

## Análisis de una generalización del modelo de crecimiento cíclico de Goodwin

**Jorge Falagán Mota**

*Departamento de Fundamentos del Análisis Económico e historia e Inst. Económicas  
Universidad de Vigo*

*Lagoas-Marcosende, s/n. Apartado 874. 36200 VIGO*

*Telf.: 986 81 25 27. E-mail: falagan@setei.uvigo.es*

### RESUMEN

Gombrowski y Krüger (1986) introducen varias generalizaciones en el modelo de crecimiento cíclico de Goodwin (1967), obteniendo interesantes resultados sobre la estabilidad y el período del ciclo económico. El objetivo de nuestro artículo es el de mejorar la aportación de Gombrowski y Krüger introduciendo nuevas funciones de inversión y de negociación de los salarios nominales que parecen más adecuadas a la realidad económica. Con estas modificaciones se obtienen ciclos de 12-13 años y se observa que la consideración del efecto de la histéresis en el proceso de negociación de los salarios nominales así como la existencia de ilusión monetaria tienen un efecto estabilizador sobre el sistema económico.

*Palabras clave:* Ciclo de crecimiento, histéresis, ilusión monetaria, estabilidad.

*Clasificación JEL:* E32

## ABSTRACT

Gomblowski and Krüger (1986) introduce several generalizations in the Goodwin's model of cyclical growth (1967), obtaining interesting results on the stability and the period of the economic cycle. The objective of our article is improve the contribution of Gomblowski and Krüger introducing new investment function and money wage bargaining equation that seem more adequate to the economic reality. With these modifications are obtained cycles from 12-13 years and is observed that the consideration of the effect of hysteresis in the bargaining of the money wage as well as the money illusion existence have a stabilizing effect on the economic system.

*Keywords:* Growth cycle, hysteresis, money illusion, stability.

*JEL classification:* E32.

## 1. INTRODUCCIÓN

Goodwin (1967) plantea un modelo de crecimiento cíclico que incorpora de forma conjunta la lucha de clases y el progreso técnico dentro de una estructura similar a la expuesta por Lotka y Volterra<sup>1</sup> respecto a la relación biológica entre dos especies, una depredadora y otra presa. Este autor construye un modelo unisectorial de una economía capitalista cerrada que genera crecimiento, ciclos y fluctuaciones en la tasa de empleo sin recurrir a choques exógenos o a una tendencia al crecimiento de la técnica. El modelo utiliza los siguientes supuestos: un crecimiento exógeno de la productividad y de la fuerza de trabajo; sólo existen dos factores de producción: trabajo y capital (plantas y equipo), ambos homogéneos y no específicos, y dos clases de agentes económicos: trabajadores y capitalistas; todas las cantidades son reales y netas; la relación capital-producto es fija y existe una plena capacidad de uso, es decir, no existe ningún problema de pérdida de demanda efectiva; se cumple la ley de Say; no existe pleno empleo y existe una relación inversa entre la tasa de crecimiento de los salarios reales y el nivel de desempleo, es decir, una curva de Phillips real.

La dinámica básica del modelo descansa en la interacción entre la acumulación del capital, el nivel de empleo y la rentabilidad, que origina trayectorias consistentes

<sup>1</sup> Una detallada exposición del modelo de Lotka-Volterra así como de sus propiedades dinámicas se puede encontrar en Gandolfo (1996: 449-456).

en órbitas cerradas alrededor del equilibrio. Por otra parte, debido a que el modelo es inestable estructuralmente cualquier alteración de las hipótesis iniciales puede modificar sus características cualitativas.

El modelo de Goodwin es criticado por que se basa en unos supuestos que no parecen los más adecuados para analizar una economía altamente desarrollada, como son: la existencia de un único sector de producción; la negociación salarial tiene lugar en términos reales y sin ninguna base microeconómica; la relación capital-producto es constante, no existe una función de inversión; se verifica la ley de Say; y la tasa de crecimiento y la tasa de beneficio son iguales, lo que sólo puede ser obtenido bajo la hipótesis de pleno empleo.

Debido a que el modelo es inestable estructuralmente, cualquier pequeña variación en él modifica sustancialmente el comportamiento cualitativo de sus soluciones, por lo que, si se intentan introducir ciertas dosis de realismo en el modelo, no sólo se perderá su simplicidad, sino que no se podrá garantizar que se mantenga el ciclo de crecimiento y pueden desaparecer las oscilaciones autosostenidas.

Además, el modelo no incluye ningún análisis de problemas de demanda efectiva, aunque autores como Solow (1990:38) consideran que es difícil introducir consideraciones de demanda efectiva dentro del modelo debido a que originarán cambios importantes en los resultados del modelo, derivados del problema de la inestabilidad estructural. Aunque la consideración de la interacción entre depredadores y presas como una representación de la lucha de clases en la economía parece atractiva, autores como Wörgötter (1986) o Solow (1990) exponen que no es adecuada, ya que produce el sorprendente resultado de que la relación de simbiosis se origina entre los trabajadores empleados (representados por  $u$ ) que actúan como depredadores, y los trabajadores desempleados (representados por  $v$ ) que actúan como presas. La interacción entre estos dos grupos, dentro del mercado laboral, es la que determina la cantidad del producto neto que no será consumida y, por lo tanto, será utilizada para la acumulación de capital, siendo los capitalistas agentes que sólo intervienen de forma indirecta en la lucha entre los dos grupos de la fuerza de trabajo por la renta y las posibilidades de empleo.

Algunos autores como Atkinson (1969) y Van der Ploeg (1983a,1984) estiman que el período del ciclo es excesivamente grande ya que en sus simulaciones obtienen ciclos de 16-22 años del tipo Kuznets.

Velupillai (1982a) expone que el modelo de Goodwin se puede ampliar mediante la relajación de los supuestos relativos a la ley de Say y a las formas funcionales, en el sentido de eliminar la hipótesis de que todas las variables se miden en términos reales. Esto sugiere que se deben plantear ampliaciones en el modelo respecto a: la

negociación de los salarios nominales, la determinación de los precios, la forma del progreso técnico y de la función de inversión y al grado de utilización de la capacidad productiva.

Gomblowski y Krüger (1986) asumen varias de las ampliaciones sugeridas por Velupillai con el objetivo de intentar superar alguna de las carencias que presenta el modelo de Goodwin. Para ello definen un modelo generalizado que incorpora una serie de modificaciones al modelo mediante la introducción de los siguientes supuestos: la producción se ajusta a los excesos de demanda, el progreso técnico es no neutral y de velocidad variable y tanto la intensidad del trabajo como el grado de utilización de la capacidad productiva son flexibles.

Las principales conclusiones a las que llegan Gomblowski y Krüger son las siguientes:

a) Con la primera modificación (la producción se ajusta a los excesos de demanda) se mantiene el rasgo característico del modelo de Goodwin de una trayectoria cerrada y el período del ciclo alcanza un valor de 8,7 años lo que refuerza la entidad de un modelo del tipo del de Goodwin como elemento explicativo del ciclo económico, ya que supera la crítica expuesta por Atkinson (1969:151) de que el modelo de Goodwin genera ciclos económicos demasiado largos y por lo tanto irreales.

b) La introducción de un progreso técnico neutral de velocidad variable tiene un efecto estabilizador sobre el modelo y la introducción de una intensidad del trabajo variable tiene un efecto desestabilizador. El efecto conjunto de estas dos medidas es, en principio, indeterminado, por lo que el signo del efecto conjunto dependerá de cual sea la medida dominante, existiendo la posibilidad de que el punto de equilibrio sea un centro estable, con lo que se mantendría un rasgo característico del modelo de Goodwin.

c) El análisis de un modelo que tenga en cuenta todas las modificaciones simultáneamente, permite obtener a Gomblowski y Krüger un movimiento cíclico explosivo, con una duración de los ciclos de 8,6 años. Los autores demuestran que reduciendo lo suficiente los valores de determinados coeficientes se puede eliminar el carácter explosivo de los ciclos haciendo que el sistema se vuelva ligeramente estable. En cualquier caso, Gomblowski y Krüger reconocen que esta extensión elimina uno de los rasgos característicos que hacen especialmente interesante el modelo de Goodwin: trayectorias en forma de órbitas cerradas alrededor del equilibrio.

Esta aportación de Gomblowski y Krüger que recoge parcialmente las sugerencias de Velupillai, puede ser mejorada en algunos de sus supuestos; por ejemplo, se

puede cuestionar la forma de la función de inversión, ya que el supuesto de una relación lineal entre los beneficios y la inversión es algo rudimentario. Por otra parte, como reconocen los propios autores, también se podría modificar la ecuación de negociación salarial planteada por estos autores por otra que tenga una fuerte fundamentación microeconómica:

Finalmente, nosotros estamos interesados en la sustitución de la ecuación de negociación de los salarios nominales por un enfoque de la negociación salarial con una mayor fundamentación teórica que podría mejorar el enfoque de la teoría del ciclo económico que se plantea... (Gomblowski y Krüger [1986, 23])

Con este fin, introduciremos dentro del esquema de Gomblowski y Krüger nuevos supuestos sobre la función de inversión y la ecuación de negociación salarial que superen estos problemas y mejoren la calidad del modelo.

La estructura del artículo es la siguiente: en el apartado 2 se realiza una exposición detallada de nuestra ampliación del modelo de Goodwin; en el siguiente apartado se analizan las propiedades dinámicas de dicho modelo haciendo especial hincapié en los resultados relativos a la estabilidad; en el apartado 4 se plantean varias simulaciones del modelo para observar cual es la duración del período del ciclo para valores adecuados de los parámetros y analizar los efectos de la consideración de histeresis en el mercado de trabajo y de ilusión monetaria sobre la estabilidad del ciclo; y en el último apartado se resumen las principales conclusiones que se derivan de nuestro análisis.

## 2. EXPOSICIÓN DEL MODELO

La extensión del modelo mantiene inalterados algunos de los supuestos introducidos por Goodwin como: la consideración de una economía cerrada sin participación del Estado dentro de la que se define un modelo unisectorial, en el que sólo existen dos factores de producción: trabajo y capital y dos clases de agentes económicos: capitalistas y trabajadores.

El modelo ampliado viene definido por las siguientes definiciones y relaciones funcionales:

$$\hat{N} = \beta \quad (1)$$

$$k = K/Y \quad (2)$$

$$Y = c(I-S), \quad c > 0 \quad (3)$$

$$S = s_c \Pi + s_w WL, \quad 0 \leq s_w < s_c \leq 1 \quad (4)$$

$$g = \hat{K} = b_0 + b_1 \pi + b_2 \theta = b_0 + b_1 \frac{1-u}{k} + b_2 \theta \quad (5)$$

$$I = \dot{K} = b_0 K + b_1 (1-u)Y + b_2 K \theta \quad (6)$$

$$\hat{Q} - \hat{\chi} = \mu_1 + \mu_2 (\hat{K} - \hat{\chi}), \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \quad (7)$$

$$\hat{K} - \hat{\chi} = v_1 + v_2 u, \quad v_1, v_2 > 0 \quad (8)$$

$$L = h \cdot \theta \cdot \chi \quad (9)$$

$$\hat{h} = -\gamma_0 + \gamma_1 v \quad (10)$$

$$\theta = \frac{Y}{Q} \quad (11)$$

$$\hat{m} = -\rho_0 + \rho_1 v + \rho_2 \hat{v} + \rho_3 \hat{a} + \rho_4 \hat{p} \quad \rho_0, \rho_1, \rho_2 > 0, \quad 0 < \rho_3 < 1, \quad 0 < \rho_4 \leq 1 \quad (12)$$

$$p^* = \zeta \frac{mL}{Y} \quad (13)$$

$$\hat{p} = \frac{\xi[p^* - p]}{p} = \xi \left[ \zeta \frac{mL}{pY} - 1 \right] = \xi [\zeta u - 1] \quad (14)$$

$$v = \frac{L}{N} \quad (15)$$

$$Y = WL + \Pi \quad (16)$$

$$w = \frac{m}{p} \quad (17)$$

$$u = \frac{w}{a} \quad (18)$$

$$a = \frac{Y}{L} \quad (19)$$

La ecuación (1) refleja el supuesto del modelo original de Goodwin de que la oferta de trabajo  $N$  crece exponencialmente a una tasa constante  $\beta$ .

El modelo recoge en la ecuación (2) la hipótesis, ya introducida por Desai (1973:936), de que la relación capital-producto  $k$  es flexible. Pero, a diferencia de este autor, no se considera que el valor observado de dicha relación depende del valor deseado de dicha variable ( $k^*$ ) y de la relación de empleo, sino que se demostrará que la tasa de crecimiento del coeficiente de capital depende de los valores que tomen: dicha variable, el grado de utilización de la capacidad productiva y la participación de los trabajadores en la renta nacional.

Siguiendo a Gombrowski y Krüger (1986), se utiliza el supuesto de que la producción no se determina por el tamaño del stock de capital  $K$  y por una relación capital-producto fija, como ocurre en el modelo de Goodwin, sino que se establece a través de un mecanismo de ajuste respecto al exceso de demanda<sup>2</sup>. Es decir, la tasa de cambio de la producción viene determinada, como expresa la ecuación (3), por la diferencia entre la inversión  $I$  y el ahorro  $S$ , ambos planeados. El coeficiente  $c$  reflejará la velocidad de respuesta del proceso de ajuste y  $1/c$  representa el tiempo necesario para cubrir la acumulación inicial de demanda. Lógicamente, la introducción de este supuesto exige la definición de unas funciones de ahorro y de inversión.

Respecto al ahorro se hace uso de la hipótesis de una función de ahorro diferencial<sup>3</sup> que recoge la idea de que los capitalistas tienen una mayor propensión al ahorro ( $s_c$ ) que los trabajadores ( $s_w$ ). Además  $\Pi$ ,  $W$  y  $L$  representan los beneficios, los salarios y el empleo, respectivamente.

En relación con el progreso técnico utilizaremos una función ya introducida por Kaldor (1957) que refleja la idea de un progreso técnico endógeno, originado porque la productividad del trabajo crece cuando aumenta el número de máquinas disponibles para los trabajadores. Esta función de progreso técnico ya ha sido utilizada en otras

<sup>2</sup> Esta hipótesis ha sido utilizada por Phillips (1954) y Bergstrom (1967) en el enfoque post-keynesiano del ciclo económico.

<sup>3</sup> Véase Kalecki (1939), Kaldor (1956) o Robinson (1956).

extensiones del modelo de Goodwin por autores como Velupillai (1982b, 1983) o van der Ploeg (1983a, 1983b). La ecuación (7) representa una versión lineal de la función anterior que ya fue utilizada por Gombrowski y Krüger (1986) y que relaciona la productividad del trabajo técnicamente eficiente ( $Q/\chi$ ) con la intensidad técnicamente eficiente del capital ( $K/\chi$ ) donde  $\chi$  representa el empleo técnicamente eficiente, medido por el número de trabajadores necesarios para producir el máximo output  $Q$ .

Además, la ecuación (8) introduce una función de mecanización que expresa que el aumento de la intensidad técnicamente eficiente del capital tiene un componente autónomo y otro inducido por la distribución de la renta<sup>4</sup>, donde  $u$  representa la participación de los salarios en la renta nacional.

Respecto a la intensidad del trabajo se tendrá en cuenta, como indica la ecuación (9), que el empleo actual es igual al grado de utilización de la capacidad instalada  $\theta$  multiplicado por el empleo necesario para producir el máximo producto ( $h\chi$ ), donde  $h$  representa un índice de la ineficiencia del trabajo ( $h \geq 1$ ) y se considera, como expresa la ecuación (10) siguiendo a Gombrowski y Krüger, que la tasa de crecimiento del índice de ineficiencia del trabajo mantiene una relación directa con la tasa de empleo, lo que equivale al supuesto de que un alto nivel de la tasa de empleo origina una actitud restrictiva de los trabajadores respecto al trabajo.

El modelo de Goodwin presenta la limitación de no considerar problemas de demanda efectiva. Autores como Medio (1981) o Jarsulic (1988) reforman el modelo para tener en cuenta un grado variable de utilización de la capacidad productiva, supuesto que también se haya presente en nuestro análisis en la ecuación (11).

Las contribuciones más relevantes de nuestro estudio a la extensión del modelo de Goodwin propuesta por Gombrowski y Krüger se refieren a la función de inversión y a la negociación de los salarios nominales.

Una de las formas de modelar el comportamiento de la inversión consiste en considerar que la tasa de acumulación de capital es una función de la tasa esperada de beneficios, que, por conveniencia se iguala a su tasa actual, y del grado de utilización de la capacidad productiva<sup>5</sup>. Expresando esta función de forma lineal se obtiene la

<sup>4</sup> Como exponen Gombrowski y Krüger (1986:6), mientras  $n$ , sea positivo, la función expresa la idea de Marx respecto al necesario incremento de la composición técnica del capital. Los autores exponen que para Marx las decisiones de los capitalistas sobre la mecanización dependen del nivel del salario real con relación a la productividad del trabajo, es decir, depende de la participación de los salarios en la renta nacional.

<sup>5</sup> Este tipo de función de inversión ha sido planteado por autores como Rowthorn (1981), Amadeo (1986) y Dutt (1986) siguiendo la tradición de Kalecki y Kaldor.



ecuación (5) donde  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son constantes positivas. El término  $b_0$  representa la inversión autónoma neta (como una proporción del stock de capital). Respecto a los argumentos por los que se puede justificar la introducción del término  $b_1\pi$  en la función de inversión, parece suficiente indicar que una alta rentabilidad actual favorece normalmente la consideración de unas expectativas optimistas sobre la rentabilidad futura, ya que proporciona un elevado nivel de fondos internos para la acumulación y facilita la adquisición de fondos externos. El término  $b_2\theta$  refleja un impacto positivo de los mayores niveles de utilización de la capacidad sobre la inversión independientemente de la influencia indirecta que ejerce a través de su efecto sobre la tasa de beneficio. La inversión, bajo el supuesto de ausencia de depreciación, vendrá expresada por la ecuación (6). Mauleón (1985) deduce una función de inversión en bienes de equipo para la economía española que relaciona la evolución de esta variable con la de los excedentes empresariales y la del grado de utilización de la capacidad productiva que presenta una cierta similitud con la hipótesis aquí planteada.

Respecto a la negociación de los salarios nominales se considera que la tasa de crecimiento de los salarios nominales  $\hat{m}$  depende de la tasa de empleo  $v$  y de las tasas de crecimiento del empleo  $\hat{v}$ , de los precios  $\hat{p}$  y de la productividad  $\hat{a}$ , como expresa la ecuación (12).

La introducción de la productividad como una variable explicativa del crecimiento del salario nominal es una cuestión conflictiva, como exponen Santomero y Seater (1978). Autores como Kuh (1967) y Vanderkamp (1968) discrepan sobre la utilización conjunta de la productividad y la tasa de cambio de los precios. Kuh expone que si la productividad media es un buen sustituto de la productividad marginal, debería ser un factor principal de la determinación de los salarios, afirmando además que no puede ser utilizada simultáneamente con la tasa de cambio de los precios e incluso propone que la productividad se convierta en una variable alternativa al desempleo. A esta posición se oponen Santomero y Seater (1978:510-511) argumentando que la productividad marginal solamente concierne al lado de la demanda mientras que ignora el lado de la oferta a diferencia de lo que ocurre con el desempleo, y esta razón hace que el planteamiento de sustituir el desempleo por la productividad como variable explicativa no tenga sentido.

Vanderkamp argumenta que la productividad puede ser usada junto con el desempleo, para obtener una variable sustitutiva y mejorada del exceso de demanda a causa de la acumulación de trabajo y del lento ajuste de los empresarios al equilibrio. Su planteamiento es que cuando la demanda agregada cae, también lo hace el producto pero, al menos inicialmente, los trabajadores no son despedidos, lo que motiva que el producto por trabajador caiga. Durante el período de recuperación ocurre lo

contrario; así, el nivel de productividad media puede ser una variable sustitutiva para la cantidad de acumulación de trabajo.

Otra razón para incluir la productividad en la ecuación de negociación es que los salarios deben elevarse debido a la tasa de crecimiento de la productividad generada por el progreso técnico, incluso en situación de equilibrio. Santomero y Seater (*ibidem*) comentan que la variable apropiada en este caso no sería la productividad corriente, sino la tasa de variación esperada de la productividad.

Una última razón para incluir la productividad dentro de la ecuación de negociación que determina el salario viene dada por la importancia de los factores de empresa en la negociación salarial. Nickell (1990) expone como modelos insider-outsider de determinación de salarios en el plano microeconómico llevan a la obtención de ecuaciones de negociación agregadas que incorporan la productividad como un factor decisivo en la determinación del salario.

Respecto a la introducción de la tasa de crecimiento del nivel de empleo como variable explicativa<sup>6</sup> de la evolución de los salarios nominales hay que decir que cuando la tasa de empleo cae, existen personas que está perdiendo su empleo y por lo tanto los trabajadores internos (insiders) cuando negocian los salarios con sus empresas serán moderados en sus reclamaciones salariales ante la posibilidad de perder sus puestos de trabajo. Por el contrario cuando el empleo crece, la posibilidad de perder su trabajo es pequeña por lo que las reclamaciones salariales de los insiders serán mayores. La introducción de esta variable explicativa en la determinación de los salarios refleja el efecto de histéresis presente en la negociación entre empresas y trabajadores internos en los modelos insider-outsider.

La ecuación (12), por lo tanto se basa en los modelos insider-outsider, aunque se plantea en forma continua y prescinde de la presión salarial y de las sorpresas en los salarios, como variables explicativas de la tasa de variación de los salarios nominales<sup>7</sup>.

Esta ecuación exhibe una estructura formal similar a la introducida por Pohjola (1979), que explica la evolución de los salarios nominales teniendo en cuenta dos factores: la competencia entre las empresas por el trabajo y la lucha de los trabajadores por mantener y/o mejorar su nivel de vida a través de los sindicatos.

<sup>6</sup> La consideración del efecto de histéresis en el modelo de Goodwin ya ha sido utilizada por Falagán (1994) y Sportelli (1995).

<sup>7</sup> Los fundamentos microeconómicos de esta ecuación de negociación salarial son expuestos en Layard, Nickell y Jackman (1991). Un análisis de los efectos de la introducción de esta ecuación dentro del modelo original de Goodwin se expone en Falagán (1994).

Para complementar el supuesto relativo a la negociación de los salarios nominales tenemos que establecer cual será la conducta de los precios. Respecto al comportamiento de éstos utilizaremos la hipótesis de que los capitalistas ajustan el precio actual del producto al precio deseado a una velocidad  $\xi$  asumiendo, además, que el precio deseado por los productores ( $p^*$ ) se calcula, como expresa la ecuación (13), a través de la aplicación de un factor de mark-up sobre los costes laborales unitarios, donde  $\zeta$  representa el mencionado factor de mark-up. La tasa de variación de los precios viene expresada en la ecuación (14).

Por último, las ecuaciones (15), (16), (17), (18) y (19) expresan las definiciones de: tasa de empleo, distribución de la renta entre salarios y beneficios, salario real  $w$ , participación de los trabajadores en el producto nacional y productividad del factor trabajo, respectivamente.

A partir del modelo definido vamos a realizar en el siguiente apartado un análisis de sus propiedades dinámicas, centrándonos básicamente en los resultados relativos a la estabilidad.

### 3. ESTUDIO DE LA DINÁMICA DEL MODELO

#### 3.1. Reducción del modelo a un sistema de ecuaciones diferenciales

El modelo general definido se puede reducir al siguiente sistema de cuatro ecuaciones diferenciales, como se detalla en el anexo 1, que explica el comportamiento dinámico del modelo y que no se puede descomponer, ya que no existe ningún subconjunto de ecuaciones que dependan tan sólo de las variables cuya evolución definen:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= h(v) - (1-\rho_2)t(v) - 1(u) - (1-\rho_3)g(u) + \rho_2\hat{v} \\ \dot{\hat{v}} &= r(\theta, k) + j(u) - g(u) + t(v) - \beta \\ \dot{\hat{k}} &= z(k, \theta) + f(u, k) \\ \dot{\hat{\theta}} &= i(u) - z(k, \theta) - f(u, k) \end{aligned} \quad (20)$$

donde las funciones que aparecen en el sistema de ecuaciones (20) expresan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} h(v) &= -\rho_0 + \rho_1 v \\ t(v) &= -\gamma_0 + \gamma_1 v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(u) &= -\mu_1 + \mu_2 v_1 + m_2 v_2 u \\
 l(u) &= (1-\rho_4)[\xi(\zeta u-1)] \\
 j(u) &= c[b_1-(s_c-s_w)](1-u) \\
 i(u) &= v_1(1-\mu_2) - \mu_1 + v_2(1-\mu_2)u \\
 r(\theta, k) &= c[(b_0+b_2\theta)k-s_w] \\
 z(k, \theta) &= b_2\theta - c(b_0+b_2\theta)k \\
 f(u, k) &= b_0 + cs_w + \left[ \frac{b_1}{k} - c(b_1-s_c+s_w) \right] (1-u)
 \end{aligned} \tag{21}$$

Este sistema tiene una solución estacionaria correspondiente a la situación en la que las tasas de crecimiento de las cuatro variables se anulan:  $\hat{u}=\hat{v}=\hat{k}=\hat{\theta}=0$ . Igualando a cero las dos últimas ecuaciones del sistema, se deduce inmediatamente que  $i(u)=0$ , por lo que el valor de equilibrio de la participación de los salarios en la renta nacional será:

$$u^* = \frac{\mu_1 - v_1(1-\mu_2)}{v_2(1-\mu_2)} \tag{22}$$

Si igualamos a cero las dos primeras ecuaciones del sistema (20) obtendremos

$$h(v) + (1-\rho_3)t(v) - l(v) - (1-\rho_3)g(u) = 0 \tag{23}$$

ecuación de la que se deduce el valor de equilibrio de la tasa de empleo

$$v^* = \frac{l(u) + (1-\rho_3)g(u) + \rho_0 + (1-\rho_3)\gamma_0}{\rho_1 + (1-\rho_3)\gamma_1} \tag{24}$$

además, los valores de equilibrio de la relación capital-producto y del grado de utilización de la capacidad productiva se deducen de la resolución del siguiente sistema de ecuaciones<sup>8</sup>:

<sup>8</sup> Ecuaciones que se deducen de la tercera y segunda ecuaciones del sistema (20), respectivamente.

$$\theta^* = \frac{cb_0k^* - f(u^*, k^*)}{b_2[1-ck^*]}$$

$$k^* = \frac{cs_w - j(u^*) + g(u^*) - t(v^*) + \beta}{c(b_0+b_2\theta^*)}$$

### 3.2. Análisis de la estabilidad

Para analizar la estabilidad local del modelo en el punto estacionario tenemos que linealizar el sistema de ecuaciones (20) alrededor del punto de equilibrio  $(u^*, v^*, k^*, q^*)$ :

$$u = A.u + B.v + C.k + D.\theta$$

$$v = E.u + F.v + G.k + H.\theta$$

$$k = I.u + J.k + L.\theta$$

$$\theta = M.u + N.k + O.\theta$$

donde los coeficientes A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O representan las derivadas parciales, valoradas en la situación de equilibrio, de: la variación de u respecto de u, v, k y q, de la variación de v respecto de u, v, k y q, de la variación de k respecto de u, k y q y de la variación de q respecto de u, k y q, respectivamente; El resto de las derivadas parciales se anulan en la situación de equilibrio. La matriz Jacobiana por lo tanto será igual a:

$$J = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & 0 & J & L \\ M & 0 & N & O \end{pmatrix} \quad (25)$$

donde cada letra representa los siguientes valores:

$$A = \{-1'(u^*) - (1-\rho_3)g'(u^*) + \rho_2[j'(u^*)-g'(u^*)]\}.u^*$$

$$B = \{h'(v^*) - (1-\rho_3)t'(v^*) + \rho_2.t'(v^*)\}.u^*$$

$$C = \rho_2 \frac{\partial r(\theta^*, k^*)}{\partial k} .u^*; \quad D = \rho_2 \frac{\partial r(\theta^*, k^*)}{\partial k} .u^*$$

$$E = \{j'(u^*) - g'(u^*)\}.v^*; \quad F = t'(v^*)}.v^* \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\partial r(\theta^*, k^*)}{\partial k} \cdot v^*; & H &= \frac{\partial r(\theta^*, k^*)}{\partial \theta} \cdot v^* \\
 I &= \frac{\partial r(u^*, k^*)}{\partial u} \cdot k^*; & J &= \left\{ \frac{\partial z(k^*, \theta^*)}{\partial k} + \frac{\partial f(u^*, k^*)}{\partial k} \right\} \cdot k^* \\
 L &= \frac{\partial z(k^*, \theta^*)}{\partial \theta} \cdot k^*; & M &= \left\{ i'(u^*) - \frac{\partial f(u^*, k^*)}{\partial u} \right\} \cdot k^* \\
 N &= \left\{ -\frac{\partial z(k^*, \theta^*)}{\partial k} - \frac{\partial f(u^*, k^*)}{\partial k} \right\} \cdot \theta^*; & O &= -\frac{\partial z(k^*, \theta^*)}{\partial \theta} \cdot \theta^*
 \end{aligned}$$

y la ecuación característica se obtendrá de la solución de la ecuación  $\Omega J - sI\Omega = 0$  tomando la forma

$$s_4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad (27)$$

Para analizar la estabilidad del sistema deberíamos calcular los autovalores de la ecuación característica, o aplicar el criterio de Routh-Hurwitz. Sea cual sea la elección, nos enfrentaremos al problema de que ni la forma ni el signo de los coeficientes están determinados, con lo que no llegaríamos a ningún resultado concreto.

### 3.3. Simulación

Como uno de nuestros objetivos es analizar la estabilidad del modelo para un conjunto aceptable de parámetros, y dado que existen métodos numéricos capacitados para resolver el sistema no lineal, aplicaremos el método de Runge-Kutta<sup>9</sup> en cuatro etapas, para llevar a cabo varias simulaciones, que nos permitirán sacar diversas conclusiones.

<sup>9</sup> El método de Runge-Kutta es un método de cálculo de una solución aproximada de una ecuación diferencial con condición inicial. El conocimiento, en el origen, del desarrollo de Taylor de la solución permite el cálculo de ésta en un punto próximo. El método consiste en hallar aproximaciones sucesivas de este desarrollo combinando valores calculados de la ecuación diferencial en puntos convenientemente elegidos. La gran utilidad de este método es que permite resolver ecuaciones diferenciales no lineales. El método de Runge-Kutta de cuarto orden es probablemente el método más usado en las aplicaciones de la ingeniería y actualmente es bastante utilizado en aplicaciones económicas. Una detallada exposición del método de Runge-Kutta se puede encontrar en Palm III (1983:197-205) y en Hornbeck (1975).

Además, nos interesa observar los efectos que sobre la estabilidad del modelo tienen la consideración o no de histéresis en el mercado de trabajo, por una parte, y la presencia o ausencia de ilusión monetaria, por otra, así como el efecto conjunto de ambas situaciones, para contrastar nuestros resultados con los obtenidos por Falagán (1994) y Desai (1973) en extensiones muy sencillas del modelo original de Goodwin.

Para lograr los objetivos anteriores realizaremos seis simulaciones diferentes:

- En la primera simulación se considera que no existe histéresis ( $\rho_2=0$ ) en el mercado de trabajo y que no hay presencia de ilusión monetaria ( $\rho_4=1$ ).
- En la segunda simulación supondremos que existe ilusión monetaria ( $\rho_4=0.9<1$ ) manteniéndose la ausencia de histéresis.
- En la tercera y cuarta simulación consideraremos la existencia de histéresis bajo la hipótesis de ausencia de ilusión monetaria, siendo el valor de  $r_2$  igual a 0.1 en la tercera simulación e igual a 0.3 en la cuarta, para así valorar la incidencia del mayor peso de la histéresis en la determinación de los salarios nominales sobre la estabilidad del modelo.
- Por último, en la quinta y sexta simulación supondremos la existencia conjunta de histéresis e ilusión monetaria, bajo las dos hipótesis alternativas de histéresis planteadas en la tercera y cuarta simulación, respectivamente.

En el caso general en el que existe ausencia de histéresis y de ilusión monetaria, consideraremos que los coeficientes toman los siguientes valores, que son recogidos en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Valores de los coeficientes en la simulación.

$\gamma_0=0.09$	$\gamma_1=0.1$	$\mu_1=0.012$	$\mu_2=0.6$	$\nu_1=0.015$	$\nu_2=0.02$
$\beta=0.01$	$s_s=0.24$	$s_w=0.04$	$c=4$	$\rho_0=0.9$	$\rho_1=1$
$\rho_2=0$	$\rho_3=0.6$	$\rho_4=1$	$\xi=1$	$\zeta=1.4$	$b_0=0$
$b_1=0.3$	$b_2=0.0129$				

Los valores de los doce primeros parámetros son los mismos que utilizan Gombrowski y Krüger en su simulación. El valor de  $\rho_2$  nulo se debe a que no consideramos la influencia de la histéresis en la negociación salarial. El valor que atribuimos al parámetro que recoge la influencia de la tasa de crecimiento de la productividad sobre la tasa de crecimiento de los salarios nominales  $r_3$  se debe a que los estu-

dios empíricos muestran que ese parámetro varía entre 0.4 y 0.8<sup>10</sup>. El supuesto de ausencia de ilusión monetaria obliga a que  $\rho_4=1$ . La consideración de que  $\xi$  toma un valor igual a la unidad equivale a considerar que los productores revisan sus precios una vez al año. Por último nos parecen razonables los valores del coeficiente de mark-up ( $\xi=1.4$ ) y los de los coeficientes asociados a la función de inversión, en la que suponemos que no existe inversión autónoma.

El punto de equilibrio en la primera simulación para los valores anteriores es:  $u^*=0.75$ ,  $v^*=0.9115$ ,  $k^*=2.5666$ ,  $q^*=0.7702$  y el resultado de la simulación<sup>11</sup>, en la que se parte de una posición inicial ( $u_0=u^*$ ,  $v_0=0.8915$ ,  $k_0=k^*$ ,  $q_0=q^*$ ), se recoge en la Figura 1<sup>12</sup>, en la cual se observa que los ciclos que siguen los pares ( $u$ ,  $v$ ) se mueven a lo largo de una trayectoria que se aleja cada vez más del punto de equilibrio, por lo que podemos afirmar que para nuestro conjunto de parámetros el sistema es inestable. Cada ciclo tiene una duración de entre 12 y 13 años, lo que implica un período superior al obtenido por Gombrowski y Krüger (8.6 años), pero inferior a los ciclos de 16-22 años del tipo de Kuznets sugeridos por Atkinson (1969).

En la segunda simulación se consideran los efectos de la introducción de ilusión monetaria, asignándole al parámetro  $\rho_4$  el valor de 0.9. Con esta única modificación, se produce un cambio en el valor de equilibrio de la tasa de empleo que ahora tomará un valor del 91.639%. El período del ciclo no se altera pero sí que lo hace el comportamiento del ciclo que ahora evoluciona acercándose al estado estacionario como se recoge en la Figura 2.

En la tercera y cuarta simulación introducimos el efecto de la histéresis dentro de la ecuación de negociación salarial, sin que se produzcan alteraciones en los valores de equilibrio de la tasa de empleo ni de la participación de los trabajadores en la renta nacional puesto que éstos no dependen del valor que tome el parámetro  $\rho_2$ . Además, tampoco se modifica el período del ciclo económico. Sin embargo, de la observación de las Figuras 3 y 4 se deduce que cuanto mayor sea el peso de la histéresis sobre la tasa de variación de los salarios nominales, más estable será el sistema económico; de hecho, cuando  $\rho_2$  toma el valor 0,1 el modelo es inestable, mientras que cuando

<sup>10</sup> Véase Drèze y Bean (eds.) (1990).

<sup>11</sup> Todas las simulaciones se realizan mediante la utilización del método de Runge-Kutta en cuatro etapas, realizando un total de 104 iteraciones en cada simulación con un tamaño de paso de 0.25. Para obtener las simulaciones hacemos uso del programa informático, aplicado a sistemas dinámicos, PHASER diseñado por Koçak (1988).

<sup>12</sup> Esta figura, así como las siguientes se exponen en el anexo 2.



aumenta la influencia de la histéresis en la negociación salarial ( $\rho_2=0,3$ ) el sistema adquiere estabilidad.

Obviamente, dado que tanto la ilusión monetaria como la histéresis tienen efectos estabilizadores sobre el sistema económico, la introducción simultánea de ambos supuestos tendrá un efecto complementario que redundará en la estabilidad del sistema, como se refleja en las Figuras 5 y 6, sin que se altere el período del ciclo.

#### 4. CONCLUSIONES

La introducción dentro de la ampliación del modelo de Goodwin planteada por Gombrowski y Krüger (1986a) de una función de inversión que recoja la influencia del grado de utilización de la capacidad productiva sobre la acumulación y de una ecuación de negociación salarial basada en la teoría insider-outsider que posee una fuerte justificación microeconómica, supuestos que además parecen compatibles con la realidad económica española, modifica parcialmente los resultados obtenidos por los anteriores autores.

Como era de suponer, la propiedad de inestabilidad estructural del modelo original de Goodwin hace que nuestra modificación altere la característica de un movimiento autosostenido en forma de órbitas cerradas alrededor del estado estacionario, lo que ya ocurría en la generalización del modelo propuesta por Gombrowski y Krüger.

Los resultados más importantes que se derivan de nuestro análisis son que el período del ciclo, para unos valores aceptables de los parámetros, se sitúa en torno a 12-13 años, un ciclo ligeramente superior al de Marx-Juglar, pero inferior al ciclo de Kuznets, sugerido por Atkinson como el ciclo que más se adecua al modelo de Goodwin. Además hay que destacar que las simulaciones realizadas muestran que la introducción dentro de la ecuación de negociación salarial de la histéresis como un factor explicativo, así como la presencia de ilusión monetaria tienen un efecto estabilizador sobre el sistema económico, lo que coincide con los resultados obtenidos por Falagán (1994) y por Desai (1973), respectivamente, en ampliaciones muy sencillas del modelo original de Goodwin.

## ANEXO 1

El sistema de cuatro ecuaciones diferenciales que determina el modelo se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

• **Cálculo de la tasa de variación de la tasa de empleo ( $\hat{v}$ ).**

La tasa de variación del producto nacional se calcula a partir de las ecuaciones (3), (4) y (6), obteniéndose la siguiente ecuación

$$\hat{Y} = \frac{c(I-S)}{Y} = c\left[\frac{\dot{K}}{Y} - \frac{S}{Y}\right] = c\left[\frac{b_0K + b_1(1-u)Y + b_2K\theta}{Y} - \frac{s_c(1-u)Y + s_w uY}{Y}\right]$$

que se puede expresar como

$$\hat{Y} = c[(b_0 + b_2\theta)k - s_w] + c[b_1 - (s_c - s_w)](1-u) = r(\theta, k) + j(u)$$

La productividad es igual a

$$a = \frac{Y}{L} = \frac{Q \cdot \theta}{h \cdot \theta \cdot \chi} = \frac{Q/\chi}{h}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \hat{Q} - \hat{\chi} - \hat{h} = \mu_1 + \mu_2(\hat{K} - \hat{\chi}) - (-\gamma_0 + \gamma_1 v) = \\ &= \mu_1 + \mu_2(v_1 + v_2 u) - (-\gamma_0 + \gamma_1 v) = g(u) - t(v) \end{aligned}$$

La tasa de crecimiento de la oferta de trabajo es

$$\hat{N} = \beta$$

por lo que la tasa de variación de la tasa de empleo será

$$\hat{v} = \hat{L} - \hat{N} = \hat{Y} - \hat{a} - \hat{N} = r(\theta, k) + j(u) - g(u) + t(v) - \beta$$

que nos proporciona la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (20).

• **Cálculo de la tasa de variación de la participación de los salarios en el producto nacional ( $\hat{u}$ )**

De las ecuaciones (18) y (17) se deduce que  $\hat{u} = \hat{w} - \hat{a}$  y  $\hat{w} = \hat{m} - \hat{p}$ , respectivamente. A partir de estas relaciones se obtiene que  $\hat{u} = \hat{m} - \hat{p} - \hat{a}$ , y por lo tanto :

$$\begin{aligned}\hat{u} &= -\rho_0 + \rho_1 v + \rho_2 \hat{v} + \rho_3 \hat{a} + \rho_4 \hat{p} - \hat{p} - \hat{a} = -\rho_0 + \rho_1 v + \rho_2 \hat{v} - (1-\rho_3)\hat{a} - (1-\rho_4)\hat{p} = \\ &= h(v) + \rho_2 \hat{v} - (1-\rho_3)[g(u)-t(v)] - (1-\rho_4)l(u)\end{aligned}$$

• **Cálculo de la tasa de variación de la relación capital-producto ( $\hat{k}$ )**

Utilizando las ecuaciones (2), (3), (4), (5) y (6) se obtiene\*

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \hat{K} - \hat{Y} = b_0 + b_1 \frac{1-u}{k} + b_2 \theta - c[(b_0+b_2\theta)k-s_w] - \delta[b_1-(s_c-s_w)](1-u) = \\ &= b_0 + cs_w + \left[ \frac{b_1}{k} - c(b_1-s_c+s_w) \right] (1-u) + b_2 \theta - c(b_0 + b_2 \theta)k = f(u, k) + z(k, \theta)\end{aligned}$$

• **Cálculo de la tasa de variación del grado de utilización de la capacidad instalada ( $\hat{\theta}$ )**

Utilizando las ecuaciones (11), (2), (7) y (8) se obtiene la siguiente relación

$$\hat{\theta} = \frac{Y}{Q} = \frac{K/k}{Q} = \frac{K/\chi}{k.Q/\chi}$$

de la que se deduce

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \left( \frac{\hat{K}}{\chi} \right) - \left( \frac{\hat{Q}}{\chi} \right) - \hat{k} = v_1 + v_2 u - (\mu_1 + \mu_2 v_1 + \mu_2 v_2 u) - \hat{k} = v_1(1-\mu_2) - \mu_1 + \\ &+ v_2(1-\mu_2)u - [f(u, k) + z(k, \theta)] = i(u) - z(k, \theta) - f(u, k)\end{aligned}$$

## ANEXO 2

Figura 1. Caso general: sin histéresis y sin ilusión monetaria.

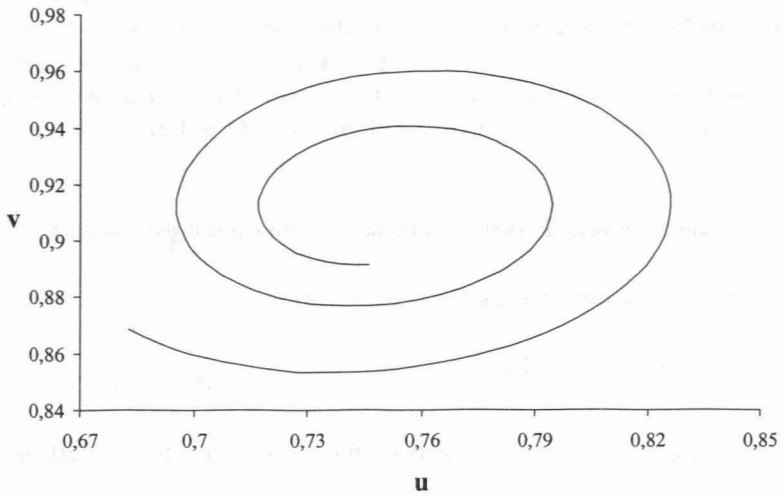
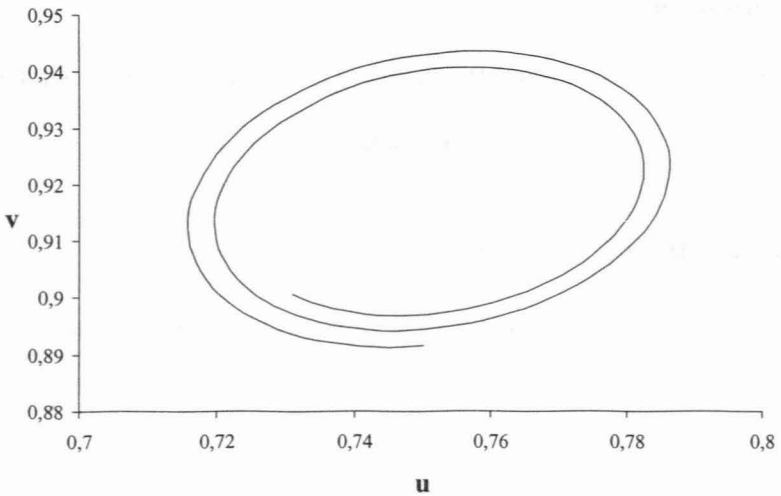
Figura 2. Sin histéresis y con ilusión monetaria ( $\rho_1=0,9$ )

Figura 3. Sin ilusión monetaria y con histéresis ( $\rho_2=0,1$ ).

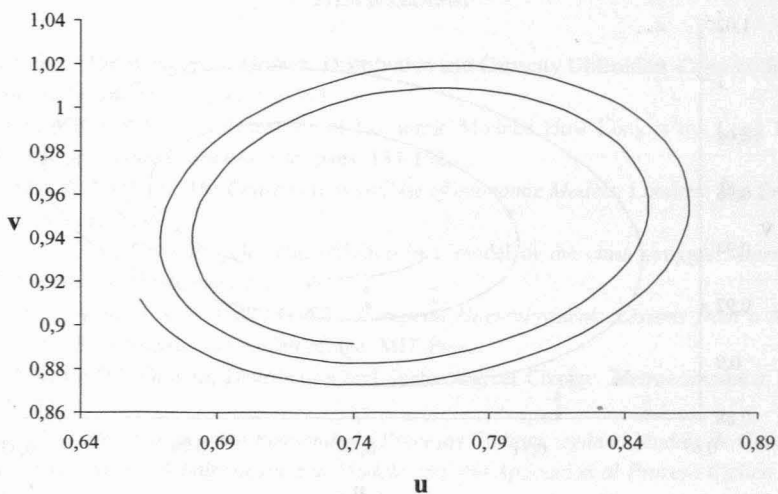


Figura 4. Sin ilusión monetaria y con histéresis ( $\rho_2=0,3$ ).

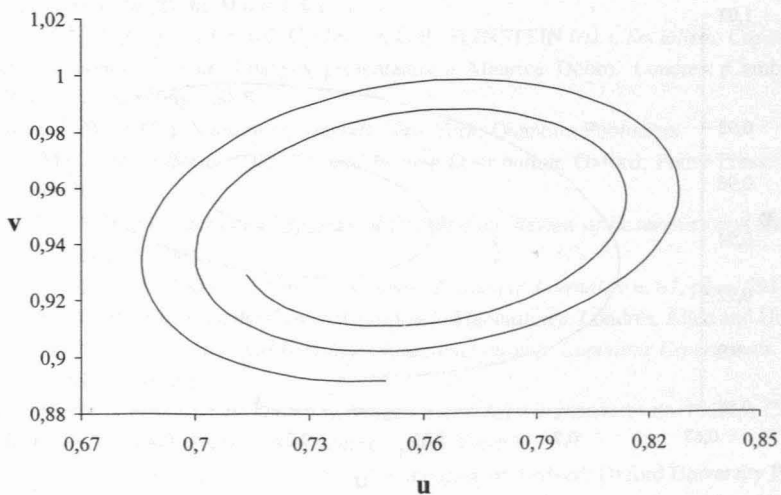
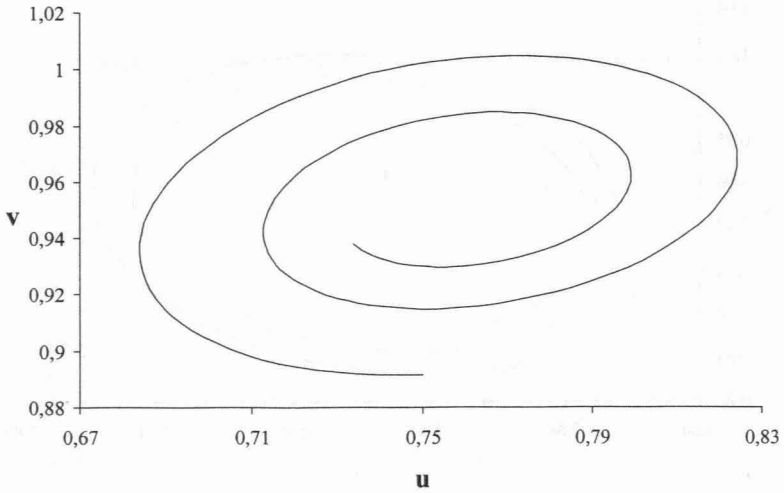
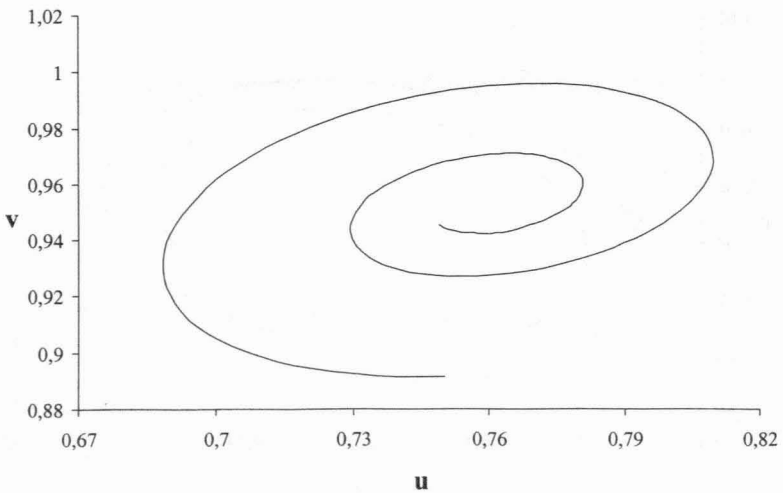


Figura 5. Presencia de histéresis ( $\rho_2=0,1$ ) y de ilusión monetaria ( $\rho_4=0,9$ )Figura 6. Presencia de histéresis ( $\rho_2=0,3$ ) y de ilusión monetaria ( $\rho_4=0,9$ )

## BIBLIOGRAFÍA

- AMADEO, E.J. (1986). Notes on Growth, Distribution and Capacity Utilization. *Contributions to Political economy*, n. 5, págs. 83-94.
- ATKINSON, A.B. (1969). The Timescale of Economic Models: How Long is the Long Run?. *Review of Economic Studies*, 106, págs. 137-152.
- BERGSTROM, A.R. (1967). *The Construction and use of economic Models*. Londres: The English Universities Press.
- DESAI, M. (1973). Growth cycles and inflation in a model of the class struggle. *Journal of Economic Theory*, 6, págs. 527-545.
- DRÉZE, J. H. y Bean, C.R. (eds.) (1990): *European Unemployment: Lessons from a Multi-Country Econometric Study*, Cambridge: MIT Press.
- DUTT, A.K. (1986). Growth, Distribution and Technological Change. *Metroeconomica*, págs. 113-38.
- FALAGÁN, J. (1994). *Crecimiento Económico y Procesos Cíclicos según el Modelo de Goodwin. Análisis Crítico y Modificaciones al Modelo con una Aplicación al Proceso Cíclico de la Economía española en los años 80*. Tesis Doctoral, sin publicar. Universidad de Vigo.
- GANDOLFO, G. (1996). *Economic Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag. (1996).
- GOMBLOWSKI, J.; KRÜGER, M. (1986). Generalizations of Goodwins Model, *Osnabrücker Sozialwissenschaftliche Manuskripte*, n. 3.
- GOODWIN, R.M. (1967). «A Growth Cycle», en C.H. FEINSTEIN (ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth* (Ensayos presentados a Maurice Dobb). Londres: Cambridge University Press, págs. 54-8.
- HORNBECK, R. W. (1975). *Numerical Methods*. New York: Quantum Publishers.
- JARSULIC, M. (1988). *Effective Demand and Income Distribution*. Oxford: Polity Press, Basil Blackwell.
- KALDOR, N. (1955-56). Alternative Theories of Distribution. *Review of Economics and Studies*, vol. 23, págs. 83-100.
- KALDOR, N. (1957). A Model of Economic Growth. *Economic Journal*, vol. 67, págs. 591-624.
- KALECKI, M. (1939). *Essays in the theory of Economic Fluctuations*. Londres: Allen and Unwin.
- KOÇAK, H. (1988). *Differential and Difference Equations through Computer Experiments*. New York: Springer-Verlag.
- KUH, E. (1967). A Productivity Theory of Wage Levels. An Alternative to the Phillips Curve. *Review of Economic Studies*, 34 (Octubre), págs. 333-60.
- LAYARD, R.; NICKELL, S.; JACKMAN, R. (1991). *Unemployment*. Oxford: Oxford University Press.
- Mauleón, I. (1985). *La Inversión en Bienes de Equipo: Determinantes y Estabilidad*. Documento de Trabajo n. 8515. Banco de España. Servicio de Estudios.
- MEDIO, A. (1981). A Classical Model of Business Cycles. En E. NELL (ed.): *Growth, Profits and Property*. Cambridge: Cambridge University Press.

- NICKELL, S.J. (1990). Unemployment: A Survey. *Economic Journal*, 100, págs. 391-439.
- PALM III, W.J. (1983). *Modelling, Analysis, and Control of Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons.
- PHILLIPS, A.W. (1954). Stabilization policy in a closed economy. *Economic Journal*, 64, págs. 290-323.
- POHJOLA, M.T. (1979). Wages, Prices and the Stability of Class Struggle. *Research Paper n° 12*, University of Cambridge.
- ROBINSON, J. (1956). *The Accumulation of Capital*. Londres: MacMillan.
- ROWTHORN, R. (1981). Demand, Real Wages and Economic Growth. *Thames Papers in Political Economy*, North East London Polytechnic, Autumn.
- SANTOMERO, A.; SEATER, J. (1978). The Inflation-Unemployment Trade-Off: A Critique of the Literature. *Journal of Economic Literature*, vol. XVI (Junio), págs. 499-544.
- SOLOW, R.M. (1990). «Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Ruminations», en K. Velupillai (ed.): *Nonlinear and Multisectoral Macrodynamics, Essays in Honour of Richard Goodwin*. Londres: Macmillan.
- SPORTELLI, M.C. (1995): A Kolmogoroff Generalized Predator-Prey Model of Goodwin's Growth Cycle». *Zeitschrift für Nationalökonomie, Journal of Economics*. Vol. 61, 1, págs. 45-64.
- VAN DER PLOEG, F. (1983a). Economic Control and Conflict over the Distribution of Income. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 29, n. 3, págs. 253-279.
- VAN DER PLOEG, F. (1983b). Predator-Prey and Neo-Classical Models of Cyclical Growth. *Zeitschrift für Nationalökonomie, Journal of Economics*. Vol.43, N° 3 ,págs. 235-256.
- VAN DER PLOEG, F. (1984). «Macro-Dynamic Theories of Economic Growth and Fluctuations», en F. VAN DER PLOEG (ed.): *Mathematical Methods in Economics*. Londres: Wiley and Sons, págs. 249-285.
- VANDERKAMP, J. (1968). The Phillips Relation: A Theoretical Explanation- A comment. *Economica*, 35 (Mayo), págs. 179-83.
- VELUPILLAI, K. (1982a). Linear and Nonlinear Dynamics in economics: The Contributions of Richard Goodwin. *Economic Notes*, 3, págs. 73-92.
- VELUPILLAI, K. (1982b). When Workers Save and Invest: Some Kaldorian Dynamics. *Zeitschrift für Nationalökonomie, Journal of Economics*. Vol. 42, N° 3, págs. 247-258.
- VELUPILLAI, K. (1983). A Neo-Cambridge Model of Income Distribution and Unemployment. *Journal of Post Keynesian Economic*, Spring.
- WÖRGOTTER, A. (1986). Who's Who in Goodwin's Growth Cycle. *Jahrbucher für Nationalökonomie und Statistik*, vol. 1, n.3, págs. 222-28.