag{4.28}$$

En primer lugar queremos encontrar $l_0 \in \mathbf{N}$ tal que dado cualquier $j \in \mathbf{N}$ se verifique la inclusión (4.27) $\forall l \geq l_0$, o equivalentemente

$$A^j A'^{-j}B_1 \subset A^l B_1. \tag{4.29}$$

Para cada $j \in \mathbf{N}$, hallamos

$$A^j A'^{-j} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a}(1 - \frac{\lambda_1^j}{\lambda_2^j}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces, es fácil comprobar que

$$A^j A'^{-j}B_1 \subset B_{R_0} \quad \text{donde } R_0 = 1 + \mid \frac{b}{a} \mid + \mid \frac{b}{a} \mid^2,$$

y como la aplicación A es expansiva, $\exists l_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tal que si $l \geq l_0$, entonces

$$B_{R_0} \subset A^l B_1.$$

Desde aquí, podemos decir que $\forall l \geq l_0$ y $\forall j \in \mathbf{N}$ la inclusión (4.29) es cierta.

En segundo lugar queremos encontrar $l_1 \in \mathbf{N}$, tal que si $l \geq l_1$, para cualquier $j \in \mathbf{N}$, se verifica la inclusión (4.28), o equivalentemente

$$A^{-l}B_1 \subset A^j A'^{-j}B_1. \tag{4.30}$$

Es fácil comprobar que

$$B_{\frac{1}{R_0}} \subset A^j A'^{-j}B_1,$$

y como la aplicación A es expansiva, $\exists l_1 \in \mathbf{N}$ tal que si $l \geq l_1$, entonces

$$A^{-l}B_1 \subset B_{\frac{1}{R_0}}.$$

Desde aquí podemos afirmar que $\forall l \geq l_1$, $\forall j \in \mathbf{N}$ se cumple la inclusión (4.30).

Podemos concluir que si tomamos

$$c = \max\{l_0, l_1\},$$

entonces $\forall j \in \mathbf{N}$ se satisfacen las inclusiones (4.27) y (4.28).

De manera análoga al caso anterior se puede comprobar que $\mathcal{D}_{A'} \subset \mathcal{D}_A$. $\square$

Teorema 4.18. *Sean $A, A', M, M' \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tales que las matrices asociadas a las aplicaciones A y M son respectivamente,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 < \mid \lambda_1 \mid < \mid \lambda_2 \mid,$$

$$M = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \nu_1 \mid<\mid \nu_2 \mid,$$

y además, existen dos matrices reales 2×2, C y D con $d_C > 0$ y con $d_D > 0$, tales que $A' = C^{-1}AC$ y $M' = D^{-1}MD$. Entonces

$$\mathcal{D}_{A'} = \mathcal{D}_{M'} \text{ si y solo si}$$

$$\alpha_A = \alpha_M \text{ ý } CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tal que } a, b, c, d \in \mathbf{R}, \text{ con } c = 0.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, debido al Corolario B.15, podemos suponer que $1 < \lambda_1 < \lambda_2$ y que $1 < \nu_1 < \nu_2$. Además, recordamos que el Lema B.13 nos dice que

$$\mathcal{D}_{A'} = \mathcal{D}_{M'} \Leftrightarrow C^{-1}\mathcal{D}_A = D^{-1}\mathcal{D}_M \Leftrightarrow \mathcal{D}_A = CD^{-1}\mathcal{D}_M. \tag{4.31}$$

$\Longleftarrow$) Como $\alpha_A = \alpha_M$, desde el Teorema 4.14 sabemos que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_M$, entonces

$$\mathcal{D}_A = CD^{-1}\mathcal{D}_M \Longleftrightarrow \mathcal{D}_A = CD^{-1}\mathcal{D}_A.$$

Finalmente, como

$$CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tal que } a, b, c, d \in \mathbf{R}, \text{ con } c = 0,$$

el Lema 4.17 nos dice que efectivamente se verifica que $\mathcal{D}_A = CD^{-1}\mathcal{D}_A$.

$\Longrightarrow$) Por reducción al absurdo. Si

$$CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tal que } a, b, c, d \in \mathbf{R}, \text{ con } c \neq 0,$$

de forma análoga a la demostración de la parte necesaria del Lema 4.17, tenemos que $\mathcal{D}_A \neq CD^{-1}\mathcal{D}_M$.

Nos falta comprobar el caso en el que $\alpha_A \neq \alpha_M$ y

$$CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \text{ con } c = 0.$$

En este caso, el Lema 4.17 nos dice que $CD^{-1}\mathcal{D}_M = \mathcal{D}_M$ pero el Teorema 4.14 nos dice que $\mathcal{E}_A \neq \mathcal{E}_M$. Entonces debido a las equivalencias en (4.31) podemos concluir que $\mathcal{D}_{A'} \neq \mathcal{D}_{M'}$. □

Lema 4.19. *Sean $A, A', A_{\lambda,1}, A'_{\lambda,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tales que A y $A_{\lambda,1}$ tienen las matrices asociadas:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid,$$

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad 1 < \lambda,$$

y además, $A' \sim A$ y $A'_{\lambda,1} \sim A_{\lambda,1}$, entonces $\mathcal{D}_{A'} \neq \mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}}$.

Demostración. Como $A' \sim A$, existe C una matriz real 2×2 con $d_C > 0$ tal que $A' = C^{-1}AC$ y como $A'_{\lambda,1} \sim A_{\lambda,1}$, existe una matriz real 2×2, D, con $d_D > 0$, tal que $A'_{\lambda,1} = D^{-1}A_{\lambda,1}D$.

Las siguientes equivalencias son ciertas, donde la primera de ellas es consecuencia del Lema B.13.

$$\mathcal{D}_{A'} \neq \mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} \Longleftrightarrow C^{-1}\mathcal{D}_A \neq D^{-1}\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} \Longleftrightarrow DC^{-1}\mathcal{D}_A \neq \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}. \qquad (4.32)$$

Sea

$$DC^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbf{R}.$$

Distinguimos dos casos. Primero estudiamos cuando $c = 0$. En este caso, el Teorema 4.18 nos dice que $DC^{-1}\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_A$. Con lo que, desde (4.32) es suficiente demostrar que

$$\mathcal{D}_A \neq \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}.$$

Efectivamente, el Ejemplo 24 nos dice que el conjunto $E \subset \mathbf{R}^2$ tal que

$$E^c = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_2 \geq 0, x_2 \geq -x_1\}$$

pertenece a $\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$, y el Ejemplo 20 junto con la Proposición B.2 nos dicen que $E \notin \mathcal{D}_A$.

El segundo caso será cuando $c \neq 0$. Aquí volvemos a distinguir dos subcasos. Si $d \neq 0$, como

$$DC^{-1}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dx \\ -cx \end{pmatrix},$$

la imagen por DC^{-1} de la recta $x_2 = 0$ es la recta $x_2 = -\frac{c}{d}x_1$, con $\frac{c}{d} \neq 0$.

Sea $E \subset \mathbf{R}^2$ el conjunto tal que

$$E^c = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } \mid x_2 \mid \leq \frac{5}{4} \mid \frac{c}{d} \mid\mid x_1 \mid \text{ ý } \mid x_2 \mid \geq \frac{3}{4} \mid \frac{c}{d} \mid\mid x_1 \mid\}.$$

Desde nuestra construcción y desde el Lema 4.6, sabemos que $CD^{-1}E \notin \mathcal{D}_A$, o equivalentemente, $E \notin DC^{-1}\mathcal{D}_A$. Por otro lado, por el Ejemplo 24, por la Proposición B.8 y por la Proposición B.2 sabemos que $E \in \mathcal{D}_M$.

El segundo subcaso es si $d = 0$. En esta situación, se puede comprobar fácilmente que la imagen por DC^{-1} de la recta $x_2 = 0$ es la recta $x_1 = 0$. Y siguiendo un desarrollo análogo al caso anterior, sabemos que el conjunto $E \subset \mathbf{R}^2$ que viene dado por la siguiente expresión,

$$E = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tal que } x_2 \leq \mid x_1 \mid\},$$

cumple que $E \notin DC^{-1}\mathcal{D}_A$. Por otro lado, el Ejemplo 24 y la Proposición B.2 nos dicen que $E \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$. □

Lema 4.20. *Sea $1 < \lambda$ y sean $A^+, A^- \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ con las siguientes matrices asociadas respectivamente,*

$$A_+ = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_- = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S\mathcal{D}_{A_-} = \mathcal{D}_{A_+}, \quad \textit{donde} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Veamos la inclusión $S\mathcal{D}_{A_-} \subset \mathcal{D}_{A_+}$.

Sea $j \in \mathbf{N}$. Si j es par, tenemos que

$$SA_+^{-j}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda^{-j} + j\lambda^{-j-1} \\ \lambda^{-j} \end{pmatrix} = A_-^{-j}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y que

$$SA_+^{-j}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-j} + j\lambda^{-j-1} \\ \lambda^{-j} \end{pmatrix} = A_-^{-j}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces desde la linealidad de las aplicaciones A_+ y A_-,

$$SA_+^{-j}Q_1 = A_-^{-j}Q_1. \tag{4.33}$$

Si j es impar, de forma análoga, podemos ver que la igualdad (4.33) también se cumple.

Sea $E \subset \mathcal{D}_{A_-}$. Hallamos

$$\begin{aligned} \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| SE \bigcap A_+^{-j}Q_1 |_2}{| A_+^{-j}Q_1 |_2} &= \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E \bigcap SA_+^{-j}Q_1 |_2}{| A_+^{-j}Q_1 |_2} \\ &= \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E \bigcap A_-^{-j}Q_1 |_2}{| A_-^{-j}Q_1 |_2} = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta ya que $E \subset \mathcal{D}_{A_-}$. Así, la Proposición B.7 nos dice que $SE \subset \mathcal{D}_{A_+}$.

La inclusión $S\mathcal{D}_{A_+} \subset \mathcal{D}_{A_-}$, se demuestra de forma análoga. □

Lema 4.21. *Sean* $1 < \lambda, \nu$, *y* $0 < a, b$. *Sean* $A_{\lambda,a}, A_{-\nu,b} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ *con las siguientes matrices asociadas,*

$$A_{\lambda,a} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_{-\nu,b} = \begin{pmatrix} -\nu & b \\ 0 & -\nu \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{D}_{A_{\lambda,a}} \not\subseteq \mathcal{D}_{A_{-\nu,b}} \qquad y \qquad \mathcal{D}_{A_{\lambda,a}} \not\supseteq \mathcal{D}_{A_{-\nu,b}}.$$

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{D}_{A_{\lambda,a}} \not\subseteq \mathcal{D}_{A_{-\nu,b}}$. El Ejemplo 24 nos muestra conjuntos $E \subset \mathbf{R}^2$ tales que $E \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,a}}$. Pero además, desde el Lema 4.20 y el Ejemplo 25 podemos asegurar que $E \notin \mathcal{D}_{A_{-\nu,b}}$.

Veamos ahora que $\mathcal{D}_{A_{\lambda,a}} \not\supseteq \mathcal{D}_{A_{-\nu,b}}$. El Ejemplo 25 nos muestra conjuntos $E \subset \mathbf{R}^2$ tal que $E \notin \mathcal{D}_{A_{\lambda,a}}$. Pero desde el Lema 4.20 y el Ejemplo 24 obtenemos que $E \in \mathcal{D}_{A_{-\nu,b}}$. □

Lema 4.22. *Sean* $A, A', A_{-\lambda,1}, A'_{-\lambda,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ *tales que las matrices asociadas a la aplicación* A *y a la aplicación* $A_{-\lambda,1}$ *son respectivamente*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <| \lambda_1 |<| \lambda_2 | .$$

$$A_{-\lambda,1} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda > 1,$$

y además, $A' \sim A$ *y* $A'_{-\lambda,1} \sim A_{-\lambda,1}$. *Entonces* $\mathcal{D}_{A'} \neq \mathcal{D}_{A'_{-\lambda,1}}$.

Demostración. Como $A' \sim A$, existe una matriz real 2×2, C, con $d_C > 0$ y tal que $A' = C^{-1}AC$ y como $A'_{\lambda,1} \sim A_{\lambda,1}$, existe una matriz real 2×2, D, con $d_D > 0$ y tal que $A'_{-\lambda,1} = D^{-1}A_{-\lambda,1}D$.

Las siguientes equivalencias, donde la primera es debida al Lema B.13, son ciertas.

$$\mathcal{D}_{A'} \neq \mathcal{D}_{A'_{-\lambda,1}} \Longleftrightarrow C^{-1}\mathcal{D}_A \neq D^{-1}\mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}} \Longleftrightarrow DC^{-1}\mathcal{D}_A \neq \mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}}.$$

Por otro lado, el Lema 4.20 nos dice que $\mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}} = S\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$ donde

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así,

$$DC^{-1}\mathcal{D}_A \neq \mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}} \Longleftrightarrow DC^{-1}\mathcal{D}_A \neq S\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} \Longleftrightarrow SDC^{-1}\mathcal{D}_A \neq \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}},$$

y efectivamente, debido al Lema 4.19 podemos asegurar que

$$SDC^{-1}\mathcal{D}_A \neq \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}.$$

□

Lema 4.23. *Sean* $A_{\nu,1}, A'_{\nu,1}, A_{\lambda,1}, A'_{\lambda,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ *tales que las matrices asociadas a las aplicaciones* $A_{\lambda,1}$ *y* $A_{\nu,1}$ *son respectivamente*

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 1,$$

$$A_{\nu,1} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \qquad \nu > 1,$$

y además, existen dos matrices reales 2×2 C *y* D, $d_C > 0$, $d_D > 0$ *tales que* $A'_{\lambda,1} = C^{-1}A_{\lambda,1}C$ *y* $A'_{\nu,1} = D^{-1}A_{\nu,1}D$. *Entonces*

$$\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}} \text{ si y solo si}$$

$$CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbf{R},\ c = 0 \ \text{ ý } \ \frac{a}{d} = \frac{\nu \log \nu}{\lambda \log \lambda}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $1 < \lambda \leq \nu$. Empezamos observando las siguientes equivalencias, donde la primera y la última son consecuencia del Lema B.13.

$$\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}} \Leftrightarrow C^{-1}\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = D^{-1}\mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{\nu,1}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{CD^{-1}A_{\nu,1}DC^{-1}}. \tag{4.34}$$

Dividiremos la prueba en varios casos según los valores que puedan tomar los elementos de la matriz CD^{-1}, a, b, c, y d y veremos para cuales de ellos se verifica (4.34).

Si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ comprobaremos que $\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} \neq CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$ de la siguiente manera. Como la imagen por CD^{-1} de la recta $x_2 = 0$ es la recta $x_2 = -\frac{c}{d}x_1$, tomamos el conjunto $E \subset \mathbf{R}^2$ tal que

$$E^c = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : | \ x_2 \ | \leq \frac{5}{4} \mid \frac{c}{d} \mid\mid x_1 \mid \ \text{ý} \ \mid x_2 \mid \geq \frac{3}{4} \mid \frac{c}{d} \mid\mid x_1 \mid\}.$$

El Ejemplo 24, la Proposición B.8 y la Proposición B.2 nos dicen que el conjunto $E \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$. Desde nuestra construcción, por el Ejemplo 25 y la Proposición B.2 sabemos que $DC^{-1}E \notin \mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$, o equivalentemente, $E \notin CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$.

Si $c \neq 0$ y $d = 0$ comprobaremos que $\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} \neq CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$ de la siguiente manera.

Se puede comprobar fácilmente que la imagen por DC^{-1} de la recta $x_2 = 0$ es la recta $x_1 = 0$, y siguiendo un desarrollo análogo al caso anterior, sabemos que el conjunto $E \subset \mathbf{R}^2$,

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} : x_2 \leq \mid x_1\},$$

verifica que $E \in \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$ y que $E \notin CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$.

Estudiemos ahora los distintos casos que podemos tener cuando $c = 0$. Primero calculamos

$$CD^{-1}A_{\nu,1}DC^{-1} = \begin{pmatrix} \nu & \frac{a}{d} \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Si $c = 0$ y $\frac{a}{d} = \frac{\nu}{\lambda}\frac{\log \nu}{\log \lambda}$, el Ejemplo 29 nos dice que $\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}}$.

Si $c = 0$ y $0 < \frac{a}{d} < \frac{\lambda}{\nu}\frac{\log \nu}{\log \lambda}$, el Ejemplo 27 nos dice que $\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} \neq \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}}$.

Si $c = 0$ y $\frac{\lambda}{\nu}\frac{\log \nu}{\log \lambda} < \frac{a}{d}$, el Ejemplo 28 nos dice que $\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} \neq \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}}$.

Si $c = 0$ y $\frac{a}{d} = 0$ el Teorema 4.5 nos dice que $\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} \neq \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}}$.

Si $c = 0$ y $\frac{a}{d} < 0$ la Observación B.1 y el Lema 4.21 nos muestran que $\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} \neq \mathcal{D}_{A'_{\nu,1}}$. □

Lema 4.24. *Sean $A_{\lambda,1}, A'_{\lambda,1}, A_{-\nu,1}, A'_{-\nu,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tales que las matrices asociadas a las aplicaciones $A_{\lambda,1}$ y $A_{-\nu,1}$ son respectivamente,*

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 1.$$

$$A_{-\nu,1} = \begin{pmatrix} -\nu & 1 \\ 0 & -\nu \end{pmatrix}, \qquad \nu > 1,$$

y además, existen dos matrices reales 2×2 C y D, $d_C > 0$, $d_D > 0$, tales que $A'_{\lambda,1} = C^{-1}A_{\lambda,1}C$ y $A'_{-\nu,1} = D^{-1}A_{-\nu,1}D$. Entonces

$$\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{-\nu,1}} \text{ si y solo si}$$

$$CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a, b, c, d \in \mathbf{R},\ c = 0 \text{ ý } \frac{a}{d} = -\frac{\nu}{\lambda}\frac{\log \nu}{\log \lambda}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que $1 < \lambda \leq \nu$.

Empezamos observando las siguientes equivalencias, donde la primera de ellas es consecuencia del Lema B.13,

$$\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{-\nu,1}} \Leftrightarrow C^{-1}\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = D^{-1}\mathcal{D}_{A_{-\nu,1}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{-\nu,1}}.$$

Como el Lema 4.20 nos dice que $\mathcal{D}_{A_{\nu,1}} = S\mathcal{D}_{A_{-\nu,1}}$ donde

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathcal{D}_{A'_{\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{-\nu,1}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = CD^{-1}S\mathcal{D}_{A_{\nu,1}},$$

y como

$$CD^{-1}S = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbf{R},$$

desde el Lema 4.23 damos la prueba por terminada. $\square$

Lema 4.25. *Sean $A_{-\lambda,1}, A'_{-\lambda,1}, A_{-\nu,1}, A'_{-\nu,1} \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tales que las matrices asociadas a las aplicaciones $A_{-\lambda,1}$ y $A_{-\nu,1}$ son respectivamente*

$$A_{-\lambda,1} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda > 1,$$

$$A_{-\nu,1} = \begin{pmatrix} -\nu & 1 \\ 0 & -\nu \end{pmatrix} \qquad \nu > 1,$$

y además, existen dos matrices reales 2×2 C y D, con $d_C > 0$ y con $d_D > 0$ tales que $A'_{-\lambda,1} = C^{-1}A_{-\lambda,1}C$ y $A'_{-\nu,1} = D^{-1}A_{-\nu,1}D$. Entonces

$$\mathcal{D}_{A'_{-\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{-\nu,1}} \text{ si y solo si}$$

$$CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbf{R},\ c = 0 \text{ ý } \frac{a}{d} = \frac{\nu \log \mid \nu \mid}{\lambda \log \mid \lambda \mid}.$$

Demostración. Empezamos observando las siguientes equivalencias, donde la primera de ellas es debida al Lema B.13

$$\mathcal{D}_{A'_{-\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{-\nu,1}} \Leftrightarrow C^{-1}\mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}} = D^{-1}\mathcal{D}_{A_{-\nu,1}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}} = CD^{-1}\mathcal{D}_{A_{-\nu,1}}.$$

Además, el Lema 4.20 nos dice que $\mathcal{D}_{A_{-\lambda,1}} = S\mathcal{D}_{A_{\lambda,1}}$ y que $\mathcal{D}_{A_{-\nu,1}} = S\mathcal{D}_{A_{\nu,1}}$ donde

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathcal{D}_{A'_{-\lambda,1}} = \mathcal{D}_{A'_{-\nu,1}} \Leftrightarrow \mathcal{D}_{A_{\lambda,1}} = SCD^{-1}S\mathcal{D}_{A_{\nu,1}},$$

y como tenemos que

$$SCD^{-1}S = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbf{R},$$

desde el Lema 4.23 damos por finalizada nuestra demostración. $\square$

Si ahora recogemos y unimos adecuadamente los resultados que hemos visto anteriormente, tenemos lo siguiente.

Teorema 4.26. *Sean $A_1, A_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dos aplicaciones lineales y expansivas. Entonces existen exactamente los siguientes casos en los que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$.*

(1) *A_1 y A_2 son isotrópicas.*

(2) *Existen dos matrices reales 2×2, C y D, $d_C > 0$, $d_D > 0$, tales que $A_1 = C^{-1} A_1' C$ y $A_2 = D^{-1} A_2' D$, donde las matrices asociadas a las aplicaciones A_1' y A_2' son respectivamente,*

$$A_1' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \lambda_1 \mid<\mid \lambda_2 \mid,$$

$$A_2' = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{R},\ 1 <\mid \nu_1 \mid<\mid \nu_2 \mid,$$

$$\textit{con} \quad \alpha_{A_1'} = \alpha_{A_2'} \ \ \textit{ý} \ \ CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \ \textit{tal que } a, b, d \in \mathbf{R}.$$

(3) *Existen dos matrices reales 2×2 C y D, $d_C > 0$, $d_D > 0$ tales que $A_1 = C^{-1} A_{\lambda,1} C$ y $A_2 = D^{-1} A_{\nu,1} D$, donde las matrices asociadas a las aplicaciones $A_{\lambda,1}$ y $A_{\nu,1}$ son respectivamente*

$$A_{\lambda,1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \mid \lambda \mid> 1,$$

$$A_{\nu,1} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbf{R} \quad \mid \nu \mid> 1,$$

$$\textit{con} \quad CD^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad \textit{con } a, b, d \in \mathbf{R},\ \textit{y } \frac{a}{d} = \frac{\nu \log \mid \nu \mid}{\lambda \log \mid \lambda \mid}.$$

4.3. Equivalencia de A-densidades para aplicaciones autoadjuntas

En esta sección daremos una solución al Problema 2 cuando las aplicaciones lineales expansivas que tengamos estén definidas en $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, y sean autoadjuntas. En este estudio tendrá gran importancia la forma especial que tienen las matrices elementales de Jordan de las aplicaciones autoadjuntas. Los resultados se han obtenido en un trabajo conjunto con el profesor Szilárd GY. Révész [65].

4.3.1. Algunos casos particulares

Ejemplo 30. Sea $A \in \mathcal{LEP}$. Con la notación dada en el Apéndice A (Autovalores, autovectores y Teorema Espectral), dado $\delta > 0$, definimos el conjunto medible

$$E_\delta = \{\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} \ : \ \mathbf{y} \in U_1; \mathbf{z} \in U_1^{\perp}, \parallel \mathbf{z} \parallel< \delta \parallel \mathbf{y} \parallel\}$$

$$= \{\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + ... + \mathbf{y}_k \ : \ \mathbf{y}_i \in U_i, i = 1, ..., k, \parallel \mathbf{y}_2 + ... + \mathbf{y}_k \parallel< \delta \parallel \mathbf{y}_1 \parallel\}.$$

Entonces en el caso en el que $\dim U_1 < n$, es decir, cuando no todos los autovalores de A son iguales a μ_1, tenemos que $E_\delta \in \mathcal{D}_A$.

Claramente,

$$\mid B_1 \bigcap E_\delta \mid_n = \int_{B_1} \chi_{E_\delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

y $\lim_{\delta\longrightarrow\infty}\chi_{E_\delta}(\mathbf{x})=\chi_{B_1}(\mathbf{x})$ c.t. $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$. Así desde el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{\delta\longrightarrow\infty} \mid B_1\bigcap E_\delta \mid_n = \mid B_1 \mid_n . \tag{4.35}$$

Segundo, queremos ver que dado $\delta>0$, tenemos que $E_{\frac{\mu_2}{\mu_1}\delta}\subset AE_\delta$.

Al ser los subespacios U_i ortogonales entre ellos, podemos escribir AE_δ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} AE_\delta &= \{\mu_1\mathbf{y}_1+...+\mu_k\mathbf{y}_k \;:\; \mathbf{y}_i\in U_i, i=1,...,k,\\ &\quad \parallel \mathbf{y}_2\parallel^2 +...+ \parallel \mathbf{y}_k\parallel^2 < \delta^2 \parallel \mathbf{y}_1\parallel^2\}\\ &= \{\mathbf{z}_1+...+\mathbf{z}_k \;:\; \mathbf{z}_i\in U_i, i=1,...,k,\\ &\quad \frac{1}{\mu_2^2}\parallel \mathbf{z}_2\parallel^2 +...+ \frac{1}{\mu_k^2}\parallel \mathbf{z}_k\parallel^2 < \delta^2\frac{1}{\mu_1^2}\parallel \mathbf{z}_1\parallel^2\}. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{x}\in E_{\frac{\mu_2}{\mu_1}\delta}$, entonces

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}_1+...+\mathbf{y}_k \;\text{ donde } \mathbf{y}_i\in U_i,\; i=1,...,k,$$

$$\text{y tal que } \frac{1}{\mu_2^2}\parallel \mathbf{y}_2\parallel^2 +...+ \frac{1}{\mu_2^2}\parallel \mathbf{y}_k\parallel^2 < \frac{1}{\mu_1^2}\delta^2\parallel \mathbf{y}_1\parallel^2,$$

y como $\mu_i\geq\mu_2$, $i=2,...,k$, tenemos que

$$\frac{1}{\mu_2^2}\parallel \mathbf{y}_2\parallel^2 +...+ \frac{1}{\mu_k^2}\parallel \mathbf{y}_k\parallel^2 \leq \frac{1}{\mu_2^2}\parallel \mathbf{y}_2\parallel^2 +...+ \frac{1}{\mu_2^2}\parallel \mathbf{y}_k\parallel^2 < \frac{1}{\mu_1^2}\delta^2\parallel \mathbf{y}_1\parallel^2 .$$

Así, hemos llegado a que $\mathbf{x}\in AE_\delta$, probando que $E_{\frac{\mu_2}{\mu_1}\delta}\subset AE_\delta$. Si ahora iteramos el proceso anterior y lo ponemos junto a (4.35), entonces

$$\mid B_1\mid_n \geq \lim_{j\longrightarrow\infty} \mid B_1\bigcap A^jE_\delta\mid_n \geq \lim_{j\longrightarrow\infty} \mid B_1\bigcap E_{(\frac{\mu_2}{\mu_1})^j\delta}\mid_n = \mid B_1\mid_n .$$

Finalmente, la condición (ii) de la Proposición B.3 y la Proposición B.7 nos dicen que $E_\delta\in\mathcal{D}_A$.

Ejemplo 31. Sea $A\in\mathcal{LEP}$ con autovalores $1<\mu_1<...<\mu_k$, $1\leq k\leq n$. Sea $U_1\subset\mathbf{R}^n$ el subespacio generado por todos los autovectores asociados con el autovalor μ_1, y además, sea $V\subset\mathbf{R}^n$ un subespacio ortogonal de U_1.

Dado $\delta>0$, definimos el conjunto medible $F_\delta\subset\mathbf{R}^n$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} F_\delta &= \{\mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} \;:\; \mathbf{u}\in U_1, \mathbf{v}\in V, \mathbf{w}\in (U_1\bigoplus V)^\perp\\ &\quad \text{ý tal que } \parallel\mathbf{v}\parallel<\delta\parallel\mathbf{u}\parallel\}. \end{aligned}$$

Entonces, por la Proposición B.2, $F_\delta\in\mathcal{D}_A$ ya que el conjunto $E_\delta\in\mathbf{R}^n$ definido en el Ejemplo 30 pertenece a $\mathcal{D}_A$ y $E_\delta\subset F_\delta$.

Lema 4.27. *Sean $A_1,A_2\in\mathcal{LEP}$ con las siguientes matrices asociadas respectivamente.*

$$A_\mu=\begin{pmatrix} \lambda_1^{(\mu)} & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2^{(\mu)} & 0 & ... & 0\\ .. & .. & .. & ... & ..\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n^{(\mu)} \end{pmatrix},$$

$\lambda_i^{(\mu)}\in\mathbf{R}$, $1<\lambda_1^{(\mu)}\leq\lambda_2^{(\mu)}\leq...\leq\lambda_n^{(\mu)}$, $\mu=1,2$. *Entonces $\mathcal{D}_{A_1}=\mathcal{D}_{A_2}$ si y solo si $\exists s>0$ tal que*

$$(A_1)^s=A_2.$$

Demostración. Haremos la prueba de la condición necesaria por reducción al absurdo. Supongamos que no existe $s > 0$ tal que$(A_1)^s = A_2$, entonces $\exists i, l \in \{1, ..., n\}$, $i < l$, tal que $(\lambda_i^{(1)})^{s_1} = \lambda_i^{(2)}$ y $(\lambda_l^{(1)})^{s_2} = \lambda_l^{(2)}$ con $0 < s_1, s_2$ pero $s_1 \neq s_2$, es decir,

$$s_1 = \frac{\log \lambda_i^{(2)}}{\log \lambda_i^{(1)}} \neq \frac{\log \lambda_l^{(2)}}{\log \lambda_l^{(1)}} = s_2,$$

o equivalentemente

$$\frac{\log \lambda_l^{(1)}}{\log \lambda_i^{(1)}} \neq \frac{\log \lambda_l^{(2)}}{\log \lambda_i^{(2)}}.$$

Denotamos

$$\alpha_1 := \frac{\log \lambda_l^{(1)}}{\log \lambda_i^{(1)}} \qquad \text{ý} \qquad \alpha_2 := \frac{\log \lambda_l^{(2)}}{\log \lambda_i^{(2)}}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $(1 \leq)\ \alpha_1 < \alpha_2$.

Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto con la siguiente forma

$$E = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n :\mid x_l \mid \geq \mid x_i \mid^{\alpha_2}\}.$$

El Lema B.11 nos dice que

$$E \in \mathcal{D}_{A_\mu} \quad \mu = 1, 2 \Longleftrightarrow F \in \mathcal{D}_{M_\mu} \quad \mu = 1, 2,$$

donde $F \subset \mathbf{R}^2$ es el siguiente conjunto

$$F = \{(x_i, x_l) \in \mathbf{R}^2 :\mid x_l \mid \geq \mid x_i \mid^{\alpha_2}\}$$

y $M_1, M_2 : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ son las aplicaciones lineales expansivas y positivas con las siguientes matrices asociadas,

$$M_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_i^{(\mu)} & 0 \\ 0 & \lambda_l^{(\mu)} \end{pmatrix}, \qquad \mu = 1, 2.$$

Así, el Teorema 4.14 nos dice que $\mathcal{D}_{A_2} \neq \mathcal{D}_{A_2}$.

Probamos, ahora, la condición suficiente. Como $A_2 = A_1^s$ si y solo si $A_2^{\frac{1}{s}} = A_1$, si $s > 0$, es suficiente con probar que $\mathcal{D}_{A_1} \subset \mathcal{D}_{A_2}$.

Para cada $j \in \mathbf{N}$, tomamos $l_j \in \mathbf{N_0}$, con $l_j = [jt]$ la parte entera de jt y por lo tanto, $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión no decreciente tal que $l_j \longrightarrow \infty$ cuando $j \longrightarrow \infty$. Además, como $1 < \lambda_i^{(\mu)}$, $i = 1, ..., n$, $\mu = 1, 2$ y $s > 0$, entonces tenemos que

$$(\lambda_i^{(1)})^{l_j} \leq (\lambda_i^{(1)})^{js} = (\lambda_i^{(2)})^j = (\lambda_i^{(1)})^{js} < (\lambda_i^{(1)})^{l_j+1} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{4.36}$$

Es fácil ver que $A_\mu^j(Q_1)$, $j \in \mathbf{Z}$, $\mu = 1, 2$, es un prisma cuyo centro es el origen y tiene los ejes soportados sobre los ejes coordenados y de longitud $2(\lambda_i^{(\mu)})^j$, $i \in \{1, ..., n\}$, $\mu = 1, 2$.

De esa manera, desde (4.36), tenemos que para cualquier $j \in \mathbf{N}$, $\exists l_j \in \mathbf{N_0}$ tal que

$$A_1^{-l_j-1} Q_1 \subsetneq A_2^{-j} Q_1 \subseteq A_1^{-l_j} Q_1. \tag{4.37}$$

Finalmente, el resultado se sigue desde la Proposición B.10. $\square$

Ejemplo 32. Sea $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\forall\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, donde $\lambda \in \mathbf{R}$, tal que $|\lambda| > 1$. Además, sea $V \subset \mathbf{R}^n$ un subespacio de $\mathbf{R}^n$ tal que $\mathbf{R}^n = V \bigoplus V^\perp$ y $V^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$. Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ el siguiente conjunto medible,

$$\begin{aligned} E &= \{\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V^\perp \\ &\quad \text{y tal que } \| \mathbf{v} \| < \| \mathbf{u} \|\}. \end{aligned}$$

Entonces $E \notin \mathcal{D}_A$.

Para comprobar esta afirmación veremos que se satisfacen las condiciones del Lema B.9.

Observamos que como $V^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$,

$$| B_1 \bigcap E |_n < | B_1 |_n,$$

y además, $AE = E$ ya que

$$\begin{aligned} AE &= \{\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \ : \ \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V^\perp \\ &\quad \text{y tal que } \| \mathbf{v} \| < \| \mathbf{u} \|\} \\ &= \{\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{u}} + \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^n \ : \ \widetilde{\mathbf{u}} \in V, \widetilde{\mathbf{v}} \in V^\perp \\ &\quad \text{y tal que } \frac{1}{\lambda} \| \widetilde{\mathbf{v}} \| < \frac{1}{\lambda} \| \widetilde{\mathbf{u}} \|\} = E. \end{aligned}$$

4.3.2. Resultados

Empezaremos escribiendo dos lemas que necesitaremos para la demostración de nuestros resultados.

Lema 4.28. *Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{LEP}$ tales que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$. Entonces* $\dim U_1^{(1)} \bigcap U_1^{(2)} \geq 1$.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, $U_1^{(1)} \bigcap U_1^{(2)} = \{\mathbf{0}\}$, así podemos definir $V := U_1^{(1)} + U_1^{(2)} = U_1^{(1)} \oplus U_1^{(2)}$. Recordamos que por la definición de los subespacios $U_1^{(1)}$ y $U_1^{(2)}$, ambos tienen al menos dimensión uno, y además, como $\dim U_1^{(1)} + \dim U_1^{(2)} = \dim V := p \leq d$, ninguno de ellos pueden tener dimensión total. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $V = \mathbf{R}^p$. En primer lugar trabajamos con V. Denotamos $V_\mu := (U_1^{(\mu)})^\perp$, $\mu = 1, 2$, el complemento ortogonal de $U_1^{(\mu)}$ en V.

Por otro lado, si S es la espera unidad en V, $S := \{\mathbf{x} \in V : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, entonces desde nuestra indirecta suposición, las trazas $T_\mu := S \cap U_1^{(\mu)}$ son disjuntas para $\mu = 1, 2$. Como además, estos conjuntos son compactos, tenemos que la distancia entre ellos, que denotaremos por

$$\rho = \operatorname{dist}(T_1, T_2) = \inf\{\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| \ : \ \mathbf{x_1} \in T_1, \ \mathbf{x_2} \in T_2\},$$

es una distancia positiva, y por supuesto, menor que 2.

Ahora, fijamos un parámetro κ, $0 < \kappa < \frac{\rho}{4}$ y definimos los siguientes conjuntos

$$K_\mu := \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \ : \ \mathbf{u} \in U_1^{(\mu)}, \mathbf{v} \in V_\mu, \|\mathbf{v}\| \leq \kappa\|\mathbf{u}\|\} \qquad (\mu = 1, 2).$$

Afirmamos que los dos conjuntos satisfacen que $|K_1 \cap K_2|_n = 0$, con más precisión, $K_1 \cap K_2 = \{\mathbf{0}\}$. Ahora fijemos $\mu = 1$ o $\mu = 2$, y consideremos cualquier $\mathbf{x} \in K_\mu \setminus \{\mathbf{0}\}$. Desde la representación de $\mathbf{x}$ como suma de vectores ortogonales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, tenemos que

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2} \leq \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \kappa^2\|\mathbf{u}\|^2} = \sqrt{1+\kappa^2}\|\mathbf{u}\|, \tag{4.38}$$

y además, como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, desde la definición de K_μ, tenemos que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Denotamos por $\mathbf{y} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} \in S$ la proyección homotécica de $\mathbf{x}$ sobre S. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\mathbf{y}, T_\mu) &= \inf\{\| \mathbf{y} - \mathbf{z} \| \ : \ \mathbf{z} \in T_\mu\} \\
&\leq \| \mathbf{y} - \frac{\mathbf{1}}{\| \mathbf{u} \|}\mathbf{u} \| \leq \| \mathbf{y} - \frac{\mathbf{1}}{\| \mathbf{u} \|}\mathbf{x} \| + \| \frac{\mathbf{1}}{\| \mathbf{u} \|}\mathbf{x} - \frac{\mathbf{1}}{\| \mathbf{u} \|}\mathbf{u} \| \\
&\leq |1 - \frac{\| \mathbf{x} \|}{\| \mathbf{u} \|}| + \frac{1}{\| \mathbf{u} \|}\|\mathbf{v}\| \leq (\sqrt{1+\kappa^2} - 1) + \kappa < 2\kappa < \frac{\rho}{2},
\end{aligned}$$

donde la antepenúltima desigualdad es consecuencia de (4.38) y de la definición de K_μ.

De esta manera, $\mathbf{y}$ está a una distancia de T_μ menor estrictamente que $\rho/2$. Entonces la proyección homotécica, $\mathbf{y}_\mu$, de los elementos $\mathbf{x}_\mu \in K_\mu$, $\mu = 1, 2$, nunca puede coincidir. Pero, además, como K_μ son conos, y por lo tanto son invariantes bajo dilataciones homotécicas, obtenemos que $K_1 \cap K_2 \subset \{\mathbf{0}\}$, que era lo que queríamos probar.

Ahora denotamos $W = \left(U_1^{(1)} \oplus U_1^{(2)}\right)^\perp$ el complemento ortogonal de $U_1^{(1)} \oplus U_1^{(2)}$ en $\mathbf{R}^n$ y consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned}
H_\mu : &= K_\mu \oplus W = \{\mathbf{x} + \mathbf{w} \ : \ \mathbf{x} \in K_\mu, \mathbf{w} \in W\} \\
&= \{\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} \ : \ \mathbf{u} \in U_1^{(\mu)}, \mathbf{v} \in V_\mu, \mathbf{w} \in W, \|\mathbf{v}\| \leq \kappa\|\mathbf{u}\|\} \quad (\mu = 1, 2).
\end{aligned}$$

Observar que $|H_1 \cap H_2|_n = 0$ ya que $H_1 \cap H_2 = W$ y $\dim W < n$, por lo tanto $|W|_n = 0$. Estos conjuntos H_μ son de la forma F_δ en el Ejemplo 31, con lo que podemos asegurar que $H_\mu \in \mathcal{D}_{A_\mu}$ para $\mu = 1, 2$.

Si ahora recordamos el Corolario B.5, que nos dice que dos conjuntos esencialmente disjuntos no pueden simultáneamente ser elementos del mismo $\mathcal{D}_{A_\mu}$, tenemos que $H_1 \in \mathcal{D}_{A_1}$ pero $H_2 \notin \mathcal{D}_{A_1}$, y $H_2 \in \mathcal{D}_{A_2}$ pero $H_2 \notin \mathcal{D}_{A_1}$. Así hemos llegado a una contradicción con $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$ lo cual concluye nuestra prueba. $\square$

Lema 4.29. *Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{LEP}$ tales que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$. Entonces A_1 y A_2 son aplicaciones simultáneamente diagonalizables.*

Demostración. Probaremos el lema por inducción en la dimensión. Obviamente el caso con dimensión más baja, $n = 1$, es cierto. Ahora sea $n \geq 1$ y supongamos que para cualesquiera $M_1, M_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales, expansivas y positivas tales que $\mathcal{D}_{M_1} = \mathcal{D}_{M_2}$, tenemos que M_1 y M_2 son simultáneamente diagonalizables. Probaremos que nuestra afirmación es cierta para dimensión $n + 1$. Sean $A_1, A_2 : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ dos aplicaciones lineales, expansivas y positivas tales que $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$. Desde el Lema 4.28 sabemos que existe un subespacio con dimensión uno, $[\mathbf{u}]$, tal que $[\mathbf{u}] \in U_1^{(1)} \bigcap U_1^{(2)}$, donde $\mathbf{u}$ es un autovector de ambas A_1 y A_2.

Al ser $\mathbf{u}$ un autovector de A_1 y de A_2, $[\mathbf{u}]$ es un subespacio invariante con respecto de A_1 y de A_2, y además, como A_1 y A_2 son autoadjuntas, $[\mathbf{u}]^\perp$ es un subespacio invariante con respecto de ambas A_1 y A_2. Así, desde el Lema B.12, sabemos que $\mathcal{D}_{M_1} = \mathcal{D}_{M_2}$ donde $M_\mu := A_\mu \mid_{[\mathbf{u}]^\perp}$, $\mu = 1, 2$. Entonces por la hipótesis de inducción, sabemos que las aplicaciones lineales, expansivas y positivas $M_1, M_2 : [\mathbf{u}]^\perp \longrightarrow [\mathbf{u}]^\perp$ son simultáneamente diagonalizables. Por lo tanto, como $A_\mu = A_\mu \mid_{[\mathbf{u}]} \otimes M_\mu$, $\mu = 1, 2$, y $\mathbf{u} \in [\mathbf{u}]$ es un autovector de A_1 y de A_2, podemos concluir que las aplicaciones A_1 y A_2 son simultáneamente diagonalizables. $\square$

Teorema 4.30. *Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{LEP}$.*

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \text{ tal que } A_1^s = A_2.$$

Demostración. $\Longleftarrow$) Debido al *teorema espectral*, sabemos que existe una aplicación lineal $C : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ con $d_C > 0$, tal que $A_1 = CJ_1C^{-1}$ donde $J_1 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal expansiva con la siguiente matriz asociada,

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(1)} & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i^{(1)} \in \mathbf{R},\ 1 < \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2^{(1)} \leq ... \leq \lambda_n^{(1)}.$$

Al tener la condición $A_2 = A_1^s$ con $s > 0$, podemos escribir la matriz asociada de la aplicación A_2 como $A_2 = C(J_1)^s C^{-1}$.

El Lema 4.27 nos dice que $\mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{(J_1)^s}$. Además, tenemos la siguiente equivalencia,

$$\mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{(J_1)^s} \Longleftrightarrow C\mathcal{D}_{J_1} = C\mathcal{D}_{(J_1)^s},$$

y finalmente, como el Lema B.13 implica que $C\mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{A_1}$, y $C\mathcal{D}_{J_2} = \mathcal{D}_{A_2}$, concluimos que

$$C\mathcal{D}_{J_1} = C\mathcal{D}_{(J_1)^s} \Longleftrightarrow \mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}.$$

$\Longrightarrow$) El Lema 4.29 nos dice que existe una base ortonormal de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$, tal que tanto A_1 como A_2 tienen una matriz asociada diagonal respecto de esta base, es decir, si definimos una aplicación lineal $C : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ cuya matriz asociada es $C = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n)$ donde $\mathbf{u}_l$, $l = 1, ..., n$ son vectores columna, podemos escribir $A_\mu = CJ_\mu C^{-1}$, $\mu = 1, 2$, donde $J_\mu : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal expansiva con la siguiente matriz asociada,

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\mu)} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(\mu)} & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n^{(\mu)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i^{(\mu)} \in \mathbf{R},\ 1 < \lambda_1^{(\mu)} \leq \lambda_2^{(\mu)} \leq ... \leq \lambda_n^{(\mu)}.$$

Observamos que $d_C = 1 > 0$ porque los vectores $\mathbf{u}_l$, $l = 1, ..., n$, son ortogonales.

Desde el Lema B.13 sabemos que

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \Longleftrightarrow C\mathcal{D}_{J_1} = C\mathcal{D}_{J_2} \Longleftrightarrow \mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{J_2},$$

y finalmente, el Lema 4.27 nos dice que

$$\mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{J_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \quad \text{tal que} \quad (J_1)^s = J_2.$$

Entonces, podemos escribir $A_2 = C(J_1)^s C^{-1} = (A_1)^s$ $\square$

Podemos enunciar ahora un resultado ligeramente más general que el Teorema 4.30. Sean $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales expansivas y autoadjuntas, sin suponer que son positivas. Consideramos $C_1, C_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales tales que $d_{C_1}, d_{C_2} > 0$ y $A_\mu = C_\mu J_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1, 2$, donde $J_1, J_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ son aplicaciones lineales con matrices asociadas,

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\mu)} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(\mu)} & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n^{(\mu)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i^{(\mu)} \in \mathbf{R}. \tag{4.39}$$

Además, denotamos

$$J'_\mu = \begin{pmatrix} \mid \lambda_1^{(\mu)} \mid & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mid \lambda_2^{(\mu)} \mid & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mid \lambda_n^{(\mu)} \mid \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Entonces, como una consecuencia directa del Teorema 4.30 y del Corolario B.15, podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 4.31. *Sean $A_1, A_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales expansivas y autoadjuntas. Sean $C_1, C_2 : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dos aplicaciones lineales tales que $d_{C_1}, d_{C_2} > 0$ y $A_\mu = C_\mu J_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1, 2$, donde J_μ vienen definida como en (4.39). Entonces*

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists s > 0 \ \textit{tal que} \ (A'_1)^s = A'_2,$$

donde $A'_\mu = C_\mu J'_\mu C_\mu^{-1}$, $\mu = 1, 2$, con J'_μ como en (4.40).

Capítulo 5

CARACTERIZACIÓN DE FUNCIONES DE ESCALA EN CASOS MÁS GENERALES

Damos una caracterización completa de las funciones $\phi \in \mathbf{R}^n$ que generan un frame análisis multirresolución. A partir del principal resultado de este capítulo se deduce la caracterización de las funciones de escala de un análisis multirresolución. El hecho de que en un subespacio cerrado de $L^2(\mathbf{R}^n)$ generado por los trasladados por enteros de una sola función exista un tight frame, nos pemite obtener la caracterización de las funciones de escala para casos más generales desde nuestro resultado principal. Los resultados que mostraremos en este capítulo han sido publicados en [15].

Desde los trabajos pioneros sobre ondículas, las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) de un análisis multirresolución han sido modificadas para atender los dife rentes propósitos requeridos por las aplicaciones. Una de las condiciones que más cambios ha tenido es la condición (iv), la cual a priori parece independiente de las demás. Primero, el requerimiento de que $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ fuera una base ortonormal de V_0 fue debilitado imponiendo que los trasladados de la función de escala constituyeran una base de Riesz de V_0. Después, la noción de *frame análisis multiresolución* (FMRA) en $L^2(\mathbf{R})$ fue formulada por J. Benedetto y S. Li [3]. Un FMRA es una extensión natural de un MRA y es obtenida reemplazando la condición (iv) por la siguiente condición:

(iv)* Existe una función $\phi \in V_0$ tal que $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es un frame de V_0. A esta función se le llama *función de escala.*

Recientemente ([67], [25], [6]), se han estudiado los MRA generados por una función de escala ϕ, donde la condición (iv) es reemplazada por el requerimiento que V_0 es el subespacio vectorial cerrado generado por $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$. Además, se ha extendido el concepto de MRA a otros espacios como los $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, [30] o espacios de Sobolev [57].

Probamos nuestro resultado principal de este capítulo en un contexto algo más general que un FMRA en $L^2(\mathbf{R}^n)$, aunque sólo consideraremos el caso diádico. Se puede obtener el caso general donde la dilatación viene dada por una aplicación lineal expansiva en $\mathbf{R}^n$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, si combinamos los resultados obtenidos en el Capítulo 1 y los que presentaremos en este capítulo.

La teoría de frames fue introducida por Duffin y Schaeffer [28].

Definición 5.1. Una sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de un espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es un *frame* de $\mathbb{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|h\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \phi_n\rangle|^2 \leq B\|h\|^2, \qquad \forall h \in \mathbb{H}.$$

Queda claro que un frame es un conjunto de elementos completo de $\mathbb{H}$, ya que la relación $\langle h, \phi_n\rangle = 0, n \in \mathbf{N}$, implica que $h = 0$. Se dice que un frame $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *tight frame* si podemos tomar $A = B$. Un frame $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que es un *frame exacto* si deja de ser un frame de $\mathbb{H}$ al quitar uno de sus elementos.

Si $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un frame de $\mathbb{H}$ entonces el *operador frame* $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es un operador lineal y acotado definido por

$$Sh = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \phi_n\rangle \phi_n.$$

Se puede probar que el operador S es autoadjunto, positivo e invertible (cf. [28] o uno de los monográficos [24] o [13]) y que $\{S^{-1}\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un frame de $\mathbb{H}$. Además, $\forall h \in \mathbb{H}$

$$h = SS^{-1}h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^{-1}h, \phi_n\rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, S^{-1}\phi_n\rangle \phi_n. \tag{5.1}$$

En este capítulo, denotaremos por D el operador dilatación $Df(\mathbf{x}) = 2^{\frac{n}{2}} f(2\mathbf{x})$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$. Sea L un subconjunto de un espacio de Hilbert complejo y separable $\mathbb{H}$. Al espacio vectorial generado por todas las combinaciones lineales de elementos de L lo denotaremos por span$L$, y la clausura de span$L$ será $\overline{\text{span}}L$.

Definición 5.2. Una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ es una *sucesión frame* si es un frame de $\overline{\text{span}}\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 5.3. Una función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *genera un FMRA* si $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una sucesión frame y los subespacios

$$V_j = \overline{\text{span}}\{D^j \tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}, \quad j \in \mathbf{Z} \tag{5.2}$$

del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ satisfacen las condiciones (i) y (iii).

5.1. Caracterización de funciones de escala de un FMRA

El propósito de la presente sección es caracterizar las funciones ϕ que generan un FMRA (cf. [13], p. 285). Esta cuestión para MRA y, después, para FMRA ha sido tratada por varios autores (cf. [24], [14], [6], [46], [75],[13] y otros). Obtenemos la caracterización de las funciones de escala de un MRA como un caso particular. Para facilitar la notación, consideraremos $\frac{0}{0} = 0$ o $0\frac{1}{0} = 0$ en las expresiones donde aparezca esta indeterminación. Dada $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$, recordamos que

$$\Phi_\phi(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \tag{5.3}$$

y denotamos

$$\mathcal{N}_\phi = \{\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n : \Phi_\phi(\mathbf{t}) = 0\}. \tag{5.4}$$

Probamos lo siguiente.

Teorema 5.1. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(**A**) *ϕ genera un FMRA;*

(**B**) *(α) La función $\widehat{\phi}$ es localmente distinta de cero en el origen;*
(β) Existen dos constantes positivas A y B tales que

$$A \le \Phi_\phi(\mathbf{t}) \le B \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{N}_\phi; \tag{5.5}$$

(γ) Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, una función $\mathbf{Z}^n$-periódica, llamada filtro de paso bajo, tal que

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\frac{\mathbf{t}}{2})\widehat{\phi}(\frac{\mathbf{t}}{2}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{5.6}$$

(**C**) *(α^*) El origen es un punto de continuidad aproximativa de la función $|\,\widehat{\phi}\,|^2 \cdot (\Phi_\phi)^{-1}$ si tomamos $|\,\widehat{\phi}(\mathbf{0})\,|^2 \cdot (\Phi_\phi(\mathbf{0}))^{-1} = 1$ y además, tenemos las condiciones (β) y (γ).*

Para la prueba del Teorema 5.1 establecemos una serie de lemas. En [3] (ver además [13]) se da una caracterización de las funciones en $L^2(\mathbf{R})$ cuyos trasladados por enteros genera una sucesión frame. Se tiene un resultado similar cuando consideramos los trasladados por elementos de $\mathbf{Z}^n$ de una función de $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Lema 5.2. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y sea V_0 definido por la condición (5.2). Entonces $\{\tau_\mathbf{k}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es un frame de V_0 si y solo si existen dos constantes positivas A y B tales que tenemos (5.5). Además, $\{\tau_\mathbf{k}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base de Riesz (un frame exacto) de V_0 si y solo si $|\mathcal{N}_\phi|_n = 0$.*

No daremos aquí la prueba del lema anterior porque es completamente similar al caso $L^2(\mathbf{R})$ (cf. [13], pp. 143–145; [3], 395–398). Por otro lado, diferentes versiones de los siguienes lemas 5.3–5.6 han aparecido en varias publicaciones. En particular, en el caso $n = 1$ una de las mejores referencias es [13].

Lema 5.3. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y supongamos que $\{\tau_\mathbf{k}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una sucesión frame, entonces una función f está en V_j, $j \in \mathbf{Z}$, donde V_j está definido por (5.2), si y solo si existe una función $F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que*

$$D^j\widehat{f}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{5.7}$$

La función F está unicamente determinada si asumimos que $F(\mathbf{t}) = 0$ cuando $\mathbf{t} \in \mathcal{N}_\phi$.

Demostración. Dada $f \in V_j$, entonces $f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}} D^j \tau_{\mathbf{k}}\phi$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$. Si tomamos transformada de Fourier en esta expresión, tenemos que

$$\widehat{f}(\mathbf{t}) = D^{-j} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_k e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{t}} \widehat{\phi}(\mathbf{t}).$$

Así, se verifica (5.7) con $F(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{t}}$. Evidentemente, cualquier función $F_1 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que $F_1(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})$ para $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{N}_\phi$ satisface la condición (5.7). Además, la función F estará univocamente determinada si suponemos que $F(\mathbf{t}) = 0$, cuando $\mathbf{t} \in \mathcal{N}_\phi$.

Por otro lado, supongamos que para una función $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ tenemos que se cumple (5.7), donde $F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ es una función $\mathbf{Z}^n$-periódica. Si escribimos $F(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{-2\pi i\mathbf{k}\cdot\mathbf{t}}$ tenemos que $f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c_k D^j \tau_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{t})$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, y por lo tanto $f \in V_j$. $\square$

En el siguiente lema se dan condiciones necesarias y suficientes para que $V_j \subset V_{j+1}$.

Lema 5.4. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y supongamos que $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una sucesión frame. Si los subespacios V_j, $j \in \mathbf{Z}$, están definidos por (5.2), entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- **a**) *$\forall j \in \mathbf{Z}$, $\quad V_j \subset V_{j+1}$;*
- **b**) *Existe $H \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, una función $\mathbf{Z}^n$-periodica tal que se verifica (5.6).*

Demostración. Empecemos probando la implicación **a**)$\Rightarrow$**b**). Si tenemos **a**) entonces $D^{-1}\phi \in V_0$. Así, de acuerdo con el Lema 5.3 existe $F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que $\widehat{D^{-1}\phi}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t})$. Por otro lado, $\widehat{D^{-1}\phi}(\mathbf{t}) = 2^{n/2}\widehat{\phi}(2\mathbf{t})$, con lo que

$$\widehat{\phi}(2\mathbf{t}) = 2^{-n/2}F(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}),$$

donde $H(\mathbf{t}) = 2^{-n/2}F(\mathbf{t})$, $H \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Redefinimos H que sea cero en el conjunto $\mathcal{N}_\phi$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi_\phi(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = \sum_{\mathbf{k}\in(2\mathbf{Z})^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}\notin(2\mathbf{Z})^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t}+\mathbf{k})|^2 = |H(\mathbf{t}/2)|^2\Phi_\phi(\mathbf{t}/2) + R(\mathbf{t})\end{aligned}$$

donde $R(\mathbf{t})$ es no negativa. Ahora, por el Lema 5.2, para cualquier $\mathbf{t} \notin \mathcal{N}_\phi$

$$B \geq \Phi_\phi(2\mathbf{t}) \geq |H(\mathbf{t})|^2\Phi_\phi(\mathbf{t}) \geq A|H(\mathbf{t})|^2$$

y por lo tanto, $|H(\mathbf{t})| \leq B/A$.

Finalmente, para probar **b**)$\Rightarrow$**a**) dada $f \in V_j$, el Lema 5.3 nos dice que existe una función $F \in L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$D^j\widehat{f}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) = F(\mathbf{t})H(\frac{\mathbf{t}}{2})\widehat{\phi}(\frac{\mathbf{t}}{2}).$$

Así,

$$D^{j+1}\widehat{f}(\mathbf{t}) = 2^{\frac{n}{2}}F(2\mathbf{t})H(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}),$$

y como $F(2\mathbf{t})H(\mathbf{t}) \in L^2(\mathbb{T}^n)$, de acuerdo con el Lema 5.3 podemos concluir que $f \in V_{j+1}$. $\square$

Lema 5.5. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y supongamos $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es un frame de V_0, donde V_0 está definido por (5.2). Entonces el operador frame S y su inverso S^{-1} conmutan con el operador traslación $\tau_{\mathbf{k}}$ para cualquier $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$.*

Demostración. La prueba está basada en la siguiente identidad obvia:

$\langle \tau_{\mathbf{m}} h, \tau_{\mathbf{m}} g\rangle = \langle h, g\rangle$ para cualquier $h, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$, y para todo $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n$.

Dada $g \in V_0$ tenemos que

$$Sg = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle g, \tau_{\mathbf{k}}\phi\rangle \tau_{\mathbf{k}}\phi.$$

De esta manera, para cualquier $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n$

$$\tau_{\mathbf{m}} Sg = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle g, \tau_{\mathbf{k}}\phi\rangle \tau_{\mathbf{k}+\mathbf{m}}\phi = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle \tau_{\mathbf{m}} g, \tau_{\mathbf{k}+\mathbf{m}}\phi\rangle \tau_{\mathbf{k}+\mathbf{m}}\phi = S\tau_{\mathbf{m}} g.$$

Desde aquí obtenemos que $\tau_{\mathbf{m}} S^{-1} = S^{-1}\tau_{\mathbf{m}}$. □

Lema 5.6. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y supongamos que $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es un frame de V_0, donde V_0 está definido por (5.2). Entonces n*

$$\widehat{S^{-1}\phi} = \widehat{\phi} \cdot (\Phi_\phi)^{-1}.$$

Demostración. Denotamos $\varphi = S^{-1}\phi$, entonces, por el Lema 5.5 tenemos que

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle \phi, \tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle \tau_{\mathbf{k}}\phi.$$

Si aplicamos otra vez el Lema 5.5 obtenemos

$$\varphi = S^{-1}\phi = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle \phi, \tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle \tau_{\mathbf{k}}\varphi.$$

Así,

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle \phi, \tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} \widehat{\varphi}(\mathbf{t}). \tag{5.8}$$

De acuerdo con el Lema 5.3,

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{t}) = \eta(\mathbf{t})\widehat{\phi}(\mathbf{t}) \quad \text{para algún} \quad \eta \in L^2(\mathbb{T}^n). \tag{5.9}$$

Esto muestra que $\mathcal{N}_\varphi \supseteq \mathcal{N}_\phi$. Teniendo en cuenta que la última condición debería ser simétrica, concluimos que $|\mathcal{N}_\varphi \triangle \mathcal{N}_\phi|_n = 0$. De esta manera, desde la igualdad (5.8) tenemos que

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle \phi, \tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} = 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{N}_\phi.$$

Si examinamos los coeficientes de la serie anterior y aplicamos la igualdad de Plancherel, tenemos que

$$\langle \phi, \tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{\phi}(\mathbf{t})\overline{\widehat{\varphi}}(\mathbf{t}) e^{2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 \bar{\eta}(\mathbf{t}) e^{2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{T}^n} \Phi_\phi(\mathbf{t})\bar{\eta}(\mathbf{t}) e^{2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t}.$$

De esta manera, $\Phi_\phi(\mathbf{t})\eta(\mathbf{t}) = 1$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{N}_\phi$ y por lo tanto, desde (5.9) terminamos la prueba. □

Lema 5.7. *Sea* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *tal que* $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}}$ *es un frame de* V_0. *Además, sean* $V_j, j \in \mathbf{Z}^n$ *definidos por (5.2) y supongamos que se cumple la condición* **b**) *del Lema 5.4. Entonces si*

$$W = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n) \tag{5.10}$$

tenemos que para cualquier conjunto medible y acotado $E \subset \mathbf{R}^n, |E|_n \neq 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|2^{-j}E|} \int_{2^{-j}E} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2 (\Phi_\phi(\mathbf{t}))^{-1} d\mathbf{t} = 1. \tag{5.11}$$

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ una función tal que su transformada de Fourier es $\widehat{f} = \chi_E$, donde $E \subset \mathbf{R}^n, |E|_n \neq 0$ es un conjunto medible y acotado. En primer lugar, observamos que $\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 = |E|_n$. Sea P_j la proyección ortogonal sobre V_j. Entonces desde (5.10) tenemos que $\|f - P_j f\|_2 \to 0$. Así,

$$\|P_j f\|_2^2 \to \|f\|_2^2 = |E|_n. \tag{5.12}$$

Si denotamos $\varphi = S^{-1}\phi$, entonces el Lema 5.5, (5.2) y (5.1) nos dice que tendremos que $P_j f = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle f, D^j\tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle D^j \tau_{\mathbf{k}}\phi$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\|P_j f\|_2^2 &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \langle f, D^j\tau_{\mathbf{k}}\varphi\rangle \langle D^j\tau_{\mathbf{k}}\phi, P_j f\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \int \widehat{f}(\mathbf{t})\overline{\widehat{D^j\tau_{\mathbf{k}}\varphi}(\mathbf{t})} d\mathbf{t} \int \overline{\widehat{f}}(\mathbf{t}) \widehat{D^j\tau_{\mathbf{k}}\phi}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} 2^{-jn} \int \widehat{f}(\mathbf{t}) \overline{\widehat{\varphi}}(2^{-j}\mathbf{t}) e^{-2\pi i 2^{-j}\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t} \int \overline{\widehat{f}}(\mathbf{t}) \widehat{\phi}(2^{-j}\mathbf{t}) e^{2\pi i 2^{-j}\langle \mathbf{k},\mathbf{t}\rangle} d\mathbf{t} \\
&= 2^{jn} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \int \widehat{f}(2^j\mathbf{x}) \overline{\widehat{\varphi}}(\mathbf{x}) e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x} \int \overline{\widehat{f}}(2^j\mathbf{x}) \widehat{\phi}(\mathbf{x}) e^{2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x} \\
&= 2^{jn} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} \int_{2^{-j}E} \overline{\widehat{\varphi}}(\mathbf{x}) e^{-2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x} \int_{2^{-j}E} \widehat{\phi}(\mathbf{x}) e^{2\pi i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Sea ahora j_0 el número natural mínimo tal que $2^{-j_0}E \subset [-\pi,\pi]^n$. Entonces para cualquier $j \geq j_0$ la última suma es igual a

$$2^{jn} \int \chi_{2^{-j}E}(\mathbf{t}) \widehat{\phi}(\mathbf{t}) \overline{\widehat{\varphi}}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Finalmente, de acuerdo con el Lema 5.6 y (5.12) obtenemos (5.11). □

Demostración del Teorema 5.1. Veamos la prueba de la implicación (**B**) $\Rightarrow$ (**A**). Desde las condiciones (5.5) y (5.6) obtenemos, si aplicamos el Lema 5.2 y el Lema 5.4, que $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es un frame de V_0 donde V_0 está definido por (5.2) y $V_j \subset V_{j+1}$ para cualquier $j \in \mathbf{Z}$. Tenemos que probar que se verifica la condición (iii) de FMRA. Afirmamos que W es invariante por traslaciones.
En primer lugar, vamos a probar que, dado $\mathbf{l} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \in \mathbf{Z}^n$ y dado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$, W es invariante por traslaciones por vectores de la forma $\mathbf{v} = [2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}] = (2^{\ell_1}m_1, ..., 2^{\ell_n}m_n)$. Para cualquier $f \in W$ y $\forall\varepsilon > 0$ podemos encontrar $h \in V_{j_0}$ tal que $\| f - h \|_2 < \varepsilon$. Desde la condición (ii) de

FMRA tenemos que si $j \geq j_0$, $h \in V_j$ y por lo tanto $h(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c^j_{\mathbf{k}}\phi(2^j\mathbf{x}-\mathbf{k})$. De esta manera,

$$\tau_{[2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}]}h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x} - [2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}]) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} c^j_{\mathbf{k}}\phi(2^j\mathbf{x} - 2^j[2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}] - \mathbf{k}).$$

Si $j > \text{máx}\{|\ell_i|, j_0\}$ entonces $\tau_{[2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}]}h \in V_j$, y por lo tanto, $\tau_{[2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}]}f \in W$. Además, al ser el conjunto $\{2^{\mathbf{l}}\mathbf{m}\}$ denso en $\mathbf{R}^n$, la clausura del subespacio W y la continuidad del operador $\tau_{\mathbf{u}}f$ como valor en $L^2(\mathbf{R}^n)$ respecto de $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ para una función fija $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, podemos concluir la invariancia por traslaciones del subespacio W.

Para probar que $W = L^2(\mathbf{R}^n)$ tomamos una función cualquiera $g \in W^{\perp}$. Entonces para cualquier $f \in W$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\overline{g(\mathbf{t})}d\mathbf{t} = 0$$

y por lo tanto, desde la identidad de Plancherel,

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i\langle \mathbf{t},\mathbf{x}\rangle}\widehat{f}(\mathbf{t})\overline{\widehat{g}(\mathbf{t})}d\mathbf{t} = 0.$$

Esto muestra que la transformada de Fourier de $\widehat{f}\overline{\widehat{g}}$ es identicamente cero, lo que nos lleva a que $\widehat{f}(\mathbf{y})\overline{\widehat{g}}(\mathbf{y}) = 0$ en c.t. $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Si en particular tomamos $f(\mathbf{x}) = \phi(2^j\mathbf{x}) \in V_j$, tenemos que $\widehat{f}(\mathbf{y}) = 2^{-nj}\widehat{\phi}(2^{-j}\mathbf{y})$, y entonces $\widehat{\phi}(2^{-j}\mathbf{y})\overline{\widehat{g}(\mathbf{y})} = 0$ en c.t.p. o $\widehat{\phi}(\mathbf{t})\overline{\widehat{g}(2^j\mathbf{t})} = 0$ en c.t. $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$. Así, de acuerdo con la condición (α) de (**B**), para cualquier entero positivo N existe $\delta_N, 0 < \delta_N < \frac{1}{2}$, tal que

$$|\{\mathbf{t} \in B_{\delta_N} : \widehat{\phi}(\mathbf{t}) = 0\}|_n < \frac{|B_{\delta_N}|_n}{N}.$$

Entonces para cualquier $j \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$|\{\mathbf{t} \in B_{\delta_N} : \widehat{g}(2^j\mathbf{t}) \neq 0\}|_n < \frac{|B_{\delta_N}|_n}{N}$$

y por lo tanto

$$|\{\mathbf{y} \in B_{2^j\delta_N} : \widehat{g}(\mathbf{y}) \neq 0,\}|_n < \frac{|B_{2^j\delta_N}|_n}{N}. \tag{5.13}$$

Fijamos un entero positivo p. Para cada N podemos encontrar un $j_N \in IN$ tal que

$$2^p \leq 2^{j_N}\delta_N < 2^{p+1}.$$

Así, desde la desigualdad (5.13) conseguimos

$$|\{\mathbf{y} \in B_{2^p} : \widehat{g}(\mathbf{y}) \neq 0,\}|_n < \frac{|B_{2^{p+1}}|_n}{N}.$$

Haciendo $N \to \infty$ obtenemos

$$|\{\mathbf{y} \in B_{2^p} : \widehat{g}(\mathbf{y}) \neq 0,\}|_n = 0.$$

Pero como p es un número arbitrario, llegamos a que $\widehat{g} = 0$ en c.t.p., y por lo tanto $W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Probemos ahora la implicación (**A**) $\Rightarrow$ (**C**). Desde el Lema 5.2 y el Lema 5.4 obtenemos inmeditamente las condiciones (5.5) y (5.6). Es obvio que

$$|\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2(\Phi(\mathbf{t}))^{-1} \leq 1 \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n. \tag{5.14}$$

Tenemos que mostrar que existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $|E|_n > 0$, tal que el origen es un punto de densidad de E y

$$\lim_{\substack{\mathbf{y} \to \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \in E}} |\widehat{\phi}(\mathbf{y})|^2(\Phi(\mathbf{y}))^{-1} = 1.$$

Supongamos que nuestra afirmación es falsa. Entonces, teniendo en cuenta (5.14), obtenemos que existe $0 < \varepsilon_0 < 1$ y una sucesión decreciente de números reales positivos $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, $r_1 < 1$, $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$ tal que

$$|G_j|_n = |\{\mathbf{y} \in B_{r_j} : |\widehat{\phi}(\mathbf{y})|^2(\Phi(\mathbf{y}))^{-1} < 1 - \varepsilon_0\}|_n \geq \varepsilon_0 |B_{r_j}|_n.$$

Para cualquier $j \in \mathbf{N}$ podemos encontrar $m_j \in \mathbf{N}$ tal que $2^{-m_j-1} \leq r_j < 2^{-m_j}$. Con lo que desde el Lema 5.7 y (5.11) tenemos

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{j\to\infty} |B_{2^{-m_j}}|_n^{-1} \int_{B_{2^{-m_j}}} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2(\Phi(\mathbf{t}))^{-1} d\mathbf{t} \\
&= \lim_{j\to\infty} |B_{2^{-m_j}}|_n^{-1} \left(\int_{B_{2^{-m_j}} \setminus G_j} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2(\Phi(\mathbf{t}))^{-1} d\mathbf{t} + \int_{G_j} |\widehat{\phi}(\mathbf{t})|^2(\Phi(\mathbf{t}))^{-1} d\mathbf{t} \right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} |B_{2^{-m_j}}|_n^{-1} \left(|B_{2^{-m_j}}|_n - |G_j|_n + (1-\varepsilon_0)|G_j|_n \right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} |B_{2^{-m_j}}|_n^{-1} \left(|B_{2^{-m_j}}|_n - \varepsilon_0^2 |B_{r_j}|_n \right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} |B_{2^{-m_j}}|_n^{-1} \left(|B_{2^{-m_j}}|_n - \varepsilon_0^2 |B_{2^{-m_j-1}}|_n \right) \leq 1 - \varepsilon_0^2 2^{-n}.
\end{aligned}$$

De esta manera, la contradicción obtenida termina la prueba. La implicación (**C**) $\Rightarrow$ (**B**) es trivial. Podemos dar por concluida la demostración del teorema. □

5.2. Caracterización de las funciones de escala en otros casos

Los resultados correspondientes para MRA son una consecuencia directa de nuestro principal resultado, pero nos gustaría formularlos aquí en virtud de la completitud del texto.

Definición 5.4. Se dice que una función $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *genera un MRA* si $\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una sucesión de Riesz y los subespacios definidos en (5.2) del espacio de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ satisface las condiciones (i) y (iii).

Probamos lo siguiente.

Teorema 5.8. *Sea $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A_1) *ϕ genera un MRA;*

(B_1) *Se cumplen las condiciones* (α), (γ) *del Teorema 5.1 y*

(β_1) *Existen dos constantes positivas* A *y* B *tales que*

$$A \leq \Phi_\phi(\mathbf{t}) \leq B \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbb{T}^n. \tag{5.15}$$

(C_1) *Tenemos las condiciones* (α^*), (γ) *del Teorema 5.1 y además la condición* (β_1).

Si la función $\phi \in V_0$ es tal que $\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base ortonormal de V_0 entonces de acuerdo con el Lema A del Capítulo 1, sabemos que $\Phi_\phi(\mathbf{t}) = 1$ en c.t.p., y obtenemos el Teorema 1.13.

Se puede encontrar el siguiente teorema de forma implícita en [6]. Desde él, podemos caracterizar las fuciones de escala para un MRA, donde la condición (iv) se reemplaza por la siguiente

(iv)** $V_0 = \overline{\text{span}}\{\phi(\mathbf{x}-\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$.

Teorema 5.9. *Sea* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *y* $V_0 = \overline{span}\{\tau_{\mathbf{k}}\phi\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$. *Entonces existe una función* $g \in V_0$ *tal que* $\{\tau_{\mathbf{k}} g\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ *es un tight frame de* V_0 *donde podemos tomar las constantes* $A = B = 1$.

Desde el Teorema 5.1 y el Teorema 5.9 obtenemos lo siguiente.

Teorema 5.10. *Sea* $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(A_3) *Se cumplen las condiciones (i),(ii), (iii) y* (*iv*)**;

(B_3) *La función* $\widehat{\phi}$ *es localmente distinta de cero en el origen, y existe* $G \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, *una función* $\mathbf{Z}^n$*-periódica, tal que*

$$\widehat{\phi}(\mathbf{t})\left(\Phi_\phi(\mathbf{t})\right)^{-1/2} = G(\mathbf{t}/2)\widehat{\phi}(\mathbf{t}/2)\left(\Phi_\phi(\mathbf{t}/2)\right)^{-1/2} \qquad \text{en c.t. } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n; \tag{5.16}$$

(C_3) *El origen es un punto de continuidad aproximativa de la función* $|\widehat{\phi}|^2 \cdot (\Phi_\phi)^{-1}$ *si tomamos* $|\widehat{\phi}(\mathbf{0})|^2 \cdot (\Phi_\phi(\mathbf{0}))^{-1} = 1$, *y existe* $G \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, *una función* $\mathbf{Z}^n$*-periódica tal que se verifica (5.16).*

Apéndice A

APÉNDICE

A.1. Espacios vectoriales y aplicaciones adjuntas

Los espacios vectoriales con los que trabajamos son espacios vectoriales reales o complejos.

Sea W un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 dos subespacios de W, denotamos

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Definición A.1. Sean W_1 y W_2 dos subespacios de un espacio vectorial W. Se dice que W es *suma directa* de W_1 y W_2, y escribimos $W = W_1 \bigoplus W_2$, si $W = W_1 + W_2$ y $W_1 \bigcap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

La siguiente proposición nos da una caracterización de la suma directa.

Proposición A.1. *Sea W un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 dos subespacios de W. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) $W = W_1 \bigoplus W_2$*;*

(ii) Para todo $\mathbf{v} \in W$ existe una descomposición única de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_1 \in W_1$ y $\mathbf{v}_2 \in W_2$.

Definición A.2. Sea W un espacio vectorial y sea $A : W \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Un subespacio vectorial W_1 de W se llama *invariante* respecto de A si $AW_1 \subset W_1$.

Definición A.3. Si sobre un espacio vectorial W se ha definido un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se dice que W es un *espacio con producto interior*. Si además, W tiene dimensión finita, se dice que W es un *espacio Euclídeo.*

Dado un espacio con producto interior W, decimos que $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ son *vectores ortogonales* si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ y además, se dice que dos subespacios W_1 y W_2 de W son *subespacios ortogonales*, y lo escribiremos como $W_1 \perp W_2$, si todos los vectores de W_1 son ortogonales a todos los vectores de W_2.

Definición A.4. Sea W un espacio con producto interior y sea W_1 un subespacio de W. Al subespacio

$$W_1^{\perp} = \{\mathbf{w} \in W \ : \ \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{v} \in W_1\}$$

se le llama el *complemento ortogonal* de W_1 en W.

Recordamos también (ver [52, pág. 246], [47, pág. 237]) que si W es un espacio euclídeo y $A : W \longrightarrow W$ es una aplicación lineal, existe una única aplicación lineal, llamada *aplicación adjunta* de A, $A^* : W \longrightarrow W$ tal que

$$\langle A\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \ = \ \langle \mathbf{w}, A^*\mathbf{v} \rangle \quad \text{para cualquier } \mathbf{w}, \mathbf{v} \in W.$$

Si $A = A^*$ se dice que A es una *aplicación autoadjunta*.

Proposición A.2. *Dado W un espacio con producto interior y una aplicación $A : W \longrightarrow W$, si W_1 es un subespacio invariante respecto de A, entonces $W_1^{\perp}$ es un subespacio invariante respecto de A^*.*

Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial W tales que tienen dimensión finita y $W_1 \bigcap W_2 = \emptyset$. Además, sean $A_\mu : W_\mu \longrightarrow W_\mu$, $\mu = 1, 2$, dos aplicaciones lineales, entonces denotamos por $A_1 \otimes A_2$ la aplicación definida en $W_1 + W_2$ tal que

$$(A_1 \otimes A_2)(w_1 + w_2) = A_1 w_1 + A_2 w_2$$

donde $w_\mu \in W_\mu$, $\mu = 1, 2$.

Sea W_1 un subespacio de un espacio vectorial W y además, sea $A : W \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Denotamos por $A|_{W_1}$ la restricción de la aplicación A sobre los elementos de W_1.

A.2. Espacios de Banach y espacios de Hilbert

Un espacio vectorial W en el que se ha introducido una norma, $\| \cdot \|$, se llama *espacio normado*, y a un espacio normado completo se le llama *espacio de Banach*.

En un espacio con producto interior W es fácil ver que se puede definir una norma para cada $\mathbf{x} \in W$ de la siguiente manera,

$$\| \mathbf{x} \| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{A.1}$$

Algunas propiedades que relacionan la norma con el producto interior son las siguientes.

Proposición A.3. (Ley del Paralelogramo) *En un espacio con producto interior W siempre se cumple*

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 + \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 = 2 \| \mathbf{x} \|^2 + 2 \| \mathbf{y} \|^2 \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Proposición A.4. (Identidad de Polarización) *En un espacio real con producto interior W, se cumple*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 - \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Además, en un espacio complejo con producto interior W, se cumple

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 - \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 + i \| \mathbf{x} + i\mathbf{y} \|^2 - i \| \mathbf{x} - i\mathbf{y} \|^2) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Hemos visto que a partir de un producto interior se puede definir una norma. Lo que nos gustaría saber ahora es cuándo una norma proviene de un producto interior. Encontramos una respuesta en la siguiente proposición.

Proposición A.5. *Sea W un espacio vectorial con la norma $\| \cdot \|$. Si esta norma cumple la ley del paralelogramo, entonces proviene de un producto interior.*

Si W es un espacio con producto interior y es completo con respecto a la norma definida en (A.1), se dice que W es un *espacio de Hilbert.*

Un ejemplo de espacio de Hilbert es $\mathbf{R}^n$ si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ definimos un producto interior como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Otro ejemplo es $\mathbf{C}^n$ si definimos sobre él el producto interior

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n.$$

Veremos algunos ejemplos de espacios de Banach y de Hilbert en dimensión infinita.

Sea (Ω, Λ, μ) un espacio de medida. Para cada $1 \leq p < \infty$, definimos

$$L^p(\Omega, \Lambda, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \ \mu\text{-medibles} \ : \ \int_\Omega | f(\mathbf{x}) |^p \, d\mu(\mathbf{x}) < \infty\} / \sim$$

donde $f \sim g$ si y solo si $\mu\{\mathbf{x} \in \Omega \ : \ f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\} = 0$. Además, junto con el espacio cociente anterior definimos para cada $f \in L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$ la norma

$$\| f \|_{L^p(\Omega,\Lambda,\mu)} = (\int_\Omega | f(\mathbf{x}) |^p \, d\mu(\mathbf{x}))^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, definimos

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega, \Lambda, \mu) \quad = \quad & \{f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C} \ \ \mu\text{-medibles} \ : \ \exists M > 0 \\ & \text{con} \ \ | f(\mathbf{x}) | \leq M \text{ en c.t. } \mathbf{x} \in \Omega\} / \sim \end{aligned}$$

junto con la siguiente norma, para cada $f \in L^\infty(\Omega, \Lambda, \mu)$,

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega,\Lambda,\mu)} = \text{ínf}\{C \in \mathbf{R} \text{ tal que } \ \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : | f(\mathbf{x}) | \geq C\} = 0\}.$$

En la práctica no pensaremos en los elementos de $L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ como clases de equivalencia de funciones, sino como funciones definidas en c.t.p., relegando la anterior distinción como dice Rudin " ... al status de un entendimiento tácito".

Todos los espacios $L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ son espacios de Banach, pero en el único en el que se cumple la ley del paralelogramo es en $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$; así el único espacio de entre todos los $L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, que es un espacio de Hilbert es $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$.

Una forma explícita de escribir el producto interior del cual proviene la norma en $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ es

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mu(\mathbf{x}) \quad \forall f, g \in L^2(\Omega, \Lambda, \mu).$$

Si μ es la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^n$ escribiremos, simplemente por comodidad en la notación, $L^p(\mathbf{R}^n)$ o $L^p([0,1]^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dependiendo de donde estemos trabajando. Si escribimos $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, entenderemos además que la función f está definida sobre todo el espacio $\mathbf{R}^n$ como una función $\mathbf{Z}^n$-periódica.

Si μ es la medida cardinal en un conjunto I, se acostumbra denotar el correspondiente espacio L^p por $l^p(I)$, o simplemente por l^p si I es numerable. Un elemento de l^p puede ser considerado como una sucesión compleja $x = \{x_j\}_{j\in I}$ y

$$\| x \|_{l^p} = (\sum_{j\in I} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $1 \leq p < \infty$, diremos que $f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n)$ si para cualquier conjunto medible y acotado $E \in \mathbf{R}^n$, tenemos que $\chi_E f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, donde

$$\chi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in E \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin E \end{cases}$$

Algunas propiedades de los espacios de Hilbert son las siguientes.

Teorema A.6. *Si W_1 es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert W, entonces $W = W_1 \bigoplus W_1^\perp$.*

El teorema anterior implica que cada vector $\mathbf{v}$ de W posee una descomposición única de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ con $\mathbf{w} \in W_1$ y $\mathbf{u} \in W_1^\perp$. El vector $\mathbf{w}$ recibe el nombre de proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre W_1 y se escribe $\mathbf{w} = P_{W_1}(\mathbf{v}) \equiv P(\mathbf{v})$. Además, se puede demostrar que $P(\mathbf{v})$ es el único elemento de W_1 tal que

$$\| \mathbf{v} - P(\mathbf{v}) \| = \text{ínf}\{\| \mathbf{v} - \mathbf{w} \| \; : \; \mathbf{w} \in W_1\}.$$

El ángulo que forma un vector $\mathbf{v} \in W$ con un subespacio vectorial W_1 se define como el ángulo que forma el vector $\mathbf{v} \in W$ con el vector $P(\mathbf{v})$, por lo tanto,

$$\cos \measuredangle(\mathbf{v}, W_1) = \cos \measuredangle(\mathbf{v}, P(\mathbf{v})) = \frac{\langle \mathbf{v}, P(\mathbf{v})\rangle}{\| \mathbf{v} \| \| P(\mathbf{v}) \|} = \frac{\| P(\mathbf{v}) \|}{\| \mathbf{v} \|}. \tag{A.2}$$

A.3. Matrices de una aplicación lineal

En esta sección V y W denotarán dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo y $A : V \longrightarrow W$ será una aplicación lineal. Al espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales $A : V \longrightarrow W$ lo denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$, si $V = W$ entonces la notación será $\mathcal{L}(V)$ y si $V = W = \mathbf{R}^n$ escribiremos simplemente $\mathcal{L}$. Una de las más importantes herramientas en el estudio de las aplicaciones lineales sobre espacios vectoriales finito dimensionales es el concepto de matriz asociada a una aplicación lineal. Procedemos a explicarlo con más detalle.

Sea $\Delta = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_d\}$ una base de V y sea $\Upsilon = \{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\}$ una base de W. Puesto que todo vector de W es una combinación lineal de los elementos de la base Υ, podemos escribir

$$A\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathbf{y}_j \qquad i = 1, 2, ..., d.$$

Así, diremos que la matriz asociada a la aplicación A con respecto de las bases Δ y Υ, la cual denotaremos por $[A]_{\Delta}^{\Upsilon}$, es

$$[A]_{\Delta}^{\Upsilon} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ .. & .. & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{md} \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que la i-ésima columna de la matriz de la aplicación lineal A con respecto a las bases Δ y Υ son las componentes de $A\mathbf{x}_i$ con respecto de la base Υ de W.

Cuando no sea necesario indicar las bases Δ y Υ que se consideran en los espacios V y W respectivamente, escribiremos la matriz asociada a la aplicación lineal $A : V \longrightarrow W$ respecto de las bases Δ y Υ por $[A]$. En el caso particular en que $V = W = \mathbf{R}^n$ y la base que tengamos para $\mathbf{R}^n$ sea la base canónica, utilizaremos la misma letra para denominar a la aplicación lineal y a su matriz asociada con respecto de la base canónica, siempre que esta economía en la notación no sea causa de confusión. Además, cuando nos refiramos a la matriz asociada de una aplicación lineal $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ y no especifiquemos la base respecto de la que la estamos escribiendo, siempre será respecto de la base canónica ordenada.

Dada $\Delta = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_d\}$ una base de V y dada $A : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal, $A \longrightarrow [A]_{\Delta}^{\Delta}$ es una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todas las aplicaciones lineales en V y el conjunto de todas las matrices $d \times d$. (ver [39, pág. 85]; [47, pág. 80]).

Si $\Delta = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_d\}$ es una base de V y $\Upsilon = \{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\}$ es una base de W. Sea $A : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal donde $[A]_{\Delta}^{\Upsilon}$ es la matriz asociada de A con respecto de las bases Δ y Υ. Sean $\Delta' = \{\mathbf{x}'_1, ..., \mathbf{x}'_d\}$ y $\Upsilon' = \{\mathbf{y}'_1, ..., \mathbf{y}'_m\}$ otras dos bases de V y de W respectivamente, donde $[A]_{\Delta'}^{\Upsilon'}$ es la matriz asociada de A con respecto de Δ' y de Υ'. Entonces

$$[A]_{\Delta'}^{\Upsilon'} = D^{-1}[A]_{\Delta}^{\Upsilon}C, \tag{A.3}$$

donde C, $d_C > 0$, es la matriz $d \times d$ de cambio de base de Δ a Δ', y D, $d_D > 0$, es la matriz $m \times m$ de cambio de base de Υ a Υ'.

Definición A.5. Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ una matriz tal que $a_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, y sea otra matriz $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ tal que $a'_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Se dice que A es *semejante* a A', y denotaremos por $A \sim A'$, si existe una matriz $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ tal que $c_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, con $d_C > 0$ y tal que $A' = C^{-1}AC$.

De esta manera, podemos decir que $[A]_{\Delta'}^{\Delta'}$ y $[A]_{\Delta}^{\Delta}$ son matrices semejantes.

A.4. Autovalores, autovectores y Teorema espectral

Definición A.6. Dado W un espacio vectorial real (o complejo) y dada una aplicación $A \in \mathcal{L}(W)$, un vector $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, se llama *vector propio* o *autovector* de la aplicación A si existe un escalar λ en $\mathbf{R}$ (o en $\mathbf{C}$) tal que $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$; este número λ se denomina *valor propio* o *autovalor* de la aplicación A correspondiente al autovector $\mathbf{w}$.

Definición A.7. Sea W un espacio vectorial real (o complejo) y sea $A \in \mathcal{L}(W)$. Se dice que A es *diagonalizable* si existe una base de W formada por autovectores de A.

Definición A.8. Una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,...n}$ tal que $a_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, se llama *diagonalizable* en $\mathbf{R}$ (o en $\mathbf{C}$) si la aplicación lineal $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ (o $A : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$) que tiene A como matriz asociada es diagonalizable.

De esta definición se deduce que una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,...n}$ con $a_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, es diagonalizable en $\mathbf{R}$ (o en $\mathbf{C}$) si existe una matriz diagonal $A' = (a'_{ij})_{i,j=1,...n}$ con $a'_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, tal que $A \sim A'$.

En el siguiente teorema encontramos una caracterización de los autovalores de una aplicación lineal.

Teorema A.7. *Sea W un espacio vectorial n dimensional sobre $\mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$). Sea $A : W \longrightarrow W$ una aplicación lineal y sea $\mu \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$). Las tres siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *El escalar μ es un autovalor de A.*

(2) *La aplicación $A - \mu I : W \longrightarrow W$ es una aplicación no invertible, donde I es la aplicación identidad.*

(3) $\det[A - \mu I] = 0$, *donde $[A - \mu I]$ es una matriz asociada a la aplicación $A - \mu I$ con respecto de una base cualquiera de W.*

Definición A.9. Sea una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,...n}$ tal que $a_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Se dice que $\mu \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$) es un autovalor de A si $\det(A - \mu I) = 0$, donde I denota la matriz identidad.

El desarrollo de la expresión $\det(A - \mu I)$ tal y como lo hemos encontrado en la definición anterior, nos lleva a un polinomio en μ de grado exactamente n. A este polinomio se le denomina *polinomio característico* de la matriz A y a la ecuación $\det(A - \mu I) = 0$ se le llama *ecuación característica* de A. Una propiedad de los polinomios característicos viene escrita en la siguiente proposición

Proposición A.8. *Sea una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,...n}$ tal que $a_{ij} \in \mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Y sea otra matriz A' tal que $A \sim A'$. Entonces A y A' tienen el mismo polinomio característico.*

Como los autovalores de A son las raíces en $\mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$) de la ecuación característica $\det(A - \mu I) = 0$ entonces el **Teorema Fundamental del Álgebra** nos dice que la ecuación $\det(A - \mu I) = 0$ tiene n soluciones complejas contando cada una con su multiplicidad. Pero no podemos asegurar que $\det(A - \mu I) = 0$ tenga n soluciones reales, con lo que una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,...n}$ tal que $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, puede no tener ningún autovalor real.

En el caso de las aplicaciones lineales, dada una aplicación lineal $A : W \longrightarrow W$ donde W es un espacio vectorial real (o complejo) y de dimensión finita, tenemos que dos matrices asociadas a W respecto de dos bases diferentes de W son semejantes, entonces la Proposición A.8 nos dice que podemos definir el polinomio característico de la aplicación A como el polinomio característico de cualquier matriz asociada a la aplicación A respecto de cualquier base.

En el caso particular de aplicaciones lineales $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ podemos asegurar que no todas estas aplicaciones tienen autovalores reales, por eso en muchas ocaciones es conveniente extender la definición de la aplicación A sobre los complejos $\widetilde{A} : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ de la siguiente manera, dado $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$,

$$\widetilde{A}\mathbf{u} = A\mathbf{v} + iA\mathbf{w}.$$

Así ya podemos asegurar que $\widetilde{A}$ tendrá n autovalores complejos.

La siguiente definición la podemos encontrar en [47, p. 177].

Definición A.10. Sea W un espacio euclídeo y sean $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(W)$. Se dice que A_1, A_2 son simultáneamente diagonalizables si existe una base de W formada por vectores propios de A_1 y de A_2 simultáneamente.

Escribiremos a continuación el Teorema Espectral para el caso de un espacio euclídeo y una aplicación autoadjunta.

Teorema Espectral. *Sea W un espacio euclídeo y sea $A : W \longrightarrow W$ una aplicación lineal autoadjunta. Entonces existe una base ortonormal de W formada por vectores propios de A.*

Una consecuencia de la anterior versión del *Teorema Espectral* (ver [39, Theorem 1, p.156]) es que para cualquier aplicación lineal autoadjunta A en $\mathbf{R}^n$ existen U_i, $i = 1, ..., k$ subespacios de $\mathbf{R}^n$ formados por los autovectores asociados al autovalor μ_i (necesariamente real), $i = 1, ..., k$, de A, tales que son mutuamente ortogonales, invariantes respecto de A y $\mathbf{R}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$. Además, podemos escribir $A = \otimes_{i=1}^k A_i$ donde $A_i := A\,|_{U_i}$ son homotecias dadas por $\mathbf{x}_i \to \mu_i \mathbf{x}_i$, $\forall \mathbf{x}_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Para cada $i = 1, ..., k$ podemos encontrar una base ortonormal de U_i,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_{m_0+\ldots+m_{i-1}+1}, ..., \mathbf{u}_{m_0+\ldots+m_{i-1}+m_i}\}$$

donde m_i es la multiplicidad del autovalor μ_i y $m_0 = 0$ por convenio. Sea

$$C = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & ... & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & ... & u_2^{(n)} \\ .. & ... & .. \\ u_n^{(1)} & ... & u_n^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad d_C = 1 > 0,$$

donde $\mathbf{u}_l = (u_1^{(l)}, ..., u_n^{(l)})$, $l = 1, ..., n$, y sea $C : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es C. Entonces $A = CJC^{-1}$, donde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbf{R},\ i = 1, ..., n$$

y los números λ_i son los correspondietes autovalores de A escritos sin multiplicidad.

Nos gustaría mencionar que en el caso general de aplicaciones lineales M en $\mathbf{R}^n$, podemos, de forma similar, encontrar una descomposición $\mathbf{R}^n = U_1 \oplus, \ldots, \oplus U_k$ la cual no es necesariamente ortogonal. Ver [39, Theorem 2, p.113].

Recordamos que una aplicación lineal $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ se llama *positiva* si es una aplicación lineal autoadjunta y todos sus autovalores (los cuales son necesariamente reales) son positivos. Se puede observar que A^*A es una aplicación positiva. Llamamos $A = V\sqrt{A^*A}$ una *descomposición polar* para A donde V es una aplicación *ortogonal o unitaria* en $\mathbf{R}^n$, i.e. $V^*V = I$. (ver [39, pág. 205], [47]).

Sea $J : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ una aplicación lineal positiva, cuya matriz asociada viene dada por una matriz diagonal y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, \infty)$ los elementos en la diagonal, entonces si $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es un aplicación lineal tal que podemos escribir $A = CJC^{-1}$ donde C, $d_C > 0$, es una matriz $n \times n$, las potencias A^s, $s \in \mathbf{R}$, se definen como $A^s = CJ^sC^{-1}$ donde J^s es una matriz diagonal y sus elementos en la diagonal son $\lambda_1^s, ..., \lambda_n^s$.

A.5. Forma de Jordan

En esta sección mostraremos un teorema de clasificación de matrices que se atribuye a C. Jordan.

Denominamos matriz elemental de Jordan de orden $m \in \mathbf{N}$ y autovalor $\mu \in \mathbf{C}$ a la matriz $m \times m$, $J_m(\mu)$, cuyos elementos son todos nulos excepto los de la diagonal principal que valen μ y los situados inmediatamente encima de la diagonal principal que son unos.

$$J_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \end{pmatrix},$$

$$J_m(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & ... & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Llamamos matriz de Jordan a cualquier matriz cuadrada formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de la diagonal de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\mu_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\mu_2) & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & J_{m_k}(\mu_k) \end{pmatrix}.$$

Teorema de clasificación de Jordan. Toda matriz cuadrada (real o compleja) es semejante a una matriz de Jordan (compleja), determinada de manera única salvo por permutaciones de las matrices elementales de Jordan que la componen.

Obsérvese que la forma de Jordan de una matriz asociada con una aplicación lineal $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ puede ser compleja. Escribiremos una forma de Jordan real para A.

Si $\mu = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, es un autovalor complejo de A con $\beta \neq 0$, la forma de Jordan real de la matriz elemental de Jordan correspondiente al autovalor μ

vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

o por

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & ... & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de Jordan real de A se obtiene mediante yuxtaposición de matrices del tipo anterior y matrices elementales de Jordan correspondientes a los autovalores reales.

Definición A.11. Sea $A \in \mathcal{L}$. Se dice que A es isotrópica si es diagonalizable y todos sus autovalores (posiblemente complejos) tienen el mismo módulo.

Definición A.12. Sea $\widetilde{A} = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,...,n\}}$ tal que $a_{i,j} \in \mathbf{C}$, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Se dice que $\widetilde{A}$ es isotrópica si es diagonalizable y todos sus autovalores (posiblemente complejos) tienen el mismo módulo.

A.6. Operadores continuos y radio espectral

Se dice que un operador lineal $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ donde $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios normados, es un *operador continuo* cuando para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\mathbf{x_0} \in \mathbb{X}$ existe $\delta > 0$ tal que si $\| \mathbf{x_0} - \mathbf{x} \|_{\mathbb{X}} < \delta$ entonces $\| T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x_0}) \|_{\mathbb{Y}} < \varepsilon$.

Al espacio vectorial de todos los operadores lineales continuos $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ lo denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Dado un operador lineal $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ donde $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios normados, se dice que es un *operador acotado* si

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \| T(\mathbf{x}) \|_{\mathbb{Y}} \leq C \| \mathbf{x} \|_{\mathbb{X}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}.$$

Una forma de caracterizar la continuidad de un operador lineal viene reflejada en el siguiente resultado.

Proposición A.9. *Sea un operador lineal $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ donde $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son espacios normados, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) T es continuo.

(ii) T es continuo en el punto $\mathbf{0} \in \mathbb{X}$.

(iii) T es continuo en algún punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{X}$.

(iv) T es acotado.

Se define la norma del operador $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ en el espacio vectorial $\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ como

$$\| T \| = \text{ínf}\{C > 0 : \| T(\mathbf{x}) \|_{\mathbb{Y}} \leq C \| \mathbf{x} \|_{\mathbb{X}}\},$$

y de forma equivalente,

$$\| T \| = \sup\{\| T(\mathbf{x}) \|_{\mathbb{Y}} : \| \mathbf{x} \|_{\mathbb{X}} \leq 1\} = \sup\{\| T(\mathbf{x}) \|_{\mathbb{Y}} : \| \mathbf{x} \|_{\mathbb{X}} = 1\}.$$

Esta norma así definida satisface que dados $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ tres espacios normados, y dados además, $T \in \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ y $S \in \mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{Z})$, entonces

$$\| ST \| \leq \| S \| \| T \| . \tag{A.4}$$

Algunos ejemplos de operadores lineales continuos son los siguientes.

Toda aplicación lineal $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es un operador lineal continuo.

Para todo $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ definimos el *operador traslación* $\tau_{\mathbf{a}} : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ como $\tau_{\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.

Dada $A \in \mathcal{L}$ con $d_A > 0$, definimos el *operador dilatación* $D_A : L^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ por medio de $D_A f(\mathbf{x}) = d_A^{\frac{1}{2}} f(A\mathbf{x})$. El término $d_A^{\frac{1}{2}}$ se incluye para que D_A tenga norma 1.

Definición A.13. Sea $A \in \mathcal{L}$. Definimos el *radio espectral* de A, $\rho(A)$, como

$$\rho(A) = \text{máx}\{| \mu | : \mu \text{ es un autovalor de } A\}.$$

Algunas propiedades del radio espectral vienen dadas en la siguiente proposición. (Ver [64, pág. 192]).

Proposición A.10. *Sea $A \in \mathcal{L}$ y sea $\rho(A)$ el radio espectral de A, entonces*

(*1*) $\rho(A) \leq \| A \|$;

(*2*) *existe* $\text{lím}_{j \longrightarrow \infty} \| A^j \|^{\frac{1}{j}} = \rho(A)$.

A.7. Aplicaciones lineales expansivas

Definición A.14. Sea $A \in \mathcal{L}$. Se dice que A es una *aplicación expansiva* si

$$\exists C > 0,\ \exists \beta > 1 \text{ tal que } \forall j \in \mathbf{N}, \| A^j \mathbf{x} \| \geq C\beta^j \| \mathbf{x} \|,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{A.5}$$

Denotaremos por $\mathcal{LE}$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales expansivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ y denotaremos por $\mathcal{LEP}$ al conjunto de todas la aplicaciones lineales expansivas y positivas $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$.

Observación A.11. Si $A \in \mathcal{LE}$ y se cumple (A.5) entonces

$$\forall j \in \mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \| A^{-j} \mathbf{x} \| \leq C^{-1} \beta^{-j} \| \mathbf{x} \|,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{A.6}$$

Lema A.12. *Sea $A \in \mathcal{L}$. La aplicación A es expansiva si y solo si todos los autovalores (posiblemente complejos) de A tienen módulo estrictamente mayor que 1.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Haremos la demostración por reducción al absurdo. Sea μ un autovalor real o complejo de A tal que $\mid \mu \mid \leq 1$ y sea $\mathbf{u}$ un autovector asociado al autovalor μ, para cada $j \in \mathbf{N}$,

$$\| A^j \mathbf{u} \| = \mid \mu^j \mid \| \mathbf{u} \| \leq \| \mathbf{u} \|, \tag{A.7}$$

donde la última desigualdad es cierta ya que $\mid \mu \mid \leq 1$. Por lo tanto, la desigualdad (A.7) contradice la definición de aplicación lineal expansiva ya que si existieran $C > 0$ y $\beta > 1$ que cumplen (A.5), existiría un $j_0 \in \mathbf{N}$ tal que $C\beta^{j_0} > 1$ y por lo tanto

$$\| A^{j_0} \mathbf{u} \| > \| \mathbf{u} \| .$$

$\Longleftarrow$) Como todos los autovalores de A tienen módulo estrictamente mayor que 1, entonces todos los autovalores de A^{-1} tienen módulo estrictamente menor que 1, de esta manera $\rho(A^{-1}) < 1$. Además, la Proposición A.10 nos dice que

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \| A^{-j} \|^{\frac{1}{j}} = \rho(A^{-1}),$$

en particular, si fijamos $\varepsilon = \frac{1-\rho(A^{-1})}{2}$, $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$ tenemos que

$$\mid \rho(A^{-1}) - \| A^{-j} \|^{\frac{1}{j}} \mid < \varepsilon,$$

y de aquí, $\forall j \geq j_0$,

$$\| A^{-j} \| < (\rho(A^{-1}) + \varepsilon)^j. \tag{A.8}$$

Hacemos la observación de que si denotamos $\alpha = \rho(A^{-1}) + \varepsilon$, entonces $\alpha < 1$.

Tomamos $C := \max\{1, (\frac{\|A^{-1}\|}{\rho(A^{-1})})^j \text{ si } j \in \{0, ..., j_0\}\}$. Entonces, de acuerdo con la desigualdad (A.8), $\forall j \geq j_0$ tenemos que

$$\| A^{-j} \| \leq \alpha^j \leq \alpha^j C. \tag{A.9}$$

Ahora, vamos a comprobar que también se cumple la desigualdad (A.9) si $j \in \{0, ..., j_0\}$. De acuerdo con la desigualdad (A.4) y por cómo hemos tomado C, si $j \in \{0, ..., j_0\}$ tenemos que

$$\| A^{-j} \| \leq \| A^{-1} \|^j = \alpha^j \frac{\| A^{-1} \|^j}{\alpha^j} = \alpha^j \frac{\| A^{-1} \|^j}{(\rho(A^{-1}) + \varepsilon)^j} \leq \alpha^j \frac{\| A^{-1} \|^j}{\rho(A^{-1})^j} \leq \alpha^j C. \tag{A.10}$$

De esta manera, desde la definición de norma de un operador, las desigualdades (A.9) y (A.10) nos dicen que $\forall j \in \mathbf{N}$

$$\| A^{-j} \mathbf{x} \| \leq \alpha^j C \| \mathbf{x} \|, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{A.11}$$

Finalmente, para comprobar que A cumple la definición de aplicación lineal expansiva, es suficiente con renombrar $\mathbf{y} = A^{-j}\mathbf{x}$ en (A.11).

Observación A.13. La prueba es cierta si tomamos cualquier ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(A^{-1})$.

$\square$

Como consecuencia del lema anterior, sabemos que si $A \in \mathcal{LE}$, entonces $d_A > 1$.

A.8. Transformada de Fourier

Una herramienta muy útil es la transformada de Fourier. En este texto, adoptamos el convenio de que *la transformada de Fourier* de la función $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ está definida por

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle} d\mathbf{x}.$$

La *transformada de Fourier inversa* de la función $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ será

$$\check{g}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} g(\mathbf{y}) e^{2\pi i \langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle} d\mathbf{y}.$$

La siguiente proposición recoge las principales propiedades de la transformada de Fourier que utilizaremos en este texto. (Ver [68]).

Proposición A.14. *Sea* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. *Sea* $A \in \mathcal{L}$ *con* $d_A > 0$, *y sea* $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$. *Entonces se verifica que*

(1) Si $g = \tau_{\mathbf{a}} f$, *entonces* $\widehat{g}(\mathbf{t}) = \widehat{f}(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{a},\mathbf{t} \rangle}$.

(2) Si $g(\mathbf{x}) = D_A f(\mathbf{x})$, *entonces* $\widehat{g}(\mathbf{t}) = D_{A^{*-1}} \widehat{f}(\mathbf{t})$.

(3) Si $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *entonces* $\widehat{f}$ *es continua.*

(4) Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *entonces* f *es acotada.*

(5) Sea $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *tal que* $\widehat{f}(\mathbf{t}) = 0$ *en c.t.* $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n$, *entonces* $f(\mathbf{x}) = 0$ *en c.t.* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Teorema A.15. *(***Identidad de Plancherel***) Sean* $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$. *Entonces*

$$\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle.$$

La densidad de $L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ en $L^2(\mathbf{R}^n)$ nos permite definir la transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$. En efecto, sea $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ y supongamos $\{f_j\}_{n \in \mathbf{N}} \subset L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ tal que

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \| f_j - f \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 0.$$

Entonces, el teorema de Plancherel nos dice que

$$\| \widehat{f}_j - \widehat{f}_l \|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \| f_j - f_l \|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{si } j, l \longrightarrow \infty,$$

con lo que $\{\widehat{f}_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbf{R}^n)$, y como $L^2(\mathbf{R}^n)$ es completo, la sucesión $\{\widehat{f}_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ tiene límite. Este límite sólo depende de f y no de la sucesión aproximante $\{f_j\}_{j \in \mathbf{N}}$. A este límite lo llamaremos *transformada de Fourier* en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Con esta definición, la transformada de Fourier es invertible en $L^2(\mathbf{R}^n)$ y se verifica, además, que la aplicación $f \longrightarrow \widehat{f}$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert de $L^2(\mathbf{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbf{R}^n)$.

A.9. Grupo cociente $\mathbf{Z}^n/A\mathbf{Z}^n$

Si tenemos $A \in \mathcal{L}$ que verifica además que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, podemos definir el siguiente grupo cociente $\mathbf{Z}^n/A\mathbf{Z}^n$ como el conjunto de las clases de equivalencia que se obtienen al definir en $\mathbf{Z}^n$ la siguiente relación de equivalencia,

$$\text{dados } \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbf{Z}^n, \quad \mathbf{k}_1 \equiv \mathbf{k}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \in A\mathbf{Z}^n.$$

Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$, entonces card$(\mathbf{Z^n}/A\mathbf{Z^n}) = d_A \geq 2$ (ver [34], [75]).

Denotamos por $\mathcal{E}_i$, $i = 0, ..., d_A - 1$, las diferentes clases de equivalencia del grupo cociente $\mathbf{Z}^n/A\mathbf{Z}^n$. Además, $\mathbf{p}_i$, $i = 0, ..., d_A - 1$, será un representante de la clase de equivalencia $\mathcal{E}_i$. Por comodidad tomamos $\mathbf{p}_0 = 0$.

Proposición A.16. *Sea $A \in \mathcal{L}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Dado $l \in \{0, ..., d_A - 1\}$, el conjunto $\{\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_i\}_{i=0}^{d_A-1}$ es un conjunto de representantes de cada una de las distintas clases de equivalencia de $\mathbf{Z}^n/A\mathbf{Z}^n$.*

Lema A.17. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Z}^n$. Con la notación anterior, dado $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces $\exists N \in \mathbf{N}$ tal que*

$$\mathbf{k} = A^{N-1}(\mathbf{p}_i) + A^N(\mathbf{q}_N) \quad \textit{con } 1 \leq i \leq d_A - 1 \;\; \textit{ý} \;\; \mathbf{q}_N \in \mathbf{Z}^n. \tag{A.12}$$

Demostración. Sea $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, entonces, podemos escribir

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}_i + A(\mathbf{q}_1) \quad \text{para algún } \mathbf{p}_i,\ 0 \leq i \leq d_A - 1, \text{ y donde } \mathbf{q}_1 \in \mathbf{Z}^n. \tag{A.13}$$

Ahora bien, si en la expresión (A.13) tenemos que $i \in \{1, ..., d_A - 1\}$, hemos terminado la prueba. Si por el contrario tenemos que $i = 0$ en (A.13), escribimos

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_i + A(\mathbf{q}_2) \quad \text{para algún } \mathbf{p}_i,\ 0 \leq i \leq d_A - 1, \text{ y donde } \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Z}^n \tag{A.14}$$

y volvemos a actuar como antes.

Como A es una aplicación expansiva, continuando con el desarrollo anterior, siempre llegaremos a que $\mathbf{k} = A^N(\mathbf{q}_N)$ donde $\mathbf{q}_N \in \mathbf{Z}^n$ tal que $\mathbf{q}_N \neq A(\mathbf{q}_{N+1})$ para todo $\mathbf{q}_{N+1} \in \mathbf{Z}^n$. De esta forma, podemos escribir

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{p}_i + A(\mathbf{q'}_{N+1}) \quad \text{para algún } \mathbf{p}_i,\ 0 \leq i \leq d_A - 1, \text{ y } \mathbf{q'}_{N+1} \in \mathbf{Z}^n,$$

pero $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_0 = 0$ ya que $\mathbf{q}_N \neq A(\mathbf{q}_{N+1})$, $\forall \mathbf{q}_{N+1} \in \mathbf{Z^n}$, por lo tanto,

$$\mathbf{k} = A^N(\mathbf{p}_i) + A^{N+1}(\mathbf{q}_{N+1}) \quad \text{con } 1 \leq i \leq d_A - 1 \;\; \text{ý} \;\; \mathbf{q}_{N+1} \in \mathbf{Z}^n.$$

$\square$

A.10. Bases y bases ortonormales

Definimos el concepto de base en los espacios de Banach $L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, $1 \leq p < \infty$.

Definición A.15. Se dice que el sistema $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, es una base de Schauder (o simplemente una base) de $L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, si para cualquier $f \in L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$ existe una única serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) f_j$ que converge a f en $L^p(\Omega, \Lambda, \mu)$, es decir,

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \| f - \sum_{j=1}^{N} a_j(f) f_j \|_{L^p(\Omega,\Lambda,\mu)} = 0.$$

Nuestro interés se centra en las bases ortogonales de $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$. Empecemos recordando qué es un sistema ortogonal.

Definición A.16. Llamaremos *sistema ortogonal* (SOG) a cualquier conjunto $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ de funciones que sean ortogonales dos a dos, es decir, que cumplan

$$\langle f_j, f_l \rangle = 0 \qquad \forall j, l \in \{1, ...\} \text{ tales que } j \neq l.$$

Si además cada $f_j \in L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$, $j = 1, ...$ tienen norma $\| f_j \|_{L^2(\Omega,\Lambda,\mu)} = 1$, diremos que Φ es un *sistema ortonormal* (SON)

Proposición A.18. *Sea $\Phi \subset L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ un SON, entonces Φ es linealmente independiente.*

Teorema A.19. *Sea $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal en $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes.*

(a) *Φ es un sistema ortonormal maximal, es decir, si $g \in L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ es tal que $\langle g, f_j \rangle = 0$ $\forall j \in \{1, 2, ...\}$, entonces $g \equiv 0$.*

(b) *El conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de Φ es denso en $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$.*

(c) *$\forall g \in L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ se cumple*

$$\| g \|_{L^2(\Omega,\Lambda,\mu)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle g, f_j \rangle|^2, \qquad \textit{(identidad de Plancherel).}$$

(d) *$\forall g, h \in L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ se cumple*

$$\langle g, h \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, f_j \rangle \overline{\langle h, f_j \rangle}, \qquad \textit{(identidad de Parseval).}$$

(e) *$\forall g \in L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ se cumple*

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, f_j \rangle f_j \qquad \textit{con convergencia en } L^2(\Omega, \Lambda, \mu).$$

Definición A.17. Se llama *base ortonormal* (BON) o también *sistema ortonormal completo* (SONC) del espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ a cualquier $\Phi = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, \Lambda, \mu)$ que sea sistema ortonormal y además cumpla alguna (y por lo tanto, todas) de las condiciones del Teorema A.19.

El sistema trigonométrico $\{e^{2\pi i\langle\mathbf{k}\cdot\rangle}\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1]^n)$.

Además, un ejemplo de base ortonormal en $L^2(\mathbf{R})$ es el sistema de Haar, $H=\{h_{j,k}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, donde

$$h_{j,k}(x)=\begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x\in(\frac{k}{2^j}\,\frac{2k+1}{2^{j+1}}) \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x\in(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\,\frac{k+1}{2^j}) \\ 0 & \text{si } x\in\mathbf{R}\setminus[\frac{k}{2^j}\,\frac{2k+1}{2^{j+1}}]\bigcup[\frac{2k+1}{2^{j+1}}\,\frac{k+1}{2^j}] \end{cases} \tag{A.15}$$

y en los puntos de discontinuidad, las funciones de Haar se definen de manera que el valor de la función sea igual a la media aritmética de los límites laterales en ese punto.

A.11. Ondículas

Una **ondícula ortonormal**, o simplemente una ondícula, es una función $\psi\in L^2(\mathbf{R})$ tal que el conjunto

$$\{\psi_{j,k}\ :\ j,k\in\mathbf{Z}\}\quad\text{donde}\quad \psi_{j,k}(\cdot)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j\cdot -k),$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$.

Un ejemplo de ondícula es $\psi(x)=h_{0,0}(x)$ definida en el sistema (A.15).

Una caracterización completa de las ondículas viene escrita en el siguiente teorema.

Teorema A.20. *Una función $\psi\in L^2(\mathbf{R})$, con $\|\ \psi\ \|_{L^2(\mathbf{R})}=1$, es una ondícula ortonormal si y solo si*

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbf{Z}}|\widehat{\psi}(2^j t)|^2 &= 1 \qquad c.t.\ t\in\mathbf{R},\quad y \\ \sum_{j=0}^{\infty}\widehat{\psi}(2^j t)\overline{\widehat{\psi}(2^j(t+q))} &= 0 \qquad c.t.\ t\in\mathbf{R},\ q\in 2\mathbf{Z}+1. \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones eran conocidas desde el principio de la teoría de ondículas, pero la prueba de esta caracterización apareció en la literatura años más tarde (ver [33], [46], [32]).

De manera natural podemos encontrar la definición de ondícula en un contexto más general (ver [23], [75], [12], [71]), donde trabajamos en $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n\geq 1$, y en vez de tener una dilatación diádica, nuestra dilatación viene dada por una aplicación lineal expansiva fija $A:\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^n$ tal que $A\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{Z}^n$. En este contexto, una familia de funciones $\Psi=\{\psi^{(l)},l=1,...,L\}\subset L^2(\mathbf{R}^n)$, con $\|\ \psi^{(l)}\ \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\geq 1$, $l=1,...,L$, es una familia de ondículas ortonormales cuando

$$\{\psi^{(l)}_{j,k}\ :\ l=1,...,L,\ j,k\in\mathbf{Z}\}\quad\text{donde}\quad \psi^{(l)}_{j,k}(\cdot)=d_A^{\frac{j}{2}}\psi^{(l)}(A^j\cdot -k),$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Una caracterización de estas familias es la siguiente (ver [12])

Teorema A.21. *Sea $A\in\mathcal{LE}$ tal que $A\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{Z}^n$, y sea $\Psi=\{\psi^{(l)},l=1,...,L\}\subset L^2(\mathbf{R}^n)$, con $\|\ \psi^{(l)}\ \|_{L^2(\mathbf{R})}\geq 1$, $l=1,...,L$. Entonces Ψ es una familia de* *ondículas ortonormales si y solo si las funciones* $\psi^{(l)}, l = 1, ..., L$ *satisfacen las dos siguientes ecuaciones,*

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{L} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\widehat{\psi}(A^{*j}\mathbf{t})|^2 &= d_A \qquad c.t.\ \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n, \quad y \\
\sum_{l=1}^{L} \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}(A^{*j}\mathbf{t})\overline{\widehat{\psi}(A^{*j}(\mathbf{t}+\mathbf{q}))} &= 0 \qquad c.t.\ \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n,\ \mathbf{q} \in \mathbf{Z}^n \setminus A^*\mathbf{Z}^n.
\end{aligned}$$

Apéndice B

APÉNDICE

B.1. Punto de densidad y punto de A-densidad

Unas de las nociones que tienen mayor importancia en este texto son las de punto de densidad y punto de A-densidad de un conjunto medible en $\mathbf{R}^n$. En esta sección daremos sus definiciones junto con algunas propiedades básicas que nos serán de gran utilidad.

Definición B.1. Se dice que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ es un punto de densidad de un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, si

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{\mid E \bigcap (B_r + \mathbf{x}_0) \mid_n}{\mid B_r + \mathbf{x}_0 \mid_n} = 1. \tag{B.1}$$

Denotaremos

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}_0) = \{E \subset \mathbf{R}^n \text{ conjunto medible } : \mathbf{x}_0 \text{ es un punto de densidad de } E\},$$

y además denotamos $\mathcal{D}$ si $\mathbf{x}_0$ es el origen.

Observar que en esta definición podemos tomar cubos Q_r en vez de bolas B_r y obtener una definición equivalente.

Ahora, dada $A \in \mathcal{LE}$ definimos un concepto algo más general, que fue introducido en [16].

Definición B.2. Sea $A \in \mathcal{LE}$. Se dice que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ es un punto de A-densidad de un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, si para cualquier $r > 0$,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{\mid E \bigcap (A^{-j} B_r + \mathbf{x}_0) \mid_n}{\mid A^{-j} B_r + \mathbf{x}_0 \mid_n} = 1.$$

Dada $A \in \mathcal{LE}$ y dado un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, denotamos

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0) = \{E \subset \mathbf{R}^n \text{ conjunto medible } : \mathbf{x}_0 \text{ es un punto de } A\text{-densidad de } E\},$$

y escribiremos $\mathcal{D}_A$ cuando el punto $\mathbf{x}_0$ sea el origen.

Para cualquier $j \in \mathbf{Z}$ y para cualquier $r > 0$ tenemos la siguiente igualdad $A^j B_r = (-A)^j B_r$, y por lo tanto:

Observación B.1. Dada $A \in \mathcal{LE}$, para cualquier punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, tenemos que

$$\mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0) = \mathcal{D}_{-A}(\mathbf{x}_0).$$

Claramente, $E \in \mathcal{D}_A$ si y solo si $E + \mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_A(\mathbf{x}_0)$. Así, sin pérdida de generalidad, consideraremos solamente los conjuntos para los cuales el origen es un punto de A-densidad.

Algunas propiedades de los conjuntos para los que el origen sea un punto de A-densidad son las siguientes.

Proposición B.2. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sean $E, F \subset \mathbf{R}^n$ dos conjuntos medibles tales que $E \subset F$ y que $E \in \mathcal{D}_A$. Entonces $F \in \mathcal{D}_A$.*

Demostración. Como $E \subset F$, entonces para cualquier $r > 0$ dado, tenemos que

$$1 \geq \limsup_{j \longrightarrow \infty} \frac{| F \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n} \geq \liminf_{j \longrightarrow \infty} \frac{| F \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n}$$

$$\geq \liminf_{j \longrightarrow \infty} \frac{| E \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n} = \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{| E \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n} = 1,$$

donde la última igualdad es cierta ya que $E \in \mathcal{D}_A$. □

En las siguientes proposiciones veremos diferentes condiciones equivalentes a la condición de que el origen sea un punto de A-densidad de un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$. Además, encontraremos relaciones entre propiedades de un conjunto E y su complementerio $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$.

Proposición B.3. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible. Dado $r > 0$, las siguientes cuatro condiciones son equivalentes.*

(i)

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{| E \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n} = 1. \tag{B.2}$$

(ii)

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} | A^j E \bigcap B_r |_n = | B_r |_n . \tag{B.3}$$

(iii)

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n} = 0. \tag{B.4}$$

(iv)

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} | A^j E^c \bigcap B_r |_n = 0. \tag{B.5}$$

Demostración. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Esta equivalencia es una consecuencia directa de que para cualquier $r > 0$ y para cualquier $j \in \mathbf{N}$ es cierta la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} \frac{| E \bigcap A^{-j} B_r |_n}{| A^{-j} B_r |_n} &= \frac{| A^{-j}(A^j E \bigcap B_r) |_n}{| A^{-j} B_r |_n} \\ &= \frac{d_A^{-j} \; | A^j E \bigcap B_r |_n}{d_A^{-j} \; | B_r |_n} = \frac{| A^j E \bigcap B_r |_n}{| B_r |_n}. \end{aligned}$$

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Obviamente, para cualquier $r > 0$ y para cualquier $j \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mid A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} = \frac{\mid (E\bigcup E^c)\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} \\ &= \frac{\mid E\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} + \frac{\mid E^c\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n}. \end{aligned}$$

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) Esta equivalencia se verifica porque para cualquier $r > 0$ y para cualquier $j \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mid E^c\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} &= \frac{\mid A^{-j}(A^jE^c\bigcap B_r) \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} \\ &= \frac{d_A^{-j} \mid (A^jE^c\bigcap B_r) \mid_n}{d_A^{-j} \mid B_r \mid_n} = \frac{\mid (A^jE^c\bigcap B_r) \mid_n}{\mid B_r \mid_n}. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario B.4. *Dada $A \in \mathcal{LE}$. Un conjunto $E \in \mathcal{D}_A$ si y solo si se cumple una (y por lo tanto, todas) de las condiciones $(i) - (iv)$ de la Proposición B.3 para todo $r > 0$.*

Corolario B.5. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sean $E, F \subset \mathbf{R}^n$ dos conjuntos medibles tales que $|E \cap F|_n = 0$. Entonces como mucho uno de los dos conjuntos puede pertenecer a $\mathcal{D}_A$.*

Demostración. Hagamos una prueba indirecta. Supongamos que $E, F \in \mathcal{D}_A$. Sea además, $r > 0$. Como $|E \cap F|_n = 0$ es cierto

$$\frac{\mid F\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} \leq \frac{\mid E^c\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n}$$

y desde aquí, como $E \in \mathcal{D}_A$, la propiedad (iii) de la Proposición B.3 nos dice que

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\mid F\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} = 0.$$

Con lo que tenemos contradicción con el hecho de que $F \in \mathcal{D}_A$. $\square$

En la siguiente proposición se muestra que comprobar que se cumple la condición (B.2) para un $r_0 > 0$ fijo es suficiente para probar que el origen es un punto de A-densidad.

Proposición B.6. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $r_0 > 0$. Además, sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\mid E\bigcap A^{-j}B_{r_0} \mid_n}{\mid A^{-j}B_{r_0} \mid_n} = 1.$$

Entonces $E \in \mathcal{D}_A$.

Demostración. De acuerdo con el Corolario B.4 es suficiente con probar que para todo $r > 0$,

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\mid E^c\bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} = 0.$$

Distinguimos dos casos. El primero de ellos es cuando r es tal que $0 < r < r_0$. Así, dado $j \in \mathbf{N}$ tenemos que $A^{-j}B_r \subset A^{-j}B_{r_0}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_r \,|_n}{|\, A^{-j}B_r \,|_n} &\leq \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j}B_r \,|_n} \\
&= \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j}B_{r_0} \,|_n} \frac{|\, A^{-j}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j}B_r \,|_n} \\
&= (\frac{r_0}{r})^n \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j}B_{r_0} \,|_n} \longrightarrow 0 \quad \text{si } j \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

donde el límite es cierto de acuerdo con nuestras hipótesis y porque r_0, r y n son números fijos.

El segundo caso que consideramos es cuando $r > r_0$. Aquí, obsérvese que como A es expansiva, $\exists j_r \in \mathbf{N}$ tal que $B_r \subset A^{j_r}B_{r_0}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_r \,|_n}{|\, A^{-j}B_r \,|_n} &\leq \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j}B_r \,|_n} \\
&= \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n} \frac{|\, A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j}B_r \,|_n} \\
&= \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n} d_A^{j_r} (\frac{r_0}{r})^n \\
&< \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n}{|\, A^{-j+j_r}B_{r_0} \,|_n} d_A^{j_r} \longrightarrow 0 \quad \text{si } j \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

donde el límite es cierto de acuerdo con nuestras hipótesis y porque d_A y j_r son números fijos.

Desde aquí, si juntamos los dos casos anteriores, por el Corolario B.4 obtenemos el resultado deseado. □

Proposición B.7. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $K \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que existen $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ tal que $B_{r_1} \subset K \subset B_{r_2}$. Entonces $E \in \mathcal{D}_A$ si y solo si*

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{|\, E \bigcap A^{-j}K \,|_n}{|\, A^{-j}K \,|_n} = 1, \tag{B.6}$$

o equivalentemente,

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}K \,|_n}{|\, A^{-j}K \,|_n} = 0. \tag{B.7}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Desde la condición $B_{r_1} \subset K \subset B_{r_2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{j \longrightarrow \infty} \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}K \,|_n}{|\, A^{-j}K \,|_n} &\leq \limsup_{j \longrightarrow \infty} \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_{r_2} \,|_n}{|\, A^{-j}B_{r_1} \,|_n} \\
&= \limsup_{j \longrightarrow \infty} \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_{r_2} \,|_n}{|\, A^{-j}B_{r_2} \,|_n} \frac{|\, A^{-j}B_{r_2} \,|_n}{|\, A^{-j}B_{r_1} \,|_n} \\
&= (\frac{r_2}{r_1})^n \lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{|\, E^c \bigcap A^{-j}B_{r_2} \,|_n}{|\, A^{-j}B_{r_2} \,|_n} = 0,
\end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades son ciertas ya que $(\frac{r_2}{r_1})^n$ es un número fijo y $E \in \mathcal{D}_A$.

$\Longleftarrow$) Como $B_{r_1} \subset K \subset B_{r_2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j}B_{r_1} |_n}{| A^{-j}B_{r_1} |_n} &\leq \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j}K |_n}{| A^{-j}K |_n} \frac{| A^{-j}K |_n}{| A^{-j}B_{r_1} |_n} \\
&\leq \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j}K |_n}{| A^{-j}K |_n} \frac{| A^{-j}B_{r_2} |_n}{| A^{-j}B_{r_1} |_n} \\
&= (\frac{r_2}{r_1})^n \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j}K |_n}{| A^{-j}K |_n} = 0,
\end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades son ciertas ya que $(\frac{r_2}{r_1})^n$ es un número fijo y por hipótesis se satisface (B.7). Finalmente la Proposición B.3 y la Proposición B.6 nos dicen que el origen es un punto de A-densidad de E. $\square$

Proposición B.8. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sean $E, G \in \mathcal{D}_A$. Entonces $E \bigcap G \in \mathcal{D}_A$.*

Demostración. Sea $r > 0$, hallamos

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| (E\cap G)^c \bigcap A^{-j}B_r |_n}{| A^{-j}B_r |_n} = \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| (E^c \cup G^c) \bigcap A^{-j}B_r |_n}{| A^{-j}B_r |_n}$$

$$\leq \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j}B_r |_n}{| A^{-j}B_r |_n} + \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{| G^c \bigcap A^{-j}B_r |_n}{| A^{-j}B_r |_n} = 0$$

donde la última igualdad es cierta ya que $E, F \in \mathcal{D}_A$. De este modo, finalmente, de acuerdo con el Corolario B.4 damos por finalizada la prueba. $\square$

Proposición B.9. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $E \in \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que $AE = E$ y $| B_1 \bigcap E |_n < | B_1 |_n$. Entonces $E \notin \mathcal{D}_A$.*

Demostración. El resultado es consecuencia de que desde nuestras condiciones tenemos que

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{| A^{-j}B_1 \bigcap E |_n}{| A^{-j}B_1 |_n} = \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{| B_1 \bigcap A^{j}E |_n}{| B_1 |_n} = \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{| B_1 \bigcap E |_n}{| B_1 |_n} < 1.$$

$\square$

Proposición B.10. *Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{LE}$ y sea $K \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que $\exists r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, tal que $B_{r_1} \subset K \subset B_{r_2}$. Si $\exists \{l_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$ tal que $l_j \longrightarrow \infty$ cuando $j \longrightarrow \infty$ y además*

$$A_1^{-l_j-l_0}K \subset A_2^{-j}K \subset A_1^{-l_j+l_0}K, \qquad \textit{donde} \qquad l_0 \in \mathbf{N_0},$$

entonces $\mathcal{D}_{A_1} \subset \mathcal{D}_{A_2}$.

Demostración. Sea $E \in \mathcal{D}_{A_1}$, de acuerdo con nuestras hipótesis,

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A_2^{-j}K |_n}{| A_2^{-j}K |_n} &\leq \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A_1^{-l_j+l_0}K |_n}{| A_1^{-l_j+l_0}K |_n} \frac{| A_1^{-l_j+l_0}K |_n}{| A_2^{-j}K |_n} \\
&\leq \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A_1^{-l_j+l_0}K |_n}{| A_1^{-l_j+l_0}K |_n} \frac{| A_1^{-l_j+l_0}K |_n}{| A_1^{-l_j-l_0}K |_n} \\
&= \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{| E^c \bigcap A_1^{-l_j+l_0}K |_n}{| A_1^{-l_j+l_0}K |_n} d_{A_1}^{2l_0} = 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta ya que l_0 es un número fijo que no depende de j y ya que $E \in \mathcal{D}_{A_1}$. Por lo tanto, desde la Proposición B.7 podemos concluir que $E \in \mathcal{D}_{A_2}$. $\square$

Lema B.11. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Supongamos que $Y \subset \mathbf{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ de dimensión p, $1 \le p \le n$, e invariante respecto de A, y que además, $Y^\perp$ es otro subespacio de $\mathbf{R}^n$ e invariante respecto de A. Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible de la forma $E := Y + F$ donde $F \subset Y^\perp$. Entonces $E \in \mathcal{D}_A$ si y solo si $F \in \mathcal{D}_{A|_{Y^\perp}}$.*

Demostración. Como $\mathbf{R}^n = Y \oplus Y^\perp$ y los subespacios Y e $Y^\perp$ son invariantes respecto de A, podemos escribir $A = A|_Y \otimes A|_{Y^\perp}$.

Denotamos $K := K_1 + K_2 = \{\mathbf{s} = \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2} \ : \ \mathbf{s_1} \in K_1, \mathbf{s_2} \in K_2\}$, donde $K_1 = \{\mathbf{y} \in Y \ : \ \| \mathbf{y} \| \le 1\}$, y $K_2 = \{\mathbf{y} \in Y^\perp \ : \ \| \mathbf{y} \| \le 1\}$. Se puede observar que K satisface las condiciones de la Proposición B.7.

Con esta notación, dado $j \in \mathbf{N}$ llegamos a que

$$\begin{aligned}
E \bigcap A^{-j} K &= (Y + F) \bigcap (A|_Y \otimes A|_{Y^\perp})^{-j} (K_1 + K_2) \\
&= (Y + F) \bigcap ((A|_Y)^{-j} K_1 + (A|_{Y^\perp})^{-j} K_2) \\
&= (Y \bigcap (A|_Y)^{-j} K_1) + (F \bigcap (A|_{Y^\perp})^{-j} K_2) \\
&= (A|_Y)^{-j} K_1 + (F \bigcap (A|_{Y^\perp})^{-j} K_2).
\end{aligned}$$

Como los sumandos de la última suma son subconjuntos de Y y de $Y^\perp$ respectivamente, tenemos que

$$\frac{| E \bigcap (A^{-j} K) |_n}{| A^{-j} K |_n} = \frac{| F \bigcap (A|_{Y^\perp})^{-j} K_2 |_{n-p}}{| (A|_{Y^\perp})^{-j} K_2 |_{n-p}}.$$

Finalmente, tomando límites a ambos lados de la igualdad anterior y de acuerdo con la Proposición B.7 finalizamos la prueba. $\square$

Lema B.12. *Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{LE}$ y además, suponemos que $W \subset \mathbf{R}^n$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ tal que W y $W^\perp$ son invariantes respecto de ambas aplicaciones A_1 y A_2. Si $\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}$ entonces $\mathcal{D}_{A_1|_W} = \mathcal{D}_{A_2|_W}$.*

Demostración. Consideramos el conjunto cilíndrico $E = F + W^\perp$. De acuerdo con el Lema B.11 sabemos que $E \in \mathcal{D}_{A_\mu} \iff F \in \mathcal{D}_{A_\mu|_W}$, $\mu = 1, 2$. Por lo tanto, el lema queda demostrado. $\square$

Lema B.13. *Sean $A, A' \in \mathcal{LE}$ y suponemos que existe $C \in \mathcal{L}$, $d_C > 0$, tal que $A' = C^{-1} A C$. Además, sea $E \subset \mathbf{R}^n$, $| E |_n > 0$, un conjunto medible. Entonces $E \in \mathcal{D}_A$ si y solo si $C^{-1} E \in \mathcal{D}_{A'}$, es decir, $\mathcal{D}_{A'} = C^{-1} \mathcal{D}_A$.*

Demostración. Dado $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible, para cualquier $j \in \mathbf{N}$, tenemos que

$$\frac{| (C^{-1} E)^c \bigcap A'^{-j} B_1 |_n}{| A'^{-j} B_1 |_n} = \frac{| (C^{-1} E)^c \bigcap C^{-1} A^{-j} C B_1 |_n}{| C^{-1} A^{-j} C B_1 |_n} \tag{B.8}$$

$$= \frac{d_C^{-1} \ | E^c \bigcap A^{-j} C B_1 |_n}{d_C^{-1} \ | A^{-j} C B_1 |_n}. \tag{B.9}$$

Por otro lado, como C es una aplicación lineal y biyectiva, existen dos números reales positivos r_1 y r_2, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, tales que $B_{r_1} \subset CB_1 \subset B_{r_2}$. Entonces, nuestro resultado sigue desde la igualdad (B.9) y la Proposición B.7. $\square$

Un par de consecuencias directas del Lema B.13 son las siguientes.

Corolario B.14. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Entonces $E \in \mathcal{D}_A \Longleftrightarrow AE \in \mathcal{D}_A$.*

Corolario B.15. *Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{LE}$ y sean $C, J_1, J_2 \in \mathcal{L}$, $d_C > 0$, $d_{J_\mu} > 0$, tales que $A_\mu = C^{-1} J_\mu C$, $\mu = 1, 2$, donde las matrices asociadas a las aplicaciones J_μ son diagonales con los elementos de la diagonal que satisfacen $| \lambda_i^{(1)} |=| \lambda_i^{(2)} |$, $i = 1, ..., n$. Entonces*

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2}.$$

Demostración. Desde nuestras condiciones, el Lema B.13 nos dice que

$$\mathcal{D}_{A_1} = \mathcal{D}_{A_2} \Longleftrightarrow \mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{J_2}.$$

Además, se cumple la igualdad $\mathcal{D}_{J_1} = \mathcal{D}_{J_2}$ porque como $| \lambda_i^{(1)} |=| \lambda_i^{(2)} |$, $i = 1, ..., n$, sabemos que para cualquier $j \in \mathbf{Z}$ y para cualquier $r > 0$, tenemos que $J_1^j B_r = J_2^j B_r$. $\square$

B.1.1. Relación entre conjuntos medibles y puntos de A-densidad

Una propiedad importante y de sobra conocida que nos relaciona los conjuntos medibles y los puntos de densidad es la siguiente (ver por ejemplo [61], [10]).

Proposición B.16. *Sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible. Entonces casi todo punto de E es un punto de densidad de E.*

Nuestra intención es escribir una propiedad análoga a la Proposición B.16 que nos relacione los conjuntos medibles con los puntos de A-densidad.

Proposición B.17. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $E \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible. Entonces casi todo punto de E es un punto de A-densidad de E.*

Para demostrar esta proposición, emplearemos las misma técnicas que se utilizan en diferentes textos básicos para probar la Proposición B.16.

Empezamos escribiendo el siguiente lema de recubrimiento.

Lema B.18. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sea Ω la unión de una colección finita de conjuntos de la forma*

$$A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n, \qquad \text{donde} \quad i \in \{1, ..., N\}, \quad j_i \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n.$$

Entonces existe un conjunto $I \subset \{1, ..., N\}$ tal que

(a) $A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i$, *$i \in I$, son disjuntos.*

(b) $\Omega \subset \bigcup_{i \in I} A^{j_A + j_i} Q_3 + \mathbf{x}_i$ *donde tomamos $j_A \in \mathbf{N}$ tal que $\forall j \geq j_A$ tenemos que $A^{-j} Q_1 \subset Q_1$.*

(c) $| \Omega |_n \leq 3^n d_A^{j_A} \sum_{i \in I} | A^{j_i} Q_1 |_n$.

Demostración. (a) Ordenamos y renombramos los conjuntos $A^{j_i}Q_1 + \mathbf{x}_i$ de tal manera que $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_N$.

Tomamos $j_{1'} := j_1$ y eliminamos todos los j_i, $i \in \{2, ..., N\}$ tal que

$$(A^{j_i}Q_1 + \mathbf{x}_i) \bigcap (A^{j_{1'}}Q_1 + \mathbf{x}_{1'}) \neq \emptyset.$$

Sea $j_{2'}$ uno de los j_i que sea máximo de entre los que no hemos quitado, $j_{2'} \neq j_{1'}$, si es que queda alguno. Ahora eliminamos de entre todos los $j_i's$ que nos quedan, todos los j_i tal que

$$(A^{j_i}Q_1 + \mathbf{x}_i) \bigcap (A^{j_{2'}}Q_1 + \mathbf{x}_{2'}) \neq \emptyset.$$

Continuamos con este proceso mientras sea posible. Después de una cantidad finita de etapas se termina el proceso. Hagamos $I = \{1', 2', ..., M'\}$ y con esta elección queda claro que se verifica (a).

(b) Sea $i \in \{1, ..., N\} \setminus I$, así, por cómo hemos tomado los elementos de I, existe $i' \in I$ tal que $j_{i'} \geq j_i$ y además

$$(A^{j_i}Q_1 + \mathbf{x}_i) \bigcap (A^{j_{i'}}Q_1 + \mathbf{x}_{i'}) \neq \emptyset. \tag{B.10}$$

Por otro lado, como A es expansiva, $\exists j_A \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_A$ entonces $A^{-j}Q_1 \subset Q_1$, de esta manera podemos afirmar que

$$A^{j_i}Q_1 \subset A^{j_A + j_{i'}}Q_1, \tag{B.11}$$

ya que, por como hemos tomado j_A, j_i y $j_{i'}$ tenemos que

$$A^{-j_A + j_i - j_{i'}}Q_1 \subset Q_1.$$

Desde la intersección (B.10) y la inclusión (B.11) se puede asegurar que

$$(A^{j_A + j_{i'}}Q_1 + \mathbf{x}_i) \bigcap (A^{j_{i'}}Q_1 + \mathbf{x}_{i'}) \neq \emptyset,$$

y por lo tanto, como $Q_1 \subset A^{j_A}Q_1$, tenemos que

$$(A^{j_A + j_{i'}}Q_1 + \mathbf{x}_i) \bigcap (A^{j_A + j_{i'}}Q_1 + \mathbf{x}_{i'}) \neq \emptyset.$$

Además, como la imagen de un paralelepípedo por A es un paralelepípedo, podemos concluir que

$$(A^{j_i}Q_1 + \mathbf{x}_i) \subset (A^{j_A + j_{i'}}Q_1 + \mathbf{x}_i) \subset (A^{j_A + j_{i'}}Q_3 + \mathbf{x}_{i'}).$$

(c) La condición (c) es una consecuencia directa de la condición (b) ya que

$$\begin{aligned} \mid \Omega \mid_n &\leq \mid \bigcup_{i \in \{1, \ldots N\}} (A^{j_i}Q_1 + \mathbf{x}_i) \mid_n \leq \mid \bigcup_{i' \in I} (A^{j_A + j_{i'}}Q_3 + \mathbf{x}_{i'}) \mid_n \\ &\leq \sum_{i' \in I} \mid A^{j_A + j_{i'}}Q_3 + \mathbf{x}_{i'} \mid_n = 3^n d_A^{j_A} \sum_{i' \in I} \mid A^{j_{i'}}Q_1 \mid_n . \end{aligned}$$

□

Definición B.3. Sea $A \in \mathcal{LE}$. Para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ definimos la siguiente función maximal:

$$M_A f(\mathbf{x}) = \sup_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{\mid A^j Q_1 \mid_n} \int_{A^j Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y}.$$

Teorema B.19. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sea $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ y sea $\lambda > 0$, entonces existe una constante $C > 0$ que sólo depende de la aplicación A y de la dimensión tal que*

$$\mid \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \ : \ M_A f(\mathbf{x}) > \lambda\} \mid_n \leq \frac{C}{\lambda} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbf{R}^n)} .$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$, denotamos

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : M_A f(\mathbf{x}) > \lambda\}.$$

Si $\mid E_\lambda \mid_n = 0$, se verifica el teorema. Comprobemos el teorema en el caso en el que $\mid E_\lambda \mid_n > 0$.

Como

$$\mid E_\lambda \mid_n = \sup\{\mid K \mid_n \ : \ K \text{ compacto}, K \subset E_\lambda\},$$

tomamos un conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$ tal que $K \subset E_\lambda$. Entonces para cada $\mathbf{x} \in K$ existe $j = j(\mathbf{x}) \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\frac{1}{\mid A^j Q_1 + \mathbf{x} \mid_n} \int_{A^j Q_1 + \mathbf{x}} \mid f(\mathbf{y}) \mid d\mathbf{y} > \lambda. \tag{B.12}$$

Obsérvese que si para cada $\mathbf{x} \in K$ tomamos el conjunto $A^{j(\mathbf{x})} Q_1 + \mathbf{x}$ definido en (B.12), la unión de los anteriores conjuntos recubren K. Entonces, como K es compacto, la condición (a) del Lema B.18 nos garantiza la existencia de una subcolección disjunta de ellos, a los que denotaremos

$$\{A^{j_1} Q_1 + \mathbf{x}_1, ..., A^{j_N} Q_1 + \mathbf{x}_N\},$$

para la que se satisface, de acuerdo con la condición (c) del mismo Lema B.18, que existe una constante $C > 0$ que sólo depende de la aplicación A y de la dimensión tal que

$$\mid K \mid_n \leq C \sum_{i=1}^{N} \mid A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i \mid_n .$$

Además, como los conjuntos $A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i$, $i = 1, ..., N$ satisfacen la desigualdad (B.12) y son disjuntos, tenemos que

$$\begin{aligned} C \sum_{i=1}^{N} \mid A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i \mid_n &\leq C \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda} \int_{A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i} \mid f(\mathbf{y}) \mid d\mathbf{y} \\ &= \frac{C}{\lambda} \int_{\bigcup_{i=1}^{N} A^{j_i} Q_1 + \mathbf{x}_i} \mid f(\mathbf{y}) \mid d\mathbf{y} \leq \frac{C}{\lambda} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbf{R}^n)} . \end{aligned}$$

De esta manera, si juntamos todo lo anterior podemos concluir que

$$\mid K \mid_n \leq \frac{C}{\lambda} \parallel f \parallel_{L^1(\mathbf{R}^n)} .$$

La prueba se finaliza tomando supremos sobre todos los conjuntos compactos $K \subset E_\lambda$. $\square$

Lema B.20. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y sea f una función continua definida en $\mathbf{R}^n$. Entonces*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y} = 0.$$

Demostración. Primero observamos que dado $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, como f es continua, tenemos que

$$\sup_{j\in\mathbf{N}} \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y} < \infty.$$

Por otro lado, sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, como f es continua en $\mathbf{x}$ y A es expansiva, $\forall\varepsilon > 0$ $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$ y además $\mathbf{y} \in A^{-j}Q_1$, entonces $\mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid < \varepsilon$, con lo que si $j \geq j_0$, es cierto que

$$\frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y} < \varepsilon.$$

□

Teorema B.21. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$. Entonces para casi todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ se tiene que*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y} = 0.$$

Demostración. Basta demostrar el resultado en cada bola B_R, $0 < R < \infty$.

Recordamos que al ser A una aplicación expansiva, existe una constante $\widetilde{C} > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tal que $\forall j \in \mathbf{N}$ tenemos que

$$\| A^{-j}\mathbf{x} \| \leq \widetilde{C}\alpha^j \| \mathbf{x} \|, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Por otro lado, dado R, $0 < R < \infty$, como para cada $\mathbf{x} \in B_R$ vamos a integrar f en $A^{-j}Q_1 + \mathbf{x}$, $j \in \mathbf{N}$, así, sólo evaluaremos f en puntos de la bola $B_{R+\sqrt{2}\widetilde{C}}$, y de esta manera podemos considerar que f se anula fuera de la bola $B_{R+\sqrt{2}\widetilde{C}}$ y por lo tanto que f pertenece a $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Dado $j \in \mathbf{N}$ y dado $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, sea

$$(T_{A^{-j}}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y}$$

y sea además

$$(T_A f)(\mathbf{x}) = \limsup_{j\longrightarrow+\infty} (T_{A^{-j}}f)(\mathbf{x}).$$

Tenemos que demostrar que

$$T_A f \equiv 0 \qquad \text{en c.t.p..}$$

Como las funciones continuas con soporte compacto definidas en $\mathbf{R}^n$, $C_c(\mathbf{R}^n)$, son densas en $L^1(\mathbf{R}^n)$, entonces $\forall\varepsilon > 0$ $\exists g \in C_c(\mathbf{R}^n)$ tal que $\| f - g \|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon$. Así, utilizando la desigualdad de Minkowski, podemos escribir que

$$(T_A f)(\mathbf{x}) = \limsup_{j\longrightarrow+\infty} (T_{A^{-j}}f)(\mathbf{x})$$

$$= \limsup_{j\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x})-g(\mathbf{y}+\mathbf{x})+g(\mathbf{y}+\mathbf{x})-g(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y}$$

$$\leq \limsup_{j\longrightarrow+\infty} \{ \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid f(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - g(\mathbf{y}+\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y}$$

$$+ \frac{1}{\mid A^{-j}Q_1 \mid_n} \int_{A^{-j}Q_1} \mid g(\mathbf{y}+\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{y} + \mid g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid \}.$$

Desde el Lema B.20 sabemos que $T_A g = 0$, entonces

$$(T_A f)(\mathbf{x}) \leq M_A(f-g)(\mathbf{x}) + \mid g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \mid . \tag{B.13}$$

Por otro lado, dado $\lambda > 0$, denotamos

$$F_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : (T_A f)(\mathbf{x}) > \lambda\},$$

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : M_A(f-g)(\mathbf{x}) > \lambda\}$$

y

$$G_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mid f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \mid > \lambda\}.$$

La desigualdad (B.13) nos dice que

$$F_{2\lambda} \subset E_\lambda \bigcup G_\lambda \tag{B.14}$$

ya que si un punto no está en E_λ ni en G_λ, no puede estar en $F_{2\lambda}$.

Ahora bien, si $\mathbf{x} \in G_\lambda$ entonces

$$\chi_{G_\lambda}(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{\lambda} \mid f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \mid,$$

con lo que

$$\mid G_\lambda \mid_n = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{G_\lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} \mid f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{x} < \frac{1}{\lambda}\varepsilon, \tag{B.15}$$

donde la última desigualdad es cierta por cómo habíamos tomado la función g.

Por otro lado, el Teorema B.19 nos dice que existe una constante $C > 0$ que sólo depende de la aplicación A y de la dimensión n tal que

$$\mid E_\lambda \mid_n < \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} \mid f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \mid d\mathbf{x} < \frac{C}{\lambda}\varepsilon, \tag{B.16}$$

donde la última desigualdad es cierta por cómo hemos tomado g.

Así, la inclusión (B.14) y las desigualdades (B.15) y (B.16) nos dicen que

$$\mid F_{2\lambda} \mid_n < \frac{C+1}{\lambda}\varepsilon,$$

y como $\mid F_{2\lambda} \mid_n$ no depende de ε, entonces $\mid F_\lambda \mid_n = 0$.

Finalmente, como

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : (T_A f)(\mathbf{x}) > 0\} \subset \bigcup_{N\in\mathbf{N}} F_{\frac{2}{N}},$$

podemos concluir que

$$\mid \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : (T_A f)(\mathbf{x}) > 0\} \mid_n \leq \mid \bigcup_{N\in\mathbf{N}} F_{\frac{2}{N}} \mid_n = 0.$$

$\square$

A partir de los resultados que hemos probado hasta ahora, ya podemos dar la prueba de la Proposición B.17.

Demostración de la Proposición B.17. Obsérvese que es una consecuencia directa del Teorema B.21 y de la Proposición B.7. □

B.2. Continuidad aproximativa y A-continuidad aproximativa

El concepto de continuidad aproximativa fue introducido por A. Denjoy [26] (para más información ver [61], [10]), en su estudio sobre la derivada de una función medible. El concepto de A-continuidad aproximativa, introducido en [16], generaliza el anterior. Veremos varias propiedades relacionadas con estos conceptos y en particular veremos relaciones entre funciones medibles y puntos de A-continuidad aproximativa.

Definición B.4. Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible. Se dice que $\mathbf{x}_0 \in B$ es un punto de continuidad aproximativa de la función f si existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, tal que $\mathbf{x}_0$ es un punto de densidad del conjunto E y además,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0). \tag{B.17}$$

Un resultado de Denjoy, (véase [26], [61], [10]), que proporciona una relación entre funciones medibles y puntos de continuidad aproximativa es el siguiente.

Teorema B.22. *Dada f una función medible definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y finita en casi todos los puntos, entonces casi todos los puntos de $[a, b]$ son puntos de continuidad aproximativa de la función f.*

Definición B.5. Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible. Se dice que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ es un punto de A-continuidad aproximativa de la función f si existe un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}^n$, $\mid E \mid_n > 0$, tal que $\mathbf{x}_0$ es un punto de A-densidad del conjunto E y además se cumple (B.17).

Es fácil ver que dada $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ es un punto de continuidad aproximativa (resp. A-continuidad aproximativa) de f si y solo si el origen es un punto de continuidad aproximativa (resp. A-continuidad aproximativa) de la función $g(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$. Además, el origen es un punto de continuidad aproximativa (resp. A-continuidad aproximativa) de g si y solo si el origen es un punto de continuidad aproximativa (resp. A-continuidad aproximativa) de $g - g(\mathbf{0})$. Debido a nuestra discusión anterior, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el origen es un punto de continuidad aproximativa (resp. A-continuidad aproximativa) de f si tenemos que $f(\mathbf{0}) = 0$, de esta manera pretendemos agilizar la lectura y no perdernos en detalles superfluos.

Ahora veremos propiedades de los puntos de A-continuidad aproximativa de una función medible.

Proposición B.23. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sean $f, g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ funciones medibles. Si $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ es un punto de A-continuidad aproximativa de f y de g, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) $\forall c \in \mathbf{R}$, *el punto* $\mathbf{x_0}$ *es un punto de A-continuidad aproximativa de la función* cf.

(ii) *El punto* $\mathbf{x_0}$ *es un punto de A-continuidad aproximativa de* $f+g$

(iii) *El punto* $\mathbf{x_0}$ *es un punto de A-continuidad aproximativa de* $f \cdot g$.

(iv) *Si además,* $g(\mathbf{x_0}) \neq 0$, *entonces* $\mathbf{x_0}$ *es un punto de A-continuidad aproximativa de* f/g.

Demostración. La demostración de la afirmación (i) es trivial. Veamos la afirmación (ii). Como $\mathbf{x_0}$ es un punto de A-continuidad aproximativa para f y para g, entonces $\exists E_f, E_g \in \mathcal{D}_A(\mathbf{x_0})$ y además

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E_f}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0), \qquad \lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E_g}} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0). \tag{B.18}$$

La Proposición B.8 nos dice que $\mathbf{x_0}$ es un punto de A-densidad de $E_f \bigcap E_g$, entonces de acuerdo con los límites (B.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E_f \bigcap E_g}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) &= \lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E_f \bigcap E_g}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in E_f \bigcap E_g}} g(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Así, queda finalizada la prueba de la afirmación (ii). Las demostraciones de las afirmaciones (iii) y (iv) son análogas. □

Proposición B.24. *Sea* $A \in \mathcal{LE}$ *y sea* $C \in \mathcal{L}$ *invertible. Sea* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ *una función medible. Entonces el origen es un punto de A-continuidad aproximativa de* $f(\cdot)$ *si y solo si el origen es un punto de* A'*-continuidad aproximativa de* $f \circ C \cdot$ *donde* $A' = C^{-1}AC$.

Demostración. $\Rightarrow$) Como el origen es un punto de A-continuidad aproximativa de f, $\exists E \in \mathcal{D}_A$ tal que

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}),$$

o equivalentemente

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in C^{-1}E}} f(C\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}).$$

Si ahora tomamos el conjunto F donde $F = C^{-1}E$, el Lema B.13 nos dice que $F \in \mathcal{D}_{A'}$ y

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in F}} f(C\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}),$$

es decir, el origen es un punto de A'-continuidad aproximativa de la función $f \circ C$.

$\Leftarrow$) La demostración es análoga al caso anterior. □

Una consecuencia inmediata de la Proposición B.24 es la siguiente.

Corolario B.25. *Sea* $A \in \mathcal{LE}$. *Sea* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$, *función medible. El origen es un punto de A-continuidad aproximativa de* $f(\cdot)$ *si y solo si el origen es un punto de A-continuidad aproximativa de* $f \circ A$.

Veamos una caracterización de cuándo el origen es un punto de A-continuidad de una función medible.

Teorema B.26. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f : \mathbf{R}. \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible tal que $f(\mathbf{0}) = 0$. Además, sea $K \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que existen $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ tales que $B_{r_1} \subset K \subset B_{r_2}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1º) El origen es un punto de A-continuidad aproximativa de la función f.

(2º) $\forall \varepsilon > 0$ y para cualquier $r > 0$

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j}B_r \ : \ \mid f(\mathbf{x}) \mid < \varepsilon\} \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} = 1.$$

(3º) $\forall \varepsilon > 0$ y para cualquier $r > 0$, $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces

$$\frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j}B_r \ : \ \mid f(\mathbf{x}) \mid \geq \varepsilon\} \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} < \varepsilon.$$

(4º) $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j}K \ : \ \mid f(\mathbf{x}) \mid < \varepsilon\} \mid_n}{\mid A^{-j}K \mid_n} = 1.$$

(5º) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces

$$\frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j}K \ : \ \mid f(\mathbf{x}) \mid \geq \varepsilon\} \mid_n}{\mid A^{-j}K \mid_n} < \varepsilon.$$

Demostración. El esquema de la prueba será probar primero las implicaciones (1º) $\Rightarrow$ (2º) $\Rightarrow$ (3º) $\Rightarrow$ (1º) y una vez lo hayamos hecho, observar que la prueba de (1º) $\Rightarrow$ (4º) $\Rightarrow$ (5º) $\Rightarrow$ (1º) es análoga.

Empecemos probando la implicación (1º) $\Rightarrow$ (2º). Como el origen es un punto de A-continuidad aproximativa de la función f, primero sabemos que $\exists E \in \mathcal{D}_A$, es decir, si fijamos $r > 0$ y tomamos un $\varepsilon_1 > 0$ $\exists j_1 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_1$, tenemos que

$$1 - \frac{\mid E \bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r + \mathbf{x}_0 \mid_n} < \varepsilon_1,$$

y segundo, que además se verifica la condición (B.17) para este conjunto E. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $\parallel \mathbf{x} \parallel < \delta$ y $\mathbf{x} \in E$, tenemos que $\mid f(\mathbf{x}) \mid < \varepsilon$.

Por otro lado, como A es una aplicación expansiva, $\exists j_2 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_2$, se cumple que $A^{-j}B_r \subset B_\delta$.

Sea $j_0 = \max\{j_1, j_2\}$, entonces si $j > j_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &> 1 - \frac{\mid E \bigcap A^{-j}B_r \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} \\
&= 1 - \frac{\mid \{\mathbf{x} \in E \bigcap A^{-j}B_r \ : \ \mid f(\mathbf{x}) \mid < \varepsilon\} \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n} \\
&\geq 1 - \frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j}B_r \ : \ \mid f(\mathbf{x}) \mid < \varepsilon\} \mid_n}{\mid A^{-j}B_r \mid_n}.
\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que $\forall\varepsilon > 0$ y para cualquier $r > 0$,

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{|\{\mathbf{x} \in A^{-j}B_r \ : \ |f(\mathbf{x})| < \varepsilon\}|_n}{|A^{-j}B_r|_n} = 1.$$

La prueba de la implicación (2°) $\Rightarrow$ (3°) es trivial.

Vamos a probar la implicación (3°) $\Rightarrow$ (1°). Desde la condición (3°), dado $\varepsilon_k = 2^{-k-1}$, $k = 1, 2, 3...$, $\exists j_k \in \mathbf{N}$, $j_k > j_{k-1}$, tal que si $j \geq j_k$ se cumple

$$\frac{|\{\mathbf{x} \in A^{-j}B_1 \ : \ |f(\mathbf{x})| \geq 2^{-k-1}\}|_n}{|A^{-j}B_1|_n} \leq \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{B.19}$$

De esta manera obtenemos una sucesión estrictamente creciente $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$. Para cada $k = 1, 2, ...$ definimos los conjuntos

$$G_k = \{\mathbf{x} \in A^{-j_k}B_1 \ : \ |f(\mathbf{x})| \geq 2^{-k-1}\}.$$

Veamos una observación sobre los conjuntos G_k.

Observación B.27. Sea $k \in \{1, 2, 3...\}$ y sea $j \in \mathbf{N}$ tal que $j_k \leq j < j_{k+1}$, entonces

$$[(\bigcup_{l=1}^{k} G_l) \bigcap A^{-j}B_1] \subset \{\mathbf{x} \in A^{-j}B_1 \ : \ |f(\mathbf{x})| \geq 2^{-k-1}\}.$$

Definimos el conjunto

$$E = B_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Comprobamos que el conjunto E no tiene medida nula. Para ello calculamos

$$\begin{aligned} \frac{|E|_n}{|B_1|_n} &= \frac{|B_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k|_n}{|B_1|_n} \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|G_k|_n}{|B_1|_n} \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|G_k|_n}{|A^{-j_k}B_1|_n} \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad es cierta ya que $d_A > 1$, y la última desigualdad se sigue desde (B.19). De esta manera, $|E|_n \geq \frac{1}{2} |B_1|_n > 0$.

Continuamos con la demostración del teorema.

Afirmamos que $E \in \mathcal{D}_A$, y para comprobarlo, por la Proposición B.7, es suficiente con verificar que se cumple la condición (B.4) para $r = 1$. Empezamos tomando $j_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $j \geq j_0$, se cumple que $A^{-j}B_1 \subset B_1$. Este j_0 existe ya que A es una aplicación expansiva.

Sea $j \in \mathbf{N}, j \geq \text{máx}\{j_0, j_1\}$, entonces $\exists k \in \{1, 2, 3...\}$ tal que $j_k \leq j < j_{k+1}$. Hallamos

$$\begin{aligned} \frac{|E^c \bigcap A^{-j}B_1|_n}{|A^{-j}B_1|_n} &= \frac{|(B_1 \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} G_l)^c \bigcap A^{-j}B_1|_n}{|A^{-j}B_1|_n} \\ &\leq \frac{|(\bigcup_{l=1}^{\infty} G_l) \bigcap A^{-j}B_1|_n}{|A^{-j}B_1|_n} \\ &\leq \frac{|(\bigcup_{l=1}^{k} G_l) \bigcap A^{-j}B_1|_n}{|A^{-j}B_1|_n} + \frac{|(\bigcup_{l=k+1}^{\infty} G_l) \bigcap A^{-j}B_1|_n}{|A^{-j}B_1|_n}. \end{aligned}$$

Así, desde la Observación B.27 es cierto que

$$\begin{aligned}\frac{| E^c \bigcap A^{-j} B_1 |_n}{| A^{-j} B_1 |_n} &\leq \frac{| \{\mathbf{x} \in A^{-j} B_1 \ : \ | f(\mathbf{x}) | \geq 2^{-k-1}\} |_n}{| A^{-j} B_1 |_n} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{| G_{j_l} |_n}{| A^{-j} B_1 |_n}. \\ &\leq \frac{| \{\mathbf{x} \in A^{-j} B_1 \ : \ | f(\mathbf{x}) | \geq 2^{-k-1}\} |_n}{| A^{-j} B_1 |_n} + \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{| G_{j_l} |_n}{| A^{-j_l} B_1 |_n},\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad es cierta ya que $d_A > 1$ y $j < j_{k+1} < j_{k+2} < ....$ Finalmente, por la expresión (B.19) obtenemos

$$\frac{| E^c \bigcap A^{-j} B_1 |_n}{| A^{-j} B_1 |_n} \leq \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l-1},$$

y de esta manera, podemos concluir que

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \frac{| E^c \bigcap A^{-j} B_1 |_n}{| A^{-j} B_1 |_n} = 0,$$

es decir, se verifica la condición (B.4) para $r = 1$.

Para finalizar la prueba, todavía nos falta comprobar que se cumple

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in E}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) = 0,$$

es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \| \mathbf{x} \| < \delta \text{ y } \mathbf{x} \in E, \text{ entonces } | f(\mathbf{x}) | < \varepsilon. \tag{B.20}$$

Sea $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ con el que se cumpla (B.20). Para ello tomamos $k_0 \in \{1, 2, 3, ..\}$ tal que $2^{-k_0-1} < \varepsilon$. Como $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ es una aplicación lineal y biyectiva, entonces $\exists \delta > 0$ tal que $B_\delta \subset A^{-j_{k_0}} B_1$. Para este $\delta > 0$, como $E = B_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, con

$$G_k = \{\mathbf{x} \in A^{-j_k} B_1 \ : \ | f(\mathbf{x}) | \geq 2^{-k-1}\},$$

tenemos que si $\| \mathbf{x} \| < \delta$ y $\mathbf{x} \in E$, entonces $| f(\mathbf{x}) | < 2^{-k_0-1} < \varepsilon$.

□

Las siguientes proposiciones nos relacionan la condición de que el origen sea un punto de A-continuidad aproximativa de una función medible f, con el límite en c.t.p. de una sucesión de funciones dilatadas adecuadamente a partir de f. Concretamente tenemos los siguientes resultados.

Proposición B.28. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible tal que $f(\mathbf{0}) = 0$. Si*

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} f(A^{-j} \mathbf{x}) = 0 \qquad \textit{para c.t. } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

entonces el origen es un punto de A-continuidad aproximativa de la función f.

Para la demostración de esta proposición necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema B.29. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible. Entonces $\forall \varepsilon > 0$, para cualquier $r > 0$ y para cualquier $j \in \mathbf{N}$ tenemos*

$$| \{ \mathbf{x} \in B_r :| f(A^{-j}\mathbf{x}) |< \varepsilon \} |_n = d_A^j \mid \{ \mathbf{x} \in A^{-j} B_r :| f(\mathbf{x}) |< \varepsilon \} |_n .$$

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $r > 0$ y $j \in \mathbf{N}$ fijos. Si hacemos el cambio de variable $A^{-j}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ es cierto

$$\begin{aligned} | \{ \mathbf{x} \in B_r \ : \ | f(A^{-j}\mathbf{x}) |< \varepsilon \} |_n &= \int_{\{\mathbf{x} \in B_r \ : \ |f(A^{-j}\mathbf{x})|<\varepsilon\}} d\mathbf{x} \\ &= d_A^j \int_{\{\mathbf{y} \in A^{-j}B_r \ : \ |f(\mathbf{y})|<\varepsilon\}} d\mathbf{y} \\ &= d_A^j \mid \{ \mathbf{x} \in A^{-j} B_r \ : \ | f(\mathbf{x}) |< \varepsilon \} |_n . \end{aligned}$$

$\square$

Demostración de la Proposición B.28. Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbf{N}$ definimos el siguiente conjunto

$$F_j^\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in B_1 \ : \ | f(A^{-j}\mathbf{x}) |< \varepsilon \}$$

y para cada $N \in \mathbf{N}$ definimos

$$E_N^\varepsilon = \bigcap_{j \geq N} F_j^\varepsilon .$$

De esta forma el conjunto E_N^ε representa, para ε y N fijos, el conjunto de todos los puntos $\mathbf{x} \in B_1$ para los cuales $| f(A^{-j}\mathbf{x}) |< \varepsilon$ cualquiera que sea $j \geq N$.

Está claro, desde la definición de los conjuntos E_N^ε que para $\varepsilon > 0$ fijo, tenemos que

$$E_1^\varepsilon \subset E_2^\varepsilon \subset \cdots \subset E_N^\varepsilon \subset \cdots$$

entonces, desde la monotonicidad de la medida de Lebesgue,

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} | E_N^\varepsilon |_n = \Big| \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N^\varepsilon \Big|_n . \tag{B.21}$$

Por otro lado, podemos afirmar que

$$\Big| B_1 \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N^\varepsilon \Big|_n = 0, \tag{B.22}$$

ya que, en caso contrario existiría $F \subset (B_1 \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N^\varepsilon)$ medible con $| F |_n > 0$ y por lo tanto $\forall \mathbf{x} \in F$ $\forall j \in \mathbf{N}$ $\exists j_\mathbf{x} \geq j$ tal que $| f(A^{-j_\mathbf{x}}\mathbf{x}) | \geq \varepsilon$, es decir, F es un conjunto de medida positiva tal que

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} f(A^{-j}\mathbf{x}) \neq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in F,$$

con lo que hemos llegado a una contradicción con nuestras hipótesis.

Continuemos con la demostración de la proposición.

Como $E_N^\varepsilon \subset B_1$, el límite (B.21) y la igualdad (B.22) nos dicen que

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} | E_N^\varepsilon |_n = | B_1 |_n . \tag{B.23}$$

Además, como $E_N^\varepsilon \subset F_N^\varepsilon$ y $F_N^\varepsilon \subset B_1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
1 &= \liminf_{N\longrightarrow\infty} \frac{| E_N^\varepsilon |_n}{| B_1 |_n} \leq \liminf_{N\longrightarrow\infty} \frac{| F_N^\varepsilon |_n}{| B_1 |_n} \\
&= \liminf_{N\longrightarrow\infty} \frac{| \{\mathbf{x} \in B_1 \ : \ | f(A^{-N}\mathbf{x}) | < \varepsilon\} |_n}{| B_1 |_n}. \\
&= \liminf_{N\longrightarrow\infty} \frac{| \{\mathbf{x} \in A^{-N}B_1 \ : \ | f(\mathbf{x}) | < \varepsilon\} |_n}{| A^{-N}B_1 |_n},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del Lema B.29. De esta manera, hemos obtenido que se verifica (4º) en el Teorema B.26. □

El siguiente ejemplo muestra que la implicación contraria en la Proposición B.28 no es cierta.

Ejemplo 33. Construimos un conjunto medible $E \subset \mathbf{R}$, $| E | > 0$, tal que el origen pertenece a E y es un punto de continuidad aproximativa de la función χ_E pero no existe el $\lim_{j\longrightarrow\infty} \chi_E(2^{-j}x)$ para ningún $x \in \mathbf{R}$.

Empezamos tomando, para cada $j \in \{0, 1, 2, ...\}$, y cada $k \in \{0, ..., 2^j - 1\}$, los siguientes conjuntos

$$\Lambda_k^{(j)} = (\frac{2^j + k}{2^j}, \frac{2^j + k + 1}{2^j}].$$

Renombramos los conjuntos $\Lambda_k^{(j)}$ dándoles un orden determinado de la siguiente manera,

$$\Lambda_m = \Lambda_k^{(j)}, \qquad m = 2^j + k.$$

Finalmente, definimos el siguiente conjunto

$$E = E_1 \bigcup (-E_1) \quad \text{donde} \quad E_1 = [0, \infty) \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\Lambda_m.$$

Es fácil ver que dado $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$, no existe $\lim_{j\longrightarrow\infty} \chi_E(2^{-j}\mathbf{x})$. Si $x \in (1, 2]$, entonces existen infinitos Λ_{m_ν} tales que $x \in \Lambda_{m_\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$. Es más, supongamos que $x \notin \Lambda_m$ si $m \neq m_\nu$ $(\nu \in \mathbf{N})$. Así, desde la definición del conjunto E, tenemos que

$$\chi_E(2^{-m_\nu}x) = 1 \quad \text{para todo } \nu \in \mathbf{N},$$

y

$$\chi_E(2^{-m}x) = 0 \quad \text{si } m \neq m_\nu.$$

De esta manera, no existe el $\lim_{j\to\infty} \chi_E(2^{-j}x)$.

Después, podemos observar que para cualquier $x > 0$, se puede encontrar $l \in \mathbf{Z}$ tal que $2^l x \in (1, 2]$. Así, podemos utilizar el argumento anterior con la sucesión

$$l + m_\nu \ : \ \nu = i_l, i_l + 1, ...$$

donde hemos tomado i_l el número natural más pequeño tal que $l + m_\nu > 0$ si $\nu = i_l$. Cuando $x < 0$, el razonamiento puede ser análogo debido a la simetría respecto del origen el conjunto E.

Por otro lado, vamos a comprobar que el origen es un punto de continuidad aproximativa de χ_E. Para ello es suficiente con demostrar que $E \in \mathcal{D}$. Sea $l \in \mathbf{N}$, hallamos

$$\begin{aligned} | \, 2^l E^c \bigcap (-1,1) \, | &= 2 \, | \, 2^l E_1^c \bigcap (0,1) \, | = 2 \, | \, 2^l (\bigcup_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \Lambda_m) \bigcap (0,1) \, | \\ &= 2 \, | \, (\bigcup_{m=1}^{\infty} 2^{l-m} \Lambda_m) \bigcap (0,1) \, | = 2 \, | \, (\bigcup_{m=l+1}^{\infty} 2^{l-m} \Lambda_m) \, |, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es cierta ya que $\Lambda_m \subset [1,2]$, $m \in \mathbf{N}$.

Si escribimos $l+1 = 2^{j_0} + k_0$ donde $j_0 \in \mathbf{N}$ y $k_0 \in \{0, ..., 2^{j_0} - 1\}$, de esta manera, recordando el orden que hemos dado a los conjuntos Λ_m, tenemos que

$$| \, 2^l E_1^c \bigcap (0,1) \, |$$

$$\begin{aligned} &= | \, (\cup_{k=k_0}^{2^{j_0}-1} 2^{k_0-1-k} \Lambda_k^{(j_0)}) \bigcup (\cup_{j=j_0+1}^{\infty} \cup_{k=0}^{2^j-1} 2^{2^{j_0}+k_0-1-2^j-k} \Lambda_k^{(j)}) \, | \\ &\leq \sum_{k=k_0}^{2^{j_0}-1} 2^{k_0-1-k} \, | \, \Lambda_0^{(j_0)} \, | + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2^{j_0}+k_0-1-2^j} (\sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-k} \, | \, \Lambda_0^{(j)} \, |) \\ &\leq | \, \Lambda_0^{(j_0)} \, | + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{2^{j_0+1}-1-2^j} \, | \, \Lambda_0^{(j_0)} \, | \leq 2 \, | \, \Lambda_0^{(j_0)} \, | = 2 \frac{1}{2^{j_0}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} | \, 2^l E_1^c \bigcap (0,1) \, | = 0,$$

y así, desde la condición (iv) de la Proposición B.3 y la Proposición B.6 obtenemos que $E \in \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$.

Aunque el ejemplo anterior muestra que la implicación contraria de la Proposición B.28 no se cumple siempre, es cierto el siguiente resultado.

Proposición B.30. *Sea $A \in \mathcal{LE}$. Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible tal que origen es un punto de A-continuidad aproximativa de la función f si tenemos $f(\mathbf{0}) = 0$. Entonces existe una sucesión creciente de números naturales $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, $j_{k+1} > j_k$, tal que*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f(A^{-j_k} \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{para c.t. } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{B.24}$$

Demostración. Al ser el origen un punto de A-continuidad aproximativa de la función f si tenemos $f(\mathbf{0}) = 0$, desde la condición (3º) del Teorema B.26 tenemos que, sobre cualquier bola B_r con centro cero y radio r, la sucesión de funciones $\{f(A^{-j}\mathbf{x})\}_{j=1}^{\infty}$ tiende a cero en medida. Así, aplicando el Teorema de Egorov, podemos encontrar una subsucesión de números naturales $\{j_k^{(r)}\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \{j_k^{(r-1)}\}_{k \in \mathbf{N}}$, para cualquier $r \in \mathbf{N}$, tal que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f(A^{-j_k^{(r)}} \mathbf{x}) = 0 \quad \text{para c.t. } \mathbf{x} \in B_r.$$

Finalmente, usando el método de elección diagonal de Cantor, obtenemos que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f(A^{-j_k^{(k)}} \mathbf{x}) = 0 \quad \text{para c.t. } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

□

Afirmamos que podemos escribir un teorema análogo al Teorema B.22, pero para el caso general de la A-continuidad aproximativa. Para demostrar el resultado, necesitamos otro de los grandes teoremas del análisis que fue demostrado por N. N. Luzin en 1913.

Teorema de Luzin. *Sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible tal que $| \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\} |_n < \infty$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $g : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función continua tal que*

$$| \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\} |_n < \varepsilon.$$

Teorema B.31. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ una función medible. Entonces casi todo punto de $\mathbf{R}^n$ es un punto de A-continuidad aproximativa de f.*

Demostración. Para cada $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, denotamos $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\chi_{[0,1]^n}(\mathbf{x}-\mathbf{k})$. Como, $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^n} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$, es suficiente con demostrar que se cumple el resultado para cada $g_{\mathbf{k}}$. Sin pérdida de generalidad, lo comprobaremos para $g_{\mathbf{0}}$.

El Teorema de Luzin nos dice que existe una sucesión de conjuntos compactos, $\{K_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0,1]^n$, tal que $K_j \subset K_{j+1}$, $\forall j \in \{1, 2, ...\}$, donde todo punto de K_j es un punto de continuidad de la función f, y además se verifica que $| [0,1]^n \setminus (\cup_{j=1}^{\infty} K_j) |_n = 0$. El resultado se sigue desde la Proposición B.17, ya que nos dice que casi todo punto de K_j, $j \in \{1, 2, ...\}$, es un punto de A-densidad de K_j. $\square$

B.3. Funciones localmente distintas de cero y A-localmente distintas de cero

Las siguientes definiciones fueron introducidas en [16] para explicar el comportamiento de la transformada de Fourier de la función de escala de un análisis multirresolución en el origen.

Definición B.6. Una función medible $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ se dice que es *localmente distinta de cero* en el punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe r, $0 < r < 1$, tal que

$$|\{\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}) : f(\mathbf{y}) = 0\}|_n < \varepsilon |B_r(\mathbf{x})|_n.$$

Toda función medible f para la que el origen es un punto de continuidad aproximativa y $f(\mathbf{0}) \neq 0$ es una función localmente distinta de cero en el origen.

El siguiente ejemplo nos muestra una función medible localmente distinta de cero en el origen pero tal que el origen no es un punto de continuidad aproximativa de esta función.

Ejemplo 34. Definimos los siguientes conjuntos en $\mathbf{R}$,

$$E_1 = \bigcup_{j=0}^{\infty} 2^{-2^j}(\frac{1}{2}, 1], \qquad y \qquad E = \mathbf{R}^n \setminus (E_1 \cup (-E_1)).$$

Afirmamos que χ_E es localmente distinta de cero en el origen. Para comprobarlo, sea $\{B_{r_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ una sucesión de intervalos centrados en el origen y con radio

$r_j = 2^{-2^j-1}$. Entonces, dado $j \in \mathbf{N}$, hallamos

$$\begin{aligned} \frac{\mid E^c \cap 2^{-2^j-1}(-1,1) \mid}{\mid 2^{-2^j-1}(-1,1) \mid} &= \frac{\mid E_1^c \cap 2^{-2^j-1}(0,1) \mid}{\mid 2^{-2^j-1}(0,1) \mid} \\ &\leq \frac{\mid [0, 2^{-2^{j+1}}] \mid}{2^{-2^j-1}} = 2^{-2^j+1}. \end{aligned}$$

De esta manera, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos in intervalo centrado en el origen y con radio $r_j = 2^{-2^j-1}$, donde $j \in \mathbf{N}$ es tal que $2^{-2^j+1} < \varepsilon$, tenemos que

$$|\{x \in B_{r_j} \ : \ \chi_E(x) = 0\}| =| 2^{-2^j-1}(-1,1) \cap E^c |\leq 2^{-2^j+1} < \varepsilon.$$

Por otro lado, para probar que el origen no es un punto de continuidad aproximativa de χ_E, es suficiente observar que el origen pertenece a E y que $E \notin \mathcal{D}$. Para ver esto último, tomamos $\{B_{r_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ una sucesión de intervalos centrados en el origen y con radios $r_j = 2^{-2^j}$,y dado $j \in \mathbf{N}$, hallamos

$$\begin{aligned} \frac{\mid E^c \cap 2^{-2^j}(-1,1) \mid}{\mid 2^{-2^j}(-1,1) \mid} &= \frac{\mid E_1^c \cap 2^{-2^j}(0,1) \mid}{\mid 2^{-2^j}(0,1) \mid} \\ &\geq \frac{\mid 2^{-2^j}[\frac{1}{2}, 1] \mid}{2^{-2^j}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Definición B.7. Sea $A \in \mathcal{LE}$. Una función medible $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ se dice que es *$A-$localmente distinta de cero* en el punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ y para cualquier $r > 0$ existe $j \in \mathbf{N}$ tal que

$$|\{\mathbf{y} \in A^{-j}B_r + \mathbf{x_0} : f(\mathbf{y}) = 0\}|_n < \varepsilon|A^{-j}B_r + \mathbf{x_0}|_n. \tag{B.25}$$

Toda función medible f para la que el origen es un punto de A-continuidad aproximativa y $f(\mathbf{0}) \neq 0$ es una función A-localmente distinta de cero en el origen.

La siguiente proposición nos muestra que comprobar que se cumple la condición (B.25) en vez de para toda las bolas, para un conjunto con ciertas propiedades es suficiente para asegurar que nuestra función es A-localmente disitinta de cero en el punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$. Además, no daremos aquí su demostración porque es análoga a la de la Proposición B.7.

Proposición B.32. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $K \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto medible tal que existen $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ tal que $B_{r_1} \subset K \subset B_{r_2}$. Además, sea una función medible $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ tal que en el punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $j \in \mathbf{N}$ tal que*

$$|\{\mathbf{y} \in A^{-j}K + \mathbf{x_0} : f(\mathbf{y}) = 0\}|_n < \varepsilon|A^{-j}K + \mathbf{x_0}|_n.$$

Entonces f es A-localmente distinta de cero en el punto $\mathbf{x_0}$.

Veremos otra propiedad cuya demostración es análoga a la prueba del Lema B.13.

Proposición B.33. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ una función medible A-localmente distinta de cero en el origen. Además, supongamos que $C \in \mathcal{L}$ tal que $d_C > 0$. Entonces $f \circ C$ es $C^{-1}AC$-locamente distinta de cero en el origen.*

El siguiente ejemplo nos muestra una función medible A-localmente distinta de cero en el origen pero que el origen no es un punto de A-continuidad aproximativa de esta función.

Ejemplo 35. Sea $A \in \mathcal{LE}$. Empezamos tomando el conjunto $F = \bigcup_{j=0}^{\infty} A^{-j}B_1$. Observar que F satisface que $A^{-1}F \subset F$, y desde aquí, no es difícil comprobar que los conjuntos $S_j = A^{-j}F \setminus A^{-j-1}F$, $j = \{0, 1, ...\}$, son disjuntos. Además, se tiene que $\mid S_j \mid > 0$, $j = \{0, 1, ...\}$, ya que en caso contrario tene- mos una contradicción con la hipótesis de que A es expansiva. Por último, ver que $\bigcup_{j=0}^{\infty} S_j = F$ (Para más detalles mirar la demostración de la Proposición 2.8 en el Capítulo 2).

Definimos los siguientes conjuntos

$$E_1 = \bigcup_{l=0}^{\infty} S_{2^l} \quad (= \bigcup_{l=0}^{\infty} A^{-2^l} S_0), \qquad E = (\mathbf{R}^n \setminus E_1) \bigcup \{\mathbf{0}\}.$$

Afirmamos que la función χ_E es A-localmente distinta de cero en el origen. Para comprobarlo, de acuerdo con las propiedades de los conjuntos S_l que hemos mencionado más arriba, dado $j \in \mathbf{N}$, hallamos

$$\begin{aligned} \frac{\mid E^c \bigcap A^{-2^j-1} B_1 \mid_n}{\mid A^{-2^j-1} B_1 \mid_n} &= \frac{\mid A^{2^j+1} E_1 \bigcap B_1 \mid_n}{\mid B_1 \mid_n} \\ &\leq \frac{\mid A^{2^j+1} (\bigcup_{l=0}^{\infty} A^{-2^l} S_0) \bigcap F \mid_n}{\mid B_1 \mid_n} \\ &= \frac{\mid (\bigcup_{l=j+1}^{\infty} A^{-2^l} S_0) \mid_n}{\mid B_1 \mid_n} = \frac{\mid S_0 \mid_n}{\mid B_1 \mid_n} \sum_{l=j+1}^{\infty} d_A^{-2^l}. \end{aligned}$$

Además, como por hipótesis tenemos que $d_A > 1$, la serie $\sum_{l=0}^{\infty} d_A^{-2^l}$ es convergente, y por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural $j_\varepsilon = 2^j + 1$, donde $j \in \mathbf{N}$, tal que $\sum_{l=j+1}^{\infty} d_A^{-2^l} < \varepsilon \frac{|B_1|_n}{|S_0|_n}$. Finalmente, desde la Proposición B.32 con $K = B_1$, concluimos que nuestra afirmación es cierta.

Ver que el origen no es un punto de A-continuidad aproximativa de χ_E se sigue si observamos que el origen pertenece a E y que $E \notin \mathcal{D}_A$. Así, para probar esto último, dado $j \in \mathbf{N}$, hallamos

$$\begin{aligned} \mid A^{2^j} E^c \bigcap F \mid_n &= \mid A^{2^j} E_1 \bigcap F \mid_n = \mid (A^{2^j} \bigcup_{l=0}^{\infty} A^{-2^l} S_0) \bigcap F \mid_n \\ &\geq \mid S_0 \bigcap F \mid_n = \mid S_0 \mid_n > 0, \end{aligned}$$

donde el desarrollo anterior es cierto de acuerdo con las propiedades que hemos enunciado más arriba sobre de los conjuntos F y S_l, $l = 0, 1, \ldots$. Así, finalmente, desde la Proposición B.7 tenemos que nuestra afirmación es cierta.

El siguiente resultado nos muestra una propiedad de las funciones A-localmente distintas de cero en el origen.

Proposición B.34. *Sea $A \in \mathcal{LE}$ y sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ una función medible y A-localmente distinta de cero en el origen. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{N}$, $j_k > j_{k-1}$, tal que para c.t. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $k \geq k_0$, tenemos que*

$$f(A^{-j_k}\mathbf{x}) \neq 0. \tag{B.26}$$

Demostración. Como la función f es A-localmente distinta de cero en el origen, tenemos que para $k = 1, 2, 3, ...$ y $\varepsilon_k = 2^{-k} \mid B_k \mid_n^{-1}$, $\exists j_k \in \mathbf{N}$, $j_k > j_{k-1}$, tal que

$$\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j_k} B_k \ : \ f(\mathbf{x}) = 0\} \mid_n < 2^{-k} \mid B_k \mid_n^{-1} \mid A^{-j_k} B_k \mid_n, \tag{B.27}$$

o equivalentemente, según el Lema B.29,

$$\mid \{\mathbf{x} \in B_k \ : \ f(A^{-j_k}\mathbf{x}) = 0\} \mid_n < 2^{-k}.$$

Obsérvese que ciertamente, tenemos que $j_{k+1} > j_k$ porque si

$$\inf_{0 \leq j \leq j_k} \frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j} B_k \ : \ f(\mathbf{x}) = 0\} \mid_n}{\mid A^{-j} B_k \mid_n} < 2^{-k} \mid B_k \mid_n^{-1} = 0,$$

entonces el soporte de la función f contiene (en casi todo punto) un entorno abierto del origen y por lo tanto podemos escoger $j_{k+1} > j_k$. Por otro lado, si

$$\inf_{0 \leq j \leq j_k} \frac{\mid \{\mathbf{x} \in A^{-j} B_k \ : \ f(\mathbf{x}) = 0\} \mid_n}{\mid A^{-j} B_k \mid_n} < 2^{-k} \mid B_k \mid_n^{-1} = C > 0,$$

podemos tomar ε_{k+1}, $0 < \varepsilon_{k+1} < \inf\{C, 2^{-k-1} \mid B_{k+1} \mid_n^{-1}\}$, y entonces, desde la definición de A-localmente distinta de cero en el origen, existe j_{k+1}, $j_{k+1} > j_k$, que satisface (B.27).

Veamos que para c.t. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ $\exists k_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $k \geq k_0$,

$$f(A^{-j_k}\mathbf{x}) \neq 0. \tag{B.28}$$

Dado $N \in \mathbf{N}$, sean

$$F_N = \bigcup_{k=N}^{\infty} \{\mathbf{x} \in B_k \ : \ f(A^{-j_k}\mathbf{x}) = 0\}, \qquad E = \bigcap_{N \geq 1} F_N.$$

Como

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_N \supset \cdots,$$

por la monotonicidad de la medida de Lebesgue, $\lim_{N \longrightarrow \infty} \mid F_N \mid_n = \mid E \mid_n$. Además, está claro que dado $N \in \mathbf{N}$ tenemos que

$$\mid F_N \mid_n \leq \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-N+1},$$

de donde se desprende que $\lim_{N \longrightarrow \infty} \mid F_N \mid_n = 0$, con lo que $\mid E \mid_n = 0$.

Nos falta probar que tenemos la relación (B.24) para todos los puntos del conjunto $\mathbf{R}^n \setminus E$.

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \setminus E$, entonces existe un $N_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\mathbf{y} \notin F_{N_0}$, en otras palabras,

$$\mathbf{y} \notin \{\mathbf{x} \in B_k \ : \ f(A^{-j_k}\mathbf{x}) = 0\}$$

para todo $k \geq N_0$, y en consecuencia

$$f(A^{-j_k}\mathbf{y}) \neq 0, \qquad \text{si} \quad k \geq N_0.$$

□

Bibliografía

[1] R. Balian; *Un principe d'incertidude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II **292** (1981), no. 20, 1357-1362.

[2] J. J. Benedetto, Manuel T. Leon; *The construction of multiple dyadic minimally supported frequency wavelets on* $\mathbf{R}^d$, The functional and harmonic analysis of wavelets and frames (San Antonio, TX, 1999), 43–74, Contemp. Math., 247, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[3] J. J. Benedetto, S. Li; *The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks* , Appl. Comput. Harmon. Anal. 5 (1998), no. 4, 389–427.

[4] C. Boor, R. DeVore, A. Ron; *Approximation from shift-invariant subspaces of* $L_2(\mathbf{R}^d)$, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), no. 2, 787–806.

[5] C. Boor, R. DeVore, A. Ron; *The structure of finitely generated shift-invariant spaces in* $L_2(R^d)$, J. Funct. Anal. 119 (1994), no. 1, 37–78.

[6] C. Boor, R. DeVore, A. Ron; *On the construction of multivariate (pre)wavelets*, Constr. Approx. 9 (1993), no. 2-3, 123–166.

[7] M. Bownik; *Tight frames of multidimensional wavelets*, Dedicated to the memory of Richard J. Duffin. J. Fourier Anal. Appl. 3 (1997), no. 5, 525–542.

[8] M. Bownik, G. Garrigós; *Biorthogonal wavelets, MRA's and shift-invariant spaces*, Studia Math. 160 (2004), no. 3, 231–248.

[9] M. Bownik, Z. Rzeszotnik, D. M. Speegle; *Characterization of dimension functions of wavelets*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 10 (2001), no. 1, 71–92.

[10] A. M. Bruckner; *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Mathematics, 659. Springer, Berlin, 1978.

[11] A. Calogero; *A characterization of wavelets on general lattices*, J. Geom. Anal. 10 (2000), no. 4, 597–622.

[12] A. Calogero; *Wavelets on general lattices, associated with general expanding maps of* $\mathbf{R}^n$, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 5 (1999), 1–10.

[13] O. Christensen; *An Introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[14] C. K. Chui; *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Inc. 1992.

[15] P. Cifuentes, K. S. Kazarian, A. San Antolín; *Characterization of scaling functions*, Wavelets and splines: Athens 2005, 152–163, Mod. Methods Math., Nashboro Press, Brentwood, TN, 2006.

[16] P. Cifuentes, K. S. Kazarian, A. San Antolín; *Characterization of scaling functions in a multiresolution analysis*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** No. 4 (2005), 1013-1023.

[17] A. Cohen *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitemente numérique du signal,* Ph.D. Thesis. Université Paris, Dauphine.

[18] A. Cohen; *Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire 7 (1990), no. 5, 439–459.

[19] A. Cohen, I. Daubechies; *Nonseparable bidimensional wavelet bases,* Rev. Mat. Iberoamericana 9 (1993), no. 1, 51–137.

[20] A. Cohen, I. Daubechies, J.-C. Feauveau; *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no. 5, 485–560.

[21] S. Dahlke, W. Dahmen and V. Latour; *Smooth refinable functions and wavelets obtained by convolution products.* Appl. Comput. Harmon. Anal. 2 (1995), no. 1, 68–84.

[22] X. Dai, D. R. Larson, D. M. Speegle; *Wavelet sets in* $\mathbf{R}^n$*. II.* Wavelets, multiwavelets, and their applications (San Diego, CA, 1997), 15–40, Contemp. Math., 216, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[23] X. Dai, D. Larson, D. M. Speegle; *Wavelet sets in* $\mathbf{R}^n$, J. Fourier Anal. Appl., 3 (1997), no. 4, 451-456.

[24] I. Daubechies; *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[25] I. Daubechies, B. Han, A. Ron, Z. Shen; *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames*, Appl. Comput. Harmon. Anal., 14 (2003), no. 1, 1–46.

[26] A. Denjoy; *Sur les fonctions dérivées sommables* Bull. Soc. Math. France vol I (1916) pp. 161-248.

[27] V. Dobrić, R. F. Gundy, P. Hitczenko; *Characterizations of orthonormal scale functions: a probabilistic approach*, J. Geom. Anal. 10 (2000), no. 3, 417–434.

[28] R. Duffin, A. Schaeffer; *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. of Amer. Math. Soc., **72** (1952), 341–366.

[29] X. Fang, X. Wang; *Construction of minimally supported frequency wavelets*, J. of Fourier Anal. Appl., 2, n^o 4, (1996), 315–327.

[30] V. I. Filippovand, P. Oswald; *Representation in L_p by series of translates and dilates of one function*, J. Approx. Theory 82 (1995), no. 1, 15–29.

[31] D. Gabor, *Theory of communication,* J. Inst. Elect. Eng., London, 93 (III).

[32] G. Garrigós, *The characterization of wavelets and related functions and the connectivity of a-localized wavelets in* **R**, Ph. D. Thesis, Washington University, May 1998.

[33] G. Gripenberg; *A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet*,. Studia Math. 114 (1995), no. 3, 207–226.

[34] K. Gröchening, W. R. Madych; *Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tillings of R^n,* IEEE Trans. Inform. Theory **38** (1992), no. 2, part 2, 556–568.

[35] Q. Gu, D. Han; *On Multiresolution Analysis (MRA) Wavelets in $\mathbf{R}^n$,* J. of Fourier Anal. Appl., 6, nº 4 (2000), 437–447.

[36] R. F. Gundy; *Two remarks concerning wavelets: Cohen's criterion for low-pass filters and Meyer's theorem on linear independence* The functional and harmonic analysis of wavelets and frames (San Antonio, TX, 1999), 249–258, Contemp. Math., 247, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[37] R. F. Gundy; *Low-pass filters, martingales, and multiresolution analyses*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 9 (2000), no. 2, 204–219.

[38] Y-H. Ha, H. Kang, J. Lee, J. Seo; *Unimodular wavelets for L^2 and the Hardy space H^2*, M. Math. J. 41, (1994), pp 723-736.

[39] P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, second edition, University Series in Undergraduate Mathematics, D. Van Nostrand Co. Incl., Princeton, New York, London, Toronto, 1958.

[40] E. Hernández; *Álgebra y geometría*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid. 1994.

[41] E. Hernández; *Ondículas y Tecnología*, Soc. Esp. Mat. Apl. (2003).

[42] E. Hernández, X. Wang, G. Weiss; *Characterization of wavelets, scaling functions and wavelets associated with multiresolution analyses* Israel Math. Conf. Proc., 13, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[43] E. Hernández, X. Wang, G. Weiss; *Smoothing minimally supported frequency wavelets. II.* J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), no. 1, 23–41.

[44] E. Hernández, X. Wang, G. Weiss; *Smoothing minimally supported frequency wavelets. I.* J. Fourier Anal. Appl. **2** (1996), no. 4, 329–340.

[45] E. Hernandez, X. Wang, G. Weiss; *Characterization of wavelets, scaling functions and wavelets associated with multiresolution analyses* Washington University in St. Louis, (1995).

[46] E. Hernández, G. Weiss; *A first course on Wavelets*, CRC Press, Inc. 1996.

[47] K. Hoffman, R. Kunze; *Linear Algebra*, Prentice-Hall Mathematics series, 1961.

[48] L. Hörmander; *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 256. Springer-Verlag, Berlin, 1983. ix+391 pp.

[49] R. Q. Jia and C. A. Micchelli; *Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets. II. Powers of two.* Curves and surfaces (Chamonix-Mont-Blanc, 1990), 209–246, Academic Press, Boston, MA, 1991.

[50] J.P. Kahane and P.G. Lemarié-Rieusset; Fourier series and wavelets, Gordon and Breach publishers, 1995.

[51] K. S. Kazarian; *Summability of generalized Fourier series and Dirichlet's problem in $L^p(d\mu)$ and weighted H^p-spaces* $(p > 1)$, Analysis Mathematica **13** (1987), 173–197.

[52] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin; *Elements of the theory of functions and functional analysis* , Editorial Mir, 1972.

[53] J. C. Lagarias, Y. Wang; *Orthogonality criteria for compactly supported refinable functions and refinable function vectors*, J. Fourier Anal. Appl. 6 (2000), no. 2, 153–170.

[54] W. M. Lawton; *Tight frames of compactly supported affine wavelets*, J. Math. Phys. 31 (1990), no. 8, 1898–1901.

[55] W. M. Lawton; *Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases*, J. Math. Phys. 32 (1991), no. 1, 57–61.

[56] R.A. Lorentz, W.R. Madych, A. Sahakian; *Translation and dilation invariant subspaces of $L^2(\mathbf{R})$ and multiresolution analyses,* Applied and Computational Harmonic Analysis **5** (1998), no. 4, 375–388.

[57] R.A. Lorentz and P. Oswald; *Nonexistence of compactly supported box spline prewavelets in Sobolev spaces. Surface fitting and multiresolution methods*, (Chamonix–Mont-Blanc, 1996), 235–244, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 1997.

[58] W. R. Madych; *Some elementary properties of multiresolution analyses of $L^2(R^d)$*, Wavelets - a tutorial in theory and applications, Ch. Chui ed., Wavelet Anal. Appl. 2, Academic Press (1992), 259–294.

[59] S. Mallat; *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for $L^2(\mathbf{R})$*, Trans. of Amer. Math. Soc., 315 (1989), 69–87.

[60] Y. Meyer; *Ondelettes et opérateurs. I*, Hermann, Paris (1996) [English Translation: Wavelets and operators, Cambridge University Press, (1992).]

[61] I. P. Natanson; *Theory of functions of a real variable*, London, vol. I, 1960.

[62] M. Papadakis, H. Sikić, G. Weiss; *The characterization of low pass filters and some basic properties of wavelets, scaling functions and related concepts*, J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999), no. 5, 495–521.

[63] M. Papadakis, T. Stavropoulos and N. Kalouptsidis; *An equivalence relation between multiresolution analysis of* $L^2(\mathbf{R})$, Applied and Computational Harmonic Analysis **3**, 366-271, 1996.

[64] M. Reed, B. Simon; *Functional Analysis*, Academic Press, Inc. (1980).

[65] Sz. Gy. Révész, A. San Antolín; A-Equivalence of self-adjoint linear maps. (Submitted)

[66] J. Ridder *Über approximativ stetige Funktionen von zwei (und mehreren) anderlichen,* Fund. Math. vol. 13 (1927) pp. 201–209.

[67] A. Ron, Z. Shen; *Affine systems in* $L_2(\mathbf{R}^d)$: *The analysis of the analysis operator,* J. Funct. Anal., 148 (1997), 408–447.

[68] W. Rudin; *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (1987)

[69] M. J. Smith, T. P. Barnwell; *Exact reconstruction techniques for treestructured subband coders*, IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Precessing, 35 (1986), 314-327.

[70] A. San Antolín; Characterization of low pass filters in a multiresolution analysis. (Submitted)

[71] R. Strichartz; *Construction of orthonormal wavelets*, Wavelets: mathematics and applications, 23–50, Stud. Adv. Math., CRC, Boca Raton, FL, 1994.

[72] X. Wang, *The study of wavelets from the properties of their Fourier Transforms,* Ph. D. Thesis, Washington University in S. Louis, (1995).

[73] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[74] P. Wojtaszczyk; *Banach sapaces for analysts*, Cambridge studies in advanced mathematics 25 (1991).

[75] P. Woytaszczyk; *A mathematical introduction to wavelets* London Mathematical Society, Student Text 37 (1997).

[76] The Wutam Consortium; *Basic properties of wavelets,* J. Fourier Anal. Appl. 4 (1998), no. 4-5, 575–594.