

## Dinámicas no lineales y caóticas en los mercados financieros\*

**Pablo Coto Millán y José María Sarabia Alegría**

*Departamento de Economía  
Facultad de CCEE y EE, Universidad de Cantabria  
Avda. de los Castros, s/n. 39005 - Santander*

### RESUMEN

En el siguiente trabajo se introducen dos modelos de mercados financieros que dan lugar a un comportamiento caótico. El primero de ellos es un modelo de generaciones solapadas, y satisface las condiciones de Li-Yorke. El segundo, es un modelo de determinación de los precios de los bonos con expectativas racionales y aversión al riesgo. Finalmente, se propone un método general para la estimación de este tipo de dinámicas no lineales.

\* Trabajo parcialmente financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT), proyecto PS93-115. Los autores agradecen los comentarios y sugerencias, a versiones preliminares de este trabajo, de José Miguel Sánchez Molinero, José Villaverde Castro, José María Pérez de Villarreal y Eduard Berenguer Comas. Los errores son de responsabilidad exclusiva de los autores.

## CHAOTIC AND NONLINEAR DYNAMICS IN FINANCIAL MARKETS

### SUMMARY

In the present work two financial market models with chaotic behaviour are introduced. One overlapping generation model is motivated and developed. The second model is based on rational expectations and aversion risk for determining bond pricing in financial markets. Finally, one general method for estimating these nonlinear dynamics are proposed.

### 1. INTRODUCCIÓN

El estudio científico de un fenómeno, consiste generalmente en descifrar el orden oculto. Esto quiere decir que el desorden implica incompreensión para el científico, y de alguna forma una medida de su ignorancia. Así, cuanto menos desordenado sea el fenómeno en estudio, menos probable es el error del científico y más acertadas cabe esperar que sean sus predicciones. Desde este punto de vista, el científico busca regularidades en sus estudios, ya sean estos sobre mecánica de fluidos, sobre propagación de las epidemias o sobre la actividad económica. Sin embargo, los conceptos de orden y desorden han sufrido cambios a lo largo del tiempo. Al principio, el desorden se consideraba algo cercano al azar. La naturaleza del azar ha estado y está aún vinculada al desorden, puesto que lo imprevisible, complejo e irregular se ha asociado generalmente con el desorden. A pesar de esto, los avances en la investigación científica han proporcionado nuevas aportaciones que obligan a una reflexión profunda sobre este modo de proceder y sus implicaciones en los resultados científicos. Los descubrimientos sobre el denominado «caos determinista» han probado que sistemas muy simples pueden evolucionar hacia formas complejas, irregulares y erráticas que a pesar de un determinismo en los valores iniciales y en la estructura del sistema, da lugar a desarrollos cercanos al azar. Por otro lado, estos hallazgos ponen de manifiesto que las situaciones en las que existe caos no son en modo alguno casos excepcionales o espúreos. Así, los ritmos cardíacos, los cambios climáticos, los movimientos del sistema solar y la misma actividad económica son campos del saber afectados por el caos. Hoy en día se están llevando a cabo un numeroso grupo de investigaciones que estudian, desde el comportamiento de los átomos hasta los comportamientos de los hombres o de las sociedades con una visión más amplia y rica en los

conceptos de orden y desorden. Este trabajo se orienta en esta línea de investigación, y se centra en las aplicaciones relacionadas con las finanzas dentro de la actividad económica.

El objetivo de este trabajo es ofrecer dos aplicaciones económicas para ilustrar la complejidad de los modelos no lineales en finanzas. Los apartados 2 y 3 introducen brevemente las principales ideas del caos. A continuación, se parte de un modelo de generaciones solapadas simple que proporciona un esquema determinista no lineal para la acumulación de capital. De aquí se pueden derivar las condiciones para la existencia de equilibrio estable, y se formalizan las condiciones para el surgimiento del caos. Una implicación de lo anterior es que el tipo de interés también poseerá una dinámica caótica y por tanto puede surgir el caos financiero en la bolsa y en el precio de los bonos. Es posible otra justificación de este hecho mediante un segundo modelo de expectativas racionales que se presenta. Finalmente, se propone un método general para la estimación de este tipo de dinámicas no lineales.

## 2. MÁS ALLÁ DE LA LINEALIDAD Y LA NO LINEALIDAD

La correcta especificación de un modelo económico de series temporales es uno de los principales problemas con que se encuentran los investigadores. Una gran parte de estas especificaciones se apoyan en dos hipótesis básicas: la linealidad y la normalidad de las innovaciones. Estas dos hipótesis no son en absoluto gratuitas y configuran gran parte de la investigación estadística existente. La hipótesis de linealidad viene fuertemente apoyada por el teorema de Wold, mediante el cual toda serie estacionaria se puede descomponer como suma de dos procesos incorrelados:

$$x_t = d_t + z_t \quad (2.1)$$

donde  $d_t$  es lineal determinista y  $z_t$  es un proceso infinito de medias móviles  $MA(\infty)$ .

En este sentido una gran parte de las series económicas son susceptibles de analizarse mediante modelos ARIMA, de modo que:

$$\Phi(B)(1-B)^d x_t = \Theta(B)e_t \quad (2.2)$$

donde  $\Phi(B)$ ,  $\Theta(B)$  son polinomios en el operador de retardos  $B$ , y  $(1-B)^d$  transformación que convierte en estacionaria la serie  $x_t$ . La elección del modelo adecuado se basa en las bien conocidas funciones de autocorrelación simple y parcial (fas y fap),

dentro del contexto de la metodología Box-Jenkins. Sin embargo, no conviene olvidar que tanto la *fas* como la *fap* son efectivamente herramientas de identificación lineal, inoperantes en contextos no lineales. Existen en la literatura un buen número de ejemplos de procesos diferentes del ruido blanco, que dan lugar a funciones de autocorrelación teóricas nulas. Un gran número de modelos bilineales tales como:

$$x_t = \phi x_{t-2} e_{t-1} + e_t \quad (2.3)$$

poseen esta propiedad. Los ejemplos anteriores pueden no cogernos de sorpresa si estamos acostumbrados a trabajar con series temporales. Sin embargo lo que resulta más sorprendente es un hecho conocido desde Poincaré hace un siglo, y es que es posible encontrar dinámicas puramente deterministas con un comportamiento errático similar al ruido blanco. El ejemplo clásico lo constituye la ecuación logística(4),

$$x_t = 4x_{t-1}(1-x_{t-1}), \quad 0 \leq x_0 \leq 1 \quad (2.4)$$

donde una característica especialmente importante de este proceso, y de los sistemas caóticos en general, es que una pequeña variación en el valor inicial  $x_0$ , da lugar a trayectorias claramente diferenciadas. Tales procesos se denominan caóticos. A pesar de todo esto, la sorpresa no acaba aquí. Es posible encontrar un proceso caótico, técnicamente hablando en el sentido de Li-Yorke, cuya función de autocorrelación es idéntica a un proceso AR(1). Si consideramos el sistema determinista no lineal:

$$x_t = f(x_{t-1}; w), \quad 0 \leq x_0 \leq 1$$

donde:

$$f(x; w) = \frac{x}{w} \text{ si } 0 \leq x \leq w ; f(x; w) = \frac{1-x}{1-w} \text{ si } w \leq x \leq 1 \quad (2.5)$$

se puede probar (Sakai y Tokumaru, (1980)) que la función de autocorrelación del sistema viene dada por:

$$\rho_k = (2w - 1)^{|k|} \quad \text{si } k \neq 0 \quad (2.6)$$

$\rho_0 = 1/12$ , igual que el proceso AR(1),

$$x_t = \phi x_{t-1} + e_t \quad (2.7)$$

donde  $\phi = 2w-1$ . Nótese que cuando  $w = 1/2$ ,  $\rho_k = 0$  si  $k \neq 0$ , si . En este sentido, resultaría de interés encontrar algún ejemplo de serie donde el modelo no lineal se ajustase mejor que el AR(1) clásico.

### 3. CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL CAOS

Una propiedad de especial importancia en los sistemas dinámicos de naturaleza caótica es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Sin embargo esta no es la única razón que motiva el estudio de estos procesos. En los modelos ARIMA de series temporales dentro del contexto de la metodología Box-Jenkins, el comportamiento dinámico de la economía viene generado por la suma de un equilibrio estable y una serie de perturbaciones aleatorias determinadas exógenamente al sistema. Sin embargo en los sistemas de caos, la economía se rige mediante una dinámica no lineal alimentada por el propio sistema.

Veamos ahora las definiciones básicas en las que se apoyan los sistemas caóticos. Consideremos una aplicación  $f:D \rightarrow D$ , que define la dinámica no lineal,  $x_n = f(x_{n-1})$ . Se denota la  $n$ -ésima composición de  $f$  por  $f^n = f \circ f^{n-1}$  donde  $f^1 = f$ . Una trayectoria del sistema de longitud  $n$  con valor inicial  $x_0$  es una sucesión  $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ . Una trayectoria se denomina periódica de período  $p$  si  $p$  es el menor entero tal que  $f^p(x) = x$ , donde en este caso  $x$  es un punto periódico. Un atractor para  $f$  es un conjunto  $A$  compacto minimal tal que el conjunto,

$$\left\{ x / \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f^n(x) - y| = 0 \right\} \neq \emptyset$$

De un modo intuitivo un sistema caótico verifica que, (i) es sensible a las condiciones iniciales, (ii) los atractores son no descomponibles y (iii) existe cierta apariencia de regularidad dentro de un atractor  $A$ . De un modo más riguroso, se dice que una dinámica no lineal  $f$  es caótica si verifica:

- (i) Existe un valor  $\delta$  tal que para cualquier  $x_1 \in D$  y cualquier entorno  $E$  de  $x_1$ , existe un  $x_2$  en  $E$  y un  $n$  tal que,  $|f^n(x_1) - f^n(x_2)| > \delta$ .
- (ii) Existe algún punto  $x$  en  $A$  tal que la trayectoria es densa en  $A$ .
- (iii) Los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $A$ .

Los ciclos de período tres tienen una gran importancia en la teoría matemática del caos, como lo prueba el conocido teorema de Li-Yorke (1975):

*Teorema.* Sea  $J$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $f: J \rightarrow J$  aplicación continua. Supongamos que existe un punto  $a$  en  $J$  de modo que:

$$f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a) \quad (\text{o bien} \quad f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)) \quad (3.1)$$

entonces:

- a) Para cada  $k = 1, 2, \dots$  existe un punto  $J$  en de período  $k$ .  
 b) Existe un conjunto  $S$  no numerable contenido en  $J$  sin puntos periódicos verificando las siguientes condiciones:

- b1) Para cada  $p, q$  en  $S$  con  $p \neq q$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$$

- b2) Para cada  $n$  y punto periódico,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

## 4. MODELOS FINANCIEROS CON POSIBLE CAOS

### 4.1. Modelo de Generaciones Solapadas

El modelo que aquí se presenta está inicialmente inspirado en los trabajos de Benhavid y Day (1980 y 1982). Las hipótesis en las que se basa el modelo son las siguientes:

- (i) Se supone que los individuos viven dos períodos de tiempo  $t$  y  $t+1$ ; en un instante de tiempo  $t$  conviven dos generaciones 0 y 1. Sólo trabajan los jóvenes, que ahorran parte de sus ingresos y son en definitiva quienes adquieren stock de capital con sus ahorros. El stock de que dispone el sujeto inversor en el período  $t+1$  se denomina  $k_{t+1}$  y es igual a lo que dicho sujeto ahorra durante el período  $t$ ,

$$k_{t+1} = w_t - c_{0,t} \quad (4.1)$$

donde  $w_t$  representa el salario y  $c_{0,t}$  representa el consumo del individuo en la generación 0, durante el período de tiempo  $t$ . Se supone también que el stock de capital de cada período se consume íntegramente dentro de ese período.

(ii) Se supone que un individuo representativo de la generación joven sólo obtiene ingresos procedentes del trabajo. El individuo gana un salario  $w$  que tiene que distribuir en los dos períodos de su vida  $t$  y  $t+1$ , de donde su consumo en el período  $t+1$  viene dado por:

$$c_{0,t+1} = (w_t - c_{0,t}) \times (1 + r_{t+1}) \quad (4.2)$$

donde  $r_{t+1}$  es la tasa de interés de los ahorros desde el período  $t$  al  $t+1$ . En otras palabras, el agente económico puede ahorrar, y a través del mercado de crédito transferir recursos del primer período de vida al segundo.

(iii) Suponemos que la población en ambas generaciones es siempre la misma.

(iv) Se supone que la función de utilidad para cada generación es del tipo Cobb-Douglas, dada por:

$$u_t = u(c_{0,t}; c_{0,t+1}) = c_{0,t}^\beta \times c_{0,t+1}^{1-\beta} \quad (4.3)$$

donde el parámetro  $\beta$  mide la disponibilidad del sujeto para sustituir consumo presente por consumo futuro. Se supone que  $\beta$  es función del salario y aumenta proporcionalmente de modo que,

$$\beta = \beta(w_t) = aw_t, \quad \text{con } a > 0 \quad \text{y} \quad 0 < \beta < 1 \quad (4.4)$$

Estamos suponiendo también que los cambios de  $\beta$  dan lugar a cambios en la decisión de ahorro de los agentes y además que los agentes que nacen en épocas de expansión son más «gastadores», que los agentes que nacen en épocas de recesión.

(v) Se supone que la función de producción individual es del tipo Cobb-Douglas,

$$y_t = f(k_t) = Ak_t^\alpha, \quad \text{donde } A\alpha > 0 \quad (4.5)$$

puesto que,  $y_t = w_t + f'(k_t)k_t$  donde  $f'(k_t) = r_t$ , se puede escribir:

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \quad (4.6)$$

La solución de equilibrio de este modelo proviene de la maximización de la utilidad sujeta a la restricción presupuestaria:

$$\text{Maximizar } u_t = u(c_{0,t}; c_{0,t+1}) \quad (4.7)$$

$$\text{sujeto a } w_t = c_{0,t} + c_{0,t+1} \frac{1}{1 + r_{t+1}} \quad (4.8)$$

de donde,

$$\beta \frac{u_t}{c_{0,t}} - (1 - \beta) \frac{u_t}{c_{0,t+1}} (1 + r_{t+1}) = 0$$

aplicando los supuestos (i) y (ii) se obtiene que,

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{c_{0,t}}{c_{0,t+1}} (1 + r_{t+1}) = \frac{c_{0,t}}{w_t - c_{0,t}} = \frac{w_t - k_{t+1}}{k_{t+1}}$$

que lleva a,

$$k_{t+1} = (1 - \beta)w_t$$

Sustituyendo las condiciones de equilibrio en el mercado de factores y la definición de función de producción (ecuaciones (4.5) y (4.6)) se obtiene que,

$$k_{t+1} = A(1 - \alpha)k_t^\alpha [1 - (1 - \alpha)aAk_t^\alpha]$$

que podemos reescribir como,

$$k_{t+1} = kk_t^\gamma (1 - ak_t^\gamma) \quad (4.9)$$



Nótese que (4.9) incluye a la ecuación logística como caso particular. Los Gráficos 1 y 2 muestran varias realizaciones caóticas de (4.9), según diversos valores de los parámetros.

#### 4.1.2. Comportamiento Caótico

En este apartado probaremos que la ecuación (4.9) satisface las condiciones del teorema de Li-Yorke, y por tanto presenta un comportamiento caótico. Escribimos  $f(k_t) = wk_t^2$ . Ahora  $f$  puede verse como una función asimétrica negativa en  $k_t$ , con un máximo y dos cortes con los ejes. Sea  $k_{\text{máx}}$  el valor de  $k_t$  que maximiza  $f$  y  $k_u = f^{-1}(k_{\text{máx}})$ . Por la naturaleza de  $f$  y mediante exploración gráfica es inmediato probar que  $k_{\text{máx}} < k_v$ , siendo punto fijo de  $f$  ( $f(k_v) = k_v$ ), donde además  $k_u < k_{\text{máx}}$ .

Consideremos a continuación la primera iteración de  $k_{\text{máx}}$ ,  $f(k_{\text{máx}})$ , y sea el mayor valor de  $k_t$  tal que  $f(k_v) = 0$ . Entonces, si se elige el valor de  $w$  lo suficientemente grande (en el caso de la ecuación logística  $w=4$ ), es posible obtener  $f(k_{\text{máx}}) = k_v$ . Tenemos por tanto que,

$$0 < k_u < k_{\text{máx}} < k_v$$

donde se verifica,

$$f(k_v) < k_u < f(k_u) < f(k_{\text{máx}})$$

$$f^3(k_u) < k_u < f(k_u) < f^2(k_u)$$

de lo cual se satisface (3.1) y se sigue el teorema de Li-Yorke.

## 4.2. Modelo de Determinación de los Precios de los Bonos con Expectativas Racionales y Aversión al Riesgo

El modelo que aquí se presenta está inspirado en el trabajo de Begg (1984), y la versión posterior de Ploeg (1986). Las hipótesis de trabajo son las siguientes,

(i) Se supone un inversor con una riqueza en el período de tiempo  $t$ ,  $w_t$ , el cual puede comprar una cantidad de bonos perpetuos  $a_t$ , al principio de cada período en

un precio  $P_t$ . El cupón por período de los bonos perpetuos  $C$ . El inversor también puede comprar bonos al precio  $P_t$ , con un interés  $r_t$  conocido al principio de cada período. Así, la ganancia total de  $i_t$  la cartera del inversor viene dada por,

$$i_t = a_t(P_{t+1} - P_t + C) + (w_t - a_t P_t)r_t \quad (4.10)$$

La ganancia total  $i_t$  es incierto puesto que la ganancia de capital en perpetuidades está sometida a incertidumbre. Dada la información al principio del período  $t$ , la varianza condicional del período simple de la ganancia de la cartera de inversión viene dada por,

$$\sigma_{i,t} = a_t^2 1 \sigma_{P_{t+1}}^2 \quad (4.11)$$

donde  $\sigma_{P_{t+1}}^2$  representa la varianza condicional de  $P_{t+1}$  dada la información hasta  $t$ .

(ii) Suponemos que los agentes económicos son competitivos y que eligen el número de bonos  $a_t$  para maximizar sus ganancias, esto es, maximizar la diferencia,

$$i_t^e - \frac{1}{2} b \sigma_{i,t}^2 \quad \text{con } b > 0 \quad (4.12)$$

donde  $i_t^e$  denota la esperanza condicionada de la tasa de interés total de la cartera al principio del período  $t$ , siendo  $b$  un parámetro positivo que recoge la aversión al riesgo. De este modo el problema de decisión se puede expresar como,

$$\text{máx } a_t(P_{t+1}^e - P_t + C) + (w_t - a_t P_t)r_t - \frac{1}{2} b a_t^2 \sigma_{P_{t+1}}^2 \quad (4.13)$$

donde la condición de primer orden es,

$$P_{t+1}^e + C - P_t(1 + r_t) - b a_t \sigma_{P_{t+1}}^2 = 0 \quad (4.14)$$

En esta última expresión puede sustituirse el valor de  $1 + r_t$  por  $D_t^{-1}$ . Así, se puede escribir,

$$P_t = D_t(P_{t,t+1}^e + C - ba_t\sigma_p^2) \quad (4.15)$$

La expresión (4.15) describe la demanda privada de bonos dadas las perspectivas recientes sobre la media y la varianza del precio de los bonos.

(iii) Se supone que la oferta está fijada por el gobierno, esto es .

(iv) Se supone que la política monetaria fija los tipos de interés a corto plazo, es decir,

$$r_t \sim \text{independiente e igualmente distribuidas en el tiempo (iid)} \quad (4.16)$$

#### 4.2.1. Desarrollo del Modelo

El factor de descuento definido en el supuesto (ii)  $D_t$  es también independiente e idéntico en el tiempo, por el supuesto (iv). Por tanto,  $D_{t+j}$  puede ser escrito como,

$$D_{t+j} = De_{t,t+j} + u_{t+j} = \delta + u_{t+j} \quad (4.17)$$

con

$$u_{t+j} \sim \text{iid } (0, \sigma_u^2)$$

Aquí,  $D_{t+j}$  posee dos componentes: anticipado y no anticipado. El componente anticipado  $\delta$  es constante para todo  $j$ , puesto que  $r_{t+j}$  y  $D_{t+j}$  son iid. De un modo similar el componente no anticipado ha de ser iid con media condicional nula y varianza condicional constante en el tiempo, Por otro lado, al ser  $r_t$  conocido al comienzo de cada período, también  $u_t$  lo es.

De la ecuación (4.10) se deduce que los individuos en el período  $t+1$  se enfrentan al mismo problema que en el período anterior  $t$ , respecto al precio que esperan para los bonos, de modo que se satisface,

$$P_{t+1} = D_{t+1}(P_{t+1,t+2}^e + C - ba_{t+1}\sigma_p^2) \quad (4.18)$$

Aquí el mercado se ajusta a medida que desciende el período de suscripción de la demanda de bonos si suponemos que como en (ii) la oferta de bonos  $a_t$  viene dada por el gobierno. Si tomamos esperanzas condicionadas en  $t$  se verifica que,

$$P_{t+1}^e = d(P_{t+2}^e + C - ba\sigma_{P_{t+2}}^2) \quad (4.19)$$

puesto que la variable  $D_{t+j}$  es iid y los agentes no aprenden nada de las perturbaciones realizadas en  $t+1$ . Por tanto, los agentes están revisando constantemente sus creencias. De este modo, las expectativas condicionales de (4.18) para obtener (4.19) se pueden ignorar.

Puesto que las creencias en  $P_{t+2}$  son las mismas que en  $t$  y  $t+1$ , al restar la ecuación (4.19) de la (4.18) se obtiene,

$$P_{t+1} - P_{t+1}^e = (P_{t+1}^e / \delta)u_{t+1}$$

Ahora, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación anterior y tomando esperanzas condicionadas se obtiene que,

$$\sigma_{P_{t+1}}^2 = (\sigma_u^2 / \delta^2)(P_{t+1}^e)^2 \quad (4.20)$$

Sustituyendo (4.20) en (4.19) se llega a la relación,

$$P_{t+j}^e = d[P_{t+j+1}^e + C - A(P_{t+j+1}^e)^2] \quad (4.21)$$

donde  $A = ab\sigma_u^2 / \delta^2$ . En este modelo no se ha realizado ninguna restricción respecto a los valores iniciales de los precios de los bonos y por ello la evolución futura de los mismos pueden exhibir comportamientos altamente erráticos o caóticos.

Para obtener un equilibrio estable, se supone un precio de los bonos  $P^*$  de tal modo que en la ecuación (4.21) se verifica,

$$-\delta AP^{*2} + (\delta - 1)P^* + \delta C = 0 \quad \text{con} \quad P_{t+j+1}^e = P_{t+j}^e = P^*$$

de donde es posible escribir,

$$-2\delta AP^* = (1-\delta) - [(1-\delta)^2 + 4A\delta^2]^{1/2} \quad (4.22)$$

donde la raíz cuadrada positiva tiene que ser rechazada puesto que  $P^*$  tiene que ser positivo.

La pendiente de  $P_{t+j}^e = f(P_{t+j+1}^e)$  en (4.21) viene dada por,

$$f'(P_{t+j}^e) = \delta - 2A\delta P_{t+j}^e \quad (4.23)$$

evaluando  $P^*$  de la ecuación (4.22) se tiene que,

$$f'(P^*) = 1 - [(1-\delta)^2 + 4AC\delta^2]^{1/2} \quad (4.24)$$

con,  $\delta^2 A = ab\sigma_u^2$ . Por tanto, para valores pequeños de «a» (oferta de bonos determinada exógenamente), de «b» (aversión al riesgo) y de  $\sigma_u^2$  (varianza de la componente no anticipada del factor de descuento  $(1+r)^{-1}$ ), se puede concluir que  $f'(P^*)$  es menor que -1 y por lo tanto no existe equilibrio localmente estable.

Cuando el valor de  $\sigma_u^2$  es suficientemente grande como para hacer que la pendiente alcance un valor superior a -1, el equilibrio pasa de ser localmente inestable a estable.

Los resultados de este modelo son por tanto altamente inciertos. Parece que la hipótesis de una formación de precios de los bonos con expectativas racionales y en presencia de aversión al riesgo, proporciona la posibilidad de que la economía pase sucesivamente de situaciones de equilibrio estable a situaciones explosivas. La explicación para estos cambios se puede asociar con «pérdidas de confianza» que pueden dar lugar a «burbujas especulativas» y a «pánicos financieros». El gobierno puede intervenir en estos mercados financieros con la intención de restablecer la confianza, con lo cual reduce la varianza. Esta situación puede ser compatible con situaciones de nuevos equilibrios.

Se puede concluir que este modelo no tiene una solución estable. Además son posibles trayectorias caóticas, pues (4.21) puede ser visto como una ecuación logística. Esto es, los modelos no lineales de expectativas racionales no tienen una única solución estable, como ocurre en los modelos lineales de este tipo (Blanchard y Kahn, 1980). Las trayectorias explosivas y caóticas, los ciclos y las soluciones de equilibrio son posibles en los mercados financieros.

## 5. ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN DE DINÁMICAS CAÓTICAS

La estimación de un sistema caótico a partir de sus trayectorias no parece un ejercicio trivial. Una de las principales cuestiones que surge es distinguir a nivel de inferencia entre un proceso puramente estocástico, y un proceso «aleatorio» procedente de una dinámica caótica posiblemente determinista. La estadística únicamente proporciona herramientas inferenciales en el primero de los casos. Berliner (1992) y

Geweke (1992) tratan este problema de estimación desde una perspectiva bayesiana. El camino quizás más fácil de abordar el problema es añadir a la serie observada un término de error, exógeno a las observaciones.

Supongamos un sistema dinámico no lineal dependiente de un parámetro  $\theta$ , y un conjunto de  $n$  iteraciones del sistema, comenzando por un valor inicial  $x_0$ ,

$$\{x_1 = f(x_0; \theta), x_2 = f^2(x_0; \theta), \dots, x_n = f^n(x_0; \theta)\}$$

Supongamos ahora que se observa un conjunto de  $n$  datos, consistentes en  $n$  variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  de modo que:

$$Y_k = x_k + \sigma e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \sigma > 0 \quad (5.1)$$

donde suponemos, por ejemplo, que las  $e_k$  son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas  $N(0, 1)$ . Los parámetros de interés del sistema son el valor inicial  $x_0$ , el parámetro  $\theta$  de  $f$  y la desviación típica  $\sigma$ . La función de verosimilitud se convierte entonces en:

$$L(d_n / x_0, \theta, \sigma) = \sigma^{-n} (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\sum_{k=1}^n [y_k - f^k(x_0; \theta)]^2 / 2\sigma^2 \right\} \quad (5.2)$$

donde sería posible, al menos aparentemente, estimar los parámetros  $x_0$ ,  $\theta$  y  $\sigma$ . El caso de la ecuación logística suponiendo dos de los parámetros conocidos es tratado por Berliner (1992). Desafortunadamente, la mayoría de las verosimilitudes asociadas a dinámicas caóticas suelen ser bastante complejas. Desde una perspectiva bayesiana del problema, si elegimos una distribución a priori para los parámetros  $p$ , la distribución posterior dado el conjunto de trayectorias observadas es:

$$p(x_0, \theta, \sigma / d_n) \propto L(d_n / x_0, \theta, \sigma) p(x_0, \theta, \sigma) \quad (5.3)$$

donde por marginalización podemos hacer inferencia sobre alguno de los parámetros.

Otra posible extensión del modelo de cara a la estimación consiste en escribir  $x_t = f(x_{t-1}; \theta) + e_t$ , donde  $e_t$  representa un proceso estocástico y además  $y_t = h(x_t) + u_t$ ,

es la ecuación de observación, siendo  $u_t$  una medida de error. El estudio de estas dos ecuaciones en el caso de  $f$  y  $h$  lineales es el bien conocido filtro de Kalman.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BEGG, D.K.H. (1984). Rational expectations and bond pricing: modelling the term structure with and without certainty equivalence. *The Economic Journal*, Supplement Vol. 94, pp. 45-58.
- BERLINER, L.M. (1991). Likelihood and bayesian prediction of chaotic systems. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 86, n° 416, pp. 938-952.
- BENHABIB, J., DAY, R.H. (1980). Erratic accumulation. *Economics Letters*, Vol. 6, pp. 113-117.
- BENHABIB, J., DAY, R.H. (1982). A characterization of erratic dynamics in the overlapping generation model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 4, pp. 37-55.
- BLANCHARD, O.J., KAHN, C.M. (1980). The solution of linear difference models under rational expectations. *Econometrica*, Vol. 48, pp. 1305-1311.
- GEWEKE, J. (1992). Inference and prediction in the presence of uncertainty and determinism. *Statistical Science*, Vol. 7, n° 1, pp. 94-101.
- LI, T.Y., YORKE, J.A. (1975). Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 985-992.
- PLOEG, F. (1986). Rational expectations, risk and chaos in financial markets. *The Economic Journal*, pp. 151-162.
- SAKAI, H., TOKUMARU, H. (1980). Autocorrelations of a certain chaos. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, n° 5, pp. 588-590.

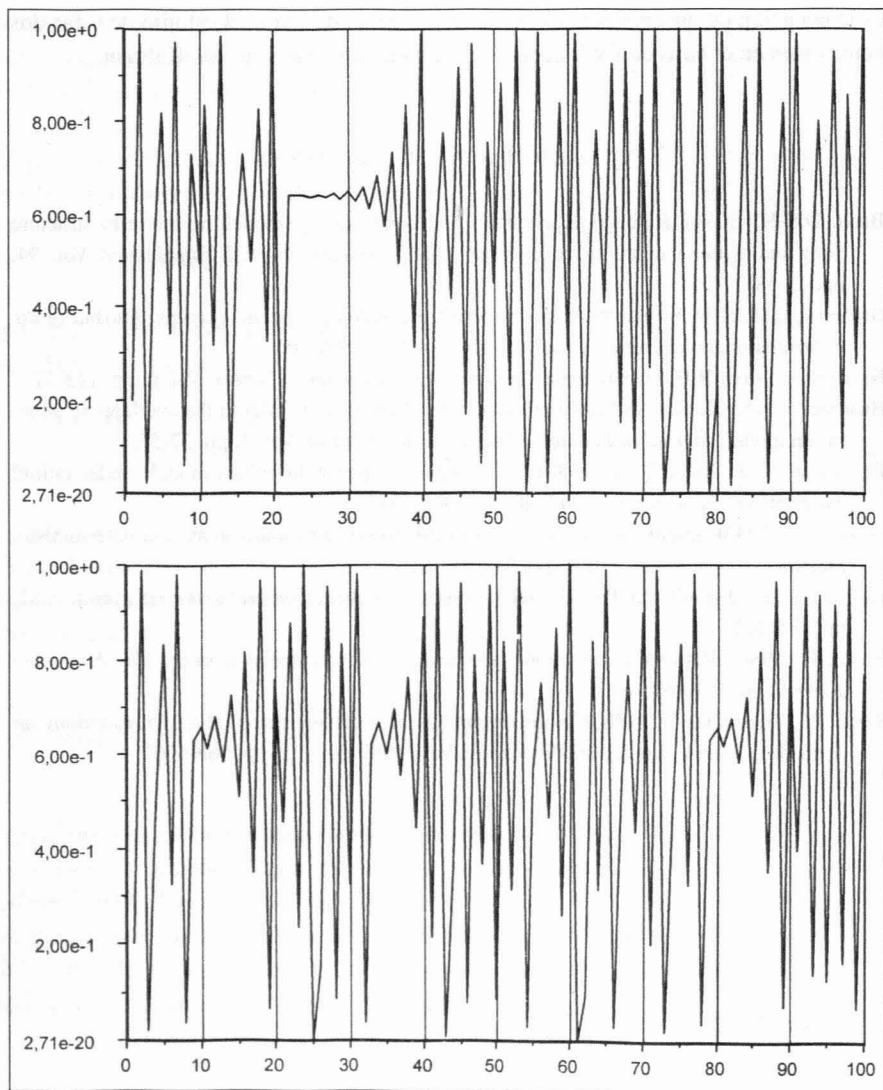


Gráfico 1. Dos trayectorias de (4.9) de tamaño  $n = 100$  donde  $w = 4$ ,  $\gamma = 5$ ,  $x_0 = 0,2$  y  $0,201$



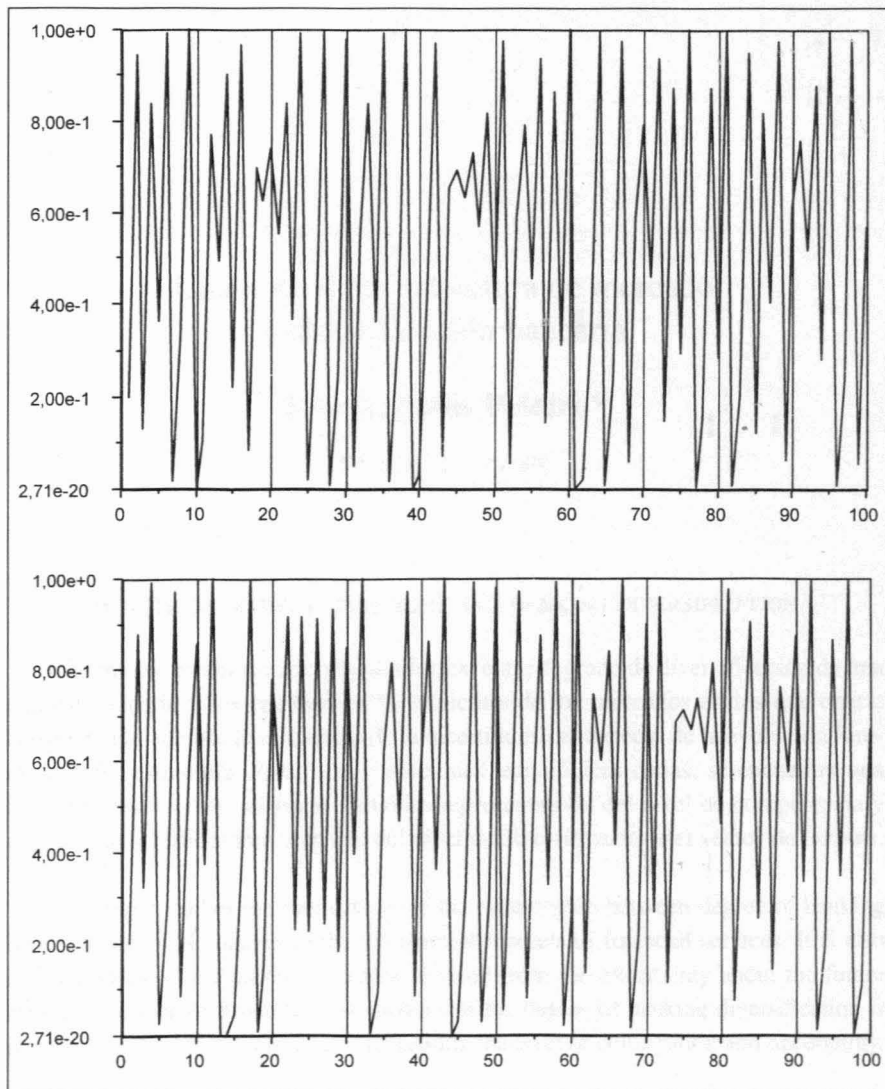


Gráfico 2. Dos trayectorias de (4.9) de tamaño  $n=100$  donde  $w=4$ ,  $x_0 = 0,2$  y  $\gamma = 0,6$  y  $0,7$