Cuadernos de Economía. Vol. 16 143-160 1988.

Un problema de control óptimo: estudio de sus bifurcaciones

Mª Dolores Soto Torres
R. Fernández Lechón

Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Avda. Valle Esgueva, 6 – 47011 Valladolid

Un problema de control óptimo: estudio de sus bifurcaciones

RESUMEN

En este trabajo, consideramos un problema de Control Optimo no lineal con dos variables de estado y discutimos cuándo el punto de equilibrio del sistema dinámico, que se obtiene al aplicar el Principio del Máximo, es un punto de silla. Se establecen condiciones necesarias y suficientes para la existencia del punto de silla, y se analizan los distintos tipos de bifurcaciones que pueden aparecer en el modelo.

A Optimal Control Problem: Study of its Bifurcatios

ABSTRACT

In this paper we considerer a non-linear Optimal Control problem with two state variables and discuss when the equilibrium point of the dynamic system is a saddle point. Necessary and sufficient conditions for the saddle point property to occur are given. In particular we discuss the bifurcations of the model.

Un problema de control óptimo: estudio de sus bifurcaciones

1. Introducción

En este trabajo consideramos un modelo general de control óptimo no lineal con dos variables de estado y tratamos de establecer condiciones necesarias y suficientes locales que garanticen cuándo el estado de equilibrio del correspondiente sistema dinámico es un punto de silla.

El planteamiento del modelo con dos variables de estado determinará un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión cuatro y entonces el sistema tendrá punto de silla si existen dos variedades (en sentido local) una estable y otra inestable, cada una de ellas de dimensión dos. Ahora bien, si las condiciones iniciales son tales que están sobre la variedad estable, la correspondiente trayectoria tenderá hacia el estado de equilibrio al crecer el tiempo, con lo que estaría resuelto el problema de control óptimo.

Son varios los autores que analizan la estabilidad del punto de silla del correspondiente sistema dinámico, estableciendo condiciones suficientes globales como Brock y Scheinkman (1976), Cass y Shell (1976); otros entre los que podemos citar a Dockmer (1985) y Medio (1987) establecen condiciones necesarias y suficientes locales.

Nosotros establecemos condiciones alternativas a las encontradas por Dockmer y Medio teniendo en cuenta, como ellos, la tasa de actualización que aparece explícitamente en el planteamiento del modelo. Por otro lado, este factor exógeno nos permitirá analizar la pérdida de punto de silla y estudiar la existencia de bifurcaciones en el sistema dinámico.

El trabajo se ha dividido en cinco apartados. En el segundo apartado planteamos el problema general de control óptimo y determinamos el sistema dinámico. En el tercero, establecemos condiciones necesarias y suficientes de punto de silla. En el cuarto apartado se analizan las posibles bifurcaciones del sistema y en el último apartado realizamos una aplicación práctica tomando como referencia el modelo desarrollado por Muller (1983).

2. UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Consideremos un modelo general de control óptimo no lineal con dos variables de estado sobre un horizonte infinito, planteado como:

$$\underset{u(t)}{\text{opt}} \int_0^{\infty} e^{-rt} \,.\, F(x(t),y(t),u(t))\, dt$$

sujeto a:

$$x(t) = f(x(t),y(t),u(t)) \qquad (2.1)$$

$$x(t) = g(x(t),y(t),u(t)) \qquad (2.2)$$

$$x(0) = x_0 \text{ dado} \qquad (2.3)$$

$$y(0) = y_0 \text{ dado} \qquad (2.4)$$

donde $x(t),y(t) \in R$ son las variables de estado del problema; $u(t) \in U \subseteq R^m$ es el vector de control m-dimensional continuo a trozos, siendo U el conjunto de controles admisibles, no vacio, compacto y convexo; r es la tasa de actualización que suponemos positiva. Las funciones f,g,F se suponen continuas, con derivadas continuas.

La resolución del problema, siguiendo a Seierstad y Sydsaeter (1977), Pitchford y Turnovsky (1977), nos lleva a considerar la función hamiltoniana H asociada al problema:

$$H(x,y,u,\Phi_1,\Phi_2) = F(x,y,u) + \Phi_1 \, f(x,y,u) + \Phi_2 \, g(x,y,u)$$

donde Φ_1 y Φ_2 son las dos variables de coestado asociadas a las dos variables de estado x e y, que son continuas con derivadas continuas a trozos.

Aplicando las condiciones necesarias del Principio del Máximo tendríamos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = H_{\Phi_1} \qquad (2.5)$$

$$\dot{y} = H_{\Phi_2} \qquad (2.6)$$

$$\dot{\Phi}_1 = r_{\Phi_1} - H_x \qquad (2.7)$$

$$\dot{\Phi}_2 = r_{\Phi_2} - H_y \qquad (2.8)$$

y teniendo en cuenta que sólo consideramos soluciones interiores, tendremos las ecuaciones:

$$H_u = 0 \longrightarrow F_u + \Phi_1 f_u + \Phi_2 g_u = 0 \tag{2.9}$$

Del sistema de ecuaciones (2.9) y suponiendo que el determinante de H_{uu} es no singular tendremos, por el teorema de la función implícita

$$u = u(x,y,\Phi_1, \Phi_2) \tag{2.10}$$

y sustituyendo (2.10) en el sistema de ecuaciones diferenciales (2.5), (2.6), (2.7) y (2.8) quedaría dicho sistema en función exclusivamente de las variables de estado y de coestado. Las soluciones de dicho sistema que satisfagan las condiciones iniciales (2.3) y (2.4) son admisibles y serán óptimas aquellas que verifiquen las condiciones suficientes.

3. Existencia de punto de silla

Supongamos que el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, expresado únicamente en función de las variables de estado y coestado, admite un estado de equilibrio único local; sea este $(x^*, y^*, \Phi^*_1, \Phi^*_2)$. Si linealizamos el sistema en el estado de equilibrio, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \end{pmatrix} = J(x^*,y^*,\Phi^*_1,\Phi^*_2) \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ \Phi_1 - \Phi^*_1 \\ \Phi_2 - \Phi^*_2 \end{pmatrix}$$

donde $J(x^*, y^*, \Phi^*_1, \Phi^*_2)$ es la matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \Phi_1} & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \Phi_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \Phi_1} & \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial \Phi_2} \\[4ex] \dfrac{\partial \dot{\Phi}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{\Phi}_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{\Phi}_1}{\partial \Phi_1} & \dfrac{\partial \dot{\Phi}_1}{\partial \Phi_2} \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{\Phi}_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \dot{\Phi}_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \dot{\Phi}_2}{\partial \Phi_1} & \dfrac{\partial \dot{\Phi}_2}{\partial \Phi_2} \end{pmatrix}$$

que teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones podemos escribir como:

$$J = \begin{pmatrix} H_{\Phi_1 x} & H_{\Phi_1 y} & H_{\Phi_1 \Phi_1} & H_{\Phi_1 \Phi_2} \\ H_{\Phi_2 x} & H_{\Phi_2 y} & H_{\Phi_2 \Phi_1} & H_{\Phi_2 \Phi_2} \\[3ex] -H_{xx} & -H_{xy} & r - H_{x\Phi_1} & -H_{x\Phi_2} \\ -H_{yx} & -H_{yy} & -H_{y\Phi_1} & r - H_{y\Phi_2} \end{pmatrix}$$

o bien

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t + rI_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} H_{\Phi_1 x} & H_{\Phi_1 y} \\ H_{\Phi_2 x} & H_{\Phi_2 y} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} H_{\Phi_1 \Phi_1} & H_{\Phi_1 \Phi_2} \\ H_{\Phi_2 \Phi_1} & H_{\Phi_2 \Phi_2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -H_{xx} & -H_{xy} \\ -H_{yx} & -H_{yy} \end{pmatrix}$$

Puesto que un sistema de ecuaciones diferenciales en R^4 tiene punto de silla si la matriz Jacobiana asociada al sistema linealizado tiene dos valores propios con parte real positiva y otros dos con parte real negativa, hemos de determinar bajo qué condiciones esto se verifica en nuestro sistema.

Operando sobre la matriz Jacobiana asociada al sistema tenemos

$$J = J_1 + \frac{r}{2} I_4$$

donde

$$J_1 = \begin{pmatrix} A - \frac{r}{2} I_2 & B \\ C & -A^t + \frac{r}{2} I_2 \end{pmatrix}$$

transformación ya utilizada por Brock y Scheinkamn (1976) y Medio (1987). Entonces si λ es un valor propio de J_1, $\lambda + \frac{r}{2}$ será un valor propio de la matriz Jacobiana, luego podremos determinar los valores propios de J a través de los de J_1.

La ecuación característica de J_1 es:

$$| J_1 - \lambda I_4 | = \lambda^4 - a\lambda^2 + | J_1 | = 0$$

siendo $a = \mathrm{tr}\,[BC + (A - \frac{r}{2} I_2)^2]$

Por tanto los cuatro valores propios de J_1 son:

$$f_1 (J_1); -f_1 (J_1); f_2 (J_1); -f_2 (J_1)$$

resultado conocido como lema de Kurz: Para cualquier matriz de la forma

$$B = \begin{pmatrix} C & Q \\ -X & -C^t \end{pmatrix}$$

con X y Q matrices simétricas de orden n x n, si λ es un valor propio de B, también lo es $-\lambda$. (Véase Feinstein y Oren (1983), pág. 391).

donde

$$f_1 (J_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a + (a^2 - 4 |J_1|)^{1/2}]^{1/2}$$

$$f_2 (J_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a - (a^2 - 4 |J_1|)^{1/2}]^{1/2}$$

y los valores propios de la matriz Jacobiana J serán:

$$\lambda_1 = \frac{r}{2} + f_1 (J_1) \qquad \lambda_2 = \frac{r}{2} - f_1 (J_1)$$

$$\lambda_3 = \frac{r}{2} + f_2 (J_1) \qquad \lambda_4 = \frac{r}{2} - f_2 (J_1)$$

Las expresiones de $f_1 (J_1)$ y $f_2 (J_1)$ nos permiten enunciar las siguientes proposiciones.

PROPOSICION 1.–

Si los valores propios $f_1 (J_1)$ y $f_2 (J_1)$ son reales entonces son no negativos.

Demostración.

Si f_1 (J_1) y f_2 (J_1) son reales entonces

$$a \pm (a^2 - 4 J_1)^{1/2} \geqslant 0$$

y real y tal como hemos definido f_1 (J_1) y f_2 (J_1) son no negativos.

PROPOSICION 2.–

Si f_i (J_1), $i = 1$ ó 2 es real, entonces f_i (J_1), $i = 2$ ó 1 no puede ser complejo con parte real distinta de cero.

Demostración.

Supongamos que f_1 (J_1) es real, entonces f_2 (J_1) podrá ser real o complejo pero en este último caso sería imaginario puro ya que en otro caso a tendría que ser un número complejo lo cual no es posible.

El razonamiento es análogo si se supone que f_2 (J_1) es real.

PROPOSICION 3.–

Si f (J) es complejo con parte real distinta de cero, entonces f_2 (J_1) es su conjugado y recíprocamente.

La demostración es obvia.

Demostremos a continuación unas proposiciones que establecen condiciones necesarias de punto de silla.

PROPOSICION 4.–

Si el estado de equilibrio es un punto de silla entonces la matriz J_1 no puede tener valores propios nulos.

Demostración.

Si la matriz J_1 admitiese valores propios nulos entonces $|J_1| = 0$, por tanto, los valores propios de J serían $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2} + \sqrt{a}$, $\frac{r}{2} - \sqrt{a}$ y puesto que el estado de equilibrio es un punto de silla han de existir dos raices con parte real positiva y otras dos con parte real negativa, luego $\frac{r}{2} + \sqrt{a}$ y $\frac{r}{2} - \sqrt{a}$ tendrían que tener parte real negativa, lo que es absurdo.

PROPOSICION 5.–

Si el estado de equilibrio es un punto de silla entonces si $f_i(J_1)$, $i = 1$ ó 2 es real también lo es $f_i(J_1)$ con $i = 2$ ó 1.

Demostración.

Supongamos que $f_1(J_1)$ es real y $f_2(J_1)$ complejo entonces por la proposición 2, $f_2(J_1)$ será de la forma $f_2(J_1) = ni$ con los cual:
Si $f_1(J_1)$ es positivo tendremos tres raices con parte real positiva: $\frac{r}{2} + f_1(J_1), \frac{r}{2} + ni, \frac{r}{2} - ni$, en contra de que el punto de equilibrio es un punto de silla.

Si $f_1(J_1)$ es negativo tendremos tres raices con parte real positiva $\frac{r}{2} - f_1(J_1), \frac{r}{2} + ni, \frac{r}{2} - ni$, lo cual también es absurdo.

El razonamiento es idéntico si se supone que $f_2(J_1)$ es real; luego en este caso, y por la proposición 1, ambos valores son no negativos.

PROPOSICION 6.–

Si el estado de equilibrio es un punto de silla $f_1(J_1)$ y $f_2(J_1)$ no puden ser complejas con parte real nula.

La proposición es obvia pues en otro caso las cuatro raices tendrían parte real positiva.

Veamos ahora una proposición que establece una condición necesaria y suficiente de punto de silla.

PROPOSICION 7.–

Es condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio sea un punto de silla que los módulos de las partes reales de $f_1(J_1)$ y $f_2(J_1)$ sean estrictamente mayores que $\frac{r}{2}$.

Demostración.

Si el estado de equilibrio es un punto de silla, tendremos, por las proposiciones anteriores, que $f_1(J_1)$ y $f_2(J_1)$ o son reales o complejos con parte real no nula.
Si son reales, son positivos, entonces:

$$\frac{r}{2} + f_1(J_1) > 0 \qquad\qquad \frac{r}{2} + f_2(J_1) > 0$$

luego las otras dos raices negativas y por tanto:

$$\frac{r}{2} - f_1(J_1) < 0 \qquad\qquad \frac{r}{2} - f_2(J_1) < 0$$

de donde $\dfrac{r}{2} < f_1(J_1)$, $\dfrac{r}{2} < f_2(J_1)$

Si son complejas, son complejos conjugados, esto es, $f_1(J_1) = n + mi$, $f_2(J_1) = n - mi$ con $n \neq 0$.

Tendremos dos casos según que n sea positivo o negativo.

a) Si $n > 0$, entonces tendremos dos raices con parte real positiva $\dfrac{r}{2} + n$, las otras dos tienen que tener parte real negativa, luego $\dfrac{r}{2} - n < 0$ y por consiguiente $n > \dfrac{r}{2}$.

b) Si $n < 0$, tendremos dos raices con parte real positiva $\dfrac{r}{2} - n$, luego las otras dos han de tener parte real negativa, es decir $\dfrac{r}{2} + n < 0$ y por consiguiente $\dfrac{r}{2} < -n = |$ parte real de $f_1(J_1)| = |$ parte real $f_2(J_1)|$.

Veamos la condición sufiente.

Del enunciado de la proposición se desprende que las partes reales de $f_1(J_1)$ y $f_2(J_1)$ no son nulas, luego $f_1(J_1)$ y $f_2(J_1)$ son reales no nulos o complejos con parte real distinta de cero, y según la proposición 1 para el primer caso y la proposición 3 para el segundo, tendremos que la matriz Jacobiana tiene dos valores propios con parte real positiva y otros dos con parte real negativa y por tanto el estado de equilibrio es un punto de silla.

Por consiguiente el estado de equilibrio no es un punto de silla si los módulos de las partes reales de $f_1(J_1)$ y/o $f_2(J_1)$ son menores o iguales que $\dfrac{r}{2}$.

Esta condición necesaria y suficiente es equivalente a la considerada por Docker (1985) para valores propios reales, sin mas que tener en cuenta que la constante k definida por él es igual a:

$$\frac{r^2}{2} - a \qquad \text{y} \qquad |J| = \left(\frac{r}{2}\right)^4 - a\left(\frac{r}{2}\right)^2 + |J_1|$$

4. El punto de bifurcación

En este apartado tratamos de ver qué ocurre si $|$ parte real de $f_1\ (J_1)| = \frac{r}{2}$ o $|$ parte real de $f_2\ (J_1)| = \frac{r}{2}$ con lo que el punto de silla del sistema dinámico dejará de serlo, para ello consideramos al sistema dinámico dependiente de la tasa de actualización r, luego $J_1 = J_1$ (r).

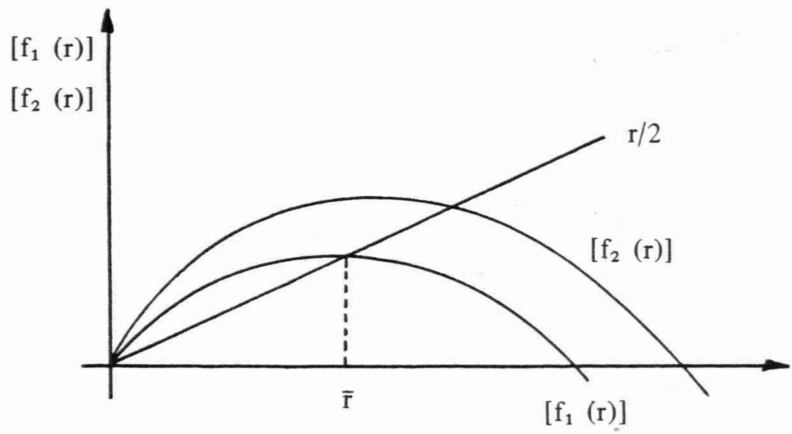
Supongamos que para todo $r \in (0, \bar{r})$ existen soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales verificando:

$$[f_1\ (r)] > \frac{r}{2} \qquad , \qquad [f_2\ (r)] > \frac{r}{2}$$

donde [.] designa el valor absoluto de la parte real y que para r = r se tiene

$$[f_1\ (\bar{r})] = \frac{\bar{r}}{2} \qquad \text{ó} \qquad [f_2\ (\bar{r})] = \frac{\bar{r}}{2}$$

Sea, por ejemplo, $[f_1\ (\bar{r})] = \frac{\bar{r}}{2}$ y que tal situación se pueda representar del siguiente modo



entonces para $r = \bar{r}$ el sistema presentará una bifurcación y perderá su punto de silla.

Ahora se pueden considerar dos posibilidades.

a) f_1 ($\bar{r}$) es real, entonces el estado de equilibrio se bifurca en varios estados que serán nuevos estados de equilibrio. Al menos un valor propio de la matriz $J(\bar{r})$ se anula, luego $J(\bar{r})$ es nulo; la pérdida de estabilidad se conoce en la literatura como de tipo "divergente".

b) f_1 ($\bar{r}$) es complejo, lo que equivale a que $a^2(\bar{r}) - \bar{r}\ 4|J(r)| < 0$, entonces tendremos una bifurcación de Hopf. Dos valores propios de la matriz $J(\bar{r})$ tiene parte real nula; el comportamiento de las soluciones del sistema es de órbitas cerradas entorno al estado de equilibrio. Estas órbitas son óptimas ya que verifican todas las condiciones y la condición de transversabilidad, luego para $r = \bar{r}$ el comportamiento de las variables del sistema es oscilatorio.

5. Ejemplo

Consideremos, para aplicar nuestros resultados, el modelo propuesto por Muller (1983) y veamos que en un caso particular tendremos un punto de bifurcación de tipo divergente.

En el modelo de Muller se trata de maximizar el beneficio actual de una empresa considerando que el mercado de un nuevo producto está dividido en tres segmentos: x(t) –personas que desconocen el producto–, y(t) –consumidores potenciales que conocen el producto pero no lo adquieren– y z(t) –consumidores del producto–. El modelo está planteado como un problema de control óptimo no lineal con tres variables de estado x(t), y(t), z(t) y dos variables de control u(t) y v(t), donde u(t) es la publicidad dirigida al sector x para su transferencia al segmento y, v(t) es la publicidad dirigida al sector y para transferirles al sector z.

Operaciones previas a la aplicación del Principio del Máximo llevan a reformular el modelo como un problema de control con dos variables de estado y dos variables de control (para más detalle, ver Muller (1983)).

El problema es elegir u(t) y v(t) tal que se maximice

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} \, [cz - U(u) - V(v)] \, dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = -ux - kx(N-x)/N \quad , \qquad x(0) = N$$
$$\dot{z} = (b+v)\,(N-x-z) - \delta z \quad , \qquad z(0) = 0$$

donde N es el tamaño del mercado, r es la tasa de actualización, las funciones U(u) y V(v) son las funciones de costes para producir el efecto u y v respectivamente y deben ser crecientes, convexas y anularse en cero. Para el desarrollo del modelo y a efectos operativos las consideramos funciones cuadráticas como sugiere Muller. El resto de los términos del modelo son parámetros, con $k > 0$.

La resolución del problema aplicando el Principio del Máximo nos conduce a considerar la función hamiltoniana.

$$H = cz - \alpha u^2 - \beta v^2 + \Phi_1 \, [-ux - kx(N-x)/N] + \Phi_2$$
$$[(b+v)\,(N-x-z) - \delta z]$$

Las condiciones necesarias nos determinarán el sistema dinámico.

$$\dot{x} = (\Phi_1 \; x^2/2\alpha) - [kx(N-x)/N]$$

$$\dot{z} = [b + (\Phi_2/2\beta)\,(N-x-z)]\,(N-x-z) - \delta z$$

$$\dot{\Phi}_1 = [r - (\Phi_1 \, x/2\alpha) + k\,(N-2x)/N]\,\Phi_1 + [b + (\Phi_2/2\beta)\,(N-x-z)]\,\Phi_2$$

$$\dot{\Phi}_2 = [r + b + \delta + (\Phi_2/2\beta)\,(N-x-z)]\,\Phi_2 - c$$

En el punto de equilibrio ($x^* = 0, z, \Phi^*_1, \Phi^*_2$) (ver Muller, apéndice 1, pág. 347), la matriz Jacobiana es:

$$J = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ h & h-\delta & 0 & n \\ m & p & r+k & -h \\ p & p & 0 & r+\delta-h \end{pmatrix}$$

donde

$$h = (\Phi^*_2/\beta)(z^*-N) - b$$

$$n = (N-z^*)^2/2\beta$$

$$m = [-(\Phi^*_1/2a)-2k/N]\,\Phi^*_1 - (\Phi^*_2)^2/2\beta$$

$$p = -(\Phi^*_2)^2/2\beta$$

Luego la matriz J_1 será:

$$\begin{pmatrix} -k-\dfrac{r}{2} & 0 & 0 & 0 \\ h & h-\delta-\dfrac{r}{2} & 0 & n \\ m & p & k+\dfrac{r}{2} & -h \\ p & p & 0 & \dfrac{r}{2}+\delta-h \end{pmatrix}$$

por tanto el polinomio característico de J_1 es:

$$\lambda^4 - a\lambda^2 + |J_1| \quad \text{donde}$$

$$a = (k + \frac{r}{2})^2 + (h - \delta - \frac{r}{2})^2 + pn$$

$$|J_1| = (k + \frac{r}{2})^2 [(\frac{r}{2} + \delta - h)^2 + pn]$$

entonces $|J_1| = (k + \frac{r}{2})^2 [a - (k + \frac{r}{2})^2]$ y por tanto $a^2 - 4 |J_1| = [a - 2(k + \frac{r}{2})^2]^2$ es positivo independiente de la tasa de actualización r.

Consideremos r suficientemente pequeño y supongamos que $|J_1(r)| > 0$ lo que implica que $a(r) > 0$. Entonces los valores propios de J_1 son:

$$f_1(r) = [(\frac{r}{2} + \delta - h)^2 + pn]^{1/2} \quad ; \quad -f_1(r)$$

$$f_2(r) = k + \frac{r}{2} \quad ; \quad -f_2(r)$$

Al ser k positiva $f_2(r)$ siempre es mayor que $\frac{r}{2}$ y por tanto J tiene siempre al menos un valor propio positivo y un valor propio negativo. Por otro lado, tenemos que para r suficientemente pequeño, $f_1(r)$ es positiva, luego el punto de equilibrio es un punto de silla. Si $h < \delta$, $f_1(r)$ permanece siempre mayor que $\frac{r}{2}$ con lo que el punto de equilibrio es punto de silla para todo valor de r; ahora bien, si $h > \delta$, en

$$\bar{r} = \frac{pn + (\delta - h)^2}{h - \delta}$$

la función $f_1(\bar{r})$ se iguala a $\frac{\bar{r}}{2}$ con lo que el determinante de $J(\bar{r})$ se anula al anularse uno de sus valores propios. Por tanto en $\bar{r}$ se tiene una bifurcación de tipo divergente.

6. Conclusiones

En el trabajo se han determinado, para un problema de control óptimo no lineal con dos variables de estado y donde explícitamente aparece un factor de actualización, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un punto de silla de tal forma que si las condiciones iniciales están sobre la variedad estable se garantiza la existencia de una trayectoria tendiendo hacia el estado de equilibrio. Sin embargo, al considerar el modelo dependiente del parámetro exógeno de actualización se pueden presentar distintas bifurcaciones, pudiendo aparecer en algún caso una trayectoria óptima oscilatoria (bifurcación de Hopf) o bien bifurcarse el estado de equilibrio en infinitos estados de equilibrio (tipo divergente).

BIBLIOGRAFIA

BROCK, W.A.; SCHEINKMAN, J. (1976): *Global asymptotic stability of optimal control systems with applications to the theory of economic growth.* Journal of Economic Theory, nº 12, pp. 164-190.

CASS, D.; SHELL, K. (1976): *The Hamiltonian approach to dynamic economic.* London. Academic Press.

CASS, D.; SHELL, K. (1976): *The structure and stability of competitive dynamical systems.* Journal of Economic Theory, nº 12, pp. 31-70.

DOCKNER, E. (1985): *Local stability analysis in optimal control problems with two state variables. Optimal Control Theory and Economic Analysis 2.* Netherlands. North-Holland. pp. 89-103.

FEINSTEIN, C.D.; OREN, S.S. (1983): *Local stability properties of the modified hamiltonian dynamic system.* Journal of Economic Dynamics and Control. Vol. 6, nº 4, December, pp. 387-397.

KUPPER, T.; SEYDEL, R.; TROGER, H. (1987): *Bifurcation: Analysis, Algorithms, Applications.* Germany. Birkhäuser Verlag.

MEDIO, A. (1987): *A oscillations in optimal growth models.* Journal of Economic Dynamics and Control. Vol. 11, nº 2, June, pp. 201-206.

MULLER, E. (1983): *Trial/awareness advertising decisions: A control problem with phase diagrams with non-stationary boundaries.* Journal of Economic Dynamics and Control. Vol. 6, nº 4, December, pp. 333-350.

PITHCFORD, J.D.; TURNOVSKY, S.T. (1977): *Applications of Control Theory to Economic Analysis.* Netherlands. North-Holland pp. 11-34.

SEIERSTAD, A.; SYDSAETER, K. (1977): *Sufficient conditional in optimal control theory.* International Economic Review, Vol. 18, nº 2, June, pp. 367-391.