Cuadernos de Economía. Vol. 24, 119 - 137, 1996

Estrategias en Política Monetaria y Fiscal ante la unificación monetaria. Un juego diferencial

Mª Dolores Soto Torres
Ramón Fernández Lechón
Catedráticos de Economia Aplicada
Facultad de C.C. E.E. y E.E.
Universidad de Valladolid
Avda. Valle Esgueva nº 6 - 47011 Valladolid
Tel.: 983 42 30 00 Extensión 2 43 88 / 89

ABSTRACT

This paper considers a quadratic differential game, from Aarle, Bovenberg and Raith, between the fiscal authorities of two countries of the European Union and the European Central Bank. The government debts are analysed when the central bank is leader being the fiscal politic of both countries followers. The fiscal co-operation between two symmetric countries is permitted. Also, we assume that the players can have open-loop and feedback information. In all cases, it is possible to obtain the equilibrium solution when any player dominate the decision process. The influence of the monetary politic on the evolution of debts can be evaluated.

Key Words: Debts, fiscal deficit and monetary base. Stackelberg and Nash equilibrium solutions.

RESUMEN

En este trabajo, siguiendo uno de Aarle, Bovenberg y Raith, se analiza, mediante un juego diferencial cuadrático, la evolución de las deudas nacionales de dos países que

representan el conjunto de los países de la Unión Europea, dentro de la Unión Monetaria. En el estudio, se supone que el Banco Central Europeo puede tener o no, cierta jerarquía respecto a las autoridades fiscales de cada país. Se considera, la posibilidad de cooperación en política fiscal entre los dos países y que la información, que las autoridades posean para determinar sus estrategias, sea en ciclo abierto o feedback y se estudia la influencia que la supremacía de la política monetaria tiene sobre las deudas.

1. Introducción

El análisis de decisiones en política monetaria y fiscal puede llevarse a cabo utilizando la teoría de juegos, si son órganos distintos los que toman decisiones en materia fiscal y monetaria. La elección de esta teoría proviene, en que si existen autoridades distintas, una fiscal y otra monetaria, es posible que ellas se planteen diferentes objetivos y tengan distintas restricciones lo que provocará, debido a las interrelaciones entre ambas políticas, una situación conflictiva entre los intereses de ambos órganos. Como ejemplos de esta elección pueden citarse los trabajos de Tabellini (1986) o Petit (1990, p. 240), donde se consideran juegos diferenciales cuadráticos entre una autoridad fiscal y otra monetaria en una economía nacional.

Ante la unificación monetaria de los países que integran la Unión Europea y para el análisis de las decisiones estratégicas que se podrán adoptar por las correspondientes autoridades, una para cada país en materia fiscal y otra monetaria conducida por el Banco Central Europeo (B.C.E.), el juego puede ampliarse a tantos jugadores como participantes en la unión monetaria más el órgano monetario común, pues la situación conflictiva seguirá subyaciendo.

El análisis de la evolución de la deudas nacionales cuando se haya realizado la unificación monetaria, es una cuestión sobre la que tienen interés todos los miembros de la Unión y ha sido estudiada en distintos trabajos. En el controvertido informe Delors (1989), se manifiesta la necesidad de una coordinación en política fiscal para los países que constituyan la Unión Económica y Monetaria; en un trabajo de Bovenberg, Kremers y Masson (1991), se estudian distintas posibilidades de cómo la unificación monetaria puede reducir la disciplina fiscal y mantienen, que con una moneda común los problemas con la deuda, por parte de un gobierno, podrían ser trasladados parcialmente a otros gobiernos. En un trabajo de Aarle, Bovenberg y Raith (1997), basado en el de Tabellini de 1986, se estudia cómo el B.C.E. puede ser explotado como una propiedad común por los gobiernos nacionales, y cómo éstos, si no son disciplinados, pueden provocar la denominada "tragedia de los comunes" analizada por Hardin en 1968.

La tesis mantenida en el trabajo de Aarle, Bovenberg y Raith, se argumenta al considerar un juego diferencial cuadrático, de tres personas, con suma no nula y horizonte infinito. Uno de los jugadores, representando al B.C.E., controla las variaciones de la base monetaria en la Unión, y los otros dos jugadores, representando a dos gobiernos nacionales cualesquiera de la Unión, tienen control sobre la política fiscal de sus correspondientes países. Se analiza, específicamente en el trabajo, cómo evolucionará la deuda de los dos países representativos después de la unificación monetaria, si los tres jugadores deciden no cooperar entre ellos, o bien, si los gobiernos nacionales mantienen una cooperación fiscal, pero no cooperan con el Banco Central Europeo. En ambos casos, se supone que todos los jugadores tienen la misma jerarquía durante el desarrollo del juego, encontrándose dos estrategias de equilibrio, una en ciclo abierto y otra feedback.

En este trabajo se sigue el planteamiento del juego, entre los tres jugadores, propuesto por Aarle, Bovenberg y Raith, pero se supondrá que el B.C.E. tiene cierto "poder", de modo que los gobiernos nacionales, controlando sus políticas fiscales, actúan teniendo en cuenta la política monetaria adoptada por el Banco Central Europeo. La estrategia de equilibrio que se busca es entonces un equilibrio de Stackelberg siendo líder el Banco Central Europeo. Se trata, por tanto, de analizar cómo influye en la evolución de las deudas nacionales la primacía de la política monetaria. Esta posibilidad es considerada en un trabajo de Currie (1992), donde la mayor jerarquía de la autoridad monetaria frente a una autoridad fiscal se justifica al suponer que la primera frente a la segunda goza de mayor credibilidad.

La solución de equilibrio de Stackelberg encontrada está, en este juego, muy relacionada con la solución de equilibrio de Nash, que supone que los tres jugadores tienen la misma jerarquía, de modo que es posible realizar comparaciones entre ambas. Se seguirá un desarrollo diferente al utilizado por Aarle, Bovenberg y Raith, para encontrar las estrategias de Nash, al trabajar directamente con el sistema dinámico que surge al aplicar el principio del mínimo, en las estrategias de ciclo abierto, y con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman en el equilibrio feedback, siguiendo, en este último supuesto, planteamientos expuestos por Yeung (1995).

El trabajo dividido en secciones, se ocupa en la segunda del planteamiento del juego diferencial. En la tercera y cuarta sección, se determina el equilibrio de Stackelberg, siendo líder el B.C.E., si los representantes de los órganos fiscales nacionales tienen la misma jerarquía, y entre ellos mantienen una actitud no cooperativa o cooperativa, respectivamente. En ambas secciones, lo que permite su subdivisión, se considerará que la información de los jugadores pueda ser en ciclo abierto o feedback, posibilidad, esta última, que Tabellini considera más realista al plantearse el problema a largo plazo. El trabajo, en la última sección, dando valores específicos a los parámetros del modelo, encuentra los resultados obtenidos en las secciones precedentes.

2. Planteamiento del modelo

Para el análisis de las relaciones recíprocas entre política monetaria y fiscal partimos de una ecuación dinámica que determina la evolución de la deuda de un gobierno en una economía nacional:

$$\dot{D}(t) = i(t)\, D(t) + F(t) - \dot{M}(t),$$

donde $D(t)$ es el nivel nominal de deuda, $i(t)$ el tanto de interés nominal, $F(t)$ el déficit fiscal y $\dot{M}(t)$ recoge la variación en la base monetaria. Si las variables $D(t)$, $F(t)$ y $\dot{M}(t)$ se normalizan por la renta nacional nominal $Y(t)$ y se denotan por minúsculas, la expresión anterior puede expresarse:

$$\dot{d}(t) = rd(t) + f(t) - m(t), \qquad [1]$$

donde $r = i(t) - \dot{Y}(t) / Y(t)$ se supone constante, para poder trabajar con una ecuación diferencial de coeficientes constantes. Tabellin interpreta esta suposición al trabajar sobre una economía nacional, pero su argumentación no sería válida si se considera la Unión Europea.

Si los miembros de la Unión Europea que accedan a la moneda única son representados por dos naciones, teniendo cada una de ellas una autoridad fiscal y ambas tienen un crecimiento semejante, la evolución de la deuda de ambas naciones, normalizadas por el P.I.B. europeo, seguirá desde la ecuación (1) el sistema dinámico:

$$\dot{d}_1(t) = rd_1(t) + f_1(t) - \frac{\theta}{\omega} m(t), \qquad [2]$$

$$\dot{d}_2(t) = rd_2(t) + f_2(t) - \frac{1-\theta}{1-\omega} m(t), \qquad [3]$$

donde, θ representa la fracción de moneda común, distribuida por el B.C.E. y asignada a la nación denotada por 1, y $1-\theta$ la asignación a la nación denotada por 2; ω recoge la participación de la nación 1 en el P.I.B. europeo y 1-ω la participación de la nación 2. Notemos que si la distribución de moneda se realiza de acuerdo con el tamaño económico de las naciones, esto es, $\theta = \omega$, cada nación obtendría la misma cantidad de moneda del B.C.E. que percibirían de sus correspondientes Bancos Centrales y entonces, ambas naciones podrían mantener la misma política monetaria.

Supongamos que cada autoridad fiscal nacional trata de minimizar el valor actual, sobre un horizonte infinito, de las desviaciones del déficit fiscal, controlado por ellas, respecto a un objetivo económico determinado por cada una de ellas $\bar{f}_i$, $i = 1,2$, junto con las desviaciones de ambas naciones en deuda respecto a objetivos propuestos $\bar{d}_i$, $i = 1, 2$. Si denotamos por $x_i(t)$, $u_i(t)$, $i = 1, 2$ las desviaciones de la deuda y del déficit, respectivamente, respecto a sus correspondientes objetivos económicos, el funcional a minimizar por la autoridad fiscal $i = 1, 2$, puede expresarse:

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[u_i(t)^2 + Q^{ii}x_i(t)^2 + Q^{ij}x_j(t)^2\right]e^{-\delta_f t}\,dt,\ j = 1,2,\ i \neq j\ ,$$

donde, δ_f es el tanto de actualización común para las autoridades fiscales de ambas naciones y Q^{ii}, Q^{ij} son las ponderaciones, no negativas, dadas por cada nación a las desviaciones de la deuda propia y ajena, respectivamente. Por su parte, la autoridad monetaria de la Unión se supone, trata de minimizar el valor actual, sobre el mismo horizonte, pero al tanto δ_m, de la desviación en la variación de la base monetaria respecto a un valor determinado por él, $\bar{m}$, junto con las desviaciones de la deuda, de cada nación y de ambas, con respecto a los objetivos seleccionados por ellas. Si se denota por $v(t) = m(t) - \bar{m}$, el funcional objetivo del B.C.E. puede expresarse:

$$J \equiv \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[v(t)^2 + z\omega^2 x_1(t)^2 + 2z\omega(1-\omega)x_1(t)x_2(t) + z(1-\omega)^2 x_2(t)^2\right]e^{-\delta_m t}dt\ ,$$

donde el parámetro z, también no negativo, trata de recoger la sensibilidad de la política monetaria respecto a la política económica general de la Unión. Las ponderaciones dadas a las desviaciones de la deuda tratan de reflejar como el B.C.E. tiene en cuenta el promedio de deuda, pero no como ella esté distribuida. Fijado el valor de ω, un mayor valor de z, indicaría una mayor propensión, por parte del B.C.E., a ajustar las deudas nacionales a sus objetivos.

Tenemos, por tanto, planteado un juego diferencial, cuadrático, sobre un horizonte infinito con tres jugadores: las autoridades fiscales de cada nación y el B.C.E. Cada jugador pretende minimizar un funcional objetivo y todos tienen como restricciones las ecuaciones diferenciales (2) y (3) sobre las que pueden actuar. El B.C.E. puede actuar sobre la variable y las autoridades fiscales nacionales pueden modificar sus correspondientes déficits fiscales. Además, se supone que las condiciones iniciales de deuda de cada nación son conocidas por todos los jugadores.

3. No Cooperación en Política Fiscal

Si el B.C.E. tiene cierta autoridad sobre las políticas fiscales de las dos naciones distintos equilibrios pueden ser caracterizados dependiendo de la posición jerarquizada de los seguidores respecto a si mismos (Basard y Olsder, p. 149). En esta sección, se analiza la estrategia de Stackelberg, si las dos naciones, en materia fiscal, mantienen posturas simétricas y no cooperan. Entonces, entre ellos, adoptarán un equilibrio de Nash para reaccionar ante la estrategia del líder. Se supondrá en primer lugar, que la información disponible por los jugadores es en ciclo abierto y posteriormente, que ella es feedback.

3.1. Equilibrio en ciclo abierto

Con información en ciclo abierto, los jugadores, dadas unas condiciones iniciales de deuda, utilizan controles que son función únicamente del tiempo. La reacción de los seguidores ante la estrategia del B.C.E. se determina al analizar sus estrategias no cooperativas de Nash, que se encuentran al resolver los correspondientes problemas de control. El hamiltoniano asociado al jugador i = 1, 2, será:

$$H_i = \frac{1}{2}\left[u_i^2 + Q^{ii} x_i^2 + Q^{ij} x_j^2\right] + \alpha_1^i\left[rx_1 + u_1 - \frac{\theta}{\omega}v + a\right] + \alpha_2^i\left[rx_2 + u_2 - \frac{1-\theta}{1-\omega}v + b\right],$$

con $j = 1, 2, i \neq j$, siendo, α_1^i, α_2^i las variables de coestado asociadas a la variación de la deuda de cada nación, que están expresadas en H_i con las nuevas variables. Los parámetros a y b, se obtienen de forma natural al relacionar las nuevas y las viejas variables. Aplicando condiciones necesarias del principio del mínimo (Seierstad y Sydsaeter (1993), p. 234), se encuentra que la reacción de las autoridades fiscales a la estrategia del líder, viene determinada por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{u}_1 = Q^{11} x_1 - (r - \delta_f) u_1 , \quad [4]$$

$$\dot{u}_2 = Q^{22} x_2 - (r - \delta_f) u_2 , \quad [5]$$

que expresa el comportamiento de los déficit fiscales de cada nación en función del propio déficit y de las desviaciones de la deuda. Incorporando este sistema al problema de control que tiene que resolver la autoridad monetaria, tendremos que ésta se enfrenta a un problema con cuatro variables de estado. Si aplicamos condiciones necesarias del principio del mínimo para resolverle, encontramos dos nuevas ecuaciones diferenciales:

$$\dot{v} = -z\omega x_1 - z(1-\omega)x_2 + (\delta_m - r)v - (\alpha_1 Q^{11}\frac{\theta}{\omega} + \alpha_2 Q^{22}\frac{1-\theta}{1-\omega}), \quad [6]$$

$$-(\dot{\alpha}_1\frac{\theta}{\omega} + \dot{\alpha}_2\frac{1-\theta}{1-\omega}) = v - (r - \delta_f + \delta_m)(\alpha_1\frac{\theta}{\omega} + \alpha_2\frac{1-\theta}{1-\omega}), \quad [7]$$

donde α_1 y α_2 son las variables de coestado asociadas a las ecuaciones de reacción (4) y (5) de los seguidores.

Las ecuaciones (2) y (3) de evolución de las deudas nacionales, (4) y (5) de reacción de los seguidores, junto a las dos últimas encontradas, determinan un sistema dinámico cuyas soluciones son candidatas para ser estrategias de equilibrio óptimas, tanto del B.C.E. como de las dos naciones en materia fiscal.

De ahora en adelante se supondrá, que los gobiernos nacionales ponderan de la misma forma las desviaciones de la deuda propia, esto es, $Q = Q^{11} = Q^{22}$, y que los tantos de actualización de las autoridades fiscales y monetarias coinciden. Estas suposiciones son también consideradas por Aarle, Bovenberg y Raith al ajustar valores a los parámetros y en nuestro caso, nos permite reformular las ecuaciones (6) y (7) al considerar una nueva variable $x = \alpha_1\frac{\theta}{\omega} + \alpha_2\frac{1-\theta}{1-\omega}$. Entonces, el sistema dinámico que determinará el equilibrio de Stackelberg estará formado por seis ecuaciones diferenciales lineales y admitirá una única solución estacionaria siempre que los parámetros verifiquen: $0 \neq p \neq q$, siendo $p = (r(\delta - r) - Q)^2$ y $q = zr(\delta - r)$. Estas condiciones se obtienen de forma inmediata sin más que calcular el determinante asociado a la matriz del sistema dinámico. Ahora bien, si las condiciones iniciales de las variables no coinciden con los valores que alcanza la solución de equilibrio, necesitaremos que la solución estacionaria admita al menos una trayectoria convergente, pues entonces, ella verificará las condiciones suficientes de Mangasarian (Seierstad y Sydsaeter, p. 234), y al trabajar sobre programas convexos tendremos garantizado que esa trayectoria es óptima. Ella constituirá la trayectoria de equilibrio de Stackelberg buscada.

La solución estacionaria es punto de silla si el parámetro r supera o iguala al tanto de actualización δ; o bien, si r es inferior a δ con $r(\delta - r) < Q$. Entonces, la trayectoria de equilibrio de Stackelberg tenderá hacia unos valores de deuda que verifican:

$$\frac{x_{1S}^{\bullet}}{x_{2S}^{\bullet}} = \frac{pa - q(1-\theta)a + q\theta\frac{1-\omega}{\omega}b}{pb - q\theta b + q(1-\theta)\frac{\omega}{1-\omega}a},$$

mientras que los déficits fiscales satisfacen: $Qx_{iS}^{*} = (r - \delta)u_{iS}^{*}$ y la variación de la base monetaria se determina mediante la expresión:

$$v_S^{*} = \frac{q(\omega a + (1-\omega)b)}{q-p},$$

luego, si $a = b$ encontramos que $v(t)$, sobre la trayectoria de equilibrio de Stackelberg, evoluciona hacia un valor independiente de la distribución de moneda, condición que también se satisface sobre la trayectoria de equilibrio de Nash. La condición $a = b$ no es suficiente para garantizar que las desviaciones de las deudas tiendan hacia un valor independiente de la distribución de moneda; sin embargo, si consideramos esta condición y que el reparto de moneda es proporcional a la participación en el producto, entonces ambas naciones tienden hacia un mismo valor de deuda :

$$x_{iS}^{*} = \frac{(r-\delta)[r(r-\delta)-Q]a}{p-q}.$$

Si ninguno de los jugadores logra imponerse en el proceso de decisión, los tres actuarán siguiendo una estrategia no cooperativa de Nash en ciclo abierto. El sistema dinámico que determina la estrategia de equilibrio está formado por cinco ecuaciones y coincide con el obtenido en el análisis del equilibrio de Stackelberg, si la contribución de la variable x es eliminada. El sistema dinámico presenta también un único estado de equilibrio si $\delta \neq r$ y $r(\delta - r)$, en caso de ser positivo, es distinto del valor de ponderación Q y de $Q + z$. Si imponemos además a los parámetros, las mismas condiciones que en Stackelberg para que la solución estacionaria sea punto de silla, ahora, condiciones iniciales de deuda sobre la variedad estable convergerán hacia valores que satisfacen la relación:

$$\frac{x_{1N}^{*}}{x_{2N}^{*}} = \frac{(Q - r(\delta - r))a + z(1-\theta)a - z\theta\frac{1-\omega}{\omega}b}{(Q - r(\delta - r))b + z\theta b - z(1-\theta)\frac{\omega}{1-\omega}a},$$

con lo que si $\alpha = b$ y $\theta = \omega$ la expresión anterior es la unidad. Por su parte, los déficits fiscales satisfacen: $Qx_{iN}^{*} = (r - \delta)u_{iN}^{*}$ y la variación de la base monetaria tiende hacia:

$$v_N^{*} = \frac{z(\omega a + (1-\omega)b)}{Q + z - r(\delta - r)},$$

independiente de la distribución de moneda si $a = b$.

Llegados a este punto surge una cuestión de forma natural. Si tenemos unas condiciones iniciales de deudas nacionales, déficits fiscal y variación de la base monetaria, ¿qué puede resultar más interesante para la evolución de estas variables, dar una mayor jerarquía al B.C.E. o situarle en el mismo plano jerárquico que las autoridades fiscales nacionales? Para contestar a la pregunta, notemos que las soluciones estacionarias asociadas a los equilibrios estratégicos de Nash y Stackelberg existen, si a los parámetros se les exige condiciones distintas. En el caso de que todas las condiciones se verifiquen, y si además los parámetros satisfacen condiciones para que la solución estacionaria sea al menos punto de silla, entonces, condiciones iniciales en deuda, déficit fiscal y variación monetaria situadas sobre la variedad estable del equilibrio de Nash, puede ser también tomada sobre la variedad estable asociada a Stackelberg. Ello es debido a las dimensiones que presentan ambas variedades y al tener en cuenta, que en el equilibrio de Stackelberg tenemos libertad de elección sobre el valor inicial de la variable x, que es simplemente una variable instrumental en el equilibrio de Stackelberg.

Supuesto $a = b$ y $\theta = \omega$, encontramos la relación:

$$\frac{x_{iN}^{*}}{x_{iS}^{*}} = \frac{u_{iN}^{*}}{u_{iS}^{*}} = \frac{[r(\delta - r) - Q]^2 - rz(\delta - r)}{[Q - r(\delta - r)][Q + z - r(\delta - r)]},$$

que, de acuerdo con los valores de los parámetros, determina la relación entre las tendencias de las desviaciones de la deuda y del déficit fiscal para las estrategias Nash y Stackelberg.

3.2. Equilibrio Feedback

En este caso, los controles de los jugadores, además de ser funciones del tiempo dependen de los valores que vayan alcanzando en él las deudas nacionales y las trayectorias que determinan las variables de estado, se pueden encontrar al considerar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (Basar y Olsder (1995), p. 417). Ahora los controles tienen la propiedad de ser consistentes fuertes, propiedad que no es compartida por los controles en ciclo abierto. Los controles feedback son óptimos independientemente del momento en el que se desarrolla el juego y de la situación en que se encuentren las deudas nacionales.

En el problema que nos ocupa, el equilibrio feedback no está influenciado por la existencia de un líder por lo que las estrategias feedback de Stackelberg y de Nash coinciden. El procedimiento que se va a seguir para su obtención, difiere del considerado en el trabajo de Aarle, Bovenberg y Raith, al trabajar con el principio de optimalidad de Bellman.

Si denotamos por $V_i \equiv V_i\,(x_1(t),\, x_2\,(t),\, t),\ i = 1, 2$, las funciones de valor de los gobiernos nacionales y por $U \equiv U(x_1(t),\, x_2\,(t),\, t)$, la función de valor del B.C.E., las políticas fiscales reaccionarán ante la propuesta del líder, resolviendo los problemas: $-\dfrac{\partial V_i}{\partial t} = \min_{u_i} H_i$, , donde el hamiltoniano H_i viene determinado por la expresión:

$$\left\{\frac{e^{-\delta t}}{2}(u_i^{\,2} + Qx_1^{\,2} + Q^{ij}x_2^{\,2}) + \frac{\partial V_i}{\partial x_1}(rx_1 + u_1 - \frac{\theta}{\omega}v + a) + \frac{\partial V_i}{\partial x_2}(rx_2 + u_2 - \frac{1-\theta}{1-\omega}v + b)\right\},$$

con subíndices y superíndices de notación ya conocida. Aplicando condiciones de primer orden al problema de minimizar el hamiltoniano, obtenemos los controles de las autoridades fiscales:

$$u_i\,(t, x_1, x_2) = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i}e^{\delta t}, \quad i = 1, 2.$$

Incorporando estos resultados al problema que tiene que resolver el B.C.E., $-\dfrac{\partial U}{\partial t} = \min_{v} H$, , donde el hamiltoniano H está definido por:

$$\frac{e^{-\delta t}}{2}(v^2 + q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2) + \frac{\partial U}{\partial x_1}(rx_1 + u_1 - \frac{\theta}{\omega}v + \alpha) +$$

$$+\frac{\partial U}{\partial x_2}(rx_2 + u_2 - \frac{1-\theta}{1-\omega}v + b),$$

con $q_{11} = z\omega^2$, $q_{12} = 2z\omega(1 - \omega)$, $q_{22} = z(1 - \omega)^2$, y aplicando condiciones de primer orden sobre él, se encuentra que el control del líder satisface:

$$v(t, x_1, x_2) = \left[\frac{\theta}{\omega}\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{1-\theta}{1-\omega}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right]e^{\delta t}.$$

Para encontrar el equilibrio de Stackelberg y de Nash, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones en derivadas parciales obtenido desde cada uno de los problemas. La búsqueda de una solución no es sencilla, sin embargo, realizando hipótesis sobre los valores de los parámetros es posible simplificar el proceso de búsqueda. Con este fin supongamos, que los gobiernos nacionales ponderan de la misma forma las desviaciones de la deuda ajena por Q', hipótesis que mantendremos en el resto de las secciones, y que $a = b$ y $\theta = \omega$. Entonces, una solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, será:

$$V_1 \equiv \left[\frac{1}{2}A_1x_1^{\,2} + \frac{1}{2}A_2x_2^{\,2} + A_3x_1x_2 + A_4x_1 + A_5x_2 + A_6\right]e^{-\delta t},$$

$$V_2 \equiv \left[\frac{1}{2}A_2x_1^{\,2} + \frac{1}{2}A_1x_2^{\,2} + A_3x_1x_2 + A_5x_1 + A_4x_2 + A_6\right]e^{-\delta t},$$

$$U \equiv \left[\frac{1}{2}C_1x_1^{\,2} + \frac{1}{2}C_1x_2^{\,2} + C_2x_1x_2 + C_3x_1 + C_3x_2 + C_4\right]e^{-\delta t}$$

Los términos desconocidos pueden encontrarse por el procedimiento de los coeficientes indeterminados (ver apéndice 1) que nos lleva a una ecuación de grado once en $C_1 + C_2$. Esta ecuación, que siempre admite al menos una raíz real, al resolverla permite encontrar todos los coeficientes desconocidos de las funciones de valor. En general, no es posible encontrar una expresión de la raíz en función de los valores de los parámetros que permitiría establecer las expresiones de los controles feedback de los jugadores.Entonces, o bien se trabaja con una aproximación del valor de la raíz, que no presenta una expresión sencilla, o se dan valores a los parámetros. Esta última posibilidad es la que se considera en la última sección del trabajo, pero impide para valores arbitrarios de los parámetros obtener comparaciones.

Supuesto conocidos dichos coeficientes y, por tanto, los controles de los jugadores nos encontramos con el sistema dinámico que satisfacen las desviaciones de las deudas:

$$\dot{x}_1 = (r - A_1 - C_1 - C_2)x_1 - (A_3 + C_1 + C_2)x_2 + (a - A_4 - 2C_3),$$

$$\dot{x}_2 = -(A_3 + C_1 + C_2)x_1 + (r - A_1 - C_1 - C_2)x_2 + (a - A_4 - 2C_3),$$

que admite un único estado de equilibrio si $(A_3 + C_1 + C_2)^2 \neq (r - A_1 - C_1 - C_3)^2$ con el mismo valor para ambas naciones:

$$x^{*}_{iSF} = \frac{A_4 + 2C_3 - a}{r - A_1 - A_3 - 2(C_1 + C_2)}.$$

Este estado de equilibrio será al menos punto de silla si la raíz del polinomio es positiva. (ver apéndice 1).

4. Cooperación en Política Fiscal

Si los gobiernos nacionales deciden cooperar en política fiscal frente al liderazgo de la política monetaria, el B.C.E. buscará una estrategia de Stackelberg teniendo un único seguidor. Como en el caso de no cooperación entre políticas fiscales, las estrategias de

Stackelberg y Nash pueden relacionarse, consiguiéndose de este modo las comparaciones entre deudas y déficits. En primer lugar, se analizan las estrategias en ciclo abierto y posteriormente el equilibrio feedback.

4.1. Equilibrio en ciclo abierto

El objetivo que pretenderá minimizar la autoridad fiscal, si ambos gobiernos cooperan, será encontrar una solución que verifique el criterio de optimalidad de Pareto y, por tanto, el problema que tendrá que resolver, siguiendo la notación de la sección precedente, será minimizar en u_1 y u_2:

$$J_f \equiv \lambda\, J_1 + (1-\lambda)\, J_2, \quad \lambda \in (0,1) ,$$

sujeto a las ecuaciones (2) y (3). El hamiltoniano asociado a este problema se expresará:

$$H_f = \left[\frac{\lambda}{2}(u_1^2 + Qx_1^2 + Q'x_2^2) + \frac{1-\lambda}{2}(u_2^2 + Qx_2^2 + Q'x_1^2)\right] +$$

$$+\alpha^1_f(rx_1 + u_1 - \frac{\theta}{\omega}v + a) + \alpha^2_f(rx_2 + u_2 - \frac{1-\theta}{1-\omega}v + b),$$

donde α^1_f, a^2_f, son las variables de coestado asociadas a las ecuaciones de variación de las deudas. Si aplicamos, condiciones de primer orden al problema $\min_{u_1,u_2} H_f$ y tenemos en cuenta las ecuaciones diferenciales que verifican las variables de coestado, se encuentra el sistema dinámico:

$$\dot{u}_1 = (Q + \frac{1-\lambda}{\lambda}Q')x_1 - (r-\delta)u_1 , \qquad [8]$$

$$\dot{u}_2 = (Q + \frac{\lambda}{1-\lambda}Q')x_2 - (r-\delta)u_2 , \qquad [9]$$

que caracteriza la reacción de la política fiscal ante la monetaria. Notemos, que si la ponderación Q'es nula, la respuesta de la cooperación coincide con la que proporcionarían ambos gobiernos si siguen entre ellos una estrategia de Nash no cooperativa.

El líder tiene que resolver un problema de control con cuatro variables de estado, cuyas ecuaciones de comportamiento son (2), (3), (8) y (9). Si consideramos condiciones necesarias sobre su problema, obtenemos dos nuevas ecuaciones diferenciales:

$$\dot{v} = -z\omega x_1 - z(1-\omega)x_2 + (\delta - r)v - (\beta_1 A\frac{\theta}{\omega} + \beta_2 B\frac{1-\theta}{1-\omega})$$

$$-(\dot{\beta}_1\frac{\theta}{\omega} + \dot{\beta}_2\frac{1-\theta}{1-\omega}) = v - (\beta_1\frac{\theta}{\omega} + \beta_2\frac{1-\theta}{1-\omega}),$$

donde β_1 y β_2, son las variables de coestado asociadas a las ecuaciones de reacción (8) y (9) y, los parámetros A y B tienen el valor $Q+\frac{1-\lambda}{\lambda}Q'$ y $Q+\frac{\lambda}{1-\lambda}Q'$, respectivamente.

Si suponemos que $A = B$, lo que se garantiza tomando $\lambda = 0{,}5$, que implica que las dos autoridades fiscales cooperan en términos de igualdad, podemos definir una nueva variable $x = \dot{\beta}_1\frac{\theta}{\omega} + \dot{\beta}_2\frac{1-\theta}{1-\omega}$ con lo que las ecuaciones anteriores pueden reformularse en función de ella. Notemos, que el equilibrio de Stackelberg puede ser determinado estudiando un sistema de ecuaciones diferenciales lineales igual al que encontramos en el estudio del equilibrio de Stackelberg sin cooperación en política fiscal, si el parámetro Q, de aquella ocasión, toma ahora el valor $Q + Q'$. Idéntica matización, además de eliminar la variable instrumental x, puede realizarse si estudiamos el sistema dinámico que determinará el equilibrio estratégico si la autoridad monetaria no es líder y entre los gobiernos se coopera en términos de igualdad en materia fiscal. Los resultados que se encontraron en la sección 3.1, por tanto, pueden ser trasladados a esta sección.

4.2. Equilibrio Feedback

En este caso, tenemos que considerar dos funciones de valor $V = V(t, x_1, x_2)$ para el jugador cooperativo y $U = U(t, x_1, x_2)$ para el líder. El procedimiento para determinar el equilibrio es análogo al de la sección 3.2, teniendo ahora en cuenta la cooperación en política fiscal. Sin volver a repetir razonamientos, se encuentra que los controles de los gobiernos vienen determinados por las expresiones:

$$u_1(t, x_1, x_2) = \frac{-1}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial x_1}e^{\delta t},$$

$$u_2(t, x_1, x_2) = \frac{-1}{1-\lambda}\frac{\partial V}{\partial x_2}e^{\delta t},$$

que incluyéndolos en el problema del líder y aplicando condiciones de primer orden sobre su hamiltoniano, encontramos:

$$v(t, x_1, x_2) = \left[\frac{\theta}{\omega}\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{1-\theta}{1-\omega}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right]e^{\delta t}.$$

Si volvemos a considerar $\theta = \omega$, $a = b$, $\lambda = 0{,}5$, y los valores Q y Q', una solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales será:

$$V \equiv \left[\frac{A_1}{2}(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) + A_2 x_1 x_2 + A_3(x_1 + x_2) + A_4 \right] e^{-\delta t}$$

$$U \equiv \left[\frac{C_1}{2}(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) + C_2 x_1 x_2 + C_3(x_1 + x_2) + C_4 \right] e^{-\delta t}.$$

El procedimiento de los coeficientes indeterminados nos permite, ahora de un modo mucho más sencillo que en la situación feedback anterior, encontrar los términos desconocidos (ver apéndice 2), que sustituyéndolos en los controles de los jugadores, nos proporcionan el sistema dinámico lineal:

$$\dot{x}_1 = (r - 2A_1 - C_1 - C_2)x_1 - (2A_2 + C_1 + C_2)x_2 - 2(A_3 + C_3) + a\,,$$

$$\dot{x}_2 = -(2A_2 + C_1 + C_2)x_1 + (r - 2A_1 - C_1 - C_2)x_2 - 2(A_3 + C_3) + a$$

que admite como estado de equilibrio a:

$$x^{\bullet}_{iSFC} = \frac{2(A_3 + C_3) - a}{r - 2(A_1 + A_2) - 2(C_1 + C_2)},$$

si $(r - 2A_1 - C_1 - C_2)^2 \neq (2A_2 + C_1 + C_2)^2$ que dependiendo de los valores de y será al menos punto de silla. Condiciones iniciales de ysobre la trayectoria estable convergerán hacia x^*_{iSFC}.

5. Resultados numéricos

Esta sección pretende obtener, para valores concretos de los parámetros, los estados de equilibrio de las desviaciones de las deudas, encontradas en las secciones anteriores y las funciones de valor, en su caso.

Se consideran dos casos según $\delta > r$ o $r > \delta$ pues ambas situaciones llevan a dimensiones de variedades estables, asociadas a los estados de equilibrio que surgen en las estrategias en ciclo abierto, distintas. Los valores de los parámetros se han seleccionado próximos a los que proponen Aarle, Bovenberg y Raith, pero de modo que garanticen que todos los estados de equilibrio existan y tengan al menos una trayectoria convergente. En el primer caso, se toma $\delta = 0.04$, $r = 0.03$; en el segundo se intercambian los valores y en ambos casos, el resto de los parámetros mantienen para ambas posibilidades los valores: $\theta = \omega = 0.5$, $z = 0.04$, $Q = 0.03$, $Q' = 0.01$ y $a = 0.01$.

Para los primeros valores de los parámetros, se obtiene:

$x_N = 0.0014 \qquad x_{NC} = 0.0013 \qquad x_S = 0.0034 \qquad x_{SC} = 0.0025,$

teniendo las soluciones estacionarias de Nash una variedad estable asociada de dimensión dos y las de Stackelberg de dimensión tres. El subíndice C, se refiere al carácter cooperativo de la solución estacionaria. Con información feedback y sin cooperación en política fiscal, la desviación de la deuda converge hacia el atractor 0.012, siendo las funciones de valor:

$$V_1 = \left[0.064x_1^{\,2} + 0.015x_2^{\,2} - 0.021x_1x_2 + 0.04x_1\right]e^{-0.04t},$$

$$U = \left[-0.011(x_1 + x_2)^2 + 0.066x_1x_2 + 0.001(x_1 + x_2)\right]e^{-0.04t}.$$

Con cooperación en política fiscal, la convergencia es hacia 0.016, que también es un atractor, y las funciones de valor para los jugadores toman la expresión:

$$V = \left[0.041(x_1 + x_2)^2 - 0.022x_1x_2 + 0.001(x_1 + x_2)\right]e^{-0.04t},$$

$$U = \left[-0.015(x_1 + x_2)^2 + 0.029x_1x_2 + 0.001(x_1 + x_2)\right]e^{-0.04t}.$$

Las deudas, por tanto, convergen en todos los casos a valores superiores a los objetivos económicos deseados. Con información en ciclo abierto, las aproximaciones son mejores a las que se obtienen con información feedback. En este último caso la cooperación no mejora la desviación. El predominio de la política monetaria empeora la convergencia.

En el segundo caso, cuando los valores de δ y r se intercambian, se encuentra:

$x_N = 0.0014 \qquad x_{NC} = 0.0012 \qquad x_S = 0.0032 \qquad x_{SC} = -0.0025,$

todos ellos con variedades asociadas de dimensión tres. La solución de equilibrio feedback no cooperativa, que en este caso es punto de silla, toma el valor $x_{FNC} = -0.00548$ y las funciones de valor son:

$$V = \left[0.055x_1^2 - 0.02x_2^2 - 0.149x_1x_2 - 0.01x_1 - 0.01x_2 + 0.008\right]e^{-0.03t},$$

$$U = \left[0.02(x_1^2 + x_2^2) - 0.04x_1x_2 - 0.01(x_1 + x_2) + 0.02\right]e^{-0.03t}.$$

En la situación feedback cooperativa las funciones de valor son:

$$V = \left[0.04\,(x_1^2 + x_2^2) - 0.02x_1x_2 - 0.008\,(x_1 + x_2) + 0.01\right]e^{-0.03t},$$

$$U = \left[0.02\,(x_1^2 + x_2^2) + 0.02x_1x_2 - 0.008(x_1 + x_2) + 0.01\right]e^{-0.03t},$$

el estado estacionario, también punto de silla, alcanza el valor -0.075.

En este caso, las deudas convergerán hacia valores menores que el objetivo económico fijado, siendo las desviaciones más pronunciadas, otra vez, con información feedback que en ciclo abierto. También, es mejor la aproximación de Nash que la de Stackelberg.

Los resultados obtenidos, para los valores que se han seleccionado de los parámetros, parecen indicar que el predominio de la política monetaria no redundaría en una convergencia más próxima a los objetivos económicos que se proponen conseguir las dos naciones. Pero, obviamente, los resultados no son extrapolables para cualquier valor de los parámetros como se pone de manifiesto al relacionar las situaciones de equilibrio en ciclo abierto entre Nash y Stackelberg. Los resultados obtenidos suponen además, que los dos países, tanto a corto como a largo plazo, mantienen estables sus preferencias, situación que no recoge aspectos inherentes al quehacer económico. Sin embargo, no aceptar estas hipótesis nos puede llevar a la no obtención de resultados.

Referencias Bibliográficas

AARLE, B.V.; BOVENBERG, A.L. Y RAITH, M.G. (1997): "Is there a Tragedy of Common Central Bank? A Dynamic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, pp. 417 - 447.

BOVENBERG, A.L.; KREMERS, J.J.M. Y MASSON, P.R. (1991): "Economic and Monetary Union in Europe and Constraints on National Budgetary Policies". *IMF Staff Papers,* vol. 38, pp. 374 - 398.

BASAR, T. Y OLSDER, G.J. (1995): *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press. London.

BEESMA, R.M. Y BOVENBERG, A.L. (1997): "Central Bank Independence and Public Debt Policy". *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, pp. 873 -894.

CALLE SAIZ, R. (1995): *Política Fiscal y Unión Europea*. A.C. Madrid.

Committee for the Study of Economic and Monetary Union, (1989): *Report on Economic and Monetary Union in the European Community* (Delors Report).

CURRIE, D. (1992): "European Monetary Union: Institutional Structure and Economic Performance". *The Economic Journal*, vol. 102, pp. 248 - 264.

HARDIN, G. (1986): "The Tragedy of the Commons". *Science*, nº 162, pp. 1243 - 1248.

LEVINE, P. Y BROCHINER, A. (1994): "Fiscal Policy coordination and EMU: "A Dynamic Game Approch". *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 18, págs. 699 - 729.

PETIT, M.L. (1990): *Control Theory and Dynamic Games in Economic Policy Analysis*. Cambridge University Press. New York.

SEIERSTAD, A. Y SYDSAETER, K. (1993): *Optimal Control Theory with Economic Applications*. North - Holland. Amsterdam.

TABELLINI, G. (1986): "Money, Debt and Deficits in a Dynamic Game". *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 10, pp. 427 - 442.

YEUNG, D.W.K. Y CHEUNG, M.T. (1994): "Capital Accumulation Subject to Pollution Control: A Differential Game with a Feedback Nash Equilibrium", en *Advances in Dynamic Games and Applications*. (T. Basar y A. Haurie, Eds.). Birkhäuser. Boston. pp. 289 - 300.

YEUNG, D.W.K. (1995): "Pollution-Induced Business Cycles: A Game Theoretical Analysis", en *Control and Game-Theoretic Models of the Environment*. (C. Carraro y J.A. Filar, Eds.). Birkhäuser. Boston. pp. 319 - 336.

APÉNDICE 1

Aplicando el procedimiento de los coeficientes indeterminados podemos trabajar en primer lugar con las ecuaciones para A_1, A_2, A_3, C_1 y C_2. Si designamos por $H = C_1 + C_2$, se encuentra

$$A_1 + A_3 = \frac{z\omega - 2H^2 - (\delta - 2r)H}{2H} = K(H),$$

$$A_2 + A_3 = \frac{Q - (\delta - 2r)K(H) - K^2(H) - 3HK(H)}{H - A_1 + K(H)} = \frac{Q' - HK(H)}{\delta - 2r + K(H) + A_1 + 3H}.$$

Trabajando con las expresiones de la derecha, podemos despejar

$$A_1 = \frac{m(H)}{n(H)} \quad \text{con}$$

$$m(H) = \left[Q - (\delta - 2r)K(H) - K^2(H) - 3HK(H)\right]\left[(\delta - 2r) + K(H) + 3H\right] +$$

$$+(H + K(H))(HK(H) - Q')$$

$$n(H) = \left[\delta - 2r + K(H) + 3H\right]K(H) - Q + HK(H) - Q',$$

y sustituyendo en la ecuación que satisface

$$3A_1^2 + (\delta - 2r - 4K(H))A_1 + 2K^2(H) - Q + 2HK(H) = 0,$$

encontramos que H verifica una ecuación algebraica de grado once.

Aplicando el método de Horner una solución real por defecto de la ecuación es

$$H = \frac{3 \cdot 10^{-2} z\omega}{\sqrt{19(\delta - 2r)^2 - 60z\omega + 76Q - 8Q'}},$$

supuesto el radicando positivo.

Conociendo H podemos conocer las funciones de valor, pues el coeficiente C_1 satisface la ecuación $(\delta - 2r)C_1 = -H^2 + z\omega^2 - 2A_1C_1 - 2\left[K(H) - A_1\right](H - C_1)$, los coeficientes indeterminados A_4, A_5 y C_3 verifican el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left[\delta - r + K(H) + H\right]A_4 + \left[A_3 + H\right]A_5 + 2K(H)C_3 = aK(H),$$

$$\left[A_3 + A_2 + H\right]A_4 + \left[\delta - r + A_1 + H\right]A_5 + 2(A_3 + A_2)C_3 = a(A_3 + A_2),$$

$$HA_4 + [\delta - r + 2H + K(H)]C_3 = aH ,$$

y los términos independientes

$$\delta A_6 = \frac{-1}{2} A_4^2 - A_5 A_4 - (2C_3 - a)(A_4 + A_5), \ \delta C_4 = -2C_3 + 2C_3(a - A_4).$$

Los valores propios asociados al sistema dinámico en las variables x_1, x_2 son:

$$\lambda_1 = -H - \frac{z\omega}{2H} \ , \ \lambda_2 = r + K(H) - 2A_1 .$$

APÉNDICE 2

Igual que en el caso de feedback no cooperativo, para encontrar los coeficientes de las funciones de valor se puede trabajar separadamente con los términos cuadráticos y los lineales. Operando con los coeficientes que afectan a los términos cuadráticos encontramos:

$$2(A_1 - A_2)^2 + (\delta - 2r)(A_1 - A_2) - \frac{Q + Q'}{2} = 0$$

$$[\delta - 2r + 4(A_1 - A_2)](C_1 - C_2) = q_{11} - \frac{1}{2} q_{12} .$$

Además, para que existan dichos coeficientes se tiene que verificar la condición $A_1 + A_2 = C_1 + C_2 \Leftrightarrow 2z\omega = Q + Q'$, que satisfacen la ecuación de segundo grado

$$6(A_1 + A_2)^2 + (\delta - 2r)(A_1 + A_2) - \frac{Q + Q'}{2} = 0 .$$

Los términos que afectan a la parte lineal de las funciones de valor satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$[\delta - r + 4(A_1 + A_2)]A_3 + 2(A_1 + A_2)C_3 = a(A_1 + A_2),$$

$$2(A_1 + A_2)A_3 + [\delta - r + 4(A_1 + A_2)]C_3 = a(A_1 + A_2),$$

mientras que los términos independientes, satisfacen

$$\delta A_4 = -2A_3^2 - 2(2C_3 - a)A_3, \delta C_4 = -2C_3^2 + 2C_3(a - 2A_3)$$

Los valores propios asociados al sistema dinámico en variables x_1, x_2 son, en este caso: $\lambda_1 = r - 4(A_1 + A_2), \lambda_2 = r - 2(A_1 - A_2)$.