Cuadernos de Economía. Vol. 15. 111-135. 1987.

Trayectorias optimas de un monopolio con restricciones financieras.

Mª Dolores Soto Torres
Ramón Fernández Lechón

Departamento de Matemáticas Empresariales
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
Avda. Valle Esqueva, 6
47011 Valladolid

Trayectorias óptimas de un monopolio con restricciones financieras

RESUMEN

En este trabajo, se presenta una aplicación de la Teoría del Control Optimo para determinar las trayectorias óptimas de una empresa que trata de maximizar su V.A.N. bajo unas expectativas no sujetas a incertidumbre ni riesgo. En el trabajo, se considera una empresa monopolista, analizándose dos situaciones; en la primera, se supone que la empresa posee unas expectativas de demanda crecientes, mientras que en la segunda se analiza un ciclo de negocios completo. La variación de la capacidad productiva depende del volumen de inversión, el cual se limita a un nivel máximo constante a lo largo del tiempo, además, se supone que la capacidad productiva de la empresa es siempre mayor o igual que las expectativas de demanda.

En resumen, en el estudio del modelo se calculan y analizan las distintas políticas a utilizar en una planificación empresarial.

Optimal Paths of a Monopoly with Financial Constraints

ABSTRACT

This paper presents an application of the Optimal Control Theory in order to determine the optimal paths of a firm which tries to maximize its V.A.N. under expectations not fixed either to uncertainty or risk. In the paper one considers a monopolist firm, analysing two situations; in the first one, it is supposed that the firm has increasing expectations of demand, while in the second one, a complete business cycle is studied. The change of the productive capacity depends on the volume of investment, which is limited to a constant maximun level all the time, moreover we suppose that the productive capacity of the firm is always superior or equal to the expectations of demand.

In summary, the different policies to use in an enterprise planning are calculated and analysed in the study of the model.

Trayectorias optimas de un monopolio ‹con restricciones financieras.

1. Introducción

Las expectativas que una empresa tiene sobre la demanda de sus productos es un factor esencial a tener en cuenta a la hora de determinar sus actuaciones futuras.

El propósito de este trabajo es obtener el plan óptimo de una empresa monopolista en materia de inversión y precios, suponiendo que la empresa se enfrenta a una demanda con elasticidad-precio constante sobre la cual tiene unas expectativas no sujetas a incertidumbre ni riesgo y donde la empresa trata de maximizar su valor actual neto.

Entre los trabajos existentes sobre el tema, citemos a Nickell (1974) que examinó la influencia que las expectativas de la empresa tienen sobre las políticas de inversión, contribuyendo de forma relevante a comprender el comportamiento de la empresa ante un ciclo completo de negocios. Leban y Lesourne (1980), con hipótesis similares al estudio realizado por Nickell (1974), determinan las políticas de inversión y empleo en un ciclo completo de negocios. En ambos trabajos, así como en Leban y Lesourne (1983), se supone que la empresa puede realizar cualquier volumen de inversión en todo momento, considerando solamente en los modelos planteados el coste que ello puede ocasionar; parece una hipótesis más realista suponer que la empresa no tiene una capacidad financiera ilimitada, de ahí, que en este trabajo tratemos de determinar la influencia sobre la trayectoria óptima de la empresa de una restricción financiera.

En el modelo que desarrollamos, es preciso destacar dos aspectos; por una parte, se considera que la empresa posee unas limitaciones financieras que no están necesariamente vinculadas a su producción de tal forma que la inversión se moverá en un intervalo positivo, y por otro lado, se supone que las expectativas de la demanda, función del precio y del tiempo, son siempre menores o iguales que la capacidad productiva, supuesto este último recogido en la literatura mencionada y no en Nickell (1978) que realiza la hipótesis contraria.

Introducir más variables en el planteamiento del modelo nos llevaría a una pérdida de operatividad, por ello, nos hemos centrado en determinar la política a seguir por la empresa en materia de inversión y precios.

Todos los costes y tasas que se utilizan en el modelo se suponen constantes y positivos, situación frecuente en la literatura y que se explica porque una variación de ellos en función de las expectativas que se tengan sobre la demanda llevan a un desarrollo matemático excesivamente complejo del modelo y en algunos casos irrealizable, no pudiendose sacar conclusiones más que en términos cualitativos.

El trabajo se ha dividido en cinco apartados y un apéndice. En el segundo apartado se realiza el planteamiento general del modelo, determinando las posibles políticas. En el tercero, se analizan las trayectorias óptimas de la empresa suponiendo unas expectativas crecientes. En el cuarto, se estudia el caso en el que las expectativas de la empresa tienen un periodo de recesión inmerso en un periodo de expansión. Por último, se finaliza el trabajo con unas conclusiones y un apéndice.

2. Planteamiento del modelo

El modelo que planteamos trata de maximizar el funcional:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} \, [(p(t)-c).x(p(t), t) - v.I(t)] \, dt$$

sometido a las restricciones:

$$\dot{y}(t) = \lambda.I(t) - w.y(t) \qquad (2.1)$$

$$x(p(t), t) \leqslant y(t) \qquad (2.2)$$

$$0 \leqslant I(t) \leqslant I^* \qquad (2.3)$$

$y(0)$ dado

donde:

r es la tasa de interés del dinero, constante.
$p(t)$ es el precio por unidad de producto.
c es el coste unitario de producción que se supone constante.
$x(p(t), t)$ es la demanda en el instante t a un precio $p(t)$.

v es el precio de una unidad de volumen de inversión, que suponemos constante.
I(t) es el volumen de inversión en t.
y(t) es la capacidad productiva que la empresa posee en el instante t.
λ es la producción por unidad de volumen de inversión, se supone constante.
w es la tasa de depreciación de la capacidad productiva, la suponemos también constante.

En el funcional objetivo, e^{-rt} es el factor de actualización, mientras que el otro factor es el cashflows esperado del monopolio. La restricción (2.1) establece que la variación de la capacidad es igual a la inversión bruta menos la depreciación. La demanda es siempre menor o igual que la capacidad productiva, lo que es recogido en (2.2) y por último (2.3) establece que la inversión es siempre no negativa e inferior o igual a un volumen de inversión fijo I*.

Supongamos, al igual que Nickell (1974) y Leban y Lesourne (1980), que se verifican las condiciones siguientes:

C1. La función de demanda es separable y puede expresarse:

$$x(p(t),t) = u(p(t)).m(t)$$

siendo u y m derivables respecto a sus argumentos.

C2. La función $R(p) = p(1 + e^{-1})$ donde e es la elasticidad de la demanda respecto al precio, es una función creciente del precio.

C3. La función de demanda es una función decreciente del precio.

C4. $\frac{\dot{m}}{m} < r - \epsilon$ para algún número positivo ϵ independiente del tiempo, excepto para un periodo de tiempo finito. Esta hipótesis simplemente establece que la tasa de crecimiento de la demanda no debe ser mayor que la tasa de interés del dinero excepto para un periodo de tiempo finito.

Tenemos, por tanto, planteado un problema de control con una variable de estado, la capacidad productiva, dos variables de control, la inversión y el precio y un horizonte temporal infinito.

La resolución del problema, siguiendo a Pitchford y Turnovsky (1977), Seierstad y Sydsaeter (1977), nos lleva a considerar la hamiltoniana generalizada:

$$\begin{aligned} H(y, p, I, \varphi, a_1, a_2, a_3) = {} & [p(t)-c]x(p(t),t) - v.I(t) + \\ & + \varphi[\lambda I(t) - w.y(t)] + a_1 I(t) + a_2 [I^* - I(t)] + \\ & + a_3 [y(t) - x(p(t), t)] \end{aligned}$$

donde φ es la variable de coestado asociada a la capacidad productiva; a_1, a_2, a_3 son los multiplicadores asociados a las restricciones (2.2) y (2.3).

Aplicando las condiciones necesarias del Principio del Máximo

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = r\varphi - \partial H/\partial y \\ 0 = \partial H/\partial I \\ 0 = \partial H/\partial p \end{cases}$$

obtenemos sin más que realizar operaciones:

$$\dot{\varphi} = (r + w)\varphi - a_3 \tag{2.4}$$

$$\varphi = (v + a_2 - a_1)/\lambda \tag{2.5}$$

$$R(p) = a_3 + c \tag{2.6}$$

en esta última expresión (2.6), que surge de la tercera de las condiciones antes establecidas, hemos utilizado la función R(p) definida en C2.

Por las condiciones del Principio del Máximo, la variable de coestado φ es continua con derivada continua a trozos y los multiplicadores a_i con i = 1, 2, 3 continuos a trozos y verifican:

$$a_1 . I(t) = 0 \; ; a_1 \geqslant 0 \tag{2.7}$$

$$a_2 [I^* - I(t)] = 0 \; ; a_2 \geqslant 0 \tag{2.8}$$

$$a_3 . [y(t) - x(p(t), t)] = 0 \; ; a_3 \geqslant 0 \tag{2.9}$$

de estas tres últimas condiciones y realizando hipótesis sobre la saturación o no de las restricciones o lo que es lo mismo, sobre la positividad o nulidad de los multiplicadores, obtenemos ocho políticas; la proposición siguiente elimina tres de estas políticas.

PROPOSICION: Los multiplicadores a_1 y a_2 no pueden ser ambos positivos y si son nulos entonces el multiplicador a_3 es positivo.

En efecto, si ambos son positivos la inversión sería a la vez nula y máxima, lo cual es absurdo y si $a_1 = a_2 = 0$ por (2.5) tenemos $\varphi = v/\lambda$ luego $\dot{\varphi} = 0$, y llevando este resultado a (2.4) tenemos:

$$a_3 = (r + w) \frac{v}{\lambda} > 0$$

Luego de acuerdo con la proposición, tenemos cinco posibles políticas.

Con las suposiciones realizadas, las condiciones necesarias son también suficientes. La solución del modelo, proporcionará un plan óptimo de producción, inversión y precios en todo momento.

Analicemos ahora estas políticas válidas:

1ª POLITICA.– Inversión máxima con capacidad igual a la demanda.

Si $I(t) = I^*$, resolviendo (2.1) tenemos

$$y(t) = \frac{\lambda I^*}{w} + K.e^{-wt}$$

la constante K se determinará a partir de las condiciones iniciales de aplicación de esta política.

2ª POLITICA.– Inversión máxima con exceso de capacidad.

Si $y > x$, entonces $a_3 = 0$ y por tanto $R(p) = c$.

Si $I = I^*$, resolviendo (2.1) se tiene

$$y(t) = \lambda I^*/w + K_1.e^{-wt}$$

3ª POLITICA.– Inversión nula con capacidad igual a la demanda.

Ahora tanto la capacidad como la demanda son funciones decrecientes del tiempo.

4ª POLITICA.– Inversión nula con exceso de capacidad.

Esta política se caracteriza porque R(p) es constante y la capacidad es decreciente.

5ª POLITICA.– Inversión variable con capacidad igual a la demanda.

Si $0 < I(t) < I^*$ entonces $\varphi = v/\lambda$

lo que implica que $\dot{\varphi} = 0$, y por tanto

$$R(p) = (r + w) \cdot \frac{v}{\lambda} + c$$

Puesto que según la ecuación diferencial (2.1) la variación de la capacidad productiva es función lineal de la inversión y cuando la inversión es máxima la capacidad productiva tiene una asíntota en $\lambda I^*/w$, supondremos que se verifica

$$y(0) < \frac{\lambda I^*}{w}$$

lo que nos garantiza que en las políticas primera y segunda la capacidad productiva es creciente (las constantes K y K_1 son negativas). Si suponemos que y(0) supera a $\lambda I^*/w$, en las políticas primera y segunda la capacidad productiva es decreciente a pesar de tener una inversión máxima y su mantenimiento llevaría al comportamiento asintótico de la capacidad productiva; la aplicación de cualquier otra política haría decrecer la capacidad productiva alcanzando valores inferiores a $\lambda I^*/w$ y por tanto podría reformularse el modelo a partir de ese momento.

3. Expectativas crecientes

Analicemos en este apartado, un modelo en el que las expectativas de la empresa son crecientes, con una función de demanda análoga a la utilizada por Nickell (1974), resultados que serán útiles para los desarrollos de un ciclo completo de negocios, proceso este último que realizamos en el siguiente apartado.

Supongamos, en este caso, que la empresa posee una demanda

$$x(p(t),t) = A.\,[p(t)]^{-\epsilon}\,.\,e^{\delta t}\ ;\ t \in [0, \infty),\ A > 0$$

Para un precio constante, tenemos un comportamiento creciente de la función de demanda con una tasa δ. La elasticidad de la demanda respecto al precio es constante e igual a $-\epsilon$. Por C3, $\epsilon > 0$ y por C2, $\epsilon > 1$.

Veamos la validez de las distintas políticas consideradas en el apartado anterior.

La primera política es válida para todo valor de t y se verifica

$$\epsilon\dot{p}/p = \delta + w - \lambda I^*/y$$

luego

$$\epsilon\dot{p}/p \quad \begin{cases} \geqslant 0 \Longleftrightarrow y(t) \geqslant \lambda I^*/(\delta + w) \\ \leqslant 0 \Longleftrightarrow y(t) \leqslant \lambda I^*/(\delta + w) \end{cases}$$

Para la segunda política el precio es constante y debido al crecimiento exponencial de la demanda y asintótico de la capacidad productiva será válida si

$$y(t) < \frac{\lambda I^*}{w + \delta}$$

En la tercera política la función R(p) y por tanto el precio es una función creciente del tiempo.

La cuarta política se caracteriza por tener un precio constante y debido al decrecimiento de la capacidad y crecimiento de la demanda se aplicará cuando exista exceso de capacidad y durante un intervalo de tiempo que depende de las tasas w y δ y de la amplitud del exceso de capacidad al comienzo del intervalo.

La quinta política se caracteriza porque el precio es constante y sólamente es válida si

$$y(t) = \frac{\lambda I(t)}{w + \delta} < \frac{\lambda I^*}{w + \delta}$$

Por tanto, todas las políticas son en principio posibles; sin embargo, la política tercera es una política ficticia ya que capacidad y demanda decrecen manteniendo un precio creciente y una inversión nula.

Tratamos ahora de determinar la trayectoria óptima de la empresa, y consideramos dos posibilidades dependiendo de si en el momento inicial capacidad y demanda coinciden o no.

Analicemos el caso donde capacidad y demanda coinciden en t = 0.

$$x(p(0),0) = A.\,[p(0)]^{-\epsilon} = y(0)$$

Si $y(0) < \lambda I^*/(w + \delta)$ la empresa adoptará la política quinta, con una inversión proporcional a su capacidad productiva

$$I(t) = y(t)\,\frac{w + \delta}{\lambda}$$

y manteniendo en todo momento la capacidad igual a la demanda, para lo que se mantendrá un precio constante:

$$p(t) = \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \left[(r + w)\frac{v}{\lambda} + c\right]$$

La política quinta no puede mantenerse indefinidamente ya que ella es válida mientras la capacidad productiva y por tanto la demanda no alcancen $\lambda I^*/(w + \delta)$. Entonces a partir del momento en el que la capacidad productiva y la demanda alcanzan $\lambda I^*/(w + \delta)$, esto es, el momento

$$t^* = \frac{1}{\delta} \ln\left[\frac{\lambda I^*}{A(w + \delta)} (p(o))^{\epsilon}\right]$$

la trayectoria óptima será continuar con la política primera, es decir, aplicar la inversión máxima y mantener un precio creciente de tal forma que se mantenga la igualdad entre capacidad y demanda; capacidad y demanda seguirán un comportamiento creciente que nunca superará a $\lambda I^*/w$.

Si la política quinta no puede ser aplicada al comienzo de la trayectoria óptima, debido a que

$$y(0) = x(p(0),0) \geqslant \lambda I^*/(w + \delta)$$

la trayectoria óptima en este caso consistirá en mantener la primera política indefinidamente.

Si en el momento inicial capacidad y demanda no coinciden, la trayectoria óptima consistirá en mantener la política segunda hasta que capacidad y demanda coincidan, entonces la capacidad será $\lambda I^*/(w + \delta)$ y estaríamos ahora en una situación análoga a la anterior, por tanto, la política óptima a adoptar será la primera.

Si partiendo de un exceso de capacidad inicial, la política segunda no puede aplicarse ya que la capacidad inicial $y(0) \geqslant \lambda I^*/(w + \delta)$ tendremos que aplicar la política cuarta donde el precio permanecerá constante, la demanda crecerá y la capacidad productiva decrecerá, hasta encontrarnos en una situación ya considerada.

Podemos concluir, que si la empresa tiene unas expectativas crecientes y en el momento inicial su capacidad es igual a la demanda, la empresa mantendrá en todo momento una inversión proporcional a la capacidad productiva, hasta alcanzar la inversión máxima y entonces para seguir manteniendo su capacidad productiva igual a la demanda irá progresivamente aumentando el precio.

Si por el contrario en el momento inicial existe exceso de capacidad, la empresa tendrá que soportar un exceso de capacidad durante un intervalo de tiempo donde utilizará toda su capacidad inversora o bien no invertirá dependiendo de su volumen de producción inicial, manteniendo en cualquier caso un precio constante. Este intervalo durará hasta que capacidad y demanda coincidan siendo entonces la trayectoria óptima la del caso anterior.

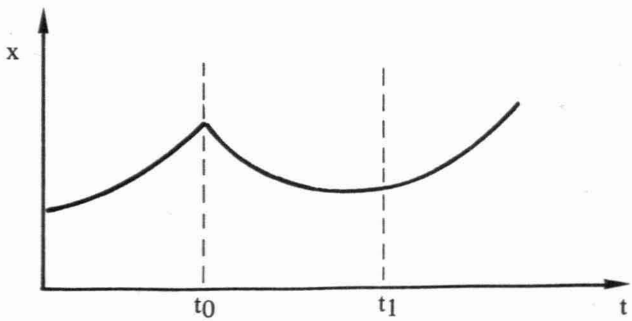
4. Expectativas con recesión

Ahora supondremos que la empresa posee unas expectativas de recesión dentro de un periodo de expansión, esto es:

$$x(p(t),t) = \begin{cases} A.e^{\delta t}\,[p(t)]^{-\epsilon} & t \in [o,t_0) \\ A.e^{\delta t}\,.e^{-\mu(t-t_0)}\,[p(t)]^{-\epsilon} & t \in [t_0, t_1) \\ A.e^{\delta t}\,.e^{-\mu(t_1-t_0)}\,[p(t)]^{-\epsilon} & t \in [t_1, \infty) \end{cases}$$

con $\delta - \mu < 0$, $A > 0$.

El comportamiento de la función de demanda para un precio constante será:



Veamos ahora cómo son las políticas en el periodo de depresión, puesto que el comportamiento de éstas es el mismo que antes en los periodos de expansión $[0, t_0)$ y $[t_1, \infty)$.

En la primera política tenemos los siguientes resultados:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \lambda \frac{I^*}{y} - w = -\epsilon \frac{\dot{p}}{p} + \delta - \mu > 0 \implies \frac{\dot{p}}{p} < 0$$

$$\epsilon \frac{\dot{p}}{p} = \delta - \mu + w - \frac{\lambda I^*}{y} < 0$$

luego esta política es siempre válida y en el caso particular de que $w = \mu - \delta$ el comportamiento de la capacidad productiva es:

$$y(t) = \frac{\lambda}{\epsilon} I^* \left(-\frac{p}{\dot{p}}\right)$$

La segunda política con inversión máxima, exceso de capacidad, precio constante, con demanda decreciente, capacidad creciente, y para la cual el exceso de capacidad va aumentando con el tiempo, es válida para cualquier valor de las tasas w y $\mu - \delta$.

La tercera política con capacidad igual a demanda e inversión nula es válida para cualquier valor de las tasas. El comportamiento de la función R(p) y por lo tanto del precio, puesto que se verifica $R = p(\epsilon-1)/\epsilon$ es:

$$\dot{R} > 0 \iff w > \mu - \delta$$

$$\dot{R} = 0 \iff w = \mu - \delta$$

$$\dot{R} < 0 \iff w < \mu - \delta$$

En la cuarta política con inversión nula, precio constante y exceso de capacidad, tanto la capacidad como la demanda decrecen con tasas w y $\mu - \delta$ respectivamente, luego esta política es válida si $w < \mu - \delta$ cuando no se parte de exceso de capacidad, y si se parte de exceso de capacidad, es válida siempre si $w \leqslant \mu - \delta$ y en el caso de que $w > \mu - \delta$ sólamente es válida hasta el instante en que capacidad y demanda coincidan.

En la quinta política con inversión variable y capacidad igual a la demanda, se mantiene el precio constante y se tiene:

$$y(t) = \frac{\lambda I(t)}{w - (\mu - \delta)}$$

y puesto que la capacidad es positiva tenemos $w > \mu - \delta$.

Para determinar la trayectoria óptima de la empresa en materia de precios e inversión, podemos plantearnos diferentes situaciones: unas situaciones relativas a la relación entre capacidad y demanda en el momento inicial (con o sin exceso de capacidad), otras con respecto a los valores relativos de las tasas w y $\mu - \delta$ y por último otras situaciones con respecto a las políticas que pueden alcanzar el momento t_0.

En el trabajo nos limitamos a estudiar el caso en el que inicialmente no existe exceso de capacidad y en la primera fase de expansión es posible aplicar la política quinta.

Sea n_0 el instante en el cual la inversión alcanza el valor nulo o máximo y n_0' el instante en el cual la inversión deja de ser nula o máxima, luego si

$$t \in (n_0, n_0') \implies I(t) = 0 \text{ o } I(t) = I^*$$

$$\text{si } t \notin (n_0, n_0') \implies \varphi(t) = v/\lambda$$

por tanto $\varphi(n_0) = \varphi(n_0') = v/\lambda$

y puesto que $\dot{\varphi}(t) = 0 \implies a_3 = (r + w)\varphi(t) = R(p) - c$
luego tendremos:

$$R(p(n_0)) = R(p(n_0')) = (r + w)\frac{v}{\lambda} + c \tag{4.1}$$

Si consideramos la ecuación diferencial (2.4) y la integramos entre n_0 y n_0' se tiene:

$$\int_{n_0}^{n_0'} d[\varphi e^{-(r+w)t}] = - \int_{n_0}^{n_0'} [R(p(t))-c]\, e^{-(r+w)t}\, dt \tag{4.2}$$

luego

$$-\frac{v}{\lambda}(r+w) \int_{n_0}^{n_0'} e^{-(r+w)t}\, dt = - \int_{n_0}^{n_0'} [R(p(t))-c]\, e^{-(r+w)t}\, dt$$

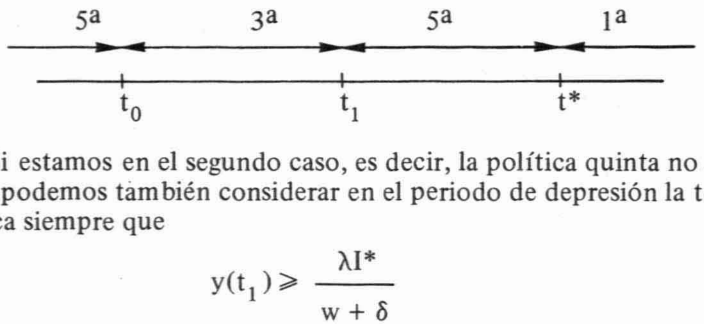
y realizando operaciones se tiene:

$$\int_{n_0}^{n_0'} [R(p(t)) - R(p(n_0))]\, e^{-(r+w)t}\, dt = 0 \qquad (4.3)$$

Con los resultados (4.1), (4.3) y teniendo en cuenta que siempre adoptaremos la misma política para idénticos volúmenes de demanda, determinemos la trayectoria óptima de la empresa.

Supongamos en primer lugar que $w = \mu - \delta$, las posibles políticas en depresión para este caso son la primera, segunda y tercera. Tendremos dos posibles situaciones; que con la política quinta se alcance el instante t_0 o que no se alcance.

Supongamos que la política quinta alcanza t_0, la trayectoria óptima consistirá en mantener la política tercera durante el periodo de depresión manteniendo un precio constante con capacidad igual a la demanda y sin invertir, verificándose (4.1) y (4.3). La trayectoria óptima es:



Si estamos en el segundo caso, es decir, la política quinta no alcanza t_0, podemos también considerar en el periodo de depresión la tercera política siempre que

$$y(t_1) \geqslant \frac{\lambda I^*}{w + \delta} \qquad (4.4)$$

ya que si esto no ocurre, en t_1 tendríamos que aplicar la política quinta y no se verifica (4.3).

La condición (4.4) se verifica si

$$1 - e^{w(t_1 - t_0)} \geqslant \frac{\delta}{w} (e^{w(t^* - t_0)} - 1) \qquad (4.5)$$

puesto que

$$y(t_1) = y(t_0)\, e^{-w(t_1 - t_0)} =$$

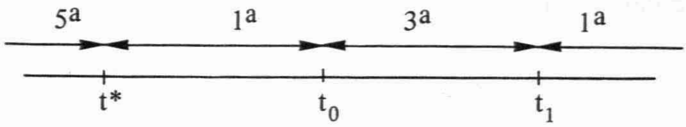
$$= [\frac{\lambda I^*}{w} + (\frac{\lambda I^*}{w+\delta} - \frac{\lambda I^*}{w})\, e^{-w(t_0 - t^*)}]\, e^{-w(t_1 - t_0)}$$

debido a los comportamientos de la capacidad productiva de la primera política en el primer período de expansión y de la tercera en depresión.

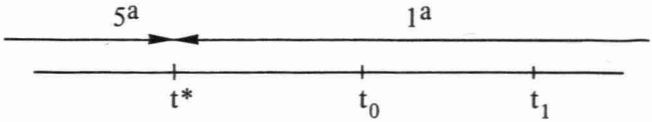
Considerando una aproximación de primer orden en (4.5) se tiene:

$$(t_1 - t_0) \leqslant \frac{\delta}{w}(t_0 - t^*)$$

la trayectoria óptima en este caso será



Si la desigualdad (4.4) no se verifica, la trayectoria óptima sería mantener también en depresión la política primera. Teniendo como trayectoria óptima

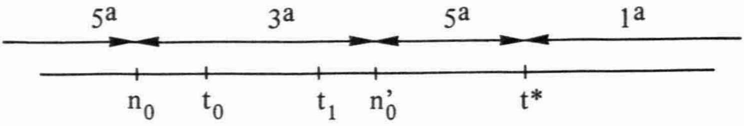


ya que la política segunda no puede aplicarse en depresión pues en caso de aplicarse debería de continuarse en expansión con la cuarta y entonces la variable de coestado φ no sería continua en contra de las condiciones necesarias y suficientes.

Podemos, por consiguiente, concluir, que si hasta el momento que comienza la depresión se puede mantener una inversión proporcional a la capacidad productiva, durante todo el periodo de depresión anularemos la inversión manteniendo el precio constante, para una vez transcurrido este periodo se aplique una política de expansión.

Si para alcanzar t_0 hemos tenido que aplicar la inversión máxima, durante la depresión podremos anular la inversión si capacidad y demanda no caen por debajo de $\lambda I^*/(w + \delta)$ lo que dependerá de la tasa de depreciación de la capacidad, de la tasa de crecimiento de la demanda en expansión, de la duración de la depresión y del intervalo durante el cual se aplica la política primera en la primera fase de expansión; en caso contrario se tendrá que mantener una política de inversión máxima con precios decrecientes durante todo el intervalo de depresión.

Si $w < \mu - \delta$, las posibles políticas en depresión son la primera, segunda, tercera y cuarta. Si con la política quinta se alcanza t_0, se aplicaría en depresión la política tercera ampliada a expansión con lo que se verificaría (4.1) y (4.3). La trayectoria óptima sería:



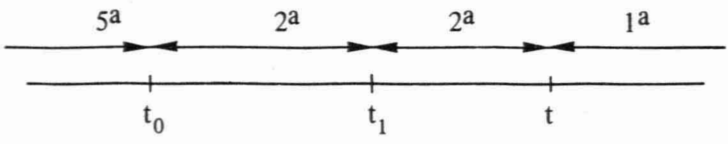
Teniendo en cuenta el comportamiento del precio (y por tanto de R(p(t))) en la política tercera tanto en depresión como en expansión, la expresión (4.1) implica

$$n'_0 - n_0 = \frac{\mu}{w + \delta} (t_1 - t_0) \tag{4.6}$$

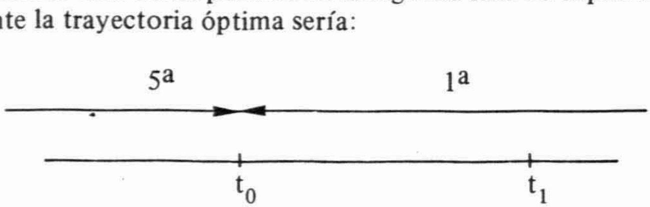
realizando la aproximación exponencial de segundo orden y la aproximación logarítmica de primer orden en la relación (4.2) se obtiene (ver apéndice)

$$n_o = t_0 - \left(\frac{\mu}{w + \delta} - 1 \right) . \frac{t_1 - t_0}{2}$$

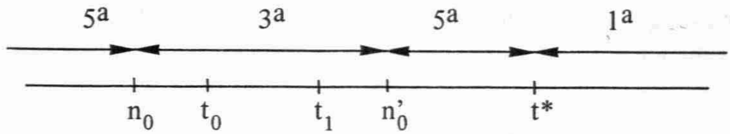
que determina en qué caso esta trayectoria es óptima. En el caso de que el punto n_0 no pueda determinarse, la trayectoria óptima sería aplicar la política segunda en depresión si $y(t_1) < \lambda I^*/(w + \delta)$ permitiendo exceso de capacidad en todo el período de depresión y mantener esta política segunda en expansión hasta absorber el exceso de capacidad con lo que la trayectoria óptima sería:



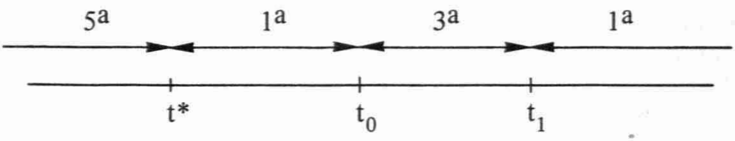
Si $y(t_1) \geqslant \lambda I^*/(w + \delta)$ la política a aplicar en depresión sería la primera, continuando con dicha política en la segunda fase de expansión, por consiguiente la trayectoria óptima sería:



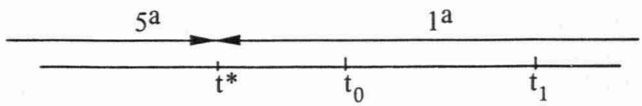
Si $w < \mu - \delta$ y la política quinta no puede alcanzar t_0, podemos considerar la trayectoria



ya considerada anteriormente y válida bajo idénticas condiciones y además $t^* \geqslant n_0$; o bien, podemos considerar la trayectoria que anula la inversión en depresión, esto es:



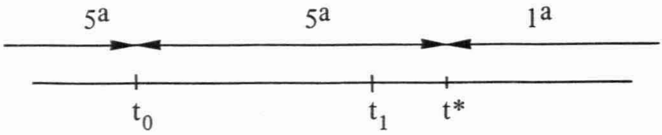
que ya ha sido anteriormente analizada y se debe verificar (4.4), en otro caso habría que continuar con la primera en depresión, con lo que la trayectoria óptima sería:



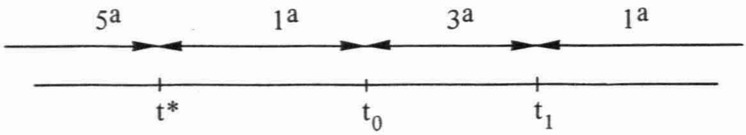
Tenemos por tanto que si la tasa de depreciación de la capacidad es inferior a la tasa de decrecimiento de la demanda en depresión, y la política de inversión variable puede alcanzar t_0, tendremos que adelantarnos y retrasarnos al periodo de depresión con una política de inversión nula y precio creciente en expansión y decreciente en depresión siempre que podamos prever con tiempo la depresión; si no es así, padeceremos exceso de capacidad durante el intervalo de depresión para absorberla en el segundo periodo de expansión con la misma política que en depresión siempre que la capacidad al finalizar la depresión sea inferior a $\lambda I^*/(w = \delta)$ pues en caso contrario se deberá considerar en depresión la política de inversión máxima sin exceso de capacidad y continuar con ella en la segunda fase de expansión.

Si la política de inversión variable no puede mantenerse hasta t_0, podemos adaptarnos a la depresión con una política de inversión nula adelantándonos y retrasándonos a la depresión, siempre que el intervalo donde se aplica esta teoría pueda conectarse con una política de inversión variable; si esto no es posible, dejaremos paso a una política de inversión nula en depresión o bien a una política de inversión máxima y sin exceso de capacidad.

Si $w > \mu - \delta$, las posibles políticas en depresión son la primera, segunda, tercera y quinta. Si con la política quinta podemos alcanzar t_0, esta política se mantendrá en depresión, siendo la trayectoria óptima



Si la política quinta no puede aplicarse hasta t_0, aplicaríamos en depresión la política tercera si se verifica la relación (4.4) con lo que la trayectoria óptima sería:



si no se puede aplicar en depresión la política tercera, tendríamos que dejar paso a una trayectoria de exceso de capacidad con inversión máxima y continuar con ella en expansión o bien aplicar en depresión una política de inversión máxima y sin exceso de capacidad, trayectorias que ya anteriormente hemos analizado.

5. Conclusiones

Las restricciones financieras con las que se encuentra una empresa es uno de los factores que condiciona su nivel de producción cuando dicha empresa trata de adaptarse a una demanda sobre la que se puede actuar haciendo variar los precios.

En el trabajo, partiendo de una empresa que trata de maximizar su valor actual neto, determinamos las distintas políticas que ha de adoptar en materia de inversión y precios según las diferentes expectativas de la demanda.

Si la empresa posee unas expectativas crecientes para un precio fijo, seguirá distintas trayectorias, según que capacidad y demanda coincidan o no, en el momento inicial.

En el primero de los casos obtenemos, que si la empresa posee un volumen de producción inicial inferior a $\lambda I^*/(w + \delta)$ deberá mantener una inversión variable, proporcional a su capacidad productiva, hasta alcanzar la máxima inversión, momento en el cual comenzará a incrementarse el precio con objeto de contrarrestar la demanda, consiguiendo de esta forma mantener en todo momento la igualdad entre capacidad y demanda. Si en el momento inicial no se verifica la desigualdad anterior, la trayectoria que ha de seguir la empresa para maximizar su valor actual neto consistirá en adoptar la misma política que en el caso anterior para el mismo volumen de producción.

En el segundo de los casos, cuando la capacidad supera a la demanda en el momento inicial, la trayectoria óptima que adoptará la empresa dependerá de su nivel de producción inicial manteniendo una política de inversión máxima o nula con precio constante hasta que capacidad y demanda coincidan. A partir de dicho instante, nos encontraríamos en el caso anterior y la empresa adoptará la política que allí se siguió para el volumen de producción alcanzado.

Si en las expectativas que la empresa posee sobre la demanda de sus productos para un precio fijo, existe un periodo de depresión inmerso en uno de expansión, la empresa adoptará distintas trayectorias dependiendo de la relación existente entre la demanda y su volumen de producción inicial, así como de la relación entre la tasa de depreciación de la capacidad y la tasa de decrecimiento de la demanda en depresión.

El trabajo se limita a analizar el caso en que capacidad y demanda coinciden en el momento inicial y que en el primer periodo de expansión la política que se adopta es mantener una inversión proporcional a la capacidad productiva.

Si se alcanza el instante en el cual comienza la depresión sin utilizar la máxima inversión, la empresa adoptará distintas trayectorias. Si la tasa de depreciación de la capacidad es igual a la tasa de decrecimiento de la demanda en depresión, en este periodo se aplicará una política de inversión nula y precio constante, para continuar en la segunda fase de expansión con la trayectoria óptima según su volumen de producción al comienzo de dicha fase. Si la tasa de depreciación de la capacidad es inferior a la tasa de depreciación de la capacidad es inferior a la tasa de decrecimiento de la demanda en depresión y se puede prever con tiempo la depresión, podemos adelantarnos y retrasarnos a ésta, creando un entorno durante el cual se mantendrá una política de inversión nula sin exceso de capacidad; si esto no es posible y dependiendo ahora de la amplitud del intervalo de depresión, la empresa tendrá que soportar una política de exceso de capacidad e inversión máxima para posteriormente en la segunda fase de expansión ser absorbido dicho exceso con idéntica política, o bien, mantener tanto en depresión como en la segunda fase de expansión la política de inversión máxima y sin exceso de capacidad. Si la tasa de depreciación de la capacidad supera a la tasa de decrecimiento de la demanda en depresión, la empresa mantendrá la política de inversión variable durante la depresión decreciendo entonces demanda y capacidad.

Si se ha tenido que utilizar para alcanzar la depresión la máxima capacidad inversora durante el primer periodo de expansión, se adoptarán de nuevo distintas trayectorias de acuerdo con los valores de las tasas.

Si la tasa de depreciación de la capacidad y la tasa de decrecimiento de la demanda coinciden, la empresa podrá mantener en depresión una política de inversión nula sin exceso de capacidad siempre que su volumen de producción al final de la depresión no nos permita aplicar la política de inversión variable; si no es así, ha de mantenerse una política de inversión máxima con capacidad igual a la demanda. Si la tasa de depreciación es inferior a la de decrecimiento y puede preverse con tiempo la depresión, podemos de nuevo adelantarnos y retrasarnos a la depresión si la política de inversión variable en expansión puede conectarse con la de inversión nula y sin exceso de capacidad; en otro caso, se tendrán como trayectorias alternativas las mismas que en el caso en que las tasas son iguales y en idénticas situaciones. Si la tasa de depreciación supera a la de decrecimiento, la empresa podrá mantener en depresión una política de inversión nula y sin exceso de capacidad bajo las mismas condiciones que si la relación entre las tasas es $w \leqslant \mu - \delta$, admitiendo también como trayectorias alternativas las mismas que las que se obtenían cuando $w < \mu - \delta$ y con la política de inversión variable se alcanzaba el periodo de depresión.

APÉNDICE

Sabemos que

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}}{p} = \frac{(\delta + w)}{\epsilon}$$

en expansión a lo largo de la política tercera y

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{p}}{p} = \frac{w - (\mu - \delta)}{\epsilon}$$

en depresión con esta misma política; tenemos por tanto:

$$R(p(t)) = R(p(n_0)).\ \exp\left[\frac{\delta + w}{\epsilon}\ .\ (t - n_0)\right] \qquad \forall\ t \in [n_0, t_0]$$

$$R(p(t)) = R(p(n_0)).\ \exp\left[\frac{\delta + w}{\epsilon}\ .\ (t_0 - n_0) + \frac{w - (\mu - \delta)}{\epsilon}\ (t - t_0)\right]$$

$$\forall\ t \in [t_0, t_1]$$

$$R(p(t)) = R(p(n_0)).\ \exp\left[\frac{\delta + w}{\epsilon}\ (t_0 - n_0) + \frac{w - (\mu - \delta)}{\epsilon}\ (t_1 - t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta + w}{\epsilon}\ (t - t_1)\right] \qquad \forall\ t \in [t_1, n'_0]$$

De la expresión (4.2)

$$\int_{n_0}^{n'_0} d[\varphi\, e^{-(r+w)t}] = - \int_{n_0}^{n'_0} [R(p(t)) - c]\, e^{-(r+w)t}\ dt$$

se tiene

$$ {}_{n_0}^{n'_0} d[\varphi\, e^{-(r+w)t}] - c \int_{n_0}^{n'_0} e^{-(r+w)t}\, dt = - \int_{n_0}^{n'_0} R(p(t))\, e^{-(r+w)t} dt $$

[A.1]

Integrando el primer miembro de esta igualdad tenemos:

$$ \left(\frac{v}{\lambda} + \frac{c}{r+w}\right) [e^{-(r+w)n'_0} - e^{-(r+w)n_0}] $$

Si multiplicamos los dos miembros de la expresión [A.1] por exp $[(r+w)n_0]$ obtenemos:

$$ \left(\frac{v}{\lambda} + \frac{c}{r+w}\right)[e^{-(r+w)\,(n'_0 - n_0)} - 1] = $$

$$ = - \int_{n_0}^{n'_0} R(p(t)\,).\ \exp\,[-(r+w)\,(t-n_0)]\, dt $$

Sustituyendo en el segundo miembro de esta igualdad R(p(t)) por sus valores respectivos anteriormente calculados e integrando, se tiene:

$$ \left(\frac{v}{\lambda} + \frac{c}{r+w}\right) \left\{ \exp\,[-(r+w)\,(n'_0 - n_0)] - 1 \right\} = $$

$$ = - \frac{R(p(n_0))}{\theta} \left\{ \exp\,[\theta(t_0 - n_0)] - 1 \right. - $$

$$ - \frac{R(p(n_0))}{\theta - \frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \exp\,[\theta(t_1 - n_0) - \frac{\mu}{\epsilon}(t_1 - t_0)] - \exp\,[\theta(t_0 - n_0)] \right\} - $$

$$- \frac{R(p(n_0))}{\theta} \Big\{ \exp\left[\theta(n_0' - n_0) - \frac{\mu}{\epsilon}(t_1 - t_0)\right] - \exp\left[\theta(t_1 - n_0) - \frac{\mu}{\epsilon}(t_1 - t_0)\right] \Big\}$$

donde $\theta = \dfrac{w + \delta}{\epsilon} - (r + w)$

Observemos que:

$$\exp\left[\theta\,(n_0' - n_0) - \frac{\mu}{\epsilon}(t_1 - t_0)\right] = \exp\left[-\,(r + w)\,(n_0' - n_0)\right]$$

debido a la relación (4.6).

Sustituyendo esta última igualdad en la expresión anterior y realizando operaciones obtenemos:

$$\left(\frac{v}{\lambda} + \frac{c}{r + w} + \frac{R(p(n_0))}{\theta}\right) . \Big\{ \exp\left[-(r+w)\,(n_0' - n_0)\right] - 1 \Big\} =$$

$$= \exp\left[\theta(t_0 - n_0)\right] . \left(- \frac{R(p(n_0))}{\theta} + \frac{R(p(n_0))}{\theta - \frac{\mu}{\epsilon}}\right) .$$

$$. \Big\{ 1 - \exp\left[\left(\theta - \frac{\mu}{\epsilon}\right)(t_1 - t_0)\right] \Big\} \Longrightarrow$$

$$e^{\theta(t_0 - n_0)} = \frac{\dfrac{w + \delta}{\mu\,(r + w)} \Big\{ \exp\left[-(r+w)\,\dfrac{\mu}{w + \delta}\,(t_1 - t_0)\right] - 1 \Big\}}{\dfrac{1}{\theta - \frac{\mu}{\epsilon}} \Big\{ 1 - \exp\left[\left(\theta - \frac{\mu}{\epsilon}\right)(t_1 - t_0)\right] \Big\}}$$

Realizando una aproximación de segundo orden en las exponenciales tenemos:

$$\theta\,(t_0 - n_0) \cong \ln \frac{1 - 1/2\,\dfrac{(r+w)\mu}{w+\delta}\,(t_1 - t_0)}{1 + 1/2\,(\theta - \dfrac{\mu}{\epsilon})\,(t_1 - t_0)}$$

Realizando ahora una aproximación de primer orden en las funciones logarítmicas se tiene:

$$\theta\,(t_0 - n_0) \cong 1/2\,(t_1 - t_0)\left[\,\frac{(r+w)\mu}{w+\delta} - (\theta - \frac{\mu}{\epsilon}\,)\right]$$

de donde

$$n_0 \cong t_0 - (\,\frac{\mu}{w+\delta} - 1).\ \frac{t_1 - t_0}{2}$$

BIBLIOGRAFÍA

LEBAN, R.; LESOURNE, J. (1980): The firms investment and employment policy through a business cycle. European Economic Review, n.º 13, pp. 43-80.

LEBAN, R.; LESOURNE, J. (1983): Adaptative strategies of the firm through a business cycle. Journal of Economic Dynamic and Control. Vol. 5, n.º 2/3, pp. 201-234.

LESOURNE, J. (1973): Modèles de croissance des entreprises. Paris. Dunod.

NICKELL, S.J. (1974): On the role of expectations in the pure theory of investment. Review of Economic Studies. January, pp. 1-19.

NICKELL, S.J. (1978): Fixed costs, employment and labour demand over the cycle. Economica. n.º 45, Nov.

PITCHFORD, J.D.; TURNOVSKY, S.J. (1977): Applications of control theory to economic analysis. Amsterdam. North-Holland.

SEIERSTAD, A.; SYDSAETER, K. (1977): Sufficient conditions in optimal control theory. International Economic Review. Vol. 18, n.º 2, June, pp. 367-391.

THEPOT, J. (1983): Marketing and investment policies of duopolist in growing industry. Journal Economic Dynamic and Control. Vol. 5, n.º 4, July, pp. 387-404.