ANTONIO ALEGRE ESCOLANO

Estudio de las funciones reales cuyas variables están relacionadas a través de un sistema de ecuaciones. Aplicación a la obtención de la condición suficiente de segundo orden para los extremos de funciones condicionadas por ecuaciones.

1. Introduccion

En este trabajo, pretendemos estudiar, de una forma exhaustiva y sistemática, el comportamiento de una función real de variable n-dimensional $y = f(\vec{x})$, cuando las variables componentes del vector $\vec{x}$, no son todas ellas independientes, sino que vienen relacionadas a través de un sistema de "h" ecuaciones $\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{0}$ con $h < n$, que definen implícitamente a un subvector $\vec{x_2}$ de dimensión "h" en función de las restantes $k = n - h$ componentes de $\vec{x}$, que simbolizaremos por el subvector $\vec{x_1}$, quedando entonces por composición $y = F(\vec{x_1})$.

Con este objetivo, estudiaremos en primer lugar el comportamiento del sistema de ecuaciones $\vec{\phi}(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \vec{0}$, que definen de forma implícita a la variable $\vec{x_2}$ como función vectorial de la $\vec{x_1}$. Sin explicitar la característica funcional $\vec{g}$ que nos dá $\vec{x_2} = \vec{g}(\vec{x_1})$, estudiaremos tanto la matriz jacobiana de las derivadas primeras de $\vec{x_2}$ respecto a $\vec{x_1}$, como las matrices hessianas de las segundas derivadas de las "h" componentes g_j de la función vectorial $\vec{g}$ y todo ello en función de las características funcionales de $\vec{\phi}$.

Con estos resultados, analizaremos el vector gradiente de la función $y = F(\vec{x_1})$ y su matriz hessiana H_F, obteniendo expresiones generales de ambos, que después particularizaremos a casos concretos más sencillos, y especialmente al caso de linealidad en la función o en las condiciones, todo ello, sin necesidad de explicitar la característica funcional F, por composición de la función inicial f con la resultante de explicitar del sistema de ecuacion $\vec{\phi}$, la característica funcional $\vec{g}$ que nos da a $\vec{x_2}$ como función de $\vec{x_1}$, únicas variables independientes en la definición de la función y.

Por último, como objetivo fundamental de este trabajo, aplicaremos estos resultados, con el propósito de reducir la "dimensionalidad" del problema de la obtención de una condición suficiente de segundo orden, para la discusión de los extremos locales de funciones condicionadas por un sistema de ecuaciones que ligan sus variables, discusión ésta, que debe efectuarse para cada uno de los puntos críticos obtenidos por la condición necesaria.

Finalmente, a modo de ejemplo, compararemos el método propuesto aquí, con el tradicionalmente utilizado, consistente en el análisis de la matriz hessiana orlada del lagrangiano, para de esta forma comprobar la reducción conseguida en la dimensionalidad, en un caso concreto de problema de optimización condicionada.

2. Primeras definiciones y planteamiento del problema

Consideremos como objetivo de este epígrafe, la función real de variable real n–dimensional,

$$y = f(x_1, \ldots, x_k ; x_{k+1}, \ldots, x_{k+h}) \quad \text{con } k + h = n$$

que definiendo los vectores siguientes:

$$\vec{x_1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_k \end{Bmatrix} \qquad , \; x_2 = \begin{Bmatrix} x_{K+1} \\ \vdots \\ x_{k+j} \\ \vdots \\ x_{k+h} \end{Bmatrix} \qquad \text{y} \quad \vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

podremos expresar de forma condensada como:

$$y = f(\vec{x_1} ; \vec{x_2}) = f(\vec{x})$$

donde hemos agrupado las variables, componentes del vector $\vec{x}$, en dos subgrupos correspondientes a las componentes de los vectores $\vec{x_1}$ y $\vec{x_2}$, con objeto de diferenciar desde el primer momento, las variables que supondremos independientes, incluidas en el vector k–dimensional $\vec{x_1}$, de las restantes, contenidas en el vector h–dimensional $\vec{x_2}$, y que como veremos serán consideradas como dependientes de las anteriores.

Con la mayor generalidad, podemos suponer que la dependencia entre las variables $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$, viene dada a través de un sistema de "h" condiciones, dadas de forma implícita mediante el sistema de ecuaciones:

$$\phi_j (x_1, \ldots, x_k ; x_{k+1}, \ldots, x_{k+h}) = c0$$

$$\text{con } j = 1, 2, \ldots, h$$

o bien, escritas conjuntamente en forma vectorial,

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{0}$$

donde con $\vec{\phi}$ expresamos la función vectorial de dimensión "h", que tiene como componentes las funciones reales ϕ_j con j = 1, 2, . . ., h, y siendo $\vec{0}$ el vector nulo de dimensión "h".

Como es bien sabido, por el teorema de existencia de funciones definidas implícitamente, para que mediante el sistema anterior, queden definidas las "h" variables contenidas en el vector $\vec{x}_2$, como funciones de las restantes "k" de $\vec{x}_1$, tendrá que ser distinto de cero el determinante jacobiano de $\vec{\phi}$ respecto a $\vec{x}_2$, que podremos expresar una vez conocida la matriz jacobiana,

$$J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_{k+h}} \\ & \ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \dfrac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \ddots & \\ \dfrac{\partial \phi_h}{\partial x_{k+1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \phi_h}{\partial x_{k+h}} \end{pmatrix} = \left\{\frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}}\right\} \text{ con } \begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, h \\ 1 = 1, 2, \ldots, h \end{matrix}$$

matriz que es cuadrada y de orden (h x h), como:

$$det\, J \left\{ \frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2} \right\} \neq 0$$

Esto daría lugar, en caso de que fuera posible su explicitación, al conjunto de "h" funciones de las variables contenidas en $\vec{x}_1$, tales como:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g_1\ (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) \\ &\vdots \\ x_{k+j} &= g_j\ (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) \\ &\vdots \\ x_{k+h} &= g_h\ (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) \end{aligned}$$

y que quedarían recogidas mediante la función vectorial $\vec{g}$, de dimensión "h", dando:

$$\vec{x}_2 = \vec{g}(\vec{x}_1)$$

Con todo lo anterior, la variable "y", en principio definida como función de la variable n–dimensional $\vec{x}$, a través de la característica funcional "f", podrá considerarse, por composición, como función de las "k" variables independientes recogidas como componentes del vector $\vec{x}_1$ únicamente, mediante la característica funcional "F", que utilizando $\vec{I}_k$ para simbolizar la función vectorial identidad de dimensión "k", obedecerá a la relación,

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_k \\ \vec{g} \end{bmatrix} \circ f \equiv F$$

cuyo efecto podemos recoger en el esquema siguiente,

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{\begin{bmatrix}\vec{I}_k\\ \vec{g}\end{bmatrix}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{Bmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_k\end{Bmatrix} \longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix}\vec{I}_k\\ \vec{g}\end{bmatrix}(\vec{x}_1) = \begin{Bmatrix}\vec{I}_k(\vec{x}_1)\\ \vec{g}(\vec{x}_2)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{x}_2\end{Bmatrix} \longrightarrow y = f(\vec{x})$$

$$F \equiv \begin{bmatrix}\vec{I}_k\\ \vec{g}\end{bmatrix} \text{ o } f$$

$$\vec{x}_1 \longrightarrow y = F(\vec{x}_1) = \left\{\begin{bmatrix}\vec{I}_k\\ \vec{g}\end{bmatrix} \text{ of }\right\}(\vec{x}_1) = f\left\{\begin{bmatrix}\vec{I}_k\\ \vec{g}\end{bmatrix}(\vec{x}_1)\right\} = f(\vec{x})$$

Podemos observar, que la dimensionalidad "$n = k + h$", de la función "y" dada mediante la característica funcional f, queda reducida a "k", cuando dicha función viene dada a través de la característica funcional F obtenida en la composición de f con las "h" condiciones que relacionan a las variables componentes de $\vec{x}$.

3. Analisis del sistema de condiciones que satisfacen las variables incluidas en $\vec{x}$ y que definen implicitamente a las pertenecientes a $\vec{x}_2$ como funciones de las componentes de $\vec{x}_1$

Dado el sistema de condiciones impuesto a las variables incluidas en el vector $\vec{x}$, expresado mediante,

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{0}$$

analizaremos en este punto el comportamiento de las variables contenidas en $\vec{x}_2$ como funciones de las contenidas en $\vec{x}_1$, definidas implícitamente a través del sistema anterior, y todo ello sin obtener su explicitación mediante la función vectorial $\vec{g}$ que nos daría $\vec{x}_2 = \vec{g}(\vec{x}_1)$, explicitación ésta que en ocasiones resultaría muy laboriosa e incluso inalcanzable, dependiendo del tipo de relaciones definidas por las características funcionales ϕ_j con $j = 1, 2, \ldots, h$.

3.1. *Obtención de las derivadas parciales de las variables de $\vec{x}_2$ consideradas como funciones de las variables independientes contenidas en $\vec{x}_1$.*

Para obtener dichas derivadas, lo haremos a partir de las derivadas de las relaciones implícitas dadas por ϕ_j con $j = 1, 2, \ldots, h$ y las resumiremos en la correspondiente matriz jacobiana, definida como una matriz de orden (h x k) y dada por,

$$J\left\{\frac{x_{k+1}, \ldots, x_{k+j}, \ldots, x_{k+h}}{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k}\right\} = J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\}$$

cuyos elementos serán,

$$J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} \\ \vdots & \dfrac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \left\{\frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i}\right\} \text{con} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, h \\ i = 1, 2, \ldots, k \end{array}$$

para ello, consideremos la relación con $j = 1, 2, \ldots, h$

$$\phi_j\,(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k ; x_{k+1}, \ldots, x_{k+j}, \ldots, x_{k+h}) = \phi_j(\vec{x}_1 ; \vec{x}_2) = 0$$

derivando ϕ_j como función compuesta respecto a x_i, con i = 1, 2,..., k, obtenemos,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+h}} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

sintéticamente podríamos agrupar estos resultados con j = 1, 2, . . . , h, mediante la expresión matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \\ \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \\ \\ \frac{\partial \phi_h}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{k+h}} \\ & \ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \ddots & \\ \frac{\partial \phi_h}{\partial x_{k+1}} & & \frac{\partial \phi_h}{\partial x_{k+h}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \\ \\ \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \\ \\ \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

donde nos aparece, $\vec{0}$ como el vector nulo de dimensión "h" y la matriz jacobiana

$$J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\}$$

que es independiente del valor que tome i de entre i = 1, 2, . . , k, por lo que podrían a su vez recogerse todos estos casos mediante la expresión general:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial \phi_h}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial \phi_h}{\partial x_k} \end{pmatrix} + J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_k} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

siendo ahora 0 la matriz nula de orden (h x k), igualdad que podemos escribir a través de las correspondientes matrices jacobianas como,

$$J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_1}}\right\} + J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\} . J\left\{\frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}}\right\} = \vec{0} \qquad (2)$$

y como además tenemos que $J\left\{\frac{\vec{x_1}}{\vec{x_1}}\right\} = I_k$, matriz unidad de orden k, por ser independientes las variables componentes del vector $\vec{x_1}$, podemos escribir,

$$\vec{0} = J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_1}}\right\} . I_k + J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\} . J\left\{\frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}}\right\}$$

Expresión que corresponde al producto de dos matrices particionadas de la forma,

$$\vec{0} = \left[J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_1}}\right\} \quad J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\} \right] . \begin{bmatrix} J\left\{\frac{\vec{x_1}}{\vec{x_1}}\right\} \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}}\right\} \end{bmatrix} =$$

$$= J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_1 , \vec{x}_2}\right\} . \ J\left\{\frac{\vec{x}_1 , \vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} = J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}}\right\} . \ J\left\{\frac{\vec{x}}{\vec{x}_1}\right\} \qquad (*)$$

Expresión esta última, que relaciona todas las derivadas parciales de las condiciones dadas por $\vec{\phi}$ con las derivadas de las funciones $\vec{x}_2$ definidas implícitamente por $\vec{\phi}$ respecto a las variables independientes incluidas en $\vec{x}_1$.

De (2) al ser, $det\ J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\} \neq 0$, la matriz jacobiana será invertible, permitiendo obtener la matriz jacobiana buscada, mediante el producto siguiente,

$$\boxed{J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} = -J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\}^{-1} . \ J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_1}\right\}} \qquad (3)$$

(*) A este resultado, podríamos haber llegado directamente, a partir de las propiedades de la matriz jacobiana, ver apéndice I, y teniendo en cuenta el siguiente esquema de composición al que se adapta el sistema de ecuaciones $\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{0}$, que es objeto de nuestro análisis.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R}^k & \xrightarrow{\quad (\vec{I}_k,\ \vec{g})' \quad} & \mathbf{R}^n & \xrightarrow{\quad \vec{\phi} \quad} & \mathbf{R}^h \\
\vec{x}_1 & \longrightarrow & x & \longrightarrow & \vec{z}
\end{array}$$

$$\vec{F} \equiv \left\{\begin{matrix} \vec{I}_k \\ \vec{g} \end{matrix}\right\} \ 0 \ \vec{\phi}$$

$$\vec{x}_1 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad} \vec{F}(\vec{x}_1) = \vec{z}$$

donde para cualquier $\vec{x}_1 \in \mathbf{R}^k$, tendremos que $\vec{F}(\vec{x}_1) = \vec{0}$, luego $J\left\{\frac{\vec{F}}{\vec{x}_1}\right\} = \vec{0}$, y por la propiedad de composición $\vec{0} = J\left\{\frac{\vec{F}}{\vec{x}_1}\right\} = J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}}\right\} . \ J\left\{\frac{\vec{x}}{\vec{x}_1}\right\}$ como hemos obtenido antes.

quedando resuelto por tanto, el problema de calcular las derivadas de las funciones $\vec{x}_2$ respecto a las variables independientes $\vec{x}_1$, sin necesidad de explicitar la relación, mediante la obtención de la función vectorial g, que nos daría directamente,

$$J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} = J\left\{\frac{\vec{g}}{\vec{x}_1}\right\}$$

Si desarrollamos la expresión (3), podremos obtener todas y cada una de las derivadas parciales $\dfrac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i}$ con $j = 1, 2, \ldots, h$ e $i = 1, 2, \ldots, k$ elementos de la matriz jacobiana $J\left\{\dfrac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\}$ ya que,

$$J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} = -\left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}}\right]^{-1}_{(h\times h)} \cdot \left[\frac{\partial \phi_l}{\partial x_i}\right]_{(h\times k)} =$$

$$= -\left[a_{jl}\right]^{-1}_{(h\times h)} \cdot \left[\frac{\partial \phi_l}{\partial x_i}\right]_{(h\times k)}$$

habiendo hecho $a_{jl} = \dfrac{\partial \phi_j}{\partial \vec{x}_{k+l}}$, y llamando ahora A_{jl} al adjunto del elemento a_{jl}, tendremos que,

$$\left[\frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i}\right]_{(h\times k)} = J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} = -\frac{1}{det\, J\left\{\dfrac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\}} \cdot \left[A_{lj}\right]_{(h\times h)} \cdot \left[\frac{\partial \phi_l}{\partial x_i}\right]_{(h\times k)} =$$

$$= -\frac{1}{\det J\left\{\frac{\phi}{x_2}\right\}} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{h} A_{l_j} \cdot \frac{\partial \phi_l}{\partial x_i} \right\}_{(h\,x\,k)} = -\frac{1}{\det J\left\{\frac{\phi}{x_2}\right\}} .$$

$$\cdot \left[\det J \left\{ \frac{\phi_1 \; \ldots . \phi_j \; \vdots \; \ldots . \phi_h}{x_{k+1} \; .. \; x_i \; .. \; x_{k+h}} \right\} \right]_{(h\,x\,k)} =$$

$$= \left[- \frac{\det J \left\{ \frac{\phi_1 \; \ldots \phi_j \; \ldots \phi_h}{x_{k+1} \; .. \; x_i \; .. \; x_{k+h}} \right\}}{\det J\left\{\frac{\phi}{x_2}\right\}} \right]_{(h\,x\,k)}$$

luego,

$$\boxed{\frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} = - \frac{\det J \left\{ \frac{\phi_1 \; \ldots . \phi_j \; \ldots . \phi_h}{x_{k+1} \; .. \; x_i \; .. \; x_{k+h}} \right\}}{\det J \left\{ \frac{\phi_1 \; \ldots . \phi_j \; \ldots . \phi_h}{x_{k+1} \; .. \; x_{k+j} \; .. \; x_{k+h}} \right\}} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, h \\ i = 1, 2, \ldots, k \end{array}} \quad (3')$$

De la expresión general (3) obtenida para la matriz jacobiana $J\left\{\frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}}\right\}$ de orden (h x k) y de sus elementos determinados en (3'), se deducen los siguientes casos particulares.

3.1.1. Caso particular en que $h = 1$ con $k > 1$

Este caso, aparece cuando sólo existe una ecuación de condición, con lo que x_{k+1} será la única variable dependiente entre las componentes de $\vec{x}$, resultando por tanto función de las "k" componentes de $\vec{x}_1$, entonces (3) quedará de la forma,

$$\left[\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k}\right] = J\left\{\frac{x_{k+1}}{x_1}\right\} = -J\left\{\frac{\phi}{x_{k+1}}\right\}^{-1} .$$

$$. J\left\{\frac{\phi}{x_1}\right\} = -\left[\frac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right] =$$

$$= - \frac{1}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right]$$

Expresión idéntica a la que se obtendría en (3'), de donde, igualando elemento a elemento quedará,

$$\boxed{\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} = - \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, k} \qquad (4)$$

expresiones bien conocidas como derivadas parciales de la función x_{k+1} definida implícitamente a través de la relación $\phi(\vec{x}_1, x_{k+1}) = 0$, y en la que x_i con $i = 1, 2, \ldots, k$ son las componentes del vector $\vec{x}_1$ de variables independientes.

3.1.2. Caso particular en que k = 1 con h >1

Este es el caso contrario al anterior, en el que, el número de ecuaciones de condición es inferior en una unidad al número total de variables, $n = k + h = 1+h$, con lo que las condiciones dadas por $\vec{\phi}(x_1, \vec{x_2}) = \vec{0}$, definen a las "h" variables que componen el vector $\vec{x_2}$, como funciones de la única variable independiente x_1; con ello (3) quedará de la forma,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_2}{dx_1} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{1+j}}{dx_1} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{1+h}}{dx_1} \end{bmatrix} = J\left\{\frac{\vec{x_2}}{x_1}\right\} = -J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\}^{-1} . J\left\{\frac{\vec{\phi}}{x_1}\right\} = -J\left\{\frac{\vec{\phi}}{x_2}\right\}^{-1} . \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_h}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

y de (3') obtenemos directamente,

$$\boxed{\frac{dx_{1+j}}{dx_1} = - \frac{det\, J\left\{\dfrac{\phi_1 \cdot\cdot \phi_{j-1}, \phi_j, \phi_{j+1} \cdot\cdot \phi_h}{x_2 \,.\,.\, x_j\,,\; x_1\,,\; x_{j+2} \cdot\cdot x_{1+h}}\right\}}{det\, J\left\{\dfrac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\}} \quad \text{con } j = 1, 2, \ldots, h \qquad (5)}$$

Como caso particular de lo expuesto en cada uno de los dos subepígrafes anteriores, tenemos que:

3.1.3. Caso particular en que k = h = 1.

Este caso se deduce como caso particular de los anteriores, sin más que considerar que $\vec{x_1}$ y $\vec{x_2}$ tienen sólo una componente que será respectivamente x_1 y x_2, con lo que la única condición que relaciona a estas variables, definirá a x_2 como única función de la única variable independiente x_1, particularizando (4), haciendo k = 1 obtenemos,

$$\boxed{\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}}}$$

y haciendo en (5) h= 1, quedará también,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{det\, J\left\{\dfrac{\phi}{x_1}\right\}}{det\, J\left\{\dfrac{\phi}{x_2}\right\}} = - \frac{det\left\{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}\right\}}{det\left\{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}\right\}} = - \frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}}$$

coincidiendo con el anterior.

Hasta aquí hemos obtenido con toda generalidad, las derivadas parciales de las variables incluidas en el vector $\vec{x_2}$, definidas implícitamente como funciones de las variables independientes contenidas en $\vec{x_1}$, definición efectuada mediante el sistema de ecuaciones dado por la función vectorial $\vec{\phi}$ de dimensión "h", sin necesidad de llegar a tener que excitar la relación funcional mediante la función vectorial $\vec{g}$, tal que $\vec{x_2} = \vec{g}(\vec{x_1})$.

3.2. *Obtención de las derivadas parciales segundas de las variables de $\vec{x_2}$ consideradas como funciones de las variables independientes contenidas en $\vec{x_1}$*

En este epígrafe consideraremos el problema de la obtención de las derivadas parciales segundas tales como,

$$\frac{\partial^2 x_{k+j}}{\partial x_i \partial x_{i'}} \quad \text{con } j = 1, 2, \ldots, h \ , \ i = 1, 2, \ldots, k \ \text{ e } \ i' = 1, 2, \ldots, k$$

por lo que el número total de dichas derivadas segundas a calcular será de $h.k^2$. Para sintetizar el cálculo de dichas derivadas, las agruparemos siguiendo el criterio de igualdad de la función x_{k+j}, con lo que para cada $j = 1, 2 \ldots h$, tendremos que calcular k^2 derivadas parciales segundas respecto a las variables independientes x_i con $i = 1, 2, \ldots, k$, estas derivadas son las que definen las correspondientes matrices hessianas, cuadradas y de orden (k x k), tales que simbolizándolas por H_{g_j} con $j = 1, 2, \ldots h$, estarán formadas como sigue,

$$H_{g_j} = \left[\frac{\partial^2 x_{k+j}}{\partial x_i \partial x_{i'}} \right]_{(k \times k)} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, k \\ i' = 1, 2, \ldots, k \end{array}$$

donde con g_j hemos considerado la característica funcional dada implícitamente por el sistema de condiciones $\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{0}$ y que definiría a x_{k+j} como función de las variables independientes contenidas en $\vec{x}_1$.

Si conociésemos la expresión funcional de g, función vectorial de dimensión "h", el problema sería trivial, pues el cálculo de cada H_{g_j} con $j = 1, 2, \ldots, h$, se obtendría por simple derivación de la componente j-ésima de $\vec{g}$, o sea mediante la derivación parcial de la función $x_{k+j} = g_j(\vec{x}_1)$.

Nosotros obtendremos aquí derivadas, sin necesidad de explicitar la función $\vec{x}_2$ definida como tal mediante el sistema de condiciones, esto es, utilizando las derivadas parciales segundas de las condiciones $\vec{\phi}$ respecto al vector $\vec{x}$ de la totalidad de variables. También aquí, para cada $j = 1, 2, \ldots, h$, agruparemos las derivadas parciales segundas de la condición ϕ_j en la correspondiente matriz hessiana H_{ϕ_j}, cuadrada y de orden ((k+h) x (k+h)), siendo:

$$H_{\phi_j} = \left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \partial x_{i'}} \right]_{((k+h) \times (k+h))} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+h \\ i' = 1 \ \ldots, k, k+1, \ldots, k+h \end{array}$$

para llevar a cabo nuestro propósito, partiremos de la expresión dada en (1), como derivada de la condición ϕ_j con j = 1, 2, . . ., h, respecto x_i con i = 1, 2, . . . , k, que resultó ser,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_i} + \cdots +$$

$$+ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+h}} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} = 0$$

en la que quedan simbolizadas h. k ecuaciones, que derivaremos ahora respecto a i' con i' = 1, 2, . . . , k, obteniendo, h. k^2 ecuaciones, tantas como incógnitas tenemos en las derivadas parciales segundas,

$$\frac{\partial^2 x_{k+j}}{\partial x_i \, \partial x_{i'}} \quad \text{con } j = 1, 2, \ldots, h, \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad i' = 1, 2, \ldots, k$$

de las que podremos obtener éstas, así derivando la citada ecuación (1) nuevamente, pero ahora respecto a i', obtenemos,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \right\} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_i} \right\} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+h}} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{i'}} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{k+1}} \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{k+l'}} \cdot \frac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} + \cdots + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \partial x_{k+h}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_{i'}} \Bigg\} + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \right\} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial^2 x_{k+1}}{\partial x_i \partial x_{i'}} +$$

$$\cdots + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+h}} \right\} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+h}} \cdot \frac{\partial^2 x_{k+h}}{\partial x_i \partial x_{i'}} =$$

$$= \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{i'}} + \sum_{l'=1}^{h} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{k+l'}} \cdot \frac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} + \Bigg\{ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_{k+1} \, \partial x_{i'}} +$$

$$+ \sum_{l'=1}^{h} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_{k+1} \, \partial x_{k+l'}} \cdot \frac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} \Bigg\} \cdot$$

$$\frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} + \cdots + \Bigg\{ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_{k+h} \, \partial x_{i'}} + \sum_{l'=1}^{h} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_{k+h} \, \partial x_{k+l'}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} \Bigg\} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} + \Bigg\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial^2 x_{k+1}}{\partial x_i \partial x_{i'}} + \cdots + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+h}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^2 x_{k+h}}{\partial x_i \, \partial x_{i'}} \Bigg\} = \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{i'}} + \sum_{l'=1}^{h} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_i \, \partial x_{k+l'}} \cdot \frac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_{k+l}\, \partial x_{i'}} \cdot \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{h} \sum_{l'=1}^{h} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_{k+l}\, \partial x_{k+l'}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} + \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot \frac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_i\, \partial x_{i'}} =$$

$$= \left\{ 0 \ldots 0, \underset{i}{\overset{1}{\uparrow}}, 0 \ldots 0 \,\vdots\, \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \right\} . H_{\phi j} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \leftarrow i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_{i'}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_{k+l'}}{\partial x_{i'}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_{i'}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot \frac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_i\, \partial x_{i'}} = 0$$

Resumiendo para un j dado, los resultados anteriores para i = = 1, 2, . . . k e i' = 1, 2, . . . , k, en una matriz cuadrada de orden (k x k), obtenemos que,

$$\vec{0} = \left[I_k \vdots \begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+l}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+l}}{\partial x_i} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+l}}{\partial x_k} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_k} \end{array} \right] \cdot H_{\phi j} \left[\begin{array}{ccc} & I_k & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1} \cdot & \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_{i'}} \cdot & \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{k+l}}{\partial x_1} \cdot & \dfrac{\partial x_{k+l}}{\partial x_{i'}} \cdot & \dfrac{\partial x_{k+l}}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_1} \cdot & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_{i'}} \cdot & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_k} \end{array} \right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_1\, \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_1\, \partial x_k} \\ & \ddots \quad \dfrac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_i\, \partial x_{i'}} \quad \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_k\, \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 x_{k+l}}{\partial x_k\, \partial x_k} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[I_k \;\vdots\; J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\}' \right] \cdot H_{\phi j} \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot H_{g_l}$$

luego haciendo j = 1, 2, . . ., h, obtenemos un sistema de "h" ecuaciones matriciales con las matrices hessianas H_{g_l} con $l = 1, \ldots, h$, como incógnitas, sistema que podemos sintetizar, escribiendo,

$$\sum_{l=1}^{h} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot H_{g_l} = B_j \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, h$$

$$\text{siendo } B_j = -\left[I_k \;\vdots\; J\left\{\frac{x_2}{x_1}\right\}' \right] \cdot H_{\phi j} \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix} \text{para } j = 1, 2, \ldots, h$$

matrices de orden (k x k), las ecuaciones vectoriales podrían escribirse como,

$$\sum_{l=1}^{h} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_{k+l}} \cdot I_k \cdot H_{g_l} = B_j$$

$$\text{para } j = 1, 2, \ldots, h$$

que sintéticamente podemos escribir poniendo:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+1}} \cdot I_k & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+h}} \cdot I_k \\
& \ddots \quad \frac{\partial\phi_{l'}}{\partial x_{k+l}} \cdot I_k \quad \ddots & \\
\frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+1}} \cdot I_k & \cdots & \frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+h}} \cdot I_k
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} H_{g1} \\ \\ H_{gl} \\ \\ H_{gh} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} B_1 \\ \\ B_{l'} \\ \\ B_h \end{bmatrix}
$$

e introduciendo el operador, $\otimes$ producto Kronecker de matrices (ver apéndice II para su definición y propiedades), queda:

$$
\left[
\begin{bmatrix}
\frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+h}} \\
& \ddots \quad \frac{\partial\phi_{l'}}{\partial x_{k+l}} \quad \ddots & \\
\frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+h}}
\end{bmatrix}
\otimes I_k
\right]
\cdot
\begin{bmatrix} H_{g1} \\ \\ H_{gl} \\ \\ H_{gh} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} B_1 \\ \\ B_{l'} \\ \\ B_h \end{bmatrix}
$$

o sea,

$$\left\{ J \left\{ \frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}} \right\} \otimes I_k \right\} . \begin{bmatrix} H_{g1} \\ \vdots \\ H_{gl} \\ \vdots \\ H_{gh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_l , \\ \vdots \\ B_h \end{bmatrix} \tag{6}$$

con lo que,

$$\begin{bmatrix} H_{g1} \\ \vdots \\ H_{gl} \\ \vdots \\ H_{gh} \end{bmatrix} = \left\{ J \left\{ \frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}} \right\} \otimes I_k \right\}^{-1} . \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{l'} \\ \vdots \\ B_h \end{bmatrix} = \left\{ J \left\{ \frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}} \right\}^{-1} \otimes I_k \right\} . \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_l , \\ \vdots \\ B_h \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ [\alpha_{l\,l'}] \otimes I_k \right\} . \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{l'} \\ \vdots \\ B_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l'=1}^{h} \alpha_{1l'} . B_{l'} \\ \sum_{l'=1}^{h} \alpha_{ll'} . B_{l'} \\ \sum_{l'=1}^{h} \alpha_{hl'} . B_{l'} \end{bmatrix}$$

donde hemos llamado $\alpha_{1ll'}$ con l = 1, 2, . . ., h y l' = 1, 2, . . ., h, a los elementos de la matriz jacobiana inversa $J \left\{ \frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}} \right\}^{-1}$, y sustituyendo ahora, $B_{l'}$, con l' = 1, 2, . . ., h, por su valor, tenemos que en general podemos escribir,

$$H_{gl} = \sum_{l'=1}^{h} \alpha_{l'} . B_{l'} =$$

$$= -\sum_{l'=1}^{h} \alpha_{l\,l'} \cdot \left[I_k \ \vdots \ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \right]' \cdot H_{\phi_{l'}} \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix} =$$

$$= - \left[I_k \ \vdots \ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \right]' \cdot \left\{ \sum_{l'=1}^{h} \alpha_{ll'} \cdot H_{\phi_{l'}} \right\} \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix}$$

cambiando de subíndices nos quedará finalmente,

$$\boxed{\begin{gathered} H_{g_j} = - \left[I_k \ \vdots \ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \right]' \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{h} \alpha_{jl} \cdot H_{\phi_l} \right\} \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix} \\ \text{con } j = 1, 2, \ldots, h \\ \text{siendo } [\alpha_{jl}]_{(h \times h)} = J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\}^{-1} \end{gathered}} \qquad (7)$$

Esta expresión nos dá las matrices hessianas H_{g_j} con $j = 1, 2, \ldots, h$ de las funciones $\vec{x}_2$ sin necesidad de explicitar la característica funcional $\vec{g}$, a través de las matrices hessianas H_{ϕ_j} de las condiciones, y de las matrices jacobianas calculadas en el apartado anterior.

3.2.1. Caso particular en que $h = 1$ con $k > 1$

Este caso se presenta cuando sólo existe una ecuación de condición, que define implícitamente a x_{k+1} como función de las variables independientes contenidas en el vector $\vec{x}_1$, (7) nos dá,

$$H_g = \left[\frac{\partial^2 x_{k+1}}{\partial x_i\, \partial x_{i'}}\right]_{(k \times k)} =$$

$$= -\left[I_k \;\vdots\; J\left\{\frac{x_{k+1}}{\vec{x}_1}\right\}\right]' \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot H_g \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\dfrac{x_{k+1}}{\vec{x}_1}\right\}\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \left[I_k \;\vdots\; J\left\{\frac{x_{k+1}}{\vec{x}_1}\right\}\right]' \cdot H_\phi \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\dfrac{x_{k+1}}{\vec{x}_1}\right\}\end{bmatrix}$$

3.2.2.– Caso particular en que $k = 1$ con $h > 1$

En este caso el sistema de "h" condiciones definirán implícitamente a las componentes del vector $\vec{x}_2$ como funciones de la única variable independiente x_1, y entonces para $j = 1, 2, \ldots, h$, de la expresión (7) se obtiene,

$$H_{g_j} = \left[\frac{d^2 x_{1+j}}{dx_1^2}\right]_{(1 \times 1)} =$$

$$= - \left[1 \ \vdots \ J \left\{ \frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}} \right\}' \right] \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{h} \alpha_{jl} \cdot H_{\phi_l} \right\} \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \cdots\cdots \\ J \left\{ \frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}} \right\} \end{array} \right]$$

3.2.3.– Caso particular en que $k = h = 1$.

Este caso puede deducirse de los dos anteriores cuando tanto $\vec{x_1}$ como $\vec{x_2}$, son unidimensionales, obteniendo:

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = - \left[1 \quad \frac{dx_2}{dx_1} \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dx_2}{dx_1} \end{bmatrix} =$$

$$= - \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + 2 \cdot \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \left\{ \frac{dx_2}{dx_1} \right\}^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right\}$$

3.3. *Caso particular en que el sistema d condiciones $\vec{\phi}$ sea lineal*

En este caso las matrices hessianas $H_{\phi_j} = \vec{0}$ para $j = 1, 2, \ldots, h$, con lo que $B_j = \vec{0}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, h$, y por todo ello obtendremos que $H_{g_j} = \vec{0}$, siendo nulas todas las derivadas segundas de las componentes de $\vec{x_2}$ respecto a las de $\vec{x_1}$.

4. ANALISIS DE LA FUNCION Y DEFINIDA POR COMPOSICION COMO FUNCION DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES CONTENIDAS EN $\vec{x}_1$ EXCLUSIVAMENTE

En este epígrafe, una vez estudiado el comportamiento del sistema de condiciones, consideraremos la función $y = F(\vec{x}_1)$ y su variación dada por el vector gradiente $\frac{\partial y}{\partial \vec{x}_1}$ de sus derivadas parciales primeras y por la matriz hessiana H_F de sus derivadas segundas, respecto a las componentes del vector $\vec{x}_1$.

4.1. *Obtención de las derivadas parciales de* y *respecto a las únicas variables independientes contenidas en* $\vec{x}_1$.

Para obtener las derivadas parciales de y respecto a x_i con $i = 1, 2, \ldots, k$, consideremos la función $y = F(\vec{x}_1)$ como compuesta de la $y = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ y de las condiciones dadas por $\vec{\phi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, así tendremos que:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot \frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial f}{\partial x_{k+h}} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \tag{8}$$

expresión válida para $i = 1, 2, \ldots, k$, y que podemos escribir matricialmente según el siguiente esquema,

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \left\{ 0 \ldots 0, \underset{i}{\overset{1}{\uparrow}}, 0 \ldots 0 \;\vdots\; \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \;\ldots\; \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+h}} \end{bmatrix}$$

con $i = 1, 2, \ldots, k$

y sintéticamente las "k" derivadas quedarán expresadas de la forma,

$$\frac{\partial y}{\partial \overrightarrow{x_1}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} & \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_1} \cdots & \dfrac{\partial x_{k+j}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_1} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ I_k & \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} & \dfrac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} & & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \dfrac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} \cdots & \dfrac{\partial x_{k+j}}{\partial x_k} & \cdots & \dfrac{\partial x_{k+h}}{\partial x_k} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+h}} \end{bmatrix} =$$

$$= J\left\{\frac{\vec{x}}{\vec{x}_1}\right\}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \left[I_k \; \vdots \; J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\}' \right] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} + J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_2}$$

y sustituyendo $J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\}$ por su valor obtenido en función de las derivadas parciales del conjunto de condiciones $\vec{\phi}$, dado en (3) del epígrafe 3.1., tendremos que, podemos expresar las derivadas parciales de "y" respecto a las componentes de x_1, a través de las parciales de la función inicial f sin restricciones y a través de las derivadas de las restriciones $\vec{\phi}$, quedando

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} - \left\{ J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\}^{-1} \cdot J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_1}\right\} \right\}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_2}$$

y trasponiendo queda,

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} - J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_1}\right\}' \cdot \left\{ J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x}_2}\right\}^{-1} \right\}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_2}}$$

de esta expresión general surgen los siguientes casos particulares,

4.1.1.– Caso particular en que $k = 1$ con $h > 1$

En este caso, "y" será función exclusivamente de la única variable independiente x_1, quedando

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - J\left\{\frac{\vec{\phi}}{x_1}\right\}' \cdot \left\{J\left\{\frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}}\right\}^{-1}\right\}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x_2}}$$

que desarrollando explícitamente sus elementos nos dá,

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dy}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\phi_j}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial\phi_h}{\partial x_1}\right] \cdot \\ \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_j}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+1}} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+l}} & \cdots & \frac{\partial\phi_j}{\partial x_{k+l}} & \cdots & \frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+l}} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{k+h}} & \cdots & \frac{\partial\phi_j}{\partial x_{k+h}} & \cdots & \frac{\partial\phi_h}{\partial x_{k+h}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_{1+l}} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_{1+h}} \end{bmatrix}\end{gathered}}$$

4.1.2.– Caso particular en que $h = 1$ con $k > 1$

En este caso, "y" será función de las "k" variables componentes de $\vec{x_1}$, ya que x_{k+1} será función de las variables anteriores dada implícitamente por la única condición existente, entonces tendremos:

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} - J\left\{\frac{\phi}{\vec{x}_1}\right\}' \cdot \left\{J\left\{\frac{\phi}{x_{k+1}}\right\}^{-1}\right\}' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} - \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_1} \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_1} - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_1}$$

con lo que tendremos como expresión de cada una de las derivadas, los elementos del vector gradiente,

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \text{con } i = 1, 2, \ldots, k}$$

4.1.3.– Caso particular en que $k = h = 1$.

De los casos anteriores se obtiene directamente,

$$\boxed{\frac{dy}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_1}}$$

4.2. *Obtención de las derivadas parciales segundas de* y *respecto a las componentes del vector* $\vec{x}_1$ *formado por las "k" variables independientes.*

Para obtener estas derivadas, partiremos de la expresión (8) correspondiente a $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$, derivando ahora respecto a $x_{i'}$, tendremos:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\, \partial x_{i'}} = \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \cdot \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_i} \right\} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_{k+h}} \cdot \frac{\partial x_{k+h}}{\partial x_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot \frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} \right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_{i'}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial_2^2 f}{\partial x_i \partial x_{k+l}} \cdot \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_{i'}} + \sum_{j=1}^{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \right\} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i'}} \left\{ \frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} \right\} \right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_{i'}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_{k+l}} \cdot \frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_{i'}} + \sum_{j=1}^{h} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k+j}\, \partial x_{i'}} + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{k+j}\, \partial x_{k+l}} \cdot \left.\frac{\partial x_{k+l}}{\partial x_{i'}} \right\} \cdot \frac{\partial x_{k+j}}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot \frac{\partial^2 x_{k+j}}{\partial x_i\, \partial x_{i'}}$$

con lo que, agrupando las parciales segundas, para $i = 1, 2, \ldots, k$ e $i' = 1, 2, \ldots, k$, en la matriz hessiana correspondientes, queda:

$$H_F = \left[I_k \vdots J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \right]' \cdot H_f \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdot \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot H_{g_j} =$$

$$= \left[I_k \vdots J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \right]' \cdot H_f \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdot \\ J\left\{\frac{\vec{x}_2}{\vec{x}_1}\right\} \end{bmatrix} +$$

$$+ \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{k+h}} \right] \otimes I_h \right\} \cdot \begin{bmatrix} H_{g_1} \\ H_{g_j} \\ H_{g_h} \end{bmatrix}$$

y sustituyendo el vector de hessianos H_{g_j} calculados en el epígrafe 3.2., tendremos que,

$$H_F = \left[I_k \ \vdots\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \right]' \cdot H_f \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \end{array} \right] + \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot (-1) \ .$$

$$\cdot \left[I_k \ \vdots\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \right]' \cdot \left\{ \sum_{l=1}^{h} \alpha_{jl} \cdot H_{\phi_l} \right\} \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \end{array} \right] =$$

$$= \left[I_k \ \vdots\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \right]' \cdot \left\{ H_f - \sum_{j=1}^{h} \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot \alpha_{jl} \cdot H_{\phi_l} \right\} \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \end{array} \right] =$$

$$\left[I_k \ \vdots\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \right]' \cdot \left\{ H_f - \sum_{l=1}^{h} \left\{ \sum_{j=1}^{h} \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}} \cdot \alpha_{jl} \right\} \cdot H_{\phi_l} \right\} \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \end{array} \right]$$

con lo que obtenemos la matriz hessiana H_F como,

$$
\boxed{
H_F = \left[I_k \;\vdots\; J\left\{\frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \right]' \cdot
\left\{ H_f - \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{h} det\, J\left\{\frac{\phi_1 \cdots \phi_{l-1}, f, \phi_{l+1} \cdots \phi_h}{\overrightarrow{x_2}}\right\} \cdot H_{\phi_l}}{det\, J\left\{\dfrac{\overrightarrow{\phi}}{\overrightarrow{x_2}}\right\}} \right\} \cdot
\left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\dfrac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \end{array} \right]
}
\tag{9}
$$

4.2.1.– Caso particular en que $h = 1$ con $k > 1$

Este caso se obtiene del anterior, sin más que considerar que sólo existe una única condición que define a la variable x_{k+1} como función del conjunto de variables independientes consideradas como componentes de $\overrightarrow{x_1}$, obteniéndose, a partir de (9),

$$
H_F = \left[I_k \;\vdots\; J\left\{\frac{x_{k+1}}{x_1}\right\} \right]' \cdot
\left\{ H_f - \frac{det\, J\left\{\dfrac{\partial f}{x_{k+1}}\right\}}{det\, J\left\{\dfrac{\phi}{x_{k+1}}\right\}} \cdot H_{\phi} \right\} \cdot
\left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\dfrac{x_{k+1}}{\overrightarrow{x_1}}\right\} \end{array} \right]
$$

y en forma desarrollada nos quedará,

$$H_F = \left[I_k \;\vdots\; \frac{-1}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_k} \end{bmatrix} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ H_f - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot H_\phi \right\} \cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{-1}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_{k+1}}} \cdot \left\{ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} \;\cdots\; \dfrac{\partial \phi}{\partial x_k} \right\} \end{array} \right]$$

4.2.2.– Caso particular en que k = 1 con h > 1.

En este caso, al ser el número de condiciones inferior en una unidad al de variables, la función "y" dependerá exclusivamente de la variable x_1.

Y de (9), obtendremos en particular,

$$H_F = \frac{d^2 y}{dx_1^2} = \left[1 \;\vdots\; J \left\{ \frac{\overrightarrow{x_2}}{\overrightarrow{x_1}} \right\}' \right] .$$

$$\cdot \left[H_f - \frac{\sum_{l=1}^{h} \det J \left\{ \frac{\phi_1 \cdots \phi_{l-1}, f, \phi_{l+1} \cdots \phi_h}{\overrightarrow{x_2}} \right\} . H_{\phi_l}}{\det J \left\{ \frac{\overrightarrow{\phi}}{\overrightarrow{x_2}} \right\}} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ \cdots\cdots \\ J \left\{ \frac{\overrightarrow{x_2}}{x_1} \right\} \end{array} \right]$$

expresión en la que sustituyendo según lo visto en el subepígrafe 3.1.2.,

$$J \left\{ \frac{\overrightarrow{x_2}}{x_1} \right\} = -J \left\{ \frac{\overrightarrow{\phi}}{\overrightarrow{x_2}} \right\}^{-1} . \; J \left\{ \frac{\overrightarrow{\phi}}{x_1} \right\}$$

se obtiene la segunda derivada de la función "y" de una sola variable independencia x_1, sin necesidad de explicitar la característica funcional F que daría $y = F(x_1)$.

4.2.3.– Caso particular en que k = h = 1.

Este caso se obtendrá como caso particular de los dos anteriores, considerando que la función inicial, lo es de dos variables x_1 y x_2, pasando a serlo únicamente de x_1, a través de una relación que liga los valores de x_1 y x_2.

La expresión particular de la derivada segunda de "y" con respecto a su única variable x_1, será:

$$H_F = \frac{d^2 y}{dx_1} = \left[1, - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} \right] \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}} \end{bmatrix}$$

4.3. *Caso particular en que la función* $y = f(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ o el sistema de condiciones $\vec{\phi}(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \vec{0}$ sea lineal.

En este caso, las expresiones dadas para la matriz hessiana H_F quedan simplificadas de forma significativa, siendo $y = F(\vec{x_1})$ la función compuesta resultante de f al considerar el conjunto de condiciones $\vec{\phi}$, obtenemos los siguientes casos:

4.3.1.– La función es lineal no siéndolo $\vec{\phi}$.

Si f es lineal,

$$y = f(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = c_o + \sum_{r=1}^{k+h} c_r \, . \, x_4 = c_o + c' \, . \left\{ \begin{matrix} \vec{x_1} \\ \cdots \\ \vec{x_2} \end{matrix} \right\}$$

tendremos entonces que H_f matriz cuadarada de orden ((k+h) x (k+h)) será la matriz nula, y de aquí obtenemos, a partir de (9)

$$H_F = -\left[I_k \vdots J\left\{\frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}}\right\}' \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\sum_{l=1}^{h} det\, J \left\{ \frac{\phi_1 \cdots \phi_{l-1}, f, \phi_{l+1} \cdots \phi_h}{\vec{x_2}} \right\} \cdot H\phi_l}{det\, J \left\{ \frac{\vec{\phi}}{\vec{x_2}} \right\}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c} I_k \\ \cdots\cdots \\ J\left\{\frac{\vec{x_2}}{\vec{x_1}}\right\} \end{array} \right]$$

4.3.2.– Las condiciones son todas lineales y la función es no lineal

Si las condiciones son lineales, tendremos que $\vec{\phi}(\vec{x_1}, \vec{x_2}) = \vec{0}$ podrá escribirse como

$$\vec{c} + A \cdot \left[\begin{array}{c} \vec{x_1} \\ \cdots \\ \vec{x_2} \end{array} \right] = \vec{0}$$

donce $\vec{c}$ y $\vec{0}$ son vectores de dimensión "h" y A es una matriz de orden (h x (k+h)).

Si particionamos $A = [\, A_1 \,\vdots\, A_1 \,]$ con A_1 de orden (h x k) y A_2 de orden (h x h), tendremos que

$$J \left\{ \begin{array}{c} \vec{\phi} \\ \hline \vec{x_2} \end{array} \right\} = A_2 \qquad \text{y} \qquad det\, A_2 \neq 0$$

para que el sistema defina a $\vec{x_2}$ como función de $\vec{x_1}$, dando

$$\vec{c} + [A_1 \,\vdots\, A_2] \cdot \begin{bmatrix} \vec{x_1} \\ \cdots \\ \vec{x_2} \end{bmatrix} = \vec{c} + A_1 \,.\, \vec{x_1} + A_2 \,.\, \vec{x_2} = \vec{0}$$

de donde se obtiene explíctiamente que

$$\vec{x_2} = -A_2^{-1} \,.\, (\vec{c} + A_1 \,.\, \vec{x_1})$$

función vectorial lineal en $\vec{x_1}$ siendo,

$$J \left\{ \begin{array}{c} \vec{x_2} \\ \hline \vec{x_1} \end{array} \right\} = -A_2^{-1} \,.\, A_1$$

caso especial de la expresión obtenida en (3).

Las matrices hessianas H_{g_l} con $l = 1, 2, \ldots, h$, serán evidentemente, todas nulas, quedando entonces la expresión (9) simplificada en los siguientes términos,

$$H_F = \left[I_k \,\vdots\, -(A_2^{-1} \,.\, A_1)' \right] \,.\, H_f \,.\, \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots\cdots \\ -A_2^{-1} \,.\, A_1 \end{bmatrix}$$

y particionando adecuadamente la matriz hessiana H_f de la función inicial, suponiendo que ésta es simétrica por ser iguales todas las derivadas cruzadas, queda,

$$H_f = \begin{bmatrix} H_{11} & \vdots & H_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{21} & \vdots & H_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{con } H_{21} = H_{12}'$$

y operando nos dá

$$H_F = \begin{bmatrix} I_k & \vdots & -(A_2^{-1} \, . \, A_1)' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} H_{11} & \vdots & H_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{21} & \vdots & H_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_k \\ \cdots \\ -A_2^{-1} \, . \, A_1 \end{bmatrix} =$$

$$= H_{11} - (A_2^{-1} \, . \, A_1)' \, . \, H_{21} - H_{12} \, . \, (A_2^{-1} \, . \, A_1) +$$

$$+ (A_2^{-1} \, . \, A_1)' \, . \, H_{22} \, . \, (A_2^{-1} \, . \, A_1) \qquad (10)$$

5.– APLICACION

La principal aplicación del análisis efectuado, en lo que hace referencia a la variación de una función cuyas variables están relacionadas mediante un sistema de ecuaciones, es la que consiste en la obtención, por un camino alternativo al tradicional basado en el estudio de la matriz hessiana orlada, de una condición suficiente de segundo orden para la determinación de los extremos relativos de una función condicionada mediante un sistema de ecuaciones que relacionan las, en principio, variables independientes de las que depende dicha función.

Este camino se basa en el estudio de la forma cuadrática condicionada, desarrollado éste de forma que en lugar de considerar la matriz hessiana orlada de dimensión "$n + h = k + 2 \, . \, h$", podemos trabajar con la matriz hessiana de la función compuesta, H_F de dimensión mucho menor "k", con lo que la dimensionalidad del problema se reduce sustancialmente, al disminuir el orden en "$2.h$" unidades.

Como A_2 es regular ya que *det* $A_2 = -2 \neq 0$, tenemos que x_3 y x_4 quedarán definidas como funciones de x_1 y x_2, con lo que,

$$A_2^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y por tanto tendremos que

$$A_2^{-1} \cdot A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y como

$$H_f = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & x_3 \mathrm{x} x_4 & x_2 \cdot x_4 & x_2 \cdot x_3 \\ x_3 \cdot x_4 & 0 & x_1 \cdot x_4 & x_1 \cdot x_3 \\ \hdashline x_2 \cdot x_4 & x_1 \cdot x_4 & 0 & x_1 \cdot x_2 \\ x_2 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_2 & 0 \end{array}\right]$$

obtendremos aplicando (10),

$$H_F = H_{11} - (A_2^{-1} \cdot A_1)' \cdot H_{21} - H_{12} \cdot (A_2^{-1} \cdot A_1) +$$

$$+ (A_2^{-1} \cdot A_1)' \cdot H_{22} \cdot (A_2^{-1} \cdot A_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & x_3 \cdot x_4 \\ x_3 \cdot x_4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \cdot x_4 & x_1 \cdot x_4 \\ x_2 \cdot x_3 & x_1 \cdot x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \cdot x_4 & x_2 \cdot x_3 \\ x_1 \cdot x_4 & x_1 \cdot x_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & x_1 \cdot x_2 \\ x_1 \cdot x_2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \cdot x_2 \cdot x_4 & x_1 . x_2 + x_3 . x_4 - x_1 . x_4 - x_2 . x_3 \\ x_1 . x_2 + x_3 . x_4 - x_1 . x_4 - x_2 . x_3 & -2 . x_1 . x_3 \end{bmatrix}$$

Matriz hessiana que nos permitirá analizar la condición de suficiencia para los puntos críticos de la función de Lagrange.

Obtengamos ahora, dichos puntos críticos, para ello plantearemos la función de Lagrange, que nos dá

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) =$$

$$= x_1 . x_2 . x_3 . x_4 + \lambda_1 . (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 20) +$$

$$+ \lambda_2 . (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 10)$$

y derivando respecto a las variables, por la condición necesaria de punto crítico, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, igualando a cero dichas derivadas,

$$\begin{cases} x_2 . x_3 . x_4 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 . x_3 . x_4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_1 . x_2 . x_4 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 . x_2 . x_3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$$

que resuelto en las variables $\vec{x}$, obtenemos como posibles extremos los puntos críticos,

$P_1 \equiv (0, 0, 15, 5)$, $P_2 \equiv (0, 5, 15, 0)$, $P_3 \equiv (15, 0, 0, 5)$, $P_4 \equiv (15, 5, 0, 0)$
y $P_5 \equiv (7'5, 2'5, 7'5, 2'5)$

y en estos puntos obtenemos:

$$H_F(P_1) = H_F(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & 75 \\ 75 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_F(P_2) = H_F(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & -75 \\ -75 & 0 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$H_F(P_5) = \begin{bmatrix} -12'5 & 0 \\ 0 & -12'5 \end{bmatrix}$$

De aquí se ve fácilmente que $H_F(P_1)$, $H_F(P_2)$, $H_F(P_3)$ y $H_F(P_4)$ resultan ser indefinidas, con lo que en dichos puntos la función posee sendos "puntos de silla" y $H_F(P_5)$ es definida negativa con lo que en el punto ($x_1 = 7'5$, $x_2 = 2'5$, $x_3 = 7'5$, $x_4 = 2'5$) existe un máximo para la función f condicionado a las dos ecuaciones dadas.

Como puede observarse, la discusión de la condición de suficiencia se ha simplificado mucho pues la dimensión de la matriz hessiana de F es $n - h = 4 - 2 = 2$.

Si siguiésemos el método tradicional de la matriz hessina orlada, hubiésemos tenido que obtener éste como

$$H^* = \left[\begin{array}{c:c} H_L & J\left\{\dfrac{\vec{\phi}}{x}\right\}' \\ \hdashline J\left\{\dfrac{\phi}{x}\right\} & 0 \end{array}\right]$$

donde $H_L = \left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_j}\right]_{(n \times n)}$, quedando aquí

$$
H^* = \left| \begin{array}{cccc|cc}
0 & x_3 \,.\, x_4 & x_2 \,.\, x_4 & x_2 \,.\, x_3 & 1 & 1 \\
x_3 \,.\, x_4 & 0 & x_1 \,.\, x_4 & x_1 \,.\, x_3 & 1 & -1 \\
x_2 \,.\, x_4 & x_1 \,.\, x_4 & 0 & x_1 \,.\, x_2 & 1 & 1 \\
x_2 \,.\, x_3 & x_1 \,.\, x_3 & x_1 \,.\, x_2 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array} \right|
$$

y para discutir el caso del punto crítico P_5 deberíamos considerar la matriz hessiana orlada,

$$
H^*(P_5) = \left| \begin{array}{cccc|cc}
0 & 18{,}75 & 6{,}25 & 18{,}75 & 1 & 1 \\
18{,}75 & 0 & 18{,}75 & 46{,}25 & 1 & -1 \\
6{,}25 & 18{,}75 & 0 & 18{,}75 & 1 & 1 \\
18{,}75 & 46{,}25 & 18{,}75 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array} \right|
$$

de dimensión (6 x 6) y obtener el valor de los menores

$$
\Delta_1 = \left| \begin{array}{cccc}
0 & 18'75 & 1 & 1 \\
18{,}75 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0
\end{array} \right| = 4 > 0
$$

$$
\Delta_2 = \left| \begin{array}{ccccc}
0 & 18{,}75 & 6{,}25 & 1 & 1 \\
18{,}75 & 0 & 18{,}75 & 1 & -1 \\
6{,}25 & 18{,}75 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array} \right| = -50 < 0
$$

$$\Delta_3 = \ det\ H^*(P_5) = \ 4.625 > \ 0$$

que al alternar el signo nos indica, coincidiendo con lo obtenido antes, que en el punto P_5 existe un máximo condicionado.

Como puede advertirse, la dimensionalidad del problema ha crecido mucho, al ser aquí $n + h = 4 + 2 = 6$, y el cálculo de los menores hecho aquí, es mucho más complejo que el análisis realizado antes, con este sencillo ejemplo, no hemos querido mostrar otra cosa, que la gran reducción que en la dimensionalidad aporta, el método propuesto por nosotros para caracterizar la condición de suficiencia de segundo orden en los problemas de optimización condicionada por ecuaciones.

APENDICE I.– PROPIEDADES DE LA MATRIZ JACOBIANA

Dada una función vectorial, $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, siendo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de dimensión "n" y "m" respectivamente, y existiendo todas sus derivadas parciales primeras, se define la matriz jacobiana como sigue,

$$J\left\{\frac{\vec{y}}{\vec{x}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\} = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right]_{(m\times n)} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

de esta definición, pueden obtenerse las siguientes propiedades relacionadas con el álgebra de las funciones vectoriales:

I. 1.– *Matriz jacobiana de la función suma*

Dadas las funciones vectoriales $\vec{y}_1 = \vec{f}_1(\vec{x})$ e $\vec{y}_2 = \vec{f}_2(\vec{x})$, siendo $\vec{y}_1$ e $\vec{y}_2$ vectores ambos de dimensión "m", si definimos la función $\vec{z} = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2)(\vec{x})$, suma de las anteriores, tendremos que las derivadas parciales de esta función serán,

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \frac{\partial (f_{1j} + f_{2j})}{\partial x_i} = \frac{\partial f_{1j}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{2j}}{\partial x_i} \qquad \text{con} \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

con lo que podemos escribir,

$$J \left\{ \frac{\vec{f_1} + \vec{f_2}}{\vec{x}} \right\} = J \left\{ \frac{\vec{f_1}}{\vec{x}} \right\} + J \left\{ \frac{\vec{f_2}}{\vec{x}} \right\}.$$

1.2. *Matriz jacobiana del producto de una función vectorial por un escalar real*

Dada la función vectorial $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ y el número real "k" definimos la función $\vec{z} = (k \,.\, \vec{f})\,(\vec{x})$, producto de la anterior por el número real "k", tendremos que las derivadas parciales de esta función serán,

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \frac{\partial (k \,.\, f_j)}{\partial x_i} = k \,.\, \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \text{con} \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

y por tanto podremos escribir,

$$J \left\{ \frac{k \,.\, \vec{f}}{\vec{x}} \right\} = k \,.\, J \left\{ \frac{\vec{f}}{\vec{x}} \right\}$$

Hasta aquí hemos visto que, como era de esperar, ya que la matriz jacobiana está asociada a una aplicación lineal que representa la diferencial de la función $\vec{f}$, se mantiene el isomorfismo entre el espacio de funciones y el espacio de matrices jacobianas asociadas a dichas funciones.

1.3. *Matriz jacobiana asociada a la función vectorial compuesta*

Consideremos las funciones vectoriales $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ y $\vec{z} = \vec{g}(\vec{y})$ donde $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$, son vectores de dimensión n, m y h respectivamente, si puede definirse la función compuesta

$$\vec{z} = \vec{F}(\vec{x}) = (\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$$

sabemos que las derivadas parciales de esta función son,

$$\frac{\partial z_l}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

y escritas matricialmente quedan,

$$\frac{\partial z_l}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_j} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial y_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, h \end{matrix}$$

que podrán expresarse a través de la matriz jacobiana

$$J\left\{\frac{\vec{F}}{\vec{x}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{z}}{\vec{x}}\right\} = \left[\frac{\partial z_1}{\partial x_i}\right]_{(h\times m)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial y_j}\right]_{(h\times m)} \cdot \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right]_{(m\times n)} =$$

$$= J\left\{\frac{\vec{z}}{\vec{y}}\right\} \cdot J\left\{\frac{\vec{y}}{\vec{x}}\right\}$$

luego tenemos que la matriz jacobiana de la composición resulta ser el producto de las jacobianas generalizando de esta forma la regla de la cadena correspondiente a funciones reales de variable real.

$$J\left\{\frac{\vec{F}}{\vec{x}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{f} \circ \vec{g}}{\vec{x}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{g}}{\vec{y}}\right\} \cdot J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\}$$

1.4.– *Matriz jacobiana de la función vectorial identidad*

Si consideramos la función identidad de dimensión "n" y la simbolizamos por $\vec{I}_n$, tendremos que $\vec{I}_n(\vec{x}) = \vec{x}$. En este caso tan simple, las derivadas parciales serían,

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{con } i \neq j \\ 1 & \text{con } i = j \end{cases}$$

luego la matriz jacobiana será la matriz unidad de orden "n", o sea,

$$J\left\{\frac{\vec{I}_n}{\vec{x}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{x}}{\vec{x}}\right\} = I_n$$

1.5.– *Matriz jacobiana de la función inversa de una función vectorial*

Para que tenga sentido la función inversa de la función vectorial $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x}$ e $\vec{y}$ deben ser de la misma dimensión "n", siendo entonces cuadrada de dimensión (n x n), su correspondiente matriz jacobiana. Entonces, si existe la función inversa $\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$, tendremos que $\vec{f} \circ \vec{f}^{-1} = \vec{f}^{-1} \circ \vec{f} = \vec{I}_n$ y por las propiedades 3 y 4, tendremos que:

$$I_n = J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\} \cdot J\left\{\frac{\vec{f}^{-1}}{\vec{y}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{f}^{-1}}{\vec{y}}\right\} \cdot J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\}$$

luego esto nos dice que,

$$J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\} \quad \text{y} \quad J\left\{\frac{\vec{f}^{-1}}{\vec{y}}\right\}$$

son matrices inversas, por tanto podemos escribir que,

$$J\left\{\frac{\vec{x}}{\vec{y}}\right\} = J\left\{\frac{\vec{y}}{\vec{x}}\right\}^{-1}$$

1.6.– *Propiedades del determinante jacobiano*

De las propiedades de la matriz jacobiana, y en el caso de que ésta sea cuadrada de (n x n), se derivan inmediatamente de una forma muy sencilla, las siguientes propiedades para el determinante jacobiano.

1.6.1.– Determinante jacobiano de la función producto

Dada la función $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ con $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de dimensión "n", tenemos que:

$$det\,J\left\{\frac{k\,.\,\vec{f}}{\vec{x}}\right\} = det\left[k\,.\,J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\}\right] = k^n\,.\,det\,J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\}$$

1.6.2.– Determinante jacobiano de la función compuesta.

Siendo $\vec{y} = f(\vec{x})$ y $\vec{f} = g(\vec{y})$ con $\vec{x}, \vec{y}$ y $\vec{z}$ vectores de dimensión "n", entonces $\vec{z} = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{F}(\vec{x})$, tendría como determinante jacobiano.

$$det\,J\left\{\frac{\vec{z}}{\vec{x}}\right\} = det\left[J\left\{\frac{\vec{z}}{\vec{y}}\right\}.\;J\left\{\frac{\vec{y}}{\vec{x}}\right\}\right] = det\,J\left\{\frac{\vec{z}}{\vec{y}}\right\}.\;det\,J\left\{\frac{\vec{y}}{\vec{x}}\right\}$$

con lo que el determinante jacobiano de la función compuesta, se obtiene como producto de los determinantes jacobianos de las funciones que componemos.

1.6.3.– Determinante jacobiano de la función inversa

Aquí supondremos que $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ es tal que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son vectores de dimensión "n" y además que existe la función inversa, para lo cual sabemos, por el teorema de existencia de la función inversa, que deberá ser regular la matriz jacobiana, entonces,

$$det\,J\left\{\frac{\vec{f}^{-1}}{\vec{y}}\right\} = det\left[J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\}^{-1}\right] = \frac{1}{det\,J\left\{\frac{\vec{f}}{\vec{x}}\right\}}$$

que podemos escribir también poniendo,

$$det\, J \left\{ \frac{\vec{x}}{\vec{y}} \right\} = \frac{1}{det\, J \left\{ \frac{\vec{y}}{\vec{x}} \right\}}$$

con lo que obtenemos que el determinante jacobiano de la función inversa es el recíproco del determinante jacobiano de la función.

APENDICE II.– PRODUCTO KRONECKER DE MATRICES Y ALGUNAS PROPIEDADES

Dadas dos matrices, $A = \left[a_{ij}\right]_{(n x m)}$ y $B = \left[b_{k l}\right]_{(p x q)}$, se define el producto Kronecker de matrices de la forma siguiente,

$$A \otimes B = \left[a_{ij} \;.\; B \right]_{((m \,.\, p) \;x\; (n \,.\, q))}$$

resultando expresado el producto Kronecker $A \otimes B$, como una matriz particionada en n . m submatrices, cada una de ellas de dimensión (p x q).

Veamos seguidamente, las propiedades que relacionan este producto con las operaciones tradicionales del álgebra matricial.

II.1.– *Distributividad respecto a la suma*

Sean A, A_1 y A_2 matrices de orden (n x m) y B, B_1 y B_2 matrices de orden (p x q), entonces,

$$(A_1 + A_2) \otimes B = \left\{ \left[a_{ij}^{(1)} \right] + \left[a_{ij}^{(2)} \right] \right\} \otimes B = \left[a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} \right] \otimes B =$$

$$= \left[(a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} \;.\; B \right] = \left[a_{ij}^{(1)} \;.\; B + a_{ij}^{(2)} \;.\; B \right] =$$

$$= \left[a_{ij}^{(1)} \; . \; B \right] + \left[a_{ij}^{(2)} \; . \; B \right] = (A_1 \otimes B) + (A_2 \otimes B)$$

$$y \quad A \otimes (B_1 + B_2) = \left[a_{ij} \right] \otimes (B_1 + B_2) = \left[a_{ij} \; . \; (B_1 + B_2) \right] =$$

$$= \left[a_{ij} \; . \; B_1 + a_{ij} \; . \; B_2 \right] = \left[a_{ij} \; . \; B_1 \right] + \left[a_{ij} \; . \; B_2 \right] =$$

$$= (A \otimes B_1) + (A \otimes B_2).$$

II.2.– *Asociatividad y conmutatividad respecto al producto por un escalar.*

Sean A y B matrices de orden (n x m) y (p x q) respectivamente y k un número real entonces

$$(k \; . \; A) \otimes B = \left[k.a_{ij} \right] \otimes B = \left[k \; . \; a_{ij} \; . \; B \right] = k \; . \; \left[a_{ij} \; . \; B \right] =$$

$$= k \; . \; (A \otimes B)$$

$$y \qquad A \otimes (k \; . \; B) = \left[a_{ij} \right] \otimes (k.B) = \left[a_{ij} \; . \; k \; . \; B \right] = \left[k \; . \; a_{ij} \; . \; B \right] =$$

$$= k \; . \left[a_{ij} \; . \; B \right] = k \; . \; (A \otimes B).$$

II.3.– *Relación con el producto de matrices*

Sean las matrices A_1, A_2, B_1 y B_2 de dimensión (m x n), (n x r), (p x q) y (q x s) respectivamente, entonces,

$$(A_1 \otimes B_1) \; . \; (A_2 \otimes B_2) =$$

$$= \left[a_{ij}^{(1)} . B_1 \right]_{((m.p) \times (n.q))} . \left[a_{jk}^{(2)} . B_2 \right]_{((n.q) \times (r.s))} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} . B_1 . a_{jk}^{(2)} . B_2 \right]_{((m.p) \times (r.s))} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} . a_{jk}^{(2)} . B_1 . B_2 \right] = \left[\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} . a_{jk}^{(2)} \right\} . B_1 . B_2 \right] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} . a_{jk}^{(2)} \right] \otimes (B_1 . B_2) = (A_1 . A_2) \otimes (B_1 . B_2)$$

II.4.– *Relación con la inversión de matrices*

Sean A y B matrices cuadradas de orden n y m respectivamente, y consideremos que ambas son regulares, por lo que poseerán inversa, sean éstas, A^{-1} y B^{-1} respectivamente, entonces veamos que

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

para ello demostremos que el producto,

$$(A \otimes B) . (A^{-1} \otimes B^{-1})$$

da la matriz unidad $I_{m.n}$, para ello aplicaremos la propiedad anterior, haciendo

$$(A \otimes B) . (A^{-1} \otimes B^{-1}) = (A.A^{-1}) \otimes (B.B^{-1}) = I_n \otimes I_m = I_{n.m}$$

en particular, si $B = I_m$ tendremos que,

$$(A \otimes I_m)^{-1} = A^{-1} \otimes I_m$$

BIBLIOGRAFIA

BORRELL FONTELLES, José: Métodos Matemáticos para la Economía.
I – Campos y Autosistemas (Cap. 3 y 4)
II – Programación Matemática (Cap. 4)
Ed. Pirámide, Madrid 1981, 1982.

CABALLERO FERNANDEZ, R.E., GONZALEZ PAREJA, A. y TRIGUERO RUIZ, F.A.: Métodos Matemáticos para la Economía I (Cap. 6 y 9). Ed. Alhambra Universidad, Madrid 1982.

FRISCH, Ragnar: Maxima et Minima. Théorie et applications économiques (Cap. VI y XII). Ed. Dunod, París 1960.

HENDERSON, J.M. y QUANDT, R.E.: Teoría Microeconómica (Apéndice). Ed. Airel, Barcelona 1962.

INTRILIGATOR, Michael D.: Optimización Matemática y Teoría Económica (Cap. 3). Ed. Prentice Hall/Internacional, Madrid 1973.

PANIK, Michael J.: Classical Optimization: Foundations and Extensions (Cap. 10) Ed. North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1976.

SAMUELSON, Paul Anthony: Fundamentos de Análisis Económicos (Ap. A). Ed. "El Ateneo", Buenos Aires 1957.

WILLIAMSON, Richard E., CROWELL, Richard H. y TROTTER, Hale F.: Cálculo de Funciones Vectoriales (Cap. 4 y 5). Ed. Prentice Hall Internacional, Madrid, 1973.