Cuadernos de Economía Vol. 13. 383-397. 1.985.

Decisiones de consumo: Un ejemplo usando una solución dinámica "Cournot-Nash". *

Amparo Urbano Salvador

Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Valencia.
Avda. Blasco Ibañez, 30-32 – 46010 Valencia

Durante los últimos años se ha prestado gran atención al estudio de la formación del nivel de ahorro. Sin embargo, hay un factor que no ha sido suficientemente elaborado: la repercusión de la creciente incorporación de la mano de obra femenina al mundo laboral sobre el nivel de decisiones de consumo o ahorro de las economías domésticas. Dicha toma tradicional de decisiones se ve alterada cuando los dos cónyuges tienen funciones de utilidad separadas que combinan dentro del "hogar". Esto puede dar lugar a situaciones duopolísticas en las que el resultado final –el nivel de riqueza o ahorro– dependerá de la estrategia –colusiva o no– seguida por los participantes. El modelo –un ejercicio simple en la línea comentada– presenta dos características básicas: el nivel de ahorros cambia como resultado de la acción de ambos cónyuges y cada uno de ellos toma en mente las acciones del otro. El aspecto estratégico se estudia usando el concepto de equilibrio Cournot-Nash en un contexto dinámico –la reacción de cada participante en el juego dependerá del nivel de ahorro (variable de estado) y no de comportamientos anteriores–. Así, el modelo es análogo a un juego diferencial en tiempo discreto. El artículo examina las propiedades dinámicas y steady state del nivel de ahorro que resultan de la interacción de los participantes.

In recent years there have been numerous studies about the formation of the savings rate. However, little attention has been paid to the growing incorporation of women to the labour market on the concumption decision making of households. This decision making changes when both partners have utility functions which are combined inside the household. In this situation, duopolistic behaviours can take place and the final result –the stock of wealth or savings– will depend on the strategy, co-operative or not, followed by the participants. Our model has two basic features: the underlying stock of wealth changes as a result of the actions of both participants, and each participants takes in account of the other's actions. This strategic aspect is studied, for example, by using the concept of a Cournot-Nash equilibrium in which each partner's reaction depends on the stock of wealth and not on previous behaviour. This, the model is a discreet-time analogue of a differential game. The paper examines the dynamic and steady-state properties of savings level that result from the participants' interactions.

* Título usado parafraseando un artículo del profesor Leonard Mirman, al cual le estoy muy agradecida no sólo por sus útiles comentario y sugerencias, sino también por su interés y entusiasmo en que pusiera en unas cuartillas las líneas siguientes.

1. Introduccion

Durante los últimos años se ha prestado gran atención al estudio de la formación del nivel de ahorro. Así, ha habido una amplia discusión en la literatura sobre el comportamiento óptimo de los ahorros bajo certidumbre en el contexto de horizontes temporales infinitos. Esos resultados se han hecho también extensivos a situaciones bajo incertidumbre. De la misma manera, y propiciados por el avance teórico, los estudios empíricos se han multiplicado, abarcando desde los determinantes internos de las decisiones de ahorro hasta las comparaciones internacionales de los mismos.

En este contexto, sin embargo, hay un factor que no está todavía suficientemente elaborado: la repercusión de la creciente incorporación de la mano de obra femenina al mundo laboral sobre el nivel de decisiones de consumo o ahorro de las economías domésticas. La mayor parte de trabajos sobre el tema han considerado tan sólo variaciones en la renta de la economía doméstica, sin alterar para nada la función de utilidad familiar o la toma de decisiones de consumo pertinentes. Y ello a pesar de que la evidencia empírica es bastante elocuente al respecto: no sólo las economías domésticas en las que ambos cónyuges trabajan, no ahorran más, sino que incluso el ahorro disminuye en comparación con aquellos, al mismo nivel de renta, en los que sólo uno de los dos aporta el ingreso familiar. Sin embargo, el incremento del consumo en las primeras no se decanta hacia gastos específicos sino que está bastante equilibradamente repartido entre las diversas partidas de consumo que constituyen el gasto típico de las economías domésticas.

Hay, por lo tanto, indicaciones de que la toma tradicional de decisiones de las economías domésticas se ve alterada cuando los dos cónyuges tienen funciones de utilidad separadas que combinan dentro del "hogar". Esto puede dar lugar a situaciones duopolísticas en las que el resultado final –en nivel de riqueza o ahorro– dependerá de la estrategia –colusiva o no– seguida por los participantes.

2. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MODELO

El artículo que se presenta en un ejercicio simple en la línea comentada anteriormente. Sólo intenta subrayar las implicaciones económicas de estos conflictos así como las implicaciones de otras situaciones duopolísticas en las que las decisiones de los participantes afectan la evolución de alguna variable de estado que es de interés. El modelo presenta dos figuras básicas. En primer lugar, hay un aspecto estratégico: cada uno de los participantes debe tomar en cuenta las acciones del otro participante. El segundo rasgo es que la variable de estado subyacente cambia a lo largo del tiempo, por lo que las acciones de ambos participantes afectan al tamaño futuro o la tasa de crecimiento del stock de riqueza o ahorro. Aunque hay muchas áreas de la economía por las cuales este tipo de modelo es aplicable –competencia imperfecta entre empresas, estabilización macroeconómica, etc.– el contexto usado presenta el aliciente de su tratamiento novedoso, aunque meramente con carácter expositivo.

El supuesto adoptado es que el objetivo de cada uno de los participantes es el de maximizar la suma de utilidades descontadas. La técnica de maximización que se usa es esencialmente la de programación dinámica en tiempo discreto, que en este contexto es el equivalente en tiempo discreto de un juego diferencial. Los juegos diferenciales son muy útiles para modelar problemas económicos que envuelven simultáneamente aspectos dinámicos y de comportamiento estratégico.

Los aspectos estratégicos del modelo se capturan a través de asunción de que cada uno de los participantes actúa como un duopolista de Cournot en un contexto dinámico, tomando la decisión del otro participante como dada, mientras trata de maximizar su propia suma descontada de utilidades. Adicionalmente, para estudiar el problema del duopolio dinámico en su forma más simplificada se incluyen otros supuestos. En particular, se asume que sólo tienen cabida consideraciones económicas. Por lo tanto, no se permiten "amenazas", y no se consideran las acciones basadas en "correctivos" o "respuestas purgativas" a comportamientos erróneos previos.

Así pues, la estructura del equilibrio dinámico de Cournot usada en este modelo es similar a la del duopolio estudiada por Cournot en un contexto estático. Pero esta, aunque puede aplicarse en un contexto dinámico, es esencialmente estática por naturaleza, como fue demostrado por el análisis de Nash en la teoría de juegos. En particular, el stock de riqueza responde a la cantidad consumida del mismo por ambos participantes, a través de una función lineal. Por esto, aunque el equilibrio de cada periodo es una solución Cournot–Nash, pueden darse cambios en el tamaño del stock de riqueza o ahorro. Es decir, a pesar de que la secuencia de decisiones de ambos agentes es en sí misma un equilibrio de Cournot–Nash, el stock de riqueza no tiene porqué converger a un equilibrio dinámico o steady state. Es deseable mantener las dos naciones de equilibrio por separado. El sistema estudiado en el modelo está siempre en equilibrio en el sentido de Cournot–Nash, mientras puede o no puede estar en un equilibrio steady–state.

En este marco las políticas Cournot–Nash para un horizonte infinito se derivan por medio del procedimiento de hallar las de horizonte finito y dejar tender a infinito el horizonte. No obstante se señala el camino para su consecución directa, aunque no se entra en los detalles de su demostración teórica.

Finalmente sólo queda apuntar los resultados obtenidos, los cuales se harán patentes a lo largo del trabajo. En él se analizan dos situaciones,una representando un comportamiento Cournot–Nas, en la cual los dos participantes actúan no cooperativamente y la otra mostrando un comportamiento cooperativo en la que ambos maximizan conjuntamente la suma de sus utilidades descontadas. En ambas se muestra el sendero óptimo de consumo, así como la dinámica del stock de riqueza que resulta de las distintas interacciones. Las conclusiones apoyan la intuición: los comportamientos no cooperativos dan lugar a pautas de consumo más elevadas y a un stock de riqueza menor que cuando los participantes cooperan y maximizan conjuntamente las utilidades derivadas del consumo. Además, en este último caso el consumo conjunto será mayor que el realizado por separado para cada uno de los cónyuges, aunque, por supuesto, menor que en el caso no cooperativo.

3. El modelo

3.1. *Equilibrio Cournot–Nash*

Considérese una economía doméstica, integrada por dos individuos (hombre y mujer o cualquier variedad que permita la imaginación), que deben decidir en cada periodo de tiempo cuánto consumir y cuánto invertir. Las ganancias de la inversión se representan por una tasa de interés, que se asume fija en el tiempo. Además el stock de riqueza de la unidad doméstica se incrementa cada período por un flujo de ingreso exógeno que proviene de las actividades laborales de ambos agentes. Sin embargo no se permite que la unidad familiar tome préstamos para financiar su consumo. Por lo tanto, la ecuación dinámica del sistema vendría representada por:

$$X^T_{t+1} = r(X^T_t - C^T + y_t)$$

con

$$X^t_o = x$$

donde r es uno más la tasa de interés, y_t el ingreso exógeno en el periodo t y C^T_t y X^T_t los valores óptimos de consumo y riqueza, respectivamente, en dicho periodo t.

No obstante y dado que el ingreso se considera determinístico y exógeno, prescindiremos de él en el resto de análisis, ya que su exclusión no resta validez a los resultados de comportamiento en que estamos interesados y simplifica la mecánica del cálculo. De todas maneras, se puede suponer que $X^t_o = x$, o stock inicial de riqueza incluye la suma descontada de los ingresos futuros de la unidad doméstica, sobre el que los participantes toman decisiones.

Cada indivíduo de la economía doméstica toma decisiones para maximizar la suma descontada de utilidades en el tiempo, teniendo en cuenta el consumo del otro agente integrante de la unidad familiar. Como ya se ha dicho anteriormente, la primera consideración se lleva a cabo usando la programación dinámica, y la última a través del concepto de equilibrio de Cournot–Nash.

Para ser más precisos, supóngase que el individuo i tiene una función de utilidad del consumo presente u_i. Sea C_i el consumo presente del agente i y supóngase que la función de utilidad es la logarítmica: $u_i(C_i) = \log C_i$, con $u'(o) = +\infty$, $u' > 0$ y $u'' < 0$. En adición, asúmase que el consumo presente de cada indivíduo integrante de la unidad familiar proviene de dos fuentes: una, dada por el consumo conjunto y compartido con el otro agente, y la otra constituida por el consumo independiente. Así, se tendrá:

Agente 1: $u_H(C_H) = u_H(C_1, C_2) = \log C_1 + \log C_2$ (1)

Agente 2: $u_M(C_M) = u_M(C_1, C_3) = \log C_1 + C_3$ (2)

donde C_1 es el consumo conjunto de ambos y C_2 y C_3, el consumo particular de uno (hombre) y otro (mujer) agente, respectivamente.

Sea $0 < \delta < 1$ el factor de descuento, recuérdese que el objetivo de cada indivíduo es la maximización de la suma descontada de utilidades del consumo.

Considerese el problema en el contexto de un horizonte finito. Asumamos que si no hay más períodos futuros, cada agente conseguirá una porción similar (o cualquier otra participación que se asuma)[1] de todo el stock de riqueza remanente. El stock inicial de riqueza viene dado por X. Por tanto, la respuesta óptima del agente 1 para el problema temporal de horizonte de un período,[2] y donde dicho agente, toma las acciones del segundo como dadas, vendrá dada por la maximización:

$$V_1^1 = \underset{C_1\ C_2}{\mathrm{Max}} \left\{ \log C_1 + \log C_2 \right\} + \delta \log 1/2\ r\ [X - C_1 - C_2 - C_3] \tag{3}$$

donde C_1 y C_2 son los valores óptimos del consumo presente del individuo 1, dado el consumo C_1 y C_3 del agente 2. El valor $X-C_1-C_2-C_3$ es stock remanente de riqueza que se convierte en $r(X-C_1-C_2-C_3)$ en el periodo siguiente. Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$(1+\delta)\,C_1 = X - C_2 - C_3 \tag{4}$$

$$(1+\delta)\,C_2 = X - C_1 - C_3 \tag{5}$$

que representan las curvas de reacción del agente 1.

Usando un argumento similar para el individuo 2:

$$V_2^1 = \underset{C_1\ C_3}{\mathrm{Max}} \left\{ \log C_1 + \log C_3 \right\} + \delta \log 1/2\ r[X - C_1 - C_2 - C_3]$$

1. Este supuesto no juega ningún papel en la derivación de las soluciones Cournot–Nash, como quedará claro más adelante.

2. Nótese que aquí horizonte se refiere al número de periodos futuros. Así, el horizonte de un periodo es de hecho un problema de maximización de dos periodos.

Se obtienen las curvas de reacción del mismo:

$$(1 + \delta)C_1 = X - C_2 - C_3 \tag{6}$$

$$(1 + \delta) C_3 = X - C_1 - C_2 \tag{7}$$

La solución de Cournot–Nash es la interacción de estas cuatro funciones de reacción. Así en nuestro caso, la resolución simultánea de las cuatro ecuaciones nos da las soluciones óptimas:

$$\overline{C}_1 = \frac{x}{\delta + 3} \tag{8}$$

$$\overline{C}_2 = \frac{x}{\delta + 3} \tag{9}$$

$$\overline{C}_3 = \frac{x}{\delta + 3} \tag{10}$$

y $C_1 = C_2 = C_3$ y el stock remanente de riqueza

$$X - \overline{C}_1 - \overline{C}_2 - \overline{C}_3 = \frac{\delta x}{\delta + 3} \tag{11}$$

Considérese ahora un horizonte de dos períodos, con el primer agente reaccionando, otra vez, a la política seguida por el segundo, y con el *supuesto* de que en el futuro la solución de Cournot–Nash de un periodo, hallada anteriormente, prevalecerá. Para resolver este problema, debemos, primero, encontrar el "valor" de la función para el horizonte de un periodo. Esta puede hallarse a partir de la función objetivo correspondiente. Así, considérese dicha función para el agente 1 bajo el equilibrio Cournot–Nash, anteriormente alcanzado:

$$\begin{aligned} V_1^{*1} &= \log \overline{C}_1 + \log \overline{C}_2 + \delta \log 1/2\, r[X - \overline{C}_1 - \overline{C}_2 - \overline{C}_3] = \\ &= (2 + \delta) \log X + A_1 \end{aligned} \tag{12}$$

donde

$$A_1 = \delta \log \delta\, r - (2 + \delta) \log (\delta + 3) + \delta \log 1/2$$

Nótese que A_1 es una constante (independiente de X) y no tendrá ningún efecto en la política óptima. Por lo tanto, la función objetivo para el problema de dos periodos será:

$$V^1_2 = \underset{C_1, C_2}{\mathrm{Max}} \left\{ \log C_1 + \log C_2 \right\} + \delta(2+\delta) \log r[X - C_1 - C_2 - C_3] + A_1 \tag{13}$$

Nuevamente, la respuesta óptima del individuo 1 correspondiente a las decisiones C_1 y C_3 del agente 2, satisfará las condiciones de primer orden:

$$[\delta(2+\delta) + 1]\, C_1 = X - C_2 - C_3 \tag{14}$$

$$[\delta(2+\delta) + 1]\, C_2 = X - C_1 - C_3 \tag{15}$$

Similarmente la respuesta óptima del individuo 2, vendrá dada por:

$$[\delta(2+\delta) + 1]\, C_1 = X - C_2 - C_3 \tag{16}$$

$$[\delta(2+\delta) + 1]\, C_3 = X - C_1 - C_2 \tag{17}$$

que resueltas conjuntamente, nos dan las soluciones:

$$\bar{C}_1 = \frac{X}{\delta\,(2+\delta)+3} \tag{18}$$

$$\bar{C}_2 = \frac{X}{\delta\,(2+\delta)+3} \tag{19}$$

$$\bar{C}_3 = \frac{X}{\delta\,(2+\delta)+3} \quad \text{y} \quad C_1 = C_2 = C_3 \tag{20}$$

y el stock remanente de riqueza:

$$X-\bar{C}_1-\bar{C}_2-\bar{C}_3 = \frac{\delta(2+\delta)\,X}{\delta(2+\delta)+3} \tag{21}$$

y el valor de la función:

$$\begin{aligned} V_1^{*2} &= \log \bar{C}_1 + \log \bar{C}_2 + \delta(2+\delta) \log r[X-\bar{C}_1-\bar{C}_2-\bar{C}_3] = \\ &= [2+\delta(2+\delta)] \log X + A_2 \end{aligned} \tag{22}$$

donde

$$\begin{aligned} A_2 &= \delta(2+\delta) \log r + \delta(2+\delta) \log \delta(2+\delta) - \\ &- [2+\delta(2+\delta)] \log (\delta(2+\delta)+3] + A_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el problema de horizonte temporal de tres periodos, la función objetivo del agente 1 sería:

$$\begin{aligned} V_1^3 = \max_{C_1,\, C_2} & \left\{ \log C_1 + \log C_2 \right\} + \\ &+ \delta[2+\delta(2+\delta)] \log r[x-C_1-C_2-C_3] + A_2 \end{aligned} \tag{23}$$

Repitiendo el proceso n veces y dejando que el horizonte tienda a infinito, los límites de los valores de C_1, C_2 y C_3 y el stock de riqueza son:[4]

3. Nótese que hemos denotado las reacciones óptimas por C_1, C_2 y C_3 y las políticas Cournot–Nash por $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ y $\bar{C}_3$, tanto en el problema de un periodo como en el de dos. De hecho serán diferentes dependiendo de la duración del horizonte. Sin embargo, en el contexto quedará claro qué horizonte se está usando.

4. Como anteriormente se apuntó estas soluciones pueden calcularse directamente considerando el problema de maximización para tiempo infinito

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u(C_t)$$

sujeto a

$$X_{t+1} = f(X_t-C_1-C_2-C_3)$$

y aunque no se demostrará aquí, las soluciones óptimas deberán satisfacer las siguientes relacio-

.../...

$$\overline{C}_1 = \frac{1-\delta}{3-\delta}\,x \tag{24}$$

$$\overline{C}_2 = \frac{1-\delta}{3-\delta}\,x \tag{25}$$

$$\overline{C}_3 = \frac{1-\delta}{3-\delta}\,x \quad , \text{ con } \overline{C}_1 = \overline{C}_2 = \overline{C}_3 \tag{26}$$

.../...

nes funcionales: Para el agente 1:

$$u_1'(g_1(X), g_2(x)) = \delta\,[\,u_1'\,[g_1(f(X-g_1(X)-g_2(X)-g_3(X)), g_2(X)\,]\,.\,f'\,[X-g_1(X)-g_2(X)-$$
$$-g_3(X)]\,.\,[1-g_2'-g_3'] + \delta\, u_2'\,[g_1(X).\, g_2\,[f(X-g_1(X)-g_2(X)-g_3(X)]]\,.$$
$$.\; f'[X-g_1(X)-g_2(X)-g_3(X)]\,.\; g_2'(X).$$

y

$$u_2'(g_1(X), g_2(X)) = \delta\,[u_2'\,[g_1(X)\; g_2\,[f(X-g_1(X)-g_2(X)-g_3(X))]]\,.\,f'\,[X-g_1(X)-g_2(X).$$
$$g_3(X)]\,.\,[1-g_1'-g_3'] \;+\; \delta\, u_1'\,[g_1(f(X-g_1(X)-g_2(X)-g_3(X)), g_2(x)]\;.$$
$$.\; f'\,[X-g_1(X)-g_2(X)-g_3(X)]\;.\; g_1'(X)$$

donde u_1' y u_2' representan las derivadas de la función de utilidad del agente 1, respecto a sus argumentos primero y segundo, $f(x)$ es la función de transición de la variable de estado y $g_i(x)$ (para $i = 1, 2, 3$) es la solución óptima Cournot–Nash. En nuestro ejemplo $u_1(x) = \log C$, $f(x) = rx$. Fijando $g_1(x) = \lambda_1 x$, $g_2(x) = \lambda_2 x$ y $g_3(x) = \lambda_3 x$, encontramos el sistema:

$$(1-\delta)\,[1-\lambda_2-\lambda_3] = (1+\delta)\lambda_1$$
$$(1-\delta)\,[1-\lambda_1-\lambda_3] = (1+\delta)\lambda_2$$
$$(1-\delta)\,[1-\lambda_1-\lambda_2] = (1+\delta)\lambda_3$$

cuya solución es:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1-\delta}{3-\delta}$$

Un enfoque diferente se ha seguido en el artículo, ya que justificar incluso intuitivamente, las relaciones funcionales requiere un largo proceso.

y

$$X - \bar{C}_1 - \bar{C}_2 - \bar{C}_3 = \frac{2\delta}{3-\delta}\ x = \frac{x}{1/2\,[3/\delta - 1]} \tag{27}$$

Las ecuaciones (24), (25) y (26) representan políticas de consumo para los agentes 1 y 2, cuando se considera un horizonte infinito, mientras que la (27) es la política de inversión conjunta de ambos. Estas políticas son aplicables en cada periodo y ya no dependen de la extensión del horizonte. Por lo tanto se pueden usar para derivar el comportamiento dinámico del stock de riqueza. Bajo el equilibrio Cournot–Nash la ecuación dinámica es

$$X_{t+1} = r[(X_t - C_1(X_t) - C_2(X_t) - C_3(X_t)]$$

Por tanto:

$$X_{t+1} = r\left[\frac{X}{1/3\ \ [3/\delta - 1]}\right] = \frac{r}{1/2\,[3/\delta - 1/}\quad X_t \tag{28}$$

Asumiendo que $0 < \delta < 1$,

$$\frac{1}{1/2\,[\,3/\delta - 1]} < 1$$

y si:

$$\frac{r}{1/2\,[3/\delta - 1]} > 1\ ,\quad X_t \rightarrow \infty\ ,\ \text{para cualquier } X_o > 0$$

mientras que si:

$$\frac{r}{1/2\,[3/\delta - 1]} < 1\ ,\quad X_t \rightarrow 0\ ,\ \text{para cualquier } X_o > 0$$

que es caso más probable.

Un caso límite sería:

$$\frac{r}{1/2[3/\delta-1]} = 1$$

donde, entonces X_t permanecería en un steady–state neutral igual al nivel inicial del stock de riqueza.

3.2. *Equilibrio cooperativo*

Comparamos ahora las soluciones del equilibrio Cournot–Nash con las obtenidas cuando los dos agentes exhiben un comportamiento cooperativo, y maximizan conjuntamente la suma descontada de sus utilidades.

$$U(C) = 2 \log C_1 + 2 \log C_4 \tag{30}$$

donde C_1 es el consumo conjunto y C_4 el independiente que se asume como un "pool". Considerando el problema en el contexto de un horizonte finito, de manera análoga al caso anterior, encontramos para el horizonte de un periodo

$$V'(x) = \max_{C_1, C_4} \left\{ 2 \log C_1 + 2 \log C_4 \right\} + \delta\, 2 \log r\, [X - C_1 - C_4] \tag{31}$$

con las soluciones

$$C_1 = C_4 = \frac{x}{2+\delta} \tag{32}$$

y

$$X - \overline{C}_1 - \overline{C}_4 = \frac{\delta}{2+\delta} X \tag{33}$$

El valor de la función objetivo vendrá dado:

$$\begin{aligned} V'^{*}(X) &= 2 \log \overline{C}_1 + 2 \log \overline{C}_4 + \delta\, 2 \log r [X - \overline{C}_1 - \overline{C}_4] = \\ &= (4 + 2\delta) \log X + A_1 \end{aligned} \tag{34}$$

donde

$$A_1 = 2\delta \log r - (4 + 2\delta) \log (2 + \delta) + 2 \delta \log \delta$$

Por lo tanto, en el horizonte de los dos periodos, tendremos:

$$V^2(X) = \underset{C_1\ C_4}{\text{Max}} \left\{ 2 \log C_1 + 2 \log C_4 \right\} + \qquad (35)$$
$$+ \ 2\delta(4+2\delta) \log r\, [X - C_1 - C_4]$$

y

$$\overline{C}_1 = \overline{C}_4 = \frac{X}{2 + 2\delta(2+\delta)} \qquad (36)$$

$$X - \overline{C}_1 - \overline{C}_4 = \frac{2\delta(2+\delta)}{2+2\delta(2+\delta)} \qquad (37)$$

con el valor de la función objetivo igual a

$$V^{2*}(X) = [4 + 2\delta\,(4 + 2\delta)] \log X + A_2 \qquad (38)$$

dado

$$A_2 = A_1 + 2\delta(4 + 2\,\delta) \log r + 2\delta(4 + 2\delta) \log 2\delta(2+\delta) -$$
$$- [4 + 2\delta[4+2\delta)] \log\ [2 + 2\delta\ (2+\delta)]$$

que nos dará una función objetivo para el horizonte de tres periodos:

$$V^3(x) = \underset{C_1,\ C_4}{\text{Max}} \left\{ 2 \log C_1 + 2 \log C_4 \right\} +$$

$$+ \ 2\delta\ [4 + 2\delta(4 + 2\delta)] \log r\, [X - C_1 - C_4]$$

Repitiendo el proceso n veces y tomando límites, hallamos los valores óptimos:[5]

$$\overline{C}_1 = \frac{1-\delta}{2} X \qquad (39)$$

$$\overline{C}_4 = \frac{1-\delta}{2} X \qquad (40)$$

y

$$X - \overline{C}_1 - \overline{C}_4 = \delta X \qquad (41)$$

La dinámica del sistema vendrá dada por: $X_{t+1} = rx_t$

es decir, $x_{t+1} = r\,\delta\,x$ (42)

En este caso si $r\delta > 1$, entonces $X_t \rightarrow \delta$ y si $r\delta < 1$ entonces $X_t \rightarrow 0$ que es la situación más plausible, ya que $0 < \delta < 1$.

5. Similarmente al caso anterior, las ecuaciones (39) y (40) y (41), pueden hallarse directamente como resultado del proceso de maximización:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t\, 2u(C_t) \qquad \text{s. a. } X_{t+1} = f(X_t - C_1 - C_4)$$

cumpliéndose las relaciones funcionales:

$$u'_1\,[g_1(x), g_4(x)] = \delta[u'_1\,[g_1\,[f(x-g_1(x)-g_4(x1), g_4]\;.\;f'(x-g_1(x)-g_4(x)]\,[1-g'_4] +$$
$$+ g'_4\,[\,u'_4\,(g_1, g_4\,[f(x\text{-}g_1(x) - g_4(x)]\;.\;f'(x-g_1(x)-g_4(x))$$

y

$$u'_4\,[g_1(x), g_4(x)] = \delta\,[u'_4\,[g_1, g_4[f(x-g_1(x)-g_4(x))]\;.\;f'(x-g_1(x)-g_4(x)]\,[1-g'_1] +$$
$$+ g'_1\,[u'_1\,[g_1\,[f(x-g_1(x)-g_4(x))], g_4]\;.\;f'(x-g_1(x)-g_4(x)]$$

siendo $U = \log C,\ \lambda_1 x = g_1(x),\ \lambda_2 x = g_4(x)$ y $f(x) = rx$

encontramos:

$$\left.\begin{aligned}(1-\delta)(1-\lambda_4) &= (1+\delta)\,\lambda_1\\ (1-\delta)(1-\lambda_1) &= (1+\delta)\,\lambda_4\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_4 = \frac{1-\delta}{2}$$

Comparando la ecuación (27) y la (42), vemos que en ambos casos la solución del steady state es la de agotar el stock de riqueza. Sin embargo, las políticas óptimas de consumo divergen. Así el consumo constante por periodo, en la solución Cournot–Nash –y dado por las ecuaciones (24), (25) y (26)–, es mayor que el correspondiente bajo comportamiento cooperativo, ya que $\frac{3(1-\delta)}{3-\delta} > \frac{2(1-\delta)}{2}$. Por lo tanto, el conflicto implícito en los problemas de duopolio lleva a que ambos agentes consuman una porción más elevada de su stock de riqueza, agotando este más rápidamente. Además en el caso cooperativo las decisiones de consumo son un tanto diferentes de las de Cournot–Nash, dándose en el primero un incremento en el consumo conjunto a expensas del particular de cada agente, mientras que en el segundo es este último el que predomina. De cualquier manera, el ejemplo llevado a cabo es muy sencillo, sufriendo, además, el análisis, las consecuencias de la simetría del uso de la función logarítmica. Ejemplos con otro tipo de funciones de utilidad han dado políticas óptimas, para horizontes de un periodo, cuadráticas o cúbices en la variable de estado, por lo que el análisis no ha podido continuarse.

4. Sumario y conclusiones

En el artículo se ha estudiado un modelo incorporando tanto aspectos dinámicos como estratégicos. La dinámica se ha incorporado a través de la función de acumulación del stock de capital, mientras que la estrategia viene dada por el comportamiento maximizador de dos agentes que dispone de un stock de riqueza común para gastar. El concepto de equilibrio usado para estudiar el aspecto estratégico es el de equilibrio de Cournot–Nash en el cual cada agente maximiza la suma de sus utilidades descontadas, teniendo en cuenta las acciones del otro agente. Se han analizado únicamente respuestas que caracterizan al nivel de consumo dependiendo tan sólo del tamaño del stock de capital, por lo que estrategias de amenaza se han excluido.

Con estas bases, se han derivado expresiones de las políticas Cournot–Nash para un ejemplo y se ha estudiado la dinámica del stock de capital bajo las acciones de estas políticas. Además, se han comparado estas expresiones con las derivadas de considerar un comportamiento cooperativo de parte de los agentes que integran la unidad doméstica y que maximizan una combinación lineal de sus utilidades descontadas. Así se ha mostrado que el equilibrio Cournot–Nash da lugar a un mayor consumo, como función del tamaño del stock de capital, y a un agotamiento más temprano de dicho stock.

Aunque los resultados se han derivado solamente para un ejemplo, estos se pueden usar para estudiar importantes problemas económicos que requieren un comportamiento estratégico dentro de un contexto dinámico. Sin embargo, debe apuntarse que no es probable derivar resultados tan sencillos como en nuestro ejemplo cuando se consideran modelos más generales. De hecho, incluso bajo los más simplificados supuestos asumidos en el artículo, el equilibrio Cournot–Nash, no tiene por qué ser único, como mostrado por Mirman (1978), aunque, no obstante, las propiedades locales de estos equilibrios múltiples pueden dar lugar a interesantes resultados.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

CLEMHOUT, S. y H.Y. WAN, Jr.: "Interactive Economic Dynamics and Differential Games: A Survey". *Cornell University,* 1978.

KYDLAND, F.: "Equilibrium solutions in Dynamic Dominant Player models". *Journal of Economic Theory,* vol. 15, Núm. 2. (Agosto 1977 a).

KYLAND, F.: "A Dynamic Dominant–Firm Model of Industry Structure". University of Minnesota, 1977b.

LEVHARI, MICHENER y MIRMAN: "Dynamic Programming Models of Fishing". University of Illinois, 1978, actualizado y revisado en *American Economic Review,* 1981.

LEVHARI y SRINIVASAN: "Optimal Saving under Uncertainty". *Review of Economic Studies,* 36 (1969).

MIRMAN, L.J.: "Dynamic Models of Fishing: A Heuristic Approach" en P.T. Liu y J.B. Sutinen, eds. *Control Theory in Mathematical Economics,* New York: Dekker 1979, pp. 39–73.

MIRMAN y LEVHARI: "Saving and Consumption with an Uncertain Horizons", *Journal of Political Economy,* 1979.

MIRMAN y LEVHARI: "The great fish war: an example using a dynamic Cournot–Nash Solution". *The Bell Journal of Economics* 1981.

TAKAYAMA, T.: "Dynamic Theory of Fisheries Economics II; Differential Game Theoretic Approach", University of Illinois, 1977.