Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Física Teórica

TESIS DOCTORAL

Incertidumbre Mínima y Escalas Invariantes en Gravedad Cuántica

Pablo Galán Sánchez

Director: Dr. Guillermo A. Mena Marugán

Instituto de Estructura de la Materia
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Madrid, 2007

Ad maiorem Dei gloriam

Agradecimientos

Non recuso, ago etiam gratias, quoquo animo facis.

Cicerón.

Cuando en septiembre de 2001 decidí dejar la empresa en la que trabajaba con un contrato indefinido para volver a la universidad a estudiar la especialidad de Física Teórica y realizar el doctorado, no pocas personas de mi entorno pensaron que cometía una locura. A la mañana siguiente de abandonar mi puesto de trabajo, estaba sentado en una silla en clase de mecánica teórica. Recuerdo que la brusquedad de aquel cambio fue claramente superada por el entusiasmo que experimenté frente al nuevo *horizonte* que se extendía ante mí...

Quiero expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a todos los que me mostraron su apoyo ante aquella decisión, a la vez difícil y liberadora. En particular, a mi familia, cuya confianza en mí ha sido esencial durante estos años.

A mi director de tesis, Guillermo Mena Marugán, tengo que agradecerle ante todo la confianza que depositó en mí a pesar de mi situación incierta al inicio del doctorado. Así como su paciencia, y sus consejos en los momentos de desánimo.

A Fernando Barbero y Eduardo Sánchez Villaseñor les agradezco su generosa y pronta disposición a explicarme cálculos matemáticos y otras cuestiones. Al segundo, además, le doy las gracias por ofrecerse a revisar esta memoria de tesis.

A Jerónimo Cortez Quezada le agradezco la ayuda que me prestó durante su estancia postdoctoral en el Instituto de Estructura de la Materia (IEM) del CSIC, y los buenos ratos pasados con él y Enrico Perfetto, entre otros, fuera de la oficina.

Mis compañeros becarios del departamento de Química y Física Teóricas del IEM, David Brizuela, Iñaki Garay, Gil Jannes, Daniel Gómez Vergel y Mercedes Martín Benito, han supuesto un apoyo inestimable durante esta etapa. Por tantos momentos compartidos con ellos, desde conversaciones científicas hasta amenos almuerzos en el comedor del CSIC y noches canallas, les doy las gracias. Hago extensivo este agradecimiento a otros becarios del IEM y del Instituto de Matemáticas y Física Fundamental: María de la Vega Cañamares, José Antonio Jiménez Madrid, María del Prado Martín, Salvador Robles, Alberto Rozas, Vincenzo Giannini, Luca Guerrini, etc.

A César Fernández Ramírez y Lucas Lamata he de agradecerles su apoyo “logístico”. Sin su ayuda, LaTeX habría sido una fiera indómita. Además, a César le agradezco las charlas a la puerta del despacho y a Lucas su ayuda con los temidos trámites burocráticos.

A todos los mencionados y a tantos otros compañeros del CSIC quiero darles las gracias no sólo por su ayuda, sino también por su cercanía, afabilidad y el trato cordial dispensado en todo momento.

Por último, quiero darle las gracias a José Martel, cuyo apoyo allanó el camino para mi trabajo de investigación.

Los fondos para la realización de esta tesis doctoral han sido proporcionados por dos becas y un contrato de postgrado del programa I3P del CSIC cofinanciado por el Fondo Social Europeo. También agradezco los fondos recibidos, a través de proyectos, del Ministerio de Educación y Ciencia.

Índice general

Resumen

Se considera normalmente que una consecuencia de la combinación de la mecánica cuántica y la relatividad general es la aparición de una incertidumbre mínima (no nula) en las medidas de tiempo y posición, es decir, la existencia de un límite en la resolución de dichas medidas. Este límite de resolución podría conllevar implicaciones teóricas y observacionales importantes. No obstante, la mayoría de los estudios que conducen a este resultado están basados en aproximaciones perturbativas a la cuantización, en las que los efectos de la materia sobre la geometría se describen como correcciones a un fondo clásico.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la incertidumbre cuántica temporal y espacial en sistemas gravitatorios. Llevaremos a cabo este estudio en tres contextos diferentes: en espacio-tiempos con simetría cilíndrica (ondas gravitatorias de Einstein-Rosen), en espacio-tiempos de Schwarzschild-anti-de Sitter y en espacio-tiempos construidos a partir de teorías de relatividad doblemente especial, implementadas en el espacio de posiciones mediante una transformación canónica. Estos modelos incluyen los posibles efectos gravitatorios cuánticos debidos a la retroalimentación del contenido energético del sistema sobre la geometría, sin recurrir necesariamente a un tratamiento perturbativo. En este marco teórico, obtendremos las expresiones de las incertidumbres que afectan a las medidas de tiempo y/o longitud para cuantizaciones en las que se utiliza como parámetro de evolución bien el tiempo correspondiente a un fondo auxiliar o bien la coordenada de tiempo físico. Uno puede entender estas dos posibilidades como correspondientes a descripciones perturbativas y no perturbativas, respectivamente.

El resultado principal de este trabajo es la demostración de que, mientras en casos generales existe una incertidumbre temporal estrictamente positiva en el marco perturbativo, en una cuantización no perturbativa puede lograrse una resolución temporal infinita. Esto último es lo que ocurre para los agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter y la familia de teorías de relatividad doblemente especial con energía física no acotada. Este resultado contrasta con el que se obtiene para la incertidumbre en la longitud física en relatividad doblemente especial, la cual resulta no anularse genéricamente ni en la descripción perturbativa ni en una no perturbativa obtenida a partir de la primera.

Por otro lado, también exploraremos las modificaciones a la termodinámica de agujeros negros provocadas por la alteración de la relación de dispersión propia de relatividad especial y el principio de incertidumbre de Heisenberg. Para ello examinaremos dos formalismos de arco iris de gravedad. La conclusión más notable a la que llegaremos en este análisis es que, para ciertos modelos de arco iris gravitatorio, la evaporación de un agujero negro puede llegar a detenerse o durar un tiempo infinito en el límite de masa del agujero negro nula.

Capítulo 1

Introducción

Vemos la luz del atardecer anaranjada y violeta porque llega demasiado cansada de luchar contra el espacio y el tiempo.

A. Einstein.

1.1. Relaciones de indeterminación en mecánica cuántica

El principio de indeterminación de Heisenberg inherente a la mecánica cuántica convencional hace imposible lograr simultáneamente precisiones ilimitadas en mediciones de posición y momento efectuadas en un estado cuántico [1–3]. Algo similar sucede con las mediciones de tiempo y energía. Sin embargo, en este caso conviene tratar con más detalle la relación existente entre la incertidumbre en la energía y la que afecta al tiempo porque se han realizado muchas interpretaciones sobre ella, algunas erróneas. Esto se debe en buena medida al carácter especial que tiene el tiempo en mecánica cuántica. Mientras que en esta teoría las variables de posición se representan mediante operadores autoadjuntos, el tiempo, en cambio, desempeña el papel de parámetro de evolución (un c-número).

En mecánica cuántica puede seguirse el paso del tiempo estudiando la evolución de las densidades de probabilidad de un conjunto cualquiera de observables en un estado cuántico dado. Para todo observable $\widehat{A}$ de un sistema existe un tiempo característico τ_A que limita la capacidad de detectar su evolución, el cual puede estimarse como el intervalo de tiempo necesario para que su valor esperado $\langle\widehat{A}\rangle$ cambie una cantidad igual a su desviación cuadrática media ΔA, esto es $\tau_A \geq \Delta A/|d\langle\widehat{A}\rangle/dt|$. Por otra parte, la evolución cuántica de cualquier observable explícitamente independiente del tiempo está dada por la ecuación de Heisenberg $i\hbar\,(d\widehat{A}/dt) = [\widehat{A}, \widehat{H}]$, donde $\widehat{H}$ es el hamiltoniano y $\hbar$ la constante de Planck. Tengamos en cuenta ambas expresiones junto con el principio de incertidumbre de Heisenberg aplicado al par de observables $\widehat{A}$ y $\widehat{H}$, y permitamos que $\widehat{A}$ pueda ser cualquiera de los observables del sistema explícitamente independientes del tiempo. Con estas consideraciones se concluye que toda medida de tiempo efectuada en el estado cuántico tendrá una incertidumbre Δt que es igual, al menos, que el menor (el ínfimo) de todos los tiempos característicos τ_A correspondientes a cada uno de los observables, y que satisface la desigualdad $\Delta t \Delta H \geq \hbar/2$, conocida como cuarta relación de Heisenberg [2, 3].

Por lo tanto, para disminuir la incertidumbre en el tiempo y/o la posición es inevitable tener que aceptar una imprecisión cada vez mayor en la medición de la energía y/o del momento; obtener una resolución temporal y/o espacial infinita es solamente posible a costa de desconocer completamente el valor de la energía y/o del momento.

1.2. Incertidumbre mínima en gravedad cuántica

En presencia de gravedad la situación se complica más. Como ya se ha comentado, para mejorar la precisión en las medidas de tiempo y posición hay que considerar estados con incertidumbres cada vez mayores en la energía y el momento. Pero de las ecuaciones de Einstein [4] se deduce que una incertidumbre en la energía-momento del sistema se traduce en una incertidumbre en la geometría; y esto a su vez implica una incertidumbre adicional en las distancias espacio-temporales. Además, si se emplean vectores de Killing asintóticos normalizados para definir la energía y el momento físicos, una incertidumbre en la geometría afecta a dicha normalización y, por tanto, revierte en un desconocimiento de la energía y el momento físicos. De esta forma, se concluye que la incertidumbre total en el tiempo y la posición surge de una compleja combinación de dos tipos de contribuciones entrelazadas: una contribución puramente mecano-cuántica y otra de origen gravitatorio [5]. En consecuencia, no debería esperarse que fuera posible conseguir una resolución infinita en medidas de tiempo y espacio (o mejor dicho, de distancias temporales y espaciales) a menos que ambas clases de contribuciones resulten estar relacionadas de una manera muy específica.

1.2.1. Tratamiento perturbativo e incertidumbre mínima

La manera usual de analizar la aparición de una incertidumbre mínima en presencia de gravedad consiste en adoptar un tratamiento perturbativo, en el cual el punto de partida es un fondo en el que se introduce el contenido material cuántico del sistema, deformando así la geometría. Por ejemplo, en aproximación semiclásica, el tensor de energía-momento que actúa como fuente en las ecuaciones de Einstein se obtiene del valor medio del tensor energía-momento cuántico en el estado que describe el contenido material sobre el fondo clásico de partida. La deformación resultante de la geometría afecta al comportamiento del campo material, alterando sus propiedades y, en particular, el valor asociado del tensor energía-momento. Se llega así a una serie de correcciones sucesivas que, supuestamente, deberían ser cada vez menos importantes.

Varios argumentos sugieren que este tipo de tratamiento perturbativo en la cuantización lleva siempre a una incertidumbre mínima (al menos en la aproximación de primer orden de correcciones) [5–16]. A continuación, presentamos brevemente varios escenarios de gravedad cuántica de los que se desprende la existencia de un límite de resolución en la medición de la distancia entre dos sucesos (límite que en estos escenarios es del orden de la longitud de Planck[1]).

1.2.2. Incertidumbre mínima en experimentos mentales

En relatividad general el espacio-tiempo se trata como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones. Una manera de introducir coordenadas en esta variedad consiste en asumir que existen partículas (relativistas) ubicadas por todo el espacio que actúan como marcadores de coordenadas [6]. Cada partícula se confina (mediante potenciales apropiados) en una región de radio Δx. Para una partícula relativista el principio de indeterminación establece que no se puede conocer su localización con una precisión que supere su longitud de onda Compton porque, en caso contrario, la incertidumbre en su energía sería mayor que su masa en reposo y esto oscurecería el concepto de partícula. Por tanto, $\Delta x \gtrsim 1/E$, siendo E la energía de la partícula (tomamos unidades $\hbar = c = 1$, donde c es la velocidad de la luz). Por otro lado, para evitar que el contenido energético de la partícula forme un horizonte de sucesos en torno a ella, es necesario que $\Delta x > 2GE$ (hemos supuesto una distribución esféricamente simétrica para la partícula, esto es, una métrica de Schwarzschild). De ambas desigualdades se llega (aproximando en orden de magnitud) a que

$$\Delta x \gtrsim \sqrt{G} = l_P, \tag{1.1}$$

es decir, con este sistema de coordenadas se obtiene una incertidumbre mínima constante del orden de la longitud de Planck en la medición de longitudes.

Se alcanza el mismo resultado si, en vez de partículas confinadas, se consideran partículas libres. La posición de una partícula libre puede determinarse mediante el famoso experimento mental del microscopio de Heisenberg [1,5,17]. En este contexto, además de la incertidumbre puramente mecano-cuántica debida al desconocimiento de la dirección exacta de salida del fotón dispersado por la partícula observada, $\Delta x \geq 1/(2\Delta p_x)$, hay otra contribución, que es debida a la interacción gravitatoria entre la partícula observada y el fotón. Según el tratamiento más simple, en que la gravedad se considera newtoniana, el fotón atrae a la

[1] La escala de Planck está dada por la longitud de Planck $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1{,}6 \times 10^{-35}$ m, el tiempo de Planck $t_P = l_P/c = \sqrt{\hbar G/c^5} \simeq 5{,}4 \times 10^{-44}$ s, y la energía de Planck $E_P = \hbar/t_P \simeq 1{,}2 \times 10^{28}$ eV. Aquí, G es la constante de Newton.

partícula con una aceleración dada por el campo gravitatorio newtoniano $l_P^2\omega/r^2$, donde ω es la energía del fotón, r es el radio de la región en que el fotón y la partícula interactúan de manera intensa, y l_P es la longitud de Planck. Durante el tiempo r que el fotón permanece en dicha región, la partícula adquiere una velocidad $l_P^2\omega/r$ y, por tanto, recorre una distancia del orden de $l_P^2\omega$ en la dirección de movimiento del fotón, que se desconoce. Proyectando sobre el eje x, se tiene que $\Delta x \gtrsim l_P^2\Delta p_x$.

Combinando ambas contribuciones a la incertidumbre se obtiene (aproximando en orden de magnitud)

$$\Delta x \gtrsim \frac{1}{\Delta p_x} + l_P^2\Delta p_x \gtrsim l_P. \tag{1.2}$$

La explicación física parece evidente. Para lograr una buena resolución espacial se necesita un fotón de alta energía (debido a la relación de incertidumbre de Heisenberg). Pero cuanto mayor es la energía del fotón, mayor es su interacción gravitatoria con la partícula y, por consiguiente, mayor la perturbación. De forma que si la energía es demasiado grande, se pierden las ventajas de usar fotones de alta energía.

En un escenario similar, se puede demostrar también que existe un límite en la resolución temporal al sincronizar relojes mediante el intercambio de fotones [5, 17, 18]. La lectura del reloj tiene al menos dos fuentes de incertidumbre. La primera se debe a la cuarta relación de Heisenberg (tiempo-energía), que restringe la precisión en los instantes de emisión y recepción del fotón a ser menor que $1/(2\Delta\omega)$. La segunda se debe a la interacción gravitatoria entre el fotón y el reloj. Se emplea ahora un tratamiento más sofisticado que el anterior, en el que se hace uso completo de la relatividad general. Se acepta que el fotón y el reloj interactúan intensamente en una región de radio r y, en consecuencia, durante un lapso r (con tal que el reloj permanezca estacionario). Según el reloj, la duración de la interacción será $\sqrt{g_{00}}r$, donde g_{00} es la componente temporal de la métrica relacionada con el campo gravitatorio creado por el fotón (y sufrido por el reloj) y su expresión es [17]

$$g_{00} = 1 - \frac{4l_P^2\omega}{r}. \tag{1.3}$$

La incertidumbre en la duración de la interacción debida a la dispersión de frecuencias $\Delta\omega$ es

$$\frac{2l_P^2\Delta\omega}{\sqrt{1-4l_P^2\omega/r}} \gtrsim 2l_P^2\Delta\omega. \tag{1.4}$$

Teniendo en cuenta ambas contribuciones, la indeterminación en la lectura del reloj será (en orden de magnitud)

$$\Delta t \gtrsim \frac{1}{\Delta\omega} + l_P^2\Delta\omega \gtrsim l_P. \tag{1.5}$$

Se llega así, al igual que antes, a una incertidumbre mínima constante del orden de la longitud (tiempo) de Planck.

Los resultados anteriores se han obtenido sin recurrir a ningún formalismo particular de gravedad cuántica, sino teniendo en cuenta sólo consideraciones básicas de relatividad general y mecánica cuántica. A continuación sí se usarán explícitamente dos de esos formalismos, con los que se halla dicha incertidumbre mínima constante.

1.2.3. Incertidumbre mínima en teoría de cuerdas y en gravedad cuántica de lazos

Dos formalismos especialmente importantes de gravedad cuántica en los que se ha estudiado la aparición de una incertidumbre mínima son la teoría de cuerdas [5, 19–23] y la gravedad cuántica de lazos [5, 24–26].

• A partir de análisis de colisiones en **teoría de cuerdas** perturbativa basados en *"tree amplitude"* [20] se llega a una incertidumbre espacio-temporal que puede considerarse producida por las fluctuaciones independientes de las dos direcciones de la hoja del universo (*worldsheet)* [22, 23]. Estas fluctuaciones corresponden a dos longitudes extremales conjugadas, de manera que su producto nunca se anula. Las mediciones en la dirección espacial de la hoja del universo presentan una incertidumbre cuántica, que cumple el principio de indeterminación y, por tanto, es inversamente proporcional a la incertidumbre en el momento. Las mediciones en la dirección temporal (definida como una longitud de "propagación") se basan en el tiempo de vuelo, el cual es proporcional al momento. La incertidumbre para la cuerda puede escribirse de la forma [5, 21]

$$\Delta x \gtrsim \frac{1}{\Delta p} + C l_P^2 \Delta p, \tag{1.6}$$

con C una cierta constante estrictamente positiva.

Esta expresión es en esencia la misma que se ha obtenido anteriormente en los experimentos mentales de microscopio. Se obtiene, por tanto, una incertidumbre mínima constante del orden de la longitud de Planck. A altas energías las cuerdas se abren, siendo su tamaño proporcional a su energía.

• Al contrario, en **gravedad cuántica de lazos** la geometría se estudia no perturbativamente y enfatizando la importancia de la invariancia bajo difeomorfismos, de forma que los campos de fondo no desempeñan ningún papel. Se pueden definir operadores geométricos, que incorporan información sobre la métrica. Algunos de éstos, como, por ejemplo, los operadores área y volumen, tienen espectro discreto, cuyo primer autovalor no nulo es del orden de l_P^2 y l_P^3, respectivamente [24–26]. Esto lleva a pensar en una imagen de espacio-tiempo discontinuo a pequeñas escalas. Sin embargo, esta estructura discreta no implica necesariamente una incertidumbre espacio-temporal mínima (de orden l_P). De hecho, la separación entre autovalores consecutivos de área tiende a cero cuando uno se aproxima al régimen de áreas infinitamente grandes, régimen donde resulta posible por tanto alcanzar una resolución infinita.

1.3. Tipos de incertidumbre mínima

Existen diferentes propuestas de incertidumbre espacio-temporal mínima surgidas de distintos sistemas gravitatorios. La más sencilla es una incertidumbre constante del orden de la longitud de Planck (l_P) [5, 6]. Este tipo de incertidumbre, además de aparecer en los escenarios comentados previamente, también viene sugerida por el previsible comportamiento cuántico del espacio-tiempo a pequeñas escalas. En relatividad general la materia influye sobre el espacio-tiempo y, a su vez, éste controla a la materia. Ambos conforman una única realidad indisoluble. De modo que, al igual que la materia presenta un comportamiento cuántico en escalas microscópicas, es de esperar que el espacio-tiempo también posea dicho comportamiento y, en concreto, que también sufra fluctuaciones cuánticas. Estas fluctuaciones harían que, a pequeñas escalas (previsiblemente relacionadas con la escala de Planck), el espacio-tiempo se pudiera describir como una geometría "rugosa" con infinidad de "pliegues" y una compleja estructura topológica, lo que se ha dado en llamar *espuma espacio-temporal* o *espuma cuántica* [27–30]. Si el espacio-tiempo realmente experimenta fluctuaciones cuánticas, éstas se manifestarán como incertidumbres al realizar mediciones de distancias o intervalos de tiempo.

Otra sugerencia es una incertidumbre que crece con la raíz cuadrada del tiempo. Esta clase de incertidumbre se apoya en el análisis realizado por Salecker y Wigner de un dispositivo de medida considerado como un sistema libre de masa m y con incertidumbres en su posición y momento iniciales Δx y Δp [31]. La incertidumbre en la posición en un instante de tiempo t posterior es $[\Delta x(t)]^2 = (\Delta x)^2 + (t\Delta p/m)^2$ [31–33], donde se ha asumido que las medidas de posición y momento no están correlacionadas (los detalles pueden verse en el Apéndice A). Esta expresión de la incertidumbre es similar (exceptuando la presencia de la variable tiempo y la suma en cuadratura) a la que se obtiene para el análisis de colisiones en teoría de cuerdas perturbativa. Es fácil probar que el principio de Heisenberg implica que el valor mínimo de las incertidumbres temporal y espacial $\Delta t \equiv \Delta x(t)$ (con $c = 1$) crece con $\sqrt{t}$ [7–10, 31]. A este mismo comportamiento se llega adoptando la imagen del espacio-tiempo como una espuma, con fluctuaciones cuánticas en la escala de Planck [10, 34].

También se deduce este tipo de incertidumbre en modelos de *camino aleatorio* [11, 12, 35]. En ellos se considera que las trayectorias de las partículas se ven afectadas por fluctuaciones aleatorias, con una escala de fluctuación característica del orden de la de Planck. Para recorrer una distancia espacial l, una partícula deberá realizar l/l_P pasos, en cada uno de los cuales recorrerá un bloque elemental de escala l_P. Las fluctuaciones del espacio-tiempo en cada uno de estos pasos conllevan una incertidumbre en la distancia del orden de la propia longitud de Planck l_P. Como se supone que las fluctuaciones son aleatorias, la desviación cuadrática media en la distancia vendrá dada por una distribución binomial y será del orden de l_P multiplicado por la raíz cuadrada del número de pasos, esto es $\Delta l \sim \sqrt{l\, l_P}$, que (salvo por el intercambio de t con l en nuestros argumentos) reproduce el tipo de dependencia de Salecker-Wigner.

Basada en el método de medida de Salecker-Wigner, se ha propuesto también una incertidumbre proporcional a la potencia 1/3 del tiempo (o longitud) [12–15]. Esta sugerencia proviene básicamente de considerar que el tamaño del dispositivo de medida ha de ser mayor que su radio de Schwarzschild para evitar que se forme un horizonte de sucesos que impida el intercambio de fotones entre los diferentes componentes del dispositivo, $\Delta x > 2Gm$. Multiplicando esta expresión y el cuadrado de la incertidumbre obtenida por Salecker y Wigner se llega a que la incertidumbre espacio-temporal mínima crece con $\sqrt[3]{t}$. Esta incertidumbre posiblemente esté relacionada con el principio de holografía [16], que sostiene que la información contenida en el mundo cotidiano de tres dimensiones espaciales puede codificarse en una superficie de dos dimensiones, como un holograma [36, 37]. Dicho de otro modo, el máximo número de grados de libertad que puede contener una región del espacio viene dado por el área de la pantalla holográfica de la región (normalmente su superficie frontera) en unidades de Planck. Así, si por ejemplo se considera una región espacial que mide $l \times l \times l$, el número de grados de libertad que esta región cúbica puede contener está limitado por la cantidad l^2/l_P^2, en vez de por el volumen de la región como cabría esperar en un primer momento. Siguiendo una norma convencional, puede dividirse la región en pequeños cubos tales que se pueda asociar cada uno de ellos con un grado de libertad. Conforme a la propuesta de una incertidumbre mínima proporcional a $(ll_P^2)^{1/3}$, los cubos más pequeños dentro de esa región tienen una dimensión lineal del orden de esta cantidad. En consecuencia, el número de grados de libertad de la región está limitado por $[l/(ll_P^2)^{1/3}]^3 = l^2/l_P^2$, que es esencialmente el área de la frontera de la región en unidades de Planck, como requiere el principio holográfico.

Estas propuestas, aunque no están exentas de polémica [32, 33, 38–40], han motivado la posibilidad de que las medidas de tiempo (longitud) estén afectadas por una incertidumbre mínima de la forma genérica $\Delta t = t^\alpha t_P^{1-\alpha}$ ($\Delta l = l^\alpha l_P^{1-\alpha}$), donde t_P es el tiempo de Planck y α es una constante no negativa [10]. La propuesta de incertidumbre mínima constante corresponde, por tanto, a un valor nulo de α, mientras que la de Salecker-Wigner y la holográfica corresponden a $\alpha = 1/2$ y $\alpha = 1/3$, respectivamente.

1.4. Consecuencias fenomenológicas de una incertidumbre mínima

Actualmente existe un interés creciente por las consecuencias que una incertidumbre mínima podría tener, en particular, en Astrofísica [16, 35, 41]. Tradicionalmente se admitía que no era viable el detectar experimentalmente los posibles efectos cuánticos del espacio-tiempo porque son minúsculos debido a la extraordinaria pequeñez de la escala de Planck involucrada ($l_P \sim 10^{-35} m$). Sin embargo, en los últimos años han comenzado a surgir ideas sobre experimentos que implican mecanismos acumulativos que amplifican los efectos extremadamente pequeños que se pretenden descubrir. Esto, unido a la mejora progresiva de la instrumentación, ha llevado a nuevas líneas de investigación para la comprobación de los efectos a la escala de Planck. A continuación se indican algunas de ellas.

1.4.1. Ruido de desplazamiento en interferómetros

Una consecuencia posible de la existencia de una incertidumbre mínima sería la aparición de un ruido de desplazamiento en interferómetros de ondas gravitatorias (como LIGO, VIRGO, GEO, TAMA o el planeado LISA) [10, 16, 35, 42–46]. El fundamento de estos interferómetros está basado (con modificaciones sustanciales en el caso de LISA) en el de un interferómetro de tipo Michelson. En términos generales constan de una fuente de luz láser, un divisor de haz y dos espejos situados en los extremos de dos brazos muy largos dispuestos perpendicularmente. El haz de luz es separado en el divisor en un haz transmitido y otro reflejado. Cada uno de estos haces se dirige a un espejo diferente y, después de reflejarse, ambos regresan al divisor de haz, donde se superponen. De este modo surge un patrón de interferencia, sensible a cambios en las distancias entre el divisor de haz y los espejos. Si estas distancias se viesen afectadas por fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo del tipo discutido anteriormente, se originaría un ruido de desplazamiento (que puede considerarse como una clase diferente de señal gravitatoria) que sería detectable incluso después de haber compensado todos los ruidos conocidos, como el ruido sísmico, el ruido térmico o el ruido de disparo.

Este ruido de desplazamiento se suele expresar en términos de la densidad de amplitud espectral de desplazamiento $s(f)$, donde f es la frecuencia en la que se mide [47]. En más detalle, si la señal obtenida en un interferómetro viene descrita por una serie temporal $s(t)$, se define su autocorrelación como

$$s \star s(\tau) = \int dt \; s(t)s(t+\tau), \tag{1.7}$$

y su espectro de potencia como la transformada de Fourier de su autocorrelación:

$$s^2(f) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int d\tau s \star s(\tau) e^{-i2\pi f \tau} \tag{1.8}$$

para $f \geq 0$ (en esta definición se introduce por convenio un factor 2 para compensar el hecho de que no se consideran frecuencias negativas). La densidad de amplitud espectral $s(f)$ viene dada entonces simplemente por la raíz cuadrada de la expresión anterior y se tiene que está relacionada con el ruido de desplazamiento mediante

$$\sigma_s^2 = \int_0^\infty df s^2(f). \tag{1.9}$$

En realidad, la integral no debería extenderse a todos los reales positivos, sino cubrir sólo la banda de frecuencias registrada por el interferómetro. Aunque en principio el límite superior de frecuencias puede ser infinito, en la práctica la frecuencia más alta distinguible es la frecuencia de Nyquist. No obstante, podemos obviar la existencia de una frecuencia máxima porque para valores a partir de dicho máximo la contribución a la integral es generalmente despreciable. Por otro lado, la frecuencia mínima viene determinada por el tiempo de medición t_f en el que se ha registrado la serie temporal, de manera que $f_{min} = 1/t_f$. Por tanto, podemos tomar $\sigma_s^2 = \int_{f_{min}}^\infty df s^2(f)$. Para una incertidumbre mínima genérica del tipo $\Delta t_f = t_f^\alpha t_{QG}^{1-\alpha}$ descrito en la sección anterior, el ruido de desplazamiento será aproximadamente $\sigma_s \sim \Delta t_f$ y la densidad de amplitud espectral adquirirá pues la forma [10, 16]

$$s(f) \sim t_{QG}^{1-\alpha} f^{-\alpha-1/2}. \tag{1.10}$$

Aquí, t_{QG} (o equivalentemente l_{QG}) es una escala genérica de gravedad cuántica, supuestamente del orden de la escala de Planck, que se introduce para tener en cuenta la posibilidad de que las diferentes imágenes de espuma espacio-temporal, aunque lleven al comportamiento correcto de la incertidumbre mínima, proporcionen sólo una estimación burda de la escala relevante.

En un cierto rango de frecuencias (del orden de 100 Hz), los datos experimentales permiten acotar la escala l_{QG} para algunas de las imágenes de espuma espacio-temporal [35]. Así, por ejemplo, con el nivel de ruido de 10^{-18} m/Hz$^{1/2}$ observado en LIGO [42, 48] se obtienen las cotas $l_{QG} \lesssim 10^{-17}$m para una incertidumbre mínima independiente del tiempo ($\alpha = 0$), $l_{QG} \lesssim 10^{-40}$m para una incertidumbre del tipo de camino aleatorio ($\alpha = 1/2$), y $l_{QG} \lesssim 10^{-29}$m para una incertidumbre de tipo holográfico ($\alpha = 1/3$). Si se asume que la escala l_{QG} no ha de ser muy diferente de la escala de Planck l_P, la cota obtenida para la imagen espacio-temporal de camino aleatorio (cinco órdenes de magnitud inferior a la escala de Planck) arroja serias dudas sobre la validez de esa propuesta. Por el contrario, la cota de escala estimada para la incertidumbre holográfica no resulta inconsistente con el valor de la escala de Planck, aunque todavía queda lejos del rango de valores que normalmente se consideran como candidatos probables a representar la escala de longitud involucrada en gravedad cuántica. No obstante, es posible que, con la sensibilidad que se espera alcanzar en la fase avanzada de LIGO, se consiga explorar la escala l_{QG} hasta valores próximos a 10^{-33}m para la propuesta holográfica [49]. Incluso es factible que pueda restringirse más esta cota a partir de la puesta en marcha de la siguiente generación de interferómetros (espaciales), como LISA. Vemos, por último, que las técnicas interferométricas están muy lejos de poder arrojar luz sobre la imagen de espuma cuántica relacionada con una incertidumbre mínima constante.

1.4.2. Pérdida de coherencia de fase de la luz

Otro efecto podría ser la pérdida de coherencia de fase en la radiación emitida por fuentes distantes, lo cual podría impedir la formación de patrones de difracción en interferometría estelar [41, 50]. La existencia de una incertidumbre espacio-temporal mínima debida a las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo, si éstas son aleatorias de tipo espuma, podría implicar que tanto el periodo como la longitud de onda de la luz procedente de fuentes astrofísicas no estén determinadas de forma precisa en la propagación. Las fluctuaciones provocadas por la espuma espacio-temporal inducirían así la aparición de fases aleatorias diferentes (cuyo valor medio es cero) en las distintas componentes de una onda. Si se admite que para rayos que viajan desde una fuente distante a través de caminos diferentes las fluctuaciones aleatorias de las fases no están correlacionadas, se concluye que las diferencias de fase que aparecen en los términos de interferencia pueden tomar cualquier valor entre 0 y 2π cuando la distancia recorrida es suficientemente grande. Por tanto, para fuentes suficientemente lejanas no se formarían patrones de interferencia (anillos de difracción de Airy) en el dispositivo observacional. No obstante, esta sugerencia ha recibido serias críticas [51, 52]. En particular, una pérdida significativa de fase sólo se produciría si las fluctuaciones espacio-temporales que inducen las variaciones de fase ocurren de forma estocástica a lo largo del camino recorrido, modifican la propagación propiamente dicha y no existe correlación entre las fluctuaciones que afectan a las distintas componentes de los frentes de onda que alcanzan el mecanismo de observación.

1.4.3. Anomalías en rayos cósmicos y rayos gamma

Los anteriores escenarios observacionales tratan con efectos que pueden llegar a comprobarse en un futuro cercano. A continuación se exponen dos situaciones experimentales en las que de hecho ya se han constatado paradojas o inconsistencias entre las predicciones teóricas convencionales y las observaciones, lo que podría indicar que se trata de las primeras manifestaciones registradas de la física a la escala de Planck.

En las últimas décadas se han obtenido datos astrofísicos desconcertantes [53–68] que sugieren la posibilidad de que los umbrales de energía para los procesos de producción de pares electrón-positrón $\gamma\gamma \longrightarrow e^+e^-$ y de foto-producción de piones $p\gamma \longrightarrow \Delta(1232) \longrightarrow \pi p$ calculados a partir de relatividad especial sean demasiado bajos.

Poco tiempo después de que Penzias y Wilson descubrieran la radiación del fondo cósmico de microondas, Greisen e, independientemente, Zeitsepin y Kuz'min pusieron de manifiesto que esta radiación tendría un efecto intenso de atenuación sobre los rayos cósmicos de muy alta energía [60, 61]. Si se admite que los rayos cósmicos en este rango de energías están constituidos por protones [53–62], éstos pueden interactuar con los fotones del fondo de microondas produciendo piones. Combinando la relación de dispersión de relatividad especial con la condición de conservación del cuadrimomento se obtiene que, para que se produzca la interacción (en una dimensión), la energía del protón en el sistema de laboratorio, E, ha de satisfacer la condición

$$E \geq \frac{\left[(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2\right]^2 + 4m_p^2\epsilon^2}{4\epsilon\left[(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2\right]}, \tag{1.11}$$

donde m_π, m_p y ϵ son la masa en reposo del pión, la del protón y la energía del fotón en el sistema de laboratorio, respectivamente. Teniendo en cuenta que la energía típica de los fotones del fondo de microondas ($\epsilon \sim 7 \cdot 10^{-4}$ eV) es mucho menor que las masas en reposo del pión y el protón, la anterior condición de umbral de reacción se puede escribir en muy buena aproximación como

$$E \gtrsim \frac{(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2}{4\epsilon}. \tag{1.12}$$

Así pues, se encuentra que estas interacciones deberían dar lugar a una cota superior del orden de $E \sim 5 \cdot 10^{19}$ eV en la energía de los rayos cósmicos observados, el límite GZK (Greisen, Zatsepin y Kuz'min), a menos que procedan de fuentes situadas a una distancia inferior al recorrido libre medio de las interacciones, que se estima $\lesssim 100$ Mpc [62]. Dada la distribución aparentemente isótropa de las direcciones de llegada de los rayos cósmicos (en todo el espectro de energías) [55,59,69], no se ha conseguido identificar candidatos aceptables para ser fuentes de rayos cósmicos ultraenergéticos en el rango de distancias mencionado [69]. Sin embargo, se han registrado eventos con energías de hasta $3 \cdot 10^{20}$ eV [55, 58].

De la misma forma en que se obtiene el límite GZK para los rayos cósmicos, se obtiene también un límite en la energía de los rayos gamma. Los rayos gamma pueden interactuar con la radiación del fondo extragaláctico difuso infrarrojo, dando lugar a pares electrón-positrón. Para que tenga lugar una interacción de este tipo entre dos fotones cuyas direcciones de incidencia forman un ángulo θ, la relatividad especial establece que sus energías en el sistema de laboratorio, ϵ y E, tienen que satisfacer la condición

$$\epsilon E(1 - \cos\theta) = 2E_e^2, \tag{1.13}$$

donde E_e es la energía total del electrón (y también del positrón) en el sistema del centro de masas. La energía umbral de la producción de pares se obtiene cuando la colisión entre los fotones es frontal ($\theta = 180°$) y el electrón y el positrón se crean con momento nulo respecto al centro de masas:

$$E \geq \frac{m_e^2}{\epsilon}, \tag{1.14}$$

donde m_e es la masa en reposo del electrón. Considerando la energía típica de los fotones del fondo infrarrojo ($\epsilon \sim 10^{-2}$ eV), se llega a un umbral de energía $E \sim 10$ TeV [63–66]. Por tanto, los rayos gamma con energía superior emitidos desde fuentes suficientemente distantes deberían interactuar con los fotones del fondo infrarrojo y no deberían detectarse. Sin embargo, se han identificado fuentes de rayos gamma (por ejemplo, Mkn 501) localizadas a distancias bastante mayores que el recorrido libre medio correspondiente a la creación de pares [67] para las que se han observado fotones de hasta 24 TeV [68].

1.4.4. Dependencia de la velocidad de la luz con la longitud de onda. Posibles desviaciones de la invariancia Lorentz

Las anomalías en los umbrales de rayos cósmicos y rayos gamma de alta energía han suscitado interés en posibles violaciones de la invariancia Lorentz [70–77], que podrían ser también otra consecuencia de la estructura del espacio-tiempo a la escala de Planck. El análisis más extendido de las posibles desviaciones de la simetría Lorentz exacta asume que la relación de dispersión energía-momento de relatividad especial debería verse modificada [70,76,77], lo que podría conllevar una dependencia de la velocidad de la luz con la longitud de onda –esto ocurriría, por ejemplo, en escenarios de gravedad cuántica en los que se suponga que la ecuación hamiltoniana $v = dE/dp$ sigue siendo válida–. Dicha modificación de la velocidad puede estudiarse experimentalmente mediante medidas de tiempos de vuelo de fotones provenientes de fuentes distantes. Mientras que en relatividad especial ordinaria dos fotones emitidos simultáneamente siempre llegarían a la vez a un detector lejano, para una velocidad dependiente de la longitud de onda dos fotones emitidos simultáneamente alcanzarían el detector en tiempos distintos si tienen diferente energía. Este efecto puede llegar a ser apreciable en la observación de explosiones (*burst*) de rayos gamma de corta duración [70] con detectores suficientemente sensibles (como el previsto telescopio GLAST [78]). La discrepancia entre los tiempos de llegada de los fotones más energéticos y los de los fotones menos energéticos en general será mayor cuanto mayor sea la diferencia de energías entre ellos y cuanto mayor sea la distancia que recorren (no es infrecuente encontrar tiempos de vuelo del orden de 10^{17} s para fotones producidos en explosiones de rayos gamma a distancias cosmológicas).

Los ejemplos de fenomenología observable presentados muestran que la pequeñez de la escala de Planck no imposibilita la exploración del carácter cuántico del espacio-tiempo. No obstante, el alcance de las consecuencias contrastables a las que lleva una incertidumbre mínima, como las discutidas arriba, se ve limitado por el hecho de haber empleado una descripción de las incertidumbres que es principalmente fenomenológica, y no obtenida de una cuantización completa en presencia de gravedad.

1.5. Modificación de las relaciones de dispersión

Las anomalías observadas en los umbrales de energía de rayos cósmicos y rayos gamma de alta energía procedentes de fuentes distantes y la posible dependencia de la velocidad de la luz con la longitud de onda pueden explicarse si la relación de dispersión $E^2 - p^2 - m^2 = 0$ propia de la relatividad especial sufre modificaciones que involucran la escala de Planck, las cuales se pueden expresar como $E^2 - p^2 - m^2 + \phi(E, p, m; E_P) = 0$, [70,76,77,79–84], donde m es la masa en reposo de la partícula considerada y ϕ una cierta función. Así, por ejemplo, para una relación de dispersión modificada con $\phi = p^2 E E_P^{-1}$ se obtienen los siguientes umbrales anómalos de energía en el sistema de laboratorio para los procesos de foto-producción de piones [76, 77, 79]

$$E \gtrsim \frac{(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2}{4\epsilon} + E_P^{-1} \frac{m_\pi m_p \left[(m_\pi + m_p)^2 - m_p^2\right]^3}{128(m_\pi + m_p)^2 \epsilon^4} \tag{1.15}$$

y de creación de pares [76, 77]

$$E \geq \frac{m_e^2}{\epsilon} + E_P^{-1} \frac{m_e^6}{8\epsilon^4}. \tag{1.16}$$

Por supuesto, el límite $E_P \to \infty$ describe los umbrales de reacción convencionales calculados anteriormente con relatividad especial común, Ecs. (1.12) y (1.14). A pesar de que el valor de la energía de Planck es muy grande, los nuevos términos de corrección no son despreciables. Para este modelo de relación de dispersión deformada se concluye que el umbral anómalo para rayos cósmicos viola el límite GZK y que el universo puede ser transparente a los rayos gamma. Por otro lado, el ejemplo considerado arroja la siguiente expresión para la velocidad de la luz [70, 82, 83]

$$v_\gamma = \left.\frac{dE}{dp}\right|_{m=0} \approx 1 - E E_P^{-1}. \tag{1.17}$$

Entonces, el retardo en los tiempos de vuelo de dos fotones con una diferencia de energías ΔE emitidos simultáneamente desde una fuente situada a una distancia L sería $\Delta t \approx L E_P^{-1} \Delta E$.

Se encuentran explosiones de rayos gamma en las que los fotones muestran una diferencia de energías del orden $\Delta E \sim 1$ GeV y tiempos de vuelo de 10^{17} s. Por tanto, según esta propuesta de relación de dispersión, dos fotones de estas características presentarían un retardo en su llegada de 10^{-2} s, valor que ya es significativo. El hecho de que todavía no se haya observado este efecto de retardo temporal restringe las posibles elecciones de relación de dispersión modificada.

Sin embargo, una alteración de la cinemática relativista de este tipo conlleva que se viole la invariancia bajo las leyes de transformación de Lorentz de la relatividad especial, según las cuales la energía y el momento varían de forma que se preserva su norma (como cuadrivector) con la métrica de Minkowski. La simetría de Lorentz está íntimamente relacionada con uno de los principios físicos que desempeñan un papel más relevante (al menos en regiones asintóticamente planas): el principio de relatividad de los sistemas de referencia inerciales. Surge entonces la preocupación de que la hipótesis de la deformación de la relación de dispersión pudiera conllevar la existencia de un sistema de referencia privilegiado en la naturaleza. No obstante, resulta que es posible mantener el principio de relatividad de los sistemas inerciales a costa de modificar la acción de las transformaciones de Lorentz sobre el espacio de momentos (esto es, sobre la energía y el momento) de manera que dicha acción deje de ser lineal [85–91].

De hecho, hay argumentos que apuntan a que dicha modificación no lineal de la simetría Lorentz puede ser necesaria. Así, en aproximaciones a la teoría de gravedad cuántica, como gravedad cuántica de lazos, la longitud de Planck desempeña el papel de un umbral por debajo del cual la imagen clásica del espacio-tiempo da paso a una geometría discreta. Esto podría entenderse como un problema y una fuente de paradojas en la teoría porque, debido al fenómeno de contracción de Fitzgerald-Lorentz, las longitudes no son invariantes bajo transformaciones de Lorentz y, por tanto, observadores inerciales (asintóticos) diferentes disentirían en el valor de la escala de longitud en la que se sitúa ese umbral. La escala de Planck no tendría la propiedad de ser una escala fundamental y la descripción realizada en gravedad cuántica de lazos pasaría a estar asociada como mucho a un observador inercial (asintótico) específico y, por consiguiente, privilegiado.

Por otra parte, la teoría de cuerdas conduce a propuestas en las que la geometría del espacio-tiempo deja de ser conmutativa. La no-conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales se mide mediante un parámetro con dimensiones de longitud y, como consecuencia, se contempla de nuevo el problema de cómo poner de acuerdo a todos los observadores inerciales en el valor de la escala en la que aparece la no-conmutatividad. En principio, una posible manera de sortear estos obstáculos consiste en permitir que las transformaciones de Lorentz se modifiquen de modo que preserven una escala de energía y/o momento. En tal caso, todos los observadores inerciales coincidirán en que existe una escala invariante, que proporcionaría el umbral más allá de la cual desaparece la imagen clásica del espacio-tiempo. Como aparecen dos constantes que se preservan bajo las transformaciones de Lorentz, a saber: la velocidad de la luz c y la escala de energía y/o momento, a esta propuesta se la llama relatividad doblemente especial (DSR, conforme al acrónimo de la expresión inglesa *"Doubly Special Relativity"*) [85] (o también relatividad especial deformada).

1.6. Relatividad doblemente especial

Las teorías de relatividad doblemente especial (DSR) [85, 86] son un marco apropiado para analizar la existencia de una incertidumbre mínima en gravedad cuántica. Además de los motivos expuestos anteriormente, en este tipo de teorías la definición de la energía y el momento físicos de las partículas se ve modificada (un rasgo propio de la interacción materia-geometría) con respecto a la definición que presentan en relatividad especial estándar. Por lo tanto, estas teorías pueden incorporar, al menos hasta cierto punto, los posibles efectos causados por la presencia de la gravedad sin tener que acudir obligatoriamente a una interpretación perturbativa. Por otro lado, las teorías DSR contienen una escala fundamental que se cree está relacionada en última instancia con la escala de Planck, lo cual constituye una característica común a diferentes formalismos para gravedad cuántica.

La modificación de la definición de la energía y el momento físicos en las teorías DSR es tal que el sistema presenta una escala en energía y/o momento que es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Como se anticipó en la sección precedente, esto es posible porque la implementación de la simetría Lorentz se vuelve no lineal en el espacio de momentos [85–91]. Una manera sencilla de construir esta realización no lineal es introducir una aplicación invertible entre la energía-momento física P^a y un 4-vector de Lorentz estándar Π^a, que se transforma linealmente según las leyes usuales de transformación de Lorentz de relatividad especial, y al que se llama pseudo energía-momento [92] o energía-momento de fondo. Las teorías DSR suelen formularse en el espacio de momentos debido el interés ocasionado por las consecuencias fenomenológicas de las relaciones de dispersión en campos como la Astrofísica, como ya se ha visto [79–84].

Para determinar entonces cuáles son las leyes de transformación Lorentz en el espacio de posiciones y la geometría del espacio-tiempo existen diferentes propuestas [93, 94]. Una de las más extendidas consiste en adoptar coordenadas espacio-temporales que no conmutan. Un ejemplo de esto es el espacio-tiempo de Minkowski κ-deformado [91, 93]. Sin embargo, también puede conseguirse la implementación de las teorías DSR en el espacio de posiciones mediante geometrías conmutativas [94–100].

Más adelante seguiremos el segundo camino, pero a continuación, para mostrar una visión más amplia, abordaremos la conexión existente entre DSR y el espacio-tiempo de Minkowski κ-deformado a través de las κ-álgebras de Poincaré.

1.7. Relación entre DSR y κ-álgebras de Poincaré

En la propuesta inicial de DSR se sugirió que este tipo de formalismos podría tener cabida natural en teoría de grupos y álgebras cuánticos [85]. Poco después se confirmó [87, 88] que el formalismo de la llamada álgebra de Poincaré κ-deformada (o κ-álgebra de Poincaré) [101–104] es un posible marco matemático para describir la cinemática relativista de una partícula libre en DSR.

La κ-álgebra de Poincaré consiste en una modificación del álgebra de Poincaré usual de relatividad especial que se lleva a cabo mediante la introducción de un parámetro κ con dimensiones de energía. Puesto que el formalismo de DSR persigue la incorporación de una escala de energía y/o momento que no destruya la invariancia bajo la simetría Lorentz, una suposición importante a la hora de construir una teoría DSR es que la subálgebra de Lorentz de la κ-álgebra de Poincaré no se vea deformada. Por tanto, los tres generadores de rotaciones M_i y los tres generadores de boosts N_i satisfacen [104]

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \qquad [M_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k, \qquad [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijk}M_k, \tag{1.18}$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita ($i, j, k = 1, 2, 3$). Además, como las transformaciones que plantean un problema al carácter fundamental de la escala adicional son los boosts, generalmente se admite que la acción estándar de las rotaciones se preserva y que los momentos P_i (los generadores de traslaciones) conmutan; sólo los boosts sufren modificaciones en las teorías DSR [90, 93]. Así, tendremos:

$$[M_i, P_0] = 0, \qquad [M_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \qquad [P_a, P_b] = 0 \qquad (a, b = 0, 1, 2, 3). \tag{1.19}$$

Por otra parte, y teniendo en cuenta que los conmutadores de los generadores dependen de la base elegida para la κ-álgebra, tras adoptar la base denominada *"bicrossproduct basis"* los restantes conmutadores entre boosts y traslaciones (que sí sufren modificaciones) adquieren la forma [91, 104]

$$[N_i, P_0] = iP_i, \qquad [N_i, P_j] = i\delta_{ij}\left(\frac{\kappa}{2}\left(1 - e^{-2P_0/\kappa}\right) + \frac{1}{2\kappa}\vec{P}^2\right) - \frac{i}{\kappa}P_iP_j. \tag{1.20}$$

Construyendo el primer Casimir para esta κ-álgebra se llega a la siguiente relación de dispersión modificada

$$m^2 = \left(2\kappa \sinh\left(\frac{P_0}{2\kappa}\right)\right)^2 - \vec{P}^2 e^{P_0/\kappa}, \tag{1.21}$$

de la que se desprende que el máximo valor que puede tomar el momento está dado por el parámetro κ, $|\vec{P}| \leq \kappa$, que se corresponde con un valor infinito de la energía, $P_0 \to \infty$. Puede comprobarse que esta relación de dispersión es invariante bajo transformaciones de boost deformadas. De esta expresión se obtiene, a primer orden de correcciones en el régimen $P_0/\kappa \ll 1$ e identificando el parámetro de deformación κ con la escala de Planck, la relación de dispersión modificada correspondiente a la primera propuesta de DSR que apareció en la literatura [85, 86] (véase Sec. 1.5), a la que se llama DSR1.

No obstante, hay que resaltar que la base "bicrossproduct" no es la única realización posible de DSR, sino que la κ-álgebra puede venir expresada en diferentes bases, para cada una de las cuales se obtiene una relación de dispersión distinta. Por ejemplo, para otra propuesta relevante de DSR [89] (conocida como DSR2), en la que los generadores de boosts se construyen combinando los boosts tradicionales con el generador de dilataciones, se tienen los conmutadores [91]

$$[N_i, P_0] = i\left(1 - \frac{P_0}{\kappa}\right)P_i, \qquad [N_i, P_j] = i\left(\delta_{ij}P_0 - \frac{1}{\kappa}P_iP_j\right), \tag{1.22}$$

junto con los dados por (1.18) y (1.19). En esta base, el Casimir conduce a la relación de dispersión [89, 91]

$$m^2 = \frac{P_0^2 - \vec{P}^2}{\left(1 - \frac{P_0}{\kappa}\right)^2}, \tag{1.23}$$

de la que se deduce que tanto el rango de energías como el de momentos están acotados por el parámetro de deformación, $|\vec{P}| \leq \kappa$, $P_0 \leq \kappa$. Vemos por tanto que existe cierta ambigüedad en la elección de base. Las hipótesis realizadas acerca de la acción de los momentos, rotaciones y boosts restringen las posibilidades, pero para determinar la teoría DSR de forma unívoca es necesaria información física y/o matemática adicional.

Después de haber obtenido el sector de una partícula es natural intentar hallar el sector de muchas partículas, necesario para el análisis de procesos de dispersión. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en relatividad especial ordinaria, en las teorías DSR dicha generalización es muy compleja debido a la no-linealidad: el concepto de cuadrimomento total es altamente no trivial en el formalismo DSR. Para el estudio del sector de muchas partículas se requiere una nueva herramienta algebraica, proporcionada por el co-producto, Δ, que consiste en una aplicación del álgebra en su producto tensorial (para dos partículas, $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$). La acción del co-producto en relatividad especial es trivial, es decir, satisface la regla de Leibniz. Por ejemplo, el cuadrimomento total de dos partículas es simplemente la suma sus cuadrimomentos:

$$\Delta(P_a)|1,2\rangle = (P_a \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_a)|1\rangle \otimes |2\rangle = \left(P_a^{(1)} + P_a^{(2)}\right)|1,2\rangle. \tag{1.24}$$

Sin embargo, en la base "bicrossproduct" el co-producto es no-simétrico [91, 104]

$$\Delta(P_0) = P_0 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_0, \quad \Delta(P_i) = P_i \otimes \mathbb{1} + e^{-P_0/\kappa} \otimes P_i, \quad \Delta(M_i) = M_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes M_i,$$
$$\Delta(N_i) = N_i \otimes \mathbb{1} + e^{-P_0/\kappa} \otimes N_i + \frac{1}{\kappa}\epsilon_{ijk}P_j \otimes M_k. \tag{1.25}$$

Este hecho supone un grave obstáculo para su interpretación física ya que, incluso en el caso de dos partículas idénticas, se obtendrían resultados distintos dependiendo de qué partícula se considere en primer lugar.

En aras de completar la explicación del formalismo de κ-álgebras de Poincaré, aunque no sea imprescindible para esta discusión, conviene comentar que existen estructuras adicionales que otorgan a las κ-álgebras de Poincaré la categoría de álgebras de Hopf. La aplicación co-producto acompañada de una aplicación co-unidad forma una estructura de co-álgebra, y ésta junto con el álgebra (que incluye una aplicación unidad) y ciertas propiedades forman una bi-álgebra. Añadiendo una aplicación llamada antípoda se tiene un álgebra de Hopf.

En sentido estricto, el formalismo DSR tan sólo describe el espacio de momentos; la implementación de este formalismo es claramente incompleta porque carece de cualquier descripción de la estructura del espacio-tiempo. No obstante, la definición de co-producto hace posible extender el espacio de momentos al espacio de fases completo de forma única mediante la construcción doble de Heisenberg [91], que se basa en que existe una correspondencia uno a uno entre el sector co-algebraico del espacio de momentos y el sector algebraico del espacio de posiciones y viceversa. Esta construcción se resume en los siguientes pasos. Se definen las relaciones de dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle$ entre variables de momento P, Q y de posición X, Y de la siguiente forma [91]:

$$\langle P_a, X_b\rangle = -i\eta_{ab}, \qquad \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{1.26}$$

Estas relaciones tienen que ser consistentes con la estructura de co-producto en el sentido

$$\langle P, XY\rangle = \langle P^{(1)}, X\rangle\langle P^{(2)}, Y\rangle, \quad \langle PQ, X\rangle = \langle P, X^{(1)}\rangle\langle Q, X^{(2)}\rangle. \tag{1.27}$$

Por último, se define la relación

$$[P, X] = X^{(1)}\langle P^{(1)}, X^{(2)}\rangle P^{(2)} - XP. \tag{1.28}$$

De estas expresiones se obtiene el espacio de fases deformado. En la base "bicrossproduct" el espacio-tiempo de Minkowski κ-deformado viene dado por [91]

$$[X_0, X_i] = -\frac{i}{\kappa}X_i, \qquad [X_i, X_j] = 0, \tag{1.29}$$

y los conmutadores cruzados son

$$[X_0, P_0] = -i, \qquad [X_0, P_i] = \frac{i}{\kappa} P_i, \qquad [X_i, P_0] = 0, \qquad [X_i, P_j] = i\delta_{ij}. \tag{1.30}$$

El hecho de obtener un espacio-tiempo no-conmutativo se sigue de haber definido un co-producto no-simétrico en el espacio de momentos. También se podría conseguir un espacio-tiempo conmutativo definiendo un co-producto simétrico, pero para ello habría que introducir modificaciones en los sectores algebraico y co-algebraico del álgebra de Hopf que no satisfarían las condiciones de partida deseadas, esto es, las que llevan a las expresiones (1.18) y (1.19). Se tiene cierta libertad para trasladar parte de la no-linealidad del sector de una partícula al de dos partículas y al revés, pero en cualquier caso las modificaciones no lineales de la acción de los boosts son inevitables.

1.8. Arco iris de gravedad

Hemos visto que DSR es un marco teórico sencillo formulado en el espacio de momentos que permite explicar la posible fenomenología observable de gravedad cuántica de forma efectiva modificando las leyes cinemáticas de la relatividad especial. Se trata por tanto de un marco incompleto porque no ofrece ninguna información sobre la geometría espacio-temporal. A pesar de ello, también hemos visto que es factible extender el formalismo de DSR al espacio de posiciones. En la sección anterior mostramos un ejemplo de cómo hacerlo para una geometría no-conmutativa y en el capítulo 4 estudiaremos varias propuestas manteniendo coordenadas espacio-temporales conmutantes. Por otra parte, en esta sección presentamos un formalismo que, aunque respeta la commutatividad del espacio-tiempo, intenta introducir simultáneamente efectos que implican la escala de Planck y efectos de curvatura, postulando que, bajo su acción combinada, la geometría pasa a depender explícitamente del cuadrimomento P_a del sistema que lo sondea (esto es, la partícula de prueba que usa el observador). Por esta razón, a este tipo de formalismos, introducido por Magueijo y Smolin, se los llama arco iris de gravedad (*gravity's rainbow*) [105]. Así, puede ocurrir que observadores diferentes en el mismo espacio-tiempo le asignen métricas distintas, dependiendo del cuadrimomento de sus sondas.

El postulado anterior se incorpora en la teoría simplemente permitiendo que las ecuaciones de Einstein, incluidas la constante cosmológica y las constantes de acoplo, entre ellas la gravitatoria, dependan de la energía y el momento de la partícula de prueba (en unidades de Planck). Esto conduce a las ecuaciones modificadas

$$\mathrm{G}_{\mu\nu}(P_a) = 8\pi G(P_a)\mathrm{T}_{\mu\nu}(P_a) + \mathrm{g}_{\mu\nu}(P_a)\Lambda(P_a), \tag{1.31}$$

donde $G(P_a)$ es tal que $G(0)$ denota la constante gravitatoria efectiva en el límite $P_a E_P^{-1} \to 0$. El hecho de que la geometría y las constantes de acoplo "corran" con la energía-momento de la partícula es una situación hasta cierto punto similar a la que se encuentra en teoría de renormalización [105]. No obstante, para cada valor fijo de la energía-momento de la partícula de prueba, las ecuaciones modificadas de Einstein tienen las mismas propiedades que las de relatividad general. De las anteriores ecuaciones se han obtenido, por ejemplo, soluciones cosmológicas (Friedmann-Robertson-Walker) y de agujero negro (Schwarzschild) [105]. En este trabajo nos centraremos exclusivamente en soluciones que contengan una región asintóticamente plana.

En particular, en el caso trivial de curvatura cero se tiene la métrica (inversa)

$$\mathrm{g}^{\mu\nu}(P_c) = \eta^{ab} e_a{}^{\mu}(P_c) e_b{}^{\nu}(P_c), \quad \eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1), \tag{1.32}$$

que es plana para todo valor de la energía-momento. Puede contemplarse como una familia de métricas planas parametrizada por P_a. Por otra parte, la tétrada dependiente de la energía-momento $e_a{}^{\mu}$, que podría usarse para describir el sistema de referencia en el que se sitúa la partícula, tiende en el límite de baja energía-momento a una tétrada que describe la geometría de Minkowski usual (globalmente para topología trivial). Denotamos dicha tétrada límite por $\tilde{e}_a{}^{\mu}$. Una manera de expresar estas propiedades consiste en considerar que, en un espacio-tiempo con curvatura cero, una partícula de energía-momento P_a se desplaza en una geometría dada por un conjunto de campos de bases ortonormales [105]

$$e_0 = \frac{\tilde{e}_0}{\mathcal{G}(P_a)}, \qquad e_i = \frac{\tilde{e}_i}{\mathcal{F}(P_a)}, \tag{1.33}$$

donde $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ son dos funciones de la energía-momento del sistema que satisfacen $\mathcal{G} \approx 1$, $\mathcal{F} \approx 1$ en el límite de energías y momentos bajos comparados con la escala de Planck.

Para introducir la curvatura espacio-temporal, Magueijo y Smolin apelaron al principio de correspondencia en el límite de bajas energías y a un principio de equivalencia modificado [105], de forma que la geometría viniera siempre determinada por un conjunto de campos de base ortonormal como el introducido en la Ec. (1.33) (con los campos con tilde correspondientes al caso de relatividad general estándar). En el caso de soluciones asintóticamente planas de las ecuaciones de campo modificadas (o, indirectamente, en ciertas familias de soluciones que, sin serlo, admitan un límite asintótico plano), P_a puede entenderse como la energía-momento de la partícula en la región asintótica. A partir de la Ec. (1.33), vemos que la modificación de las tétradas conlleva una redefinición no-lineal de la energía-momento. La forma específica de esta redefinición depende de qué relación asumamos entre P_a y las simetrías asintóticas. Volveremos a este punto en el capítulo 8.

En particular, de esta redefinición no lineal de la energía-momento se concluye que la propuesta de arco iris de gravedad conduce al final a relaciones de dispersión modificadas, pero lo hace partiendo de un planteamiento distinto al del formalismo DSR. Por otro lado, la dependencia energética de la familia de métricas da cuenta de efectos de retroalimentación de la materia sobre la geometría sin necesidad de recurrir a un fondo (de Minkowski) en el que se incluya el contenido material del sistema, es decir, posibilita un tratamiento no perturbativo. Por ello el escenario de arco iris gravitatorio constituye otro ámbito apropiado para estudiar la presencia de escalas invariantes y modificaciones a las relaciones de incertidumbre en gravedad cuántica. Nosotros lo emplearemos para estudiar los cambios en la termodinámica de agujeros negros a que da lugar este tipo de fenómenos.

Desde un punto de vista operacional, el formalismo de arco iris de gravedad puede contemplarse como una extensión de DSR al espacio de posiciones que introduce efectos de curvatura. En realidad, la prescripción (1.33) adoptada por Magueijo y Smolin en la construcción del escenario de arco iris gravitatorio viene motivada precisamente por la propuesta que ellos hicieron para la realización de teorías DSR en el espacio-tiempo [105].

1.9. Ondas de Einstein-Rosen

Una clase particular de espacio-tiempos de especial interés para la que se ha realizado el análisis de la incertidumbre temporal en detalle son las ondas de Einstein-Rosen [106], que son ondas gravitatorias cilíndricas polarizadas linealmente. El primero en encontrar soluciones a relatividad general en vacío con simetría cilíndrica fue Beck [107] y, más tarde, Einstein y Rosen las redescubrieron cuando buscaban espacio-tiempos que pudieran describir la propagación de ondas gravitatorias [108]. Estas ondas gravitatorias cilíndricas corresponden a espacio-tiempos que poseen dos campos vectoriales de Killing espaciales conmutantes ortogonales a hipersuperficies [109–111]. Estos espacio-tiempos admiten coordenadas $\{t, R, \theta, Z\}$, con rangos $t \in \mathbb{R}$, $R \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $Z \in \mathbb{R}$, donde Z denota la coordenada del eje de simetría, mientras que R y θ son las coordenadas radial y angular en cada superficie de Z y tiempo t constantes [112]. Por conveniencia, adoptamos la notación $\{x^i\} := \{Z, \theta, R\}$ $(i = 1, 2, 3)$ para las coordenadas espaciales. Es posible tomar los dos campos vectoriales de Killing conmutantes como $\partial/\partial x^a$ $(a = 1, 2)$, de forma que la métrica sea independiente de Z y θ [110, 111].

En más detalle, partamos de una descomposición (3+1) de la métrica:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \tag{1.34}$$

donde N es la función lapso, N^i es el vector desplazamiento y h_{ij} es la tres-métrica inducida en las hipersuperficies espaciales. Consecuentemente, el sistema gravitatorio presenta dos tipos de ligaduras: la ligadura hamiltoniana, asociada a la invariancia bajo reparametrizaciones temporales, y las ligaduras de momentos, que generan difeomorfismos espaciales. En primer lugar, es posible fijar la libertad *"gauge"* asociada a las ligaduras de momentos correspondientes a las coordenadas x^a exigiendo que, en las secciones de tiempo constante, la dirección R sea ortogonal a las órbitas generadas por la acción del grupo de isometrías [110, 111]. Este requisito es equivalente a imponer que la tres-métrica inducida h_{ij} sea diagonal por bloques, es decir, que $h_{aR} = 0$. En cuanto a la ligadura de momentos restante, que genera difeomorfismos en la coordenada R, puede eliminarse imponiendo que dicha coordenada radial coincida con la raíz cuadrada del determinante de la dos-métrica h_{ab}.

En el caso de ondas gravitatorias cilíndricas con polarización general, el sistema reducido resultante tendría un espacio de configuración con tres grados de libertad y una ligadura remanente: la hamiltoniana. Sin embargo, para las ondas de Einstein-Rosen, la condición de polarización lineal implica que la métrica h_{ab} adopta una forma diagonal con nuestra elección de coordenadas, de manera que el espacio de configuración tiene sólo dos grados de libertad. Representamos estos grados de libertad por las funciones métricas ψ y γ, que dependen solamente de las coordenadas temporal y radial, t y R, y cuyas exponenciales describen, respectivamente, la norma del campo vectorial de Killing $\partial/\partial Z$ y el producto de las componentes métricas h_{RR} y h_{ZZ} [110, 111].

Finalmente, puede suprimirse la libertad gauge correspondiente a la ligadura hamiltoniana, que aún permanece en el sistema, requiriendo que el momento canónicamente conjugado a γ sea nulo. Como consecuencia, γ deja de ser una variable dinámica y queda fijada una vez conocido el único grado de libertad remanente, ψ [110, 113]. Es sencillo comprobar que la fijación del gauge está bien establecida y que (al exigir su estabilidad dinámica) implica que la función lapso ha de ser de la forma $N = f(t)e^{(\gamma-\psi)/2}$, donde $f(t)$ es una función del tiempo que por lo general puede absorberse con una redefinición de t [110]. Se escoge esta función igual a $e^{-\gamma_\infty/2}$, donde γ_∞ es el valor de la función métrica γ cuando $R \to \infty$. Como veremos enseguida, esta elección garantiza que $\partial/\partial t$ es una traslación temporal de norma unidad en la región asintótica. Después de la fijación del gauge, el elemento de línea toma la forma [110]

$$ds^2 = e^{-\psi}\left[e^{\gamma}(-e^{-\gamma_\infty}dt^2 + dR^2) + R^2 d\theta^2\right] + e^{\psi}dZ^2, \tag{1.35}$$

con γ, como hemos dicho, determinado funcionalmente por ψ.

Suponiendo como condición de frontera [110, 113] que la función métrica ψ decae suficientemente rápido cuando $R \to \infty$, se tiene que la métrica anterior describe un espacio-tiempo asintóticamente plano con un déficit angular no nulo. El modelo reducido obtenido de esta forma está libre de ligaduras y sólo tiene un grado de libertad, descrito por el campo ψ.

Por otra parte, el hamiltoniano que genera la dinámica del modelo puede obtenerse a partir de la acción de Hilbert-Einstein, incluidos términos de frontera. Para hacer esto consideramos primero una variedad que, en toda sección de tiempo constante, tiene una frontera bidimensional que es un cilindro de cierto radio [110]. Además, restringimos la métrica del espacio-tiempo a la forma (1.35). Entonces, en el límite en que dicho radio tiende a infinito obtenemos la acción reducida para la familia de ondas cilíndricas que queremos estudiar. Puesto que se han suprimido todas las ligaduras en el proceso de fijación del gauge, se concluye que el hamiltoniano del modelo reducido viene dado exclusivamente por términos de frontera y su expresión final es [110, 113, 114]

$$H = \frac{1}{4G_3}\left(1 - e^{-\gamma_\infty/2}\right). \tag{1.36}$$

Aquí, G_3 es la constante de Newton efectiva por unidad de longitud en la dirección del eje de simetría. Vemos que γ_∞ es una constante de movimiento, porque conmuta con el hamiltoniano. Por tanto, dada cualquier solución clásica, es posible absorber el factor $e^{-\gamma_\infty/2}$ en el elemento de línea definiendo una nueva coordenada temporal T mediante un reescalado constante: $T = e^{-\gamma_\infty/2}t$ [110, 113]. Hacemos notar que, desde el punto de vista de la métrica espacio-temporal (1.35), esta redefinición cambia la normalización del campo vectorial de Killing temporal en la región asintótica de manera que $\partial/\partial T$ ya no posee allí norma unidad. No obstante, la introducción del tiempo T simplifica considerablemente la descripción de la dinámica, como vermos a continuación. El sistema resultante tiene la métrica [109, 110, 112]:

$$ds^2 = e^{-\psi}\left[e^{\gamma}(dT^2 + dR^2) + R^2 d\theta^2\right] + e^{\psi} dZ^2. \tag{1.37}$$

Por su parte, las ecuaciones de movimiento para el campo ψ son [112]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial R} = 0. \tag{1.38}$$

Así pues, en términos de la coordenada temporal T, la ecuación de evolución del campo ψ tiene exactamente la forma de una ecuación de ondas para un campo escalar libre sin masa con simetría axial que se propaga en un espacio-tiempo de Minkowski tridimensional [109,110, 112, 113]. Finalmente, la dependencia funcional de γ en ψ viene dada por [109, 110, 112, 113]

$$\gamma = \frac{1}{2}\int_0^R d\bar{R}\bar{R}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial T}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{R}}\right)^2\right]. \tag{1.39}$$

Esta expresión da (exceptuando un factor multiplicativo) precisamente la energía del campo escalar libre ψ en un círculo de radio R [109]. Aquí, asumimos que $\partial\psi/\partial T$ y $\partial\psi/\partial R$ decaen lo suficientemente rápido en el infinito para que γ_∞ permanezca finita.

De la discusión anterior concluimos, pues, que la dinámica del campo escalar ψ en términos del tiempo T no es sino la de un campo libre sobre un fondo minkowskiano tridimensional, y viene determinada, por tanto, por el hamiltoniano $H_0 := \gamma_\infty/(8G_3)$, que es precisamente la energía total de dicho campo libre [109, 112]. De esta forma, la dinámica de los espacio-tiempos (de cuatro dimensiones) de Einstein-Rosen resulta estar íntimamente relacionada con la de un campo escalar libre axisimétrico y sin masa que se propaga en un espacio-tiempo de Minkowski en 2+1 dimensiones [109, 110, 112, 113]. Hay que resaltar que, en la formulación genuinamente tetradimensional, el modelo de Einstein-Rosen presenta una cota superior en la energía del sistema debido a la dependencia funcional que presenta el hamiltoniano H, que denominaremos físico, con respecto a H_0, al que nos referiremos como hamiltoniano de fondo [114–117]. Como veremos en el capítulo 3, esto provoca que siempre aparezca una incertidumbre temporal no nula en las ondas de Einstein-Rosen, tanto al realizar una cuantización perturbativa como una no perturbativa [113–117].

Sin embargo, cabe la posibilidad de que puedan existir sistemas gravitatorios con propiedades similares a las de estas ondas cilíndricas, pero sin una cota superior para la energía. En esta situación es inmediato efectuar el análisis de la incertidumbre temporal en una cuantización no perturbativa (asumiendo que este tipo de cuantización sea realizable) [106]. Como en esta cuantización el tiempo físico es un parámetro, la cuarta relación de Heisenberg es aplicable. Entonces, si el rango de la energía física no está acotado superiormente, el sistema puede situarse en estados para los que la incertidumbre en la energía física sea infinita. Por consiguiente, se concluye que se puede alcanzar una precisión temporal ilimitada. Este resultado por sí solo justificaría el estudio de incertidumbre mínima, puesto que entonces se dispondría de un contraejemplo que derribaría la creencia generalizada de que siempre surge una incertidumbre mínima, tanto temporal como espacial, en escenarios de gravedad cuántica.

1.10. Agujeros negros y formalismo de horizontes aislados

Por último, otro escenario de gravedad adecuado para estudiar la aparición de una incertidumbre mínima es el que proporcionan los agujeros negros. Este punto de vista viene además motivado por la existencia de resultados que evidencian el carácter discreto del espectro de operadores geométricos tales como el área del horizonte de agujeros negros [24–26]. Aunque este hecho no conlleva necesariamente una incertidumbre espacio-temporal mínima, conduce ciertamente a una imagen espacio-temporal que no es continua a pequeñas escalas. Otro aspecto, estrechamente relacionado, que sugiere el uso de agujeros negros es que saturan la cantidad de información que puede almacenarse en una región espacio-temporal del mismo tamaño [118], lo que, conjuntamente con las ideas del principio holográfico, produce una incertidumbre temporal mínima no nula [119].

La definición de un concepto de energía de horizonte en física de agujeros negros se asienta generalmente sobre convenios de normalización o propiedades globales. En consecuencia, la energía no tiene un significado preciso genuino, incluso cuando el horizonte está asociado a un campo de Killing global. Por ejemplo, en el caso sencillo de horizontes de sucesos en espacio-tiempos estáticos y asintóticamente planos puede determinarse la energía empleando condiciones impuestas en la región asintótica, esto es, que el campo de Killing global esté normalizado a la unidad allí. De este modo se asigna el valor de la energía ADM al horizonte [120–124]. Este tipo de criterios pierde significación cuando se analizan los horizontes cuasi-localmente y, por tanto, no se presupone el conocimiento del espacio-tiempo completo [121–125].

Por sencillez nos centraremos en el caso sin rotación y en ausencia de campos materiales para horizontes en equilibrio. Entonces, la energía del horizonte resulta generar "on shell" traslaciones temporales en el horizonte a lo largo de un campo vectorial apropiado que coincide con una normal nula. Esta normal puede reescalarse libremente por una constante. Como hemos comentado, si el espacio-tiempo es estático y asintóticamente plano, se puede eliminar esta libertad eligiendo justamente la normal nula proporcionada por el campo de Killing que es unitario en el infinito. Pero, en general, esto no es posible (por ejemplo si existe radiación en la región exterior o la métrica no presenta una simetría asintótica adecuada).

Para analizar esta clase de sistemas utilizaremos el concepto de horizontes débilmente aislados [121–124], que no tienen por qué ser horizontes de Killing (aunque todo horizonte de Killing es débilmente aislado), ni exigen el conocimiento de toda la historia del espacio-tiempo, como sucede con los horizontes de sucesos. Eso sí, los horizontes débilmente aislados están en equilibrio: nada de materia o radiación cruza a través de ellos y su área permanece constante.

Para definir matemáticamente un horizonte débilmente aislado es necesario introducir previamente algunos conceptos geométricos [124, 125]. Así, supongamos que $\mathcal{M}$ es una variedad suave de cuatro dimensiones equipada con una métrica g_{ab} de signatura $(-,+,+,+)$ y que Δ es una hipersuperficie nula en el espacio-tiempo $(\mathcal{M}, g_{ab})$. Denotaremos $\{\ell^a\}$ a una clase de equivalencia de normales nulas futuras a Δ, con la equivalencia de los campos vectoriales en Δ dada por la multiplicación por cualquier función estrictamente positiva. En el caso concreto de normales nulas relacionadas mediante un reescalado constante, la clase de equivalencia correspondiente la llamaremos $[\ell^a]$. Los "pull-backs" a Δ los indicaremos mediante una flecha bajo los índices covariantes, y las igualdades sobre Δ las denotaremos $\triangleq$. Por otro lado, la métrica intrínseca de Δ, $q_{ab} \triangleq g_{\underleftarrow{ab}}$, es degenerada, por ser una hipersuperficie nula. Como consecuencia, su inversa, q^{ab}, no es única, sino que admite la suma de cualquier término de la forma $\xi^{(a}\ell^{b)}$, con ξ^a en el espacio tangente de Δ. Diremos que un tensor q^{ab} en Δ es un inverso de q_{ab} si satisface $q^{ab}q_{ac}q_{bd} \triangleq q_{cd}$. La expansión $\theta_{(\ell)}$ de una normal nula ℓ^a se define por $\theta_{(\ell)} := q^{ab}\nabla_a \ell_b$, donde ∇_a es la conexión libre de torsión en $\mathcal{M}$ definida por g_{ab}. Se puede comprobar que esta definición es independiente de la elección de métrica inversa, pero sí depende de la elección de normal nula. Con estas estructuras geométricas ya podemos definir un horizonte débilmente aislado (sin rotación). Se dice que un par $(\Delta, [\ell^a])$

es un horizonte débilmente aislado si [124, 125]:

1. La subvariedad tridimensional Δ es una hipersuperficie nula con topología $S^2 \times \mathbb{R}$.

2. Las ecuaciones de Einstein se cumplen en Δ.

3. La expansión de cualquier normal nula se anula en Δ : $\theta_{(\ell)} = q^{ab}\nabla_a \ell_b \triangleq 0$.

4. La clase de equivalencia $[\ell^a]$ de normales nulas es tal que $[\pounds_\ell, \nabla_{\underleftarrow{a}}]\ell^b \triangleq 0$.

En la última condición, $\pounds$ es la derivada de Lie. Si sólo se cumplen las tres primeras condiciones, se define $(\Delta, \{\ell^a\})$ como un horizonte no expansivo –hacemos notar que, en esta definición, la condición 3 es válida para las clases de equivalencia más generales $\{\ell^a\}$ y no sólo para $[\ell^a]$–. La primera condición simplemente limita al horizonte a tener la topología que uno espera que surja del colapso gravitatorio (esta restricción puede relajarse para permitir topologías más generales). El segundo requisito establece las condiciones de contorno sobre el comportamiento de los campos. Es análogo a las condiciones dinámicas que se suelen imponer en el infinito. Sin embargo, mientras que en el infinito se exige que la métrica (y otros campos) se aproximen a una solución asintótica específica de las ecuaciones de Einstein, la condición 2 no pide un comportamiento asintótico fijo, sino que permite que, en el horizonte, la métrica se aproxime a cualquier solución de las ecuaciones de campo.

Las dos condiciones anteriores son poco restrictivas; se satisfacen en una gran variedad de superficies. No obstante, la mayoría de estas superficies no tienen las características que uno esperaría intuitivamente de un horizonte. La primera condición clave que distingue a un horizonte débilmente aislado es la tercera. Implica que el área de las secciones esféricas del horizonte es constante, capturando así la idea de "aislamiento" del horizonte sin tener que introducir un campo de Killing. Denotamos el área del horizonte por A y definimos su radio de área, r_h, mediante $A = 4\pi r_h^2$. La condición 3 implica que la normal a Δ es geodésica: $\ell^a \nabla_a \ell^b \triangleq \kappa_{s(\ell)} \ell^b$. Aquí, $\kappa_{s(\ell)}$ representa la aceleración de ℓ^a y la llamaremos gravedad superficial en el horizonte. La gravedad superficial no es una característica intrínseca del horizonte propiamente dicha, sino de una normal nula específica: si se reescala la normal ℓ^a por una función positiva f, la gravedad superficial $\kappa_{s(\ell)}$ pasa a ser $\kappa_{s(f\ell)} = f\kappa_{s(\ell)} + \pounds_\ell f$ [124, 125].

Un horizonte no expansivo describe una mínima noción de cuasi-equilibrio, pero su estructura no es suficiente para permitir la asignación al agujero negro de parámetros físicos bien definidos. En particular, la gravedad superficial no es constante en Δ necesariamente. Por tanto, se deben imponer restricciones adicionales. Precisamente, la condición 4 implica que la gravedad superficial $\kappa_{s(\ell)}$ de un horizonte débilmente aislado es constante, es decir, que se cumple la ley cero de la termodinámica de agujeros negros.

Dado un horizonte no expansivo $(\Delta, \{\ell^a\})$, siempre se puede encontrar una clase de equivalencia de normales nulas $[\ell^a]$ tal que el horizonte $(\Delta, [\ell^a])$ sea débilmente aislado. De hecho, la libertad en la elección de $[\ell^a]$ es en realidad infinita. Históricamente, en un primer momento se introdujo el concepto de horizonte aislado en vez del de horizonte débilmente aislado que hemos presentado aquí. Un horizonte no expansivo es aislado si, en lugar de la condición 4, se satisface el requisito de que para todos los vectores ξ^a tangentes a Δ se cumple $[\pounds_\ell, \nabla_{\underleftarrow{a}}]\xi^b \triangleq 0$. Este requerimiento implica que la condición 4 se satisface, puesto que las normales nulas de $[\ell^a]$ son vectores tangentes a Δ, de manera que es más restrictivo que ella. En sentido estricto, la condición 4 no es una limitación genuina porque dado un horizonte no expansivo siempre es posible encontrar una clase de normales nulas $[\ell^a]$ para la que es un horizonte débilmente aislado. Sin embargo, a partir de un horizonte no expansivo no siempre se puede definir uno aislado. Posteriormente se descubrió que, en vez de imponer el requisito original, para que se cumplan la ley cero y la primera ley de la termodinámica de agujeros negros basta con exigir la condición 4. Esto motivó que se empezara a utilizar la nueva clase, más amplia, de horizontes débilmente aislados.

En este formalismo la energía del horizonte débilmente aislado puede definirse empleando un lenguaje hamiltoniano. No obstante, todavía perdura el problema de la normalización del campo vectorial temporal que se convierte en la normal nula en el horizonte y define su masa. De hecho, existe una familia paramétrica infinita de campos vectoriales de tipo tiempo, cada uno de los cuales define una evolución hamiltoniana consistente y una energía de horizonte. Los diferentes generadores de transformaciones hamiltonianas en el espacio de soluciones (el espacio de fases covariante) pueden identificarse como las posibles elecciones aceptables de la energía del horizonte [125] o, en una terminología alternativa, de la función de masa del horizonte μ.

La normalización del campo vectorial temporal es importante porque, como hemos comentado, la gravedad superficial κ_s depende de ella. Dado un horizonte de área A, la función de masa μ está estrechamente relacionada con el campo vectorial temporal a lo largo del cual tiene lugar la evolución. De hecho, a partir de las cuatro condiciones que determinan un horizonte débilmente aislado puede demostrarse que la evolución definida por un campo vectorial temporal es hamiltoniana si y sólo si se cumple la primera ley de la termodinámica de agujeros negros, $\delta\mu = (\kappa_s/8\pi G)\delta A$ [125]. Pero esto todavía deja mucha libertad en la elección de la normalización del vector temporal y la función de masa: cualquier función integrable $\kappa_s(A)$ lleva a una función de masa $\mu(A)$ admisible.

En ciertas situaciones puede considerarse que la existencia de diferentes funciones de masa permisibles es consecuencia de una normalización modificada del vector temporal que incorpora efectos gravitatorios con respecto a un fondo (por ejemplo, un espacio-tiempo de Schwarzschild). Este planteamiento permite desarrollar una descripción no perturbativa de estos efectos gravitatorios con la que analizar sus posibles consecuencias, en particular respecto a la aparición de incertidumbres mínimas temporales.

1.11. Tratamientos perturbativo y no perturbativo

Se ha mencionado ya que la mayoría de los resultados que apoyan la existencia de una incertidumbre espacio-temporal mínima están basados en análisis cualitativos que implican correcciones perturbativas, pero no en cuantizaciones totalmente consistentes de modelos gravitatorios. Existen ciertas dudas sobre la aplicabilidad de los esquemas perturbativos cuando la energía considerada sobre el fondo dado es grande, así como sobre el papel desempeñado por el tiempo en estos esquemas. Por ello, no está claro que se llegue a las mismas conclusiones sobre la existencia de una incertidumbre mínima cuando la descripción cuántica del sistema gravitatorio se realiza a partir de un tratamiento no perturbativo [99, 106], entendiendo como tal una cuantización completa en la que, en particular, la modificación de la energía-momento física del sistema debida a la interacción entre la materia y la geometría puede venir incluida dentro de la teoría desde un primer momento.

En esta memoria de tesis se considerarán dos posibles descripciones diferentes de la evolución cuántica del sistema en términos de un parámetro temporal que corresponde bien al tiempo original del fondo o bien al tiempo físico del sistema. Nos referiremos a estos dos tipos de descripciones como cuantizaciones perturbativa y no perturbativa, respectivamente. El motivo de esta nomenclatura está relacionado con el hecho de que, para obtener el tiempo físico a partir del tiempo del fondo, se suele comenzar con éste y se van introduciendo términos de corrección, dependientes de la energía y del tiempo del fondo. Estas correcciones son debidas a los efectos del contenido material sobre la geometría y viceversa. De esta manera se llega a una serie con términos de orden perturbativo cada vez mayor. El tiempo físico se obtiene mediante la suma de todos estos términos, es decir, una vez que se han considerado la totalidad de las correcciones.

Capítulo 2

Planteamiento y objetivos

El mundo entero se aparta cuando ve pasar a un hombre que sabe adónde va.

A. Saint-Exupéry.

Como objetivo principal de este trabajo de tesis, se desea analizar si la existencia de una incertidumbre mínima espacio-temporal es realmente una característica inevitable en contextos de gravedad cuántica. Para ello estudiaremos tres clases de modelos gravitatorios que admiten una cuantización exacta: además de las ondas gravitatorias cilíndricas de Einstein-Rosen, para las que ya existen resultados previos en la literatura, consideraremos sistemas libres relativistas en el marco de DSR, así como espacio-tiempos que contengan agujeros negros (de Schwarzschild-anti-de Sitter).

Se eligen estos tres escenarios gravitatorios porque, además de permitir una cuantización exacta (sin tener que recurrir a correcciones perturbativas), incorporan un rasgo común a diversos formalismos de gravedad cuántica: la presencia de una escala de energía invariante o privilegiada que desempeña un papel especial en el sistema.

El análisis se especializará en sistemas que admiten una formulación hamiltoniana, con energía determinada por el valor del hamiltoniano sobre cada solución ("on shell").

En estos escenarios estudiaremos la incertidumbre cuántica que afecta a los intervalos de tiempo físico y, en el marco de relatividad doblemente especial (DSR), también a la longitud física, definida ésta como la diferencia entre la posición física en un instante y el valor inicial de dicha posición.

Se discutirán las diferencias que existen al realizar el estudio mediante dos esquemas de cuantización: la que hemos llamado cuantización perturbativa, en la que se considera el tiempo de un fondo como parámetro de evolución, y la cuantización no perturbativa, donde el parámetro de evolución es el tiempo físico.

Asimismo, en cada uno de los contextos gravitatorios analizados, examinaremos el comportamiento de la incertidumbre para el caso perturbativo hasta primer orden subdominante en el sector de bajas energías comparadas con la escala de energía característica del escenario correspondiente. Este análisis, además de servir como comprobación de los resultados obtenidos de la cuantización perturbativa general (esto es, teniendo en cuenta todos los términos correctivos), permitirá identificar regímenes de validez de los diversos tipos de incertidumbre mínima sugeridos en la literatura.

Seguiremos el siguiente plan. En primer lugar, en el capítulo 3 revisaremos brevemente el análisis de la incertidumbre temporal en espacio-tiempos en vacío con simetría cilíndrica y un contenido de ondras gravitatorias linealmente polarizadas (ondas de Einstein-Rosen). Veremos que siempre aparece una incertidumbre temporal no nula para estas ondas, tanto cuando se realiza una cuantización perturbativa del sistema como una no perturbativa.

A continuación estudiaremos la incertidumbre en tiempos y longitudes en el escenario de un sistema libre relativista descrito en el marco de DSR (capítulos 5 y 6). Para llevar a cabo este estudio extenderemos primero el formalismo de DSR al espacio de posiciones (capítulo 4). Esto lo haremos introduciendo una propuesta canónica, de forma que se obtengan coordenadas espacio-temporales que sean conjugadas a la energía-momento física. Estas coordenadas, que también denominaremos físicas, dependerán no sólo de las coordenadas del fondo, sino además de la propia energía y momento. Debido a esta dependencia en energías, la visión de la geometría que surge de la formulación canónica de DSR puede considerarse un tipo de formalismo de arco iris gravitatorio. Adicionalmente, en el capítulo 4 estudiaremos la relación entre todas las implementaciones canónicas de teorías de DSR en el espacio de fases que han aparecido en la literatura, incluyendo la que construiremos nosotros.

En el capítulo 7 analizaremos la incertidumbre temporal en espacio-tiempos de tipo Schwarzschild-anti-de Sitter. Examinaremos la ambigüedad en la función de masa para agujeros negros con horizontes aislados y discutiremos los efectos de la existencia de una escala fijada por la constante cosmológica. Discutiremos si la presencia de dicha escala, incluso en el límite de constante cosmológica nula, implica la aparición de incertidumbres mínimas cuando se asume una descripción efectiva cuántica correspondiente a un espacio asintóticamente plano, como sería el caso si la constante cosmológica fuera idénticamente nula.

Finalmente, otro objetivo será explorar las modificaciones a la termodinámica de agujeros negros que surgen en el contexto de arco iris de gravedad (capítulo 8). Para ello consideraremos dos formalismos de este tipo. Uno será el formalismo de arco iris propuesto inicialmente por Magueijo y Smolin, que obtuvieron imponiendo la condición de que la contracción de la energía-momento con un desplazamiento espacio-temporal infinitesimal fuera invariante, de manera que las teorías de campos libres construidas a partir de este formalismo tengan soluciones de ondas planas. El otro formalismo de arco iris que emplearemos será el que nos proponemos construir nosotros a partir de una implementación canónica de DSR.

Capítulo 3

Incertidumbre temporal mínima en ondas gravitatorias de Einstein-Rosen

Pues si vemos lo presente, cómo en un punto se es ido e acabado,
si juzgamos sabiamente, daremos lo non venido por pasado.

J. Manrique.

Hemos comentado ya que las ondas gravitatorias cilíndricas polarizadas linealmente se describen en relatividad general mediante espacio-tiempos en vacío con simetría cilíndrica en 3+1 dimensiones, pero su dinámica puede obtenerse directamente en términos de la de un campo escalar axisimétrico sin masa propagándose en un fondo de Minkowski en 2+1 dimensiones [109, 110, 112, 113]. Un rasgo significativo de las ondas gravitatorias cilíndricas es la existencia de dos nociones de evolución: una asociada con el tiempo del fondo de Minkowski, T, y otra con el tiempo físico, t [109, 110, 113]. Se corresponden respectivamente con las que hemos llamado cuantizaciones perturbativa y no perturbativa. En el primer caso la dinámica viene dictada por el hamiltoniano del campo escalar axisimétrico sin masa, H_0, mientras que en el otro está generada por el hamiltoniano que proporciona la energía por unidad de longitud a lo largo del eje de simetría en relatividad general, H [113–115]. Ambos están relacionados funcionalmente [110, 113, 114]:

$$H = \frac{1}{4G_3}\left(1 - e^{-4G_3 H_0}\right). \tag{3.1}$$

Aquí, G_3 es la constante gravitatoria por unidad de longitud en la dirección del eje y tiene dimensiones de inverso de energía (o equivalentemente de tiempo, si tomamos $\hbar = 1$). Se puede considerar que la energía (tiempo) constante $E_* = 1/t_* := 1/G_3$ actúa como una especie de energía (tiempo) de Planck para el sistema.

El rango de energía física va de cero a $E_*/4$. El hecho de que la energía física esté acotada superiormente se debe a que el hamiltoniano H es proporcional a un déficit angular en el infinito originado por la presencia de energía en las ondas gravitatorias. Este déficit angular afecta a la norma de las traslaciones temporales asintóticas. Puesto que esta norma debe ser la unidad para el tiempo físico t, debemos considerar un cambio de coordenada temporal dependiente de la energía que lleve a la anterior transformación en el hamiltoniano. Explícitamente,

$$t = Te^{4H_0/E_*} := TK(H_0). \tag{3.2}$$

Nótese que el factor multiplicativo K que relaciona los dos tiempos es simplemente el inverso de la derivada respecto a H_0 de la función que relaciona los dos hamiltonianos. A baja energía se recupera T como coordenada temporal, es decir, $K(0) = 1$.

3.1. Incertidumbre en el tiempo físico: caso perturbativo

Admitamos que es factible una cuantización del sistema con evolución generada por el hamiltoniano del fondo H_0. En esta descripción perturbativa, el tiempo de fondo T ejerce de parámetro de evolución, mientras que el tiempo físico t está representado por una familia uniparamétrica de operadores [106]

$$\widehat{t} = \widehat{K}T, \tag{3.3}$$

donde el operador $\widehat{K}$ se construye en términos del correspondiente al hamiltoniano de fondo utilizando el teorema espectral, $\widehat{K} := K(\widehat{H}_0)$.

En nuestro estudio sólo consideraremos diferencias entre las variables de tiempo, es decir, intervalos, especificando que las mediciones cuánticas se inician en el instante $T = t = 0$ [100].

3.1.1. Cálculo de la incertidumbre en el lapso de tiempo físico

Para calcular la incertidumbre en el tiempo físico $\widehat{t}$ empleamos el siguiente procedimiento [106]. Dado un estado cuántico, podemos medir la densidad de probabilidad del hamiltoniano H_0, que es estacionaria porque el sistema es conservativo. Mediante el teorema espectral [2], esta distribución determina la del operador $\widehat{K}$. Entonces podemos determinar su valor esperado, $\langle\widehat{K}\rangle$, y su desviación cuadrática media, ΔK. Por otro lado, podemos rastrear el transcurso del tiempo T analizando la evolución de las densidades de probabilidad de cualquier conjunto de observables en el estado cuántico. Este método lleva a una distribución estadística para T con densidad de probabilidad $\rho(T)$. Designamos el valor medio mediante $\overline{T}$. Dado que la evolución en este parámetro está generada por $\widehat{H}_0$, la incertidumbre ΔT de esta distribución cumple la cuarta relación de Heisenberg $\Delta T \Delta H_0 \geq 1/2$. Por lo tanto, en el cálculo de la incertidumbre Δt interviene un doble promedio, ya que tenemos que hallar el valor esperado cuántico $\langle\widehat{K}\rangle$ y también promediar sobre el parámetro temporal T. Como las medidas de H_0 y T son independientes, la densidad de probabilidad del tiempo físico t es el producto de las de T y $\widehat{K}$ [106]:

$$(\Delta t)^2 = \int dT \rho(T) \, \langle \, T^2 \widehat{K}^2 - \overline{T}^2 \langle \widehat{K} \rangle^2 \, \rangle = (\overline{T} \Delta K)^2 + \langle \widehat{K} \rangle^2 (\Delta T)^2 + (\Delta T \Delta K)^2. \tag{3.4}$$

A continuación vamos a demostrar que esta ecuación implica la existencia de una incertidumbre mínima no trivial en el tiempo físico cuando se lleva a cabo una cuantización perturbativa. Como esta expresión es la suma de términos positivos, la incertidumbre temporal se anularía sólo si cada uno de ellos fuera igual a cero, pero esto no es posible en ningún instante de tiempo $\overline{T} \neq 0$.[1] Para demostrarlo clara y sencillamente es conveniente expresar la Ec. (3.4) como

$$(\Delta t)^2 = \overline{T}^2 (\Delta K)^2 + \langle \widehat{K}^2 \rangle (\Delta T)^2 \geq \overline{T}^2 (\Delta K)^2 + \frac{1}{4} \frac{\langle \widehat{K}^2 \rangle}{(\Delta H_0)^2}, \tag{3.5}$$

donde se ha usado la cuarta relación de Heisenberg.

Para que la incertidumbre Δt se anulase, el primer sumando en la desigualdad debería ser cero. Esto implicaría que ΔK debería anularse para $\overline{T} \neq 0$. La función K dada por la Ec. (3.2) es estrictamente monótona en $H_0 \in \mathbb{R}^+$ y, por tanto, biyectiva. Entonces, el teorema espectral [2] asegura que los autoestados de los operadores $\widehat{K}$ y $\widehat{H}_0$ coinciden y que la condición $\Delta K = 0$ implica $\Delta H_0 = 0$. Por otra parte, como K^2 es una función estrictamente positiva, $\langle \widehat{K}^2 \rangle$ no se anula. Entonces, si ΔK se hiciera cero, el segundo sumando de la desigualdad (3.5) divergiría.

3.1.2. Correcciones a primer orden

Para una cuantización perturbativa –que permite construir una cuantización completa, en la que se incorporan todas las correcciones– sería de esperar que las conclusiones que se obtienen sobre incertidumbre mínima fueran coherentes con las que se extraen del mero desarrollo perturbativo a medida que se va aumentando el orden de tales correcciones. Esto motiva el estudio que se hace a continuación sobre el comportamiento de la incertidumbre en el tiempo físico $\widehat{t}$ en el caso perturbativo cuando se aproxima este operador manteniendo sólo la corrección a primer orden en la energía. Este análisis viene a ser una comprobación de la consistencia de los resultados obtenidos sobre incertidumbre mínima en el caso perturbativo. Expandiendo $K(H_0)$ en torno al valor nulo de la energía de fondo, $K(H_0) \approx 1 + 4H_0E_*^{-1}$, obtenemos $\langle \widehat{K} \rangle \approx 1$ y $\Delta K \approx 4E_*^{-1}\Delta H_0$ a primer orden. Sustituyendo en la Ec. (3.4),

$$(\Delta t)^2 \approx 16\overline{T}^2 E_*^{-2} (\Delta H_0)^2 + (\Delta T)^2 + 16E_*^{-2} (\Delta T \Delta H_0)^2. \tag{3.6}$$

[1]Esto implica una incertidumbre no nula para cualquier intervalo de tiempo físico si identificamos el tiempo cero con el instante en que iniciamos el proceso de medida, que es la postura adoptada habitualmente.

Recordando que $\Delta T \Delta H_0 \geq 1/2$ podemos obtener fácilmente una cota inferior para el miembro derecho de esta expresión en función exclusivamente de ΔH_0. De su posterior minimización tratando $\Delta H_0 \geq 0$ como variable, se deduce una cota inferior universal (esto es, válida para cualquier estado cuántico) para la incertidumbre Δt. Los extremos se obtienen imponiendo que la derivada primera con respecto a ΔH_0 se anule. Se llega a

$$(\Delta t)^2 \gtrsim 4t_*^2 + 4t_*\overline{T}. \tag{3.7}$$

Esta expresión se asemeja al tipo de ecuación efectiva propuesta en las Refs. [7–9] para describir la limitación en la medición de distancias. El primer sumando aporta una contribución constante a la incertidumbre total del orden del tiempo *"de Planck"* t_*, y puede interpretarse como una incertidumbre cuántica de origen gravitatorio cuántico [5, 6]. La segunda contribución es una incertidumbre del orden de $\sqrt{t_*\overline{T}}$, que tiene la misma dependencia temporal que la que se encuentra en los dispositivos de Salecker-Wigner [7–10, 31] o en los modelos de camino aleatorio para las fluctuaciones cuánticas del espacio-tiempo [11, 12, 35]. Este resultado supone un respaldo a la afirmación de que la incertidumbre temporal es estrictamente positiva en la cuantización perturbativa.

3.2. Incertidumbre en el tiempo físico: caso no perturbativo

Pasamos ahora a la discusión de la incertidumbre en los intervalos de tiempo físico cuando se adopta el hamiltoniano físico H como generador de la evolución cuántica. En general, es posible construir una cuantización no perturbativa partiendo de la perturbativa, que se ha supuesto que existe.

El estudio de la incertidumbre temporal en la cuantización no perturbativa es sencillo. Como el tiempo físico es un parámetro dinámico, la incertidumbre en t está limitada solamente por la cuarta relación de Heisenberg, $\Delta t \Delta H \geq 1/2$. Entonces, la existencia de una incertidumbre temporal mínima no trivial depende de si el espectro del hamiltoniano físico está o no acotado superiormente. El resultado no depende de otros detalles del sistema. Recordando que el rango de la energía física está acotado por el valor $E_*/4$ llegamos a la conclusión de que existe un límite en la resolución temporal para las ondas gravitatorias de Einstein-Rosen también en el modelo no perturbativo.

Capítulo 4

Formulación canónica de relatividad doblemente especial

Su teoría es descabellada,
pero no lo suficiente para ser correcta.

N. Bohr.

El siguiente escenario de gravedad cuántica donde vamos a estudiar la incertidumbre espacio-temporal es el de una partícula libre descrita en el marco de relatividad doblemente especial (DSR). No obstante, como lo habitual es que las teorías DSR vengan enunciadas en el espacio de momentos, para poder llevar a cabo el análisis de la incertidumbre temporal y espacial –que posponemos para los dos siguientes capítulos–, es necesario extender primero el formalismo de DSR al espacio de posiciones (esto es, al espacio-tiempo). En este capítulo se resumen algunos aspectos de la formulación de las teorías DSR en el espacio de momentos y se introduce una propuesta canónica para su realización en el espacio de posiciones [99, 100]. Se obtienen coordenadas espacio-temporales que son conjugadas a la energía-momento física y que dependen no sólo de las coordenadas del fondo, sino también de la propia energía y el momento. Por otra parte, han aparecido en la literatura otras propuestas canónicas de DSR enunciadas de forma distinta a la presentada aquí [95–98]. Aclararemos la conexión entre todas ellas, demostrando que en realidad son equivalentes [126]. Además, discutiremos en detalle los principios de incertidumbre generalizados que surgen de estas realizaciones canónicas, estudiaremos la posibilidad de conseguir regímenes en los que el comportamiento de variables apropiadas de posición y (energía-)momento sea aparentemente clásico, y explicaremos cómo reconstruir una formulación DSR partiendo sólo de un conjunto de conmutadores básicos entre variables de posición y de (energía-)momento [98, 126].

4.1. DSR en el espacio de momentos

Un aspecto característico de las teorías DSR es que poseen una escala invariante Lorentz en energía y/o momento, además de la proporcionada por la velocidad de la luz en relatividad especial [85–91]. La invariancia de dicha escala es únicamente posible gracias a una acción no lineal del grupo de Lorentz en el espacio de momentos. Una forma simple de construir una acción de este tipo consiste en definir una aplicación invertible U entre la energía-momento física $P^a = (E, p^i)$ y un cuadrivector de Lorentz usual $\Pi^a = (\epsilon, \Pi^i)$, denominado energía-momento de fondo [92].[1] La transformación de Lorentz no lineal para la energía-momento física está dada por [90, 92]

$$L_a(P_b) = \left[U^{-1} \circ \mathcal{L} \circ U\right]_a (P_b), \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{L}$ es la acción lineal usual del grupo de Lorentz.

En la región de bajas energías y momentos comparadas con la escala DSR, se debe recuperar la relatividad especial estándar. Debido a ello, las variables físicas y las de fondo han de coincidir en este límite y, por tanto, la aplicación U debe tender a la identidad (es decir, $g \approx \epsilon$, $f \approx \Pi$ en dicha región). Además, una hipótesis simplificadora que se acepta generalmente es que la acción estándar de las rotaciones se preserva; sólo los boosts se ven modificados en las teorías DSR [90, 93]. Como consecuencia, con la notación $p := |\vec{p}|$ y $\Pi := |\vec{\Pi}|$, la expresión funcional más general de la aplicación U (y de su inversa) es [93, 99]

$$\Pi_a = U_a(P_b) \Rightarrow \begin{cases} \epsilon = \tilde{g}(E, p)\,, \\ \Pi^i = \tilde{f}(E, p)\,\dfrac{p^i}{p}\,, \end{cases} \qquad P_a = U_a^{-1}(\Pi_b) \Rightarrow \begin{cases} E = g(\epsilon, \Pi)\,, \\ p^i = f(\epsilon, \Pi)\,\dfrac{\Pi^i}{\Pi}\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dado que los boosts de Lorentz usuales recorren todo el rango $[0, \infty)$, tanto para la energía como para (la norma del) momento, la imagen de U debe ser igual a este rango, de modo que la imagen inversa bajo U de $\mathcal{L} \circ U$ pueda existir siempre en la Ec. (4.1). Por otra parte, para poder tener una escala finita en energía E_* (y/o en momento p_*) invariante bajo las transformaciones de Lorentz no lineales (4.1), es necesario que la aplicación U haga corresponder esta escala finita con el infinito del espacio de pseudo momentos, ya que el infinito es la única escala invariante en relatividad especial estándar. Por consiguiente, la aplicación U debe tener una singularidad en E_* (y/o p_*) y el dominio de definición de U (que se supone que contiene la región de bajas energías y momentos) está acotado superiormente por esa escala [90]. Debido a ello, las teorías DSR se pueden clasificar en tres tipos: de tipo DSR1 si solamente es el momento físico el que está acotado superiormente, de tipo DSR2 si

[1] Los índices latinos en minúsculas de principio y mitad del alfabeto representan índices de Lorentz (estándares o "modificados") e índices espaciales planos, respectivamente.

tanto la energía como el momento físicos están acotados, y de tipo DSR3 si es únicamente la energía física la que lo está.

4.2. DSR en el espacio de posiciones

Las teorías DSR suelen formularse en el espacio de momentos debido principalmente al interés en investigar las implicaciones observacionales de las relaciones de dispersión deformadas [79–85]. Existen diferentes propuestas para determinar la geometría del espacio-tiempo modificada y las correspondientes leyes de transformación en el espacio de posiciones consistentes con las teorías DSR [93,94]. Como vimos en la introducción, una de las más populares se basa en abandonar la conmutatividad de las coordenadas espacio-temporales, como ocurre por ejemplo en el espacio-tiempo de Minkowski κ-deformado [91, 93]. No obstante, es también factible una formulación de las teorías DSR en el espacio de posiciones sin renunciar a las geometrías conmutativas [94–100]. La propuesta que se adoptará aquí [99] para la realización de DSR en el espacio de posiciones se asienta en el requisito de invariancia de la forma simpléctica $\mathbf{d}q^a \wedge \mathbf{d}\Pi_a$ (donde la cuña denota el producto exterior y los índices de Lorentz se bajan con la métrica de Minkowski). De esta forma se obtienen coordenadas espacio-temporales modificadas x^a que son conjugadas a la energía-momento física P_a; es decir, la relación entre (q^a, Π_a) y (x^a, P_a) está dada por una transformación canónica. En principio, a la energía-momento física se le puede asignar entonces el papel de generador de las traslaciones espacio-temporales en las coordenadas x^a. Esta propuesta lleva, además, a la expresión correcta de las coordenadas espacio-temporales físicas en el caso de las ondas de Einstein-Rosen (formuladas en 2+1 dimensiones) [106, 109].

Es inmediato completar la aplicación U para alcanzar una transformación canónica que proporcione las variables de posición x^a conjugadas a P_a. Utilizando la forma de esta aplicación entre $P_a = (-E, p_i)$ y

$$\Pi_a = \left(-\tilde{g}(E,p),\ \tilde{f}(E,p)\frac{p_i}{p}\right), \tag{4.3}$$

y pidiendo que los orígenes de los dos conjuntos diferentes de coordenadas espacio-temporales coincidan, es fácil ver que la transformación deseada está generada por la función [99]

$$F(q^a, P_b) = -\tilde{g}(E,p)q^0 \ +\ \tilde{f}(E,p)\frac{p_j q^j}{p}. \tag{4.4}$$

Entonces, $x^a = \partial F/\partial P_a$. Haciendo uso del teorema de la función implícita (y de la identidad $p_j/p = \Pi_j/\Pi$) se obtienen finalmente las expresiones de las nuevas coordenadas espacio-temporales [99]:

$$
\begin{aligned}
x^i &= \frac{1}{J}\left[\frac{\partial g}{\partial \Pi}\,\frac{\Pi^i}{\Pi}q^0 + \frac{\partial g}{\partial \epsilon}\,\frac{\Pi^i\Pi_j}{\Pi^2}q^j\right] + \frac{\Pi}{f}\left(q^i - \frac{\Pi^i\Pi_j}{\Pi^2}q^j\right), \\
x^0 &= \frac{1}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial \Pi}\,q^0 + \frac{\partial f}{\partial \epsilon}\,\frac{\Pi_i}{\Pi}q^i\right].
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Aquí,

$$
J = \frac{\partial g}{\partial \epsilon}\frac{\partial f}{\partial \Pi} - \frac{\partial g}{\partial \Pi}\frac{\partial f}{\partial \epsilon}
\tag{4.6}
$$

es el jacobiano de la aplicación inversa U^{-1} entre (ϵ, Π) y (E, p), y las funciones f y g (y, por consiguiente, J) dependen de (ϵ, Π). Conviene resaltar que la transformación (4.5) es lineal en las coordenadas q^a, pero generalmente depende no linealmente de la energía-momento.

En adelante, a (x^a, P_a) y (q^a, Π_a) las llamaremos variables físicas y variables de fondo, respectivamente. Además, a q^0 la designaremos por T y a x^0 por t para enfatizar el papel realizado por el parámetro de evolución en la discusión. Notamos que, al igual que sucede con la energía-momento, las coordenadas físicas y de fondo coinciden en el límite en el que las energías y momentos son bajos comparados con la escala DSR, puesto que en esta región $g(\epsilon, \Pi) \approx \epsilon$ y $f(\epsilon, \Pi) \approx \Pi$.

La extensión canónica de DSR al espacio de posiciones que hemos presentado aquí no es la única posible; existen varias propuestas que se basan de un modo u otro en una formulación canónica de las transformaciones de Lorentz [95–98]. A continuación vamos a poner de manifiesto la relación existente entre todas estas propuestas canónicas, demostrando que son de hecho equivalentes [126].

4.3. Equivalencia entre implementaciones canónicas de DSR

La primera de estas propuestas fue realizada por Mignemi al investigar el formalismo hamiltoniano para una partícula libre con energía-momento física P_a y coordenadas espacio-temporales conmutativas asociadas x^a [95]. En esta propuesta se identifica el espacio de posiciones con el cotangente al espacio de momentos. También se introduce implícitamente el requisito de que el origen de las coordenadas espacio-temporales permanezca invariante bajo transformaciones de Lorentz. De la Ec. (4.1), la acción no lineal de las transformaciones de Lorentz en el espacio de momentos es[2]

$$P_a \to P'_a = L_a(P_b). \tag{4.7}$$

Exigiendo entonces covariancia, Mignemi dedujo la siguiente transformación de coordenadas [95]

$$x^a \to x'^a = \left(\frac{\partial P'_a}{\partial P_b}\right)^{-1} x^b := \bar{L}^a(x^b, P_c). \tag{4.8}$$

Nótese que, de la Ec. (4.7), $\partial P'_a/\partial P_b = \partial L_a/\partial P_b$. La anterior transformación en el espacio de posiciones es lineal en las coordenadas x^a, pero depende de manera no trivial de la energía-momento física.

Otra propuesta, que apareció independientemente de la anterior y fue enunciada por Hinterleitner, sugiere una realización de DSR en el espacio de posiciones tal que la transformación de Lorentz completa en el espacio de fases sea canónica [96].[3] Se parte de transformaciones canónicas entre coordenadas del espacio de fases en dos sistemas inerciales diferentes, (x^a, P_a) y (x'^a, P'_a), imponiendo que su restricción al espacio de momentos coincida con las correspondientes transformaciones de Lorentz en DSR. La transformación canónica queda entonces totalmente fijada si demandamos que su acción sobre las coordenadas espacio-temporales sea homogénea (es decir, que el origen permanezca invariante). Llamando $P_a = P_a(P'_b)$, se concluye rápidamente que $x'^a = (\partial P_b/\partial P'_a)x^b$, de forma que (usando el teorema de la función inversa) se llega justamente a la transformación (4.8). Por lo tanto, vemos que las sugerencias [95] y [96] son efectivamente la misma. Advirtamos que, a pesar de que las dos aparecieron en la literatura por separado, su equivalencia es realmente obvia una vez que se entiende la condición de covariancia como la invariancia de la forma simpléctica $\mathbf{d}x^a \wedge \mathbf{d}P_a$, lo que a su vez implica que las transformaciones de Lorentz consideradas deben ser canónicas.

Por otro lado, a partir de la relación (4.5) entre las coordenadas físicas y de fondo proporcionada por nuestra formulación canónica de DSR [99, 100] podemos fijar completamente la acción no lineal del grupo de Lorentz tanto en el espacio de posiciones como en el de momentos [126]:

$$\tilde{L}(x^a, P_a) = [\tilde{U}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{U}](x^a, P_a). \tag{4.9}$$

[2] Aquí hemos adaptado convenientemente todas las expresiones a nuestra notación. En la Ref. [95] la acción de los boosts deformados se denota por W, en vez de usar el símbolo L para todas las transformaciones de Lorentz en DSR. Además, a la energía-momento física y a las coordenadas espacio-temporales conjugadas se las llama, respectivamente, p_a y q^a, mientras que nosotros designamos estas variables físicas como P_a y x^a [99, 100]. Reservamos la notación q^a para las coordenadas espacio-temporales de fondo conjugadas a la pseudo energía-momento Π_a.

[3] Aunque, por simplicidad, el análisis en [96] se restringe a espacio-tiempos bidimensionales, aquí reproducimos los argumentos en cuatro dimensiones.

Aquí, $\tilde{\mathcal{L}}$ representa la acción lineal estándar del grupo de Lorentz en el espacio de fases, mientras que $\tilde{U}$ es la aplicación canónica entre las variables físicas y de fondo determinada por U y las Ecs. (4.5).

Como $\tilde{U}$ es una transformación canónica, también lo es su inversa, $\tilde{U}^{-1}$. Además, la acción de Lorentz usual $\tilde{\mathcal{L}}$ también corresponde a una transformación canónica, que relaciona las variables de fondo de un sistema inercial con las de otro. Por lo tanto, la composición $\tilde{L} = \tilde{U}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{U}$ es una transformación canónica. Su restricción al espacio de momentos reproduce la Ec. (4.1), de modo que $\tilde{L}$ puede considerarse como la extensión canónica al espacio de fases de la transformación DSR de la energía-momento. Además, $\tilde{L}$ deja invariante el origen de coordenadas espacio-temporales (porque así lo hacen $\tilde{U}$ y $\tilde{\mathcal{L}}$). Por consiguiente, nuestra propuesta conduce exactamente a la misma transformación de Lorentz en el espacio de fases físico sugerida en la Ref. [96]. En conclusión, nuestra elaboración canónica de DSR resulta ser equivalente a las presentadas en [95] y [96]. La principal diferencia entre ellas y nuestra propuesta es que las primeras introducen directamente la transformación canónica entre variables físicas en el espacio de fases medidas por dos observadores distintos, relacionadas mediante una transformación de Lorentz no lineal, mientras que la nuestra descansa en la aplicación canónica entre variables físicas y de fondo. Dicho de otro modo, en [95] y [96] se proporciona la aplicación no lineal $\tilde{L}$ que figura en la Ec. (4.9), en tanto que nuestra propuesta proporciona la aplicación $\tilde{U}$.

Por otra parte, en la Ref. [97] Cortés y Gamboa analizaron la modificación de los conmutadores cuánticos bajo la suposición de que las coordenadas espacio-temporales son los generadores de las traslaciones en las variables de energía y momento de fondo, Π_a, de manera que son canónicamente conjugadas entre sí. Conforme a nuestra notación (que difiere de la de la Ref. [97]), dichas coordenadas espacio-temporales pueden identificarse entonces con q^a. De forma semejante, se pueden considerar coordenadas espacio-temporales que generen las traslaciones en la energía-momento física P_a. Éstas son las que hemos denominado coordenadas espacio-temporales físicas x^a. La relación entre (q^a, Π_a) y (x^a, P_a) es obviamente una transformación canónica.

Por último, en la Ref. [98] Hossenfelder adoptó un punto de vista muy similar. El vector de onda k_a introducido en ese trabajo es a lo que nos hemos referido como energía-momento física P_a, y es canónicamente conjugado a las coordenadas físicas x^a. Este vector de onda está relacionado con la pseudo energía-momento a través de la aplicación no lineal U.

En conclusión, aunque en la literatura existen varias propuestas de realización canónica de DSR en el espacio de fases, todas ellas son en realidad equivalentes, desembocando en las mismas transformaciones de las coordenadas espacio-temporales.

4.4. Relaciones de conmutación modificadas

A partir de una formulación canónica de DSR se pueden deducir relaciones de conmutación modificadas si se eligen como variables elementales del espacio de fases cualquiera de los dos conjuntos de variables mezcladas (q^a, P_a) [97] o (x^a, Π_a) [98] (es decir, mitad físicas y mitad de fondo). Queremos discutir ahora el distinto comportamiento de los principios de incertidumbre generalizados que se obtienen con estos dos conjuntos. Partiendo de los conmutadores básicos modificados, también proporcionaremos un método específico de hallar la aplicación U que determina una teoría DSR.

4.4.1. Conmutadores fundamentales

En la Ref. [97], Cortés y Gamboa asignaron conmutadores al conjunto completo de variables mezcladas (q^a, P_a) del espacio de fases multiplicando sus corchetes de Poisson por la unidad imaginaria i. Obtuvieron así [97]

$$[\hat{q}^a, \hat{P}_b] = i\widehat{\frac{\partial P_b}{\partial \Pi_a}}, \tag{4.10}$$

con el resto de conmutadores nulos. Recordamos que $\partial P_b/\partial \Pi_a = \partial U_b^{-1}/\partial \Pi_a$ según la Ec. (4.2). De las Ecs. (4.2) y (4.10) obtenemos finalmente los conmutadores no triviales [126]

$$\begin{aligned} [\hat{q}^0, \hat{E}] &= -i\widehat{\frac{\partial g}{\partial \epsilon}}, \qquad & [\hat{q}^0, \hat{p}_i] = -i\widehat{\frac{\partial f}{\partial \epsilon}}\widehat{\frac{\Pi_i}{\Pi}}, \\ [\hat{q}^i, \hat{E}] &= i\widehat{\frac{\partial g}{\partial \Pi}}\widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}, \qquad & [\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\widehat{\frac{\partial f}{\partial \Pi}}\widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}\widehat{\frac{\Pi_j}{\Pi}} + i\widehat{\frac{f}{\Pi}}\left(\delta^i_j - \widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}\widehat{\frac{\Pi_j}{\Pi}}\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Podemos ver estas relaciones como un principio de incertidumbre generalizado, notando que se recuperan las relaciones de Heisenberg usuales para energías y momentos muy por debajo de la escala DSR (escala de Planck), porque $g \approx \epsilon$ y $f \approx \Pi$ en este límite. También merece la pena indicar que todos los operadores del miembro derecho de estas expresiones conmutan, porque están determinados únicamente como funciones de la energía-momento, sin ninguna contribución de las variables de posición q^a. En términos de estos conmutadores fundamentales, también podemos definir el conmutador de otras funciones del espacio de fases.

Para simplificar nuestras expresiones y hacer más clara la diferencia entre esta elección de conmutadores fundamentales y los considerados por Hossenfelder en la Ref. [98], nos limitaremos en esta subsección a una subfamilia de teorías DSR en las que la energía física es simplemente una función de la energía de fondo, sin ninguna dependencia del momento de fondo, esto es, $E = g(\epsilon)$. Estas teorías han recibido especial atención en la literatura [97, 98]. Como consecuencia inmediata del hecho de que $(\partial g/\partial \Pi) = 0$, el conmutador $[\hat{q}^i, \hat{E}]$ se hace cero. Consideremos, además, teorías DSR de las clases DSR2 y DSR3, cuya energía física está acotada superiormente. En estos tipos de teorías se tiene que $(\partial g/\partial \epsilon) \to 0$ cuando ϵ se aproxima a infinito y, por tanto, el conmutador $[\hat{q}^0, \hat{E}]$ se anula para energías de fondo infinitamente grandes.

Por otro lado, en teorías del tipo DSR1 o DSR2, que presentan una cota superior en el momento, las dos derivadas parciales $\partial f/\partial \epsilon$ y $\partial f/\partial \Pi$ pueden anularse a medida que ϵ y Π tienden a infinito (sobre la capa de masas). No obstante, esto no es una consecuencia necesaria de la cota superior para el momento físico porque la función f depende tanto de ϵ como de Π. Si $(\partial f/\partial \epsilon) \to 0$ cuando la pseudo energía-momento se aproxima a infinito, el conmutador $[\hat{q}^0, \hat{p}_i]$ se vuelve cero. Análogamente, si $(\partial f/\partial \Pi) \to 0$, los conmutadores $[\hat{q}^i, \hat{p}_j]$ son despreciables cuando la pseudo energía-momento se hace grande, porque para teorías de las familias DSR1 o DSR2 también se tiene que $(f/\Pi) \to 0$ en infinito. Por consiguiente, los operadores que representan las coordenadas espaciales de fondo conmutarían con los que simbolizan el momento físico.

Así pues, llegamos a la conclusión de que todos los conmutadores modificados del espacio de fases pueden anularse para teorías DSR2 cuando la pseudo energía-momento tiende a infinito (en la capa de masas). Es posible entonces encontrar teorías DSR en las que el comportamiento de las variables del espacio de fases (q^a, P_a) se vuelva clásico al aproximarnos a la región de la escala invariante de energía y momento.

Analizamos ahora la elección de conmutadores fundamentales realizada por Hossenfelder [98], que corresponden a las variables del espacio de fases mezcladas (x^a, Π_a). Obtenidos directamente de los corchetes de Poisson, están dados por

$$[\hat{x}^a, \hat{\Pi}_b] = i\widehat{\frac{\partial \Pi_b}{\partial P_a}}, \tag{4.12}$$

con $\partial \Pi_b/\partial P_a = \partial U_b/\partial P_a$, que, junto con la Ec. (4.2) y la restricción a la subfamilia de teorías DSR con $E = g(\epsilon)$, lleva a [126]

$$\begin{aligned} [\hat{x}^0, \hat{\epsilon}] &= -i\widehat{\frac{1}{\partial_\epsilon g}}, \qquad [\hat{x}^0, \hat{\Pi}_i] = i\widehat{\frac{1}{\partial_\epsilon g}}\widehat{\frac{1}{\partial_\Pi f}}\widehat{\frac{\partial f}{\partial \epsilon}}\widehat{\frac{\Pi_i}{\Pi}}, \\ [\hat{x}^i, \hat{\epsilon}] &= 0, \qquad [\hat{x}^i, \hat{\Pi}_j] = i\widehat{\frac{1}{\partial_\Pi f}}\widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}\widehat{\frac{\Pi_j}{\Pi}} + i\widehat{\frac{\Pi}{f}}\left(\delta^i_j - \widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}\widehat{\frac{\Pi_j}{\Pi}}\right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para aligerar las expresiones, hemos usado la notación del tipo $\partial_\epsilon g := \partial g/\partial \epsilon$ para las derivadas parciales que aparecen en los denominadores.

Tal como hemos comentado antes, $(\partial g/\partial \epsilon) \to 0$ cuando la energía auxiliar se aproxima a infinito en teorías DSR2 y DSR3. Así, $[\hat{x}^0, \hat{\epsilon}]$ diverge en dicho límite y se da una ausencia total de resolución para mediciones simultáneas de x^0 y ϵ. Por otra parte, para una teoría DSR genérica, $[\hat{x}^0, \hat{\Pi}_i]$ puede o bien anularse o tender a infinito dependiendo de la expresión funcional de las derivadas parciales de f y g, sin ninguna restricción a priori. Finalmente, para teorías DSR1 y DSR2, el cociente Π/f (y posiblemente también $1/\partial_\Pi f$) tiende a infinito para pseudo energía-momento grande (en la capa de masas). Por tanto, para estas teorías $[\hat{x}^i, \hat{\Pi}_j]$ diverge. Vemos entonces que todos los conmutadores fundamentales no triviales pueden divergir para ciertas teorías DSR2, con una pérdida completa de resolución cuando se alcanza el régimen de la escala invariante de energía y momento (físicos). Este resultado contrasta fuertemente con las conclusiones obtenidas para la elección alternativa de conmutadores modificados (4.11) que hemos analizado previamente.

También se puede estudiar el comportamiento de los conmutadores cuando la energía se limita a ser una cierta función del momento. Esta interdependencia hace que las expresiones de los conmutadores cambien "on shell". Después de la restricción a superficies de energía, y por ejemplo con la elección de conmutadores modificados (4.11) de la Ref. [97], se obtiene el principio de incertidumbre generalizado [126]

$$[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\widehat{\frac{df}{d\Pi}}\,\widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}\,\widehat{\frac{\Pi_j}{\Pi}} + i\widehat{\frac{f}{\Pi}}\left(\delta^i_j - \widehat{\frac{\Pi^i}{\Pi}}\,\widehat{\frac{\Pi_j}{\Pi}}\right). \tag{4.14}$$

Esta expresión es similar a la última de las Ecs. (4.11), pero con la derivada parcial de f con respecto a Π reemplazada por una derivada total. Esta sustitución simplifica el análisis de la aparición de un comportamiento clásico. Para teorías DSR1 y DSR2 es inmediato percatarse de que el cociente f/Π y la derivada total $df/d\Pi$ tienden a cero cuando el momento de fondo tiende a infinito. Con ello, los conmutadores de los operadores que representan las variables de posición (espaciales) de fondo y el momento físico se anulan en este límite, que corresponde al régimen en que el momento alcanza el valor de la escala invariante.

Aunque inicialmente pueda parecer contraintuitiva, la aparición de un régimen con esta clase de comportamiento clásico no supone en realidad ninguna inconsistencia. Si se mide la posición de fondo con resolución infinita, entonces, de acuerdo al principio de Heisenberg estándar, debe obtenerse una incertidumbre total en su momento conjugado, que es el de fondo. Sin embargo, dado que las teorías DSR1 y DSR2 hacen corresponder momentos de fondo de valor infinito con una escala finita de momento físico, la incertidumbre en los momentos físicos puede mantenerse bajo control, dando lugar a un producto nulo con la incertidumbre en la posición de fondo.

4.4.2. Obtención de una teoría DSR a partir de un principio de incertidumbre generalizado

Para concluir este capítulo, obtendremos, utilizando un conjunto de conmutadores modificados, expresiones explícitas de la aplicación no lineal U que caracteriza la teoría DSR [98, 126]. Estas expresiones, junto con las Ecs. (4.11) o (4.13), prueban que la información relevante presente en una formulación canónica de una teoría DSR y en un principio de incertidumbre generalizado es equivalente. Estudiaremos explícitamente el caso de los conmutadores $[\hat{q}^a, \hat{P}_b]$. El análisis puede extenderse fácilmente al caso alternativo de los conmutadores $[\hat{x}^a, \hat{\Pi}_b]$.

Nótese que las funciones f y g que determinan la teoría DSR, y que en casos generales dependen tanto de ϵ como de Π, aparecen en las Ecs. (4.11) como derivadas parciales. Por tanto, dado un principio de incertidumbre generalizado de la forma (4.11), deduciremos la aplicación U (o equivalentemente U^{-1}) mediante simple integración [126]. La reconstrucción de una función arbitraria $z(\epsilon, \Pi)$ a partir de sus derivadas parciales $u := \partial z/\partial\epsilon$ y $v := \partial z/\partial\Pi$ es inmediata (suponiendo la condición de integrabilidad $\partial u/\partial\Pi = \partial v/\partial\epsilon$):

$$z(\epsilon, \Pi) = \int_0^{\Pi} v(\epsilon, \tilde{\Pi})\, d\tilde{\Pi} + \int_0^{\epsilon} u(\tilde{\epsilon}, 0)\, d\tilde{\epsilon}. \tag{4.15}$$

La función z representa a f o g, y hemos tenido en cuenta que $f(0,0) = g(0,0) = 0$ para fijar la constante aditiva de integración. Por último, basta fijarse en que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \epsilon} &= -\{q^0, E\}, & \frac{\partial g}{\partial \Pi} &= \{q^i, E\}\frac{\Pi^i}{\Pi}, \\ \frac{\partial f}{\partial \epsilon} &= -\{q^0, P_i\}\frac{\Pi^i}{\Pi}, & \frac{\partial f}{\partial \Pi} &= \{q^i, P_j\}\frac{\Pi_i}{\Pi}\frac{\Pi^j}{\Pi}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde los corchetes de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ son la contrapartida clásica de los conmutadores fundamentales (4.11) (es decir, estos corchetes se obtienen reemplazando los operadores de energía-momento –que conmutan entre sí– por variables clásicas, y eliminando el factor imaginario i).

Capítulo 5

Incertidumbre temporal mínima en DSR

No hay nada cierto, salvo la muerte y los impuestos.

B. Franklin.

Una vez que hemos especificado un formalismo de DSR en el espacio de posiciones con nuestra realización canónica, pasamos a analizar la existencia de una incertidumbre mínima en los intervalos de tiempo físico para los dos esquemas de cuantización perturbativa y no perturbativa de un sistema libre (por ejemplo, podemos pensar en sistemas que admiten una descripción efectiva en términos de partículas libres) [99]. Asumiremos que el sistema admite una formulación hamiltoniana, de modo que los valores de la energía física y la pseudo energía vienen dados respectivamente por un hamiltoniano físico H y un hamiltoniano de fondo H_0. De la Ec. (4.2) se obtiene entonces $E \to H = g(H_0, \pi)$ y $\epsilon \to H_0 = \tilde{g}(H, p)$. Como la energía y el momento son constantes de movimiento para los sistemas libres, el hamiltoniano es independiente del tiempo y conmuta con el momento bajo paréntesis de Poisson, tanto para las variables físicas como para las auxiliares.

5.1. Incertidumbre en el tiempo físico: caso perturbativo

En esta sección analizamos la incertidumbre temporal cuando se realiza una cuantización perturbativa del sistema, en la que se adopta la coordenada temporal de fondo $q^0 = T$ como parámetro de evolución, de manera que la evolución está generada por el hamiltoniano H_0. Suponemos que una cuantización de este tipo es factible. En dicha descripción cuántica, el tiempo físico viene representado por un operador genuino $\widehat{t}$ [99, 106]. Teniendo en cuenta la restricción a sistemas libres, donde la energía y el momento se conservan, la única variable en la expresión de $x^0 = t$ obtenida en (4.5) que evoluciona en el tiempo (además del parámetro T) es

$$s_T := \Pi_i q^i. \tag{5.1}$$

El subíndice T resalta esta dependencia temporal. Además, dado que el sistema es libre, el hamiltoniano de fondo H_0 es una función exclusivamente del momento de fondo. Entonces, de las ecuaciones hamiltonianas de movimiento se tiene que la derivada temporal de s_T es igual a $\Pi H_0'$, que es una constante de movimiento. H_0' representa la derivada de H_0 respecto a Π. Se concluye así que $s_T = s_0 + T\Pi H_0'$, donde s_0 es el valor de s_T en el instante de tiempo inicial.

5.1.1. Definición de lapso de tiempo físico

En nuestro análisis cuántico sólo estudiaremos diferencias entre las variables de tiempo o, en otras palabras, intervalos temporales, evitando de esta forma la arbitrariedad inherente a la elección de un origen de referencia y las dificultades conceptuales que surgen al fijar éste de manera clásica, mientras que cuánticamente se permiten fluctuaciones en el tiempo [100]. La física del problema sugiere dos elecciones posibles de la referencia para el tiempo, a saber, el valor inicial del tiempo físico o del tiempo de fondo. En el primer caso, la diferencia de tiempos determina el intervalo físico temporal experimentado por la partícula durante el lapso de fondo T. En el segundo caso, la diferencia incluye también las correcciones efectivas al tiempo de fondo inicial contenidas en DSR. Se estudiarán ambas posibilidades para demostrar que las conclusiones no dependen de la elección específica adoptada. Para distinguir entre los dos casos, se introduce un parámetro η, con $\eta = 0$ correspondiente al tiempo físico inicial y $\eta = 1$ al de fondo. Explícitamente, el primero de estos tiempos está dado por la segunda de las Ecs. (4.5) con $q^0 = T = 0$ y $\Pi_i q^i$ reemplazada por s_0, mientras que el segundo viene dado simplemente por $T = 0$.

De la diferencia entre t y cualquiera de estos tiempos de referencia se obtiene el siguiente intervalo de tiempo:

$$t_\eta := \frac{1}{J}\left[\frac{\partial f}{\partial \Pi}\,T + \frac{\partial f}{\partial H_0}\,S_T + \eta\,\frac{1}{\Pi}\frac{\partial f}{\partial H_0} s_0\right], \qquad S_T := \frac{s_T - s_0}{\Pi}. \tag{5.2}$$

Lo llamaremos lapso o intervalo de tiempo físico. Para representarlo como un operador, escribimos

$$\widehat{t_\eta} := \widehat{A}(H_0,\Pi)\,T + \widehat{D}_{T,\eta}, \tag{5.3}$$

$$\widehat{D}_{T,\eta} := \frac{1}{2}\left(\widehat{B}(H_0,\Pi)\widehat{S}_T + \widehat{S}_T\widehat{B}(H_0,\Pi)\right) + \frac{\eta}{2}\left(\widehat{C}(H_0,\Pi)\widehat{s}_0 + \widehat{s}_0\widehat{C}(H_0,\Pi)\right), \tag{5.4}$$

donde

$$A := \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial \Pi}, \quad B := \frac{1}{J}\frac{\partial f}{\partial H_0}, \quad C := \frac{1}{\Pi J}\frac{\partial f}{\partial H_0}. \tag{5.5}$$

El subíndice T de nuevo indica dependencia del tiempo. En las Ecs. (5.3) y (5.4) hemos simetrizado los productos de $\widehat{B}$ con $\widehat{S}_T$ y de $\widehat{C}$ con $\widehat{s}_0$ (aunque a los resultados no les afecta la elección concreta del orden de los factores en estos productos), y se han mostrado explícitamente los argumentos de las funciones A, B, y C. Como ya se ha comentado, estas funciones corresponden a constantes de movimiento. Sus operadores respectivos pueden definirse en términos de los correspondientes a H_0 y Π utilizando el teorema espectral. En cuanto al operador que representa a s_T (y por tanto a S_T), se hablará de su definición más adelante.

5.1.2. Cálculo de la incertidumbre en el lapso de tiempo físico

Para calcular la incertidumbre en el operador lapso de tiempo físico $\widehat{t}_\eta$ emplearemos un procedimiento [99] parecido al que se siguió en el capítulo 2 para el caso de las ondas de Einstein-Rosen. La diferencia estriba en que allí los tiempos físico y de fondo se relacionaban mediante una transformación homogénea proporcionada por un operador correspondiente a una constante de movimiento [véase Ec. (3.2)], mientras que en la Ec. (5.3) aparece el operador $\widehat{D}_{T,\eta}$ con dependencia temporal, que complica el cálculo de la incertidumbre. El método es el siguiente. Dado un estado cuántico, se pueden medir en él las densidades de probabilidad de cualquier conjunto de observables en cualquier instante de tiempo.[1] De esta forma, se puede determinar, por ejemplo, el valor esperado de esos operadores. Además, se puede estimar el valor del parámetro T en ese instante de tiempo analizando la evolución de dichas densidades de probabilidad en el estado considerado. Como ya hemos comentado, este procedimiento permite obtener una distribución estadística de T con densidad de probabilidad $\rho(T)$ (y valor medio $\bar{T}$) cuya incertidumbre ΔT satisface la cuarta relación de Heisenberg $\Delta T \Delta H_0 \geq 1/2$ [2, 3, 99]. El proceso de doble promedio implicado en el cálculo del valor esperado cuántico $\langle\cdot\rangle$ y en la estimación del parámetro temporal lleva a la siguiente incertidumbre [100]:

$$(\Delta t_\eta)^2 = \int dT \rho(T) \Big\langle \Big(\widehat{A}\, T + \widehat{D}_{T,\eta} - \langle \widehat{A} \rangle \overline{T} - \langle \widehat{D}_{\overline{T},\eta} \rangle\Big)^2 \Big\rangle. \tag{5.6}$$

Aquí, $\langle \widehat{D}_{\overline{T},\eta} \rangle$ es el valor medio del operador $\widehat{D}_{T,\eta}$ calculado con el doble promedio comentado [99, 100].

Llegados a este punto, conviene hacer algunos comentarios acerca de la representación precisa de operadores adoptada para s_T al definir $\widehat{D}_{T,\eta}$ y sobre cómo afecta ésta a las medidas que son necesarias para determinar el valor medio de este observable. Merece la pena destacar dos casos.

Por un lado, se puede representar s_T como un operador explícitamente independiente de T empleando simplemente un producto simetrizado en la Ec. (5.1) y promocionando las variables canónicas de fondo (q^i, Π_i) directamente a operadores. De forma similar, se puede

[1]Para efectuar mediciones cuánticas en un mismo instante de tiempo tan sólo se necesita una noción de simultaneidad, y no el conocimiento del valor exacto del parámetro temporal.

definir $\widehat{S}_T$ a partir de su expresión clásica simetrizada. Realizando mediciones cuánticas en el instante fijo de tiempo en que se analiza el sistema, se puede determinar la distribución de probabilidad de s_T en ese instante. No se necesita ninguna estimación del valor del parámetro de evolución, de manera que el promedio sobre T se vuelve superfluo. Argumentos similares son aplicables a los productos de s_T con las constantes de movimiento que aparecen en la expresión de $\widehat{D}_{T,\eta}$. Así que, al menos en principio, podemos identificar $\langle\widehat{D}_{\overline{T},\eta}\rangle$ en la Ec. (5.6) con $\langle\widehat{D}_{T,\eta}\rangle$, incluso aunque no se conozca el valor exacto de T en que se efectúan las mediciones.

Por otro lado, en vez de adoptar el procedimiento anterior, se puede reflejar explícitamente toda la dependencia de s_T respecto al parámetro T en la definición de su operador asociado. Partiendo de la solución de su ecuación de evolución, se llega a que $\widehat{s}_T := \widehat{s}_0 + T\,\widehat{\Pi}\widehat{H_0'}$. Por tanto $\widehat{S}_T := T\,\widehat{H_0'}$. Aquí, $\widehat{H_0'}$ puede definirse en términos del momento de fondo usando el teorema espectral. Dado que el operador $\widehat{H_0'}$ corresponde a una constante de movimiento, su densidad de probabilidad no evoluciona en el tiempo. En realidad, ocurre lo mismo con $\widehat{s}_0$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, los cuales aparecen en las Ecs. (5.3) y (5.4). En particular, las mediciones de todas sus densidades pueden realizarse en un instante de tiempo inicial. Para cualquier otro instante de tiempo, lo único que haría falta conocer es la densidad de probabilidad $\rho(T)$, obtenida mediante el estudio de la evolución de densidades de probabilidad de operadores que rastrean el paso del tiempo. En este caso, obviamente, sí que hay que tener en cuenta el promedio con $\rho(T)$ al calcular el valor medio de $\widehat{D}_{T,\eta}$.

No obstante, los dos casos descritos pueden estudiarse exactamente de la misma forma reuniendo en un mismo término toda la dependencia explícita lineal en T del operador $\widehat{t}_\eta$. Así, en el segundo de los casos, se obtiene

$$\begin{aligned}
\widehat{t}_\eta &= \widehat{V}(H_0,\Pi)\,T + \widehat{W}_\eta(H_0,\Pi,s_0), && (5.7)\\
\widehat{V}(H_0,\Pi) &= \widehat{A}(H_0,\Pi) + \widehat{B}(H_0,\Pi)\,\widehat{H_0'}(\Pi), && (5.8)\\
\widehat{W}_\eta(H_0,\Pi,s_0) &= \frac{\eta}{2}\left(\widehat{C}(H_0,\Pi)\widehat{s}_0 + \widehat{s}_0\widehat{C}(H_0,\Pi)\right). && (5.9)
\end{aligned}$$

Vemos entonces que, a efectos de cálculo, la expresión (5.3), válida en el primero de los casos discutidos, puede considerarse un ejemplo particular de la Ec. (5.7) con $\widehat{V} = \widehat{A}$ y $\widehat{W}_\eta = \widehat{D}_{T,\eta}$. Con las mismas sustituciones en la Ec. (5.6), la incertidumbre Δt_η puede entonces rescribirse como

$$(\Delta t_\eta)^2 = \left[\Delta(V\overline{T} + W_\eta)\right]^2 + \langle\widehat{V}\rangle^2(\Delta T)^2 + (\Delta T \Delta V)^2. \tag{5.10}$$

La incertidumbre en el lapso de tiempo físico se anularía si y sólo si los tres sumandos positivos del miembro derecho de la Ec. (5.10) fuesen iguales a cero. A continuación se demostrará que esto, en general, no puede ocurrir. Para que la incertidumbre fuera nula, debería serlo, en particular, para valores grandes de T, para los cuales la contribución $(\overline{T}\Delta V)^2$

procedente del primer término domina en (5.10). Por consiguiente, ΔV debería anularse en cualquier instante de tiempo, puesto que V es una constante de movimiento. Aceptemos que la expresión del hamiltoniano de fondo H_0 como función de Π es invertible para todo el rango de energías de fondo, esto es, $\Pi = \Pi(H_0)$ [99]. Se puede definir entonces la función $\mathcal{V}(H_0) := V[H_0, \Pi(H_0)]$. El que $\Delta V = \Delta\mathcal{V} = 0$ podría parecer, en principio, razón suficiente para que se anulase el tercer sumando en (5.10). Sin embargo, esto no es así porque el operador correspondiente a $\mathcal{V}$ está relacionado con el correspondiente a H_0 vía el teorema espectral [2] y, por tanto, es de esperar que una incertidumbre nula en $\mathcal{V}$ conlleve también una incertidumbre nula en la energía de fondo. En este caso, la cuarta relación de Heisenberg establece que $\Delta T \to \infty$, de modo que el resultado del producto $\Delta T \Delta V$ podría ser una cantidad no nula. Este hecho, por sí solo, llevaría a la existencia de una incertidumbre mínima. En estas circunstancias, basta que el sistema cumpla, por ejemplo, uno de los siguientes conjuntos genéricos de hipótesis para probar que la incertidumbre en el intervalo temporal físico es estrictamente positiva.

1) El primer conjunto de hipótesis viene motivado por los comentarios que acabamos de realizar. Suponemos que la función $\mathcal{V}(H_0)$ es estrictamente monótona en el dominio de definición de la energía de fondo H_0, de forma que se tiene una función biyectiva. Esta condición coincide con la que satisfacía la función $K(H_0)$ de la Ec. (3.2) en el escenario de ondas gravitatorias de Einstein-Rosen. En consecuencia, la demostración a partir de esta hipótesis de que, en general, Δt_η no puede anularse sigue un razonamiento paralelo al que se empleó en la Subsec. 3.1.1. En primer lugar, agrupamos los dos últimos términos de la Ec. (5.10) en uno solo y aplicamos la cuarta relación de Heisenberg. Así, la incertidumbre se puede acotar por

$$(\Delta t_\eta)^2 \geq \left[\Delta(\mathcal{V}\overline{T} + W_\eta)\right]^2 + \frac{1}{4}\frac{\langle\widehat{\mathcal{V}}^2\rangle}{(\Delta H_0)^2}. \tag{5.11}$$

Como la función $\mathcal{V}$ es biyectiva, el teorema espectral establece que los autoestados de los operadores $\widehat{\mathcal{V}}$ y $\widehat{H}_0$ coinciden, y el requisito de que $\Delta\mathcal{V} = 0$ implica que $\Delta H_0 = 0$. Por otra parte, como $\mathcal{V}(H_0)$ es monótona, $\mathcal{V}^2$ es una función no negativa con a lo sumo un cero $\bar{H}_0$. $\widehat{\mathcal{V}}^2$ es un operador no negativo y entonces $\langle\widehat{\mathcal{V}}^2\rangle$ no se anula a no ser que nos encontremos en un autoestado de la energía de fondo con autovalor $\bar{H}_0$. En cualquier otro caso, si $\Delta\mathcal{V}$ se hiciera cero, el segundo sumando de la desigualdad (5.11) tendería a infinito. Finalmente, incluso si nos aproximamos a un autoestado de $\widehat{H}_0$ con autovalor $\bar{H}_0$, único caso que resta por considerar, puede verse que, en el límite en el que ΔH_0 (y por tanto $\Delta\mathcal{V}$) tiende a cero, el cociente $\langle\widehat{\mathcal{V}}^2\rangle/(\Delta H_0)^2$ no se anula [la demostración se discute en el Apéndice B] y con ello tampoco la incertidumbre en el tiempo físico.

2) En vez de la suposición anterior de monotonía, asumimos ahora que $\mathcal{V}(H_0)$ es positiva (condición motivada por el requisito natural de que las flechas del tiempo físico y de fondo

coincidan) y que, para energías de fondo grandes, crece al menos linealmente en H_0. Además, asumimos que el espectro del operador $\widehat{H}_0$ no está acotado superiormente y es continuo en la región de grandes energías. Primero analizaremos el caso en que $\mathcal{V}$ es estrictamente positiva, es decir, el *kernel* del operador $\widehat{\mathcal{V}}$ está vacío. Dado que entonces $\langle\widehat{\mathcal{V}}\rangle$ [denotado como $\langle\widehat{V}\rangle$ en la Ec. (5.10)] es diferente de cero, la anulación del segundo término en dicha ecuación requiere que $\Delta T = 0$. Por consiguiente, la cuarta relación de Heisenberg implica que $\Delta H_0 \to \infty$. Consideremos a continuación el tercer sumando en la Ec. (5.10). La condición sobre el comportamiento de $\mathcal{V}$ para H_0 grande puede expresarse diciendo que $\text{lím}_{H_0\to\infty}(\mathcal{V}/H_0) > r$ para un cierto número $r > 0$. Como resultado, y teniendo en cuenta las propiedades asumidas para el espectro de $\widehat{H}_0$, puede verse que $\text{lím}_{\Delta H_0\to\infty}(\Delta\mathcal{V}/\Delta H_0) > r$ [los detalles pueden consultarse en el Apéndice B]. Así, el producto $\Delta T\Delta\mathcal{V} \geq \Delta\mathcal{V}/(2\Delta H_0)$ no puede anularse cuando ΔH_0 tiende a infinito, y la incertidumbre en los intervalos de tiempo físico resulta ser estrictamente positiva. Por otro lado, en el caso de que $\mathcal{V}$ pueda tomar también el valor cero, $\langle\widehat{\mathcal{V}}\rangle$ podría llegar a anularse, pero esto sólo puede ocurrir si el estado cuántico está en el *kernel* del operador $\widehat{\mathcal{V}}$. Introducimos entonces la suposición adicional de que este kernel está compuesto exclusivamente por autoestados (quizás generalizados) correspondientes a un único autovalor $\overline{H}_0$ de $\widehat{H}_0$, resultado que se cumple cuando $\mathcal{V}$ se anula sólo en $\overline{H}_0$ o cuando $\mathcal{V}$ se anula, además, para algún otro valor de la energía de fondo, pero dicho valor no pertenece al espectro de $\widehat{H}_0$. Si el sistema se aproxima a un autoestado tal, ΔH_0 tiende a cero y, de igual manera a lo que ocurría para el primero de nuestros conjuntos de hipótesis, puede verse que el cociente $\langle\widehat{\mathcal{V}}^2\rangle/(\Delta H_0)^2$ no se anula [Apéndice B], lo que concluye nuestra demostración.

5.1.3. Correcciones a primer orden

Seguidamente, motivados por la comprobación de los resultados recién obtenidos sobre incertidumbre temporal mínima en la cuantización (completa) perturbativa, y también por el deseo de identificar regímenes de validez para los diferentes tipos de incertidumbre mínima sugeridos en la literatura, vamos a estudiar la incertidumbre temporal que surge en la cuantización perturbativa cuando el operador $\widehat{t}_\eta$ se aproxima hasta correcciones a primer orden en la energía. Para obtener esta aproximación, se desarrollan las funciones f y g (que se suponen suaves) en las variables H_0 y Π en torno a sus valores mínimos. Inspirados por el caso de partículas libres en relatividad especial, suponemos que el valor mínimo del momento de fondo es cero, mientras que el mínimo de la energía de fondo, μ, será simplemente no negativo [99]. Denotamos $\mathcal{H}_0 := H_0 - \mu$ y mantenemos sólo los términos hasta orden cuadrático en $\mathcal{H}_0$ y Π en los desarrollos de las dos funciones; esta aproximación bastará para nuestros propósitos. Además, asumimos que μ es pequeño comparado con la escala invariante en energía y/o momento de la teoría DSR, de manera que los términos dominantes en la región de expansión son $f(H_0,\Pi)\approx\Pi$ y $g(H_0,\Pi)\approx H_0$ (recuérdese que la aplicación U determinada por f y g debe aproximarse a la identidad en el sector de baja energía-momento).

De la Ec. (5.5) se obtiene entonces

$$\begin{aligned}A(H_0,\Pi) &\approx 1-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0^2}\right)\bigg|_0 \mathcal{H}_0-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0 \Pi,\\ B(H_0,\Pi) &\approx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0^2}\right)\bigg|_0 \mathcal{H}_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0 \Pi,\end{aligned}$$

donde el símbolo $|_0$ representa evaluación en $\mathcal{H}_0=\Pi=0$. Sustituyendo estos resultados y la expresión $H_0(\Pi)$ del hamiltoniano de fondo en las Ecs. (5.8) y (5.9) [y recordando las definiciones (5.5)], se deduce la aproximación a primer orden para los operadores $\widehat{V}$ y $\widehat{W}_\eta$. Motivados por la situación encontrada en relatividad especial, vamos a considerar los dos casos siguientes.

1) Caso *con "masa"*: $\mu\neq 0$, con $H_0'|_{\Pi=0}=0$.
Se obtiene $H_0(\Pi)\approx\mu+b\Pi^2$, donde $2b:=H_0''|_{\Pi=0}$. Suponiendo que $b>0$ se tiene que $\Pi\approx\sqrt{\mathcal{H}_0/b}$. Así, se pueden despreciar los términos proporcionales a $\mathcal{H}_0$ con respecto a los lineales en Π. De este modo, se encuentra que

$$\widehat{V} \approx 1-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0 \widehat{\Pi}, \tag{5.12}$$

$$\widehat{W}_\eta \approx \eta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0 \widehat{s}_0, \tag{5.13}$$

donde se ha utilizado que $s_0=\Pi_j q^j|_{T=0}$ es del mismo orden que Π. La función $\mathcal{V}$ está dada en esta aproximación por el análogo clásico de la Ec. (5.12) con $\Pi=\sqrt{\mathcal{H}_0/b}$. La función resultante es estrictamente monótona en H_0 si el coeficiente constante $-\left(\partial^2 g/\partial H_0\partial\Pi\right)|_0$ no se anula, como debe ocurrir si nuestra expansión truncada proporciona realmente la aproximación a primer orden (si no fuese así, habría que considerar los términos hasta el orden siguiente). Por consiguiente, el primer conjunto de hipótesis considerado en la Subsec. 5.1.2 es aplicable en este caso, lo que conduce a la conclusión de que es imposible lograr una resolución infinita en los intervalos de tiempo físico.

2) Caso *sin "masa"*: $\mu=0$, con $H_0'|_{\Pi=0}=k\neq 0$.
Ahora $\mathcal{H}_0=H_0\approx k\Pi$, de forma que las correcciones proporcionales tanto a H_0 como a Π son del mismo orden. Se llega entonces a

$$\begin{aligned}\widehat{V} &\approx 1+\left[k\left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0^2}\right)\bigg|_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0^2}\right)\bigg|_0-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0\right]\widehat{H}_0,\\ \widehat{W}_\eta &\approx \eta\left[k\left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0^2}\right)\bigg|_0+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0\partial\Pi}\right)\bigg|_0\right]\widehat{s}_0. \end{aligned}\tag{5.14}$$

La aproximación hasta orden siguiente al primero de la función $\mathcal{V}$ está dada por el equivalente clásico de la Ec. (5.14). De nuevo, con tal que el coeficiente constante de la corrección a primer orden en H_0 difiera de cero, la función $\mathcal{V}$ es estrictamente monótona. La incertidumbre en el lapso de tiempo físico es entonces mayor que cero en esta aproximación.

5.1.4. Correcciones a primer orden: comportamiento a tiempos grandes

Vamos a analizar ahora en más detalle la incertidumbre en el lapso de tiempo físico para la cuantización perturbativa en el caso *sin masa* adoptando la aproximación hasta orden siguiente al primero para bajas energías. Se prestará especial atención al comportamiento mostrado para valores grandes del tiempo de fondo y se demostrará que este comportamiento es del tipo discutido por primera vez por Salecker y Wigner [31].

La Ec. (5.10) puede escribirse como

$$(\Delta t_\eta)^2 = \overline{T}^2(\Delta V)^2 + (\Delta W_\eta)^2 + \overline{T}\,\mathrm{cov}(\widehat{V},\widehat{W}_\eta) + \langle\widehat{V}\rangle^2(\Delta T)^2 + (\Delta T\Delta V)^2, \quad (5.15)$$

$$\mathrm{cov}(\widehat{V},\widehat{W}_\eta) := \langle\widehat{V}\widehat{W}_\eta + \widehat{W}_\eta\widehat{V}\rangle - 2\langle\widehat{V}\rangle\langle\widehat{W}_\eta\rangle. \quad (5.16)$$

Además, en la aproximación estudiada para el caso *sin masa*, se pueden escribir los operadores $\widehat{V}$ y $\widehat{W}_\eta$ en la forma $\widehat{V} = 1 + \lambda_0\widehat{H}_0/E_P$ y $\widehat{W}_\eta = \eta\delta_0\widehat{s}_0/E_P$ [véanse Ecs. (5.14)], donde E_P es la energía de Planck, y λ_0 y δ_0 son coeficientes constantes apropiados distintos de cero.

El último término en la Ec. (5.15) es entonces

$$(\Delta T\Delta V)^2 \approx \frac{\lambda_0^2(\Delta T\Delta H_0)^2}{E_P^2} \geq \frac{\lambda_0^2 l_P^2}{4}. \quad (5.17)$$

En el último paso se ha usado la cuarta relación de Heisenberg para el tiempo y la energía de fondo, y se ha introducido la longitud de Planck $l_P = 1/E_P$ (en nuestras unidades). Recordando que las otras contribuciones a la incertidumbre física son positivas, se concluye que $\Delta t_\eta \gtrsim |\lambda_0| l_P/2$, es decir, la incertidumbre en el lapso de tiempo físico está acotada inferiormente por una contribución de origen gravitatorio cuántico que es del orden de la longitud de Planck [5–9].

Del resto de contribuciones a la incertidumbre física (5.15), se obtiene de una manera similar la cota

$$(\Delta t_\eta)^2 \gtrsim \lambda_0^2\overline{T}^2\frac{(\Delta H_0)^2}{E_P^2} + \frac{\langle\widehat{V}\rangle^2}{4(\Delta H_0)^2} + (\Delta W_\eta)^2 + \overline{T}\mathrm{cov}(\widehat{V},\widehat{W}_\eta). \quad (5.18)$$

El miembro derecho de esta desigualdad puede considerarse una función de la incertidumbre en la energía de fondo ΔH_0, una vez que se han sustituido las expresiones hasta orden siguiente al primero de los operadores $\widehat{V}$ y $\widehat{W}_\eta$. Así, para incertidumbres ΔH_0 en un cierto intervalo, se puede deducir una cota más general para Δt_η minimizando esa función. Los extremos pueden deducirse imponiendo que la primera derivada con respecto a ΔH_0 sea cero:

$$0 = 2\lambda_0^2 \overline{T}^2 \frac{(\Delta H_0)^4}{E_P^2} - \frac{\langle \widehat{V} \rangle^2}{2} + (\Delta H_0)^3 \frac{\partial (\Delta W_\eta)^2}{\partial \Delta H_0} + \frac{\Delta H_0}{4} \frac{\partial \langle \widehat{V} \rangle^2}{\partial \Delta H_0} + \overline{T} (\Delta H_0)^3 \frac{\partial [\mathrm{cov}(\widehat{V}, \widehat{W}_\eta)]}{\partial \Delta H_0}. \quad (5.19)$$

Siempre que $\langle \widehat{V} \rangle$ pueda considerarse independiente tanto de ΔH_0 como del (valor medio del) tiempo de fondo $\overline{T}$, los primeros dos términos del miembro derecho de la Ec. (5.18) son de hecho la clase de contribuciones que llevan a la aparición de una incertidumbre mínima del tipo de Salecker y Wigner (consúltese Apéndice A) [31–33]. Esto es, se obtiene una contribución que es lineal en $(\Delta H_0)^2$ y otra que es proporcional a su inverso. Si estos dos términos fuesen los únicos que apareciesen en nuestras ecuaciones, un análisis similar al estándar para dispositivos de Salecker-Wigner probaría que la cota para Δt_η alcanza su mínimo en un valor de ΔH_0 que va con el tiempo de fondo como $\Delta H_0^{min} \propto 1/\sqrt{\overline{T}}$, mientras que la mínima cota obtenida para la incertidumbre física en ΔH_0^{min} crece con el tiempo según $\sqrt{\overline{T}}$.

Motivados por estas consideraciones, demostraremos ahora que, al menos en la región de ΔH_0 pequeña y para valores grandes del tiempo de fondo $\overline{T}$, los términos adicionales a los dos primeros en las Ecs. (5.18) y (5.19) no invalidan las conclusiones anteriores sobre un mínimo (local) y su cota asociada. La restricción a pequeños valores de ΔH_0 es natural en el contexto de la aproximación a baja energía que estamos discutiendo. Por otra parte, el hecho de que el sector de valores de ΔH_0 muy pequeños deba contener la región relevante para el análisis de la cota de Salecker-Wigner, esto es, la región en torno al mínimo $\Delta H_0^{min} \propto 1/\sqrt{\overline{T}}$, lleva de forma natural a considerar tiempos $\overline{T}$ ilimitadamente grandes.

En este sector de tiempos y de incertidumbres en energía de fondo, se puede demostrar que un conjunto de condiciones suficientes para deducir un comportamiento de tipo Salecker-Wigner es:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \lim_{\Delta H_0 \to 0} \quad \langle \widehat{V} \rangle^2 = c_1, \\
&\text{b)} \quad \lim_{\Delta H_0 \to 0} \quad (\Delta H_0)^2 (\Delta W_\eta)^2 = c_2, \\
&\text{c)} \quad \lim_{\Delta H_0 \to 0} \quad (\Delta H_0)^3 \frac{\partial (\Delta W_\eta)^2}{\partial \Delta H_0} = c_3, \\
&\text{d)} \quad \lim_{\Delta H_0 \to 0} \quad \Delta H_0 \frac{\partial \langle \widehat{V} \rangle^2}{\partial \Delta H_0} = 0, \\
&\text{e)} \quad \lim_{\Delta H_0 \to 0} \quad \mathrm{cov}(\widehat{V}, \widehat{W}_\eta) = 0, \\
&\text{f)} \quad \lim_{\Delta H_0 \to 0} \quad \Delta H_0 \frac{\partial [\mathrm{cov}(\widehat{V}, \widehat{W}_\eta)]}{\partial \Delta H_0} = 0,
\end{aligned} \quad (5.20)$$

donde c_n, n=1,2,3, son constantes (con $c_1 - 2c_3 \neq 0$ y $c_1 + 2c_2 - c_3 \neq 0$). Las condiciones a), b), y c) permiten absorber el tercer término del miembro derecho de las Ecs. (5.18) y (5.19) simplemente como una modificación a $\langle \widehat{V} \rangle^2$ y tratar este valor esperado (al cuadrado) como una constante al calcular el valor de nuestra función en torno a sus extremos en la región $\Delta H_0 \ll 1$. En dicho cálculo y para tiempos de fondo suficientemente grandes, las condiciones d), e), y f) garantizan que todos los términos en las Ecs. (5.18) y (5.19) puedan omitirse excepto los tres primeros.

Teniendo en cuenta que $\widehat{W}_\eta$ se anula cuando $\eta = 0$, los únicos requisitos no triviales en ese caso son las condiciones a) y d). En el Apéndice C se prueba, independientemente del valor de η, que todas las condiciones mencionadas arriba se satisfacen al menos para estados cuánticos descritos por paquetes de onda gaussianos.[2] Puesto que se está suponiendo factible una cuantización (perturbativa) con variables canónicas elementales dadas por las coordenadas espaciales planas de fondo y el momento de fondo, y además se ha centrado la discusión en sistemas libres, parece razonable suponer que tales estados existen y proporcionan la analogía de las partículas clásicas en nuestra teoría cuántica. Además, la limitación a paquetes de onda está ya a su vez presente en la deducción de la cota de Salecker-Wigner para la incertidumbre espacio-temporal (para justificar la suposición de que los operadores de posición y momento tengan covarianza nula) [32, 33]. Por consiguiente, es natural incorporar la misma restricción en nuestro análisis.

Sustituyendo los valores de las constantes c_n calculadas en el Apéndice C (bajo la hipótesis simplificadora de una sola dimensión espacial) se obtiene la siguiente cota para tiempos de fondo grandes a partir de los correspondientes mínimos en la región $\Delta H_0 \ll 1$:

$$(\Delta t_\eta)^2 \gtrsim d_{0,\eta}\, l_p \overline{T}, \tag{5.21}$$

donde

$$d_{0,\eta} = \lambda_0 \left[\eta k^2 \frac{\delta_0^2}{E_P^2} \nu^2 + \left(1 + k \frac{\lambda_0}{E_P} |\nu| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.22}$$

Aquí, ν denota el valor esperado del momento de fondo.

En conclusión, en la cuantización perturbativa de sistemas libres *sin masa* en teorías DSR y en la aproximación de baja energía, se ha visto que las incertidumbre en los intervalos de tiempo físico está siempre acotada inferiormente por una contribución gravitatoria cuántica del orden de la longitud de Planck, mientras que para valores grandes del tiempo de fondo las incertidumbres crecen según $\sqrt{l_P \overline{T}}$ (al menos para paquetes de onda), justamente como en los dispositivos de Salecker-Wigner.

[2] Los estados cuánticos no muestran ninguna evolución si se ha adoptado una imagen de Heisenberg (por ejemplo si se ha resuelto la dinámica cuántica introduciendo la dependencia temporal explícita apropiada en los operadores).

5.2. Incertidumbre en el tiempo físico: caso no perturbativo

Pasamos ahora al análisis de la incertidumbre en el lapso de tiempo físico cuando se adopta una cuantización no perturbativa, donde la evolución cuántica está descrita en términos del tiempo físico. Estudiaremos dos posibilidades para la obtención de esta cuantización.

5.2.1. Cuantización no perturbativa construida a partir de la perturbativa

En principio, siempre se puede construir una cuantización no perturbativa a partir de la teoría cuántica perturbativa que hemos supuesto que existe. En más detalle, se puede obtener una cuantización no perturbativa en términos de las variables elementales de fondo (q^i, Π^i) (canónicamente conjugadas) y con la coordenada de tiempo físico t como parámetro de evolución, de forma que el generador de la dinámica sea el hamiltoniano físico H. En cierto sentido, se trata pues de una cuantización "híbrida", ya que mezcla la elección de las coordenadas espaciales de fondo como variables elementales auxiliares con la adopción de un parámetro que corresponde al genuino tiempo físico.

Empleando la descomposición espectral correspondiente al momento de fondo Π y recordando que $H_0 = H_0(\Pi)$, se puede definir el hamiltoniano físico $H = g(H_0, \Pi)$ como operador en el espacio de Hilbert asociado originalmente a la cuantización perturbativa (podemos entender dicho espacio como el de estados en un cierto instante dado). El parámetro de la evolución generada por este hamiltoniano puede identificarse con el tiempo físico t. Por contra, resulta que el tiempo de fondo viene representado entonces como un operador.

El hecho de que el tiempo físico t sea el parámetro de evolución permite aplicar directamente la cuarta relación de Heisenberg, $\Delta t \Delta H \geq 1/2$. Por tanto, la resolución en el tiempo físico está limitada sólo si la energía física tiene una cota superior (lo mismo ocurre con la resolución en los intervalos de tiempo físico, obtenidos como la diferencia de dos valores de tiempo no correlacionados). La existencia de esta cota superior se da en teorías DSR2 y DSR3, pero no en las DSR1. Se concluye, entonces, que es posible la ausencia de una incertidumbre temporal mínima en esta clase de cuantización no perturbativa para ciertas teorías DSR.

5.2.2. Cuantización no perturbativa genuina

Cabe comentar la posibilidad de que el sistema pueda admitir una cuantización no perturbativa diferente (con evolución generada todavía por el hamiltoniano físico) en la que las variables físicas canónicamente conjugadas (x^i, p^i) fuesen vistas como variables elementales y promocionadas a operadores explícitamente independientes del tiempo en un cierto espacio de Hilbert, y de manera tal que el espectro cuántico del momento físico p estuviese contenido en su correspondiente dominio clásico.[3] A una cuantización de este tipo la llamaremos cuantización no perturbativa "genuina". Su existencia no es inmediata; la viabilidad de tal cuantización no puede darse por supuesta partiendo de la sola suposición de la existencia de una descripción cuántica perturbativa con las propiedades que se han discutido. Por ejemplo, pueden surgir problemas si el momento físico p presenta una cota superior (recuérdese que, de hecho, tanto las familias de teorías DSR1 como DSR2 contienen una escala en el momento). En general, las coordenadas de posición física x^i actuarán como generadores de las traslaciones en las variables p^i. Si éstas tienen un límite superior, la actuación de esas traslaciones no puede ser la convencional, porque entonces podríamos incrementar los momentos hasta rebasar su cota.

En caso de existir una cuantización no perturbativa genuina, el análisis de la incertidumbre temporal es idéntico al de la subsección anterior. El principio de incertidumbre de Heisenberg implica que $\Delta t \Delta H \geq 1/2$. Como consecuencia, la resolución en el (lapso de) tiempo físico está limitada si y sólo si la energía física está acotada superiormente, lo cual no ocurre en la teorías DSR1. Por tanto, la aparición de una incertidumbre temporal mínima es evitable en una cuantización no perturbativa genuina.

[3]Notamos que esta cuantización, en su elección de variables elementales y parámetro de evolución, no mezcla variables físicas y de fondo, como ocurre en el tipo de cuantización no perturbativa considerado en la subsección anterior.

Capítulo 6

Incertidumbre espacial mínima en DSR

Camino alegremente y bien dispuesto.
No puedo precisar el lugar a donde camino, pero sé que es bueno.

W. Whitman.

El presente capítulo es una continuación natural del anterior, y en él estudiaremos la existencia de una incertidumbre mínima en la longitud física para las dos descripciones cuánticas, perturbativa y no perturbativa, de sistemas libres en DSR [100]. Los argumentos que se utilizarán aquí son, en su mayoría, idénticos a los que se emplearon para el análisis de la incertidumbre en los intervalos de tiempo físico, así que no se ahondará en ellos.

6.1. Incertidumbre en la longitud física: caso perturbativo

Recordamos que en la cuantización perturbativa la evolución está generada por el hamiltoniano de fondo H_0. El parámetro de evolución es la coordenada temporal de fondo $q^0 = T$, mientras que el tiempo físico viene representado por una familia paramétrica de operadores $\widehat{t}$ [99, 106]. En las expresiones de x^i dadas por (4.5) la única variable que evoluciona en el tiempo (además del parámetro T) es $s_T = s_0 + T\Pi H_0'$ [véase Ec. (5.1) y la discusión posterior.]

6.1.1. Definición de posición y longitud físicas

Para simplificar el análisis y tratar únicamente con cantidades escalares (sorteando la clase de problemas derivados del uso de componentes vectoriales y su dependencia de la elección de estructuras de fondo fijas, elección que es cuestionable tanto desde el punto de vista de la relatividad general como de las fluctuaciones inherentes a la mecánica cuántica) el estudio se centrará exclusivamente en la proyección del vector de posición a lo largo de la dirección de movimiento, a la que llamaremos posición física [100]:

$$X := x^i \frac{p_i}{p} = x^i \frac{\Pi_i}{\Pi} = \frac{1}{J}\left[\frac{\partial g}{\partial \Pi} T + \frac{\partial g}{\partial H_0}\frac{\Pi_j}{\Pi} q^j\right]. \tag{6.1}$$

Recordamos que g, f, y J son funciones solamente de H_0 y Π en nuestro sistema. Esta expresión es notablemente similar a la que se tiene en (4.5) para la coordenada temporal $x^0 = t$ con el intercambio de la función g por f y un cambio de signo global (de manera que el jacobiano J se preserve bajo el intercambio descrito).

Al igual que hicimos para el caso temporal, aquí sólo consideraremos diferencias entre las variables de posición (intervalos). Sobresalen dos posibles elecciones de posición de referencia: el valor inicial (de la proyección a lo largo de la dirección de movimiento) del vector físico de posición o bien el del correspondiente vector de fondo. En el primer caso, la diferencia de posiciones determina el intervalo físico espacial recorrido por la partícula durante el lapso de fondo T. En el segundo caso, la diferencia incluye también las correcciones efectivas a la posición de fondo inicial contenidas en DSR. De nuevo introducimos el parámetro η para distinguir entre ambos casos: $\eta = 0$ corresponde a la posición física inicial y $\eta = 1$ a la de fondo. Explícitamente, la primera está dada por la Ec. (6.1) con $T = 0$ y $\Pi_j q^j$ reemplazada por s_0, mientras que la segunda es igual a s_0/Π.

De la diferencia entre X y cualquiera de estas dos posiciones de referencia, se obtiene la que llamaremos longitud física [100]

$$L_\eta := \frac{1}{J}\left[\frac{\partial g}{\partial \Pi} T + \frac{\partial g}{\partial H_0} S_T + \frac{\eta}{\Pi}\left(\frac{\partial g}{\partial H_0} - J\right) s_0\right], \qquad S_T := \frac{s_T - s_0}{\Pi}. \tag{6.2}$$

En forma de operador (simetrizado) se expresa como

$$\widehat{L}_\eta := \widehat{M}(H_0, \Pi)\, T + \widehat{R}_{T,\eta}, \tag{6.3}$$

$$\widehat{R}_{T,\eta} = \frac{1}{2}\left(\widehat{N}(H_0,\Pi)\widehat{S}_T + \widehat{S}_T \widehat{N}(H_0,\Pi)\right) + \frac{\eta}{2}\left(\widehat{O}(H_0,\Pi)\widehat{s}_0 + \widehat{s}_0 \widehat{O}(H_0,\Pi)\right), \tag{6.4}$$

con

$$M := \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial \Pi}, \quad N := \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial H_0}, \quad O := \frac{1}{\Pi J}\left(\frac{\partial g}{\partial H_0} - J\right). \tag{6.5}$$

Las funciones M, N, y O corresponden a constantes de movimiento y sus operadores respectivos pueden definirse en términos de $\widehat{H}_0$ y $\widehat{\Pi}$ mediante el teorema espectral.

6.1.2. Cálculo de la incertidumbre en la longitud física

Para hallar la incertidumbre en el operador longitud física $\widehat{L}_\eta$ empleamos el mismo procedimiento de doble promedio que expusimos en la Subsec. 5.1.2 [99, 100], que conduce a

$$(\Delta L_\eta)^2 = \int dT \rho(T) \Big\langle \left(\widehat{M}\, T + \widehat{R}_{T,\eta} - \langle \widehat{M} \rangle \overline{T} - \langle \widehat{R}_{\overline{T},\eta} \rangle\right)^2 \Big\rangle, \tag{6.6}$$

donde $\langle \widehat{R}_{\overline{T},\eta} \rangle$ es el valor medio del operador $\widehat{R}_{T,\eta}$ calculado con el doble promedio.

Las dos representaciones de operador destacables para s_T, ya sea como un operador explícitamente independiente o dependiente de T, pueden examinarse conjuntamente reuniendo en un mismo término toda la dependencia explícita lineal en T del operador $\widehat{L}_\eta$:

$$\widehat{L}_\eta = \widehat{Y}(H_0, \Pi)\, T + \widehat{Z}_\eta(H_0, \Pi, s_0). \tag{6.7}$$

Para el caso en el que s_T se represente como un operador explícitamente dependiente de T, tendremos

$$\widehat{Y}(H_0, \Pi) = \widehat{M}(H_0, \Pi) + \widehat{N}(H_0, \Pi)\, \widehat{H_0'}(\Pi), \tag{6.8}$$
$$\widehat{Z}_\eta(H_0, \Pi, s_0) = \frac{\eta}{2} \left(\widehat{O}(H_0, \Pi)\widehat{s}_0 + \widehat{s}_0 \widehat{O}(H_0, \Pi) \right). \tag{6.9}$$

Por otro lado, en el caso de que s_T se represente mediante un operador explícitamente independiente de T, se mantiene la expresión (6.3) que, a efectos de cálculo, puede considerarse un ejemplo particular de la Ec. (6.7) con $\widehat{Y} = \widehat{M}$ y $\widehat{Z}_\eta = \widehat{R}_{T,\eta}$. Además, recordamos que en este caso debemos identificar operacionalmente $\langle \widehat{R}_{\overline{T},\eta} \rangle$ en la Ec. (6.6) con $\langle \widehat{R}_{T,\eta} \rangle$ (esto es, no hay que efectuar aquí el promedio sobre T). Realizando las sustituciones descritas en la Ec. (6.6), se puede reexpresar la incertidumbre en la longitud física como

$$(\Delta L_\eta)^2 = [\Delta(Y\overline{T} + Z_\eta)]^2 + \langle \widehat{Y} \rangle^2 (\Delta T)^2 + (\Delta T \Delta Y)^2. \tag{6.10}$$

Para que la incertidumbre en la longitud física se anulase, los tres sumandos positivos de la Ec. (6.10) tendrían que ser cero. Para demostrar que esta situación no puede darse en general se utiliza el mismo razonamiento que en la Subsec. 5.1.2. Para que la incertidumbre fuera nula en cualquier instante, y en particular para valores grandes del tiempo, ΔY debería anularse en cualquier instante porque Y es una constante de movimiento. Admitiendo que se puede definir la función $\mathcal{Y}(H_0) := Y[H_0, \Pi(H_0)]$, se pueden aplicar, por ejemplo, los mismos dos conjuntos de hipótesis que se emplearon con la función $\mathcal{V}$ del caso temporal, a saber: 1) que la función $\mathcal{Y}(H_0)$ sea estrictamente monótona (biyectiva) o 2) que $\mathcal{Y}(H_0)$ sea positiva y crezca al menos linealmente en H_0 para energías de fondo grandes (región en la que se supone que el espectro de $\widehat{H}_0$ es continuo).

Para el primer grupo de hipótesis se procede como en el caso temporal de DSR. Reunimos los dos últimos términos de la Ec. (6.10) en uno y aplicamos la cuarta relación de Heisenberg:

$$(\Delta L_\eta)^2 \geq \left[\Delta(\mathcal{Y}\overline{T} + Z_\eta)\right]^2 + \frac{1}{4} \frac{\langle \widehat{\mathcal{Y}}^2 \rangle}{(\Delta H_0)^2}. \tag{6.11}$$

Los autoestados de $\widehat{\mathcal{Y}}$ y $\widehat{H}_0$ coinciden porque la función $\mathcal{Y}$ es biyectiva, y el requisito $\Delta\mathcal{Y} = 0$ implica que $\Delta H_0 = 0$. Como $\widehat{\mathcal{Y}}^2$ es un operador no negativo, el segundo sumando de la desigualdad (6.11) se haría infinito si $\Delta\mathcal{Y}$ se hiciera cero, salvo quizás en el *kernel* de $\widehat{\mathcal{Y}}^2$, si éste no está vacío. Pero, como $\mathcal{Y}(H_0)$ es monótono, este *kernel* estaría formado por autoestados de $\widehat{H}_0$ correspondientes a un autovalor único [a saber, el cero único de $\mathcal{Y}(H_0)$, si es que existe y pertenece al espectro de $\widehat{H}_0$]. No obstante, puede verse que incluso en este caso (como límite) el cociente $\langle\widehat{\mathcal{Y}}^2\rangle/(\Delta H_0)^2$ no se anula [los detalles se muestran en el Apéndice B].

En cuanto a la segunda colección de suposiciones, si $\mathcal{Y}$ es estrictamente positiva, se tiene que $\langle\widehat{\mathcal{Y}}\rangle \neq 0$ y entonces sería necesario que $\Delta T = 0$, o equivalentemente que $\Delta H_0 \to \infty$, para que ΔL_η pudiese anularse [véase la Ec. (6.10)]. Sin embargo, el comportamiento lineal de $\mathcal{Y}$ para valores grandes de H_0, junto con la continuidad del espectro de la energía de fondo en esa región, implican que el término $\Delta T \Delta\mathcal{Y}$ no se hace cero cuando $\Delta H_0 \to \infty$ [como demostramos en el Apéndice B]. Por otro lado, es posible relajar en parte la condición de positividad estricta, permitiendo que $\mathcal{Y}$ tome también el valor cero. En este caso, introducimos la suposición adicional de que el kernel de $\widehat{\mathcal{Y}}$ lo constituyan exclusivamente autoestados (posiblemente generalizados) correspondientes a un solo autovalor $\overline{H}_0$ de $\widehat{H}_0$. Entonces, cuando el sistema se aproxime a un estado en el *kernel* de $\widehat{\mathcal{Y}}$, aunque $\langle\widehat{\mathcal{Y}}\rangle$ tienda a cero también lo hace la incertidumbre ΔH_0 y, de nuevo, puede comprobarse que el tercer sumando de la Ec. (6.10) no se anula [Apéndice B].

En particular, para el caso en el que s_T se representa por un operador explícitamente independiente del tiempo, existe una clase importante de teorías DSR en la que se satisface la condición de que $\mathcal{Y}$ sea positiva: aquélla en la que la energía física no depende del momento de fondo, o sea, cuando la función g depende sólo de H_0. En este caso,

$$M = \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial \Pi} = 0, \quad N = \frac{1}{J}\frac{\partial g}{\partial H_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^{-1}, \quad Y = H_0'\left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^{-1}. \tag{6.12}$$

Como consecuencia, $\mathcal{Y}(H_0)$ es no nula, porque tanto la aplicación U como $H_0(\Pi)$ son invertibles por suposición [esto garantiza que $(\partial f/\partial\Pi) \neq 0$ y $H_0' \neq 0$]. Dado que $\mathcal{Y}(H_0)$ tiene un signo definido, y que $(\partial f/\partial\Pi) \approx 1$ en la región de baja pseudo energía-momento, se concluye que $\mathcal{Y}(H_0)$ es estrictamente positiva en la situación estándar de una pseudo energía que crece con Π en esa región.[1] Este caso relevante motiva el segundo conjunto de hipótesis considerado.

6.1.3. Correcciones a primer orden

A continuación estudiamos la incertidumbre en la longitud física que aparece en la cuantización perturbativa cuando el operador $\widehat{L}_\eta$ se aproxima hasta correcciones a primer orden

[1]Se puede relajar la condición de que H_0' sea estrictamente positiva y permitir que se anule, por ejemplo, en el punto $\Pi = 0$, anulándose así la función $\mathcal{Y}$ para la pseudo energía correspondiente. Véase al respecto la discusión del segundo conjunto de hipótesis.

en la energía. Introduciendo el desarrollo de las funciones f y g en las variables $\mathcal{H}_0 := H_0 - \mu$ y Π en torno a cero en la Ec. (6.5), se obtiene

$$\begin{aligned} M(H_0, \Pi) &\approx \left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0 \partial \Pi} \right) \bigg|_0 \mathcal{H}_0 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 \Pi, \\ N(H_0, \Pi) &\approx 1 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0 \partial \Pi} \right) \bigg|_0 \mathcal{H}_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 \Pi. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Sustituyendo en las Ecs. (6.8) y (6.9) [y recordando las definiciones (6.5) y la expresión $H_0(\Pi)$], se deduce la aproximación a primer orden para los operadores $\widehat{Y}$ y $\widehat{Z}_\eta$. Nuevamente, consideramos dos casos.

1) Caso *con "masa"*: $\mu \neq 0$, con $H_0'|_{\Pi=0} = 0$.
Se tiene $H_0(\Pi) \approx \mu + b\Pi^2$, con $2b := H_0''|_{\Pi=0}$. Si suponemos que $b > 0$, se obtiene que $\Pi \approx \sqrt{\mathcal{H}_0/b}$ y se pueden despreciar los términos proporcionales a $\mathcal{H}_0$ con respecto a los lineales en Π. De modo que

$$\widehat{Y} \approx \left[2b + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 \right] \widehat{\Pi}, \tag{6.14}$$

$$\widehat{Z}_\eta \approx -\eta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 \widehat{s}_0, \tag{6.15}$$

donde hemos considerado que $s_0 = \Pi_j q^j|_{T=0}$ es del mismo orden que Π. La función $\mathcal{Y}$, determinada en esta aproximación por el análogo clásico de la Ec. (6.14) con $\Pi = \sqrt{\mathcal{H}_0/b}$, es estrictamente monótona en H_0 (si el coeficiente constante $2b + (\partial^2 g/\partial \pi^2)|_0$ es distinto de cero) y, por tanto, se puede aplicar el primer conjunto de hipótesis considerado en la Subsec. 5.1.2. De donde se concluye que es imposible evitar la presencia de una incertidumbre mínima en la longitud física.

2) Caso *sin "masa"*: $\mu = 0$, con $H_0'|_{\Pi=0} = k \neq 0$.
Aquí, $\mathcal{H}_0 = H_0 \approx k\Pi$, así que las correcciones proporcionales a H_0 y a Π son del mismo orden. Se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{Y} &\approx k + \left[\frac{2b}{k} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 - k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0 \partial \Pi} \right) \bigg|_0 + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial H_0 \partial \Pi} \right) \bigg|_0 \right] \widehat{H}_0, \\ \widehat{Z}_\eta &\approx -\eta \left[k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial H_0 \partial \Pi} \right) \bigg|_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \Pi^2} \right) \bigg|_0 \right] \widehat{s}_0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

La constante b se define como en el caso *con masa*. La aproximación hasta orden siguiente al primero de la función $\mathcal{Y}$, dada por el equivalente clásico de la Ec. (6.16), es estrictamente monótona. Así pues, concluimos que existe una incertidumbre mínima no nula en la longitud física en esta aproximación.

6.1.4. Correcciones a primer orden: comportamiento a tiempos grandes

Centramos ahora nuestra atención en el caso perturbativo *sin masa* con aproximación hasta orden siguiente al primero para bajas energías, haciendo hincapié en el comportamiento mostrado por la incertidumbre en la longitud física para valores grandes del tiempo de fondo. Nuestro análisis es similar al presentado en la Subsec. 5.1.4.

La Ec. (6.10) puede expresarse

$$(\Delta L_\eta)^2 \;=\; \overline{T}^2(\Delta Y)^2 + (\Delta Z_\eta)^2 + \overline{T}\,\mathrm{cov}(\widehat{Y},\widehat{Z}_\eta) + \langle\widehat{Y}\rangle^2(\Delta T)^2 + (\Delta T\Delta Y)^2, \quad (6.17)$$

$$\mathrm{cov}(\widehat{Y},\widehat{Z}_\eta) := \langle\widehat{Y}\widehat{Z}_\eta + \widehat{Z},\eta\widehat{Y}\rangle - 2\langle\widehat{Y}\rangle\langle\widehat{Z}_\eta\rangle. \quad (6.18)$$

En la aproximación para el caso *sin masa*, se pueden escribir los operadores $\widehat{Y}$ y $\widehat{Z}_\eta$ de la forma $\widehat{Y} = k + \lambda_1\widehat{H}_0/E_P$ y $\widehat{Z}_\eta = \eta\delta_1\widehat{s}_0/E_P$, donde λ_1 y δ_1 son, respectivamente, los coeficientes constantes que multiplican a $\widehat{H}_0$ y $\widehat{s}_0$ en las Ecs. (6.16) (y que se suponen distintos de cero).

El último término en la Ec. (6.17) adquiere la forma

$$(\Delta T\Delta Y)^2 \approx \frac{\lambda_1^2(\Delta T\Delta H_0)^2}{E_P^2} \geq \frac{\lambda_1^2 l_P^2}{4}. \quad (6.19)$$

Como el resto de sumandos son positivos, concluimos que la incertidumbre en la longitud física está acotada inferiormente por una contribución de origen gravitatorio cuántico del orden de la longitud de Planck [5–9], $\Delta L_\eta \gtrsim |\lambda_1| l_P/2$.

De las otras contribuciones a (6.17) se obtiene

$$(\Delta L_\eta)^2 \gtrsim \lambda_1^2\overline{T}^2\frac{(\Delta H_0)^2}{E_P^2} + \frac{\langle\widehat{Y}\rangle^2}{4(\Delta H_0)^2} + (\Delta Z_\eta)^2 + \overline{T}\mathrm{cov}(\widehat{Y},\widehat{Z}_\eta). \quad (6.20)$$

Minimizando con respecto a ΔH_0, como se hizo en el caso temporal, se tiene la condición

$$0 = 2\lambda_1^2\overline{T}^2\frac{(\Delta H_0)^4}{E_P^2} - \frac{\langle\widehat{Y}\rangle^2}{2} + (\Delta H_0)^3\frac{\partial(\Delta Z_\eta)^2}{\partial\Delta H_0} + \frac{\Delta H_0}{4}\frac{\partial\langle\widehat{Y}\rangle^2}{\partial\Delta H_0} + \overline{T}(\Delta H_0)^3\frac{\partial[\mathrm{cov}(\widehat{Y},\widehat{Z}_\eta)]}{\partial\Delta H_0}. \quad (6.21)$$

Es inmediato demostrar que, en el régimen de valores pequeños de ΔH_0 y valores grandes de $\overline{T}$, las Ecs. (6.20) y (6.21) llevan a una incertidumbre mínima en la longitud física del tipo de Salecker y Wigner si, por ejemplo, se satisfacen las mismas condiciones (5.20) que se introdujeron en el caso temporal, pero con los operadores $\widehat{V}$ y $\widehat{W}_\eta$ sustituidos por $\widehat{Y}$ y $\widehat{Z}_\eta$, y con distintos valores para las constantes c_n. Recordamos que dichas condiciones se satisfacen al menos para estados cuánticos descritos por paquetes de onda gaussianos [véase el Apéndice C]. Finalmente, en este régimen se obtiene la cota

$$(\Delta L_\eta)^2 \gtrsim d_{1,\eta}\, l_p\overline{T}, \quad (6.22)$$

con

$$d_{1,\eta} = \lambda_1 \left[\eta k^2 \frac{\delta_1^2}{E_P^2} \nu^2 + k \left(1 + \frac{\lambda_1}{E_P} |\nu| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.23}$$

En resumen, en la cuantización perturbativa de sistemas libres *sin masa* en teorías DSR y en la aproximación de baja energía, la incertidumbre en la longitud física presenta una cota inferior de origen gravitatorio cuántico del orden de la longitud de Planck, mientras que para valores grandes del tiempo de fondo, y al menos para estados descritos por paquetes de onda, la incertidumbre tiene un comportamiento como el obtenido por Salecker y Wigner, esto es, proporcional a $\sqrt{l_P \overline{T}}$.

6.2. Incertidumbre en la longitud física: caso no perturbativo

Analizamos ahora la incertidumbre en la longitud física en el marco de una cuantización no perturbativa, donde la evolución cuántica está descrita en términos del tiempo físico. Se estudiarán dos posibilidades para la obtención de una cuantización no perturbativa tal.

6.2.1. Cuantización no perturbativa construida a partir de la perturbativa

Como vimos en la Subsec. 5.2.1, a priori es siempre factible construir una cuantización no perturbativa a partir de la teoría cuántica perturbativa. Esto se puede hacer en términos de las variables elementales de fondo q^i, Π^i y del tiempo físico t como parámetro de evolución. Se puede definir el hamiltoniano físico $H = g(H_0, \Pi)$, que genera la dinámica, como operador en el espacio de Hilbert asociado originalmente a la cuantización perturbativa. Mientras que el tiempo físico t es el parámetro de la evolución, el tiempo de fondo está representado como un operador. Este hecho cambia la expresión del observable $\widehat{L}_\eta$ cuando se considera como un operador que depende del tiempo explícitamente. De las Ecs. (6.3) y (4.5), se obtiene

$$\widehat{L}_\eta^{[2]} = \widehat{M}^{[2]}(H_0, \Pi)\, t + \widehat{R}_{t,\eta}^{[2]}, \tag{6.24}$$

$$\widehat{R}_{t,\eta}^{[2]} := \frac{1}{2}\left(\widehat{N}^{[2]}(H_0,\Pi)\widehat{S}_t + \widehat{S}_t \widehat{N}^{[2]}(H_0,\Pi)\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{O}_\eta^{[2]}(H_0,\Pi)\widehat{s}_0 + \widehat{s}_0 \widehat{O}_\eta^{[2]}(H_0,\Pi)\right), \tag{6.25}$$

donde

$$M^{[2]} := \frac{\partial g}{\partial \Pi}\left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^{-1}, \quad N^{[2]} := \left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^{-1}, \tag{6.26}$$

$$O_\eta^{[2]} := \frac{\eta}{\Pi\, J}\left[\frac{\partial g}{\partial H_0} - J - \frac{\partial g}{\partial \Pi}\frac{\partial f}{\partial H_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^{-1}\right]. \tag{6.27}$$

El análisis es paralelo al seguido en el capítulo (y en la sección) anterior para la cuantización perturbativa, con la salvedad de que $s_t := \Pi_j q^j$ [y por tanto $S_t := (s_t - s_0)/\Pi$] debe considerarse ahora una variable que evoluciona en el tiempo físico t, en vez de en el tiempo de fondo como ocurría en el caso perturbativo. Concretamente, extrayendo explícitamente toda la dependencia temporal de s_t al definir su operador equivalente, se llega a

$$\widehat{L}_\eta^{[2]} = \widehat{Y}^{[2]}(H_0,\Pi)\,t + \widehat{Z}_\eta^{[2]}(H_0,\Pi,s_0), \tag{6.28}$$

$$\widehat{Y}^{[2]}(H_0,\Pi) = \left(\widehat{H_0'}\,\widehat{\frac{\partial g}{\partial H_0}} + \widehat{\frac{\partial g}{\partial \Pi}}\right)\widehat{N}^{[2]}(H_0,\Pi) + \widehat{M}^{[2]}(H_0,\Pi), \tag{6.29}$$

$$\widehat{Z}_\eta^{[2]}(H_0,\Pi,s_0) = \frac{\eta}{2}\left(\widehat{O}_\eta^{[2]}(H_0,\Pi)\widehat{s}_0 + \widehat{s}_0\widehat{O}_\eta^{[2]}(H_0,\Pi)\right). \tag{6.30}$$

Aquí, el observable $\widehat{s}_0$ representa el valor de s_t en el tiempo físico inicial y es una constante de movimiento.

Para calcular la incertidumbre en la longitud física, ahora se tiene que promediar sobre el parámetro temporal t, en vez de promediar sobre T como se hizo en la Ec. (6.10). Esto conduce a

$$\left(\Delta L_\eta^{[2]}\right)^2 = \left[\Delta\left(Y^{[2]}\,\bar{t} + Z_\eta^{[2]}\right)\right]^2 + \left(\langle\widehat{Y}^{[2]}\rangle\Delta t\right)^2 + \left(\Delta t\Delta Y^{[2]}\right)^2, \tag{6.31}$$

donde $\bar{t}$ y Δt son el valor medio y la incertidumbre de la distribución deducida para el parámetro t analizando la evolución de las densidades de probabilidad de observables en el estado cuántico. Obviamente, la incertidumbre temporal satisface la cuarta relación de Heisenberg $\Delta t\Delta H \geq 1/2$.

Hacemos notar que la incertidumbre en la longitud física vuelve a estar dada por la suma de tres términos positivos. El análisis del capítulo previo puede extenderse fácilmente al caso considerado aquí. Del comportamiento de $\Delta L_\eta^{[2]}$ a tiempos grandes se concluye que $\Delta Y^{[2]}$ debe anularse. Además, teniendo en cuenta la suposición de que la función $H_0(\Pi)$ sea invertible, recordando asimismo que $H = g(H_0,\Pi)$, y usando el teorema de la función implícita, es posible definir $Y^{[2]}$ como función solamente de H –que se denota $\mathcal{Y}^{[2]}(H)$– con tal que $H_0'\,(\partial g/\partial H_0) + (\partial g/\partial \Pi) \neq 0$. Se pueden introducir entonces los mismos dos conjuntos de hipótesis que se discutieron en la subsección 5.1.2 del capítulo anterior, pero con el papel de $\mathcal{Y}(H_0)$ desempeñado por $\mathcal{Y}^{[2]}(H)$. De esta forma se concluye que, bajo supuestos bastante genéricos, no puede alcanzarse una resolución infinita para la longitud física en una cuantización no perturbativa del sistema construida a partir de la teoría cuántica perturbativa.

Este resultado contrasta de manera notable con el que se obtuvo al final del capítulo anterior para la incertidumbre en los intervalos de tiempo físico en una cuantización no perturbativa de este tipo. Recordamos que allí se demostró que es posible la ausencia de una incertidumbre temporal mínima si la energía no tiene una cota superior, lo cual ocurre en la familia de teorías DSR1.

6.2.2. Cuantización no perturbativa genuina

Por otra parte, en la Subsec. 5.2.2 vimos que existe en principio la posibilidad de que el sistema admita una cuantización no perturbativa "genuina" (con el hamiltoniano físico como generador de la dinámica) en la que las variables elementales sean la variables físicas (x^i, p^i), que se promocionan a operadores explícitamente independientes del tiempo. La existencia de este tipo de cuantización no se desprende automáticamente de la existencia de una descripción cuántica perturbativa.

De la Ec. (6.1) se deduce que una situación en la que este tipo de cuantización es posible es cuando la energía física no depende del momento de fondo, $(\partial g/\partial \Pi) = 0$. En este caso (que incluye el ejemplo de las ondas de Einstein-Rosen), la posición física X es independiente del tiempo de fondo. Puede promocionarse entonces a un operador que no muestre ninguna dependencia temporal explícita, en términos de los correspondientes a las variables de fondo Π^i y q^i (donde éstas últimas sólo presentan una evolución implícita en el parámetro temporal). No obstante, hablando estrictamente, la discusión presentada en los párrafos anteriores no puede aplicarse en estas circunstancias porque, con tal representación de operadores, $Y^{[2]}(H_0, \Pi)$ se debe identificar con $M^{[2]}(H_0, \Pi)$, siendo ésta última idénticamente cero cuando también lo es $(\partial g/\partial \Pi)$ [véanse Ecs. (6.24) y (6.26)]. Esta anulación invalida los conjuntos de hipótesis bajo los que se realizó el estudio.

De existir una cuantización no perturbativa genuina, el principio de incertidumbre de Heisenberg implica que en tales casos $\Delta X \Delta p \geq 1/2$. Como consecuencia, la resolución en la posición física está limitada si y sólo si el momento físico está acotado superiormente. Esto ocurre en las teorías DSR1 y DSR2, pero no en DSR3. El mismo fenómeno ocurre con la longitud física si se determina mediante la diferencia de dos observables de posición no correlacionados. Nótese que para el caso temporal, la resolución en el tiempo físico está limitada si y sólo si la energía física está acotada superiormente; esto sucede en las teorías DSR2 y DSR3, pero no en DSR1, a diferencia de lo que ocurre en el caso espacial. Cabe destacar entonces que, en esta clase de cuantización no perturbativa genuina, siempre estará presente al menos una incertidumbre mínima, ya sea en la posición física o en el tiempo físico; ambas no pueden anularse simultáneamente.

Capítulo 7

Incertidumbre temporal mínima en agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter

(...) un Aleph es uno de los puntos del espacio que contiene todos los puntos. (...) Sí, el lugar donde están, sin confundirse, todos los lugares del orbe, vistos desde todos los ángulos. (...) El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño.

J. L. Borges.

El siguiente escenario de gravedad cuántica en el que vamos a examinar la emergencia de una incertidumbre temporal mínima lo proporcionan espacio-tiempos que contienen agujeros negros. Vimos en la introducción que en el contexto de la física de agujeros negros existe una ambigüedad en la elección de la normalización del vector temporal que define la función de masa del horizonte del agujero. En ciertas situaciones, se puede interpretar la disponibilidad de diferentes funciones de masa como el resultado de tener en cuenta o no una normalización modificada del vector temporal que incorpora efectos gravitatorios con respecto a un fondo. En particular, aquí nos centraremos en la elección de función de masa para agujeros negros en un espacio-tiempo con una constante cosmológica negativa y sin ningún contenido material –nos referiremos a ellos como agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter (o Schwarzschild-AdS)–. Estudiaremos si la presencia de una escala determinada por la constante cosmológica conlleva la aparición de una incertidumbre temporal mínima cuando uno adopta (erróneamente) como punto de partida una descripción cuántica efectiva correspondiente a un espacio asintóticamente plano. Además, estudiaremos el comportamiento de la incertidumbre temporal en sectores de estados físicos con masa del horizonte pequeña o grande comparada con la escala proporcionada por la constante cosmológica [127].

En una aproximación perturbativa al tratamiento de la constante cosmológica, es razonable comenzar con un fondo que consista en un agujero negro de Schwarzschild, con la correspondiente masa del horizonte definida mediante la normalización asintótica convencional del campo vectorial temporal. Posteriormente, se introduce el efecto de la constante cosmológica, deformando así la geometría del espacio-tiempo. Esta deformación afecta a la normalización del campo vectorial temporal y esto, a su vez, cambia la función de masa del horizonte. Si las modificaciones se incorporan perturbativamente, obtenemos generalmente una serie de correcciones sucesivas.

Como alternativa, podemos adoptar una aproximación no perturbativa en la que se incluya una redefinición global no lineal de los parámetros de tiempo y masa que abarque todos los efectos. Con estas premisas, tendremos en cuenta las dos posibles descripciones de la evolución cuántica en términos de un parámetro que corresponda o bien al tiempo asociado comúnmente al fondo de Schwarzschild o bien al tiempo asociado a los agujeros negros Schwarzschild-AdS. Éste último puede considerarse como el tiempo natural (en el horizonte, o globalmente para soluciones estáticas como veremos) cuya definición incluye los efectos de la constante cosmológica. En este sentido, podemos entender estos dos tipos de descripción como las correspondientes, respectivamente, a lo que venimos llamando cuantización perturbativa y no perturbativa.

7.1. Funciones de masa para agujeros negros de Schwarzschild-AdS

En esta sección introducimos las dos elecciones diferentes de tiempo y función de masa en agujeros negros Schwarzschild-AdS comentadas anteriormente y describimos las relaciones no lineales entre ellas. Consideramos espacio-tiempos esféricamente simétricos sin campos materiales que presentan un único horizonte aislado como "frontera interior" [125] y que, en principio, pueden ser asintóticamente planos o anti-de Sitter (AdS) en el infinito, dependiendo de si reparamos en agujeros negros Schwarzschild o Schwarzschild-AdS. En el segundo caso, asumimos la existencia de una constante cosmológica negativa. Entonces, dada la gravedad superficial en el horizonte κ_s, que depende de la normalización del vector temporal identificado con la normal nula del horizonte en cuestión, la primera ley de la termodinámica de agujeros negros permite determinar la energía del horizonte como función de su área A, como se mencionó en la introducción. En el espacio de fases covariante, la energía del horizonte desempeña el papel de generador de la evolución temporal en dicho horizonte. El hamiltoniano total consta de dos términos: la energía del horizonte y la contribución en el infinito, que genera traslaciones temporales asintóticas [125]. Además, si nos ceñimos al sector de soluciones estáticas, el campo vectorial de tipo tiempo considerado puede escogerse igual al campo de Killing estático global. En este caso, el hamiltoniano total debe anularse por motivos de simetría, lo que conlleva que la energía del horizonte coincida (en valor) con el generador de las traslaciones temporales asintóticas [125]. Pero como sólo existe una solución estática en vacío para cada valor del área de agujero negro A, la función de masa $\mu(A)$ del agujero negro queda totalmente determinada con tal que haya una elección preferente de normalización del campo de Killing estático en el infinito. Es importante resaltar también que la función de masa obtenida de esta manera genera la evolución en el horizonte con respecto a un tiempo que, para las soluciones estáticas, coincide justamente con el tiempo asintótico normalizado.

En el caso asintóticamente plano, es natural ir al sistema de referencia en reposo del agujero negro de Schwarzschild y normalizar el campo de Killing estático a la unidad en infinito. El generador de traslaciones temporales en infinito es entonces la masa ADM [120]. En el caso asintóticamente AdS, se puede introducir una elección similar de tiempo asintótico imponiendo una normalización estándar sobre los generadores canónicos del grupo AdS [128–130]. Se llega a una energía conservada que, en los espacio-tiempos Schwarzschild-AdS (estáticos), proporciona el parámetro de masa del agujero negro [131]. Pero si no tenemos acceso a las regiones asintóticas y analizamos el horizonte cuasilocalmente, no tenemos ninguna razón para escoger una u otra normalización sin información adicional aparte de la condición de que se satisfaga la primera ley. Llamaremos Schwarzschild y Schwarzschild-AdS a las funciones de masa obtenidas con estas dos normalizaciones diferentes. Uno de nuestros objetivos es explorar la consecuencias de usar una función de masa de Schwarzschild y su parámetro de tiempo asociado en vez de sus contrapartidas Schwarzschild-AdS incluso cuando está presente una constante cosmológica negativa.

Recordemos que la métrica estática de espacio-tiempos Schwarzschild y Schwarzschild-AdS pueden expresarse respectivamente en la forma bien conocida (con $G = 1$)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left[1-\frac{2M}{r}\right]dT^2+\left[1-\frac{2M}{r}\right]^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2, \\ ds^2 &= -\left[1-\frac{2m}{r}+\frac{\Lambda}{3}r^2\right]dt^2+\left[1-\frac{2m}{r}+\frac{\Lambda}{3}r^2\right]^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2, \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde $d\Omega^2$ es la métrica en la dos-esfera unidad, $\Lambda > 0$ es el valor absoluto de la constante cosmológica negativa, y M y m son los parámetros de masa de las soluciones de agujero negro pertinentes. Estos parámetros de masa coinciden numéricamente con los correspondientes generadores de traslaciones temporales asintóticas (en T y t, respectivamente) en infinito. Por ejemplo, en el caso asintóticamente plano, M es la masa ADM del agujero negro de Schwarzschild. El área de horizonte es $A = 4\pi r_h^2$ en ambos casos, donde r_h está dada por el cero positivo de la componente diagonal temporal de la métrica.

Para un agujero negro de Schwarzschild y de Schwarzschild-AdS, la masa del horizonte $\mu(A)$ es entonces

$$\begin{aligned} M(A) &= \sqrt{\frac{A}{16\pi}}, \\ m(A) &= \sqrt{\frac{A}{16\pi}} + \frac{4}{3}\Lambda\left(\sqrt{\frac{A}{16\pi}}\right)^3. \end{aligned} \tag{7.2}$$

La notación $M(A)$ y $m(A)$ enfatiza el hecho de que el valor numérico de estas funciones coincide con los parámetros de masa M y m de las correspondientes soluciones estáticas. En adelante, no mostraremos explícitamente esta dependencia en el área. La relación entre las dos funciones de masa consideradas es claramente

$$m = M + \frac{4}{3}\Lambda M^3. \tag{7.3}$$

Merece la pena destacar que m y M coinciden de hecho en el límite $\Lambda \to 0$. Abusando de la notación, denotaremos por T y t los tiempos que parametrizan la evolución generada por las funciones de masa M y m en el horizonte, respectivamente. Recordamos que estos tiempos también parametrizan las traslaciones temporales asintóticas (con un convenio de signos apropiado) si nos limitamos a soluciones estáticas, y que la normalización adoptada en infinito sería la estándar para T si el espacio-tiempo fuese asintóticamente plano, mientras que es la estándar para t si el comportamiento asintótico es verdaderamente AdS.

Asumamos entonces que vamos a estudiar el horizonte de un agujero negro de Schwarzschild-AdS (cuasilocalmente). Nos referiremos a los tiempos t y T como físico y de fondo, respectivamente. Estos tiempos difieren en un factor constante (que depende de la solución, es decir, de la masa) que relaciona las dos normalizaciones en consideración [127]:

$$t = Q(M; \Lambda)T. \tag{7.4}$$

Obviamente, hemos elegido el mismo origen para ambos tiempos para que se anulen simultáneamente. Las gravedades superficiales asociadas a estas normalizaciones diferentes del campo vectorial temporal están relacionadas por $\kappa_{s,t} = Q^{-1}\kappa_{s,T}$. Por otro lado, la primera ley nos asegura que la masa del horizonte en cada caso está determinada por

$$\delta m = \frac{\kappa_{s,t}}{8\pi}\delta A, \qquad \delta M = \frac{\kappa_{s,T}}{8\pi}\delta A. \tag{7.5}$$

Dividiendo ambas expresiones hallamos el factor Q [127]:

$$Q(M; \Lambda) = \left[\frac{\partial m}{\partial M}\right]^{-1} = \frac{1}{1 + 4\Lambda M^2}. \tag{7.6}$$

Conviene hacer notar que este factor es estrictamente positivo, por lo que la relación temporal (7.4) es una biyección de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Además, Q se convierte en la unidad cuando Λ se anula, de modo que los dos tiempos analizados coinciden en el límite de constante cosmológica nula. Finalmente, obsérvese que Q no es un polinomio en Λ, así que su desarrollo de Taylor en torno a $\Lambda = 0$ da lugar a una serie (perturbativa) con un número infinito de términos.

7.2. Incertidumbre en el tiempo físico: caso perturbativo

A continuación discutimos la incertidumbre temporal cuando se adopta un esquema perturbativo para el tratamiento de los efectos de la constante cosmológica, demostrando que esta incertidumbre no puede ser cero en general [127]. Admitimos la existencia de una descripción cuántica para el espacio de fases covariante correspondiente a soluciones esféricamente simétricas en un vacío con un horizonte interior aislado. No nos adherimos a ninguna cuantización en particular para tratar de mantener nuestro estudio lo más general posible, en su lugar basamos nuestro análisis en aspectos genéricos de la teoría cuántica. En concreto, esperamos que el área del horizonte venga representada por un observable cuántico (con espectro positivo), ya que es una cantidad (positiva) bien definida en el espacio de fases covariante considerado. Por ejemplo, se sabe que esto ocurre así en gravedad cuántica de lazos [24–26, 132]. De esta forma, las funciones de masa de Schwarzschild y Schwarzschild-AdS, al ser funciones del área del horizonte, también vendrán representadas por observables cuánticos, que pueden definirse mediante el teorema espectral. Hacemos notar también que, incluso si existe una constante cosmológica y el espacio de fases covariante corresponde a espacio-tiempos asintóticamente AdS, la función de masa de Schwarzschild estará aún bien definida y lo que dejará de ser aplicable es sólo su interpretación física en términos de la normalización del campo vectorial temporal en infinito para las soluciones estáticas.

En esta descripción cuántica perturbativa el parámetro de evolución en el horizonte es el de fondo, T, esto es, la elección de tiempo que permite recuperar el tiempo asintótico estándar para soluciones estáticas si la constante cosmológica desaparece. Ésta sería la elección natural si se comienza el análisis ignorando la presencia de una constante cosmológica y se decidiera incorporarla después perturbativamente. Si la reducción al sector estático del espacio de fases covariante tiene sentido cuánticamente, el tiempo T tendría el papel del parámetro de tiempo asintótico en esta teoría reducida, pero con una normalización (dependiente de la masa) no estándar, causada por haber tenido en cuenta de manera errónea la existencia de una constante cosmológica. Por su parte, el tiempo físico está representado por una familia uniparamétrica de observables cuánticos

$$\widehat{t} = \widehat{Q}T, \tag{7.7}$$

donde $\widehat{Q}$ puede construirse a partir del operador que representa a la función de masa de Schwarzschild como $\widehat{Q} := Q(\widehat{M}; \Lambda)$.

7.2.1. Cálculo de la incertidumbre en el lapso de tiempo físico

Para hallar la incertidumbre en el tiempo físico $\widehat{t}$ utilizamos el mismo procedimiento que se usó en la Subsec. 3.1.1 para el escenario de ondas gravitatorias de Einstein-Rosen [106]. Por un lado, medimos la densidad de probabilidad del operador $\widehat{Q}$ en nuestro estado cuántico. Por otro lado, fijamos el valor del parámetro T examinando la evolución de las densidades de probabilidad de cualquier conjunto de observables en dicho estado cuántico. Se llega a una distribución estadística para T con densidad de probabilidad $\rho(T)$. El doble promedio arroja la misma expresión para la incertidumbre Δt que la dada en la Ec. (3.4)

$$(\Delta t)^2 = \int dT \rho(T) \, \langle \, T^2 \widehat{Q}^2 - \overline{T}^2 \langle \widehat{Q} \rangle^2 \, \rangle = (\overline{T} \Delta Q)^2 + \langle \widehat{Q} \rangle^2 (\Delta T)^2 + (\Delta T \Delta Q)^2. \qquad (7.8)$$

La demostración de que no todos los sumandos positivos se pueden anular –dando lugar entonces a una incertidumbre temporal mínima– es idéntica a la expuesta en la Subsec. 3.1.1. Reunimos los dos últimos términos de la Ec. (7.8) en uno y aplicamos la cuarta relación de Heisenberg $\Delta T \Delta M \geq 1/2$:

$$(\Delta t)^2 = \overline{T}^2 (\Delta Q)^2 + \langle \widehat{Q}^2 \rangle (\Delta T)^2 \geq \overline{T}^2 (\Delta Q)^2 + \frac{1}{4} \frac{\langle \widehat{Q}^2 \rangle}{(\Delta M)^2}. \qquad (7.9)$$

Vimos que para poder alcanzar una resolución temporal infinita, ΔQ debe anularse en cualquier instante $\overline{T} \neq 0$. Como la función Q dada por la Ec. (7.6) es estrictamente monótona (biyectiva) en $M \in \mathbb{R}^+$, la condición $\Delta Q = 0$ implica $\Delta M = 0$ por el teorema espectral. Por otra parte, $\langle \widehat{Q}^2 \rangle$ no se anula porque la función Q^2 es estrictamente positiva.[1] Entonces, el requisito $\Delta Q = 0$ hace que el segundo sumando de la desigualdad (7.9) tome valores ilimitadamente grandes y, por tanto, surge una incertidumbre no trivial en los intervalos de tiempo físico.

En el resto de esta sección estudiaremos en detalle el comportamiento de la incertidumbre temporal en dos regímenes distintos que se incluyen, respectivamente, en los sectores de estados cuánticos con (valor esperado de la) masa de Schwarzschild pequeño y grande en comparación con la escala de masa facilitada por la constante cosmológica. También relacionaremos este comportamiento con cotas en la resolución temporal que se han propuesto en la literatura [127].

[1] Tomamos estados de valor medio de $\hat{M}$ finito y, si es preciso, tomamos el límite $\Delta M \to 0$ sobre ellos.

7.2.2. Masa pequeña e incertidumbre holográfica

Para masas de Schwarzschild pequeñas con respecto a la escala proporcionada por la constante cosmológica (esto es, para $4\Lambda M^2 < 1$), la expresión (7.6) puede desarrollarse en serie de Taylor en torno al origen:

$$Q = \frac{1}{1+4\Lambda M^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-4\Lambda M^2\right)^n . \tag{7.10}$$

Esta serie también puede verse como un desarrollo perturbativo de Q en términos de la constante cosmológica para cualquier masa finita M dada. Un cálculo directo, tomando la serie anterior como la definición formal de Q, da

$$\begin{aligned}
\langle\widehat{Q}\rangle^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(-4\Lambda)^n \sum_{l=0}^{n}\langle\widehat{M}^{2n-2l}\rangle\langle\widehat{M}^{2l}\rangle, \\
\langle\widehat{Q}^2\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-4\Lambda)^n\langle\widehat{M}^{2n}\rangle, \\
(\Delta Q)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-4\Lambda)^n\left[n\langle\widehat{M}^{2n}\rangle - \sum_{l=1}^{n}\langle\widehat{M}^{2n-2l}\rangle\langle\widehat{M}^{2l}\rangle\right].
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Introduciendo estas expresiones en la Ec. (7.9) obtenemos [127]

$$(\Delta t)^2 \geq \frac{1}{4(\Delta M)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-4\Lambda)^n\left[\frac{n+1}{4}\frac{\langle\widehat{M}^{2n}\rangle}{(\Delta M)^2} + \overline{T}^2\left(n\langle\widehat{M}^{2n}\rangle - \sum_{l=1}^{n}\langle\widehat{M}^{2n-2l}\rangle\langle\widehat{M}^{2l}\rangle\right)\right]. \tag{7.12}$$

Limitemos ahora nuestra discusión al sector de estados cuánticos con masa de Schwarzschild suficientemente pequeña, en el sentido de que

$$1 \gg n\Lambda^n\langle\widehat{M}^{2n}\rangle, \quad \forall n \geq 1. \tag{7.13}$$

Alternativamente, podemos considerar que nuestra discusión corresponde al límite de constante cosmológica despreciable en el sector de estados cuánticos con momentos pares $\langle\widehat{M}^{2n}\rangle$ acotados para el observable cuántico $\widehat{M}$. [2] Entonces, las condiciones (7.13) se satisfacen cuando Λ es suficientemente pequeña.

En estas circunstancias, se pueden despreciar las correcciones independientes de $\overline{T}$ al valor de la incertidumbre temporal (al cuadrado) para constante cosmológica nula: $1/[4(\Delta M)^2]$. En principio, no se pueden despreciar las correcciones dependientes de $\overline{T}$ si el tiempo de fondo puede hacerse ilimitadamente grande, porque $\overline{T}^2$ podría compensar la pequeñez de los factores que contienen potencias de Λ y la masa de Schwarzschild. No obstante, de la

[2] Basta con que exista una constante positiva C tal que $\langle\widehat{M}^{2n}\rangle < C^n$ $\forall n \geq 1$.

Ec. (7.11) deberíamos esperar que $\Delta Q \approx 4\Lambda\Delta(M^2)$ a la luz de la aproximación de masa pequeña. Por ejemplo, se puede probar que esto es en realidad así cuando la desigualdad (7.13) se cumple si $\langle \hat{M}^4 \rangle$ es del mismo orden o menor que $[\Delta(M^2)]^2$ y además

$$[\Delta(M^2)]^2 \gg n\Lambda^{n-2}\langle \widehat{M^{2n}} \rangle \quad \forall n > 2. \tag{7.14}$$

Entonces, para la incertidumbre Δt obtenemos la cota inferior (aproximada)

$$(\Delta t)^2 \gtrsim \frac{1}{4(\Delta M)^2} + 16\Lambda^2[\Delta(M^2)]^2\overline{T}^2. \tag{7.15}$$

De nuevo, puede interpretarse esta expresión como la cota de Heisenberg para la incertidumbre temporal obtenida cuando $\Lambda = 0$ a la que se la ha modificado con la primera corrección perturbativa relevante en el límite de constante cosmológica despreciable.[3]

A continuación definimos

$$\omega := \frac{\Delta(M^2)}{(\Delta M)^2}. \tag{7.16}$$

Aunque ω y ΔM pueden tratarse en principio como parámetros independientes en el espacio de Hilbert de estados cuánticos, ya que involucran momentos diferentes de la distribución de probabilidad del observable $\widehat{M}$ [$\Delta(M^2)$ involucra $\langle \widehat{M^4} \rangle$ mientras que ΔM no], se puede razonar que ω, que es no negativo por construcción, tiene que estar acotado inferiormente por un número estrictamente positivo. Es más, por una parte, dado que M^2 es una función monótona de $M \in \mathbb{R}^+$, el teorema espectral asegura que $\Delta(M^2)$ se anula si y sólo si lo hace ΔM. En realidad, es posible ver que $(\Delta M)^2$ se aproxima a cero más rápido que $\Delta(M^2)$. Por otra parte, usando la Ec. (7.13) se puede demostrar que, para todo valor dado de Λ, ΔM está acotada superiormente en el sector considerado de estados cuánticos. Por tanto, ω no puede aproximarse a cero dejando que ΔM diverja. Como resultado, uno se puede convencer de que debe de existir un número positivo $\omega_0 > 0$ (que posiblemente dependa de Λ) tal que $\omega \geq \omega_0$.

Tenemos entonces

$$(\Delta t)^2 \gtrsim \frac{1}{4(\Delta M)^2} + 16\Lambda^2\omega_0^2\overline{T}^2(\Delta M)^4. \tag{7.17}$$

Al igual que hemos hecho en capítulos anteriores, podemos minimizar esta expresión con respecto a su dependencia en ΔM, obteniendo de esta forma la incertidumbre temporal mínima en cada instante de tiempo $\overline{T}$ en el sector de estados estudiado. El extremo a tiempo $\overline{T}$ se alcanza en estados con $(\Delta M)^{-6}_{min} = 128\omega_0^2\Lambda^2\overline{T}^2$, y la incertidumbre mínima correspondiente es

$$(\Delta t)_{min} = \sqrt{3}\left(\frac{\Lambda\omega_0\overline{T}}{2}\right)^{1/3}, \tag{7.18}$$

[3]Para ello, hemos asumido que el tiempo $\overline{T}$ puede ser grande y nos hemos limitado a estados con valores esperados $\langle \hat{M}^{2n} \rangle$ acotados como se explica en el pie de página anterior.

que crece con el tiempo de fondo como $\overline{T}^{1/3}$.

Merece la pena destacar que este comportamiento de la incertidumbre temporal es precisamente el mismo que se encuentra aplicando argumentos de holografía a agujeros negros en gravedad cuántica [119]. Sin embargo, es importante señalar que nuestro resultado depende del tipo de estados cuánticos que uno elija. En general, encontraríamos para la incertidumbre una dependencia diferente respecto al tiempo de fondo si considerásemos otros estados distintos a los que satisfacen las condiciones comentadas anteriormente, que en particular implican que los momentos pares de la masa de Schwarzschild son suficientemente pequeños comparados con la escala de masa determinada por la constante cosmológica.

7.2.3. Masa grande e incertidumbre lineal

Analicemos ahora la incertidumbre temporal en estados cuánticos que presentan una distribución aproximadamente Gaussiana en la masa de Schwarzschild, centrada en torno a un autovalor grande en unidades de Planck. En principio, podría preocuparnos la mera suposición de la existencia de tales estados, ya que hemos preferido no adherirnos a ninguna cuantización específica de nuestro espacio de fases covariante y, por tanto, no podemos hacer afirmaciones precisas sobre el espectro de la masa de Schwarzschild. Por ejemplo, de la naturaleza discreta del espectro de área en gravedad cuántica de lazos [24–26], esperaríamos que una cuantización de lazos del sistema llevase a una masa de Schwarzschild discreta. Sin embargo, para valores grandes de la función de masa de Schwarzschild en unidades de Planck [y entonces también de la masa AdS, véase Ec. (7.3)], esperaríamos que la descripción (semi-)clásica del agujero negro fuese una aproximación bastante buena. Así pues, la hipótesis de trabajo de que el espectro de masa es casi continuo en la región de agujeros negros *macroscópicos* es una suposición razonable, cuando no un requisito que debería imponerse para seleccionar las cuantizaciones físicamente admisibles. Por otra parte, también impondremos la restricción de que el autovalor de masa en torno al cual se centra el estado sea al menos del orden de la escala de masa dada por la constante cosmológica.

En más detalle, centraremos la discusión en estados cuánticos cuya distribución de probabilidad asociada para la masa de Schwarzschild tenga la forma Gaussiana aproximada

$$\overline{\rho}(M) = \frac{1}{N} e^{-(\frac{M}{\sigma}-\mu)^2} \tag{7.19}$$

y permitiremos que M tome valores en todo la semirrecta real positiva. El factor N es una constante de normalización, de manera que $\overline{\rho}$ es una distribución normalizada:

$$N = \sigma \int_{-\mu}^{\infty} du\, e^{-u^2} := \sigma \Xi(\mu). \tag{7.20}$$

La función $\Xi(\mu)$ puede expresarse en términos de la función error usual [133]:

$$\Xi(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}[1 + \mathrm{erf}(\mu)], \quad \mathrm{erf}(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\mu du\, e^{-u^2}. \tag{7.21}$$

Recordamos que la función $\mathrm{erf}(\mu)$ tiende a uno cuando $\mu \to \infty$. Por otro lado, μ está relacionada con el valor medio de la distribución de masa medida en unidades σ. Explícitamente,

$$\langle \widehat{M} \rangle = \sigma \left[\mu + \frac{e^{-\mu^2}}{2\Xi(\mu)} \right]. \tag{7.22}$$

Para valores grandes de μ tenemos, entonces, que el valor medio de $\widehat{M}$ es grande y coincide con $\sigma\mu$ excepto por términos despreciables exponencialmente decrecientes. Finalmente, σ, aparte de proporcionar una unidad de masa, se correspondería con la desviación cuadrática media de una Gaussiana usual si la variable M estuviera definida en toda la recta real, en vez de para reales positivos. Teniendo en cuenta esta limitación en el rango de M, podemos comprobar que

$$(\Delta M)^2 = \frac{\sigma^2}{2} \left[1 - \frac{\mu e^{-\mu^2}}{\Xi(\mu)} - \frac{e^{-2\mu^2}}{2\Xi(\mu)^2} \right]. \tag{7.23}$$

Por tanto, la desviación cuadrática media se hace igual a $\sigma/\sqrt{2}$ para μ grande, exceptuando correcciones exponencialmente pequeñas. En conclusión, vemos que la distribución (7.19) puede considerarse una Gaussiana bien centrada en torno a valores grandes de la masa de Schwarzschild (comparados con la masa de Planck) si $\mu \gg 1$ y σ no es considerablemente grande en unidades de Planck.

Con la densidad de probabilidad (7.19), se obtiene para el operador $\widehat{Q}$

$$\langle \hat{Q}^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\Xi(\mu)} \int_{-\gamma}^{\infty} dv \frac{e^{-v^2/\lambda}}{[1 + (v + \gamma)^2]^n}. \tag{7.24}$$

Hemos definido

$$\lambda := 4\Lambda\sigma^2, \quad \gamma := \mu\sqrt{\lambda}, \quad v := \sqrt{\lambda} \left[\frac{M}{\sigma} - \mu \right]. \tag{7.25}$$

Es inmediato percatarse de que la expresión (7.24) tiene la forma de una integral de Laplace. En el Apéndice D mostramos cómo calcular sus desarrollos en serie asintóticos en potencias de λ en el límite de constante cosmológica nula. En esos cálculos tratamos γ como un número fijo dado. Salvo por un factor numérico constante, este número es justamente el valor medio de $\widehat{M}$ expresado en función de la escala de masa proporcionada por la constante cosmológica (en la aproximación de μ grande). De hecho, hemos supuesto que estas dos masas son del mismo orden, por lo que no podemos despreciar γ, incluso cuando analizamos el límite asintótico $\lambda \to 0$.

Así pues, restringimos los cálculos a la región de masas de agujero negro grandes, donde la consideración de distribuciones aproximadamente Gaussianas (7.19) está justificada, y estudiamos la situación de una constante cosmológica muy pequeña con γ fijada. En esta situación, podemos aproximar la función $\Xi(\mu)$ a $\sqrt{\pi}$ y ΔM a $\sigma/\sqrt{2}$ descartando términos exponencialmente pequeños. Además, obtenemos las siguientes contribuciones a primer orden para los momentos de $\widehat{Q}$ [véase el Apéndice D para más detalles]:

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle \approx \frac{1}{(1+\gamma^2)^2}, \quad (\Delta \hat{Q})^2 \approx \lambda \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2)^4}. \tag{7.26}$$

Con todos estos resultados, obtenemos de la Ec. (7.9):

$$(\Delta t)^2 \gtrsim \frac{1}{2(1+\gamma^2)^2\sigma^2} + \lambda \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma^2)^4} \overline{T}^2. \tag{7.27}$$

Aunque el segundo término del miembro derecho es de orden mayor en λ que el primero, se ha conservado en la expresión anterior porque el tiempo de fondo puede ser ilimitadamente grande. Por lo tanto, obtenemos una incertidumbre temporal que está siempre acotada inferiormente por una contribución constante positiva $1/[\sqrt{2}(1+\gamma^2)\sigma]$ y que crece linealmente con $\overline{T}$ [y así pues con $\langle t \rangle$, a partir de la Ec. (7.4)] para tiempos de fondo grandes.

7.3. Incertidumbre en el tiempo físico: caso no perturbativo

Discutimos ahora la incertidumbre temporal cuando se considera que la evolución cuántica en el horizonte está dictada por la función de masa de Schwarzschild-AdS y el parámetro de evolución correspondiente es pues el tiempo físico t. Recordamos que, si la restricción al sector estático del espacio de fases covariante tiene sentido cuánticamente, el tiempo físico puede verse en la teoría reducida como el parámetro de tiempo AdS asintótico con la normalización usual en infinito.

La diferencia fundamental con respecto al análisis de la sección precedente es que ahora t no es una familia uniparamétrica de observables, sino un parámetro genuino. Su incertidumbre está únicamente limitada por la cuarta relación de Heisenberg, $\Delta t \Delta m \geq 1/2$.

Como consecuencia, en la cuantización no perturbativa, la resolución del tiempo físico está intrínsecamente acotada sólo si sucede lo mismo con la masa AdS del agujero negro, m. El rango de esta masa viene descrito en la teoría cuántica por el espectro del observable $\widehat{m} := m(\widehat{A})$ obtenido a partir de la Ec. (7.2). Puesto que la función clásica $m(A)$ tiende a infinito cuando lo hace A, el espectro de la masa AdS no estará acotado si ocurre lo mismo con el espectro de área del agujero negro. Esta última suposición es ciertamente razonable, dado que no se deberían esperar desviaciones cuánticas importantes de la descripción (semi-) clásica de agujeros negros *macroscópicos* con áreas de horizonte grandes (por ejemplo, se sabe que el espectro de área no está acotado en gravedad cuántica de lazos [24–26]). Por consiguiente, la presencia de una incertidumbre temporal mínima no es una consecuencia necesaria de la cuantización del sistema. Al menos en este esquema no perturbativo, la resolución en los intervalos de tiempo físico puede hacerse tan grande como se desee.

Capítulo 8

Entropía y temperatura de agujeros negros en arco iris de gravedad

La frase mas excitante que se puede oír en ciencia,
la que anuncia nuevos descubrimientos,
no es "¡Eureka!", sino "Es extraño..."

I. Asimov.

A diferencia de la discusión presentada en capítulos anteriores, en éste no realizaremos ningún análisis pormenorizado de la existencia de una incertidumbre espacio-temporal mínima en escenarios de gravedad cuántica, sino que estudiaremos un tema relacionado con éste, a saber: las modificaciones de la termodinámica de agujeros negros introducidas a través de la alteración del principio de Heisenberg y/o de la relación de dispersión de relatividad especial. En concreto, estudiaremos posibles consecuencias de tales modificaciones empleando como marco específico el formalismo de arco iris de gravedad.

En el contexto de la física de agujeros negros, Bekenstein argumentó que la entropía de un agujero negro es una función lineal del área de su horizonte de sucesos [134,135]. También propuso un valor de la constante de proporcionalidad, deducido mediante un razonamiento semiclásico que generaliza el proceso de caída de una partícula en un agujero negro discutido previamente por Christodoulou [136, 137]. El razonamiento de Bekenstein puede generalizarse considerando la naturaleza cuántica de la partícula y teniendo en cuenta entonces el principio de incertidumbre y la relación de dispersión energía-momento [138]. Este argumento generalizado conduce en esencia a la misma conclusión sobre la linealidad de la entropía de un agujero negro en su área.

Trabajos posteriores en diferentes formalismos de gravedad cuántica (especialmente en teoría de cuerdas y gravedad cuántica de lazos) no sólo han justificado el resultado de Bekenstein [139–141], sino que también han mostrado que debería modificarse el comportamiento lineal de la entropía mediante una corrección a primer orden que es logarítmica para áreas grandes [142–147]. También se han obtenido resultados similares considerando propiedades generales de agujeros negros [148].

Como hemos comentado, el principio de incertidumbre y la relación de dispersión tienen un papel clave en la generalización cuántica del argumento de Bekenstein. Si se acepta la posibilidad de que uno (o ambos) de estos elementos sufra modificaciones, se deducirá un resultado diferente, con la presencia de términos adicionales al proporcional al área. El efecto producido por cambios en el principio de incertidumbre se trató en las Refs. [148–152], y análisis más generales que incluyen relaciones de dispersión modificadas se han presentado en las Refs. [153–157]. En particular, se puede conseguir un término logarítmico con una modificación adecuada de la relación de dispersión y/o del principio de incertidumbre.

De hecho, ya hemos visto que surgen modificaciones a la relación de dispersión y al principio de indeterminación usuales en varias aproximaciones a gravedad cuántica. Por ejemplo, se pueden encontrar relaciones de dispersión modificadas en descripciones del espacio-tiempo que involucran una geometría discreta, tales como gravedad cuántica de lazos [158–162], y en esquemas que adoptan una geometría no conmutativa [102]. Por otra parte, aparecen principios de incertidumbre generalizados en el marco de teoría de cuerdas [19–23], en descripciones que emplean geometría no conmutativa [163], y en otros tipos de análisis basados en consideraciones generales sobre la interacción entre mecánica cuántica y gravedad [164–167]. También hemos comentado que las relaciones de dispersión modificadas se han estudiado, además, desde una perspectiva fenomenológica [70–77, 79–84], y en las teorías de relatividad doblemente especial (DSR) [85–91].

Otro escenario en el que surgen tanto relaciones de dispersión deformadas como principios de incertidumbre generalizados es el formalismo de arco iris de gravedad [105], el cual permite tratar simultáneamente los dos tipos de modificaciones de manera bastante general. Por esta razón, en este capítulo discutiremos el efecto que la modificación de las relaciones de dispersión y el principio de incertidumbre conlleva sobre la termodinámica de agujeros negros en el contexto de arco iris de gravedad. Para ello consideraremos dos propuestas diferentes de este formalismo: una es el arco iris gravitatorio original establecido por Magueijo y Smolin [105] y la otra es un modelo motivado por nuestra sugerencia de implementación canónica de DSR [99, 100].

8.1. Argumento de Bekenstein extendido

En esta sección vamos a repasar de forma sucinta el argumento de Bekenstein, incluyendo aspectos cuánticos. Como parte de su argumento para obtener la constante de proporcionalidad de la relación lineal área-entropía, Bekenstein calculó el aumento mínimo del área A que experimenta un agujero negro cuando absorbe una partícula clásica (neutra), de energía E y radio propio L,[1] que cruza el horizonte cayendo libremente desde un punto de no retorno (*turning point*) en su órbita [134, 135, 138]. Llegó a la conclusión de que $\Delta A \geq 8\pi l_P^2 EL$. Por tanto, el incremento de área presenta una cota inferior fundamental que no depende de las propiedades del agujero negro.

Para extender este análisis al caso de una partícula cuántica, hay que considerar el radio de la partícula como la incertidumbre en su posición, Δx, e introducir un factor de corrección apropiado en el coeficiente de la expresión anterior de ΔA. Designaremos este coeficiente corregido por a. Se tiene entonces

$$\Delta A \geq aE\Delta x. \tag{8.1}$$

Usando la relación de dispersión de relatividad especial y el principio de incertidumbre usual se obtiene $E \geq 1/\Delta x$ [153–155] y, por tanto, $\Delta A \geq a$.

Por otro lado, Bekenstein también señaló la existencia de una cota superior universal para el cociente de entropía y energía [168], $S/E \leq 2\pi L$, donde L es el radio efectivo del sistema. Así, si un sistema cuántico con entropía S_{mat} entra en un agujero negro, el cambio de entropía de la materia ordinaria en el exterior del agujero negro satisface

$$-\Delta S_{mat} \leq bE\Delta x, \tag{8.2}$$

donde hemos denotado como b la correspondiente constante de proporcionalidad. Esta cota, junto con la Ec. (8.1), implica que $(b/a)\,\Delta A + \Delta S_{mat} \geq 0$. Esta desigualdad puede verse como una segunda ley generalizada de la termodinámica, lo que nos lleva a establecer que el primer término de la expresión ha de representar el cambio en la entropía del agujero negro, ΔS_{BH} [134, 135]. Ajustando adecuadamente el coeficiente b/a, se llega al resultado bien conocido

$$S_{BH} = \frac{A}{4l_P^2}. \tag{8.3}$$

Por sencillez, a partir de ahora limitaremos nuestra discusión al caso de agujeros negros de Schwarzschild. Para este tipo de agujeros negros, tenemos entonces que la temperatura asociada puede deducirse utilizando la definición $T_{BH}^{-1} = (\partial S_{BH}/\partial m)$ [134, 135], donde m es la masa del agujero negro (con el convenio estándar de normalización del vector de Killing temporal en el infinito). Si tenemos en cuenta la relación habitual $A = 16\pi l_P^4 m^2$, obtenemos

$$T_{BH} = \frac{E_P^2}{8\pi m}, \tag{8.4}$$

que imita la temperatura que halló Hawking de un modo distinto [169].

El principio de incertidumbre y la relación de dispersión tienen un cometido esencial en la deducción que hemos presentado. Si uno o ambos sufriesen modificaciones, como ocurre

[1] En última instancia, L es la longitud característica del sistema que cae.

en los diversos escenarios que hemos comentado [19–23, 85–91, 102, 158–167], la linealidad de la expresión de la entropía también se modificaría. A continuación presentaremos el marco teórico de arco iris gravitatorio para, posteriormente, analizar las implicaciones que las modificaciones introducidas por este formalismo conllevan en la termodinámica de agujeros negros.

8.2. Arco iris gravitatorio y solución de Schwarzschild modificada

La peculiaridad característica del formalismo de arco iris gravitatorio reside en postular que la geometría depende (de forma explícita) del contenido energético de la partícula de prueba empleada para sondear el espacio-tiempo [105]. Como vimos en la introducción, esta dependencia se incorpora permitiendo que las ecuaciones de Einstein pasen a depender de la energía y momento de la partícula de prueba, incluso a través de una dependencia contenida en las constantes de acoplo o (en su caso) en la constante cosmológica (1.31). En esta sección introduciremos dos tipos diferentes de formalismo de arco iris de gravedad con los que analizaremos más tarde la modificación de la termodinámica de agujeros negros. Además, aprovecharemos para hallar un ejemplo especialmente interesante de soluciones de las ecuaciones modificadas de Einstein en arco iris de gravedad: la generalización de la solución de Schwarzschild.

8.2.1. Dos formalismos de arco iris gravitatorio

Para presentar estos dos esquemas conviene empezar comentando la conexión que se puede establecer entre el formalismo de arco iris de gravedad y el de DSR. Veíamos en la introducción que en el caso trivial de espacio-tiempo con curvatura cero se tiene la métrica plana de arco iris dada por la Ec. (1.32), donde la tétrada ${e_a}^{\mu}$ depende de la energía-momento de la partícula de prueba. En el límite de bajas energías y momentos, esta tétrada se reduce a una tétrada ${\tilde{e}_a}^{\mu}$ que describe la geometría de Minkowski (para topología trivial) propia de relatividad especial. Dado entonces un sistema de coordenadas q^a adaptado a la tétrada "minkowskiana" ${\tilde{e}_a}^{\mu}$, podemos obtener otro sistema x^a adaptado a la tétrada ${e_a}^{\mu}$ mediante una transformación dependiente de la energía-momento de la partícula de prueba similar a la que existe entre las tétradas [véase Ec. (1.33)]. A las coordenadas x^a y q^a, Magueijo y Smolin las denominan coordenadas independientes y dependientes de la energía, respectivamente [105]. Nosotros, en cambio, llamaremos a x^a coordenadas físicas y a las coordenadas minkowskianas q^a las llamaremos coordenadas de fondo, siguiendo la nomenclatura empleada en capítulos anteriores.

Por otra parte, considerando que la energía-momento de la partícula de prueba –o su incremento infinitesimal, teniendo en cuenta la no linealidad– pertenece al espacio cotangente, se pueden utilizar las co-tétradas $e^a{}_\mu$ como base en la que expresar esta cantidad, cuyas componentes representamos por P_a –o dP_a–. Se obtiene así lo que llamaremos energía-momento física. En el límite de bajas energías y momentos, la energía-momento física se reduce al cuadrimomento habitual del espacio-tiempo de Minkowski. Igualmente, se puede emplear entonces la co-tétrada minkowskiana $\tilde{e}^a{}_\mu$ para describir este cuadrimomento, cuyas componentes denotamos por Π_a, y al que nos referiremos como energía-momento de fondo. La relación entre las variables físicas y de fondo está determinada por la de las tétradas, es decir, por las funciones $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ introducidas en la Sec. 1.8, y en general será no lineal. En particular, surge una redefinición no lineal de la energía y el momento.

A partir de la discusión anterior, y al menos en espacio-tiempos asintóticamente planos, donde las consideraciones presentadas para la interpretación de la energía-momento pueden aplicarse cuando menos en la zona asintótica, se puede visualizar el escenario de arco iris gravitatorio como una propuesta para extender el marco de DSR al espacio de posiciones incluyendo efectos de curvatura espacio-temporal [105]. Adoptando este punto de vista, Magueijo y Smolin (MS) se inspiraron en una propuesta que ellos mismos hicieron de realización de DSR en el espacio de posiciones (sin incluir curvatura) para pasar a construir un formalismo de arco iris [105]. La implementación MS de DSR en el espacio de posiciones se construye a partir de una especialización del requisito (introducido en la Ref. [94]) de que las teorías de campos libres en DSR admitan soluciones de ondas planas. Esta condición puede formularse como la invariancia bajo transformaciones de Lorentz de la contracción entre la energía-momento y un desplazamiento espacio-temporal infinitesimal [105], y con nuestra notación puede expresarse de la forma $\Pi_a dq^a = P_a dx^a$. A partir de este requerimiento, e imponiendo que cada coordenada de fondo se relacione sólo con la coordenada física homóloga, las Ecs. (4.2) llevan a las siguientes relaciones entre coordenadas:

$$dx^0 = \frac{\epsilon}{g} dq^0, \qquad dx^i = \frac{\Pi}{f} dq^i. \tag{8.5}$$

Recordemos que ϵ y Π son la energía y el módulo del momento de fondo, respectivamente, y g y f son las funciones que relacionan entre sí de manera no lineal las energías y momentos físicos y de fondo. La relación entre coordenadas en DSR dada por la expresión (8.5) motiva la prescripción (1.33) para los campos de tétradas ortonormales que eligieron Magueijo y Smolin a la hora de crear el escenario de arco iris gravitatorio, con la identificación de funciones $\mathcal{G} = g/\epsilon$ y $\mathcal{F} = f/\Pi$. [2]

[2]Exigimos que el cociente de los momentos físico y de fondo esté bien definido cuando el segundo tiende

Por otra parte, la propuesta de implementación canónica de DSR en el espacio de fases presentada en el capítulo 4 conduce a una geometría que depende explícitamente de la energía y el momento del sistema [véanse Ecs. (4.5)]. En este sentido, dicha propuesta puede considerarse como otro formalismo de arco iris gravitatorio, que es el segundo con el que vamos a tratar aquí. Esta propuesta se basa en la invariancia de la forma simpléctica [99], condición que puede expresarse de la forma $\mathbf{d}q^a \wedge \mathbf{d}\Pi_a = \mathbf{d}x^a \wedge \mathbf{d}P_a$ (donde, por consistencia con el capítulo 4, hemos adoptado notación de álgebra exterior, interpretando las diferenciales como 1-formas sobre el espacio de fases). A diferencia de lo que ocurre con la propuesta MS, la nuestra lleva a que la relación entre las variables físicas (x^a, P_a) y de fondo (q^a, Π_a) sea (por construcción) una transformación canónica. Las relaciones (4.5) entre las coordenadas espacio-temporales obtenidas con esta propuesta canónica sugieren unas relaciones entre tétradas muy diferentes a la expresión (1.33). No obstante, con las restricciones que vamos imponer en nuestro análisis encontraremos una correspondencia entre tétradas similar a la Ec. (1.33), pero con distintas expresiones para las funciones $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$.

En adelante, nos limitaremos a modelos de arco iris basados en una familia de teorías DSR que, sin ser completamente genérica, es de hecho bastante general y ha recibido la casi totalidad de la atención en la literatura existente sobre DSR. En esta familia de teorías, la energía física depende sólo de la de fondo, es decir, $E = g(\epsilon)$. Además, como estamos tratando sólo con agujeros negros esféricamente simétricos, también impondremos simetría esférica en el espacio de fases (de la partícula de prueba) mediante la limitación de que los momentos físicos sean paralelos o antiparalelos a x^i. En consecuencia, $\varepsilon^i_{jk} p_i dx^j = 0$ (para un momento dado), donde ε_{ijk} denota el símbolo de Levi-Civita. Dado que $p_i/p = \Pi_i/\Pi$, esta condición puede reescribirse como $dx^i = dx^j \Pi_j \Pi^i/\Pi^2$ (con el convenio habitual de suma en índices repetidos) [170].

Bajo estas condiciones, de las Ecs. (4.5) obtenemos el siguiente escalado con nuestra propuesta de arco iris de gravedad [170]:

$$\begin{aligned} dq^0 &= \frac{\partial g}{\partial \epsilon}\left[dx^0 \pm \frac{\partial f}{\partial \epsilon}\left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon}\right)^{-1} dx\right] := \frac{\partial g}{\partial \epsilon} d\bar{x}^0_{\pm}, \\ dq^i &= \frac{\partial f}{\partial \Pi} dx^i. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Aquí $x = \sqrt{x^i x^i}$, y $\bar{x}^0_{\pm}$ es una nueva coordenada que, aunque no es canónicamente conjugada a la energía (en el sentido de que $\{\bar{x}^0_{\pm}, x^i\}$ no es un conjunto conjugado a la energía-momento física), sólo difiere del tiempo canónico por un vector de desplazamiento (*shift vector*) que es constante en el espacio-tiempo. Por lo tanto, las relaciones (8.6) motivan la misma estructura

a cero. Ésta es una restricción menor sobre f, porque en cualquier caso $f \approx \Pi$ para energías y momentos bajos. Esta condición garantiza que $f(\epsilon, \Pi)$ se anula cuando también lo hace el momento de fondo.

de la relación (1.33) entre tétradas, pero con $\mathcal{G} = (\partial g/\partial\epsilon)$ y $\mathcal{F} = (\partial f/\partial\Pi)$.

De las Ecs. (8.5) y (8.6) vemos que, en los dos casos considerados, el efecto sobre la geometría consiste esencialmente en dos escalados independientes: una transformación conforme de las componentes espaciales y una dilatación temporal, ambas constantes en el espacio-tiempo. Por ejemplo, como veremos en la siguiente subsección, la solución de Schwarzschild modificada para estos dos escenarios de arco iris gravitatorio reproduce formalmente la solución usual de relatividad general (con una identificación adecuada de coordenadas) excepto por el factor de escala comentado de la métrica espacial y la componente temporal de la diagonal.

Podemos analizar simultáneamente los dos formalismos de arco iris de gravedad denotando los correspondientes factores de escala con la nomenclatura abstracta $\mathcal{G}(\epsilon)$ y $\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)$:

$$dq^0 = \mathcal{G}(\epsilon)d\bar{x}^0_\pm, \qquad dq^i = \mathcal{F}(\epsilon,\Pi)dx^i, \tag{8.7}$$

donde se entiende que $\bar{x}^0_\pm$, para la propuesta MS, designa a x^0. Los factores de escala espacial y temporal, $\mathcal{G}(\epsilon)$ y $\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)$, están dados en un caso por las derivadas parciales de las funciones g y f con respecto a la energía y momento de fondo, mientras que en el otro caso son simplemente los cocientes de dichas cantidades, esto es:

$$\mathcal{G}(\epsilon) := \begin{cases} \dfrac{g(\epsilon)}{\epsilon} & \text{Propuesta MS,} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial\epsilon}(\epsilon) & \text{Propuesta canónica,} \end{cases} \tag{8.8}$$

$$\mathcal{F}(\epsilon,\Pi) := \begin{cases} \dfrac{f(\epsilon,\Pi)}{\Pi} & \text{Propuesta MS,} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial\Pi}(\epsilon,\Pi) & \text{Propuesta canónica.} \end{cases} \tag{8.9}$$

Por supuesto, por propuesta canónica entendemos aquí el formalismo de arco iris gravitatorio motivado por nuestra implementación canónica de DSR.

8.2.2. Solución de Schwarzschild modificada

Antes de continuar con el análisis de la modificación de la termodinámica de agujeros negros que surge en el ámbito de arco iris de gravedad, vamos a hallar a modo ilustrativo la solución de Schwarzschild de las ecuaciones de campo modificadas. En coordenadas físicas (independientes de la energía-momento), una métrica esféricamente simétrica se puede expresar de forma genérica como [105, 170]

$$ds^2 = -A(x)[\mathcal{G}(\epsilon)]^2(d\bar{x}^0_\pm)^2 + [\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)]^2\left(B(x)dx^2 + x^2d\Omega^2\right), \tag{8.10}$$

donde $d\Omega^2$ es la métrica en la dos-esfera unidad. Reescribiéndola en coordenadas de fondo (dependientes de la energía, según la nomenclatura de Magueijo y Smolin) queda

$$ds^2 = -\tilde{A}(q|\epsilon, \Pi)(dq^0)^2 + \tilde{B}(q|\epsilon, \Pi)dq^2 + q^2 d\Omega^2, \tag{8.11}$$

donde

$$\begin{aligned} q &:= \sqrt{q^i q^i}, & q &= \mathcal{F}(\epsilon, \Pi)x, \\ \tilde{A}(q|\epsilon, \Pi) &:= A[x(q, \epsilon, \Pi)], & \tilde{B}(q|\epsilon, \Pi) &:= B[x(q, \epsilon, \Pi)], \end{aligned} \tag{8.12}$$

y la métrica en la dos-esfera unidad no cambia. Según el teorema de Birkhoff, las funciones $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ deben cumplir $\tilde{A}(q|\epsilon, \Pi) = \tilde{B}(q|\epsilon, \Pi)^{-1} = 1 - \tilde{C}(\epsilon, \Pi)/q$ para toda energía-momento fija.

Teniendo en cuenta la relación entre q y x, vemos que, para recobrar la independencia energética de la función $\tilde{A}(x)$, el cociente $\tilde{C}(\epsilon, \Pi)/\mathcal{F}(\epsilon, \Pi)$ debe ser una constante, no sólo respecto a su dependencia del espacio-tiempo, sino también respecto a ϵ y Π [105]. Por otra parte, en el régimen de bajas energías y momentos, $\mathcal{F}(\epsilon, \Pi)$ se aproxima a la unidad y $\tilde{C}(\epsilon, \Pi)$ coincide con $2M$, donde M es la masa de Schwarzschild de relatividad general y estamos fijando G, la constante de Newton efectiva en el límite de baja energía, a la unidad. Por lo tanto, debemos tener $\tilde{C}(\epsilon, \Pi) = 2M\mathcal{F}(\epsilon, \Pi)$.

En la propuesta MS de arco iris de gravedad y en la motivada por una realización canónica, las expresiones explícitas de la solución de Schwarzschild modificada en coordenadas físicas son, respectivamente [170]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{x}\right)\left(\frac{g}{\epsilon}\right)^2 (dx^0)^2 + \left(1 - \frac{2M}{x}\right)^{-1}\left(\frac{f}{\Pi}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{f}{\Pi}\right)^2 x^2 d\Omega^2, \\ ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{x}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon}\right)^2 (d\tilde{x}^0_\pm)^2 + \left(1 - \frac{2M}{x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}\right)^2 x^2 d\Omega^2. \end{aligned} \tag{8.13}$$

En particular, destacamos que el horizonte está situado en la misma localización que en relatividad general, $x = 2M$. Las correspondientes nociones de infinitos espacial y nulo y de región asintóticamente plana en el contexto de arco iris de gravedad pueden introducirse según se explica en la Ref. [171].

8.3. Modificación de la cota del cambio del área de un agujero negro

Las expresiones (4.2) y (8.7) conducen tanto a deformaciones de la relación de dispersión como a principios de incertidumbre generalizados (porque varían los conmutadores del momento con las coordenadas espaciales de fondo). De este modo, los formalismos de arco iris gravitatorio incorporan los dos tipos de modificaciones cuyas consecuencias para agujeros negros queremos discutir.

8.3.1. Descripción cuántica del sistema

La expresión (8.1) proporciona una cota inferior del incremento del área de un agujero negro en relatividad general. La magnitud E es la energía de la partícula que va a ser absorbida, medida en el infinito en el espacio-tiempo asintóticamente plano, y Δx es la incertidumbre en la posición de la partícula. Cuando se modifica la relatividad, parece natural asumir que la cota sigue siendo válida tomando como E la energía medida por un observador asintótico[3] y Δx la incertidumbre en la posición. Sin embargo, en arco iris de gravedad, E y x ya no corresponden a las variables habituales de energía y posición para un espacio-tiempo (asintóticamente) plano: son las variables que hemos llamado físicas y se transforman (en la región asintótica) conforme a una acción no lineal del grupo de Lorentz. De esta manera, la expresión del incremento de área incorpora modificaciones con respecto a la Ec. (8.1) que surgen de la deformación de arco iris.

En adelante, llamaremos ΔA al cambio de área obtenido para arco iris gravitatorio, mientras que $\Delta A_0 := a\epsilon\Delta q$ denota la cota inferior sin deformación de la relatividad general estándar [véase Ec. (8.1)]. Para relacionar estas dos cantidades, debemos tener en cuenta en primer lugar el tipo de descripción cuántica adoptada. Podemos considerar dos posibilidades. En un caso, la cuantización del sistema se lleva a cabo eligiendo como parámetro temporal y variables de posición las coordenadas de fondo (asociadas al espacio-tiempo asintóticamente plano). Ésta es la filosofía típica de lo que venimos llamando aproximación perturbativa. En el otro caso, por el contrario, se construye la cuantización en términos de las variables de tiempo y posición físicas. Según la terminología que hemos adoptado en capítulos precedentes, nos referiremos a estos dos tipos de descripciones como cuantizaciones perturbativa y no perturbativa, respectivamente [99, 100].

Más específicamente, un conjunto completo de variables elementales para la cuantización perturbativa son las variables de fondo (q^i, Π_i), mientras que el tiempo de fondo q^0 actúa como parámetro de evolución. Así, el principio de incertidumbre que corresponde a esta descripción perturbativa es $\Delta q \Delta \Pi \geq 1/2$ (con $q = \sqrt{q^i q^i}$).[4] Por otro lado, la cuantización no perturbativa puede construirse asignando el papel de parámetro de evolución al tiempo físico x^0 y el de variables elementales a las variables físicas (x^i, p_i). El principio de indeterminación para esta descripción no perturbativa es entonces $\Delta x \Delta p \geq 1/2$. El siguiente paso consiste en expresar

[3] No obstante, véase la siguiente subsección referente al caso de una cuantización perturbativa.

[4] En sentido estricto, se tiene $\Delta q^i \Delta \Pi_i \geq 1/2$ (para cada valor de i). Es válido pasar de componentes vectoriales a normas bajo suposiciones razonables.

las cantidades que aparecen en ΔA en términos de las variables elementales que corresponden a cada uno de estas clases de cuantización y aplicar el principio de incertidumbre asociado a ellas.

8.3.2. Cota en el cambio del área

Para el caso de la cuantización no perturbativa, la cota en el cambio del área para el escenario de arco iris puede expresarse

$$\Delta A \geq aE\Delta x = \frac{E}{\epsilon}\frac{\Delta\Pi}{\Delta p}\frac{\Delta x\Delta p}{\Delta q\Delta\Pi}\Delta A_0. \tag{8.14}$$

En concordancia con el proceso de absorción descrito en la Sec. 8.1, nos limitamos a partículas que se alejan del reposo una cantidad $\Delta\Pi$, interpretable como la incertidumbre que afecta a sus momentos. Empleando las Ecs. (4.2) y el hecho de que la función f se anula cuando lo hace Π, concluimos que

$$\Delta A \geq \frac{g/\epsilon}{f/\Delta\Pi}\widehat{\Delta A}_0, \tag{8.15}$$

donde hemos definido

$$\widehat{\Delta A}_0 := \frac{\Delta x\Delta p}{\Delta q\Delta\Pi}\Delta A_0. \tag{8.16}$$

El factor $\Delta x\Delta p/(\Delta q\Delta\Pi)$ en $\widehat{\Delta A}_0$ compensa el cambio de relaciones de incertidumbre básicas con respecto a las del espacio-tiempo plano de fondo en el argumento de Bekenstein. Teniendo en cuenta este cambio, la línea de razonamiento de la Sec. 8.1 llevaría al resultado $(b/a)\widehat{\Delta A}_0+\Delta S_{mat} \geq 0$. De forma notable, el cociente de los factores de escala que se encontraron en la Ec. (8.5) aparece ahora en el miembro derecho de la expresión (8.15). Según esto, parece que el formalismo MS de arco iris gravitatorio encaja con la descripción no perturbativa.

Discutamos ahora la descripción perturbativa. Recordando la Ec. (8.6) y tratando Δx y Δq como distancias espaciales, se obtiene $\Delta x = \Delta q/(\partial f/\partial\Pi)$. Además, si se considera mecano-cuánticamente la energía de fondo ϵ como el generador de traslaciones temporales en el parámetro de evolución q^0 y se identifica la cantidad E en ΔA con el generador correspondiente de traslaciones en x^0, obtenido con una aplicación directa de la regla de la cadena, en vez de con la energía física exacta, se concluye que el papel de E debe desempeñarlo $\epsilon\,(\partial g/\partial\epsilon)$. De hecho, se hizo esta misma asignación en la Ref. [155] cuando se estudiaban las correcciones de primer orden en termodinámica de agujeros negros causadas por relaciones de dispersión modificadas. Con estas consideraciones,

$$\Delta A \geq a\epsilon\left(\frac{\partial g}{\partial\epsilon}\right)\Delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial\Pi}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial\epsilon}\,\Delta A_0. \tag{8.17}$$

En la expresión anterior, el factor multiplicativo es el cociente de los factores de escala obtenidos en la Ec. (8.6). Así pues, el mismo tipo de conexión que parece existir entre la descripción cuántica no perturbativa y la propuesta MS aparece ahora entre la descripción perturbativa y nuestra propuesta. En ambos casos, la cota en el cambio de área para relatividad general se ve corregida por un factor que depende de la energía y momento de fondo de la partícula. En el caso de la cuantización no perturbativa, hay una modificación adicional que proviene del cambio en las relaciones de incertidumbre, que se ha absorbido en la definición de $\widehat{\Delta A}_0$. En el régimen de bajas energías, en que las funciones g y f tienden a la identidad y coinciden las variables físicas y de fondo, se recupera el resultado acostumbrado.

Podemos manejar paralelamente las fórmulas (8.15) y (8.17) usando la notación introducida en las Ecs. (8.8) y (8.9) y designando por $\overline{\Delta A}_0$ tanto a $\widehat{\Delta A}_0$ en la descripción no perturbativa como a ΔA_0 en la perturbativa. Entonces, podemos escribir

$$\Delta A \geq \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon, \Delta\Pi)} \overline{\Delta A}_0 := h(\epsilon, \Delta\Pi) \overline{\Delta A}_0. \tag{8.18}$$

Explícitamente

$$h(\epsilon, \Pi) = \begin{cases} \dfrac{\Pi g(\epsilon)}{\epsilon f(\epsilon, \Pi)} & \text{Propuesta MS,} \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial \Pi}(\epsilon, \Pi) \right)^{-1} \dfrac{\partial g}{\partial \epsilon}(\epsilon) & \text{Propuesta canónica.} \end{cases} \tag{8.19}$$

Usaremos esta relación para obtener expresiones modificadas de la entropía y temperatura de un agujero negro en los dos formalismos de arco iris de gravedad considerados. En principio, esta desigualdad es válida para todos los posibles valores de la energía-momento de la partícula absorbida por el agujero negro. Al menos para el caso sencillo de un agujero negro de Schwarzschild modificado, resulta que cuando la función h satisface ciertas condiciones, el conjunto de desigualdades obtenidas con diferentes energías y momentos se deriva de una única desigualdad. Además, el factor que surge de h en esa desigualdad depende sólo del radio de área $r_s = \sqrt{A/(4\pi)}$ (es decir, del radio de Schwarzschild en relatividad general[5]). Las condiciones sobre h se obtienen de los siguientes argumentos.

En primer lugar, como la energía y momento de fondo satisfacen la relación de dispersión común de relatividad especial, $\epsilon \geq \Delta\Pi$ (donde la igualdad se alcanza para partículas sin masa). Entonces, si $h(\epsilon, \Delta\Pi)$ es una función creciente de la variable $\Delta\Pi$, podemos maximizarla a $h(\epsilon, \epsilon)$. Por otra parte, $2\pi/\epsilon$ no puede exceder el diámetro del agujero negro, $2r_s$, porque de lo contrario la partícula sería dispersada en vez de absorbida (véase también la Ref. [155]). En este sentido, hacemos notar que $2\pi/\epsilon$ es la longitud de onda en el caso de una partícula sin masa, y es menor o igual a la longitud de onda Compton para una con masa. Por tanto, $\epsilon \geq \pi/r_s$. Si $h(\epsilon, \epsilon)$ es una función decreciente de ϵ, entonces alcanza su máximo en π/r_s.

[5]Recíprocamente, la relación $A = 4\pi r_s^2$ puede verse como la definición de A en términos de la posición radial del horizonte.

En esta situación, es fácil darse cuenta de que la expresión (8.18) se satisface para todos los valores permitidos de la energía-momento de fondo si y sólo si se satisface para $\epsilon = \Delta\Pi = \pi/r_s$, [6] es decir

$$\Delta A \geq \; h\left(\frac{\pi}{r_s}, \frac{\pi}{r_s}\right)\overline{\Delta A}_0. \tag{8.20}$$

En la siguiente sección usaremos esta desigualdad como el elemento clave para obtener expresiones modificadas de la entropía y temperatura de un agujero negro. Ahora vamos a comprobar si se satisfacen las condiciones exigidas a la función h en los modelos de arco iris de gravedad sugeridos por algunos de los ejemplos de teorías DSR que se encuentran más a menudo en la literatura [los detalles pueden consultarse en la sección 8.6].

El primero de estos modelos está basado en el arquetipo de la familia de teorías DSR2 [89, 90] (teorías con energía y momento físicos acotados). En la Sec. 8.6 se ve que, en este modelo y para la propuesta MS, $h(\epsilon, \Delta\Pi) = g(\epsilon)\Delta\Pi/[\epsilon f(\epsilon, \Delta\Pi)] = 1$. Se satisfacen trivialmente las dos hipótesis supuestas anteriormente sobre la función h, pero no hay ninguna modificación de la termodinámica. Por otro lado, para nuestra propuesta canónica de arco iris de gravedad, se tiene en este modelo que $h(\epsilon, \Delta\Pi) = (\partial g/\partial\epsilon)/(\partial f/\partial\Pi) = 1/(1 + \lambda\epsilon)$. Dado que esta función es constante en $\Delta\Pi$ y decreciente en ϵ, se cumplen las condiciones sobre h.

El siguiente modelo de arco iris viene dado por la teoría DSR cuya relación entre las energías física y de fondo coincide con la que se encuentra para ondas gravitatorias de Einstein-Rosen [106,109]. En la Sec. 8.6 se demuestra que en este caso se obtiene $h(\epsilon, \Delta\Pi) = (1 - e^{-\lambda\epsilon})/(\lambda\epsilon)$ para la propuesta MS de arco iris, y $h(\epsilon, \Delta\Pi) = e^{-\lambda\epsilon}$ para nuestra propuesta. Ambas funciones son independientes de $\Delta\Pi$ y decrecientes en ϵ. Por tanto, se satisfacen los requisitos sobre h que habíamos introducido.

Por último, consideramos el modelo de arco iris que se basa en el ejemplo arquetípico de la clase de teorías DSR1 (momento físico acotado) [85, 86]. En realidad, como la energía física depende del momento auxiliar, $E = g(\epsilon, \Delta\Pi)$, no se puede aplicar nuestro análisis a este modelo a menos que limitemos todas las consideraciones a un invariante de Casimir (de fondo) fijo $\epsilon^2 - \Delta\Pi^2$. Para la propuesta MS, dada la complejidad de las funciones que aparecen, estudiamos exclusivamente el caso de partículas sin masa ($\epsilon = \Delta\Pi$), para las cuales demostramos en la Sec. 8.6 que $h = (1 + \lambda\epsilon)\ln(1 + \lambda\epsilon)/(\lambda\epsilon)$. Ésta es una función creciente de ϵ, así que no se cumplen las condiciones supuestas sobre h. Con nuestra propuesta, por otra parte, se obtiene $h = 1$ para cualquier valor fijo del invariante de Casimir y, entonces, la termodinámica permanece inalterada.

[6] Esta afirmación asume implícitamente que la cota $\overline{\Delta A}_0$ para relatividad general estándar puede tratarse con independencia de $(\epsilon, \Delta\Pi)$, como indica el hecho de que el mínimo a de $\overline{\Delta A}_0$ es independiente de esas cantidades.

8.4. Entropía de agujeros negros

Discutamos ahora la modificación de la relación entropía-área (8.3). Como hemos visto, en relatividad general estándar tenemos $(b/a)\overline{\Delta A}_0 + \Delta S_{mat} \geq 0$ (una vez se han tenido en cuenta las relaciones de incertidumbre básicas adecuadas). Al pasar a relatividad deformada, el cambio del área de un agujero negro satisface la relación (8.20) con tal que la función h cumpla ciertas condiciones. Al dar este paso, la entropía de la materia ordinaria no se modifica (asumiendo que ya se ha adoptado una descripción cuántica correcta), porque refleja simplemente el número de grados de libertad del sistema. Combinando esta información, se concluye

$$\frac{b}{a}\frac{\Delta A}{h\left(\frac{\pi}{r_s},\frac{\pi}{r_s}\right)} + \Delta S_{mat} \geq 0. \tag{8.21}$$

Si se acepta la hipótesis razonable de que la entropía de un agujero negro (de Schwarzschild) es una función de su área exclusivamente, puede entenderse la relación anterior como una segunda ley generalizada modificada, con una identificación natural del cambio en la entropía del agujero negro:

$$\Delta S_{BH} = \frac{b}{a}\frac{\Delta A}{h\left(\frac{\pi}{r_s},\frac{\pi}{r_s}\right)}. \tag{8.22}$$

Para recuperar la ley de Bekenstein-Hawking (8.3) para agujeros negros grandes ($r_s \to \infty$), límite en que h tiende a la unidad, debe fijarse la constante b/a al factor usual $1/(4L_P^2)$.

Finalmente, para obtener la forma funcional de la entropía con el área, sustituimos $A = 4\pi r_s^2$. Integrando la Ec. (8.22) obtenemos [156, 157]

$$S_{BH}(A) = \frac{1}{4L_P^2}\int_{A_1}^{A} \frac{d\tilde{A}}{h\left(\sqrt{4\pi^3/\tilde{A}}, \sqrt{4\pi^3/\tilde{A}}\right)}. \tag{8.23}$$

Aquí, A_1 es un área de referencia donde se fija que la entropía se anule. Es natural elegirla igual a cero, pero notamos que entonces la integral podría divergir. En ese caso, debería darse como referencia un área no nula (por ejemplo, el área de Planck). La convergencia de la integral para $A_1 = 0$ está asegurada al menos para aquellas teorías en que se puede encontrar una constante $\delta > 0$ tal que $\lim_{r_s\to 0} r_s^{2-\delta}/h(\pi/r_s, \pi/r_s) = 0$.

Estudiemos ahora el comportamiento de la entropía para valores grandes del área de un agujero negro. Con este objetivo, desarrollamos la función $1/h$ en torno a cero (en sus dos argumentos) y mantenemos solamente los términos hasta orden cuadrático. Recordando que $h(0,0) = 1$, obtenemos después de integrar (exceptuando una constante aditiva irrelevante)

$$S_{BH} \approx \frac{1}{4L_P^2}\left[A + 4C_1\sqrt{\pi^3 A} + 2\pi^3 C_2 \ln\frac{A}{L_P^2}\right], \tag{8.24}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 &= -\left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon} + \frac{\partial h}{\partial \Pi}\right)\bigg|_0, \\ C_2 &= -\left[\frac{\partial^2 h}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \Pi^2} + 2\frac{\partial^2 h}{\partial \Pi \partial \epsilon} - 2\left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon} + \frac{\partial h}{\partial \Pi}\right)^2\right]\Bigg|_0. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Aquí, el símbolo $|_0$ significa evaluación en valores nulos de los argumentos.

Si se impone que la corrección de primer orden a la ley de Bekenstein-Hawking sea logarítmica, de acuerdo con diversos análisis en la literatura [142–148], el coeficiente constante C_1 debe anularse. Esto puede entenderse como una restricción en los modelos de formalismo de arco iris admisibles. En ese caso, el coeficiente C_2 se vuelve

$$C_2 = -\left[\frac{\partial^2 h}{\partial \epsilon^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \Pi^2} + 2\frac{\partial^2 h}{\partial \Pi \partial \epsilon}\right]\bigg|_0. \tag{8.26}$$

8.5. Temperatura de agujeros negros

8.5.1. Obtención a partir de la entropía

Pasamos ahora a analizar la modificación de la temperatura de un agujero negro. Con esta finalidad, asociamos una masa $m = E_P^2 r_s/2$ al agujero negro. Esta expresión reproduce la definición de masa de Schwarzschild en relatividad general y, como hemos visto, se recupera en los formalismos de arco iris considerados. Merece la pena señalar que la masa m va en principio de cero a infinito (si también lo hace A). De la definición $T_{BH}^{-1} := (\partial S_{BH}/\partial m)$ y la Ec. (8.22) [con $b/a = 1/(4L_P^2)$], se llega a la temperatura modificada

$$T_{BH} = h\left(4\pi^2 T_0, 4\pi^2 T_0\right) T_0. \tag{8.27}$$

Aquí, $T_0 = E_P^2/(8\pi m)$ representa la temperatura Hawking en relatividad general estándar.

La temperatura Hawking tiende a cero cuando $m \to \infty$ (o equivalentemente si $r_s \to \infty$). Por tanto, en relatividad general un agujero negro irradia con una temperatura despreciable cuando su masa es muy grande. Por el contrario, T_0 diverge cuando m (y r_s) se aproxima a cero. Como consecuencia, en relatividad general, la cantidad de radiación emitida por un agujero negro diminuto es enorme. La evaporación se acelera de manera exorbitante cuando la masa se hace pequeña, en los estadios finales de la vida del agujero negro. Queremos explorar si las modificaciones que aparecen en el contexto de arco iris gravitatorio pueden alterar este comportamiento de la temperatura de manera significativa. En concreto, queremos investigar si la temperatura modificada puede anularse en el límite de masa cero. Esto abriría la posibilidad de que la evaporación del agujero negro se detenga finalmente o tarde un tiempo infinito, dando lugar a un escenario radicalmente distinto para la resolución de la paradoja de la información.

Llamemos $z := 4\pi^2 T_0 = \pi E_P^2/(2m)$. Usando la Ec. (8.15), se obtiene para la propuesta MS

$$T_{BH} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{g(z)}{f(z,z)}z. \tag{8.28}$$

Recordamos que g es una función positiva y creciente, porque se aproxima a la identidad (esto es, $g(\epsilon) \approx \epsilon$) a bajas energías y es invertible. Para que la temperatura T_{BH} se anule en el límite de masa cero, es necesario entonces (aunque no suficiente) que $\lim_{z\to\infty} f(z,z)/z = \infty$. Esto impide la existencia de una escala invariante de momentos. Por tanto, la temperatura no puede anularse para modelos de arco iris MS cuyas expresiones (1.33) imiten las relaciones no lineales entre variables físicas y de fondo de teorías DSR pertenecientes a las clases DSR1 y DSR2.

Por otro lado, a partir de la Ec. (8.17), la temperatura modificada para nuestra propuesta de arco iris es

$$T_{BH} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \Pi}(z,z)\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial_\epsilon}(z)z. \tag{8.29}$$

En ejemplos de arco iris canónico que se basen en teorías de las familias DSR2 y DSR3, $\partial g/\partial\epsilon$ tiende a cero en infinito. Si el decrecimiento de esta derivada domina sobre el posible crecimiento de $z/(\partial f/\partial\Pi)$, la temperatura se anula para masa cero. En la clase DSR1, $\partial g/\partial\epsilon$ no tiende a cero. Así, se debe tener necesariamente que $\lim_{z\to\infty}[(\partial f/\partial\Pi)(z,z)]/z = \infty$. Puesto que la existencia de una cota en el momento físico implica únicamente que $\lim_{z\to\infty} f(z,z)$ debe ser finito, es posible que la temperatura se anule con la masa en modelos de arco iris inspirados en DSR1. Por lo tanto, en comparación con la propuesta MS, nuestra propuesta de arco iris canónico conduce a una mayor variedad de opciones para que la temperatura modificada se anule asintóticamente.

Podemos estudiar el comportamiento de la temperatura modificada en los modelos de arco iris correspondientes a los ejemplos de DSR considerados anteriormente y descritos en la Sec. 8.6. En el modelo DSR2, la temperatura coincide con T_0 para la propuesta MS, mientras que para nuestra propuesta canónica $T_{BH} = E_P^2/[4\pi(\pi\lambda E_P^2 + 2m)]$. En este último caso, aunque la temperatura no se anula para masa cero, la situación es mucho mejor que en relatividad general estándar, porque T_{BH} tiende a la constante $1/(4\pi^2\lambda)$. Por otra parte, usando la expresión de la función h obtenida en la Sec. 8.6 para el modelo DSR3 (inspirado en las ondas gravitatorias de Einstein-Rosen) obtenemos $T_{BH} = [1 - e^{-\pi\lambda E_P^2/(2m)}]/(4\pi^2\lambda)$ para la propuesta MS. La temperatura tiende también a una constante en el límite de masa nula. Para nuestra propuesta alternativa, por otra parte, se tiene $T_{BH} = E_P^2 e^{-\pi\lambda E_P^2/(2m)}/(8\pi m)$, así que la temperatura realmente se anula cuando $m \to 0$. Finalmente, en el caso del modelo

DSR1, la temperatura no sufre ninguna modificación cuando se cumplen las condiciones que permiten la aplicación de nuestro análisis [véase el final de la Subsec. 8.3.2 y la Ec. (8.43)].

8.5.2. Obtención a partir de la gravedad superficial

La expresión (8.27) de la temperatura modificada y nuestra discusión posterior sólo son aplicables si la función h satisface las condiciones descritas en la Subsec. 8.3.2. Estas condiciones nos permiten pasar de un conjunto de desigualdades que involucran $h(\epsilon, \Delta\Pi)$ para todo un rango de valores de la energía-momento de fondo a la desigualdad única (8.20). Esta última desigualdad lleva a una segunda ley generalizada que depende sólo del área del agujero negro y la entropía de la materia ordinaria. Sin embargo, las condiciones sobre h no se cumplirán para modelos arbitrarios de arco iris gravitatorio. Aunque podemos encontrar condiciones alternativas

sobre h que permitan llegar a la Ec. (8.20), es posible generalizar el estudio de la modificación de la temperatura y la entropía de la siguiente forma.

En primer lugar, en sintonía con el planteamiento de arco iris de gravedad, se puede admitir de manera tentativa una temperatura de agujeros negros $\mathcal{T}_{BH}$ que dependa de la energía-momento de las partículas de prueba. Entonces, como se indica en la Ref. [157], puede encontrarse la expresión de la temperatura correspondiente analizando el comportamiento de la métrica de arco iris cerca del horizonte. La temperatura es $\mathcal{T}_{BH} = \kappa_s/(2\pi)$, donde κ_s es la gravedad superficial sobre el horizonte:

$$\kappa_s = -\frac{1}{2} \lim_{r \to r_s} \sqrt{\frac{-g^{rr}}{g^{00}}} \frac{(g^{00})'}{g^{00}}. \tag{8.30}$$

Aquí, $(g^{00})'$ denota la derivada de g^{00} respecto a r. Para la solución de Schwarzschild, la introducción del arco iris de gravedad tiene como resultado los escalados espacial y temporal (8.7), que producen la siguiente transformación de las componentes de la métrica:

$$g^{00} \to \frac{g^{00}}{[\mathcal{G}(\epsilon)]^2}, \qquad g^{rr} \to \frac{g^{rr}}{[\mathcal{F}(\epsilon, \Pi)]^2}. \tag{8.31}$$

Con estas transformaciones, se obtiene sencillamente

$$\mathcal{T}_{BH} = h(\epsilon, \Pi) T_0. \tag{8.32}$$

Esta expresión depende de la energía y momento de las partículas de prueba. Parece razonable considerar como partículas de prueba naturales las proporcionadas por el propio agujero negro por medio de su radiación. De este modo, el arco iris gravitatorio tendría en cuenta (hasta cierto punto) la retroalimentación (*back reaction*) de la geometría. Esta radiación estaría dominada por partículas sin masa con energía promedio proporcional a la temperatura

Hawking, al menos para agujeros negros suficientemente grandes. Esto justificaría identificar las partículas de prueba con partículas sin masa con $\epsilon = \Pi = \varrho T_0$, donde ϱ es una constante de orden unidad.

No obstante, uno esperaría que esto fuese sólo una aproximación, con correcciones cuánticas al valor de la energía promedio y fluctuaciones en torno a la partícula de prueba que se vuelven cada vez más importantes para agujeros negros más pequeños. Se podría intentar imitar el efecto de esas correcciones y desviaciones de la aproximación propuesta evaluando h en $\epsilon = \varrho T_0\{1 + O[(T_0/E_P)^{n_1}]\}$ y $\Pi = \varrho T_0\{1 + O[(T_0/E_P)^{n_2}]\}$, donde n_1 y n_2 son dos constantes positivas y el símbolo O denota el orden de los términos incontrolados. Podría interpretarse entonces la temperatura resultante como la genuina temperatura modificada de un agujero negro, T_{BH}. Asumiendo que h es analítica en la región de argumentos pequeños y desarrollándola en torno a ϱT_0, se obtendría

$$T_{BH} = T_0 + [h(\varrho T_0, \varrho T_0) - 1]T_0 \left\{1 + O\left[\left(\frac{T_0}{E_P}\right)^n\right]\right\}. \tag{8.33}$$

En esta deducción, hemos empleado que $h(0,0) = 1$. Aquí, n es el mínimo de n_1 y n_2 y puede ser en principio una constante positiva cualquiera. Como consecuencia, en la expresión anterior, uno, en general, estaría seguro sólo del significado de la corrección de orden dominante a la temperatura de Hawking, corrección que surge del primer término no constante de la serie de Taylor de h en torno a cero. Esto contrasta con la situación hallada para los modelos que satisfacen los requisitos introducidos en la Subsec. (8.3.2), para los que se ha obtenido una expresión completa de la temperatura modificada.

8.6. Algunos modelos específicos de arco iris gravitatorio

En esta sección damos detalles sobre tres modelos específicos de arco iris de gravedad motivados por sendos ejemplos de teorías DSR que se han analizado en la literatura.

DSR2. El primero de estos modelos de arco iris se basa en el ejemplo de DSR que se considera como arquetipo de la llamada familia de teorías DSR2, en la que tanto la energía física como el momento físico presentan una cota superior. En este modelo la acción no lineal del grupo de Lorentz en el espacio de momentos se genera combinando cada *boost* con una dilatación. El modelo está caracterizado por las funciones [89, 90]

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1 + \lambda_2 \epsilon}, \qquad f(\epsilon, \Pi) = \frac{\Pi}{1 + \lambda_2 \epsilon}. \tag{8.34}$$

Para las dos realizaciones de arco iris analizadas en este capítulo, es decir, la propuesta MS y nuestra propuesta basada en una implementación canónica de DSR, las expresiones (8.34) conducen a las siguientes funciones $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, y h:

a) Propuesta MS:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \frac{g(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{1}{1+\lambda_2\epsilon}, \\
\mathcal{F}(\epsilon,\Pi) &= \frac{f(\epsilon,\Pi)}{\Pi} = \frac{1}{1+\lambda_2\epsilon}, \\
h(\epsilon,\Pi) &= \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)} = 1.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

b) Propuesta canónica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(\epsilon) = \frac{1}{(1+\lambda_2\epsilon)^2}, \\
\mathcal{F}(\epsilon,\Pi) &= \frac{\partial f}{\partial \Pi}(\epsilon,\Pi) = \frac{1}{1+\lambda_2\epsilon}, \\
h(\epsilon,\Pi) &= \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)} = \frac{1}{1+\lambda_2\epsilon}.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

DSR3. El segundo ejemplo está inspirado en una versión de tipo DSR de la relación de dispersión física que cumplen las ondas de Einstein-Rosen. Para estas ondas cilíndricas, resulta que la energía física está dada por una función no lineal de una energía de fondo que se define mediante teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo plano [106, 109]. Para cada frecuencia angular y número de onda (ϵ, Π) en esta teoría de fondo, la relación no lineal con las cantidades físicas correspondientes viene dada por

$$g(\epsilon) = \frac{1-e^{-\lambda_3\epsilon}}{\lambda_3}, \qquad f(\Pi) = \Pi. \tag{8.37}$$

El modelo de DSR asociado puede considerarse como una teoría de la clase DSR3, con cota en la energía física pero no en el momento. Las correspondientes funciones $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y h tienen la siguiente forma:

a) Propuesta MS:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \frac{g(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{1-e^{-\lambda_3\epsilon}}{\lambda_3\epsilon}, \\
\mathcal{F}(\epsilon,\Pi) &= \frac{f(\epsilon,\Pi)}{\Pi} = 1, \\
h(\epsilon,\Pi) &= \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)} = \frac{1-e^{-\lambda_3\epsilon}}{\lambda_3\epsilon}.
\end{aligned} \tag{8.38}$$

b) Propuesta canónica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(\epsilon) = e^{-\lambda_3 \epsilon}, \\
\mathcal{F}(\epsilon, \Pi) &= \frac{\partial f}{\partial \Pi}(\epsilon, \Pi) = 1, \\
h(\epsilon, \Pi) &= \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon, \Pi)} = e^{-\lambda_3 \epsilon}.
\end{aligned} \tag{8.39}$$

DSR1. El tercer ejemplo de arco iris gravitatorio está basado en el que fue realmente el primer modelo de DSR que apareció en la literatura [85]. Por esta razón, se dice que todos los modelos que comparten con él la propiedad de poseer una cota en el momento físico, pero no en la energía física, pertenecen a la clase DSR1. Las funciones que determinan este modelo son [85, 86, 92]

$$\begin{aligned}
g(\epsilon|\eta) &= \frac{1}{\lambda_1} \ln \left[1 + \lambda_1 \epsilon \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 \eta^2}{4}} + \frac{\lambda_1^2 \eta^2}{2} \right], \\
f(\epsilon, \Pi|\eta) &= \frac{\Pi \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 \eta^2}{4}}}{1 + \lambda_1 \epsilon \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 \eta^2}{4}} + \frac{\lambda_1^2 \eta^2}{2}},
\end{aligned} \tag{8.40}$$

donde $\eta^2 := \epsilon^2 - \Pi^2$ es el invariante de Casimir (de fondo).

Restringimos nuestra atención al caso de η fijo, porque de otro modo la función g dependería del momento auxiliar, contraviniendo las condiciones del análisis desarrollado en este capítulo. Además, en el caso de la propuesta MS, nos centraremos exclusivamente en partículas sin masa para simplificar la discusión. Sustituyendo $\eta = 0$ directamente en la Ec. (8.40), obtenemos

$$\begin{aligned}
g_0(\epsilon) &:= g(\epsilon|\eta = 0) = \frac{1}{\lambda_1} \ln (1 + \lambda_1 \epsilon), \\
f_0(\epsilon, \pi) &:= f(\epsilon, \Pi|\eta = 0) = \frac{\Pi}{1 + \lambda_1 \epsilon}.
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Usando estas funciones para la propuesta MS y, más generalmente, las funciones (8.40) para nuestra propuesta canónica, se deducen las siguientes expresiones de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y h :

a) Propuesta MS para partículas sin masa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \frac{g_0(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{\ln (1 + \lambda_1 \epsilon)}{\lambda_1 \epsilon}, \\
\mathcal{F}(\epsilon, \Pi) &= \frac{f_0(\epsilon, \Pi)}{\Pi} = \frac{1}{1 + \lambda_1 \epsilon}, \\
h(\epsilon, \Pi) &= \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon, \Pi)} = \frac{1 + \lambda_1 \epsilon}{\lambda_1 \epsilon} \ln (1 + \lambda_1 \epsilon).
\end{aligned} \tag{8.42}$$

b) Propuesta canónica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\epsilon) &= \frac{\partial g}{\partial \epsilon}(\epsilon|\eta) = \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2\eta^2}{4}}}{1+\lambda_1\epsilon\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2\eta^2}{4}}+\frac{\lambda_1^2\eta^2}{2}}, \\
\mathcal{F}(\epsilon,\Pi) &= \frac{\partial f}{\partial \Pi}(\epsilon,\Pi|\eta) = \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2\eta^2}{4}}}{1+\lambda_1\epsilon\sqrt{1+\frac{\lambda_1^2\eta^2}{4}}+\frac{\lambda_1^2\eta^2}{2}}, \\
h(\epsilon,\Pi) &= \frac{\mathcal{G}(\epsilon)}{\mathcal{F}(\epsilon,\Pi)} = 1.
\end{aligned} \tag{8.43}$$

Para finalizar, queremos comentar que las escalas invariantes λ_n (con $n = 1, 2, 3$) para los distintos modelos DSR no tienen por qué coincidir. No obstante, hemos obviado esta diferencia en el presente capítulo por sencillez, adoptando la notación λ para todas ellas.

Conclusiones

- Existe una incertidumbre estrictamente positiva que afecta a los intervalos de tiempo físico en formalismos perturbativos de cuantización de sistemas gravitatorios, esto es, en una cuantización en la que el parámetro de evolución dinámica es el tiempo de fondo. Hemos comprobado este resultado dentro de los contextos de ondas gravitatorias cilíndricas de Einstein-Rosen, teorías de relatividad doblemente especial (DSR) y agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter.

- Por contra, en una cuantización no perturbativa de los sistemas analizados (excepto en el caso específico de ondas de Einstein-Rosen) no tiene por qué existir una incertidumbre mínima en el lapso de tiempo físico. Por tanto, la existencia de una incertidumbre mínima temporal no es una característica general inevitable en escenarios de gravedad cuántica.

- El desacuerdo en el comportamiento de la incertidumbre temporal entre una cuantización perturbativa y otra no perturbativa reside en que, en la cuantización no perturbativa, el tiempo físico es el parámetro de evolución dinámica y, por tanto, su incertidumbre viene dada simplemente por la cuarta relación de Heisenberg. Por su parte, en la cuantización perturbativa el tiempo físico está representado por una familia de operadores explícitamente dependientes del parámetro temporal y que dependen también de la energía, así como de las coordenadas espaciales y momentos de fondo, lo que hace que el procedimiento para hallar su incertidumbre sea más elaborado. En particular, esta dependencia simultánea en el parámetro temporal y en la energía da lugar a una cota mínima no nula para la incertidumbre.

- En DSR, la aparición de una incertidumbre mínima en la longitud física es inevitable tanto perturbativa como no perturbativamente, excepto quizá para cierto tipo de cuantizaciones genuinamente no perturbativas de teorías DSR en las que no exista cota superior para el momento físico (es decir, de clase DSR3).

- Esta discrepancia en el comportamiento de la incertidumbre en los casos espacial y temporal para una cuantización no perturbativa en DSR se debe a que, en el tipo de cuantización considerada, el tiempo físico no viene representado por un operador, como ya hemos comentado, sino que corresponde al parámetro de evolución cuántica, lo que implica que la cuarta relación de Heisenberg controla directamente los límites de resolución temporal. Por su parte, la determinación de la incertidumbre de la longitud física es más compleja, puesto que el operador que la representa puede expresarse en términos de las coordenadas espaciales y momentos de fondo y de la energía y tiempo físicos, de forma que resulta depender tanto del generador de la evolución como explícitamente del parámetro dinámico.

- En el caso de que el sistema libre en DSR admita una cuantización no perturbativa en la que la longitud física pueda representarse por un operador sin dependencia explícita en el parámetro temporal, canónicamente conjugado al operador correspondiente al módulo del momento físico, y donde además el espectro cuántico del momento físico esté contenido en su dominio clásico, el principio de Heisenberg implica que la incertidumbre en la posición física sólo puede anularse si el momento físico no presenta una cota superior, lo cual sucede en las teorías DSR3. Por su parte, la incertidumbre en el tiempo físico sólo puede anularse si es la energía la que no está acotada superiormente, lo que ocurre en las teorías DSR1. Por tanto, es imposible alcanzar una resolución infinita en la posición y el tiempo físicos conjuntamente.

- Adoptando la aproximación hasta primer orden subdominante para bajas energías en la cuantización perturbativa de sistemas libres en DSR, se llega a que la incertidumbre, tanto en la longitud física como en el lapso de tiempo físico, es generalmente mayor que cero. Lo mismo ocurre con la incertidumbre en el lapso de tiempo físico para ondas de Einstein-Rosen y agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter en este orden de aproximación. Estos resultados respaldan las conclusiones obtenidas para la cuantización perturbativa completa.

- En DSR, para el caso *sin "masa"* y en la aproximación hasta primer orden subdominante para bajas energías en la cuantización perturbativa, se encuentra bajo ciertas circunstancias un comportamiento especialmente interesante: la incertidumbre espacio-temporal está siempre acotada inferiormente por una cantidad del orden de la longitud de Planck y, además, para valores grandes del tiempo de fondo, presenta una cota inferior proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, que es el tipo de comportamiento sugerido por Salecker y Wigner para medidas espacio-temporales realizadas con dispositivos cuánticos. La incertidumbre temporal muestra también un comportamiento de este tipo para ondas de Einstein-Rosen en el régimen de aproximación considerado.

- En el escenario de agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter, con la aproximación de primer orden subdominante para masas de Schwarzschild pequeñas (con respecto a la escala determinada por la constante cosmológica) en la cuantización perturbativa, se obtiene una cota inferior en la incertidumbre temporal que crece con la raíz cúbica del tiempo de fondo. Este resultado se ajusta a la clase de comportamiento que se propugna para la incertidumbre a partir de argumentos de tipo holográfico. No obstante, nuestro resultado depende de los estados cuánticos que se elijan.

- En el escenario de agujeros negros de Schwarzschild-anti-de Sitter, para el sector de masas de Schwarzschild grandes en la cuantización perturbativa, se encuentra que la incertidumbre en el tiempo físico está acotada inferiormente por una cantidad constante del orden de la escala de Planck y que, para tiempos grandes, crece linealmente con el tiempo. De nuevo, este resultado depende de los estados escogidos.

- Las distintas propuestas aparecidas en la literatura para la realización de DSR en el espacio de posiciones que se basan en una implementación canónica en el espacio de fases son, en realidad, equivalentes.

- En estas realizaciones canónicas surgen principios de incertidumbre generalizados para los que existe la posibilidad de conseguir que el comportamiento de variables apropiadas de posición y momento sea clásico en el régimen de energía (sobre la capa de masas) infinitamente próximo a la escala invariante de la teoría de DSR. Por otro lado, en este mismo régimen también es posible encontrar conjuntos de variables de posición y momento cuyos conmutadores modificados divergen.

- Partiendo sólo de un conjunto de conmutadores básicos es posible construir una formulación de DSR. Este hecho prueba que la información relevante presente en una formulación canónica de una teoría DSR y en un principio de incertidumbre generalizado es equivalente.

- El escenario de arco iris de gravedad incorpora relaciones de dispersión modificadas y principios de incertidumbre generalizados que conducen a una modificación de la termodinámica de agujeros negros con un comportamiento diferente al que se tiene normalmente. En particular, la evaporación de un agujero negro puede llegar a detenerse o durar un tiempo infinito en el límite de masa del agujero negro nula.

- La temperatura modificada de un agujero negro de Schwarzschild definida para el formalismo de arco iris propuesto originalmente por Magueijo y Smolin puede anularse en el límite de masa cero únicamente para modelos basados en teorías DSR3. En cambio, en dicho límite, la temperatura definida en el formalismo de arco iris propuesto por nosotros puede anularse en modelos inspirados en teorías pertenecientes a las tres familias de DSR, es decir, en una gama bastante mayor de modelos.

- El efecto sobre la geometría de los dos formalismos de arco iris considerados consiste esencialmente en introducir dos factores de escala independientes del espacio-tiempo: una transformación conforme de las componentes espaciales y una dilatación temporal.

Apéndice A

Dispositivos de Salecker-Wigner

En este apéndice se resume brevemente el estudio de Salecker y Wigner sobre la incertidumbre cuántica que es inherente a la medición de distancias espacio-temporales [31–33]. El análisis parte de un dispositivo de medida, considerado como un sistema libre con masa m e incertidumbres en su posición y momento iniciales Δq y $\Delta\Pi$. La incertidumbre (al cuadrado) en su posición en un instante de tiempo posterior t es

$$[\Delta q(t)]^2 = \left[\Delta\left(q + \frac{t}{m}\Pi\right)\right]^2 = (\Delta q)^2 + \frac{t^2}{m^2}(\Delta\Pi)^2 + \frac{t}{m}\mathrm{cov}(\widehat{q}, \widehat{\Pi}), \tag{A.1}$$

donde $\mathrm{cov}(\widehat{q}, \widehat{\Pi}\,) := \langle \widehat{q}\,\widehat{\Pi} + \widehat{\Pi}\,\widehat{q}\,\rangle - 2\langle \widehat{q}\,\rangle\langle \widehat{\Pi}\,\rangle$. Esta expresión se simplifica cuando los observables de posición y momento iniciales no están correlacionados. Esto sucede, por ejemplo, si los estados del sistema son ondas planas moduladas por una gaussiana. En ese caso $\mathrm{cov}(\widehat{q}, \widehat{\Pi}) = 0$. Haciendo uso de la cuarta relación de Heisenberg, se obtiene entonces la desigualdad

$$[\Delta q(t)]^2 \geq \frac{t^2}{m^2}(\Delta\Pi)^2 + \frac{1}{4(\Delta\Pi)^2}. \tag{A.2}$$

El miembro derecho de esta ecuación puede verse como una función de $\Delta\Pi$. Sus extremos pueden determinarse imponiendo la anulación de la primera derivada:

$$0 = \frac{4t^2}{m^2}(\Delta\Pi)^4 - 1. \tag{A.3}$$

El valor mínimo de la incertidumbre se alcanza así en $\Delta\Pi^{min} = \sqrt{m/(2t)}$. Sustituyendo este valor en (A.2) se obtiene una cota inferior para la incertidumbre en la posición en el instante t:

$$\Delta q(t) \geq \sqrt{\frac{t}{m}}\,. \tag{A.4}$$

Por tanto, los argumentos de Salecker y Wigner implican que la incertidumbre crece con la raíz cuadrada del tiempo.

Apéndice B

Demostración de la existencia de incertidumbre mínima en una cuantización perturbativa

En este apéndice se ofrecen los detalles de la demostración de que, cuando se adopta una cuantización perturbativa para describir un sistema libre en el contexto de DSR, en general es inevitable la aparición de una incertidumbre mínima en las longitudes e intervalos de tiempo físicos, independientemente de los estados cuánticos elegidos.

Para llevar a cabo esta demostración, consideremos primero una densidad de probabilidad genérica ρ muy concentrada en torno a un valor $\overline{H}_0$, con una corrección descrita por un parámetro ξ :

$$\rho(H_0;\xi) = (1-\xi)\delta(H_0 - \overline{H}_0) + \xi\,\tilde{\rho}(H_0). \tag{B.1}$$

Aquí, δ es la distribución delta de Dirac y $\tilde{\rho}$ es una distribución *distinta* cualquiera, cuya presencia pone de manifiesto que la distribución ρ no está totalmente concentrada en $\overline{H}_0$.

Para el operador $\widehat{H}_0$ correspondiente a la energía de fondo, esta distribución lleva a

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{H}_0^n \rangle &= \int_0^\infty dH_0\,\rho(H_0;\xi)(H_0)^n = (1-\xi)(\overline{H}_0)^n + \xi\langle \widehat{H}_0^n\rangle_{\tilde{\rho}}, &\text{(B.2)}\\
(\Delta H_0)^2 &= \langle \widehat{H}_0^2\rangle - \langle \widehat{H}_0\rangle^2 = \xi(1-\xi)\Big[\overline{H}_0 - \langle \widehat{H}_0\rangle_{\tilde{\rho}}\Big]^2 + \xi(\Delta_{\tilde{\rho}} H_0)^2. &\text{(B.3)}
\end{aligned}$$

El subíndice $\tilde{\rho}$ señala que se emplea exactamente esa distribución para calcular la cantidad correspondiente.

Por otra parte, para una función $V(H_0)$ se puede definir el operador $\widehat{V} = V(\widehat{H}_0)$ mediante el teorema espectral. Este operador va a designar, de forma genérica, a los operadores $\widehat{\mathcal{V}}$ e $\widehat{\mathcal{Y}}$ que intervienen, respectivamente, en las relaciones entre los tiempos y entre longitudes en

DSR. Para dicho operador tenemos

$$\langle \widehat{V}^n \rangle = (1-\xi)\widehat{V}^n(\overline{H}_0) + \xi \langle \widehat{V}^n \rangle_{\tilde{\rho}}, \tag{B.4}$$

$$(\Delta V)^2 = \xi(1-\xi)\Big[V(\overline{H}_0) - \langle \widehat{V} \rangle_{\tilde{\rho}}\Big]^2 + \xi(\Delta_{\tilde{\rho}} V)^2. \tag{B.5}$$

Para los estados cuánticos genéricos utilizados en el cálculo de los valores esperados anteriores se asume la condición más que razonable de que la energía de fondo esté acotada, es decir, $\langle \widehat{H}_0 \rangle < \infty$. De la primera de las Ecs. (B.2) se deduce que esta condición, impuesta para un intervalo de valores de ξ, implica $\overline{H}_0 < \infty$ y $\langle \widehat{H}_0 \rangle_{\tilde{\rho}} < \infty$. Adicionalmente, se exige $\Delta_{\tilde{\rho}} H_0 < \infty$, de forma que $\tilde{\rho}$ represente una distribución con buenas propiedades físicas. De hecho, si la distribución $\tilde{\rho}$ corresponde a un estado puro, el requisito $\Delta_{\tilde{\rho}} H_0 < \infty$ equivale a imponer que dicho estado esté en el dominio del operador $\widehat{H}_0$, una vez garantizado que $\langle \widehat{H}_0 \rangle_{\tilde{\rho}} < \infty$. Con estas condiciones, vemos de la expresión (B.3) que, efectivamente, ΔH_0 tiende a cero si y sólo si el parámetro ξ también lo hace.

Regresando a la demostración de que la incertidumbre espacio-temporal no puede anularse en una cuantización perturbativa, recordamos que se han considerado, como ejemplo, dos conjuntos diferentes de hipótesis: 1) que la función $V(H_0)$ sea estrictamente monótona (biyectiva) o 2) que $V(H_0)$ sea positiva y crezca al menos linealmente en H_0 para energías de fondo grandes (región en la que se asume además un espectro continuo para $\widehat{H}_0$).

1) Conforme al primer grupo de hipótesis, para que la incertidumbre en la longitud o el lapso de tiempo físicos se anule en DSR, se debe satisfacer $\Delta H_0 = 0$, pero esto implica que el segundo sumando de las expresiones (5.11) y (6.11) no se anula. Veámoslo en detalle:

$$\lim_{\Delta H_0 \to 0} \frac{\langle \widehat{V}^2 \rangle}{(\Delta H_0)^2} = \lim_{\xi \to 0} \frac{[V(\overline{H}_0)]^2 + \xi\left(\langle \widehat{V}^2 \rangle_{\tilde{\rho}} - [V(\overline{H}_0)]^2\right)}{\xi\left[\left(\overline{H}_0 - \langle \widehat{H}_0 \rangle_{\tilde{\rho}}\right)^2 + (\Delta_{\tilde{\rho}} H_0)^2\right] - \xi^2\left(\overline{H}_0 - \langle \widehat{H}_0 \rangle_{\tilde{\rho}}\right)^2}. \tag{B.6}$$

En el caso de que $V(\overline{H}_0)$ sea distinto de cero, las condiciones asumidas sobre la distribución $\tilde{\rho}$ llevan a la conclusión de que el límite anterior diverge. En el caso de que $V(\overline{H}_0)$ se anule, este límite es igual a una constante estrictamente positiva, porque sabemos que $\langle \widehat{H}_0 \rangle_{\tilde{\rho}} \neq \overline{H}_0$ y que $\overline{H}_0$ es el único cero de V, de forma que $\langle \widehat{V}^2 \rangle_{\tilde{\rho}} \neq 0$. Así pues, la incertidumbre espacio-temporal nunca puede anularse.

2) Según el segundo conjunto de requisitos, si V es estrictamente positiva, $\langle \widehat{V} \rangle$ es distinto de cero y se debe cumplir que $\Delta T \to 0$, y por tanto que ΔH_0 tienda a infinito. Entonces, el crecimiento lineal de V a valores grandes de la energía de fondo [$\lim_{H_0 \to \infty}(V/H_0) > r$ para cierto número $r > 0$], junto con la continuidad del espectro de $\widehat{H}_0$ en esa región de energías,

implican que

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta H_0\to\infty}\frac{(\Delta V)^2}{(\Delta H_0)^2} &= \lim_{H\to\infty}\frac{\int_\mu^H \bar\rho(H_0)\,[V(H_0)-\langle V\rangle_{\bar\rho}]^2}{\int_\mu^H \bar\rho(H_0)\,[H_0-\langle H_0\rangle_{\bar\rho}]^2}\geq \lim_{H\to\infty}\frac{\int_\mu^H \bar\rho(H_0)\,[V(H_0)-\langle V\rangle_{\bar\rho}]^2}{\int_\mu^H \bar\rho(H_0)\,[H_0]^2}\\ &= \lim_{H\to\infty}\frac{[V(H)-\langle V\rangle_{\bar\rho}]^2}{[H]^2}=\lim_{H\to\infty}\left[\frac{V(H)}{H}\right]^2 > r^2. \qquad \text{(B.7)}\end{aligned}$$

Aquí, μ es el ínfimo del espectro de la energía de fondo y $\bar\rho$ designa la distribución del estado cuántico considerado, para el que $\Delta H_0 \to \infty$. En principio, dicha distribución podría incluir contribuciones del espectro discreto (en la forma de deltas de Dirac), pero a partir de un cierto valor de la energía de fondo el espectro es continuo por hipótesis. Teniendo esto en cuenta, en el tercer paso hemos aplicado la regla de l'Hôpital para calcular el límite deseado. Finalmente, hemos asumido la condición de que el valor esperado de V es finito, requisito necesario para que el promedio del lapso de tiempo físico o de la longitud física (según el caso considerado) esté bien definido en nuestro estado [véanse las Ecs. (5.7) y (6.7)]. Como consecuencia concluimos que, dadas nuestras suposiciones, el producto $\Delta T\Delta V \geq \Delta V/(2\Delta H_0)$ no puede anularse cuando ΔH_0 tiende a infinito si V es estrictamente positiva, como queríamos mostrar.

Finalmente, consideremos el caso en el que V también pueda tomar el valor cero. En tal caso, $\langle\widehat{V}\rangle$ podría anularse, pero sólo si el estado cuántico está en el *kernel* de $\widehat{V}$. Se introduce entonces la suposición adicional de que el *kernel* está formado solamente por autoestados (posiblemente generalizados) correspondientes a un único autovalor $\overline{H}_0$ de $\widehat{H}_0$. Esta condición es válida cuando V se anula solamente en $\overline{H}_0$ o cuando V se anula, además, para algún otro valor de H_0, pero dicho valor no pertenece al espectro de $\widehat{H}_0$. Cuando el sistema se aproxime a un estado en el *kernel* de $\widehat{V}$, la incertidumbre ΔH_0 tenderá a cero y se tendrá una situación totalmente similar a la analizada en el caso del conjunto de hipótesis 1). Como en ese caso, concluimos que el cociente $(\Delta V/\Delta H_0)^2$ no puede anularse al aproximarnos al *kernel*. Así, el tercer sumando de las Ecs. (5.10) y (6.10) no es nulo.

En conclusión, con los dos conjuntos de hipótesis considerados a modo de ejemplo, en general siempre existe una incertidumbre espacio-temporal mínima en una cuantización perturbativa de los sistemas analizados.

Apéndice C

Cálculos relacionados con la incertidumbre espacio-temporal para paquetes de onda

Este apéndice contiene el cálculo de los valores medios, incertidumbres y covarianza de los operadores $\widehat{V}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{W}_\eta$ y $\widehat{Z}_\eta$ introducidos en los capítulos 5 y 6, adoptando la aproximación hasta orden siguiente al primero para bajas energías y con la restricción de que los estados cuánticos sean paquetes de onda gaussianos (en la teoría cuántica libre con variables elementales dadas por las coordenadas espaciales y momentos de fondo). Además, para simplificar los cálculos, no se efectuará el análisis en tres dimensiones espaciales, sino sólo en una. No es de esperar que esta reducción afecte cualitativamente a los resultados.

Concretamente, adoptaremos una representación estándar de momentos en una dimensión, con paquetes de onda dados por las siguientes funciones de onda:

$$\Psi(\Pi_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \, e^{-(\Pi_1-\nu)^2/(4\sigma^2)} e^{-i\mu\Pi_1}. \tag{C.1}$$

Aquí, $\nu := \langle \widehat{\Pi_1} \rangle$, $\sigma := \Delta\Pi_1$, y $\mu := \langle \widehat{q^1} \rangle$, siendo q^1 la posición de fondo inicial (se prescinde de su subíndice 0 para simplificar la notación). Conviene hacer una llamada de atención para que no se confunda el número π (en minúscula) con el módulo del pseudo momento Π (en mayúscula). Notamos, además, que en una dimensión $\Pi = |\Pi_1|$.

De la dependencia funcional de los paquetes de onda queda claro que las cantidades que se quieren calcular dependerán de los parámetros μ, ν, y σ. Por tanto, para calcular los valores de los límites (5.20), se necesita expresar el límite $\Delta H_0 \to 0$ en términos de esos parámetros. En la aproximación estudiada, $H_0 = k\Pi$ para el caso *sin masa*, y un cálculo trivial demuestra que la incertidumbre ΔH_0 para los paquetes de onda está dada por

$$(\Delta H_0)^2 = k^2(\Delta\Pi)^2 = k^2\left(\sigma^2 + \nu^2 - \langle\widehat{\Pi}\rangle^2\right) := \Upsilon^2(\sigma,\nu), \tag{C.2}$$

$$\langle\widehat{\Pi}\rangle = |\nu|\,\mathrm{erf}\left(\frac{|\nu|}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\, e^{-\nu^2/(2\sigma^2)}. \tag{C.3}$$

Merece la pena destacar que $\langle\widehat{\Pi}\rangle$, el valor esperado del módulo del pseudo momento, es en general distinto de ν. Por otra parte, hemos introducido en nuestras expresions la función error:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dy\, e^{-y^2}, \tag{C.4}$$

para la que se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1. \tag{C.5}$$

De las ecuaciones anteriores se ve que $\langle\widehat{\Pi}\rangle \approx |\nu|$ y $\Delta H_0 \approx k\sigma$ para pequeñas incertidumbres ΔH_0. Por medio del teorema de la función implícita, se puede usar entonces la relación $\Delta H_0 = \Upsilon(\sigma,\nu)$ (siendo Υ la raíz cuadrada de Υ^2) para definir σ como función de ΔH_0 en un entorno del origen de estas cantidades, siempre que $\partial_\sigma\Upsilon$ no se anule allí. En realidad, se tiene que $\lim_{\sigma\to 0}\partial_\sigma\Upsilon = k \neq 0$. Por consiguiente, se puede reemplazar el límite $\Delta H_0 \to 0$ por $\sigma \to 0$. Además, se puede sustituir la derivada parcial $\partial/\partial\Delta H_0$ por $(\partial\sigma/\partial\Delta H_0)(\partial/\partial\sigma)$, donde $\lim_{\sigma\to 0}(\partial\sigma/\partial\Delta H_0) = 1/k$. Estas consideraciones conducen a los resultados dados en el resto de este apéndice, donde se analizan simultáneamente los casos de las incertidumbres en el tiempo físico y en la longitud física. Para ello denotamos conjuntamente a los operadores $\widehat{V}$ e $\widehat{Y}$ por $\widehat{Y}_\alpha$, y a $\widehat{W}_\eta$ y $\widehat{Z}_\eta$ por $\widehat{Z}_{\alpha,\eta}$, donde $\alpha = 0$ se refiere a los operadores del caso temporal, $\widehat{V}$ y $\widehat{W}_\eta$, y $\alpha = 1$ a los del caso espacial, $\widehat{Y}$ y $\widehat{Z}_\eta$.

En la aproximación a primer orden para el caso *sin masa*, los operadores $\widehat{Y}_\alpha$ y $\widehat{Z}_{\alpha,\eta}$ adoptan expresiones de la forma [véanse las Ecs. (5.14) y (6.16)]:

$$\begin{aligned}\widehat{Y}_\alpha &= \kappa_\alpha + k\frac{\lambda_\alpha}{E_P}\widehat{\Pi},\\ \widehat{Z}_{\alpha,\eta} &= \eta\frac{\delta_\alpha}{E_P}\widehat{s}_0 = \eta\frac{\delta_\alpha}{2E_P}\left(\widehat{\Pi_1}\widehat{q}^1 + \widehat{q}^1\,\widehat{\Pi_1}\right),\end{aligned} \tag{C.6}$$

donde λ_α y δ_α son ciertas constantes no nulas, η puede tomar valores 0 ó 1, $\kappa_0 = 1$ y $\kappa_1 = k$. Se ha hecho uso de que en esta aproximación $\widehat{H}_0 = k\widehat{\Pi}$.

Un cálculo inmediato siguiendo las directrices expuestas muestra que para paquetes de onda

$$\lim_{\Delta H_0\to 0}\langle\widehat{Y}_\alpha\rangle^2 = \lim_{\sigma\to 0}\langle\widehat{Y}_\alpha\rangle^2 = \left(\kappa_\alpha + k\frac{\lambda_\alpha}{E_P}|\nu|\right)^2 := c_\alpha^{(1)}. \tag{C.7}$$

De la misma forma, se encuentra que

$$\begin{aligned}
\Delta H_0 \frac{\partial \langle \widehat{Y}_\alpha \rangle^2}{\partial \Delta H_0} &= 2k \frac{\lambda_\alpha}{E_P} \left(\kappa_\alpha + k \frac{\lambda_\alpha}{E_P} \langle \widehat{\Pi} \rangle \right) \frac{\partial \langle \widehat{\Pi} \rangle}{\partial \sigma} \Delta H_0 \frac{\partial \Delta H_0}{\partial \sigma}, \\
\Delta H_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta H_0} &= \frac{\sigma^2 + \nu^2 - \langle \widehat{\Pi} \rangle^2}{\sigma - \langle \widehat{\Pi} \rangle (\partial \langle \widehat{\Pi} \rangle / \partial \sigma)}.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

De la Ec. (C.3) se puede comprobar que cuando $\sigma \to 0$ ($\Delta H_0 \to 0$), $\partial \langle \widehat{\Pi} \rangle / \partial \sigma$ tiende a cero lo suficientemente rápido como para asegurar que

$$\lim_{\Delta H_0 \to 0} \Delta H_0 \frac{\partial \langle \widehat{Y}_\alpha \rangle^2}{\partial \Delta H_0} = 0. \tag{C.9}$$

Por otra parte, un cálculo similar lleva a la siguiente incertidumbre para el operador $\widehat{Z}_{\alpha,\eta}$:

$$(\Delta Z_{\alpha,\eta})^2 = \eta \frac{\delta_\alpha^2}{E_P^2} \left(\langle \widehat{s}_0^2 \rangle - \langle \widehat{s}_0 \rangle^2 \right) = \eta \frac{\delta_\alpha^2}{E_P^2} \left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2} + \mu^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \right). \tag{C.10}$$

De aquí y de las Ecs. (C.2) y (C.8), no es difícil probar que

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta H_0 \to 0} (\Delta H_0)^2 (\Delta Z_{\alpha,\eta})^2 &= \eta\, k^2 \frac{\delta_\alpha^2}{4E_P^2}\, \nu^2 := c_\alpha^{(2)}, \\
\lim_{\Delta H_0 \to 0} (\Delta H_0)^3 \frac{\partial (\Delta Z_{\alpha,\eta})^2}{\partial \Delta H_0} &= -\eta k^2 \frac{\delta_\alpha^2}{2E_P^2}\, \nu^2 := c_\alpha^{(3)}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Finalmente, la covarianza de $\widehat{Y}_\alpha$ y $\widehat{Z}_{\alpha,\eta}$ está dada por

$$\operatorname{cov}(\widehat{Y}_\alpha, \widehat{Z}_{\alpha,\eta}) = \eta k \frac{\lambda_\alpha \delta_\alpha}{E_P^2} \left(\langle \widehat{\Pi} \widehat{s}_0 + \widehat{s}_0 \widehat{\Pi} \rangle - 2 \langle \widehat{\Pi} \rangle \langle \widehat{s}_0 \rangle \right), \tag{C.12}$$

que para paquetes de onda da

$$\operatorname{cov}(\widehat{Y}_\alpha, \widehat{Z}_{\alpha,\eta}) = 2\eta k\, \frac{\lambda_\alpha \delta_\alpha}{E_P^2}\, \mu \sigma^2 \operatorname{sign}(\nu) \operatorname{erf}\left(\frac{|\nu|}{\sqrt{2}\sigma} \right). \tag{C.13}$$

Por tanto, se puede comprobar que

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta H_0 \to 0} \operatorname{cov}(\widehat{Y}_\alpha, \widehat{Z}_{\alpha,\eta}) &= 0, \\
\lim_{\Delta H_0 \to 0} \Delta H_0 \frac{\partial [\operatorname{cov}(\widehat{Y}_\alpha, \widehat{Z}_{\alpha,\eta})]}{\partial \Delta H_0} &= \lim_{\sigma \to 0} \Delta H_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta H_0} \frac{\partial [\operatorname{cov}(\widehat{Y}_\alpha, \widehat{Z}_{\alpha,\eta})]}{\partial \sigma} = 0.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

En conclusión, se ve que las condiciones (5.20) se satisfacen.

Apéndice D

Cálculo de integrales de Laplace para agujeros negros de Schwarzschild-AdS

En este apéndice explicamos el cálculo del valor medio de los operadores $\widehat{Q}$ y $\widehat{Q}^2$ introducidos en el capítulo 7, con la limitación de que los estados cuánticos tengan el comportamiento gaussiano dado en la Ec. (7.19). Obtendremos desarrollos asintóticos para estas cantidades en potencias de la constante cosmológica, suponiendo que esta constante es pequeña.

La expresión (7.24) para los valores medios de potencias de $\widehat{Q}$ es una integral de Laplace. Para calcularla, dividimos cada integral en dos partes. Una se integra de $-\gamma$ a 0 y la otra de cero a infinito. Para la primera parte, hacemos el cambio de variable $v = -\sqrt{z}$, mientras que para la segunda parte hacemos $v = \sqrt{z}$. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{Q}^n \rangle &= \frac{1}{\Xi(\mu)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[I_{n-}(z) + I_{n+}(z) \right], \\ I_{n\mp}(z) &= \int_0^{r_\mp} \frac{dz\, e^{-z/\lambda}}{2\sqrt{z}\,[1 + (\gamma \mp \sqrt{z})^2]^n}, \end{aligned} \tag{D.1}$$

con $r_- = \gamma^2$ y $r_+ = \infty$.

Estas integrales pertenecen a una amplia familia de la forma

$$I(z) = \int_0^r dz F(z) e^{-\Omega z}, \quad r > 0. \tag{D.2}$$

En el límite $\Omega \to +\infty$, el lema de Watson [172] da el desarrollo asintótico completo de cualquier integral de esta clase con tal que $F(z)$ sea continua en el intervalo $0 \leq z \leq r$ y admita un desarrollo en serie asintótico del tipo

$$F(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\beta k}, \quad z \to 0^+. \tag{D.3}$$

Es necesario que $\alpha > -1$ y $\beta > 0$ para que la integral converja en $z = 0$. Además, si $r = +\infty$, se debe tener $F(z) \ll e^{qz}$ (cuando $z \to +\infty$) para alguna constante positiva q. Si se satisfacen las condiciones anteriores, se tiene que

$$I(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(\alpha + \beta k + 1)}{\Omega^{\alpha+\beta k+1}}, \quad \Omega \to +\infty. \tag{D.4}$$

Aquí, el símbolo Γ representa la función Gamma de Euler [133].

En nuestro caso, tenemos los integrandos

$$F_{n\mp}(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{1}{(1+\gamma^2)^n} \left(1 \mp \frac{2\gamma\sqrt{z}}{1+\gamma^2} + \frac{z}{1+\gamma^2}\right)^{-n}. \tag{D.5}$$

Si ahora llamamos

$$x = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad y = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \tag{D.6}$$

es fácil darse cuenta de que el factor en el paréntesis de la expresión anterior es la función generatriz de los polinomios de Chebyshev de segunda especie, $U_k(x)$ [133]:

$$G(x, \mp y) = \frac{1}{1 - 2x(\pm y) + y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)(\pm y)^k. \tag{D.7}$$

Por tanto, es inmediato hallar el desarrollo en serie asintótico de las funciones $F_{n\mp}$. Según el lema de Watson, el límite superior de integración r no afecta al desarrollo asintótico en serie de potencias de la integral. Así, pues, podemos sumar en primer lugar F_{n-} y F_{n+} para obtener una única serie asintótica para el integrando y luego aplicar la fórmula (D.4).

Para $n = 1$, por ejemplo, partimos el desarrollo en serie de $G(x, \mp y)$ en potencias pares e impares de y. Obviamente, las contribuciones de todas las potencias impares se cancelan cuando sumamos $G(x, y)$ y $G(x, -y)$. Obtenemos entonces

$$F_{1-}(z) + F_{1+}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{2k}(x)}{(1+\gamma^2)^{k+1}} z^k. \tag{D.8}$$

Comparando esta expresión con la Ec. (D.3) encontramos

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad a_k = \frac{U_{2k}(x)}{(1+\gamma^2)^{k+1}}. \tag{D.9}$$

Introduciendo estos valores en la Ec. (D.4) con $\Omega = \lambda^{-1}$, obtenemos que

$$I_{1-}(z) + I_{1+}(z) = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(1+\gamma^2)^{k+1}} \lambda^k U_{2k}(x), \tag{D.10}$$

donde

$$\Gamma(k+1/2) = \frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}, \tag{D.11}$$

y adoptamos el convenio $(-1)!! = 1$. Además, en el sector de masa de agujero negro infinita ($\mu \to \infty$), podemos escribir $\Xi(\mu) \approx \sqrt{\pi}$ exceptuando correcciones exponencialmente despreciables. Así

$$\langle \hat{V} \rangle \approx \frac{1}{1+\gamma^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{2(1+\gamma^2)} \right]^k (2k-1)!!\, U_{2k}(x). \tag{D.12}$$

Para $n = 2$, repitiendo los pasos previos, el lema de Watson lleva a

$$\langle \hat{V}^2 \rangle \approx \frac{1}{(1+\gamma^2)^2} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{2(1+\gamma^2)} \right]^p (2p-1)!! \sum_{k=0}^{2p} U_k(x) U_{2p-k}(x). \tag{D.13}$$

Finalmente, recordamos que los primeros polinomios de Chebyshev de segunda especie son $U_0(x) = 1$ y $U_1(x) = 2x$.

Bibliografía

[1] W. Heisenberg, Z. Phys. **43**, 172 (1927). *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.*

[2] A. Galindo y P. Pascual, *Quantum Mechanics I*, editado por W. Beiglbock (Springer-Verlag, Berlín, 1990).

[3] A. Messiah, *Mécanique Quantique I* (Dunod, París, 1969).

[4] A. Einstein, Ann. Phys. **49**, 769 (1916). *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.*

[5] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145 (1995); y las referencias citadas en ese trabajo. *Quantum gravity and minimum length.*

[6] T. Padmanabhan, Class. Quantum Grav. **4**, L107 (1987). *Limitations on the operational definition of space-time events and quantum gravity.*

[7] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3415 (1994). *Limits on the measurability of space-time distances in (the semi-classical approximation of) quantum gravity.*

[8] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys. Lett. A **11**, 1411 (1996). *On local observations in quantum gravity.*

[9] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys. Lett. A **13**, 1319 (1998). *Dimensionful deformations of Poincaré symmetries for a quantum gravity without ideal observers.*

[10] G. Amelino-Camelia, Phys. Rev. D **62**, 024015 (2000). *Gravity-wave interferometers as probes of a low-energy effective quantum gravity.*

[11] L. Diósi y B. Lukács, Ann. Phys. (Leipzig) **44**, 488 (1987). *In favor of a Newtonian quantum gravity.*

[12] L. Diósi y B. Lukács, Phys. Lett. A **142**, 331 (1989). *On the minimum uncertainty of space-time geodesics.*

[13] F. Károlyházy, Nuovo Cimento A **42**, 390 (1966). *Gravitation and quantum mechanics of macroscopic objects.*

[14] Y. J. Ng y H. van Dam, Mod. Phys. Lett. A **9**, 335 (1994). *Limit to space-time measurement.*

[15] Y. J. Ng y H. van Dam, Mod. Phys. Lett. A **10**, 2801 (1995). *Remarks on gravitational sources.*

[16] Y. J. Ng y H. van Dam, Found. Phys. **30**, 795 (2000). *Measuring the foaminess of space-time with gravity-wave interferometers.*

[17] C. A. Mead, Phys. Rev. **135**, B849 (1964). *Possible connection between gravitation and fundamental length.*

[18] N. Itzhaki, Phys. Lett. B **328**, 274 (1994). *Time measurement in quantum gravity.*

[19] G. Veneziano, Europhys. Lett. **2**, 199 (1986). *A stringy nature needs just two constants.*

[20] D. Amati, M. Ciafoloni y G. Veneziano, Phys. Lett. B **216**, 41 (1989). *Can space-time be probed below the string size?*

[21] K. Konishi, G. Paffuti y P. Provero, Phys. Lett. B **234**, 276 (1990). *Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory.*

[22] R. Guida, K. Konishi y P. Provero, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1487 (1991). *On the short distance behavior of string theories.*

[23] T. Yoneya, Mod. Phys. Lett. A **4**, 1587 (1989). *On the interpretation of minimal length in string theories.*

[24] C. Rovelli y L. Smolin, Nucl. Phys. B **442**, 593 (1995). *Discreteness of area and volume in quantum gravity.*

[25] C. Rovelli y L. Smolin, Nucl. Phys. B **456**, 753 (1995). *Erratum*

[26] A. Ashtekar y J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **14**, A55 (1997). *Quantum theory of geometry I: area operators.*

[27] J. Wheeler, Ann. Phys. (N.Y.) **2**, 604 (1957). *On the nature of quantum geometrodynamics.*

[28] S. W. Hawking, Nucl. Phys. B **144**, 349 (1978). *Spacetime foam.*

[29] A. Ashtekar, C. Rovelli y L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **69**, 237 (1992). *Weaving a classical geometry with quantum threads.*

[30] J. Ellis, N. Mavromatos y D. V. Nanopoulos, Phys. Lett. B **293**, 37 (1992). *String theory modifies quantum mechanics.*

[31] H. Salecker y E. P. Wigner, Phys. Rev. **109**, 571 (1958). *Quantum limitations of the measurement of the space-time distances.*

[32] R. J. Adler, I. M. Nemenman, J. M. Overduin y D. I. Santiago, Phys. Lett. B **477**, 424 (2000). *On the detectability of quantum space-time foam with gravitational wave interferometers.*

[33] J. C. Baez y S. J. Olson, Class. Quantum Grav. **19**, L121 (2002). *Uncertainty in measurements of distance.*

[34] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N. E. Mavromatos y D. V. Nanopoulos, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 607 (1997). *Distance measurement and wave dispersion in a Liouville-string approach to quantum gravity.*

[35] G. Amelino-Camelia, Nature **398**, 216 (1999). *Gravity-wave interferometers as quantum-gravity detectors.*

[36] G. 't Hooft, *Salamfestschrift: a collection of talks*, editado por A. Ali, J. Ellis y S. Randjbar-Daemi (World Scientific, Singapur, 1993), arXiv: gr-qc/9310026. *Dimensional reduction in quantum gravity.*

[37] L. Susskind, J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995). *The world as a hologram.*

[38] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B **477**, 436 (2000). *On the Salecker-Wigner limit and the use of interferometers in space-time foam studies.*

[39] Y. J. Ng y H. van Dam, Phys. Lett. B **477**, 429 (2000). *On Wigner's clock and the detectability of space-time foam with gravitational wave interferometers.*

[40] Y. J. Ng y H. van Dam, Class. Quantum Grav. **20**, 393 (2003). *Comment on "uncertainty in measurements of distance".*

[41] R. Lieu y W. Hillman, Astrophys. J. Lett. **585**, L77 (2003). *The phase coherence of light from extragalactic sources - direct evidence against first order quantum gravity fluctuations in time and space.*

[42] A. Abramovici *et al.*, Phys. Lett. A **218**, 157 (1996). *Improved sensitivity in a gravitational wave interferometer and implications for LIGO.*

[43] C. Bradaschia *et al.*, Nucl. Instrum. Meth. A **289**, 518 (1990). *The VIRGO project: a wide band antenna for gravitational wave detection.*

[44] H. Lück *et al.*, Class. Quantum Grav. **14**, 1471 (1997). *The GEO600 project.*

[45] M. Ando *et al.*, Class. Quantum Grav. **22**, S1283 (2005). *Upper limits on gravitational-wave bursts radiated from stellar-core collapses in our galaxy.*

[46] K. Danzmann, Class. Quantum Grav. **13**, A247 (1996). *LISA: Laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements.*

[47] P. R. Saulson, *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors* (World Scientific, Singapur, 1994).

[48] B. Abbott *et al.* (LSC), Class. Quantum Grav. **23**, S29 (2006). *Search for gravitational-wave bursts in LIGO's third science run.*

[49] A. Abramovici *et al.*, Science **256**, 325 (1992). *LIGO: The laser interferometer gravitational-wave observatory.*

[50] R. Ragazzoni, M. Turatto y W. Gaessler, Astrophys. J. Lett. **587**, L1 (2003). *Lack of observational evidence for quantum structure of space - time at Planck scales.*

[51] D. H. Coule, Class. Quantum Grav. **20**, 3107 (2003). *Planck scale still safe from stellar images.*

[52] Y. J. Ng, H. van Dam y W.A. Christiansen, Astrophys. J. Lett. **591**, L87 (2003). *Probing Planck-scale physics with extragalactic sources?*

[53] J. Linsley, Phys. Rev. Lett. **10**, 146 (1963). *Evidence for a primary cosmic-ray particle with energy* 10^{20} eV*.*

[54] M. M. Winn, J. Ulrichs, L. S. Peak, C. B. McCusker y L. Horton, J. Phys. G **12**, 653 (1986). *The cosmic-ray energy spectrum above* 10^{17} eV*.*

[55] D. J. Bird *et al.* [HIRES Collaboration], Phys. Rev. Lett. **71**, 3401 (1993). *Evidence for correlated changes in the spectrum and composition of cosmic rays at extremely high energies.*

[56] M. Ave, J. Knapp, J. Lloyd-Evans, M. Marchesini y A. A. Watson, Astropart. Phys. **19**, 47 (2003). *The energy spectrum of cosmic rays in the range* $3 \times 10^{17} - 4 \times 10^{18}$ eV *as measured with the Haverah Park array.*

[57] M. Takeda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1163 (1998). *Extension of the cosmic-ray energy spectrum beyond the predicted Greisen-Zatsepin-Kuz'min cutoff.*

[58] M. Takeda *et al.*, Astropart. Phys. **19**, 447 (2003). *Energy determination in the Akeno giant air shower array experiment.*

[59] J. W. Elbert y P. Sommers, Astrophys. J. **441**, 151 (1995). *In search of a source for the 320 EeV FlyŠs Eye cosmic ray.*

[60] K. Greisen, Phys. Rev. Lett. **16**, 748 (1966). *End to the cosmic-ray spectrum?*

[61] G.T. Zatsepin y V.A. Kuz'min, JETP Lett. **4**, 78 (1966). *Upper limit of the spectrum of cosmic rays.*

[62] F. W. Stecker, Phys. Rev. Lett. **21**, 1016 (1968). *Effect of photomeson production by the universal radiation field on high-energy cosmic rays.*

[63] A. I. Nikishov, Sov. Phys. JETP **14**, 393 (1962). *Absorption of high-energy photons in the universe.*

[64] J. Gould y G. Schréder, Phys. Rev. Lett. **16**, 252 (1966). *Opacity of the universe to high-energy photons.*

[65] J. Gould y G. Schréder, Phys. Rev. **155**, 1404 (1967). *Pair production in photon-photon collisions.*

[66] F. W. Stecker, O. C. De Jager y M. H. Salomon, Ap. J. **390**, L49 (1992). *TeV gamma rays from 3C 279 - A possible probe of origin and intergalactic infrared radiation fields.*

[67] R. J. Protheroe y H. Meyer, Phys. Lett. B **493**, 1 (2000). *An infrared background-TeV gamma-ray crisis?*

[68] F. Aharonian *et al.*, Astron. Astrophys. **349**, 11 (1999). *The time averaged TeV energy spectrum of Mkn 501 of the extraordinary 1997 outburst as measured with the stereoscopic Cherenkov telescope system of HEGRA.*

[69] R. U. Abbasi *et al.*, Astrophys. J. **610**, L73 (2004). *Study of small - scale anisotropy of ultrahigh energy cosmic rays observed in stereo by HIRES.*

[70] G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. E. Navromatos, D. V. Nanopoulos y S. Sarkar, Nature **393**, 763 (1998). *Potential sensitivity of gamma-ray burster observations to wave dispersion in vacuo.*

[71] S. R. Coleman y S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999). *High-energy tests of Lorentz invariance.*

[72] O. Bertolami y C. S. Carvalho, Phys. Rev. D **61**, 103002 (2000). *Proposed astrophysical test of Lorentz invariance.*

[73] T. Kifune, Astrophys. J. **518**, L21 (1999). *Invariance violation extends the cosmic ray horizon?*

[74] W. Kluzniak, Astropart. Phys. **11**, 117 (1999). *Transparency of the universe to TeV photons in some models of quantum gravity.*

[75] T. Jacobson, S. Liberati y D. Mattingly, Phys. Rev. D **66**, 081302 (2002). *TeV astrophysics constraints on Planck scale Lorentz violation.*

[76] G. Amelino-Camelia y T. Piran, Phys. Lett. B **497**, 265 (2001). *Cosmic rays and TeV photons as probes of quantum properties of space-time.*

[77] G. Amelino-Camelia y T. Piran, Phys. Rev. D **64**, 036005 (2001). *Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the ultrahigh energy cosmic ray and the TeV-photon paradoxes.*

[78] J. P. Norris, J. T. Bonnell, G. F. Marani y J. D. Scargle, *Proceedings of the 26th International Cosmic Ray Conference*, editado por B. L. Dingus, D. B. Kieda y M. H. Salamon (American Institute of Physics, 2000), arXiv: astro-ph/9912136. *GLAST, GRBs, and quantum gravity.*

[79] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B **528**, 181 (2002). *Space-time quantum solves three experimental paradoxes.*

[80] G. Amelino-Camelia, Mod. Phys. Lett. A **17**, 899 (2002). *Quantum gravity phenomenology: status and prospects.*

[81] G. Amelino-Camelia, Nature **418**, 34 (2002). *Doubly special relativity.*

[82] G. Amelino-Camelia, *Proceedings of the Tenth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, editado por M. Novello, S. Perez-Bergliaffa y R. Ruffini (World Scientific, Singapur, 2005), arXiv: gr-qc/0402009. *A perspective on quantum gravity phenomenology.*

[83] S. Sarkar, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1025 (2002). *Possible astrophysical probes of quantum gravity.*

[84] D. Heyman, F. Hinterleitner y S. Major, Phys. Rev. D **69**, 105016 (2004). *Reaction thresholds in doubly special relativity.*

[85] G. Amelino-Camelia, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 35 (2002). *Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale.*

[86] G. Amelino-Camelia, Phys. Lett. B **510**, 255 (2001). *Testable scenario for relativity with minimum length.*

[87] J. Kowalski-Glikman, Phys. Lett. A **286**, 391 (2001). *Observer independent quantum of mass.*

[88] N. R. Bruno, G. Amelino-Camelia y J. Kowalski-Glikman, Phys. Lett. B **522**, 133 (2001). *Deformed boost transformations that saturate at the Planck scale.*

[89] J. Magueijo y L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **88**, 190403 (2002). *Lorentz invariance with an invariant energy scale.*

[90] J. Magueijo y L. Smolin, Phys. Rev. D **67**, 044017 (2003). *Generalized Lorentz invariance with an invariant energy scale.*

[91] J. Kowalski-Glikman y S. Nowak, Phys. Lett. B **539**, 126 (2002). *Doubly special relativity theories as different bases of kappa Poincaré algebra.*

[92] S. Judes y M. Visser, Phys. Rev. D **68**, 045001 (2003). *Conservation laws in "doubly special relativity".*

[93] J. Lukierski, *Proceedings of the International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries 2003"*, editado por E. Ivanov y A. Pashnev (Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 2004), arXiv: hep-th/0402117. *Relation between quantum κ-Poincaré framework and doubly special relativity.*

[94] D. Kimberly, J. Magueijo y J. Medeiros, Phys. Rev. D **70**, 084007 (2004). *Nonlinear relativity in position space.*

[95] S. Mignemi, Phys. Rev. D **68**, 065029 (2003). *Transformations of coordinates and Hamiltonian formalism in deformed special relativity.*

[96] F. Hinterleitner, Phys. Rev. D **71**, 025016 (2005). *Canonical doubly special relativity theory.*

[97] J. L. Cortés y J. Gamboa, Phys. Rev. D **71**, 065015 (2005). *Quantum uncertainty in doubly special relativity.*

[98] S. Hossenfelder, Class. Quantum Grav. **23**, 1815 (2006). *A note on theories with a minimal length.*

[99] P. Galán y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **70**, 124003 (2004). *Quantum time uncertainty in a gravity's rainbow formalism.*

[100] P. Galán y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **72**, 044019 (2005). *Length uncertainty in a gravity's rainbow formalism.*

[101] J. Lukierski, H. Ruegg, A. Nowicki y V. N. Tolstoy, Phys. Lett. B **264**, 331 (1991). *q-deformation of Poincaré algebra.*

[102] J. Lukierski, A. Nowicki y H. Ruegg, Phys. Lett. B **293**, 344 (1992). *New quantum Poincaré algebra and κ-deformed field theory.*

[103] S. Majid y H. Ruegg, Phys. Lett. B **334**, 348 (1994). *Bicrossproduct structure of kappa Poincaré group and non-commutative geometry.*

[104] J. Lukierski, H. Ruegg y W. J. Zakrzewski, Ann. Phys. **243**, 90 (1995). *Classical and quantum mechanics of free κ-relativistic systems.*

[105] J. Magueijo y L. Smolin, Class. Quantum Grav. **21**, 1725 (2004). *Gravity's rainbow.*

[106] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, Phys. Rev. D **69**, 044017 (2004). *Time uncertainty in quantum gravitational systems.*

[107] G. Beck, Z. Phys. **33**, 713 (1925). *Zur Theorie binärer Gravitationsfelder.*

[108] A. Einstein y N. Rosen, J. Franklin Inst. **223**, 43 (1937). *On gravitational waves.*

[109] J. F. Barbero G., G. A. Mena Marugán y E. J. S. Villaseñor, Phys. Rev. D **67**, 124006 (2003). *Microcausality and quantum cylindrical gravitational waves.*

[110] M. E. Angulo y G. A. Mena Marugán, Int. J. Mod. Phys. D **9**, 669 (2000). *Large quantum gravity effects: Cylindrical waves in four dimensions.*

[111] G. A. Mena Marugán y M. Montejo, Phys. Rev. D **58**, 104017 (1998). *Quantization of pure gravitational plane waves.*

[112] K. Kuchař, Phys. Rev. D **4**, 955 (1971). *Canonical quantization of cylindrical gravitational waves.*

[113] A. Ashtekar y M. Pierri, J. Math. Phys. **37**, 6250 (1996). *Probing quantum gravity through exactly soluble midi-superspaces I.*

[114] A. Ashtekar y M. Varadarajan, Phys. Rev. D **50**, 4944 (1994). *Striking property of the gravitational Hamiltonian.*

[115] M. Varadarajan, Phys. Rev. D **52**, 2020 (1995). *Gauge fixing of one Killing field reductions of canonical gravity: The case of asymptotically flat induced two-geometry.*

[116] A. Ashtekar, J. Bičák y B. G. Schmidt, Phys. Rev. D **55**, 669 (1997). *Asymptotic structure of symmetry-reduced general relativity.*

[117] A. Ashtekar, J. Bičák y B. G. Schmidt, Phys. Rev. D **55**, 687 (1997). *Behavior of Einstein-Rosen waves at null infinity.*

[118] S. Lloyd, Nature **406**, 1047 (2000). *Ultimate physical limits to computation.*

[119] Y. J. Ng y H. van Dam, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 1328 (2005). *Space-time foam, holographic principle, and black hole quantum computers.*

[120] R. M. Wald, *General Relativity* (Chicago Press, Chicago, 1984).

[121] A. Ashtekar, A. Corichi y K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 418 (1999). *Isolated horizons: the classical phase space.*

[122] A. Ashtekar *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3564 (2000). *Generic isolated horizons and their applications.*

[123] A. Ashtekar, C. Beetle y S. Fairhurst, Class. Quantum Grav. **17**, 253 (2000). *Mechanics of isolated horizons.*

[124] A. Ashtekar, C. Beetle y J. Lewandowski, Phys. Rev. D **64**, 044016 (2001). *Mechanics of rotating isolated horizons.*

[125] A. Ashtekar, S. Fairhurst y B. Krishnan, Phys. Rev. D **62**, 104025 (2000). *Isolated horizons: Hamiltonian evolution and the first law.*

[126] P. Galán y G. A. Mena Marugán, Int. J. Mod. Phys. A, aceptado para publicación; arXiv: gr-qc/0702027. *Canonical realizations of doubly special relativity.*

[127] P. Galán, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D, aceptado para publicación. *Quantum time uncertainty in Schwarzschild–anti-de Sitter black holes.*

[128] M. Henneaux y C. Teitelboim, Commun. Math. Phys. **98**, 391 (1985). *Asymptotically anti-de Sitter spaces.*

[129] J. D. Brown y M. Henneaux, Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986). *Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three dimensional gravity.*

[130] A. Corichi y A. Gomberoff, Phys. Rev. D **69**, 064016 (2004). *Black holes in de Sitter space: masses, energies and entropy bounds.*

[131] A. Ashtekar y S. Das, Class. Quantum Grav. **17**, L17 (2000). *Asymptotically anti-de Sitter spacetimes: conserved quantities.*

[132] A. Ashtekar, J. C. Baez y K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1 (2001). *Quantum geometry of isolated horizons and black hole entropy.*

[133] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, editado por A. Jeffrey y D. Zwillinger (Academic Press, San Diego, 2000), 6th ed.

[134] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973). *Black holes and entropy.*

[135] J. D. Bekenstein, Lett. Nuovo Cimento **4**, 737 (1972). *Black holes and the second law.*

[136] D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett. **25**, 1596 (1970). *Reversible and irreversible transformations in black-hole physics.*

[137] D. Christodoulou y R. Ruffini, Phys. Rev. D **4**, 3552 (1971). *Reversible transformations of a charged black hole.*

[138] S. Hod, Phys. Rev. D **59**, 024014 (1999). *Best approximation to a reversible process in black hole physics and the area spectrum of spherical black holes.*

[139] A. Strominger y C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 99 (1996). *Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy.*

[140] C. Rovelli, Phys. Rev. Lett. **77**, 3288 (1996). *Black hole entropy from loop quantum gravity.*

[141] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi y K. Krasnov, Phys. Rev. Lett. **80**, 904 (1998). *Quantum geometry and black hole entropy.*

[142] S. N. Solodukhin, Phys. Rev. D **51**, 609 (1995). *Conical singularity and quantum corrections to the entropy of a black hole.*

[143] S. N. Solodukhin, Phys. Rev. D **51**, 618 (1995). *"Nongeometric" contribution to the entropy of a black hole due to quantum corrections.*

[144] S. N. Solodukhin, Phys. Rev. D **57**, 2410 (1998). *Entropy of the Schwarzschild black hole and the string–black-hole correspondence.*

[145] R. K. Kaul y P. Majumdar, Phys. Rev. Lett. **84**, 5255 (2000). *Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy.*

[146] A. Chatterjee y P. Majumdar, Phys. Rev. Lett. **92**, 141301 (2004). *Universal canonical black hole entropy.*

[147] A. Chatterjee y P. Majumdar, Pramana **63**, 851 (2004). *Universal canonical entropy for gravitating systems.*

[148] R. J. Adler, P. Chen y D. I. Santiago, Gen. Rel. Grav. **33**, 2101 (2001). *The generalized uncertainty principle and black hole remnants.*

[149] P. Chen y R. J. Adler, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **124**, 103 (2003). *Black hole remnants and dark matter.*

[150] M. Cavaglia, S. Das y R. Maartens, Class. Quantum Grav. **20**, L205 (2003). *Will we observe black holes at LHC?*

[151] M. Cavaglia y S. Das, Class. Quantum Grav. **21**, 4511 (2004). *How classical are TeV scale black holes?*

[152] A. J. M. Medved y E. C. Vagenas, Phys. Rev. D **70**, 124021 (2004). *When conceptual worlds collide: the generalized uncertainty principle and the Bekenstein-Hawking entropy.*

[153] G. Amelino-Camelia, M. Arzano y A. Procaccini, Phys. Rev. D **70**, 107501 (2004). *Severe constraints on the loop-quantum-gravity energy-momentum dispersion relation from the black-hole area-entropy law.*

[154] G. Amelino-Camelia, M. Arzano y A. Procaccini, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 2337 (2004). *A glimpse at the flat-spacetime limit of quantum gravity using the Bekenstein argument in reverse.*

[155] G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling y G. Mandacini, Class. Quantum Grav. **23**, 2585 (2006). *Black-hole thermodynamics with modified dispersion relations and generalized uncertainty principles.*

[156] Y. Ling, B. Hu y X. Li, Phys. Rev. D **73**, 087702 (2006). *Modified dispersion relations and black hole physics.*

[157] Y. Ling, X. Li y H. Zhang, arXiv: gr-qc/0512084. *Thermodynamics of modified black holes from gravity's rainbow.*

[158] R. Gambini y J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999). *Nonstandard optics from quantum space-time.*

[159] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl y L. F. Urrutia, Phys. Rev. Lett. **84**, 2318 (2000). *Quantum gravity corrections to neutrino propagation.*

[160] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl y L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **65**, 103509 (2002). *Loop quantum gravity and light propagation.*

[161] L. Smolin, Nucl. Phys. B **742**, 142 (2006). *Falsifiable predictions from semiclassical quantum gravity.*

[162] L. Smolin, arXiv: hep-th/0209079. *Quantum gravity with a positive cosmological constant.*

[163] S. Doplicher, K. Fredenhagen y J. E. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994). *Spacetime quantization induced by classical gravity.*

[164] M. Maggiore, Phys. Lett. B **304**, 65 (1993). *A generalized uncertainty principle in quantum gravity.*

[165] M. Maggiore, Phys. Rev. D **49**, 5182 (1994). *Quantum groups, gravity and the generalized uncertainty principle.*

[166] F. Scardigli, Phys. Lett. B **452**, 39 (1999). *Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment.*

[167] R. J. Adler y D. I. Santiago, Mod. Phys. Lett. A **14**, 1371 (1999). *On gravity and the uncertainty principle.*

[168] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **23**, 287 (1981). *Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems.*

[169] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **43**, 199 (1975). *Particle creation by black holes.*

[170] P. Galán y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **74**, 044035 (2006). *Entropy and temperature of black holes in a gravity's rainbow.*

[171] J. Hackett, Class. Quantum Grav. **23**, 3833 (2006). *Asymptotic flatness in rainbow gravity.*

[172] C. M. Bender y S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, (Springer-Verlag, New York, 1999).

El trabajo de tesis presentado ha dado lugar a las siguientes **PUBLICACIONES**:

◇ P. Galán y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **70**, 124003 (2004). *Quantum time uncertainty in a gravity's rainbow formalism.*

◇ P. Galán y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **72**, 044019 (2005). *Length uncertainty in a gravity's rainbow formalism.*

◇ P. Galán y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D **74**, 044035 (2006). *Entropy and temperature of black holes in a gravity's rainbow.*

◇ P. Galán y G. A. Mena Marugán, J. Phys.: Conf. Ser. **66**, 012036 (2007). *Thermodynamics of black holes in gravity's rainbow formalisms.*

◇ P. Galán y G. A. Mena Marugán, Int. J. Mod. Phys. A, aceptado para publicación; arXiv: gr-qc/0702027. *Canonical realizations of doubly special relativity.*

◇ P. Galán, L. J. Garay y G. A. Mena Marugán, Phys. Rev. D, aceptado para publicación. *Quantum time uncertainty in Schwarzschild–anti-de Sitter black holes.*